



Diviseurs Totalement Invariants des Endomorphismes non Triviaux de l'Espace Projectif

Yanis Mabed

► To cite this version:

Yanis Mabed. Diviseurs Totalement Invariants des Endomorphismes non Triviaux de l'Espace Projectif. Géométrie algébrique [math.AG]. Université Côte d'Azur, 2021. Français. NNT: . tel-03470382v1

HAL Id: tel-03470382

<https://theses.hal.science/tel-03470382v1>

Submitted on 3 Nov 2021 (v1), last revised 8 Dec 2021 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT

DIVISEURS TOTALEMENT INVARIANTS DES ENDOMORPHISMES NON TRIVIAUX DE L'ESPACE PROJECTIF

Yanis MABED

Laboratoire de Mathématiques J.A. Dieudonné

Présentée en vue de l'obtention
du grade de docteur en
Mathématiques

de l'Université Côte d'Azur

Dirigée par : Andreas Höring et
Ekaterina Amerik

Soutenue le : 1^{er} Juillet 2021

Devant le jury, composé de :

Ekaterina Amerik	PR	Directrice	Université Paris-Saclay
Amaël Broustet	MCF	Rapporteur	Université de Lille 1
Sorin Dumitrescu	PR	Examineur	Université Côte d'Azur
Daniele Faenzi	PR	Rapporteur	Université de Bourgogne
Andreas Höring	PR	Directeur	Université Côte d'azur
Jean Vallès	MCF	Examineur	Université de Pau

Résumé

Ce mémoire de thèse est consacré à l'étude des endomorphismes non inversibles de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n$ et plus précisément à leurs sous-espaces totalement invariants (i.e. invariant par image réciproque). Une conjecture énonce que de tels sous-espaces irréductibles de $\mathbb{P}^n$ sont linéaires ; celle-ci est démontrée pour les diviseurs lisses de $\mathbb{P}^n$ et pour les diviseurs de $\mathbb{P}^3$. Cette question est motivée par des enjeux provenant de la dynamique holomorphe mais nous faisons appel aux outils issus de la géométrie algébrique pour y répondre. Soit X un diviseur premier de $\mathbb{P}^n$ totalement invariant par un endomorphisme non inversible f de $\mathbb{P}^n$, on montre dans ce texte les énoncés suivants :

- (1) le diviseur X contient une courbe de singularités ;
- (2) le degré d de X est différent de 2 ; et
- (3) lorsque $n = 4$ et le diviseur X est normale et non $\mathbb{Q}$ -factorielle alors c'est une cubique qui contient un plan linéaire P de $\mathbb{P}^4$. De plus, si P est Cartier en dehors d'un nombre fini de points alors il est lui-même totalement invariant par une itérée de f .

L'étude de la conjecture dans le cas $n = 4$ nous a mis sur la voie de la deuxième question principale abordée dans ce mémoire de thèse : la classification des cubiques de $\mathbb{P}^4$ à singularités canoniques dont le lieu singulier contient une courbe. Ce résultat constitue la majeure partie de la démonstration du troisième point plus haut.

Mots-clés : Espace projectif, endomorphismes, lieu totalement invariant, singularités canoniques, cubiques de dimension 3, variétés presque Fano, théorie de l'intersection sur les surfaces normales, surfaces à singularités ADE, faisceau cotangent logarithmique, classes de Chern, $\mathbb{Q}$ -factorialité, cône pseudo-effectif, théorie de Mori, cône projectif, éclatements, contraction crépante, petite contraction, extraction d'un diviseur.

Abstract

This thesis is devoted to the study of non isomorphic endomorphisms of the complex projective space $\mathbb{P}^n$ and more specifically to their totally invariant subspaces (i.e. invariant by reciprocal image). A conjecture tells that these irreducible subspaces are necessarily linear ; it is shown for smooth divisors of $\mathbb{P}^n$ and for divisors of $\mathbb{P}^3$. This question is motivated by holomorphic dynamics but we use tools from algebraic geometry to answer it. Let X be a prime divisor of $\mathbb{P}^n$ which is totally invariant by a non isomorphic endomorphism f of $\mathbb{P}^n$. In this text, we show the following :

- (1) the divisor X contains a curve of singularities ;
- (2) the degree d of X is not 2 ; and
- (3) when $n = 4$ and the divisor X is normal and not $\mathbb{Q}$ -factorial then it is a cubic which contains a linear plane P of $\mathbb{P}^4$. Furthermore, if P is Cartier outside of a finite number of points then it is totally invariant by an iterate of f .

The study of the conjecture when $n = 4$ puts us on the path of the second main question discussed in this thesis : the classification of cubics in $\mathbb{P}^4$ with canonical singularities whose singular locus contains a curve. This result constitutes the most part of the third item's proof above.

Keywords : Projective space, endomorphisms, totally invariant locus, canonical singularities, 3-dimensional cubics, almost Fano varieties, intersection theory of normal surfaces, ADE surface singularities, logarithmic cotangent sheaf, Chern classes, $\mathbb{Q}$ -factoriality, pseudoeffective cone, projective cone, blowups, crepant contraction, small contraction, divisor extraction.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse, Andreas Höring et Katia Amerik. Tout au long de ces quatre années, l'étendue de leurs connaissances mathématiques ainsi que leur professionnalisme m'a permis de mener, dans d'excellentes conditions de travail, cette entreprise à son terme.

Je remercie chaleureusement Amaël Broustet et Daniele Faenzi d'avoir accepté de rapporter cette thèse. La pertinence des observations contenues dans ces rapports démontrent une grande attention des rapporteurs pendant la lecture de ce manuscrit. Je leur en suis très reconnaissant pour cela.

Je souhaite remercier Jean Vallès qui a accepté de faire partie du jury de soutenance ainsi que Sorin Dumitrescu qui a grandement participé à l'éclosion de ma passion pour la géométrie lorsque j'étais son étudiant de master à l'Université de Nice.

Enfin, je remercie tous les doctorants, post-docs, maîtres de conférence et professeurs avec qui j'ai eu d'enrichissantes discussions mathématiques lors de séminaires, conférences, groupes de travail ou encore autour d'une tasse de café.

Table des matières

1	Le Programme du Modèle Minimal (MMP)	13
1.1	Cône effectif et contractions de Mori	16
1.2	Flips et flops	23
1.3	MMP pour les volumes	25
1.4	Extraction d'un diviseur et $\mathbb{Q}$ -factorialisation	26
1.5	Théorème d'Andreata	31
2	Surfaces singulières	34
2.1	Généralités sur les surfaces lisses	35
2.2	Singularités de surfaces normales	39
2.3	Surfaces cubiques de $\mathbb{P}^3$	49
2.4	Intersection sur les surfaces normales	52
2.5	Surfaces de del Pezzo	67
3	Faisceau cotangent logarithmique (FCL)	73
3.1	Le FCL de Saito	74
3.1.1	Construction	74
3.1.2	Résidus d'une forme logarithmique	78
3.2	Le FCL de Dolgachev	82
3.2.1	Construction par les suites exactes	83
3.2.2	Comparaison avec le FCL de Saito	88
4	Classification des cubiques de $\mathbb{P}^4$ à singularités canoniques	90
4.1	Cubiques $\mathbb{Q}$ -factorielles contenant un plan linéaire	92
4.2	Résultats préliminaires	93
4.3	Théorème de classification	108
4.4	Extrémalité du plan linéaire	110
5	Endomorphismes	120
5.1	Généralités	121
5.2	Borne sur le degré	123
5.2.1	Preuve du Théorème et Corollaires	130
5.3	Cônes totalement invariants	132
5.4	Les hypersurfaces totalement invariantes de $\mathbb{P}^4$	134

A	Appendice	137
A.1	Espaces projectifs éclatés le long de sous-espaces linéaires	137
A.2	Classes de Chern de faisceaux tordus	139
	Bibliographie	144

Introduction

Dans cette thèse, nous étudions la véracité de la conjecture BCS concernant les endomorphismes de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ et notamment les diviseurs totalement invariants de ceux-ci. Les endomorphismes sont des objets importants de la dynamique holomorphe et leurs diviseurs totalement invariants ont de mauvaises propriétés dynamiques (voir [FS94]). Dans cette introduction, nous allons définir tous les éléments nécessaires pour formuler cette conjecture. On la nomme de cette façon car elle a été énoncée pour la première fois dans [BCS04].

On rappelle tout d'abord que l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ est défini comme l'ensemble $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ quotienté par la relation de colinéarité. Une hypersurface $\mathcal{H} \subset \mathbb{P}^n$ de degré d est le lieu des zéros d'un polynôme $h \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ homogène de degré d et on note

$$\mathcal{H} = \{h = 0\}.$$

L'hypersurface $\mathcal{H}$ est dite irréductible si le polynôme homogène h qui le définit est irréductible (celui-ci est unique à multiplication par une constante non nulle près). On définit alors les endomorphismes de l'espace projectif de la manière suivante :

Définition. On appelle endomorphisme de $\mathbb{P}^n$ toute application $f : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ de la forme

$$f(x_0 : \dots : x_n) = (F_0(x_0, \dots, x_n) : \dots : F_n(x_0, \dots, x_n))$$

pour tout $(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n$ où les F_i sont des polynômes homogènes de même degré m n'ayant aucun zéros en commun. On note alors $f = (F_0 : \dots : F_n)$ et on dit que f est un endomorphisme non trivial si $m > 1$.

On introduit maintenant la notion de totale invariance qui est indispensable pour énoncer la conjecture BCS.

Définition. Une hypersurface $\mathcal{H}$ de $\mathbb{P}^n$ est dite totalement invariante s'il existe un endomorphisme $f : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ tel que

$$f^{-1}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}.$$

Les hypersurfaces totalement invariantes ont une place importante en dynamique holomorphe. En effet, en dehors de la plus grande hypersurface totalement invariante, on a de bonnes propriétés dynamiques (cf. [FS94]). Nous pouvons maintenant énoncer la conjecture BCS.

Conjecture (BCS). *Si $\mathcal{H}$ est une hypersurface totalement invariante de $\mathbb{P}^n$ alors c'est une union d'hyperplans.*

Les hyperplans sont les hypersurfaces les plus simples possibles : ce sont les hypersurfaces de degré 1. Montrer la conjecture revient donc à montrer que les "mauvais" espaces associés à un endomorphisme sont les plus simples possibles. Tous les résultats de cette thèse apportent des résultats qui corroborent la conjecture BCS. Il n'y a d'ailleurs à ce jour aucun contre-exemple connu.

Historique

On obtient une première borne sur le degré d d'une hypersurface $\mathcal{H}$ totalement invariante de $\mathbb{P}^n$

$$d \leq n + 1$$

grâce à la formule de Hurwitz logarithmique. Cette borne est atteinte comme le montre l'exemple suivant :

Exemple. *On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{P}^n$ défini par $f = (X_0^q : \dots : X_n^q)$ avec $q \geq 2$. Alors les seules hypersurfaces totalement invariantes par f sont les hyperplans $\mathcal{H}_i := \{X_i = 0\}$ pour $0 \leq i \leq n$. En posant $\mathcal{H} = \bigcup_i \mathcal{H}_i$, on obtient une hypersurface $\mathcal{H}$ de degré $n + 1$ totalement invariante dans $\mathbb{P}^n$.*

Pour éviter ce genre de situation, on peut s'intéresser sans perte de généralité aux hypersurfaces irréductibles. En effet, si $\mathcal{H}$ est une hypersurface totalement invariante par un endomorphisme f de $\mathbb{P}^n$ alors ses composantes irréductibles $\mathcal{H}_i$ (dont les équations sont les facteurs irréductibles de l'équation de $\mathcal{H}$) sont totalement invariantes par une itérée f^k de f .

Dans [CLN00], Cerveau et Lins Neto montrent la conjecture pour les quadriques lisses (théorème 2). De plus, le théorème de [Bea01] montré par Beauville dit qu'aucune hypersurface irréductible lisse de degré au moins 3 dans $\mathbb{P}^n$ n'est totalement invariante. Le cas des hypersurfaces lisses est donc traité. Ensuite, le théorème 2.1. de [HN11] montre que les seules hypersurfaces de degré $n + 1$ totalement invariantes de $\mathbb{P}^n$ sont les unions de $n + 1$ hyperplans. Un corollaire du théorème 1.1. de [Hör17] dit qu'il n'existe aucune hypersurface irréductible $\mathcal{H} \subset \mathbb{P}^n$ de degré n totalement invariante par un endomorphisme non trivial de $\mathbb{P}^n$. On résume tous ces résultats dans le théorème suivant :

Théorème. *Soit $\mathcal{H}$ une hypersurface irréductible de degré $d > 1$ totalement invariante dans $\mathbb{P}^n$. Alors $d \leq n - 1$ et $\mathcal{H}$ n'est pas lisse.*

En particulier la conjecture est démontrée pour $n = 2$. De plus dans [Zha13] (théorème 1.1.), D.Q. Zhang donne une liste de quatre équations de surfaces cubiques de $\mathbb{P}^3$. Celles-ci sont les seules surfaces irréductibles de $\mathbb{P}^3$ de degré > 1 qu'il n'a pas réussi à exclure. Ceci achève la démonstration du théorème suivant :

Théorème. *La conjecture BCS est vrai lorsque $n = 3$.*

On a énoncé les principaux résultats connus lorsque ce projet de thèse a commencé. A ce moment là, on se donnait trois directions à exploiter, chacune concernant un attribut de l'hypersurface. La première concerne la dimension de son lieu singulier, la deuxième son degré et enfin la troisième sa dimension. Plus précisément, on se donnait l'objectif de vérifier la conjecture BCS dans les cas suivants :

- pour les hypersurfaces à singularités isolées ;
- pour les hypersurfaces de degré 2 ;
- pour les hypersurfaces de dimension 3 (i.e. lorsque $n = 4$).

Nous avons répondu positivement aux deux premières questions par le biais des théorèmes *A* et *B* plus bas (voir leurs corollaires). Le troisième point nous a, quant à lui, éloignés de la question des endomorphismes pour nous aiguiller vers la classifications des cubiques de $\mathbb{P}^4$ à singularités canoniques. Le chapitre 4 présente tous les résultats découverts sur ce thème dont le théorème de classification (voir théorème *C* plus bas).

Théorèmes principaux

Ici, nous exposons notre contribution à cette conjecture à travers les trois théorèmes *A*, *B* et *C* énoncés plus bas. Nous indiquons également de façon plus ou moins détaillée les stratégies utilisées pour démontrer ces résultats.

Le théorème *A* donne une borne sur le degré d d'un diviseur premier X totalement invariant dans $\mathbb{P}^n$ en fonction de la dimension l de son lieu singulier.

Théorème (A). *Soit X un diviseur premier de $\mathbb{P}^n$ de degré d totalement invariant et $l := \dim X_{\text{sing}}$ (on pose $l = -1$ si X est lisse), alors on a*

$$d < \binom{n}{l+1}^{1/(n-l-1)} + 1.$$

En particulier, ceci redémontre l'impossibilité pour une hypersurface lisse de $\mathbb{P}^n$ de degré $d \neq 1$ d'être totalement invariante. On voit également que lorsque X est une hypersurface irréductible totalement invariante et à singularités isolées alors

son degré ne dépasse jamais deux. Autrement dit, X est soit un hyperplan, soit une hypersurface quadrique de $\mathbb{P}^n$.

On démontre ce résultat en utilisant le faisceau cotangent logarithmique $\Omega_{\mathbb{P}^n}^1(\log X)$ dont on énonce la construction dans le chapitre 3. Soit X un diviseur premier de degré d totalement invariant par un endomorphisme non trivial f de $\mathbb{P}^n$, on pose $k = \text{codim}_X X_{\text{sing}}$, $m \geq 2$ le degré algébrique de l'endomorphisme f (i.e. le degré des polynômes homogènes qui le définissent) et $M \subset \mathbb{P}^n$ une certaine variété lisse de dimension k et de degré m telle que $M \cap X_{\text{sing}} = \emptyset$. On montre alors l'inégalité suivante (lemme 5.2.3)

$$c_k(f^*[\Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X)(1)] \otimes \mathcal{O}_M) \leq c_k(\Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X)(m) \otimes \mathcal{O}_M).$$

On conclut ensuite grâce aux calculs suivants

$$c_k(\Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X)(1)) = (d-1)^k H^k$$

et

$$c_k(\Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X)(m)) = \left[\binom{n}{k} m^k + \binom{n-1}{k-1} (d-n-1) m^{k-1} + o(m^{k-1}) \right] H^k$$

où H est un hyperplan de $\mathbb{P}^n$. Le point clé est que l'on peut faire tendre m vers $+\infty$ en prenant des itérées de plus en plus grandes de f . Finalement, on obtient la borne sur le degré d de X en fonction de la dimension de son lieu singulier X_{sing} énoncée dans le théorème.

Le deuxième théorème important que l'on montre dans cette thèse concerne les cônes sur des variétés qui ne sont pas totalement invariantes. Une hypersurface $C \subset \mathbb{P}^n$ est un cône au-dessus d'une hypersurface

$$X = \{h(X_0, \dots, X_k) = 0\} \subset \mathbb{P}^k$$

avec $k \leq n$, si C s'écrit $\{h(X_0, \dots, X_k) = 0\} \subset \mathbb{P}^n$ quitte à effectuer un changement de coordonnées dans $\mathbb{P}^n$.

Théorème (B). *Si X est un diviseur de $\mathbb{P}^k$ non totalement invariant alors pour tout $n \geq k$, tout cône C de $\mathbb{P}^n$ sur X n'est pas totalement invariant.*

La stratégie pour montrer ce résultat est assez basique : on utilise seulement de la géométrie projective classique (polynômes et projections). Soit X une hypersurface de $\mathbb{P}^k$ et $C \subset \mathbb{P}^n$ le cône au-dessus de X avec $n \geq k$. On suppose que X n'est pas totalement invariante dans $\mathbb{P}^k$ et on veut montrer que C ne l'est pas non plus. On procède par récurrence sur n : si $n = k$ alors il n'y a rien à montrer. Si $n > k$, on suppose qu'aucun cône de $\mathbb{P}^{n-1}$ au-dessus de X n'est totalement invariant. On suppose également que C est totalement invariant par un endomorphisme de $\mathbb{P}^n$ et on cherche à montrer une contradiction. Soit p le point de $\mathbb{P}^n$ qui a pour coordonnées

homogènes $(0 : \dots : 0 : 1)$, on construit alors un hyperplan $H \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ tel que l'endomorphisme rationnel $g : H \dashrightarrow H$ définie par

$$g := \pi_{P,H} \circ f|_H$$

est un morphisme. De plus, on montre que $C' = C \cap H$ est totalement invariant par g et que $C' \subset H \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ est au cône au-dessus de X . Ceci contredit l'hypothèse de récurrence.

Comme les hypersurfaces quadriques sont des cônes au-dessus de quadriques lisses, on en déduit directement le corollaire suivant.

Corollaire. *Les hypersurfaces quadriques (i.e. de degré 2) ne sont pas totalement invariantes dans $\mathbb{P}^n$.*

En particulier, le corollaire précédent se combine avec le théorème A pour conclure le cas des hypersurfaces à singularités isolées :

Corollaire. *Si X est un diviseur premier de $\mathbb{P}^n$ à singularités isolées alors X n'est pas totalement invariant dans $\mathbb{P}^n$.*

Ceci répond positivement aux deux premières questions que l'on s'est posées après avoir énoncé l'historique des résultats sur la conjecture BCS.

Intéressons-nous maintenant à la troisième question, c'est-à-dire lorsque $n = 4$. D'après l'historique des résultats et les théorèmes A et B précédents, si X est un diviseur premier totalement invariant de $\mathbb{P}^4$ alors X est une cubique dont le lieu singulier contient une courbe. De plus, on montre qu'une telle cubique est nécessairement à singularités canoniques grâce au théorème 1.2. de [BHN15]. Ceci nous mène naturellement sur la voie de la classification des cubiques normales de $\mathbb{P}^4$ à singularités canoniques dont le lieu singulier contient une courbe. Plus précisément, on montre le théorème suivant :

Théorème (C). *Soit X une hypersurface cubique normale de $\mathbb{P}^4$ à singularités canoniques et telle que X_{sing} contient une courbe irréductible notée C . Alors soit X possède un plan linéaire, soit on est dans l'un des deux cas suivants :*

- (1) *X est la variété des sécantes de la courbe quartique de Veronese dans $\mathbb{P}^4$ (exemple 3.5 de [JPR05]) ;*
- (2) *X est une cubique dont le lieu singulier est une droite génériquement de type cA_1 ou cA_2 (exemple 3.6 de [JPR05]).*

De plus les cas (1) et (2) du théorème C admettent des terminalisations lisses classifiées dans [JPR05] (exemple 3.5 et 3.6). La stratégie pour montrer ce théorème

est la suivante. Tout d'abord, en notant X une cubique irréductible normale de $\mathbb{P}^4$ à singularités canoniques et dont le lieu singulier contient une courbe C , on montre qu'il existe un diagramme de la forme

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\psi} & X \\ \downarrow \phi & & \\ Y & & \end{array}$$

où ψ est une contraction birationnelle crépante, X' est une variété presque Fano à singularités canoniques et $\mathbb{Q}$ -factorielles et ϕ est une contraction de Mori élémentaire. De plus,

- (A) si X est $\mathbb{Q}$ -factorielle alors ψ contracte un unique diviseur E sur la courbe C et $\rho(X') = 2$.
- (B) si X n'est pas $\mathbb{Q}$ -factorielle alors ψ est une petite $\mathbb{Q}$ -factorialisation (i.e. ψ ne contracte qu'un nombre fini de courbes).

On distingue ensuite les cas selon la dimension de Y et on montre qu'il existe un plan linéaire dans X (excepté dans les cas (1) et (2) du théorème mais ces deux cas sont répertoriés dans [JPR05]).

Mises à part les cubiques particulières (1) et (2), de telles cubiques X contiennent un plan linéaire P de $\mathbb{P}^4$. En supposant que X est totalement invariante par un endomorphisme f de $\mathbb{P}^4$, on peut se demander quand le plan P est lui aussi totalement invariant par f (quitte à itérer f). La proposition suivante nous donne une réponse partielle à cette question :

Proposition. *Soit $X \subset \mathbb{P}^4$ une cubique normale, non $\mathbb{Q}$ -factorielle et totalement invariante par un endomorphisme non trivial f de $\mathbb{P}^4$. Supposons qu'il existe un plan linéaire $P \subset X$ et une petite $\mathbb{Q}$ -factorialisation*

$$\psi : X' \rightarrow X$$

telle que la transformée stricte de P par ψ engendre un rayon extrémal de $\text{Pseff}(X')$. Alors, quitte à itérer f , le plan P est totalement invariant par f .

Ceci nous donne la marche à suivre pour montrer que le plan P est totalement invariant par une itérée de f dans le cas où X est une cubique non $\mathbb{Q}$ -factorielle. Il nous faut trouver une petite $\mathbb{Q}$ -factorialisation $\psi : X' \rightarrow X$ de X et un plan linéaire P contenu dans X telle que la transformée stricte de P par ψ engendre un rayon extrémal de $\text{Pseff}(X')$. On a notamment le résultat suivant :

Proposition. *Soit X une cubique normale de $\mathbb{P}^4$ à singularités canoniques contenant un plan linéaire P et $\psi : X' \rightarrow X$ l'éclatement de X le long de P . Supposons que ψ est une petite $\mathbb{Q}$ -factorialisation de X alors on est dans l'un des cas suivants*

- (1) *il existe un plan linéaire P_1 dans X et un hyperplan H de $\mathbb{P}^4$ tels que $X \cap H = P + 2P_1$;*
- (2) *la cubique X est un cône au-dessus d'une surface cubique de $\mathbb{P}^3$;*
- (3) *il existe un plan linéaire P_1 dans X dont la transformée stricte par ψ engendre un rayon extremal dans $Pseff(X')$.*

On remarque que le cas (2) de la proposition précédente disparaît lorsque l'on suppose que X est totalement invariante par un endomorphisme non trivial de $\mathbb{P}^4$. En effet, aucun cône de $\mathbb{P}^4$ ne peut être totalement invariant en combinant le théorème B au fait que la conjecture est démontrée pour $n = 3$.

Le fait qu'une cubique X totalement invariante par un endomorphisme f de $\mathbb{P}^4$ contienne un plan linéaire lui-même totalement invariant par f semble très restrictif. Les variétés de Fano avec $\rho = 1$ qui possèdent des endomorphismes non triviaux sont rares et d'autant plus lorsqu'elles contiennent un sous-ensemble totalement invariant.

Résumé de la thèse

Cette thèse de doctorat s'articule en cinq chapitres : les trois premiers exposent des résultats déjà connus sur lesquels nous nous appuyons tandis que les deux suivants présentent les résultats de ces quatre années de recherche.

Chapitre 1 : Le programme du modèle minimal (MMP)

Le chapitre 1 propose de retracer le programme du modèle minimal (MMP) et ses importantes applications. On montre notamment, grâce à une construction de [Kol13], l'importante extraction de diviseur (théorème 1.4.5) :

Proposition (Extraction de diviseur). *Soit X une variété projective de dimension 3 à singularités canoniques et $\mathbb{Q}$ -factorielles et soit $C \subset X_{\text{sing}}$ une courbe irréductible du lieu singulier alors il existe une contraction birationnelle crépante*

$$\psi : X' \rightarrow X$$

avec X' à singularités canoniques et $\mathbb{Q}$ -factorielles et telle que $\text{Exc}(\psi)$ est un diviseur irréductible D au-dessus de la courbe irréductible C de X_{sing} . De plus, $\rho(X'/X) = 1$.

Utiliser cette extraction donne un contrôle sur le nombre de Picard $\rho(X')$ de X' ce qui n'est pas le cas lorsque l'on prend une terminalisation ou une résolution des singularités. Nous nous servons de ce résultat dans le chapitre 4 pour classer les cubiques de $\mathbb{P}^4$ à singularités canoniques contenant une courbe dans leur lieu singulier.

Chapitre 2 : Surfaces Singulières

Le chapitre 2 concerne les surfaces singulières. Il a pour but dans un premier temps d'énoncer les principaux résultats sur les surfaces lisses. On présente ensuite les surfaces singulières normales comme les surfaces obtenues après avoir contracté une courbe connexe à composantes rationnelles sur une surface lisse. Les singularités qui se forment après de telles contractions sont alors classifiées. Nous nous intéresserons en particulier aux singularités dites *ADE* (ou Du Val) qui apparaissent après contractions de (-2) -courbes dans des configurations spécifiques sur les surfaces lisses.

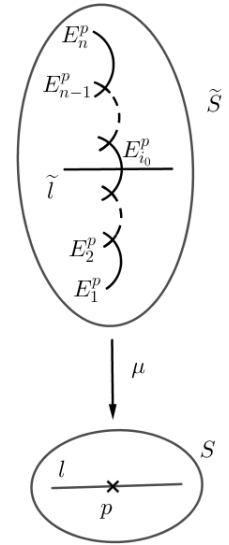
La suite de notre exposé portera sur le calcul d'intersection sur les surfaces normales en introduisant la notion de pullback de Mumford. Ensuite on effectuera les calculs des pullbacks de Mumford de courbe irréductibles lisses sur une surface à singularités *ADE*. Par exemple, on montrera la proposition suivante qui calcule le pullback de Mumford d'une courbe irréductible lisse passant par une singularité de type A_n .

Proposition (Singularité A_n).

Soit $C \subset S$ une courbe irréductible lisse passant par une unique singularité $p \in S$ de type A_n de S . On note E_i^p pour $i = 1, \dots, n$ les (-2) -courbes exceptionnelles de $\tilde{S}$ au-dessus de p . Si $\tilde{C}$ intersecte $E_{i_0}^p$ alors le pullback de Mumford de C est

$$C' = \tilde{C} + \sum_{i \leq i_0} \frac{i(n+1-i_0)}{n+1} E_i^p + \sum_{i > i_0} \frac{i_0(n+1-i)}{n+1} E_i^p.$$

En particulier, on a $C^2 = \tilde{C}^2 + \frac{i_0(n+1-i_0)}{n+1}$.



Chapitre 3 : Faisceau Cotangent Logarithmique

Pour X une variété lisse et $D \subset X$ un diviseur effectif sur X , le chapitre 3 présente deux notions très proches de faisceau cotangent logarithmique $\Omega_X^1(\log D)$ et $\tilde{\Omega}_X^1(\log D)$ respectivement introduite par Saito et Dolgachev dans [Sai80] et [Dol07]. Ces deux faisceaux sont isomorphes lorsque D est à croisements normaux en codimension ≤ 2 et ils encodent l'inclusion $D \subset X$. Cette notion est essentielle pour la démonstration du théorème A : en effet, celle-ci s'appuie sur le calcul et la compa-

raison des classes de Chern des faisceaux

$$\Omega_{\mathbb{P}^n}^1(\log X) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \text{ pour } m \in \mathbb{N}^*.$$

C'est grâce à la suite exacte des résidus (voir l'équation (3.10) de la section 3.2) que l'on calcule les classes de Chern des faisceaux $\Omega_{\mathbb{P}^n}^1(\log X) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$ afin de montrer le théorème A.

Chapitre 4 : Classification des cubiques de $\mathbb{P}^4$

Le chapitre 4 se consacre à la classification des cubiques de $\mathbb{P}^4$ à singularités canoniques contenant une courbe dans leur lieu singulier. Dans un premier temps, on montre la proposition suivante :

Proposition. *Si une cubique $X \subset \mathbb{P}^4$ à singularités canoniques et $\mathbb{Q}$ -factorielles contient un plan linéaire P de $\mathbb{P}^4$ alors les sections hyperplanes génériques de X sont des surfaces cubiques de type $2A_2$, $A_1 + 2A_2$, A_5 , $A_1 + A_5$ ou $3A_2$.*

La preuve de cette proposition s'effectue grâce au calcul d'intersection sur les surfaces à singularités *ADE* introduit au chapitre 2. On a vu que lorsqu'une cubique X de $\mathbb{P}^4$ non $\mathbb{Q}$ -factorielle est totalement invariante par un endomorphisme f de $\mathbb{P}^4$, elle contient un plan linéaire P . De plus, on a la possibilité de montrer que P est lui-même totalement invariant par f (quitte à l'itérer). La proposition précédente permet de donner une classification des cas pour les cubiques $\mathbb{Q}$ -factorielles de $\mathbb{P}^4$ qui contiennent un plan linéaire.

Notons que la classification de Bruce et Wall (voir le tableau de la dernière page de [BW79]) contient vingt-et-un types de singularités de surfaces cubiques de $\mathbb{P}^3$. La plupart des cubiques de $\mathbb{P}^4$ qui contiennent un plan linéaire que nous croiserons ne seront donc pas $\mathbb{Q}$ -factorielles.

La seconde partie du chapitre a pour objectif de démontrer le théorème C ainsi que des propositions qui montrent l'existence d'un plan linéaire dans X dont la transformée stricte par une $\mathbb{Q}$ -factorialisation $\psi : X' \rightarrow X$ engendre un rayon extrémal dans $\text{Pseff}(X')$.

Chapitre 5 : Endomorphismes

Le chapitre 5 est le coeur de cette thèse car il porte sur les endomorphismes. C'est ici que nous énonçons la conjecture *BCS* ainsi que les généralités des endomorphismes des variétés projectives. Nous ferons l'état des lieux précis de toutes les

avancées concernant cette conjecture et plus généralement les endomorphismes. Par exemple, l'important théorème de Beauville [Bea01] :

Théorème. *Une hypersurface lisse X de $\mathbb{P}^n$ de degré $d \geq 3$ et de dimension au moins 2 n'admet aucun endomorphisme non trivial.*

Ce théorème montre en particulier que les hypersurfaces lisses ne peuvent être totalement invariantes. Néanmoins, il ne se généralise pas au cas des singularités isolées d'où la nécessité de travailler avec le faisceau cotangent logarithmique introduit au chapitre 3. La suite de ce chapitre se consacrera à la démonstration des théorèmes A et B .

Enfin, la dernière section se concentrera sur l'application du théorème C de classification des cubiques dans le cadre de la conjecture BCS avec $n = 4$. Plus précisément, on cherchera à montrer que certaines cubiques totalement invariantes de $\mathbb{P}^4$ contiennent un plan linéaire lui-même totalement invariant par une itérée de l'endomorphisme.

Chapitre 1

Le Programme du Modèle Minimal (MMP)

Le premier chapitre de cet exposé est consacré au programme du modèle minimal (MMP) qui constitue une partie importante de la recherche en géométrie algébrique. En partant d'une variété projective complexe X , le but est de trouver une variété projective X_{min} dans la classe birationnelle de X telle que

- (1) si $\kappa(X) \geq 0$, le diviseur canonique de X_{min} est nef;
- (2) si $\kappa(X) = -\infty$, il existe une contraction $\varphi : X_{min} \rightarrow Y$ avec $\dim Y < \dim X$ dont les fibres générales sont des variétés de Fano.

L'objectif est alors de contracter les courbes dont l'intersection avec K_X est négative. Ici on s'intéresse plus généralement au MMP des paires (X, Δ) formée d'une variété projective complexe X et d'un $\mathbb{Q}$ -diviseur Δ sur X . Pour revenir au MMP classique, il suffit alors de considérer le cas particulier $\Delta = \emptyset$.

Dans la première partie, on introduit les notions essentielles au développement de la théorie du MMP avant d'énoncer le théorème du cône pour les paires (X, Δ) klt qui décrit le cône de Mori de la manière suivante

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{(K_X + \Delta) \geq 0} + \sum_{j \in J} \mathbb{R}_+[C_j]$$

avec J au plus dénombrable et où les C_j sont des courbes rationnelles vérifiant $(K_X + \Delta) \cdot C_j < 0$. Le théorème dit également que pour chaque rayon $R_j = \mathbb{R}_+[C_j]$, il existe une contraction $\varphi : X \rightarrow Z$ à fibres connexes qui contracte uniquement les courbes irréductibles dont la classe numérique appartient au rayon R_j . En particulier, on a $\rho(X/Z) = 1$ donc la suite des contractions successives des rayons extrémaux R_j se termine. Il y a cependant un problème qui apparaît : si la contraction d'un rayon extrémal $\varphi : X \rightarrow Z$ est petite (i.e. birationnelle dont le lieu exceptionnel

est de codimension au moins 2), alors le $\mathbb{Q}$ -diviseur $K_Z + \varphi_*\Delta$ n'est plus forcément $\mathbb{Q}$ -Cartier et le théorème du cône ne s'applique plus. Le flip est alors une bonne solution à ce problème, c'est le sujet de la section 1.2 suivante.

Les flips sont des opérations chirurgicales sur une variété en codimension 2 que l'on peut toujours effectuer dans un cas précis : soit (X, Δ) une paire klt et $\varphi : X \rightarrow Z$ la contraction d'un rayon extrémal et $(K_X + \Delta)$ -négatif. Si φ est petite alors il existe une petite contraction

$$\varphi^+ : X^+ \rightarrow Z$$

telle que $\rho(X^+/Z) = 1$ et dont les courbes contractées sont $(K_{X^+} + \Delta^+)$ -positives où Δ^+ est la transformée stricte de Δ par $(\psi^+)^{-1} \circ \psi$. Autrement dit, on a trouvé une paire (X^+, Δ^+) dont le mauvais rayon $(K_X + \Delta)$ -négatif a été remplacé par un rayon de courbes positives. Cependant, comme $\rho(X) = \rho(X^+)$, rien ne garantit que les suites de flips se finissent. Cela fait l'objet d'une conjecture qui a été démontrée en dimension 3. Dans la suite de la section, on introduit la notion de flop d'une petite contraction. Ces chirurgies ont la propriété de connecter les modèles minimaux d'une même variété X .

La courte section 1.3 se sert du théorème de finitude de toute suite de flips se termine en dimension 3. Ce dernier ne laisse plus aucune obstruction à la bonne marche du programme du modèle minimale. On énonce donc précisément ce programme pour les paires dlt.

En s'appuyant sur une construction de Kollár dans [Kol13], la section 1.4 est dédié à la démonstration d'un théorème fondamental pour la suite de l'exposé. Si X est une variété de dimension 3 à singularités canoniques et $\mathbb{Q}$ -factorielles et C une courbe irréductible contenue dans le lieu singulier de X alors il existe un morphisme birationnel crépant

$$\psi : X' \rightarrow X$$

dont le lieu exceptionnel est un diviseur premier E au-dessus de la courbe C et X' est à singularités canoniques et $\mathbb{Q}$ -factorielles. Une autre application importante de la construction de [Kol13] est l'existence, pour X une variété de dimension 3 à singularités canoniques d'un morphisme birationnel petit (i.e. sans diviseur exceptionnel)

$$\psi : X^{qf} \rightarrow X$$

où X^{qf} est à singularités canoniques et $\mathbb{Q}$ -factorielles.

Pour conclure ce chapitre, on énonce l'important théorème d'Andreatta (théorème 2.1. de [And95]) qui classe les fibres non triviales des contractions de Mori $\varphi : X \rightarrow Y$ pour une variété projective X à singularités klt. Ce théorème nous sera très utile dans le chapitre 4 pour classer les cubiques de $\mathbb{P}^4$ à singularités canoniques.

1.1 Cône effectif et contractions de Mori

Le but de cette section est, dans un premier temps, de définir les notions classiques de la théorie du MMP comme les singularités des paires, le cône de Mori et le cône pseudo-effectif. Ensuite nous énoncerons des résultats standards comme la décomposition de Zariski-Boucksom (théorème 1.1.18) et le lemme de négativité (lemme 1.1.15) dont on se servira dans la suite de l'exposé. La fin de cette partie est dédiée au primordial théorème du cône (théorème 1.1.21) qui est la pierre angulaire du programme du modèle minimal car il nous donne une structure du cône de Mori d'une variété et nous permet de contracter les courbes négatives.

On appelle variété complexe tout schéma intègre, séparé, complet et de type fini sur $\mathbb{C}$. On appelle courbe sur X tout sous-schéma C fermé et réduit de dimension 1. Pour X une variété complexe, on note $\text{Pic}(X)$ l'ensemble des faisceaux localement libre de rang 1 sur X .

Nous commençons par définir toutes les notions liées aux diviseurs (Weil, Cartier, $\mathbb{Q}$ -diviseurs etc.). Ces définitions proviennent de la section II.6. de [Har77].

Définition 1.1.1 (Diviseurs).

Soit X une variété complexe normale, on définit les notions suivantes :

- un diviseur de Weil D sur X est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$

$$D = \sum_i a_i D_i$$

où les D_i sont des hypersurfaces irréductibles. Le groupe des diviseurs de Weil sur X est noté $\text{Div}(X)$.

- deux diviseurs de Weil D_1 et D_2 sont dits linéairement équivalents, et on note

$$D_1 \sim D_2,$$

si leurs faisceaux réflexifs de rang 1 respectifs $\mathcal{O}_X(D_1)$ et $\mathcal{O}_X(D_2)$ sont isomorphes. Le groupe des classes sous cette relation d'équivalence est noté $\text{Cl}(X)$.

- un diviseur de Weil D sur X est dit Cartier si son faisceau réflexif de rang 1 $\mathcal{O}_X(D)$ est localement libre. De cette manière, on identifie les classes d'isomorphisme de faisceaux localement libre de rang 1 comme des classes de diviseurs Cartier. Autrement dit, on voit $\text{Pic}(X)$ comme un sous-groupe de $\text{Cl}(X)$.
- un diviseur de Weil D sur X est dit $\mathbb{Q}$ -Cartier s'il existe un entier m non nul tel que $\mathcal{O}_X(mD)$ est localement libre.
- un $\mathbb{Q}$ -diviseur (resp. $\mathbb{R}$ -diviseur) de Weil est un élément du groupe $\text{Div}_{\mathbb{Q}}(X) = \text{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ (resp. $\text{Div}_{\mathbb{R}}(X) = \text{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$). Deux $\mathbb{Q}$ -diviseurs D_1 et D_2 sont dits $\mathbb{Q}$ -équivalents, et on note

$$D_1 \sim_{\mathbb{Q}} D_2,$$

s'il existe un entier non nul m tel que mD_1 et mD_2 sont des $\mathbb{Z}$ -diviseurs de Weil linéairement équivalents.

Comme on a l'inclusion $Pic(X) \subset Cl(X)$ du groupe des diviseurs de Cartier dans le groupe des classes de diviseurs de Weil, il est naturel de se demander si tout diviseur de Weil est de Cartier. En général la réponse est non, d'où la définition suivante :

Définition 1.1.2 (Factorialité). *Une variété complexe normale X est dite factorielle (resp. $\mathbb{Q}$ -factorielle) si tout diviseur de Weil est Cartier (resp. $\mathbb{Q}$ -Cartier).*

Remarque :

- Si X est une variété lisse alors X est factorielle.
- Si X n'est pas $\mathbb{Q}$ -factorielle mais à singularités canoniques (voir définition 1.1.12), on peut trouver un morphisme birationnel

$$\psi : X^{qf} \rightarrow X$$

dont le lieu exceptionnel est de codimension au moins 2 dans X et telle que X^{qf} est $\mathbb{Q}$ -factorielle (voir théorème de $\mathbb{Q}$ -factorialisation 1.4.7 pour la dimension 3 à singularités canoniques).

On définit maintenant le très important produit d'intersection sur X entre les $\mathbb{Q}$ -diviseurs $\mathbb{Q}$ -Cartiers de X et les courbes sur X .

Définition 1.1.3 (Produit d'intersection). *Soit X une variété complexe normale et D un $\mathbb{Q}$ -diviseur $\mathbb{Q}$ -Cartier sur X . Soit C une courbe sur X et un entier non nul m tel que mD est Cartier, alors on définit le produit d'intersection $D.C$ par le nombre rationnel*

$$D.C = \frac{1}{m} \deg_C \mathcal{O}_X(mD)|_C$$

qui ne dépend pas de l'entier m choisi.

Dans le programme du modèle minimal, pour X une variété projective, on cherche un élément X_{min} de la classe birationnelle de X dont le diviseur canonique est positif sur toutes les courbes de X_{min} . Il est alors commode de confondre entre elles les courbes qui ont le même produit d'intersection avec tous les diviseurs de Cartier. Cela motive la définition suivante :

Définition 1.1.4 (Equivalence numérique). *Soit D_1 et D_2 deux $\mathbb{Q}$ -diviseurs $\mathbb{Q}$ -Cartier et deux courbes C_1 et C_2 sur une variété complexe X alors on dit que*

- D_1 et D_2 sont numériquement équivalents, et on note

$$D_1 \equiv D_2,$$

si pour toute courbe irréductible C sur X , on a $D_1.C = D_2.C$;

- C_1 et C_2 son numériquement équivalentes, et on note

$$C_1 \equiv C_2,$$

si pour tout diviseur de Cartier D sur X , on a $C_1.D = C_2.D$.

Pour X une variété complexe, le produit d'intersection induit une application $\mathbb{Z}$ -bilinéaire

$$Pic(X) \times Z_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

où $Z_1(X)$ désigne le groupe abélien engendré par les courbes irréductibles. En posant $N^1(X) = \{Pic(X)/\equiv\} \otimes \mathbb{R}$ et $N_1(X) = \{Z_1(X)/\equiv\} \otimes \mathbb{R}$, on obtient l'application $\mathbb{R}$ -bilinéaire

$$N^1(X) \times N_1(X) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ces deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels sont de même dimension et celle-ci est finie. De plus, si $\phi : X \rightarrow Y$ est un morphisme propre entre deux variétés projectives, on définit $N_1(X/Y)$ comme le sous-espace vectoriel de $N_1(X)$ engendré par les classes numériques des courbes contractées par ϕ . Nous pouvons maintenant définir le cône de Mori :

Définition 1.1.5 (Cône de Mori). *Soit X une variété complexe, on note $NE(X)$ le sous-cône de $N_1(X)$ engendré par les courbes irréductibles sur X . On définit alors le cône de Mori de X , noté $\overline{NE}(X)$ comme l'adhérence de $NE(X)$ dans $N_1(X)$.*

Si $\phi : X \rightarrow Y$ est un morphisme propre entre deux variétés projectives, on définit de la même façon $\overline{NE}(X/Y)$ le cône de Mori relatif comme le sous-cône fermé de $N_1(X/Y)$ engendré par les classes numériques des courbes irréductibles contractées par ϕ . Le produit d'intersection nous permet également de définir plusieurs notions de positivité des $\mathbb{Q}$ -diviseurs $\mathbb{Q}$ -Cartier.

Définition 1.1.6. *Soit $\phi : X \rightarrow Y$ un morphisme propre entre deux variétés projectives et D un $\mathbb{Q}$ -diviseur $\mathbb{Q}$ -Cartier alors on dit que :*

- D est nef (resp. ϕ -nef) si $D.C \geq 0$ pour toute courbe irréductible C sur X (resp. pour toute courbe irréductible C contractée par ϕ).
- D est strictement nef si $D.C > 0$ pour toute courbe irréductible C sur X .
- D est ample (resp. ϕ -ample) si $D.C > 0$ pour toute classe numérique non nulle $C \in \overline{NE}(X)$ (pour toute classe numérique non nulle $C \in \overline{NE}(X/Y)$).
- D est semi-ample si $\mathcal{O}_X(mD)$ est globalement engendré pour un certain $m \geq 1$.

- D est big s'il existe $\alpha \in \mathbb{Q}_+$ tel que

$$\alpha m^{\dim(X)} \leq \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(mD))$$

pour tout $m \gg 0$ tel que mD est un diviseur de Cartier.

Remarque :

On a les implications suivantes entre les notions de positivité définies précédemment :

- D est ample $\Rightarrow D$ est strictement nef $\Rightarrow D$ est nef.
- D est ample $\Rightarrow D$ est semi-ample $\Rightarrow D$ est nef.

Lemme 1.1.7. Soit $\psi : X \rightarrow Y$ un morphisme fini entre deux variétés projectives et D un diviseur ample sur Y . Alors ψ^*D est un diviseur ample sur X .

Démonstration. Soit $\alpha \in \overline{NE}(X) \setminus \{0\}$, comme ψ est un morphisme fini on a $\psi_*\alpha \in \overline{NE}(Y) \setminus \{0\}$ puis comme D est un diviseur ample, on trouve $\psi^*(D).\alpha = D.\psi_*\alpha > 0$. ■

Proposition 1.1.8. Soit X une variété projective et D un diviseur de Cartier sur X . Supposons que D est semi-ample et strictement nef alors D est ample.

Démonstration. Soit $m \geq 1$ un entier tel que mD est globalement engendré. On considère $\phi := \phi_{|mD|} : X \rightarrow Y \subset \mathbb{P}^N$ le morphisme associé au système linéaire $|mD|$ et, en notant H_Y une section hyperplane générale de Y , on a

$$\phi^*H_Y = mD.$$

Le morphisme ϕ ne contracte aucune courbe car D est strictement nef. En effet, si C est une courbe contractée par ϕ alors $mD.C = \phi^*(H_Y).C = 0$ ce qui contredit le fait que mD est strictement nef. On en déduit que ϕ est un morphisme fini et le lemme 1.1.7 précédent permet de conclure que mD puis D sont des diviseurs amples sur X . ■

On introduit les discrédances selon la définition 2.3.2. de [Fuj17] :

Définition 1.1.9 (Discrépances). Soit (X, Δ) une paire formée d'une variété normale X et d'un $\mathbb{Q}$ -diviseur Δ sur X telle que $K_X + \Delta$ est $\mathbb{Q}$ -Cartier. Soit $\psi : Y \rightarrow X$ une résolution des singularités de X . Il existe alors des diviseurs E_i et d'unique réels $a(E_i, X, \Delta)$ tels que

$$K_Y = \psi^*(K_X + \Delta) + \sum_i a(E_i, X, \Delta) E_i.$$

Dans ce cas, le coefficient $a(E_i, X, \Delta)$ est appelée la discrédance de E_i par rapport à la paire (X, Δ) . On définit également la discrédance de la paire (X, Δ) par

$$\text{discrep}(X, \Delta) = \inf_E \{a(E, X, \Delta) \mid E \text{ est un diviseur exceptionnel sur } X\}.$$

On énonce le Corollaire 2.31.(1) de [KM98] sur la discrédances de la paire (X, Δ) .

Proposition 1.1.10. Soit X une variété normale et Δ un $\mathbb{Q}$ -diviseur sur X tel que $K_X + \Delta$ est $\mathbb{Q}$ -Cartier. Alors on a les deux possibilités suivantes

- (1) $\text{discrep}(X, \Delta) = -\infty$, ou
- (2) $-1 \leq \text{discrep}(X, \Delta) \leq 1$.

Définition 1.1.11. Un morphisme birationnel $\psi : X \rightarrow Y$ entre deux variétés projectives normales $\mathbb{Q}$ -Gorenstein est dit crépant si $\psi^* K_Y = K_X$.

Le programme du modèle minimale peut faire apparaître des singularités même si on part d'une variété projective lisse. La définition qui suit introduit les principaux types de singularités des paires (X, Δ) formée d'une variété normale X et d'un $\mathbb{R}$ -diviseur Δ .

Définition 1.1.12 (Singularités de paires). Soit (X, Δ) une paire formée d'une variété normale X et d'un $\mathbb{R}$ -diviseur effectif Δ sur X telle que $K_X + \Delta$ est $\mathbb{R}$ -Cartier. On dit alors que la paire (X, Δ) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{terminale} \\ \text{canonique} \\ \text{klt} \\ \text{plt} \\ \text{lc} \end{array} \right. \quad \text{si } \text{discrep}(X, \Delta) \left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ \geq 0 \\ > -1 \text{ et } \lfloor \Delta \rfloor = 0 \\ > -1 \\ \geq -1. \end{array} \right.$$

Définition 1.1.13 (Diviseurs SNC). Soit X une variété algébrique lisse. Un diviseur D réduit est dit SNC (de l'anglais simple normal crossing divisor) si pour tout point $p \in X$, l'équation locale h de D en p peut s'écrire comme

$$h = z_1 \dots z_k$$

dans $\mathcal{O}_{X,p}$ où $\{z_1, \dots, z_k\}$ est une partie d'un système local de paramètres.

Définition 1.1.14 (Paire dlt). Soit (X, Δ) une paire formée d'une variété normale X et d'un $\mathbb{R}$ -diviseur Δ sur X telle que $K_X + \Delta$ est $\mathbb{R}$ -Cartier. Alors on dit que la paire (X, Δ) est dlt s'il existe une résolution des singularités $\psi : Y \rightarrow X$ vérifiant les deux conditions suivantes

- (1) $\text{Exc}(\psi)$ et $\text{Exc}(\psi) \cup \text{Supp}(f_*^{-1}\Delta)$ sont deux diviseurs SNC sur Y , et
- (2) $a(E, X, \Delta) > -1$ pour tout diviseur exceptionnel $E \subset Y$.

On énonce le lemme de négativité (3.39 de [KM98]) dont on se servira dans la suite de l'exposé par le biais de son corollaire 1.1.16.

Lemme 1.1.15 (Lemme de Négativité). Soit $\psi : Y \rightarrow X$ un morphisme birationnel entre variétés normales. Soit $-D$ un ψ -nef $\mathbb{R}$ -diviseur $\mathbb{R}$ -Cartier sur Y . Alors

- (1) D est effectif si, et seulement si, $\psi_* D$ est effectif.
- (2) Si D est effectif alors pour tout $x \in X$, on a $f^{-1}(x) \subset \text{Supp} D$ ou $f^{-1}(x) \cap \text{Supp} D = \emptyset$.

Corollaire 1.1.16. Soit $\psi : Y \rightarrow X$ un morphisme birationnel entre variétés normales et E un diviseur contracté par ψ alors il existe une courbe C sur Y contractée par ψ telle que $E.C < 0$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que pour toute courbe C contractée par ψ , on a $E.C \geq 0$ alors E est ψ -nef. De plus, comme $\psi_*(-E) = 0$ est effectif, le lemme de négativité 1.1.15 implique que $-E$ est effectif qui est une contradiction. ■

On introduit le sous-cône $\text{Pseff}(X)$ de $N^1(X)$ formé des classes numériques pseudo-effectives de diviseurs :

Définition 1.1.17 (Cône pseudo-effectif). Soit X une variété complète, on définit le cône pseudo-effectif $\text{Pseff}(X)$ de X comme le cône convexe fermé de $N^1(X)$ engendré par les classes numériques des diviseurs de Cartier effectif sur X . Un diviseur $\mathbb{R}$ -Cartier D sur X est alors appelé pseudo-effectif lorsque sa classe numérique appartient au cône $\text{Pseff}(X)$.

On énonce la décomposition de Zariski-Boucksom d'une classe numérique pseudo-effective (définition 3.7. et proposition 3.8. de [Bou04]).

Théorème 1.1.18. Toute classe numérique de diviseurs $S \in \text{Pseff}(X)$ se décompose de façon unique

$$S = P(S) + N(S)$$

avec $P(S)$ nef en codimension 1 et $N(S)$ effectif maximal dans le lieu non-nef de S .

La proposition suivante (2.4 de [Bou04]) donne une propriété de la restriction d'un diviseur nef en codimension 1 à un diviseur premier.

Proposition 1.1.19. *Pour tout diviseur premier $D \subset X$ et toute classe numérique de diviseurs P nef en codimension 1, la restriction $P|_D$ est pseudo-effective sur D .*

Grâce à ces résultats on montre le lemme qui suit. Celui-ci nous donne une méthode pour montrer qu'un diviseur D sur une variété normale X engendre un rayon extrémal du cône pseudo-effectif $\text{Pseff}(X)$ de X .

Lemme 1.1.20. *Soit S un diviseur premier $\mathbb{Q}$ -Cartier d'une variété X tel que $S|_S$ n'est pas pseudo-effectif. Alors S engendre un rayon extrémal de $\text{Pseff}(X)$ et $\kappa(X, S) = 0$.*

Démonstration. Dans la première partie de cette preuve, toutes les égalités sont des égalités de classes numériques de diviseurs. Comme $S|_S$ n'est pas pseudo-effectif, S est une composante irréductible de $N(S)$ et la décomposition de Zariski-Boucksom de S vérifie $P(S) = 0$ et $N(S) = S$. Supposons maintenant que $S = T + R$ avec $T, R \in \text{Pseff}(X)$ et montrons que $T = \lambda S$ et $R = \mu S$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme $P(S) = 0$ on a nécessairement $P(T) + P(R) = 0$ et donc

$$S = N(T) + N(R)$$

puis $S|_S = N(T)|_S + N(R)|_S$ qui n'est pas pseudo-effectif par hypothèse alors que $N(T)$ et $N(R)$ sont tous les deux effectifs. On trouve finalement que S est une composante irréductible de $N(T)$ ou $N(R)$ puis qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $N(T) = \lambda S$ et $N(R) = \mu S$. D'autre part, on a

$$P(T) = -P(R)$$

avec $P(T)$ et $P(R)$ tous deux nef en codimension 1. En particulier, pour tout diviseur D premier de X , on a $P(T)|_D = P(R)|_D = 0$. On en déduit que $P(T) = P(R) = 0$ et le résultat suit.

Montrons maintenant que $\kappa(X, S) = 0$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et D un diviseur de Cartier sur X numériquement équivalent à kS et tel que $S \not\subset D$. Comme $S|_S$ n'est pas pseudo-effectif, il existe une courbe C nef sur S tel que $S|_S.C < 0$. On a alors la contradiction suivante :

$$0 \leq D.C = kS.C = kS|_S.C < 0.$$

En particulier, $S \subset D$ et $D = kS$ dans $\text{Div}(X)$. ■

La fin de cette section est consacrée à l'énonciation du théorème du cône (4.1.5. de [Fuj17]). Celui-ci donne la structure de la partie $(K_X + \Delta)$ -négative du cône de Mori $\overline{NE}(X)$ et nous permet de contracter les rayons extrémaux et $(K_X + \Delta)$ -négatifs.

Théorème 1.1.21 (Théorème du cône). *Soit (X, Δ) une paire projective klt alors on a les propriétés suivantes :*

- (1) *il existe des courbes rationnelles possiblement singulières $C_j \subset X$ pour $j \in J$ (avec J au plus dénombrable) telles que*

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{(K_X + \Delta) \geq 0} + \sum_{j \in J} \mathbb{R}_+[C_j].$$

- (2) *Soit $R \subset \overline{NE}(X)$ un rayon extrémal $(K_X + \Delta)$ -négatif, alors il existe un unique morphisme $\varphi_R : X \rightarrow Z$ vers une variété projective Z avec $\varphi_{R*}\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_Z$ et telle qu'une courbe irréductible $C \subset X$ est contracté sur un point par φ_R si, et seulement si, $[C] \in R$.*

Après le théorème précédent, il est naturel de définir les contractions de Mori élémentaires comme les contractions de rayons extrémaux et $(K_X + \Delta)$ négatif.

Définition 1.1.22. *Un morphisme surjectif à fibres connexes $\psi : (X, \Delta) \rightarrow Y$ entre deux variétés projectives normales est appelé contraction de Mori si $-(K_X + \Delta)$ est ψ -ample. De plus, on dira que la contraction est élémentaire si $\rho(\psi) = 1$.*

1.2 Flips et flops

Les flips et les flops sont des chirurgies en codimension 2 effectuées sur les variétés projectives pour remplacer certaines courbes "négatives" dans un certain sens par des courbes "positives". Lorsqu'une contraction de Mori élémentaire $\varphi : (X, \Delta) \rightarrow Y$ est petite, il est possible que $K_Y + \varphi_*\Delta$ ne soit pas $\mathbb{Q}$ -Cartier et dans ce cas on ne peut plus appliquer le théorème du cône. Une solution est alors d'effectuer un flip pour remplacer les courbes contractées par φ par des courbes $(K_X + \Delta)$ -positives comme dans la définition suivante (4.3.4 de [Fuj17]).

Définition 1.2.1 (Flip).

On considère une paire (X, Δ) dlt et $\mathbb{Q}$ -factorielle. Soit $\psi : (X, \Delta) \rightarrow Y$ la contraction d'un rayon extrémal $(K_X + \Delta)$ -négatif qui est petite. Alors on appelle flip de ψ tout morphisme birationnel petit $\psi^+ : (X^+, \Delta^+) \rightarrow Y$ vérifiant $\rho(\psi^+) = 1$ et $K_{X^+} + \Delta^+$ est ψ^+ -ample où Δ^+ est la transformée stricte de Δ par $(\psi^+)^{-1} \circ \psi$. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} (X, \Delta) & \xleftarrow{\quad \text{flip} \quad} & (X^+, \Delta^+) \\ & \searrow \psi & \swarrow \psi^+ \\ & Y & \end{array}$$

Remarque :

- S'il existe, le flip d'une petite contraction est unique.
- Les rayons extrémaux et $(K_X + \Delta)$ -négatifs qui induisent des contractions petites $\psi : (X, \Delta) \rightarrow Y$ sont vus comme de mauvais rayons car dans ce cas Y n'est pas $\mathbb{Q}$ -factorielle et plus précisément, $K_Y + \psi_*\Delta$ n'est pas $\mathbb{Q}$ -Cartier. Le flip de ψ permet alors de changer notre modèle où l'on a remplacé le mauvais rayon extrémal par un rayon $(K_X + \Delta)$ -positif.

On peut toujours effectuer un flip sur une contraction de Mori élémentaire, c'est l'objet du théorème suivant (théorème 4.3.4. de [Fuj17]).

Théorème 1.2.2. *Soit $\psi : (X, \Delta) \rightarrow Y$ comme dans la définition 1.2.1 alors le flip*

$$\psi^+ : (X^+, \Delta^+) \rightarrow Y$$

de ψ existe. De plus, la paire (X^+, Δ^+) est dlt et $\mathbb{Q}$ -factorielle.

Le théorème précédent nous permet de passer dans un modèle où le "mauvais" rayon extrémal et $(K_X + \Delta)$ -négatif est remplacé par un rayon $(K_X + \Delta)$ -positif. Par contre, nous ne voulons pas changer indéfiniment de modèle par l'intermédiaire de flips. C'est pourquoi les théorèmes de finitude de suite de flips sont importants dans la recherche d'un modèle minimal.

Le théorème 1 de [Kaw18] donne le premier théorème de finitude des suites de flips en dimension 3 :

Théorème 1.2.3. *Soit (X, Δ) une paire dlt et $\mathbb{Q}$ -factorielle avec $\dim(X) = 3$ alors il n'existe aucune suite infinie de flips partant de (X, Δ) .*

On introduit maintenant la notion de flops qui connectent les modèles minimaux entre eux (voir théorème 1.2.6).

Définition 1.2.4. *Soit $\psi : X \rightarrow Y$ un petit morphisme birationnel et D un diviseur sur X tel que $-D$ est ψ -ample. Supposons de plus que ψ est indécomposable et crépante alors un petit morphisme birationnel $\psi^+ : X^+ \rightarrow Y$ est appelé D -flop de ψ si la transformée stricte D^+ de D sur X^+ est ψ^+ -ample.*

Remarque : S'il existe, le D -flop de ψ est unique.

Le théorème suivant (6.2 de [Kol89]) montre que les flops existent pour les variétés de dimension 3 à singularités canoniques.

Théorème 1.2.5. *Soit X une variété de dimension 3 à singularités canoniques et $\mathbb{Q}$ -factorielles alors les D -flops existent pour tout $\mathbb{Q}$ -diviseur effectif D sur X . De plus, il n'existe pas de suite infinie de tels flops.*

Les flops connectent les modèles minimaux (théorème 1 de [Kaw18]) dans le sens du théorème suivant :

Théorème 1.2.6. *Soit (X, Δ) et (X', Δ') deux paires terminales et $\mathbb{Q}$ -factorielles telles que $K_X + \Delta$ et $K_{X'} + \Delta'$ sont nef. Autrement dit, (X, Δ) et (X', Δ') sont minimales. Supposons qu'il existe une application birationnelle*

$$\alpha : X \dashrightarrow X'$$

telle que $\alpha_\Delta = \Delta'$ alors α se décompose en une suite finie de flops.*

1.3 MMP pour les volumes

Comme on l'a dit précédemment, le programme du modèle minimal dépend fortement des résultats de finitude sur les suites de flips successifs. Le théorème 1.2.3 nous permet d'affirmer que le MMP se termine en dimension 3 pour les paires dlt.

Construction 1.3.1 (MMP en dimension 3).

Donnée initiale : *Soit (X, Δ) une paire dlt formée d'une variété projective normale X de dimension 3 et d'un $\mathbb{Q}$ -diviseur Δ sur X .*

Etape 1 : *Si $K_X + \Delta$ est nef alors aller directement à l'étape 3. Sinon, il existe un rayon R extrémal et $(K_X + \Delta)$ -négatif du cône de Mori $\overline{NE}(X)$. On considère alors $\varphi_R : X \rightarrow Y$ la contraction du rayon R . Si φ_R est birationnelle alors aller à l'étape 2 et sinon aller à l'étape 3.*

Etape 2 : *Soit φ_R la contraction d'un rayon extrémal R qui est birationnelle alors les deux cas suivants se présentent :*

- (1) *la contraction φ_R est divisorielle et dans ce cas, repartir à l'étape 1 avec la paire dlt (Y, Δ') où $\Delta' = (\varphi_R)_*\Delta$ et $\rho(Y) = \rho(X) - 1$;*
- (2) *la contraction φ_R est petite et on effectue un flip sur la contraction φ_R : il existe un morphisme birationnel petit $\varphi_R^+ : X^+ \rightarrow Y$ tel que, en notant Δ^+ la transformée stricte de Δ par la composée $(\varphi_R^+)^{-1} \circ \varphi_R$, la paire (X^+, Δ^+) est dlt et le diviseur $K_{X^+} + \Delta^+$ est φ_R^+ -ample. On a également $\rho(X^+) = \rho(X)$. Dans ce cas, repartir à l'étape 1 avec la paire dlt (X^+, Δ^+) .*

Etape 3 : Les deux seuls cas menant à cette étape sont les cas minimaux suivants :

- (1) Il existe une contraction $\varphi : X \rightarrow Y$ avec $\dim Y < \dim X$ telle que $K_X + \Delta$ est φ -ample.
- (2) Le diviseur $K_X + \Delta$ est nef.

On en déduit pour toute paire dlt (X, Δ) de dimension 3, l'existence d'un modèle minimal $(X_{\min}, \Delta_{\min})$ dans le sens suivant :

Corollaire 1.3.2 (du théorème 1.2.3). *Le programme du MMP pour les paires dlt (X, Δ) avec $\dim X = 3$ se termine. En particulier, il existe une paire dlt $(X_{\min}, \Delta_{\min})$ et une application birationnelle*

$$\phi : X \dashrightarrow X_{\min}$$

telles que

- (1) ϕ^{-1} n'a aucun diviseur exceptionnel ;
- (2) $\Delta_{\min} = \phi_* \Delta$; et
- (3) soit $K_{X_{\min}} + \Delta_{\min}$ est nef, soit il existe une contraction $\varphi : X_{\min} \rightarrow Y$ avec $\dim Y < \dim X$ et telle que $K_{X_{\min}} + \Delta_{\min}$ est φ -ample

Démonstration. Soit $\varphi_R : X \rightarrow Y$ la contraction d'un rayon R extrémal et $(K_X + \Delta)$ -négatif et supposons que φ_R soit birationnelle. Si φ_R est petite, le théorème 1.2.3 montre qu'il n'existe pas de suite infinie de flips de φ_R . De plus, si φ_R est divisorielle alors $\rho(Y) = \rho(X) - 1$. En itérant ce processus, on voit que l'on obtient soit une contraction φ_R avec $\dim Y < \dim X$, soit une variété X qui ne possède aucun $(K_X + \Delta)$ -négatif. ■

1.4 Extraction d'un diviseur et $\mathbb{Q}$ -factorialisation

Cette section est fondamentale pour la partie 4 qui est dédiée à la classification des cubiques de $\mathbb{P}^4$ à singularités canoniques. En effet, on utilisera le théorème d'extraction de diviseur 1.4.5 pour mener à bien cette classification.

On commence par définir la notion relative de modèle minimal en toute dimension selon la définition 1.19 de [Kol13].

Définition 1.4.1. Soit (X, Δ) une paire avec X normale et $\Delta = \sum a_i D_i$ un $\mathbb{Q}$ -diviseur de Weil tels que $K_X + \Delta$ est $\mathbb{Q}$ -Cartier. Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre, alors on appelle modèle minimal de (X, Δ) sur S une paire (X_m, Δ_m) faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\phi} & X_m \\
f \searrow & & \swarrow f_m \\
& S &
\end{array}$$

et telle que :

- (1) f_m est propre ;
- (2) ϕ est une application birationnelle et ϕ^{-1} n'a aucun diviseur exceptionnel ;
- (3) $\Delta_m = \phi_* \Delta$;
- (4) $K_{X_m} + \Delta_m$ est $\mathbb{Q}$ -Cartier et f_m -nef ;
- (5) $a(E, X, \Delta) < a(E, X_m, \Delta_m)$ pour tout $E \subset X$ diviseur exceptionnel de ϕ .

De tels modèles minimaux existent dans le cas de la dimension 3 (conjecture 1.29 et 1.30.2 de [Kol13]).

Théorème 1.4.2. *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme dominant propre entre deux variétés normales avec $\dim(X) = 3$ et soit Δ un $\mathbb{R}$ -diviseur effectif sur X tel que la paire (X, Δ) est lc. Alors (X, Δ) possède un modèle minimal si, et seulement si, la restriction de $K_X + \Delta$ à une fibre générique de f est pseudo-effective.*

Ce théorème est plus général que le corollaire 1.3.2. On a également l'existence d'un modèle minimal sous les conditions suivantes (conjecture 1.29 et 1.30.6 de [Kol13]).

Théorème 1.4.3. *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme birationnel entre deux variétés normales et soit Δ un $\mathbb{R}$ -diviseur effectif sur X tel que la paire (X, Δ) est dlt, $\mathbb{Q}$ -factorielle et*

$$K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} f^*(D) + E \quad (1.1)$$

avec D un $\mathbb{Q}$ -diviseur sur S et E un diviseur effectif f -exceptionnel. Alors (X, Δ) possède un modèle minimal (X_m, Δ_m) dlt et $\mathbb{Q}$ -factoriel.

Ce dernier théorèmes nous permet d'établir la construction suivante (1.35. de [Kol13]) dont les applications sont nombreuses. On peut en effet exhiber un modèle avec les propriétés voulues comme le montre les théorèmes 1.4.5 et 1.4.7.

Construction 1.4.4. *Soit (X, Δ) une paire lc, $f : Y \rightarrow (X, \Delta)$ une log résolution et $\{E_i, i \in I\}$ les diviseurs exceptionnels de f . Pour toute famille de rationnels $(c_i)_{i \in I}$ tels que*

$$\max\{0, -a(E_i, X, \Delta)\} \leq c_i \leq 1, \quad \forall i \in I,$$

on pose $\Delta' = \sum c_i E_i$ et on note $\tilde{\Delta}$ la transformée stricte de Δ . En notant F le diviseur effectif f -exceptionnel $\sum (c_i + a(E_i, X, \Delta)) E_i$, on a

$$K_Y + \tilde{\Delta} + \Delta' \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + \Delta) + F.$$

et donc $(Y, \tilde{\Delta} + \Delta')$ est une paire dlt et $\mathbb{Q}$ -factorielle. On remarque que $\text{Supp } F = \bigcup_{i \in J} E_i$ où $J = \{i \in I \mid c_i > -a(E_i, X, \Delta)\}$. D'après le théorème 1.4.3, la paire $(Y, \tilde{\Delta} + \Delta')$ possède un modèle minimal dlt et $\mathbb{Q}$ -factoriel

$$f_m : (Y_m, \tilde{\Delta}_m + \Delta'_m) \rightarrow (X, \Delta)$$

et les diviseurs contractés par le MMP sont exactement les composantes de $\text{Supp } F$.

La première application de cette construction est l'extraction d'un diviseur. Celle-ci nous permet, pour une variété projective de dimension 3 à singularités canoniques, de trouver une contraction birationnelle crépante ψ dont le lieu exceptionnel est un diviseur premier. De plus, la proposition 1.4.6 qui suit le théorème montre que $\rho(\psi) = 1$ quitte à effectuer une suite finie de flips.

Théorème 1.4.5 (Extraction d'un Diviseur). *Soit X une variété projective de dimension 3 à singularités canoniques et $\mathbb{Q}$ -factorielles et soit $C \subset X_{\text{sing}}$ une courbe irréductible du lieu singulier alors il existe une contraction birationnelle crépante*

$$\psi : X' \rightarrow X$$

avec X' à singularités canoniques et $\mathbb{Q}$ -factorielles et telle que $\text{Exc}(\psi)$ est un diviseur irréductible D au-dessus de la courbe irréductible C de X_{sing} .

Démonstration. Soit $Y \rightarrow X$ une résolution des singularités de X et E un diviseur exceptionnel irréductible de discrétance nulle au-dessus de la courbe irréductible C de X_{sing} , tous les diviseurs exceptionnels seront notés E_i pour $i \in I$ avec $E = E_{i_0}$. On applique la construction précédente en choisissant les coefficients de la manière suivante : $c_{i_0} = 0$ et $c_i = 1$ si $i \neq i_0$. Tous les diviseurs E_i (pour $i \neq i_0$) sont alors contractés et on trouve $\psi : X' \rightarrow X$ une contraction birationnelle crépante qui a E pour seul diviseur exceptionnel. X' est alors à singularités canoniques et $\mathbb{Q}$ -factorielles.

De plus, comme $X \setminus \psi(E) = X \setminus C$ est $\mathbb{Q}$ -factoriel par hypothèse, on a $\text{Exc}(\psi) = E$. ■

La proposition suivante calcule le nombre de Picard d'une contraction crépante dont le lieu exceptionnel est un diviseur premier au-dessus d'une courbe. Ceci marche en particulier pour l'extraction de diviseur 1.4.5.

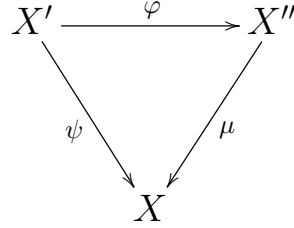
Proposition 1.4.6. *Soient X et X' deux variétés de dimension 3 à singularités canoniques et $\psi : X' \rightarrow X$ une contraction birationnelle crépante dont le lieu exceptionnel est un diviseur premier E contracté sur une courbe C alors, quitte à effectuer une suite finie de flips sur X' , on a*

$$\rho(X'/X) = 1.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ tel que la paire $(X', \varepsilon E)$ est klt. Par le lemme de négativité (corollaire 1.1.16), il existe une courbe $l \subset E$ contractée par ψ telle que $E.l < 0$. On a alors

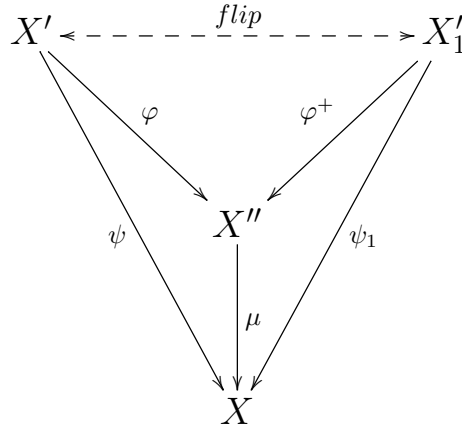
$$(K_{X'} + \varepsilon E).l = (\psi^*(K_X) + \varepsilon E).l = \varepsilon E.l < 0$$

en particulier $K_{X'} + \varepsilon E$ n'est pas ψ -nef. Soit $\varphi : X' \rightarrow X''$ la contraction élémentaire au-dessus de X d'un rayon R extrémal et $(K_{X'} + \varepsilon E)$ -négatif. En particulier, φ est une contraction de Mori élémentaire et $\rho(X'/X'') = 1$. On est dans la configuration suivante



Pour arriver au résultat, on distingue deux cas :

- (1) Si φ est divisorielle alors $\varphi \simeq \psi$. En effet, dans ce cas φ contracte E sur une courbe irréductible $C'' \subset X''$ et donc le morphisme μ est un isomorphisme de $X'' \setminus C''$ sur $X \setminus C$. La restriction $\mu|_{C''} : C'' \rightarrow C$ est un morphisme fini entre deux courbes irréductibles et comme les fibres de $\varphi|_E$ et $\psi|_E$ sont connexes, le morphisme $\mu|_{C''}$ est un isomorphisme et $\varphi \simeq \psi$. On a finalement $\rho(X'/X) = \rho(X'/X'') = 1$.
- (2) Si φ est petite, on effectue un flip sur φ au-dessus de X (théorème 1.2.2) et on a le diagramme commutatif suivant



On se replace maintenant au début de la preuve en remplaçant (X', ψ) par (X'_1, ψ_1) et ainsi de suite. Comme toute suite de flips est finie par le théorème 1.2.3, il existe une paire (X'_n, ψ_n) dont la contraction de Mori est divisorielle (cas (1) de la preuve) et qui vérifie donc

$$\rho(X'_n/X) = 1.$$

■

La seconde application de la construction 1.4.4 est l'existence pour une variété de dimension 3 à singularités canoniques d'un morphisme birationnel petit dont la source est $\mathbb{Q}$ -factorielle.

Théorème 1.4.7 ($\mathbb{Q}$ -factorialisation). *Soit X une variété de dimension 3 à singularités canoniques, alors il existe un morphisme birationnel petit (i.e. sans diviseur exceptionnel)*

$$\psi : X^{qf} \rightarrow X$$

tel que X^{qf} est une variété de dimension 3 à singularités canoniques et $\mathbb{Q}$ -factorielles. Si de plus, X n'est pas $\mathbb{Q}$ -factorielle alors on a

$$\rho(X^{qf}/X) \geq 1.$$

Démonstration. Soit $Y \rightarrow X$ une résolution des singularités de X , tous les diviseurs exceptionnels de cette résolution sont de discrédances positives ou nulles donc en utilisant la construction avec tous les $c_i = 1$, tous les diviseurs exceptionnels sont contractés par le MMP. On trouve alors un morphisme petit $\psi : X' \rightarrow X$ avec X' $\mathbb{Q}$ -factoriel. Supposons maintenant que X n'est pas $\mathbb{Q}$ -factoriel et montrons que $\rho(X'/X) \geq 1$. En effet, si $\rho(X'/X) = 0$, le diagramme suivant nous donne une contradiction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} \otimes \text{Pic}(X) & \xrightarrow[\sim]{\psi_1^*} & \mathbb{Q} \otimes \text{Pic}(X') \\ \downarrow \iota \subsetneq & & \downarrow \iota' \sim \\ \mathbb{Q} \otimes \text{Cl}(X) & \xrightarrow[\sim]{\psi_2^*} & \mathbb{Q} \otimes \text{Cl}(X') \end{array}$$

où on a noté ψ_1^* et ψ_2^* comme les tiré-en-arrière respectifs des classes de Picard et des classes de diviseurs de Weil, ι' est un isomorphisme car X' est $\mathbb{Q}$ -factorielle, ι est injective mais non surjective car X n'est pas $\mathbb{Q}$ -factorielle, ψ_1^* et ψ_2^* sont des isomorphismes respectivement car $\rho(X) = \rho(X')$ et ψ est petite (i.e. $\text{codim}_{X'} \text{Exc}(\psi) \geq 2$). ■

Définition 1.4.8. Soit X une variété de dimension 3 à singularités canoniques, alors on appelle $\mathbb{Q}$ -factorialisation de X tout morphisme petit (i.e. sans diviseur exceptionnel)

$$\psi : X^{qf} \rightarrow X$$

tel que X^{qf} est une variété de dimension 3 à singularités canoniques et $\mathbb{Q}$ -factorielles.

Pour X une variété projective non $\mathbb{Q}$ -factorielle, on a vu que tout $\mathbb{Q}$ -factorialisation ψ de X vérifie $\rho(\psi) \geq 1$. La proposition suivante donne un résultat plus précis.

Proposition 1.4.9. Toutes les $\mathbb{Q}$ -factorialisations de X ont même nombre de Picard.

Démonstration. Si $\psi : X^{qf} \rightarrow X$ est une $\mathbb{Q}$ -factorialisation alors $\psi^* : Cl(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow Cl(X^{qf}) \otimes \mathbb{Q}$ est un isomorphisme car ψ est petit. Le nombre de Picard de X^{qf} est alors égal à $\dim_{\mathbb{Q}} Cl(X) \otimes \mathbb{Q}$ qui ne dépend que de la variété X . ■

1.5 Théorème d'Andreatta

Cette section, qui suit l'article d'Andreatta [And95], a pour but d'énoncer son théorème principal et de l'appliquer à la modification crépante d'une cubique de $\mathbb{P}^4$. Cette application n'est pas innocente car c'est un argument important de la classification des cubiques de $\mathbb{P}^4$ à singularités canoniques établie au chapitre 4.

Définition 1.5.1. Soit X une variété irréductible à singularités klt et $\varphi : X \rightarrow Y$ une contraction de Mori. On définit la valeur nef d'un diviseur de Cartier L ample sur X par le nombre positif

$$\tau(L) := \min \{t \in \mathbb{R} \mid K_X + tL \text{ est nef}\}.$$

Par le théorème de rationalité (théorème 4.1.1. de [KMM87]), on a $\tau(L) \in \mathbb{Q}$ pour tout diviseur L ample sur X .

Le théorème d'Andreatta (2.1. de [And95]) décrit les composantes irréductibles des fibres non triviales des contractions de Mori en fonction de la valeur nef $\tau(L)$ d'un diviseur ample sur X .

Théorème 1.5.2. Soit X une variété projective à singularités klt, $\varphi : X \rightarrow Y$ une contraction de Mori et L un diviseur de Cartier ample sur X . On note $r = \tau(L)$ la valeur nef de L , F une composante irréductible d'une fibre non triviale et $r' := -\lfloor -r \rfloor$. Alors on a les propriétés suivantes :

- (1) $\dim F \geq r - 1$ et si $\dim F < r$ alors $F \simeq \mathbb{P}^{r'-1}$ et $L|_F = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r'-1}}(1)$.
- (2) Si $\dim F > \dim X - \dim Y$ alors $\dim F \geq r$ et si de plus $\dim F = r$ alors $F \simeq \mathbb{P}^r$ et $L|_F = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$.
- (3) Si toutes les composantes F d'une fibre vérifient $\dim F < r$ alors la fibre est irréductible.

On donne maintenant une application de ce théorème dans le cas où la contraction de Mori est birationnelle (cas (2) du théorème). On verra au chapitre 4 d'autres applications de ce théorème.

Application : Soit X une cubique de $\mathbb{P}^4$ dans la configuration suivante :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\psi} & X \\ \phi \downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

où ψ est un morphisme birationnel crépant, X' est à singularités klt et ϕ est une contraction de Mori birationnelle. Alors la cubique X contient un plan linéaire de $\mathbb{P}^4$.

En effet, en notant H_X la section hyperplane générique de X , on a $-K_{X'} = 2\psi^*H_X$. Soit N un diviseur de Cartier ample sur Y , on pose alors

$$L := \psi^*H_X + \phi^*N.$$

Vérifions que L est un diviseur ample sur X' . Par la proposition 1.1.8, il nous suffit de montrer que L est semi-ample et strictement nef. La semi-amplitude provient simplement du fait que L est la somme de deux tirés-en-arrière de diviseurs amples par des morphismes surjectifs, en particulier L est globalement engendré. Soit maintenant C une courbe irréductible sur X' alors

$$L.C = \begin{cases} \psi^*H_X.C > 0 & \text{si } C \text{ est contractée par } \phi; \text{ car } -K_{X'} \text{ est } \phi\text{-ample} \\ \psi^*H_X.C + N.\phi_*C > 0 & \text{sinon; car } N \text{ est ample et } \psi^*H_X \text{ est nef} \end{cases}$$

ce qui montre que L est strictement nef.

Calculons maintenant la valeur nef $\tau(L)$ de L : pour tout réel $t < 2$ alors $K_{X'} + tL = (t-2)\psi^*H_X + t\phi^*N$ n'est pas nef car pour toute courbe contractée par ϕ

$$(K_{X'} + tL).C = (t-2)\psi^*H_X.C < 0$$

car ψ^*H_X est ϕ -ample. De plus, $K_{X'} + 2L = 2\phi^*N$ est nef donc finalement

$$\tau(L) = 2.$$

Le théorème d'Andreatta 1.5.2 implique que toute fibre non triviale F est de dimension au moins 2 en particulier ϕ n'est pas une petite contraction. De plus, tout diviseur exceptionnel irréductible F de ϕ vérifie

$$F \simeq \mathbb{P}^2 \text{ et } L|_F \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1).$$

On remarque que $F.\psi^*H_X^2 = F.L^2$ car $(\phi^*N)|_F \equiv 0$ dans $Pic(F)$. On note $d = \deg \psi|_F$ et on calcule le degré de $P = \psi(F)$ dans $\mathbb{P}^4$:

$$\deg_{\mathbb{P}^4} P = \psi(F).H^2 = \frac{1}{d}F.\psi^*H_X^2 = \frac{1}{d}F.L^2 = \frac{1}{d}(L|_F)^2 = \frac{1}{d}.$$

On en déduit que $d = 1$ est P est un plan linéaire de $\mathbb{P}^4$ inclus dans la cubique X .

Chapitre 2

Surfaces singulières

Ici, le terme "surface" désignera "surface projective complexe". L'objectif de ce chapitre est de donner les résultats principaux de la théorie des surfaces normales dont on va se servir dans l'exposé. Les démonstrations d'une minorité de résultats seront données. Ce chapitre a la vocation de montrer l'importance des singularités *ADE* dans ce champs d'étude et comment elles apparaissent de façon tout à fait naturelle au sein de cette théorie.

Dans un premier temps, en suivant [Bea78] et [Har77], nous allons rappeler les principaux résultats sur les surfaces lisses et leurs modèles minimaux avec notamment le bien-known théorème de contraction de Castelnuovo. Ce dernier donne un critère pour qu'une courbe irréductible E sur une surface lisse S soit contractable sur un point lisse d'une surface S .

Ensuite, pour E une courbe connexe sur une surface lisse S , on s'intéressera aux différents critères de contraction de E sur un point c'est-à-dire aux morphismes birationnels $\pi : S \rightarrow S'$ tels que $\pi(E)$ est un point p sur une surface normale S' . Dans ce cas p n'est pas toujours un point lisse de S' et si on suppose que la contraction π est crépante (i.e. $\pi^*K_{S'} = K_S$) alors p est une singularité *ADE* de S' . Ce sera le type de singularités qui focalisera notre attention au cours de la suite du chapitre, notamment nous étudierons localement l'éclatement d'une surface le long de telles singularités. Les résultats de cette section sont présents dans [Bö1].

La section suivante portera d'abord sur la classification des singularités des surfaces cubiques de $\mathbb{P}^3$ faite par Bruce et Wall dans [BW79]. Cela nous permettra dans un deuxième temps, de regarder cinq cas de surfaces cubiques d'un type de singularité bien choisi. Plus précisément, on se demandera si certaines droites sont d'inflexion sur ces surfaces cubiques (i.e. l est d'inflexion sur une surface cubique $S \subset \mathbb{P}^3$ s'il existe un plan linéaire P de $\mathbb{P}^3$ tel que $S \cap P = l$). Enfin, nous énoncerons un théorème de classification des cubiques non normales de $\mathbb{P}^3$ issu de [Dol12].

Dans la suite de ce chapitre, on étudiera le calcul d'intersection sur les surfaces normales. Plus précisément, on donnera la définition du produit d'intersection qui fait intervenir le pullback de Mumford d'une courbe C (le $\mathbb{Q}$ -diviseur de la résolution minimale qui contient la transformée stricte de C et qui est trivial sur les fibres). Ensuite, on donnera les résultats de calculs explicites de pullback de Mumford d'une courbe C irréductible lisse sur une surface S en fonction des singularités présentes sur celle-ci (seulement dans le cas des singularités ADE de surfaces cubiques).

La dernière partie de ce chapitre traite les surfaces de del Pezzo (i.e. les surfaces Gorenstein normales S telles que $-K_S$ est ample). Tout d'abord exposera les premières propriétés de telles surfaces (issues de [Dol12]) puis on donnera la classification des surfaces de del Pezzo avec $\rho = 1$ de Miyanishi et Zhang dans [MZ88]. Pour de telles surfaces S , ils calculent également le défaut de factorialité $Cl(S)/Pic(S)$ de S et le groupe fondamental $\pi_1(S^0)$ du lieu lisse S^0 de S .

2.1 Généralités sur les surfaces lisses

Cette section a pour but de passer en revue sans démonstration les résultats bien connus sur les surfaces algébriques complexes. Les preuves de ces énoncés apparaissent tous dans [Bea78] et [Har77]. Ici, toutes les surfaces considérées seront des surfaces projectives lisses sauf mention explicite du contraire.

On commence par énoncer sans démonstration le fondamental théorème de Riemann-Roch (Théorème I.12 de [Bea78]).

Théorème 2.1.1 (Riemann-Roch).

Soit S une surface lisse alors pour tout diviseur D sur S , on a

$$\chi(\mathcal{O}_S(D)) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(D^2 - D.K_S).$$

On en déduit directement la formule du genre d'une courbe irréductible sur une surface lisse (I.15 de [Bea78]) :

Proposition 2.1.2 (Formule du genre).

Soit C une courbe irréductible sur une surface lisse S alors le genre arithmétique de C définie par $p_a(C) = h^1(C, \mathcal{O}_C)$ vérifie la formule suivante :

$$p_a(C) = 1 + \frac{1}{2}(C^2 + C.K_S).$$

Démonstration. De la suite exacte courte $0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-C) \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$, on déduit l'égalité $1 - g(C) = \chi(\mathcal{O}_C) = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{O}_S(-C))$. Or on a $\chi(\mathcal{O}_S(-C)) = \chi(\mathcal{O}_S) + (C^2 + C.K_S)/2$ par le théorème de Riemann-Roch et la formule du genre en découle. ■

Remarque : Si S est une surface normale et C n'est pas un diviseur de Cartier de S alors la formule du genre est fausse en général. C'est ce que montre l'exemple 2.4.4 en utilisant le calcul d'intersection sur les surfaces normales introduit dans la section 2.4.

Cette dernière proposition motive la définition du genre arithmétique pour un diviseur effectif quelconque sur une surface lisse S :

Définition 2.1.3 (Genre arithmétique d'un diviseur effectif). *Soit Z un diviseur effectif sur une surface lisse S , on définit le genre arithmétique de Z par*

$$p_a(Z) = 1 + \frac{1}{2}(Z^2 + Z.K_S).$$

On donne également un critère numérique important pour qu'un diviseur sur une surface lisse soit ample (théorème V.1.10 de [Har77]).

Théorème 2.1.4 (Critère de Nakai-Moishezon). *Soit S une surface projective lisse et D un diviseur sur S . Alors D est ample si, et seulement si, $D^2 > 0$ et $D.C > 0$ pour toute courbe irréductible C sur S .*

Modèles Minimaux des Surfaces Lisses

Pour rendre la suite de l'exposé plus claire, on confondra une surface S avec tous les représentants de sa classe d'isomorphisme. L'enjeu de ce paragraphe est le suivant : étant donné une surface projective lisse S , trouver une surface projective lisse S_{min} birationnellement équivalente à S et minimale (i.e. tout morphisme birationnel $\mu : S_{min} \rightarrow S'$ sur une surface projective lisse S' est un isomorphisme). Pour cela, notre premier objectif est de comprendre la constitution des morphismes birationnels entre deux surfaces lisses. Ensuite nous allons trouver un critère pour qu'une courbe soit contractée par un morphisme birationnel sur un point lisse.

Commençons par définir un type de courbe qui joue un rôle crucial dans la théorie des modèles minimaux des surfaces lisses. Ce sont les (-1) -courbes :

Définition 2.1.5. *Soit S une surface lisse, on dit qu'une courbe E est une (-1) -courbe si E est isomorphe à $\mathbb{P}^1$ et vérifie $E^2 = -1$.*

Regardons de plus près ce qu'il se produit lorsque l'on éclate un point d'une surface projective lisse et le lien avec les (-1) -courbes (proposition II.3. de [Bea78])

Proposition 2.1.6. *Soit $\varepsilon : S' \rightarrow S$ l'éclatement d'une surface lisse S en un point p , alors S' est lisse et le lieu exceptionnel de ε est une (-1) -courbe. De plus, on a*

$$\text{Pic } S' = \varepsilon^*(\text{Pic } S) \oplus \mathbb{Z}E$$

Les éclatements sont en fait les briques pour construire les morphismes birationnels. C'est l'objet du théorème suivant (théorème II.11 de [Bea78]).

Proposition 2.1.7. *Tout morphisme birationnel non trivial $\pi : S' \rightarrow S$ entre deux surfaces lisses est une composée d'éclatements de points. En particulier, on a $\rho(S') > \rho(S)$.*

Pour S une surface lisse, on note $\text{Clbir}(S)$ l'ensemble des surfaces lisses birationnellement équivalentes à S et on définit la relation d'ordre suivante sur $\text{Clbir}(S)$:

Définition 2.1.8. *Soit S_1 et S_2 deux surfaces de $\text{Clbir}(S)$, on dit que S_1 domine S_2 et on note $S_1 \succeq S_2$ s'il existe un morphisme birationnel $\pi : S_1 \rightarrow S_2$. On appelle surface minimale toute surface minimale pour cette relation d'ordre.*

Remarque : D'après la proposition 2.1.7, si S n'est pas une surface minimale alors il existe une (-1) -courbe E sur S . On peut alors se demander si la réciproque est vraie. Le théorème 2.1.10 répond positivement à cette question.

L'existence d'un modèle minimale lisse pour une surface lisse est garanti par le fait que le nombre de Picard d'une surface est positif et que $\rho(S_1) < \rho(S_2)$ s'il existe un morphisme birationnel non trivial $S_2 \rightarrow S_1$. Tout cela est résumé dans la proposition suivant (proposition II.16. de [Bea78]).

Proposition 2.1.9. *Toute surface lisse S domine une surface lisse minimale.*

Démonstration. En effet, toute suite infinie de morphismes birationnels

$$\pi_i : S_i \rightarrow S_{i+1}$$

est stationnaire car $(\rho(S_i))_i$ est une suite strictement décroissante d'entiers positifs par la proposition 2.1.7. ■

Remarque : Ce modèle minimal n'est pas unique : c'est ce que montre l'exemple 2.1.11.

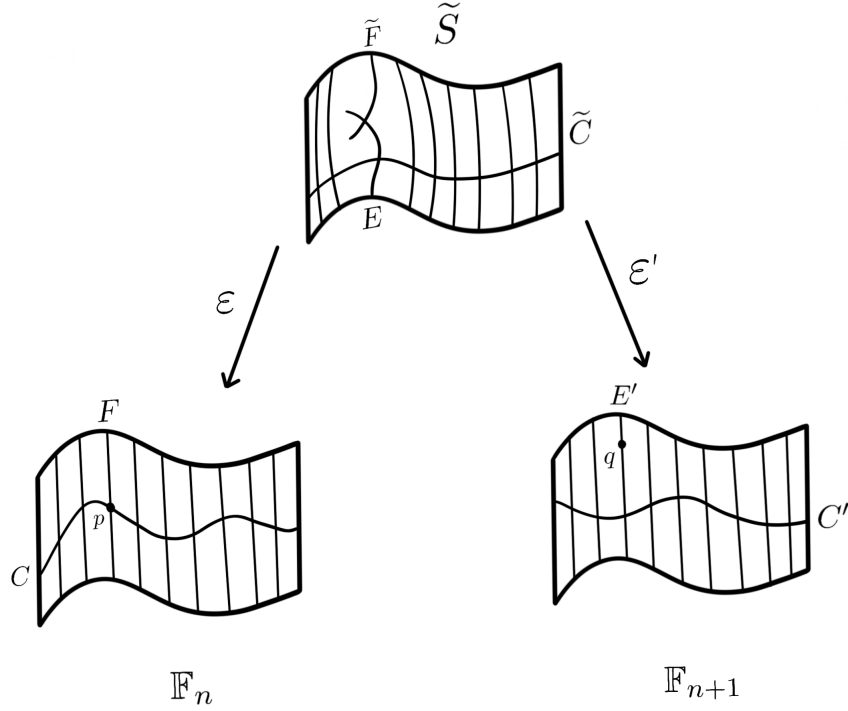
Théorème 2.1.10 (Critère de contraction de Castelnuovo). *Soit S une surface lisse et E une courbe irréductible sur S , alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) E est une (-1) -courbe de S ;
- (2) *il existe une surface lisse S' et une contraction $\pi : S \rightarrow S'$ telle que $\pi(E)$ est un point $p \in S'$ et la restriction $\pi|_{S \setminus E} : S \setminus E \rightarrow S' \setminus \{p\}$ est un isomorphisme.*

Exemple 2.1.11 (Surfaces de Hirzebruch). On appelle surface de Hirzebruch toute surface géométriquement réglée sur $\mathbb{P}^1$ (i.e. une surface S munie d'un morphisme $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ dont toutes les fibres sont isomorphes à $\mathbb{P}^1$). Soit S une telle surface alors soit $S \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, soit il existe une unique section C de π telle que $C^2 < 0$. De plus, si deux surfaces de Hirzebruch ont le même C^2 alors elles sont isomorphes. Pour $n \geq 1$, on note donc $\mathbb{F}_n$ l'unique surface de Hirzebruch dont la section négative C vérifie $C^2 = -n$ et $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Pour tout $n \neq 1$, la surface $\mathbb{F}_n$ est minimale mais la section négative de $\mathbb{F}_1$ est par définition une (-1) -courbe. Lorsque l'on contracte cette dernière, on retombe sur $\mathbb{P}^2$ qui est minimale. Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère $\varepsilon : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{F}_n$ l'éclatement de S en un point p de la section négative C de $\mathbb{F}_n$ et on note E la (-1) -courbe exceptionnelle de ε . Soit $F \simeq \mathbb{P}^1$ la fibre de π contenant p et $\tilde{F} \simeq \mathbb{P}^1$ (resp. $\tilde{C}$) la transformée stricte de F (resp. C) par ε , on a

$$\tilde{F}^2 = (\tilde{F} + E)^2 - 2E \cdot \tilde{F} - E^2 = F^2 - 1 = -1$$

et de même $\tilde{C}^2 = C^2 - 1 = -(n+1)$. Le théorème de Castelnuovo nous donne alors l'existence d'une surface lisse S et de l'éclatement d'un point $q \in S$, noté $\varepsilon' : \tilde{S} \rightarrow S$, dont la courbe exceptionnelle est $\tilde{F}$. La surface S est en fait une surface de Hirzebruch et $E' = \varepsilon'(\tilde{E})$ est une fibre du réglage.



De plus, le point q n'appartient pas à la courbe $C' = \varepsilon'(\tilde{C})$ qui vérifie donc $C'^2 = -(n+1)$. On en déduit que la surface S est isomorphe à $\mathbb{F}_{n+1}$ et que $\tilde{S}$ est une surface lisse qui admet deux modèles minimaux différents.

2.2 Singularités de surfaces normales

Le théorème de Castelnuovo de la section précédente nous dit que les contractions des (-1) -courbes sur une surface projective lisse donnent des surfaces lisses. Dans cette section, on commence avec une surface lisse S et on s'intéresse à toutes les courbes C sur S non forcément irréductibles que l'on peut contracter. Les surfaces obtenues par ce procédé sont normales mais singulières pour la plupart des cas. L'objectif suivant sera de classer ces singularités en fonction de la configuration des composantes irréductibles de la courbe C contractée. Dans toute cette partie, on suit le chapitre 3 de [BØ1].

Critères de contraction

Ici, nous allons donner plusieurs critères de contractions différents pour une courbe connexe C sur une surface projective lisse S . Le critère le plus important de cette section est celui du théorème 2.2.10 qui caractérise les contractions crépantes (voir définition 2.2.8).

Pour commencer, énonçons sans démonstration un résultat d'algèbre linéaire (proposition 2.5 de [B01]).

Proposition 2.2.1. *Soient φ une forme bilinéaire symétrique sur un $\mathbb{Q}$ espace vectoriel M et $(e_i)_i$ une base de M telle que $\varphi(e_i, e_j) \geq 0$ pour tout $i \neq j$. Supposons qu'il existe $z = \sum_j a_j e_j$ tel que pour tout i , $a_i > 0$ et $\varphi(z, e_i) = 0$. Alors :*

- (i) $\varphi(x, x) \leq 0$ pour tout $x \in M$, et
- (ii) $\{x \in M | \varphi(x, x) = 0\}$ est un sous-espace linéaire de M et sa dimension est égale au nombre de composantes connexes du graphe dont les sommets sont les e_i et il y a une arête entre e_i et e_j si, et seulement si, $\varphi(e_i, e_j) > 0$.

Cette proposition nous donne une condition nécessaire pour qu'une courbe connexe $E = \cup_{i=1}^n E_i$ puisse être contractée (corollaire 2.7. de [B01]).

Corollaire 2.2.2. *Soient S une surface lisse et $\pi : S \rightarrow S'$ un morphisme birationnel vers une surface normale S' . Si $E = \cup_{i=1}^n E_i$ est une fibre non-triviale de π (i.e. $\pi(E) = \{p\}$) alors la matrice d'intersection $(E_i \cdot E_j)_{i,j}$ est définie négative.*

Les courbes connexes $C = \cup_i C_i$ que l'on peut contracter ont nécessairement une matrice d'intersection définie négative et en particulier $C_i^2 < 0$ pour tout i . Le théorème de l'indice de Hodge qui suit (corollaire 2.4. de [B01]) donne une méthode pour montrer que l'auto-intersection d'une courbe est strictement négative.

Théorème 2.2.3 (Indice de Hodge). *Soit H un diviseur sur une surface projective lisse S tel que $H^2 > 0$. Si D est un diviseur vérifiant $D \neq 0$ et $D \cdot H = 0$ alors $D^2 < 0$.*

Le critère de Grauert ([Gra62]) affirme que cette condition est également suffisante mais ne garantit pas que la surface obtenue soit algébrique. On va maintenant donner différents critères de contraction pour une courbe connexe par un morphisme birationnel. Commençons par un premier critère assez général (théorème 3.9. de [B01]).

Théorème 2.2.4. *Soit S une surface lisse et E une courbe connexe avec $E_1, \dots, E_n$ comme composantes irréductibles. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *il existe un morphisme $\pi : S \rightarrow S'$ tel que S' est une surface projective normale, $\pi(E)$ est un point $p \in S'$, π est un isomorphisme de $S \setminus E$ sur $S' \setminus \{p\}$ et $\chi(\mathcal{O}_S) = \chi(\mathcal{O}_{S'})$;*
- (ii) *la matrice d'intersection $(E_i \cdot E_j)_{i,j}$ est définie négative et $p_a(Z) \leq 0$ pour tout diviseur effectif dont le support est dans E .*

De plus, le couple (S', π) est unique à isomorphisme près.

Notre prochain but est de généraliser le théorème 2.1.10 (contraction de Castelnuovo) à une courbe non irréductible E . Cela passe par la définition 2.2.6 ci-dessous qui s'appuie sur la proposition 2.2.5 (lemme 3.18. de [B01]).

Proposition 2.2.5. *Soit S une surface lisse et E une courbe connexe avec $E_1, \dots, E_n$ comme composantes irréductibles dont la matrice d'intersection $(E_i.E_j)_{i,j}$ est définie négative. Alors il existe des diviseurs non triviaux et à support dans E tels que $Z.E_i \leq 0$. De plus, parmi de tels diviseurs il en existe un minimal Z .*

Démonstration. Soient $G \subset \text{Div}(X)$ le groupe abélien libre engendré par les E_i et $d \in \mathbb{Z}$ le déterminant de la matrice d'intersection $(E_i.E_j)_{i,j}$ qui est définie négative. Pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ il existe un unique diviseur Z tel que $Z.E_i = da_i$. En particulier, il existe des diviseurs effectifs non nuls de G tels que $Z.E_i \leq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Remarquons que si Z est un tel diviseur alors $\sum_i E_i \leq Z$.

Montrons maintenant l'unicité d'un diviseur minimal parmi de tels diviseurs : soient $Z, Z' \in G$ effectifs non nuls tels que $Z.E_i \leq 0$ et $Z'.E_i \leq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Ecrivons $Z = \sum_i r_i E_i$, $Z' = \sum_i r'_i E_i$ et posons $Z_{\min} = \sum_i s_i E_i$ où $s_i = \min(r_i, r'_i)$, on a $Z_{\min} \geq \sum_i E_i > 0$ et montrons que $Z_{\min}.E_i \leq 0$ pour tout i . Soit $1 \leq i \leq n$ et supposons sans perte de généralité que $r_i \leq r'_i$ alors

$$Z_{\min}.E_i = r_i E_i^2 + \sum_{j \neq i} s_j E_i.E_j \leq r_i E_i^2 + \sum_{j \neq i} r_j E_i.E_j = Z.E_i \leq 0.$$

■

Définition 2.2.6. *Sous les hypothèses et notations de la proposition 2.2.5, l'unique diviseur Z est appelé cycle fondamental de E .*

Remarque :

- 1) Le cycle fondamental Z a un support égale à E . Autrement dit chaque E_i apparaît dans Z avec multiplicité au moins 1.
- 2) On peut calculer le cycle fondamental Z de la manière suivante : on pose $Z_1 = E_{i_0}$ quelconque. On définit Z_{j+1} par récurrence : s'il existe un E_{i_j} tel que $E_{i_j}.Z_j > 0$ alors on pose $Z_{j+1} = Z_j + E_{i_j}$ et s'il n'en existe pas alors Z_j est déjà le cycle fondamental.

On a vu que la contraction d'une courbe peut faire apparaître des singularités, il est donc naturel de se demander quand une courbe connexe se contracte sur un point lisse. Le théorème de Castelnuovo 2.1.10 dit que la contracter une (-1) -courbe ne fait pas apparaître de singularité. On est maintenant prêts pour répondre complètement à cette question par le biais de la généralisation du théorème de Castelnuovo (théorème 3.30. de [B01]).

Théorème 2.2.7 (Castelnuovo généralisé). *Soit S une surface lisse et E une courbe connexe dont les composantes irréductibles sont $E_1, \dots, E_n$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Il existe un morphisme $\pi : S \rightarrow S'$ tel que S' est une surface projective, $\pi(E)$ est un point lisse $p \in S'$ et π est un isomorphisme de $S \setminus E$ sur $S' \setminus \{p\}$;*
- (ii) *la matrice d'intersection $(E_i.E_j)_{i,j}$ est définie négative et le cycle fondamental Z de E vérifie $p_a(Z) = 0$ et $Z^2 = 1$.*

Dans ce cas, la surface S' est unique à isomorphisme près.

On s'intéresse maintenant à un critère pour qu'une courbe connexe E soit le lieu exceptionnel d'une contraction crépante.

Définition 2.2.8. *On dit qu'un morphisme birationnel $\pi : S \rightarrow S'$ entre deux surfaces normales est crépant si $\pi^*K_{S'} = K_S$.*

Définition 2.2.9. *Une courbe irréductible E d'une surface normale S est appelée (-2) -courbe si $E \simeq \mathbb{P}^1$ et $E^2 = -2$.*

On arrive au critère de contraction le plus important pour la suite de l'exposé, à savoir le critère pour que la contraction de courbe connexe soit crépante (théorème 3.15. de [Bö1]).

Théorème 2.2.10. *Soit S une surface lisse et E une courbe connexe de S avec $E_1, \dots, E_n$ pour composantes irréductibles. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Il existe un morphisme $\pi : S \rightarrow S'$ tel que S' est une surface projective normale, $\pi(E)$ est un point Gorenstein $p \in S'$, π est un isomorphisme de $S \setminus E$ sur $S' \setminus \{p\}$ et $\pi^*K_{S'} = K_S$;*
- (ii) *la matrice d'intersection $(E_i.E_j)_{i,j}$ est définie négative et les E_i sont des (-2) -courbes.*

Définition 2.2.11. *Soit S une surface normale et $p \in S$ une singularité de S , on appelle :*

- (1) *résolution de la singularité p tout morphisme birationnel $\mu_p : S_p \rightarrow S$ telle que $\tilde{S}$ est lisse au voisinage de $\mu^{-1}(p)$;*
- (2) *résolution des singularités de S tout morphisme birationnel $\mu : \tilde{S} \rightarrow S$ telle que $\tilde{S}$ est lisse ;*
- 3) *résolution minimale de la singularité p toute résolution de la singularité p qui ne contient aucune (-1) -courbe parmi les courbes exceptionnelles.*

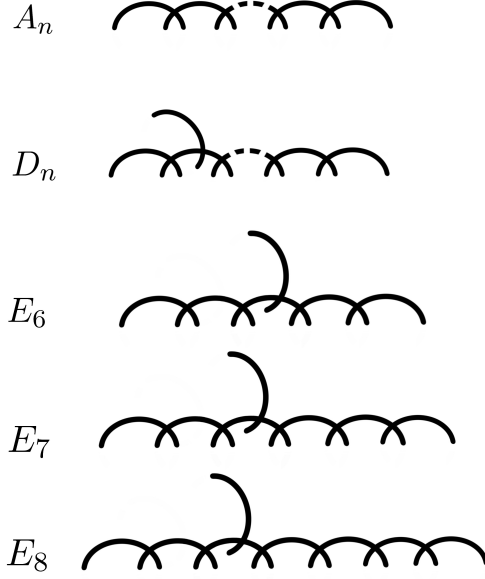


TABLE 2.1 – Configurations ADE de (-2) -courbes

La résolution minimale existe et est unique à isomorphisme près comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2.2.12. *Si (S, p) est une singularité de surface normale alors il existe une résolution minimale $\mu : S_p \rightarrow S$ de la singularité p . De plus, si $\mu'_p : S'_p \rightarrow S$ est une résolution de la singularité p alors il existe un unique morphisme $u : S'_p \rightarrow S_p$ tel que $\mu'_p \circ u = \mu_p$. En particulier, deux résolutions minimales de la singularité p sont canoniquement isomorphes.*

Le critère de contraction crépante 2.2.10 montre que le lieu exceptionnel d'une contraction crépante est une union de (-2) -courbes. Le résultat suivant (théorème 3.32. de [BØ1]) donne toutes les configurations possibles de ces (-2) -courbes.

Théorème 2.2.13. *Soit S une surface lisse et E une courbe connexe. Supposons que les composantes irréductibles de E sont des (-2) -courbes $E_1, \dots, E_n$ dont la matrice d'intersection $(E_i \cdot E_j)_{i,j}$ est définie négative. Alors seuls les configurations A_n , D_n ($n \geq 4$), E_6 , E_7 et E_8 pour les E_i sont possibles.*

Définition 2.2.14. *Avec les notations du théorème 2.2.13, le point p sur lequel se contracte la courbe E sera appelé singularité ADE. Plus précisément, on dira que p est une singularité de type A_n (resp. D_n , E_n) si les (-2) -courbes de la résolution minimale de la singularité p sont en configuration A_n (resp. D_n , E_n).*

Le théorème 2.2.13 se montre grâce à la proposition suivante :

Proposition 2.2.15. *Sous les hypothèses du théorème 2.2.13, on a :*

- (1) *pour tout $i \neq j$ tel que $E_i.E_j > 0$, on a $E_i.E_j = 1$;*
- (2) *pour tout i, j, k distincts deux à deux, $E_i \cap E_j \cap E_k = \emptyset$;*
- (3) *le graphe dual de E ne contient pas de lacet (i.e. il n'existe pas de courbes $E_{i_1}, \dots, E_{i_k}$ telles que $E_{i_j} \cap E_{i_{j+1}} \neq \emptyset$ pour tout $1 \leq j \leq k-1$ et $E_{i_1} \cap E_{i_k} \neq \emptyset$) ;*
- (4) *chaque composante E_i intersecte au plus trois autres composantes de E ;*
- (5) *il existe au plus une composante E_i qui rencontre trois autres composantes de E .*

Démonstration. On remarque qu'il nous suffit de trouver un diviseur Z combinaison linéaire des E_i tel que $Z^2 \geq 0$ pour obtenir une contradiction (car la matrice d'intersection $(E_i.E_j)_{i,j}$ est définie négative). Dans chaque cas ci-dessous, notre but est de trouver un tel diviseur :

- (1) Si $E_i.E_j \geq 2$ alors $(E_i + E_j)^2 = -4 + 2E_i.E_j \geq 0$.
- (2) Si $E_i.E_j = E_j.E_k = E_k.E_i = 1$ alors $(E_i + E_j + E_k)^2 = 0$.
- (3) De même, si on a $E_{i_1}, \dots, E_{i_k}$ telles que $E_{i_k}.E_{i_1} = E_{i_1}.E_{i_2} = \dots = E_{i_{k-1}}.E_{i_k} = 1$ alors $(E_{i_1} + \dots + E_{i_k})^2 = 0$.
- (4) Supposons que E_1 intersecte E_2, E_3, E_4, E_5 . Par (3), pour tout $2 \leq i \neq j \leq 5$, on a $E_i.E_j = 0$. On pose alors $Z' = 2E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5$ qui vérifie $Z'^2 = 0$.
- (5) Soient E_1 (resp. E_k) rencontre trois autres composantes E_2, E_3, E_4 (resp. $E_{k+1}, E_{k+2}, E_{k+3}$) et $E_5, \dots, E_{k-1}$ un chaîne de composantes telles que E_5 rencontre E_4 et E_{k-1} rencontre E_{k+1} alors le diviseur $Z' = E_2 + E_3 + E_{k+2} + E_{k+3} + 2(E_1 + E_4 + E_5 + \dots + E_k + E_{k+1})$ vérifie $Z'^2 = 0$.

■

On s'intéresse maintenant à l'équation locale des singularités ADE , c'est l'objet de la proposition ci-dessous.

Proposition 2.2.16.

Les singularités ADE ont les équations locales suivantes :

- $A_n : x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0$ (pour $n \geq 1$) ;
- $D_n : x^2 + y^2z + z^{n-1} = 0$ (pour $n \geq 4$) ;
- $E_6 : x^2 + y^3 + z^4 = 0$;
- $E_7 : x^2 + y^3 + yz^3 = 0$;
- $E_8 : x^2 + y^3 + z^5 = 0$.

Singularités Rationnelles

Ici, on s'intéresse à une classe un plus large de singularités : $p \in S$ est une singularité rationnelle Gorenstein de S si, et seulement si, p est une singularité ADE de S .

Définition 2.2.17. *On dit qu'une singularité normale (S, p) est rationnelle s'il existe une résolution $\mu : \tilde{S} \rightarrow S$ de p telle que $R^1\mu_*\mathcal{O}_{\tilde{S}} = 0$.*

Remarque : Cette condition ne dépend pas de la résolution. En effet, comme les applications birationnelles entre deux surfaces lisses sont des composées d'éclatements de points et de leurs inverses que les éclatements $u : S \rightarrow S'$ vérifient $R^1u_*\mathcal{O}_S = 0$, on en déduit que toutes les résolutions de la singularités p vérifient cette condition.

On énonce maintenant un critère de rationalité d'une singularité de surface normale (théorème 3.21. de [Bö1]).

Théorème 2.2.18. *Soit $\mu : \tilde{S} \rightarrow S$ une résolution d'une singularité $p \in S$ de surface normale, $E := \mu^{-1}(p)_{red}$ la fibre exceptionnelle réduite de μ et Z le cycle fondamental de E . Alors $p_a(Z) \geq 0$. De plus, $p_a(Z) = 0$ si, et seulement si, p est une singularité rationnelle.*

Le prochain théorème fait le lien entre les résolutions crépantes et les singularités rationnelles (théorème 3.31. de [Bö1]).

Théorème 2.2.19. *Soit $\mu : \tilde{S} \rightarrow S$ la résolution minimale d'une singularité $p \in S$ de surface normale. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *la résolution μ est crépante ;*
- (ii) *p est une singularité rationnelle et un point double de S .*

Le corollaire 4.19. de [Bö1] nous donne l'équivalence suivante.

Proposition 2.2.20. *Soit S une surface normale et p une singularité de S . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *p est un point rationnel double de S ;*
- (ii) *p est une singularité Gorenstein rationnelle de S .*

En conclusion, les singularités ADE sont exactement les singularités rationnelles Gorenstein et les point rationnels doubles.

Eclatement de singularités ADE

Ici on cherche quelles sont les éclatements successifs des singularités de type A_n , D_4 , D_5 et E_6 . La raison pour laquelle on s'intéresse à ces types de singularités est détaillé dans la section suivante. En fait, si $S \subset \mathbb{P}^3$ est une surface cubique normale et p un point singulier de S , alors p est une singularité ADE de type A_n , D_4 , D_5 ou E_6 .

Lemme 2.2.21 (Eclatement de singularités ADE).

Soit $S \subset \mathbb{C}^3$ une surface normale et $p \in S$ une singularité ADE de S . On considère l'éclatement ε de $\mathbb{C}^3$ en p et S' la transformée stricte de S par ε . On note $l \subset S'$ la courbe exceptionnelle de l'éclatement, $\mu : \tilde{S} \rightarrow S$ la résolution minimale de la singularité p , $\tilde{l} \subset \tilde{S}$ la transformée stricte de l dans $\tilde{S}$ et E_i les (-2) -courbes exceptionnelles de la résolution $\tilde{S} \rightarrow S$. Alors la table 2.2 est vraie.

Démonstration. On remarque que les résultats du tableau sont locaux en p , on peut donc supposer que S est une surface affine de $\mathbb{A}^3$ et que $p = 0 \in \mathbb{A}^3$ et ainsi utiliser la proposition 2.2.16. On a alors $S' \subset \mathbb{A}^3 \times \mathbb{P}^2$ et on regarde S'_i pour $i = 0, 1, 2$ dans chaque carte affine standard de $\mathbb{P}^2$. On note (x, y, z) les coordonnées de $\mathbb{A}^3$ et $(u : v : w)$ les coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^2$. Si $S = \{h(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{A}^3$ alors

$$\varepsilon^{-1}(S) = \left\{ \begin{array}{l} xv = yu \\ xw = zu \\ yw = zv \\ h(x, y, z) = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{A}^3 \times \mathbb{P}^2.$$

La transformée stricte S' de S par ε a donc pour équation dans la première carte affine $\{u \neq 0\}$ de $\mathbb{P}^2$

$$S'_0 = \left\{ \begin{array}{l} xV = y \\ xW = z \\ \frac{h(x, xV, xW)}{x^2} = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{A}^5$$

où $V = \frac{v}{u}$ et $W = \frac{w}{u}$. (On notera de façon analogue les équations dans les autres cartes affines.) Les courbes exceptionnelles sont donc les composantes irréductibles de $S'_0 \cap \{x = 0\}$ et les singularités de S'_0 sont là où les trois dérivées partielles $\partial/\partial x$, $\partial/\partial V$, $\partial/\partial W$ s'annulent.

- (1) Eclatement de A_n pour $n \geq 1$: Le cas $n = 1$ provient directement de la définition d'une singularité A_1 . On peut alors supposer que $n \geq 2$. Par la proposition 2.2.16, l'équation locale de S en p est

$$x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0$$

et S'_0 a alors pour équation

$$\frac{x^2 + x^2V^2 + x^{n+1}W^{n+1}}{x^2} = 1 + V^2 + x^{n-1}W^{n+1} = 0$$

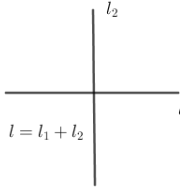
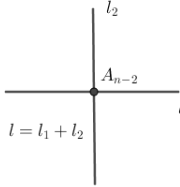
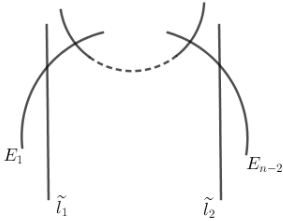
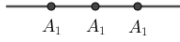
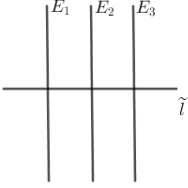
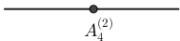
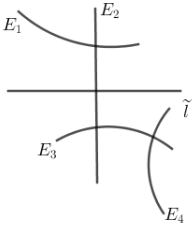
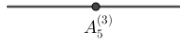
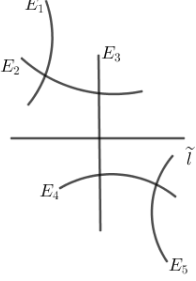
Type de Singularité	S'	$\tilde{S}$
A_1		$\tilde{S} = S'$
A_2		$\tilde{S} = S'$
$A_n, n \geq 3$		
D_4		
D_5		
E_6		

TABLE 2.2 – Eclatement de Singularités ADE

et le lieu exceptionnel est $\{x = y = z = 1 + V^2 = 0\}$ c'est-à-dire deux droites sécantes à l'infini, S'_0 n'a aucun point singulier. De la même manière, on trouve que

$$S'_2 = \{U^2 + V^2 + z^{n-1} = 0\}$$

le lieu exceptionnel est $\{x = y = z = U^2 + V^2 = 0\}$ (deux droites l_1, l_2 sécantes en 0) et 0 est une singularité de S'_2 si, et seulement si, $n \geq 3$. On reconnaît alors l'équation d'une singularité A_{n-2} . La singularité ne pouvait être qu'une singularité A_{n-2} étant donnée la configuration des (-2) -courbes de la résolution finale de S .

(2) Eclatement de D_4 : Par la proposition 2.2.16 l'équation locale de S en p est

$$x^2 + y^2z + z^3 = 0$$

et S'_1 a alors pour équation

$$\frac{y^2U^2 + y^3W + y^3W^3}{y^2} = U^2 + yW + yW^3 = 0.$$

Dans cette carte, on n'a qu'une droite exceptionnelle $l = \{x = y = z = V = 0\}$ et trois singularités sur cette droite $W = 0, i, -i$. Étant donnée la configuration des (-2) -courbes dans la résolution finale de S , il n'y a qu'une possibilité : le lieu exceptionnel de S' n'est qu'une droite sur laquelle S' possède trois singularités de type A_1 .

(3) Eclatement de D_5 : Par la proposition 2.2.16, l'équation locale de S en p est

$$x^2 + y^2z + z^4 = 0$$

et S'_2 a alors pour équation

$$\frac{z^2U^2 + z^3V^2 + z^4}{z^2} = U^2 + zV^2 + z^2 = 0.$$

Dans cette carte, on n'a qu'une droite exceptionnelle $l = \{x = y = z = U = 0\}$ et une singularité en 0. Dans les autres cartes on a aucune autre singularité ni courbe exceptionnelle. Reste à savoir de quel type est cette singularité : on éclate de nouveau en 0 et on trouve deux droites sécantes exceptionnelles. On peut donc en déduire que le type de singularité est A_4 et, étant donnée la configuration des (-2) -courbes de la résolution d'une singularité D_5 , que la transformée stricte $\tilde{l} \subset \tilde{S}$ de l intersecte E_2 (quitte à réordonner les E_i).

(4) Eclatement de E_6 : Par la proposition 2.2.16 l'équation locale de S en p est

$$x^2 + y^3 + z^4 = 0$$

et S'_2 a alors pour équation

$$\frac{z^2U^2 + z^3V^3 + z^4}{z^2} = U^2 + zV^3 + z^2 = 0.$$

Dans cette carte, on n'a qu'une droite exceptionnelle $l = \{x = y = z = U = 0\}$ et une singularité en 0. Dans les autres cartes on a aucune autre singularité ni courbe exceptionnelle. Reste à savoir de quel type est cette singularité : on éclate de nouveau en 0 et on trouve deux droites sécantes exceptionnelles. On peut donc en déduire que le type de singularité est A_5 et, étant donnée la configuration des (-2) -courbes dans la résolution d'une singularité E_6 , que la transformée stricte $\tilde{l} \subset \tilde{S}$ de l intersecte E_3 . ■

2.3 Surfaces cubiques de $\mathbb{P}^3$

Surfaces cubiques normales

Dans [BW79] Bruce et Wall classifient les singularités des surfaces cubiques normales $S \subset \mathbb{P}^3$. On résume cette classification dans la table 2.3. La troisième ligne de ce tableau indique le nombre de paramètres dont dépendent les équations du type de surfaces. On y a mis une croix lorsque l'on n'a pas réussi à récolter l'information du nombre de paramètres d'un type donné. Par exemple, (d'après [BL98] Table 1 et 2, surfaces T_{13} et T_4 respectivement) les surfaces de type XI ont pour équation à isomorphismes près :

$$X_0X_1(X_0 - X_3) + \alpha(X_1 - X_2)(X_0^2 - X_0X_1 - X_0X_2 + 2X_1X_3) = 0$$

où $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Les types de surfaces qui n'ont pas de paramètre ont donc une seule équation à isomorphisme près : par exemple les surfaces de type XVII ont pour équation

$$X_0^2X_1 - X_0^2 - X_0X_1^2 + X_0X_2^2 + X_1^3 - X_1^2X_3 + X_1X_2X_3 = 0.$$

Cinq surfaces cubiques

Dans la suite de cette section, on va s'intéresser à cinq types de surfaces cubiques particulières. Si $S \subset \mathbb{P}^3$ est une surface d'un type donné, on se demandera si certaines droites $l \subset S$ passant par les singularités de S sont d'inflexion (i.e. il existe un plan $H \subset \mathbb{P}^3$ tel que $S \cap H = l$).

Type	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Singularités	$\emptyset$	A_1	$2A_1$	A_2	$3A_1$	A_1A_2	A_3	$4A_1$	$2A_1A_2$	A_1A_3
Nb de Droites	27	21	16	15	12	11	10	9	8	7
Nb de Param.	$\times$	3	2	2	1	1	1	0	0	0

XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI
$2A_2$	A_4	D_4	$2A_1A_3$	A_12A_2	A_1A_4	A_5	D_5	$3A_2$	A_1A_5	E_6
7	6	6	5	5	4	3	3	3	2	1
1	0	$\times$	0	0	0	0	$\times$	0	0	$\times$

TABLE 2.3 – Classification des singularités de surface cubique

Type $2A_2$

D'après ([BL98], Table 2, surface T_4), les surfaces de type XI à singularités $2A_2$ ont (à isomorphisme près) une équation de la forme :

$$X_0X_1(X_0 - X_3) + \alpha(X_1 - X_2)(X_0^2 - X_0X_1 - X_0X_2 + 2X_1X_3) = 0$$

où $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Les deux singularités de type A_2 qui ne dépendent pas de α sont $p = (0 : 1 : 1 : 0)$ et $q = (0 : 0 : 0 : 1)$. La surface possède sept droites mais celle qui nous intéresse est $l = \{X_0 = X_1 - X_2 = 0\} = \overline{pq}$. Cette dernière est une droite d'inflexion sur S : on pose $H_\alpha = \{X_0 = 2\alpha(X_1 - X_2)\}$ et on a

$$S \cap H_\alpha = l.$$

Type A_12A_2

D'après [LB12], les surfaces de type XV à singularités A_12A_2 ont pour équation (à isomorphisme près) :

$$X_3^2(X_1 + X_3) + X_0X_1X_2 = 0.$$

La singularité de type A_1 est $r = (0 : 1 : 0 : 0)$ et les deux singularités de type A_2 sont $p = (1 : 0 : 0 : 0)$ et $q = (0 : 0 : 1 : 0)$. La surface possède cinq droites mais celle qui nous intéresse est $l = \{X_1 = X_3 = 0\} = \overline{pq}$. Cette dernière est une droite d'inflexion sur S : on pose $H = \{X_1 = 0\}$ et on a

$$S \cap H_\alpha = l.$$

Type A_5

D'après ([BL98], Table 1, surface T_{13}), les surfaces de type XVII à singularités A_5 ont pour équation (à isomorphisme près) :

$$X_0^2X_1 - X_0^2X_2 - X_0X_1^2 + X_0X_2^2 + X_1^3 - X_1^2X_3 + X_1X_2X_3 = 0.$$

La singularité de type A_5 est $p = (0 : 0 : 0 : 1)$. La surface possède trois droites $l_1 = \{X_0 = X_1 = 0\}$, $l_2 = \{X_1 = X_2 = 0\}$ et $l_3 = \{X_1 = X_0 - X_2 = 0\}$ qui passent toutes par le point p . Parmi ces trois droites, il y a seulement l_2 qui est dans la configuration $A_5^{(2)}$ (i.e. la transformée stricte de l_2 coupe la deuxième composante de la chaîne exceptionnelle de la résolution de S). On note cette droite l et c'est une droite d'inflexion sur S : en effet, pour $H = \{X_2 = \mu X_1\}$, on a

$$S \cap H_\alpha = l.$$

Type $3A_2$

D'après l'équation (9.17) [Dol12], les surfaces de type XIX à singularités $3A_2$ ont pour équation (à isomorphisme près) :

$$X_0X_1X_2 + X_3^3 = 0.$$

Les trois singularités de type A_2 sont $p = (1 : 0 : 0 : 0)$, $q = (0 : 1 : 0 : 0)$ et $r = (0 : 0 : 1 : 0)$ et les trois seules droites sur cette surface sont celles qui passent par 2 des 3 singularités. Les trois droites sont d'inflexion par intersection avec les plans $H_i = \{X_i = 0\}$ pour $i = 0, 1, 2$.

Type A_1A_5

D'après [BD15], les surfaces de type XX à singularités A_1A_5 ont pour équation (à isomorphisme près) :

$$X_1^3 + X_2X_3^2 + X_0X_1X_2 = 0.$$

Les deux singularités sont $p = (1 : 0 : 0 : 0)$ et $q = (0 : 0 : 1 : 0)$. Elle possède deux droites $l_1 = \{X_1 = X_2 = 0\}$ et $l_2 = \{X_1 = X_3 = 0\} = \overline{pq}$. Montrons que $l = l_2$ n'est pas d'inflexion c'est-à-dire que pour tout plan H contenant l , $H \cap S \neq l$. Les plans $H_{\lambda,\mu} := \{\lambda X_3 - \mu X_1 = 0\}$ avec $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ sont tous les plans de $\mathbb{P}^3$ contenant l . On remarque d'abord que $H_{0,1} \cap S = \{X_1 = X_2X_3^2 = 0\} \neq l$. On peut donc supposer que $\lambda = 1$ et on a

$$\{X_3 = \mu X_1\} \cap S = H_{1,\mu} \cap \{X_1^3 + \mu^2 X_1^2 X_2 + X_0 X_1 X_2 = 0\} \neq l.$$

On a bien montré que la droite $l \subset S$ n'est pas d'inflexion.

Surfaces cubiques non normales

On énonce le théorème 9.2.1. de [Dol12] qui classifie complètement les cubiques non normales S de $\mathbb{P}^3$.

Théorème 2.3.1. *Soit S une surface irréductible non normale de $\mathbb{P}^3$. Alors S est dans l'un des trois cas suivants :*

- (1) *S est un cône au-dessus d'une cubique plane irréductible ;*
- (2) *S est projectivement isomorphe à la cubique d'équation $X_0^2X_2 + X_1^2X_3 = 0$;*
- (3) *S est projectivement isomorphe à la cubique d'équation $X_0X_1X_2 + X_0^2X_3 + X_1^3 = 0$.*

Remarque : Deux surfaces de $\mathbb{P}^3$ sont dites projectivement isomorphes s'il existe un automorphisme de $\mathbb{P}^3$ qui envoie l'une sur l'autre. Les deux surfaces du théorème 2.3.1 ne sont pas projectivement isomorphes et sont toutes les deux singulières le long de la droite d'équation $\{X_0 = X_1 = 0\}$.

2.4 Intersection sur les surfaces normales

Dans cette partie de l'exposé, on développe la théorie de l'intersection des surfaces normales. La définition 2.4.1 (exemple 8.3.11. de [Ful84]) présente la manière de procéder pour calculer le produit d'intersection de deux courbes irréductibles d'une surface S et définit également le pullback de Mumford d'un diviseur sur S . La suite de cette section donnera quelques calculs explicites de pullback de Mumford de courbes irréductibles lisses C passant par des singularités ADE de S . Enfin, on appliquera ces formules pour calculer l'auto-intersection du lieu exceptionnel d'une suite d'éclatements de singularités ADE .

Définition 2.4.1. *Soit S une surface normale et $\mu : \tilde{S} \rightarrow S$ une résolution minimale des singularités. Pour toute courbe irréductible C sur S , il existe un unique $\mathbb{Q}$ -diviseur C^* sur $\tilde{S}$ supporté sur le lieu exceptionnel de μ tel que si $\tilde{C}$ la transformée stricte de C alors*

$$(\tilde{C} + C^*).E_i = 0$$

pour toutes les composantes irréductibles E_i du lieu exceptionnel de μ . On pose alors $C' = \tilde{C} + C^$. Il existe un unique homomorphisme $\pi : \alpha \mapsto \alpha'$ de $Cl(S)$ dans $Cl(\tilde{S})_{\mathbb{Q}}$ qui envoie $[C]$ sur $[C']$ pour toute courbe irréductible C sur S . Cela détermine un produit d'intersection*

$$Cl(S) \times Cl(S) \rightarrow \mathbb{Q}$$

défini par $\alpha.\beta := \pi_(\alpha'.\beta')$.*

Le $\mathbb{Q}$ -diviseur C' est appelé le pullback de Mumford de C .

Le calcul de la partie exceptionnelle du pullback de Mumford peut s'effectuer localement, c'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 2.4.2. Soit S une surface normale et C une courbe irréductible lisse passant par les singularités $p_1, \dots, p_k$ de S . Pour tout $1 \leq i \leq k$, on note $(E_j^{p_i})_{1 \leq j \leq n_i}$ les courbes exceptionnelles de la résolution minimale $\mu : \tilde{S} \rightarrow S$ au-dessus de p_i et

$$C' = \tilde{C} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j} E_j^{p_i}$$

le pullback de Mumford de C . Alors pour tout $1 \leq i \leq k$ les coefficients $(a_{i,j})_{1 \leq j \leq n_i}$ ne dépendent que de la matrice d'intersection $(E_j^{p_i} \cdot E_k^{p_i})_{1 \leq j,k \leq n_i}$ et du vecteur $(\tilde{C} \cdot E_j^{p_i})_{1 \leq j \leq n_i}$. Autrement dit, le calcul du pullback de Mumford est local en chaque singularités p_i de S .

Démonstration. On considère la matrice diagonale par bloc suivante :

$$M = \begin{pmatrix} M^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M^{(k)} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

où pour tout $1 \leq i \leq k$, $M_{j,k}^{(i)} = E_j^{p_i} \cdot E_k^{p_i}$. Elle est symétrique et inversible. La matrice M est alors la matrice d'intersection de tous les $(E_j^{p_i})_{i,j}$ et par définition, pour tout $1 \leq i \leq k$, les coefficients $a_{i,j}$ vérifient

$$M^{(i)} \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ a_{i,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{i,n_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tilde{C} \cdot E_1^{p_i} \\ -\tilde{C} \cdot E_2^{p_i} \\ \vdots \\ \vdots \\ -\tilde{C} \cdot E_{n_i}^{p_i} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

On en déduit que, à i fixé, les coefficients $(a_{i,j})_j$ ne dépendent que de deux choses : les nombres d'intersections $E_j^{p_i} \cdot E_k^{p_i}$ pour tout $1 \leq j, k \leq n_i$ et $\tilde{C} \cdot E_j^{p_i}$ pour tout $1 \leq j \leq n_i$. ■

Exemple : Soient S une surface normale et C une courbe irréductible lisse passant par une unique singularité p de S où p est de type A_1 . On note $\mu : \tilde{S} \rightarrow S$ la résolution minimale des singularités de S et $E \subset \tilde{S}$ la (-2) -courbe exceptionnelle de μ . Le pullback de Mumford de C est alors de la forme $C' = \tilde{C} + \lambda E$ où $\tilde{C}$ est la transformée stricte de C dans $\tilde{S}$ et $\lambda \in \mathbb{Q}$. Comme C est lisse en p , on a $\tilde{C} \cdot E = 1$ et on déduit de $C' \cdot E = 0$ que $\lambda = 1/2$. On trouve alors

$$C' = \tilde{C} + \frac{1}{2}E$$

et l'auto-intersection de C dans la surface S est

$$C^2 = (\tilde{C} + \frac{1}{2}E)^2 = \tilde{C}^2 + \frac{1}{2}. \quad (2.3)$$

D'après le lemme 2.4.2, cette dernière égalité reste vraie si on suppose que C passe par d'autres singularités de S , il faut alors remplacer la résolution minimale μ de toutes les singularités de S par la résolution minimale μ_p de la singularité $p \in S$.

Le résultat du calcul (2.3) motive la question suivante : lorsque une courbe lisse C passe par une singularité ADE , comment varie son auto-intersection ? C'est l'objet de la suite de cette section et l'exemple précédent montre que lorsqu'une courbe irréductible lisse passe par une singularité de type A_1 , son auto-intersection se voit augmentée d'un potentiel qui est $1/2$.

Définition 2.4.3. Soient S une surface normale, $p \in S$ une singularité de S et $\mu_p : \tilde{S} \rightarrow S$ la résolution minimale de la singularité p . Soit C une courbe irréductible lisse de S , on appelle potentiel de C en $p \in S$ le nombre rationnel suivant

$$v_p(C) = C^2 - \tilde{C}^2$$

où $\tilde{C}$ est la transformée stricte de C par μ_p .

Le but de la suite de cette section est de calculer les pullbacks de Mumford de courbes passant par des singularités plus compliquées pour dans un deuxième temps connaître les potentiels de courbes passant par certaines singularités ADE des surfaces S .

Remarque :

- Si p est un point lisse de S alors pour toute courbe irréductible lisse C de S , $v_p(C) = 0$.
- Si $p \in S$ n'appartient pas à C alors $v_p(C) = 0$.

Exemple 2.4.4. Grâce au calcul (2.3), on a : si $p \in S$ est une singularité de type A_1 de S alors pour toute courbe irréductible lisse C passant par p de S

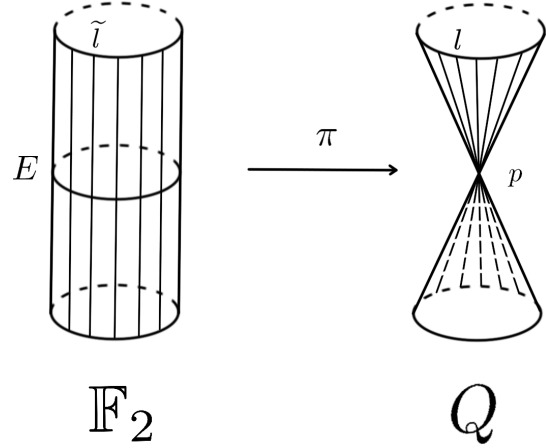
$$v_p(C) = \frac{1}{2}.$$

En particulier, cela montre que la formule d'adjonction ne marche pas en général pour les diviseurs non Cartier. En effet, considérons Q le cône quadrique de $\mathbb{P}^3$ qui possède une unique singularité A_1 , $\pi : \mathbb{F}_2 \rightarrow Q$ la résolution minimale de la singularité de Q et $l \subset Q$ une droite qui passe par le sommet de Q .

On note $\tilde{l} \subset \mathbb{F}_2$ la transformée stricte de l par π qui est une fibre du réglage de $\mathbb{F}_2$ sur $\mathbb{P}^1$ (en particulier $\tilde{l}^2 = 0$). De plus $K_Q.l = -2H|_Q.l = -4l^2$ car une section hyperplane du cône passant par le sommet est l'union de deux droites de Q . On trouve alors

$$l^2 + l.K_Q = -3l^2 = -3(\tilde{l}^2 + \frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$$

ce qui ne correspond pas à $\deg(K_l) = -2$ et la formule d'adjonction n'est pas respectée.



Lemme 2.4.5. Soit $\mu : S' \rightarrow S$ un morphisme birationnel entre deux surfaces normales, $E \subset S'$ son lieu exceptionnel et $C \subset S$ une courbe irréductible lisse. Alors pour tout point $q \in S \setminus \mu(E)$, on a

$$v_q(C) = v_{q'}(C')$$

où $C' \subset S'$ est la transformée stricte de C par μ et $q' \in S'$ est l'unique point tel que $\mu(q') = q$.

Démonstration. D'après le lemme 2.4.2, le pullback de Mumford se calcule localement autour des singularités. Or $q \in S \setminus \mu(E)$ donc μ est un isomorphisme au voisinage de q . On en déduit que les potentiels $v_q(C)$ et $v_{q'}(C')$ sont égaux. ■

Proposition 2.4.6. Soit C une courbe irréductible lisse dans une surface normale S et $\mu : \tilde{S} \rightarrow S$ la résolution minimale des singularités de S . Alors

$$C^2 = \tilde{C}^2 + \sum_{p \in C} v_p(C)$$

où $\tilde{C}$ est la transformée stricte de C par μ et presque tous les termes de la somme sont nuls.

Démonstration. Soit $p_1, \dots, p_k$ les singularités de S par lesquelles passe C alors on doit montrer que

$$C^2 = \tilde{C}^2 + \sum_{i=1}^k v_{p_i}(C).$$

La preuve s'effectue par récurrence sur k : si $k = 1$ alors l'égalité (2.4) est vérifiée par définition du potentiel. Supposons maintenant que $k \geq 2$, on considère $\mu_k : S' \rightarrow S$

la résolution minimale de la singularité p_k ainsi que $C' \subset S'$ la transformée stricte de C par μ_k . Par définition du potentiel, on a $C^2 = C'^2 + v_{p_k}(C)$. Comme C' est une courbe irréductible lisse passant par exactement $k - 1$ singularités de S' , on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence et ainsi avoir

$$C^2 - v_{p_k}(C) = C'^2 = \tilde{C}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} v_{p'_i}(C').$$

De plus par le lemme 2.4.5, on a $v_{p'_i}(C') = v_{p_i}(C)$ pour tout $1 \leq i \leq k - 1$ car μ_k est un morphisme birationnel qui est dont le lieu exceptionnel s'envoie sur p_k . Le résultat s'en suit. ■

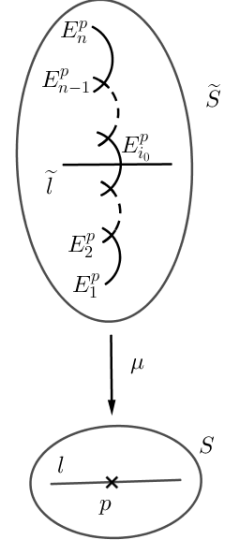
Dans toute la suite, on note S une surface normale, $\mu : \tilde{S} \rightarrow S$ la résolution minimale des singularités de S . Si $C \subset S$ est une courbe de S alors on notera $\tilde{C} \subset \tilde{S}$ la transformée stricte de C par μ .

Proposition 2.4.7 (Singularité A_n).

Soit $C \subset S$ une courbe irréductible lisse passant par une unique singularité $p \in S$ de type A_n de S . On note E_i^p pour $i = 1, \dots, n$ les (-2) -courbes exceptionnelles de $\tilde{S}$ au-dessus de p . Si $\tilde{C}$ intersecte $E_{i_0}^p$ alors le pullback de Mumford de C est

$$C' = \tilde{C} + \sum_{i \leq i_0} \frac{i(n+1-i_0)}{n+1} E_i^p + \sum_{i > i_0} \frac{i_0(n+1-i)}{n+1} E_i^p.$$

En particulier, on a $v_p(C) = \frac{i_0(n+1-i_0)}{n+1}$.



Démonstration. Posons $C^* = \sum a_i E_i^p$ la partie exceptionnelle du pullback de Mumford de C , on a pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$C^* \cdot E_i^p = -\tilde{C} \cdot E_i^p.$$

Or $-\tilde{C} \cdot E_i^p = 0$ pour tout $i \neq i_0$ et $-\tilde{C} \cdot E_{i_0}^p = -1$ donc l'équation matricielle suivante résume la situation

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où le -1 est sur la i_0 -ième coordonnée du vecteur de droite. On note M_n la matrice d'intersection des E_i^p ci-dessus, elle est inversible et son inverse est la matrice symétrique suivante

$$M_n^{-1} = -\frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ & 2(n-1) & 2(n-2) & \dots & 4 & 2 \\ & & 3(n-2) & \dots & 6 & 3 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & 2(n-1) & n-1 \\ & & & & & n \end{pmatrix}$$

définie par les coefficients

$$\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i} = -\frac{\min(i,j)(n+1-\max(i,j))}{n+1}.$$

On en déduit que le vecteur $(a_1, \dots, a_n)$ est exactement l'opposé de la i_0 -ième colonne de A^{-1} c'est-à-dire :

$$a_i = \frac{i(n+1-i_0)}{n+1} \text{ si } i \leq i_0$$

$$a_i = \frac{i_0(n+1-i)}{n+1} \text{ si } i > i_0$$

puis

$$C^* = \sum_{i \leq i_0} \frac{i(n+1-i_0)}{n+1} E_i^p + \sum_{i > i_0} \frac{i_0(n+1-i)}{n+1} E_i^p.$$

Calculons maintenant $C^2 = (\tilde{C} + C^*)^2$, cela passe par le calcul de C^{*2} :

$$\begin{aligned} C^{*2} &= \left(\sum a_i E_i^p \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 (E_i^p)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j E_i^p \cdot E_j^p \\ &= -2 \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} \\ &= -2 \sum_{i < i_0} \frac{i^2(n+1-i_0)^2}{(n+1)^2} - 2 \sum_{i \geq i_0} \frac{i_0^2(n+1-i)^2}{(n+1)^2} \\ &\quad + 2 \sum_{i < i_0} \frac{i(n+1-i_0)(i+1)(n+1-i_0)}{(n+1)^2} + 2 \sum_{i \geq i_0} \frac{i_0^2(n+1-i)(n-i)}{(n+1)^2} \\ &= 2 \sum_{i < i_0} \frac{i(n+1-i_0)^2}{(n+1)^2} - 2 \sum_{i \geq i_0} \frac{i_0^2(n+1-i)}{(n+1)^2} \\ &= \frac{2(n+1-i_0)^2}{(n+1)^2} \frac{(i_0-1)i_0}{2} - \frac{2i_0^2}{(n+1)^2} \frac{(n+1-i_0)(n+2-i_0)}{2} \\ &= -\frac{(n+1-i_0)i_0}{n+1}. \end{aligned}$$

Finalement, on trouve :

$$\begin{aligned}
C^2 &= (\tilde{C} + C^*)^2 \\
&= \tilde{C}^2 + 2\frac{i_0(n+1-i_0)}{n+1} + C^{*2} \\
&= \tilde{C}^2 + \frac{i_0(n+1-i_0)}{n+1}
\end{aligned}$$

et le résultat s'en suit. ■

On en déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 2.4.8. *Soit $C \subset S$ une courbe irréductible lisse passant par n singularités de type A_1 de S alors, en notant $\tilde{C} \subset \tilde{S}$ la transformée stricte de C par la résolution minimale des singularités de S , on a*

$$C^2 = \tilde{C}^2 + \frac{n}{2}$$

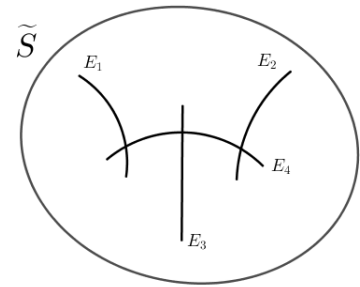
Démonstration. Si $p \in S$ est une singularité de type A_1 , la proposition 2.4.7 implique que $v_p(C) = 1/2$. D'autre part, on a

$$C^2 = \tilde{C}^2 + \sum_{q \in C} v_q(C)$$

par la proposition 2.4.6 et toutes les singularités de S par lesquelles passe C sont de type A_1 . Le résultat s'en suit. ■

Proposition 2.4.9 (Singularité D_4).

Soit $C \subset S$ une courbe irréductible lisse passant par une unique singularité $p \in S$ de type D_4 de S . On note E_i pour $i = 1, 2, 3, 4$ les (-2) -courbes exceptionnelles de $\tilde{S}$ au-dessus de p selon la configuration ci-contre. Le rôle des trois courbes exceptionnelles E_1, E_2 et E_3 est symétrique, il nous suffit donc de distinguer les deux cas suivants :



- (1) *si la transformée stricte $\tilde{C}$ de C par μ intersecte la (-2) -courbe E_1 alors le pullback de Mumford de C est*

$$C' = \tilde{C} + E_1 + \frac{1}{2}E_2 + \frac{1}{2}E_3 + E_4.$$

En particulier, $v_p(C) = 1$.

- (2) si la transformée stricte $\tilde{C}$ de C par μ intersecte la (-2) -courbe E_4 alors le pullback de Mumford de C est

$$C' = \tilde{C} + E_1 + E_2 + E_3 + 2E_4.$$

En particulier, $v_p(C) = 2$.

Démonstration. La matrice d'intersection des E_i est alors

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

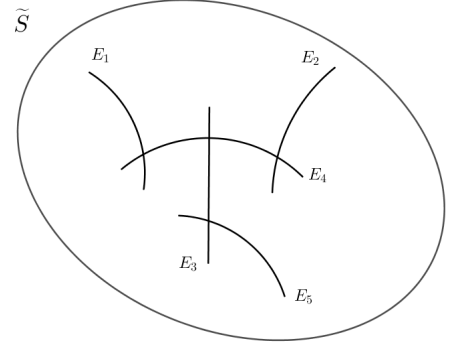
et son inverse est

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & -1/2 & -1 \\ -1/2 & -1 & -1/2 & -1 \\ -1/2 & -1/2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Si la transformée stricte $\tilde{C} \subset \tilde{S}$ de C intersecte la (-2) -courbe E_i alors $C'^* = a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3 + a_4 E_4$ où (a_1, a_2, a_3, a_4) est l'opposé de la i -ième colonne de M^{-1} . Le résultat et les calculs de potentiels s'en suivent. ■

Proposition 2.4.10 (Singularité D_5).

Soit $C \subset S$ une courbe irréductible lisse passant par une unique singularité $p \in S$ de type D_5 de S . On note E_i pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$ les (-2) -courbes exceptionnelles de $\tilde{S}$ au-dessus de p selon la configuration ci-contre. Le rôle des deux courbes exceptionnelles E_1 et E_2 est symétrique, il nous suffit donc de distinguer les quatre cas suivants :



- (1) si la transformée stricte $\tilde{C}$ de C par μ intersecte la (-2) -courbe E_1 alors le pullback de Mumford de C est

$$C' = \tilde{C} + \frac{5}{4}E_1 + \frac{3}{4}E_2 + E_3 + \frac{3}{2}E_4 + \frac{1}{2}E_5.$$

En particulier, $v_p(C) = 5/4$.

- (2) si la transformée stricte $\tilde{C}$ de C par μ intersecte la (-2) -courbe E_3 alors le pullback de Mumford de C est

$$C' = \tilde{C} + E_1 + E_2 + 2E_3 + 2E_4 + E_5.$$

En particulier, $v_p(C) = 2$.

(3) si la transformée stricte $\tilde{C}$ de C par μ intersecte la (-2) -courbe E_4 alors le pullback de Mumford de C est

$$C' = \tilde{C} + \frac{3}{2}E_1 + \frac{3}{2}E_2 + 2E_3 + 3E_4 + E_5.$$

En particulier, $v_p(C) = 3$.

(4) si la transformée stricte $\tilde{C}$ de C par μ intersecte la (-2) -courbe E_5 alors le pullback de Mumford de C est

$$C' = \tilde{C} + \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_2 + E_3 + E_4 + E_5.$$

En particulier, $v_p(C) = 1$.

Démonstration. La matrice d'intersection des E_i est alors

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

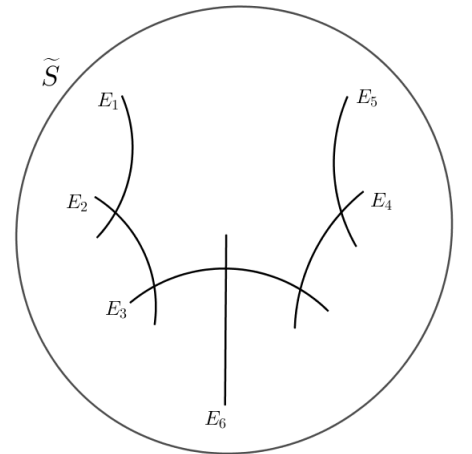
et son inverse est

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -5/4 & -3/4 & -1 & -3/2 & -1/2 \\ -3/4 & -5/4 & -1 & -3/2 & -1/2 \\ -1 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ -3/2 & -3/2 & -2 & -3 & -1 \\ -1/2 & -1/2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si la transformée stricte $\tilde{C} \subset \tilde{S}$ de C intersecte la (-2) -courbe E_i alors $C^* = a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3 + a_4E_4 + a_5E_5$ où $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ est l'opposé de la i -ième colonne de M^{-1} . Le résultat et les calculs de potentiels s'en suivent. ■

Proposition 2.4.11 (Singularité E_6).

Soit $C \subset S$ une courbe irréductible lisse passant par une unique singularité $p \in S$ de type E_6 de S . On note E_i pour $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ les (-2) -courbes exceptionnelles de $\tilde{S}$ au-dessus de p selon la configuration ci-contre. Le rôle des deux courbes exceptionnelles E_1 et E_5 et celui des deux courbes E_2 et E_4 sont symétriques, il nous suffit donc de distinguer les quatre cas suivants :



- (1) si la transformée stricte $\tilde{C}$ de C par μ intersecte la (-2) -courbe E_1 alors le pullback de Mumford de C est

$$C' = \tilde{C} + \frac{4}{3}E_1 + \frac{5}{3}E_2 + 2E_3 + \frac{4}{3}E_4 + \frac{2}{3}E_5 + E_6.$$

En particulier, $v_p(C) = -16/9$.

- (2) si la transformée stricte $\tilde{C}$ de C par μ intersecte la (-2) -courbe E_2 alors le pullback de Mumford de C est

$$C' = \tilde{C} + \frac{5}{3}E_1 + \frac{10}{3}E_2 + 4E_3 + \frac{8}{3}E_4 + \frac{4}{3}E_5 + 2E_6.$$

En particulier, $v_p(C) = 10/3$.

- (3) si la transformée stricte $\tilde{C}$ de C par μ intersecte la (-2) -courbe E_3 alors le pullback de Mumford de C est

$$C' = \tilde{C} + 2E_1 + 4E_2 + 6E_3 + 4E_4 + 2E_5 + 3E_6.$$

En particulier, $v_p(C) = 6$.

- (4) si la transformée stricte $\tilde{C}$ de C par μ intersecte la (-2) -courbe E_6 alors le pullback de Mumford de C est

$$C' = \tilde{C} + E_1 + 2E_2 + 3E_3 + 2E_4 + E_5 + 2E_6.$$

En particulier, $v_p(C) = 2$.

Démonstration. La matrice d'intersection des E_i est alors

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

et son inverse est

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -4/3 & -5/3 & -2 & -4/3 & -2/3 & -1 \\ -5/3 & -10/3 & -4 & -8/3 & -4/3 & -2 \\ -2 & -4 & -6 & -4 & -2 & -3 \\ -4/3 & -8/3 & -4 & -10/3 & -5/3 & -2 \\ -2/3 & -4/3 & -2 & -5/3 & -4/3 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

La transformée stricte $\tilde{C} \subset \tilde{S}$ de C intersecte la (-2) -courbe E_i alors $C^* = a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3 + a_4E_4 + a_5E_5 + a_6E_6$ où $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ est l'opposé de la i -ième colonne de M^{-1} . Le résultat et les calculs de potentiels s'en suivent. ■

Calcul de l'auto-intersection d'une droite sur une surface cubique normale de $\mathbb{P}^3$

Dans cette courte partie, on considère S une surface cubique normale de $\mathbb{P}^3$ et $l \subset S$ une droite sur S . En appliquant les calculs développés ci-dessus, notre but est de classer les singularités de S par lesquelles passe la droite l en fonction des valeurs de l^2 (l'auto-intersection de la droite l sur la surface normale S).

La première ligne de la table 2.4 donne toutes les valeurs possibles de l^2 . Sur la deuxième ligne, on a répertorié les singularités par lesquelles passe la droite l . Si la transformée stricte $\tilde{l}$ de l dans la résolution $\tilde{S}$ de S intersecte la (-2) -courbe exceptionnelle E_i (selon les configurations définies plus haut), on note alors que l passe par une singularité $s^{(i)}$ où $s = A_n, D_4, D_5$ ou E_6 . Les types de surfaces, écrites en chiffres romains, sont répertoriées dans la table 2.3.

Lemme 2.4.12. *Soit S une surface cubique normale de $\mathbb{P}^3$ et $p \in S$ une singularité ADE de S et l une droite sur S . Alors la table 2.4 est vraie.*

Valeurs de l^2	-25/9	-1	-1/2	-1/3	-1/4	-1/5	-1/6
Sing. sur l	$E_6^{(1)}$	$\emptyset$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
Types de Surfaces Possibles	XXI	$\times$	II, III, V, VI VIII, IX, X, XIV XV, XVI, XX	IV, VI IX, XI XV, XIX	VII, X	XII, XVI	XVII, XX

0	1/6	1/5	1/4	3/10	1/3
$A_3^{(2)}, 2A_1$ ou $D_4^{(1)}$	A_1A_2	$A_4^{(2)}$	A_1A_3 ou $D_5^{(1)}$	A_1A_4	$2A_2, A_1A_5$ ou $A_5^{(2)}$
III, V, VII VIII, IX, X XIII, XIV	VI, IX, XV	XII, XVI	X, XVIII	XVI	XI, XV, XVII, XIX, XX

1/2	7/10	5/6	1	2	7/3	5
$A_5^{(3)}$ ou $A_1A_3^{(2)}$	$A_1A_4^{(2)}$	$A_1A_5^{(2)}$	$A_1A_5^{(3)}, D_4^{(3)}$ ou $E_6^{(6)}$	$D_5^{(4)}$	$E_6^{(2)}$	$E_6^{(3)}$
X, XVII, XX	XVI	XX	XIII, XX, XXI	XVIII	XXI	XXI

TABLE 2.4 – Valeurs de l^2

Démonstration. On considère la résolution minimale $\mu : \tilde{S} \rightarrow S$ des singularités de S qui vérifie $\mu^*K_S = K_{\tilde{S}}$. En notant $\tilde{l} \subset \tilde{S}$ la transformée stricte de l par μ , on

trouve par la formule d'adjonction sur $\tilde{S}$

$$\begin{aligned}\tilde{l}^2 &= -2 - (\mu^* K_S) \cdot \tilde{l} \\ &= -2 - K_S \cdot l \\ &= -2 + H|_S \cdot l \\ &= -1\end{aligned}$$

où $H|_S$ est une section hyperplane de S . D'autre part, l passe par au plus deux singularités p et q . Son auto-intersection vaut alors

$$l^2 = -1 + v_p(l) + v_q(l).$$

Il nous suffit maintenant de regarder toutes les paires de singularités existant sur une surface cubique S de $\mathbb{P}^3$ (grâce à la table 2.3) et d'effectuer dans chaque cas le calcul (grâce aux propositions 2.4.7, 2.4.9, 2.4.10 et 2.4.11). ■

Calcul de l'auto-intersection du lieu exceptionnel d'une suite d'éclatements d'une singularité ADE

Dans cette partie, on considère (S, p) une singularité ADE et $\mu : S' \rightarrow S$ une suite d'éclatements de points singuliers infiniment proches de p . Notre but est de calculer E^2 où E est le lieu exceptionnel de μ .

Commençons par le cas où μ est la résolution minimale de S en p , ce cas ne dépend pas du type de singularité de p :

Proposition 2.4.13. *Si $\mu : \tilde{S} \rightarrow S$ est la résolution minimale de S en p et E le lieu exceptionnel de μ alors*

$$E^2 = -2$$

Démonstration. Pour toute singularité ADE (voir les diagrammes de Dynkin correspondant), le lieu exceptionnel $E \subset \tilde{S}$ est formé de n (-2) -courbes E_i $i = 1, \dots, n$ s'intersectant transversalement $n - 1$ fois. On a donc

$$E^2 = \left(\sum_i E_i\right)^2 = \sum_i E_i^2 + 2 \sum_{i < j} E_i \cdot E_j = -2n + 2(n - 1) = -2.$$

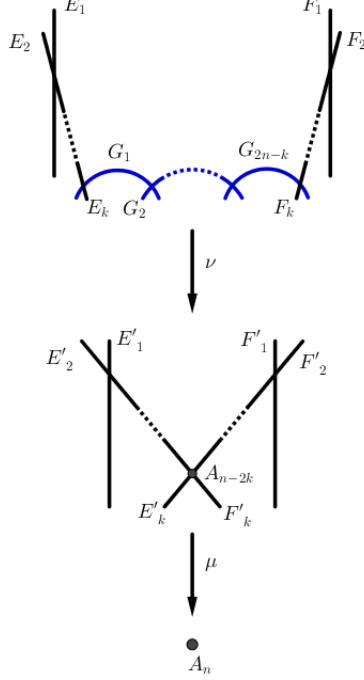
■

Remarque : En particulier, si $E_1, \dots, E_n$ est une chaîne de (-2) -courbes de S' qui ne passe par aucune singularité de S' alors

$$\left(\sum_i E_i\right)^2 = -2$$

On s'en servira à plusieurs reprises dans la suite.

Il nous reste maintenant à traiter les cas où μ est une résolution partielle. Pour cela on divise l'étude selon le type de la singularité p . On utilise le tableau pour connaître la configuration des (-2) -courbes et des singularités après chaque éclatement.



Lemme 2.4.14 (Singularité A_n). *Supposons que p est de type A_n et que μ est la composée de k éclatements (avec $2k < n$). Soit $\nu : \tilde{S} \rightarrow S'$ la résolution minimale de S' , on est dans la situation ci-contre avec les notations suivantes :*

- pour $i = 1, \dots, k$, on note E'_i et F'_i les deux courbes irréductibles exceptionnelles issues du i -ième éclatement et E_i et F_i leurs transformées strictes respectives par ν .
- Pour $i = 1, \dots, 2n - k$, on note G_i les (-2) -courbes exceptionnelles de ν .

Alors la somme E des diviseurs E'_i et F'_i a pour auto-intersection

$$E^2 = \left(\sum_i E'_i + F'_i \right)^2 = -2 \quad (2.4)$$

dans S' .

Démonstration. On rappelle que si $(C_i)_{i \in I}$ est une chaîne de (-2) -courbes ne rencontrant aucune singularité alors $(\sum_{i \in I} C_i)^2 = -2$ (voir la remarque suivant la proposition 2.4.13). On a :

$$\begin{aligned} E^2 &= \left(\sum_{i=1}^k E'_i + F'_i \right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k-1} E'_i + F'_i + E'_k + F'_k \right)^2 \\ &= (E'_k + F'_k)^2 + 2(E'_k + F'_k) \sum_{i=1}^{k-1} E'_i + F'_i + \left(\sum_{i=1}^{k-1} E'_i + F'_i \right)^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Pour $i, j = 1, \dots, k-1$, aucun E'_i n'intersecte de F'_j . On a alors :

$$\left(\sum_{i=1}^{k-1} E'_i + F'_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k-1} E'_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{k-1} F'_i \right)^2 = -4$$

où la dernière égalité survient car les E'_i et les F'_i forment une chaîne de (-2) -courbes ne rencontrant pas de singularité. Pour calculer les produits d'intersections restants, il nous faut connaître le pullback de Mumford, qu'on note $\nu^\bullet$, de $E'_k + F'_k$. D'après la proposition 2.4.7, on a

$$\nu^\bullet(E'_k + F'_k) = E_k + F_k + \sum_{i=1}^{2n-k} G_i.$$

Pour tout $i = 1, \dots, k-1$, $\nu^\bullet E'_i = E_i$ et $\nu^\bullet F'_i = F_i$ car ils ne rencontrent pas de singularité. Finalement l'expression (2.5) devient

$$\begin{aligned} E^2 &= (E_k + F_k + \sum_{i=1}^{2n-k} G_i)^2 + 2(E_k + F_k + \sum_{i=1}^{2n-k} G_i) \cdot \sum_{i=1}^{k-1} (E_i + F_i) - 4 \\ &= -2 \end{aligned}$$

car $E_k, G_1, \dots, G_{2n-k}, F_k$ forment une chaîne de (-2) -courbes ne rencontrant pas de singularités. ■

Singularité D_4 :

Supposons que p est de type D_4 , on note ε_i pour $i = 1, 2, 3, 4$ les quatre éclatements successifs pour résoudre S en p . La résolution partielle μ est une composée de ces éclatements.

Le lieu exceptionnel E de μ est alors soit l , soit $\widehat{l} + \widehat{E}_1$, soit $\check{l} + \check{E}_1 + \check{E}_2$ et on a :

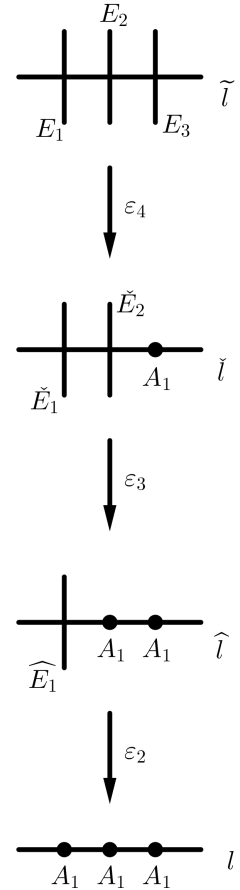
$$l^2 = -\frac{1}{2}, \quad (\widehat{l} + \widehat{E}_1)^2 = -1 \text{ et } (\check{l} + \check{E}_1 + \check{E}_2)^2 = -\frac{3}{2}.$$

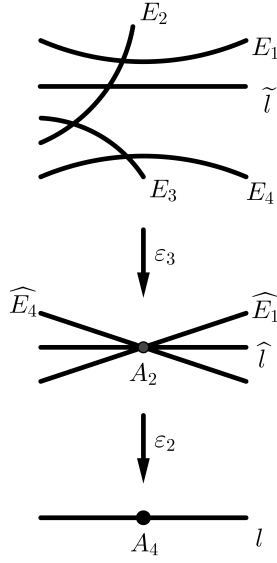
En effet, en utilisant la proposition 2.4.7, on a $l^2 = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} (\widehat{l} + \widehat{E}_1)^2 &= \widehat{l}^2 + 2\widehat{l} \cdot \widehat{E}_1 + \widehat{E}_1^2 \\ &= \widehat{l}^2 + 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} (\check{l} + \check{E}_1 + \check{E}_2)^2 &= \check{l}^2 + \check{E}_1^2 + \check{E}_2^2 + 2\check{l} \cdot \check{E}_1 + 2\check{l} \cdot \check{E}_2 \\ &= \check{l} + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$





Singularité D_5 :

Supposons que p est de type D_5 , on note ε_i pour $i = 1, 2, 3$ les trois éclatements successifs pour résoudre S en p . Le morphisme μ est alors soit ε_1 ou $\varepsilon_2 \circ \varepsilon_1$, le lieu exceptionnel E de μ est alors l ou $\widehat{l} + \widehat{E}_1 + \widehat{E}_4$ et on a :

$$l^2 = -\frac{4}{5} \text{ et } (\widehat{l} + \widehat{E}_1 + \widehat{E}_4)^2 = -\frac{4}{3}.$$

En effet, grâce à la proposition 2.4.7, on peut écrire :

$$\begin{aligned} & (\widehat{l} + \widehat{E}_1 + \widehat{E}_4)^2 \\ &= \widehat{l}^2 + \widehat{E}_1^2 + \widehat{E}_4^2 + 2\widehat{l} \cdot (\widehat{E}_1 + \widehat{E}_4) + 2\widehat{E}_1 \cdot \widehat{E}_4 \\ &= -4 + 2(\widehat{l} + \frac{2}{3}E_2 + \frac{1}{3}E_3)(E_1 + E_2 + E_3 + E_4) \\ &+ 2(E_1 + \frac{2}{3}E_2 + \frac{1}{3}E_3)(E_4 + \frac{1}{3}E_2 + \frac{2}{3}E_3) \\ &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Singularité E_6 :

Supposons que p est de type E_6 , on note ε_i pour $i = 1, 2, 3, 4$ les quatre éclatements successifs pour résoudre S en p . Si $\mu = \varepsilon_1$ alors $E = l$ et

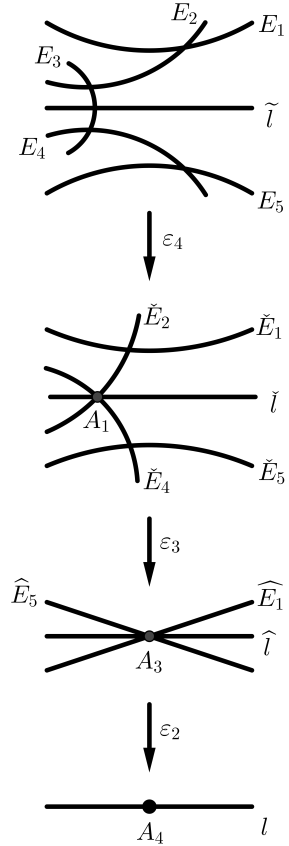
$$E^2 = l^2 = -\frac{1}{2}.$$

Si $\mu = \varepsilon_2 \circ \varepsilon_1$, le lieu exceptionnel E de μ est alors $\widehat{l} + \widehat{E}_1 + \widehat{E}_4$ et grâce à la proposition 2.4.7, on a :

$$E^2 = (\widehat{l} + \widehat{E}_1 + \widehat{E}_5)^2 = -\frac{1}{2}.$$

Si maintenant on suppose que $\mu = \varepsilon_3 \circ \varepsilon_2 \circ \varepsilon_1$ alors $E = \check{l} + \check{E}_1 + \check{E}_2 + \check{E}_4 + \check{E}_5$ et de la même manière que précédemment, on calcule :

$$E^2 = (\check{l} + \check{E}_1 + \check{E}_2 + \check{E}_4 + \check{E}_5)^2 = -\frac{3}{2}$$



On réunit tous les résultats de cette section dans la tableau 2.5 avec les notations suivantes. Pour $p \in S$ une singularité ADE de S , on note $\mu : S' \rightarrow S$ une suite finie d'éclatements de points infiniment proches de p (la deuxième ligne du tableau indique le nombre d'éclatements qui constituent μ) et E le lieu exceptionnel de μ .

Sing.	A_n	D_4				D_5			E_6			
Nb. d'éclatements	k avec $2k \leq n+1$	1	2	3	4	1	2	3	1	2	3	4
Valeur de E^2	-2	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{3}$	-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-2

TABLE 2.5 – Valeurs de E^2

2.5 Surfaces de del Pezzo

Dans cette section, on introduit les surfaces de del Pezzo qui sont les variétés de Fano de dimension 2 et qui, à ce titre, jouent un rôle important dans la classification des modèles minimaux des surfaces normales. On ne considérera ici que les surfaces de del Pezzo à singularités ADE et notre objectif est de retracer les principales propriétés de celles-ci en suivant [Dol12]. Enfin, on énoncera la belle classification des surfaces de del Pezzo avec $\rho = 1$ de Miyanishi et Zhang dans [MZ88].

Définition 2.5.1. *On dit qu'une surface S à singularités ADE est de del Pezzo si $-K_S$ est ample. Dans ce cas, son nombre de Picard $\rho(S)$ est appelé rang de la surface de del Pezzo S et $d = K_S^2$ est appelé son degré.*

Remarque :

- (1) D'après la proposition 2.2.20, les singularités ADE sont Gorenstein et donc si S est à singularités ADE , son diviseur canonique K_S est Cartier. En particulier, si $\mu : \tilde{S} \rightarrow S$ est la résolution minimale des singularités d'une surface de del Pezzo S alors son lieu exceptionnel est uniquement composé de (-2) -courbes.
- (2) Il existe des surfaces S Gorenstein et avec $-K_S$ ample qui ne sont pas à singularités ADE . Par exemple, le cône C de $\mathbb{P}^3$ sur une cubique plane lisse est Gorenstein par la formule d'adjonction

$$K_C = -H|_C$$

où H est la classe de Cartier d'un hyperplan de $\mathbb{P}^3$. La surface S n'est pas ADE car le lieu exceptionnel de sa résolution minimale (l'éclatement du sommet du cône) est une courbe elliptique.

Etant donnée une surface de del Pezzo S à singularités ADE , on s'intéresse à la résolution minimale de celle-ci.

Proposition 2.5.2. *Soit $\mu : \tilde{S} \rightarrow S$ la résolution minimale d'une surface S de del Pezzo à singularités ADE . Alors $-K_{\tilde{S}}$ est nef et big.*

Démonstration. Le lieu exceptionnel de μ n'est composé que de (-2) -courbes et la formule du genre implique que $K_S.E = 0$ si E est une (-2) -courbe. Comme μ est crépante (par le théorème 2.2.10), soit C une courbe irréductible sur $\tilde{S}$ alors on a

$$-K_{\tilde{S}}.C = -K_S.\mu_*C \begin{cases} = 0 & \text{si } C \text{ est } \mu\text{-exceptionnelle} \\ > 0 & \text{sinon car } -K_S \text{ est ample.} \end{cases}$$

Ceci implique que $-K_{\tilde{S}}$ est nef. Enfin $-K_{\tilde{S}}$ est big car, comme μ est crépante, on a

$$K_{\tilde{S}}^2 = K_S^2 > 0.$$

■

Cette proposition nous motive à étudier les surfaces lisses S dont le diviseur canonique est nef et big.

Définition 2.5.3. *On appelle surface de del Pezzo faible toute surface lisse S telle que $-K_S$ est nef et big.*

Le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg (théorème 3.2.1. de [Fuj17]) nous donne alors directement la propriété suivante des surfaces de del Pezzo faibles.

Proposition 2.5.4. *Soit S une surface de del Pezzo faible alors*

$$H^1(S, \mathcal{O}_S) = H^2(S, \mathcal{O}_S) = 0.$$

On énonce le lemme 8.1.13. de [Dol12] :

Proposition 2.5.5. *Soit $\mu : \tilde{S} \rightarrow S$ la résolution minimale des singularités d'une surface de del Pezzo S alors toute courbe irréductible C de $\tilde{S}$ vérifiant $C^2 < 0$ est soit une (-1) -courbe, soit une (-2) -courbe.*

On peut maintenant énoncer le théorème 8.1.15. de [Dol12] qui classifie la résolution minimale des surfaces de del Pezzo à singularités ADE .

Théorème 2.5.6. *Soit S la résolution minimale d'une surface de del Pezzo à singularités ADE. Alors on est dans l'un des trois cas suivants*

- (1) S est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$;
- (2) S est isomorphe à la surface de Hirzebruch $\mathbb{F}_2$;
- (3) S est obtenue en éclatant le plan projectif $\mathbb{P}^2$ successivement en $N \leq 8$ points.

Remarque : Dans [Dol12], la preuve du théorème 8.1.15. marche si on suppose plus généralement que S est une surface de del Pezzo faible.

On obtient alors directement les deux corollaires suivants concernant respectivement les surfaces de del Pezzo lisse et le degré des surfaces de del Pezzo à singularités ADE.

Corollaire 2.5.7. *Si S est une surface de del Pezzo lisse alors S est soit $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, soit obtenue en éclatant $N \leq 8$ fois successivement le plan projectif $\mathbb{P}^2$.*

Corollaire 2.5.8. *Le degré d d'une surface de del Pezzo S à singularités ADE est plus petit ou égal à 9. De plus, si $d = 9$ alors $S \simeq \mathbb{P}^2$.*

Démonstration. Dans les cas (1) et (2) du théorème 2.5.6, on a $K_S^2 = 8$. Si S est dans le cas (3) du théorème 2.5.6 alors $K_S^2 = K_{\mathbb{P}^2}^2 - N = 9 - N \leq 9$ avec égalité si, et seulement si, $S \simeq \mathbb{P}^2$. ■

Une surface de del Pezzo faible S obtenue en éclatant $N \leq 8$ fois la surface $\mathbb{P}^2$ est de degré $d = 9 - N$. On en déduit la classification des surfaces de del Pezzo faibles de degrés 9 et 8 :

Corollaire 2.5.9. *Soit S une surface de del Pezzo faible de degré $d = K_S^2 \leq 9$. On a :*

- (1) si $d = 9$ alors $S \simeq \mathbb{P}^2$;
- (2) si $d = 8$ alors $S \simeq \mathbb{F}_e$ avec $e = 0, 1, 2$.

On énonce le lemme 8.1.22. de [Dol12] qui nous sert à démontrer la proposition 2.5.11.

Lemme 2.5.10. *Soit S une surface lisse avec $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$, si C est une courbe irréductible de S telle que $|-K_S - C| \neq \emptyset$ et $C \notin |-K_S|$ alors $C \simeq \mathbb{P}^1$.*

Démonstration. D'après les hypothèses, on a $-K_S = C + D$ pour un certain diviseur effectif non nul D de S . En particulier $|K_S + C| = \emptyset$ (car sinon il existerait un diviseur effectif D' non nul tel que $-D \sim K_S + C \sim D'$), la formule de Riemann-Roch devient alors

$$0 = h^0(K_S + C) \geq 1 + \frac{1}{2}(C^2 + K_S.C) = p_a(C)$$

et finalement $C \simeq \mathbb{P}^1$. ■

La proposition 2.5.11 suivante montre comment se comporte la classe des surfaces de del Pezzo faibles après éclatement d'un point ou contraction d'une (-1) -courbe.

Proposition 2.5.11.

Soit S une surface de del Pezzo faible, on a :

- (i) *Si $\pi : S \rightarrow S'$ est la contraction d'une (-1) -courbe $E \subset S$ alors S' est une surface de del Pezzo faible.*
- (ii) *Si $\varepsilon : S' \rightarrow S$ est l'éclatement de S le long d'un point n'appartenant pas à une (-2) -courbe de S et $K_S^2 > 1$ alors S' est une surface de del Pezzo faible.*

Démonstration.

- (i) On a $K_S = \pi^*(K_{S'}) + E$ donc pour toute courbe irréductible $C \subset S'$, on trouve

$$K_{S'}.C = \pi^*(K_{S'}) \cdot \pi^*(C) = (K_S - E) \cdot \pi^*(C) = K_S \cdot \pi^*(C) \leq 0.$$

De plus, $K_{S'}^2 = K_S^2 + 1 > 0$ donc $-K_{S'}$ est nef et big.

- (ii) Comme $K_S^2 > 1$, on a $K_{S'}^2 = K_S^2 - 1 > 0$. On en déduit, par Riemann-Roch, que

$$\dim | -K_{S'} | \geq \frac{1}{2}((-K_{S'})^2 - (-K_{S'} \cdot K_{S'})) = K_{S'}^2 > 0$$

et donc il existe un diviseur effectif $D \in | -K_{S'} | \neq \emptyset$. Supposons maintenant par l'absurde qu'il existe une courbe irréductible C telle que $-K_{S'}.C < 0$ alors, en particulier $D.C < 0$ et C est une composante irréductible de D avec $C \neq D$ car sinon $-K_{S'}.C = K_{S'}^2 > 0$. On note $E \subset S'$ le diviseur exceptionnel de ε et $x \in S$ le point éclaté, on a $C \neq E$ car $-K_{S'}.E = 1$. On considère alors $\tilde{C} \subset S$ l'image de la courbe C par ε . Comme $\varepsilon_* K_{S'} = K_S$ et $C \neq E$, la courbe $\tilde{C}$ est une composante irréductible propre d'un diviseur effectif de $| -K_S |$. Le lemme 2.5.10 nous donne alors $C \simeq \mathbb{P}^1$ et donc $\text{mult}_x \tilde{C} \leq 1$. On trouve ensuite

$$0 > -K_{S'}.C = \varepsilon^*(-K_S).C - E.C = -K_S.\tilde{C} - \text{mult}_x(\tilde{C}) \geq -K_S.\tilde{C} - 1$$

puis $-K_S.\tilde{C} = 0$ car $-K_S$ est nef. Finalement $\tilde{C}$ est une (-2) -courbe et $x \in \tilde{C}$ ce qui contredit les hypothèses. ■

Surfaces de del Pezzo de rang 1

Dans cette partie, on énonce les résultats de [MZ88] qui classifie les singularités de surface de del Pezzo S de rang 1 et calcule le défaut de factorialité de S via le groupe quotient $Cl(S)/Pic(S)$. Il calcule également le groupe fondamental $\pi_1(S^0)$ de son lieu lisse S^0 ainsi que les singularités de son revêtement universel $\pi : S' \rightarrow S$.

Définition 2.5.12. *Pour une surface de del Pezzo S de rang 1, il existe un unique générateur ample H de $Pic S$ et on définit l'indice de S par l'entier $k > 0$ tel que $K_S = -kH$.*

Remarque : L'indice k d'une surface de del Pezzo de rang 1 vérifie $1 \leq k \leq 3$ par le corollaire 2.5.8.

Théorème 2.5.13. *Soit S une surface de del Pezzo de rang 1 et $\pi : S' \rightarrow S$ le revêtement universel de S (s'il existe), on note S^0 le lieu lisse de S . Alors*

- (1) *le type de singularités de S est l'un des types présents dans la première colonne de la table 2.6 ;*
- (2) *l'indice de S est 1 sauf si le type de singularités de S est A_1 ;*
- (3) *la table 2.6 est vraie.*

Singularités de S	$\pi_1(S^0)$	$Cl(S)/Pic(S)$	$\rho(S')$	Singularités de S'
A_1	0	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	1	$S' = S$
A_1A_2	0	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	1	$S' = S$
A_4	0	$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$	1	$S' = S$
$2A_1A_3$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	1	A_1
D_5	0	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	1	$S' = S$
A_1A_5	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	2	A_2
$3A_2$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	1	$S' = \mathbb{P}^2$
E_6	0	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	1	$S' = S$
$3A_1D_4$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3}$	1	A_1
A_7	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	3	A_3
A_1D_6	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	2	D_4
E_7	0	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	1	$S' = S$
A_12A_3	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	2	$S' = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$
A_2A_5	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	3	A_1
D_8	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	3	D_5
$2A_1D_6$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	3	A_7
E_8	0	0	1	$S' = S$
A_1E_7	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	2	E_6
A_1A_7	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	5	A_1
$2A_4$	$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$	5	$\emptyset$
A_8	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	5	A_2
$A_1A_2A_5$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	4	$\emptyset$
A_2E_6	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	3	D_4
A_3D_5	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	4	A_2
$4A_2$	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	1	$S' = \mathbb{P}^2$
$2A_12A_3$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	2	A_12A_3
$2D_4$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	4	$2A_1$

TABLE 2.6 – Surfaces de del Pezzo Gorenstein de rang 1

Chapitre 3

Faisceau cotangent logarithmique (FCL)

Pour X une variété lisse et D un diviseur effectif de X , ce chapitre a pour vocation d'introduire deux notions différentes de faisceau cotangent logarithmique (FCL) noté $\Omega_X^1(\log D)$. Il s'articule alors naturellement en deux parties dûes à Saito et Dolgachev dans [Sai80] et [Dol07] respectivement. Ces deux points de vue s'opposent notamment car ils se situent de chaque côté de la frontière entre géométrie analytique et géométrie algébrique. Ces faisceaux sont importants car ils encodent l'inclusion du diviseur D dans X .

En suivant [Sai80], on commence par définir les germes de formes différentielles logarithmiques comme les germes de formes différentielles méromorphes dont les pôles sont sur D et d'ordre 1. On énonce ensuite les premières propriétés du faisceau $\Omega_X^1(\log D)$ formés des germes de 1-formes différentielles logarithmiques et notamment un critère pour qu'il soit localement libre. Le morphisme important associé à ce faisceau est le morphisme des résidus que l'on introduit avec sa suite exacte courte des résidus

$$0 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_X^1(\log D) \xrightarrow{res} \mathcal{M}_D.$$

Cette suite a sans doute motivé Dolgachev à construire son faisceau cotangent logarithmique en utilisant l'algèbre cohomologique en plus particulièrement les suites exactes courtes.

Dans [Dol07], Dolgachev construit son faisceau cotangent logarithmique, noté $\tilde{\Omega}_X^1(\log D)$, grâce aux suites exactes. Il montre d'abord que le FCL de Saito est dans la suite exacte courte suivante

$$0 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_X^1(\log D) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{J}_D(D), \mathcal{O}_X) \rightarrow 0$$

et qu'on a l'inclusion $\nu_* \mathcal{O}_{D'} \subset \mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{J}_D(D), \mathcal{O}_X)$ pour toute résolution $\nu : D' \rightarrow D$ des singularité de D . Le FCL de Dolgachev est alors défini comme le sous-faisceau de $\Omega_X^1(\log D)$ donné par

$$\tilde{\Omega}_X^1(\log D) := \alpha^{-1}(\nu_* \mathcal{O}_{D'}).$$

De cette manière on obtient directement la suite exacte courte des résidus

$$0 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \tilde{\Omega}_X^1(\log D) \rightarrow \nu_* \mathcal{O}_{D'} \rightarrow 0.$$

Pour clôturer ce chapitre, on met en évidence le fait que ces deux notions sont très proches. En effet, on énonce que $\Omega_X^1(\log D) = \tilde{\Omega}_X^1(\log D)$ si D est à croisements normaux en codimension ≤ 2 .

3.1 Le FCL de Saito

On désignera par X une variété complexe lisse et par $D \subset X$ une hypersurface de X . Cette partie de l'exposé s'intéresse au faisceau $\Omega_X^q(\log D)$ de Saito en suivant [Sai80] (si $q = 1$, on l'appelle le faisceau cotangent logarithmique) et se divise en deux sections. La première section est dédiée à la construction des q -formes différentielles logarithmiques comme les q -formes méromorphes admettant au plus des pôles d'ordre 1 le long de D ainsi qu'à l'exposition des premières propriétés de celles-ci. Nous énonçons notamment un critère pour que le FCL de Saito soit localement libre. La deuxième section s'intéresse au morphisme des résidus des q -formes différentielles logarithmiques :

$$res : \Omega_X^q(\log D) \rightarrow \mathcal{M}_D \otimes_{\mathcal{O}_D} \Omega_D^{q-1}.$$

dont le noyau est égal au faisceau Ω_X^q . On énoncera ensuite un résultat sur l'image du morphisme res lorsque $q = 1$.

3.1.1 Construction

Ici, notre but est de construire les q -formes différentielles logarithmiques et d'énoncer leur propriétés. La proposition 3.1.1 montre l'équivalence de quatre conditions qui définissent un germe de q -formes différentielles logarithmiques.

Proposition 3.1.1. *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}^n$ et $D \subset U$ une hypersurface de U définie par l'équation $h(z) = 0$ où h est holomorphe sur U . Soit ω une q -forme méromorphe sur U dont les pôles sont sur D . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) $h\omega$ et $hd\omega$ sont holomorphes sur U ;
- (b) $h\omega$ et $dh \wedge \omega$ sont holomorphes sur U ;
- (c) il existe une fonction holomorphe g , une $(q-1)$ -forme holomorphe ξ et une q -forme holomorphe η sur U telles que

$$\dim D \cap \{g(z) = 0\} \leq n - 2 \text{ et } g\omega = \frac{dh}{h} \wedge \xi + \eta ;$$

- (d) il existe un espace analytique $A \subset D$ de dimension $n - 2$ tel que pour tout point $p \in D \setminus A$,

$$\omega_p \in \frac{dh}{h} \wedge \Omega_{U,p}^{q-1} + \Omega_{U,p}^p$$

où ω_p désigne le germe de ω en p .

On dira alors que ω est une q -forme logarithmique le long de D et on notera $\omega \in \Omega_U^q(\log D)$.

On construit alors le faisceau $\Omega_X^1(\log D)$ comme la réunion de tous les germes de q -formes différentielles logarithmiques :

Définition 3.1.2. Soit X une variété complexe lisse de dimension n et D une hypersurface de X d'équation $\{h = 0\}$. Une q -forme méromorphe ω est dit logarithmique le long de D en p si, en notant h_p le germe de la fonction holomorphe h en p , $h_p \omega$ et $h_p d\omega$ sont holomorphes. On note alors $\Omega_{X,p}^q(\log D)$ l'ensemble des germes de q -formes logarithmiques en p et

$$\Omega_X^q(\log D) := \bigcup_{p \in X} \Omega_{X,p}^q(\log D).$$

En particulier pour $q = 0$ et $q = n$, d'après la proposition 3.1.1, on a

$$\Omega_{X,p}^0(\log D) = \Omega_{X,p}^0 \text{ et } \Omega_{X,p}^n(\log D) = \frac{1}{h_p} \Omega_{X,p}^n.$$

De plus, on remarque qu'une q -forme différentielle holomorphe est logarithmique. Autrement dit :

$$\Omega_X^q \subset \Omega_X^q(\log D).$$

Nous mettons à part le cas $q = 1$ car c'est celui qui nous intéresse particulièrement tout au long de ce chapitre. C'est ce qui motive la définition suivante :

Définition 3.1.3. On appelle $\Omega_X^1(\log D)$ le faisceau cotangent logarithmique selon Saito de X le long de D .

On remarque qu'on a les inclusions suivantes d'après la proposition 3.1.1 pour le FCL de Saito

$$\Omega_X^1 \subset \Omega_X^1(\log D) \subset \frac{1}{h} \Omega_X^1.$$

Donnons maintenant les premières propriétés de ces faisceaux $\Omega_X^q(\log D)$ que l'on vient de construire. Tout d'abord grâce à la proposition 3.1.1, on peut énoncer :

Proposition 3.1.4. Avec les mêmes notations de la définition 3.1.2, on a :

- (1) $\Omega_X^q(\log D)$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$ -modules cohérent ;

- (2) $\bigoplus_{q=0}^n \Omega_X^q(\log D)$ est une $\mathcal{O}_X$ -algèbre extérieure ;
- (3) $\bigoplus_{q=0}^n \Omega_X^q(\log D)$ est fermée par différentielle extérieure ;

On définit maintenant le faisceau tangent logarithmique $\mathcal{T}_X(\log D)$ comme un sous- $\mathcal{O}_X$ -module cohérent du faisceau tangent $\mathcal{T}_X$:

Définition 3.1.5. *Un champ de vecteur holomorphe δ sur X est logarithmique le long de D s'il vérifie l'une de deux conditions équivalentes suivantes*

- (a) *Pour tout point lisse $p \in D$, le vecteur tangent $\delta(p)$ est tangent à D ;*
- (b) *Pour tout point $p \in D$, la dérivation $\delta(h_p)$ de l'équation locale de D en p appartient à l'idéal de $\mathcal{O}_{C,p}$ engendré par h_p .*

On note alors $\mathcal{T}_{X,p}(\log D)$ l'ensemble des germes δ en p de champs de vecteurs holomorphes sur X tels que $\delta(h_p) \in (h_p)$ et on définit le faisceau

$$\mathcal{T}_X(\log D) = \bigcup_{p \in X} \text{Der}_{X,p}(\log D).$$

On vérifie facilement que si δ est un champ de vecteurs holomorphe sur X alors $h\delta$ est un champ de vecteurs logarithmique le long de D . Autrement dit, on a les inclusions suivantes

$$h\mathcal{T}_X \subset \mathcal{T}_X(\log D) \subset \mathcal{T}_X.$$

Proposition 3.1.6. *Les faisceaux $\mathcal{T}_X(\log D)$ et $\Omega_X^1(\log D)$ sont duaux l'un de l'autre par le produit intérieur. En particulier, se sont des $\mathcal{O}_X$ -modules réflexifs.*

Démonstration. En dualisant les inclusions suivantes

$$\Omega_{X,p}^1 \subset \Omega_{X,p}^1(\log D) \subset \frac{1}{h} \Omega_{X,p}^1,$$

on obtient

$$h\mathcal{T}_{X,p} \subset \Omega_{X,p}^1(\log D)^* \subset \mathcal{T}_{X,p}.$$

Un élément $\delta \in \Omega_{X,p}^1(\log D)^*$ peut alors être vu comme un germe en p de champ de vecteur holomorphe sur X et qu'en particulier, le produit intérieur $\iota_\delta(dh/h)$ est holomorphe. Or

$$\iota_\delta\left(\frac{dh}{h}\right) = \frac{1}{h}dh(\delta) = \frac{\delta(h)}{h}$$

donc $\delta(h) = h[\iota_\delta(dh/h)] \in (h) \subset \mathcal{O}_X$ puis $\delta \in \mathcal{T}_{X,p}(\log D)$. Réciproquement, en dualisant les inclusions

$$h\mathcal{T}_{X,p} \subset \mathcal{T}_{X,p}(\log D) \subset \mathcal{T}_{X,p}$$

on obtient

$$\Omega_{X,p}^1 \subset (\mathcal{T}_{X,p}(\log D))^* \subset \frac{1}{h} \Omega_{X,p}^1.$$

Un élément $\omega \in (\mathcal{T}_{X,p}(\log D))^*$ peut alors être vu comme $\frac{1}{h}\xi$ où $\xi = \sum_{i=1}^n a_i(z)dz_i$ est un germe de 1-forme holomorphe en p avec $z_1, \dots, z_n$ un système de coordonnées de X local en p . On pose pour $1 \leq i, j \leq n$

$$\delta_{i,j} := \frac{\partial h}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial h}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial z_i}$$

qui appartient à $\mathcal{T}_{X,p}(\log D)$ (car $\delta_{i,j}(h) = 0$) donc en particulier le produit intérieur $\iota_{\delta_{i,j}}(\omega)$ est holomorphe pour tout $1 \leq i, j \leq n$. Or

$$\iota_{\delta_{i,j}}(\omega) = \frac{1}{h} \iota_{\delta_{i,j}} \left(\sum_k a_k dz_k \right) = \frac{1}{h} \left(a_j \frac{\partial h}{\partial z_j} - a_i \frac{\partial h}{\partial z_i} \right)$$

donc la 2-forme différentielles

$$dh \wedge \omega = \frac{1}{h} \sum_{i,j} \left(a_j \frac{\partial h}{\partial z_j} - a_i \frac{\partial h}{\partial z_i} \right) dz_i \wedge dz_j$$

est holomorphe et enfin $\omega \in \Omega_{X,p}^1(\log D)$ par la proposition 3.1.1. ■

Comme tout faisceau réflexif sur une surface lisse est localement libre (Cor 1.4 de [Har80]), on obtient directement le corollaire suivant

Corollaire 3.1.7. *Si X est une surface lisse alors $\Omega_X^1(\log D)$ et $\mathcal{T}_X(\log D)$ sont des $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres.*

En général, ces $\mathcal{O}_X$ -modules ne sont pas localement libres. La proposition 3.1.8 suivante donne un critère pour que $\Omega_D^1(\log D)$ soit localement libre.

Proposition 3.1.8. *Soit X une variété complexe lisse et D une hypersurface de X alors $\Omega_{X,p}^1(\log D)$ est $\mathcal{O}_{X,p}$ -libre si, et seulement si,*

$$\bigwedge^n \Omega_{X,p}^1(\log D) = \Omega_{X,p}^n(\log D).$$

Autrement dit, $\Omega_{X,p}^1(\log D)$ est localement libre si, et seulement si, il existe $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega_{X,p}^1(\log D)$ telles que

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n = \frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{h}$$

Dans ce cas, $\{\omega_i | i = 1, \dots, n\}$ forme une $\mathcal{O}_{X,p}$ -base pour $\Omega_{X,p}^1(\log D)$.

3.1.2 Résidus d'une forme logarithmique

Soit X une variété complexe lisse et $D \subset X$ un diviseur d'équation $\{h = 0\}$. On note $\nu : D' \rightarrow D$ la normalisation de D et $\mathcal{M}_D$ (resp. $\mathcal{M}_{D'}$) le faisceau des germes de fonctions méromorphes sur D (resp. sur D'). On remarque que $\mathcal{M}_D \otimes_{\mathcal{O}_D} \Omega_D^q = \nu_*(\mathcal{M}_{D'} \otimes_{\mathcal{O}_{D'}} \Omega_{D'}^q)$ pour tout entier q .

Définition 3.1.9. *On définit le morphisme de résidu*

$$res : \Omega_X^q(\log D) \rightarrow \mathcal{M}_D \otimes_{\mathcal{O}_D} \Omega_D^{q-1}$$

défini de la manière suivante. Soit $\omega \in \Omega_X^q(\log D)$ vérifiant $g\omega = \frac{dh}{h} \wedge \xi + \eta$ par la proposition 3.1.1 alors définit le résidu de ω par

$$res(\omega) := \frac{1}{g} \xi \in \mathcal{M}_D \otimes_{\mathcal{O}_D} \Omega_D^{q-1}.$$

Proposition 3.1.10. *La définition 3.1.9 ne dépend pas de la présentation $g\omega = \frac{dh}{h} \wedge \xi + \eta$ choisie.*

Le lemme suivant (lemme (2.3) de [Sai80]) permet de démontrer la proposition 3.1.10.

Lemme 3.1.11. *Soit h un germe non constant de fonction holomorphe en p . Alors il existe un entier k tel que pour tout $\omega \in \Omega_{X,p}^q$ vérifiant $\omega \wedge dh = 0$, on a*

$$\left(\frac{\partial h}{\partial z_i}\right)^k \omega \in dh \wedge \Omega_{X,p}^{q-1} \text{ pour tout } i = 1, \dots, n.$$

Démonstration de la proposition 3.1.10 lorsque $q = 1$. Montrons que la définition ne dépend pas du choix de la présentation $g\omega = \frac{dh}{h} \wedge \xi + \eta$ dans le cas $q = 1$. Considérons

$$g_i \omega = \frac{dh}{h} \wedge \xi_i + \eta_i, \text{ pour } i = 1, 2$$

deux présentations différentes de la forme logarithmiques $\omega \in \Omega_{X,p}^1(\log D)$ avec $g_i, \xi_i \in \mathcal{O}_{X,p}$ et $\eta_i \in \Omega_{X,p}^1$. Alors on a $(g_2 \xi_1 - g_1 \xi_2) \frac{dh}{h} = g_1 \eta_2 - g_2 \eta_1$ et donc $(g_1 \eta_2 - g_2 \eta_1) \wedge dh = 0$. Le lemme 3.1.11 nous dit alors que pour tout $i = 1, \dots, n$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial z_i}\right)^k (g_1 \eta_2 - g_2 \eta_1) = \zeta dh$$

pour un certain $\zeta \in \mathcal{O}_{X,p}$. En particulier, on a $\left[\left(\frac{\partial h}{\partial z_i}\right)^k (g_1 \xi_2 - g_2 \xi_1) - h\zeta\right] dh = 0$ puis

$$\left(\frac{\partial h}{\partial z_i}\right)^k (g_1 \xi_2 - g_2 \xi_1) = h\zeta$$

et enfin on en déduit que la classe de $(\frac{\partial h}{\partial z_i})^k (g_1 \xi_2 - g_2 \xi_1)$ dans $\mathcal{O}_{D,p}$ est nulle pour tout $i = 1, \dots, n$. Or il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $(\frac{\partial h}{\partial z_i})^k$ est non nul dans $\mathcal{O}_{D,p}$ donc $\frac{1}{g_1} \xi_1$ et $\frac{1}{g_2} \xi_2$ définissent la même classe dans $\mathcal{M}_{D,p}$. ■

Proposition 3.1.12. *Le morphisme res commute avec la différentielle extérieure. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \Omega_X^q(\log D) & \xrightarrow{res} & \mathcal{M}_D \otimes_{\mathcal{O}_D} \Omega_D^{q-1} \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ \Omega_X^{q+1}(\log D) & \xrightarrow{res} & \mathcal{M}_D \otimes_{\mathcal{O}_D} \Omega_D^q \end{array}$$

On énonce maintenant la très importante suite exacte des résidus :

Proposition 3.1.13. *Le noyau du morphisme res est exactement Ω_X^q . Autrement dit on a la suite exacte*

$$0 \rightarrow \Omega_X^q \rightarrow \Omega_X^q(\log D) \rightarrow \mathcal{M}_D \otimes_{\mathcal{O}_D} \Omega_D^{q-1}.$$

Démonstration. Soit $\omega \in \Omega_{X,p}^q(\log D)$ alors $res(\omega) = 0$ si, et seulement si, pour toute présentation $g\omega = \frac{dh}{h} \wedge \xi + \eta$, on a $\xi = 0$ si, et seulement si, $g\omega \in \Omega_{X,p}^q$. ■

Proposition 3.1.14. *L'image du morphisme res contient le faisceau $\nu_* \mathcal{O}_{D'}$ où $\nu : D' \rightarrow D$ est la normalisation de D .*

Démonstration. Soit $\alpha \in (\nu_* \mathcal{O}_{D'})_p$. Construisons une 1-forme logarithmique $\omega \in \Omega_{X,p}^1(\log D)$ telle que $res(\omega) = \alpha$. Remarquons tout d'abord que pour tout $1 \leq i \leq n$, $\frac{\partial h}{\partial z_i} \alpha$ appartient à $\mathcal{O}_{D,p}$ car $\frac{\partial h}{\partial z_i}$ est un dénominateur universel. Alors, en notant $a_i \in \mathcal{O}_{X,p}$ tel que $a_i|_D = \frac{\partial h}{\partial z_i} \alpha$, on a

$$\frac{\partial h}{\partial z_j} a_i - \frac{\partial h}{\partial z_i} a_j = b_{i,j} h \in \mathcal{I}_{D,p}$$

où $b_{i,j} \in \mathcal{O}_{X,p}$ et $\mathcal{I}_{D,p}$ est le faisceau d'idéaux de D . On pose alors

$$\omega := \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n a_i dz_i$$

et on a

$$\frac{\partial h}{\partial z_j} \omega = a_j \frac{dh}{h} + \sum_{i=1}^n b_{i,j} dz_i.$$

On en déduit que $\omega \in \Omega_{X,p}^1(\log D)$ et

$$\text{res}(\omega) = \frac{a_j}{\frac{\partial h}{\partial z_j}}|_D = \alpha.$$

■

Remarque : La construction du faisceau cotangent logarithmique $\tilde{\Omega}_X^1(\log D)$ de Dolgachev (voir section 3.2.1) consiste en la manipulation de suites exactes pour obtenir la suite exacte courte des résidus

$$0 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \tilde{\Omega}_X^1(\log D) \rightarrow \nu_* \mathcal{O}_{D'} \rightarrow 0$$

pour toute résolution $\nu : D' \rightarrow D$ des singularités de D . Dans le cas où la normalisation est une résolution des singularités de D , ceci justifie l'importance de la proposition 3.1.14 dans la vision de Dolgachev. Cette suite s'avérera très utile pour calculer les classes de Chern du faisceau $\tilde{\Omega}_X^1(\log D)$ (voir section 5.2).

On conclut cette section par le théorème 3.1.15 (théorème 2.9. de [Sai80]) qui donne une description du $\mathcal{O}_{X,p}$ -module $\Omega_{X,p}^1(\log D)$ sous certaines conditions équivalentes.

Théorème 3.1.15.

Avec les mêmes notations que la définition 3.1.9, soit $(D, p) = (D_1, p) \cup \dots \cup (D_m, p)$ les composantes irréductibles locales de D en $p \in D$ et $h = h_1 \dots h_m$ les équations correspondantes. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\Omega_{X,p}^1(\log D) = \sum_{i=1}^m \mathcal{O}_{X,p} \frac{dh_i}{h_i} + \Omega_{X,p}^1$;
- (2) $\Omega_{X,p}^1$ est engendré par les formes fermées ;
- (3) $\text{res}(\Omega_{X,p}^1(\log D)) = \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{D_i,p}$;
- (4) les diviseurs D_i sont normaux, D_i et D_j (pour tout $i \neq j$) ont des croisements normaux en dehors d'un sous-ensemble de dimension $n-3$ et $\dim D_i \cap D_j \cap D_k \leq n-3$ pour tout $i \neq j \neq k \neq i$.

Démonstration. En préambule de la preuve, on remarque que $\text{res}(\frac{dh}{h}) = 1$ et que $\frac{dh}{h} = \sum_{i=1}^m \frac{dh_i}{h_i}$. On a également pour tout $1 \leq i \leq m$,

$$\text{res}(\frac{dh_i}{h_i})|_{D_i} = 1$$

et en particulier que $\text{res}(\frac{dh}{h})$ est égal à $\text{res}(\frac{dh_i}{h_i})$ sur chaque branche D_i . En effet, on vérifie aisément que $\frac{dh_i}{h_i}$ est une forme logarithmique. La proposition 3.1.1 donne alors une présentation

$$g \frac{dh_i}{h_i} = f \frac{dh}{h} + \eta$$

avec $f, g \in \mathcal{O}_{X,p}$, $\eta \in \Omega_{X,p}^1$ et $\text{res}(\frac{dh_i}{h_i}) = f/g$. Quand on la restreint à D_i , elle devient

$$(g|_{D_i} - f|_{D_i}) \frac{dh_i}{h_i}|_{D_i} = \sum_{j \neq i} f|_{D_i} \frac{dh_j}{h_j} + \eta|_{D_i}.$$

et son membre de droite appartient à $\Omega_{D_i,p}^1$. On doit avoir donc avoir $g|_{D_i} = f|_{D_i}$ et on trouve bien

$$\text{res}(\frac{dh_i}{h_i})|_{D_i} = 1.$$

(1) $\Rightarrow$ (2) Cela découle du fait que $d(\frac{dh_i}{h_i}) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Soit $\omega \in \Omega_{X,p}^1(\log D)$ tel que $d\omega = 0$ alors par la proposition 3.1.12, on a

$$0 = \text{res}(d\omega) = d(\text{res}(\omega))$$

et donc le résidu de ω sur chaque branche D_i est une constante $c_i \in \mathbb{C}$. De plus, on a

$$\text{res}(\sum_i c_i \frac{dh_i}{h_i}) = \sum_i c_i \text{res}(\frac{dh_i}{h_i}) = \text{res}(\omega)$$

car on a montré $\text{res}(\frac{dh_i}{h_i})|_{D_i} = 1$ dans le préambule de la preuve. Finalement, comme le noyau de res est Ω_X^1 , il existe $\eta \in \Omega_{X,p}^1$ tel que

$$\omega = \sum_{i=1}^n c_i \frac{dh_i}{h_i} + \eta$$

d'où le résultat.

(2) $\Rightarrow$ (3) La preuve de (2) $\Rightarrow$ (1) montre que si $\omega \in \Omega_{X,p}^1(\log D)$ est fermée alors $\text{res}(\omega)$ est constant sur chaque branche D_i , on en déduit le résultat.

(3) $\Rightarrow$ (1) Réciproquement, si $\text{res}(\omega) = \sum_i f_i$ où f_i est nulle sur D_j pour tout $i \neq j$, alors

$$\text{res}(\sum_i f_i \frac{dh_i}{h_i}) = \sum_i f_i = \text{res}(\omega)$$

car $\text{res}(\frac{dh_i}{h_i})|_{D_i} = 1$ d'après le préambule de la preuve. Finalement, comme le noyau de res est Ω_X^1 , il existe $\eta \in \Omega_{X,p}^1$ tel que

$$\omega = \sum_i f_i \frac{dh_i}{h_i} + \eta.$$

(3) $\Rightarrow$ (4) D'après la proposition 3.1.14, on a les inclusions

$$\nu_* (\bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{D'_i})_p \subseteq \text{res}(\Omega_{X,p}^1(\log D)) \subseteq \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{D_i,p}$$

et en particulier $\mathcal{O}_{D_i, p} = \nu_*(\mathcal{O}_{D'_i})_p$ pour tout $1 \leq i \leq m$ donc les D_i sont normaux. On en déduit qu'il sont lisse en dehors d'un sous-espace de dimension $n - 3$. Prenons deux composantes D_i et D_j et supposons qu'elles ne sont pas transverses c'est-à-dire qu'elles sont tangentes le long d'un sous-espace V de dimension $n - 2$. Comme D_i et D_j sont lisse en un point général de v , on peut choisir des coordonnées locales $(y_1, \dots, y_n)$ de X en un point général $q \in V$ telles que

$$(D_i, q) = \{y_1 = 0\} \text{ et } (D_j, q) = \{y_1 + y_2^k = 0\}$$

pour un certain entier $k \geq 2$. Alors on considère la 1-forme $\omega \in \Omega_{X, q}^1(\log D)$ définie par

$$\omega = \frac{y_2 dy_1 - k y_1 dy_2}{y_1(y_1 + y_2^k)}$$

qui vérifie $\text{res}(\omega)|_{D_i, q} = y_2^{1-k}$ qui a des pôles le long de $D_i \cap D_j$. Or, comme $\Omega_X^1(\log D)$ est un $\mathcal{O}_X$ -module cohérent, $\text{res}(\Omega_X^1(\log D)) = \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{D_i}$ dans un voisinage de p et en prenant q assez proche de p , on obtient une contradiction. Les D_i sont donc transverses deux à deux. Supposons maintenant qu'il existe trois composantes irréductibles D_i, D_j et D_k telles que $\dim D_i \cap D_j \cap D_k = n - 2$. En un point général de $D_i \cap D_j \cap D_k$, ces trois composantes sont lisses et ont deux à deux des croisements normaux. Donc il existe des coordonnées locales $(y_1, \dots, y_n)$ de X en un point général $q \in D_i \cap D_j \cap D_k$ telles que

$$(D_i, q) = \{y_1 = 0\}, (D_j, q) = \{y_2 = 0\} \text{ et } (D_k, q) = \{y_1 - y_2 = 0\}.$$

Alors, comme précédemment, on considère la 1-forme $\omega \in \Omega_{X, q}^1(\log D)$ définie par

$$\omega = \frac{1}{y_1 - y_2} \left(\frac{dy_1}{y_1} - \frac{dy_2}{y_2} \right)$$

qui vérifie $\text{res}(\omega)|_{D_i, q} = -\frac{1}{y_2}$ qui a des pôles le long de $D_i \cap D_j \cap D_k$. En prenant q assez proche de p , cela contredit $\text{res}(\Omega_X^1(\log D)) = \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{D_i}$ dans un voisinage de p . Finalement $\dim D_i \cap D_j \cap D_k \leq n - 3$ pour tout $i \neq j \neq k \neq i$. ■

3.2 Le FCL de Dolgachev

L'objectif de Dolgachev dans son article [Dol07] est de construire un sous-faisceau $\tilde{\Omega}_X^1(\log D)$ du faisceau cotangent logarithmique $\Omega_X^1(\log D)$ de Saito qui vérifie la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \tilde{\Omega}_X^1(\log D) \rightarrow \nu_* \mathcal{O}_{D'} \rightarrow 0$$

pour toute résolution $\nu : D' \rightarrow D$ des singularités de D . Cette propriété est notamment utile pour le calcul des classes de Chern de $\tilde{\Omega}_X^1(\log D)$ (voir section 5.2). On expose cette construction dans la partie 3.2.1 en explicitant les suites exactes successivement utilisées pour arriver à ce but. Dans la seconde partie 3.2.2, plus courte que la première, on énoncera les principaux résultats qui comparent ces deux faisceaux et notamment une condition nécessaire et suffisante pour qu'ils soient égaux.

3.2.1 Construction par les suites exactes

Soit X une variété algébrique complexe de dimension n et D un diviseur réduit d'équation et on note h_U l'équation locale de D dans un ouvert $U \subset X$.

Commençons par définir le faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_D$ de $\mathcal{O}_D$ qui jouera un rôle important dans la suite du chapitre.

Définition 3.2.1. *On note $\mathcal{J}_D \subset \mathcal{O}_D$ le faisceau d'idéaux engendré dans chaque $\mathcal{O}_D(U)$ par $\partial(h_U)$ pour $\partial \in \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X(U))$ et où h_U est une équation locale de D dans U . On notera alors D^s le sous-schéma fermé défini par le faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_D$.*

Remarque : Le sous-schéma fermé D^s est inclus dans le lieu de singulier D_{sing} de D . En effet, on a :

$$\mathcal{J}_D = \text{Jac}(D) \cdot \mathcal{O}_D$$

où $\text{Jac}(D)$ est le faisceau d'idéaux jacobien de D dans $\mathcal{O}_X$ (cf. [Laz04b], définition 9.3.53.). Comme le faisceaux d'idéaux $\text{Jac}(D)$ s'annule exactement sur D_{sing} , on en déduit que $D^s \subset D_{\text{sing}}$.

Proposition 3.2.2. *Avec les notations précédentes, on a la suite exacte courte*

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_X(\log D) \rightarrow \mathcal{T}_X \rightarrow \mathcal{J}_D(D) \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

On rappelle (proposition 3.1.6) que le faisceau dual $\mathcal{T}_X(\log D)^*$ est le faisceau cotangent logarithmique $\Omega_X^1(\log D)$ de Saito défini à la section 3.1. Comme $\mathcal{T}_X$ est un faisceau localement libre, on peut dualiser la suite exacte courte (3.1) et ainsi obtenir

$$0 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_X^1(\log D) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{J}_D(D), \mathcal{O}_X) \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

Ceci nous amène à mieux comprendre le faisceau $\mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{J}_D(D), \mathcal{O}_X)$, c'est l'objet de la proposition suivante qui nous éclaire un peu plus.

Proposition 3.2.3. *Le faisceau $\mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{J}_D(D), \mathcal{O}_X)$ de (3.2) se trouve dans la suite exacte courte*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{J}_D(D), \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{E}xt_X^2(\mathcal{O}_{D^s}(D), \mathcal{O}_X) \rightarrow 0. \quad (3.3)$$

où $D^s \subset D$ est le sous-schéma fermé de D défini par le faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_D$.

Démonstration. On part de la suite exacte courte suivante

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_D \rightarrow \mathcal{O}_D(D) \rightarrow \mathcal{O}_{D^s}(D) \rightarrow 0$$

à laquelle on applique le foncteur $\mathcal{H}om_X(\cdot, \mathcal{O}_X)$ pour avoir la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{O}_D(D), \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{J}_D(D), \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{E}xt_X^2(\mathcal{O}_{D^s}(D), \mathcal{O}_X) \rightarrow 0.$$

Il nous reste alors à expliciter $\mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{O}_D(D), \mathcal{O}_X)$: d'abord on a

$$\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_D, \omega_X) \simeq \omega_D \simeq \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_D(D)$$

puis

$$\mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{O}_D, \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{O}_D, \omega_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1} \simeq \mathcal{O}_D(D).$$

et enfin

$$\mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{O}_D(D), \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_D.$$

■

En particulier, on peut se demander quand le faisceau $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{D^s}(D), \mathcal{O}_X)$ s'annule car dans ce cas on obtient l'égalité suivante

$$\mathcal{E}xt^1(\mathcal{J}_D(D), \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_D.$$

Le corollaire 3.2.5 qui suit explicite une condition sur la codimension de D^s qui garantit l'égalité ci-dessus. Énonçons d'abord un énoncé qui résulte directement de la proposition 18.4. et du théorème 18.7. de [Eis95].

Théorème 3.2.4. *Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur une variété algébrique X dont le support est un fermé de codimension k dans X , on a pour tout $q < k$*

$$\mathcal{E}xt_X^q(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) = 0. \quad (3.4)$$

Corollaire 3.2.5. *Si $\text{codim}_X D^s \geq 3$ alors $\mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{J}_D(D), \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_D$. En particulier, on a la suite exacte courte :*

$$0 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega^1(\log D) \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

Démonstration. D'après le théorème 3.2.4, pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X dont le support est un fermé de codimension k dans X , on a pour tout $q < k$

$$\mathcal{E}xt_X^q(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) = 0. \quad (3.6)$$

La suite exacte courte (3.3) donne alors l'isomorphisme $\mathcal{O}_D \simeq \mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{J}_D(D), \mathcal{O}_X)$ et on tombe sur les résultat en récrivant la suite exacte courte (3.2). ■

On définit maintenant les faisceaux d'idéaux $adj(D)$ de $\mathcal{O}_X$ et $\mathfrak{c}_D$ de $\mathcal{O}_D$ avant de lister leurs propriétés dans le lemme 3.2.7.

Pour une variété projective X et un $\mathbb{Q}$ -diviseur D de X , on appelle une log résolution de la paire (X, Δ) tout morphisme birationnel $\psi : X' \rightarrow X$ où X' est une variété projective lisse tel que $\mu^*D + Exc(\psi)$ est un diviseur SNC.

Définition 3.2.6. Soit D un diviseur réduit sur une variété lisse X et soit $\mu : X' \rightarrow X$ une log résolution de la paire (X, D) . Soit F le diviseur effectif μ -exceptionnel sur X' tel que $\mu^*D = D' + F$ alors on définit le faisceau d'idéaux adjoint $adj(D)$ de D dans X comme le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_X$ défini par

$$adj(D) := \mu_*\mathcal{O}_{X'}(K_{X'/X} - F)$$

qui est indépendant du choix de la log résolution μ choisie. On définit également le faisceau d'idéaux dans $\mathcal{O}_D$

$$\mathfrak{c}_D := adj(D) \cdot \mathcal{O}_D.$$

Le lemme qui suit énonce les propriétés rassemblées p.179 – 181 de [Laz04a] concernant les faisceaux d'idéaux $adj(D)$ et $\mathfrak{c}_D$.

Lemme 3.2.7. En suivant les notations et hypothèses de la définition 3.2.6, les faisceaux d'idéaux $adj(D)$ et $\mathfrak{c}_D$ vérifient

- (1) $\mathcal{J}_D \subset \mathfrak{c}_D$;
- (2) si $\nu : D' \rightarrow D$ est une résolution des singularités de D alors

$$\mathfrak{c}_D \otimes \omega_D = \nu_*\omega_{D'};$$

- (3) si $\nu : D' \rightarrow D$ la normalisation de D et que D' est lisse, alors $\mathfrak{c}_D$ le faisceau d'idéaux associé au conducteur de ν (i.e. le faisceau d'idéaux annulateur de $\nu_*\mathcal{O}_{D'}/\mathcal{O}_D$) ;
- (4) $adj(D) = \mathcal{O}_X$ si, et seulement si, D est normal et a au plus des singularités rationnelles.

En utilisant le lemme 3.2.7, on montre l'importante proposition suivante qui identifie $\nu_*\mathcal{O}_{D'}$, pour toute résolution $\nu : D' \rightarrow D$ des singularités de D , à un sous-faisceaux de $\mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{J}_D(D), \mathcal{O}_X)$ grâce à la suite exacte (3.7).

Proposition 3.2.8. Soit $\nu : D' \rightarrow D$ une résolution des singularités de D . Le faisceau $\mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{J}_D(D), \mathcal{O}_X)$ est dans la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow \nu_* \mathcal{O}_{D'} \rightarrow \mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{J}_D(D), \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\phi} \mathcal{E}xt_X^2([\mathfrak{c}_D/\mathcal{J}_D](D), \mathcal{O}_X). \quad (3.7)$$

De plus, l'application ϕ est surjective si $R^i \nu_* \mathcal{O}_{D'} = 0$ pour tout $i \leq 1$.

Démonstration. Le point (2) du lemme 3.2.7 implique que $\mathfrak{c}_{D,x} = \mathcal{O}_{D,x}$ pour tout $x \in D_{\text{lisse}}$ et de même, $\mathcal{J}_D = \mathcal{O}_D$ sur D_{lisse} . On en déduit que le support de $\mathfrak{c}_D/\mathcal{J}_D$ est un fermé de codimension au moins 2 dans X et le théorème 3.2.4 nous donne alors

$$\mathcal{E}xt_X^1(\mathfrak{c}_D/\mathcal{J}_D, \mathcal{O}_X) = 0. \quad (3.8)$$

Considérons maintenant la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_D(D) \rightarrow \mathfrak{c}_D(D) \rightarrow [\mathfrak{c}_D/\mathcal{J}_D](D) \rightarrow 0$$

et appliquons-lui le foncteur $\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{O}_X)$ pour avoir la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathcal{E}xt_X^1(\mathfrak{c}_D(D), \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{J}_D(D), \mathcal{O}_X) \\ &\rightarrow \mathcal{E}xt_X^2([\mathfrak{c}_D/\mathcal{J}_D](D), \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{E}xt_X^2(\mathfrak{c}_D(D), \mathcal{O}_X). \end{aligned} \quad (3.9)$$

La formule d'adjonction et le point (2) du lemme 3.2.7 nous donnent

$$\mathfrak{c}_D(D) = \nu_*(\omega_{D'}) \otimes \omega_X^{-1}$$

d'où

$$\mathcal{E}xt_X^i(\mathfrak{c}_D(D), \mathcal{O}_X) = \mathcal{E}xt_X^i(\nu_* \omega_{D'}, \omega_X).$$

Comme $\nu_* \omega_{D'}$ ne dépend pas du choix de la résolution ν des singularités de D , on peut supposer que ν provient d'une log résolution $\mu : X' \rightarrow X$ de la paire (X, D) avec D' la transformée stricte de D par μ et $\nu = \mu|_{D'}$. On a alors

$$\mathcal{E}xt_{X'}^1(\omega_{D'}, \omega_{X'}) \simeq \mathcal{O}_{D'} \text{ et } \mathcal{E}xt_{X'}^i(\omega_{D'}, \omega_{X'}) = 0 \text{ pour } i \neq 1.$$

On applique le théorème d'annulation de Grauert-Riemenschneider :

$$\nu_* \omega_{D'} = \omega_D \text{ et } R^q \nu_* \omega_{D'} = 0 \text{ pour } q > 0$$

et le théorème de dualité Chap. III, Théorème 11.1 [Har63] pour les morphismes projectifs nous donne les isomorphismes

$$\mathcal{E}xt_X^1(\nu_* \omega_{D'}, \omega_X) \simeq \nu_* \mathcal{O}_{D'} \text{ et } \mathcal{E}xt_X^i(\nu_* \omega_{D'}, \omega_X) = R^{i-1} \nu_* \mathcal{O}_{D'} \text{ pour } i \geq 2.$$

Finalement la suite exacte (3.9) devient

$$0 \rightarrow \nu_* \mathcal{O}_{D'} \rightarrow \mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{J}_D(D), \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\phi} \mathcal{E}xt_X^2([\mathfrak{c}_D/\mathcal{J}_D](D), \mathcal{O}_X).$$

■

Remarque :

- (1) Le faisceau $\nu_*\mathcal{O}_{D'}$ peut être vu comme un sous-faisceau de $\mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{J}_D(D), \mathcal{O}_X)$ qui intervient dans la suite exacte (3.2) :

$$0 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_X^1(\log D) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{J}_D(D), \mathcal{O}_X) \rightarrow 0.$$

- (2) La condition $R^i\nu_*\mathcal{O}_{D'} = 0$ pour $i > 0$ est satisfaite dans l'un des deux cas suivants

- D est une variété normale à singularités rationnelles ;
- la normalisation de D est lisse.

Maintenant que nous avons identifié $\nu_*\mathcal{O}_{D'}$ à un sous-faisceau de $\mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{J}_D(D), \mathcal{O}_X)$ pour toute résolution $\nu : D' \rightarrow D$ des singularités de D , nous sommes prêt pour définir $\tilde{\Omega}_X^1(\log D)$ le faisceau cotangent logarithmique selon Dolgachev.

Définition 3.2.9. Grâce à la suite exacte (3.7), on identifie $\nu_*\mathcal{O}_{D'}$ comme un sous-faisceau de $\mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{J}_D(D), \mathcal{O}_X)$ et on pose

$$\tilde{\Omega}_X^1(\log D) := \alpha^{-1}(\nu_*\mathcal{O}_{D'})$$

où le morphisme α est défini dans la suite exacte (3.2). Le faisceau $\tilde{\Omega}_X^1(\log D)$ est appelé faisceau cotangent logarithmique selon Dolgachev.

Par définition le faisceau cotangent logarithmique de Dolgachev se trouve dans les deux suites exactes

$$0 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \tilde{\Omega}_X^1(\log D) \xrightarrow{res} \nu_*\mathcal{O}_{D'} \rightarrow 0. \quad (3.10)$$

et

$$0 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \tilde{\Omega}_X^1(\log D) \rightarrow \mathcal{E}xt_X^2([\mathfrak{c}_D/\mathcal{J}](D), \mathcal{O}_X). \quad (3.11)$$

Remarque : La suite exacte courte (3.10) est similaire à la suite exacte des résidus

$$0 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_X^1(\log D) \xrightarrow{res} \mathcal{M}_D$$

de la proposition 3.1.13 où $\Omega_X^1(\log D)$ désigne le faisceau cotangent logarithmique de Saito. Cela dit, la proposition 3.1.14 montre que $\nu_*\mathcal{O}_D$ est contenu dans l'image du morphisme res où $\nu : D' \rightarrow D$ désigne la normalisation de D et non pas une résolution des singularités de D . Néanmoins, la suite (3.10) est appelée suite exacte des résidus (voir exemple 3.2.14).

3.2.2 Comparaison avec le FCL de Saito

Pour conclure ce chapitre, nous allons maintenant comparer ces deux faisceaux cotangents logarithmiques en se demandant tout d'abord si le FCL de Dolgachev est réflexif puis en cherchant une condition qui garantit l'égalité

$$\tilde{\Omega}_X^1(\log D) = \Omega_X^1(\log D).$$

Enfin dans l'exemple 3.2.14, en posant $\nu : D' \rightarrow D$ une résolution des singularités de D , on explicite le morphisme

$$\text{res} : \tilde{\Omega}_X^1(\log D) \rightarrow \nu_* \mathcal{O}_{D'}$$

issu de la suite exacte (3.10) dans le cas particulier où D est un diviseur SNC.

Proposition 3.2.10 (Réflexivité). *Contrairement à celui de Saito le faisceau cotangent logarithmique de Dolgachev n'est pas toujours réflexif. Plus précisément, on a*

$$\tilde{\Omega}_X^1(\log D)^{**} \simeq \Omega_X^1(\log D)^{**} = \Omega_X^1(\log D).$$

Autrement dit, le faisceau $\tilde{\Omega}_X^1(\log D)$ est réflexif si, et seulement si, il est égal au FCL de Saito $\Omega_X^1(\log D)$. La fin de ce chapitre est justement consacrée à exhiber une condition suffisante pour que ces deux faisceaux soient égaux.

Proposition 3.2.11. *Supposons que $(\mathfrak{c}_D/\mathcal{I}_D)_x = \{0\}$ pour tout $x \in D$ tel que $\dim \mathcal{O}_{D,x} = 1$. Alors*

$$\tilde{\Omega}_X^1(\log D) \simeq \Omega_X^1(\log D).$$

De plus la réciproque est vraie si $R^i \nu_ \mathcal{O}_{D'} = 0$, $i > 0$ pour une résolution $\nu : D' \rightarrow D$ des singularités de D .*

Définition 3.2.12. *Un diviseur $D \subset X$ est dit à croisements normaux en un point $x \in D$ si l'anneau local $\mathcal{O}_{D,x}$ est isomorphe au quotient de $\mathcal{O}_{X,x}$ par un idéal de la forme $(t_1, \dots, t_k)$ où les t_i sont des coordonnées locales au point x . On dira que D est à croisements normaux en codimension $\leq k$ si D est à croisements normaux en tout point x tel que $\dim \mathcal{O}_{X,x} \leq k$.*

Remarque :

- Un diviseur à croisements normaux en codimension ≤ 1 est simplement un diviseur réduit.

- Les diviseurs à croisements normaux en codimension ≤ 2 sont les diviseurs formellement isomorphe en codimension ≤ 2 au produit d'un espace affine avec un point double ordinaire.

En combinant les propositions 3.2.11 et 3.2.10, on obtient le corollaire suivant qui nous donne une condition suffisante pour que les deux FCL soient égaux.

Corollaire 3.2.13. *Supposons que D est à croisements normaux en codimension ≤ 2 . Alors*

$$\tilde{\Omega}_X^1(\log D) \simeq \Omega_X^1(\log D).$$

En particulier, $\tilde{\Omega}_X^1(\log D)$ est réflexif.

On conclut ce chapitre avec un exemple qui justifie que la suite (3.10) soit nommée la suite exacte des résidus.

Exemple 3.2.14. Supposons que D est un diviseur à croisements strictement normaux (i.e. D est l'union de diviseurs lisses $D_1, \dots, D_m$ qui s'intersectent transversalement en chaque point). Par le corollaire 3.2.13, les deux FCL sont égaux.

On rappelle que le faisceau $\Omega_X^1(\log D)$ est un sous-faisceau du faisceau des 1-formes méromorphes qui ont des pôles d'ordre au plus un le long de D . Soit $x \in D_1 \cap \dots \cap D_k$. Notons pour $i = 1, \dots, k$, $\{z_i = 0\}$ l'équation locale de D_i au point x , alors $\Omega_X^1(\log D)$ est localement libre en x et est engendré par les 1-formes différentielles méromorphes

$$\frac{dz_1}{z_1}, \dots, \frac{dz_k}{z_k}, dz_{k+1}, \dots, dz_n.$$

Notons maintenant pour tout $i = 1, \dots, n$, $\varepsilon_i : D_i \subset X$ l'inclusion de D_i dans X et $\nu : D' \rightarrow D$ une résolution des singularités de D alors le morphisme de faisceaux

$$res : \tilde{\Omega}_X^1(\log D) \rightarrow \nu_* \mathcal{O}_{D'} \simeq \bigoplus_{i=1}^k \varepsilon_{i,*} \mathcal{O}_{D_i}$$

est donnée par la formule suivante

$$res\left(\sum_{i=1}^k a_i \frac{dz_i}{z_i} + \sum_{i=k+1}^n b_i dz_i\right) = (a_1 + (z_1), \dots, a_k + (z_k), 0, \dots, 0)$$

ce qui justifie la notation *res* pour ce morphisme.

Chapitre 4

Classification des cubiques de $\mathbb{P}^4$ à singularités canoniques

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux cubiques X de $\mathbb{P}^4$ à singularités canoniques dont le lieu singulier X_{sing} contient une courbe. On montre notamment par le biais du théorème 4.3.1 que la plupart de telles cubiques X contiennent un plan linéaire de $\mathbb{P}^4$. On s'intéressera également aux conséquences pour de telles cubiques de contenir un plan linéaire. Plus précisément, on discutera de l'extrémalité de ce plan dans le cône pseudo-effectif d'une modification crépante de X .

La première section de ce chapitre classe les singularités génériques des cubiques $\mathbb{Q}$ -factorielles contenant un plan linéaire de $\mathbb{P}^4$. Plus précisément, on montre que les sections hyperplanes génériques de X sont des surfaces cubiques de $\mathbb{P}^3$ dont le type de singularités est $2A_2$, $A_1 + 2A_1$, A_5 , $A_1 + A_5$ ou $3A_2$. On montre cette classification grâce aux calculs d'intersection sur les surfaces normales effectués dans la section 2.4. Etant donné que la classification des singularités de surfaces cubiques de $\mathbb{P}^3$ dans [BW79] contient vingt-et-un types différents, ce résultat nous indique que de telles cubiques contenant un plan linéaire ne sont en général pas $\mathbb{Q}$ -factorielles.

La section suivante présente des résultats préliminaires sur lesquels nous nous appuyerons pour montrer le théorème 4.3.1. Ces résultats allègeront considérablement la démonstration du théorème.

La troisième partie de ce chapitre se consacre à énoncer le théorème principal 4.3.1 et à le démontrer. En préambule de la preuve, on expliquera la stratégie utilisée afin de classer tous les cas pouvant possiblement apparaître. Celle-ci consiste à choisir une "bonne" modification crépante X' de X puis de classer les contractions de Mori de la variété X' .

Enfin, lorsque la cubique X contient un plan linéaire P de $\mathbb{P}^4$, on discutera de l'existence d'une modification crépante

$$\psi : X' \rightarrow X$$

telle que la transformée stricte P' de P engendre un rayon extrémal du cône pseudo-effectif de X' . Nous étudierons en particulier dans quels cas ψ est une petite contraction en vue de l'appliquer au chapitre 5 et plus précisément à la conjecture BCS.

4.1 Cubiques $\mathbb{Q}$ -factorielles contenant un plan linéaire

On considère une cubique X de $\mathbb{P}^4$ à singularités canoniques et $\mathbb{Q}$ -factorielles et dont le lieu singulier X_{sing} contient une courbe. On suppose que X contient un plan linéaire P de $\mathbb{P}^4$ et on se demande quelles restrictions cela entraîne sur les singularités de X . L'hypothèse de $\mathbb{Q}$ -factorialité de X joue alors un rôle essentiel afin d'effectuer des calculs d'intersection avec le plan linéaire P .

Tout d'abord, rappelons le théorème de Grothendieck-Lefschetz (Ex 11.5 et 11.6, Chap. III dans [Har77]). Ce résultat décrit précisément le groupe de Picard d'une hypersurface de $\mathbb{P}^N$ avec $N \geq 4$.

Théorème 4.1.1 (Grothendieck-Lefschetz). *Soit X une hypersurface de $\mathbb{P}^N$ avec $N \geq 4$, alors le morphisme de restriction*

$$i^* : \text{Pic } \mathbb{P}^N \rightarrow \text{Pic } X$$

est un isomorphisme. En particulier, $\text{Pic } X \simeq \mathbb{Z}$ est engendré par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)|_X$.

En particulier, si X est une cubique de $\mathbb{P}^4$ alors $\rho(X) = 1$ et son groupe de Picard est engendré par sa section hyperplanes générique H_X . Grâce à cela, on montre la proposition suivante qui classe les singularités de H_X pour une cubique X de $\mathbb{P}^4$ à singularités canoniques et $\mathbb{Q}$ -factorielles qui contient un plan linéaire.

Nous énonçons maintenant la classification des singularités de telles cubiques. Plus précisément, on classe de la section hyperplane générique H_X de X . La preuve s'appuie sur les calculs d'intersections sur les surfaces à singularités *ADE* développés dans la section 2.4

Proposition 4.1.2. *Si une cubique $X \subset \mathbb{P}^4$ à singularités canoniques et $\mathbb{Q}$ -factorielles contient un plan linéaire P de $\mathbb{P}^4$ alors les sections hyperplanes génériques H_X de X sont des surfaces cubiques de type $2A_2$, $A_1 + 2A_2$, A_5 , $A_1 + A_5$ ou $3A_2$.*

Démonstration. Comme X est $\mathbb{Q}$ -factorielle, P est un diviseur $\mathbb{Q}$ -Cartier. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que kP est Cartier. D'après le théorème ci-dessus, on a

$$kP \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(r)|_X|$$

avec $k, r \geq 1$. Donc d'une part,

$$(kP)^2.H|_X = (rH|_X)^2.H|_X = r^2 H^3.X = 3r^2 \geq 1$$

et d'autre part

$$(kP)^2.H|_X = k^2(P.H|_X)^2 = k^2l^2$$

où $l := P \cap H \subset X$ est une droite sur $S := X \cap H$ et l'auto-intersection de l est calculée dans S . Finalement on a

$$3r^2 = k^2l^2. \quad (4.1)$$

On a également $k = k(H|_P)^2 = kP.(H|_X)^2 = rH|_X.(H|_X)^2 = rH^3.X = 3r$. L'égalité (4.1) devient alors

$$l^2 = 1/3.$$

Dans la section 2.4, on a justement classifié les singularités par lesquelles une droite l passe selon les valeurs de l^2 (voir table 2.4). Ici on a $l^2 = 1/3$, il y a alors trois possibilités pour la droite l sur la surface cubique $S = X \cap H$:

- (1) la droite l passe par deux singularités A_2 ;
- (2) la droite l passe par une singularité A_1 et une singularité A_5 ; ou
- (3) la droite l passe par une unique singularité $A_5^{(2)}$ (c'est-à-dire que la transformée stricte de l dans la résolution minimale de la surface intersecte la deuxième (-2) -courbe exceptionnelle de la chaîne).

Cela correspond à 5 types de surfaces cubiques possibles de la table 2.3 : $2A_2$, $2A_2A_1$, $3A_2$, A_1A_5 et A_5 . ■

4.2 Résultats préliminaires

Cette section a pour objectif d'énoncer les résultats partiels dont nous allons nous servir dans la suite du chapitre. Ceux-ci allègeront considérablement la preuve du théorème de classification qui est présenté dans la section 4.3. En préambule, on énonce quelques résultats sur les surfaces facilitant les démonstrations des propositions à venir. Celles-ci porteront toutes sur la configuration suivante :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\psi} & X \\ \downarrow \phi & & \\ Y & & \end{array} \quad (4.2)$$

où X' est une variété projective à singularités canoniques et $\mathbb{Q}$ -factorielles, ψ est une contraction birationnelle crépante (qui n'est pas un isomorphisme) et ϕ est une contraction de Mori élémentaire vers une variété projective Y . Certaines hypothèses seront rajoutées dans chacune d'elles mais toutes partiront du contexte ci-dessus. Chaque partie de cette section sera nommée en fonction du type de contraction de Mori qu'est $\phi : X' \rightarrow Y$ et en particulier, les résultats seront classés en fonction

de la dimension de Y . On remarque que la dimension de Y ne peut être nulle sinon $-K_{X'} = -\psi^*K_X$ serait ample et ψ serait un isomorphisme.

Quelques résultats utiles

Commençons par démontrer le résultat suivant concernant les surfaces faiblement de del Pezzo lisse.

Proposition 4.2.1. *Soit S une surface lisse faiblement de del Pezzo.*

- (1) *si $\rho(S) = 2$ alors S est isomorphe à une surface de Hirzebruch $\mathbb{F}_e$ avec $e = 0, 1, 2$.*
- (2) *si K_S est divisible par 2 dans $\text{Pic } S$ alors S est isomorphe à une surface de Hirzebruch $\mathbb{F}_e$ avec $e = 0, 2$.*

Démonstration.

- (1) Soit $\varphi : S \rightarrow V$ une contraction de Mori alors V ne peut être un point car $\rho(S) = 2$. On a les deux cas suivants :
 - si $\dim V = 2$, alors φ est la contraction d'une (-1) -courbe de S et donc $V \simeq \mathbb{P}^2$ car c'est l'unique surface lisse faiblement de del Pezzo avec $\rho(V) = 1$. Dans ce cas, $S = \mathbb{F}_1$.
 - si $\dim(V) = 1$ alors φ est une fibration en $\mathbb{P}^1$ et S est une surface géométriquement réglée sur la courbe V . On a donc

$$8(1 - g(V)) = K_S^2 > 0$$

puis il vient $V \simeq \mathbb{P}^1$ et enfin S est une surface de Hirzebruch minimale $\mathbb{F}_e$ avec $e \geq 0$.

Soit $C \in \mathbb{F}_e$ une section de φ telle que $C^2 = -e$ et f une fibre de φ , on a

$$-K_S.C = (2C + (2 + n)f).C = 2 - e \geq 0$$

car $-K_S$ est nef. Le résultat s'en suit.

- (2) Soit $\varphi : S \rightarrow V$ une contraction de Mori alors $\dim V = 1$: φ ne peut être birationnelle car dans ce cas il existerait une (-1) -courbe $C \subset S$ avec $K_S.C = -1$ ce qui contredit la divisibilité par 2 de K_S et de même V ne peut être un point car sinon $S \simeq \mathbb{P}^2$ ce qui contredit encore la divisibilité par 2. On en déduit que φ est une fibration en $\mathbb{P}^1$ et que S est une surface géométriquement réglée sur la courbe V . On a donc

$$8(1 - g(V)) = K_S^2 > 0$$

puis il vient $V \simeq \mathbb{P}^1$ et enfin S est une surface de Hirzebruch minimale $\mathbb{F}_e$, $e \neq 1$ (car $\mathbb{F}_1$ contient une (-1) -courbe).
 Soit $C \in \mathbb{F}_e$ une section de φ telle que $C^2 = -e$ et f une fibre de φ , on a

$$-K_S.C = (2C + (2+n)f).C = 2 - e \geq 0$$

car $-K_S$ est nef. Le résultat s'en suit. ■

On en déduit la proposition suivante qui nous sert à reconnaître les cônes quadriques de $\mathbb{P}^3$ que l'on croisera ultérieurement.

Proposition 4.2.2. *Si S est une surface faiblement de del Pezzo dont l'unique singularité est de type A_1 et avec $\rho(S) = 1$ alors S est isomorphe au cône quadrique singulier Q de $\mathbb{P}^3$. En particulier, $K_S^2 = 8$.*

Démonstration. Soit $\mu : \tilde{S} \rightarrow S$ l'éclatement de S en sa singularité A_1 , on note E la (-2) -courbe exceptionnelle de μ . La surface $\tilde{S}$ est alors lisse et vérifie $\rho(\tilde{S}) = 2$ et $-K_{\tilde{S}}$ nef et big mais non ample (car $-K_{\tilde{S}}.E = 0$). Le point (2) du théorème 2.5.13 implique que S est d'indice 2. De plus, la proposition 4.2.1 indique que $\tilde{S}$ est isomorphe à la surface de Hirzebruch $\mathbb{F}_e$ avec $e = 0, 2$. Or $\mathbb{F}_0$ ne possède pas de (-2) -courbe donc $\tilde{S} \simeq \mathbb{F}_2$ et S est le cône quadrique singulier de $\mathbb{P}^3$. ■

Le lemme qui suit a pour but de faciliter les calculs d'intersection qui apparaîtront dans les futures preuves.

Lemme 4.2.3. *Soit $\psi : D \rightarrow C$ une fibration d'une surface irréductible sur une courbe telle que la fibre générique l_ψ possède k composantes irréductibles alors*

$$l_\psi \equiv kB$$

où B est une des composantes de l_ψ et $\equiv$ représente l'équivalence numérique des 1-cycles sur D .

Démonstration. On considère $\nu : \tilde{D} \rightarrow D$ la normalisation de D , la factorisation de Stein du morphisme $\psi \circ \nu$ nous donne le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{D} & \xrightarrow{\nu} & D \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \tilde{C} & \xrightarrow{\alpha} & C \end{array}$$

La préimage $\tilde{l}_\psi$ par ν de la fibre générique l_ψ par ν est la normalisation de l_ψ donc possède k composantes irréductibles disjointes. Les fibres de φ sont connexes par factorisation de Stein donc chaque composante de $\tilde{l}_\psi$ est une fibre de φ , leurs classes sont égales dans $N_1(\tilde{D})$ et leurs poussé-en-avant le sont aussi dans $N_1(D)$. Autrement dit, les composantes irréductibles de l_ψ sont toutes numériquement équivalentes dans D et on a bien

$$l_\psi \equiv kB.$$

■

Grâce à la théorie de l'intersection développée à la section 2.4, on montre le lemme suivant qui calcule l'auto-intersection d'une courbe connexe passant par des singularités A_1 sur une surface normale.

Lemme 4.2.4. *Soit S une surface normale et C une courbe connexe vérifiant les hypothèses suivantes :*

- (i) *C est SNC sur le lieu lisse de S ;*
- (ii) *la transformée stricte de chaque composante irréductible de C dans la résolution minimale de S est une (-2) -courbe ;*
- (iii) *le graphe dual de C est simplement connexe ; et*
- (iv) *les singularités de S qui appartiennent à C sont de type A_1 .*

Alors, en notant n le nombre de singularités présentes sur C et k le nombre de singularités sur une intersection entre deux composantes irréductibles de C , on a

$$C^2 = -2 + \frac{n - k}{2}.$$

En particulier, $C^2 \geq -2$.

Démonstration. Nous allons effectuer une récurrence sur le nombre m de composantes irréductibles de C :

$m = 1$: Si C est irréductible alors $k = 0$ et le corollaire 2.4.8 donne le résultat.

$m > 1$: Dans ce cas, comme le diagramme de Dynkin de C est simplement connexe, il existe une composante irréductible E qui se trouve à une extrémité de C (i.e. E intersecte une unique autre composante irréductible de C). On note alors $F = C - E$ et l le nombre de singularités de S présentes sur E . On remarque alors que F vérifie trivialement les hypothèses (ii) et (iv) du lemme et de plus F vérifie également (i) et (iii) (s'il existait une boucle dans le graphe dual de F , cette même boucle serait présente dans le graphe dual de C). On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à F et ainsi avoir :

$$F^2 = \begin{cases} -2 + \frac{n-k-l}{2} & \text{si } p \notin S_{\text{sing}} \\ -2 + \frac{n-l+1-(k-1)}{2} & \text{si } p \in S_{\text{sing}}. \end{cases}$$

Si S est lisse en p alors $E.F = 1$ et on a

$$\begin{aligned} C^2 &= E^2 + F^2 + 2E.F \\ &= -2 + \frac{l}{2} - 2 + \frac{n-k-l}{2} + 2 \\ &= -2 + \frac{n-k}{2}. \end{aligned}$$

Si maintenant p est une singularité de type A_1 de S alors $E.F = 1/2$ et on a

$$\begin{aligned} C^2 &= E^2 + F^2 + 2E.F \\ &= -2 + \frac{l}{2} - 2 + \frac{n-k-l+2}{2} + 1 \\ &= -2 + \frac{n-k}{2} \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme. ■

Remarque : Si E est le lieu exceptionnel d'une résolution partielle d'une singularité du Val alors E vérifie les hypothèses (i), (ii) et (iii) du lemme.

Corollaire 4.2.5. *Soit S est une surface normale à singularités Du Val, $\mu : S' \rightarrow S$ est la résolution minimale des singularités de S et $E \subset S'$ est le lieu exceptionnel de μ au-dessus d'une singularité $p \in S$ alors*

$$E^2 = -2.$$

Les deux prochains résultats sont des lemmes qui concernent les variétés de dimension 3.

Lemme 4.2.6. *Soit $\psi : X' \rightarrow X$ le morphisme anticanonique d'un volume X' presque Fano à singularités canoniques. Si $\chi : X^+ \dashrightarrow X'$ est une suite finie de flops alors l'image du morphisme anticanonique de X^+ est isomorphe à X .*

Démonstration. On a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xleftarrow{\quad \chi \quad} & X^+ \\ & \searrow \eta & \swarrow \eta^+ \\ & Y & \\ \psi \downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

où η est une petite contraction de courbes $C_i \subset X'$ qui sont $K_{X'}$ -triviales. Les courbes C_i sont alors contractées par ψ et le lemme de rigidité (Lemme 1.15.(b) de [Deb01]) nous donne l'existence d'un morphisme $\phi : Y \rightarrow X$ tel que

$$\psi = \phi \circ \eta.$$

Alors $\psi^+ := \phi \circ \eta^+$ est évidemment le morphisme anticanonique de X^+ . ■

On énonce maintenant une version simplifiée et plus faible du théorème 4.1. de [JP07] dont nous nous servirons dans la preuve de la proposition 4.2.13.

Théorème 4.2.7. *Soit X une variété lisse presque Fano d'indice 2 et de dimension 3. Alors l'une des deux possibilités suivantes est vérifiée :*

- (1) *il existe une suite finie de flops $X \dashrightarrow Bl_{p_1, \dots, p_r}(X_0)$ où X_0 est une variété lisse presque Fano d'indice 2 avec $\rho(X_0) \leq 2$; ou*
- (2) *la variété $X = \mathbb{P}(\mathcal{F})$ est un fibré en $\mathbb{P}^1$ sur la surface de Hirzebruch $\mathbb{F}_e$ avec $e = 0, 2$.*

Contraction de Mori birationnelle

Cette dernière partie porte sur le fait que ϕ est une contraction birationnelle et présente une seule proposition. Celle-ci nous donne l'existence d'un plan linéaire dans la cubique X .

Proposition 4.2.8. *Soit X une cubique normale de $\mathbb{P}^4$ à singularités canoniques, $\psi : X' \rightarrow X$ une contraction crépante et $\phi : X' \rightarrow Y$ une contraction de Mori birationnelle. Alors X contient un plan linéaire P de $\mathbb{P}^4$.*

Démonstration. En notant H_X la section hyperplane générique de X , on a $-K_{X'} = 2\psi^*H_X$. Soit N un diviseur de Cartier ample sur Y , on pose alors

$$L := \psi^*H_X + \phi^*N$$

et on veut appliquer le théorème 1.5.2 au diviseur L .

Vérifions que L est un diviseur ample sur X' . Par la proposition 1.1.8, il nous suffit de montrer que L est semi-ample et strictement nef. La semi-amplitude provient simplement du fait que L est la somme de deux tirés-en-arrière de diviseurs amples par des morphismes surjectifs, en particulier L est globalement engendré. Soit maintenant C une courbe irréductible sur X' alors

$$L.C = \begin{cases} \psi^*H_X.C > 0 & \text{si } C \text{ est contractée par } \phi; \text{ car } -K_{X'} \text{ est } \phi\text{-ample} \\ \psi^*H_X.C + N.\phi_*C > 0 & \text{sinon; car } N \text{ est ample et } \psi^*H_X \text{ est nef} \end{cases}$$

ce qui montre que L est strictement nef.

Calculons maintenant la valeur nef $\tau(L)$ de L : pour tout réel $t < 2$ alors $K_{X'} + tL = (t - 2)\psi^*H_X + t\phi^*N$ n'est pas nef car pour toute courbe contractée par ϕ

$$(K_{X'} + tL).C = (t - 2)\psi^*H_X.C < 0$$

car ψ^*H_X est ϕ -ample. De plus, $K_{X'} + 2L = 2\phi^*N$ est nef donc finalement

$$\tau(L) = 2.$$

Le théorème d'Andreatta 1.5.2 implique que toute fibre non triviale F est de dimension au moins 2 en particulier ϕ n'est pas une petite contraction. De plus, tout diviseur exceptionnel irréductible F de ϕ vérifie

$$F \simeq \mathbb{P}^2 \text{ et } L|_F \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1).$$

On remarque que $F.\psi^*H_X^2 = F.L^2$ car $(\phi^*N)|_F \equiv 0$ dans $\text{Pic}(F)$. On note $d = \deg \psi|_F$ et on calcule le degré de $P = \psi(F)$ dans $\mathbb{P}^4$:

$$\deg_{\mathbb{P}^4} P = \psi(F).H^2 = \frac{1}{d}F.\psi^*H_X^2 = \frac{1}{d}F.L^2 = \frac{1}{d}(L|_F)^2 = \frac{1}{d}.$$

On en déduit que $d = 1$ est P est un plan linéaire de $\mathbb{P}^4$ inclus dans la cubique X . ■

Fibration en quadriques

Dans cette partie, on a classé les résultats qui portent sur la configuration (4.2) avec $Y \simeq \mathbb{P}^1$. On commence par énoncer la proposition suivante qui décrit ψ comme l'éclatement de X le long d'un plan linéaire $P \subset X$ de $\mathbb{P}^4$.

Proposition 4.2.9. *Soit X une cubique normale de $\mathbb{P}^4$ à singularités canoniques, supposons que l'on soit dans la situation suivante*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\psi} & X \\ \phi \downarrow & & \\ \mathbb{P}^1 & & \end{array}$$

où X' est $\mathbb{Q}$ -factorielle, ψ est une contraction birationnelle crépante et ϕ est une contraction élémentaire de Mori. Alors X contient un plan linéaire P de $\mathbb{P}^4$ et X' est l'éclatement de X le long de P .

Démonstration. La fibration ϕ est une fibration en surface de Del Pezzo d'indice 2 car sa fibre générale Σ vérifie $K_\Sigma = K_{X'}|_\Sigma = -2\psi^*(H|_X)|_\Sigma$. Par la proposition 4.2.2, Σ est soit $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, soit le cône quadrique de $\mathbb{P}^3$. Dans les deux cas $h^0(\Sigma, H_{X'}|_\Sigma) = 4$ donc le fibré $\mathcal{E} := \phi_* H_{X'}$ sur $\mathbb{P}^1$ est de rang 4 et on note $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{P}^1$. De plus, comme $H_{X'}$ est globalement engendré, on a la surjection

$$\phi^* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_{X'}(H_{X'}) \rightarrow 0$$

induit un plongement $X' \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ au-dessus de $\mathbb{P}^1$. Chaque fibre Σ de ϕ est alors une quadrique (lisse ou singulière) d'une fibre $F \simeq \mathbb{P}^3$ de π et $H_{X'} = \zeta|_{X'}$ où $\zeta = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$. Soient $\alpha, a_i \in \mathbb{Z}$ avec $i = 1, \dots, 4$ les entiers tels que

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^4 \mathcal{O}(a_i) \text{ avec } a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \text{ et } X' \in |2\zeta + \alpha F|.$$

Les équations $H_{X'}^3 = 3$ et $2H_{X'} = -K_{X'}$ deviennent alors respectivement

$$\begin{cases} 2(\sum a_i) + \alpha = 3 \\ \sum a_i + \alpha = 2. \end{cases}$$

On en déduit que $\sum a_i = \alpha = 1$. Si $a_1 < 0$, alors il existe une section B de $\varphi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{P}^1$ telle que $B.\zeta = a_1 < 0$ (et évidemment $B.F = 1$). Il s'en suit que

$$B.X' = B.(2\zeta + F) = 2a_1 + 1 < 0$$

puis $B \subset X'$ avec $B.\zeta|_{X'} = B.H_{X'} = a_1 < 0$ ce qui est absurde car $H_{X'}$ est nef.

On en déduit que $a_1 \geq 0$ puis que $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 0, 0, 1)$ car $\sum a_i = 1$. On alors $\mathcal{E} = \mathcal{O}^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(1)$ et enfin

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}) = Bl_P(\mathbb{P}^4)$$

où X' est la transformée stricte de X par l'éclatement et P est un plan linéaire de $\mathbb{P}^4$ (cas (2) du théorème 3.5 de [JP07]). Comme les fibres de π sont les hyperplans de $\mathbb{P}^4$ contenant P , les fibres de ϕ sont l'intersection de X avec ces hyperplans. Ces fibres étant des quadriques, X contient alors le plan P et une fibre de ϕ est une quadrique résiduelle de X intersectée avec un hyperplan de $\mathbb{P}^4$ qui contient P . ■

En particulier, on a montré que X contient un plan linéaire de $\mathbb{P}^4$ ce qui est l'objectif du théorème de classification 4.3.1. La proposition suivante, qui ne servira donc pas dans la preuve du théorème 4.3.1, donne une idée plus précise de la structure de X' lorsque X est $\mathbb{Q}$ -factorielle, $\rho(X') = 2$ et ψ est divisorielle.

Proposition 4.2.10. *En reprenant les mêmes hypothèses et notations que la proposition 4.2.9 et en supposant de plus que*

- (1) *la cubique X est $\mathbb{Q}$ -factorielle; et*
- (2) *le morphisme crépant ψ contracte un diviseur premier D sur une courbe irréductible C .*

Alors la fibre générale de ϕ est un cône quadrique de $\mathbb{P}^3$. De plus, soit il existe un autre plan linéaire P_1 dans X , soit le plan linéaire P est d'inflexion ou alors X'_{sing} est une section de ϕ incluse dans D .

Démonstration. La proposition 4.2.9 affirme que ψ est un l'éclatement de X le long d'un plan linéaire $P \subset X$ de $\mathbb{P}^4$. Nous sommes alors dans la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc} Bl_P \mathbb{P}^4 & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{P}^4 \\ \cup & & \cup \\ \Phi \curvearrowright & X' \xrightarrow{\psi} & X \\ & \phi \downarrow & \\ & \mathbb{P}^1 & \end{array}$$

On note $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ le diviseur exceptionnel de l'éclatement Ψ . Les fibres de Φ correspondent aux hyperplans H de $\mathbb{P}^4$ qui contiennent le plan linéaire $P \subset \mathbb{P}^4$ et les fibres de ϕ sont les quadriques résiduelles Q vérifiant $X \cap H = Q \cup P$ (voir proposition A.1.3 pour cette description). Soit F la fibre générale de ϕ et $l_\psi \subset D$ la fibre générale de $\psi|_D : D \rightarrow C$ qui est isomorphe à $\mathbb{P}^1$ comme fibre de Ψ . en particulier, on a

$$F.l_\psi = F|_E.l_\psi = 1.$$

Le nombre de Picard de X' vaut 2 car ϕ est une contraction de Mori élémentaire et $\rho(\mathbb{P}^1) = 1$. Il existe alors des rationnels $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ tels que

$$D \in | -\alpha K_{X'} - \beta F|.$$

On remarque que $2\alpha \in \mathbb{Z}$ car $D|_F \in | -\alpha K_F| = |2\alpha H_{X'}|_F|$.

(Etape 1) : la fibre générale F est soit une quadrique lisse de $\mathbb{P}^3$, soit le cône quadrique de $\mathbb{P}^3$.

Comme F est une fibre générale, elle est à singularités canoniques. On note $\tilde{F}$ la résolution minimale crépante de F , $-K_{\tilde{F}}$ est alors nef, big et divisible par 2. Par le point (2) de la proposition 4.2.1, il vient donc

$$\tilde{F} \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \text{ ou } \mathbb{F}_2.$$

Comme $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ne contient pas de (-2) -courbes et que $-K_{\mathbb{F}_2}$ n'est pas ample, on obtient finalement que F est soit $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ soit la contraction de la (-2) -courbe C de $\mathbb{F}_2$ c'est-à-dire le cône quadrique de $\mathbb{P}^3$. En particulier, $K_F^2 = 8$ et $-K_F = 2H_F$ est ample.

(Etape 2) : Montrons que le nombre d'intersection $D.l_\psi$ est égal à $-3/2$.

Comme le diviseur D est contracté par ψ , on a $K_{X'}^2.D = 0$ ce qui implique l'égalité suivante :

$$\beta = 3\alpha.$$

car $-K_{X'}^3 = 24$ et $K_F^2 = 8$. De plus, $D.l_\psi = (-\alpha K_{X'} - \beta F).l_\psi = -\beta(F.l_\psi)$ et on trouve donc

$$D.l_\psi = -3\alpha F.l_\psi = -3\alpha$$

qui est strictement négatif par le lemme de négativité (corollaire 1.1.16). On en déduit que $\alpha \in \frac{1}{2}\mathbb{N}^*$ puis

$$D.l_\psi \in -\frac{3}{2}\mathbb{N}^*$$

et en particulier, $D.l_\psi \leq -3/2$. Trouvons maintenant un minorant de $D.l_\psi$: soit $H \subset \mathbb{P}^4$ un hyperplan général tel que $(S = X \cap H, p) \subset H \simeq \mathbb{P}^3$ est une singularité ADE, on note S' la transformée stricte de S par ψ . On note également m le cardinal de $S \cap C = \{p_1, \dots, p_m\}$ et $l_{\psi,i} \subset D$ la fibre au-dessus de p_i ; ces dernières sont numériquement équivalentes dans D donc dans X' (mais pas nécessairement dans S'). On a donc $D.S' \equiv_{X'} \sum_i l_{\psi,i} \equiv_{X'} m l_\psi$ puis

$$mD.l_\psi = D.D.S' = D|_{S'}.S'D|_{S'} = \left(\sum_i l_{\psi,i}\right)^2 = \sum_i l_{\psi,i}^2 = m l_\psi^2$$

où l'avant-dernière égalité vient du fait que les $l_{\psi,i}$ sont disjointes et les auto-intersections sont calculées dans S' . On en déduit que $D.l_\psi$ est égal à $l_\psi.S'l_\psi$ dans la surface S' et de plus, par l'étape 1 de la preuve, S' ne possède que des singularités de type A_1 . On peut alors appliquer le lemme 4.2.4 à l_ψ et trouver

$$-\frac{3}{2} \geq D.l_\psi = l_\psi.S'l_\psi \geq -2.$$

Or $D.l_\psi \in -\frac{3}{2}\mathbb{N}^*$ et donc $D.l_\psi = -3/2$.

(Etape 3) : La fibre générale F de ϕ est un cône quadrique de $\mathbb{P}^3$.

Par l'étape 1, il nous suffit de montrer que F n'est pas isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Dans ce cas, en reprenant les notations de l'étape 2, la surface S' serait lisse et le morphisme $\psi|_{S'} : S' \rightarrow S$ serait la résolution minimale des singularités de S . Le corollaire 4.2.5 affirme alors que $D.l_\psi$ vaut -2 ce qui contredit l'étape 2. Ainsi, de nouveau par le lemme 4.2.4, la courbe irréductible l_ψ passe par une unique singularité de X' et cette dernière est de type cA_1 .

(Etape 4) : Le plan P est d'inflexion dans X , il existe un autre plan linéaire $P_1 \neq P$ dans X ou toutes les fibres sont des cônes quadriques de $\mathbb{P}^3$.

Par l'étape 3, on sait que les fibres spéciales de ϕ sont des plans sécants ou des plans doubles de $\mathbb{P}^3$. L'existence de telles fibres implique que le plan linéaire P est d'inflexion ou que X contient au moins un autre plan linéaire P_1 . D'autre part, si ϕ n'a aucune fibre spéciale, alors toutes les fibres de ϕ sont des cônes quadriques de $\mathbb{P}^3$. En particulier, X'_{sing} une courbe de singularités cA_1 : c'est la section de ϕ formée des sommets des cônes.

■

Enfin pour finir cette partie, on répond positivement à la question suivante : lorsque qu'une cubique X de $\mathbb{P}^4$ contient un plan linéaire P , est-ce que l'éclatement ψ de X le long de P est un morphisme crépant ? Ceci présente le point de vue réciproque à la proposition 4.2.9 et le lemme suivant en présente la preuve.

Lemme 4.2.11. *Soit X une cubique irréductible de $\mathbb{P}^4$ contenant un plan linéaire $P \subset X$ alors l'éclatement de X le long de P est un morphisme crépant.*

Démonstration. On considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 Bl_P \mathbb{P}^4 & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{P}^4 \\
 \cup & & \cup \\
 \Phi \swarrow & X' \xrightarrow{\psi} X & \\
 & \downarrow \phi & \\
 & \mathbb{P}^1 &
 \end{array}$$

où Ψ est la résolution des indéterminées de la projection linéaire sur $\mathbb{P}^1$ à partir du plan linéaire P et X' est la transformée stricte de X par Ψ . Les fibres F de Φ correspondent aux hyperplans H de $\mathbb{P}^4$ contenant P et les fibres de ϕ correspondent alors aux quadriques résiduelles Q des sections hyperplanes $H \cap X = P + Q$. De plus, en notant $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ alors Φ est isomorphe à la projection $Bl_P \mathbb{P}^4 = \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{P}^1$. Le fibré tautologique ζ de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ vérifie

$$\zeta^4 = \zeta^3 \cdot \Phi^* c_1(\mathcal{E}) = \zeta^3 \cdot F = \zeta|_F^3 = 1.$$

De plus on a $\zeta = \Psi^* H$ où H est un hyperplan générique de $\mathbb{P}^4$. En effet, soit $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $\Psi^* H = a\zeta + bF$ alors $a = 1$ car $\mathcal{O}_F(a) = a\zeta|_F = (\Psi^* H)|_F = \mathcal{O}_F(1)$ et $b = 0$ car

$$1 = (\Psi^* H)^4 = \zeta^4 + 4b\zeta^3 \cdot F = 1 + 4b.$$

On en déduit que $H_{X'} := \psi^*(H_X) = \zeta|_{X'}$. Montrons maintenant que $X' = 2\zeta + F$: soient $c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $X' = c\zeta + dF$, on a $c = 2$ car la restriction de X' à F est une quadrique de F ($X'|_F = \mathcal{O}_F(2)$). D'autre part, on a

$$3 = \psi^*(H_X)^3 = \zeta|_{X'}^3 = \zeta^3 \cdot X' = 2 + d.$$

On sait que $K_X = -2H_X$ donc il nous suffit de montrer que $K_{X'} = -2\psi^*(H_X)$. On écrit la formule d'adjonction :

$$K_{X'} = (K_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} + X')|_{X'} = -2\zeta|_{X'} = -2\psi^*(H_X)$$

car $K_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} = -4\zeta + \Phi^*(K_{\mathbb{P}^1} + c_1(\mathcal{E})) = -4\zeta - F$. La preuve du lemme s'en suit. ■

Fibré en droites

Cette partie est consacrée au cas où Y est une surface dans la configuration (4.2). On montre, par le biais de la proposition 4.2.12, que X' est alors un fibré en $\mathbb{P}^1$ sur Y et dont les fibres s'envoient par ψ sur des droites de $\mathbb{P}^4$.

Proposition 4.2.12. *Soit X une cubique normale de $\mathbb{P}^4$ à singularités canoniques telle que X_{sing} contient une courbe irréductible C de $\mathbb{P}^4$. Supposons que l'on soit dans la situation suivante*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\psi} & X \\ \phi \downarrow & & \\ S & & \end{array}$$

où ϕ est une contraction de Mori élémentaire, S est une surface et X' est à singularités canoniques et $\mathbb{Q}$ -factorielles. Alors :

- (1) *il existe un faisceau localement libre $\mathcal{F}$ de rang 2 sur S tel que $X' = \mathbb{P}(\mathcal{F})$, $c_1(\mathcal{F}) = -K_S$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1) = \psi^*(H_X)$;*
- (2) *chaque fibre $F \simeq \mathbb{P}^1$ de ϕ rend la restriction $\psi|_F : F \rightarrow \psi(F)$ birationnelle où $\psi(F) \subset X$ est une droite de $\mathbb{P}^4$; et*
- (3) *la surface S est une surface faiblement de del Pezzo à singularités canoniques.*

En particulier, on a $X'_{\text{sing}} = \phi^{-1}(S_{\text{sing}})$ donc soit X' est lisse, soit X_{sing} contient une droite de $\mathbb{P}^4$.

Démonstration.

- (1) En notant H_X la section hyperplane générique de X , on a $-K_{X'} = 2\psi^*H_X$. Soit N un diviseur de Cartier ample sur S , on pose alors

$$L := \psi^*H_X + \phi^*N$$

et on veut appliquer le théorème 1.5.2 à L .

Vérifions que L est un diviseur ample sur X' . Par la proposition 1.1.8, il nous suffit de montrer que L est semi-ample et strictement nef. La semi-amplitude provient simplement du fait que L est la somme de deux tirés-en-arrière de diviseurs amples par des morphismes surjectifs, en particulier L est globalement engendré. Soit maintenant C une courbe irréductible sur X' alors

$$L.C = \begin{cases} \psi^*H_X.C > 0 \text{ si } C \text{ est contractée par } \phi; \text{ car } -K_{X'} \text{ est } \phi\text{-ample} \\ \psi^*H_X.C + N.\phi_*C > 0 \text{ sinon ; car } N \text{ est ample et } \psi^*H_X \text{ est nef} \end{cases}$$

ce qui montre que L est strictement nef.

Calculons maintenant la valeur nef $\tau(L)$ de L : pour tout réel $t < 2$ alors $K_{X'} + tL = (t-2)\psi^*H_X + t\phi^*N$ n'est pas nef car pour toute courbe contractée par ϕ

$$(K_{X'} + tL).C = (t-2)\psi^*H_X.C < 0$$

car ψ^*H_X est ϕ -ample. De plus, $K_{X'} + 2L = 2\phi^*N$ est nef donc finalement

$$\tau(L) = 2.$$

Toute composante irréductible d'une fibre non triviale est de dimension 1 donc vérifie le point (ii) du théorème 1.5.2. On en déduit que toutes les fibres F sont irréductibles et vérifient

$$F \simeq \mathbb{P}^1 \text{ et } L|_F = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1).$$

Ceci implique que $\phi : X' = \mathbb{P}(\mathcal{F}) \rightarrow S$ où $\mathcal{F}$ est un faisceau localement libre de rang 2 sur S . De plus en posant $\mathcal{F} = \phi_*\psi^*H_X$, on a $\xi := \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1) = \psi^*H_X$ puis comme

$$-2\psi^*H_X = K_{X'} = -2\xi + \phi^*(K_S + c_1(\mathcal{F})),$$

on trouve $c_1(\mathcal{F}) = -K_S$.

- (2) Soit F une fibre quelconque de ϕ alors $\psi(F) \subset X$ est une courbe de $\mathbb{P}^4$ car F n'est pas contractée par ψ . On note d le degré de $\psi|_F : F \rightarrow \psi(F)$ alors on a :

$$1 = F.\xi = -\frac{1}{2}F.K_{X'} = -\frac{1}{2}\psi_*(F).K_X = d\psi(F)H_X = d.\deg_{\mathbb{P}^4} \psi(F).$$

et on en déduit que $\psi|_F$ est un isomorphisme et que $\psi(F)$ est une droite.

- (3) Comme X' est à singularités génériquement cDV par le corollaire 1.14 de [Rei80] et ϕ est un morphisme lisse par (1), on en déduit que S est à singularités ADE. On considère $\mu : S' \rightarrow S$ la résolution minimale des singularités de S et on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}(\mu^*\mathcal{F}) & \xrightarrow{\psi'} & \mathbb{P}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\psi} & X \\ \downarrow \phi' & & \downarrow \phi & & \\ S' & \xrightarrow{\mu} & S & & \end{array}$$

où ϕ' est un morphisme lisse entre deux variétés lisses et ψ' est une résolution crépante des singularités de X' . En particulier, $\mathbb{P}(\mu^*\mathcal{F})$ est presque Fano et le théorème 1.1 de [FG12] montre que S' est faiblement de del Pezzo. De plus, on a $-K_{S'} = -\mu^*K_S$ donc $(-K_S)^2 = (-K_{S'})^2 > 0$ et pour toute courbe irréductible C sur S , si on note $C' \subset S'$ sa transformée stricte par μ alors

$$-K_S.C = -K_S.\mu_*C' = -K_{S'}.C' \geq 0.$$

Finalement, S est une surface faiblement de del Pezzo à singularités ADE.

■

Proposition 4.2.13. *En reprenant les mêmes hypothèses et notations que la proposition 4.2.12, on est dans l'un des cas suivants :*

- (1) *la cubique X contient un plan linéaire P de $\mathbb{P}^4$;*
- (2) *la variété X' est lisse ; ou*
- (3) *la surface S est le cône quadrique de $\mathbb{P}^3$.*

Démonstration. On considère $\mu : \tilde{S} \rightarrow S$ la résolution minimale des singularités de S et le morphisme $\psi' : \tilde{X} := \mathbb{P}(\mu^*\mathcal{F}) \rightarrow X'$ qui est une résolution crépante de X' . Le diagramme commutatif suivant résume la situation :

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\psi'} & X' & \xrightarrow{\psi} & X \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \phi & & \\ \tilde{S} & \xrightarrow{\mu} & S & & \end{array}$$

Par le théorème 4.2.7, $\tilde{X}$ est, quitte à effectuer une suite finie de flops (cf. lemme 4.2.6) :

- (i) l'éclatement en un nombre fini de points d'un volume lisse X_0 presque del Pezzo avec $\rho(X_0) \leq 2$. S'il existe un éclatement alors la proposition 4.2.8 montre que la cubique X contient un plan linéaire de $\mathbb{P}^4$. Sinon $\rho(\tilde{X}) = 2 = \rho(X')$ puis $X' \simeq \tilde{X}$ est lisse ; ou
- (ii) un fibré en $\mathbb{P}^1$ sur une surface de Hirzebruch et en particulier $\rho(\tilde{X}) = 3$ et $\rho(\tilde{S}) = 2$. On peut supposer, sans perte de généralité que S n'est pas lisse car sinon X' serait lisse. Dans ce cas $\tilde{S}$ est une surface de del pezzo faible avec $\rho = 2$ qui contient une (-2) -courbe. Le point (1) de la proposition 4.2.1 montre alors que $\tilde{S} \simeq \mathbb{F}_2$. Ainsi S est le cône quadrique de $\mathbb{P}^3$.

■

Si on ajoute quelques hypothèses à la proposition 4.2.12, on montre que S ne peut être d'indice 2. Ceci nous sera utile dans la preuve du théorème 4.3.1.

Proposition 4.2.14. *En reprenant les mêmes hypothèses et notations que la proposition 4.2.12 et en supposant de plus que*

- (1) *la cubique X est $\mathbb{Q}$ -factorielle ;*
- (2) *le morphisme crépant ψ contracte un diviseur premier D sur une courbe irréductible C ; et*

(3) $\rho(X') = 2$.

Alors S est une surface de del Pezzo avec $\rho(S) = 1$ qui n'est pas d'indice 2 i.e. K_S n'est pas divisible par 2 dans $\text{Pic}(S)$.

Démonstration. D'après la proposition 4.2.12, la variété $X' = \mathbb{P}(\mathcal{F})$ est un fibré en $\mathbb{P}^1$ au-dessus de la surface S vérifiant

$$\xi := \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1) = \psi^* H_X \text{ et } c_1(\mathcal{F}) = -K_S.$$

Comme ϕ est une contraction de Mori élémentaire et $\rho(X') = 2$, la surface S est faiblement de del Pezzo de rang 1. On en déduit que S est une surface de del Pezzo car le générateur nef et big H_S de $\text{Pic } S$ est ample.

Supposons par l'absurde que S est d'indice 2 alors par le théorème 2.5.13, elle ne possède qu'une unique singularité A_1 et $Cl(S)/\text{Pic}(S) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On a alors

$$-K_S = 2H_S \text{ et } K_S^2 = 8$$

donc $H_S^2 = 2$ puis S est le cône quadrique de $\mathbb{P}^3$ par la proposition 4.2.2.

On rappelle que la contraction ψ contracte un diviseur premier D de X' et que $Cl(S)/\text{Pic}(S) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il existe alors des rationnels $a, b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ tels que

$$D \in |a\xi + b\phi^* H_S|$$

Remarquons tout d'abord que $a \in \{0, 1\}$: soit F une fibre générique de ϕ (en particulier $F \cap X'_{\text{sing}} = \emptyset$), alors $a = D.F \in \mathbb{N}$ car D ne contient pas F . Comme $\psi(F)$ est une droite, F ne peut ni rencontrer deux fois la même fibre $l_\psi \subset D$ de ψ (sinon $\psi(F)$ serait singulière), ni rencontrer deux fibres différentes de ψ (sinon $\psi(F)$ rencontrerait au moins deux fois la droite singulière C de X). Comme D est recouverte des fibres l_ψ de ψ , on en déduit que $a = D.F \in \{0, 1\}$.

De plus, comme le diviseur D est contracté par ψ , on a $K_{X'}.D = 0$. Autrement dit, en utilisant $K_{X'} = -2\xi$ et $\xi^2 = 2\xi.\phi^* H_S - \phi^* c_2(\mathcal{F})$, on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= K_{X'}.D \\ &= \xi^2(a\xi + b\phi^* H_S) \\ &= 3a + b\phi^* H_S.[2\phi^* H_S.\xi - \phi^* c_2(\mathcal{F})] \\ &= 3a + 2bH_S^2 \\ &= 3a + 4b. \end{aligned}$$

Si $a = 0$ alors $b = 0$ par l'égalité ci-dessus puis $D.l_\psi = 0$ ce qui contredit le lemme de négativité (voir corollaire 1.1.16). D'autre part, si $a = 1$ alors l'égalité ci-dessus contredit le fait que $b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. On en déduit bien que S est une surface de del Pezzo qui n'est pas d'indice 2. ■

4.3 Théorème de classification

Ici on énonce puis on démontre le théorème 4.3.1 qui est le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 4.3.1 (Classification). *Soit X une hypersurface cubique normale de $\mathbb{P}^4$ à singularités canoniques et telle que X_{sing} contient une courbe irréductible notée C . Alors soit X possède un plan linéaire, soit on est dans l'un des cas suivants :*

- (1) *X est la variété des sécantes de la courbe quartique de Veronese dans $\mathbb{P}^4$ (exemple 3.5 de [JPR05]) ;*
- (2) *X est une cubique dont le lieu singulier est une droite génériquement de type cA_1 ou cA_2 (exemple 3.6 de [JPR05]) ;*

Remarque : La courbe quartique de Veronese est l'image du plongement de Veronese

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^4 \\ (s : t) &\mapsto (s^4 : s^3t : s^2t^2 : st^3 : t^4). \end{aligned}$$

D'après l'énoncé (1.1) de [Col82], la variété des sécantes de cette courbe a pour équation

$$(X_2X_4 - X_3^2)X_0 - (X_4^3 - 2X_1X_3X_4 + X_1^2X_2) = 0.$$

La stratégie que nous utilisons pour prouver ce théorème provient de l'article [JPR05] dans lequel Jahnke, Peternell et Radloff classifient les variétés X' lisses de dimension 3 avec $\rho(X') \geq 2$ qui sont presque Fano i.e. dont le diviseur anticanonique $-K_{X'}$ est nef et big. Pour cela, ils considèrent le morphisme anticanonique de X' après factorisation de Stein

$$\psi : X' \rightarrow X$$

où X est une variété Gorenstein Fano à singularités canoniques et de dimension 3. Comme $\rho(X') \geq 2$, ils considèrent également une contraction de Mori élémentaire $\phi : X' \rightarrow Y$ et obtiennent ainsi un diagramme similaire à (4.2). Dans notre cas, on a une difficulté supplémentaire concernant les singularités de X' mais celle-ci est contre-balancée par les informations complémentaires dont nous disposons. En effet, ces dernières proviennent du fait que X est une cubique de $\mathbb{P}^3$.

Le plan de la preuve du théorème 4.3.1 se découpe de la manière suivante :

- (A) Si X est $\mathbb{Q}$ -factorielle alors on considère $\psi : X' \rightarrow X$ l'extraction d'un diviseur grâce au théorème 1.4.5. La variété X' est alors de dimension 3 à singularités canoniques et $Exc(\psi)$ est un diviseur irréductible noté D au-dessus d'une courbe $C = \psi(D)$ contenue dans le lieu singulier X_{sing} de X . De plus, la contraction ψ est crépante et le nombre de Picard $\rho(X')$ est égal à 2

par la proposition (1.4.6). Il existe donc une contraction de Mori élémentaire $\phi : X' \rightarrow Y$ et on se retrouve dans la configuration (4.2). On distingue alors les trois cas suivants et dans chacun d'eux, on utilise les propositions associées de la section 4.2 :

(A1) $\dim Y = 1$;

(A2) $\dim Y = 2$;

(A3) $\dim Y = 3$.

(B) Si X n'est pas $\mathbb{Q}$ -factorielle alors on considère $\psi : X' \rightarrow X$ une $\mathbb{Q}$ -factorialisation de X grâce au théorème 1.4.7. Le morphisme ψ est petit i.e. ne contracte qu'un nombre fini de courbes et $\rho(X') \geq 2$. Il existe donc une contraction de Mori élémentaire $\phi : X' \rightarrow Y$ et on se retrouve dans la configuration (4.2). On distingue alors les trois cas suivants et dans chacun d'eux, on utilise les propositions associées de la section 4.2 :

(B1) $\dim Y = 1$;

(B2) $\dim Y = 2$;

(B3) $\dim Y = 3$.

Démonstration du théorème 4.3.1.

Tout au long de la preuve, on suppose que X ne contient pas de plan linéaire et notre but est de montrer qu'on est dans l'un des cas (1) et (2).

(A) Si X est $\mathbb{Q}$ -factorielle, on note $\psi : X' \rightarrow X$ une extraction de diviseur au-dessus de C (par la proposition 1.4.5) avec $\rho(X') = 2$ (par la proposition 1.4.6). Soit $\phi : X' \rightarrow Y$ une contraction de Mori, la dimension de Y est non nulle car $-K_{X'}$ n'est pas ample. Distinguons alors les trois cas suivants :

(A1) Si Y est une courbe alors Y est isomorphe à $\mathbb{P}^1$ puis d'après la proposition 4.2.9, X possède nécessairement un plan linéaire P de $\mathbb{P}^4$.

(A2) Si Y est une surface, alors Y est à singularités canoniques et avec $\rho(Y) = 1$ par la proposition 4.2.14. De plus, $\phi : X' \rightarrow Y$ est un fibré en $\mathbb{P}^1$ par la même proposition. Supposons que la cubique X ne contienne pas de plan linéaire P de $\mathbb{P}^4$, alors la proposition 4.2.13 nous dit que X' est lisse ou que Y est le cône quadrique de $\mathbb{P}^3$. Le deuxième cas n'existe pas : l'indice de Y est alors 2 ce qui contredit la proposition 4.2.14. Dans le premier cas on utilise la classification de [JPR05] : ceci nous donne les cubiques (1) et (2) de l'énoncé du théorème 4.3.1.

(A3) Si Y est de dimension 3 alors ϕ est une contraction de Mori birationnelle et la proposition 4.2.8 montre que X contient un plan linéaire de $\mathbb{P}^4$.

(B) Si X n'est pas $\mathbb{Q}$ -factorielle alors on considère $\psi : X' \rightarrow X$ une $\mathbb{Q}$ -factorialisation de X avec $\rho(X') \geq 2$ (par le théorème 1.4.7). Comme ψ est un morphisme petit et que X_{sing} possède une courbe, X' ne peut être lisse. On pose $H_{X'} := \psi^* H|_X$ et on considère $\phi : X' \rightarrow Y$ une contraction de Mori. Le diviseur anticanonique $-K_{X'}$ n'est pas ample car ψ contracte une ou plusieurs courbes. La dimension de Y est alors non nulle et il nous reste à distinguer les trois cas suivants :

- (B1) Si Y est une courbe alors elle est isomorphe à $\mathbb{P}^1$ et la proposition 4.2.9 nous donne l'existence d'un plan linéaire dans X .
- (B2) Si Y est une surface, alors elle est à singularités canoniques. De plus, $\phi : X' \rightarrow Y$ est un fibré en $\mathbb{P}^1$ et le lieu singulier de X est une union de droites par la proposition 4.2.12. On sait que X' n'est pas lisse car X_{sing} contient une courbe de singularités et ψ est petite. Supposons, sans perte de généralité, que la cubique X ne contient pas de plan linéaire de $\mathbb{P}^4$. La proposition 4.2.13 montre alors que Y est le cône quadrique de $\mathbb{P}^4$. En particulier, la surface Y possède une unique singularité p de type A_1 et $\tilde{X}$ est l'éclatement de X' le long de la fibre de ϕ au-dessus de p . Considérons maintenant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
Bl_C \mathbb{P}^4 & \xrightarrow{\Pi} & \mathbb{P}^4 \\
\cup & & \cup \\
\Phi \swarrow & \hat{X} \xrightarrow{\pi} & X \\
& \downarrow \varphi & \\
& \mathbb{P}^2 &
\end{array}$$

où Φ est la résolution des indéterminées de la projection linéaire sur $\mathbb{P}^2$ à partir de la droite $C \subset X_{\text{sing}}$. Les fibres de Φ sont alors les plans linéaires de $\mathbb{P}^4$ contenant C . Un tel plan linéaire qui contient C est soit inclus dans X et alors la fibre de φ correspondante est isomorphe à $\mathbb{P}^2$, soit intersecte X en $2C + l$ où l est une droite et alors la fibre correspondante est la droite l . On en déduit que φ est équidimensionnelle car on a supposé que la cubique X ne contient pas de plan linéaire de $\mathbb{P}^4$. C'est alors un fibré en $\mathbb{P}^1$ sur $\mathbb{P}^2$ donc $\hat{X}$ est lisse et $\rho(\hat{X}) = 2$. On se retrouve alors dans l'exemple 3.6. de [JPR05].

- (B3) Si Y est de dimension 3 alors ϕ est une contraction de Mori birationnelle et la proposition 4.2.8 montre que X contient un plan linéaire de $\mathbb{P}^4$. ■

4.4 Extrémalité du plan linéaire

Soit X une cubique de $\mathbb{P}^4$ à singularités canoniques non $\mathbb{Q}$ -factorielles et contenant un plan linéaire P , on s'intéresse ici à l'extrémalité du plan linéaire P dans une petite modification de X . Plus précisément, on cherche à construire une petite $\mathbb{Q}$ -factorialisation de X

$$\psi : X' \rightarrow X$$

telle que la transformée stricte P' de P par ψ engendre un rayon extrémal dans $\text{Pseff}(X')$. Dans la section 5.4, on verra que si de plus X est totalement invariante par un endomorphisme non trivial f de $\mathbb{P}^4$ alors un tel P est également totalement invariant par une itérée de f (voir proposition 5.4.3).

Commençons par montrer des résultats sur l'éclatement d'une cubique de $\mathbb{P}^4$ le long d'un plan linéaire. Le lemme suivant calcule le lieu exceptionnel d'un tel éclatement.

Lemme 4.4.1. *Soit $\Psi : Bl_P \mathbb{P}^4 \rightarrow \mathbb{P}^4$ l'éclatement de $\mathbb{P}^4$ le long d'un plan linéaire P , X une cubique normale de $\mathbb{P}^4$ contenant P . On considère X' sa transformée stricte par Ψ (qui est l'éclatement de X le long de P). Alors, en notant $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ le lieu exceptionnel de Ψ , on a*

$$E \cap X' \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2}(1, 2)|.$$

Démonstration. D'après la proposition A.1.3, on est dans la situation du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} Bl_P \mathbb{P}^4 & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{P}^4 \\ \Phi \downarrow & & \\ \mathbb{P}^1 & & \end{array}$$

où Φ est un fibré en $\mathbb{P}^3$ et Ψ fait correspondre les fibres de Φ aux hyperplans H de $\mathbb{P}^4$ contenant P . Les fibres de la restriction $\Phi|_{X'}$ sont alors des quadriques Q de $\mathbb{P}^3$ qui correspondent aux quadriques résiduelles des sections hyperplanes $H \cap X = P \cup Q$ de X par les hyperplans contenant P .

On considère maintenant p_1 (resp. p_2) la projection de $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ sur $\mathbb{P}^1$ (resp. $\mathbb{P}^2$) et on note F_1 (resp. F_2) une fibre de p_1 (resp. le pullback d'une droite de P par p_2). Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que

$$D := X' \cap E = aF_1 + bF_2$$

dans $\text{Pic } E$. Alors, en notant f une fibre générale de p_2 et l une droite générale de F_1 , on trouve

$$a = D.f = 1 \text{ et } b = D.l = 2$$

car $\Psi|_{X'} : X' \rightarrow X$ est birationnelle et $\Phi|_{X'} : X' \rightarrow \mathbb{P}^1$ est une fibration en quadriques. Le résultat s'en suit. ■

Nous voulons maintenant une condition nécessaire et suffisante pour que l'éclatement d'une cubique le long d'un plan linéaire soit petit. La proposition 4.4.2 en donne deux et l'une d'entre elles est intrinsèque au plan P .

Proposition 4.4.2. *Soit X une cubique normale de $\mathbb{P}^4$ contenant un plan linéaire P et $\psi : X' \rightarrow X$ l'éclatement de X le long de P . Alors les trois énoncés suivants sont équivalents*

- (1) *L'éclatement ψ est petit.*
- (2) *Avec les notations du lemme 4.4.1 et en notant P' la transformée stricte de P par ψ , on a*

$$P' = E \cap X'.$$

(3) Le plan linéaire P est Cartier dans X en dehors d'un nombre fini de points.

Remarque : Un tel plan linéaire dans une cubique X de $\mathbb{P}^4$ à singularités canoniques n'est pas Cartier dans X . En effet, si P est Cartier dans X alors $P \in |kH_X|$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et H_X une section hyperplane générale de X par 4.1.1. Le calcul suivant montre alors la contradiction :

$$1 = H|_P^2 = P.H_X^2 = kH_X^3 = kH^3.X = 3k \geq 3.$$

Démonstration.

(1) $\Rightarrow$ (2) : La transformée stricte P' de P par ψ est toujours incluse dans $E \cap X'$. Montrons la contraposée de l'implication : supposons qu'il existe un diviseur effectif non nul R de E tel que

$$P' + R = E \cap X'$$

et montrons que ψ contracte R . Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que $P' = aF_1 + bF_2$ alors, en reprenant les mêmes notations que dans la preuve du lemme 4.4.1, on trouve

$$a = P'.f = 1$$

car $\psi|_{P'} : P' \rightarrow P$ est birationnelle. On en déduit que $R = bF_2$ est contracté par $\psi|_E$ puis que ψ n'est pas petite.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Si $P' = E \cap X'$ alors, comme le lieu exceptionnel de Ψ est E , le seul diviseur que ψ peut contracter est P' ce qui n'arrive pas. Donc ψ est petite.

(1) $\Rightarrow$ (3) : Si ψ est petite elle contracte uniquement des courbes sur un nombre fini de points $q_1, \dots, q_k$ de P . De plus, d'après l'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2), on a $P' = E \cap X'$. En particulier P' est Cartier donc P l'est aussi en dehors des points $q_1, \dots, q_k$.

(3) $\Rightarrow$ (1) : L'éclatement d'un diviseur de Weil D est un isomorphisme local partout où D est Cartier (cf. exercice II.7.11.(b) de [Har77]). De plus, $\psi : X' \rightarrow X$ n'a pas de fibre de dimension 2 car l'éclatement $\Psi : Bl_P \mathbb{P}^4 \rightarrow \mathbb{P}^4$ n'en a pas. On conclut que les fibres non triviales de ψ sont des courbes. Ceci complète la preuve. ■

Lemme 4.4.3. Soit D un diviseur irréductible non normal dans le système linéaire $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2}(1, 2)|$, on note p_1 et p_2 les projections sur $\mathbb{P}^1$ et $\mathbb{P}^2$ respectivement. Alors chaque composante de D_{sing} est une courbe contractée par p_2 .

Démonstration. On note F_1 une fibre de p_1 et F_2 le tiré-en-arrière par p_2 d'une droite de $\mathbb{P}^2$. Ce sont des générateurs de $\text{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2)$ et $D = F_1 + 2F_2$ par hypothèse. Pour $x \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, on note l_x la droite horizontale $p_2^{-1}(p_2(x))$ et on a

$$D.l_x = F_1.l_x + 2F_2.l_x = 1.$$

Si $x \in D_{\text{sing}}$ alors $l_x \subset D$ ou $D.l_x \geq 2$ car $D \cap l_x$ contient x et D est singulier en x . On en déduit que $p_2^{-1}(p_2(D_{\text{sing}})) \subset D$. On en déduit que $p_2(D_{\text{sing}})$ n'est pas une courbe car sinon D serait réductible ou contracté par p_2 . Finalement, D_{sing} est une union de courbes telle que $p_2(D_{\text{sing}})$ est un ensemble fini c'est-à-dire que chaque composante de D_{sing} est une courbe contractée par p_2 . ■

Proposition 4.4.4. *Soit X une cubique normale de $\mathbb{P}^4$ à singularités canoniques contenant un plan linéaire P . Supposons que X n'est pas $\mathbb{Q}$ -factorielle et que le plan P est Cartier en dehors d'un nombre fini de points. Alors on est dans l'un des cas suivants :*

- (1) *il existe un plan linéaire P_1 dans X et un hyperplan H de $\mathbb{P}^4$ tels que $X \cap H = P + 2P_1$;*
- (2) *la cubique X est un cône au-dessus d'une surface cubique de $\mathbb{P}^3$;*
- (3) *il existe une petite $\mathbb{Q}$ -factorialisation de X*

$$\psi' : X_{qf} \rightarrow X$$

et un plan linéaire P_1 dans X dont la transformée stricte P'_1 par ψ' engendre un rayon extrémal dans $\text{Pseff}(X_{qf})$ et vérifie $\kappa(X_{qf}, P'_1) = 0$.

Remarque : Dans le cas (1) de la proposition précédente, si $P_1 = P$ alors P est un plan d'inflexion.

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} Bl_P \mathbb{P}^4 & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{P}^4 \\ \cup & & \cup \\ \Phi \swarrow & X' \xrightarrow{\psi} X & \\ \downarrow \phi & & \\ & \mathbb{P}^1 & \end{array}$$

où Ψ est la résolution des indéterminées de la projection linéaire sur $\mathbb{P}^1$ à partir du plan linéaire P et X' est la transformée stricte de X par Ψ . Les fibres de Φ sont donc les hyperplans $\{H_t \mid t \in \mathbb{P}^1\}$ de $\mathbb{P}^4$ contenant P et les fibres de ϕ sont les quadriques résiduelles $\{Q_t \mid t \in \mathbb{P}^1\}$ des sections hyperplanes $H_t \cap X = P + Q_t$.

Fait : Si X' n'est pas normale alors X est un cône

Preuve : Comme X est normale, si X' n'est pas normale alors le lieu non-normal de X' est contracté par ψ . On en déduit que l'intersection $F \cap X'_{\text{sing}}$ entre la fibre générale F de ϕ et le lieu singulier de X' est de dimension 1. Ainsi la fibre générale F est nécessairement l'union de deux plans linéaires. On considère alors le système linéaire $|\mathcal{I}_P \otimes \mathcal{O}_X(1)|$ formé des sections hyperplanes de X qui contiennent P , son lieu de base est P , on a donc

$$|\mathcal{I}_P \otimes \mathcal{O}_X(1)| = P + M$$

où M est sans composante fixe (i.e. $\dim \text{Bs}(M) \leq 1$). Un élément général $Q \in M$ est l'union de deux plans sécants dont la droite d'intersection est incluse dans $\text{Bs}(M)$ (le théorème de Bertini nous assure que Q est normal en dehors de $\text{Bs}(M)$). Tous les éléments de M sont alors l'union de deux plans qui s'intersectent le long d'une même droite $l \subset P$ et X est alors un cône de sommet l : soit $x \in X$ et $p \in l$ alors il existe une section hyperplane H de X contenant P et x avec $H \cap X = P + P_1 + P_2$ et $l = P_1 \cap P_2$. La droite passant par x et p est alors incluse dans X .

Dans la suite on suppose que X' est normal et donc la fibre générale F de ϕ est une quadrique irréductible de $\mathbb{P}^3$. Le morphisme ψ est crépant par le lemme 4.2.11 et on remarque que toutes les fibres (mêmes spéciales) de ϕ sont des diviseurs de Cartier de X' en tant que restrictions des fibres de Φ à X' . On considère de plus

$$q : X_{qf} \rightarrow X'$$

une petite $\mathbb{Q}$ -factorialisation de X' qui existe car X' est à singularités canoniques. Comme P est Cartier dans X en dehors d'un nombre fini de points, la proposition 4.4.2 montre que

$$\psi' := \psi \circ q : X_{qf} \rightarrow X$$

est une petite $\mathbb{Q}$ -factorialisation de X , on note $\varphi : X_{qf} \rightarrow \mathbb{P}^1$, le morphisme composé $\phi \circ q$. On note également P' (resp. P'') la transformée stricte de P par ψ (resp. par ψ') et $\mu : P' \rightarrow P$ (resp. $\mu' : P'' \rightarrow P$) le morphisme birationnel associé.

Traitions d'abord le cas où ϕ possède des fibres spéciales $Q \subset X'$, on a les possibilités suivantes :

- (1) Si $Q = P_1 + P_2$ où P_1 et P_2 sont deux plans linéaires distincts alors il existe un hyperplan H de $\mathbb{P}^4$ tel que $H \cap X = P + P_1 + P_2$. Pour $i = 1, 2$, on considère alors $\tilde{P}_i \subset X_{qf}$ la transformée stricte du plan P_i par q et $\mu_i : \tilde{P}_i \rightarrow P_i$ le morphisme birationnel induit. On écrit la formule de sous-adjonction (p.153-154 de [Kol13]) pour chaque $\tilde{P}_i$, $i = 1, 2$:

$$\tilde{P}_i|_{\tilde{P}_i} = K_{\tilde{P}_i} - K_{X_{qf}}|_{\tilde{P}_i} + \Delta_i = -\mu_i^* l_i + E_i + \Delta_i$$

où l_i est une droite de P_i , E_i est un diviseur μ_i -exceptionnel et Δ_i est un $\mathbb{Q}$ -diviseur effectif de $\tilde{P}_i$. On fait alors le calcul suivant :

$$0 \equiv Q^2 = q_*(\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2)^2 = \mu_{1*} \tilde{P}_1|_{\tilde{P}_1} + \mu_{2*} \tilde{P}_1|_{\tilde{P}_2} + \mu_{1*} \tilde{P}_2|_{\tilde{P}_1} + \mu_{2*} \tilde{P}_2|_{\tilde{P}_2} = \mu_{1*} \Delta_1 + \mu_{2*} \Delta_2$$

ce qui implique que $\mu_{1*}\Delta_1 = \mu_{2*}\Delta_2 = 0$ car ce sont deux diviseurs effectifs. Pour $i = 1, 2$, le diviseur Δ_i est μ_i -exceptionnel et on a $\tilde{P}_i|_{\tilde{P}_i} \cdot \mu_i^* l_i = -1$ avec $\mu_i^* l_i$ nef. Finalement $\tilde{P}_i|_{\tilde{P}_i}$ n'est pas pseudo-effectif et $\tilde{P}_i$ engendre un rayon extrémal de $\text{Pseff}(X_{qf})$ avec $\kappa(X_{qf}, \tilde{P}_i) = 0$ par le lemme 1.1.20.

- (2) Si $Q = 2P_1$ (avec P_1 possiblement égal à P) alors il existe H hyperplan de $\mathbb{P}^4$ tel que $X \cap H = P + 2P_1$. C'est le cas (1) de l'énoncé.
- (3) Si maintenant toutes les fibres spéciales Q sont des cônes quadriques de $\mathbb{P}^3$ alors la fibre générale est une quadrique lisse. En particulier, X'_{sing} est fini et P' est un diviseur de Cartier de X' en dehors d'un nombre fini de points. On écrit alors la formule de sous-adjonction pour P''

$$P''|_{P''} = K_{P''} - K_{X_{qf}}|_{P''} + \Delta = -\mu'^* l + Exc + \Delta$$

où $l \subset P$ est une droite du plan, Exc est un diviseur effectif μ' -exceptionnel de P' et Δ est un $\mathbb{Q}$ -diviseur effectif de P'' . Or P'' est un diviseur de Cartier de X'' en dehors des courbes exceptionnelles de q et d'un nombre fini de points. On en déduit que Δ est μ' -exceptionnel et que $P''|_{P''}$ n'est pas pseudo-effectif car $P''|_{P''} \cdot \mu'^* l = -1$ et $\mu'^* l$ est nef. Le lemme 1.1.20 permet de conclure que P'' engendre un rayon extrémal de $\text{Pseff}(X_{qf})$ et que $\kappa(X_{qf}, P'') = 0$.

On peut donc supposer que ϕ n'a pas de fibre spéciale et il nous reste deux possibilités :

- (a) si la fibre générale F de ϕ est une quadrique lisse alors X' est lisse (car il n'y a aucune fibre spéciale) et la formule d'adjonction pour P' s'applique

$$P'|_{P'} = K_{P'} - K_{X'}|_{P'} = \mu^* l + Exc$$

où l est une droite de P et Exc est un diviseur μ -exceptionnel. On en déduit que $P'|_{P'}$ n'est pas pseudo-effectif car $P'|_{P'} \cdot \mu^* l = -1$ et $\mu^* l$ est nef. La surface P' engendre alors un rayon extrémal dans $\text{Pseff}(X')$ et $\kappa(X_{qf}, P') = 0$ par le lemme 1.1.20.

- (b) si la fibre générale F de ϕ est un cône quadrique alors toutes les fibres le sont et $X'_{\text{sing}} = C$ est une section de ϕ formée de singularités cA_1 . On peut supposer que P' contient C car sinon on conclut comme le cas (3) plus haut. La surface P' coupe alors les cônes quadriques Q_t en leur sommet et est incluse dans E , le diviseur exceptionnel de Ψ . Pour $t \in \mathbb{P}^1$ général, $E \cap Q_t$ est réduit donc se compose de deux droites distinctes l_t et l'_t du cône mais pour un nombre fini de $t \in \mathbb{P}^1$, ces deux droites peuvent être confondues. On remarque que les projections

$$p_1 := \phi|_E : E \rightarrow \mathbb{P}^1 \text{ et } p_2 := \psi|_E : E \rightarrow P \simeq \mathbb{P}^2$$

montrent que E est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$. On note alors F_1 une fibre de p_1 et F_2 le pullback d'une droite de P par p_2 . On a $X' \cap E \in |F_1 + 2F_2|$ par le lemme 4.4.1 et la proposition 4.4.2 montre que $P' = E \cap X'$. On en déduit que

$$P' \cap Q_t = l_t + l'_t$$

pour $t \in \mathbb{P}^1$ général. De plus, comme P' est un diviseur irréductible non normal, le lemme 4.4.3 affirme que P'_{sing} est une courbe contractée par $\mu : P' \rightarrow P$. Autrement dit, tous les cônes quadriques résiduels Q_t des sections hyperplanes $H_t \cap X$ de X ont le même sommet $p \in \mathbb{P}^2$. Dans ce cas, la cubique X est un cône de sommet p . En effet, pour tout point $x \in X$ différent de p , deux cas sont possibles : soit $x \in P$, soit il existe un $t \in \mathbb{P}^1$ tel que $x \in Q_t$ qui est un cône de sommet p . Dans les deux cas, la droite passant par x et p est incluse dans X . ■

Selon le même schéma de démonstration, on peut montrer la proposition suivante. Celle-ci donne l'existence d'un plan linéaire dans X qui est extrémal dans le cône pseudo-effectif d'une modification crépante (non forcément petite).

Proposition 4.4.5. *Soit $X \subset \mathbb{P}^4$ une cubique irréductible à singularités canoniques contenant un plan linéaire P . Alors on est dans l'un des cas suivants :*

- (1) *le plan linéaire P est un plan d'inflexion de X (i.e. il existe un hyperplan H tel que $H \cap X = 3P$) ;*
- (2) *la cubique X est un cône sur une surface cubique de $\mathbb{P}^3$;*
- (3) *il existe un plan linéaire $P' \subset X$ et une modification crépante*

$$\tilde{\psi} : \tilde{X} \rightarrow X$$

tels que la transformée stricte P'' de P' par $\tilde{\psi}$ engendre un rayon extrémal de $\text{Pseff}(\tilde{X})$ avec $\kappa(\tilde{X}, P'') = 0$.

Démonstration. On considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} Bl_P \mathbb{P}^4 & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{P}^4 \\ \cup & & \cup \\ \Phi \swarrow & X' \xrightarrow{\psi} X & \\ \downarrow \phi & & \\ & \mathbb{P}^1 & \end{array}$$

où Ψ est la résolution des indéterminées de la projection linéaire sur $\mathbb{P}^1$ à partir du plan linéaire P et X' est la transformée stricte de X par Ψ . Les fibres de Φ sont donc les hyperplans $\{H_t \mid t \in \mathbb{P}^1\}$ de $\mathbb{P}^4$ contenant P et les fibres de ϕ sont les quadriques résiduelles $\{Q_t \mid t \in \mathbb{P}^1\}$ des sections hyperplanes $H_t \cap X = P + Q_t$. Par le même argument que dans la preuve précédente, si la variété X' n'est pas normale alors on montre que X est un cône.

Dans la suite on suppose que X' est normal et donc la fibre générale F de ϕ est une quadrique irréductible de $\mathbb{P}^3$. On note $S \subset X'$ la transformée stricte de P par

ψ et $\mu : S \rightarrow P$ le morphisme birationnel induit. Le morphisme ψ est crépant par le lemme 4.2.11 et on remarque que toutes les fibres (mêmes spéciales) de ϕ sont des diviseurs de Cartier de X' en tant que restrictions des fibres de Φ à X' . On considère de plus

$$q : X_{qf} \rightarrow X'$$

une petite $\mathbb{Q}$ -factorialisation de X' qui existe car X' est à singularités canoniques et on note $\varphi : X_{qf} \rightarrow \mathbb{P}^1$, le morphisme composé $\phi \circ q$. Traitons d'abord le cas où ϕ possède des fibres spéciales $Q \subset X'$, on a les possibilités suivantes :

- (1) Si $Q = P_1 + P_2$ où P_1 et P_2 sont deux plans linéaires distincts alors il existe un hyperplan H de $\mathbb{P}^4$ tel que $H \cap X = P + P_1 + P_2$. Pour $i = 1, 2$, on considère alors $\tilde{P}_i \subset X_{qf}$ la transformée stricte du plan P_i par q et $\mu_i : \tilde{P}_i \rightarrow P_i$ le morphisme birationnel induit. On écrit la formule de sous-adjonction pour chaque $\tilde{P}_i$, $i = 1, 2$:

$$\tilde{P}_i|_{\tilde{P}_i} = K_{\tilde{P}_i} - K_{X_{qf}}|_{\tilde{P}_i} + \Delta_i = -\mu_i^* l_i + E_i + \Delta_i$$

où l_i est une droite de P_i , E_i est un diviseur μ_i -exceptionnel et Δ_i est un $\mathbb{Q}$ -diviseur effectif de $\tilde{P}_i$. On fait alors le calcul suivant :

$$0 \equiv Q^2 = q_*(\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2)^2 = \mu_{1*}\tilde{P}_1|_{\tilde{P}_1} + \mu_{2*}\tilde{P}_1|_{\tilde{P}_2} + \mu_{1*}\tilde{P}_2|_{\tilde{P}_1} + \mu_{2*}\tilde{P}_2|_{\tilde{P}_2} = \mu_{1*}\Delta_1 + \mu_{2*}\Delta_2$$

ce qui implique que $\mu_{1*}\Delta_1 = \mu_{2*}\Delta_2 = 0$ car ce sont deux diviseurs effectifs. Pour $i = 1, 2$, le diviseur Δ_i est μ_i -exceptionnel et on a $\tilde{P}_i|_{\tilde{P}_i} \cdot \mu_i^* l_i = -1$ avec $\mu_i^* l_i$ nef. Finalement $\tilde{P}_i|_{\tilde{P}_i}$ n'est pas pseudo-effectif et $\tilde{P}_i$ engendre un rayon extrémal de $\text{Pseff}(X_{qf})$ et $\kappa(X_{qf}, \tilde{P}_i) = 0$ par le lemme 1.1.20.

- (2) Si $Q = 2P_1$ avec P_1 distinct de P alors il existe H hyperplan de $\mathbb{P}^4$ tel que $X \cap H = P + 2P_1$. On recommence la preuve en remplaçant P par P_1 et on se retrouve dans le cas (1) ci-dessus. Dans ce dernier, on n'a pas supposé que les plans P_1 et P_2 doivent être différents de P .
- (3) Si $Q = 2P$ alors il existe H hyperplan de $\mathbb{P}^4$ tel que $H \cap X = 3P$. Dans ce cas P est un plan d'inflexion de X .
- (4) Si maintenant toutes les fibres spéciales Q sont des cônes quadriques de $\mathbb{P}^3$ alors la fibre générale est une quadrique lisse. En particulier, X'_{sing} est fini et S est un diviseur de Cartier de X' en dehors d'un nombre fini de points. On considère $S' \subset X_{qf}$ la transformée stricte de S par q et $\mu' : S' \rightarrow P$ le morphisme birationnel induit puis on écrit la formule de sous-adjonction pour S'

$$S'|_{S'} = K_{S'} - K_{X_{qf}}|_{S'} + \Delta = -\mu'^* l + Exc + \Delta$$

où $l \subset P$ est une droite du plan, Exc est un diviseur effectif μ' -exceptionnel de S' et Δ est un $\mathbb{Q}$ -diviseur effectif de S' . Or S' est un diviseur de Cartier de X_{qf} en dehors des courbes exceptionnelles de q et d'un nombre fini de points car S est un diviseur de Cartier de X' en dehors d'un nombre fini de points. On en déduit que Δ est μ -exceptionnel et que $S'|_{S'}$ n'est pas pseudo-effectif car $S'|_{S'} \cdot \mu'^* l = -1$ et $\mu'^* l$ est nef. Le lemme 1.1.20 permet de conclure que S' engendre un rayon extrémal de $\text{Pseff}(X_{qf})$ et que $\kappa(X_{qf}, S') = 0$.

On peut alors supposer que ϕ n'a aucune fibre spéciale et il ne nous reste que deux possibilités :

- (a) si la fibre générale F de ϕ est une quadrique lisse alors X' est lisse (car il n'y a aucune fibre spéciale) et la formule d'adjonction pour S s'applique :

$$S|_S = K_S - K_{X'}|_S = \mu^*l + Exc$$

où l est une droite de P et Exc est un diviseur μ -exceptionnel. On en déduit que $S|_S$ n'est pas pseudo-effectif car $S|_S \cdot \mu^*l = -1$ et μ^*l est nef. La surface S engendre alors un rayon extrémal dans $\text{Pseff}(X')$ avec $\kappa(X'_{qf}, S) = 0$ par le lemme 1.1.20 ;

- (b) si la fibre générale F de ϕ est un cône quadrique alors toutes les fibres le sont et $X'_{sing} = C$ est une courbe rationnelle (qui est une section de φ) formée de singularités cA_1 . En particulier, X' est $\mathbb{Q}$ -factorielle car l'éclatement $\psi' : X'' \rightarrow X'$ de X' le long de C est une contraction divisorielle crépante telle que $\rho(X''/X') = 1$ et X'' est lisse. On peut supposer que S contient C car sinon la formule d'adjonction s'appliquerait pour S puis, comme précédemment, S engendrerait un rayon extrémal dans $\text{Pseff}(X')$ avec $\kappa(X', S) = 0$. La surface S coupe alors les cônes quadriques Q_t en leur sommet et est incluse dans $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, le diviseur exceptionnel de Ψ . Pour $t \in \mathbb{P}^1$ général, $E \cap Q_t$ est réduit donc se compose de deux droites distinctes l_t et l'_t . Pour un nombre fini de valeurs de $t \in \mathbb{P}^1$, ces deux droites peuvent être confondues. On a alors deux possibilités :

- (i) Si $S \cap Q_t = l_t$ pour $t \in \mathbb{P}^1$ général alors $\varphi|_S : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ est un fibré en $\mathbb{P}^1$ et $S \simeq \mathbb{F}_1$ car $\mu : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ est un morphisme birationnel. On considère $\psi' : X'' \rightarrow X'$ l'éclatement de X' le long de la courbe C qui est crépant, X'' est lisse car $C = X'_{sing}$ est une courbe de singularités de type cA_1 . Soit $\tilde{S}$ la transformée stricte de S , $\tilde{S}$ est l'éclatement de S le long de C qui est un diviseur de Cartier de S donc $\tilde{S} \simeq S \simeq \mathbb{F}_1$. On écrit alors la formule d'adjonction pour $\tilde{S} \subset X''$

$$\tilde{S}|_{\tilde{S}} = \tilde{\mu}^*K_{\mathbb{P}^2} + Exc - K_{X''}|_{\tilde{S}} = -\tilde{\mu}^*l + Exc$$

où $\tilde{\mu}$ est le morphisme birationnel $(\psi' \circ \psi)|_{\tilde{S}}$ et Exc est un diviseur effectif et $\tilde{\mu}$ -exceptionnel de $\tilde{S}$. On en déduit que $\tilde{S}|_{\tilde{S}} \cdot \tilde{\mu}^*l = -1$ avec $\tilde{\mu}^*l$ nef et donc que le diviseur $\tilde{S}|_{\tilde{S}}$ n'est pas pseudo-effectif. Finalement, $\tilde{S}$ engendre un rayon extrémal dans $\text{Pseff}(\tilde{X})$ avec $\kappa(\tilde{X}, \tilde{S}) = 0$ par le lemme 1.1.20.

- (ii) Si $S \cap Q_t = l_t + l'_t$ pour $t \in \mathbb{P}^1$ général alors S est irréductible non normale. De plus, comme S est incluse dans le lieu exceptionnel $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ de Ψ , il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que

$$S = aF_1 + bF_2$$

où F_1 est une fibre de la projection $p_1 : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ et F_2 est le tiré-en-arrière d'une droite de $\mathbb{P}^2$ par la projection $p_2 : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$. En notant f une fibre générale de p_2 et l une droite générale de F_1 , on a

$$a = S \cdot f = 1$$

car $\mu : S \rightarrow P$ est birationnelle et

$$b = S.l = 2$$

car $S|_{F_1}$ est l'union de deux droites de F_1 par hypothèse. Finalement, S est un diviseur irréductible non normal de $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2}(1, 2)|$ et d'après le lemme 4.4.3, S_{sing} est une courbe contractée par $\mu : S \rightarrow P$. Autrement dit, tous les cônes quadriques résiduels Q_t des sections hyperplanes $H_t \cap X$ de X ont le même sommet $p \in \mathbb{P}^2$. La cubique X est alors un cône de sommet p : pour tout point $p \neq x \in X$, on a deux possibilités, soit $x \in P$, soit il existe un $t \in \mathbb{P}^1$ tel que $x \in Q_t$ qui est un cône de sommet p . Dans les deux cas, la droite passant par x et p est incluse dans X . ■

Chapitre 5

Endomorphismes

Tout au long de ce chapitre, on dira d'un endomorphisme qu'il est non trivial s'il n'est pas inversible. On s'intéresse ici à l'étude de la conjecture BCS présentée ci-dessous. Celle-ci concerne les hypersurfaces totalement invariantes par un endomorphisme non trivial f de $\mathbb{P}^n$. Elle est énoncée originellement pour les sous-variétés de $\mathbb{P}^n$ mais dans cet exposé, nous nous limiterons au cas des hypersurfaces.

Conjecture 5.0.1 (BCS). *Les hypersurfaces irréductibles de $\mathbb{P}^n$ totalement invariantes sont les hyperplans de $\mathbb{P}^n$.*

Le plus grand ensemble totalement invariant E d'un endomorphisme non trivial joue un rôle important en dynamique holomorphe comme le montrent le théorème 1.3. et le corollaire 1.4. de [DS10]. Pour être plus précis, si on note q le degré algébrique de f et δ_x la mesure de Dirac en x alors, pour tout $x \in \mathbb{P}^n \setminus E$, la mesure $q^{-nk}(f^k)^*\delta_x$ converge localement uniformément vers la mesure d'équilibre de f lorsque k tend vers l'infini.

Faisons un petit historique des résultats sur la conjecture 5.0.1

- Dans [FS94], la conjecture est démontrée pour $n = 2$ (théorème 4.5.).
- Dans [CLN00], Cerveau et Lins Neto ont démontré la conjecture pour les hypersurfaces quadriques lisses (théorème 2).
- Dans [Bea78], Beauville a montré qu'aucune hypersurface lisse de $\mathbb{P}^n$ de degré au moins 3 n'admet d'endomorphisme non trivial. En particulier, celles-ci ne peuvent pas être totalement invariantes dans $\mathbb{P}^n$.
- Dans [HN11], la conjecture est démontrée pour les diviseurs de degré $n + 1$ dans $\mathbb{P}^n$ (théorème 2.1).
- Dans [Zha13], D.Q. Zhang démontre quasiment la conjecture pour $n = 3$. En effet, dans le théorème 1.1., il donne une liste des quatre surfaces cubiques de $\mathbb{P}^3$ qui sont les seules surfaces irréductibles de $\mathbb{P}^3$ qu'il n'a pas réussi à exclure. Notons que la normalisation de certaines de ces cubiques admettent des endomorphismes non triviaux.

- Dans [Hör17], Horing démontre la conjecture pour les hypersurfaces irréductibles de degré n dans $\mathbb{P}^n$ (théorème 1.1.). En particulier, cela conclut l'avancée de D.Q. Zhang et montre la conjecture dans le cas $n = 3$.

Après cet état des lieux des résultats connus, on remarque que la conjecture est démontrée dans le cas lisse. On peut alors se demander si la conjecture est vraie pour les hypersurfaces irréductibles X à singularités isolées. Cette question nous a amené à trouver une borne sur le degré de X en fonction de la dimension de son lieu singulier X_{sing} . On énonce ceci dans le théorème 5.2.1 qui se démontre grâce au faisceau cotangent logarithmique introduit dans le chapitre 3 (voir la preuve dans la section 5.2). En particulier, si X est à singularités isolées alors le théorème nous dit que son degré est au plus 2.

Ceci nous amène naturellement à étudier dans la section 5.3 les hypersurfaces quadriques totalement invariantes de $\mathbb{P}^n$. Si X est une hypersurface de $\mathbb{P}^k$ non totalement invariante, on va montrer par le biais du théorème 5.3.2, qu'aucun cône de $\mathbb{P}^n$ au-dessus de X n'est totalement invariante. En remarquant que les quadriques sont des cônes au-dessus de quadriques lisses, on a ainsi montré que les hypersurfaces de degré 2 ne sont pas totalement invariantes.

Enfin, la dernière section de ce chapitre est consacrée au cas où $n = 4$. Cette motivation nous a amené sur la piste de la classification des cubiques à singularités canoniques dont les résultats sont présentés dans le chapitre 4. Nous énoncerons alors les résultats partiels qui en découlent.

5.1 Généralités

Le but de cette section est d'exposer les premières propriétés des endomorphismes de variétés projectives. On regardera plus attentivement le cas particulier des endomorphismes de $\mathbb{P}^n$ ainsi que leurs sous-espaces totalement invariants. Les exemples essaieront de mettre en évidence la rigidité de la notion de totale invariance.

Définition 5.1.1. *On dit qu'un sous-ensemble $X \subset \mathbb{P}^n$ est totalement invariant s'il existe un endomorphisme non inversible f de $\mathbb{P}^n$ tel que*

$$f^{-1}(X) = X.$$

Dans la suite les endomorphismes non inversibles seront dits non triviaux.

La proposition suivante décrit précisément les endomorphismes de $\mathbb{P}^n$ comme des applications polynomiales dont le lieu d'indétermination est vide.

Proposition 5.1.2. *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{P}^n$. Alors f est une application de la forme :*

$$f(x_0 : \dots : x_n) = (F_0(x_0, \dots, x_n) : \dots : F_n(x_0, \dots, x_n))$$

où les F_i sont des polynômes homogènes de même degré m n'ayant aucun zéro en commun dans $\mathbb{P}^n$. On note alors $f = (F_0 : \dots : F_n)$.

L'entier m est appelé le degré algébrique de f et f est non trivial si, et seulement si, $m > 1$.

Exemple : On considère l'endomorphisme suivant $f = (X_0^q : \dots : X_n^q)$ avec $q \geq 2$, les hyperplans $\mathcal{H}_i := \{X_i = 0\}$ pour $0 \leq i \leq n$ sont totalement invariants par f .

Remarque : Si X est une hypersurface de $\mathbb{P}^n$ totalement invariante par un endomorphisme f alors, quitte à itérer f , on peut supposer que chacune des composantes irréductibles X_i de X est totalement invariante par f . Cela permet de restreindre l'étude des hypersurfaces totalement invariantes à celle des hypersurfaces irréductibles et totalement invariantes.

On énonce ici une proposition dont nous nous servirons dans la section 5.3 pour utiliser la totale invariance des cônes (lemme 4.3. de [FS94]).

Proposition 5.1.3. *Soit $X = \{h = 0\} \subset \mathbb{P}^n$ une hypersurface totalement invariante par un endomorphisme non inversible $f = (F_0 : \dots : F_n)$ de degré q alors*

$$h(F_0, \dots, F_n) = \lambda h(X_0, \dots, X_n)^q \quad (5.1)$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}^$.*

On a une première borne sur le degré d'un diviseur totalement invariant. Ici, on ne suppose pas que l'hypersurface est irréductible.

Proposition 5.1.4. *Soit X une hypersurface de degré d de $\mathbb{P}^n$. Si X est totalement invariante alors*

$$d \leq n + 1.$$

Démonstration. Soit $f : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ un endomorphisme non trivial de $\mathbb{P}^n$ tel que $f^{-1}(X) = X$, on a la formule de Hurwitz logarithmique :

$$K_{\mathbb{P}^n} + X = f^*(K_{\mathbb{P}^n} + X) + R$$

où R est le diviseur de ramification logarithmique. Comme $\rho(\mathbb{P}^n) = 1$ et R est effectif, on a

$$(1 - q).deg(K_{\mathbb{P}^n} + X) = deg(R) \geq 0$$

en notant q le degré des polynômes homogènes qui définissent f . On en déduit que $deg(K_{\mathbb{P}^n} + X)$ est négatif et donc $d \leq n + 1$. ■

Grâce à la proposition 5.1.4 ci-dessus, on peut finir de traiter le cas de l'endomorphisme $f = (X_0^q : \dots : X_n^q)$:

Corollaire 5.1.5. *Les hypersurfaces irréductibles totalement invariantes par $f = (X_0^q : \dots : X_n^q)$ avec $q \geq 2$ sont les hyperplans $\mathcal{H}_i = \{X_i = 0\}$ définis dans l'exemple précédent.*

Démonstration. Soit $\mathcal{H} = \bigcup_i H_i$ l'union de ces $n + 1$ hyperplans, alors $\mathcal{H}$ est une hypersurface de degré $n + 1$ totalement invariante par f et la proposition précédente montre que le degré est maximal. En particulier, il n'existe aucune autre hypersurface de $\mathbb{P}^n$ totalement invariante par f . ■

Remarque : Le cas particulier $q = 2$ du corollaire précédent peut se traiter d'une manière plus élémentaire. En effet, une hypersurface $\mathcal{H} = \{h = 0\}$ est totalement invariante par $f = (X_0^2 : \dots : X_n^2)$ si, et seulement si, h vérifie

$$h(X_0^2, \dots, X_n^2) = h(X_0, \dots, X_n)^2. \quad (5.2)$$

Or on peut montrer par récurrence sur n et sur $\deg(h)$ que tout polynôme h qui vérifie cette condition est en fait un monôme. Finalement, on trouve que $\mathcal{H}$ est l'union d'hyperplans $\mathcal{H}_i$. Cette méthode montre toute la rigidité de la condition de la proposition 5.1.3. Elle montre également que dans des exemples précis, des calculs élémentaires peuvent démontrer la conjecture.

5.2 Borne sur le degré

Le but de cette section est, grâce au calcul des classes de Chern de $\Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X)$, d'extraire une borne sur le degré d de X . Plus précisément, on montre le théorème suivant :

Théorème 5.2.1. *Soit X un diviseur premier de $\mathbb{P}^n$ de degré d totalement invariant et $l := \dim X_{\text{sing}}$ (on pose $l = -1$ si X est lisse), alors on a*

$$d < \binom{n}{l+1}^{1/(n-l-1)} + 1.$$

On remarque que la borne diminue lorsque la codimension du lieu singulier augmente. Par exemple : si X est à singularités isolées, alors $d \leq 2$ et si $\dim X_{\text{sing}} = 1$ alors $d \leq 3$. Pour montrer ce théorème on utilise le faisceau cotangent logarithmique

$\Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X)$ qui encode l'inclusion $X \subset \mathbb{P}^n$. C'est ensuite le calcul des classes de Chern de ce faisceau qui nous permet de conclure.

On suit l'idée de Höring dans [Hör17] qui consiste en la comparaison des

$$c_2[\Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X) \otimes \mathcal{O}(r)]$$

pour $r \in \mathbb{N}^*$. Nous voulons appliquer le même raisonnement pour les classes de Chern supérieures de ces faisceaux. Le premier problème qui se pose est que le faisceau cotangent logarithmique n'est en général pas localement libre. Il l'est cependant là où X est lisse. C'est en partie pour cette raison que l'on va calculer la $n - l - 1$ -ième classe de Chern de ce faisceau. On pose $k = n - l - 1$, on a alors

$$\text{codim}_{\mathbb{P}^n} X_{\text{sing}} = k + 1.$$

Et nous voulons montrer l'inégalité suivante

$$d < \binom{n}{k}^{1/k} + 1.$$

On remarque que si X n'est pas normal (i.e. $k = 1$) alors la borne ci-dessus devient $n + 1$. Or on sait déjà que $d < n + 1$, donc dans toute cette section, on suppose sans perte de généralité que X est normal.

Commençons par énoncer le lemme 2.2 de [Hör17] :

Proposition 5.2.2. *En notant h l'équation de X , le faisceau cotangent logarithmique tordu $\Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ est engendré par les sections globales*

$$\frac{d(X_0 h)}{h}, \dots, \frac{d(X_n h)}{h} \tag{5.3}$$

partout où X est lisse.

Le point principal de la preuve du théorème 5.2.1 est d'adapter le lemme 3.1. de [Hör17] à notre situation. C'est l'objet du résultat suivant :

Lemme 5.2.3. *Soit M une variété projective lisse de dimension k , $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux fibrés vectoriels de rang $n \geq k$ sur M , $V \subset H^0(M, \mathcal{E}_1)$ sous-espace vectoriel de dimension $> n$ et*

$$\varphi : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$$

un morphisme injectif de faisceaux sur M . On fait les trois hypothèses suivantes :

- (i) *le morphisme $ev : V \otimes \mathcal{O}_M \rightarrow \mathcal{E}_1$ est surjectif,*
- (ii) *pour tout $x \in M$, $\text{rg } \varphi_x \geq n - k$, et*
- (iii) *pour tout $1 \leq i \leq k + 1$, $\dim \{x \in M \mid \text{rg } \varphi_x \leq n - i + 1\} \leq k - i + 1$.*

Alors on a

$$c_k(\mathcal{E}_1) \leq c_k(\mathcal{E}_2).$$

Démonstration. On note $|V|$ l'espace projectif associé à l'espace vectoriel V . On considère l'ensemble fermé

$$B := \{(x, \sigma) \in M \times |V| \mid (\varphi \circ ev)_x(\sigma(x)) = 0\}$$

muni de ses deux projections naturelles

$$p_1 : B \rightarrow M, \quad p_2 : B \rightarrow |V|.$$

On note également pour tout $1 \leq i \leq k+1$

$$R_i := \{x \in M \mid \operatorname{rg} \varphi_x = n - i + 1\}$$

et on remarque que $\cup_{i=1}^{k+1} R_i = M$ par (ii).

Si $x \in R_i$, on a alors $\operatorname{rg}(\varphi \circ ev)_x = n - i + 1$ et donc

$$\dim p_1^{-1}(x) = \dim |V| - n + i - 1.$$

Or, par (iii), $\dim R_i \leq k - i + 1$ donc les composantes irréductibles de B sont au plus de dimension $\dim |V| - n + k$. On conclut alors la preuve par récurrence sur $n \geq k$:

Si $n = k$, les composantes irréductibles de B sont au plus de dimension $\dim |V|$ donc les fibres génériques de p_2 sont finies. C'est-à-dire que pour une section générique σ de $\mathcal{E}_1$, la section $\varphi \circ \sigma$ de $\mathcal{E}_2$ n'a que des zéros isolés. Par injectivité de φ , cela vaut donc également pour la section générique σ et on a naturellement $c_k(\mathcal{E}_1) \leq c_k(\mathcal{E}_2)$.

Si $n > k$, les composantes irréductibles de B sont au plus de dimension $\dim |V| - n + k < \dim |V|$ et alors les fibres générales de p_2 sont vides. Cela se traduit par le fait que pour une section générique σ de $\mathcal{E}_1$, la section induite $\varphi \circ \sigma$ ne s'annule pas (et donc la section générique σ non plus). Ces deux sections σ et $\varphi \circ \sigma$ définissent un sous-fibré vectoriel trivial de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ respectivement. Les quotients $\mathcal{E}_1/\mathcal{O}_M$ et $\mathcal{E}_2/\mathcal{O}_M$ ainsi que l'espace des sections globales $V/\mathbb{C}\sigma$ et le morphisme induit

$$\tilde{\varphi} : \mathcal{E}_1/\mathcal{O}_M \rightarrow \mathcal{E}_2/\mathcal{O}_M$$

satisfont les hypothèses du lemme, on peut donc leur appliquer l'hypothèse de récurrence. De plus on sait que $c(\mathcal{E}_i) = c(\mathcal{E}_i/\mathcal{O}_M)$ grâce à la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_M \rightarrow \mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{E}_i/\mathcal{O}_M \rightarrow 0.$$

Donc en particulier $c_k(\mathcal{E}_i) = c_k(\mathcal{E}_i/\mathcal{O}_M)$, ce qui nous permet de conclure. ■

Avant d'appliquer le lemme, rappelons le résultat suivant ([Har77] Prop. III.10.6.) :

Proposition 5.2.4. *Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme fini entre deux variétés de même dimension n alors*

$$\text{codim}_X \{x \in X \mid \text{rg } d_x f \leq n - i\} \geq i.$$

On pose maintenant $P \subset \mathbb{P}^n$ un sous-espace projectif général de dimension k tel que $M = f^{-1}(P)$ est une k -variété projective lisse et que $M \cap X_{\text{sing}} = \emptyset$. Remarquons que M est alors choisi de façon générique, on s'en servira un peu plus tard. On pose également

$$\varphi : f^*(\Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \mathcal{O}_M \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \otimes \mathcal{O}_M$$

le morphisme injectif de faisceaux sur M induit par la différentielle logarithmique de f (m étant le degré de f , on a $m \geq 2$ et $f^*(\mathcal{O}(1)) = \mathcal{O}(m)$). Enfin on pose $V \subset H^0(M, \Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \otimes \mathcal{O}_M)$ l'espace vectoriel engendré par les restrictions à M des sections globales définies en (5.3).

Proposition 5.2.5. *Tous les objets définis ci-dessus vérifient les hypothèses du lemme 5.2.3.*

Démonstration. Vérifions les trois hypothèses du lemme 5.2.3 :

- (i) L'hypothèse (i) découle directement de la proposition 5.2.2.
- (ii) Pour l'hypothèse (ii) nous devons distinguer si x appartient à X ou pas (notons que comme $M \cap X_{\text{sing}} = \emptyset$, il nous suffit de considérer le cas $x \in X_{\text{lisse}}$ au lieu de $x \in X$).

Si $x \in M \setminus X$ alors $\Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X)_x \simeq \Omega_{\mathbb{P}^n}$ et la différentielle logarithmique n'est autre que la différentielle classique. On a donc par la proposition précédente (comme f est fini) :

$$\dim \{ \text{rg } (df_{\log})_x \leq n - k - 1 \} \leq n - k - 1$$

puis, grâce à la généralité du choix de M (de dimension k), on a

$$M \cap \{ \text{rg } (df_{\log})_x \leq n - k - 1 \} = \emptyset.$$

donc pour tout $x \in M \setminus X$, $\text{rg } \varphi_x \geq n - k$.

Si $x \in X_{\text{lisse}}$ alors on a $\Omega_{X,x} \subset \Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X)_x$. En effet, si $\{u_1 = 0\}$ est une équation locale de X au voisinage de x alors $\Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X)_x$ admet

$$\frac{du_1}{u_1}, du_2, \dots, du_n$$

comme base (en tant que $\mathbb{C}$ -espace vectoriel) tandis que $\Omega_{X,x}$ a pour base

$$du_2, \dots, du_n.$$

De plus, comme X est totalement invariant par f , on a le diagramme commutatif suivant (où les flèches verticales sont injectives) :

$$\begin{array}{ccc}
(f|_X)^* \Omega_{X,x} & \xrightarrow{d(f|_X)} & \Omega_{X,x} \\
\downarrow & & \downarrow \\
f^* \Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X)_x & \xrightarrow{df_{\log}} & \Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X)_x
\end{array}$$

Or, puisque $f|_X$ est fini, on a

$$\dim \{rg \, d(f|_X) \leq n - k - 1\} \leq n - k - 1$$

donc, grâce à la généricité du choix de M , on a

$$M \cap \{rg \, d(f|_X)_x \leq n - k - 1\} = \emptyset.$$

Autrement dit, le rang de $d(f|_X)$ sur $M \cap X$ est au moins $n - k$ et par le diagramme précédent, cela implique que le rang de $df_{\log}$ sur $M \cap X$ aussi.

(iii) Pour la vérification de l'hypothèse (iii), on distingue essentiellement les mêmes cas. On fixe $1 \leq i \leq k + 1$.

En dehors de X et par le même argument que pour (ii), on a

$$\dim \{rg \, (df_{\log})_x \leq n - i + 1\} \leq n - i + 1 \quad (5.4)$$

et donc

$$\dim M \cap \{rg \, (df_{\log})_x \leq n - i + 1\} \leq k - i + 1.$$

De même, sur X on a

$$\dim M \cap \{d(f|_X)_x \leq n - i\} \leq k - i.$$

En réutilisant, le diagramme de (ii), on trouve que la dimension de $\{rg \, (df_{\log})_x \leq n - i + 1\}$ est au plus $k - i + 1$ et donc

$$\dim \{rg \, \varphi_x \leq n - i + 1\} \leq k - i + 1.$$

■

Proposition 5.2.6. *Soit X un diviseur premier de $\mathbb{P}^n$ totalement invariant par un endomorphisme non trivial f de $\mathbb{P}^n$. On pose $k = \text{codim}_X X_{\text{sing}}$ et M défini comme précédemment. Alors l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$c_k(f^*(\Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X)(1)) \otimes \mathcal{O}_M) \leq c_k(\Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X)(m) \otimes \mathcal{O}_M). \quad (5.5)$$

Ceci nous amène à calculer $c_k(\Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))$, le résultat de ce calcul est résumé dans la proposition suivante :

Proposition 5.2.7. *La k -ième classe de Chern de $\Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ est indépendante de n . Plus précisément, on a*

$$c_k(\Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) = (d-1)^k H^k.$$

De plus,

$$c_k(\Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = \left[\binom{n}{k} m^k + \binom{n-1}{k-1} (d-n-1) m^{k-1} + o(m^{k-1}) \right] H^k.$$

Démonstration. La première étape de cette preuve est de calculer les classes de Chern $c_i(\Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X))$ pour $i = 1, \dots, k$ grâce à la suite exacte des résidus (3.10) de la section 3.2.

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^1 \rightarrow \tilde{\Omega}_{\mathbb{P}^n}^1(\log X) \xrightarrow{\text{res}} \mu_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \rightarrow 0. \quad (5.6)$$

où $\mu : \tilde{X} \rightarrow X$ est une résolution des singularités de X . Comme X est normale, d'après 1.13. de [Deb01], on a $\mu_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \simeq \mathcal{O}_X$. On en déduit que

$$c_i(\mu_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = c_i(\mathcal{O}_X) = X^i = d^i H^i$$

pour tout $1 \leq i \leq k$. On en déduit alors

$$c_i(\Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X)) = \left(\sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{n+1}{j} d^{i-j} \right) H^i$$

pour $i = 1, \dots, k$.

On utilise ensuite le lemme A.2.1 avec $\mathcal{E} = \Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X)$ et $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$. On trouve alors

$$\begin{aligned} c_k(\Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) &= \left[\sum_{i=0}^k m^{k-i} \left(\sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{n+1}{j} \binom{n-i}{k-i} d^{i-j} \right) \right] H^k \\ &= \left[\binom{n}{k} m^k + \binom{n-1}{k-1} (d-n-1) m^{k-1} + o(m^{k-1}) \right] H^k \end{aligned}$$

et en particulier, pour $m = 1$,

$$\begin{aligned} c_k(\Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) &= \left[\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{n+1}{j} \binom{n-i}{k-i} d^{i-j} \right] H^k \\ &= \left[\sum_{j=0}^k \sum_{i=j}^k (-1)^j \binom{n+1}{j} \binom{n-i}{k-i} d^{i-j} \right] H^k \\ &= \left[\sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{k-j} (-1)^j \binom{n+1}{j} \binom{n-i-j}{k-i-j} d^i \right] H^k \\ &= \left[\sum_{i=0}^k \left[\sum_{j=0}^{k-i} (-1)^j \binom{n+1}{j} \binom{n-i-j}{k-i-j} \right] d^i \right] H^k. \end{aligned}$$

On change d'indice en remplaçant i par $k - i$ dans la première somme et on obtient

$$c_k(\Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) = \left[\sum_{i=0}^k \left[\sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{n+1}{j} \binom{n-k+i-j}{i-j} \right] d^{k-i} \right] H^k$$

Pour montrer que $c_k(\Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) = (d-1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i d^{k-i}$, il nous suffit de montrer que pour tout $0 \leq i \leq k$, on a

$$\sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{n+1}{j} \binom{n-k+i-j}{i-j} = (-1)^i \binom{k}{i}.$$

On note cette propriété $\mathcal{P}(n, k, i)$ pour $1 \leq i \leq k \leq n$.

On montre d'abord $\mathcal{P}(n, k, k)$ pour tout k c'est-à-dire

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n+1}{j} \binom{n-j}{k-j} = (-1)^k$$

On effectue une récurrence sur $n \geq 1$: le cas $n = 1$ est trivial et on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n+1}{j} \binom{n-j}{k-j} &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j} + \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{n}{j-1} \binom{n-j}{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n}{k} \binom{k}{j} - \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{n-j-1}{k-j-1} \\ &= 0 - (-1)^{k-1} \text{ par } \mathcal{P}(n-1, k-1, k-1) \\ &= (-1)^k. \end{aligned}$$

On montre maintenant $\mathcal{P}(n, k, i)$ en fixant n et en faisant une récurrence sur $k \geq 1$: le cas $k = 1$ est trivial, on suppose donc que $\mathcal{P}(n, k, i)$ est vérifiée pour tout $i \leq k$ et il nous suffit de montrer que $\mathcal{P}(n, k+1, i)$ est vérifiée pour tout $i \leq k$ (car $\mathcal{P}(n, k+1, k+1)$ a été montré précédemment).

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{n+1}{j} \binom{n-k-1+i-j}{i-j} &= \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{n+1}{i-j} \binom{n-k-1+j}{j} \\
&= \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{n+1}{i-j} \binom{n-k+j}{j} \\
&\quad - \sum_{j=1}^i (-1)^{i-j} \binom{n+1}{i-j} \binom{n-k-1+j}{j-1} \\
&= (-1)^i \binom{k}{i} \\
&\quad - \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-j-1} \binom{n+1}{i-j-1} \binom{n-k+j}{j} \text{ par } \mathcal{P}(n, k, i) \\
&= (-1)^i \binom{k}{i} + (-1)^i \binom{k}{i-1} \text{ par } \mathcal{P}(n, k, i-1) \\
&= (-1)^i \binom{k+1}{i}
\end{aligned}$$

ce qui finit la preuve de la proposition. ■

5.2.1 Preuve du Théorème et Corollaires

Maintenant que nous avons calculé les classes de Chern de ces faisceaux, il nous faut réécrire l'inégalité (5.5) de la proposition 5.2.6. On a d'une part

$$\begin{aligned}
c_k(f^*(\Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \mathcal{O}_M) &= f^*((d-1)^k H^k).M \\
&= (d-1)^k m^k H^k.M \\
&= (d-1)^k m^n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

car $M = f^*(H^{n-k}) = m^{n-k} H^{n-k}$ dans l'anneau de cohomologie entière de $\mathbb{P}^n$, et d'autre part

$$c_k(\Omega_{\mathbb{P}^n}(\log X) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \otimes \mathcal{O}_M) = \binom{n}{k} m^n + \binom{n-1}{k-1} (d-n-1) m^{n-1} + o(m^{n-1}).$$

L'inégalité (5.5) devient alors

$$\binom{n}{k} m^n + \binom{n-1}{k-1} (d-n-1) m^{n-1} + o(m^{n-1}) \geq (d-1)^k m^n.$$

Or en itérant f , on peut faire tendre m vers l'infini et ainsi avoir

$$(d-1)^k \leq \binom{n}{k}.$$

De plus, si $(d-1)^k = \binom{n}{k}$, comme $\binom{n-1}{k-1}(d-n-1) \leq 0$, alors $d = n+1$ ce qui contredit l'égalité $(d-1)^k = \binom{n}{k}$ pour $k \geq 2$. On a donc finalement

$$(d-1)^k < \binom{n}{k}$$

et le théorème 5.2.1 est démontré.

On énonce maintenant une liste de corollaires au théorème 5.2.1.

Corollaire 5.2.8.

- (i) Si X est lisse, alors X est un hyperplan.
- (ii) Si X est à singularité isolées alors $d \leq 2$.
- (iii) Si $\dim X_{\text{sing}} = 1$, alors $d \leq 3$.

Démonstration.

- (i) Si X est lisse alors $k = n$ et donc $d < \binom{n}{n} + 1 = 2$.
- (ii) X est à singularités isolées donc $k = n-1$, par le théorème on a $(d-1)^{n-1} < n$ ce qui est absurde pour $d \geq 3$.
- (iii) Si $\dim X_{\text{sing}} = 1$ alors $k = n-2$ et par le théorème le degré d de X est strictement borné par $(n(n-1)/2)^{1/(n-2)} \leq 4$ pour $n \geq 3$.

■

Corollaire 5.2.9. Si $d = n-1$, alors $\dim X_{\text{sing}} \in \{n-2, n-3\}$.

Démonstration. Si $\dim X_{\text{sing}} \leq n-4$ alors $k \leq 3$ et le théorème nous donne que $(n-2)^3 < \binom{n}{3}$ ce qui est absurde pour $n \geq 3$. ■

Corollaire 5.2.10. Supposons que $d \geq \frac{n}{2} + 1$, alors $\text{codim}_{\mathbb{P}^n} X_{\text{sing}} \leq 4$.

Démonstration. Si $\dim X_{\text{sing}} \geq 5$ alors $k \leq 4$ et le théorème nous dit que

$$\frac{n^4}{16} \leq (d-1)^4 < \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

ce qui est absurde (car $n^4 > n(n-1)(n-2)(n-3)$). ■

5.3 Cônes totalement invariants

Cette section concerne les cônes sur les hypersurfaces non totalement invariantes (voir 5.3.2). En particulier, on montre que de tels cônes ne sont pas totalement invariants. Rappelons tout d'abord la définition d'un cône sur une hypersurface :

Définition 5.3.1. Soit X une hypersurface de $\mathbb{P}^k$ d'équation $h \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_k]$ et $n \geq k$ un entier, on définit le cône de $\mathbb{P}^n$ au-dessus de X comme l'hypersurface de $\mathbb{P}^n$ définie par l'équation $h \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$.

Enonçons maintenant le théorème que l'on va démontrer.

Théorème 5.3.2. Si X est un diviseur de $\mathbb{P}^k$ non totalement invariant alors pour tout $n \geq k$, le cône C de $\mathbb{P}^n$ au-dessus de X n'est pas totalement invariant.

Démonstration. Soit $X \subset \mathbb{P}^k$ une hypersurface non totalement invariante d'équation $h \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_k]$ et montrons qu'aucun cône C au-dessus de X n'est totalement invariant. La preuve s'effectue par récurrence sur $n \geq k$. Si $n = k$ alors le cône C est égal à X et il n'y a rien à montrer. Si $n > k$ on suppose par l'absurde qu'il existe un endomorphisme non trivial $f = (F_0 : \dots : F_n)$ de $\mathbb{P}^n$ de degré q tel que

$$f^{-1}(C) = C.$$

La totale invariance de C par f s'exprime alors par l'existence (Prop. 5.1.3) de $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$h(F_0, \dots, F_k) = \lambda h(X_0, \dots, X_k)^q. \quad (5.7)$$

Notre but est de trouver un endomorphisme g de $\mathbb{P}^{n-1}$ pour lequel le cône de $\mathbb{P}^{n-1}$ au-dessus de X est totalement invariant. Une première idée serait de considérer l'application rationnelle $(F_0|_{\mathbb{P}^{n-1}} : \dots : F_{n-1}|_{\mathbb{P}^{n-1}})$ mais un problème se pose : cette application n'est pas forcément un morphisme car les $F_i|_{\mathbb{P}^{n-1}}$ pour $i = 1, \dots, n-1$ peuvent avoir des zéros en commun. Cependant nous pouvons contourner ce problème :

On pose $P = (0 : \dots : 0 : 1) \in \mathbb{P}^n$. Comme f est un morphisme fini, il existe un hyperplan $H \subset \mathbb{P}^n$ tel que

$$H \cap (f^{-1}(P) \cup \{P\}) = \emptyset.$$

Comme $H = \{a_0 X_0 + \dots + a_n X_n = 0\}$ ne passe pas par P , alors $a_n \neq 0$ et on peut donc supposer que $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ vérifie

$$H = \{X_n = \sum_{i=0}^n a_i X_i\}.$$

On considère l'endomorphisme de H suivant :

$$g := \pi_{P,H} \circ f|_H$$

où $\pi_{P,H}$ est la projection de P sur H dont l'équation est

$$\pi_{P,H} : (x_0 : \dots : x_n) \mapsto (x_0 : \dots : x_{n-1} : \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_i).$$

Son lieu de définition est donc $\mathbb{P}^n \setminus \{P\}$ et donc g n'est pas défini en $x \in H$ si, et seulement si, $f(x) = P$ ce qui n'arrive jamais car $H \cap f^{-1}(P) = \emptyset$. g est donc bien défini.

De plus, $H \cap C$ est totalement invariant par g : en effet, en restreignant l'équation (5.7) à H , on trouve

$$h(F_0|_H, \dots, F_k|_H) = \lambda h(X_0, \dots, X_k)^q \quad (5.8)$$

sachant que h est l'équation de $C \cap H$ et $F_0|_H, \dots, F_k|_H$ sont les k premières coordonnées de l'endomorphisme g . L'inclusion $C \cap H \subset H$ est isomorphe à une inclusion $C' \subset \mathbb{P}^{n-1}$ où C' est le cône de $\mathbb{P}^{n-1}$ au-dessus de $X \subset \mathbb{P}^k$. On conclut que c'est absurde par hypothèse de récurrence ce qui montre que $C \subset \mathbb{P}^n$ n'est pas totalement invariant. ■

Corollaire 5.3.3. *Les quadriques de $Q \subset \mathbb{P}^n$ ne sont pas totalement invariantes. Autrement dit, si X est un diviseur premier de degré d totalement invariant alors son degré $d \neq 2$.*

Démonstration. Soit $Q \subset \mathbb{P}^n$ une quadrique irréductible d'équation $h \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$. Grâce à la classification des formes quadratiques complexes, quitte à faire un changement de coordonnées, on peut supposer que $h = X_0^2 + \dots + X_k^2$ avec $k \leq n$. Donc Q est un cône au-dessus d'une quadrique lisse de $\mathbb{P}^k$. Or par le corollaire 5.2.8, les diviseurs lisses ne sont pas totalement invariants. On en déduit que Q n'est pas totalement invariante. ■

Corollaire 5.3.4. *La conjecture est vérifiée si X est à singularités isolées.*

Démonstration. Le résultat est immédiat en combinant le corollaire ci-dessus et le corollaire 5.2.8. ■

5.4 Les hypersurfaces totalement invariantes de $\mathbb{P}^4$

Nous nous intéressons maintenant au cas où X est un diviseur premier totalement invariant de $\mathbb{P}^4$. D'après les corollaires 5.2.8 et 5.3.3, X est soit un hyperplan, soit une cubique de $\mathbb{P}^4$ dont le lieu singulier contient une courbe. La proposition 5.4.2 montre qu'une telle cubique est à singularités canoniques. Celles-ci rentrent donc dans le cadre de la classification du chapitre 4.

Réduction des singularités

Commençons par énoncer le théorème 1.2. de [BHN15] qui concerne le lieu non-klt des variétés de Fano d'indice k .

Théorème 5.4.1 (Thm 1.2.[BHN15]). *Soit X une variété de Fano d'indice k et telle que $-K_X \sim kH$ où H est un diviseur de Cartier sur X . On suppose également que $Nklt(X) \neq \emptyset$. Alors $\dim Nklt(X) \geq k - 1$ et si l'égalité est réalisée alors X est un cône généralisé avec $Nklt(X) \simeq \mathbb{P}^{k-1}$ comme sommet.*

On en déduit la réduction des singularités d'une cubique normale de $\mathbb{P}^4$ totalement invariante par un endomorphisme non trivial :

Proposition 5.4.2. *Si $X \subset \mathbb{P}^4$ est une cubique normale totalement invariante alors X est à singularités canoniques.*

Démonstration. La cubique X est une variété de Fano d'indice 2 car $-K_X = 2H|_X$ où $H|_X$ est la classe de la section hyperplane de X . Donc si $Nklt(X) \neq \emptyset$ alors, par le théorème 5.4.1, $\dim Nklt(X) \geq 1$. Mais comme $\dim X_{sing} = 1$, on a $\dim Nklt(X) = 1$ et encore par le théorème, X est un cône généralisé. Ceci est absurde par le théorème 5.3.2 car les cubiques de $\mathbb{P}^3$ ne sont pas totalement invariantes. On a donc $Nklt(X) = \emptyset$ et X est klt. De plus, la cubique X est Gorenstein (i.e. $K_X \sim -2H|_X$ est un diviseur de Cartier). En particulier, pour toute résolution g de X , le pull-back g^*K_X a des coefficients entiers puis X est à singularités canoniques. ■

Remarque : Si X est une cubique non normale de $\mathbb{P}^4$ alors le théorème 2.3.1 donne une description de sa section hyperplane générale. Si X est de plus totalement invariante par un endomorphisme de $\mathbb{P}^4$ alors la proposition 5.4. de [NZ09] affirme que le lieu non-normal Σ de X est également totalement invariant par cet endomorphisme.

Recherche d'un plan linéaire totalement invariant

Proposition 5.4.3. *Soit $X \subset \mathbb{P}^4$ une cubique normale totalement invariante par un endomorphisme non trivial f de $\mathbb{P}^4$ et non $\mathbb{Q}$ -factorielle. Supposons qu'il existe un plan linéaire $P \subset X$ et une petite $\mathbb{Q}$ -factorialisation*

$$\psi : X_{qf} \rightarrow X$$

de X telle que la transformée stricte P' de P par ψ engendre un rayon extrémal de $\text{Pseff}(X_{qf})$ et vérifie $\kappa(X_{qf}, P') = 0$. Alors, quitte à itérer f , le plan P est totalement invariant par f .

Démonstration. D'après les hypothèses, la cubique X contient un plan linéaire P dont la transformée stricte P' par ψ engendre un rayon extrémal de $\text{Pseff}(X_{qf})$. On note E le lieu exceptionnel de ψ qui est de codimension au moins 2 dans X_{qf} car ψ est petite. L'action de f sur $Cl(X)$ par tiré-en-arrière se relève à $Cl(X_{qf})$ car ψ est petite. En effet, on a les isomorphismes de groupes suivants :

$$Cl(X) \xrightarrow{\sim} Cl(X \setminus \psi(E)) \xrightarrow{\psi^*} Cl(X_{qf} \setminus E) \xrightarrow{\sim} Cl(X_{qf})$$

car $\text{codim}_X \psi(E) \geq 2$, $\text{codim}_{X_{qf}} E \geq 2$ et ψ est un isomorphisme de $X_{qf} \setminus E$ sur son image $X \setminus \psi(E)$. Dans la suite, on confondra l'action relevée sur $Cl(X_{qf})$ avec f^* .

De plus, la $\mathbb{Q}$ -factorialisation X_{qf} est faiblement Fano car ψ est crépante : d'une part $-K_{X_{qf}} = -\psi^* K_X$ est nef car pour toute courbe irréductible $C \subset X'$, on a $-K_{X_{qf}}.C = -K_X.\psi(C) \geq 0$ et d'autre part $-K_X$ est big car

$$(-K_{X_{qf}})^3 = (-K_X)^3 = 24 > 0.$$

On en déduit que le cône pseudo-effectif de X_{qf} est polyédral (cf. corollaire 1.2 de [Ara08]). Les rayons extrémaux sont en nombre fini et f^* envoie rayons maximaux sur rayons maximaux donc, quitte à itérer f , on peut supposer que f^* fixe tous les rayons maximaux de $\text{Pseff}(X_{qf})$. Par hypothèse, on sait que la transformée stricte P' engendre un rayon extrémal de $\text{Pseff}(X_{qf})$ donc

$$f^* P' \equiv k P'$$

pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$ où $\equiv$ représente l'équivalence numérique. De plus, comme $\kappa(X_{qf}, P') = 0$, on a $|k P'| = \{k P'\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et donc

$$f^* P' = k P'.$$

Ceci implique que $f^{-1}(P') = P'$ puis que $f^{-1}(P) = P$. Autrement dit, le plan linéaire P est totalement invariant par f . ■

En résumé, en combinant les résultats du chapitre 4 avec la proposition 5.4.3 précédente, on obtient le théorème suivant

Théorème 5.4.4. *Soit $X \subset \mathbb{P}^4$ une cubique non $\mathbb{Q}$ -factorielle totalement invariante par un endomorphisme f de $\mathbb{P}^4$ alors X contient un plan linéaire P de $\mathbb{P}^4$. Si de plus P est Cartier en dehors d'un nombre fini de points alors X contient un plan linéaire P_1 de $\mathbb{P}^4$ qui vérifie l'une des assertions suivantes :*

- (1) *il existe un hyperplan de $\mathbb{P}^4$ tel que $X \cap H = P + 2P_1$; ou*
- (2) *P_1 est totalement invariant par une itérée de f .*

Démonstration. L'existence d'un plan linéaire dans X résulte du théorème 4.3.1 en remarquant que les cubiques des cas (1) et (2) sont $\mathbb{Q}$ -factorielles. Comme les cônes sur les surfaces cubiques de $\mathbb{P}^3$ ne sont pas totalement invariants par le 5.3.2, la proposition 4.4.4 combinée à la proposition 5.4.3 permet de conclure. ■

Annexe A

Appendice

A.1 Espaces projectifs éclatés le long de sous-espaces linéaires

Dans cette appendice, on s'intéresse à la géométrie des espaces projectifs éclatés le long d'un sous-espace linéaire.

Définition A.1.1. Soit Λ un sous-espace de dimension $k \leq n$ de $\mathbb{P}^n$ et $(X_0 : \dots : X_n)$ un système de coordonnées de $\mathbb{P}^n$ tel que

$$\Lambda = \{X_{k+1} = \dots = X_n = 0\}$$

alors on définit la projection linéaire de $\mathbb{P}^n$ depuis Λ comme l'application rationnelle

$$\phi_\Lambda : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-k-1}$$

telle que $\phi_\Lambda(X_0 : \dots : X_n) = (X_{k+1} : \dots : X_n)$.

Remarque : La terminologie de projection s'explique parce que l'on voit $\mathbb{P}^{n-k-1}$ comme le sous-espace linéaire de $\mathbb{P}^n$ grâce au plongement

$$(X_{k+1} : \dots : X_n) \hookrightarrow (0 : \dots : 0 : X_{k+1} : \dots : X_n).$$

Par des calculs élémentaires, on obtient les premières propriétés de ϕ_Λ .

Proposition A.1.2. On considère la projection $\phi_\Lambda : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-k-1}$ introduite dans la définition A.1.1, son lieu d'indétermination est alors

$$\text{Ind}(\phi_\Lambda) = \Lambda.$$

De plus, si $p \in \mathbb{P}^{n-k-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ alors l'adhérence de la fibre $\phi_\Lambda^{-1}(p)$ est l'unique sous-espace linéaire de $\mathbb{P}^n$ de dimension $k+1$ contenant p et Λ .

Exemple : Si Λ est un singleton $\{q\}$ dans $\mathbb{P}^n$ alors l'adhérence des fibres de ϕ_Λ^{-1} sont exactement les droites de $\mathbb{P}^n$ passant par q .

La raison pour laquelle nous nous intéressons à l'espace projectif éclaté le long d'un sous-espace linéaire Λ est la suivante : cet éclatement résout les indéterminations de ϕ_Λ .

Proposition A.1.3. *On reprend les notations de la définition A.1.1 en considérant de plus $\varepsilon : Bl_\Lambda \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ l'éclatement de $\mathbb{P}^n$ le long de Λ . Alors l'application rationnelle*

$$\varphi_\Lambda := \phi_\Lambda \circ \varepsilon$$

est définie partout et le lieu exceptionnel E de ε est isomorphe à $\Lambda \times \mathbb{P}^{n-k-1}$ via les projections $\varphi_\Lambda|_E$ et $\varepsilon|_E$.

Autrement dit, φ_Λ est la résolution des indéterminations de ϕ_Λ et on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} Bl_\Lambda \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{P}^n \\ \varphi_\Lambda \downarrow & \swarrow \phi_\Lambda & \\ \mathbb{P}^{n-k-1} & & \end{array}$$

L'éclatement de $\mathbb{P}^n$ le long d'un de ses sous-espaces linéaires possède une structure de fibré projectif sur $\mathbb{P}^{n-k-1}$ (proposition 2.1. de [Mag98]).

Proposition A.1.4. *Soit Λ un sous-espace linéaire de dimension $k \leq n$ de $\mathbb{P}^n$ et $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ l'éclatement de $\mathbb{P}^n$ le long de Λ alors X est isomorphe à*

$$\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^l}^{\oplus k+1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^l}(1))$$

avec $l = n - k - 1$.

En résumé, si Λ est un sous-espace linéaire de dimension k de $\mathbb{P}^n$ alors, en reprenant les notations précédentes, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\cong} & Bl_\Lambda \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{P}^n \\ & \searrow \pi & \downarrow \varphi_\Lambda & \swarrow \phi_\Lambda & \\ & & \mathbb{P}^{n-k-1} & & \end{array}$$

où $\mathcal{F} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^l}^{\oplus k+1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^l}(1)$ et $l := n - k - 1$.

A.2 Classes de Chern de faisceaux tordus

Pour $\mathcal{E}$ un faisceau localement libre de rang $n \geq 1$ et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur une variété projective complexe X , le but de cette appendice est de calculer les classes de Chern $c_k(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L})$ du faisceau tordu $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}$ pour $1 \leq k \leq n$:

Proposition A.2.1. *Pour $\mathcal{E}$ un faisceau localement libre de rang $n \geq 1$ et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible, on a*

$$c_k(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}) = \sum_{i=0}^k \binom{n-i}{k-i} c_1(\mathcal{L})^{k-i} \cdot c_i(\mathcal{E}). \quad (\text{A.1})$$

Démonstration. On procède en deux étapes. Tout d'abord on montre que la formule (A.1) est vérifiée pour $k = n$. Puis, on entame une preuve par récurrence sur les n . Tout au long de la preuve, on utilise la propriété de scindage bien connue : Pour tout faisceau $\mathcal{E}$ localement libre de rang n sur X , il existe un morphisme $f : X' \rightarrow X$ tel que f^* est injectif et $f^*\mathcal{E}$ est scindé.

Grâce à celle-ci, on peut supposer que $\mathcal{E}$ est scindé : soient $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$ des faisceaux inversibles tels que

$$\mathcal{E} \simeq \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{L}_i,$$

ce qui implique, pour $0 \leq k \leq n$,

$$c_k(\mathcal{E}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} c_1(\mathcal{L}_{i_1}) \dots c_1(\mathcal{L}_{i_k}).$$

On note $[c]_n$ la composante n d'une classe de Chern totale c , et on calcule

$$\begin{aligned} c_n(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}) &= c_n\left(\bigoplus_{i=1}^n (\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L})\right) \\ &= \left[\prod_{i=1}^n c(\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L})\right]_n \\ &= \left[\prod_{i=1}^n (1 + c_1(\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}))\right]_n \\ &= \prod_{i=1}^n (c_1(\mathcal{L}_i) + c_1(\mathcal{L})) \\ &= \sum_{k=0}^n c_k(\mathcal{E}) \cdot c_1(\mathcal{L})^{k-i}. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que cela correspond au cas $k = n$ de la formule (A.1).

Montrons maintenant la formule par récurrence sur n : le cas $k = 0$ est trivial et le

cas $k = 1$ est également vérifiable par un calcul direct :

$$\begin{aligned}
c_1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}) &= c_1\left(\bigoplus_{i=1}^n (\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L})\right) \\
&= \left[\prod_{i=1}^n c(\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L})\right]_1 \\
&= \left[\prod_{i=1}^n (1 + c_1(\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}))\right]_1 \\
&= n \cdot c_1(\mathcal{L}) + \sum_{i=1}^n c_1(\mathcal{L}_i) \\
&= c_1(\mathcal{E}) + n \cdot c_1(\mathcal{L}).
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que la formule (A.1) soit vraie pour tous les faisceaux localement libres de rang $n - 1$ et soit $\mathcal{E}$ un faisceau localement libre de rang n , on va montrer qu'elle est vraie pour $k \leq n - 1$ (le cas $k = n$ a été traité dans la première partie). Par la propriété de scindage, on peut supposer qu'il existe un faisceau $\mathcal{E}'$ localement libre de rang $n - 1$ et un faisceau inversible $\mathcal{M}$ tels que

$$\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}' \oplus \mathcal{M}.$$

On peut alors calculer :

$$\begin{aligned}
c_k(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}) &= c_k((\mathcal{E}' \otimes \mathcal{L}) \oplus (\mathcal{M} \otimes \mathcal{L})) \\
&= c_k(\mathcal{E}' \otimes \mathcal{L}) + c_{k-1}(\mathcal{E}' \otimes \mathcal{L}) \cdot c_1(\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}) \\
&= \sum_{i=0}^k \binom{n-i-1}{k-i} c_1(\mathcal{L})^{k-i} \cdot c_i(\mathcal{E}') \\
&\quad + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-i-1}{k-i-1} c_1(\mathcal{L})^{k-i-1} \cdot c_i(\mathcal{E}') \cdot c_1(\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}) \text{ par HR} \\
&= c_k(\mathcal{E}') + \sum_{i=0}^{k-1} \left[\binom{n-i-1}{k-i} + \binom{n-i-1}{k-i-1} \right] c_1(\mathcal{L})^{k-i} \cdot c_i(\mathcal{E}') \\
&\quad + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-i-1}{k-i-1} c_1(\mathcal{L})^{k-i-1} \cdot c_i(\mathcal{E}') \cdot c_1(\mathcal{M}) \\
&= c_k(\mathcal{E}') + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-i}{k-i} c_1(\mathcal{L})^{k-i} c_i(\mathcal{E}') \\
&\quad + \sum_{i=1}^k \binom{n-i}{k-i} c_1(\mathcal{L})^{k-i} \cdot c_{i-1}(\mathcal{E}') c_1(\mathcal{M}) \\
&= \binom{n}{k} c_1(\mathcal{L})^k + \sum_{i=1}^k \binom{n-i}{k-i} c_1(\mathcal{L})^{k-i} \cdot c_i(\mathcal{E}') \\
&\quad + \sum_{i=1}^k \binom{n-i}{k-i} c_1(\mathcal{L})^{k-i} \cdot c_{i-1}(\mathcal{E}') c_1(\mathcal{M})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{n}{k} c_1(\mathcal{L})^k + \sum_{i=1}^k \binom{n-i}{k-i} c_1(\mathcal{L})^{k-i} \cdot [c_i(\mathcal{E}') + c_{i-1}(\mathcal{E}') \cdot c_1(\mathcal{M})] \\
&= \binom{n}{k} c_1(\mathcal{L})^k + \sum_{i=1}^k \binom{n-i}{k-i} c_1(\mathcal{L})^{k-i} \cdot c_i(\mathcal{E}) \\
&= \sum_{i=0}^k \binom{n-i}{k-i} c_1(\mathcal{L})^{k-i} \cdot c_i(\mathcal{E}).
\end{aligned}$$

On a bien montré que la formule (A.1) est donc valable pour tout $0 \leq k \leq n$. ■

Bibliographie

- [And95] M. Andreatta. Some remarks on the study of good contractions. *Manuscripta Mathematica*, 87 :359–367, 1995.
- [Ara08] C. Araujo. The cone of pseudo-effective divisors of log varieties after batyrev. *Math. Zeitschrift*, 264, 2008.
- [BCS04] J.-Y. Briend, S. Cantat, and M. Shishikura. Linearity of the exceptional set for maps of $\mathbb{P}_k(\mathbb{C})$. *Math. Ann.*, 330 :39–43, 2004.
- [BD15] S. Baier and U. Derenthal. Quadratic congruences on average and rational points on cubic surfaces. *Acta Arithmetica*, 171 :145–171, 2015.
- [Bea78] A. Beauville. *Surfaces Algébriques Complexes*. Astérisque, 1978.
- [Bea01] A. Beauville. Endomorphisms of hypersurfaces and other manifolds. *Int. Math. Res. Not.*, 1 :53–58, 2001.
- [BHN15] M.C. Beltrametti, A. Höring, and C. Novelli. Fano varieties with small non-klt locus. *Int. Math. Res. Not.*, 2015 :3094–3120, 2015.
- [BL98] M. Brundu and A. Logar. Parametrization of the orbits of cubic surfaces. *Transformation Groups*, 3 :209–239, 1998.
- [Bou04] S. Boucksom. Divisorial zariski decompositions on compact complex manifolds. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 37 :45–76, 2004.
- [Bǎ01] L. Bădescu. *Higher-Dimensional Algebraic Geometry*. Springer, 2001.
- [BW79] J. W. Bruce and C. T. C. Wall. On the classification of cubic surfaces. *London Math. Soc.*, s2-19, 1979.
- [CLN00] D. Cerveau and A. Lins Neto. Hypersurfaces exceptionnelles des endomorphismes de $\mathbb{CP}(n)$. *Bol. Soc. Bras. Mat.*, 31 :155–161, 2000.
- [Col82] A. Collino. The fundamental group of the fano surface, i. *Springer*, 947 :209–218, 1982.
- [Deb01] O. Debarre. *Higher-Dimensional Algebraic Geometry*. Springer, 2001.
- [Dol07] I. Dolgachev. Logarithmic sheaves attached to arrangements of hyperplanes. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 47(1) :35–64, 2007.
- [Dol12] I. Dolgachev. *Classical Algebraic Geometry : A Modern View*. Cambridge University Press, 2012.
- [DS10] T.C. Dinh and N. Sibony. Equidistribution speed for endomorphisms of projective spaces. *Math. Ann.*, 347 :613–626, 2010.
- [Eis95] D. Eisenbud. *Commutative Algebra*. Springer, 1995.

- [FG12] O. Fujino and Y. Gongyo. On images of weak fano manifolds. *Mathematische Zeitschrift*, pages 531–544, 2012.
- [FS94] J.E. Fornæss and N. Sibony. Complex dynamics in higher dimension i. *SMF, Astérisque*, 5 :201–231, 1994.
- [Fuj17] O. Fujino. *Foundations of the minimal model program*. Mathematical Society of Japan, 2017.
- [Ful84] W. Fulton. *Intersection Theory*. Springer, 1984.
- [Gra62] M. Grauert. Über modifikationen und exzeptionelle analytische mengen. *Math. Ann.*, pages 331–368, 1962.
- [Har63] R. Hartshorne. *Residues and Duality*. Springer, 1963.
- [Har77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer, 1977.
- [Har80] R. Hartshorne. Stable reflexive sheaves. *Mathematische Annalen*, 254 :121–176, 1980.
- [HN11] J.-M. Hwang and N. Nakayama. On endomorphisms of fano manifolds of picard number one. *Pure Appl. Math.*, 7 :1407–1426, 2011.
- [Hör17] A. Höring. Totally invariant divisors of endomorphisms of projective spaces. *Manuscripta Mathematica*, 27 :153–173, 2017.
- [JP07] P. Jahnke and T. Peternell. Almost del pezzo manifolds. *Advances in Geometry*, 8, 2007.
- [JPR05] P. Jahnke, T. Peternell, and I. Radloff. Threefolds with big and nef anticanonical bundles i. *Mathematische Annalen*, 3 :569–631, 2005.
- [Kaw18] Y. Kawamata. Flops connect minimal models. 2018.
- [KM98] J. Kollár and S. Mori. *Birational Geometry of Algebraic Varieties*. Cambridge University Press, 1998.
- [KMM87] Y. Kawamata, K. Matsuda, and K. Matsuki. Introduction to the minimal model problem. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 10 :283–360, 1987.
- [Kol89] J. Kollár. Flops. *Nagoya Math. J.*, 113 :15–36, 1989.
- [Kol13] J. Kollár. *Singularities of the Minimal Model Program*. Cambridge University Press, 2013.
- [Laz04a] R. Lazarsfeld. *Positivity in Algebraic Geometry I*. Springer, 2004.
- [Laz04b] R. Lazarsfeld. *Positivity in Algebraic Geometry II*. Springer, 2004.
- [LB12] P. Le Boudec. Manin’s conjecture for a cubic surface with $2a_2 + a_1$ singularity type. *Cambridge Philosophical Society*, 153 :419–455, 2012.
- [Mag98] H. Maggesi. On the quantum cohomology of blow-ups of projective spaces along linear spaces. *arXiv :math/9810150*, 1998.
- [MZ88] M. Miyanishi and D.Q. Zhang. Gorenstein log del pezzo surfaces of rank one. *Journal of Algebra*, 118 :63–84, 1988.
- [NZ09] N. Nakayama and D.Q. Zhang. Polarized endomorphisms of complex normal varieties. *arXiv :0908.1688v1*, 2009.

- [Rei80] M. Reid. Canonical 3-folds. *Journées de géométrie algébrique d'Angers*, pages 273–310, 1980.
- [Sai80] K. Saito. Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. *J. Fac. Sci. Tokyo Univ.*, 27 :265–291, 01 1980.
- [Zha13] D.Q. Zhang. Invariant hypersurfaces of endomorphisms of the projective 3-space. *Affine algebraic geometry*, pages 314–330, 2013.