



**HAL**  
open science

# Géométrie des groupes d'Artin, des réseaux et des espaces hyperboliques

Thomas Haettel

► **To cite this version:**

Thomas Haettel. Géométrie des groupes d'Artin, des réseaux et des espaces hyperboliques. Topologie géométrique [math.GT]. Université de Montpellier, 2021. tel-03479453

**HAL Id: tel-03479453**

**<https://theses.hal.science/tel-03479453v1>**

Submitted on 14 Dec 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

GÉOMÉTRIE DES GROUPES D'ARTIN, DES RÉSEAUX  
ET DES ESPACES HYPERBOLIQUES

MÉMOIRE D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

*Thomas Haettel*

soutenance le 9 décembre 2021

Jury :

Yves Benoist (Rapporteur)  
Martin R. Bridson (Rapporteur)  
Pierre-Emmanuel Caprace  
Cornelia Drutu (Rapporteur)  
Marc Herzlich (Président)  
Alain Valette



**UNIVERSITÉ DE  
MONTPELLIER**



*pour LÉO*

## Charte d'intégrité scientifique

*Je déclare avoir respecté, dans la conception et la rédaction de ce mémoire d'HDR, les valeurs et principes d'intégrité scientifique destinés à garantir le caractère honnête et scientifiquement rigoureux de tout travail de recherche, visés à l'article L.211-2 du Code de la recherche et énoncés par la Charte nationale de déontologie des métiers de la recherche et la Charte d'intégrité scientifique de l'Université de Montpellier. Je m'engage à les promouvoir dans le cadre de mes activités futures d'encadrement de recherche.*

Thomas Haettel

*Adresse* : Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck UMR 5149, Université de Montpellier, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon, 34090 Montpellier, France

*E-mail* : [thomas.haettel@umontpellier.fr](mailto:thomas.haettel@umontpellier.fr)

*Page internet* : <http://imag.umontpellier.fr/~haettel>



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>5</b>
<b>Introduction</b>	<b>7</b>
Remerciements . . . . .	14
<b>Travaux présentés</b>	<b>15</b>
<b>Travaux non présentés</b>	<b>16</b>
<b>1 Géométrie des groupes d'Artin</b>	<b>17</b>
1.1 Rappels sur les groupes d'Artin . . . . .	17
1.2 Actions de groupes d'Artin sur des espaces à courbure négative . . . . .	19
1.3 Espaces et complexes cubiques $CAT(0)$ . . . . .	20
1.3.1 Espaces $CAT(0)$ . . . . .	20
1.3.2 Critères de courbure . . . . .	22
1.3.3 Complexes cubiques $CAT(0)$ . . . . .	23
1.4 Le complexe dual pour les groupes de tresses . . . . .	24
1.4.1 Complexe orthoschématique d'un ensemble partiellement ordonné . . . . .	24
1.4.2 La structure de Garside duale pour les groupes de tresses . . . . .	26
1.4.3 Partitions non croisées . . . . .	27
1.4.4 Plongement dans un immeuble sphérique . . . . .	29
1.5 Actions propres et cocompactes de groupes d'Artin sur des complexes cubiques $CAT(0)$ . . . . .	30
1.5.1 Classification conjecturale . . . . .	30
1.5.2 Critère de non cubulation . . . . .	34
1.5.3 Cubulation des groupes d'Artin . . . . .	35
1.6 Un complexe $CAT(0)$ pour les groupes d'Artin suffisamment larges . . . . .	37
1.7 Actions propres de groupes d'Artin sur des complexes cubiques $CAT(0)$ . . . . .	40
1.7.1 L'action euclidienne . . . . .	41
1.7.2 Construction du complexe, cas (A) et (B) . . . . .	41
1.7.3 Construction du complexe, cas (C) . . . . .	43
<b>2 Rigidités de réseaux</b>	<b>45</b>
2.1 Réseaux de rang supérieur et médianes grossières . . . . .	45
2.1.1 Énoncés des résultats . . . . .	45
2.1.2 Médianes grossières . . . . .	46
2.1.3 Obstruction à l'existence d'une médiane grossière . . . . .	49
2.2 Actions de réseaux de rang supérieur sur des espaces hyperboliques . . . . .	50
2.2.1 Énoncés des résultats . . . . .	50
2.2.2 Les réseaux de rang supérieur n'agissent pas sur des espaces hyperboliques . . . . .	52

<b>3</b>	<b>Actions sur des espaces hyperboliques</b>	<b>57</b>
3.1	Actions propres sur des espaces $L^p$ . . . . .	57
3.1.1	Énoncés des résultats . . . . .	57
3.1.2	Construction de l'action . . . . .	58
3.2	Hyperbolicité hiérarchique, propriété de Helly grossière et espaces raccourcis	61
3.2.1	Description des trois familles d'espace métriques . . . . .	61
3.2.2	Comparaison entre ces trois familles . . . . .	62
3.2.3	Conséquences pour les groupes . . . . .	63
3.2.4	Empilement borné . . . . .	64
3.2.5	Espaces métriques injectifs . . . . .	65
3.2.6	Espaces hiérarchiquement hyperboliques . . . . .	67
3.2.7	Construction de la nouvelle distance . . . . .	69
3.2.8	Propriété grossièrement Helly pour les parties hiérarchiquement quasi-convexes . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Pistes de recherche</b>	<b>73</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>76</b>

# Introduction

Notre mémoire se penche sur divers aspects de théorie géométrique des groupes, où l'on s'intéresse essentiellement à l'étude de groupes via leurs actions par isométries sur des espaces métriques.

Les groupes qui vont nous intéresser sont notamment les groupes de tresses, ainsi que leur généralisation que forment les groupes d'Artin. Nous allons également nous intéresser aux groupes de Lie semisimples sur un corps local et à leurs réseaux. Nous allons finalement nous intéresser aux groupes modulaires de surfaces, ainsi qu'aux groupes hiérarchiquement hyperboliques plus généraux.

Les espaces métriques qui vont nous intéresser auront toujours une certaine forme de courbure négative ou nulle. Elle peut être exacte, comme pour les espaces CAT(0), les complexes cubiques CAT(0), les espaces médians ou les espaces injectifs. Elle peut également être grossière, comme pour les espaces hyperboliques au sens de Gromov, pour les espaces grossièrement médians ou grossièrement Helly.

## Géométrie des groupes d'Artin

Les groupes de tresses ont été définis formellement par Artin (voir [Art25], et [KT08] pour une présentation moderne). L'une des raisons de leur importance est qu'ils ont plusieurs définitions équivalentes, et sont ainsi à l'intersection de plusieurs domaines. Si l'on fixe un entier  $n \geq 1$ , le groupe de tresses  $B_n$  à  $n$  brins est le groupe fondamental de l'espace des  $n$ -uplets non ordonnés de points distincts du plan. De manière équivalente, si l'on considère dans  $\mathbb{C}^n$  l'arrangement d'hyperplans  $\{z_i = z_j\}$ , alors  $B_n$  est le groupe fondamental du complémentaire de cet arrangement d'hyperplans. Le groupe de tresses  $B_n$  est également isomorphe au groupe modulaire du disque privé de  $n$  points. La présentation d'Artin du groupe de tresses  $B_n$  à  $n$  brins est la suivante :

$$B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \forall 1 \leq i \leq n-2, \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \\ \forall |i-j| \geq 2, \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \rangle.$$

L'action du groupe de tresses  $B_n$  par permutation sur les  $n$  brins définit un morphisme naturel de  $B_n$  vers le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ , qui est le groupe de Coxeter associé à  $B_n$ .

La définition des groupes de tresses à partir des arrangements d'hyperplans, ou bien encore à partir des groupes de Coxeter, se généralise naturellement aux groupes d'Artin, également appelés groupes d'Artin-Tits car ils ont été définis par Tits dans [Tit66]. Considérons un graphe de Coxeter fini  $\Gamma$  de sommets  $S$ , dont les arêtes sont étiquetées par un entier supérieur ou égal à 2. Notons que cette convention est différente de celle utilisée pour les diagrammes de Dynkin, où les arêtes étiquetées 2 ne sont pas représentées, mais celles étiquetées  $\infty$  le sont. Notons  $\Gamma^{(1)}$  l'ensemble des arêtes de  $\Gamma$ . Associé à un tel graphe  $\Gamma$ , on peut définir le groupe de Coxeter

$$W(\Gamma) = \langle S \mid \forall s \in S, s^2 = 1, \forall \{s, t\} \in \Gamma^{(1)}, (st)^{m_{s,t}} = 1 \rangle,$$



où  $m_{s,t} \in \{2, 3, \dots\}$  désigne l'étiquette de l'arête  $\{s, t\}$ . Le groupe d'Artin associé à  $\Gamma$  est défini par la présentation similaire suivante :

$$A(\Gamma) = \langle S \mid \forall \{s, t\} \in \Gamma^{(1)}, [sts\dots]_{m_{s,t}} = [tst\dots]_{m_{s,t}} \rangle,$$

où  $[aba\dots]_m$  désigne le mot  $[aba\dots]_m = ababa\dots$  de longueur  $m$ . On remarque que le groupe de Coxeter  $W(\Gamma)$  est le quotient du groupe d'Artin  $A(\Gamma)$  obtenu en ajoutant les relations  $s^2 = 1$ , pour tout  $s \in S$ . Notons également que chaque groupe d'Artin peut être vu comme le groupe fondamental du complémentaire d'un arrangement d'hyperplans, noté  $M_\Gamma$ , voir par exemple [Par14].

Outre les groupes de tresses, certains groupes d'Artin sont bien étudiés, ce sont les groupes d'Artin à angles droits : ceux dont toutes les étiquettes sont égales à 2, autrement dit dont les seules relations sont des commutations entre générateurs. Une autre famille de groupes d'Artin est assez bien connue, ce sont ceux dont le groupe de Coxeter associé est fini, on les appelle groupes d'Artin sphériques.

Notre compréhension des groupes d'Artin généraux est très limitée (voir [GP12], [Cha] et [McC17]). En particulier, les questions suivantes sont largement ouvertes.

**Conjecture 1.** *Tout groupe d'Artin est sans torsion.*

**Conjecture 2.** *Tout groupe d'Artin irréductible qui n'est pas sphérique est de centre trivial.*

**Conjecture 3.** *Tout groupe d'Artin a un problème du mot résoluble.*

**Conjecture 4** (Conjecture du  $K(\pi, 1)$ ). *Tout groupe d'Artin a un arrangement d'hyperplans  $M_\Gamma$  qui est asphérique.*

Afin d'améliorer notre compréhension des groupes d'Artin, nous allons nous intéresser aux actions de groupes d'Artin par isométries sur des espaces à courbure négative ou nulle. Voici plusieurs questions naturelles dans ce sens :

#### Questions 5.

- Quels groupes d'Artin ont une action propre et cocompacte sur un espace métrique CAT(0) ? Seulement propre ?
- Quels groupes d'Artin ont une action propre et cocompacte sur un complexe cubique CAT(0) ? Seulement propre ?
- Quels groupes d'Artin ont une action acylindrique sur un espace hyperbolique au sens de Gromov ?

Nous allons apporter des réponses partielles à ces questions. Voyons tout d'abord en quoi elles sont importantes.

Parmi les principales conséquences d'une action propre et cocompacte sur un espace CAT(0), on peut citer notamment que les problèmes du mot et de conjugaison sont résolubles (voir [BH99]). Parmi les conséquences d'une action propre sur un complexe cubique CAT(0), on peut citer la propriété de Haagerup et l'alternative de Tits forte (voir [CS11]). Parmi les conséquences d'une action propre et cocompacte sur un complexe cubique CAT(0), on peut notamment citer la biautomatisme (voir [NR98a]).

Concernant les actions propres et cocompactes par isométries sur des espaces CAT(0), on dispose de très peu d'exemples parmi les groupes d'Artin. L'exemple le plus simple est fourni par les groupes d'Artin à angles droits, qui agissent sur le revêtement universel de leur complexe cubique de Salvetti. Même pour les groupes de tresses, la question suivante est ouverte :

**Conjecture 6.** *Tout groupe de tresses agit proprement et cocompactement sur un espace  $CAT(0)$ .*

À l'aide de la structure de Garside duale définie par Bessis dans [Bes03], Brady et McCammond ont défini dans [BM10] un complexe simplicial classifiant  $X_n$  pour le groupe de tresses  $B_n$ . Chaque simplexe est naturellement ordonné, ce qui permet de munir naturellement chaque simplexe de la métrique euclidienne de l'orthoschéma (obtenu par subdivision du cube, voir partie 1.4.1), et le complexe  $B_n$  de la métrique de longueur associée. Brady et McCammond conjecturent que  $X_n$  est localement  $CAT(0)$ , et donc que  $B_n$  est  $CAT(0)$ , pour tout  $n$ .

Dans [BM10], Brady et McCammond montrent que  $X_n$  est localement  $CAT(0)$  pour  $n \leq 5$  à l'aide d'un ordinateur. Dans [HKS16] nous montrons avec Kielak et Schwer que ce résultat est vrai pour  $n \leq 6$ , à l'aide d'arguments géométriques simples de plongement dans un immeuble sphérique :

**Théorème 7** ( $n \leq 5$  Brady-McCammond,  $n = 6$  H-Kielak-Schwer). *Pour  $n \leq 6$ , le complexe  $X_n$  est localement  $CAT(0)$ , donc le groupe de tresses  $B_n$  est  $CAT(0)$ .*

Parmi les groupes d'Artin, très peu d'autres exemples sont connus pour être  $CAT(0)$ . Dans [BM00], Brady et McCammond ont montré que certains groupes d'Artin larges (dont toutes les étiquettes sont au moins égales à 3) sont  $CAT(0)$ . Dans [Hae21d], nous montrons le résultat suivant, à l'aide d'un recollement simple de complexes associés aux sous-groupes diédraux.

**Théorème 8.** *Tout groupe d'Artin de type extra extra large (dont toutes les étiquettes sont au moins égales à 5) est  $CAT(0)$ .*

Concernant les actions propres et cocompactes de groupes d'Artin sur des complexes cubiques  $CAT(0)$ , le principal exemple connu est celui des groupes d'Artin à angles droits. Nous montrons dans [Hae21c] que, conjecturalement, il s'agit essentiellement du seul cas (voir la conjecture 1.29 pour un énoncé précis).

**Conjecture 9.** *Un groupe d'Artin est virtuellement cocompactement cubulé si et seulement s'il s'obtient à partir de :*

- Groupes d'Artin à angles droits.
- Groupes d'Artin  $A(\Gamma)$  où  $\Gamma$  est une étoile, et dont toutes les étiquettes sont paires.

Nous montrons que cette conjecture est la conséquence d'une conjecture simple sur les centralisateurs des puissances des générateurs :

**Théorème 10.** *Soit  $A$  un groupe d'Artin de générateurs standards  $S$  tels que*

$$\forall s \in S, \forall n \geq 1, Z(s^n) = Z(s).$$

*Alors  $A$  vérifie la conjecture 9.*

D'après Godelle (voir [God07]), cette condition sur les centralisateurs est une conséquence de l'existence conjecturale d'une métrique  $CAT(0)$  sur le complexe de Deligne, qui est connue dans les deux cas suivants :

- si le groupe d'Artin est de type FC, i.e. si toute clique de  $\Gamma$  engendre un sous-groupe de Coxeter fini,
- ou si le groupe d'Artin est de dimension 2, i.e. si toute clique d'au moins 3 éléments engendre un sous-groupe de Coxeter infini.

**Théorème 11.** *Tout groupe d'Artin  $A$  de type FC, ou de dimension 2, vérifie la conjecture 9.*

En particulier, le groupes de tresses à  $n$  brins n'est virtuellement cocompactement cubulé que si  $n \leq 3$ . Cependant, si l'on recherche des actions seulement propres sur des complexes cubiques  $CAT(0)$ , même la question suivante est ouverte.

**Question 12.** Le groupe de tresses à 4 brins agit-il proprement sur un complexe cubique  $CAT(0)$ ? A-t-il la propriété de Haagerup?

En recollant des sous-complexes cubiques associés à des sous-groupes diédraux, nous montrons dans [Hae21a] que certains groupes d'Artin  $A(\Gamma)$  tels que  $\Gamma$  n'a pas de triangle ont une telle action :

**Théorème 13.** *Soit  $A = A(\Gamma)$  un groupe d'Artin vérifiant l'une des trois propriétés suivantes :*

- (A)  $\Gamma$  n'a pas de cycle.
- (B)  $\Gamma$  est bipartite, et toutes ses étiquettes sont au moins égales à 3.
- (C)  $\Gamma$  n'a pas de triangle, et n'a pas d'étiquette égale à 3.

*Alors  $A$  agit proprement sur un complexe cubique  $CAT(0)$  localement fini, de dimension finie, avec un nombre fini d'orbites d'hyperplans.*

En particulier, de tels groupes vérifient la propriété de Haagerup.

### Rigidités de réseaux

Considérons un groupe algébrique  $G$  semi-simple connexe, de centre fini, sur un corps local, de rang supérieur (i.e. au moins égal à deux). L'exemple le plus simple est  $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$  avec  $n \geq 3$ . Considérons un réseau  $\Gamma$  de  $G$ , c'est-à-dire un sous-groupe discret de  $G$  de covolume fini pour la mesure de Haar. L'exemple le plus simple d'un tel réseau (non cocompact) de  $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$  est  $\Gamma = \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ . Pour simplifier, on appellera  $\Gamma$  un *réseau de rang supérieur*.

Les réseaux de rang supérieur satisfont à de nombreuses propriétés de rigidités. L'idée générale et vague est qu'un réseau  $\Gamma$  de  $G$  ne peut avoir d'action intéressante que sur des espaces homogènes sous l'action de  $G$ . Puisque de tels espaces homogènes sont rares, on peut également en déduire qu'un réseau a peu d'actions intéressantes. Une manière de rendre plus précise cette idée est par exemple le théorème de superrigidité de Margulis (voir [Mar91]), qui restreint les morphismes d'un réseau de rang supérieur à valeurs dans un groupe de Lie semisimple.

Le programme de Zimmer propose également de montrer que les réseaux ont peu d'actions par difféomorphismes ou homéomorphismes sur des variétés. Notons que le cas des difféomorphismes a été résolu par Brown, Fisher et Hurtado dans [BFH16] et [BFH20], à l'aide de la propriété (T) renforcée de Lafforgue (voir [Laf08] et [dLdS15]).

Nous allons nous intéresser au cadre métrique de la rigidité des réseaux. Plus précisément, nous allons voir que les réseaux de rang supérieur ne peuvent agir par isométries de manière non triviale que sur très peu d'espaces métriques.

Tout d'abord, une manière d'interpréter le théorème de superrigidité de Margulis est qu'un réseau de rang supérieur  $\Gamma < G$  ne peut agir par isométries sans point fixe sur l'espace symétrique (ou l'immeuble de Bruhat-Tits) d'un groupe  $H$  que lorsque  $G$  est contenu dans  $H$ , par l'action restreinte de celle de  $G$ .

Concernant d'autres espaces métriques, les réseaux de rang supérieur vérifient la propriété (T) de Kazhdan, dont une caractérisation est que toute action par isométries affines sur un espace de Hilbert a un point fixe. Une autre caractérisation est que toute action par isométries sur un espace métrique médian a des orbites bornées. Nous renvoyons à la partie 2.1.2 pour la définition d'espace métrique médian.

Bowditch a défini dans [Bow13a] les espaces métriques grossièrement médians, qui sont une généralisation commune des espaces métriques médians (et donc des complexes cubiques  $CAT(0)$ ) et des espaces hyperboliques au sens de Gromov. C'est une notion assez large pour englober notamment les groupes modulaires de surfaces. Il est naturel de se demander si les réseaux de rang supérieur peuvent avoir une action propre et cocompacte sur un espace grossièrement médian. Nous montrons dans [Hae16] que ce n'est pas le cas :

**Théorème 14.** *Soit  $X$  un espace symétrique de type non compact, ou un immeuble affine épais. Alors  $X$  admet une médiane grossière si et seulement si son type sphérique est  $A_1^r$ .*

Ce qui est notable est qu'il n'y a aucune hypothèse d'équivariance dans l'énoncé. Une conséquence est la suivante.

**Corollaire 15.** *Soit  $X$  un espace symétrique de type non compact, ou un immeuble affine épais. Alors  $X$  est quasi-isométrique à un complexe cubique  $CAT(0)$  si et seulement si son type sphérique est  $A_1^r$ .*

Une autre question très naturelle est de savoir si les réseaux de rang supérieur peuvent agir sur des espaces hyperboliques au sens de Gromov.

Une conséquence de la propriété (T) est donc que les réseaux de rang supérieur n'ont pas d'action sans point fixe sur un complexe cubique  $CAT(0)$ , ni sur un arbre. Cependant, certains groupes hyperboliques ont la propriété (T), notamment les réseaux uniformes de  $Sp(n, 1)$  (voir [Kos69]).

Lafforgue a montré dans [Laf08] (et de Laat et de la Salle dans [dLdS15] pour le cas général) que les réseaux de rang supérieur vérifient la propriété (T) renforcée, qui implique notamment que toute action sur un graphe hyperbolique uniformément localement fini a une orbite bornée.

Manning a montré dans [Man06] que  $SL(n, \mathbb{Z})$ , ainsi que d'autres réseaux à génération bornée, n'ont pas d'action sans orbite bornée sur un quasi-arbre.

Nous montrons dans [Hae20] un résultat plus général.

**Théorème 16.** *Soit  $\Gamma$  un réseau de rang supérieur. Alors toute action de  $\Gamma$  par isométries sur un espace hyperbolique au sens de Gromov est élémentaire. Plus précisément, soit l'action a des orbites bornées, soit elle est parabolique et fixe un point au bord.*

Remarquons que ce résultat est également une conséquence des travaux de Bader et Furman sur la rigidité ergodique des réseaux. Bien qu'elles n'apparaissent pas dans l'énoncé, les médianes grossières sont au cœur de la preuve de notre résultat.

Comme tout groupe modulaire de surface agit sur le complexe de courbes qui est hyperbolique, nous pouvons en déduire une nouvelle preuve du résultat suivant dû à Farb-Masur et Kaimanovich (voir [FM98] et [KM96]).

**Corollaire 17.** *Tout morphisme d'un réseau de rang supérieur à valeurs dans un groupe modulaire de surface est d'image finie.*

Pour les morphismes à valeurs dans le groupe des automorphismes extérieurs d'un groupe libre, ou plus généralement d'un groupe hyperbolique, Guirardel et Horbez en déduisent le résultat suivant.

**Corollaire 18** (Guirardel-Horbez). *Tout morphisme d'un réseau de rang supérieur à valeurs dans le groupe des automorphismes extérieurs d'un groupe hyperbolique sans torsion est fini.*

### Actions sur des espaces hyperboliques

Un groupe discret  $G$  a la propriété (T) de Kazhdan si et seulement si toute action par isométries affines sur tout espace de Hilbert  $V$  a un point fixe (voir [BdlHV08]). À l'opposé,  $G$  a la propriété de Haagerup s'il admet une action propre par isométries affines sur un espace de Hilbert (voir [CCJ<sup>+</sup>01]). Une conséquence notable de la propriété de Haagerup est la conjecture de Baum-Connes (voir [HK01]). Par exemple, tout groupe ayant une action propre sur un complexe cubique CAT(0) admet une action propre sur un espace de Hilbert.

Nous allons nous intéresser ici au cas où  $V$  est un espace  $L^p$ , avec  $p > 1$ . Tout groupe hyperbolique admet une action propre sur un espace  $L^p$ , pour un certain  $p > 1$  (voir [Yu05], [AL17][Nie13]). Cependant, on peut remarquer que pour les groupes hyperboliques ayant la propriété (T) (comme par exemple les réseaux uniformes de  $\mathrm{Sp}(n, 1)$  d'après Kostant, voir [Kos69]) on a nécessairement  $p > 2$ .

Considérons un groupe agissant proprement par isométries sur un espace hyperbolique au sens de Gromov. Avec Chatterji, Dahmani et Lécureux, nous nous demandons dans [CDHL19] à quelle condition nous pouvons en déduire une action propre par isométries sur un espace  $L^p$ . À cette fin, nous définissons une notion de fibré tangent à courbure négative, qui nous permet de montrer le résultat suivant.

**Théorème 19** (Chatterji-Dahmani-H-Lécureux). *Soit  $\delta \geq 0$ , et soit  $X$  une variété riemannienne  $\delta$ -hyperbolique de courbure minorée, munie de sa mesure  $\mu$  de volume, ou bien  $X$  un graphe localement fini  $\delta$ -hyperbolique, muni de sa mesure  $\mu$  de comptage. Notons  $h \geq 0$  l'entropie volumique de  $\mu$ . Supposons qu'un groupe localement compact, dénombrable à l'infini  $G$  agisse proprement par isométries sur  $X$  en préservant  $\mu$ . Alors, pour tout  $p > \max(1, \frac{h\delta}{\log(2)})$ , le groupe  $G$  agit proprement par isométries affines sur un espace  $L^p$ .*

En particulier, nous pouvons en déduire le résultat suivant.

**Corollaire 20** (Chatterji-Dahmani-H-Lécureux). *Soit  $M$  une variété de Hadamard  $\alpha$ -pincée de dimension  $n$ , et soit  $G$  un groupe localement compact dénombrable à l'infini agissant proprement discontinûment par isométries sur  $M$ . Alors, pour tout  $p > \frac{n-1}{\sqrt{\alpha}}$ , le groupe  $G$  agit proprement par isométries affines sur un espace  $L^p$ .*

Une autre conséquence est de donner une preuve alternative du résultat suivant :

**Corollaire 21** (Cornulier-Tessera-Valette [dTV08]). *Soit  $G$  un groupe algébrique simple de rang 1 sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et soit  $\delta_H$  la dimension de Hausdorff du bord visuel de l'espace symétrique de  $G$ . Alors pour tout  $p > \max(1, \delta_H)$ , le groupe  $G$  agit proprement par isométries affines sur un espace  $L^p$ .*

Avec Hoda et Petyt, nous nous intéressons dans [HHP20] aux liens entre hyperbolicité hiérarchique, propriété de Helly et espaces raccourcis. Rappelons qu'un espace métrique géodésique est dit injectif si ses boules fermées vérifient la propriété de Helly, c'est-à-dire que toute famille de boules s'intersectant deux à deux s'intersecte globalement. La version discrète est la suivante : un graphe connexe est appelé graphe de Helly si la famille des boules combinatoires vérifie la propriété de Helly.

On peut distinguer plusieurs catégories d'actions de groupes sur de tels espaces :

- Un groupe  $G$  est dit Helly s'il admet une action propre et cocompacte par automorphismes sur un graphe de Helly.
- Un groupe  $G$  est dit injectif s'il admet une action propre et cocompacte par isométries sur un espace métrique injectif.
- Un groupe  $G$  est dit grossièrement Helly s'il admet une action propre et cobornée par isométries sur un espace métrique injectif.

Notons que Helly implique injectif, qui implique grossièrement Helly.

L'existence de telles actions a de nombreuses conséquences pour le groupe, notamment la suivante :

**Théorème 22** ([Lan13]). *Soit  $G$  un groupe grossièrement Helly. Alors  $G$  a un bipeignage géodésique  $\gamma : G \times G \times [0, 1] \rightarrow G$  tel que*

$$\exists C \geq 0, \forall g, h, g', h' \in G, \forall t \in [0, 1], d(\gamma_{g,h}(t), \gamma_{g',h'}(t)) \leq (1-t)d(g, g') + td(h, h') + C.$$

*En particulier,  $G$  est semi-hyperbolique au sens d'Alonso-Bridson.*

La semi-hyperbolicité a, à son tour, de nombreuses conséquences, voir [BH99]. Une autre conséquence pour un groupe d'être grossièrement Helly est que le groupe a un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes finis.

Notons de plus que tout groupe de Helly est biautomatique, voir [CCG<sup>+</sup>20].

La classe des groupes admettant de telles actions contient plusieurs familles intéressantes, citons notamment les groupes cocompactement cubulés, les groupes hyperboliques (voir [Lan13]), les groupes d'Artin de type FC (voir [HO19a]), les réseaux uniformes dans des immeubles euclidiens de type  $\tilde{C}_n$  (voir [CCG<sup>+</sup>20]) et plus généralement les réseaux uniformes de groupes de Lie semisimples classiques (voir [Hae21b] pour des énoncés précis).

Dans [HHP20], nous nous intéressons aux groupes hiérarchiquement hyperboliques : ce sont des groupes agissant sur un espace métrique muni d'une famille de projections vers des espaces hyperboliques, qui ressemblent au groupe modulaire d'une surface et aux projections sur les complexes de courbes de sous-surfaces (voir la partie 3.2.6). Pour de tels espaces, nous définissons une nouvelle distance invariante par automorphismes, qui est grossièrement Helly. Ainsi nous en déduisons le résultat suivant.

**Théorème 23** (H - Hoda - Petyt). *Tout groupe hiérarchiquement hyperbolique, et en particulier tout groupe modulaire de surface, est grossièrement Helly.*

Ce résultat a de nombreuses conséquences, en voici certaines.

**Corollaire 24** (H - Hoda - Petyt). *Tout groupe hiérarchiquement hyperbolique  $G$  vérifie les propriétés suivantes :*

- $G$  a un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes finis,
- $G$  est semi-hyperbolique, et en particulier :
- $G$  a un problème du mot et de conjugaison résolubles,
- tout sous-groupe polycyclique de  $G$  est virtuellement abélien,
- tout sous-groupe abélien de  $G$  est quasi-isométriquement plongé.

La semi-hyperbolicité a été obtenue simultanément et indépendamment par Durham, Minsky et Sisto avec l'hypothèse supplémentaire de colorabilité, voir [DMS20].

Nous montrons également que tout groupe hiérarchiquement hyperbolique agit géométriquement sur un espace métrique fortement raccourci, i.e. tel qu'il existe une borne sur la longueur des cercles  $(K, C)$ -isométriquement plongés pour un certain  $K > 1$ . Beaucoup de groupes à courbure négative vérifient cette propriété, qui implique notamment d'avoir une fonction de Dehn polynomiale.

**Théorème 25** (H - Hoda - Petyt). *Tout groupe grossièrement Helly, et en particulier tout groupe hiérarchiquement hyperbolique, est fortement raccourci.*

L'étude des actions de groupes sur des espaces injectifs et des graphes de Helly en est encore à ses débuts.

## Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier ma femme Louise, ainsi que mes enfants Lucie, Émile et Odile pour leur soutien et la joie qu'ils m'apportent. Je souhaite également remercier ma famille, ainsi que la famille de Louise, de m'avoir toujours entouré.

Je souhaite remercier tous les membres du laboratoire montpellierain Alexander Grothendieck et ceux du département informatique de l'IUT de Montpellier-Sète pour leur soutien. Je souhaite en particulier remercier les fidèles du séminaire Darboux pour de belles discussions. Je souhaite notamment remercier Anthony Genevois et Hoel Queffelec pour leurs retours sur une première version de ce manuscrit. Je souhaite également remercier Jérémie Brioussel, avec qui je partage mon bureau, pour de beaux échanges mathématiques.

Je souhaite remercier Frédéric Paulin pour ses conseils avisés et enthousiastes depuis la fin de ma thèse. Je souhaite remercier Luis Paris pour des discussions intéressantes lors de notre encadrement commun de Mireille Soergel.

Je souhaite remercier mes divers collaborateurs, avec lesquelles le travail a toujours été agréable et productif : Indira Chatterji, François Dahmani, Vincent Guirardel, Nima Hoda, Camille Horbez, Dawid Kielak, Jean Lécureux, Masato Mimura, Damian Osajda, Harry Petyt, Anna-Sofie Schilling, Petra Schwer, Cormac Walsh et Anna Wienhard.

Je souhaite également remercier mes collègues du projet ANR AGIRA, et notamment son coordinateur Bruno Duchesne, pour de belles opportunités de discussions mathématiques et de soutien à mes activités.

Je souhaite enfin chaleureusement remercier les rapporteurs, Yves Benoist, Martin Bridson et Cornelia Drutu, pour leur travail soigné. Je souhaite également remercier les autres membres du jury, Pierre-Emmanuel Caprace, Marc Herzlich et Alain Valette, pour leur disponibilité.

# Travaux présentés

- [CDHL19] I. CHATTERJI, F. DAHMANI, T. HAETTEL & J. LÉCUREUX – « Tangent bundles of hyperbolic spaces and proper affine actions on  $L_p$  spaces », arXiv :1901.07462, 2019.
- [Hae16] T. HAETTEL – « Higher rank lattices are not coarse median », *Algebr. Geom. Topol.* **16** (2016), no. 5, p. 2895–2910.
- [Hae20] — , « Hyperbolic rigidity of higher rank lattices », *with an appendix by Vincent Guirardel et Camille Horbez*, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (2)* **53** (2020), p. 439–468.
- [Hae21a] — , « Cubulation of some triangle-free Artin groups », *Groups Geom. Dyn.* (2021).
- [Hae21c] — , « Virtually cocompactly cubulated Artin-Tits groups », *Int. Math. Res. Not. IMRN* **4** (2021), p. 2919–2961.
- [Hae21d] — , « XXL type Artin groups are CAT(0) and acylindrically hyperbolic », *Annales de l'Institut Fourier* (2021).
- [HHP20] T. HAETTEL, N. HODA & H. PETYT – « The coarse Helly property, hierarchical hyperbolicity, and semihyperbolicity », *arXiv preprint arXiv :2009.14053* (2020).
- [HKS16] T. HAETTEL, D. KIELAK & P. SCHWER – « The 6-strand braid group is CAT(0) », *Geom. Dedicata* **182** (2016), p. 263–286.



# Travaux non présentés

[Hae21b] T. HAETTEL, « Injective metrics on buildings and symmetric spaces », arXiv :2101.09367, 2021.

[HSWW17] T. HAETTEL, A.-S. SCHILLING, C. WALSH & A. WIENHARD – « Horofunction compactifications of symmetric spaces », (2017), arXiv :1705 :05026.

# Chapitre 1

## Géométrie des groupes d'Artin

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la géométrie des groupes d'Artin, qui sont une généralisation combinatoire des groupes de tresses. Après des rappels concernant les groupes d'Artin et les espaces métriques  $CAT(0)$ , nous présenterons nos résultats montrant dans quelle mesure on peut dire que les groupes d'Artin sont à courbure négative.

### 1.1 Rappels sur les groupes d'Artin

Commençons tout d'abord par rappeler plusieurs définitions équivalentes des groupes de tresses (voir [KT08]). Pour tout entier  $n \geq 1$ , le groupe de tresses  $B_n$  est le groupe fondamental de l'espace des configurations de  $n$  points non ordonnés du plan. Remarquons que l'action de  $B_n$  sur les  $n$  points par permutation définit un morphisme naturel de  $B_n$  vers le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ . Son noyau, le groupe de tresses pures à  $n$  brins, est le groupe fondamental de l'espace des configurations de  $n$  points ordonnés du plan ; c'est aussi le groupe fondamental du complémentaire de l'arrangement d'hyperplans complexes  $\{z_i = z_j\}_{i \neq j}$  dans  $\mathbb{C}^n$ .

Un deuxième point de vue sur les tresses provient des groupes modulaires de surface (voir par exemple [FM12]). Considérons une surface  $S$  orientable de type fini, ayant éventuellement des composantes de bord et des pointes. Le groupe modulaire de la surface  $S$  est le quotient

$$\text{Mod}(S) = \text{Homeo}^+(S) / \text{Homeo}_0(S),$$

où  $\text{Homeo}^+(S)$  désigne le groupe des homéomorphismes de  $S$  préservant l'orientation et fixant chaque composante de bord point par point, et  $\text{Homeo}_0(S)$  désigne le sous-groupe des homéomorphismes isotopes à l'identité. Pour tout entier  $n \geq 1$ , notons  $D_n$  le disque unité avec  $n$  pointes. Alors le groupe modulaire  $\text{Mod}(D_n)$  est isomorphe au groupe des tresses  $B_n$  à  $n$  brins.

Un troisième point de vue sur le groupe de tresses  $B_n$  provient de sa présentation classique, due à Artin :

$$B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \forall 1 \leq i \leq n-2, \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ \forall |i-j| \geq 2, \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \rangle.$$

Notons que l'action de  $B_n$  par permutation sur les  $n$  brins donne pour quotient le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ , dont la présentation de Coxeter standard est obtenue en ajoutant, pour chaque  $1 \leq i \leq n-1$ , la relation  $\sigma_i^2 = 1$ .

Les groupes d'Artin, ou groupes d'Artin-Tits, sont une généralisation combinatoire des groupes de tresses associés à des groupes de Coxeter plus généraux que les seuls groupes symétriques. On peut également les interpréter comme groupes fondamentaux de complémentaires d'arrangements d'hyperplans complexes (voir [Par14]).

Considérons un groupe de Coxeter  $W$  : il est associé à un ensemble fini  $S$  de générateurs, et à une matrice  $M$  de Coxeter. Les lignes et colonnes de  $M$  sont indexées par  $S$ , la matrice  $M$  est symétrique, pour tout  $s \in S$  on a  $m_{s,s} = 1$ , et pour tout  $s \neq t$  on a  $m_{s,t} \in \{2, 3, 4, \dots, \infty\}$ . De manière équivalente, on peut représenter cette donnée combinatoire par un graphe de Coxeter  $\Gamma$  de sommets  $S$ . Nous choisirons pour convention que, si  $s, t \in S$  distincts sont tels que  $m_{s,t} \neq \infty$ , alors on a une arête entre  $s$  et  $t$  étiquetée  $m_{s,t}$ .

Remarquons que pour les graphes de Coxeter des groupes de Weyl, une autre convention est habituellement utilisée, celle où l'on ne met pas d'arête si  $m_{s,t} = 2$ .

Le groupe de Coxeter  $W = W(M) = W(\Gamma)$  est alors défini par la présentation

$$W = \langle S \mid \forall s, t \in S, (st)^{m_{s,t}} = 1 \rangle.$$

Remarquons que cette présentation peut également être réécrite ainsi :

$$W = \langle S \mid \forall s \in S, s^2 = 1, \forall \{s, t\} \in \Gamma^{(1)}, [sts \dots]_{m_{s,t}} = [tst \dots]_{m_{s,t}} \rangle,$$

où, pour tout  $p \geq 2$ , on désigne par  $[sts \dots]_p$  le mot  $ststs \dots$  de longueur  $p$ .

### Exemples.

1. Soit  $\Gamma$  le graphe complet de sommets  $1, \dots, n-1$ , et que l'étiquette de l'arête entre  $i$  et  $j$  est égale à 3 si  $|i-j| = 1$ , et égale à 2 sinon. Alors  $W(\Gamma)$  est le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ .
2. Soit  $\Gamma$  un graphe dont toutes les arêtes sont étiquetées 2. Alors  $W(\Gamma)$  est appelé groupe de Coxeter à angles droits.
3. Soit  $\Gamma$  un triangle, dont les trois arêtes sont étiquetées  $p, q, r$ .  
 Si  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$ , le groupe  $W(\Gamma)$  est un groupe fini de réflexions de la sphère  $\mathbb{S}^2$ .  
 Si  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ , le groupe  $W(\Gamma)$  est un groupe virtuellement  $\mathbb{Z}^2$  de réflexions du plan  $\mathbb{R}^2$ .  
 Si  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ , le groupe  $W(\Gamma)$  est un groupe hyperbolique de réflexions du plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ .

Pour plus de détails sur les groupes de Coxeter, nous renvoyons à [Dav15].

Associé à tout groupe de Coxeter, le groupe d'Artin  $A = A(M) = A(\Gamma)$  est défini par exemple en ôtant de la seconde présentation de  $W$  les relations  $s^2 = 1$ , ainsi :

$$A = \langle S \mid \forall \{s, t\} \in \Gamma^{(1)}, [sts \dots]_{m_{s,t}} = [tst \dots]_{m_{s,t}} \rangle.$$

Il est ainsi clair que le groupe de Coxeter  $W$  est un quotient du groupe d'Artin  $A$ .

### Exemples.

1. Lorsque le groupe de Coxeter est le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ , alors le groupe d'Artin associé est le groupe des tresses à  $n$  brins  $B_n$ .
2. Soit  $\Gamma$  un graphe dont toutes les arêtes sont étiquetées 2. Alors  $A(\Gamma)$  est appelé groupe d'Artin à angles droits : il est donné par une présentation dont les seules relations sont des commutations entre des générateurs. En voici quelques cas particuliers.
3. Si  $\Gamma$  est un graphe complet d'ordre  $n$  d'arêtes étiquetées 2, alors  $A(\Gamma) = \mathbb{Z}^n$ .
4. Si  $\Gamma$  est un graphe sans arête, alors  $A(\Gamma)$  est un groupe libre.

Remarquons que, si l'ensemble des sommets  $S$  peut se partitionner en deux sous-ensembles qui commutent, alors le groupe d'Artin est le produit direct des deux groupes d'Artin associés à ces sous-ensembles. Si ce n'est pas le cas, le groupe d'Artin est dit *irréductible*. Pour beaucoup de questions, il suffit de considérer des groupes d'Artin irréductibles.

Si le groupe de Coxeter est fini, le groupe d'Artin associé est appelé *de type sphérique*. La terminologie vient du fait que le groupe de Coxeter peut être réalisé comme groupe de réflexions d'une sphère. Dans ce cas on dispose d'outils très riches, notamment le groupe d'Artin est un groupe de Garside (voir partie 1.4.2).

Bien que certaines classes de groupes d'Artin soient très bien comprises, notamment les groupes de tresses, les groupes de type sphérique et les groupes d'Artin à angles droits, on peut remarquer que les groupes d'Artin généraux restent très mystérieux. Afin d'illustrer ceci, on peut citer deux conjectures (voir [GP12], ainsi que [Cha] et [McC17] pour d'autres questions).

**Conjecture 1.1.** *Tout groupe d'Artin est sans torsion.*

**Conjecture 1.2.** *Tout groupe d'Artin irréductible qui ne soit pas de type sphérique est de centre trivial.*

## 1.2 Actions de groupes d'Artin sur des espaces à courbure négative

L'une des motivations de la théorie géométrique des groupes est d'apporter des informations, notamment algébriques, à travers l'étude d'actions par isométries sur certains espaces métriques. On peut ainsi se demander quels groupes d'Artin peuvent agir sur des espaces à courbure négative ou nulle, en un certain sens. Nous allons broser ici un panorama rapide des résultats que nous avons montrés allant dans ce sens, que nous allons détailler dans les parties suivantes.

Déjà pour les groupes de tresses la situation n'est pas du tout élucidée. La plupart des aspects géométriques à courbure négative ou nulle des groupes de tresses proviennent du point de vue des groupes modulaires de surface, notamment l'action sur le complexe des courbes. Cependant il est naturel de savoir si on peut avoir une géométrie plus fine :

**Question 1.3.** Le groupe de tresses  $B_n$  admet-il une action propre et cocompacte sur un espace  $CAT(0)$  ?

D'après Bridson (voir [Bri10]), le groupe modulaire d'une surface de genre au moins 3 n'est pas  $CAT(0)$ , ainsi cela justifie une réelle différence entre groupes de tresses et groupes modulaires de surface.

Brady et McCammond ont défini un espace classifiant  $X_n$  pour tout groupe de tresses  $B_n$ , qui est un complexe simplicial muni d'une métrique euclidienne par morceaux.

**Conjecture 1.4.** *Le complexe  $X_n$  est un espace classifiant pour  $B_n$ , qui est localement  $CAT(0)$  pour tout  $n$ .*

Dans [BM10], Brady et McCammond démontrent que c'est le cas pour  $n \leq 5$ , et avec Dawid Kielak et Petra Schwer, nous montrons dans [HKS16] que c'est également le cas pour  $n = 6$ .

**Théorème 1.5** ( $n \leq 5$  Brady-McCammond,  $n = 6$  H-Kielak-Schwer). *Pour  $n \leq 6$ , le complexe  $X_n$  est localement  $CAT(0)$ , donc le groupe de tresses  $B_n$  est  $CAT(0)$ .*

Il est à noter que toutes les conséquences d'être  $CAT(0)$  sont déjà connues pour les groupes de tresses.

Pour les autres groupes d'Artin, on peut remarquer que les groupes d'Artin à angles droits agissent proprement et cocompactement sur le revêtement universel de leur complexe de Salvetti, qui est un complexe cubique  $CAT(0)$ .

À part cette famille, il y a très peu d'autres exemples de groupes d'Artin  $CAT(0)$ . Dans [BM00], Brady et McCammond montrent que certains groupes d'Artin sont  $CAT(0)$ . Dans la prépublication [Hae21d], nous montrons le résultat suivant.

**Théorème 1.6.** *Tout groupe d'Artin de type extra extra large (dont toutes les étiquettes sont au moins 5) est  $CAT(0)$ .*

On peut également se demander quels groupes d'Artin admettent une action propre et cocompacte sur un complexe cubique  $CAT(0)$ . Dans la publication [Hae21c], nous obtenons une classification conjecturale des groupes d'Artin admettant une telle action, à indice fini près. En particulier, nous montrons le résultat suivant :

**Théorème 1.7.** *Soit  $A$  un groupe d'Artin irréductible de type sphérique. Alors  $A$  a une action propre et cocompacte (à indice fini près) sur un complexe cubique  $CAT(0)$  si et seulement si  $A$  est de rang au plus 2.*

En particulier, ceci montre que, dès que  $n \geq 4$ , le groupe de tresses à  $n$  brins n'est pas cocompactement cubulé.

Ceci dit, on peut aussi se demander quels groupes d'Artin admettent une action propre sur un complexe cubique  $CAT(0)$ , mais pas nécessairement cocompacte. Cette propriété a plusieurs conséquences intéressantes pour le groupe, notamment la propriété de Haagerup, qui est encore ouverte pour le groupe de tresses à 4 brins. À cette fin, nous décrivons dans [Hae21a] les premiers exemples de tels groupes d'Artin admettant une action propre sur un complexe cubique  $CAT(0)$ , sans admettre d'action cocompacte.

**Théorème 1.8.** *Soit  $A = A(\Gamma)$  un groupe d'Artin vérifiant l'une des trois propriétés suivantes :*

- (A)  $\Gamma$  n'a pas de cycle.
- (B)  $\Gamma$  est bipartite, et toutes ses étiquettes sont au moins égales à 3.
- (C)  $\Gamma$  n'a pas de triangle, et n'a pas d'étiquette égale à 3.

*Alors  $A$  agit proprement sur un complexe cubique  $CAT(0)$  localement fini, de dimension finie, avec un nombre fini d'orbites d'hyperplans.*

## 1.3 Espaces et complexes cubiques $CAT(0)$

Nous allons maintenant brièvement rappeler la notion d'espaces métriques  $CAT(0)$  et complexes cubiques  $CAT(0)$ , ainsi que plusieurs critères locaux pour montrer que la courbure est négative.

### 1.3.1 Espaces $CAT(0)$

Pour les rappels concernant les espaces  $CAT(0)$ , nous renvoyons à [BH99].

Pour tout  $\kappa \in \mathbb{R}$ , notons  $X_\kappa$  la sphère de dimension 2 (si  $\kappa > 0$ ), le plan euclidien (si  $\kappa = 0$ ) ou le plan hyperbolique (si  $\kappa < 0$ ) de courbure constante égale à  $\kappa$ .

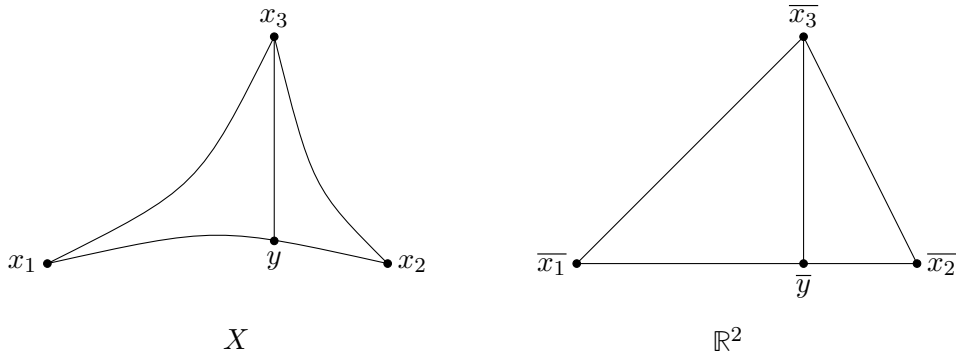


FIGURE 1.1 – L'inégalité CAT(0)

Soit  $(X, d)$  un espace métrique géodésique, et fixons  $\kappa \in \mathbb{R}$ . On dit que  $X$  est CAT( $\kappa$ ) si l'on a la propriété suivante. Considérons  $x_1, x_2, x_3 \in X$ , ainsi qu'un point  $y$  sur une géodésique  $[x_1, x_2]$  de  $x_1$  à  $x_2$ . Si  $\kappa > 0$ , supposons de plus que le périmètre du triangle vérifie  $d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + d(x_3, x_1) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ . Considérons un triangle  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$  de comparaison dans l'espace  $X_\kappa$ , c'est-à-dire tel que  $d(x_i, x_j) = d_{X_\kappa}(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$  pour tous  $i \neq j$ , ainsi que  $\bar{y} \in [\bar{x}_1, \bar{x}_2]$  tel que  $d(x_1, y) = d_{X_\kappa}(\bar{x}_1, \bar{y})$ , voir figure 1.1. Alors on demande l'inégalité

$$d(y, x_3) \leq d_{X_\kappa}(\bar{y}, \bar{x}_3).$$

On dit que  $X$  est localement CAT( $\kappa$ ) si tout point de  $X$  a un voisinage CAT( $\kappa$ ).

Voici quelques exemples classiques d'espaces CAT( $\kappa$ ) :

### Exemples.

1. Toute variété riemannienne à courbure sectionnelle au plus  $\kappa$  est CAT( $\kappa$ ).
2. Tout espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , ou tout espace de Hilbert, est CAT(0).
3. Toute sphère ronde  $\mathbb{S}^n$  est CAT(1).
4. Tout espace hyperbolique réel  $\mathbb{H}^n$  est CAT(-1).
5. Tout arbre métrique est CAT( $\kappa$ ), pour tout  $\kappa \in \mathbb{R}$ .
6. Tout immeuble sphérique peut être muni d'une métrique naturelle CAT(1).
7. Tout immeuble euclidien peut être muni d'une métrique naturelle CAT(0).

L'étude des actions de groupes sur les espaces CAT(0) est très riche. On dit qu'un groupe est CAT(0) s'il a une action proprement discontinue et cocompacte par isométries sur un espace CAT(0). Les nombreuses conséquences métriques, algébriques et combinatoires d'être CAT(0) motivent la recherche d'actions sur des espaces CAT(0).

**Théorème 1.9.** *Soit  $G$  un groupe CAT(0).*

1.  $G$  est de présentation finie.
2.  $G$  a un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes finis.
3. Tout sous-groupe résoluble de  $G$  est virtuellement abélien.
4. Tout sous-groupe abélien de  $G$  est de type fini, et quasi-isométriquement plongé.

5. Si  $G$  est sans torsion, c'est le groupe fondamental d'un complexe simplicial fini asphérique.
6.  $G$  a une fonction de Dehn au plus quadratique.
7. Le centralisateur de tout élément de  $G$  est virtuellement scindé.
8. Les problèmes du mot et de conjugaison sont résolubles pour  $G$ .

### 1.3.2 Critères de courbure

Nous présentons ici les critères les plus utiles permettant de montrer qu'un espace métrique est  $CAT(0)$ . Un résultat fondamental est le suivant.

**Théorème 1.10** (Cartan-Hadamard). *Soit  $\kappa \leq 0$ . Un espace métrique complet  $X$  est  $CAT(\kappa)$  si et seulement s'il est simplement connexe et localement  $CAT(\kappa)$ .*

De nombreux exemples d'espaces  $CAT(\kappa)$  proviennent de recollements cellulaires de polytopes de l'espace modèle de référence  $X_\kappa$ . Nous allons ici rappeler des critères permettant de vérifier qu'un complexe euclidien (resp. sphérique) par morceaux est localement  $CAT(0)$  (resp. localement  $CAT(1)$ ).

Soit  $M$  un complexe euclidien ou sphérique par morceaux. Si  $x$  est un sommet de  $M$ , rappelons que le *link* (géométrique)  $Lk_M(x)$  de  $x$  est le complexe sphérique par morceaux donné par l'espace des directions en  $x$ .

**Théorème 1.11.** *Link condition, voir [BH99, Theorem 5.2] Soit  $M$  un complexe euclidien (resp. sphérique) par morceaux, avec un nombre fini de classes d'isométrie de morceaux. Alors  $M$  est localement  $CAT(0)$  (resp.  $CAT(1)$ ) si et seulement si le link de tout sommet est  $CAT(1)$ .*

Ainsi, afin de montrer qu'un complexe euclidien par morceaux est  $CAT(0)$ , outre la simple connexité, on est ramené à montrer que ses links sont  $CAT(1)$ . On dit qu'un espace localement  $CAT(1)$  est *large* s'il ne contient pas de lacet isométriquement plongé de longueur strictement inférieure à  $2\pi$ . On dispose pour les espaces  $CAT(1)$  d'un analogue du théorème de Cartan-Hadamard.

**Théorème 1.12.** *Voir [BH99, Theorem 5.4] Soit  $M$  un complexe sphérique par morceaux, avec un nombre fini de classes d'isométrie de morceaux. Alors  $M$  est  $CAT(1)$  si et seulement si  $M$  est localement  $CAT(1)$  et large.*

Bowditch a énoncé deux critères utiles pour montrer qu'un espace localement  $CAT(1)$  est large. On dit qu'un lacet dans un espace métrique de longueur strictement inférieure à  $2\pi$  peut être  $2\pi$ -homotopé à zéro s'il peut être homotopé à zéro par des lacets de longueur strictement inférieure à  $2\pi$ .

**Théorème 1.13.** *Voir [Bow95, Proposition 3.1.4] Soit  $M$  un espace complet, localement compact, localement  $CAT(1)$ . Alors  $M$  est large si et seulement si tout lacet de longueur strictement inférieure à  $2\pi$  peut être  $2\pi$ -homotopé à zéro.*

**Théorème 1.14.** *Voir [Bow95, Theorem 3.1.1] Soit  $M$  un espace complet, localement compact, localement  $CAT(1)$ . Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  trois chemins de mêmes extrémités dans  $M$ , tels que chaque lacet  $\alpha_i \cdot \alpha_j^{-1}$ , pour  $i \neq j$ , soit de longueur strictement inférieure à  $2\pi$ . Si  $\alpha_1 \cdot \alpha_2^{-1}$  et  $\alpha_2 \cdot \alpha_3^{-1}$  sont  $2\pi$ -homotopes à zéro, alors  $\alpha_1 \cdot \alpha_3^{-1}$  est  $2\pi$ -homotope à zéro.*

Un autre outil classique de construction d'espace  $CAT(0)$  est le recollement le long de sous-espaces convexes.

**Théorème 1.15.** *Voir [BH99, Theorem 11.1] Soit  $X = X_1 \cup X_2$  un espace métrique réunion de deux sous-espaces  $CAT(0)$ , tels que  $X_1 \cap X_2$  est complet et convexe dans  $X_1$  et dans  $X_2$ . Alors  $X$  est  $CAT(0)$ .*

### 1.3.3 Complexes cubiques $CAT(0)$

Pour montrer qu'un complexe euclidien par morceaux est localement  $CAT(0)$ , par exemple un complexe simplicial, c'est en général particulièrement subtil, voir notamment la partie 1.4. En revanche, pour les complexes cubiques, on dispose d'un critère combinatoire très simple dû à Gromov, comme nous allons le rappeler.

Pour les résultats de base sur les complexes cubiques  $CAT(0)$ , nous renvoyons notamment à [Gro87], [Sag14] et [CS11].

Un complexe cubique est une réunion connexe de cubes euclidiens  $[0, 1]^n$ , recollés par isométries de faces. On le munit de la distance de longueur induite par la distance euclidienne sur chaque cube.

Si  $M$  est un complexe cubique et  $F$  est un cube de  $X$ , rappelons que le *link* (combinatoire)  $lk_M(F)$  de  $F$  est le complexe simplicial dont les sommets sont les cubes dont  $F$  est une face de codimension 1, et dont les simplexes sont formés par les cubes contenant  $F$ .

Rappelons également qu'un complexe simplicial est de *drapeau* si tout sous-graphe complet est le 1-squelette d'un simplexe.

**Théorème 1.16** (Gromov). *Soit  $M$  un complexe cubique de dimension finie. Alors  $M$  est localement  $CAT(0)$  si et seulement si le link de tout cube de  $M$  est de drapeau.*

La simplicité de ce critère est l'une des explications à l'intense étude de ces complexes cubiques  $CAT(0)$ . Du point de vue des actions de groupes, on peut déduire de très nombreuses propriétés d'actions de groupes par isométries, qui viennent s'ajouter aux propriétés d'actions sur des espaces  $CAT(0)$  non cubiques (voir théorème 1.9), notamment :

**Théorème 1.17.** *Soit  $G$  un groupe agissant métriquement proprement sur un complexe cubique  $CAT(0)$   $X$ .*

1.  $G$  a une action propre, par isométries affines, sur un espace de Hilbert.
2.  $G$  a la propriété de Haagerup.
3.  $G$  vérifie la conjecture de Baum-Connes avec coefficients.
4.  $G$  vérifie la propriété de décroissance rapide  $RD$  (si  $X$  est de dimension finie, avec action uniformément propre).
5.  $G$  est de dimension asymptotique finie (si  $X$  est de dimension finie).
6.  $G$  vérifie une alternative de Tits forte (si  $X$  est de dimension finie) : tout sous-groupe de type fini de  $G$  contient un sous-groupe libre non abélien, ou bien est virtuellement abélien.

Si l'action de  $G$  est de plus cocompacte, alors

7. Si  $X$  est essentiel et n'est pas un produit de deux sous-complexes non bornés, alors  $G$  est virtuellement cyclique ou  $G$  est acylindriquement hyperbolique.
8.  $G$  est biautomatique.

Pour les points (1) et (2), voir [CDH10] et [CCJ+01]. Pour le point (3), voir [HK01]. Pour le point (4), voir [CR05]. Pour le point (5), voir [Wri12]. Pour les points (6) et (7), voir [CS11]. Pour le point (8), voir [NR03].



## 1.4 Le complexe dual pour les groupes de tresses

Nous allons présenter ici les résultats de la publication [HKS16], avec Dawid Kielak et Petra Schwer.

Il est naturel de se demander quelles sont les propriétés de courbure négative des groupes de tresses. On peut déjà remarquer que le groupe de tresses à  $n$  brins  $B_n$  est isomorphe, à indice fini près, au groupe modulaire de la sphère privée de  $n + 1$  points, lequel agit sur le graphe des courbes, qui est Gromov-hyperbolique. De plus, Bestvina décrit dans [Bes99] un complexe pour tout groupe d'Artin de type sphérique, qui a de nombreuses propriétés de courbure négative.

Dans [Cha], Charney demande si tous les groupes de tresses sont  $CAT(0)$ . On peut en tout cas remarquer que toutes les conséquences d'être  $CAT(0)$  pour le groupe de tresses sont déjà connues par d'autres méthodes. Néanmoins, trouver un modèle  $CAT(0)$  pour les groupes de tresses permettrait d'unifier ces résultats. De plus, on pourrait espérer généraliser une telle construction à d'autres groupes d'Artin, pour lesquels de nombreuses questions restent ouvertes.

Notons  $B_n$  le groupe de tresses à  $n$  brins. Remarquons que le groupe  $B_2$  est infini cyclique, donc  $CAT(0)$ . Et le groupe  $B_3$  est d'indice fini dans le produit d'un groupe infini cyclique et du quotient central de  $B_3$ , qui est virtuellement libre, donc  $B_3$  est  $CAT(0)$ . La question devient plus subtile à partir de 4 brins.

Brady et McCammond décrivent dans [BM10] un complexe simplicial classifiant  $X_n$  pour  $B_n$ , pour tout  $n \geq 1$ , à l'aide de la structure de Garside duale pour le groupe de tresses. Ils munissent ce complexe simplicial d'une métrique euclidienne par morceaux, appelée métrique de l'orthoschéma, dont ils conjecturent qu'elle est localement  $CAT(0)$  pour tout  $n$ . Dans [BM10], ils montrent que  $X_n$  est localement  $CAT(0)$  pour  $n = 4$  et  $n = 5$ , à l'aide d'une vérification de cas par ordinateur.

Avec Dawid Kielak et Petra Schwer, nous décrivons dans [HKS16] une méthode géométrique simple permettant de montrer que  $X_n$  est localement  $CAT(0)$  pour tout  $n \leq 6$ . En conséquence, nous avons le résultat suivant.

**Théorème 1.18** (Brady-McCammond, Haettel-Kielak-Schwer). *Pour tout  $n \leq 6$ , le groupe de tresses à  $n$  brins est  $CAT(0)$ .*

Les méthodes utilisées dans la preuve nous permettent de montrer également le résultat suivant.

**Théorème 1.19** (Brady-McCammond, Haettel-Kielak-Schwer). *Si  $P$  est un treillis borné gradué modulaire, alors son complexe orthoschématique est  $CAT(0)$ .*

Remarquons que des généralisations de ce résultat ont été étudiées dans [CCHO21].

### 1.4.1 Complexe orthoschématique d'un ensemble partiellement ordonné

Commençons par décrire le complexe orthoschématique associé à un ensemble partiellement ordonné. Cette construction est due à Brady et McCammond, voir [BM10].

Soit  $P$  un ensemble partiellement ordonné. Rappelons que sa réalisation géométrique  $|P|$  est la réalisation géométrique du complexe simplicial dont les simplexes sont les chaînes de  $P$ .

On dit que  $P$  est *borné* s'il possède un unique élément minimal 0, et un unique élément maximal 1. On dit que  $P$  est de rang  $n$  si toute chaîne est contenue dans une chaîne maximale ayant  $n + 1$  éléments. Si  $x \leq y$  sont des éléments de  $P$ , l'*intervalle* entre  $x$  et  $y$

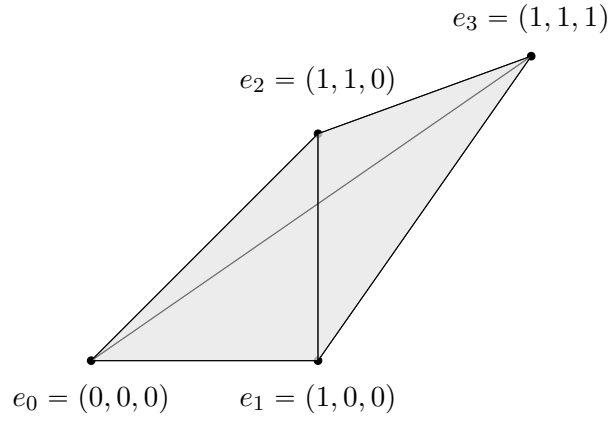


FIGURE 1.2 – Le simplexe orthoschématique de dimension 3.

est  $P_{xy} = \{z \in P \mid x \leq z \leq y\}$ . On dit que  $P$  est *gradué* si tout intervalle de  $P$  a un rang. Si  $P$  est borné et  $x \in P$ , on dit que le rang de  $x$  est le rang de l'intervalle  $P_{0x}$ .

On dit qu'un ensemble partiellement ordonné  $P$  est un *treillis* si, pour tous  $x, y \in P$ , on a les conditions suivantes :

- Il existe un unique élément minimal  $x \vee y$  de l'ensemble  $\{z \in P \mid z \geq x \text{ et } z \geq y\}$ .
- Il existe un unique élément maximal  $x \wedge y$  de l'ensemble  $\{z \in P \mid z \leq x \text{ et } z \leq y\}$ .

Si  $n \geq 1$ , considérons l'enveloppe convexe  $\sigma$  dans  $\mathbb{R}^n$  des  $n + 1$  points suivants :

$$e_0 = (0, 0, \dots, 0), e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (1, 1, \dots, 1).$$

Alors le simplexe  $\sigma$ , muni de la métrique euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ , est appelé *simplexe orthoschématique* de sommets ordonnés  $e_0, e_1, \dots, e_n$ , voir figure 1.2.

Soit  $P$  un ensemble partiellement ordonné borné gradué de rang  $n$ . Remarquons que la réalisation géométrique  $|P|$  est la réunion des simplexes de dimension  $n$  correspondant aux chaînes maximales (de longueur  $n + 1$ ) de  $P$ . Pour chaque chaîne maximale  $v_0 = 0 < v_1 < \dots < v_n = 1$  de  $P$ , munissons le simplexe de sommets ordonnés  $v_0, v_1, \dots, v_n$  de la métrique du simplexe orthoschématique. Ceci définit une métrique euclidienne par morceaux sur  $P$ .

Notons  $[0, 1]$  l'arête de  $|P|$  entre 0 et 1. Alors le *link diagonal* de  $|P|$  est par définition le link  $\text{Lk}([0, 1], |P|)$  de l'arête  $[0, 1]$  dans le complexe simplicial  $|P|$ , c'est un complexe simplicial. Si de plus  $|P|$  est muni d'une métrique euclidienne par morceaux, alors  $\text{Lk}([0, 1], |P|)$  est muni de la métrique sphérique par morceaux induite, voir figure 1.3. Remarquons de plus que si  $P$  est un simplexe orthoschématique de dimension  $n$ , alors son link diagonal est isométrique au simplexe sphérique standard de type  $A_{n-1}$ .

L'un des intérêts de cette métrique orthoschématique est qu'elle se comporte très bien par rapport au passage à un intervalle : si  $P$  est un ensemble partiellement ordonné borné gradué et  $P_{xy} \subset P$  est un intervalle, alors la restriction de la métrique orthoschématique de  $|P|$     $|P_{xy}|$  coïncide avec la métrique orthoschématique de  $|P_{xy}|$ . Ceci permet d'énoncer le critère local suivant.

**Proposition 1.20** (Brady-McCammond). *Soit  $P$  un treillis borné gradué. Alors  $|P|$ , muni de la métrique orthoschématique, est  $CAT(0)$  si et seulement si :*

- Pour tout intervalle propre  $P_{xy} \subsetneq P$ , le complexe  $|P_{xy}|$  est  $CAT(0)$ .

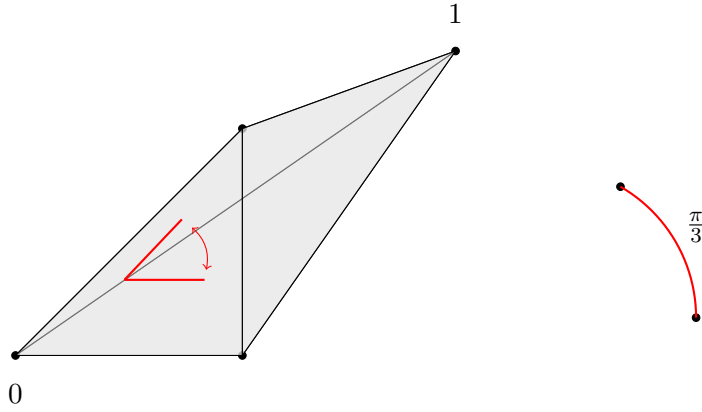


FIGURE 1.3 – Le link diagonal d'un simplexe orthoschématique.

- *Le link diagonal de  $|P|$  est  $CAT(1)$ .*

L'un des arguments est qu'on peut définir une contraction de  $|P|$  vers le sommet 0, ce qui montre que  $|P|$  est toujours contractile.

Rappelons qu'un complexe simplicial muni d'une métrique sphérique par morceaux est *large* si tout lacet de longueur strictement inférieure à  $2\pi$  peut être contracté en un point (i.e. par une homotopie décroissant la longueur des lacets). La proposition 1.20 appliquée par récurrence, à l'aide du théorème 1.12, ceci permet de se ramener au critère plus simple suivant.

**Proposition 1.21** (Brady-McCammond). *Soit  $P$  un treillis borné gradué. Alors  $|P|$ , muni de la métrique orthoschématique, est  $CAT(0)$  si et seulement si le link diagonal de tout intervalle de  $|P|$  est large.*

#### 1.4.2 La structure de Garside duale pour les groupes de tresses

Nous allons maintenant voir comment appliquer cette construction géométrique aux groupes de tresses : cela repose sur une structure de Garside.

On dit qu'un groupe  $G$  est un *groupe de Garside* (voir [Deh15] pour la définition précise) si, pour simplifier, c'est le groupe des fractions d'un monoïde  $G^+ \subset G$  et qu'il existe  $\Delta \in G^+$  tel que l'ensemble des diviseurs à gauche et à droite de  $\Delta$  coïncident, sont finis, engendrent  $G^+$ , et forment un treillis.

L'exemple classique est le groupe de tresses  $B_n$  à  $n$  brins, dont le monoïde positif est donné par la même présentation d'Artin que  $B_n$  :

$$B_n^+ = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \forall 1 \leq i \leq n-2, \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \forall |i-j| \geq 2, \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \rangle.$$

Un élément de Garside pour ce semigroupe est le "demi-tour"

$$\Delta = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}) (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2}) \dots (\sigma_1),$$

c'est l'élément de Garside classique, dont l'image dans le groupe de Coxeter associé (le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ ) est l'élément le plus long.

Un autre élément de Garside pour le groupe de tresses est le " $n$ -cycle"

$$\delta = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1},$$

dont l'image dans le groupe de Coxeter  $\mathfrak{S}_n$  est l'élément de Coxeter. Cette autre structure de Garside, appelée structure duale, a été découverte par Bessis (voir [Bes03]).

À toute structure de Garside sur un groupe  $G$ , on peut naturellement associer un complexe simplicial localement isomorphe à la réalisation géométrique d'un treillis borné. Nous allons détailler cette construction dans le cas de la structure duale du groupe de tresses, où elle est due à Brady (voir [Bra01]).

Considérons l'ensemble  $T_n$  des diviseurs simples à gauche de  $\delta$  : il s'agit des relevés dans le groupe de tresses  $B_n$  des transpositions

$$T_n = \{\sigma_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\},$$

où, pour tout  $1 \leq i < j \leq n$ , on note  $\sigma_{i,j} = \sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_{j-2} \sigma_{j-1} \sigma_{j-2}^{-1} \dots \sigma_i^{-1}$  un relevé de la transposition  $(i, j) \in \mathfrak{S}_n$ . Considérons le graphe de Cayley  $X_n^{(1)}$  de  $B_n$  par rapport à la partie génératrice finie  $T_n$ .

Notons  $[e, \delta]$  l'intervalle entre  $e$  et  $\delta$  pour la divisibilité à gauche : c'est un treillis borné et gradué, de rang  $n$ . Les chaînes maximales dans cet intervalle correspondent aux géodésiques dans  $X_n^{(1)}$  entre  $e$  et  $\delta$ , c'est-à-dire aux factorisations  $\delta = t_1 t_2 \dots t_{n-1}$ , où  $t_i \in T_n$  pour tout  $1 \leq i \leq n-1$ .

Considérons le "remplissage" suivant du graphe de Cayley  $X_n^{(1)}$  : pour chaque chaîne maximale  $g_0 = e, g_1 = t_1, g_2 = t_1 t_2, \dots, g_{n-1} = t_1 t_2 \dots t_{n-1} = \delta$  dans l'intervalle  $[e, \delta]$  et pour tout  $g \in B_n$ , ajoutons le  $(n-1)$ -simplexe à  $X_n^{(1)}$  de sommets  $(gg_0, gg_1, \dots, gg_{n-1})$ . Ceci définit un complexe simplicial  $X_n$  de dimension  $n-1$ , muni d'une action de  $B_n$  par translations à gauche.

**Théorème 1.22** (Brady, voir [Bra01]). *L'action de  $B_n$  sur  $X_n$  est libre, propre et co-compacte, et l'espace  $X_n$  est contractile. En particulier, le quotient  $B_n \backslash X_n$  est un espace classifiant pour  $B_n$ .*

Par ailleurs, chaque simplexe maximal de  $X_n$  étant naturellement ordonné, on peut munir  $X_n$  de la métrique orthoschématique.

**Conjecture 1.23** (Brady-McCammond). *Le complexe  $X_n$ , muni de la métrique orthoschématique, est CAT(0).*

Dans l'article [BM10] où ils définissent cette métrique, Brady et McCammond montrent que  $X_n$  est CAT(0) lorsque  $n \leq 5$ . Nous allons expliquer les idées de preuve développées dans [HKS16] nous ayant permis de montrer cette conjecture pour  $n \leq 6$ .

### 1.4.3 Partitions non croisées

D'après Brady et McCammond (voir Proposition 1.21), afin de montrer que le complexe orthoschématique  $X_n$  est CAT(0), il suffit de montrer que le sous-complexe  $Y_n$  correspondant à l'intervalle  $P_n$  entre 1 et  $\delta$  est CAT(0), et donc que son link diagonal est large. Afin d'étudier cet ensemble partiellement ordonné  $P_n$ , Brady montre qu'il est isomorphe à l'ensemble partiellement ordonné  $NCP_n$  des partitions non croisées de  $n$  points, dont nous rappelons la définition ici.

Considérons l'ensemble  $U_n \subset \mathbb{C}$  des  $n$  racines  $n^{\text{èmes}}$  de l'unité (on identifiera les éléments de  $U_n$  avec les entiers  $1, 2, \dots, n$  via  $i \mapsto e^{\frac{2i\pi}{n}}$ ). Une *partition non croisée* de  $n$  points est une partition de  $U_n$  telle que, si  $A, B \subset U_n$  sont deux éléments distincts de cette partition, leurs enveloppes convexes  $\text{Conv}(A)$  et  $\text{Conv}(B)$  dans  $\mathbb{C}$  ne s'intersectent pas (voir figure 1.4).

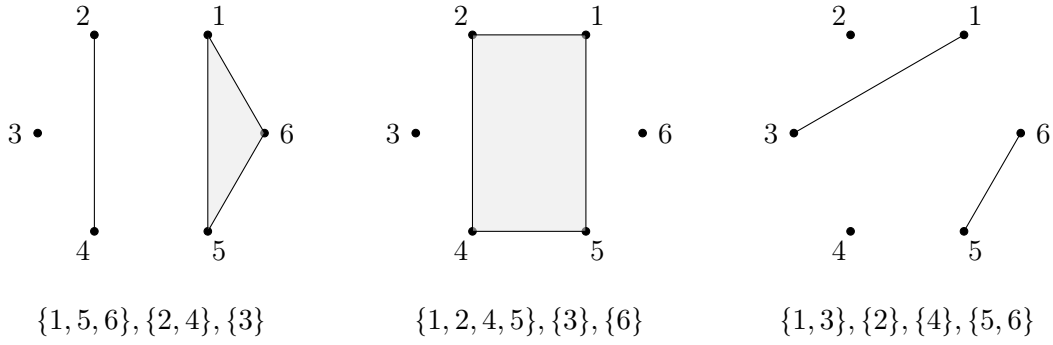


FIGURE 1.4 – Exemples de partitions non croisées de 6 points.

Notons  $NCP_n$  l'ensemble des partitions non croisées de  $n$  points. On dit qu'une partition  $x$  est inférieure à une partition  $y$  si chaque élément de  $y$  est la réunion d'éléments de  $x$ . C'est un ensemble partiellement ordonné, borné, gradué de rang  $n - 1$  : la partition minimale  $0$  est constituée des  $n$  singletons, et la partition maximale est  $\{U_n\}$ , voir figure 1.4.

Décrivons maintenant l'isomorphisme entre l'intervalle  $P_n$  entre  $1$  et  $\delta$ , et l'ensemble  $NCP_n$  des partitions non croisées. Soit  $\gamma \in P_n$ , et considérons son image  $\pi(\gamma) \in \mathfrak{S}_n$  dans le groupe symétrique. Notons  $\Phi(\gamma)$  la décomposition en cycles de  $\pi(\gamma)$ , il s'avère que c'est une partition non croisée de  $n$  points.

**Théorème 1.24.** *L'application*

$$\begin{aligned} \Phi : P_n &\rightarrow NCP_n \\ \gamma &\mapsto \Phi(\gamma) \end{aligned}$$

*est bien définie, et c'est un isomorphisme d'ensembles partiellement ordonnés.*

D'après la Proposition 1.21, afin de montrer que le complexe orthoschématique  $Y_n$  de  $P_n$  (ou de  $NCP_n$ ) est  $CAT(0)$ , il suffit de montrer que le link diagonal de tout intervalle de  $NCP_n$  est large.

Brady et McCammond montrent que si  $P$  est un intervalle propre de  $NCP_n$ , alors  $P$  est isomorphe à un produit de  $NCP_{n_1} \times \dots \times NCP_{n_k}$  avec chaque  $n_i < n$ . Ainsi nous sommes ramenés au critère suivant.

**Proposition 1.25.** *Fixons  $n \geq 3$ , et supposons que, pour tout  $3 \leq k \leq n$ , le link diagonal de  $NCP_k$  est large. Alors, pour tout  $k \leq n$ , le complexe  $X_n$  est  $CAT(0)$ .*

Remarquons que, pour  $n = 2$ , le complexe  $X_n$  est isométrique à  $\mathbb{R}$ . Pour  $n = 3$ , le link diagonal de  $NCP_3$  est un ensemble de trois points à distances infinies, il est donc large. Par ailleurs, pour  $n = 3$ , le complexe  $X_3$  est isométrique au produit cartésien de  $\mathbb{R}$  et d'un arbre 3-régulier : il est clair que cet espace est  $CAT(0)$ .

Pour  $n = 4$ , voici dans la figure 1.5 un dessin du link diagonal de  $NCP_4$ . La métrique sphérique par morceaux provenant de la métrique de l'orthoschéma fait que chaque arête est de longueur  $\frac{\pi}{3}$  (voir figure 1.3). On constate que chaque lacet non trivial est de longueur combinatoire au moins 6, donc de longueur métrique au moins  $6 \times \frac{2\pi}{3} = 2\pi$ . Ce link diagonal est donc large.

Pour  $n = 5$  et  $n = 6$ , la situation est plus délicate, nous allons expliquer les arguments supplémentaires dans la suite.

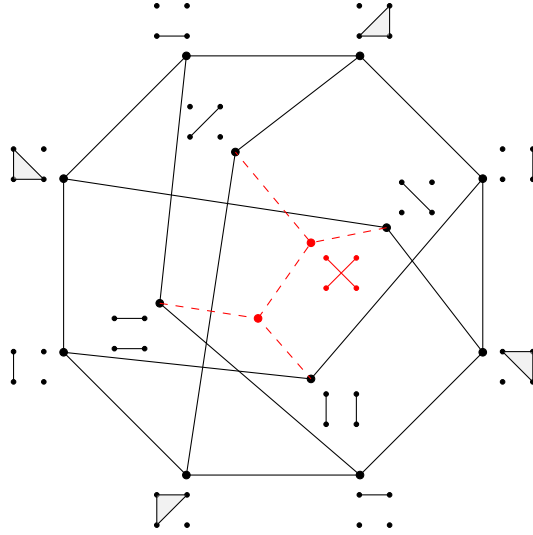


FIGURE 1.5 – Le link diagonal de  $NCP_4$  plongé dans l'immeuble sphérique de  $PGL(\mathbb{F}_2)$

#### 1.4.4 Plongement dans un immeuble sphérique

Comme remarqué par Brady et McCammond, nous allons utiliser le fait que le link diagonal de  $NCP_n$  se plonge naturellement dans un immeuble sphérique, qui est  $CAT(1)$ .

Considérons un corps  $\mathbb{F}$  (par exemple  $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ), et  $V$  l'espace vectoriel  $V = \{y \in \mathbb{F}^n \mid \sum_{i=1}^n y_i = 0\}$ . Pour toute partition  $x$  de  $U_n$  (pas nécessairement non croisée), considérons le sous-espace vectoriel  $\Psi(x)$  de  $V$  suivant :

$$\Psi(x) = \{y \in V \mid \forall I \in x, \sum_{i \in I} y_i = 0\}.$$

Notons  $S(V)$  l'ensemble des sous-espace vectoriels de  $V$ , muni de l'inclusion comme relation d'ordre partiel. L'application  $\Psi : NCP_n \rightarrow S(V)$  est un plongement qui préserve l'ordre. Ceci permet de réaliser le complexe  $|NCP_n|$  comme un sous-complexe de  $|S(V)|$ . Notons  $L_n$  le link diagonal de  $NCP_n$ , et  $I_n$  le link diagonal de  $S(V)$ . L'application  $\Psi$  permet de réaliser  $L_n$  comme un sous-complexe de  $I_n$ . Remarquons que le complexe simplicial  $L_n$  est la réalisation géométrique de l'ensemble  $NCP_n^* = NCP_n \setminus \{0, 1\}$ , et que  $I_n$  est la réalisation géométrique de l'ensemble  $S(V)^* = S(V) \setminus \{\{0\}, V\}$ .

On voit dans la figure 1.5 le plongement de  $L_4$  dans l'immeuble sphérique de  $PGL(3, \mathbb{F}_2)$ , i.e. le graphe d'incidence du plan projectif sur  $\mathbb{F}_2$ . Les sommets et arêtes n'appartenant pas à  $L_4$  sont notés en rouge. On peut remarquer que l'un de deux sommets rouges a une interprétation comme partition croisée de 4 points, mais l'autre non.

L'intérêt de cette construction est que, si  $I_n$  est muni de la métrique sphérique par morceaux provenant de la métrique de l'orthoschéma sur  $|S(V)|$ , alors  $I_n$  est isométrique à l'immeuble sphérique de  $GL(V)$ . En particulier,  $I_n$  est un espace métrique  $CAT(1)$ . Ceci permet de conclure que toute lacet de longueur strictement inférieure à  $2\pi$  dans  $L_n$  peut être contracté dans  $I_n$ .

Si  $L_n$  était convexe dans  $I_n$ , ceci permettrait de conclure, mais ce n'est pas le cas à partir de  $n = 4$ . Par exemple, avec  $n = 4$ , si  $x = \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}\} \in NCP_4$  et  $y = \{\{2, 4\}, \{1\}, \{3\}\} \in NCP_4$ , alors la géodésique entre  $x$  et  $y$  dans  $I_n$  passe par le sommet  $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$  (en rouge sur la figure 1.5), qui est une partition croisée de 4 points.

Avec Dawid Kielak et Petra Schwer, notre stratégie pour l'étude des lacets dans  $L_n$  consiste à identifier certains sommets de  $L_n$  en lesquels  $L_n$  sera étoilé dans  $I_n$ .

Une partition  $x$  de  $NCP_n^*$  est appelée *universelle* si  $x$  contient une unique partie  $A \in x$  non réduite à un singleton, et de plus tel que les éléments de  $A$  soient consécutifs dans  $U_n$ . Un point  $x$  de  $L_n$  est appelé *universel* s'il appartient à un simplexe dont tous les sommets sont universels.

**Proposition 1.26.** *Soit  $x \in L_n$  un point universel, et soit  $y \in L_n$  un point tel que  $x$  et  $y$  ne soient pas opposés dans l'immeuble  $I_n$ . Alors l'unique géodésique dans  $I_n$  reliant  $x$  et  $y$  est incluse dans  $L_n$ . Autrement dit,  $L_n$  est  $\pi$ -étoilé en  $x$  dans  $I_n$ .*

Cette proposition est basée sur une description simple des appartements de  $I_n$  qui sont inclus dans  $L_n$ . Rappelons que les sommets de rang 1 de  $L_n$  correspondent aux arêtes reliant deux points de  $U_n$ . Appelons *arbre non croisé* de  $n$  sommets un arbre de sommets  $U_n$ , dont les arêtes (représentées par des segments euclidiens) ne se croisent pas.

**Proposition 1.27.** *Soit  $A$  un appartement de  $I_n$ . Alors  $A$  est inclus dans  $L_n$  si et seulement si ses  $n - 1$  sommets de rang 1 sont dans  $L_n$ , et leurs arêtes forment un arbre non croisé de  $n$  sommets.*

Cette simple proposition permet déjà de conclure que pour  $n = 5$ , le link diagonal  $L_5$  est large. En effet, on peut montrer que tout lacet localement géodésique dans  $L_5$  qui ne soit pas localement géodésique dans  $I_5$  passe par un point universel. On peut ainsi contracter ce lacet dans  $I_5$ , tout en restant dans  $L_5$ .

Dans le cas  $n = 6$ , on a une propriété un peu plus faible que pour  $n = 5$ .

**Proposition 1.28.** *Soit  $F$  une face de  $L_6$  telle que  $L_6$  ne soit pas localement convexe dans  $I_6$  en  $F$ , et soit  $C$  une chambre de  $L_6$ . Alors il existe une paire de sommets universels  $u, v \in L_6$  opposés dans  $I_6$  tels que d'une part  $u, v$  et  $F$  soient contenus dans un appartement de  $I_6$  inclus dans  $L_6$ , et d'autre part  $u, v$  et  $C$  soient contenus dans un appartement de  $I_6$  inclus dans  $L_6$ .*

Ceci permet de montrer que  $L_6$  est large, grâce au théorème 1.14 dû à Bowditch.

Supposons par l'absurde qu'il existe un lacet  $\ell$  localement géodésique dans  $L_6$ , de longueur  $R < 2\pi$ . Comme  $\ell$  n'est pas localement géodésique dans  $I_6$ , il existe  $x \in \ell$  appartenant à une face  $F$  de  $L_6$  tel que  $L_6$  ne soit pas localement convexe dans  $I_6$  en  $F$ . Notons  $y \in \ell$  tel que  $x$  et  $y$  soient à distance  $\frac{R}{2}$  le long de  $\ell$ . D'après la Proposition 1.28, on peut considérer deux sommets universels  $u, v \in L_6$  opposés dans  $I_6$  tels que  $u, v, x$  et  $u, v, y$  soient inclus dans des appartements inclus dans  $L_6$ . Quitte à échanger  $u$  et  $v$ , on peut supposer que  $d(x, u) + d(u, y) \leq \pi$ . Ainsi on peut considérer trois chemins de  $x$  à  $y$ , deux le long de  $\ell$ , et le troisième via  $u$ , pour conclure que le lacet  $\ell$  est  $2\pi$ -homotope à zéro, voir figure 1.6.

L'une des difficultés principales à généraliser cette approche au-delà de  $n = 6$  est que la proportion de sommets universels dans le complexe est de plus en plus faible lorsque  $n$  grandit. Remarquons que cette stratégie a très récemment été poussée jusqu'à  $n = 7$ , voir [Jeo20].

## 1.5 Actions propres et cocompactes de groupes d'Artin sur des complexes cubiques CAT(0)

### 1.5.1 Classification conjecturale

Nous allons présenter ici les résultats de la publication [Hae21c]. Nous donnons une classification conjecturale des groupes d'Artin ayant une action propre et cocompacte sur un complexe cubique CAT(0), à indice fini près.

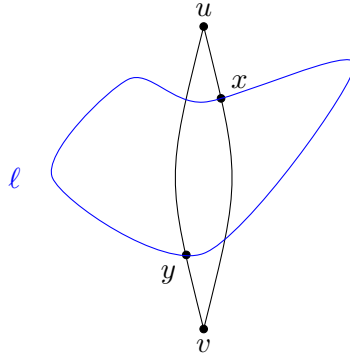


FIGURE 1.6 – Homotoper le lacet  $\ell$  à zéro

**Conjecture 1.29** (Classification des groupes d'Artin virtuellement cocompactement cubulés).

Le groupe d'Artin  $A = A(\Gamma)$  est virtuellement cocompactement cubulé si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. pour tous  $a, b, c \in S$  deux à deux disjoints tels que  $m_{ab}$  est impair, alors  $m_{ac} = m_{bc} = \infty$  ou  $m_{ac} = m_{bc} = 2$ , et
2. pour tous  $a, b \in S$  distincts tels que  $m_{ab}$  est pair et différent de 2, il existe un ordre sur  $\{a, b\}$  (disons  $a < b$ ) tel que, pour tout  $c \in S \setminus \{a, b\}$ , on est dans l'un des cas suivants :
  - $m_{ac} = m_{bc} = 2$ ,
  - $m_{ac} = 2$  et  $m_{bc} = \infty$ ,
  - $m_{ac} = m_{bc} = \infty$ , ou
  - $m_{ac}$  est pair et différent de 2,  $a < c$  pour l'ordre de  $\{a, c\}$ , et  $m_{bc} = \infty$ .

En particulier, des exemples typiques de groupes d'Artin cocompactement cubulés sont :

- les groupes d'Artin à angles droits, i.e. tels que  $\forall a, b \in S, m_{ab} \in \{2, \infty\}$ ,
- les groupes d'Artin diédraux, i.e. tels que  $|S| = 2$ ,
- les groupes d'Artin "d'étoiles paires", i.e. tels qu'il existe un sommet central  $a_0 \in S$  pour lequel  $\forall a, b \in S \setminus \{a_0\}, m_{ab} = \infty$  et  $\forall a \in S \setminus \{a_0\}, m_{aa_0}$  est pair.

On peut voir dans la figure 1.7 un exemple de graphe de Coxeter d'un groupe d'Artin d'étoile paire cocompactement cubulé.

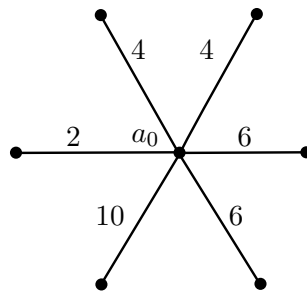


FIGURE 1.7 – Un exemple de graphe de Coxeter d'un groupe d'Artin d'étoile paire cocompactement cubulé



L'idée générale qu'il faut avoir d'un groupe d'Artin cocompactement cubulé est de partir de groupes d'Artin diédraux et de groupes d'Artin d'étoiles paires, et de les assembler comme un groupe d'Artin à angles droits.

Une autre manière de formuler la conjecture 1.29 est de décrire certaines obstructions locales, voir figure 1.8. Notamment, il devrait suffire de considérer les sous-groupes paraboliques standards de rang 3 ou 4 pour déterminer si un groupe d'Artin est virtuellement cocompactement cubulé.

**Conjecture 1.30** (Reformulation de la conjecture 1.29). *Le groupe d'Artin  $A = A(\Gamma)$  n'est pas virtuellement cocompactement cubulé si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

- *il existe  $a, b, c \in S$  deux à deux distincts tels que  $m_{ab}$  est impair,  $m_{ac} \neq \infty$  et  $m_{bc} \neq 2$ ,*
- *il existe  $a, b, c \in S$  deux à deux distincts tels que  $m_{ab}$  et  $m_{ac}$  sont pairs et différents de 2, et  $m_{bc} \neq \infty$ , ou*
- *il existe  $a, b, c, d \in S$  deux à deux distincts tels que  $m_{ab} \notin \{2, \infty\}$ ,  $m_{ac}, m_{bd} \neq \infty$  et  $m_{ad}, m_{bc} \neq 2$ .*

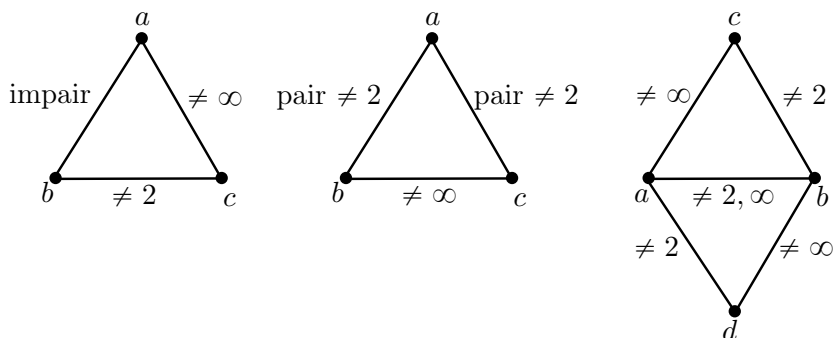


FIGURE 1.8 – Les obstructions locales de la conjecture 1.30

Nous démontrons l'une des implications de la conjecture 1.29, plus précisément la cubulation des groupes d'Artin satisfaisant les deux conditions (sans nécessité de passer à un sous-groupe d'indice fini).

**Théorème 1.31.** *Soit  $A$  un groupe d'Artin satisfaisant les deux conditions de la conjecture 1.29. Alors  $A$  est cocompactement cubulé.*

Nous démontrons ensuite la réciproque de la conjecture 1.29, c'est-à-dire de montrer que ces deux conditions sont nécessaires pour être virtuellement cocompactement cubulé, avec l'hypothèse supplémentaire suivante. Rappelons que le centralisateur d'un élément  $g$  dans un groupe  $G$  est noté  $Z_G(g) = \{h \in G \mid gh = hg\}$ . On dit que le groupe d'Artin  $A = A(\Gamma)$  satisfait la propriété  $(\dagger)$  si

$$\forall s \in S, \forall n \geq 1, Z_A(s^n) = Z_A(s).$$

**Théorème 1.32.** *Soit  $A$  un groupe d'Artin vérifiant la propriété  $(\dagger)$ . Si  $A$  est virtuellement cocompactement cubulé, alors  $A$  vérifie les deux conditions de la conjecture 1.29.*

Il est conjecturé que tous les groupes d'Artin vérifient cette propriété  $(\dagger)$ . Notamment, c'est une conséquence très restreinte de la propriété  $(\star)$  de [God07]. Elle est vérifiée dès que le complexe de Deligne peut être muni d'une métrique CAT(0) euclidienne par morceaux. Elle est donc vérifiée pour les groupes d'Artin de type FC, avec la métrique cubique sur le complexe de Deligne, ainsi que si tout sous-groupe parabolique sphérique irréductible est

de rang au plus 2, avec la métrique de Moussong sur le complexe de Deligne (voir [CD95, Theorem A]). Par ailleurs, il est conjecturé que la métrique de Moussong sur le complexe de Deligne est  $\text{CAT}(0)$  pour tout groupe d'Artin (voir [CD95, Conjecture 3]).

**Théorème 1.33.** *La conjecture 1.29 est vraie pour tout groupe d'Artin vérifiant la propriété  $(\dagger)$ . En particulier, elle est vraie pour tous les groupes d'Artin de type FC, ainsi que les groupes d'Artin dont tout sous-groupe parabolique sphérique irréductible est de rang au plus 2.*

On peut également remarquer que les deux conditions de la conjecture 1.29 impliquent que le groupe d'Artin est de type FC. En particulier, ceci est une conséquence de la conjecture 1.29.

**Conjecture 1.34** (Conséquence de la conjecture 1.29). *Si un groupe d'Artin est virtuellement cocompactement cubulé, alors il est de type FC.*

Et, dans le cas des groupes d'Artin irréductibles de type sphérique, la condition est bien plus simple.

**Corollaire 1.35** (Classification des groupes d'Artin irréductibles de type sphérique virtuellement cocompactement cubulés). *Soit  $A$  un groupe d'Artin irréductible de type sphérique. Alors  $A$  est virtuellement cocompactement cubulé si et seulement si  $A$  est de rang au plus 2.*

En particulier, cela donne une réponse simple pour les groupes de tresses.

**Corollaire 1.36** (Cubulation des groupes de tresses). *Le groupe de tresses à  $n$  brins  $B_n$ , ou son quotient central  $B_n/Z(B_n)$ , est virtuellement cocompactement cubulé si et seulement si  $n \leq 3$ .*

Cependant, d'après Bowditch (voir [Bow13a]), tous les groupes modulaires de surface, et en particulier les groupes de tresses, sont grossièrement médians (voir partie 2.1.2 pour une définition de médiane grossière). Ainsi leurs cônes asymptotiques ressemblent aux cônes asymptotiques de complexes cubiques  $\text{CAT}(0)$ .

Concernant les actions propres de groupes d'Artin sur des complexes cubiques  $\text{CAT}(0)$ , même la question suivante est toujours ouverte :

**Question 1.37** (Charney [Cha], Wise [Wis]). *Est-ce que le groupe de tresses à 4 brins a une action métriquement propre sur un complexe cubique  $\text{CAT}(0)$  ?*

Nous donnons dans la partie 1.7 un résultat partiel, en montrant que certains groupes d'Artin admettent une action métriquement propre sur un complexe cubique  $\text{CAT}(0)$ .

Parmi les outils utilisés pour démontrer ces résultats, nous avons également démontré certains résultats de stabilité pour des groupes cubulables, l'un pour la cubulation des centralisateurs et des normalisateurs, et l'autre pour la cubulation des quotients centraux, qui ont depuis été améliorés par Genevois, voir [Gen21]).

**Théorème 1.38** (Cubulation de normalisateurs et centralisateurs). *Soit  $G$  un groupe cocompactement cubulé, et soit  $A$  un sous-groupe abélien de  $G$ . Alors  $A$  a un sous-groupe d'indice fini  $A_0$  tel que  $N_G(A_0)$  est cocompactement cubulé, et  $Z_G(A_0)$  est d'indice fini dans  $N_G(A_0)$ .*

Rappelons que si un groupe  $G$  agit proprement et cocompactement sur un complexe cubique  $\text{CAT}(0)$   $X$ , alors un sous-groupe  $A$  de  $G$  est dit *convexe-cocompact* s'il stabilise et agit cocompactement sur un sous-complexe convexe de  $X$ .

**Théorème 1.39** (Cubulation de quotients centraux). *Soit  $G$  un groupe cocompactement cubulé, et soit  $A$  un sous-groupe central, convexe-cocompact de  $G$ . Alors  $G/A$  est cocompactement cubulé.*

Remarquons également que Huang, Jankiewicz et Przytycki ont obtenu, simultanément et indépendamment, le théorème 1.33 pour les groupes d'Artin de dimension 2, voir [HJP16].

Concernant les groupes de Coxeter, Niblo et Reeves ont montré que tout groupe de Coxeter agit proprement sur un complexe cubique CAT(0) localement fini (voir [NR03]). De plus, Caprace et Mühlherr ont montré que cette action est cocompacte si et seulement si le diagramme de Coxeter ne contient pas de sous-diagramme affine de rang au moins 3 (voir [CM05]).

Nous allons tout d'abord donner les idées de la preuve du théorème 1.32, c'est-à-dire présenter un critère de non cubulation. Nous allons ensuite donner les idées de la preuve du théorème 1.31, notamment la cubulation des groupes d'Artin d'étoiles paires.

## 1.5.2 Critère de non cubulation

Voici le critère de non cubulation le plus général à énoncer que nous obtenons.

**Proposition 1.40.** *Soit  $G$  un groupe vérifiant les propriétés suivantes.*

- *Il existe deux éléments  $a, b \in G$  tels que  $\langle a, b \rangle \simeq I_2(p)$  (le groupe d'Artin diédral d'indice  $p$ ), pour un  $p \geq 3$ .*
- *Pour tout  $n \geq 1$ , on a  $Z_G(a^n) = Z_G(a)$  et  $Z_G(b^n) = Z_G(b)$ ,*
- *Il existe  $\alpha \in G$  commutant avec  $a$ , tel qu'aucune puissance de  $\alpha$  ou de  $z_{ab}$  ne commute.*
- *Si  $p$  est pair, il existe  $\beta \in G$  commutant avec  $b$ , tel que pour tout  $q \geq 1$  on a  $Z_G(a, z_{ab}^q, \alpha^q)Z_G(b, \beta^q) \cap \langle z_{ab} \rangle = \{1\}$ .*

*Alors  $G$  n'est pas virtuellement cocompactement cubulé.*

Expliquons tout d'abord comment l'appliquer, par exemple dans le cas où  $A$  est le groupe de tresses  $B_4$  à 4 brins, de générateurs standards  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  :

- Posons  $a = \sigma_2$  et  $b = \sigma_1$ , on a bien  $\langle a, b \rangle = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \simeq B_3 = I_2(3)$ .
- De plus, on a  $Z(\sigma_1) = \langle \sigma_1, \sigma_3, (\sigma_1\sigma_2)^3, (\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^4 \rangle = Z(\sigma_1^n)$ , pour tout  $n \geq 1$ . Ainsi on a bien  $Z(b^n) = Z(b)$ , et de même  $Z(a^n) = Z(a)$ .
- Posons  $\alpha = (\sigma_2\sigma_3)^3$ , il commute avec  $a = \sigma_2$ . De plus, aucune puissance de  $\alpha$  ou de  $z_{ab} = (\sigma_1\sigma_2)^3$  ne commute.

La preuve de la proposition 1.40 repose sur deux ingrédients principaux, dont nous allons donner les idées dans le cas plus simple où  $p$  est impair.

Supposons par l'absurde qu'un groupe  $G$  comme dans la proposition 1.40 agisse proprement et cocompactement sur un complexe cubique CAT(0)  $X$ . D'une part, en adaptant un critère de Crisp et Paoluzzi, nous montrons que l'angle visuel formé par les axes géodésiques des éléments  $a$  et  $z_{ab}$  est strictement inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ . D'autre part, on remarque que  $a$  et  $z_{ab}$  appartiennent à des sous-groupes convexes cocompacts disjoints, ce qui implique que l'angle visuel formé par les axes géodésiques des éléments  $a$  et  $z_{ab}$  est au moins égal à  $\frac{\pi}{2}$ . Détaillons ces arguments.

Premièrement, nous donnons une version légèrement plus générale d'un résultat dû à Crisp et Paoluzzi (voir [CP05]), qui étudie les actions propres et semisimples des groupes de tresses  $B_3$  et  $B_4$  sur des espaces  $\text{CAT}(0)$ . Remarquons que ce résultat ne requiert ni cocompacité, ni que l'espace soit un complexe cubique.

**Proposition 1.41** (Crisp-Paoluzzi). *Soit  $p \geq 3$ , et considérons le groupe d'Artin diédral  $I_2(p) = \langle a, b \mid [aba\dots]_p = [bab\dots]_p \rangle$ . Supposons que  $I_2(p)$  agisse proprement, par isométries semisimples, sur un espace  $\text{CAT}(0)$   $X$ . Alors  $a$ ,  $z_{ab}$  et  $b$  agissent par isométries hyperboliques, dont les points fixes attracteurs dans le bord visuel  $\partial_\infty X$  sont notés  $a(+\infty)$ ,  $z_{ab}(+\infty)$  and  $b(+\infty)$ . De plus, si l'on note  $\varkappa$  la distance visuelle sur  $\partial X$ , on a :*

- Si  $p$  est impair, alors  $\varkappa(a(+\infty), z_{ab}(+\infty)) < \frac{\pi}{2}$  et  $\varkappa(b(+\infty), z_{ab}(+\infty)) < \frac{\pi}{2}$ .
- Si  $p$  est pair, alors  $\varkappa(a(+\infty), z_{ab}(+\infty)) < \frac{\pi}{2}$  ou  $\varkappa(b(+\infty), z_{ab}(+\infty)) < \frac{\pi}{2}$ .

La différence principale entre les cas pair et impair est que  $a$  et  $b$  sont conjugués si et seulement si  $p$  est pair.

On dit qu'un sous-groupe virtuellement abélien  $A$  d'un groupe  $G$  est *le plus haut* si, pour tout sous-groupe virtuellement abélien  $B$  de  $G$  tel que  $A \cap B$  a un indice fini dans  $A$ , alors  $A \cap B$  a un indice fini dans  $B$ .

Rappelons que si un groupe  $G$  agit proprement et cocompactement sur un complexe cubique  $\text{CAT}(0)$   $X$ , alors un sous-groupe  $A$  de  $G$  est dit *convexe-cocompact* s'il stabilise et agit cocompactement sur un sous-complexe convexe de  $X$ .

Wise et Woodhouse ont montré un théorème du tore plat cubique, dont voici l'énoncé :

**Théorème 1.42** (Théorème du tore plat cubique [WW17]). *Soit  $G$  un groupe agissant proprement et cocompactement sur un complexe cubique  $\text{CAT}(0)$   $X$ . Soit  $A$  un sous-groupe virtuellement abélien le plus haut de  $X$ . Alors  $A$  est convexe-cocompact dans  $X$ .*

Pour des sous-groupes abéliens convexes-cocompacts disjoints, on peut alors montrer le résultat suivant sur la distance angulaire entre leurs bords à l'infini.

**Proposition 1.43.** *Soit  $G$  un groupe agissant proprement et cocompactement sur un complexe cubique  $\text{CAT}(0)$   $X$ . Soient  $A$  et  $B$  deux sous-groupes convexe-cocompacts de  $X$  tels que  $A \cap B$  est fini. Alors, pour tous  $a \in A$  et  $b \in B$  d'ordres infinis, leurs points fixes attractifs dans  $\partial_\infty X$  vérifient  $\varkappa(a(+\infty), b(+\infty)) \geq \frac{\pi}{2}$ .*

On peut maintenant donner une idée de la preuve de la proposition 1.40. Considérons un groupe  $G$  comme dans l'énoncé de la proposition 1.40. Notons  $A$  l'intersection des sous-groupes abéliens les plus hauts maximaux de  $G$  contenant virtuellement  $a$ , et  $B$  l'intersection des sous-groupes abéliens les plus hauts maximaux contenant virtuellement  $z_{ab}$ . Alors les hypothèses garantissent que  $a \in A$  et  $z_{ab} \in B$ . Quitte à considérer des centralisateurs et à passer à des quotients centraux en utilisant les théorèmes 1.38 et 1.39, on peut supposer que  $A \cap B$  est fini.

Supposons par l'absurde que  $G$  agit proprement et cocompactement sur un complexe cubique  $\text{CAT}(0)$ . D'après la proposition 1.43, on peut donc en déduire que  $\varkappa(a(+\infty), z_{ab}(+\infty)) \geq \frac{\pi}{2}$ . Ceci contredit directement la proposition 1.41.

### 1.5.3 Cubulation des groupes d'Artin

Nous allons ici décrire brièvement comment construire un complexe cubique  $\text{CAT}(0)$  pour les groupes d'Artin vérifiant les deux hypothèses de la conjecture 1.29. Nous allons nous concentrer sur les groupes d'Artin diédraux et les groupes d'Artin d'étoiles paires, le cas général s'obtenant en recollant de manière adaptée ces cas particuliers.

Brady et McCammond ont montré que, pour tout  $p \geq 2$ , le groupe d'Artin diédral  $I_2(p)$  est cocompactement cubulé (voir [BM00]). Rappelons leur construction, qui sera utile. Fixons  $p \geq 2$ . Le groupe d'Artin  $I_2(p)$  admet la présentation suivante, due à Brady et McCammond :

$$I_2(p) = \langle x, a_1, \dots, a_p \mid \forall 1 \leq i \leq p, a_i a_{i+1} = x \rangle,$$

où  $a_{p+1} = a_1$ . On peut le voir aisément, car  $a_1$  et  $a_2$  correspondent aux générateurs standards de  $I_2(p)$ . Le 2-complexe de présentation  $K$  est un espace classifiant pour  $I_2(p)$  constitué de 1 sommet  $v$ ,  $p+1$  lacets  $a_1, \dots, a_p, x$  et  $p$  triangles  $a_1 a_2 x^{-1}, \dots, a_p a_1 x^{-1}$  (voir figure 1.9).

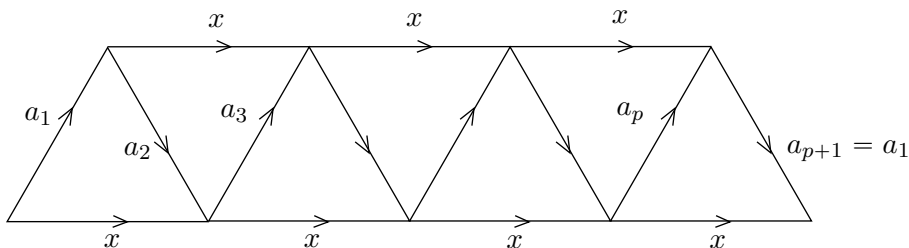


FIGURE 1.9 – Le 2-complexe de présentation de Brady et McCammond

Nous allons définir un autre espace classifiant pour  $I_2(p)$ , qui aura le même espace topologique sous-jacent, mais aura une structure cubique. Considérons deux sommets  $v$  et  $w$ , et  $p+2$  arêtes orientées entre  $v$  et  $w$  notées  $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta^{-1}, \gamma$ . Ajoutons enfin les  $p$  carrés de bords  $\alpha_1 \beta^{-1} \alpha_2 \gamma^{-1}, \dots, \alpha_p \beta^{-1} \alpha_1 \gamma^{-1}$ . Notons  $X(I_2(p))$  le complexe carré résultant. On peut facilement voir que l'espace topologique sous-jacent à  $X(I_2(p))$  est homéomorphe à  $K$  :  $w$  correspond au milieu de l'arête  $x$ , l'arête  $x$  correspond au chemin  $\gamma \beta^{-1}$ , et chaque carré correspond à la réunion de deux moitiés de triangles de  $K$  (voir figure 1.10).

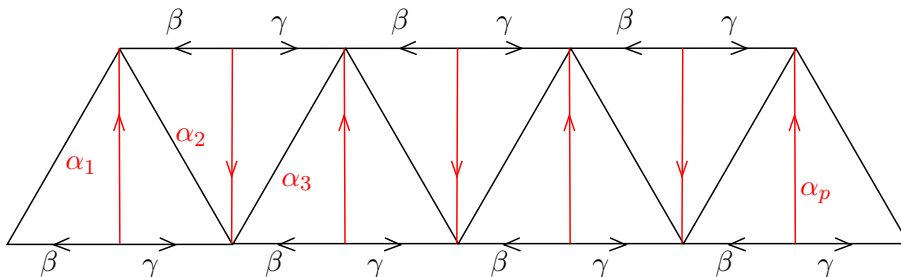


FIGURE 1.10 – Le complexe carré  $X(I_2(p))$

Ainsi  $X(I_2(p))$  est également un espace classifiant pour  $I_2(p)$ . De plus, il est facile de voir que  $X(I_2(p))$  est localement CAT(0).

**Remarque.** On peut également remarquer que  $X(A(p))$  est naturellement isométrique au produit de  $\mathbb{R}$  et de l'arbre infini  $p$ -régulier. Dans le cas du groupe de tresses à 3 brins  $B_3 = I_2(3)$ , on retrouve le complexe CAT(0) de Brady-McCammond étudié dans la partie 1.4, qui est isométrique au produit de  $\mathbb{R}$  et d'un arbre infini 3-régulier. On peut également le voir en passant au quotient central  $B_3/Z(B_3) \simeq \text{PSL}(2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ , on retrouve l'action sur l'arbre de Bass-Serre 3-régulier.

Dans le cas où  $p$  est pair, il y a deux autres espaces classifiants cubiques CAT(0) naturels pour le groupe d'Artin diédral  $I_2(p)$ . Chacun va être associé à l'un des générateurs  $a$  ou  $b$  de  $I_2(p)$ . Nous allons décrire le premier, qui est associé à  $a = a_1$ .

Partons du 2-complexe de présentation  $K$  comme précédemment, et supprimons les arêtes  $a_2, a_4, \dots, a_p$  d'indices pairs, et remplaçons chaque paire de triangles adjacents

$(a_{2i+1}a_{2i+2}x^{-1}, a_{2i+2}a_{2i+3}x^{-1})$ , pour  $0 \leq i \leq \frac{p}{2} - 1$ , par un carré de côtés  $a_{2i+1}xa_{2i+3}^{-1}x^{-1}$ . Nous obtenons un complexe carré  $X_a(I_2(p))$  avec un sommet  $v$ ,  $\frac{p}{2}+1$  arêtes  $x, a_1, a_3, \dots, a_{p-1}$  et  $\frac{p}{2}$  carrés  $a_1xa_3^{-1}x^{-1}, \dots, a_{p-1}xa_1^{-1}x^{-1}$  (voir figure 1.11).

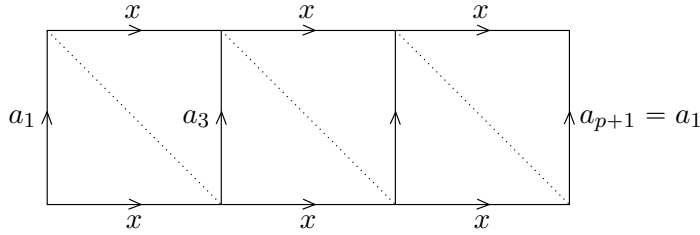


FIGURE 1.11 – Le complexe carré  $X_a(I_2(p))$

Là encore, il est facile de voir que  $X_a(I_2(p))$  est localement  $CAT(0)$ , et que c'est un espace classifiant pour  $I_2(p)$ .

L'autre complexe carré  $CAT(0)$ , noté  $X_b(I_2(p))$ , est obtenu en ne conservant que les arêtes d'indices pairs, et en supprimant celles d'indices impairs.

La différence fondamentale entre  $X_a(I_2(p))$  et  $X(I_2(p))$  est que, dans les revêtements universels, les angles visuels entre les points fixes attractifs de  $a$  et  $z_{ab}$  sont différents. Dans  $X(I_2(p))$  cet angle est strictement inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ , tandis que dans  $X_a(I_2(p))$  cet angle est égal à  $\frac{\pi}{2}$ . Ceci est dû au fait que, dans  $X_a(A(p))$ , l'arête  $a = a_1$  appartient au complexe, donc le sous-groupe  $\langle a \rangle$  est convexe-cocompact dans  $X_a(I_2(p))$  mais pas dans  $X(I_2(p))$ . De même, le sous-groupe  $\langle b \rangle$  est convexe-cocompact dans  $X_b(I_2(p))$  mais pas dans  $X(I_2(p))$ .

On peut également remarquer qu'à cause de la proposition 1.41, on ne peut pas trouver d'espace classifiant cubique  $CAT(0)$  pour  $I_2(p)$  tel que  $\langle a \rangle$  et  $\langle b \rangle$  soient simultanément convexes-cocompacts. Et, lorsque  $p$  est impair, on ne peut même pas en trouver tel que  $\langle a \rangle$  ou  $\langle b \rangle$  soit convexe-cocompact.

Et si  $A(\Gamma)$  est un groupe d'Artin d'une étoile paire, de sommet central  $a_0 \in S$ , alors le complexe cubique pour  $A(\Gamma)$  va être essentiellement obtenu en recollant, pour tout  $a \in S \setminus \{a_0\}$ , le complexe  $X_{a_0}(m_{a,a_0})$  le long du sous-complexe convexe correspondant à  $\langle a_0 \rangle$ . On renvoie le lecteur à [Hae21c] pour les détails.

## 1.6 Un complexe $CAT(0)$ pour les groupes d'Artin suffisamment larges

Nous allons présenter ici les résultats de la prépublication [Hae21d], où nous construisons un modèle  $CAT(0)$  pour une famille simple de groupes d'Artin.

Un groupe d'Artin  $A = A(\Gamma)$  est dit de type *extra extra large* (XXL) si toutes les étiquettes de  $\Gamma$  sont au moins égales à 5. Nous allons montrer le résultat suivant.

**Théorème 1.44.** *Soit  $A$  un groupe d'Artin de type XXL. Alors  $A$  est le groupe fondamental d'un complexe euclidien par morceaux compact de dimension 3 localement  $CAT(0)$ . En particulier,  $A$  est  $CAT(0)$ . De plus, si  $A$  n'est pas diédral, alors un élément de  $A$  est une isométrie de rang 1.*

Grâce à [Sis18], tout groupe agissant proprement sur un espace  $CAT(0)$  avec un élément de rang 1 est soit virtuellement cyclique, soit acylindriquement hyperbolique.

**Corollaire 1.45.** *Tout groupe d'Artin de type XXL non diédral est acylindriquement hyperbolique.*

Par ailleurs, Ciobanu, Holt et Reeves ont montré (voir [CHR16]) que tout groupe d'Artin de type extra large vérifie la propriété RD de décroissance rapide. D'après les travaux de Lafforgue (voir [Laf02]), tout groupe CAT(0) qui vérifie la propriété RD vérifie la conjecture de Baum-Connes.

**Corollaire 1.46.** *Tout groupe d'Artin de type XXL satisfait la conjecture de Baum-Connes.*

L'idée de la construction du complexe localement CAT(0) est relativement simple. Pour chaque groupe d'Artin diédral de générateurs  $a, b$ , nous allons construire une action propre et cocompacte de  $\langle a, b \rangle$  sur un complexe CAT(0) de dimension 3, de sorte que les axes de  $a$  et  $b$  s'intersectent, et forment un angle aussi grand que possible. Voici plus précisément ce que nous construisons.

**Lemme 1.47.** *Pour tout  $m \geq 5$ , il existe un complexe euclidien par morceaux, compact, localement CAT(0), de dimension 3 noté  $X_m$ , avec  $x_0 \in X_m$  et  $\pi_1(X_m, x_0) \simeq I_2(m) = \langle a, b \mid [aba \dots]_m = [bab \dots]_m \rangle$ . De plus, il existe des lacets localement géodésiques orientés  $X_m^a, X_m^b$  de longueur 1 passant par  $x_0$  tels que  $\pi_1(X_m^a, x_0) = \langle a \rangle$  et  $\pi_1(X_m^b, x_0) = \langle b \rangle$ . Notons  $a^+, a^- \in \text{lk}_{x_0}(X_m)$  les images dans le link de  $x_0$  des extrémités positive et négative du lacet  $X_m^a$ , et de même  $b^+, b^- \in \text{lk}_{x_0}(X_m)$  pour  $X_m^b$ . Nous avons de plus :*

- $X_m^a \cap X_m^b = \{x_0\}$ ,
- $\angle_{x_0}(a^+, b^+) = \angle_{x_0}(a^-, b^-) > \frac{4\pi}{5}$ .
- $\angle_{x_0}(a^+, b^-) = \angle_{x_0}(a^-, b^+) > \frac{3\pi}{5}$ .

Si de plus  $m \geq 6$ , alors nous avons  $\angle_{x_0}(a^+, b^-) = \angle_{x_0}(a^-, b^+) > \frac{2\pi}{3}$ .

Donnons une idée de la construction dans le cas où  $m = 2p + 1$  est impair. D'après Brady et McCammond (see [BM00]), une présentation intéressante du groupe d'Artin diédral  $I_2(m)$  est donnée par  $I_2(m) = \langle a, b \mid [aba \dots]_m = [bab \dots]_m \rangle = \langle t, u \mid t^m = u^2 \rangle$ , avec  $t = ab$  et  $u = [aba \dots]_m$ . Ainsi le quotient  $G$  de  $I_2(m)$  par son centre est isomorphe à  $\langle t, u \mid t^m = u^2 \rangle / \langle t^m = u^2 \rangle \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Considérons l'action de  $G$  sur l'arbre  $(m, 2)$ -birégulier  $T$  de Bass-Serre, et considérons le complexe polygonal  $T_m$  obtenu à partir de  $T$  en remplaçant chaque sommet de valence  $m$  par un  $m$ -gone régulier de côté 1, de sorte que  $t$  stabilise le  $m$ -gone de base  $P$ , et  $y$  effectue une rotation d'angle  $\frac{4\pi}{m}$ . Remarquons que  $a = t^{-p}u$  et  $b = ut^{-p}$ , et que  $t^p$  agit sur  $P$  par une rotation d'angle  $\frac{4p\pi}{m} = \frac{-2\pi}{m}$ . Ainsi les axes de  $a$  et  $b$  agissant sur  $T_m$  intersectent le bord de  $P$  en des côtés consécutifs. Notons  $e \in T_m$  l'intersection des axes de  $a$  et  $b$ , c'est aussi l'unique sommet fixé par  $u = [aba \dots]_m$  (voir figure 1.12).

Considérons l'action de  $I_2(m)$  sur  $\mathbb{R}$  donnée par  $a \cdot x = b \cdot x = x + \alpha$ , où  $\alpha > 0$ . Munissons  $\mathbb{R}$  de la structure euclidienne par morceaux, dont l'ensemble des sommets est  $\alpha\mathbb{Z}$ .

Soit  $Y_m = T_m \times \mathbb{R}$ , muni de l'action diagonale de  $I_2(m)$ , avec comme point base  $y_0 = (e, 0)$ . Comme les stabilisateurs de points de  $T_m$  sont conjugués au sous-groupe cyclique engendré par  $u$  ou par  $t$ , et que ces deux sous-groupes agissent librement par translations sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit que l'action de  $I_2(m)$  sur  $Y_m$  est libre, de quotient compact. Nous allons donc poser  $X_m = I_2(m) \backslash Y_m$  (en appliquant une homothétie à la distance de sorte que les distances de translation de  $a$  et  $b$  soient égales à 1), voir figure 1.13. On peut vérifier que si  $\alpha < \tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$ , alors les conditions sur les angles sont vérifiées (voir [Hae21d] pour les détails). Le cas où  $m$  est pair est très similaire.

Nous pouvons maintenant décrire le complexe pour un groupe d'Artin de type XXL  $A = A(\Gamma)$ . Pour tout  $s \in S$ , notons  $X_s$  un cercle de longueur 1, avec point base  $x_0 \in X_s$ , de sorte que  $\pi_1(X_s, x_0)$  s'identifie à  $\langle s \rangle$ . Notons  $E$  l'ensemble des arêtes de  $\Gamma$  et, pour

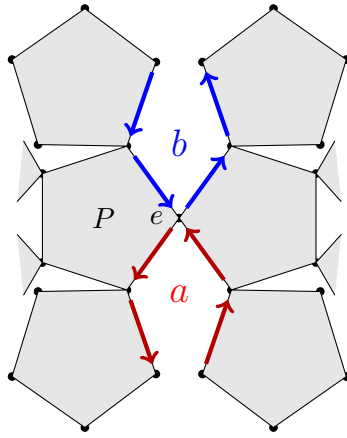


FIGURE 1.12 – Une partie du complexe  $T_5$ , avec les axes de  $a$  et  $b$ .

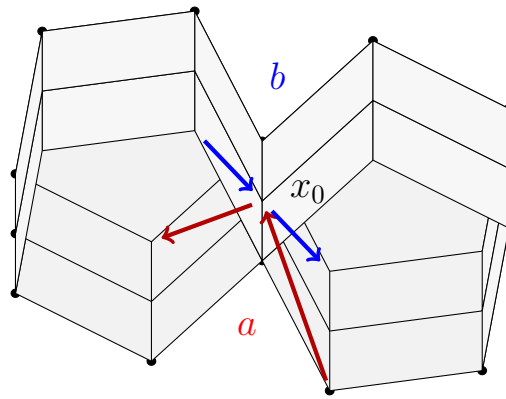


FIGURE 1.13 – Une partie du complexe  $X_5$ , avec les axes de  $a$  et  $b$ .



tout  $I \in E$ , notons  $X_I$  une copie du complexe  $X_m$  construit au lemme 1.47, où  $m$  désigne l'étiquette de l'arête  $I$ , avec point base  $x_0$ . Considérons maintenant le complexe

$$X_A = \left( \bigcup_{I \in E} X_I \cup \bigcup_{s \in S} X_s \right) / \sim,$$

où, pour tout  $I = \{s, t\} \in E$ , on identifie  $X_s$  avec le lacet  $X_{s,t}^s$ .

Le théorème de Van Kampen nous assure que le groupe fondamental  $\pi_1(X_A, x_0)$  est isomorphe à  $A$ . Afin de montrer que  $X_A$  est localement  $CAT(0)$ , d'après le théorème 1.12, nous sommes ramenés à montrer que le link de  $x_0$  est large. Pour illustrer ceci, considérons un lacet  $\ell$  dans le link de  $x_0$  intersectant précisément trois cercles  $X_a, X_b$  et  $X_c$ , où  $a, b, c \in S$  sont distincts. Alors la longueur de  $\ell$  est au moins égale à

$$\angle_{x_0}(a^+, b^-) + \angle_{x_0}(b^-, c^+) + \angle_{x_0}(c^+, a^+) = 2 \times \frac{3\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = 2\pi \text{ ou}$$

$$\angle_{x_0}(a^+, b^+) + \angle_{x_0}(b^+, c^+) + \angle_{x_0}(c^+, a^+) = 3 \times \frac{4\pi}{5} > 2\pi.$$

On réfère à [Hae21d] pour les détails, ainsi que pour la construction de la géodésique périodique de rang 1.

## 1.7 Actions propres de groupes d'Artin sur des complexes cubiques $CAT(0)$

Nous allons présenter ici les résultats de la publication [Hae21a], où nous contruisons des actions propres sur des complexes cubiques  $CAT(0)$  pour des familles simples de groupes d'Artin.

**Théorème 1.48.** *Considérons un groupe d'Artin  $A = A(\Gamma)$  satisfaisant l'une des conditions suivantes.*

- (A)  $\Gamma$  n'a pas de cycle.
- (B)  $\Gamma$  est bipartite, et toutes ses étiquettes sont au moins égales à 3.
- (C)  $\Gamma$  n'a pas de triangle, et n'a pas d'étiquette égale à 3.

*Alors  $A$  est le groupe fondamental d'un complexe cubique localement  $CAT(0)$  localement fini, de dimension finie, ayant un nombre fini d'hyperplans.*

Remarquons que tous ces groupes d'Artin sont de dimension 2, et en particulier on peut leur appliquer la classification conjecturale des groupes d'Artin cocompactement cubulés, voir la conjecture 1.29. La plupart ne sont pas cocompactement cubulés, et voici les exemples les plus simples.

**Corollaire 1.49.** *Soit  $\Gamma$  un graphe connexe, bipartite, de diamètre au moins égal à 3, et dont toutes les étiquettes sont au moins égales à 3. Alors le groupe d'Artin  $A(\Gamma)$  agit proprement sur un complexe cubique  $CAT(0)$  de dimension finie, mais aucun sous-groupe d'indice fini de  $A(\Gamma)$  n'agit proprement et cocompactement sur un complexe cubique  $CAT(0)$ .*

La stratégie de construction du complexe cubique localement  $CAT(0)$  va être très similaire à celle du théorème 1.44. Pour chaque groupe d'Artin diédral engendré par  $a$  et  $b$ , on va construire un complexe cubique localement  $CAT(0)$  dont le groupe fondamental est le groupe diédral  $\langle a, b \rangle$ , avec des sous-complexes localement convexes dont les groupes fondamentaux sont  $\langle a \rangle$  et  $\langle b \rangle$  respectivement. C'est cette condition de convexité qu'il est possible de réaliser dans le monde  $CAT(0)$  avec un complexe compact, mais plus dans le monde cubique  $CAT(0)$ . Ce complexe associé à un groupe diédral va être construit à partir de deux actions, une action euclidienne et une action sur un arbre.

### 1.7.1 L'action euclidienne

Nous allons commencer par décrire une action des groupes d'Artin diédraux sur un espace euclidien, qui sera utilisée dans chacun des trois cas (A), (B) et (C).

**Proposition 1.50.** *Pour tout  $m \geq 2$ , il existe une action cocompacte, cubique du groupe d'Artin diédral  $I_2(m) = \langle a, b \mid [aba \dots]_m = [bab \dots]_m \rangle$  sur  $\Sigma_{a,b} = \mathbb{R}^m$ , muni de la structure cubique standard, et du sommet base  $x_0 = 0$ , telle que :*

1. *L'action est donnée par :*

$$a \cdot (y_0, \dots, y_{m-1}) = (y_0 + 1, y_{-1}, y_{-2}, \dots, y_{-(m-1)})$$

$$\text{and } b \cdot (y_0, \dots, y_{m-1}) = (y_2, y_1 + 1, y_0, y_{2-3}, y_{2-4}, \dots, y_{2-(m-1)}),$$

*où les indices sont dans  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ .*

2. *L'élément  $a$  agit comme une translation sur la droite  $\Sigma_a = \mathbb{R} \times \{0\}^{m-1}$  contenant  $x_0$ .*

3. *L'élément  $b$  agit comme une translation sur la droite  $\Sigma_b = \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}^{m-2}$  contenant  $x_0$ .*

4. *Les droites  $\Sigma_a$  et  $\Sigma_b$  s'intersectent en  $\{x_0\}$ .*

On peut remarquer que la partie linéaire de cette action affine correspond à l'action par permutation des  $m$  coordonnées donnée par l'action du groupe de Coxeter diédral sur les sommets d'un  $m$ -gone régulier.

### 1.7.2 Construction du complexe, cas (A) et (B)

Nous allons maintenant décrire une action des groupes d'Artin diédraux sur des arbres, qui sera utilisé dans les cas (A) et (B). Remarquons que dans chaque cas (A) et (B), le graphe  $\Gamma$  définissant le groupe d'Artin est bipartite, on peut donc choisir un coloriage  $\chi$  des sommets de  $\Gamma$  dans  $\{0, 1\}$ , tel que les extrémités d'une arête aient des couleurs distinctes.

**Lemme 1.51.** *Pour tout  $m \geq 2$ , considérons deux couleurs distinctes  $\chi(a), \chi(b)$  dans  $\{0, 1\}$  sur les générateurs du groupe d'Artin diédral  $I_2(m) = \langle a, b \mid [aba \dots]_m = [bab \dots]_m \rangle$ . Il existe une action de  $I_2(m)$  sur un arbre  $m$ -régulier  $T_{a,b}$ , transitive sur les sommets, telle que :*

1. *Les éléments  $a, b$  agissent comme des translations sur  $T_{a,b}$ , d'axes  $T_a, T_b$  chacun contenant une arête  $[t_0, t_1]$ .*

2. *Le stabilisateur de  $t_0$  est  $\langle ba \rangle$ , et le stabilisateur de  $t_1$  est  $\langle ab \rangle$ .*

3. *Si  $m \geq 3$ , alors  $T_a \cap T_b = [t_0, t_1]$ . Si  $m = 2$ , alors  $T_a = T_b = T_{a,b}$ .*

4. *Soit  $g \in \{a, b\}$ . Si  $\chi(g) = 0$  alors  $g \cdot t_0 = t_1$ , et si  $\chi(g) = 1$  alors  $g \cdot t_1 = t_0$ .*

La construction de cet arbre est similaire à celle utilisée dans le lemme 1.47. Voici une illustration de ces arbres pour  $m = 3$  et  $m = 4$ , voir figures 1.14 et 1.15.

Nous pouvons maintenant passer à la description du complexe global. Fixons un groupe d'Artin  $A(\Gamma)$ , et supposons :

(A) ou bien que  $\Gamma$  est sans cycle,

(B) ou bien que  $\Gamma$  est bipartite, et que toutes ses étiquettes sont au moins égales à 3.

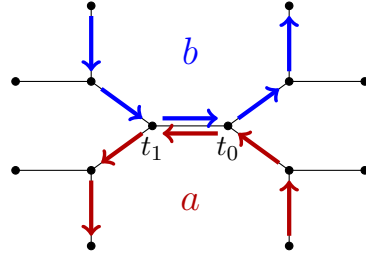


FIGURE 1.14 – Une partie de l’arbre  $T_{a,b}$  pour  $m_{a,b} = 3$ , avec les axes de  $a$  et  $b$ .

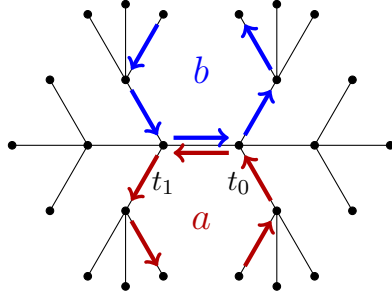


FIGURE 1.15 – Une partie de l’arbre  $T_{a,b}$  pour  $m_{a,b} = 4$ , avec les axes de  $a$  et  $b$ .

Dans chaque cas,  $\Gamma$  est bipartite, et on peut considérer un coloriage  $\chi$  des sommets  $S$  de  $\Gamma$  à valeurs dans  $\{0, 1\}$ .

Pour tout  $a \in S$ , notons  $T_a \simeq \mathbb{R}$  une copie de la droite réelle, muni de son pavage usuel par des segments de longueur 1, et considérons ses sommets privilégiés  $t_0 = 0$  et  $t_1 = 1$ . Considérons l’action de  $\langle a \rangle$  sur  $T_a$ , où  $a$  agit par translation de  $(-1)^{\chi(a)}$ .

Pour tout  $a \in S$ , notons  $X_a = T_a \times \Sigma_a \simeq \mathbb{R}^2$ , muni de l’action diagonale, de la structure cubique produit, et des sommets de base  $p_0 = (t_0, x_0)$  et  $p_1 = (t_1, x_0)$ . Notons le quotient  $M_a = \langle a \rangle \backslash X_a$ , muni des sommets de base  $q_0, q_1$ , images de  $p_0, p_1$  respectivement.

Notons  $E$  l’ensemble des arêtes de  $\Gamma$ . Pour toute arête  $\{a, b\} \in E$ , notons  $X_{a,b} = T_{a,b} \times \Sigma_{a,b}$ , où l’arbre  $T_{a,b}$  est décrit dans le lemme 1.51, et où  $\Sigma_{a,b}$  est décrit dans la proposition 1.50. Munissons  $X_{a,b}$  de la structure cubique produit, et de l’action diagonale de  $\langle a, b \rangle$ . Notons les sommets de base  $p_0 = (t_0, x_0)$  et  $p_1 = (t_1, x_0)$  de  $X_{a,b}$ , ainsi que leurs images respectives  $q_0$  et  $q_1$  dans le quotient  $M_{a,b} = \langle a, b \rangle \backslash X_{a,b}$ .

**Lemme 1.52.** *L’action de  $\langle a, b \rangle$  sur  $X_{a,b}$  est libre, donc  $M_{a,b}$  est un complexe cubique localement  $CAT(0)$  de dimension  $m_{a,b} + 1$ , possédant deux ou trois hyperplans, et tel que le groupe fondamental  $\pi_1(M_{a,b}, q_0)$  soit naturellement isomorphe à  $\langle a, b \rangle$ .*

De plus, pour toute arête  $\{a, b\} \in E$ , on peut définir un plongement naturel  $\Phi_{a,\{a,b\}} : M_a \rightarrow M_{a,b}$  d’image localement convexe. Ceci nous permet de définir le recollement suivant :

$$M = \left( \bigcup_{a \in S} M_a \cup \bigcup_{\{a,b\} \in E} M_{a,b} \right) / \sim,$$

où les identifications sont données, pour tous  $a \in S$  et  $\{a, b\} \in E$ , par  $\phi_{a,\{a,b\}} : M_a \rightarrow M_{a,b}$ .

On peut montrer que, pour tout  $\{a, b\} \in E$ , l’application naturelle  $M_{a,b} \rightarrow M$  est injective. Une application du théorème de Van Kampen permet de déduire le résultat suivant.

**Lemme 1.53.** *Le groupe fondamental  $\pi_1(M, q_0)$  est naturellement isomorphe à  $A(\Gamma)$ .*

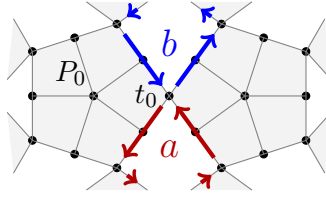


FIGURE 1.16 – Une partie du complexe  $T_{a,b}$  pour  $m_{a,b} = 5$ , avec les axes de  $a$  et  $b$ .

Il ne reste plus qu'à montrer la propriété de courbure.

**Lemme 1.54.** *Dans chacun des cas (A) ou (B), le complexe  $M$  est localement  $CAT(0)$ .*

Dans le cas (A), le complexe  $M$  est un recollement arborescent de sous-complexes  $CAT(0)$  le long de sous-complexes convexes, on obtient donc la propriété par recollement, voir [BH99, Theorem 11.1] ou la partie 1.3.

Dans le cas (B), nous appliquons le critère de Gromov (théorème 1.16) en montrant que les links de  $M$  sont des complexes simpliciaux de drapeaux. Pour cela, il suffit essentiellement de constater qu'un triangle dans le link d'un sommet de  $M$  ne peut provenir d'un cycle dans  $\Gamma$  (car  $\Gamma$  n'a pas de triangle par hypothèse), et donc qu'on est ramené à l'étude d'un sous-complexe de  $M$  obtenu comme recollement arborescent de sous-complexes convexes, comme dans le cas précédent. On renvoie à [Hae21a] pour les détails.

### 1.7.3 Construction du complexe, cas (C)

Nous allons maintenant décrire une action des groupes d'Artin diédraux sur des complexes carrés arborescents, qui sera utilisé dans le cas (C).

**Lemme 1.55.** *Pour tout  $m \neq 3$ , il existe une action cubique du groupe d'Artin diédral  $I_2(m) = \langle a, b \mid [aba\dots]_m = [bab\dots]_m \rangle$  sur un complexe carré  $CAT(0)$   $T_{a,b}$  tel que :*

1. *Les éléments  $a, b$  agissent comme des translations sur  $T_{a,b}$ , de distance combinatoire 2, et d'axes des droites combinatoires  $T_a, T_b$  telles que  $T_a \cap T_b$  est un unique sommet  $t_0$ .*
2. *Si  $m \geq 4$ , le stabilisateur  $t_0$  est  $\langle [aba\dots]_m \rangle$ . Si  $m = 2$ , le stabilisateur de  $t_0$  est trivial.*

La construction de cet arbre est similaire à celle utilisée dans le lemme 1.47. Voici une illustration de ce complexe pour  $m = 5$ , voir figure 1.16.

Nous pouvons maintenant passer à la description du complexe global. Fixons un groupe d'Artin  $A(\Gamma)$ , et supposons que :

- (C)  $\Gamma$  n'a pas de triangle, et toutes ses étiquettes sont différentes de 3.

Pour tout  $a \in S$ , notons  $T_a \simeq \mathbb{R}$  une copie de la droite réelle, muni de son pavage usuel par des segments de longueur 1, et considérons son sommet base  $t_0 = 0$ . Considérons l'action de  $\langle a \rangle$  sur  $T_a$ , où  $a$  agit par translation de 1.

Pour tout  $a \in S$ , notons  $X_a = T_a \times \Sigma_a \simeq \mathbb{R}^2$ , muni de l'action diagonale, de la structure cubique produit, et du sommet de base  $p_0 = (t_0, x_0)$ . Notons le quotient  $M_a = \langle a \rangle \backslash X_a$ , muni du sommet de base  $q_0$ , image de  $p_0$ .

Notons  $E$  l'ensemble des arêtes de  $\Gamma$ . Pour tout arête  $\{a, b\} \in E$ , notons  $X_{a,b} = T_{a,b} \times \Sigma_{a,b}$ , où le complexe carré  $T_{a,b}$  est décrit dans le lemme 1.55, et où  $\Sigma_{a,b}$  est décrit dans la

proposition 1.50. Munissons  $X_{a,b}$  de la structure cubique produit, et de l'action diagonale de  $\langle a, b \rangle$ . Notons le sommet de base  $p_0 = (t_0, x_0)$  de  $X_{a,b}$ , ainsi que son image  $q_0$  dans le quotient  $M_{a,b} = \langle a, b \rangle \backslash X_{a,b}$ .

**Lemme 1.56.** *L'action de  $\langle a, b \rangle$  sur  $X_{a,b}$  est libre, donc  $M_{a,b}$  est un complexe cubique localement  $CAT(0)$  de dimension  $m_{a,b} + 2$ , possédant deux ou quatre hyperplans, et tel que le groupe fondamental  $\pi_1(M_{a,b}, q_0)$  soit naturellement isomorphe à  $\langle a, b \rangle$ .*

De plus, pour toute arête  $\{a, b\} \in E$ , on peut définir un plongement naturel  $\Phi_{a,\{a,b\}} : M_a \rightarrow M_{a,b}$  d'image localement convexe. Ceci nous permet de définir le recollement suivant :

$$M = \left( \bigcup_{a \in S} M_a \cup \bigcup_{\{a,b\} \in E} M_{a,b} \right) / \sim,$$

où les identifications sont données, pour tous  $a \in S$  et  $\{a, b\} \in E$ , par  $\phi_{a,\{a,b\}} : M_a \rightarrow M_{a,b}$ .

On peut montrer que, pour tout  $\{a, b\} \in E$ , l'application naturelle  $M_{a,b} \rightarrow M$  est injective. Une application du théorème de Van Kampen permet de déduire le résultat suivant.

**Lemme 1.57.** *Le groupe fondamental  $\pi_1(M, q_0)$  est naturellement isomorphe à  $A(\Gamma)$ .*

Il ne reste plus qu'à montrer la propriété de courbure.

**Lemme 1.58.** *Le complexe  $M$  est localement  $CAT(0)$ .*

Comme dans le cas (B), nous appliquons le critère de Gromov (théorème 1.16) en montrant que les links de  $M$  sont des complexes simpliciaux de drapeaux. Pour cela, le fait que  $\Gamma$  n'a pas de triangle nous ramène à l'étude d'un sous-complexe de  $M$  obtenu comme recollement arborescent de sous-complexes convexes. On renvoie à [Hae21a] pour les détails.

# Chapitre 2

## Rigidités de réseaux

### 2.1 Réseaux de rang supérieur et médianes grossières

Nous allons présenter ici les résultats de la publication [Hae16], qui étudie les liens entre espaces symétriques, immeubles et médianes grossières.

#### 2.1.1 Énoncés des résultats

Un espace métrique est dit médian si, pour chaque triplet de points dans l'espace, les trois intervalles correspondants s'intersectent en un unique point, appelé médiane (voir la partie 2.1.2 pour plus de détails). L'étude des actions de groupes sur des espaces métriques médians est très riche, et a été étudiée de nombreux points de vue : propriété de Haagerup, propriété (T), actions sur des complexes cubiques  $CAT(0)$ , actions sur des espaces à murs (mesurés)... (voir notamment [Che00], [CDH10], [CFH13], [CN05], [Bow13b], [Bow14])

Il est naturel de chercher à réunir dans une même classe d'espaces métriques les complexes cubiques  $CAT(0)$  et les espaces hyperboliques au sens de Gromov. C'est ainsi que Bowditch a défini la notion d'espace grossièrement médian (voir [Bow13a]). Essentiellement, toute partie finie est bien approchée par un espace métrique médian fini (ou, de manière équivalente, par un complexe cubique  $CAT(0)$  fini).

Il s'agit d'une propriété invariante par quasi-isométrie, ainsi on peut dire qu'un groupe de type fini est grossièrement médian lorsqu'un graphe de Cayley peut être muni d'une médiane grossière. Bowditch a montré qu'un groupe grossièrement médian est de présentation finie, et a une fonction de Dehn au plus quadratique (voir [Bow13a, Corollary 8.3]). De plus, on peut appliquer le critère de Chatterji et Ruane (voir [CR05]) pour en déduire qu'un groupe grossièrement médian a la propriété RD de décroissance rapide.

Par ailleurs, Bowditch a montré que le groupe modulaire d'une surface de type fini est grossièrement médian, donnant ainsi un autre point de vue sur la preuve de Behrstock et Minsky que le groupe modulaire a la propriété RD (voir [BM11]), ainsi que le théorème du rang (voir [BM08] et [Ham07]).

Comme la plupart des exemples de groupes grossièrement médians ont des propriétés de courbure négative, Bowditch a demandé dans [Bow13a] si les espaces symétriques de rang supérieur, voire même les espaces  $CAT(0)$ , étaient grossièrement médians. Nous apportons une réponse négative à cette question. Plus précisément, nous montrons le résultat suivant.

**Théorème 2.1.** *Soit  $X$  un espace symétrique de type non compact, ou un immeuble affine épais. Alors  $X$  admet une médiane grossière si et seulement si son type sphérique est  $A_1^+$ .*

Notons qu'il n'y a aucune hypothèse d'équivariance, même grossière, de la médiane par rapport au groupe d'isométries de  $X$ . Une implication de ce résultat est facile : si  $X$  est de

type sphérique  $A_1^r$ , alors  $X$  est un produit d'espaces symétriques de rang un (donc Gromov-hyperboliques) ou un produit d'arbres, et admet donc une médiane grossière produit.

Haglund a demandé si les espaces symétriques ou les immeubles de rang supérieur pouvaient être quasi-isométriques à des complexes cubiques  $CAT(0)$ . Comme ce sont des exemples d'espaces grossièrement médians, nous apportons également une réponse négative à cette question.

**Corollaire 2.2.** *Soit  $X$  un espace symétrique de type non compact, ou un immeuble affine épais. Alors  $X$  est quasi-isométrique à un complexe cubique  $CAT(0)$  si et seulement si son type sphérique est  $A_1^r$ .*

Remarquons que, dans cet énoncé, le complexe cubique peut être muni de la distance  $L^p$  pour tout  $p \in [1, \infty]$ .

Concernant les réseaux cocompacts dans des groupes de Lie, Valette conjecture qu'ils satisfont la propriété RD, ce qui aurait pour conséquence la conjecture de Baum-Connes. Il est donc naturel d'étudier si ces réseaux cocompacts peuvent admettre une action sur un espace grossièrement médian. Nous apportons une réponse négative à cette question.

**Corollaire 2.3.** *Soit  $\mathbb{K}$  un corps local,  $G$  le groupe des  $\mathbb{K}$ -points d'un groupe algébrique simple sans facteur compact, et soit  $\Gamma$  un réseau de  $G$ . Si  $\Gamma$  est grossièrement médian, alors  $G$  est de  $\mathbb{K}$ -rang 1.*

Par ailleurs, à cause de la propriété (T) de Kazhdan, les réseaux de rang supérieur n'admettent pas d'action non bornée sur des espaces métriques médians (voir [CDH10] et [Nic08]). Cependant, dans le cadre grossièrement médian ce n'est plus vrai, puisque par exemple tout groupe hyperbolique ayant la propriété (T) est grossièrement médian.

Dans le cas où  $\Gamma$  est un réseau non uniforme d'un groupe  $G$  de  $\mathbb{K}$ -rang 1, la situation est plus subtile. Voici ce qui est connu.

**Proposition 2.4.** *Soit  $\mathbb{K}$  un corps local,  $G$  le groupe des  $\mathbb{K}$ -points d'un groupe algébrique simple, sans facteur compact, de  $\mathbb{K}$ -rang 1. Soit  $\Gamma$  un réseau de  $G$ .*

- *Si  $\Gamma$  est un réseau uniforme,  $\Gamma$  est grossièrement médian.*
- *Si  $G$  est localement isomorphe à  $SO_0(n, 1)$  pour  $n \geq 2$ , alors  $\Gamma$  est grossièrement médian.*
- *Si  $G$  est localement isomorphe à  $SU(1, 2)$ , alors  $\Gamma$  n'est pas grossièrement médian.*

En effet dans les deux premiers cas,  $\Gamma$  est hyperbolique (relativement à des sous-groupes virtuellement abéliens), donc grossièrement médian d'après [Bow13c]. Et dans le dernier cas, on sait que  $\Gamma$  a une fonction de Dehn cubique (voir [ECH<sup>+</sup>92] et [Osi06]), c'est pourquoi il n'est pas grossièrement médian.

### 2.1.2 Médiannes grossières

Dans cette partie, nous allons présenter brièvement les médianes grossières, telles qu'elles ont été introduites par Bowditch dans [Bow13a] (voir également [NWZ] pour une autre approche).

Commençons par rappeler la définition d'une médiane sur un ensemble  $X$ .

**Définition 2.5.** Soit  $X$  un ensemble. Une application  $\mu : X^3 \rightarrow X$  est appelée *médiane* si, pour tous  $a, b, c, d, e \in X$ , on a :

- $\mu(a, b, c) = \mu(b, a, c) = \mu(b, c, a)$  ( $\mu$  est symétrique),

- $\mu(a, a, b) = a$ ,
- $\mu(a, b, \mu(c, d, e)) = \mu(\mu(a, b, c), \mu(a, b, d), e)$ .

On appelle le couple  $(X, \mu)$  une *algèbre médiane*.

Il y a une notion naturelle d'intervalles associés à une médiane.

**Définition 2.6.** Soit  $(X, \mu)$  une algèbre médiane. Si  $a, b \in X$ , l'*intervalle* (médian)  $I(a, b)$  entre  $a$  et  $b$  est

$$I(a, b) = \{c \in X \mid \mu(a, b, c) = c\}.$$

Si  $C \subset X$ , on dit que  $C$  est *convexe* si, pour tous  $a, b \in C$ , on a  $I(a, b) \subset C$ .

Si  $X$  est un ensemble muni d'une famille d'intervalles, il existe également une liste simple d'axiomes garantissant que ces intervalles proviennent d'une médiane (voir par exemple [Bow19b]).

**Définition 2.7.** Soient  $(X, \mu)$ ,  $(X', \mu')$  deux algèbres médianes. Une application  $f : X \rightarrow X'$  est appelée *morphisme médian* si pour tous  $x, y, z \in X$ , on a  $\mu'(f(x), f(y), f(z)) = f(\mu(x, y, z))$ . Si de plus  $f$  est injective, on l'appelle *plongement médian*.

Pour les algèbres médianes, il y a une notion naturelle de rang.

**Définition 2.8.** Soit  $(X, \mu)$  une algèbre médiane. On dit que  $X$  est de *rang*  $r$  si c'est la dimension maximale d'un cube  $\{0, 1\}^r$  plongé de manière médiane dans  $X$ .

Dans certains cas, la médiane provient d'un espace métrique.

**Définition 2.9.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Pour tous  $a, b \in X$ , définissons l'*intervalle* (métrique)  $I(a, b)$  entre  $a$  et  $b$  par

$$I(a, b) = \{c \in X \mid d(a, c) + d(c, b) = d(a, b)\}.$$

L'espace  $(X, d)$  est appelé *métrique médian* si, pour tous  $a, b, c \in X$ , les intervalles  $I(a, b)$ ,  $I(b, c)$  et  $I(a, c)$  s'intersectent globalement en un unique point de  $X$ , noté  $\mu(a, b, c)$ . Dans ce cas,  $\mu : X^3 \rightarrow X$  est une médiane, et les intervalles au sens métrique et au sens médian coïncident.

### Exemples.

- La droite réelle  $\mathbb{R}$ , avec sa distance usuelle, est métrique médiane de rang 1. La médiane de trois nombres réels ordonnés  $x \leq y \leq z$  est  $y$ .
- Notons que le produit direct de deux espaces métriques médians, muni de la somme des distances, est métrique médian. Ainsi, pour tout  $n \geq 1$ , l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  muni de la norme  $\ell^1$  est métrique médian (et c'est le seul espace vectoriel normé de dimension finie médian, voir [Ver93, Theorem III.4.13]). Il est de rang  $n$ .
- Plus généralement, si  $(\Omega, \mu)$  est un espace mesuré, alors  $L^1(\Omega, \mathbb{R})$  est un espace métrique médian (de rang infini dès que le support de  $\mu$  est infini), voir par exemple [CDH10].

Dans le cas des graphes considérés comme espaces métriques avec la distance combinatoire, il y a une très belle caractérisation due à Chepoi et Roller indépendamment.

**Théorème 2.10.** [Che00, Theorem 6.1] [Rol98, Theorem 10.3] *Un graphe est métrique médian si et seulement si c'est le 1-squelette d'un complexe cubique CAT(0) (voir section 1.3 pour la définition). Le rang de la médiane est la dimension du complexe cubique CAT(0).*



Si  $(X, d)$  est un espace métrique, voici plusieurs affaiblissements de la notion de métrique médiane.

**Définition 2.11.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Une médiane abstraite  $\mu$  sur  $X$  est dite

- continue, si c'est une application continue de  $X^3$  dans  $X$ ,
- Lipschitz s'il existe une constante  $k \geq 0$  telle que l'application  $\mu$  soit  $k$ -Lipschitz par rapport à chaque variable, c'est-à-dire

$$\forall a, b, c, a', b', c' \in X, d(\mu(a, b, c), \mu(a', b', c')) \leq k(d(a, a') + d(b, b') + d(c, c')),$$

- localement convexe si chaque point de  $X$  a une base de voisinages convexes.

**Exemples.**

- La médiane produit sur  $\mathbb{R}^2$ , muni de la norme euclidienne, est Lipschitz et localement convexe.
- Voici un exemple de médiane continue sur  $\mathbb{R}^2$  mais qui n'est pas Lipschitz. Considérons l'image  $\mu$  de la médiane produit sur  $\mathbb{R}^2$  par un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  non Lipschitz. Alors la médiane  $\mu$  sur l'espace métrique  $(\mathbb{R}^2, \ell^1)$  est continue mais non Lipschitz.

On peut remarquer qu'une propriété des espaces hyperboliques au sens de Gromov est que toute partie finie est bien approchée par un arbre métrique. Les arbres coïncident avec les algèbres médianes de rang 1, il est donc naturel de chercher à généraliser cette propriété pour inclure les algèbres médianes finies de rang quelconque. C'est ainsi que Bowditch a proposé une définition de médiane grossière.

**Définition 2.12.** [Bow13a] Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Une application  $\mu : X^3 \rightarrow X$  est appelée *médiane grossière* si elle satisfait :

- Il existe des constantes  $k \geq 0, h(0) \geq 0$  telles que

$$\forall x, y, z, x', y', z' \in X, d(\mu(x, y, z), \mu(x', y', z')) \leq k(d(x, x') + d(y, y') + d(z, z')) + h(0).$$

- Il existe une fonction  $h : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty[$  telle que, pour toute partie finie non vide  $A \subset X$  avec  $|A| \leq p$ , il existe une algèbre médiane finie  $(\Pi, \mu_\Pi)$  et des applications  $\pi : A \rightarrow \Pi$  et  $\lambda : \Pi \rightarrow X$  telles que :

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \Pi, d(\lambda(\mu_\Pi(x, y, z)), \mu(\lambda(x), \lambda(y), \lambda(z))) &\leq h(p), \\ \forall a \in A, d(a, \lambda(\pi(a))) &\leq h(p). \end{aligned}$$

De plus, il y a une notion naturelle de rang d'une médiane grossière : si, dans la définition précédente, on peut toujours choisir l'algèbre médiane  $\Pi$  de rang au plus  $r$ , on dit que  $\mu$  est de rang au plus  $r$ .

**Remarques.**

- Cette définition est invariante par quasi-isométrie.
- Tout espace métrique médian est grossièrement médian. En particulier, tout complexe cubique (avec par exemple la norme  $\ell^1$  ou  $\ell^2$ ) est grossièrement médian, de rang borné par la dimension.
- Un espace métrique est Gromov-hyperbolique si et seulement s'il admet une médiane grossière de rang au plus 1. En effet, tout triplet de points a un tripode de comparaison, et le centre du tripode définit une médiane grossière.

L'une des motivations de Bowditch pour cette notion est la suivante.

**Théorème 2.13.** [BM11] et [Bow13a] Si  $S$  est une surface de type fini, son groupe modulaire  $\text{Mod}(S)$  est grossièrement médian, de rang fini.

### 2.1.3 Obstruction à l'existence d'une médiane grossière

Nous allons ici donner des idées sur la preuve du théorème 2.1. Nous référons à [Hae16] pour plus de détails.

Tout d'abord, l'un des intérêts de la définition de médianes grossières par Bowditch (voir [Bow13a]) est qu'elles se comportent bien par passage au cône asymptotique. En effet, de manière informelle, le passage au cône asymptotique fait disparaître les constantes additives, et il ne reste que la constante multiplicative de Lipschitz.

**Théorème 2.14.** [Bow13a, Theorem 2.3] *Soit  $(X, d)$  un espace métrique, et  $\mu$  une médiane grossière sur  $X$ . Alors pour tout cône asymptotique  $(X_\infty, d_\infty)$  de  $(X, d)$ ,  $\mu$  définit naturellement une médiane  $\mu_\infty$  sur  $X_\infty$  qui est Lipschitz et localement convexe.*

Par ailleurs, grâce aux travaux de Kleiner et Leeb (voir [KL97]), on connaît une description des cônes asymptotiques des espaces symétriques et des immeubles.

**Théorème 2.15.** [KL97, Theorem 1.2.1] *Soit  $X$  un espace symétrique de type non compact ou un immeuble affine épais. Alors tout cône asymptotique de  $X$  est un immeuble affine épais, de même type sphérique que  $X$ .*

Afin de démontrer le théorème 2.1, on est ainsi ramenés à montrer le résultat suivant.

**Théorème 2.16.** *Soit  $X$  un immeuble affine épais de type sphérique différent de  $A_1^r$ . Alors  $X$  n'admet aucune médiane Lipschitz localement convexe.*

Premièrement, nous montrons un résultat général d'existence de cube convexe dans un espace métrique avec une médiane Lipschitz localement convexe.

**Proposition 2.17.** *Soit  $X$  un espace métrique connexe, muni d'une médiane Lipschitz localement convexe, de rang  $r$ . Alors il existe un plongement biLipschitz, médian du cube  $[0, 1]^r$  dans  $X$ , d'image convexe.*

La définition du rang de la médiane fournit un plongement médian du 0-squelette  $\{0, 1\}^r$  dans  $X$ . Il s'agit donc de "remplir" ce 0-squelette de manière cohérente. L'un des arguments clés provient de l'existence de murs convexes séparant des points.

**Lemme 2.18.** [Bow13a, Lemma 7.3 et 7.5] *Soit  $X$  un espace métrique, muni d'une médiane continue localement convexe de rang  $r$ . Si  $a$  et  $b$  sont des points distincts de  $X$ , il existe une partition  $X = H^+ \sqcup H^-$  en deux parties convexes telle que  $a \notin \overline{H^-}$  et  $b \notin \overline{H^+}$ . De plus,  $\overline{H^+} \cap \overline{H^-}$  est une sous-algèbre médiane convexe de  $X$ , de rang au plus  $r - 1$ .*

Une conséquence de ce résultat concerne le rang d'une médiane dans un immeuble affine.

**Proposition 2.19.** *Soit  $X$  un immeuble affine de rang  $r$ . Alors toute médiane Lipschitz localement convexe sur  $X$  est de rang  $r$ .*

Supposons maintenant que  $X$  est un immeuble affine de rang  $r$ , muni d'une médiane Lipschitz localement convexe. D'après la proposition 2.17 et la proposition 2.19, on déduit qu'il existe un plongement biLipschitz, médian du cube  $[0, 1]^r$  dans  $X$ , d'image convexe. En considérant un cône tangent à l'image de ce cube (une ultralimite d'espaces métriques, mais en faisant tendre le facteur de normalisation vers l'infini), on obtient :

**Proposition 2.20.** *Il existe  $x \in X$  tel que, dans un cône tangent  $X_\infty$  à  $X$  en  $x$ , le cône tangent  $F_\infty$  à un appartement  $F$  contenant  $x$  est convexe, et isomorphe (au sens médian et affine) à l'espace vectoriel standard  $(\mathbb{R}^r, \ell^1)$ .*

Par ailleurs, Kleiner et Leeb ont également montré que tout cône tangent d'un immeuble affine est encore un immeuble affine. Ainsi on peut supposer que l'immeuble affine  $X$  contient un appartement  $F$  convexe isomorphe à l'espace vectoriel standard  $(\mathbb{R}^r, \ell^1)$ . Ce résultat nous permet de contrôler la projection (au sens médian) d'un appartement sur un autre.

**Lemme 2.21.** *Soit  $F'$  un autre appartement de  $X$  tel que  $F \cap F'$  soit un demi-appartement. Alors, la projection médiane de  $F'$  sur  $F$  est égale à  $F_\infty \cap F'_\infty$ .*

Pour terminer l'idée de la preuve du théorème 2.16, supposons par l'absurde que  $X$  n'est pas de type  $A_1^r$ . Alors on peut trouver dans  $X$  un demi-appartement  $F_0 \subset F$  et deux segments géodésiques singuliers reliant  $y \in X \setminus F$  à deux points distincts  $z, z'$  de  $\partial F_0$ . Comme toute géodésique singulière est intersection d'appartements, on en déduit que la projection de  $y$  sur  $F$  doit coïncider à la fois avec  $z$  et  $z'$ , ce qui est une contradiction.

Donc  $X$  est de type  $A_1^r$ , ce qui conclut l'idée de la preuve du théorème 2.16, nous renvoyons à [Hae16] pour les détails.

## 2.2 Actions de réseaux de rang supérieur sur des espaces hyperboliques

### 2.2.1 Énoncés des résultats

Nous allons présenter ici les résultats de la publication [Hae20].

Les groupes algébriques semisimples de rang supérieur sur des corps locaux, ainsi que leurs réseaux, vérifient de nombreuses propriétés de rigidité. L'idée fondamentale est que ces réseaux ne peuvent pas agir sur d'autres espaces que ceux naturellement associés au groupe algébrique ambiant. C'est à la base du théorème de superrigidité de Margulis (voir [Mar91]), ainsi que de la conjecture de Zimmer notamment (voir [BFH16]).

Concernant la rigidité d'actions par isométries, l'un des exemples les plus classiques est celui de la propriété (T) de Kazhdan, qui affirme que les réseaux de rang supérieur ne peuvent agir sans point fixe par isométries affines sur des espaces de Hilbert. La propriété (T) implique également de tels résultats de points fixes pour d'autres espaces  $L^p$  (voir [BFGM07]), les arbres (voir [Ser74]), et plus généralement pour les espaces métriques médians (tels que les complexes cubiques  $\text{CAT}(0)$ , voir [CDH10] et [NR98b]).

La propriété (T) est également satisfaite par les réseaux hyperboliques quaternioniques, ainsi que par certains groupes hyperboliques aléatoires (voir [Žuk03]). Plusieurs renforcements de la propriété (T) ont été proposés, qui sont tous satisfaits par les réseaux de rang supérieur mais pas par les groupes hyperboliques, qui impliquent diverses propriétés de points fixes pour des actions sur des espaces de Banach (voir par exemple [Laf08] et [Mon01]).

Étant donné le rôle central qu'occupent les espaces hyperboliques en théorie géométrique des groupes, il est naturel d'étudier les actions de réseaux de rang supérieur sur des espaces hyperboliques. De nombreuses réponses partielles à cette question sont connues : par exemple, toute action sur un arbre, ou sur un espace symétrique de rang un, a un point fixe. Manning a montré que, pour  $\text{SL}(n, \mathbb{Z})$  avec  $n \geq 3$  (ainsi que d'autres réseaux à génération bornée), toute action sur un quasi-arbre a des orbites bornées (voir [Man06]). À l'aide de la propriété (T) renforcée de Lafforgue (see [Laf08], [Lia14], [dLdS15], [dLS17]), on peut déduire que si  $\Gamma$  est un réseau de rang supérieur, alors toute action de  $\Gamma$  par isométries sur un graphe hyperbolique uniformément localement fini a des orbites bornées.

Voici notre résultat principal.

**Théorème 2.22.** *Soit  $\Gamma$  un réseau dans un (produit de) groupes algébriques presque simples, de rangs supérieurs, de centres finis, sur un corps local. Alors toute action de  $\Gamma$  par isométries sur un espace métrique Gromov-hyperbolique  $X$  est élémentaire. Plus précisément, soit l'action est elliptique (les orbites sont bornées), soit elle est parabolique ( $\Gamma$  fixe un unique point du bord de Gromov de  $X$  et n'a pas d'élément loxodromique).*

Effectuons tout d'abord quelques remarques sur ce résultat.

**Remarques.**

- Ce résultat est également une conséquence de travaux de Bader et Furman, suite à leurs travaux profonds sur la rigidité et les bords de groupes (voir en particulier [BF14]). Cependant, les techniques employées sont assez différentes : Bader et Furman utilisent beaucoup la théorie ergodique, alors que nous en utilisons très peu, et nous concentrons surtout sur la géométrie asymptotique des réseaux et des immeubles, en nous servant des médianes.
- On peut noter qu'il n'y a aucune hypothèse de compacité locale sur l'espace hyperbolique considéré, ni aucune hypothèse de propreté de l'action.
- La plupart des résultats de rigidité permettent de conclure que les orbites sont bornées. On ne peut ici exclure le cas parabolique, car tout groupe de type fini a une action métriquement propre, parabolique sur un graphe hyperbolique (localement infini en général) : une horoboule combinatoire sur un graphe de Cayley (voir par exemple [Hru10]).
- La théorie des médianes grossières développée par Bowditch (voir [Bow13a]) est au cœur de la preuve, bien qu'elles n'apparaissent pas dans l'énoncé.
- Notre théorème suppose que tous les facteurs du groupe algébrique sont de rang supérieur. Nos méthodes ne permettent pas d'étudier les réseaux irréductibles dans des produits de groupes de rang 1. Cependant, dans ce cas Bader et Furman peuvent montrer que si un tel réseau  $\Gamma \subset G_1 \times G_2$  a une action sans orbite bornée de  $X$  et sans orbite finie dans le bord  $\partial_\infty X$ , alors on peut étendre l'action de  $\Gamma$  à l'un des facteurs sur une partie fermée du bord  $\partial_\infty X$ .
- La plupart des résultats de rigidité concernant les réseaux de rang supérieur utilisent souvent la cohomologie bornée, la superrigidité de Margulis ou bien la propriété (T) renforcée de Margulis, tandis que notre preuve utilise essentiellement d'autres outils.

Dans [Man06], Manning s'intéresse aux quasi-actions de groupes sur des arbres. Il dit qu'un groupe  $G$  a la propriété QFA si toute quasi-action sur un arbre a des orbites bornées. Il montre que, si  $n \geq 3$ , le groupe  $SL(n, \mathbb{Z})$  a la propriété QFA (ou plus généralement  $SL(n, \mathcal{O})$ , où  $\mathcal{O}$  est l'anneau des entiers d'un corps de nombres) (voir [Man06, Corollary 4.5]). L'argument principal de Manning est que  $SL(n, \mathbb{Z})$  est bornément engendré par les matrices élémentaires, ce qui n'est plus vrai pour des réseaux plus généraux. Une conséquence immédiate du théorème 2.22 est la suivante.

**Corollaire 2.23.** *Soit  $\Gamma$  comme dans le théorème 2.22. Alors  $\Gamma$  a la propriété QFA : toute quasi-action de  $\Gamma$  par isométries sur un arbre a des orbites bornées.*

Une autre conséquence importante est de donner une nouvelle preuve du résultat suivant.

**Corollaire 2.24** (Farb-Kaimanovich-Masur [FM98]). *[KM96] Soit  $\Gamma$  comme dans le théorème 2.22, et soit  $S_{g,p}$  une surface orientable compacte de genre  $g$  avec  $p$  pointes. Alors tout morphisme de  $\Gamma$  dans le groupe modulaire  $Mod(S_{g,p})$  est d'image finie.*

La preuve de Farb, Masur et Kaimanovich repose notamment sur le théorème du sous-groupe normal de Margulis. Notre idée est ici d'apporter une preuve simple et très géométrique. Pour cela, on se sert de l'action induite de  $\Gamma$  sur le complexe des courbes de  $S_{g,p}$ , qui est un graphe hyperbolique d'après Masur et Minsky (voir [MM99] et [HPW15]).

En fait, les mêmes arguments permettent également d'étudier les morphismes à valeurs dans les groupes hiérarchiquement hyperboliques (voir la partie 3.2.6). Des exemples de tels groupes sont les groupes hyperboliques, les groupes modulaires de surface, les groupes d'Artin à angles droits, et ils sont stables par hyperbolicité relative.

**Corollaire 2.25.** *Soit  $\Gamma$  comme dans le théorème 2.22, et soit  $G$  un groupe hiérarchiquement hyperbolique. Alors tout morphisme de  $\Gamma$  dans  $G$  est d'image finie.*

Remarquons que, si  $G$  est hyperbolique, un argument simple utilisant les quasi-morphismes ou la propriété (T) renforcée de Lafforgue donne le résultat. Et si  $G$  est un groupe d'Artin à angles droits, la propriété (T) donne également le résultat simplement.

Une autre généralisation des groupes hyperboliques est la famille des groupes acylindriquement hyperboliques, développée notamment par Osin (voir [Osi16]). Un groupe est dit acylindriquement hyperbolique s'il admet une action non-élémentaire acylindrique par isométries sur un espace hyperbolique. Parmi les exemples classiques de tels groupes, on trouve les groupes hyperboliques, relativement hyperboliques, les groupes modulaires de surface, les groupes d'automorphismes de groupes libres, et bien d'autres. D'après Mimura (voir [Mim15]), on dit qu'un sous-groupe  $H$  d'un groupe acylindriquement hyperbolique  $G$  est absolument elliptique si, pour toute action acylindrique de  $G$  sur un espace hyperbolique,  $H$  a une action elliptique. Une conséquence immédiate du théorème 2.22 est la suivante.

**Corollaire 2.26.** *Soit  $\Gamma$  comme dans le théorème 2.22, et soit  $G$  un groupe acylindriquement hyperbolique. Alors tout morphisme de  $\Gamma$  dans  $G$  est d'image absolument elliptique.*

Remarquons que Mimura a prouvé ce résultat pour tous les groupes de Chevalley (même à équivalence mesurée près), dont un cas très particulier est  $SL(n, \mathbb{Z})$  pour  $n \geq 3$  (voir [Mim15, Theorem 1.1]).

Un autre groupe très largement étudié est le groupe  $Out(\mathbb{F}_n)$  des automorphismes extérieurs du groupe libre  $\mathbb{F}_n$  de rang  $n$ . Bridson et Wade ont montré que tout morphisme d'un réseau de rang supérieur à valeurs dans  $Out(\mathbb{F}_n)$  est d'image finie (voir [BW11]). Remarquons que  $Out(\mathbb{F}_n)$  n'est pas hiérarchiquement hyperbolique, donc le Corollaire 2.25 n'apporte pas de nouvelle preuve de ce résultat. De plus, si l'on veut appliquer la même stratégie que dans le cas du groupe modulaire de surface en considérant l'action sur le complexe hyperbolique des scindements libres, la situation est très différente : il y a des sous-groupes de  $Out(\mathbb{F}_n)$  qui ont des orbites bornées sans orbite finie. Néanmoins, Guirardel et Horbez ont montré qu'il était possible de déduire du théorème 2.22 plusieurs résultats de rigidité pour des morphismes à valeurs dans des groupes d'automorphismes extérieurs.

**Corollaire 2.27** (Guirardel-Horbez). *Soit  $\Gamma$  comme dans le théorème 2.22, et soit  $G$  un groupe hyperbolique sans torsion. Alors tout morphisme de  $\Gamma$  dans  $Out(G)$  est d'image finie.*

Le seul cas précédemment connu était pour  $Out(\mathbb{F}_n)$ , dû à Bridson et Wade (voir [BW11]).

## 2.2.2 Les réseaux de rang supérieur n'agissent pas sur des espaces hyperboliques

Nous allons donner les grandes étapes de la preuve du théorème 2.22, et nous renvoyons à l'article [Hae20] pour les détails. Considérons un réseau de rang supérieur  $\Gamma < G$  comme

dans l'énoncé du théorème 2.22, soit  $(X, d_X)$  un espace Gromov-hyperbolique et une action de  $\Gamma$  sur  $X$  par isométries. Nous voulons montrer que cette action est élémentaire.

- **Étape 1 : Induction  $L^1$ .** Nous allons faire une induction de l'action de  $\Gamma$  sur  $X$  pour en déduire une action du groupe algébrique  $G$  sur un espace  $Y = L^1(G \backslash \Gamma, X)$  que nous allons définir en détail. L'utilisation de la norme  $L^1$  nous permet de faire apparaître des médianes et des médianes grossières.
- **Étape 2 : Sous-linéarité de l'action induite.** Nous allons considérer un cône asymptotique de l'application orbitale  $G \rightarrow Y$  pour obtenir une application Lipschitz  $G_\infty \rightarrow Y_\infty$ . D'après la rigidité médiane des immeubles affines, cette application doit être triviale. Ainsi l'action de  $G$  sur  $Y$  est sous-linéaire.
- **Étape 3 : Marche aléatoire sous-linéaire.** En utilisant des techniques de Furstenberg, Lyons-Sullivan et Kaimanovich (voir [Fur71], [LS84] et [Kai92]), nous montrons qu'une discrétisation du mouvement brownien sur  $G$  permet de déduire une marche aléatoire sur  $\Gamma$  dont la vitesse dans  $X$  est sous-linéaire.
- **Étape 4 : Élémentarité de l'action.** Nous utilisons un résultat de Maher et Tiozzo (voir [MT18]) garantissant qu'une telle marche aléatoire à vitesse sous-linéaire dans un espace hyperbolique implique que l'action est élémentaire.

Donnons maintenant quelques détails sur chacune de ces étapes.

### Étape 1 : Induction $L^1$

Notons  $d_X$  la distance sur  $X$ , et fixons un point base  $x_0$ . Choisissons un domaine fondamental fermé mesurable  $U \subset G$  pour l'action de  $\Gamma$  sur  $G$  à droite, i.e. tel que  $G = U\Gamma$ . Notons  $\lambda$  la mesure de proba de Haar sur  $G/\Gamma \simeq U$ . Considérons l'espace

$$\begin{aligned} Y &= L^1(G/\Gamma, X) = \left\{ a : U \rightarrow X \text{ mesurable, } \int_U d_X(a(u), x_0) d\lambda(u) < +\infty \right\} \\ &= \left\{ a : G \rightarrow X \text{ mesurable, } \int_U d_X(a(u), x_0) d\lambda(u) < +\infty, \forall g \in G, \forall \gamma \in \Gamma, a(g\gamma) = \gamma^{-1} \cdot a(g) \right\}. \end{aligned}$$

L'espace  $Y$  est naturellement muni de la distance  $L^1$  notée  $d_Y$  :

$$\forall a, b \in Y, d_Y(a, b) = \int_U d_X(a(u), b(u)) d\lambda(u),$$

ainsi que du point base  $y_0 : u \in U \mapsto x_0$ .

Si l'on note  $\mu_X : X^3 \rightarrow X$  une médiane grossière sur l'espace hyperbolique  $X$ , on peut définir

$$\begin{aligned} \mu_Y : Y^3 &\rightarrow Y \\ (a, b, c) &\mapsto \left( u \in U \mapsto \mu_X(a(u), b(u), c(u)) \right) \end{aligned}$$

On montre sans difficulté la proposition suivante.

**Proposition 2.28.** *L'espace  $(Y, d_Y, \mu_Y)$  est grossièrement médian.*

De plus, on a une action naturelle de  $G$  sur  $Y$  par isométries par précomposition : si  $g \in G$  et  $y \in Y$ , alors  $g \cdot y : G \rightarrow X$  est définie par  $g \cdot y(u) = y(g^{-1}u)$ . On peut ainsi montrer :

**Proposition 2.29.** *L'action de  $G$  sur  $Y$  est bien définie, par isométries.*

Notons que dans le cas où  $\Gamma$  n'est pas un réseau uniforme, la définition de cette action repose sur l'intégrabilité du cocycle  $G \times U \rightarrow \Gamma$ , qui est due à Shalom (voir [Sha00]).

## Étape 2 : Sous-linéarité de l'action induite

Dans cette partie, nous allons montrer que l'action de  $G$  sur  $Y$  est proche d'une action triviale, plus précisément (où on note  $d_G$  une distance des mots sur  $G$  définie par un voisinage compact de  $e$ ) :

**Théorème 2.30.** *Les orbites de  $G$  dans  $Y$  sont à croissance sous-linéaire, i.e.*

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_{g \in G, d_G(e, g) \leq R} \frac{d_Y(g \cdot y_0, y_0)}{R} = 0.$$

En particulier, ceci implique qu'aucun élément de  $G$  n'agit sur  $Y$  de façon loxodromique, i.e. avec une distance de translation strictement positive. Afin de montrer ce résultat, on peut tout d'abord se ramener au cas où le groupe  $G$  est de  $\mathbb{K}$ -rang deux, ce que l'on fera par la suite. Puis on se ramène à montrer le cas particulier suivant :

**Proposition 2.31.** *Aucun élément de  $G$  n'agit de manière loxodromique sur  $Y$ .*

Pour prouver cette proposition, nous allons montrer la contraposée : si un élément de  $G$  agit de manière loxodromique, alors  $G$  est un produit de deux groupes de rang 1.

Pour cela, nous allons utiliser un cône asymptotique de  $Y$ . Fixons un ultrafiltre non principal  $\omega$  sur  $\mathbb{N}$ , et la suite de réels  $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ . Notons  $(Y_\infty, d_\infty, y_\infty)$  le cône asymptotique de  $(Y, d_Y, y_0, \frac{1}{n})$  pour cet ultrafiltre  $\omega$ .

D'après Bowditch (voir [Bow13a], ainsi que la partie 2.1.3), tout cône asymptotique d'un espace grossièrement médian est Lipschitz médian, mais pas nécessairement métrique médian. Cependant, on sait que le cône asymptotique d'un espace hyperbolique est un arbre réel, a fortiori un espace métrique médian. Ainsi il est naturel d'obtenir le résultat suivant, où nous notons  $\mu_\infty$  l'ultralimite de la médiane  $\mu_Y$ .

**Proposition 2.32.** *Le cône asymptotique  $(Y_\infty, d_\infty, \mu_\infty)$  est métrique médian.*

Notons  $(G_\infty, d_{G_\infty}, e_\infty)$  le cône asymptotique de  $(G, d_G, e, \frac{1}{n})$  selon l'ultrafiltre  $\omega$ . D'après Kleiner et Leeb (voir [KL97, Theorem 1.2.1]),  $G_\infty$  est un immeuble affine. Nous allons étudier l'action de  $G$  sur  $Y$  au travers de l'application orbitale, qui passe au cône asymptotique en

$$\begin{aligned} \Phi : G_\infty &\rightarrow Y_\infty \\ (g_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto (g_n \cdot y_0)_{n \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

**Lemme 2.33.** *L'application  $\Phi$  est bien définie, et Lipschitz.*

Le passage au cône asymptotique nous permet de montrer le résultat suivant.

**Lemme 2.34.** *Supposons qu'un élément régulier  $g \in G$  agisse de manière loxodromique sur  $Y$ , et soit  $A$  le sous-groupe de Cartan de  $G$  contenant  $g$ . Alors, pour tous  $a, b \in A$  et tout  $s \in \mathbb{R}$ , l'application suivante :*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow Y_\infty \\ t &\mapsto \lim_{\omega} a^{\lfloor tn \rfloor} b^{\lfloor sn \rfloor} \end{aligned}$$

*est une géodésique de vitesse constante dans  $Y_\infty$ .*

En utilisant des conjugués de  $A$ , on peut améliorer ce résultat pour en déduire que  $\Phi$  est presque un plongement isométrique, sur une famille suffisamment épaisse d'appartements :

**Proposition 2.35.** Soit  $(B, d_B)$  un immeuble affine, et soit  $(M, d_M)$  un espace métrique médian. Supposons qu'il existe une application  $\Phi : B \rightarrow M$ , un point base  $b_0 \in B$  et un ensemble  $\mathcal{A}$  d'appartements de  $B$  contenant  $b_0$  tels que :

1. Il existe  $A \in \mathcal{A}$  tel que, pour tout hyperplan singulier  $H$  dans  $A$ , il existe  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$  tels que  $A \cap A_1, A \cap A_2, A_1 \cap A_2$  soient trois demi-appartements distincts bordés par  $H$ .
2. Pour tout  $A' \in \mathcal{A}$  et pour toute géodésique  $L$  de  $A'$ , l'image  $\Phi(L)$  est une géodésique de  $M$ .

Alors  $B$  est de type sphérique  $A_1^r$ , c'est-à-dire un produit d'arbres réels.

Les arguments pour démontrer ce résultat reposent sur les mêmes méthodes que celles utilisées pour démontrer le théorème 2.1, notamment la propriété de séparation par des murs convexes dans un espace médian.

On peut ensuite appliquer la proposition 2.35 avec  $B = G_\infty$  et  $M = Y_\infty$ , pour l'application orbitale  $\Phi : G_\infty \rightarrow Y_\infty$ .

### Étape 3 : Marche aléatoire sous-linéaire

Dans cette partie, nous allons construire une marche aléatoire sur  $\Gamma$  dont la vitesse dans l'action sur  $X$  est sous-linéaire, plus précisément :

**Proposition 2.36.** Avec les notations du théorème 2.22, il existe une mesure de probabilité  $\nu$  sur  $\Gamma$  (de support infini, engendrant  $\Gamma$ ) telle que la marche aléatoire associée  $(\gamma_n \cdot x_0)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $X$  a une vitesse nulle :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}[d_X(\gamma_n \cdot x_0, x_0)]}{n} = 0.$$

Remarquons que, si  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  était une marche aléatoire de vitesse nulle dans  $\Gamma$ , alors  $(\gamma_n \cdot x_0)_{n \in \mathbb{N}}$  serait de vitesse nulle dans  $X$ . Cependant, on sait que dès que le premier moment de  $\nu$  est fini, la marche aléatoire  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de vitesse non nulle dans  $\Gamma$  (voir [Fur71] et [KM96]).

Considérons tout d'abord le cas où  $\mathbb{K}$  est un corps local archimédien. La stratégie de preuve va consister à suivre la méthode de discrétisation du mouvement brownien sur l'espace symétrique de  $G$  due à Lyons-Sullivan (voir [LS84]), Ballmann-Ledrappier (voir [BL96]) et Kaimanovich (voir [Kai92]).

Notons  $K$  un sous-groupe compact maximal de  $G$ , et  $M = G/K$  l'espace symétrique de type non compact associé. Soit  $d_M$  la distance riemannienne  $G$ -invariante sur  $M$ . Soit  $p_0 = [K] \in M$  un point base, et soit  $(p_t)_{t \geq 0}$  le mouvement brownien issu sur  $M$  de  $p_0$ . Notons  $\omega \in U$  une variable aléatoire de loi  $\lambda$  (la mesure de probabilité de Haar), indépendante de  $(p_t)_{t \geq 0}$ . Considérons, pour tout  $t \geq 0$ , la variable  $q_t = \omega^{-1} \cdot p_t$  : le processus  $(q_t)_{t \geq 0}$  s'identifie au mouvement brownien sur  $M$  issu de  $\omega^{-1} \cdot p_0$ .

La procédure de discrétisation de Lyons-Sullivan et Kaimanovich (voir [LS84], [BL96] et [Kai92]) appliquée au processus  $(q_t)_{t \geq 0}$  donne :

**Théorème 2.37** (Lyons-Sullivan, Ballmann-Ledrappier, Kaimanovich). *Il existe une constante  $C \geq 0$ , des temps d'arrêt  $(T_k)_{k \geq 1}$  et une marche aléatoire  $(\gamma_k)_{k \geq 1}$  de loi  $\nu$  sur  $\Gamma$  tels que*

$$\forall k \geq 1, d_M(\omega^{-1} \cdot p_{T_k}, \gamma_k \cdot p_0) \leq C.$$



Pour appliquer ce résultat, il faut s'assurer qu'une réunion de boules dans  $M$  centrées en les points d'une orbite de  $\Gamma$  est récurrente pour le mouvement brownien, ce qui est bien le cas car  $\Gamma \backslash M$  est de volume fini. Essentiellement, les temps d'arrêts  $(T_k)_{k \geq 1}$  correspondent à des temps d'atteinte de cette réunion, subtilement choisis afin de garantir la propriété de Markov.

Pour tout  $k \geq 1$ , notons  $g_k \in G$  une variable aléatoire telle que  $p_{T_k} = g_k \cdot p_0$  presque sûrement. On en déduit que

$$\mathbb{E}[d_Y(g_k \cdot y_0, y_0)] = \mathbb{E}\left[\int_U d_X(y_0(g_k^{-1}\omega), x_0)d\lambda(\omega)\right] = \mathbb{E}[d_X(y_0(g_k^{-1}\omega), x_0)].$$

Il existe une constante  $C' \geq 0$  telle que  $d_G(g_k, \omega\gamma_k) \leq C'$  presque sûrement. Ainsi il existe une constante  $C'' \geq 0$  telle que  $|d_X(y_0(g_k^{-1}\omega), x_0) - d_X(\gamma_k^{-1} \cdot x_0, x_0)| \leq C''$  presque sûrement. D'où

$$|\mathbb{E}[d_Y(g_k \cdot y_0, y_0)] - \mathbb{E}[d_X(\gamma_k \cdot x_0, x_0)]| \leq C''.$$

Comme la quantité  $\mathbb{E}[d_Y(g_k \cdot y_0, y_0)]$  est sous-linéaire en  $k$  d'après la proposition 2.36, on en déduit que la quantité  $\mathbb{E}[d_X(\gamma_k \cdot x_0, x_0)]$  est sous-linéaire en  $k$ , c'est-à-dire que la marche aléatoire  $(\gamma_n \cdot x_0)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $X$  a une vitesse nulle.

Dans le cas où  $\mathbb{K}$  est non archimédien, la stratégie est entièrement similaire, mais sensiblement plus simple. En effet, à la place d'utiliser le mouvement brownien sur l'espace symétrique, on peut se contenter de considérer une marche aléatoire simple sur le 1-squelette de l'immeuble de  $G$ , qui est déjà discret. L'orbite par  $\Gamma$  d'un sommet est récurrente, les temps d'atteinte de cette orbite forment les temps d'arrêt  $(T_k)_{k \geq 1}$ , et la propriété de Markov est ici automatique. Le reste de la preuve est identique.

#### Étape 4 : Élémentarité de l'action

Il nous suffit ici de faire appel au résultat suivant, dû à Maher et Tiozzo :

**Théorème 2.38** (Maher-Tiozzo [MT18]). *Soit  $\Gamma$  un groupe dénombrable ayant une action non élémentaire par isométries sur un espace Gromov-hyperbolique séparable  $X$ , et soit  $\nu$  une mesure de probabilité sur  $\Gamma$  dont le support engendre  $\Gamma$ . Fixons un point base  $x_0 \in X$ . Alors la marche aléatoire  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de loi  $\nu$  sur  $\Gamma$  a une vitesse positive dans  $X$ , c'est-à-dire :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}[d_X(\gamma_n \cdot x_0, x_0)]}{n} > 0.$$

Ceci nous permet de conclure l'idée générale de preuve du théorème 2.22. Avec les notations du théorème 2.22, si  $\Gamma$  agit par isométries sur un espace Gromov-hyperbolique  $X$ , la proposition 2.36 construit une marche aléatoire sur  $\Gamma$  dont la vitesse dans  $X$  est nulle. D'après le théorème 2.38, on en déduit que l'action de  $\Gamma$  sur  $X$  est élémentaire.

Il reste donc quatre possibilités pour l'action de  $\Gamma$  sur  $X$  : elliptique, linéale, parabolique ou quasi-parabolique. D'après Burger et Monod (voir [BM02]), tout quasi-morphisme de  $\Gamma$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est borné, donc l'action ne peut être linéale ni quasi-parabolique. L'action est donc elliptique ou parabolique.

# Chapitre 3

## Actions sur des espaces hyperboliques

### 3.1 Actions propres sur des espaces $L^p$

Nous allons présenter ici les résultats de la prépublication [CDHL19], avec Indira Chatterji, François Dahmani et Jean Lécureux.

#### 3.1.1 Énoncés des résultats

Soit  $G$  un groupe localement compact, dénombrable à l'infini, et  $V$  un espace vectoriel normé. Rappelons qu'une action par isométries affines de  $G$  sur  $V$  revient à la donnée d'une représentation linéaire  $\lambda : G \rightarrow \text{Isom}(V)$  et d'un cocycle  $c : G \rightarrow V$ , c'est-à-dire satisfaisant l'équation

$$\forall g, h \in G, c(gh) = c(g) + \lambda(g) \cdot c(h).$$

Rappelons que  $c$  est un cobord, c'est-à-dire qu'il existe  $v \in V$  tel que pour tout  $g \in G$  nous ayons  $c(g) = v - \lambda(g) \cdot v$ , si et seulement si  $G$  a un point fixe dans  $V$ . À l'opposé, le cocycle  $c$  est propre si et seulement si l'action de  $G$  sur  $V$  est métriquement propre.

Si  $V$  est un espace de Hilbert,  $G$  a la propriété (T) de Kazhdan si et seulement si toute action par isométries affines sur  $V$  a un point fixe (voir [BdlHV08]). À l'opposé,  $G$  a la propriété de Haagerup s'il admet une action propre par isométries affines (voir [CCJ+01]). Une conséquence notable de la propriété de Haagerup est la conjecture de Baum-Connes (voir [HK01]). Par exemple, tout groupe ayant une action propre sur un complexe cubique CAT(0) a une action propre sur un espace de Hilbert.

Nous allons nous intéresser ici au cas où  $V$  est un espace  $L^p$ , avec  $p > 1$ . Tout groupe hyperbolique a une action propre sur un espace  $L^p$ , pour un certain  $p > 1$  (voir [Yu05], [AL17] et [Nic13]). Cependant, on peut remarquer que pour les groupes hyperboliques ayant la propriété (T) (comme par exemple les réseaux de  $\text{Sp}(n, 1)$  d'après Kostant, voir [Kos69]) on a nécessairement  $p > 2$ .

On dira qu'une mesure de Radon  $\mu$  sur un espace hyperbolique géodésique  $X$  localement compact est *non écrasée* s'il existe  $C \geq 0$  et  $v > 0$  tels que pour tout  $x \in X$ , on ait  $\mu(B(x, C)) \geq v$ . Par exemple, la mesure de comptage sur un graphe localement fini est non écrasée, ainsi que la forme volume sur une variété riemannienne simplement connexe complète de courbure sectionnelle négative ou nulle. Rappelons également que l'entropie volumique de  $\mu$  est le taux de croissance exponentielle de la mesure pour  $\mu$  des boules dans  $X$ .

**Théorème 3.1.** *Soit  $\delta \geq 0$ , soit  $X$  un espace métrique localement compact géodésique  $\delta$ -hyperbolique, et soit  $\mu$  une mesure de Radon non écrasée sur  $X$ . Notons  $h \geq 0$  l'entropie volumique de  $\mu$ . Supposons qu'un groupe localement compact, dénombrable à l'infini  $G$  agisse proprement par isométries sur  $X$  en préservant  $\mu$ . Alors, pour tout  $p > \max\left(1, \frac{h\delta}{\log(2)}\right)$ , le groupe  $G$  agit proprement par isométries affines sur un espace  $L^p$ .*

Par rapport aux travaux précédents, notamment Yu (voir [Yu05]) et Alvarez et Laforgue (voir [AL17]), l'un des intérêts de notre travail est de proposer une construction relativement simple, et d'autre part de donner une valeur explicite de l'exposant  $p$ .

Remarquons qu'il n'y a pas d'espoir d'améliorer ce résultat pour inclure tous les groupes acylindriquement hyperboliques : en effet, Minasyan et Osin (voir [MO19]) ont montré que certains groupes acylindriquement hyperboliques ont la propriété de point fixe pour tous les espaces  $L^p$ , avec  $p < \infty$ .

Rappelons qu'une variété de Hadamard est une variété riemannienne complète, simplement connexe, de courbure sectionnelle négative ou nulle. Si  $0 < \alpha \leq 1$ , on dit que sa courbure est  $\alpha$ -pincée si sa courbure sectionnelle est dans un intervalle  $[\kappa, \alpha\kappa]$ , où  $\kappa < 0$ . Le corollaire suivant du théorème 3.1 s'applique en particulier au cas d'une action géométriquement finie :

**Corollaire 3.2.** *Soit  $M$  une variété de Hadamard  $\alpha$ -pincée de dimension  $n$ , et soit  $G$  un groupe localement compact dénombrable à l'infini agissant proprement discontinûment par isométries sur  $M$ . Alors, pour tout  $p > \frac{n-1}{\sqrt{\alpha}}$ , le groupe  $G$  agit proprement par isométries affines sur un espace  $L^p$ .*

Une autre conséquence est de donner une preuve alternative du résultat suivant :

**Corollaire 3.3** (Cornulier Tessera Valette [dTV08]). *Soit  $G$  un groupe algébrique simple de rang 1 sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et soit  $\delta_H$  la dimension de Hausdorff du bord visuel de l'espace symétrique de  $G$ . Alors pour tout  $p > \max(1, \delta_H)$ , le groupe  $G$  agit proprement par isométries affines sur un espace  $L^p$ .*

### 3.1.2 Construction de l'action

Nous allons ici donner les idées de la preuve du théorème 3.1. Nous introduisons une notion de fibré tangent à un espace métrique adaptée à nos besoins.

**Définition 3.4.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique localement compact, et  $\mu$  une mesure de Radon sur  $X$ . On dit que  $X$  a un fibré tangent  $TX$  si :

1.  $TX$  est un espace polonais, muni d'une application borélienne  $\pi : TX \rightarrow X$ .
2. Pour tout  $a \in X$ , la fibre  $\pi^{-1}(a)$  est un espace de Banach noté  $T_aX$ .
3. Il existe une application mesurable  $X \times X \rightarrow TX$  notée  $(a, x) \mapsto \vec{ax}$  telle que  $\vec{ax} \in T_aX$  pour tous  $a, x \in X$ , et  $\vec{aa} = 0$  pour tout  $a \in X$ .

De plus, si  $\kappa \leq 0$ , on dit que  $TX$  est à courbure au plus  $\kappa$  si, pour tout  $C \geq 0$ , il existe  $D_C \geq 0$  tel que, pour tous  $a, x, y \in X$  tels que  $d(x, y) \leq C$ , on ait

$$\|\vec{ax} - \vec{ay}\| \leq D_C e^{\kappa d(a, x)}.$$

Et on dit que  $TX$  est propre s'il existe une fonction propre  $f : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  telle que, pour tous  $x, y \in X$  et pour tout  $p > 1$ , on ait

$$\int_{a \in X} \|\vec{ax} - \vec{ay}\|^p d\mu(a) \geq f(d(x, y)).$$

Si un groupe  $G$  agit par isométries sur  $X$  en préservant la mesure  $\mu$ , on dit que  $TX$  est  $G$ -équivariant si, pour tous  $a \in X$  et  $g \in G$ , il existe une isométrie  $\Phi_g : T_a X \rightarrow T_{g \cdot a} X$  telle que

$$\forall x \in X, \Phi_g(\overrightarrow{ax}) = \overrightarrow{(g \cdot a)(g \cdot x)}.$$

Cette définition englobe en fait plusieurs exemples.

### Exemples.

1. Soit  $X$  une variété riemannienne uniquement géodésique, avec  $\mu$  la mesure de volume, et notons  $TX$  son fibré tangent usuel. Pour tous  $a \neq x$  dans  $X$ , notons  $\overrightarrow{ax}$  le vecteur unité tangent sur la géodésique de  $a$  à  $x$ . Ceci est un fibré tangent au sens de la définition ci-dessus. Si la courbure sectionnelle de  $X$  est au plus  $\kappa$ , alors le fibré tangent est de courbure au plus  $\kappa$ . Ce fibré tangent est équivariant par rapport au groupe des isométries de  $X$ . Remarquons également que, contrairement à ce que la notation pourrait laisser penser, le vecteur  $\overrightarrow{ax}$  est toujours de norme 1 dans cet exemple.
2. Soit  $X$  un arbre simplicial localement fini, muni de la distance de graphe et de la mesure de comptage. Pour tout sommet  $a \in X$ , notons  $T_a X$  l'espace euclidien  $\ell^2(\text{Lk}(a), \mathbb{R})$ , où  $\text{Lk}(a)$  désigne l'ensemble des sommets adjacents à  $a$ . Notons  $TX$  la réunion disjointe des ensembles  $T_a X$ . Pour tous  $a \neq x$  sommets de  $X$ , notons  $\overrightarrow{ax}$  la fonction indicatrice du voisin de  $a$  le plus proche de  $x$ . Ainsi  $TX$  est un fibré tangent propre, équivariant pour le groupe des isométries de  $X$ , de courbure au plus  $\kappa$  pour tout  $\kappa \leq 0$ .
3. (Alvarez-Lafforgue, voir [AL17]) Soit  $X$  un graphe hyperbolique de degré borné, muni de la distance de graphe et de la mesure de comptage. Notons  $\delta$  une constante d'hyperbolicité, et pour tout  $a \in X$ , notons  $T_a X$  l'espace euclidien des applications de  $B(a, 4\delta)$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $TX$  la réunion disjointe des  $T_a X$ . Pour tous  $a \neq x$  dans  $X$ , notons  $\overrightarrow{ax} \in T_a X$  l'application  $\mu_x(a) : B(a, 4\delta) \rightarrow \mathbb{R}$  construite par Alvarez et Lafforgue dans [AL17, Théorème 4.1]. Alors  $TX$  est un fibré tangent propre, invariant par le groupe des isométries de  $X$ , de courbure négative. Dans cette construction, le vecteur  $\overrightarrow{ax}$  est de norme 1 pour la norme  $\ell^1$  sur  $T_a X$ .

La notion de fibré tangent nous permet de définir naturellement un espace de fonctions muni d'une norme  $L^p$ .

**Définition 3.5.** Soit  $(X, d, \mu)$  un espace métrique localement compact, et  $\mu$  une mesure de Borel. Supposons que  $TX$  est un fibré tangent. Pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ , définissons  $L^p(X, TX)$  comme l'ensemble des fonctions mesurables  $f : X \rightarrow TX$  telles que  $f(x) \in T_x X$  pour tout  $x \in X$ , et

$$\|f\|_p = \left( \int_{x \in X} \|f(x)\|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

**Remarque.** Supposons de plus qu'il existe un espace mesuré  $\Omega$  tel qu'il existe un isomorphisme borélien entre  $TX$  et  $X \times L^p(\Omega)$ , où  $\pi : TX \rightarrow X$  correspond à la première projection. Alors il existe un espace mesuré  $Z$  tel que  $L^p(X, TX) = L^p(Z)$ .

L'intérêt de notre notion de fibré tangent est qu'elle permet de construire facilement une action propre sur  $L^p(X, TX)$ .

**Théorème 3.6.** Soit  $(X, d, \mu)$  un espace métrique localement compact, et  $\mu$  une mesure de Radon d'entropie volumique finie  $h$ . Soit  $G$  un groupe localement compact à base dénombrable agissant par isométries sur  $X$  en préservant la mesure  $\mu$ . Supposons qu'il existe un fibré tangent  $TX$  qui soit  $G$ -équivariant de courbure au plus  $\kappa < 0$ . Alors, pour tout  $p > \frac{h}{|\kappa|}$ , le groupe  $G$  a une action par isométries affines sur  $L^p(X, TX)$ , qui est propre dès que  $TX$  est propre.

Nous allons simplement donner ici la définition de l'action affine de  $G$  sur  $L^p(X, TX)$ . Fixons  $p > \frac{h}{|\kappa|}$ , et notons  $V = L^p(X, TX)$ . L'action linéaire isométrique  $\alpha$  de  $G$  sur  $V$  est donnée par

$$\forall g \in G, \forall f \in V, \forall x \in X, \alpha_g(f)(x) = \Phi_g(f(g^{-1} \cdot x)).$$

Remarquons que  $\alpha_g(f)(x) \in \Phi_g(T_{g^{-1} \cdot x} X) = T_x X$ . Fixons un point base  $o \in X$ , et posons  $f_o : X \rightarrow TX$  l'application qui à  $x \in X$  associe  $\overline{x}o \in T_x X$ . Définissons le cocycle

$$\begin{aligned} c : G &\rightarrow V \\ g &\mapsto f_o - \alpha_g(f_o). \end{aligned}$$

L'hypothèse de courbure permet de montrer que  $c$  est bien défini, et l'hypothèse de propreté de  $TX$  permet de montrer que  $c$  est un cocycle propre.

Pour démontrer le théorème 3.1, il nous reste donc à construire un fibré tangent à partir des hypothèses de l'énoncé, qui soit à la fois propre et à courbure négative. Plus précisément, voici le résultat que nous montrons :

**Proposition 3.7.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique localement compact, géodésique,  $\delta$ -hyperbolique. Soit  $\mu$  une mesure de Radon non écrasée sur  $X$ , d'entropie volumique finie  $h$ . Soit  $G$  un groupe localement compact à base dénombrable agissant par isométries sur  $X$  en préservant la mesure  $\mu$ . Soit  $0 < \varepsilon < \frac{\log(2)}{\delta}$ . Alors il existe un fibré tangent  $TX$  qui soit  $G$ -équivariant, propre, de courbure au plus  $-\varepsilon$ .*

La construction de ce fibré tangent repose sur une adaptation de [GdlH90, Proposition 7.10] suggérée dans [AL18]. L'idée est de définir une notion pertinente d'angle, qui généralise celle d'une variété CAT(-1).

Rappelons que si  $a, x, y$  sont trois points d'un espace métrique, le produit de Gromov est

$$(x|y)_a = \frac{1}{2}(d(x, a) + d(y, a) - d(x, y)).$$

La quantité  $e^{-(x|y)_a}$  peut jouer le rôle d'angle entre  $x$  et  $y$  vu de  $a$ , mais elle n'est pas assez précise pour obtenir la propriété de courbure négative souhaitée : en particulier, cette quantité n'est pas une distance (sauf si  $X$  est un arbre). C'est pour cela que nous devons construire une vraie distance ressemblant à cette quantité.

**Proposition 3.8.** *Soit  $X$  un espace métrique géodésique  $\delta$ -hyperbolique, et soient  $\varepsilon, D > 0$  tels que  $0 < \varepsilon \leq \frac{\log(2)}{\delta + D}$ . Il existe des constantes  $\alpha, \beta > 0$ , et pour tout  $a \in X$ , il existe une pseudo-distance  $d_\varepsilon^a$  sur  $X$ , équivariante sous l'action du groupe des isométries de  $X$ , telles que*

1.  $\forall x, y \in X, d_\varepsilon^a(x, y) \leq \beta e^{-\varepsilon(x|y)_a}$ , et
2.  $\forall x, y \in X$  tels que  $d(x, y) \geq 2D$ , on a  $\alpha e^{-\varepsilon(x|y)_a} \leq d_\varepsilon^a(x, y)$ .

Nous pouvons maintenant donner les idées de la construction de  $TX$  sous les hypothèses de la proposition 3.7.

Pour tout  $a \in X$ , notons  $T_a X = L^p(X, \mathbb{R}, \mu)$  et  $TX = \bigcup_{a \in X} T_a X = X \times L^p(X, \mathbb{R}, \mu)$ , muni de la topologie produit. Fixons un point base  $o \in X$ , et considérons la fonction

$$\begin{aligned} f : [0, +\infty[ &\rightarrow [0, +\infty[ \\ r &\mapsto \mu(B(o, r)). \end{aligned}$$

Pour tous  $a, x \in X$ , définissons  $\overline{a}x \in T_a X = L^p(X, \mathbb{R}, \mu)$  par :

$$\forall \xi \in X, \overline{a}x(\xi) = d_\varepsilon^a(x, \xi) \frac{e^{-d(a, \xi)}}{f(d(a, \xi))^{\frac{1}{p}}}.$$

Au facteur de normalisation près, cette quantité  $\overline{a}x(\xi)$  est donc proche de  $d_\varepsilon^a(x, \xi)$ , qui représente un angle entre  $x$  et  $\xi$  vu de  $a$ .

On peut montrer que cette construction vérifie les conclusions de la proposition 3.7.

## 3.2 Hyperbolicité hiérarchique, propriété de Helly grossière et espaces raccourcis

### 3.2.1 Description des trois familles d'espace métriques

Nous allons présenter ici les résultats de la prépublication [HHP20], avec Nima Hoda et Harry Petyt.

Nous allons nous intéresser à trois familles d'espaces métriques à courbure négative ou nulle : les espaces hiérarchiquement hyperboliques, les espaces grossièrement Helly et les espaces fortement raccourcis.

La première famille d'espaces sont les espaces hiérarchiquement hyperboliques, qui ont été introduits par Behrstock, Hagen et Sisto dans [BHS19]. Ces espaces métriques viennent avec une famille de projections vers des espaces hyperboliques, dont la géométrie ressemble à celles des groupes modulaires de surfaces, en considérant les projections vers les complexes de courbes de sous-surfaces. Nous renvoyons à la partie 3.2.6 pour plus de détails. Cette famille englobe un certain nombre d'exemples intéressants, notamment plusieurs quotients de groupes modulaires de surfaces (voir [BHMS20]) ainsi que tous les groupes cubulables connus (voir [HS20a]).

La seconde famille d'espaces métriques que nous considérons sont les espaces grossièrement Helly. Un espace métrique est *grossièrement Helly* s'il existe  $\delta \geq 0$  tel que, pour toute famille  $\{B(x_i, r_i)\}_{i \in I}$  de boules telle que  $\forall i, j \in I, d(x_i, x_j) \leq r_i + r_j$ , les  $\delta$ -voisinages de ces boules ont une intersection totale non vide. Cette propriété a été introduite dans [CE07], et son nom provient de la propriété de Helly classique pour les graphes : un graphe localement fini est Helly si toute famille de boules s'intersectant deux à deux a une intersection totale non vide.

Cette notion est étroitement reliée à celle d'espaces métriques injectifs. Un espace métrique est *injectif* (aussi appelé hyperconvexe) si, pour toute famille  $\{B(x_i, r_i)\}_{i \in N}$  de boules telle que  $\forall i, j \in I, d(x_i, x_j) \leq r_i + r_j$ , ces boules ont une intersection totale non vide. Un résultat dû à Isbell (voir [Isb64]) montre que tout espace métrique  $X$  se plonge isométriquement dans un espace injectif minimal  $E(X)$  essentiellement unique, appelé *enveloppe injective* de  $X$ . Une belle description de cette construction est donnée par Lang, voir [Lan13].

Les espaces métriques injectifs jouissent de nombreuses propriétés de courbure négative ou nulle : ils ont un bipeignage géodésique conique, et tout groupe ayant une orbite bornée a un point fixe (voir [Lan13]). De plus, tout groupe agissant proprement et cocompactement sur un graphe Helly est biautomatique (voir [CCG<sup>+</sup>20, Theorem 1.5]).

Il y a un lien étroit entre les espaces grossièrement Helly et les espaces injectifs : un espace métrique  $X$  est grossièrement Helly si et seulement si son image dans  $E(X)$  est quasi-dense (voir [CCG<sup>+</sup>20, Proposition 3.12]).

La troisième famille d'espaces métriques est celle des espaces fortement raccourcis, qui a été introduite et étudiée par Hoda (voir [Hod18], [Hod20b]). Un espace métrique  $X$  est *fortement raccourci* s'il existe  $K > 1$  tel que, pour tout  $C > 0$ , il existe une borne sur les longueurs des cercles  $(K, C)$ -isométriquement plongés dans  $X$ . Un groupe est dit fortement raccourci s'il a une action propre et cocompacte sur un espace fortement raccourci. Tout groupe fortement raccourci est de présentation finie et a une fonction de Dehn polynomiale. Beaucoup de groupes classiques à courbures négative ou nulle sont fortement raccourcis, notamment les groupes hyperboliques, les groupes CAT(0), les groupes systoliques et les groupes à petite simplification.

### 3.2.2 Comparaison entre ces trois familles

Notre résultat principal consiste en la construction d'une nouvelle distance sur les espaces hiérarchiquement hyperboliques, ou plus généralement sur les espaces grossièrement médians satisfaisant une propriété d'approximation forte par des complexes cubiques  $\text{CAT}(0)$ . En effet, lorsqu'un complexe cubique  $\text{CAT}(0)$  localement fini est muni de la métrique  $\ell^\infty$  par morceaux, on obtient un espace métrique injectif. Plus généralement, Bowditch définit pour tout espace métrique médian de rang fini une distance injective (voir [Bow20]). Notre construction est directement inspirée de celle de Bowditch, et la distance que nous définissons est grossièrement géodésique et ses boules sont grossièrement convexes pour la médiane. Ceci nous permet de montrer que cette nouvelle distance vérifie la propriété de Helly grossière.

**Théorème 3.9.** *Soit  $(X, \mathfrak{S})$  un espace hiérarchiquement hyperbolique, avec distance  $d$ . Il existe une distance  $\sigma$  sur  $X$  telle que  $(X, \sigma)$  est grossièrement Helly, et quasi-isométrique à  $(X, d)$ . De plus,  $\sigma$  est invariante par rapport au groupe des automorphismes de  $(X, \mathfrak{S})$ .*

Rappelons qu'un peignage quasi-géodésique d'un espace métrique  $(X, d)$  est une application  $\gamma : X \times X \times [0, 1] \rightarrow X$  telle que, pour tous  $a, b \in X$ , l'application  $t \mapsto \gamma(a, b, t)$  est une quasi-géodésique de  $a$  à  $b$ . Ce peignage est un bipeignage *grossièrement conique* si

$$\exists C \geq 0, \forall a, b, a', b' \in X, \forall t \in [0, 1], d(\gamma(a, b, t), \gamma(a', b', t)) \leq (1-t)d(a, a') + td(b, b') + C.$$

On dit de plus qu'un bipeignage est *grossièrement réversible* si

$$\exists C \geq 0, \forall a, b \in X, \forall t \in [0, 1], d(\gamma(a, b, t), \gamma(b, a, 1-t)) \leq C.$$

D'après Lang (voir [Lan13]), tout espace métrique injectif admet un bipeignage géodésique conique réversible. Nous en déduisons ainsi le résultat suivant.

**Corollaire 3.10.** *Soit  $(X, \mathfrak{S})$  un espace hiérarchiquement hyperbolique. Alors  $X$  admet un bipeignage quasi-géodésique grossièrement conique et grossièrement réversible, qui est grossièrement équivariant par rapport au groupe des automorphismes de  $(X, \mathfrak{S})$ . De plus, les lignes du peignage sont des géodésiques grossières pour la distance  $\sigma$ .*

Remarquons que ce résultat s'applique également à l'action du groupe modulaire d'une surface sur l'espace de Teichmüller, muni de la métrique de Teichmüller ou de Weil-Petersson, comme l'ont remarqué Durham, Minsky et Sisto (voir [DMS20]).

Notre second résultat principal concerne les espaces métriques grossièrement Helly de géométrie bornée. Rappelons qu'un espace métrique est de géométrie bornée si, pour tout rayon  $R \geq 0$ , le cardinal des boules de rayon  $R$  est uniformément borné.

**Théorème 3.11.** *Soit  $X$  un espace métrique grossièrement Helly, de géométrie bornée. Alors  $X$  est fortement raccourci.*

En combinant les théorèmes 3.9 et 3.11, on en déduit le résultat suivant.

**Corollaire 3.12.** *Pour tout espace hiérarchiquement hyperbolique  $(X, d)$ , il existe une distance grossièrement géodésique  $\sigma$  quasi-isométrique à  $d$  telle que  $(X, \sigma)$  soit fortement raccourci.*

On peut également remarquer que les trois familles d'espaces métriques sont distinctes. Notamment, le groupe de Coxeter triangulaire  $(3, 3, 3)$  est fortement raccourci mais pas grossièrement Helly (voir [Hod20a]). Et les réseaux uniformes préservant le type dans des immeubles affines épais de type  $\widetilde{C}_n$  sont Helly (voir [CCG+20] et [Hae21b]), mais n'admettent aucune action non élémentaire sur des espaces hyperboliques d'après le théorème 2.22, et ils ne sont en particulier pas hiérarchiquement hyperboliques.

### 3.2.3 Conséquences pour les groupes

Nous avons montré que tout groupe hiérarchiquement hyperbolique agit proprement et cocompactement sur un espace grossièrement Helly, nous allons maintenant en détailler toutes les conséquences.

Rappelons qu'un groupe de type fini est dit *semihyperbolique*, d'après Alonso et Bridson (voir [AB95]), s'il admet un bipeignage équivariant quasi-géodésique borné. Cette propriété a été définie en réponse à une question de Gromov dans son essai sur les groupes hyperboliques (voir [Gro87]), où il suggère une définition plus faible d'hyperbolicité.

Cette notion est également reliée aux propriétés algorithmiques des groupes : un groupe est biautomatique s'il est semihyperbolique, et que son bipeignage forme un langage régulier (i.e. est reconnu par un automate fini).

Une conséquence directe du théorème 3.9 est la suivante.

**Corollaire 3.13.** *Tout groupe hiérarchiquement hyperbolique est semihyperbolique. En particulier, tout groupe modulaire de surface est semihyperbolique.*

Remarquons que la semihyperbolicité du groupe modulaire de surface est également une conséquence de la prépublication de Hamenstädt (voir [Ham09]). Elle est également reliée à l'automatisme, qui est un théorème de Mosher (voir [Mos95]).

Le même résultat a été obtenu, simultanément et indépendamment, par Durham, Minsky et Sisto (voir [DMS20]). Leur résultat porte sur les espaces hiérarchiquement hyperboliques vérifiant une hypothèse supplémentaire de colorabilité, qui est vérifiée pour les groupes modulaires de surfaces. Donnons une idée des points communs et divergences de nos constructions.

Notre construction est basée sur le fait que, dans un espace hiérarchiquement hyperbolique, les intervalles peuvent être approchés par des complexes cubiques CAT(0) finis, qui est un résultat dû à Behrstock, Hagen et Sisto (voir [BHS17a]). La construction de Durham, Minsky et Sisto requiert de montrer que ces approximations sont stables, c'est-à-dire qu'une petite variation des extrémités de l'intervalle induit une petite variation du complexe cubique.

La différence entre les deux bipeignages obtenus est claire, déjà dans le cas d'un complexe cubique CAT(0). Notre construction donne le bipeignage géodésique CAT(0), tandis que le bipeignage de Durham, Minsky et Sisto est inspiré du chemin normal cubique de Niblo et Reeves (voir [NR97]).

Voici la liste de toutes les conséquences que nous déduisons pour les groupes hiérarchiquement hyperboliques.

**Corollaire 3.14.** *Soit  $G$  un groupe hiérarchiquement hyperbolique.*

- $G$  agit proprement et cocompactement sur un espace grossièrement Helly.
- $G$  est un groupe fortement raccourci.
- $G$  est semihyperbolique.
- Le problème de conjugaison est résoluble pour  $G$ , et peut être résolu en temps doublement exponentiel.
- Tout sous-groupe polycyclique de  $G$  est virtuellement abélien.
- Tout sous-groupe abélien de  $G$  est quasi-isométriquement plongé.
- $G$  est de type  $F_\infty$ .



- Le centralisateur de toute partie finie de  $G$  est de type fini, quasi-isométriquement plongé, et semihyperbolique.
- $G$  a un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes finis.

Remarquons que toutes ces conséquences sont nouvelles, excepté le résultat sur les groupes polycycliques, qui est également une conséquence de l’alternative de Tits (voir [DHS17]). Le résultat concernant le problème de conjugaison étend les travaux d’Abbott et Behrstock, qui ont montré que le problème était résoluble en temps exponentiel pour les éléments de Morse (voir [AB18]). Par ailleurs, dans les groupes modulaires de surface, le problème de conjugaison peut toujours être résolu en temps exponentiel (voir [MM00], [Tao13], [BD14]).

### 3.2.4 Empilement borné

Soit  $G$  un groupe de type fini. On dit qu’une famille finie  $\mathcal{H}$  de sous-groupes de  $G$  a un *empilement borné* (voir [HW09]) si, pour tout  $N$ , il existe une constante  $r$  telle que, pour toute collection distincte de  $N$  classes à gauches d’éléments de  $\mathcal{H}$ , au moins deux sont distantes d’au moins  $r$ .

La propriété d’empilement borné a été introduite par de nombreux auteurs pour montrer des propriétés d’intersection des sous-groupes de groupes hyperboliques (voir [GMRS98], [RS99]). Puis cela s’est avéré une étape essentielle pour montrer la cocompacité du complexe cubique associé à une famille finie de sous-groupes quasi-convexes de codimension 1 (voir [Sag97, NR03, HW14]).

L’exemple typique est un sous-groupe quasi-convexe d’un groupe hyperbolique. La preuve que ces sous-groupes ont un empilement borné a été donnée par Gitik, Mitra, Rips et Sageev, à l’aide de la compacité du bord (voir [GMRS98]), et une autre preuve a été donnée par Hruska et Wise, en faisant une récurrence sur la hauteur des sous-groupes (voir [HW09]).

Des exemples plus généraux ont été donnés par Antolín, Mj, Sisto et Taylor, qui ont montré que les sous-groupes stables dans tout groupe de type fini ont un empilement borné (voir [AMST19]). La stabilité est une forme forte de convexité, qui implique que les sous-groupes stables sont hyperboliques. Plus généralement, la notion de *sous-groupes de Morse* a été introduite indépendamment par Tran (voir [Tra19]) et Genevois (voir [Gen20]), et la notion est implicite dans des travaux antérieurs de Sisto (voir [Sis16]). Tran a notamment montré que toute famille finie de sous-groupes de Morse a un empilement borné (voir [Tra19, Theorem 1.2]), en utilisant là encore une récurrence sur la hauteur. Cependant, la propriété d’être Morse est assez restrictive pour un sous-groupe.

Les outils développés pour montrer le théorème 3.9 ont une conséquence pour l’empilement borné.

**Théorème 3.15.** *Dans un groupe hiérarchiquement hyperbolique, toute collection finie de sous-groupes hiérarchiquement quasi-convexes a un empilement borné.*

Ce résultat s’applique en particulier aux stabilisateurs de sous-surfaces dans les groupes modulaires de surfaces, qui ne sont ni Morse ni stables. Notre preuve est très géométrique, et elle repose sur un résultat puissant de Chepoi, Dragan et Vaxès :

**Théorème 3.16** ([CDV17]). *Soit  $X$  un espace  $\delta$ -hyperbolique, et soit  $\mathcal{Q}$  une famille de sous-espaces  $k$ -quasi-convexes de  $X$  telle que :*

- Il existe  $r \geq 0$  tel que, pour tout  $A, B \in \mathcal{Q}$ , on ait  $d(A, B) \leq r$ .
- Un élément de  $\mathcal{Q}$  est borné.

Alors il existe  $x \in X$  tel que, pour tout  $A \in \mathcal{Q}$ , on ait  $d(x, A) \leq R$ , où  $R$  est une constante ne dépendant que de  $\delta$ ,  $k$  et  $r$ .

On peut remarquer que ce théorème donne une preuve simple et naturelle de l'empilement borné pour les sous-groupes quasi-convexes de groupes hyperboliques. Nous démontrons une généralisation directe de ce résultat pour des sous-espaces hiérarchiquement quasi-convexes d'un espace hiérarchiquement hyperbolique.

**Théorème 3.17.** *Soit  $X$  un espace hiérarchiquement hyperbolique, et soit  $\mathcal{Q}$  une famille de sous-espaces  $k$ -hiérarchiquement quasi-convexes de  $X$  telle que :*

- *Il existe  $r \geq 0$  tel que, pour tout  $A, B \in \mathcal{Q}$ , on ait  $d(A, B) \leq r$ .*
- *Un élément de  $\mathcal{Q}$  est borné.*

Alors il existe  $x \in X$  tel que, pour tout  $A \in \mathcal{Q}$ , on ait  $d(x, A) \leq R$ , où  $R$  est une constante ne dépendant que des constantes d'hyperbolicité hiérarchique de  $X$ , de  $k$  et de  $r$ .

Ce résultat permet de montrer directement le théorème 3.15.

Après cette présentation des résultats obtenus dans [HHP20], nous allons donner une idée de la preuve du théorème principal 3.9, en commençant par de brefs rappels sur les espaces métriques injectifs et les espaces hiérarchiquement hyperboliques.

### 3.2.5 Espaces métriques injectifs

Dans cette partie, nous allons rappeler les définitions basiques concernant les espaces métriques injectifs et les graphes de Helly. Nous renvoyons le lecteur à [Lan13] et [CCG<sup>+</sup>20] pour plus de détails

Un espace métrique  $(X, d)$  est dit *injectif* (on dit aussi *hyperconvexe*, ou encore *rétracte 1-Lipschitz absolue*) si, pour toute famille  $(x_i)_{i \in I}$  de points de  $X$  et pour toute famille  $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de nombres réels positifs ou nuls tels que

$$\forall i, j \in I, r_i + r_j \geq d(x_i, x_j),$$

la famille des boules fermées  $(B(x_i, r_i))_{i \in \mathbb{N}}$  a une intersection non vide.

Dans le cas où l'espace métrique  $(X, d)$  est géodésique, être injectif équivaut à ce que la famille des boules fermées satisfasse la *propriété de Helly* : toute famille de boules fermées s'intersectant deux à deux s'intersecte globalement.

**Exemples.** Voici des exemples d'espaces métriques injectifs.

- La droite  $\mathbb{R}$ , munie de la distance usuelle.
- L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$ , muni de la norme  $\ell^\infty$ .
- Plus généralement, le produit d'espaces métriques injectifs, muni du supremum des distances, est un espace métrique injectif.
- Un complexe cubique CAT(0) de dimension finie muni de la distance  $\ell^\infty$  par morceaux, ou plus généralement un espace métrique médian de rang fini (voir [Bow20]).

Une propriété importante de cette théorie est que tout espace métrique  $X$  se plonge isométriquement dans un unique espace métrique injectif, appelé *enveloppe injective* de  $X$  et notée  $EX$  (voir [Isb64]).

Une version grossière de cette propriété est la suivante. Un espace métrique  $(X, d)$  est appelé *grossièrement Helly* s'il existe une constante  $C \geq 0$  telle que, pour toute famille

$(x_i)_{i \in I}$  de points de  $X$  et pour toute famille  $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de nombres réels positifs ou nuls tels que

$$\forall i, j \in I, r_i + r_j \geq d(x_i, x_j),$$

la famille des boules  $(B(x_i, r_i + C))_{i \in \mathbb{N}}$  a une intersection non vide.

Par exemple, Lang a montré que tout espace Gromov-hyperbolique est grossièrement Helly (voir [Lan13, Proposition 1.3]).

Il existe également une version discrète de la notion d'espace métrique injectif, pour les graphes. Un graphe connexe est appelé *graphe de Helly* si la famille des boules combinatoires vérifie la propriété de Helly : toute famille de boules combinatoires s'intersectant deux à deux s'intersecte globalement.

Si l'on s'intéresse aux actions de groupes sur des espaces métriques injectifs, nous allons distinguer trois types :

- Un groupe  $G$  est appelé *grossièrement Helly* s'il agit proprement et de manière cobornée par isométries sur un espace métrique injective, ou de manière équivalente s'il agit proprement et cocompactement par isométries sur un espace métrique grossièrement Helly (voir [CCG<sup>+</sup>20, Proposition 3.12]).
- Un groupe  $G$  est appelé *métriquement injectif* s'il agit proprement et cocompactement par isométries sur un espace métrique injectif.
- Un groupe  $G$  est appelé *Helly* s'il agit proprement et cocompactement par automorphismes sur un graphe Helly.

Tout groupe Helly est métriquement injectif, en considérant l'enveloppe injective du graphe de Helly. Et il est clair que tout groupe métriquement injectif est grossièrement Helly.

**Exemples.** Voici quelques exemples de tels groupes.

- Tout groupe agissant proprement et cocompactement sur un complexe cubique  $\text{CAT}(0)$  est Helly
- Plus généralement, tout groupe agissant proprement et cocompactement sur un espace métrique médian de rang fini est métriquement injectif (voir [Bow20]).
- Lang a montré que tout groupe Gromov-hyperbolique est Helly, et qu'il agit proprement et cocompactement sur l'enveloppe injective de tout graphe de Cayley (voir [Lan13]).
- Chalopin et al. ont montré que tout réseau uniforme préservant le type d'un immeuble euclidien de type  $\tilde{C}_n$  est Helly (voir [CCG<sup>+</sup>20, Corollary 6.2]).
- Plus récemment, nous avons montré que la plupart des réseaux uniformes d'immeubles euclidiens classiques sont Helly, tandis que la plupart des réseaux uniformes de groupes de Lie semisimples réels sont injectifs (voir [Hae21b] pour des énoncés précis).
- Huang et Osajda ont montré que tout groupe d'Artin de type FC, ainsi que tout groupe de Garside, est Helly (voir [HO19b]).
- Nous avons montré que tout groupe hiérarchiquement hyperbolique est grossièrement Helly, voir Théorème 3.9.

Lorsqu'un groupe agit de l'une de ces manières sur un espace métrique injectif, on peut en déduire un grand nombre de propriétés classiques de courbure négative ou nulle, en voici quelques-unes :

**Théorème 3.18.** *Soit  $G$  un groupe grossièrement Helly. Alors :*

- $G$  est semi-hyperbolique au sens d'Alonso-Bridson, ce qui a de nombreuses conséquences ([BH99]) :
  - ★  $G$  est de présentation finie.
  - ★  $G$  a un problème du mot et un problème de conjugaison résoluble.
  - ★ Tout sous-groupe polycyclique de  $G$  est virtuellement abélien.
  - ★ Tout sous-groupe abélien de type fini de  $G$  est quasi-isométriquement plongé.
  - ★ Le centralisateur de toute partie finie de  $G$  est de type fini, quasi-isométriquement plongé et semi-hyperbolique.
- $G$  a un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes finis ([Lan13, Proposition 1.2]).
- $G$  vérifie la conjecture de Baum-Connes grossière ([CCG<sup>+</sup>20, Theorem 1.5]).
- Les cônes asymptotiques de  $G$  sont contractiles ([CCG<sup>+</sup>20, Theorem 1.5]).

Supposons de plus que  $G$  soit métriquement injectif. Alors :

- $G$  admet une EZ-frontière ([CCG<sup>+</sup>20, Theorem 1.5]).
- $G$  vérifie la conjecture de Farrell-Jones (see [KR17]).

Supposons de plus que  $G$  soit Helly. Alors :

- $G$  est biautomatique ([CCG<sup>+</sup>20, Theorem 1.5]).

On peut remarquer que toutes ces conséquences sont déjà connues pour les groupes CAT(0), à l'exception de la biautomaticité. Celle-ci n'est d'ailleurs pas vraie pour tous les groupes CAT(0), voir [LM21].

### 3.2.6 Espaces hiérarchiquement hyperboliques

Nous allons ici donner une description brève des espaces hiérarchiquement hyperboliques (notés HHS), ainsi que des groupes hiérarchiquement hyperboliques (notés HHG). Pour les définitions complètes, nous renvoyons à [BHS15, Def. 1.1, 1.21]. Pour simplifier, un HHS consiste en un espace quasi-géodésique  $(X, d)$ , une constante positive  $E$ , et un ensemble  $\mathfrak{S}$  dont les éléments sont appelés *domaines*. À chaque domaine  $U \in \mathfrak{S}$  est associé un espace  $E$ -hyperbolique  $\mathcal{C}U$ , et les différents axiomes permettent de retrouver la géométrie de  $X$  à travers ces espaces hyperboliques. En particulier :

- Pour chaque domaine  $U$ , il y a une projection  $\pi_U : X \rightarrow \mathcal{C}U$  qui est  $E$ -quasi-dense,  $(E, E)$ -grossièrement Lipschitz.
- L'ensemble  $\mathfrak{S}$  est muni d'un ordre partiel  $\sqsubset$ , appelé *nichement*, et d'une relation symétrique  $\perp$ , appelée *orthogonalité*. Si  $U \sqsubset V$  et  $V \perp W$ , alors  $U \perp W$ . Les relations  $\sqsubset$ ,  $\perp$ , et  $=$  sont mutuellement exclusives, et leur complémentaire, noté  $\pitchfork$ , est appelé *transversalité*.
- Il y a une borne sur la longueur des chaînes pour  $\sqsubset$ , ainsi que sur le cardinal d'une famille deux à deux orthogonale.

- Si  $U \sqsubseteq V$  ou  $U \triangleleft V$ , il y a un ensemble  $\rho_V^U \subset \mathcal{C}V$  de diamètre au plus  $E$ .
- Si  $U \sqsubseteq V$ , il y a également une application  $\rho_V^U : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{C}U$ . Si  $\gamma \subset \mathcal{C}V$  est une géodésique et  $d_{\mathcal{C}V}(\gamma, \rho_V^U) > E$ , alors  $\text{diam}(\rho_V^U(\gamma)) \leq E$ .

Pour  $x, y \in X$ , on notera plutôt  $d_U(x, y)$  à la place de  $d_{\mathcal{C}U}(\pi_U(x), \pi_U(y))$ , et de même pour des sous-ensembles de  $X$ . Remarquons qu'on peut toujours supposer que  $X$  est les espaces hyperboliques  $\mathcal{C}U$  sont des graphes.

L'idée sous-jacente à la notion d'orthogonalité est qu'elle permet de considérer un produit direct des sous-HHS associés à l'intérieur de  $X$ . Ceci est rendu plus précis par l'axiome de *réalisation partielle* suivant.

**Axiome** (Réalisation partielle). Soit  $\{U_i\}$  un ensemble de domaines deux à deux orthogonaux. Pour tout choix de points  $p_i \in \mathcal{C}U_i$ , il existe  $x \in X$  tel que  $d_{U_i}(x, p_i) \leq E$  pour tout  $i$ , ainsi que  $d_V(x, \rho_V^{U_i}) \leq E$  dès que  $U_i \sqsubseteq V$  ou  $U_i \triangleleft V$ .

L'un des outils les plus utiles pour travailler avec un HHS est le théorème de réalisation (voir [BHS15, Thm 3.1]), qui étend l'axiome de réalisation partielle. Il dit essentiellement que tout  $\mathfrak{S}$ -uplet cohérent est bien approché par les projections d'un point de  $X$ . En d'autres termes, les constructions dans  $X$  peuvent se ramener à des constructions dans les espaces hyperboliques associés, et de vérifier que les points produits sont cohérents.

**Définition 3.19** ( $\mathfrak{S}$ -uplet cohérent). Pour une constante  $\kappa \geq E$ , un  $\mathfrak{S}$ -uplet  $(b_U) \in \prod_{U \in \mathfrak{S}} \mathcal{C}U$  est dit  $\kappa$ -cohérent si

$$\begin{aligned} \min \{d_U(b_U, \rho_V^U), d_V(b_V, \rho_V^U)\} &\leq \kappa \quad \text{dès que } U \triangleleft V, \text{ et} \\ \min \{d_V(b_V, \rho_V^U), \text{diam}(b_U \cup \rho_V^U(b_V))\} &\leq \kappa \quad \text{dès que } U \sqsubseteq V. \end{aligned}$$

**Axiome** (Cohérence). Pour tout  $x \in X$ , le  $\mathfrak{S}$ -uplet  $(\pi_U(x))_{U \in \mathfrak{S}}$  est  $E$ -cohérent.

On peut maintenant énoncer le théorème de réalisation, qui est extrêmement utile.

**Théorème 3.20** (Réalisation, [BHS15, Thm 3.1]). *Pour tout  $\kappa \geq E$ , il existe des nombres  $\theta_e(\kappa)$  et  $\theta_u(\kappa)$  tels que, si  $(b_U)_{U \in \mathfrak{S}}$  est un  $\mathfrak{S}$ -uplet  $\kappa$ -cohérent, il existe  $x \in X$  tel que  $d_U(x, b_U) \leq \theta_e(\kappa)$  pour tout  $U \in \mathfrak{S}$ . De plus, l'ensemble de ces points  $x$  est de diamètre au plus  $\theta_u(\kappa)$ .*

Une application clé du théorème de réalisation est la construction de l'opérateur de médiane grossière pour les HHS. Étant donnés trois points  $x, y, z$  dans un HHS  $(X, \mathfrak{S})$ , notons  $(m_U)_{U \in \mathfrak{S}}$  le  $\mathfrak{S}$ -uplet dont la coordonnée dans  $\mathcal{C}U$  est la médiane grossière du triplet  $\pi_U(x), \pi_U(y), \pi_U(z)$  dans l'espace hyperbolique  $\mathcal{C}U$ . Ce  $\mathfrak{S}$ -uplet est cohérent (voir [BHS19, Thm 7.3]), et permet ainsi de définir la médiane en appliquant le théorème de réalisation au  $\mathfrak{S}$ -uplet  $(m_U)_{U \in \mathfrak{S}}$ .

On dit que  $X$  admet une structure de HHS s'il existe un HHS dont l'espace métrique sous-jacent est  $X$ , et on note  $(X, \mathfrak{S})$  la totalité de la structure de HHS. Un groupe hiérarchiquement hyperbolique (HHG) est, pour simplifier, un groupe de type fini  $G$  dont un graphe de Cayley admet une structure de HHS  $(G, \mathfrak{S})$  telle que  $G$  agisse de manière cofinie sur  $\mathfrak{S}$ , et les éléments de  $G$  induisent des isométries  $\mathcal{C}U \rightarrow \mathcal{C}g \cdot U$  pour tout  $U \in \mathfrak{S}$ .

Donnons maintenant des exemples d'espaces et de groupes hiérarchiquement hyperboliques.

- Les groupes hyperboliques, et les groupes modulaires de surfaces (voir [BHS17c]).
- L'espace de Teichmüller, avec la distance de Teichmüller ou de Weil-Petersson (voir [BHS17c]).

- De nombreux graphes associés aux surfaces, notamment le graphe des pantalons (voir [Vok17]).
- Des quotients de groupes modulaires de surfaces par des puissances de pseudo-Anosov (voir [BHS17b]) et des sous-groupes de twists de Dehn (voir [BHMS20]).
- Des extensions de groupes de Veech (voir [DDLS20]).
- Le groupe du corps en anse de genre 2 (voir [Mil20]).
- Les groupes fondamentaux de variétés compactes de dimension 3 sans composantes *Nil* ou *Sol* (voir [BHS19]).
- Tous les groupes cubulables connus (voir [HS20b]).

### 3.2.7 Construction de la nouvelle distance

Nous allons maintenant donner les idées générales de la construction de la nouvelle distance du théorème 3.9. Nous allons nous placer dans un cadre un peu plus général que celui des espaces hiérarchiquement hyperboliques, celui des espaces grossièrement médians (voir [Bow13a], ou la définition 2.12).

Soit  $(X, \mu, d)$  un espace grossièrement médian. Nous allons adapter la construction d'une distance injective sur un espace métrique médian par Bowditch (voir [Bow20]) en définissant une nouvelle distance  $\sigma$  sur  $X$ .

**Définition 3.21** (Contraction). Pour une constante  $K \geq 0$ , on dit qu'une application  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une  $K$ -contraction si :

- $\Phi$  est  $(1, K)$ -grossièrement Lipschitz, i.e.  $\forall a, b \in X, |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq d(x, y) + K$ .
- $\Phi$  est un morphisme  $K$ -quasi-médian, i.e.

$$\forall a, b, c \in X, |\Phi(\mu(a, b, c)) - \mu_{\mathbb{R}}(\Phi(a), \Phi(b), \Phi(c))| \leq K,$$

où  $\mu_{\mathbb{R}}$  désigne la médiane standard sur  $\mathbb{R}$ .

**Définition 3.22** (Nouvelle distance). Pour  $K > 0$ , définissons une nouvelle distance  $\sigma = \sigma_K$  sur  $X$  de la manière suivante. Pour  $a, b \in X$ , notons  $\sigma(a, b)$  le supremum des  $|\Phi(a) - \Phi(b)|$ , où  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une  $K$ -contraction.

L'hypothèse  $K > 0$  nous permet notamment de garantir que  $\sigma$  sépare les points.

On peut remarquer que, si  $(X, \mu, d)$  est un complexe cubique CAT(0) muni de la médiane standard et de la distance  $\ell^1$  par morceaux, alors pour  $K = 0$ , la distance  $\sigma$  est la distance  $\ell^\infty$  par morceaux. Plus généralement, Bowditch a montré que, si  $(X, \mu, d)$  est un espace métrique médian de rang fini, alors pour  $K = 0$ , la distance  $\sigma$  est une distance injective (voir [Bow20]).

On peut voir aisément que  $\sigma$  est une distance sur  $X$ . De plus, si un groupe  $G$  agit par isométries sur  $(X, d)$  en préservant la médiane, alors  $G$  agit par isométries sur  $(X, \sigma)$ .

Si  $(X, \mu, d)$  est un espace grossièrement médian et  $a, b \in X$ , rappelons que l'*intervalle médian* entre  $a$  et  $b$  est

$$[a, b] = \{\mu(a, b, x) \mid x \in X\}.$$

Afin d'étudier cette distance  $\sigma$ , nous allons supposer que l'espace grossièrement médian que nous considérons vérifie la propriété suivante d'intervalles quasi-cubiques, qui est un renforcement du second axiome (de comparaison avec des complexes cubiques CAT(0) finis)

pour les ensembles  $A = \{a, b\}$  de cardinal 2 (voir définition 2.12). Nous demandons une approximation de tout l'intervalle  $[a, b]$  avec des constantes uniformes, et nous demandons également que l'application de comparaison soit une quasi-isométrie, et non pas seulement grossièrement inversible.

**Définition 3.23** (Intervalles quasi-cubiques). Soit  $(X, \mu, d)$  un espace grossièrement médian de rang fini  $\nu$ . On dit qu'il a des *intervalles quasi-cubiques* s'il existe  $\kappa \geq 1$  tel que, pour tous  $a, b \in X$ , il existe un complexe CAT(0) fini  $Q$  de dimension au plus  $\nu$ , muni de la métrique  $\ell^1$  notée  $d_Q$ , et de la médiane  $\mu_Q$ , ainsi qu'une application  $\lambda : Q \rightarrow [a, b]$  satisfaisant :

- L'application  $\lambda$  est une  $(\kappa, \kappa)$ -quasi-isométrie, i.e.  $\lambda$  est  $\kappa$ -quasi-surjective et

$$\forall \alpha, \beta \in Q, \frac{1}{\kappa} d_Q(\alpha, \beta) - \kappa \leq d(\lambda(\alpha), \lambda(\beta)) \leq \kappa d_Q(\alpha, \beta) + \kappa.$$

- L'application  $\lambda$  est un morphisme  $\kappa$ -quasi-médian, i.e.

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in Q, d(\lambda(\mu_Q(\alpha, \beta, \gamma)), \mu(\lambda(\alpha), \lambda(\beta), \lambda(\gamma))) \leq \kappa.$$

Cette propriété est évidemment satisfaite par tout complexe cubique CAT(0) de dimension finie, ou même par tout espace globalement quasi-isométrique quasi-médian à un complexe cubique CAT(0) de dimension finie. Cependant, elle s'applique également plus généralement.

**Théorème 3.24.** [BHS17a, Theorem 2.1], [Bow19a, Theorem 1.3] *Les espaces hiérarchiquement hyperboliques, de même que les espaces grossièrement médians satisfaisant les axiomes (B1)-(B10) de [Bow19a], ont des intervalles quasi-cubiques.*

Bowditch remarque que tout espace hiérarchiquement hyperbolique satisfait les axiomes (B1)-(B10) de [Bow19a], et qu'il s'agit bien d'une classe d'espaces métriques plus générale.

Rappelons qu'un espace métrique  $(X, d)$  est *grossièrement géodésique* s'il existe une constante  $C_d \geq 0$  telle que, pour tous  $a, b \in X$ , il existe un plongement  $(1, C_d)$ -quasi-isométrique de l'intervalle  $f : [0, d(a, b)] \rightarrow X$  tel que  $f(0) = a$  et  $f(d(a, b)) = b$ . Appelons un espace métrique  $(X, d)$  *faiblement grossièrement géodésique* s'il existe une constante  $C'_d \geq 0$  telle que, pour tous  $a, b \in X$  et tout  $r \in [0, d(a, b)]$ , il existe  $c \in X$  tel que  $|d(a, c) - r| \leq C'_d$  et  $d(a, c) + d(c, b) \leq d(a, b) + C'_d$ . Remarquons que toute espace métrique grossièrement géodésique est faiblement grossièrement géodésique.

Rappelons également qu'une partie  $A$  de  $X$  est  $C$ -grossièrement convexe pour la médiane si, pour tous  $a, b \in A$  et  $x \in X$ , nous avons  $d(\mu(a, b, x), A) \leq C$ .

Notre principal résultat de construction de la nouvelle distance s'énonce ainsi.

**Théorème 3.25.** *Soit  $(X, \mu, d)$  un espace grossièrement médian, grossièrement géodésique, avec des intervalles quasi-cubiques.*

1. *Les distances  $d$  et  $\sigma$  sont quasi-isométriques.*
2. *Les boules pour la distance  $\sigma$  sont uniformément grossièrement convexes pour la médiane  $\mu$ .*
3. *La distance  $\sigma$  est faiblement grossièrement géodésique.*

*De plus,  $\sigma$  est invariante sous le groupe des isométries médianes de  $(X, \mu, d)$ .*

Le fait que  $d$  et  $\sigma$  soient quasi-isométriques est une conséquence assez directe du fait que les intervalles dans  $X$  soient bien approchés par des complexes cubiques CAT(0) finis.

On peut montrer qu'il existe une constante  $C \geq 0$  telle que, pour tout rayon  $r \geq 0$  et pour toute boule  $B(c, r)$  de centre  $c \in X$ , on ait que pour tout  $a, b \in B(c, r)$ , l'intervalle médian  $[a, b]$  est inclus dans  $B(c, r + C)$ . Cependant il n'est pas vrai en général que la boule  $B(c, r + C)$  soit à distance bornée de la boule  $B(c, r)$  : pour cela, l'hypothèse faiblement grossièrement géodésique est cruciale.

C'est cette dernière propriété, le fait que  $\sigma$  soit faiblement grossièrement géodésique, qui requiert le plus de travail. La preuve de cette propriété repose sur trois ingrédients :

**Première étape :** un résultat de concaténation des  $K$ -contractions. Soient  $a, b \in X$ , et considérons deux  $K$ -contractions  $\Phi_1 : X \rightarrow [0, r]$  et  $\Phi_2 : X \rightarrow [r, r + s]$  (où  $r, s \geq 0$ ) telles que  $\Phi_1(a) = 0$  et  $\Phi_2(b) = r + s$ . On souhaite trouver un critère permettant de concaténer  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  en une  $K$ -contraction  $\Phi$  telle que  $\Phi(a) = 0$  et que  $(r + s) - \Phi(b)$  soit borné par une constante. Voici le résultat précis que l'on montre.

**Lemme 3.26.** *Il existe une constante  $D \geq 0$  telle qu'on ait la propriété suivante. Soient  $a, b, \Phi_1, \Phi_2, r, s$  comme ci-dessus. Supposons qu'il existe  $t \geq 0$  tel que les ensembles*

$$\{x \in [a, b] \mid \Phi_1(x) \leq r - t\} \text{ et } \{x \in [a, b] \mid \Phi_2(x) \geq r + t\}$$

*soient disjoints. Alors  $\sigma(a, b) \geq r + s - 2t - 2D$ .*

On peut notamment remarquer que le critère porte sur deux sous-ensembles de l'intervalle  $[a, b]$ , et non de tout l'espace  $X$ , ce qui simplifie la suite de l'analyse.

**Deuxième étape :** une description des  $K$ -contractions d'un complexe cubique CAT(0). On montre que toute  $K$ -contraction est à distance uniformément bornée d'une 0-contraction. Remarquons qu'une 0-contraction sur un complexe cubique CAT(0) n'est rien d'autre que la projection sur le complexe cubique dual associé à une famille d'hyperplans disjoints linéairement ordonnés. Voici l'énoncé précis que l'on montre.

**Lemme 3.27.** *Soit  $Q$  un complexe cubique CAT(0) de dimension au plus  $\nu$ , et soit  $\Phi : Q^{(0)} \rightarrow \mathbb{R}$  une application  $K'$ -quasi-médiane,  $(K', K')$ -grossièrement Lipschitz (pour la distance  $\ell^1$ ) d'image bornée. Il existe une famille finie d'hyperplans disjoints  $(H_k)_{1 \leq k \leq n}$  linéairement ordonnés de  $Q$  telle que l'application duale  $\Psi : Q^{(0)} \rightarrow [[0, n + 1]]$  vérifie (quitte à translater  $\Phi$ ) :*

$$\forall x \in Q^{(0)}, |\Phi(x) - 4K'\nu\Psi(x)| \leq 4K'\nu.$$

**Troisième étape :** on se ramène à un complexe cubique CAT(0). Fixons un complexe cubique CAT(0) fini  $Q$ , et la distance  $\sigma_{\mathcal{C}}$  associée à une famille  $\mathcal{C}$  de 0-contractions (celles qui sont à distance uniforme de la restriction d'une  $K$ -contraction de  $X$ ) :

$$\forall x, y \in Q^{(0)}, \sigma_{\mathcal{C}}(x, y) = \max\{|\Psi(x) - \Psi(y)|, \Psi \in \mathcal{C}\}.$$

Dans ce cadre plus simple, nous pouvons montrer une propriété de géodésicité de  $\sigma_{\mathcal{C}}$ .

**Lemme 3.28.** *Pour tous  $a, b \in Q^{(0)}$  et pour tout entier  $r \in [0, \sigma_{\mathcal{C}}(a, b)]$ , il existe un sommet  $c \in [a, b]$  et des 0-contractions  $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{C}$  telles que.*

1.  $\sigma_{\mathcal{C}}(a, c) = r$ ,
2.  $\sigma_{\mathcal{C}}(a, c) = |\Psi_1(a) - \Psi_1(c)|$  et  $\sigma_{\mathcal{C}}(c, b) = |\Psi_2(c) - \Psi_2(b)|$ ,
3. pour tout hyperplan  $H_1$  définissant  $\Psi_1$  et séparant  $a$  et  $c$ , et pour tout hyperplan  $H_2$  définissant  $\Psi_2$  séparant  $c$  et  $b$ , les hyperplans  $H_1$  et  $H_2$  sont disjoints.

Pour en déduire que la distance  $\sigma$  sur  $X$  est faiblement grossièrement géodésique, il suffit maintenant d'utiliser la comparaison entre chaque intervalle de  $X$  et un complexe cubique CAT(0), et de considérer un point de  $X$  correspondant au sommet  $c$  donné par le lemme 3.28.



### 3.2.8 Propriété grossièrement Helly pour les parties hiérarchiquement quasi-convexes

Dans la théorie des espaces hyperboliques, les parties quasi-convexes jouent un rôle important, puisqu'elles héritent de la géométrie ambiante. L'analogie naturelle dans les HHS est la notion de quasi-convexité hiérarchique.

**Définition 3.29** (Quasi-convexité hiérarchique). Une partie  $Y$  d'un HHS  $(X, \mathfrak{S})$  est dite *hiérarchiquement quasi-convexe* s'il existe une fonction  $k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que

1. Pour tout  $U \in \mathfrak{S}$ , la projection  $\pi_U(Y)$  est  $k(0)$ -quasi-convexe.
2. Si  $x \in X$  est tel que, pour tout  $U \in \mathfrak{S}$ , on ait  $d_U(x, Y) \leq r$ , alors  $d_X(x, Y) \leq k(r)$ .

Donnons maintenant quelques exemples de parties hiérarchiquement quasi-convexes. Des exemples simples sont donnés par l'intervalle médian entre deux points, ou plus généralement l'enveloppe médiane d'un ensemble fini. De plus, tout sous-groupe stable d'un groupe hiérarchiquement hyperbolique est hiérarchiquement quasi-convexe (voir [ABD17], [RST18]).

Voici quelques exemples plus précis.

- Le stabilisateur d'une multicourbe immergée dans une surface est hiérarchiquement quasi-convexe dans le groupe modulaire de cette surface. En particulier, les stabilisateurs de sous-surfaces sont hiérarchiquement quasi-convexes.
- Si  $X$  est un complexe cubique CAT(0) qui est aussi un HHS, tout sous-complexe convexe est hiérarchiquement quasi-convexe. Dans ce cas, le théorème 3.17 étend une partie de [HW09, Cor. 3.6].
- Si  $M$  est une variété compacte de dimension 3 sans composante *Nil* ou *Sol*, alors  $\pi_1(M)$  est un HHS, et les tores dans sa décomposition géométrique donnent des sous-groupes hiérarchiquement quasi-convexes.
- Le produit graphé de HHG est un HHG, et tout groupe de sommet est hiérarchiquement quasi-convexe.

Chepoi, Dragan et Vaxes ont montré que les parties quasi-convexes d'un espace hyperbolique vérifiaient une propriété de Helly grossière, voir théorème 3.16. À l'aide du théorème de réalisation, nous montrons que les parties hiérarchiquement quasi-convexes d'un HHS vérifient également une propriété de Helly grossière, voir théorème 3.17.

Ceci permet de conclure l'idée générale du théorème 3.9. Considérons un HHS  $(X, d)$ , et soit  $\sigma$  la nouvelle distance. Le théorème 3.25 montre que les boules pour la distance  $\sigma$  sont uniformément quasi-médianes-convexes. D'après [RST18, Prop. 5.11], ceci implique que les boules pour  $\sigma$  sont uniformément hiérarchiquement quasi-convexes. Le théorème 3.17 permet ensuite de déduire que les boules pour  $\sigma$  vérifient une propriété de Helly grossière.

# Chapitre 4

## Pistes de recherche

Les travaux que nous avons menés sur les groupes d'Artin laissent ouvertes de nombreuses questions, dont certaines concernent déjà les groupes de tresses :

**Question 4.1.** Le groupe de tresses est-il  $\text{CAT}(0)$  ? Plus spécifiquement, le complexe de Brady-McCammond pour le groupe de tresses  $B_n$  est-il  $\text{CAT}(0)$  pour tout  $n$  ?

De manière plus générale, on peut se demander s'il pourrait exister des conditions simples sur un treillis impliquant que son complexe orthoschématique est  $\text{CAT}(0)$ . Dans [HKS16], nous avons montré avec Kielak et Schwer que c'était le cas si le treillis est modulaire complété. Chalopin, Chepoi, Hirari et Osajda ont montré dans [CCHO21] que c'était le cas si le treillis est seulement modulaire, et Hirai a montré dans [Hir19] que c'était le cas pour un semi-treillis modulaire.

Une autre question très naturelle reliée est de savoir si, lorsque l'on munit chaque orthosimplexe de la métrique  $\ell^\infty$ , l'espace métrique résultant est injectif (voir partie 3.2.5).

**Question 4.2.** À quelles conditions sur un treillis son complexe orthoschématique est-il  $\text{CAT}(0)$  ? Injectif ?

Chalopin, Chepoi, Hirari et Osajda ont montré dans [CCHO21] que le complexe est injectif si le treillis est modulaire.

Revenant aux groupes d'Artin, on peut se poser plus généralement les questions suivantes :

**Question 4.3.** Quels groupes d'Artin admettent une action propre et cocompacte sur un espace  $\text{CAT}(0)$  ? Sur un espace métrique injectif ?

Huang et Osajda ont montré dans [HO19a] que tout groupe d'Artin de type FC agit proprement et cocompactement sur un graphe de Helly.

Concernant les complexes cubiques  $\text{CAT}(0)$ , notre résultat de classification conjecturale 1.29 repose sur la conjecture suivante :

**Question 4.4.** Pour quels groupes d'Artin  $A = \langle S \rangle$  la propriété ( $\dagger$ ) suivante est-elle vérifiée ?

$$\forall s \in S, \forall n \geq 1, Z_A(s^n) = Z_A(s).$$

Ceci motive également, d'après les travaux de Godelle (voir [God07]), la question de savoir si le complexe de Deligne, muni de la métrique de Moussong, est  $\text{CAT}(0)$ . On peut poser une question analogue pour une métrique injective.

**Question 4.5.** Le complexe de Deligne, muni de la métrique de Moussong, est-il  $\text{CAT}(0)$  ? Le complexe de Deligne (ou un complexe proche) peut-il être muni d'une métrique injective ?

Concernant les groupes de Coxeter déjà, la question est subtile : par exemple, le groupe de Coxeter triangulaire  $(3, 3, 3)$  n'est pas injectif, mais son produit direct par  $\mathbb{Z}$  l'est, et il peut être réalisé comme groupe de réflexions de l'espace injectif  $\mathbb{R}^3$  muni de la norme  $\ell^\infty$ .

**Question 4.6.** Quels groupes de Coxeter peuvent être réalisés comme groupes de réflexions par rapport à des hyperplans d'un espace métrique injectif ?

Pour ce qui est des actions propres sur des complexes cubiques  $\text{CAT}(0)$ , même la simple question suivante est ouverte :

**Question 4.7.** Le groupe de tresses à 4 brins agit-il proprement sur un complexe cubique  $\text{CAT}(0)$  ? A-t-il la propriété de Haagerup ?

Concernant les actions de groupes d'Artin sur des espaces hyperboliques, on dispose déjà de plusieurs exemples intéressants. Vus comme groupes modulaires, les groupes de tresses agissent sur leurs complexes de courbes. Les groupes d'Artin à angles droits agissent sur leur graphe de contact, ou sur le graphe d'extension de Kim et Koberda (voir [KK13]), les groupes d'Artin de type XXL agissent acylindriquement sur un espace hyperbolique (voir le corollaire 1.45). Calvez et Wiest ont également montré que les groupes d'Artin de type sphérique sont acylindriquement hyperboliques (voir [CW17]). Ceci motive les questions générales suivantes :

**Question 4.8.** Les groupes d'Artin sont-ils acylindriquement hyperboliques, voire hiérarchiquement hyperboliques ?

Concernant la rigidité des réseaux de rang supérieur, de nombreuses questions sont ouvertes.

Notamment, pour les actions sur des espaces Gromov-hyperboliques, que peut-on dire dans le cas où  $\Gamma$  est un réseau irréductible dans un produit de groupes semisimples, éventuellement de rang 1 ? Comme nous l'avons évoqué, dans ce cas Bader et Furman peuvent montrer que si un tel réseau  $\Gamma \subset G_1 \times G_2$  a une action sans orbite bornée de  $X$  et sans orbite finie dans le bord  $\partial_\infty X$ , alors on peut étendre l'action de  $\Gamma$  à l'un des facteurs sur une partie fermée du bord  $\partial_\infty X$ .

Il est naturel, au vu de la preuve du théorème 2.22, de vouloir étudier les actions de réseaux de rang supérieur sur des espaces grossièrement médians. Pour cela, le principal ingrédient manquant est l'étude des marches aléatoires sur des espaces grossièrement médians :

**Question 4.9.** Que peut-on dire de la vitesse d'une marche aléatoire sur un espace grossièrement médian ? Peut-on définir un bord géométrique à l'infini d'un espace grossièrement médian ?

La propriété (T) renforcée de Lafforgue implique que toute action d'un réseau de rang supérieur sur un graphe hyperbolique uniformément localement fini a des orbites bornées. Ceci amène naturellement la question suivante :

**Question 4.10.** Un groupe ayant la propriété (T) renforcée peut-il agir sur un espace grossièrement médian ?

Une autre question naturelle est de savoir si les arguments utilisés dans le théorème 2.22 peuvent être utilisés afin de donner une autre preuve du résultat récent de Deroin et Hurtado (voir [DH20]) selon lequel les réseaux de rang supérieur ne sont pas ordonnables.

Dans une autre direction, la conjecture de Valette concernant la propriété RD pour les réseaux uniformes de rang supérieur est très motivante. On pourrait se demander quels affaiblissements de la notion de médiane grossière pourraient être étudiés à cette fin. L'idée d'associer naturellement un objet à trois points de l'espace symétrique ou de l'immeuble est en effet au cœur de la preuve de la propriété RD pour  $SL(3)$  (voir [RRS98] et [Laf00]).

Par ailleurs, comme la plupart des réseaux cocompacts de rang supérieur sont injectifs ou Helly (voir [Hae21b]), il est raisonnable de se poser la question suivante :

**Question 4.11.** Un groupe Helly (ou injectif) vérifie-t-il la propriété (RD) ?

Les travaux que nous avons menés sur les actions de divers groupes sur des espaces hyperboliques mènent à de nombreuses questions.

Concernant l'action des groupes modulaires de surface sur un espace grossièrement Helly, on peut se demander jusqu'où on peut raffiner la comparaison locale avec les complexes cubiques  $CAT(0)$ .

**Question 4.12.** Peut-on adapter la preuve de la biautomatisme pour les groupes de Helly aux groupes modulaires de surface ? Les groupes modulaires de surface sont-ils grossièrement  $CAT(0)$  ?

Remarquons que la biautomatisme des groupes modulaires de surface est démontrée par Hamenstädt dans la prépublication [Ham09].

On peut également se demander quels raffinements de la médiane grossière sur les groupes modulaires de surface permettraient d'aborder ces questions. Plus généralement, ceci amène d'autres questions concernant les espaces métriques injectifs, lorsqu'on sait d'après [CCG<sup>+</sup>20] que tout groupe Helly est biautomatique.

**Question 4.13.** Est-ce qu'un groupe grossièrement Helly est biautomatique ? Est-ce qu'un groupe injectif est biautomatique ?

Concernant les groupes modulaires de surface, la question suivante est très motivante.

**Question 4.14.** Le groupe modulaire d'une surface admet-il une action propre par isométries affines sur un espace  $L^p$  ?

Une réponse positive pour  $p = 2$  impliquerait la propriété de Haagerup, qui est une négation forte de la propriété (T). D'après des travaux récents de Bestvina, Bromberg et Fujiwara (voir [BBF19]), on sait que tout groupe modulaire de surface agit proprement par isométries sur un produit fini de quasi-arbres. Il est ainsi naturel de se demander si l'on pourrait étendre nos méthodes à ce cadre. Une difficulté technique majeure est que les quasi-arbres sont localement infinis. Remarquons que cette question est déjà ouverte pour le cas des groupes de tresses.

Une autre question très motivante concerne les espaces métriques fortement boliques étudiés par Lafforgue.

**Question 4.15.** Le groupe modulaire d'une surface admet-il une action propre et cocompacte sur un espace métrique fortement bolique ?

En effet, d'après les travaux de Lafforgue (voir [Laf02]), avec la propriété RD (qui est par ailleurs une conséquence de la propriété de médiane grossière), ceci impliquerait la conjecture de Baum-Connes. Cependant, trouver une distance fortement bolique est déjà très subtil pour un groupe hyperbolique (voir [MY02], [Nv16]).

# Bibliographie

- [AB95] J. M. ALONSO & M. R. BRIDSON – « Semihyperbolic groups », *Proc. London Math. Soc. (3)* **70** (1995), no. 1, p. 56–114.
- [AB18] C. ABBOTT & J. BEHRSTOCK – « Conjugator lengths in hierarchically hyperbolic groups », *arXiv preprint arXiv :1808.09604* (2018).
- [ABD17] C. ABBOTT, J. BEHRSTOCK & M. G. DURHAM – « Largest acylindrical actions and stability in hierarchically hyperbolic groups », *arXiv preprint arXiv :1705.06219* (2017).
- [AL17] A. ALVAREZ & V. LAFFORGUE – « Actions affines isométriques propres des groupes hyperboliques sur des espaces  $\ell^p$  », *Expo. Math.* **35** (2017), no. 1, p. 103–118.
- [AL18] — , « Actions affines isométriques propres des groupes hyperboliques sur des quotients d’espaces  $\ell^p$  », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **51** (2018), no. 6, p. 1389–1398.
- [AMST19] Y. ANTOLÍN, M. MJ, A. SISTO & S. J. TAYLOR – « Intersection properties of stable subgroups and bounded cohomology », *Indiana Univ. Math. J.* **68** (2019), no. 1, p. 179–199.
- [Art25] E. ARTIN – « Theorie der Zöpfe », *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **4** (1925), no. 1, p. 47–72.
- [BBF19] M. BESTVINA, K. BROMBERG & K. FUJIWARA – « Proper actions on finite products of quasi-trees », *arXiv :1905.10813* (2019).
- [BD14] J. BEHRSTOCK & C. DRUȚU – « Divergence, thick groups, and short conjugators », *Illinois J. Math.* **58** (2014), no. 4, p. 939–980.
- [BdlHV08] B. BEKKA, P. DE LA HARPE & A. VALETTE – New Mathematical Monographs, *Kazhdan’s property (T)* **11** , Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [Bes99] M. BESTVINA – « Non-positively curved aspects of Artin groups of finite type », *Geom. Topol.* **3** (1999), p. 269–302.
- [Bes03] D. BESSIS – « The dual braid monoid », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **36** (2003), no. 5, p. 647–683.
- [BF14] U. BADER & A. FURMAN – « Boundaries, rigidity of representations, and Lyapunov exponents », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. III*, Kyung Moon Sa, Seoul, 2014, p. 71–96.

- [BFGM07] U. BADER, A. FURMAN, T. GELANDER & N. MONOD – « Property (T) and rigidity for actions on Banach spaces », *Acta Math.* **198** (2007), no. 1, p. 57–105.
- [BFH16] A. BROWN, D. FISHER & S. HURTADO – « Zimmer’s conjecture : Subexponential growth, measure rigidity, and strong property (T) », (2016), arXiv :1608.04995.
- [BFH20] — , « Zimmer’s conjecture for actions of  $SL(m, \mathbb{Z})$  », *Invent. Math.* **221** (2020), no. 3, p. 1001–1060.
- [BH99] M. R. BRIDSON & A. HAEFLIGER – Grund. math. Wiss., *Metric spaces of non-positive curvature* **319**, Springer, 1999.
- [BHMS20] J. BEHRSTOCK, M. HAGEN, A. MARTIN & A. SISTO – « A combinatorial take on hierarchical hyperbolicity and applications to quotients of mapping class groups », *arXiv :2005.00567* (2020).
- [BHS15] J. BEHRSTOCK, M. HAGEN & A. SISTO – « Hierarchically hyperbolic spaces II : Combination theorems and the distance formula », (2015), arXiv :1509.00632.
- [BHS17a] — , « Quasiflats in hierarchically hyperbolic spaces », (2017), arXiv :1704.04271.
- [BHS17b] J. BEHRSTOCK, M. F. HAGEN & A. SISTO – « Asymptotic dimension and small-cancellation for hierarchically hyperbolic spaces and groups », *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **114** (2017), no. 5, p. 890–926.
- [BHS17c] — , « Hierarchically hyperbolic spaces, I : Curve complexes for cubical groups », *Geom. Topol.* **21** (2017), no. 3, p. 1731–1804.
- [BHS19] J. BEHRSTOCK, M. HAGEN & A. SISTO – « Hierarchically hyperbolic spaces II : Combination theorems and the distance formula », *Pacific J. Math.* **299** (2019), no. 2, p. 257–338.
- [BL96] W. BALLMANN & F. LEDRAPPIER – « Discretization of positive harmonic functions on Riemannian manifolds and Martin boundary », Sémin. Congr., in *Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle (Luminy, 1992)* **1**, Soc. Math. France, Paris, 1996, p. 77–92.
- [BM00] T. BRADY & J. P. MCCAMMOND – « Three-generator Artin groups of large type are biautomatic », *J. Pure Appl. Algebra* **151** (2000), no. 1, p. 1–9.
- [BM02] M. BURGER & N. MONOD – « Continuous bounded cohomology and applications to rigidity theory », *Geom. Funct. Anal.* **12** (2002), no. 2, p. 219–280.
- [BM08] J. A. BEHRSTOCK & Y. N. MINSKY – « Dimension and rank for mapping class groups », *Ann. of Math. (2)* **167** (2008), no. 3, p. 1055–1077.
- [BM10] T. BRADY & J. MCCAMMOND – « Braids, posets and orthoschemes », *Algebr. Geom. Topol.* **10** (2010), no. 4, p. 2277–2314.
- [BM11] J. A. BEHRSTOCK & Y. N. MINSKY – « Centroids and the rapid decay property in mapping class groups », *J. Lond. Math. Soc. (2)* **84** (2011), no. 3, p. 765–784.

- [Bow95] B. H. BOWDITCH – « Notes on locally CAT(1) spaces », Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., in *Geometric group theory (Columbus, OH, 1992)* **3**, 1995, p. 1–48.
- [Bow13a] — , « Coarse median spaces and groups », *Pacific J. Math.* **261** (2013), no. 1, p. 53–93.
- [Bow13b] — , « Embedding median algebras in products of trees », (2013), <http://www.warwick.ac.uk/~masgak/papers/medianalg.pdf>. To appear in *Geom. Dedicata*.
- [Bow13c] — , « Invariance of coarse median spaces under relative hyperbolicity », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **154** (2013), no. 1, p. 85–95.
- [Bow14] — , « Some properties of median metric spaces », (2014), <http://www.warwick.ac.uk/~masgak/papers/medianmetrics.pdf>.
- [Bow19a] — , « Convex hulls in coarse median spaces », <http://www.warwick.ac.uk/~masgak/papers/hulls-cms.pdf>, 2019.
- [Bow19b] — , « Notes on coarse median spaces », London Math. Soc. Lecture Note Ser., in *Beyond hyperbolicity* **454**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2019, p. 3–24.
- [Bow20] — , « Median and injective metric spaces », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **168** (2020), no. 1, p. 43–55.
- [Bra01] T. BRADY – « A partial order on the symmetric group and new  $K(\pi, 1)$ 's for the braid groups », *Adv. Math.* **161** (2001), no. 1, p. 20–40.
- [Bri10] M. R. BRIDSON – « Semisimple actions of mapping class groups on CAT(0) spaces », London Math. Soc. Lecture Note Ser., in *Geometry of Riemann surfaces* **368**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010, p. 1–14.
- [BW11] M. R. BRIDSON & R. D. WADE – « Actions of higher-rank lattices on free groups », *Compos. Math.* **147** (2011), no. 5, p. 1573–1580.
- [CCG<sup>+</sup>20] J. CHALOPIN, V. CHEPOI, A. GENEVOIS, H. HIRAI & D. OSAJDA – « Helly groups », *arXiv preprint arXiv:2002.06895* (2020).
- [CCHO21] J. CHALOPIN, V. CHEPOI, H. HIRAI & D. OSAJDA – « Weakly modular graphs and nonpositive curvature », *Mem. Amer. Math. Soc.* (2021).
- [CCJ<sup>+</sup>01] P.-A. CHERIX, M. COWLING, P. JOLISSAINT, P. JULG & A. VALETTE – Progress in Mathematics, *Groups with the Haagerup property* **197**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001, Gromov's  $\alpha$ -T-menability.
- [CD95] R. CHARNEY & M. W. DAVIS – « The  $K(\pi, 1)$ -problem for hyperplane complements associated to infinite reflection groups », *J. Amer. Math. Soc.* **8** (1995), no. 3, p. 597–627.
- [CDH10] I. CHATTERJI, C. DRUȚU & F. HAGLUND – « Kazhdan and Haagerup properties from the median viewpoint », *Adv. Math.* **225** (2010), no. 2, p. 882–921.
- [CDHL19] I. CHATTERJI, F. DAHMANI, T. HAETTEL & J. LÉCUREUX – « Tangent bundles of hyperbolic spaces and proper affine actions on  $L_p$  spaces », *arXiv:1901.07462*, 2019.

- [CDV17] V. CHEPOI, F. F. DRAGAN & Y. VAXÈS – « Core congestion is inherent in hyperbolic networks », in *Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SIAM, Philadelphia, PA, 2017, p. 2264–2279.
- [CE07] V. CHEPOI & B. ESTELLON – « Packing and covering  $\delta$ -hyperbolic spaces by balls », in *Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques*, Springer, 2007, p. 59–73.
- [CFI13] I. CHATTERJI, T. FERNÓS & A. IOZZI – « The Median Class and Superrigidity of Actions on CAT(0) Cube Complexes », (2013), arXiv :1212.1585.
- [Cha] R. CHARNEY – « Problems related to Artin groups », American Institute of Mathematics, [http://people.brandeis.edu/~charney/papers/\\_probs.pdf](http://people.brandeis.edu/~charney/papers/_probs.pdf).
- [Che00] V. CHEPOI – « Graphs of some CAT(0) complexes », *Adv. in Appl. Math.* **24** (2000), no. 2, p. 125–179.
- [CHR16] L. CIOBANU, D. F. HOLT & S. REES – « Rapid decay and Baum-Connes for large type Artin groups », *Trans. Amer. Math. Soc.* **368** (2016), no. 9, p. 6103–6129.
- [CM05] P.-E. CAPRACE & B. MÜHLHERR – « Reflection triangles in Coxeter groups and biautomatcity », *J. Group Theory* **8** (2005), no. 4, p. 467–489.
- [CN05] I. CHATTERJI & G. NIBLO – « From wall spaces to CAT(0) cube complexes », *Internat. J. Algebra Comput.* **15** (2005), no. 5-6, p. 875–885.
- [CP05] J. CRISP & L. PAOLUZZI – « On the classification of CAT(0) structures for the 4-string braid group », *Michigan Math. J.* **53** (2005), no. 1, p. 133–163.
- [CR05] I. CHATTERJI & K. RUANE – « Some geometric groups with rapid decay », *Geom. Funct. Anal.* **15** (2005), no. 2, p. 311–339.
- [CS11] P.-E. CAPRACE & M. SAGEEV – « Rank rigidity for CAT(0) cube complexes », *Geom. Funct. Anal.* **21** (2011), no. 4, p. 851–891.
- [CW17] M. CALVEZ & B. WIEST – « Acylindrical hyperbolicity and Artin-Tits groups of spherical type », *Geom. Dedicata* **191** (2017), p. 199–215.
- [Dav15] M. W. DAVIS – « The geometry and topology of Coxeter groups », Adv. Lect. Math. (ALM), in *Introduction to modern mathematics* **33**, Int. Press, Somerville, MA, 2015, p. 129–142.
- [DDLS20] S. DOWDALL, M. G. DURHAM, C. J. LEININGER & A. SISTO – « Extensions of Veech groups are hierarchically hyperbolic », *arXiv preprint arXiv :2006.16425* (2020).
- [Deh15] P. DEHORNOY – EMS Tracts in Mathematics, *Foundations of Garside theory* **22**, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2015, With François Digne, Eddy Godelle, Daan Kramer and Jean Michel, Contributor name on title page : Daan Kramer.
- [DH20] B. DEROIN & S. HURTADO – « Non left-orderability of lattices in higher rank semi-simple Lie groups », arXiv :2008.10687, 2020.
- [DHS17] M. G. DURHAM, M. F. HAGEN & A. SISTO – « Boundaries and automorphisms of hierarchically hyperbolic spaces », *Geom. Topol.* **21** (2017), no. 6, p. 3659–3758.



- [dLdlS15] T. DE LAAT & M. DE LA SALLE – « Strong property (T) for higher-rank simple Lie groups », *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **111** (2015), no. 4, p. 936–966.
- [dlS17] M. DE LA SALLE – « Strong property (T) for higher rank lattices », (2017), arXiv :1711.01900.
- [DMS20] M. G. DURHAM, Y. MINSKY & A. SISTO – « Stable cubulations, bicomings and barycenters », *arXiv preprint arXiv :2009.13647* (2020).
- [dTV08] Y. DE CORNULIER, R. TESSERA & A. VALETTE – « Isometric group actions on Banach spaces and representations vanishing at infinity. », *Transform. Groups* **13** (2008), no. 1, p. 125–147 (English).
- [ECH<sup>+</sup>92] D. B. A. EPSTEIN, J. W. CANNON, D. F. HOLT, S. V. F. LEVY, M. S. PATERSON & W. P. THURSTON – *Word processing in groups*, Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA, 1992.
- [FM98] B. FARB & H. MASUR – « Superrigidity and mapping class groups », *Topology* **37** (1998), no. 6, p. 1169–1176.
- [FM12] B. FARB & D. MARGALIT – Princeton Mathematical Series, *A primer on mapping class groups* **49**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [Fur71] H. FURSTENBERG – « Random walks and discrete subgroups of Lie groups », in *Advances in Probability and Related Topics, Vol. 1*, Dekker, New York, 1971, p. 1–63.
- [GdlH90] É. GHYS & P. DE LA HARPE – « Panorama », *Progr. Math.*, in *Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov (Bern, 1988)* **83**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, p. 1–25.
- [Gen20] A. GENEVOIS – « Hyperbolicities in CAT(0) cube complexes », *Enseign. Math.* **65** (2020), no. 1-2, p. 33–100.
- [Gen21] —, « Median sets of isometries in CAT(0) cube complexes and some of its applications », *Michigan Math. J.* (2021).
- [GMRS98] R. GITIK, M. MITRA, E. RIPS & M. SAGEEV – « Widths of subgroups », *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), no. 1, p. 321–329.
- [God07] E. GODELLE – « Artin-Tits groups with CAT(0) Deligne complex », *J. Pure Appl. Algebra* **208** (2007), no. 1, p. 39–52.
- [GP12] E. GODELLE & L. PARIS – « Basic questions on Artin-Tits groups », CRM Series, in *Configuration spaces* **14**, Ed. Norm., Pisa, 2012, p. 299–311.
- [Gro87] M. GROMOV – « Hyperbolic groups », *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, in *Essays in group theory* **8**, Springer, New York, 1987, p. 75–263.
- [Hae16] T. HAETTEL – « Higher rank lattices are not coarse median », *Algebr. Geom. Topol.* **16** (2016), no. 5, p. 2895–2910.
- [Hae20] —, « Hyperbolic rigidity of higher rank lattices », *with an appendix by Vincent Guirardel et Camille Horbez*, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (2)* **53** (2020), p. 439–468.
- [Hae21a] —, « Cubulation of some triangle-free Artin groups », *Groups Geom. Dyn.* (2021).

- [Hae21b] — , « Injective metrics on buildings and symmetric spaces », arXiv :2101.09367, 2021.
- [Hae21c] — , « Virtually cocompactly cubulated Artin-Tits groups », *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2021), no. 4, p. 2919–2961.
- [Hae21d] — , « XXL type Artin groups are CAT(0) and acylindrically hyperbolic », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* (2021).
- [Ham07] U. HAMENSTÄDT – « Geometry of the mapping class groups III : Quasi-isometric rigidity », arXiv :0512429, 2007.
- [Ham09] U. HAMENSTÄDT – « Geometry of the mapping class group II : A biautomatic structure », *arXiv preprint arXiv :0912.0137* (2009).
- [HHP20] T. HAETTEL, N. HODA & H. PETYT – « The coarse Helly property, hierarchical hyperbolicity, and semihyperbolicity », *arXiv preprint arXiv :2009.14053* (2020).
- [Hir19] H. HIRAI – « A Nonpositive Curvature Property of Modular Semilattices », arXiv :1905.01449, 2019.
- [HJP16] J. HUANG, K. JANKIEWICZ & P. PRZYTYCKI – « Cocompactly cubulated 2-dimensional Artin groups », *Comment. Math. Helv.* **91** (2016), no. 3, p. 519–542.
- [HK01] N. HIGSON & G. KASPAROV – «  $E$ -theory and  $KK$ -theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space », *Invent. Math.* **144** (2001), no. 1, p. 23–74.
- [HKS16] T. HAETTEL, D. KIELAK & P. SCHWER – « The 6-strand braid group is CAT(0) », *Geom. Dedicata* **182** (2016), p. 263–286.
- [HO19a] J. HUANG & D. OSAJDA – « Helly meets Garside and Artin », *arXiv :1904.09060* (2019).
- [HO19b] — , « Metric systolicity and two-dimensional Artin groups », *Math. Ann.* **374** (2019), no. 3-4, p. 1311–1352.
- [Hod18] N. HODA – « Shortcut graphs and groups », Preprint, arXiv :1811.05036, 2018.
- [Hod20a] — , « Crystallographic Helly groups », *arXiv preprint arXiv :2010.07407* (2020).
- [Hod20b] — , « Shortcut spaces », 2020.
- [HPW15] S. HENSEL, P. PRZYTYCKI & R. C. H. WEBB – « 1-slim triangles and uniform hyperbolicity for arc graphs and curve graphs », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **17** (2015), no. 4, p. 755–762.
- [Hru10] G. C. HRUSKA – « Relative hyperbolicity and relative quasiconvexity for countable groups », *Algebr. Geom. Topol.* **10** (2010), no. 3, p. 1807–1856.
- [HS20a] M. F. HAGEN & T. SUSSE – « On hierarchical hyperbolicity of cubical groups », *Israel J. Math.* **236** (2020), no. 1, p. 45–89.
- [HS20b] — , « On hierarchical hyperbolicity of cubical groups », *Israel J. Math.* **236** (2020), no. 1, p. 45–89.

- [HSWW17] T. HAETTEL, A.-S. SCHILLING, C. WALSH & A. WIENHARD – « Horofunction compactifications of symmetric spaces », (2017), arXiv :1705 :05026.
- [HW09] G. C. HRUSKA & D. T. WISE – « Packing subgroups in relatively hyperbolic groups », *Geom. Topol.* **13** (2009), no. 4, p. 1945–1988.
- [HW14] —, « Finiteness properties of cubulated groups », *Compos. Math.* **150** (2014), no. 3, p. 453–506.
- [Isb64] J. R. ISBELL – « Six theorems about injective metric spaces », *Comment. Math. Helv.* **39** (1964), p. 65–76.
- [Jeo20] S. G. JEONG – « The seven-strand braid group is CAT(0) », arXiv :2009.09350, 2020.
- [Kai92] V. A. KAIMANOVICH – « Discretization of bounded harmonic functions on Riemannian manifolds and entropy », in *Potential theory (Nagoya, 1990)*, de Gruyter, Berlin, 1992, p. 213–223.
- [KK13] S.-H. KIM & T. KOBERDA – « Embedability between right-angled Artin groups », *Geom. Topol.* **17** (2013), no. 1, p. 493–530.
- [KL97] B. KLEINER & B. LEEB – « Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and Euclidean buildings », *Publ. Math. IHÉS* **86** (1997), p. 115–197.
- [KM96] V. A. KAIMANOVICH & H. MASUR – « The Poisson boundary of the mapping class group », *Invent. Math.* **125** (1996), no. 2, p. 221–264.
- [Kos69] B. KOSTANT – « On the existence and irreducibility of certain series of representations », *Bull. Amer. Math. Soc.* **75** (1969), p. 627–642.
- [KR17] D. KASPROWSKI & H. RÜPING – « The Farrell-Jones conjecture for hyperbolic and CAT(0)-groups revisited », *J. Topol. Anal.* **9** (2017), no. 4, p. 551–569.
- [KT08] C. KASSEL & V. TURAEV – Graduate Texts in Mathematics, *Braid groups* **247**, Springer, New York, 2008, With the graphical assistance of Olivier Dodane.
- [Laf00] V. LAFFORGUE – « A proof of property (RD) for cocompact lattices of  $SL(3, \mathbf{R})$  and  $SL(3, \mathbf{C})$  », *J. Lie Theory* **10** (2000), no. 2, p. 255–267.
- [Laf02] —, «  $K$ -théorie bivariante pour les algèbres de Banach et conjecture de Baum-Connes », *Invent. Math.* **149** (2002), no. 1, p. 1–95.
- [Laf08] —, « Un renforcement de la propriété (T) », *Duke Math. J.* **143** (2008), no. 3, p. 559–602.
- [Lan13] U. LANG – « Injective hulls of certain discrete metric spaces and groups », *J. Topol. Anal.* **5** (2013), no. 3, p. 297–331.
- [Lia14] B. LIAO – « Strong Banach property (T) for simple algebraic groups of higher rank », *J. Topol. Anal.* **6** (2014), no. 1, p. 75–105.
- [LM21] I. LEARY & A. MINASYAN – « Commensurating HNN-extensions : non-positive curvature and biautomaticity », *Geom. Topol.* (2021).
- [LS84] T. LYONS & D. SULLIVAN – « Function theory, random paths and covering spaces », *J. Differential Geom.* **19** (1984), no. 2, p. 299–323.

- [Man06] J. F. MANNING – « Quasi-actions on trees and property (QFA) », *J. London Math. Soc. (2)* **73** (2006), no. 1, p. 84–108, With an appendix by N. Monod and B. Rémy.
- [Mar91] G. A. MARGULIS – Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], *Discrete subgroups of semi-simple Lie groups* **17**, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [McC17] J. MCCAMMOND – « The mysterious geometry of Artin groups », (2017), <http://web.math.ucsb.edu/~jon.mccammond/papers/mysterious-geometry.pdf>.
- [Mil20] M. MILLER – « Stable subgroups of the genus two handlebody group », *arXiv preprint arXiv:2009.05067* (2020).
- [Mim15] M. MIMURA – « Superrigidity from Chevalley groups into acylindrically hyperbolic groups via quasi-cocycles », (2015), arXiv :1502.03703.
- [MM99] H. A. MASUR & Y. N. MINSKY – « Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity », *Invent. Math.* **138** (1999), no. 1, p. 103–149.
- [MM00] H. A. MASUR & Y. N. MINSKY – « Geometry of the complex of curves. II. Hierarchical structure », *Geom. Funct. Anal.* **10** (2000), no. 4, p. 902–974.
- [MO19] A. MINASYAN & D. OSIN – « Acylindrically hyperbolic groups with exotic properties », *J. Algebra* **522** (2019), p. 218–235.
- [Mon01] N. MONOD – Lecture Notes in Mathematics, *Continuous bounded cohomology of locally compact groups* **1758**, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [Mos95] L. MOSHER – « Mapping class groups are automatic », *Ann. of Math. (2)* **142** (1995), no. 2, p. 303–384.
- [MT18] J. MAHER & G. TIOZZO – « Random walks on weakly hyperbolic groups », *J. Reine Angew. Math.* **742** (2018), p. 187–239.
- [MY02] I. MINEYEV & G. YU – « The Baum-Connes conjecture for hyperbolic groups », *Invent. Math.* **149** (2002), no. 1, p. 97–122.
- [Nic08] B. NICA – « Group actions on median spaces », arXiv :0809.4099, 2008.
- [Nic13] —, « Proper isometric actions of hyperbolic groups on  $L^p$ -spaces », *Compos. Math.* **149** (2013), no. 5, p. 773–792.
- [NR97] G. A. NIBLO & L. REEVES – « Groups acting on CAT(0) cube complexes », *Geom. Topol.* **1** (1997), p. 1–7.
- [NR98a] G. A. NIBLO & L. D. REEVES – « The geometry of cube complexes and the complexity of their fundamental groups », *Topology* **37** (1998), no. 3, p. 621–633.
- [NR98b] G. A. NIBLO & M. A. ROLLER – « Groups acting on cubes and Kazhdan’s property (T) », *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), no. 3, p. 693–699.
- [NR03] G. A. NIBLO & L. D. REEVES – « Coxeter groups act on CAT(0) cube complexes », *J. Group Theory* **6** (2003), no. 3, p. 399–413.
- [Nv16] B. NICA & J. ŠPAKULA – « Strong hyperbolicity », *Groups Geom. Dyn.* **10** (2016), no. 3, p. 951–964.

- [NWZ] G. A. NIBLO, N. WRIGHT & J. ZHANG – « Coarse median algebras : The intrinsic geometry of coarse median spaces and their intervals, journal = arXiv :1802.02499, year = 2018, ».
- [Osi06] D. V. OSIN – « Relatively hyperbolic groups : intrinsic geometry, algebraic properties, and algorithmic problems », *Mem. Amer. Math. Soc.* **179** (2006), no. 843, p. vi+100.
- [Osi16] D. OSIN – « Acylindrically hyperbolic groups », *Trans. Amer. Math. Soc.* **368** (2016), no. 2, p. 851–888.
- [Par14] L. PARIS – «  $K(\pi, 1)$  conjecture for Artin groups », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **23** (2014), no. 2, p. 361–415.
- [Rol98] M. ROLLER – « Poc Sets, Median Algebras and Group Actions », arXiv :1607.07747, 1998.
- [RRS98] J. RAMAGGE, G. ROBERTSON & T. STEGER – « A Haagerup inequality for  $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_1$  and  $\tilde{A}_2$  buildings », *Geom. Funct. Anal.* **8** (1998), no. 4, p. 702–731.
- [RS99] H. RUBINSTEIN & M. SAGEEV – « Intersection patterns of essential surfaces in 3-manifolds », *Topology* **38** (1999), no. 6, p. 1281–1291.
- [RST18] J. RUSSELL, D. SPRIANO & H. C. TRAN – « Convexity in hierarchically hyperbolic spaces », arXiv :1809.09303, 2018.
- [Sag97] M. SAGEEV – « Codimension-1 subgroups and splittings of groups », *J. Algebra* **189** (1997), no. 2, p. 377–389.
- [Sag14] — , « CAT(0) cube complexes and groups », IAS/Park City Math. Ser., in *Geometric group theory* **21** , Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, p. 7–54.
- [Ser74] J.-P. SERRE – « Amalgames et points fixes », in *Proceedings of the Second International Conference on the Theory of Groups (Australian Nat. Univ., Canberra, 1973)*, Springer, Berlin, 1974, p. 633–640. Lecture Notes in Math., Vol. 372.
- [Sha00] Y. SHALOM – « Rigidity of commensurators and irreducible lattices », *Invent. Math.* **141** (2000), no. 1, p. 1–54.
- [Sis16] A. SISTO – « Quasi-convexity of hyperbolically embedded subgroups », *Math. Z.* **283** (2016), no. 3-4, p. 649–658.
- [Sis18] — , « Contracting elements and random walks », *J. Reine Angew. Math.* **742** (2018), p. 79–114.
- [Tao13] J. TAO – « Linearly bounded conjugator property for mapping class groups », *Geom. Funct. Anal.* **23** (2013), no. 1, p. 415–466.
- [Tit66] J. TITS – « Normalisateurs de tores. I. Groupes de Coxeter étendus », *J. Algebra* **4** (1966), p. 96–116.
- [Tra19] H. C. TRAN – « On strongly quasiconvex subgroups », *Geom. Topol.* **23** (2019), no. 3, p. 1173–1235.
- [Ver93] E. R. VERHEUL – CWI Tract, *Multimedians in metric and normed spaces* **91** , Stichting Mathematisch Centrum, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1993.

- [Vok17] K. M. VOKES – « Hierarchical hyperbolicity of graphs of multicurves », *arXiv preprint arXiv :1711.03080* (2017).
- [Wis] D. T. WISE – « The cubical route to understanding groups », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, (Seoul, 2014)*, p. 1075–1099.
- [Wri12] N. WRIGHT – « Finite asymptotic dimension for CAT(0) cube complexes », *Geom. Topol.* **16** (2012), no. 1, p. 527–554.
- [WW17] D. T. WISE & D. J. WOODHOUSE – « A cubical flat torus theorem and the bounded packing property », *Israel J. Math.* **217** (2017), no. 1, p. 263–281.
- [Yu05] G. YU – « Hyperbolic groups admit proper affine isometric actions on  $l^p$ -spaces », *Geom. Funct. Anal.* **15** (2005), no. 5, p. 1144–1151.
- [Žuk03] A. ŽUK – « Property (T) and Kazhdan constants for discrete groups », *Geom. Funct. Anal.* **13** (2003), no. 3, p. 643–670.