HAL open science

Fonctions Delta de Hooley associées à des caractères et applications

Alexandre Lartaux

▶ To cite this version:

Alexandre Lartaux. Fonctions Delta de Hooley associées à des caractères et applications. Théorie des nombres [math.NT]. Sorbonne Université, 2021. Français. NNT : 2021SORUS145 . tel-03482009

HAL Id: tel-03482009

https://theses.hal.science/tel-03482009v1

Submitted on 15 Dec 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Paris Sorbonne Université

École Doctorale de Science Mathématiques de Paris Centre (ED 386)
Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche (UMR 7586)

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Alexandre Lartaux

Fonctions Delta de Hooley associées à des caractères et applications

---

dirigée par Régis de la Bretèche

Soutenue le 8 octobre 2021 devant le jury composé de :

M. Gérald Tenenbaum	PR	Université de Lorraine	Président
M Régis de la Bretèche	PR	Université de Paris	Directeur
Mme Cécile Dartyge	MCF	Université de Lorraine	Examinatrice
M. Sinnou David	PR	Sorbonne Université	Examinateur
M Etienne Fouvry	PR	Université Paris Saclay	Examinateur
M. Marc Hindry	PR	Université de Paris	Examinateur
M. Florent Jouve	PR	Université de Bordeaux	Examinateur
M. Bruno Martin	PR	Université du Littoral Côte d'Opale	Examinateur

Au vu des rapports de :

M. Florent Jouve	PR	Université de Bordeaux
M. Dimitris Koukoulopoulos	PR	Université de Montréal

Institut de Mathématiques de
Jussieu-Paris Rive Gauche
(CNRS - UMR 7586)
Université Paris Diderot (Paris 7)
Bâtiment Sophie Germain
Boîte Courrier 7012
8, place Aurélie Nemours
75205 Paris Cedex 13
France

Ecole Doctorale de Sciences
Mathématiques de Paris Centre
Boite courrier 290
4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05
France

Remerciements

Je souhaite remercier ici toutes les personnes qui m'ont accompagné au cours de mes trois années de thèse, qui m'ont soutenu, et qui m'ont permis d'arriver jusqu'à la soutenance.

Tout d'abord je tiens à remercier mon directeur de thèse Régis de la Bretèche, pour avoir accepté de m'encadrer alors que j'étais encore étudiant à Orsay, ainsi que pour les nombreuses connaissances qu'il m'a transmises en théorie des nombres. Je le remercie également pour toutes ses relectures patientes de mes articles, qui m'ont permis de progresser au niveau de la rédaction.

Je souhaite également remercier Gérald Tenenbaum pour ses avis éclairés sur mon sujet de recherche. Nos discussions se sont avérées déterminantes pour la résolution de mon problème et ses articles, qui ont grandement influencé mes recherches, m'ont permis de comprendre les questions et les méthodes de résolutions actuelles sur ce sujet. Je le remercie également pour ses nombreux commentaires pertinents sur mes différents articles qui m'ont permis d'en améliorer le contenu.

Je remercier ensuite Kévin Destagnol, pour les nombreuses discussions que nous avons eues sur la partie algébrique de ma thèse. Celles-ci m'ont permis de comprendre la géométrie qui se cachait derrière les calculs et ont grandement contribué à mon dernier article.

J'adresse mes remerciements suivants à Florent Jouve et Dimitris Koukoulopoulos pour avoir accepté d'être mes rapporteurs. Ils ont tous deux fait preuve d'une grande bienveillance lors de l'écriture de leur rapport et les questions de Dimitris ont apporté quelques corrections bienvenues à mon mémoire.

Je tiens ensuite à remercier Cécile Dartyge, Sinnou David, Bruno Martin, Marc Hindry, Etienne Fouvry, Florent Jouve et Gérald Tenenbaum d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie également Marc Hindry d'avoir accepté d'être mon tuteur au cours de cette thèse. Je te remercie pour la bienveillance dont tu as fait preuve au cours de nos entretiens mais également pour les discussions intéressantes que nous avons eues, notamment lors de la dernière année.

Je remercie toutes les personnes qui ont organisé les séminaires, ou qui ont donné les exposés, auxquels j'ai eu la chance d'assister au cours de ma thèse. Je pense notamment à Adam Harper, Emmanuel Kowalski, Philippe Michel, Andraw Granville, Dimitris Koukoulopoulos, Emmanuel Peyre, Sandro Bettin et Régis de la Bretèche.

Je remercie également Stefano Morra et Lilian Matthiesen pour m'avoir invité à des séminaires en ligne lorsqu'il n'était pas possible de se voir, ainsi que Florent Jouve, pour son invitation au CIRM en 2019.

Je tiens à remercier tous les chercheurs avec qui j'ai eu la chance de discuter. Je pense notamment à Adam Harper, Cécile Dartyge, Dimitris Koukoulopoulos, Sary Drappeau. Je remercie tout particulièrement Tim Browning et Efthymios Sofos qui ont failli me persuader de rester dans la recherche.

Par ailleurs, je tiens également à remercier tous les doctorants et les post doctorants qui m'ont permis de passer un agréable moment lors des séminaires. Merci à Lucile, Cathy, Alexandre, Julie, Corentin D. et David.

Je souhaite maintenant remercier tous les doctorants qui ont égayé mes trois années passées à Diderot. Merci à Elie, Alex, Mario, Kévin, Charles, Omar, Léa, Amandine, Tancrède, Téophile, Pierre, Charlotte, Soledad, Juan Pablo, Pierre Marie, Colin, Jérémy, Alice, Maud, Wille, Nicolas, Sacha, Romain, Mathieu, Corentin M. et Andrei pour tous nos moments de convivialité en salle des doctorants, à la cantine, ou dans nos bureaux.

Je n'aurais pas pu effectuer cette thèse sans un excellent enseignement à Orsay. Je tiens donc à remercier tous les professeurs que j'ai eu lors de mes années d'études et plus particulièrement ceux qui m'ont orienté vers la théorie des nombres. Merci à Etienne Fouvry et Florent Jouve pour vos cours de théorie des nombres en M1 et votre accessibilité, merci à François Charles pour tes cours de théorie algébrique des nombres en M2. Merci également à David Harari pour avoir eu la patience de répondre à toutes mes questions en géométrie algébrique. Enfin, je tiens à remercier Olivier Fouquet pour sa gentillesse et ses conseils avisés. Sans toi, je n'aurais probablement pas fait de thèse sous la direction de Régis.

Merci beaucoup à tous mes amis et à toute ma famille, notamment mes parents et ma soeur, pour tout le soutien que vous m'avez apporté, à chaque instant. Grâce à vous, je ne suis jamais senti seul.

Enfin, je tiens tout particulièrement à remercier ma femme, Angélique Lartaux, qui a été d'une dévotion sans faille tout au long de ma thèse, qui a su me réconforter lors des moments de doute, et qui a tout fait pour que j'aille jusqu'au bout malgré toutes les péripéties. Je te dois tout.

Table des matières

Remerciements **3**

Introduction **7**
I.1 La fonction Δ de Hooley . . . 7
I.1.1 Définition . . . 7
I.1.2 Fonctions Delta généralisées . . . 9
I.2 Fonction Δ associée à un caractère . . . 9
I.2.1 Oscillations statistiques . . . 10
I.2.2 Application . . . 11
La conjecture de Manin . . . 11
Surfaces de Châtelet . . . 12
I.3 État de l'art . . . 13
I.4 Résultats et méthodes de la thèse . . . 14
I.5 Plan de la thèse . . . 20

1 Moments de la fonction Delta de Hooley associée à un caractère **23**
1.1 Introduction et énoncés des résultats . . . 23
1.2 Majoration dans le cas où v est fixé . . . 27
1.2.1 Énoncés des résultats . . . 27
1.2.2 Rappels . . . 27
1.2.3 Démonstration du Théorème 1.2.1 . . . 32
1.3 Majoration dans le cas où v parcourt un intervalle de taille V . . . 33
1.3.1 De la majoration locale à la majoration globale . . . 33
1.3.2 Démonstration du Théorème 1.1.4 . . . 34
1.4 Minoration dans le cas où v parcourt un intervalle de taille V . . . 35
1.4.1 Une application de la transformée de Fourier . . . 35
1.4.2 Démonstration du Théorème 1.1.11 . . . 36

2 Sur la fonction Delta de Hooley associée à des caractères **39**
2.1 Introduction . . . 39
2.1.1 Notations et énoncés des théorèmes . . . 39
2.1.2 Applications . . . 43
2.2 Lemmes préliminaires . . . 44
2.2.1 Majorer une norme infinie par une norme L^q . . . 44
2.2.2 Un théorème de Shiu et une formule de Parseval . . . 49
2.2.3 Des inégalités de Hölder . . . 50
2.2.4 Estimations de sommes sur les nombres premiers . . . 57
2.2.5 Lemmes fondamentaux . . . 60
2.3 Estimation de $C(n, \chi)$ et $D(n, \chi)$ . . . 61

2.3.1 Estimation de $\Delta^{(k)}(n, \boldsymbol{\chi}, \vartheta)$ 62
2.3.2 Démonstration du Théorème 2.3.1 67
2.4 Démonstration du Théorème 2.1.1 73
2.4.1 Majoration de $\Delta^*(n, \chi)$ 73
2.4.2 Fin de la démonstration 76
2.5 Démonstration du Théorème 2.1.4 80

3 Sur le nombre d'idéaux dont la norme est la valeur d'une forme binaire de degré 3 83
3.1 Introduction et résultats 83
3.2 Rappels 85
3.2.1 Étude du nombre de solutions locales d'une équation polynomiale . 85
3.2.2 Estimation de fonctions arithmétiques appliquées à des formes binaires 88
3.2.3 Sur les fonctions Delta de Hooley généralisées 89
3.3 Simplification du problème 90
3.3.1 Une bonne approximation 90
3.3.2 Paramétrisation de la somme (3.2) 94
3.3.3 Estimation de la vitesse de convergence des sommes dans la formule (3.49) 95
3.4 Démonstration de la Proposition 3.3.8 et du Théorème 3.1.1 98
3.5 Interprétation géométrique de $K(F)$ 109
3.5.1 Interprétation géométrique de $K_q(F)$ 109
3.5.2 Interprétation géométrique de $K_p(F)$ lorsque p ne divise pas q . . . 112
Cas $\chi(p) \neq 1$ 112
Cas $\chi(p) = 1$ 114

Bibliographie 117

Introduction

I.1 La fonction Δ de Hooley

I.1.1 Définition

Dans un article paru en 1979 [21], Hooley introduit une nouvelle fonction arithmétique, la fonction Δ, définie de la manière suivante.

Définition I.1.1. Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\Delta(n) := \max_{u \in \mathbb{R}} \big(\Delta(n,u)\big),$$

où

$$\Delta(n,u) := |\{d \mid n \ : \ \mathrm{e}^u < d \leqslant \mathrm{e}^{u+1}\}|.$$

Cette fonction permet donc de mesurer la concentration de l'ensemble

$$\{\log d \ : \ d \mid n\}.$$

L'étude de l'ensemble des logarithmes des diviseurs d'un entier est motivée par un théorème énoncé par Hall et Tenenbaum dans [17], qui décrit la structure des diviseurs d'un entier normal n. Avant d'énoncer ce théorème, nous définissons la notion "pour presque tout n".

Définition I.1.2. Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}^*$. On dit que $\mathcal{P}$ est vérifiée pour presque tout n si, lorsque A désigne l'ensemble des entiers n ne vérifiant pas la propriété, nous avons

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \big|A \cap [1,x]\big| = 0.$$

Théorème I.1.3. *Soient $\varepsilon > 0$ et $\xi(n)$ une fonction tendant vers $+\infty$ avec n assez lentement. Pour presque tout n, nous avons*

$$\sup_{\xi(n) \leqslant j \leqslant \tau(n)} \Big| \frac{\log_2 d_j(n) - \log j / \log 2}{\sqrt{2 \log j \log_3 j}} \Big| < 1 + \varepsilon.$$

Ce théorème découle d'un autre théorème, énoncé par Erdös en 1946 [11] mais démontré en détails par Hall et Tenenbaum dans [17] qui décrit quant à lui la structure des facteurs premiers d'un entier normal n.

Les recherches sur la fonction Δ de Hooley comportent deux axes : l'étude de son ordre normal et l'étude de son ordre moyen.

L'étude de l'ordre normal de la fonction Δ a donné lieu à de nombreux articles. Nous pouvons citer ceux de Maier et Tenenbaum en 1984 [25], en 1985 [26] et en 2009 [27], et plus récemment un article du à Ford, Green et Koukoulopoulos [13]. Mentionnons le résultat du premier article cité. conjecturé par Erdös en 1948 dans [12].

Théorème I.1.4 (Maier-Tenenbaum, 1984, [25]). *Pour presque tout n, nous avons*

$$\Delta(n) \geqslant (\log_2(n)^{\gamma},$$

où $\gamma \approx 0,28754$.

Ce théorème a notamment fourni la preuve d'une conjecture d' Erdös [12] datant de 1948, stipulant que pour presque tout n, $\Delta(n) > 2$.

L'étude de l'ordre moyen a également donné lieu à de nombreux articles. Dans son article paru en 1979, Hooley s'est intéressé à une majoration de l'ordre moyen de la fonction Δ, car cela lui fournissait de nombreuses applications en géométrie diophantienne. Il établit ainsi le théorème suivant.

Théorème I.1.5 (Hooley, 1979, [21]). *Nous avons, uniformément pour $x \geqslant 2$,*

$$\sum_{n \leqslant x} \Delta(n) \ll x(\log x)^{4/\pi - 1}.$$

Sa démonstration repose sur une transformation de Fourier, qui lui a permis de ramener le problème à l'étude de la fonction sommatoire d'une fonction multiplicative.

La majoration établie dans ce théorème a par la suite été améliorée, d'abord par Hall et G.Tenenbaum, dans un article paru en 1982 [15], puis uniquement par Tenenbaum dans un article paru en 1985 [32]. Enfin, Hall et Tenenbaum ont fourni des précisions sur la majoration obtenue dans [16]. Leur résultat est actuellement le meilleur résultat connu à ce jour. Avant d'énoncer leur théorème, nous devons définir la fonction $\mathcal{L}$. Nous posons ainsi, pour tout $x \geqslant 16$

$$\mathcal{L}(x) := \exp(\sqrt{\log_2(x)\log_3(x)}).$$

Il s'agit d'une fonction à croissance lente de $\log x$, dans le sens où elle est dominée par n'importe quelle puissance de $\log x$.

Théorème I.1.6 (Hall-Tenenbaum, 1986, [16]). *Nous avons, uniformément pour $x \geqslant 16$*

$$\sum_{n \leqslant x} \Delta(n) \ll x\mathcal{L}(x)^{\alpha},$$

avec $\alpha = 2 + o(1)$.

Dans [21], Hooley a fourni de nombreuses applications du Théorème I.1.5 à des problèmes diophantiens. L'un de ces nombreux problèmes consiste à minorer le nombre d'entiers pouvant s'exprimer comme la somme d'un carré et de deux bicarrés. Le théorème suivant, qui est un cas particulier du théorème 1.2 de [30], fournit la meilleure minoration connue à ce jour.

Théorème I.1.7. *Soit $\nu(x)$ le nombre d'entiers inférieurs à x qui peuvent s'exprimer comme la somme d'un carré et de deux bicarrés. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0(\varepsilon)$ tel que pour tout $x \geqslant x_0(\varepsilon)$, nous avons*

$$\nu(x) > \frac{x}{\mathcal{L}(x)^{\sqrt{2}+\varepsilon}}.$$

I.1.2 Fonctions Delta généralisées

Dans son article paru en 1979, Hooley a également introduit une généralisation de la fonction Delta, permettant de considérer plus d'un diviseur d'un entier. Les fonctions Δ_r sont ainsi définies de la manière suivante.

Définition I.1.8. Pour tout entier $r \geqslant 2$, pour tout $r-1$-uplet $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_{r-1}) \in \mathbb{R}^{r-1}$, nous définissons

$$\Delta_r(n, \mathbf{u}) := |\{d_1 \cdots d_{r-1} \mid n \ : \ \mathrm{e}^{u_i} < d_i \leqslant \mathrm{e}^{u_i+1} \, \forall i \leqslant r-1\}|$$

et

$$\Delta_r(n) := \max_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{r-1}} \big(\Delta_r(n, \mathbf{u})\big).$$

Généralisant sa méthode à tout entier $r \geqslant 2$ il a fourni une première estimation de leur ordre moyen. Ce résultat a par la suite été amélioré par Hall et Tenenbaum dans [16].

Théorème I.1.9 (Hall-Tenenbaum, 1986, [16])**.** *Pour tout entier $r \geqslant 2$, nous avons, uniformément pour $x \geqslant 3$*

$$\sum_{n \leqslant x} \Delta_r(n) \ll x \mathcal{L}(x)^{\alpha_r},$$

où $\alpha_r = (r-1)\sqrt{r(r+2)/2} + o(1)$.

Ces fonctions Δ possèdent également des applications en géométrie diophantienne. L'une d'entre elles, fournie par Hooley dans [21] et liée à la fonction Δ_3, consiste à estimer le nombre $r_8(n)$ de représentations d'un entier n comme somme de huit cubes strictement positifs.

Théorème I.1.10. *Soit $\varepsilon > 0$. Nous avons, lorsque n tend vers l'infini.*

$$r_8(n) = O(n^{5/3}(\log n)^{\varepsilon}).$$

I.2 Fonction Δ associée à un caractère

De récentes études ont mis en évidence l'intérêt de généraliser les fonctions Δ, en leur donnant en argument des fonctions arithmétiques, notamment des fonctions oscillantes telles que des caractères de Dirichlet.

Définition I.2.1. Pour une fonction arithmétique f, un réel u et un réel $v \in [0,1]$, nous posons

$$\Delta(n, f, u, v) := \sum_{\substack{d \mid n \\ \mathrm{e}^u < d \leqslant \mathrm{e}^{u+v}}} f(d)$$

et

$$\Delta(n, f) := \max_{\substack{u \in \mathbb{R} \\ v \in [0,1]}} \big(|\Delta(n, f, u, v)|\big).$$

L'introduction de la variable v est motivée par le fait que lorsque la fonction f n'est pas de signe constant, le maximum en v n'est pas forcément atteint en $v = 1$. La fonction Δ classique correspond donc au cas où f est la fonction constante égale à 1. Nous pouvons effectuer la même généralisation pour les fonctions Δ_r.

Définition I.2.2. Soit $r \geqslant 2$ un entier, $\mathbf{f} = (f_1, \cdots, f_{r-1})$ un $r-1$-uplet de fonctions arithmétiques, $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_{r-1}) \in \mathbb{R}^{r-1}$ et $\mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_{r-1}) \in [0,1]^{r-1}$. Nous posons

$$\Delta_r(n, \mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{\substack{d_1 \cdots d_{r-1} | n \\ \mathrm{e}^{u_i} < d_i \leqslant \mathrm{e}^{u_i + v_i}}} f_1(d_1) \cdots f_{r-1}(d_{r-1})$$

et

$$\Delta(n, \mathbf{f}) := \max_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{r-1} \\ \mathbf{v} \in [0,1]^{r-1}}} \big(|\Delta(n, \mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{v})|\big).$$

I.2.1 Oscillations statistiques

Dans un article paru en 2012 [5], La Bretèche et Tenenbaum ont étudié la fonction Delta de Hooley lorsque celle-ci est associée à une fonction oscillante, telle qu'un caractère de Dirichlet ou la fonction de Möbius. Ils sont notamment parvenus à démontrer que les compensations dues aux oscillations des fonctions considérées sont de nature statistique dans des intervalles du type $]\,\mathrm{e}^u, \mathrm{e}^{u+1}]$. Leurs recherches se sont concentrées sur les moments d'ordres pairs de la fonction Δ associée à une fonction oscillante, pondérés par une fonction arithmétique g. Cette fonction arithmétique doit vérifier certaines propriétés.

Définition I.2.3. Soient $A > 0$, $c > 0$ et $\eta \in]0,1[$. Nous définissons $\mathcal{M}_A(c, \eta)$ comme étant l'ensemble des fonctions multiplicatives g vérifiant

$$g(n) \geqslant 0 \quad (\forall n \geqslant 1) \tag{1}$$

$$g(p^\nu) \leqslant A^\nu \quad (\nu \geqslant 1) \tag{2}$$

$$g(n) \ll_\varepsilon n^\varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0) \tag{3}$$

et pour lesquelles il existe une constante $y = y(g) > 0$ telle que la relation asymptotique suivante soit vérifiée

$$\sum_{p \leqslant x} g(p) = y \,\mathrm{li}(x) + O\big(x\, \mathrm{e}^{-c(\log x)^\eta}\big). \tag{4}$$

Définition I.2.4. Soient $A > 0$, $c > 0$, $\eta \in]0,1[$ et χ un caractère de Dirichlet. Nous définissons $\mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$ comme l'ensemble des fonctions $g \in \mathcal{M}_A(c, \eta)$ pour lesquelles il existe une constante $z = z(g) \in \mathbb{R}$ telle que l'estimation asymptotique suivante soit vérifiée.

$$\sum_{p \leqslant x} g(p)\chi(p) = z \,\mathrm{li}(x) + O\big(x\, \mathrm{e}^{-c(\log x)^\eta}\big). \tag{5}$$

Après avoir défini la classe $\mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$, et posé, pour $t \geqslant 1$

$$y_0(t) := t/(2^{2t-1} - 1), \tag{6}$$

La Bretèche et Tenenbaum établissent le théorème suivant.

Théorème I.2.5 (La Bretèche-Tenenbaum, 2012, [5]). *Soient χ un caractère de Dirichlet réel non principal, $A > 0$, $c > 0$, $t \geqslant 1$, $\eta \in]0,1[$ et $g \in \mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$ telle que $z = z(g) \leqslant 2^{1-2t}\{1 + t(1 - y/y_0(t))^+\}$. Il existe une constante $\alpha := \alpha(g, \chi, c, t, \eta)$ telle que l'on ait, uniformément pour $x \geqslant 16$,*

$$\sum_{n \leqslant x} g(n)\Delta(n,\chi)^{2t} \ll x(\log x)^{y-1+\max\{2^{2t-1}y-y-t,0\}}\mathcal{L}(x)^{\alpha},$$

où $(1 - y/y_0(t))^+ = \max(0, 1 - y/y_0(t))$.

Ce théorème s'adapte au cas où le caractère χ est remplacé par la fonction de Möbius μ. Pour cela, il suffit que la fonction de pondération g appartienne à $\mathcal{M}_A(c, \eta)$, la relation (5) étant alors automatiquement vérifiée avec $z(g) = -y(g)$.

Nous référons à l'article [5] pour une minoration de la somme ci-dessus ainsi que pour les discussions autour de la valeur attendue de l'exposant exact de $\log x$.

La nature statistique des compensations dues aux oscillations des caractères de Dirichlet non principaux, ou de la fonction de Möbius sur les intervalles du type $]\,\mathrm{e}^u, \mathrm{e}^{u+1}]$ se déduit en comparant le résultat du Théorème I.2.5 avec une estimation des moments de la fonction Δ. Il est ainsi établi dans le théorème 3 de [16] l'inégalité suivante, valable pour tout $y > 0$ et $t \geqslant 1$ fixés.

$$\sum_{n \leqslant x} y^{\omega(n)}\Delta(n)^t \ll x(\log x)^{y-1+(2^t y-y-t)^+}\mathcal{L}(x)^{2\sqrt{t}+o(1)}.$$

Ainsi, en prenant $t = y = 1$, nous observons que pour un caractère de Dirichlet réel non principal, $\Delta(n,\chi)^2$ se comporte en moyenne comme $\Delta(n)$.

Les premiers exemples de fonctions $g \in \mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$ sont les fonctions du type

$$n \mapsto y^{\omega(n)}.$$

Il existe également d'autres fonctions pouvant appartenir aux ensembles $\mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$ telles que les fonctions comptant le nombre de racines modulo n d'un polynôme en plusieurs variable. Ces fonctions jouent un rôle crucial dans les articles [33], [6] et [24].

I.2.2 Application

La conjecture de Manin

Dans un article paru en 1989 [14], Franke, Manin et Tschinzel ont établi une conjecture sur le nombre de points rationnels d'une variété projective V, de "hauteur" bornée, lorsque la variété V est de Fano, c'est-à-dire lorsque son faisceau anticanonique ω_V^{-1} est ample. La hauteur considérée dans ce cas est construite à partir du faisceau ω_V^{-1}. Si nous notons h cette hauteur, les auteurs s'intéressent à une estimation de la quantité suivante

$$N(U, h, B) := \{x \in U(\mathbb{Q}) \ : \ h(x) \leqslant B\}, \tag{7}$$

où U désigne un ouvert de V.

Conjecture I.2.6. *Soient $N \geqslant 1$ un entier et $V \subset P_{\mathbb{Q}}^N$ une variété projective, de Fano, dont l'ensemble des points rationnels est dense pour la topologie de Zariski. Pour tout*

ouvert U de V tel que $U(\mathbb{Q})$ soit non vide et tel que $N(U,h,B)$ soit fini pour tout $B \in \mathbb{R}_+^*$, il existe des constantes, $b \geqslant 1$ et $C > 0$ telles que

$$N(U,h,B) \underset{B\to\infty}{\sim} CB(\log B)^{b-1}.$$

De plus b correspond au rang du groupe de Picard de V.

L'énoncé ci-dessus a été restreint à un cas particulier par souci de simplicité, nous pouvons trouver des énoncés plus généraux de la conjecture de Manin dans la littérature, notamment dans [3] ou [28].

Par la suite, plusieurs auteurs, dont Peyre, se sont intéressés à la constante C apparaissant dans la conjecture de Manin. Ce dernier en a donné une très belle interprétation géométrique dans plusieurs articles. Nous pouvons notamment citer [28] et [29].

Surfaces de Châtelet

Dans un article paru en 2013 [6], La Bretèche et Tenenbaum se sont intéressés à résoudre la conjecture de Manin dans le cas où la variété V est définie à partir de l'équation

$$y^2 + z^2 = P(x,1) \tag{8}$$

où P est une forme binaire de degré 4 à coefficients entiers. Il s'agit d'un cas particulier d'une famille de surfaces, définies à partir des équations

$$y^2 - az^2 = P(x,1)$$

où P est une forme binaire de degré 3 ou 4 et $a \in \mathbb{R}$, qui définissent les surfaces de Châtelet [7].

Leur résultat sur la fonction Δ associée à un caractère de Dirichlet leur permet ainsi de résoudre la conjecture de Manin dans les cas où la forme P est irréductible sur $\mathbb{Q}[i]$ ou bien produit de deux formes binaires de degré 2 à coefficients entiers, irréductibles sur $\mathbb{Q}[i]$ et non proportionnelles.

Théorème I.2.7 (La Bretèche-Tenenbaum, 2013, [6])**.** *Soit P une forme binaire de degré 4 de $\mathbb{Z}[X,Y]$, irréductible sur $\mathbb{Q}[i]$. Lorsque la variété V est définie à partir de (8), nous avons*

$$N(V,H,B) = \Big\{C_H(V) + O\Big(\frac{1}{(\log B)^{1/100}}\Big)\Big\}B\log B,$$

où $N(V,H,B)$ est défini en (7). De plus, la constante $C_H(V)$ est celle conjecturée par Peyre dans [28].

Théorème I.2.8 (La Bretèche-Tenenbaum, 2013, [6])**.** *Soit P une forme binaire de degré 4 de $\mathbb{Z}[X,Y]$, produit de deux formes binaires de degré 2 à coefficients entiers, irréductibles sur $\mathbb{Q}[i]$ et non proportionnelles. Lorsque la variété V est définie à partir de (8), nous avons*

$$N(V,H,B) = \Big\{C_H(V) + O\Big(\frac{1}{(\log B)^{1/70}}\Big)\Big\}B\log B,$$

où $N(V,H,B)$ est défini en (7).

Ces résultats viennent compléter ceux déjà connus. En effet, la Bretèche et Browning ont résolu le cas où le polynôme P est scindé dans [1]. Ils ont par la suite résolu le cas où le polynôme P est produit d'un facteur linéaire et d'un facteur cubique irréductible sur $\mathbb{Q}$ dans [2]. Le cas où P est produit de deux formes linéaires et d'une forme quadratique irréductible sur $\mathbb{Q}[i]$ a été résolu par la suite par Kévin Destagnol dans [10].

I.3 État de l'art

Les meilleurs résultats connus actuellement pour l'estimation de la somme

$$S_y(x) := \sum_{n \leqslant x} y^{\omega(n)} \Delta(n)$$

reposent sur deux méthodes. La première, appelée méthode itérative, a été développée pour la première fois dans un article écrit par Tenenbaum en 1985 [32], tandis que la deuxième, appelée méthode différentielle, a été développée dans un article écrit par Hall et Tenenbaum en 1986 [16].

Ces deux méthodes sont complémentaires, puisque la première fournit le meilleur résultat connu à ce jour pour les petites valeurs de y, c'est-à-dire $0 < y < 1$, tandis que la deuxième méthode fournit le meilleur résultat pour les grandes valeurs de y, c'est-à-dire $y \geqslant 1$. Néanmoins, comme l'ont remarqué Hall et Tenenbaum dans [17], la méthode différentielle fournit également le meilleur exposant de $(\log x)$ connu à ce jour pour les petites valeurs de y. Nous perdons juste un peu d'information sur le terme d'erreur dans ce cas. C'est pour cela que dans les chapitres qui suivent, nous nous contentons d'adapter la méthode différentielle.

Ces deux méthodes permettent d'obtenir une majoration de l'ordre moyen de $\Delta(n)$, que nous considérons ici comme le maximum de la fonction

$$u \mapsto \Delta(n, u),$$

à partir d'un majoration de l'ordre moyen de la valeur moyenne de cette fonction, c'est-à-dire de

$$M(n) := \frac{1}{\log n} \int_{\mathbb{R}} \Delta(n, u) \mathrm{d}u,$$

multipliée par un facteur intrinsèque à ces deux méthodes.
Dans ce cas précis, nous avons

$$M(n) = \frac{\tau(n)}{\log n},$$

et nous savons estimer avec une bonne précision son ordre moyen.

Pour cela, Hall et Tenenbaum ont dans un premier temps utilisé un lemme arithmétique permettant de ramener l'étude de la somme $S_y(x)$ à celle de la somme obtenue en ne considérant que les entiers sans facteur carré, et pondérés par un poids $1/n$. Ils utilisent par la suite la méthode de Rankin et un lemme d'approximation d'une norme infinie par une norme L^q afin de considérer la somme suivante

$$L_q(\sigma) := \sum_{n \geqslant 1} \frac{\mu^2(n)}{n^{1+\sigma}} y^{\omega(n)} M_q(n)^{1/q},$$

où

$$M_q(n) := \int_{\mathbb{R}} \Delta(n, u)^q \mathrm{d}u.$$

La méthode itérative consiste alors à cribler cette somme selon le nombre de facteurs premiers que possèdent les entiers. Un paramètre M est alors introduit et il faut estimer

$$L_q^M(\sigma) := \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ \omega(n) \leqslant M}} \frac{\mu^2(n)}{n^{1+\sigma}} y^{\omega(n)} M_q(n)^{1/q}.$$

Les auteurs ont ensuite introduit, pour tout $k \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$, un entier n_k, obtenu à partir de n en ne considérant que ses k facteurs premiers. L'estimation de $L_q^M(\sigma)$ se déduit ainsi de celle de

$$L_{k,q}(\sigma) := \sum_{n \geqslant 1} \frac{\mu^2(n)}{n^{1+\sigma}} y^{\omega(n)} M_q(n_k)^{1/q},$$

qui s'effectue par récurrence sur k.

La méthode différentielle consiste quant à elle à considérer la fonction $L_q(\sigma)$ comme sur-solution d'une équation différentielle et à exhiber une sous-solution de cette équation différentielle qui fournira la majoration souhaitée.

Ces deux méthodes s'adaptent à l'estimation de l'ordre moyen des fonctions Δ_r, cependant, elles ne permettent de prendre la moyenne que sur une seule variable. Hall et Tenenbaum ont donc du estimer, pour $r \geqslant 3$,

$$C(n) := \max_{u_2,\dots,u_{r-1} \in \mathbb{R}} \frac{1}{\log n} \int_{\mathbb{R}} \Delta_r(n, u_1, \dots, u_{r-1}) \mathrm{d}u_1.$$

Ce problème a été résolu au moyen de la majoration

$$C(n) \leqslant \sum_{d|n} \Delta_{r-1}(d),$$

et d'une récurrence sur r.

Dans l'article paru en 2012, la valeur moyenne de la fonction étudiée par La Bretèche et Tenenbaum est la quantité suivante

$$M(n, \chi) := \frac{1}{\log n} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \Delta^2(n, \chi, u, v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v.$$

Le calcul explicite de cette quantité ne fournit pas une expression simple qui permettrait de résoudre le problème. Ils ont alors utilisé la transformée de Fourier et le théorème de Parseval afin d'obtenir

$$M(n, \chi) \ll \frac{1}{\log n} \int_{\mathbb{R}} |\tau(n, \chi, \vartheta)|^2 \frac{\mathrm{d}\vartheta}{1 + \vartheta^2},$$

où

$$\tau(n, \chi, \vartheta) := \sum_{d|n} \chi(d) d^{i\vartheta}.$$

L'estimation de l'ordre moyen de $|\tau(n, \chi, \vartheta)|^2$ en fonction de ϑ repose alors sur le théorème des nombres premiers.

I.4 Résultats et méthodes de la thèse

Nous généralisons les résultats obtenus par La Bretèche et Tenenbaum dans [5] en traitant les deux questions suivantes.

— (Q1) Peut-on déterminer la nature statistique des compensations dues aux oscillations des caractères dans des intervalles plus grands que ceux du type $]\,\mathrm{e}^u, \mathrm{e}^{u+1}]$?

— (Q2) Peut-on obtenir une majoration non triviale du moment d'ordre 2 de la fonction Δ_3 associée à 2 caractères de Dirichlet ?

La première question a été posée par le Professeur Hooley au Professeur Tenenbaum après la parution de l'article [5]. Elle a été formulée de la manière suivante. Fixons un paramètre $V \geqslant 1$ et définissons, pour un caractère de Dirichlet χ, la quantité

$$\Delta_V(n,\chi) := \max_{\substack{u\in\mathbb{R}\\ v\in[0,V]}} \left(|\Delta(n,\chi,u,v)|\right).$$

Sous les mêmes hypothèses que celles du Théorème I.2.5, a-t-on

$$\sum_{n\leqslant x} g(n)\Delta_V(n,\chi)^{2t} \ll xV^t(\log x)^{y-1+\max\{2^{2t-1}y-y-t,0\}}\mathcal{L}(x)^{\alpha} \quad ?$$

Les hypothèses et le résultat du Théorème I.2.5 imposent certaines restrictions sur V afin que ce résultat soit pertinent. La taille de V doit ainsi dépendre du facteur x qui apparaît. En effet, dans un premier temps, nous pouvons supposer que le facteur V est plus petit que $\log x$, car l'ensemble $\{\log n \ : \ n \leqslant x\}$ est inclus dans l'intervalle $[0, \log x]$. Par ailleurs, si $\log V = O(\sqrt{\log_2 x \log_3 x})$, la majoration ci-dessus se déduit directement du cas $V = 1$, car la valeur de α pour laquelle la majoration du Théorème I.2.5 est vérifiée n'est pas précisée.

Ces restrictions étant considérées, le théorème suivant répond positivement à la question du Professeur Hooley.

Théorème I.4.1. *Soient A, c, η des constantes strictement positives, $t \geqslant 1$ un réel, χ un caractère de Dirichlet non principal d'ordre r, g une fonction de $\mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$ et $V \geqslant 1$. Nous posons $y_0 = \frac{t}{2^{2t-1}-1}$ et nous supposons que $y > 0$ et $\beta_g(r,t) \leqslant y$. Alors, il existe une constante $\alpha > 0$ dépendant au plus de t, χ, g, c et η telle que*

$$\sum_{n\leqslant x} g(n)\Delta_V(n,\chi)^{2t} \ll x\mathcal{L}(x)^{\alpha}V^t(\log x)^{y-1+(2^{2t-1}y-y-t)^+}.$$

Le facteur $\log_3(x)$ qui apparaît dans la fonction $\mathcal{L}$ peut être omis si $y > y_0$.

Pour démontrer ce théorème, nous adaptons la méthode différentielle. Considérons $t = 1$ par souci de simplicité. Dans ce cas, cette méthode nous permet de ramener l'étude de l'ordre moyen de $|\Delta_V(n,\chi)|^2$ à celui de

$$M_V(n) := \frac{1}{\log n}\int_0^V \int_{\mathbb{R}} |\Delta(n,\chi,u,v)|^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Or, pour obtenir le résultat souhaité, il faudrait remplacer $M_V(n)$ par la quantité $M_V(n)/V$. Le problème qui se pose ici est donc la taille de l'intervalle $[0, V]$. Nous contournons cette difficulté en étudiant la quantité annexe

$$\Delta_V^*(n,\chi) := \max_{u\in\mathbb{R}} |\Delta(n,\chi,u,V)|.$$

Comme nous le verrons dans la section 1.2, la méthode de Hall et Tenenbaum s'adapte afin d'étudier le moment d'ordre 2 de cette nouvelle quantité. Dans la section 1.3, nous verrons comment l'étude de cette quantité annexe fournit la majoration du Théorème I.4.1.

Remarque I.4.2. La méthode différentielle présentée dans [16] fournit la meilleure estimation connue actuellement dans le cas où $y \geqslant 1$. Dans le cas où $y < 1$, nous pourrions adapter la méthode itérative de [32], cependant nous ne le ferons pas en raison de la complexité des calculs qu'elle engendre. Nous verrons néanmoins comment adapter la méthode différentielle afin d'obtenir le résultat du Théorème I.4.1. La majoration fournie est alors presque aussi fine que celle obtenue par la méthode itérative, avec uniquement une légère perte de précision sur le facteur $\mathcal{L}(x)$.

Pour répondre à la deuxième question, nous adaptons la méthode différentielle. Nous rencontrons alors deux problèmes majeurs. Le premier réside dans l'approximation d'une norme infinie par une norme L^q. Dans les exemples considérés dans la littérature, le terme d'erreur apparaissant pouvait être traité par des résultats connus, ce qui n'est pas vrai dans notre cas. En effet, le terme d'erreur qui apparaît est donné par

$$\Delta^*(n,\chi)^2 := \Big(\max_{d|n} \Delta(d,\chi)\Big)^2.$$

Pour résoudre ce problème, nous utilisons la majoration suivante

$$\Delta^*(n,\chi)^2 \leqslant \Big(\sum_{d|n} \Delta(d,\chi)^{2q}\Big)^{1/q}.$$

Comme nous le verrons dans la section 2.4.1, la méthode différentielle et un théorème de Parseval nous permettent de ramener l'étude de l'ordre moyen du majorant ci-dessus à celle de l'ordre moyen de

$$\max_{d|n} \int_{\mathbb{R}} |\tau(d,\chi,\vartheta)|^2 \frac{\mathrm{d}\vartheta}{1+\vartheta^2},$$

que nous majorons par

$$\int_{\mathbb{R}} \max_{d|n} |\tau(d,\chi,\vartheta)|^2 \frac{\mathrm{d}\vartheta}{1+\vartheta^2}.$$

La fonction $\max_{d|n} |\tau(d,\chi,\vartheta)|^2$ étant multiplicative, nous pouvons utiliser le théorème des nombres premiers afin d'estimer l'ordre moyen de cette quantité.

Le second problème que nous rencontrons est le même que celui traité par Hall et Tenenbaum dans [16] lors de l'estimation de l'ordre moyen des fonctions Δ_r, à savoir que leur méthode ne permet d'évaluer la moyenne que selon une seule variable. Nous devons ainsi étudier l'ordre moyen de

$$C(n,\chi_1,\chi_2) := \max_{\substack{u_1\in\mathbb{R}\\ v_1\in[0,1]}} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \big|\Delta(n,\chi_1,\chi_2,\mathbf{u},\mathbf{v})\big|^2 \mathrm{d}u_2\mathrm{d}v_2,$$

où $\mathbf{u} = (u_1,u_2)$ et $\mathbf{v} = (v_1,v_2)$.
Pour résoudre ce problème, nous utilisons le théorème de Parseval, afin de transformer l'intégrale ci-dessus. Ainsi, pour $(u_1,v_1) \in \mathbb{R}\times[0,1]$, nous avons

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \big|\Delta(n,\chi_1,\chi_2,\mathbf{u},\mathbf{v})\big|^2 \mathrm{d}u_2\mathrm{d}v_2 \ll \int_{\mathbb{R}} \big|\Delta(n,\chi_1,\chi_2,\vartheta,u_1,v_1)\big|^2 \frac{\mathrm{d}\vartheta}{1+\vartheta^2},$$

où

$$\Delta(n,\chi_1,\chi_2,\vartheta,u_1,v_1) := \sum_{\substack{d_1d_2|n\\ \mathrm{e}^{u_1}<d_1\leqslant \mathrm{e}^{u_1+v_1}}} \chi_1(d_1)\chi_2(d_2)d_2^{i\vartheta}.$$

Nous passons ensuite le maximum à l'intérieur de l'intégrale afin d'obtenir

$$C(n,\chi_1,\chi_2) \ll \int_{\mathbb{R}} \max_{\substack{u_1\in\mathbb{R}\\ v_1\in[0,1]}} \left|\Delta(n,\chi_1,\chi_2,\vartheta,u_1,v_1)\right|^2 \frac{\mathrm{d}\vartheta}{1+\vartheta^2}.$$

Comme nous le verrons dans la section 2.3.1, nous pouvons adapter la méthode différentielle afin d'obtenir une majoration de l'ordre moyen de

$$\max_{\substack{u_1\in\mathbb{R}\\ v_1\in[0,1]}} \left|\Delta(n,\chi_1,\chi_2,\vartheta,u_1,v_1)\right|^2$$

en fonction de ϑ, dont nous déduisons une majoration de l'ordre moyen de $C(n,\chi_1,\chi_2)$.

Posons

$$\rho := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \max\left(1, |1+\mathrm{e}^{i\vartheta}|^2\right)\mathrm{d}\vartheta - 2 \approx 0,218. \tag{9}$$

Pour un caractère de Dirichlet non principal d'ordre r, χ, nous définissons $\mathcal{M}_A(\chi,c,\eta)$ comme la classe des fonctions arithmétiques positives ou nulles vérifiant

$$\begin{aligned}
&\forall p\in\mathcal{P} \text{ et } \forall \nu \geqslant 1,\ g(p^\nu) \leqslant A^\nu\\
&\forall \varepsilon>0 \text{ et } \forall n\geqslant 1,\ g(n) \ll_\varepsilon n^\varepsilon\\
&\sum_{p\leqslant x} g(p) = y\,\mathrm{li}(x) + O(x\,\mathrm{e}^{-2c(\log x)^\eta})\\
&\forall k\in\mathbb{Z},\quad \sum_{\substack{p\leqslant x\\ \chi(p)=\zeta^k}} g(p) = \frac{y}{r}\ \mathrm{li}(x) + O(x\,\mathrm{e}^{-2c(\log x)^\eta})
\end{aligned}$$

pour une certaine constante $y = y(g) > 0$ et

$$\zeta := \mathrm{e}^{2i\pi/r}. \tag{10}$$

Enfin, pour (χ_1,χ_2) un couple de caractères de Dirichlet non principaux tels que $\chi_1\overline{\chi_2}$ soit non principal, nous définissons

$$\mathcal{M}_A(\chi_1,\chi_2,c,\eta) := \mathcal{M}_A(\chi_1,c,\eta)\cap\mathcal{M}_A(\chi_2,c,\eta)\cap\mathcal{M}_A(\chi_1\overline{\chi_2},c,\eta).$$

Nous obtenons alors le théorème suivant.

Théorème I.4.3. *Soit (χ_1,χ_2) un couple de caractères de Dirichlet non principaux tel que $\chi_1\overline{\chi_2}$ ne soit pas principal, A, c des constantes strictement positives, $\eta\in]0,1[$ et g appartenant à $\mathcal{M}_A(\chi_1,\chi_2,c,\eta)$. Pour $y=y(g)>0$, il existe une constante $\alpha>0$, dépendant au plus de χ_1, χ_2, g, c et η, telle que nous ayons, uniformément pour $x\geqslant 16$*

$$\sum_{n\leqslant x} g(n)\Delta(n,\chi_1,\chi_2)^2 \ll x(\log x)^{\max\{y-1,(\rho+2)y-2,3y-3\}}\mathcal{L}(x)^\alpha. \tag{11}$$

En particulier, si $y(g)=1$, il existe une constante $\alpha>0$ telle que nous ayons, uniformément pour $x\geqslant 16$

$$\sum_{n\leqslant x} g(n)\Delta(n,\chi_1,\chi_2)^2 \ll x(\log x)^\rho\mathcal{L}(x)^\alpha. \tag{12}$$

Nous ne savons pas actuellement si l'exposant ρ déterminé dans (9) est optimal. Les meilleures minorations connues à ce jour sont déterminée par le théorème suivant.

Théorème I.4.4. *Soient $y > 0$ des réels, $\boldsymbol{\chi}$ un couple de caractères de Dirichlet non principaux.*

(i) Si $\chi_1\overline{\chi_2}$ n'est pas principal, alors nous avons lorsque $x \geqslant 3$,

$$\sum_{n\leqslant x} \mu^2(n) y^{\omega(n)} \Delta_3^2(n, \boldsymbol{\chi}) \gg x(\log x)^{\max\{y-1, 3y-3\}}.$$

(ii) Si $\chi_1\overline{\chi_2}$ est principal, alors nous avons lorsque $x \geqslant 3$,

$$\sum_{n\leqslant x} \mu^2(n) y^{\omega(n)} \Delta_3^2(n, \boldsymbol{\chi}) \gg x(\log x)^{\max\{y-1, 5y-4\}}.$$

Nous voyons donc d'une part que lorsque $y \notin]\frac{1}{1-\rho}, \frac{1}{\rho+1}[$, nous connaissons l'exposant exact de $\log x$ à un facteur $o(1)$ près. De plus, en comparant ces résultats avec ceux obtenus par Hall et Tenenbaum sur la fonction Δ_3, nous observons que dans ce cas, les compensations dues aux oscillations des caractères χ_1 et χ_2 dans les ensembles de type $]\,\mathrm{e}^{u_1}, \mathrm{e}^{u_1+1}] \times]\,\mathrm{e}^{u_2}, \mathrm{e}^{u_2+1}]$ sont de nature statistique. Enfin, l'hypothèse $\chi_1\overline{\chi_2}$ est indispensable pour assurer la majoration (12). La valeur de ρ déterminée dans le Théorème I.4.3 est néanmoins suffisante pour l'application que nous envisageons.

Ce théorème est utilisé pour résoudre un problème de comptage en géométrie algébrique. Ce problème de comptage fut la motivation principale de nos travaux sur la fonction Δ associée à deux caractères. Il nous permet de fournir une estimation asymptotique sur le nombre d'idéaux dont la norme est une forme binaire de degré 3 sous certaines conditions.

Considérons une extension cyclique de $\mathbb{Q}$ de degré 3, que nous notons $\mathbb{K}$. Dans ce cas, la quantité $r_3(n)$ comptant le nombre d'idéaux de $O_{\mathbb{K}}$ de norme n est reliée à un caractère non principal du groupe de Galois de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{Q}$, que nous notons χ, par l'égalité suivante,

$$r_3(n) = \big(1 * \chi * \chi^2\big)(n).$$

Nous désignons par $\mathcal{R}$ un domaine de $\mathbb{R}^2$ et pour ξ un réel strictement positif, nous posons

$$\mathcal{R}(\xi) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \boldsymbol{x}/\xi \in \mathcal{R}\}.$$

Pour F une forme binaire de degré 3, nous définissons

$$Q(\xi, \mathcal{R}, F) := \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{R}(\xi)} r_3\big(F(\boldsymbol{x})\big).$$

Afin de déterminer une estimation asymptotique en ξ de $Q(\xi, \mathcal{R}, F)$, nous formulons quatre hypothèses sur la forme binaire F et sur le domaine $\mathcal{R}$.

(H1)	Le domaine $\mathcal{R}$ est un ouvert borné convexe dont la frontière est continuement différentiable ;
(H2)	$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}$, $\|\boldsymbol{x}\| \leqslant \sigma$;
(H3)	$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}$, $\lvert F(\boldsymbol{x})\rvert \leqslant \vartheta^3$;
(H4)	la forme F est irréductible sur $\mathbb{K}$;

pour certaines valeurs $\sigma > 0$ et $\vartheta > 0$. Nous introduisons également l'ensemble

$$\mathcal{E} := \bigcup_{\alpha \in G_1} \{n \in \mathbb{N}^* : \exists d \mid q^\infty,\, n \equiv \alpha d \bmod dq\} \tag{13}$$

où

$$G_1 := \mathrm{Ker}(\chi) \subset (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times.$$

Puis, pour $d \mid q^\infty$, nous notons $\mathcal{E}_d$ la projection de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{E}_d = \bigcup_{\alpha \in G_1} \{n \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} : \exists d_1 \mid q^\infty,\, n \equiv \alpha d \bmod (d_1 q, d)\}. \tag{14}$$

Enfin, nous définissons l'exposant

$$\eta := 0,0034. \tag{15}$$

Nous pouvons alors établir le théorème suivant.

Théorème I.4.5. *Soient $\varepsilon > 0$, $\xi > 0$, $\mathbb{K}$ une extension cyclique de $\mathbb{Q}$ de degré 3, χ un caractère non principal de $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$ de conducteur q, $F \in \mathbb{Z}[X,Y]$ une forme binaire de degré 3, et $\mathcal{R}$ un domaine de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $\vartheta > 0$ et $\sigma > 0$ tels que les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4) soient vérifiées et sous les conditions*

$$1/\sqrt{\xi} \leqslant \sigma \leqslant \xi^{3/2}, \quad 1/\sqrt{\xi} \leqslant \vartheta \leqslant \xi^{3/2},$$

nous avons

$$Q(F,\xi,\mathcal{R}) = K(F)L(1,\chi)L(1,\chi^2)\mathrm{vol}(\mathcal{R})\xi^2 + O\Big(\frac{||F||^\varepsilon(\sigma^2+\vartheta^2)\xi^2}{(\log\xi)^\eta}\Big) \tag{16}$$

où $||F||$ désigne le maximum des coefficients de F,

$$K(F) := K_q(F)\prod_{p \nmid q} K_p(F) \tag{17}$$

avec

$$K_p(F) := \Big(1 - \frac{\chi(p)}{p}\Big)\Big(1 - \frac{\chi^2(p)}{p}\Big)\sum_{\nu \geqslant 0} \frac{\varrho_F^+(p^\nu)}{p^{2\nu}}(\chi * \chi^2)(p^\nu) \tag{18}$$

pour tout p premier avec q et

$$K_q(F) = \lim_{k\to\infty} \frac{3}{q^{2k}}\Big|\Big\{\boldsymbol{x} \in (\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z})^2 \,:\, F(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{E}_{q^k}\Big\}\Big|. \tag{19}$$

Il est par ailleurs possible d'interpréter géométriquement les constantes $K_p(F)$ et $K_q(F)$ lorsque l'anneau des entiers $O_\mathbb{K}$ est principal.

La démonstration de ce théorème s'appuie sur des méthodes développées par La Bretèche et Tenenbaum dans [6]. Il s'agit de fournir, dans un premier temps, une bonne approximation de la quantité suivante

$$|\Lambda(d_1 d_2, F) \cap \mathcal{D}_q|,$$

où

$$\Lambda(s,F) := \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \,:\, s \mid F(m,n)\}$$

et

$$\mathcal{D}_q := \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : (m,q) = 1\};$$

lorsque d_1 et d_2 sont de taille contrôlée. Cela sera fait dans la section 3.3.1. Il faut ensuite se ramener au cas où les diviseurs d_1 et d_2 sont tous deux de taille contrôlée afin d'exploiter la bonne approximation démontrée précédemment, ce qui est presque toujours possible au moyen d'un changement de variable dans la somme définissant $r_3(n)$. Ce changement de variable ne peut cependant être effectué que si $\chi(n) = 1$. La somme ne portant effectivement que sur de tels entiers n, une étape de la démonstration consiste à paramétrer la somme définissant Q selon cette condition. Cette paramétrisation sera fournie dans la section 3.3.2. Le Théorème I.4.3 est quant à lui utilisé pour traiter la contribution des entiers d_1 et d_2 dont nous ne pouvons pas contrôler la taille, comme nous le verrons dans la section 3.4.

Lorsque l'anneau $O_{\mathbb{K}}$ est principal, la norme d'un idéal est la norme d'un élément qui engendre cet idéal. Nous pouvons alors fixer une $\mathbb{Z}$-base de $O_{\mathbb{K}}$, $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ et définir, à partir de cette base, le polynôme

$$P(x, y, z) := N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3).$$

Ce polynôme est une forme homogène de degré 3 à coefficients entiers, et nous verrons que les constantes $K_p(F)$ et $K_q(F)$ sont liées aux densités non archimédiennes de la variété $V \subset P^5_{\mathbb{Q}}$ définie à partir de l'équation

$$P(x, y, z) = F(u, v).$$

Comme nous le verrons dans la section 3.5, cette étape nécessite beaucoup de dénombrements, analogue à ce qui a déjà été effectué par La Bretèche et Browning dans [1], ainsi que la connaissance de la factorisation de l'idéal $pO_{\mathbb{K}}$ selon la valeur de $\chi(p)$ lorsque p est premier.

I.5 Plan de la thèse

La thèse est composée en trois parties. Dans la première partie, nous reproduisons l'article [22], qui a été accepté dans la revue Acta Arithmetica, et dans lequel nous démontrons le Théorème I.4.1, répondant ainsi à la question (Q1). Nous y démontrons également un théorème de minoration de l'ordre moyen de la fonction $\Delta_V(n, \chi)^{2t}$ afin de voir dans quelle mesure la majoration du Théorème I.4.1 est optimale.

L'étude de la question (Q2) est menée dans la deuxième partie, où nous reproduisons l'article [23] afin de démontrer le Théorème I.4.3, relatif à la majoration de l'ordre moyen de la fonction $|\Delta_3(n, \chi_1, \chi_2)|^2$. Nous y démontrons également une minoration de l'ordre moyen de la fonction $|\Delta_3(n, \chi_1, \chi_2)|^2$ pondérée par une fonction arithmétique g.

L'application du Théorème I.4.3 en géométrie algébrique est traitée dans la dernière partie. Dans celle-ci, nous reproduisons l'article [24] où nous démontrons le Théorème I.4.5, ainsi que l'interprétation géométrique de la constante principale lorsque l'anneau $O_{\mathbb{K}}$ est principal.

Notations

Les notations suivantes sont utilisées dans cette thèse.
Les lettres x, y, t, u, v, V, U, σ, s, T, ϑ, ξ, Ξ désignent des nombres réels.
Les lettres n et m désignent des nombres entiers.
d désigne également un entier, généralement un diviseur.
p désigne un nombre premier.
χ désigne un caractère de Dirichlet.
q désigne le conducteur de χ.
Dans le chapitre 1, r désigne l'ordre de χ. Dans le chapitre 2, r peut également être un entier permettant de définir Δ_r. On note

$$\mathrm{e}(x) = \mathrm{e}^{2i\pi x}$$

et

$$\zeta_r = \mathrm{e}\left(\frac{1}{r}\right).$$

g désigne une fonction arithmétique.
$\beta_g(r,t)$ est défini page 22.
$\lambda(t)$ est défini page 22.
$\beta(r,t)$ est défini page 22.
On note

$$\mathcal{L}(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{\log_2(x)\log_3(x)}}$$

où $\log_k$ désigne la k-ième itération du logarithme. μ désigne la fonction de Möbius.
τ désigne la fonction nombre de diviseurs.
ρ est défini page 37.
Les lettres $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ désignent des couples de réels.
$\boldsymbol{\chi}$ désigne un couple de caractères de Dirichlet.
$C(n,\boldsymbol{\chi})$ et $D(n,\boldsymbol{\chi})$ sont définis page 40.
$\mathbb{K}$ désigne un corps de nombre.
G désigne le groupe de Galois de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{Q}$.
$\mathcal{R}$ désigne un domaine de $\mathbb{R}^2$.
F désigne une forme binaire de degré 3.
$O_{\mathbb{K}}$ désigne l'anneau des entiers de $\mathbb{K}$. $r_3(n)$ compte le nombre d'idéaux de $O_{\mathbb{K}}$ de norme n.
$\mathcal{E}$ est défini page 82.
$\mathcal{E}_d$ est défini page 82.
G_1 est défini page 82.
η est défini page 82.
Les fonctions $L(s,\chi)$ et $L_k(s,\chi)$ désignent des fonctions L de Dirichlet.
Les constantes $K(F)$, $K_p(F)$ et $K_q(F)$ sont définies page 82.
Les fonctions ϱ_F^+, ϱ_F^- et ϱ_F^* sont définies page 83.
Les ensembles $\Lambda^*(s,F)$ et $\Lambda(s,F)$ sont définis page 82.

Chapitre 1

Moments de la fonction Delta de Hooley associée à un caractère

Ce chapitre est la reproduction intégrale de l'article [22] disponible sur Arxiv.

1.1 Introduction et énoncés des résultats

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, f une fonction arithmétique, $u \in \mathbb{R}$ et $v \in [0,1]$, nous posons

$$\Delta(n,f,u,v) := \sum_{\substack{d|n \\ \mathrm{e}^u < d \leqslant \mathrm{e}^{u+v}}} f(d)$$

$$\Delta(n,f) := \sup_{\substack{u\in\mathbb{R} \\ v\in[0,1]}} |\Delta(n,f,u,v)|$$

Dans [5], La Bretèche et Tenenbaum étudient l'ordre moyen de la fonction $\Delta(n,\chi)^2$ lorsque χ est un caractère de Dirichlet réel non trivial, nous nous intéressons ici à une généralisation de leur résultat.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, f une fonction arithmétique, et $V \in \mathbb{R}_+^*$, nous considérons

$$\Delta_V(n,f) := \sup_{\substack{u\in\mathbb{R} \\ v\in[0,V]}} |\Delta(n,f,u,v)|, \ \Delta_v^*(n,f) := \sup_{u\in\mathbb{R}} |\Delta(n,f,u,v)|. \tag{1.1}$$

Dans la définition de la fonction $\Delta(n,f)$, le paramètre v est compris entre 0 et 1. Dans celle de $\Delta_V(n,f)$, il est compris entre 0 et V où $V \geqslant 1$ et nous démontrons une estimation, uniforme en V, de l'ordre moyen de la fonction $\Delta_V(n,\chi)^2$. Le caractère χ est fixé et nous notons r son ordre. Ainsi nos résultats sont valables pour des caractères non réels, étendant pour $V = 1$ les résultats de [5].

Lorsque $r \geqslant 2$ un entier, nous notons

$$\zeta = \zeta_r := \mathrm{e}\left(\frac{1}{r}\right)$$

où $\mathrm{e}(x) = \mathrm{e}^{2i\pi x}$.

Définition 1.1.1. Lorsque χ est un caractère de Dirichlet complexe d'ordre $r \geqslant 2$, $A > 0$, $c > 0$ et $\eta \in]0,1[$, nous disons qu'une fonction multiplicative g appartient à la classe $\mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$ si elle est positive ou nulle et si les conditions suivantes sont vérifiées

$$\forall p \in \mathcal{P} \text{ et } \forall \nu \geqslant 1,\ g(p^\nu) \leqslant A^\nu \tag{1.2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ g(n) \ll_\varepsilon n^\varepsilon \tag{1.3}$$

$$\forall k \in [0, \dots, r-1], \quad \sum_{\substack{p \leqslant x \\ \chi(p) = \zeta^k}} g(p) = z_k\ \mathrm{li}(x) + O(x\,\mathrm{e}^{-2c(\log x)^\eta}) \tag{1.4}$$

pour certaines constantes $z_k = z_k(g) \geqslant 0$.

Remarque 1.1.2. Les constantes z_k peuvent être calculées à partir de l'estimation des sommes

$$\sum_{p \leqslant x} g(p)\chi(p)^j$$

pour $j \in \{0, \dots, r-1\}$.

Lorsque $g \in \mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$ et $t \geqslant 1$, nous posons

$$y := \sum_{k=0}^{r-1} z_k, \quad \beta_g(r,t) := \frac{1}{2^{2t-1}} \sum_{k=0}^{r-1} z_k \left|1 + \zeta^k\right|^{2t}.$$

La valeur y correspond donc à l'ordre moyen de g sur les nombres premiers. Pour $t \geqslant 1$, nous définissons

$$\lambda(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |1 + \mathrm{e}^{i\vartheta}|^{2t} \mathrm{d}\vartheta = \frac{2^{2t}\Gamma(t+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(t+1)} = \frac{2\Gamma(2t)}{t\Gamma(t)^2}.$$

Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que $\lambda(t) \leqslant 2^{2t-1}$ pour $t \geqslant 1$ avec égalité si et seulement si $t = 1$.

Exemple 1.1.3. Considérons le cas $g(n) = y^{\omega(n)}$ et $t \in \mathbb{N}^*$. Les z_k valent tous $\frac{y}{r}$ et un calcul direct fournit la formule

$$\beta(r,t) := \beta_g(r,t) = \frac{y}{2^{2t-1}} \sum_{\substack{j,k=0 \\ r|k-j}}^{t} \binom{t}{k}\binom{t}{j}.$$

Si nous supposons de plus que $t < r$, alors

$$\beta(r,t) = \frac{y}{2^{2t-1}} \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k}^2,$$

tandis qu'un calcul direct de l'intégrale définissant $\lambda(t)$ fournit

$$\lambda(t) = \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k}^2,$$

ainsi

$$\beta(r,t) = \frac{y\lambda(t)}{2^{2t-1}}. \tag{1.5}$$

Dans ce cas, nous avons $\beta(r,t) \leqslant y$.

Lorsque $x \geqslant 16$, nous notons

$$\mathcal{L}(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{\log_2(x)\log_3(x)}}.$$

Lorsque $t \in \mathbb{R}$, nous posons

$$t^+ := \max(t, 0).$$

Enfin, pour $x \geqslant 2$, $V \geqslant 1$, g une fonction arithmétique et $t \geqslant 1$, nous notons

$$\mathfrak{S}_{t,V}(x, \chi, g) := \sum_{n \leqslant x} g(n)\Delta_V(n, \chi)^{2t}. \tag{1.6}$$

Notre objectif est de voir comment le paramètre V influe sur le comportement de l'ordre moyen de la fonction $\Delta_V(n, \chi)^2$. Nous établissons les deux théorèmes suivants, qui répondent à une question posée par le Professeur Christopher Hooley au Professeur Gérald Tenenbaum.

Théorème 1.1.4. *Soient A, c, η des constantes strictement positives, $t \geqslant 1$ et $V \geqslant 1$ des réels, χ un caractère de Dirichlet non principal d'ordre r, et g une fonction de $\mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$. Nous posons $y_0 = \frac{t}{2^{2t-1}-1}$ et nous supposons que $y > 0$ et $\beta_g(r, t) \leqslant y$. Alors, il existe une constante $\alpha = \alpha(g, \chi, c, \eta, t) > 0$ telle que, pour $x \geqslant 16$*

$$\mathfrak{S}_{t,V}(x, \chi, g) \ll x\mathcal{L}(x)^{\alpha} U^t (\log x)^{y-1+(2^{2t-1}y-y-t)^+} \tag{1.7}$$

où nous avons posé

$$U := \min(V, \log x). \tag{1.8}$$

La constante implicite dans la majoration (1.7) *dépend au plus de g, χ, c, t et η. Par ailleurs, le facteur* $\log_3(x)$ *qui apparaît dans la fonction $\mathcal{L}$ peut être omis si $y > y_0$.*

La fonction g définie dans l'exemple 1.1.3 vérifie les hypothèses de notre théorème dès que t est un entier strictement inférieur à r.

Remarque 1.1.5. Nous avons un effet de saturation à partir de la valeur $V = \log x$. Cela vient du fait que, pour tout $n \leqslant x$, l'ensemble $\{\log d : d \mid n\}$ est inclus dans l'intervalle $[0, \log x]$. Dans toutes nos démonstrations, nous supposerons donc que $V \leqslant \log x$.

Remarque 1.1.6. Nous pouvons supposer que la constante implicite dans la majoration (1.7) est absolue, quitte à augmenter l'exposant α du facteur $\mathcal{L}(x)$.

Remarque 1.1.7. Il est également possible d'omettre le facteur $\log_3(x)$ qui apparaît dans la fonction $\mathcal{L}$ dans le cas où, $y < y_0$. Il suffit, pour cela, d'adapter la méthode itérative de [5]. Cependant, cette démonstration ne sera pas incluse dans l'article du fait des complications techniques qu'elle engendre.

Remarque 1.1.8. Pour $V = 1$, χ réel, et lorsque t n'est pas un entier $\geqslant 2$, nous retrouvons le résultat de [5] avec la même précision. De plus, compte-tenu de la majoration triviale

$$\mathfrak{S}_{t,V} \leqslant ([V] + 1)^{2t}\mathfrak{S}_{t,1}, \tag{1.9}$$

notre majoration fait apparaître un gain de l'ordre de V^t. Cependant, si t est un entier $\geqslant 2$ et χ réel, La Bretèche et Tenenbaum obtiennent une majoration de $\mathfrak{S}_{t,1}$ avec un meilleur exposant de $\log(x)$, sous une condition plus restrictive portant sur y (formule (1.6) du théorème 1.1 de [5]). Mais dans ce domaine là, nous pouvons montrer que la majoration (1.9) est quasiment optimale. Ainsi, nous savons qu'une majoration avec un facteur V^t n'est pas vérifiée.

Remarque 1.1.9. Etant donné les résultats de [5] et la majoration triviale (1.9), le paramètre V^t n'est significatif dans la majoration (1.7) que lorsque l'on a la relation supplémentaire $\sqrt{\log_2(x)\log_3(x)} = o(\log V)$. En effet, dans le cas contraire, le facteur V^t peut être supprimé car $V^t\mathcal{L}(x)^\alpha = O(\mathcal{L}(x)^{\alpha'})$ où α' est choisi suffisamment grand.

Remarque 1.1.10. Le paramètre V influe sur l'ordre moyen de $\Delta_V(n,\chi)^2$ de manière linéaire lorsque χ est un caractère de Dirichlet d'ordre 2. Ce résultat montre que les compensations dues aux oscillations du caractère χ dans les intervalles $]\,\mathrm{e}^u, \mathrm{e}^{u+V}]$ sont de nature statistique, car $\Delta_V(n,\chi)^2$ se comporte en moyenne comme $\Delta_V(n)$ où

$$\Delta_V(n) := \sup_{u\in\mathbb{R}} \sum_{\substack{d|n \\ \mathrm{e}^u<d\leqslant \mathrm{e}^{u+V}}} 1.$$

En effet, la majoration $\Delta_V(n) \leqslant V\Delta(n)$, la minoration $\Delta_V(n) \geqslant \frac{V\tau(n)}{\log n}$, valable pour $V \leqslant \log n$ ainsi que le théorème de l'article [32], montrent l'encadrement

$$xV \ll \sum_{n\leqslant x} \Delta_V(n) \ll xV\mathcal{L}(x)^\alpha.$$

Théorème 1.1.11. *Soient χ un caractère de Dirichlet non principal d'ordre r, $y > 0$, $V \geqslant 1$ et $t \geqslant 1$. Lorsque x tend vers $+\infty$, nous avons*

$$\mathfrak{S}_{t,V}(x,\chi,\mu^2 y^\omega) \gg x\Big((\log x)^{y-1} + (\log x)^{2^t y-t-1}U^t + (\log x)^{2^{2t}y/r-2t-1}U^{2t}\Big), \tag{1.10}$$

où U est défini en (1.8)*. La constante implicite dépend au plus de y, χ et t.*

Remarque 1.1.12. Grâce au deuxième terme du membre de droite de (1.10), lorsque $t = 1$ et $y \geqslant 1$, nous retrouvons le même exposant de $\log x$, à un facteur $o(1)$ près, ainsi que le même exposant de V dans le minorant de (1.10) que dans le majorant de (1.7). Il s'agit d'un des deux seuls cas ou la majoration et la minoration correspondent, à un facteur $(\log x)^{o(1)}$ près. L'autre cas correspond à la remarque 1.1.8.

Soit

$$y_1(t) := \frac{t}{\lambda(t)-1}. \tag{1.11}$$

Nous énonçons deux théorèmes qui sont des versions analogues des Théorèmes 1.1.4 et 1.1.11 pour la fonction μ.

Théorème 1.1.13. *Soient A, c, η des constantes strictement positives, $t \geqslant 1$ un réel, g une fonction de $\mathcal{M}_A(c,\eta)$ et $V \geqslant 1$. Nous supposons que $y > 0$. Alors, il existe une constante $\alpha = \alpha(g,c,t,\eta) > 0$ telle que pour $x \geqslant 16$*

$$\mathfrak{S}_{t,V}(x,\mu,g) \ll x\mathcal{L}(x)^\alpha U^t (\log x)^{y-1+(\lambda(t)y-y-t)^+}$$

où U est défini en (1.8)*. La constante implicite dépend au plus de y, χ et t. Par ailleurs, le facteur $\log_3(x)$ qui apparaît dans la fonction $\mathcal{L}$ peut être omis si $y > y_1$.*

Théorème 1.1.14. *Soient $y > 0$, $V \geqslant 1$ et $t \geqslant 1$. Nous avons, lorsque x tend vers $+\infty$,*

$$\mathfrak{S}_{t,V}(x,\mu,\mu^2 y^\omega) \gg x\Big((\log x)^{y-1} + (\log x)^{2^t y-t-1}U^t\Big),$$

où U est défini en (1.8)*. La constante implicite dépend au plus de y, χ et t.*

Remarque 1.1.15. Le seul cas ou la majoration et la minoration correspondent, à un facteur $(\log x)^{o(1)}$ près, a lieu lorsque $t = 1$ et $y \geqslant 1$.

1.2 Majoration dans le cas où v est fixé

1.2.1 Énoncés des résultats

Les Théorèmes 1.1.4 et 1.1.11 ne peuvent se déduire directement de la méthode développée par La Bretèche et Tenenbaum dans [5]. C'est pour cela que nous avons introduit la fonction $\Delta_v^*(n,f)$ en (1.1).

Lorsque g et f sont deux fonctions arithmétiques, $v,t \geqslant 1$, et $x \in \mathbb{R}$, nous définissons

$$\mathfrak{S}_{t,v}^*(x,f,g) := \sum_{n \leqslant x} g(n)\Delta_v^*(n,f)^{2t},$$

où $\Delta_v^*(n,f)$ est définie en (1.1). Nous nous intéressons dans cette partie à une majoration de $\mathfrak{S}_{t,v}^*(x,\chi,g)$. Cette majoration nous permettra de déduire le Théorème 1.1.4.

Théorème 1.2.1. *Sous les mêmes hypothèses que le Théorème 1.1.4, pour tout $v \geqslant 1$, il existe une constante $\alpha = \alpha(g,\chi,c,t,\eta) > 0$ telle que, pour $x \geqslant 16$*

$$\mathfrak{S}_{t,v}^*(x,\chi,g) \ll x\mathcal{L}(x)^{\alpha} u^t (\log x)^{y-1+(2^{2t-1}y-y-t)^+}$$

où nous avons posé

$$u := \min(v, \log x). \tag{1.12}$$

La constante implicite dépend au plus de g, χ, t, c et η. Par ailleurs, le facteur $\log_3(x)$ qui apparaît dans la fonction $\mathcal{L}$ peut être omis si $y > y_0$.

Remarque 1.2.2. Les remarques 1.1.5 et 1.1.6 restent valables pour l'estimation de $\mathfrak{S}_{t,v}^*(x,\chi,g)$, nous supposerons donc par la suite que $v \leqslant \log x$. Nous pouvons également supposer que la constante implicite dans la majoration du Théorème 1.2.1 est absolue.

Ce théorème possède également une version analogue lorsque nous remplaçons le caractère χ par la fonction μ.

Théorème 1.2.3. *Sous les mêmes hypothèses que le Théorème 1.1.13, il existe une constante $\alpha = \alpha(g,\chi,c,t,\eta) > 0$ telle que, pour $x \geqslant 16$*

$$\mathfrak{S}_{t,v}^*(x,\mu,g) \ll x\mathcal{L}(x)^{\alpha} u^t (\log x)^{y-1+(\lambda(t)y-y-t)^+}$$

où u est définie en (1.12)*. La constante implicite dépend au plus de y, χ et t. Par ailleurs, le facteur $\log_3(x)$ qui apparaît dans la fonction $\mathcal{L}$ peut être omis si $y > y_1$ où y_1 est défini en* (1.11)*.*

1.2.2 Rappels

Dans cette section, nous énonçons les lemmes permettant de démontrer le Théorème 1.2.1. Les démonstrations étant proches de celles de l'article [5], nous nous intéressons aux modifications apportées à celles-ci par l'introduction du facteur v et la généralisation aux caractères complexes.

Lorsque $n \geqslant 1$, nous posons

$$E(n) := \min_{\substack{dd'|n \\ d<d'}} \log \frac{d'}{d}, \qquad E^*(n) := \min\big(1, E(n)\big).$$

Lorsque $n \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, et f une fonction, nous posons

$$M^*_{q,v}(n,f) := \int_{\mathbb{R}} |\Delta(n,f,u,v)|^q \mathrm{d}u.$$

Les deux lemmes suivants étant en tout point identiques à ceux de l'article [5], nous nous contentons d'énoncer les résultats.

***Lemme* 1.2.4.** *Soit $v \geqslant 1$. Lorsque $n \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$, nous avons*

$$\Delta^*_v(n,\chi)^2 \leqslant 2^5 + 2^{3+2/q} E^*(n)^{-1/q} M^*_{2q,v}(n,\chi)^{1/q}. \tag{1.13}$$

De plus, si $E^*(n) \geqslant \eta$ et $1 \leqslant q \leqslant b$, alors

$$M^*_{2b,v}(n,\chi)^{1/b} \leqslant 2^{8-8q/b} \eta^{\frac{1}{b}-\frac{1}{q}} M^*_{2q,v}(n,\chi)^{1/q}. \tag{1.14}$$

Pour démontrer ce lemme, nous regardons le lieu des réels u qui sont proches du réel u_0 pour lequel la fonction $\Delta(n,\chi,.,v)$ atteint son maximum. Ce lieu est de mesure $E^*(n)$, ce qui fournit le terme principal. Le terme d'erreur apparait comme la variation maximale de cette fonction dans ce lieu.

***Lemme* 1.2.5.** *Soient $A > 0$, $c > 0$, $\eta \in]O,1[$, $g \in \mathcal{M}_A(c,\eta)$ et $t \geqslant 1$. Pour tout $y > 0$, nous avons, uniformément en $\sigma > 0$,*

$$\sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ E(n) \leqslant \sigma^{3\cdot 4^t} y}} \frac{\mu^2(n) g(n) \tau(n)^{2t}}{n^{1+\sigma}} \ll 1. \tag{1.15}$$

Avant d'énoncer le prochain lemme, quelques notations sont nécessaires.
Lorsque $q, n \geqslant 1$, $w \in \mathbb{R}$ et $0 \leqslant j \leqslant q$, nous définissons

$$N_{j,q,v}(n,w) := \int_{\mathbb{R}} |\Delta(n,\chi,u,v)|^j |\Delta(n,\chi,u-w,v)|^{q-j} \mathrm{d}u.$$

Lorsque χ est un caractère de Dirichlet, n un entier strictement positif et ϑ un réel, nous posons

$$\tau(n,\chi,\vartheta) := \sum_{d|n} \chi(d) d^{i\vartheta}. \tag{1.16}$$

Nous définissons, pour $v \geqslant 1$,

$$\tau^*_v(n,\chi) := \int_0^\infty \frac{v^2}{1+\vartheta^2 v^2} |\tau(n,\chi,\vartheta)|^2 \mathrm{d}\vartheta = v \int_0^\infty \frac{1}{1+\vartheta^2} \Big|\tau\Big(n,\chi,\frac{\vartheta}{v}\Big)\Big|^2 \mathrm{d}\vartheta. \tag{1.17}$$

***Lemme* 1.2.6.** *Soit $n \geqslant 1$ un entier. Nous avons, uniformément pour $v \geqslant 1$*

$$M^*_{2,v}(n,\chi) \ll \tau^*_v(n,\chi). \tag{1.18}$$

Démonstration. Un calcul de transformée de Fourier, identique à celui effectué dans le lemme 2.3 de [5], et l'identité de Parseval fournissent

$$M^*_{2,v}(n,\chi) = \int_{\mathbb{R}} |\tau(n,\chi,\vartheta)|^2 \frac{\sin^2(v\vartheta/2)}{\vartheta/2} \mathrm{d}\vartheta.$$

Nous avons alors, uniformément pour $v \geqslant 1$,

$$\frac{\sin^2(v\vartheta/2)}{\vartheta/2} \ll \min\Big(v^2, \frac{1}{\vartheta^2}\Big) \ll \frac{v^2}{1+\vartheta^2 v^2}.$$

D'où le résultat. □

***Lemme* 1.2.7.** *Pour $1 \leqslant j \leqslant q-1$, $g \in \mathcal{M}_A(c,\eta)$, $n \geqslant 1$, $v \geqslant 1$ et $x \geqslant 2$, nous avons*

$$\sum_{p>x} \frac{g(p)\log p}{p} N_{2j,2q,v}(n,\log p) \ll M^*_{2q,v}(n,\chi)^{(q-2)/(q-1)} \tau^*_v(n,\chi)^{q/(q-1)} + R_{q,v}(n,x)$$

où

$$R_{q,v}(n,x) \ll \mathrm{e}^{-c(\log x)^\eta}\, 4^q M_{2q,v}(n)^{(2q-2)/(2q-1)} v^{2q/(2q-1)} \tau(n)^{2q/(2q-1)}$$

et

$$M_{h,v}(n) = \int_{\mathbb{R}} \Delta(n,u,v)^h \mathrm{d}u. \tag{1.19}$$

Démonstration. Pour tout $n \geqslant 1$, nous avons

$$\sum_{p>x} \frac{g(p)\log p}{p} N_{2j,2q,v}(n,\log p) = \int_{\mathbb{R}} \left|\Delta(n,\chi,u,v)\right|^{2j} S_{2(q-j)} \mathrm{d}u$$

où

$$S_{2h} := \sum_{p>x} \frac{g(p)\log(p)}{p} |\Delta(n,\chi,u-\log(p),v)|^{2h}.$$

Un développement de la somme définissant Δ nous permet d'écrire, dans le cas où $v \geqslant \log\left(\frac{\max d_i}{\min d_i}\right)$,

$$S_{2h} = \sum_{d_1,\dots,d_{2h}|n} \chi(d_1\cdots d_h)\overline{\chi(d_{h+1}\cdots d_{2h})} \sum_{\substack{u-\log\min d_r < \log p \leqslant u+v-\log\max d_r \\ p>x}} \frac{g(p)\log p}{p}.$$

Par sommation d'Abel, la somme intérieure vaut

$$y \int_{u-\log\min d_r}^{u+v-\log\max d_r} 1_{[0,1]}\Big(\frac{\log x}{t}\Big)\mathrm{d}t + O\big(\mathrm{e}^{-c(\log x)^\eta}\big).$$

En adaptant le théorème 72 de [17], nous obtenons, pour tout $h \geqslant 2$, l'inégalité

$$\sum_{\substack{d_1,\dots,d_{2h}|n \\ \log(\max d_i)-\log(\min d_i)\leqslant v}} 1 \leqslant 2^{2h} M_{2h,v}(n)$$

où $M_{2h,v}$ est défini en (1.19). Ainsi,

$$\begin{aligned} S_{2h} &= y\int_{\log x}^{+\infty} |\Delta(n,\chi,u-t,v)|^{2h}\mathrm{d}t + O\big(2^{2h} M_{2h,v}(n)\,\mathrm{e}^{-c(\log x)^\eta}\big) \\ &\leqslant y\int_{\mathbb{R}} |\Delta(n,\chi,u-t,v)|^{2h}\mathrm{d}t + O\big(2^{2h} M_{2h,v}(n)\,\mathrm{e}^{-c(\log x)^\eta}\big). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} &\sum_{p>x} \frac{g(p)\log p}{p} N_{2j,2q,v}(n,\log p) \\ &\qquad \leqslant yQ_j + O(2^{2(q-j)} M_{2(q-j),v}(n) M_{2j,v}(n)\,\mathrm{e}^{-c(\log x)^\eta}) \end{aligned}$$

où

$$Q_j = \int_{\mathbb{R}} |\Delta(n,\chi,u,v)|^{2j}\mathrm{d}u \int_{\mathbb{R}} |\Delta(n,\chi,w,v)|^{2(q-j)}\mathrm{d}w.$$

Plusieurs adaptations de l'inégalité de Hölder décrites dans le lemme 2.4 de [5] impliquent

$$Q_j \ll M^*_{2q,v}(n,\chi)^{(q-2)/(q-1)} M^*_{2,v}(n,\chi)^{q/(q-1)},$$

tandis que la majoration (1.18) fournit

$$M^*_{2,v}(n,\chi) \ll \tau^*_v(n,\chi)$$

où $\tau^*_v(n,\chi)$ est défini en (1.17). Pour traiter le reste, nous effectuons un raisonnement similaire. Le terme positif $|\Delta(n,\chi,u,v)|$ est clairement majoré par $\Delta(n,u,v)$, puis, une inégalité de Hölder avec exposants $\frac{2q-1}{2(q-j)}$ et $\frac{2q-1}{2j-1}$ montre la majoration

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} \Delta(n,u,v)^{2j}\mathrm{d}u\\ &\leqslant \Big(\int_{\mathbb{R}} \Delta(n,u,v)\mathrm{d}u\Big)^{2(q-j)/(2q-1)} \Big(\int_{\mathbb{R}} \Delta(n,u,v)^{2q}\mathrm{d}u\Big)^{(2j-1)/(2q-1)}.\end{aligned}$$

Le même raisonnement en remplaçant j par $q-j$ fournit

$$\begin{aligned}&M_{2j,v}(n)M_{2(q-j),v}(n)\\ &\leqslant \Big(\int_{\mathbb{R}} \Delta(n,u,v)\mathrm{d}u\Big)^{2q/(2q-1)} M_{2q,v}(n)^{(2q-2)/(2q-1)}.\end{aligned}$$

Pour conclure, nous utilisons l'estimation triviale

$$\int_{\mathbb{R}} \Delta(n,u,v)\mathrm{d}u \leqslant v\tau(n)$$

valable pour $v \geqslant 1$. □

***Lemme* 1.2.8.** *Soient $A > 0$, $c > 0$, $\eta \in]0,1[$, $t \geqslant 1$, χ un caractère de Dirichlet non principal d'ordre r et $g \in \mathcal{M}_A(\chi,c,\eta)$. Nous avons uniformément pour $0 < |\vartheta| \leqslant 1$ et $x \geqslant 3$*

$$\begin{aligned}&\sum_{p\leqslant x} \frac{g(p)}{p}|1+\chi(p)p^{i\vartheta}|^{2t}\\ &\quad = y\lambda(t)\log(1+|\vartheta|\log x) + \beta_g(r,t)2^{2t-1}\log\Big(\frac{\log x}{1+|\vartheta|\log x}\Big) + O(1)\end{aligned} \tag{1.20}$$

et uniformément pour $|\vartheta| > 1$

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{g(p)}{p}|1+\chi(p)p^{i\vartheta}|^{2t} \leqslant y\lambda(t)\log_2 x + B\log_2(2+|\vartheta|) \tag{1.21}$$

où B est une constante.

Démonstration. Il suffit d'adapter le lemme 2.5 de [5] dans le cas où le caractère χ est à valeurs complexes. □

***Lemme* 1.2.9.** *Soit $T \geqslant 1$ un réel, $A, c > 0$, $\eta \in]0,1[$, χ un caractère de Dirichlet non principal d'ordre r et $g \in \mathcal{M}_A(\chi,c,\eta)$ telle que $y > 0$ et $\beta_g(r,t) \leqslant y$. Pour tout $0 < s \leqslant \frac{1}{\log T}$ et $v \geqslant 1$, nous avons*

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{a_n b_n^{1+s}} \tau^*_v(n,\chi)^t \ll v^t s^{-2^{2t-1}y}$$

où

$$a_n = \prod_{\substack{p|n\\ p\leqslant T}} p, \quad b_n = \prod_{\substack{p|n\\ p>T}} p.$$

Démonstration. D'après l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\tau_v^*(n,\chi)^t \ll v^t \int_0^\infty \frac{1}{1+\vartheta^2}\Big|\tau\Big(n,\chi,\frac{\vartheta}{v}\Big)\Big|^{2t}\mathrm{d}\vartheta.$$

Donc la somme que nous cherchons à estimer est

$$\ll v^t \int_0^\infty \frac{1}{1+\vartheta^2} f\Big(s,\frac{\vartheta}{v}\Big)\mathrm{d}\vartheta$$

où

$$f(s,\vartheta) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{a_n b_n^{1+s}}|\tau(n,\chi,\vartheta)|^{2t}.$$

Pour $s>0$, cette fonction possède un développement en produit eulérien

$$f(s,\vartheta) = \prod_{p\leqslant T}\Big(1+\frac{g(p)}{p}|1+\chi(p)p^{i\vartheta}|^{2t}\Big)\prod_{p>T}\Big(1+\frac{g(p)}{p^{1+s}}|1+\chi(p)p^{i\vartheta}|^{2t}\Big). \tag{1.22}$$

Nous utilisons le Lemme 1.2.8 pour estimer $f(s,\vartheta)$. Comme les équations (1.20) et (1.21) utilisent une borne x, nous devons estimer

$$\sum_{p>x}\frac{g(p)}{p^{1+s}}|1+\chi(p)p^{i\vartheta}|^{2t}.$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{p>x}\frac{g(p)}{p^{1+s}}|1+\chi(p)p^{i\vartheta}|^{2t} &\ll 2^{2t}y\int_x^\infty \frac{1}{t^{1+s}\log t}\mathrm{d}t\\ &\ll \int_{\log x}^\infty \frac{\mathrm{e}^{-su}}{u}\mathrm{d}u\\ &\ll \int_{s\log x}^\infty \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Ainsi, en prenant $x=\mathrm{e}^{1/s}$, cette quantité est $O(1)$. Ce choix de x est compatible à la majoration de f fournie par le Lemme 1.2.8. En effet, comme $s\leqslant \frac{1}{\log T}$, nous avons $x=\mathrm{e}^{1/s}\geqslant T$, ainsi, d'après (1.22), nous avons

$$f(s,\vartheta)\leqslant \prod_{p\leqslant x}\Big(1+\frac{g(p)}{p}|1+\chi(p)p^{i\vartheta}|^{2t}\Big)\prod_{p>x}\Big(1+\frac{g(p)}{p^{1+s}}|1+\chi(p)p^{i\vartheta}|^{2t}\Big).$$

Les équations (1.20) et (1.21) fournissent alors

$$f(s,\vartheta)\ll \begin{cases}\Big(1+\frac{\vartheta}{s}\Big)^{y\lambda(t)}(s+\vartheta)^{-2^{2t-1}\beta_g(r,t)} & \text{si } \vartheta\leqslant 1\\ s^{-\lambda(t)y}\log(2+\vartheta)^B & \text{sinon.}\end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{1+\vartheta^2}f\Big(s,\frac{\vartheta}{v}\Big)\mathrm{d}\vartheta &\ll \int_0^v \frac{1}{1+\vartheta^2}\Big(1+\frac{\vartheta}{vs}\Big)^{\lambda(t)y}\Big(s+\frac{\vartheta}{v}\Big)^{-2^{2t-1}\beta_g(r,t)}\mathrm{d}\vartheta\\ &\quad+\int_v^\infty \frac{1}{1+\vartheta^2}s^{-\lambda(t)y}\log(2+\vartheta)^B\mathrm{d}\vartheta\\ &\ll s^{-2^{2t-1}\beta_g(r,t)}\int_0^{vs}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{1+\vartheta^2}\\ &\quad+s^{-y\lambda(t)}\int_{vs}^v\Big(\frac{\vartheta}{v}\Big)^{y\lambda(t)-\beta_g(r,t)2^{2t-1}}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{1+\vartheta^2}+s^{-y\lambda(t)}\\ &\ll \min(1,vs)s^{-2^{2t-1}\beta_g(r,t)}+s^{1-2^{2t-1}\beta_g(r,t)}\log(1/s)+s^{-y\lambda(t)}.\end{aligned}$$

L'hypothèse $\beta_g(r,t)\leqslant y$ permet de conclure. □

Ainsi, nos hypothèses sur $\beta_g(r,t)$ sont plus restrictives que celles de [5], cela vient du fait que nous dilatons un intervalle portant sur les petites valeurs de ϑ d'un facteur v.

Avant de commencer la démonstration du Théorème 1.2.1, nous énonçons les deux lemmes suivants. Le premier nous permet, de manière classique, de nous ramener au cas d'une somme portant sur les termes sans facteur carré et pondérés par un poids $1/n$. Le second correspond au lemme 70.2 de [17].

***Lemme* 1.2.10.** *[Tenenbaum, [32]] Soient $A > 0$, $c > 0$, et $\eta \in]0,1[$. Pour tout $g \in \mathcal{M}_A(c,\eta)$, $v \geqslant 1$ et $x \geqslant 2$, nous avons*

$$\mathfrak{S}^*_{t,v}(x,\chi,g) \ll \frac{x}{\log x} \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu^2(n)g(n)}{n} \Delta^*_v(n,\chi)^{2t}.$$

***Lemme* 1.2.11.** *Soient $L(s)$, $X(s)$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\sigma_0]$, telles que*

$$-L'(s) \leqslant \phi(s, L(s)), \quad -X'(s) \geqslant \phi(s, X(s))$$

où pour s fixé, $\phi(s,x)$ est une fonction croissante de x. Si $L(\sigma_0) \leqslant X(\sigma_0)$, alors pour tout $s \leqslant \sigma_0$, $L(s) \leqslant X(s)$.

1.2.3 Démonstration du Théorème 1.2.1

La démonstration du Théorème 1.2.1 dans le cas $y > y_0$ est identique à celle de [5], à ceci près que nous utilisons le Lemme 1.2.9 en lieu et place du lemme 2.7 de [5], ce qui fait apparaître un facteur v^t. Les Lemmes 1.2.4, 1.2.5 et 1.2.10 nous permettent de ramener notre problème à une majoration de la fonction $L_{T,q,v}$ définie par

$$L_{T,q,v}(s) := \sum_{n \geqslant 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{a_n b_n^{1+s}} M^*_{2q,v}(n,\chi)^{t/q}.$$

Des calculs analogues à ceux de [5] faisant intervenir les Lemmes 1.2.7 et 1.2.9 ainsi que des inégalités de Hölder fournissent

$$-L'_{T,q,v}(s) \leqslant \phi\big(s, L_{T,q,v}(s)\big)$$

avec

$$\phi(s,x) = 4^{t/q}\frac{y+as}{s}x + \frac{C_1 v^{t/(q-1)} x^{(q-2)/(q-1)}}{s^{1-t/q+2^{2t-1}y/(q-1)}} + \frac{\varepsilon}{s^{\ell+1}},$$

où ε et ℓ sont des constantes bien choisies, tandis que C_1 est une constante absolue. Nous cherchons un majorant sous la forme

$$X(s) = \frac{K}{s^\gamma} + \frac{\varepsilon}{s^\ell}. \tag{1.23}$$

La constante γ est identique à celle de [5], elle vaut $2^{2t-1}y - t + \frac{t}{q}$. En revanche, la condition sur K devient $K = C_2^q v^t$ pour une constante C_2 suffisamment grande. Un choix pertinent de T, similaire à celui de [5], nous permet de négliger le second membre de (1.23) devant le premier. Nous obtenons ainsi

$$L_{T,q,v}(\sigma) \ll \frac{C_2^q v^t}{\sigma^{2^{2t-1}y-t+t/q}}$$

ce qui fournit le Théorème 1.2.1 en spécifiant $\sigma = \frac{1}{\log x}$ et $q = \sqrt{\log(1/\sigma)}$.

Dans le cas où $y \leqslant y_0$, la démonstration est légèrement différente. Comme dans [5], nous recherchons une fonction X, qui majorera notre fonction $L_{T,q,v}$ sous la forme

$$X(s) := \frac{K}{s^\gamma} + \frac{\varepsilon}{s^\ell},$$

les constantes ε et ℓ sont toujours déterminées par la fonction ϕ, mais ici, γ est définie par

$$\gamma := y + \frac{b}{q}$$

où b est une constante suffisamment grande. La fonction X vérifie alors les hypothèses du Lemme 1.2.11 dès que

$$K \geqslant (qC_3)^q v^t$$

où C_3 est une constante absolue. La nouvelle majoration de la fonction $L_{T,q,v}$ devient

$$L_{T,q,v}(\sigma) \ll \frac{(qC_3)^q v^t}{\sigma^{y+b/q}}$$

ce qui fournit le Théorème 1.2.1 en spécifiant $\sigma = \frac{1}{\log x}$ et $q = \sqrt{\frac{\log(1/\sigma)}{\log_2(1/\sigma)}}$.

Remarque 1.2.12. Dans le cas où le caractère χ est remplacé par la fonction de Möbius, tous les lemmes cités restent valables, y compris les Lemmes 1.2.8 et 1.2.9 où $r = 2$, $z_0 = 0$ et $z_1 = y$. Dans ce dernier lemme, nous pouvons par ailleurs remplacer le facteur 2^{2t-1} par $\lambda(t)$, ce qui permet d'adapter la méthode différentielle de manière à obtenir le Théorème 1.2.3.

1.3 Majoration dans le cas où v parcourt un intervalle de taille V

1.3.1 De la majoration locale à la majoration globale

Le Théorème 1.2.1 nous permet de démontrer le Théorème 1.1.4 en utilisant le lemme suivant.

***Lemme* 1.3.1.** *Soit $V \geqslant 1$, pour tout $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant \ell \leqslant 1$, nous avons*

$$\Delta_V(n,\chi) \leqslant V^{1-\ell}\Delta^*_{V^\ell}(n,\chi) + \Delta_{V^\ell}(n,\chi).$$

Démonstration. L'idée de la démonstration consiste à scinder un intervalle quelconque de taille $v \leqslant V$ en union disjointe d'intervalles de taille V^ℓ et d'un intervalle de taille inférieure

à V^ℓ. Pour tout $u \in \mathbb{R}$ et $v \in [0, V]$, nous avons

$$\begin{aligned}
\Delta(n,\chi,u,v) &= \sum_{\substack{d|n \\ u<\log d\leqslant u+v}} \chi(d) \\
&= \sum_{j=0}^{[\frac{v}{V^\ell}]-1} \sum_{\substack{d|n \\ u+jV^\ell<\log d\leqslant u+(j+1)V^\ell}} \chi(d) + \sum_{\substack{d|n \\ u+[\frac{v}{V^\ell}]V^\ell<\log d\leqslant u+v}} \chi(d) \\
&= \sum_{j=0}^{[\frac{v}{V^\ell}]-1} \Delta(n,\chi,u+jV^\ell,V^\ell) + \Delta\Big(n,\chi,u+\Big[\frac{v}{V^\ell}\Big]V^\ell, v-\Big[\frac{v}{V^\ell}\Big]V^\ell\Big),
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\Big|\Delta(n,\chi,u,v)\Big| \leqslant \Big[\frac{v}{V^\ell}\Big]\Delta^*_{V^\ell}(n,\chi) + \Delta_{V^\ell}(n,\chi).$$

Comme v est plus petit que V, nous obtenons le résultat annoncé. □

1.3.2 Démonstration du Théorème 1.1.4

D'après le Lemme 1.3.1, nous avons

$$\Delta_V(n,\chi)^{2t} \leqslant 2^{2t}(V^{2t(1-\ell)}\Delta^*_{V^\ell}(n,\chi)^{2t} + \Delta_{V^\ell}(n,\chi)^{2t}).$$

Nous utilisons alors l'uniformité en v de la majoration du Théorème 1.2.1 pour obtenir

$$\mathfrak{S}_{t,V}(x,g,\chi) \leqslant Ax(\log x)^{y-1+(2^{2t-1}y-y-t)^+}\mathcal{L}(x)^\alpha 2^{2t}(V^{t(2-\ell)} + V^{2t\ell}). \tag{1.24}$$

Le facteur $V^{2t\ell}$ vient de la majoration triviale $\Delta_{V^\ell}(n,\chi) \leqslant V^\ell\Delta(n,\chi)$. En prenant $\ell = \frac{2}{3}$, nous obtenons

$$\mathfrak{S}_{t,V}(x,g,\chi) \leqslant Ax(\log x)^{y-1+(2^{2t-1}y-y-t)^+}\mathcal{L}(x)^\alpha 2^{2t+1}V^{t4/3},$$

où A est une constante absolue. Par ailleurs, le facteur $V^{2t\ell}$ dans la formule (1.24) peut désormais être remplacé par $V^{t\ell 4/3}$ d'après ce qui vient d'être fait. Nous déterminons alors ℓ tel que $2-\ell = \frac{4}{3}\ell$, soit $\ell = \frac{6}{7}$. Cela nous permet de remplacer l'exposant $\frac{4}{3}$ dans la majoration ci-dessus par $\frac{4}{3}\frac{6}{7} = \frac{8}{7}$, puis nous itérons le processus. Cependant, nous ne pouvons pas le faire indéfiniment, car à chaque itération, nous augmentons la constante. Nous constatons ainsi qu'à l'étape n, nous avons

$$\mathfrak{S}_{t,V}(x,g,\chi) \leqslant Ax(\log x)^{y-1+(2^{2t-1}y-y-t)^+}\mathcal{L}(x)^\alpha 2^{n(2t+1)}V^{tu_n} \tag{1.25}$$

où u_n est défini par la relation de récurrence suivante

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n},\ u_0 = 2.$$

En effet, nous raisonnons par récurrence sur n. Si l'inégalité (1.25) est vraie au rang n, alors pour tout $\ell \in]0,1[$, nous avons

$$\mathfrak{S}_{t,V}(x,g,\chi) \leqslant A2^{n(2t+1)}x(\log x)^{y-1+(2^{2t-1}y-y-t)^+}\mathcal{L}(x)^\alpha(V^{t(2-\ell)} + V^{t\ell u_n}).$$

Nous posons alors ℓ tel que

$$2-\ell = \ell u_n$$

c'est-à-dire

$$\ell = \frac{2}{1+u_n}.$$

En observant que $u_{n+1} = \ell u_n = 2 - \ell$, nous obtenons

$$\mathfrak{S}_{t,V}(x,g,\chi) \leqslant A2^{(n+1)(2t+1)} x(\log x)^{y-1+(2^{2t-1}y-y-t)^+} \mathcal{L}(x)^\alpha V^{tu_{n+1}}.$$

Il est clair que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1 et que $u_n \leqslant 1 + \frac{1}{2^n}$, ce qui fournit

$$\mathfrak{S}_{t,V}(x,g,\chi) \leqslant Ax(\log x)^{y-1+(2^{2t-1}y-y-t)^+} \mathcal{L}(x)^\alpha 2^{n(2t+1)} V^{t(1+\frac{1}{2^n})}.$$

En choisissant $n = [\frac{\log(t\log V)}{\log 2}] + 1$, nous obtenons

$$\mathfrak{S}_{t,V}(x,g,\chi) \leqslant Bx(\log x)^{y-1+(2^{2t-1}y-y-t)^+} \mathcal{L}(x)^\alpha V^t (\log V)^b$$

où B et b sont deux constantes absolues. L'hypothèse $V \leqslant \log x$ montre que le facteur $(\log V)^b$ peut être absorbé par le terme $\mathcal{L}(x)^\alpha$ quitte à augmenter la valeur de α, ce qui achève la démonstration du Théorème 1.1.4.

Cette méthode s'applique dans le cas où le caractère χ est remplacé par la fonction μ. Elle permet donc de déduire le Théorème 1.1.13 du Théorème 1.2.3.

1.4 Minoration dans le cas où v parcourt un intervalle de taille V

1.4.1 Une application de la transformée de Fourier

La démonstration du Théorème 1.1.11 étant très semblable à celle du théorème 1.2 de [5], nous ne la rédigerons pas complètement. Nous nous contenterons de souligner les détails à modifier afin d'obtenir le Théorème 1.1.11.

Pour démontrer ce résultat, nous avons besoin d'introduire l'intégrale suivante. Pour $n \geqslant 1$, $V > 0$ et f une fonction, nous posons

$$M_{2,V}(n,f) := \int_0^V \int_{\mathbb{R}} |\Delta(n,f,u,v)|^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Nous pouvons alors énoncer le lemme suivant.

***Lemme* 1.4.1.** *Pour $n \geqslant 1$, $V > 0$ et χ un caractère de Dirichlet, nous avons*

$$M_{2,V}(n,\chi) = \frac{V}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \Big(1 - \frac{\sin(\vartheta V)}{\vartheta V}\Big) \frac{|\tau(n,\chi,\vartheta)|^2}{\vartheta^2} \mathrm{d}\vartheta.$$

où $\tau(n,\chi,\vartheta)$ est défini en (1.16).

Démonstration. La démonstration de ce lemme est identique au début de la démonstration du lemme 2.3 de [5]. Fixons $v \in [0,V]$ et notons

$$\begin{array}{rcccc} Q & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & & u & \mapsto & \Delta(n,\chi,u,v). \end{array}$$

La fonction Q est intégrable sur $\mathbb{R}$, nous pouvons donc calculer sa transformée de Fourier

$$\begin{aligned}\widehat{Q}(\vartheta) &= \sum_{d|n} \chi(d) \int_{\log(d)-v}^{\log d} \mathrm{e}^{-i\vartheta u}\,\mathrm{d}u \\ &= \sum_{d|n} \chi(d) d^{-i\vartheta}\,\mathrm{e}^{iv\vartheta/2}\,\frac{\sin(v\vartheta/2)}{\vartheta/2} \\ &= \tau(n,\chi,-\vartheta)\,\mathrm{e}^{iv\vartheta/2}\,\frac{\sin(v\vartheta/2)}{\vartheta/2}.\end{aligned}$$

Comme Q et $\widehat{Q}$ sont L^2, la formule de Plancherel assure que

$$\int_{\mathbb{R}} Q^2(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\tau(n,\chi,\vartheta)|^2 \Big(\frac{\sin(v\vartheta/2)}{\vartheta/2}\Big)^2 \mathrm{d}\vartheta.$$

Puisque

$$\int_0^V \sin^2(\vartheta v/2)\mathrm{d}v = \frac{V}{2}\Big(1-\frac{\sin(\vartheta V)}{\vartheta V}\Big).$$

nous obtenons le résultat souhaité en intégrant sur v entre 0 et V l'égalité précédente. □

1.4.2 Démonstration du Théorème 1.1.11

Démonstration. Plaçons-nous dans le cas où $V \leqslant \log x$. La minoration

$$\sum_{n\leqslant x} \mu^2(n) y^{\omega(n)} \Delta_V(n,\chi)^{2t} \gg x\log(x)^{y-1}$$

découle de la minoration triviale $\Delta_V(n,\chi) \geqslant 1$.
La minoration

$$\sum_{n\leqslant x} \mu^2(n) y^{\omega(n)} \Delta_V(n,\chi)^{2t} \gg x\log(x)^{2^{2t}y/r-2t-1} V^{2t}$$

vient de la minoration $\Delta_V(n,\chi) \geqslant \frac{h_\chi(n)\tau(n)V}{1+\log n}$ où h_χ est la fonction multiplicative qui vaut 1 sur les nombres premiers vérifiant $\chi(p)=1$ et 0 sur les autres nombres premiers.

Montrons maintenant la minoration

$$\sum_{n\leqslant x} \mu^2(n) y^{\omega(n)} \Delta_V(n,\chi)^{2t} \gg x\log(x)^{2^t y-t-1} V^t.$$

Du Lemme 1.4.1, nous déduisons l'estimation

$$M_{2,V}(n,\chi) \geqslant \frac{V^2}{6}\int_{-1/V}^{1/V} \Big(1-\frac{\vartheta^2 V^2}{20}\Big)|\tau(n,\chi,\vartheta)|^2 \mathrm{d}\vartheta.$$

Ainsi

$$\Delta_V(n,\chi)^2 \geqslant \frac{1}{7}\frac{I(n)}{\log x}$$

où

$$I(n) = V^2 \int_{-1/V}^{1/V} |\tau(n,\chi,\vartheta)|^2 \mathrm{d}\vartheta.$$

Posons $w = 2^{t-1}y$ et

$$S_t(x,y) = \sum_{n\leqslant x} \mu^2(n) y^{\omega(n)} \Delta(n,\chi)^{2t}.$$

D'après l'inégalité de Hölder et l'inégalité précédente, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\mu^2(n)w^{\omega(n)}I(n) &\leqslant \Big(\sum_{n\leqslant x}(2^t y)^{\omega(n)}\Big)^{1-1/t}\Big(\sum_{n\leqslant x}\mu^2(n)y^{\omega(n)}I(n)^t\Big)^{1/t}\\ &\ll x^{1-1/t}(\log x)^{(2^t y-1)(1-1/t)}S_t(x,y)^{1/t}\log x.\end{aligned}$$

D'où

$$S_t(x,y)\gg\frac{x}{(\log x)^{2^t(t-1)y+1}}\Big(V^2\int_{-1/V}^{1/V}f(x,\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\Big)^t,$$

avec

$$f(x,\vartheta):=\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\mu^2(n)w^{\omega(n)}|\tau(n,\chi,\vartheta)|^2.$$

Si nous notons $F(s)$ la série de Dirichlet associée à f, un développement en produit eulérien permet d'écrire

$$F(s)=\zeta(s)^{2w}L(s+i\vartheta,\overline{\chi})^wL(s-i\vartheta,\chi)^wH(s,\vartheta)$$

avec $H(s,\vartheta)$ uniformément convergente et bornée dans le demi plan $\mathfrak{Re}(s)\geqslant\frac{3}{4}$ et vérifiant $|H(1,\vartheta)|\gg 1$ lorsque $|\vartheta|\leqslant 1$. Par ailleurs, nous savons que les fonctions L admettent un prolongement holomorphe à $\{\mathfrak{Re}(s)\geqslant 0\}$ et d'après le théorème II.8.18 de [34], nous avons, pour tout $|\vartheta|\leqslant 1$,

$$L(s+i\vartheta,\chi)\ll\log(|\mathfrak{Im}(s)|+1).$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de Selberg et Delange (voir le théorème II.5.2 de [34]) afin d'obtenir

$$f(x,\vartheta)=\frac{L(1+i\vartheta,\overline{\chi})^wL(1-i\vartheta,\chi)^wH(1,\vartheta)}{\Gamma(2w)}x(\log x)^{2w-1}+O\big(x(\log x)\big)^{2w-1}.$$

Par ailleurs, la non annulation du produit

$$L(1+i\vartheta,\overline{\chi})L(1-i\vartheta,\chi)$$

est assurée par le théorème II.8.19 de [34]. Nous obtenons ainsi

$$S_t(x,y)\gg x(\log x)^{2^ty-t-1}V^t.$$

□

Remarque 1.4.2. Dans le cas où le caractère χ est remplacé par la fonction μ, le seul point de la démonstration qui diffère est que la fonction $L(s,\chi)$ est remplacée par l'inverse de la fonction ζ de Riemann. La méthode de Selberg-Delange s'applique également à ce cas, ce qui nous permet de démontrer le Théorème 1.1.14.

Chapitre 2

Sur la fonction Delta de Hooley associée à des caractères

Ce chapitre est la reproduction intégrale de l'article [23], disponible sur Arxiv.

2.1 Introduction

2.1.1 Notations et énoncés des théorèmes

Pour étudier l'ensemble

$$\{\log(d); d \mid n\},$$

la fonction Δ de Hooley, introduite dans [21] et définie par

$$\Delta(n) = \max_{u \in \mathbb{R}} \left(\Delta(n, u)\right) \tag{2.1}$$

où

$$\Delta(n, u) = \sum_{\substack{d \mid n \\ \mathrm{e}^u < d \leqslant \mathrm{e}^{u+1}}} 1, \tag{2.2}$$

est un outil privilégié. Un résultat remarquable portant sur l'étude de l'ordre moyen de la fonction Δ a été apporté par Hall et Tenenbaum dans [17]. Il y est démontré que cet ordre moyen est $\log(n)^{o(1)}$.

Une généralisation de cette fonction est définie de la manière suivante.
Pour $r \geqslant 2$ et $n \geqslant 1$, nous notons

$$\Delta_r(n) = \max_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{r-1}} \left(\Delta_r(n, \mathbf{u})\right) \tag{2.3}$$

où, pour $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_{r-1})$,

$$\Delta_r(n, \mathbf{u}) = \sum_{\substack{d_1 \cdots d_{r-1} \mid n \\ \mathrm{e}^{u_i} < d_i \leqslant \mathrm{e}^{u_i+1}}} 1. \tag{2.4}$$

Hall et Tenenbaum ([17]) parviennent à étendre la majoration de l'ordre moyen de $\Delta_r(n)$ lorsque $r \geqslant 3$. Aussi, l'ordre moyen obtenu est $\log(n)^{o(1)}$ pour $r \geqslant 2$.

Dans [5], La Bretèche et Tenenbaum s'intéressent à une autre généralisation. Ils étudient désormais la fonction Delta associée à un caractère de Dirichlet. Ils définissent donc, pour $n \geqslant 1$ et χ un caractère de Dirichlet non principal

$$\Delta(n,\chi) = \max_{\substack{u\in\mathbb{R}\\ v\in[0,1]}} |\Delta(n,\chi,u,v)| \tag{2.5}$$

où

$$\Delta(n,\chi,u,v) = \sum_{\substack{d|n\\ \mathrm{e}^u<d\leqslant \mathrm{e}^{u+v}}} \chi(d). \tag{2.6}$$

Le caractère χ n'étant pas positif, le maximum en v n'est pas forcément atteint en 1, ce qui justifie l'apparition de cette nouvelle variable. Ils montrent que les compensations dues aux oscillations des caractères sont d'ordre statistique, puisque l'ordre moyen de $\Delta(n,\chi)^2$ est le même que celui de $\Delta(n)$ à un facteur $(\log n)^{o(1)}$ près.

Dans cet article, nous nous intéressons à la fonction Δ_3 lorsqu'elle est associée à deux caractères de Dirichlet. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{\chi} = (\chi_1,\chi_2)$ un couple de deux caractères de Dirichlet non principaux, $\mathbf{u} = (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{v} = (v_1,v_2) \in [0,1]^2$, nous posons

$$\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{\substack{d_1d_2|n\\ \mathrm{e}^{u_i}<d_i\leqslant \mathrm{e}^{u_i+v_i}}} \chi_1(d_1)\chi_2(d_2), \tag{2.7}$$

$$\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi}) = \sup_{\substack{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2\\ \mathbf{v}\in[0,1]^2}} |\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},\mathbf{u},\mathbf{v})|. \tag{2.8}$$

Nous introduisons la constante ρ définie par

$$\rho := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \max\left(1, |1+\mathrm{e}^{i\vartheta}|^2\right)\mathrm{d}\vartheta - 2 = \frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{3} \approx 0,218. \tag{2.9}$$

et pour $y > 0$, nous notons

$$m(y,\rho) := \begin{cases} (\rho+2)y & \text{si } y \leqslant \frac{1}{1-\rho},\\ 3y-1 & \text{sinon,}\end{cases} \tag{2.10}$$

c'est-à-dire $m(y,\rho) = \max(3y-1,(\rho+2)y)$.

Pour la suite, lorsque χ_1 et χ_2 sont deux caractères de Dirichlet, nous notons

$$\boldsymbol{\chi} := (\chi_1,\chi_2) \tag{2.11}$$

le couple constitué de ces deux caractères, et nous notons r_1 l'ordre de χ_1 et r_2 l'ordre de χ_2. Par ailleurs, nous notons également q_1 et q_2 les conducteurs respectifs de χ_1 et χ_2. Pour $A > 0$, $c > 0$ et $\eta \in]0,1[$, nous disons qu'une fonction multiplicative g appartient à la classe $\mathcal{M}_A(c,\eta)$ si les conditions suivantes sont vérifiées

$$\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ g(n) \geqslant 0\\
&\forall p \in \mathcal{P} \text{ et } \forall \nu \geqslant 1,\ g(p^\nu) \leqslant A^\nu\\
&\forall \varepsilon > 0 \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ g(n) \ll_\varepsilon n^\varepsilon\\
&\sum_{p\leqslant x} g(p) = y\,\mathrm{li}(x) + O(x\,\mathrm{e}^{-2c(\log x)^\eta})
\end{aligned} \tag{2.12}$$

pour une certaine constante $y = y(g) > 0$.

Lorsque χ est un caractère de Dirichlet d'ordre r, nous définissons $\mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$ la classe des fonctions multiplicatives g appartenant à $\mathcal{M}_A(c, \eta)$ et vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{\substack{p \leqslant x \\ \chi(p) = \zeta^k}} g(p) = \frac{y}{r} \ \mathrm{li}(x) + O(x\, \mathrm{e}^{-2c(\log x)^\eta}) \tag{2.13}$$

où $y = y(g)$ et

$$\zeta := \mathrm{e}^{2i\pi/r}. \tag{2.14}$$

Enfin, pour $\boldsymbol{\chi} = (\chi_1, \chi_2)$ un couple de caractères de Dirichlet, $A > 0$, $c > 0$ et $\eta \in]0, 1[$, nous définissons la classe $\mathcal{M}_A(\boldsymbol{\chi}, c, \eta)$ par

$$\mathcal{M}_A(\boldsymbol{\chi}, c, \eta) := \mathcal{M}_A(\chi_1, c, \eta) \bigcap \mathcal{M}_A(\chi_2, c, \eta) \bigcap \mathcal{M}_A(\chi_1 \overline{\chi_2}, c, \eta).$$

Lorsque $x \geqslant 16$, nous notons

$$\mathcal{L}(x) := \mathrm{e}^{\sqrt{\log_2(x) \log_3(x)}}$$

où $\log_k$ désigne la k-ième itération de la fonction log. Enfin, si g est une fonction arithmétique et $\boldsymbol{\chi}$ un couple de caractères de Dirichlet, nous notons

$$\mathfrak{S}(x, g, \boldsymbol{\chi}) := \sum_{n \leqslant x} g(n) \Delta_3(n, \boldsymbol{\chi})^2. \tag{2.15}$$

Théorème 2.1.1. *Soit $\boldsymbol{\chi}$ défini en* (2.11) *un couple de caractères de Dirichlet non principaux tel que $\chi_1 \overline{\chi_2}$ ne soit pas principal, A, c des constantes strictement positives, $\eta \in]0, 1[$ et g appartenant à $\mathcal{M}_A(\boldsymbol{\chi}, c, \eta)$. Pour $y = y(g) > 0$, il existe une constante $\alpha > 0$, dépendant au plus de g, $\boldsymbol{\chi}$, c et η, telle que nous ayons, uniformément pour $x \geqslant 16$*

$$\mathfrak{S}(x, g, \boldsymbol{\chi}) \ll x (\log x)^{\max\{y-1, (\rho+2)y-2, 3y-3\}} \mathcal{L}(x)^\alpha. \tag{2.16}$$

En particulier, si $y(g) = 1$, alors il existe une constante $\alpha > 0$ telle que nous ayons, uniformément pour $x \geqslant 16$

$$\mathfrak{S}(x, g, \boldsymbol{\chi}) \ll x (\log x)^\rho \mathcal{L}(x)^\alpha, \tag{2.17}$$

où ρ est défini en (2.9).

Remarque 2.1.2. Actuellement, nous ne savons pas si l'exposant ρ apparaissant dans la majoration (2.16) traduit réellement le comportement de la fonction Δ_3 associée à deux caractères ou s'il s'agit d'une limitation de la preuve. Nous penchons cependant pour la seconde hypothèse car certaines majorations établies dans cet article ne semblent pas optimales.

Remarque 2.1.3. Comme nous le verrons par la suite, la première étape de la démonstration du Théorème 2.1.1 consiste à ramener le problème à l'étude d'une somme d'entiers sans facteur carré, pondérés par un poids $\frac{1}{n}$. Pour cela, nous utilisons une propriété de sous multiplicativité de la fonction Δ. Cette propriété nous permet de supposer également que $g(n) = 0$ si $(n, q_1 q_2) \neq 1$ où q_1 et q_2 désignent les conducteurs respectifs de χ_1 et χ_2.

Nous pouvons alors nous demander à quel point le Théorème 2.1.1 est optimal. À cet effet, nous énonçons le théorème de minoration suivant.

Théorème 2.1.4. *Soient $y > 0$ des réels, $\boldsymbol{\chi}$ un couple de caractères de Dirichlet non principaux.*

(i) Si $\chi_1\overline{\chi_2}$ n'est pas principal, alors nous avons lorsque $x \geqslant 3$,

$$\sum_{n\leqslant x} \mu^2(n) y^{\omega(n)} \Delta_3^2(n,\boldsymbol{\chi}) \gg x(\log x)^{\max\{y-1,3y-3\}}.$$

(ii) Si $\chi_1\overline{\chi_2}$ est principal, alors nous avons lorsque $x \geqslant 3$,

$$\sum_{n\leqslant x} \mu^2(n) y^{\omega(n)} \Delta_3^2(n,\boldsymbol{\chi}) \gg x(\log x)^{\max\{y-1,5y-4\}}.$$

Les résultats du Théorème 2.1.1 et du Théorème 2.1.4 nous montrent que l'exposant $\max\{y-1,(\rho+2)y-2,3y-3\}$ est optimal lorsque $y \leqslant 1/(1+\rho)$ ou $y \geqslant 1/(1-\rho)$. Il est par ailleurs intéressant de comparer ces résultats avec ceux obtenus par Hall et Tenenbaum. Dans [17], les auteurs établissent les estimations suivantes.

Théorème 2.1.5 (Hall, Tenenbaum [17])**.** *Pour tout $0 < y < 1$, il existe une constante α pour laquelle nous avons, lorsque $x \geqslant 16$,*

$$\sum_{n\leqslant x} y^{\omega(n)} \Delta_3(n) \ll x(\log x)^{y-1}\mathcal{L}(x)^{\alpha}.$$

Pour tout $y \geqslant 1$, il existe une constante β pour laquelle nous avons, lorsque $x \geqslant 16$,

$$\sum_{n\leqslant x} y^{\omega(n)} \Delta_3(n) \ll x(\log x)^{3y-3}\mathcal{L}(x)^{\beta}.$$

Les constantes α et β sont explicites.

Par ailleurs, des minorations triviales montrent que les exposants de $\log x$ sont optimaux. Nous pouvons donc observer que pour $y \leqslant 1/(1+\rho)$ et pour $y \geqslant 1/(1-\rho)$, $y^{\omega(n)}\Delta_3(n,\chi_1,\chi_2)^2$ se comporte en moyenne comme $y^{\omega(n)}\Delta_3(n)$. Néanmoins pour les autres valeurs de y, notamment pour $y = 1$, nous ne savons pas si cela reste vrai.

Pour démontrer le Théorème 2.1.1, nous étudierons les quantités suivantes

$$C(n,\boldsymbol{\chi}) := \sup_{\substack{u_2\in\mathbb{R}\\ v_1,v_2\in[0,1]^2}} C(n,\boldsymbol{\chi},u_2,v_1,v_2) \tag{2.18}$$

et

$$D(n,\boldsymbol{\chi}) := \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}\\ v_1,v_2\in[0,1]^2}} D(n,\boldsymbol{\chi},u,v_1,v_2) \tag{2.19}$$

où

$$C(n,\boldsymbol{\chi},u_2,\mathbf{v}) := \int_{\mathbb{R}} |\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},u_1,u_2,\mathbf{v})|^2 \mathrm{d}u_1 \tag{2.20}$$

et

$$D(n,\boldsymbol{\chi},u,v_1,v_2) := \int_{\mathbb{R}} |\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},u-u_1,u_1,\mathbf{v})|^2 \mathrm{d}u_1 \tag{2.21}$$

avec $\mathbf{v} = (v_1,v_2)$, $\boldsymbol{\chi}$ un couple de caractères de Dirichlet et $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme nous le verrons par la suite, les estimations de $C(n,\boldsymbol{\chi})$ et de $D(n,\boldsymbol{\chi})$ passent par l'estimation de

$$\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta) := \sup_{(u,v_1,v_2)\in\mathbb{R}\times[0,1]^2} |\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u,v_1,v_2),|,$$

où

$$\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u,v_1,v_2) := \sum_{\substack{d_1d_2|n\\ \mathrm{e}^u<d_1\leqslant \mathrm{e}^{u+v_1}}} \chi_1(d_1)\chi_2(d_2)d_2^{i\vartheta}(u+v_1-v_2-\log d_1)^k. \tag{2.22}$$

Toutes ces quantités sont étudiées dans la partie 3.

2.1.2 Applications

Les résultats que nous obtenons pour l'ordre moyen de $\Delta_3(n,\chi_1,\chi_2)^2$ ne fournissent pas des compensations statistiques qui nous permettraient de le comparer à l'ordre moyen de $\Delta_3(n)$. Le Théorème 2.1.1 est néanmoins utilisé de manière cruciale dans l'article [24] afin de fournir, dans un cadre particulier, une estimation asymptotique en ξ de la quantité suivante.

$$Q(F,\xi,\mathcal{R}) := \sum_{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^2\cap\mathcal{R}(\xi)} r_3(F(\mathbf{x})),$$

où F est une forme binaire de degré 3, $r_3(n)$ compte le nombre d'idéaux d'un anneau d'entiers de corps de nombre de norme n, $\mathcal{R}$ est un domaine de $\mathbb{R}^2$. Enfin, nous désignons par $\mathcal{R}(\xi)$ le domaine de $\mathbb{R}^2$ obtenu en dilatant $\mathcal{R}$ par ξ, c'est-à-dire

$$\mathcal{R}(\xi) := \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2 : \mathbf{x}/\xi\in\mathcal{R}\}.$$

Dans le cas où le corps de nombre $\mathbb{K}$ est une extension cyclique de $\mathbb{Q}$ de degré 3, en notant $G := \mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$ son groupe de Galois et χ un caractère non principal de G, alors nous pouvons relier la fonction r_3 au caractère χ par l'égalité suivante.

$$r_3(n) = (1*\chi*\chi^2)(n),$$

où $*$ désigne le produit de convolution entre deux fonctions arithmétiques. Pour f et g deux telles fonctions , celui-ci est la fonction arithmétique définie par

$$(f*g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\Big(\frac{n}{d}\Big) \qquad \forall n\geqslant 1.$$

Nous formulons quatre hypothèses sur le domaine $\mathcal{R}$ et sur la forme binaire F.

(H1)	Le domaine $\mathcal{R}$ est un ouvert borné convexe dont la frontière est continuement différentiable.
(H2)	$\forall\mathbf{x}\in\mathcal{R}$, $\|\|\mathbf{x}\|\|\leqslant\sigma$
(H3)	$\forall\mathbf{x}\in\mathcal{R}$, $\|F(\mathbf{x})\|\leqslant\vartheta^3$.
(H4)	La forme F est irréductible sur $\mathbb{K}$

pour certaines valeurs $\sigma>0$ et $\vartheta>0$.

Théorème 2.1.6. *Soient $\mathbb{K}$ une extension cyclique de $\mathbb{Q}$ de degré 3, $\varepsilon>0$, $\sigma>0$, $\xi>0$, F une forme binaire de degré 3 et $\mathcal{R}$ un domaine de $\mathbb{R}^2$ tels que les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4) soient vérifiées. Sous les conditions*

$$1/\sqrt{\xi}\leqslant\sigma\leqslant\xi^{3/2}, \quad 1/\sqrt{\xi}\leqslant\vartheta\leqslant\xi^{3/2},$$

nous avons

$$Q(F,\xi,\mathcal{R}) = K(F)\mathrm{vol}(\mathcal{R})\xi^2 + O\Big(\frac{||F||^{\varepsilon}(\sigma^2+\vartheta^2)\xi^2}{(\log\xi)^{0,0034}}\Big). \tag{2.23}$$

où $||F||$ désigne le maximum des coefficients de la forme F et $K(F)$ est une constante explicite possédant une interprétation géométrique.

2.2 Lemmes préliminaires

2.2.1 Majorer une norme infinie par une norme L^q

La démonstration du Théorème 2.1.1 suit la méthode différentielle de [5]. Les lemmes préliminaires que nous énonçons ici sont analogues à ceux de notre article de référence. Cependant, comme il s'agit ici essentiellement d'une généralisation à deux variables de ces lemmes, plusieurs difficultés apparaissent, nous rédigeons donc en détails les démonstrations.

Avant d'énoncer le premier lemme, quelques notations sont nécessaires.

Lorsque $n \geqslant 1$, nous posons

$$E(n) := \min_{\substack{dd'|n \\ d<d'}} \log \frac{d'}{d}, \qquad E^*(n) := \min\big(1, E(n)\big). \tag{2.24}$$

Pour $n \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, $\mathbf{f}$ un couple de deux fonctions arithmétiques, nous posons

$$M_{2q}(n, \mathbf{f}) := \int_{[0,1]^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\Delta_3(n, \mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{v})|^{2q} \mathrm{d}\mathbf{u}\mathrm{d}\mathbf{v}. \tag{2.25}$$

Pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, nous notons

$$||\mathbf{x}||_\infty = \max(|x_1|, |x_2|).$$

Lorsque χ est un caractère de Dirichlet, nous notons

$$\Delta^*(n, \chi) := \max_{d|n} \big(\Delta(d, \chi)\big). \tag{2.26}$$

où $\Delta(n, \chi)$ est défini en (2.5).

***Lemme* 2.2.1.** *Pour $n \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, $\boldsymbol{\chi}$ défini en* (2.11)*, un couple de deux caractères de Dirichlet, nous avons*

$$\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi})^2 \leqslant 4E^*(n)^{-4/q} M_{2q}(n, \boldsymbol{\chi})^{1/q} + 128\big(\Delta^*(n, \chi_1)^2 + \Delta^*(n, \chi_2)^2\big). \tag{2.27}$$

Les deuxième et troisième membres qui apparaissent dans ce majorant ne peuvent être trivialement traités par le théorème 1.1 de [5] puisque le maximum sur les diviseurs de n n'est pas forcément atteint en n, contrairement au cas où $\chi_1 = \chi_2 = 1$. Il nécessite donc une résolution particulière que nous développons dans la sous-section 4.1. Cet aspect constitue une des innovations de ce travail.

Remarque 2.2.2. Il est intéressant de constater que ces fonctions Δ^* apparaissent comme des minorants de la fonction Δ_3 associée à deux caractères. En effet, dans le cas où $(n, q_2) = 1$, q_2 désignant le conducteur de χ_2, nous avons

$$\Delta(n, \chi_1, \chi_2) \geqslant \max_{\substack{u_1 \in \mathbb{R} \\ v_1 \in [0,1]}} \sup_{\substack{d_2|n \\ u_2 = \log d_2 \\ v_2 \to 0}} |\Delta(n, \chi_1, \chi_2, u_1, u_2, v_1, v_2)| = \Delta^*(n, \chi_1).$$

La connaissance d'une minoration de l'ordre moyen des fonctions Δ^* nous permettrait d'obtenir plus d'informations sur l'ordre moyen de la fonction Δ_3 associée à deux caractères.

En considérant que pour un entier n sans facteur carré, et un caractère χ d'ordre r, nous avons

$$\Delta^*(n,\chi) \geqslant \Delta(n',\chi)$$

où

$$n' = \prod_{\substack{p|n \\ |1+\chi(p)|\geqslant 1}} p$$

nous pouvons montrer que

$$\sum_{y^{\omega(n)}\Delta^*(n,\chi)^2} \gg x(\log x)^{\kappa(r)y-3},$$

où $\kappa(r)$ est défini par la suite en (2.48). En comparant ce résultat avec ceux obtenus par La Bretèche et Tenenbaum pour une minoration de l'ordre moyen de $\Delta(n,\chi)^2$, nous pouvons observer que ce résultat est non trivial dès que $y > \frac{1}{\kappa(r)-2}$. Néanmoins, il ne fournit aucune amélioration par rapport au Théorème 2.1.4.

Démonstration. Si $\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi}) \leqslant 8(\Delta^*(n,\chi_1)+\Delta^*(n,\chi_2))$, le résultat est évident.
Sinon, nous notons $\mathbf{u_0}$ et $\mathbf{v_0}$ les réels tels que

$$\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi}) = |\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},\mathbf{u_0},\mathbf{v_0})|$$

avec $\mathbf{u_0} = (u_{01},u_{02})$ et $\mathbf{v_0} = (v_{01},v_{02})$. Pour tout $\mathbf{u} = (u_1,u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1,v_2)$ tels que

$$||\mathbf{u}+\mathbf{v}-\mathbf{u_0}-\mathbf{v_0}||_\infty \leqslant E^*(n),$$

nous avons

$$\begin{aligned}
\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \sum_{\substack{\log(d)\in]u_1,u_1+v_1] \\ d|n}} \chi_1(d)\Delta\Big(\frac{n}{d},\chi_2,u_2,v_2\Big) \\
&= \sum_{\substack{\log(d)\in]u_{01},u_{01}+v_{01}] \\ d|n}} \chi_1(d)\Delta\Big(\frac{n}{d},\chi_2,u_2,v_2\Big) \\
&\quad + \sum_{\substack{\log(d)\in]u_1,u_1+v_1] \\ \log(d)\notin]u_{01},u_{01}+v_{01}] \\ d|n}} \chi_1(d)\Delta\Big(\frac{n}{d},\chi_2,u_2,v_2\Big) \\
&\quad - \sum_{\substack{\log(d)\in]u_{01},u_{01}+v_{01}] \\ \log(d)\notin]u_1,u_1+v_1] \\ d|n}} \chi_1(d)\Delta\Big(\frac{n}{d},\chi_2,u_2,v_2\Big).
\end{aligned}$$

Les deux dernières sommes comportent au plus deux termes, elles sont donc majorées en valeur absolue par $2\Delta^*(n,\chi_2)$. Nous pouvons alors effectuer le même travail avec la première somme, ce qui nous permet de retrouver $\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},\mathbf{u_0},\mathbf{v_0})$ et un reste qui ne dépassera pas $2\Delta^*(n,\chi_1)$. Ainsi, pour tout $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ tels que $||\mathbf{u}+\mathbf{v}-\mathbf{u_0}-\mathbf{v_0}||_\infty \leqslant E^*(n)$, nous avons

$$|\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},\mathbf{u},\mathbf{v})| \geqslant \Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},\mathbf{u_0},\mathbf{v_0}) - 4(\Delta^*(n,\chi_1)+\Delta^*(n,\chi_2)).$$

Puisque $\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},\mathbf{u_0},\mathbf{v_0}) \geqslant 8(\Delta^*(n,\chi_1)+\Delta^*(n,\chi_2))$, nous avons

$$|\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},\mathbf{u},\mathbf{v})| \geqslant \frac{1}{2}\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi}).$$

En élevant cette inégalité à la puissance $2q$, en intégrant cette relation sur l'ensemble de mesure $E^*(n)^4$ sur lequel cette inégalité est valable, puis en prenant la racine q-ième, nous obtenons le résultat annoncé. □

Pour la suite, lorsque χ est un caractère de Dirichlet, nous notons

$$M_{2q}^{\dagger}(n,\chi) := \sum_{d|n} M_{2q}(d,\chi) \tag{2.28}$$

avec

$$M_{2q}(n,\chi) := \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} |\Delta(n,\chi,u,v)|^{2q} \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{2.29}$$

***Lemme* 2.2.3.** *Pour $n \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, χ un caractère de Dirichlet, nous avons*

$$\Delta^*(n,\chi)^2 \leqslant 4E^*(n)^{-2/q} M_{2q}^{\dagger}(n,\chi)^{1/q} + 4\tau(n)^{1/q}. \tag{2.30}$$

Démonstration. Observons tout d'abord que pour tout n et pour tout χ, nous avons

$$\Delta^*(n,\chi)^2 \leqslant \Big(\sum_{d|n} \Delta(d,\chi)^{2q}\Big)^{1/q}.$$

Nous utilisons ensuite le lemme 2.1 de [5] sous la forme suivante

$$\Delta(d,\chi)^{2q} \leqslant 4^q E^*(d)^{-2} M_{2q}(d,\chi) + 4^q$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}\Delta^*(n,\chi)^2 &\leqslant \Big(\sum_{d|n} 4^q E^*(d)^{-2} M_{2q}(d,\chi) + 4^q\Big)^{1/q} \\ &\leqslant \Big(\sum_{d|n} 4^q E^*(n)^{-2} M_{2q}(d,\chi) + 4^q \tau(n)\Big)^{1/q}.\end{aligned}$$

Pour conclure, nous utilisons l'inégalité suivante valable pour tout $x, y \geqslant 0$ et $q \geqslant 1$

$$(x+y)^{1/q} \leqslant x^{1/q} + y^{1/q}.$$

□

Pour les besoins du prochain lemme, nous notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, χ un caractère de Dirichlet et $\vartheta \in \mathbb{R}$,

$$\tau(n,\chi,\vartheta) := \sum_{d|n} \chi(d) d^{i\vartheta}. \tag{2.31}$$

Pour $\boldsymbol{\chi}$ un couple de caractères de Dirichlet, $q \in \mathbb{N}$ et $j \leqslant q$, nous notons

$$M_{2q}^{(j)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta) := \int_{[0,1]^2} \int_{\mathbb{R}} |\Delta^{(j)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u,v_1,v_2)|^{2q} \mathrm{d}u\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2, \tag{2.32}$$

où les quantités $\Delta^{(j)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u,v_1,v_2)$ sont définies en (2.22). Enfin, pour $k \in \mathbb{N}$, nous posons

$$E_k(n) := \min\Big(\frac{\log(3/2)}{k+1}, E(n)\Big).$$

***Lemme* 2.2.4.** *Pour $k \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, $\boldsymbol{\chi}$ un couple de caractères de Dirichlet et $\vartheta \in \mathbb{R}$, nous avons*

$$\Delta^{(k)}(n, \boldsymbol{\chi}, \vartheta)^2 \leqslant 16 E_k(n)^{-3/q} \sum_{j \leqslant k} M_{2q}^{(j)}(n, \boldsymbol{\chi}, \vartheta)^{1/q} + 256\, \mathrm{e}^2 \max_{d|n} \left(|\tau(d, \chi_2, \vartheta)|^2\right).$$

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous notons j_k un entier $j \leqslant k$ tel que

$$\Delta^{(j_k)}(n, \boldsymbol{\chi}, \vartheta) := \max_{j \leqslant k} \Delta^{(j)}(n, \boldsymbol{\chi}, \vartheta).$$

Si $\Delta^{(j_k)}(n, \boldsymbol{\chi}, \vartheta) \leqslant 16\, \mathrm{e} \max_{d|n} \left(|\tau(d, \chi_2, \vartheta)|^2\right)$, le résultat est évident.
Sinon, nous notons u_0, v_{01} et v_{02} les réels tels que

$$\Delta^{(j_k)}(n, \boldsymbol{\chi}, \vartheta) = |\Delta^{(j_k)}(n, \boldsymbol{\chi}, \vartheta, u_0, v_{01}, v_{02})|.$$

Pour tout u, v_1, v_2 tels que

$$|u - u_0| + |v_1 - v_{01}| + |v_2 - v_{02}| \leqslant E_k(n),$$

nous avons

$$\begin{aligned}
\Delta^{(j_k)}(n, \boldsymbol{\chi}, \vartheta, u, v_1, v_2) = & \sum_{\substack{\log(d) \in]u, u+v_1] \\ d|n}} \chi_1(d) \tau\Big(\frac{n}{d}, \chi_2, \vartheta\Big)(u + v_1 - v_2 - \log d)^{j_k} \\
= & \sum_{\substack{\log(d) \in]u_0, u_0+v_{01}] \\ d|n}} \chi_1(d) \tau\Big(\frac{n}{d}, \chi_2, \vartheta\Big)(u + v_1 - v_2 - \log d)^{j_k} \\
& + \sum_{\substack{\log(d) \in]u, u+v_1] \\ \log(d) \notin]u_0, u_0+v_{01}] \\ d|n}} \chi_1(d) \tau\Big(\frac{n}{d}, \chi_2, \vartheta\Big)(u + v_1 - v_2 - \log d)^{j_k} \\
& - \sum_{\substack{\log(d) \in]u_0, u_0+v_{01}] \\ \log(d) \notin]u, u+v_1] \\ d|n}} \chi_1(d) \tau\Big(\frac{n}{d}, \chi_2, \vartheta\Big)(u + v_1 - v_2 - \log d)^{j_k}.
\end{aligned}$$

Les deux dernières sommes comportent au plus deux termes. Par ailleurs, nous avons, pour tout $\log(d) \in]u_0, u_0 + v_{01}] \cup]u, u + v_1]$

$$(u + v_1 - v_2 - \log d)^{j_k} \leqslant (1 + \frac{1}{k+1})^{j_k} \leqslant \mathrm{e}\,.$$

Ainsi, ces deux sommes sont majorées par

$$2\, \mathrm{e} \max_{d|n} \left(|\tau(d, \chi_2, \vartheta)|\right).$$

Pour la première somme, nous écrivons

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\log(d)\in]u_0,u_0+v_{01}]\\ d|n}} \chi_1(d)\tau\Big(\frac{n}{d},\chi_2,\vartheta\Big)(u+v_1-v_2-\log d)^{j_k}\\
&=\sum_{\substack{\log(d)\in]u_0,u_0+v_{01}]\\ d|n}} \chi_1(d)\tau\Big(\frac{n}{d},\chi_2,\vartheta\Big)\big(u_0+v_{01}-v_{02}-\log d+(u-u_0+v_1-v_{01}+v_{02}-v_2)\big)^{j_k}\\
&=\sum_{j\leqslant j_k}\binom{j_k}{j}(u-u_0+v_1-v_{01}+v_{02}-v_2)^{j_k-j}\\
&\qquad\sum_{\substack{\log(d)\in]u_0,u_0+v_0]\\ d|n}} \chi_1(d)\tau\Big(\frac{n}{d},\chi_2,\vartheta\Big)(u_0+v_{01}-v_{02}-\log d)^{j}.
\end{aligned}$$

Nous avons ainsi

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{\substack{\log(d)\in]u_0,u_0+v_{01}]\\ d|n}} \chi_1(d)\tau\Big(\frac{n}{d},\chi_2,\vartheta_2\Big)(u+v_1-v_2-\log d)^{j_k}\Big|\\
&\geqslant\Delta^{(j_k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta)-\big((1+|u-u_0+v_1-v_{01}+v_{02}-v_2|)^{j_k}-1\big)\Delta^{(j_k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta).
\end{aligned}$$

Par hypothèse, nous avons

$$\big((1+|u-u_0+v_1-v_{01}+v_{02}-v_2|)^{j_k}-1\big)\leqslant\frac{1}{2},$$

ce qui fournit

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{\substack{\log(d)\in]u_0,u_0+v_{01}]\\ d|n}} \chi_1(d)\tau\Big(\frac{n}{d},\chi_2,\vartheta_2\Big)(u+v_1-v_2-\log d)^{j_k}\Big|\\
&\geqslant\frac{1}{2}\Delta^{(j_k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta).
\end{aligned}$$

Puisque $\Delta^{(j_k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta)\geqslant 16\,\mathrm{e}\max_{d|n}|\tau(d,\boldsymbol{\chi},\vartheta)|$, nous avons

$$|\Delta^{(j_k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u,v_1,v_2)|\geqslant\frac{1}{4}\Delta^{(j_k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta).$$

En élevant cette inégalité à la puissance $2q$, en intégrant cette relation sur l'ensemble de mesure $E_k(n)^3$ sur lequel cette inégalité est valable, puis en prenant la racine q-ième, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Delta^{(j_k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta)^2&\leqslant 16E_k(n)^{-3/q}M_{2q}^{(j_k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta)^{1/q}+64\,\mathrm{e}^2\max_{d|n}\big(|\tau(d,\chi_2,\vartheta)|^2\big)\\
&\leqslant 16E_k(n)^{-3/q}\sum_{j\leqslant k}M_{2q}^{(j)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta)^{1/q}+64\,\mathrm{e}^2\max_{d|n}\big(|\tau(d,\chi_2,\vartheta)|^2\big).
\end{aligned}$$

L'inégalité $\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta)\leqslant\Delta^{(j_k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta)$, provenant du choix de j_k, nous permet de conclure. □

2.2.2 Un théorème de Shiu et une formule de Parseval

Le lemme suivant est une adaptation du lemme 2.2 de [5] qui nous permet de négliger la contribution des entiers n pour lesquels le facteur $E(n)$, défini en (2.24), est trop petit.

***Lemme* 2.2.5.** *Soient A, c des constantes strictement positives, $\eta \in]0,1[$, g une fonction de $\mathcal{M}_A(c,\eta)$ et $Y \geqslant 27y$ où $y = y(g) > 0$. Nous avons uniformément en $\sigma > 0$*

$$\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ E(n)\leqslant \sigma^Y}} \frac{\mu^2(n)g(n)\tau_3(n)^2}{n^{1+\sigma}} \ll 1. \tag{2.33}$$

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 2.2 de [5]. Nous supposons ici que $\sigma \leqslant \sigma_y$ où σ_y est une constantes strictement positive dont nous discuterons par la suite. Le cas complémentaire étant trivial. Pour un tel choix de Y, dire qu'un entier n vérifie l'inégalité

$$E(n) \leqslant \sigma^Y$$

implique qu'il possède deux diviseurs premiers entre eux d_1, d_2 vérifiant $d_1 < d_2 \leqslant \mathrm{e}^{\sigma^Y} d_1$. Ainsi, nous avons

$$\sigma^Y \leqslant \log \frac{d_2}{d_1} = \log\Big(1 + \frac{d_2 - d_1}{d_1}\Big) \leqslant \frac{d_2 - d_1}{d_1}.$$

Ce qui implique

$$d_1 \geqslant \sigma^{-Y}.$$

Par ailleurs, il existe une constante $\sigma_y > 0$ pour laquelle, pour tout $\sigma \leqslant \sigma_y$, l'inégalité suivante est vérifiée

$$\mathrm{e}^{\sigma^Y} \leqslant 1 + \sigma^{Y-y}.$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ E(n)\leqslant \sigma^Y}} \frac{\mu^2(n)g(n)\tau_3(n)^2}{n^{1+\sigma}} &\leqslant \sum_{\substack{m,d_1,d_2\\ \frac{1}{\sigma^Y}\leqslant d_1<d_2\leqslant(1+\sigma^{Y-y})d_1\\ (d_1,d_2)=1}} \frac{\tau_3(m)^2\tau_3(d_1)^2\tau_3(d_2)^2}{(md_1d_2)^{1+\sigma}} g(m)g(d_1)g(d_2)\\ &\ll \frac{1}{\sigma^{9y}} \sum_{\frac{1}{\sigma^Y}\leqslant d_1} \frac{g(d_1)\tau_3(d_1)^2}{d_1^{2+\sigma}} \sum_{\substack{d_1<d_2\leqslant(1+\sigma^{Y-y})d_1\\ (d_1,d_2)=1}} g(d_2)\tau_3(d_2)^2.\end{aligned}$$

Un théorème de Shiu [31] nous permet de majorer la somme intérieure, ce qui fournit l'inégalité

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ E(n)\leqslant \sigma^Y}} \frac{\mu^2(n)g(n)\tau_3(n)^2}{n^{1+\sigma}} &\ll \sigma^{Y-10y} \sum_d \frac{g(d)\tau_3(d)^2}{d^{1+\sigma}} \log(d)^{8y}\\ &\ll \sigma^{Y-27y}\\ &\ll 1.\end{aligned}$$

□

Pour $\boldsymbol{\chi} = (\chi_1, \chi_2)$ un couple de caractères de Dirichlet, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\vartheta_1, \vartheta_2) \in \mathbb{R}^2$, nous posons

$$\tau(n, \boldsymbol{\chi}, \vartheta_1, \vartheta_2) := \sum_{d_1d_2|n} \chi_1(d_1)d_1^{i\vartheta_1}\chi_2(d_2)d_2^{i\vartheta_2}, \tag{2.34}$$

et pour $\vartheta \in \mathbb{R}$, nous posons

$$\widehat{\tau}_1(n, \boldsymbol{\chi}, \vartheta) := \int_{\mathbb{R}^2} \left|\tau(n, \boldsymbol{\chi}, \vartheta_1, \vartheta)\right|^2 \frac{\mathrm{d}\vartheta_1}{1+\vartheta_1^2}. \tag{2.35}$$

***Lemme* 2.2.6.** *Soient χ_1 et χ_2 deux caractères de Dirichlet et $n \geqslant 1$ un entier. Nous avons, uniformément pour $k \in \mathbb{N}$ et $v_1, v_2 \in [0,1]^2$*

$$\int_{\mathbb{R}} |\Delta^{(k)}(n, \boldsymbol{\chi}, \vartheta, u, v_1, v_2)|^2 \mathrm{d}u \ll (k+1)^2 \widehat{\tau}_1(n, \boldsymbol{\chi}, \vartheta)$$

où $\Delta^{(k)}(n, \boldsymbol{\chi}, \vartheta, u, v_1, v_2)$ est défini en (2.22).

Démonstration. Posons

$$f : u \mapsto \Delta^{(k)}(n, \boldsymbol{\chi}, \vartheta, u, v_1, v_2).$$

Il s'agit d'une somme de fonctions portes, nous pouvons donc calculer sa transformée de Fourier, notée $\widehat{f}$.

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\vartheta_1) &= \int_{\mathbb{R}} f(u)\, \mathrm{e}^{-iu\vartheta_1}\, \mathrm{d}u \\
&= \sum_{d_1 d_2 | (n)} \chi_1(d_1)\chi_2(d_2) d_2^{i\vartheta} \int_{\log d_1 - v_1}^{\log d_1} (u + v_1 - v_2 - \log d_1)^k\, \mathrm{e}^{-iu\vartheta_1}\, \mathrm{d}u \\
&= \sum_{d_1 d_2 | (n)} \chi_1(d_1)\chi_2(d_2) d_2^{i\vartheta} d_1^{-i\vartheta_1} \int_{-v_1}^{0} (u + v_1 - v_2)^k\, \mathrm{e}^{-iu\vartheta_1}\, \mathrm{d}u \\
&= \tau(n, \boldsymbol{\chi}, \vartheta, -\vartheta_2) \int_{-v_1}^{0} (u + v_1 - v_2)^k\, \mathrm{e}^{-iu\vartheta_1}\, \mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $v_1, v_2 \in [0,1]^2$ et $k \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\Big| \int_{-v_1}^{0} (u + v_1 - v_2)^k\, \mathrm{e}^{-iu\vartheta_1}\, \mathrm{d}u \Big| \leqslant \min\Big(1, \frac{k+2}{|\vartheta|}\Big).$$

L'inégalité

$$\Big| \int_{-v_1}^{0} (u + v_1 - v_2)^k\, \mathrm{e}^{-iu\vartheta_1}\, \mathrm{d}u \Big| \leqslant 1$$

est triviale puisqu'on intègre sur un intervalle de taille plus petite que 1 une fonction majorée par 1 en valeur absolue. L'inégalité

$$\Big| \int_{-v_1}^{0} (u + v_1 - v_2)^k\, \mathrm{e}^{-iu\vartheta_1}\, \mathrm{d}u \Big| \leqslant \frac{k+2}{|\vartheta|}$$

est fournie par une intégration par partie. La formule de Parseval nous permet de conclure. □

2.2.3 Des inégalités de Hölder

Avant d'établir le prochain lemme, quelques notations sont nécessaires.
Pour $n \geqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant q$ des entiers, $w \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{\chi}$ défini en (2.11), un couple de caractères de Dirichlet, nous posons

$$N_{1,j,q}(n, \boldsymbol{\chi}, w) := \int_{[0,1]^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})^{2j} \Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, u_1 - w, u_2, \mathbf{v})^{2(q-j)} \mathrm{d}\mathbf{u}\mathrm{d}\mathbf{v}, \tag{2.36}$$

et

$$N_{2,j,q}(n,\boldsymbol{\chi},w) := \int_{[0,1]^2}\int_{\mathbb{R}^2} \Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},\mathbf{u},\mathbf{v})^{2j}\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},u_1-w,u_2+w,\mathbf{v})^{2(q-j)}\mathrm{d}\mathbf{u}\mathrm{d}\mathbf{v}. \quad (2.37)$$

De plus, nous posons

$$\widehat{\tau}_2(n,\boldsymbol{\chi}) := \int_{\mathbb{R}^2} |\tau(n,\boldsymbol{\chi},\boldsymbol{\vartheta})|^2 \prod_{i=1}^{2} \frac{1}{1+\vartheta_i^2}\mathrm{d}\boldsymbol{\vartheta}, \quad (2.38)$$

où $\tau(n,\boldsymbol{\chi},\boldsymbol{\vartheta})$ est défini en (2.34).

Lemme 2.2.7. *Soient A, c des constantes strictement positives, $\eta \in]0,1[$ et $\boldsymbol{\chi}$ un couple de caractères de Dirichlet. Pour toute fonction g de $\mathcal{M}_A(c,\eta)$, $q \geqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant q-1$, $n \geqslant 1$ et $x \geqslant 2$, nous avons*

$$\sum_{p>x} \frac{g(p)\log p}{p} N_{1,j,q}(n,\boldsymbol{\chi},\log p) \ll M_{2q}(n,\boldsymbol{\chi})^{(q-2)/(q-1)} C(n,\boldsymbol{\chi})\widehat{\tau}_2(n,\boldsymbol{\chi})^{1/(q-1)} + R_{2,q}(n,x),$$

où $C(n,\boldsymbol{\chi})$ est défini en (2.18),

$$R_{2,q}(n,x) \ll \mathrm{e}^{-c(\log x)^\eta}\, 4^q M_{2q}(n)^{(2q-2)/(2q-1)} \tau_3(n)^{2q/(2q-1)}$$

et

$$M_h(n) := \int_{\mathbb{R}^2} \Delta_3(n,\mathbf{u})^h \mathrm{d}\mathbf{u},$$

avec $\Delta_3(n,\mathbf{u})$ défini en (2.4).
De plus, si nous remplaçons $N_{1,j,q}(n,\boldsymbol{\chi},\log p)$ par $N_{2,j,q}(n,\boldsymbol{\chi},\log p)$, alors la majoration reste valable en remplaçant $C(n,\boldsymbol{\chi})$ par $D(n,\boldsymbol{\chi})$, défini en (2.19).

Démonstration. Nous raisonnons uniquement sur la fonction $N_{1,j,q}$, la démonstration pour la fonction $N_{2,j,q}$ étant analogue. Pour tout $n \geqslant 1$, nous avons

$$\sum_{p>x} \frac{g(p)\log p}{p} N_{1,j,q}(n,\boldsymbol{\chi},\log p) = \int_{[0,1]^2}\int_{\mathbb{R}^2} \left|\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},\mathbf{u},\mathbf{v})\right|^{2j} S_{2(q-j)}\mathrm{d}\mathbf{u}\mathrm{d}\mathbf{v},$$

où

$$S_{2h} := \sum_{p>x} \frac{g(p)\log(p)}{p} |\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},u_1-\log(p),u_2,\mathbf{v})|^{2h}.$$

Un développement de la somme définissant Δ_3 fournit l'égalité suivante

$$S_{2h} = \sum_{d_1,\dots,d_{2h}|n} \chi_1(d_1\cdots d_h)\overline{\chi_1(d_{h+1}\cdots d_{2h})} \prod_{i=1}^{h} \Delta\Big(\frac{n}{d_i},\chi_2,u_2,v_2\Big)\overline{\Delta\Big(\frac{n}{d_{h+i}},\chi_2,u_2,v_2\Big)} \sum_{\substack{u_1-\log\min d_r<\log p\leqslant u_1+v_1-\log\max d_r \\ p>x}} \frac{g(p)\log p}{p}.$$

Par sommation d'Abel, la somme intérieure vaut, dans le cas où $\log(\max d_r/\min d_r) \leqslant v_1$

$$y\int_{u_1-\log\min d_r}^{u_1+v_1-\log\max d_r} 1_{[0,1]}\Big(\frac{\log x}{t}\Big)\mathrm{d}t + O\big(\mathrm{e}^{-c(\log x)^\eta}\big)$$

où $y = y(g)$. De plus, elle est nulle si l'inégalité n'est pas respectée. En adaptant le théorème 72 de [17], nous obtenons, pour tout $h \geqslant 1$

$$\sum_{\substack{d_1,\dots,d_h|n \\ \log(\max d_i)-\log(\min d_i)\leqslant v_1}} \prod_{i=1}^{h} \Delta\Big(\frac{n}{d_i}, u_2\Big) \leqslant 2^h M_h(n, u_2),$$

où

$$M_h(n, u_2) = \int_{\mathbb{R}} \Delta_3(n, \mathbf{u})^h \mathrm{d}u_1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_{2h} &= y \int_{\log x}^{+\infty} |\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, u_1 - t, u_2, \mathbf{v})|^{2h} \mathrm{d}t + O\big(2^{2h} M_{2h}(n, u_2)\, \mathrm{e}^{-c(\log x)^\eta}\big) \\ &\leqslant y \int_{\mathbb{R}} |\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, u_1 - t, u_2, \mathbf{v})|^{2h} \mathrm{d}t + O\big(2^{2h} M_{2h}(n, u_2)\, \mathrm{e}^{-c(\log x)^\eta}\big). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} &\sum_{p>x} \frac{g(p)\log p}{p} N_{1,j,q}(n, \log p) \\ &\leqslant y Q_j + O\Big(2^{2(q-j)} \int_{\mathbb{R}} M_{2(q-j)}(n, u_2) M_{2j}(n, u_2) \mathrm{d}u_2\, \mathrm{e}^{-c(\log x)^\eta}\Big), \end{aligned} \tag{2.39}$$

où

$$Q_j := \int_{[0,1]^2} \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}', \mathbf{v})|^{2j} \mathrm{d}u_1' \int_{\mathbb{R}} |\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})|^{2(q-j)} \mathrm{d}u_1 \Big) \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}\mathbf{v},$$

avec $\mathbf{u}' = (u_1', u_2)$. Nous appliquons alors l'inégalité de Hölder avec les exposants $\frac{q-1}{q-j}$ et $\frac{q-1}{j-1}$ à

$$\int_{\mathbb{R}} |\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})|^{2j} \mathrm{d}u_1$$

en écrivant $j = q\frac{j-1}{q-1} + \frac{q-j}{q-1}$ pour obtenir

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} |\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})|^{2j} \mathrm{d}u_1 \\ &\leqslant \Big(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})|^{2q} \mathrm{d}u_1 \Big)^{(j-1)/(q-1)} \Big(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})|^{2} \mathrm{d}u_1 \Big)^{(q-j)/(q-1)}. \end{aligned}$$

En appliquant le même raisonnement en remplaçant j par $q-j$, nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} Q_j &\ll M_{2q}(n, \boldsymbol{\chi})^{(q-2)/(q-1)} \Big(\int_{[0,1]^2} \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})|^2 \mathrm{d}u_1 \Big)^q \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}\mathbf{v} \Big)^{1/(q-1)} \\ &\ll M_{2q}(n, \boldsymbol{\chi})^{(q-2)/(q-1)} C(n, \boldsymbol{\chi}) M_2(n, \boldsymbol{\chi})^{1/(q-1)}. \end{aligned}$$

Une adaptation du lemme 2.3 de [5] fournit

$$M_2(n, \boldsymbol{\chi}) \ll \widehat{\tau}_2(n, \boldsymbol{\chi}).$$

Pour traiter la contribution du terme d'erreur du majorant de (2.39), nous effectuons un raisonnement similaire. Le terme $|\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},\mathbf{u},\mathbf{v})|$ est clairement majoré par $\Delta_3(n,\mathbf{u})$, puis, une inégalité de Hölder avec exposants $\frac{2q-1}{2(q-j)}$ et $\frac{2q-1}{2j-1}$ montre l'inégalité

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}\Delta_3(n,\mathbf{u})^{2j}\mathrm{d}u_1\\ \leqslant&\Big(\int_{\mathbb{R}}\Delta_3(n,\mathbf{u})^{2}\mathrm{d}u_1\Big)^{2(q-j)/(2q-1)}\Big(\int_{\mathbb{R}}\Delta_3(n,\mathbf{u})^{2q}\mathrm{d}u_1\Big)^{(2h-1)/(2q-1)}.\end{aligned}$$

Le même raisonnement en remplaçant j par $q-j$ fournit

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\Delta_3(n,\mathbf{u})^{2j}\mathrm{d}u_1\int_{\mathbb{R}}\Delta_3(n,\mathbf{u})^{2(q-j)}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\\ \leqslant&\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\Delta_3(n,\mathbf{u})^{2q}\mathrm{d}u_1\Big)^{(2q-2)/(2q-1)}\Big(\int_{\mathbb{R}}\Delta_3(n,\mathbf{u})\mathrm{d}u_1\Big)^{2q/(2q-1)}\mathrm{d}u_2\\ \leqslant&M_{2q}(n)^{(2q-2)/(2q-1)}\Big(\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\Delta_3(n,\mathbf{u})\mathrm{d}u_1\Big)^{2q}\mathrm{d}u_2\Big)^{1/(2q-1)}.\end{aligned}$$

Pour conclure, nous utilisons l'estimation

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\Delta_3(n,\mathbf{u})\mathrm{d}u_1\Big)^{2q}\mathrm{d}u_2&=\sum_{d_1,\dots,d_{2q}|n}\prod_{i=1}^{2q}\tau\Big(\frac{n}{d_i}\Big)\max\Big(0,1-\log\Big(\frac{\max(d_i)}{\min(d_i)}\Big)\Big)\\ &\leqslant\sum_{d_1,\dots,d_{2q}|n}\prod_{i=1}^{2q}\tau\Big(\frac{n}{d_i}\Big)\\ &\leqslant\tau_3(n)^{2q}.\end{aligned}$$

□

Pour le prochain lemme, nous notons, lorsque χ est un caractère de Dirichlet non principal,

$$N_{j,q}^{\dagger}(n,\chi,w):=\sum_{d|n}\int_0^1\int_{\mathbb{R}}|\Delta(d,\chi,u,v)|^{2j}|\Delta(d,\chi,u-w,v)|^{2(q-j)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\tag{2.40}$$

et

$$\widehat{\tau}_0(n,\chi):=\Big(\sum_{d|n}\Big(\int_{\mathbb{R}}|\tau(d,\chi,\vartheta)|^2\frac{\mathrm{d}\vartheta}{1+\vartheta^2}\Big)^q\Big)^{1/q},\tag{2.41}$$

où $\tau(n,\chi,\vartheta)$ est défini en (2.31). Enfin, nous définissons

$$M_h^{\dagger}(n):=\sum_{d|n}M_h(d),$$

où

$$M_h(d):=\int_{\mathbb{R}}\Delta(d,u)^h\mathrm{d}u.$$

***Lemme* 2.2.8.** *Soient A, c des constantes strictement positives, $\eta\in]0,1[$ et χ un caractère de Dirichlet non principal. Pour toute fonction g de $\mathcal{M}_A(c,\eta)$, $q\geqslant 1$, $1\leqslant j\leqslant q-1$, $n\geqslant 1$ et $x\geqslant 2$, nous avons*

$$\begin{aligned}\sum_{p>x}\frac{g(p)\log p}{p}N_{j,q}^{\dagger}(n,\chi,\log p)\ll&M_{2q}^{\dagger}(n,\chi)^{(q-2)/(q-1)}\widehat{\tau}_0(n,\chi)^{q/(q-1)}\\ &+R_q^{\dagger}(n,x),\end{aligned}$$

où

$$R_q^\dagger(n,x) \ll \mathrm{e}^{-c(\log x)^\eta}\, 4^q M_{2q}^\dagger(n)^{(2q-2)/(2q-1)} \tau_3(n)^{2q/(2q-1)},$$

$N_{j,q}^\dagger(n,\chi,\log p)$ *est défini en* (2.40) *et* $\widehat{\tau}_0(n,\chi)$ *est défini en* (2.41).

Démonstration. Nous reprenons la démonstration du Lemme 2.2.7. Pour tout $n \geqslant 1$, nous avons

$$\sum_{p>x} \frac{g(p)\log p}{p} N_{j,q}^\dagger(n,\chi,\log p) = \sum_{d|n} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} |\Delta(d,\chi,u,v)|^{2j} S_{2(q-j)}^*(d)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

où

$$S_{2h}^*(d) := \sum_{p>x} \frac{g(p)\log(p)}{p} |\Delta(d,\chi,u-\log(p),v)|^{2h}.$$

Le développement de $S_{2h}^*(d)$ et l'application du théorème des nombres premiers fournissent

$$S_{2h}^*(d) \leqslant y \int_{\mathbb{R}} |\Delta(d,\chi,u-t,v)|^{2h}\mathrm{d}t + O\Big(2^{2h} M_{2h}(d)\, \mathrm{e}^{-c(\log x)^\eta}\Big)$$

où $y = y(g)$.

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned}&\sum_{p>x} \frac{g(p)\log p}{p} N_{j,q}^\dagger(n,\chi,\log p)\\ &\leqslant yQ_j^\dagger + O\Big(2^{2(q-j)} \sum_{d|n} M_{2j}(d) M_{2(q-j)}(d)\, \mathrm{e}^{-c(\log x)^\eta}\Big),\end{aligned}$$

où

$$Q_j^\dagger := \sum_{d|n} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} |\Delta(d,\chi,u,v)|^{2j}\mathrm{d}u \int_{\mathbb{R}} |\Delta(d,\chi,u,v)|^{2(q-j)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Des inégalités de Hölder impliquent

$$\begin{aligned}Q_j^\dagger &\ll \sum_{d|n} M_{2q}(d,\chi)^{(q-2)/(q-1)} \widehat{\tau}(d,\chi)^{q/(q-1)}\\ &\ll M_{2q}^\dagger(n,\chi)^{(q-2)/(q-1)} \widehat{\tau}_0(n,\chi)^{q/(q-1)},\end{aligned}$$

où

$$\widehat{\tau}(n,\chi) = \int_{\mathbb{R}} |\tau(n,\chi,\vartheta)|^2 \frac{\mathrm{d}\vartheta}{1+\vartheta^2}.$$

Le terme d'erreur se traite de manière analogue au Lemme 2.2.7. □

Pour le prochain lemme, nous définissons, pour $k \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, $\boldsymbol{\chi}$ un couple de caractères de Dirichlet, $1 \leqslant j < q$ et $(w,\vartheta) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}&N_{j,q}^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},w,\vartheta)\\ &:= \int_{[0,1]^2} \int_{\mathbb{R}} |\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u,v_1,v_2)|^{2j} |\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u-w,v_1,v_2)|^{2(q-j)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2,\end{aligned} \tag{2.42}$$

où $\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u,v_1,v_2)$ est défini en (2.22). Enfin, nous notons

$$M_h^{(1)}(n,\tau) := \int_{\mathbb{R}} \Delta(n,\tau,u,1)^h \mathrm{d}u \tag{2.43}$$

où $\Delta(n,\tau,u,1)$ est défini en (2.6) et τ est la fonction nombre de diviseurs.

***Lemme* 2.2.9.** *Soient A, c des constantes strictement positives, $\eta \in]0,1[$, $k \in \mathbb{N}$ et $\boldsymbol{\chi}$ un couple de caractères de Dirichlet. Pour toute fonction g de $\mathcal{M}_A(c,\eta)$, $q \geqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant q-1$, $n \geqslant 1$, $\vartheta \in \mathbb{R}$ et $x \geqslant 2$, nous avons*

$$\sum_{p>x} \frac{g(p)\log p}{p} N_{j,q}^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,\log p) \ll (k+1)^{2q/(q-1)} M_{2q}^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta)^{q-2/q-1} \widehat{\tau}_1(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta)^{q/q-1} + R_{k,q}(n,x),$$

où $M_{2q}^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta)$ est défini en (2.32), $\widehat{\tau}_1(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta)$ est défini en (2.35), et

$$R_{k,q}(n,x) \ll (k+1)q\,\mathrm{e}^{-c(\log x)^\eta}\, 4^q M_{2q}^{(1)}(n,\tau)^{(2q-2)/(2q-1)} \tau_3(n)^{2q/(2q-1)}.$$

Démonstration. Pour tout $n \geqslant 1$, nous avons

$$\sum_{p>x} \frac{g(p)\log p}{p} N_{j,q}^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,\log p) = \int_{[0,1]^2}\int_{\mathbb{R}} |\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u,v_1,v_2)|^{2j} S_{2(q-j)}^{(k)} \mathrm{d}u\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2,$$

où

$$S_{2h}^{(k)} := \sum_{p>x} \frac{g(p)\log(p)}{p} |\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u-\log(p),v_1,v_2)|^{2h}.$$

Un développement de la somme définissant $\Delta^{(k)}$ fournit l'égalité suivante

$$S_{2h}^{(k)} = \sum_{d_1,\dots,d_{2h}|n} \chi_1(d_1\cdots d_h)\overline{\chi_1(d_{h+1}\cdots d_{2h})} \prod_{i=1}^{h} \tau\Big(\frac{n}{d_i},\chi_2,\vartheta\Big)\overline{\tau\Big(\frac{n}{d_{h+i}},\chi_2,\vartheta\Big)}$$
$$\sum_{\substack{u-\log\min d_r<\log p\leqslant u+v_1-\log\max d_r\\ p>x}} \frac{g(p)\log p}{p} \prod_{i=1}^{2h} (u+v_1-v_2-\log p-\log d_i)^k.$$

Par sommation d'Abel, la somme intérieure vaut, dans le cas où $\log(\max d_r/\min d_r) \leqslant v_1$

$$y\int_{u_1-\log\min d_r}^{u_1+v_1-\log\max d_r} 1_{[0,1]}\Big(\frac{\log x}{t}\Big) \prod_{i=1}^{2h} (u+v_1-v_2-t-\log d_i)^k \mathrm{d}t + O\big((k+1)h\,\mathrm{e}^{-c(\log x)^\eta}\big)$$

où $y = y(g)$. Le point important étant que tous les termes

$$(u+v_1-v_2-t-\log d_i)^k$$

sont majorés par 1 en valeur absolue dans les intervalles, en t, considérés, ce qui permet d'obtenir le terme d'erreur ci-dessus.
De plus, elle est nulle si l'inégalité n'est pas respectée. En adaptant le théorème 72 de [17], nous obtenons, pour tout $h \geqslant 1$

$$\sum_{\substack{d_1,\dots,d_h|n\\ \log(\max d_i)-\log(\min d_i)\leqslant v_1}} \prod_{i=1}^{h} \tau\Big(\frac{n}{d_i}\Big) \leqslant 2^h M_h^{(1)}(n,\tau),$$

où $M_h^{(1)}(n,\tau)$ est défini en (2.43). Ainsi,

$$\begin{aligned} S_{2h}^{(k)} &= y\int_{\log x}^{+\infty} |\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u-t,v_1,v_2)|^{2h}\mathrm{d}t + O\big((k+1)h2^{2h}M_{2h}^{(1)}(n,\tau)\,\mathrm{e}^{-c(\log x)^\eta}\big)\\ &\leqslant y\int_{\mathbb{R}} |\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u-t,v_1,v_2)|^{2h}\mathrm{d}t + O\big((k+1)h2^{2h}M_{2h}^{(1)}(n,\tau)\,\mathrm{e}^{-c(\log x)^\eta}\big). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned}&\sum_{p>x}\frac{g(p)\log p}{p}N_{j,q}^{(k)}(n,\vartheta,\log p)\\&\leqslant yQ_j+O\Big((k+1)(q-j)2^{2(q-j)}M_{2(q-j)}^{(1)}(n,\tau)M_{2j}^{(1)}(n,\tau)\,\mathrm{e}^{-c(\log x)^{\eta}}\Big),\end{aligned}\tag{2.44}$$

où

$$Q_j:=\int_{[0,1]^2}\Big(\int_{\mathbb{R}}|\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u',v_1,v_2)|^{2j}\mathrm{d}u'\int_{\mathbb{R}}|\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u,v_1,v_2)|^{2(q-j)}\mathrm{d}u\Big)\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2.$$

Nous appliquons alors l'inégalité de Hölder avec les exposants $\frac{q-1}{q-j}$ et $\frac{q-1}{j-1}$ à

$$\big|\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u,v_1,v_2)\big|^{2j}$$

en écrivant $j=q\frac{j-1}{q-1}+\frac{q-j}{q-1}$ pour obtenir

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}|\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u,v_1,v_2)|^{2j}\mathrm{d}u\\&\leqslant\Big(\int_{\mathbb{R}}|\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u,v_1,v_2)|^{2q}\mathrm{d}u\Big)^{(j-1)/(q-1)}\Big(\int_{\mathbb{R}}|\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u,v_1,v_2)|^{2}\mathrm{d}u\Big)^{(q-j)/(q-1)}.\end{aligned}$$

En appliquant le même raisonnement en remplaçant j par $q-j$, nous obtenons finalement

$$Q_j\ll M_{2q}^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta)^{(q-2)/(q-1)}\Big(\int_{[0,1]^2}\Big(\int_{\mathbb{R}}|\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u,v_1,v_2)|^{2}\mathrm{d}u\Big)^{q}\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2\Big)^{1/(q-1)}.$$

Le Lemme 2.2.6 fournit la majoration suivante, uniformément pour $v_1,v_2\in[0,1]^2$.

$$\int_{\mathbb{R}}|\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u,v_1,v_2)|^{2}\mathrm{d}u\ll(k+1)^2\widehat{\tau}_1(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta).$$

Pour traiter la contribution du terme d'erreur du majorant de (2.44), nous appliquons une inégalité de Hölder avec exposants $\frac{2q-1}{2(q-j)}$ et $\frac{2q-1}{2j-1}$ afin d'obtenir

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}\Delta(n,\tau,u)^{2j}\mathrm{d}u\\&\leqslant\Big(\int_{\mathbb{R}}\Delta(n,\tau,u)^{2}\mathrm{d}u\Big)^{2(q-j)/(2q-1)}\Big(\int_{\mathbb{R}}\Delta(n,\tau,u)^{2q}\mathrm{d}u\Big)^{(2j-1)/(2q-1)}.\end{aligned}$$

Le même raisonnement en remplaçant j par $q-j$ fournit

$$\begin{aligned}&M_{2j}^{(1)}(n,\tau)M_{2(q-j)}^{(1)}(n,\tau)\\&\leqslant\Big(\int_{\mathbb{R}}\Delta(n,\tau,u)^{2q}\mathrm{d}u\Big)^{(2q-2)/(2q-1)}\Big(\int_{\mathbb{R}}\Delta(n,\tau,u)\mathrm{d}u\Big)^{2q/(2q-1)}\\&\leqslant M_{2q}^{(1)}(n,\tau)^{(2q-2)/(2q-1)}\tau_3(n)^{2q/(2q-1)}.\end{aligned}$$

□

2.2.4 Estimations de sommes sur les nombres premiers

Les lemmes présentés dans cette sous-section sont des lemmes arithmétiques fondamentaux pour les différentes démonstrations de cet article.

***Lemme* 2.2.10.** *Soient χ un caractère de Dirichlet non principal d'ordre r, A, c des constantes strictement positives et $\eta \in]0,1[$. Pour $T > 1$ et g appartenant à $\mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$, nous avons, uniformément pour $\sigma > 0$, $1 \leqslant q \leqslant \frac{1}{\sigma}$ et $|\vartheta| \leqslant q\sigma$*

$$\sum_{p>T} \max\left(1, |1+\chi(p)p^{i\vartheta}|^2\right) g(p) \frac{\log p}{p^{1+\sigma}} \leqslant \frac{3y}{\sigma} + O(1), \tag{2.45}$$

où $y = y(g)$. Nous avons uniformément pour $q\sigma \leqslant |\vartheta| \leqslant \mathrm{e}^{c(\log T)^\eta}$

$$\sum_{p>T} \max\left(1, |1+\chi(p)p^{i\vartheta}|^2\right) g(p) \frac{\log p}{p^{1+\sigma}} = \frac{(\rho+2)y + O(1/q)}{\sigma}, \tag{2.46}$$

où ρ est défini en (2.9)*, et uniformément pour $|\vartheta| \geqslant \mathrm{e}^{c(\log T)^\eta}$*

$$\sum_{p>T} |1+\chi(p)p^{i\vartheta}|^2 g(p) \frac{\log p}{p^{1+\sigma}} \leqslant \frac{4y}{\sigma} + O(1). \tag{2.47}$$

Démonstration. Lorsque $|\vartheta| \leqslant q\sigma$, nous utilisons l'inégalité suivante

$$\max\left(1, |1+\chi(p)p^{i\vartheta}|^2\right) \leqslant 1 + |1+\chi(p)p^{i\vartheta}|^2,$$

ce qui fournit

$$\sum_{p>T} \max\left(1, |1+\chi(p)p^{i\vartheta}|^2\right) g(p) \frac{\log p}{p^{1+\sigma}} \leqslant \sum_{p>T} \left(3 + \chi(p)p^{i\vartheta} + \overline{\chi(p)}p^{-i\vartheta}\right) g(p) \frac{\log p}{p^{1+\sigma}}.$$

D'après (2.12), nous avons d'une part

$$\sum_{p>T} 3g(p) \frac{\log p}{p^{1+\sigma}} \leqslant \frac{3y}{\sigma} + O(1)$$

et d'autre part, d'après (2.13)

$$\begin{aligned}
\sum_{p>T} \chi(p)p^{i\vartheta} g(p) \frac{\log p}{p^{1+\sigma}} &= \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{\substack{p>T \\ \chi(p)=\zeta^k}} \zeta^k p^{i\vartheta} g(p) \frac{\log p}{p^{1+\sigma}} \\
&= \frac{y}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \zeta^k \Big(\int_{\log T}^{+\infty} \mathrm{e}^{(-\sigma+i\vartheta)u}\, \mathrm{d}u + O\big(|\vartheta|\, \mathrm{e}^{-c(\log T)^\eta}\big) \Big) \\
&= \frac{y}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \zeta^k \frac{T^{-\sigma+i\vartheta}}{\sigma - i\vartheta} + O\big(|\vartheta|\, \mathrm{e}^{-c(\log T)^\eta}\big) \\
&= O\big(|\vartheta|\, \mathrm{e}^{-c(\log T)^\eta}\big)
\end{aligned}$$

ce qui fournit (2.45) puisque $|\vartheta| \leqslant \mathrm{e}^{c(\log T)^\eta}$.

Si $q\sigma \leqslant |\vartheta| \leqslant \mathrm{e}^{c(\log T)^\eta}$, nous observons que la fonction

$$t \mapsto \max\left(1, |1+\mathrm{e}^{it}|^2\right)$$

est périodique, de période 2π, et de moyenne $\rho+2$. Une intégration par partie semblable au lemme III. 4.13 de [32] fournit

$$\sum_{p>T} \max\left(1, |1+\chi(p)p^{i\vartheta}|^2\right) g(p) \frac{\log p}{p^{1+\sigma}} = \frac{(\rho+2)y}{\sigma} + O\Big(\frac{1}{|\vartheta|} + \frac{|\vartheta|+1}{\mathrm{e}^{c(\log T)^\eta}}\Big),$$

ce qui implique (2.46). Dans le dernier cas, nous nous contentons de la majoration triviale

$$|1+\chi(p)p^{i\vartheta}|^2 \leqslant 4.$$

□

Pour $r \geqslant 1$, nous notons

$$\kappa(r) := \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \max\left(1, |1+\zeta^k|^2\right) \tag{2.48}$$

où ζ est défini en (2.14).

***Lemme* 2.2.11.** *Soient χ un caractère de Dirichlet non principal d'ordre r, A, c des constantes strictement positives, $\eta \in]0,1[$ et g appartenant à $\mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$. Nous avons, uniformément pour $x \geqslant 16$ et $0 < |\vartheta| \leqslant 1$,*

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant x} g(p) \frac{\max\left(1, |1+\chi(p)p^{i\vartheta}|^2\right)}{p} = \quad & y\kappa(r) \log\Big(\frac{\log x}{1+|\vartheta|\log x}\Big) \\ & + y(\rho+2)\log\left(1+|\vartheta|\log x\right) + O(1),\end{aligned}$$

où $y = y(g)$, et uniformément pour $|\vartheta| > 1$

$$\sum_{p\leqslant x} g(p) \frac{\max\left(1, |1+\chi(p)p^{i\vartheta}|^2\right)}{p} \leqslant y(\rho+2)\log\left(1+|\vartheta|\log x\right) + B\log_2(2+|\vartheta|),$$

où ρ est défini en (2.9).

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 2.5 de [5]. La fonction

$$t \mapsto \max\left(1, |1+\mathrm{e}^{it}|^2\right)$$

est périodique, de moyenne $\rho+2$. Ainsi, si nous nous donnons un paramètre $w \leqslant x$, une intégration par partie semblable à celle du lemme III. 4.13 de [32] fournit

$$\sum_{w<p\leqslant x} \frac{g(p)\max\left(1, |1+\chi(p)p^{i\vartheta}|^2\right)}{p} = y(\rho+2)\log\Big(\frac{\log x}{\log w}\Big) + O\Big(\frac{1}{|\vartheta|\log w} + \frac{1+|\vartheta|}{\mathrm{e}^{c(\log w)^\eta}}\Big).$$

Pour les entiers $p \leqslant w$, nous nous contentons d'approcher $p^{i\vartheta}$ par 1. L'erreur que nous commettons est alors $O(|\vartheta|\log w)$. Ainsi

$$\sum_{p\leqslant w} g(p) \frac{\max\left(1, |1+\chi(p)p^{i\vartheta}|^2\right)}{p} = y\kappa(r)\log_2(w) + O(1+|\vartheta|\log w).$$

Il s'agit désormais de choisir le paramètre w afin d'obtenir les formules souhaitées. Ainsi, pour $|\vartheta| \leqslant \frac{1}{\log x}$, nous choisissons $w = x$.

Pour $1/\log x \leqslant |\vartheta| \leqslant 1$, nous choisissons $w = \exp\left(\frac{\log x}{1+|\vartheta|\log x}\right)$.

Pour $1 \leqslant |\vartheta| \leqslant \exp\left(c(\log x)^\eta\right) - 2$, nous choisissons $w = \exp\left((2/c)(\log(2+|\vartheta|))^{1/\eta}\right)$.

Dans le dernier cas, nous nous contentons d'observer que la somme à majorer est $\ll \log_2(x) \ll \log_2(2+|\vartheta|)$. □

***Lemme* 2.2.12.** *Soient χ un caractère de Dirichlet d'ordre $r > 1$ A, c des constantes strictement positives, $\eta \in]0,1[$ et g appartenant à $\mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$. Nous avons uniformément pour $x \geqslant 16$ et $|\vartheta| \leqslant 1$*

$$\sum_{p \leqslant x} g(p) \frac{\chi(p)}{p} p^{i\vartheta} = O(1)$$

et uniformément pour $|\vartheta| > 1$

$$\sum_{p \leqslant x} g(p) \frac{\chi(p)}{p} p^{i\vartheta} \leqslant B \log_2(2 + |\vartheta|).$$

Démonstration. Notant ζ le complexe défini en (2.14), nous avons

$$\sum_{p \leqslant x} g(p) \frac{\chi(p)}{p} p^{i\vartheta} = \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{\substack{p \leqslant x \\ \chi(p) = \zeta^k}} g(p) \frac{\zeta^k}{p} p^{i\vartheta}.$$

La suite de la démonstration est identique à celle du lemme 2.5 de [5], nous introduisons un paramètre w, choisi convenablement par la suite. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{it}$ est périodique de période nulle, donc le lemme III.4.13 de [32] permet d'écrire

$$\sum_{\substack{w < p \leqslant x \\ \chi(p) = \zeta^k}} \frac{g(p)}{p} p^{i\vartheta} = O\Big(\frac{1}{|\vartheta| \log w} + \frac{1 + |\vartheta|}{\mathrm{e}^{c(\log w)^\eta}} \Big).$$

Par ailleurs, pour $p \leqslant w$, nous approchons $p^{i\vartheta}$ par 1, l'erreur que nous commettons étant $O(|\vartheta| \log w)$. Nous renvoyons à la démonstration du Lemme 2.2.11 pour savoir comment choisir w afin que les différents termes d'erreur soient dominés par 1 lorsque $|\vartheta| \leqslant 1$ et dominés par $\log_2(2+|\vartheta|)$ lorsque $|\vartheta| > 1$. Nous concluons en remarquant que $\sum_{k=0}^{r-1} \zeta^k = 0$. □

***Lemme* 2.2.13.** *Soit $\boldsymbol{\chi}$ un couple de deux caractères de Dirichlet non principaux tels que $\chi_1 \overline{\chi_2}$ ne soit pas principal. Soient A, c des constantes strictement positives, $\eta \in]0,1[$ et g appartenant à $\mathcal{M}_A(\boldsymbol{\chi}, c, \eta)$. Pour $x \geqslant 16$ et uniformément pour $(\vartheta_1, \vartheta_2) \in \mathbb{R}^2$, nous avons*

$$\begin{aligned} &\sum_{p \leqslant x} g(p) \frac{|1 + \chi_1(p) p^{i\vartheta_1} + \chi_2(p) p^{i\vartheta_2}|^2}{p} \\ &\quad \leqslant 3y \log_2(x) \\ &\qquad + B\big(\log_2(2 + |\vartheta_1|) 1_{]1,+\infty[}(|\vartheta_1|) + \log_2(2 + |\vartheta_2|) 1_{]1,+\infty[}(|\vartheta_2|) \big) + O(1), \end{aligned}$$

où $y = y(g)$.

Démonstration. Un développement du carré du module fournit

$$\begin{aligned} |1 + \chi_1(p) p^{i\vartheta_1} + \chi_2(p) p^{i\vartheta_2}|^2 = &3 + \chi_1(p) p^{i\vartheta_1} + \overline{\chi_1(p)} p^{-i\vartheta_1} \\ &+ \chi_2(p) p^{i\vartheta_2} + \overline{\chi_2(p)} p^{-i\vartheta_2} \\ &+ \chi_1(p) \overline{\chi_2(p)} p^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2)} + \chi_2(p) \overline{\chi_1(p)} p^{i(\vartheta_2 - \vartheta_1)}. \end{aligned}$$

Nous étudions alors les sommes sur p de chacun de ces termes séparément, en utilisant le Lemme 2.2.12 pour obtenir le résultat énoncé. □

2.2.5 Lemmes fondamentaux

Le terme $\kappa(r)$ défini en (2.48) peut facilement être majoré par 3, ce majorant est suffisant pour la suite, néanmoins, nous pouvons l'améliorer, au moyen de la proposition suivante.

***Lemme* 2.2.14.** *Pour tout entier $r \geqslant 2$, nous avons*

$$\kappa(r) \leqslant \frac{5}{2},$$

où $\kappa(r)$ est défini en (2.48)*. Cette inégalité est une égalité lorsque $r = 2$.*

Démonstration. Nous notons $A_r = \{z \in \mathbb{U}_r \ : \ |1+z| < 1\}$ où $\mathbb{U}_r$ désigne l'ensemble des racines r-ièmes de l'unité. Ainsi

$$\begin{aligned}\kappa(r) &= \frac{1}{r}\Big(\sum_{z\notin A_r} |1+z|^2 + \sum_{z\in A_r} 1\Big)\\ &= \frac{1}{r}\Big(\sum_{z\in \mathbb{U}_r} |1+z|^2 + \sum_{z\in A_r} (1-|1+z|^2)\Big)\\ &= 2 + \frac{1}{r}\sum_{z\in A_r}(1-|1+z|^2).\end{aligned}$$

Si A_r est non vide, nous pouvons choisir $z \in A_r$, alors arg(z) $\in]2\pi/3, 4\pi/3[$, ainsi, pour tout $z' \in A_r$, arg(zz') $\in]4\pi/3, 8\pi/3[$, donc $zz' \notin A_r$, nous avons donc une injection de A_r dans $\mathbb{U}_r \smallsetminus A_r$, ce qui montre que $|A_r| \leqslant \frac{r}{2}$. Ainsi

$$\kappa(r) \leqslant \frac{5}{2}.$$

□

Par la suite, pour $T > 1$, pour tout $n \geqslant 1$, nous notons

$$a_n := \prod_{\substack{p|n\\ p\leqslant T}} p \qquad\qquad b_n := \prod_{\substack{p|n\\ p>T}} p. \tag{2.49}$$

***Lemme* 2.2.15.** *Soient χ un caractère de Dirichlet non principal , $T > 1$ un réel, A, c des constantes strictement positives, $\eta \in]0,1[$ et $g \in \mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$. Nous avons, uniformément pour $0 < \sigma \leqslant \frac{1}{\log T}$*

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n\geqslant 1} g(n)\frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+\sigma}} \max_{d|n}\left(|\tau(d,\chi,\vartheta)|^2\right)\frac{\mathrm{d}\vartheta}{1+\vartheta^2} \ll \frac{1}{\sigma^{m(y,\rho)}},$$

où ρ est défini en (2.9) *et $m(y,\rho)$ en* (2.10)*.*

Démonstration. Nous ne traitons que l'intégrale sur $\mathbb{R}^+$ car celle sur $\mathbb{R}^-$ se déduit par symétrie. Notons $S(\vartheta)$ la somme à l'intérieur de l'intégrale. Elle admet un développement en produit eulérien

$$S(\vartheta) = \prod_{p\leqslant T}\Big(1 + g(p)\frac{\max(1, |1+\chi(p)p^{i\vartheta}|^2)}{p}\Big)\prod_{p>T}\Big(1 + g(p)\frac{\max(1, |1+\chi(p)p^{i\vartheta}|^2)}{p^{1+\sigma}}\Big).$$

Le Lemme 2.2.11 nous permet alors de majorer uniformément $S(\vartheta)$ en fonction de ϑ. En prenant $x = \mathrm{e}^{1/\sigma}$, ce qui est possible par hypothèse sur σ, nous obtenons l'inégalité suivante, pour $0 \leqslant \vartheta < 1$

$$S(\vartheta) \ll \Big(\frac{1}{\sigma+\vartheta}\Big)^{y\kappa(r)}\Big(1+\frac{\vartheta}{\sigma}\Big)^{(\rho+2)y},$$

et pour $\vartheta > 1$

$$S(\vartheta) \ll \frac{1}{\sigma^{(\rho+2)y}}\log(2+\vartheta)^B.$$

Nous découpons l'intégrale au point $\vartheta = 1$. Celle portant sur l'ensemble $\{\vartheta > 1\}$ est convenablement majorée. Pour l'autre intégrale, nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^1 S(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta &\ll \int_0^1 \Big(\frac{1}{\sigma+\vartheta}\Big)^{\kappa(r)y}\Big(1+\frac{\vartheta}{\sigma}\Big)^{(\rho+2)y}\mathrm{d}\vartheta\\ &\ll \frac{1}{\sigma^{\kappa(r)y}}\int_0^1\Big(\frac{1}{1+\frac{\vartheta}{\sigma}}\Big)^{\kappa(r)y-(\rho+2)y}\mathrm{d}\vartheta.\end{aligned}$$

D'après le Lemme 2.2.14, nous avons $\kappa(r) < 3$. Un calcul direct de l'intégrale permet alors d'obtenir le majorant souhaité, en notant que, uniformément pour $\sigma \in]0,1[$

$$\frac{1}{\sigma^{\kappa(r)y-1}}\log(1/\sigma) \ll \frac{1}{\sigma^{3y-1}}.$$

□

***Lemme* 2.2.16.** *Soient $\boldsymbol{\chi}$ un couple de deux caractères de Dirichlet non principaux tels que $\chi_1\overline{\chi_2}$ soit non principal, A, c des constantes strictement positives et $\eta \in]0,1[$, $g \in \mathcal{M}_A(\boldsymbol{\chi},c,\eta)$ et $T > 1$ un réel. Nous avons, uniformément pour $\sigma > 0$ et $\vartheta \in \mathbb{R}$*

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu^2(n)g(n)}{a_n b_n^{1+\sigma}}\widehat{\tau}_1(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta) \ll \begin{cases}\frac{1}{\sigma^{3y}} & \text{si } |\vartheta| \leqslant 1,\\ \frac{1}{\sigma^{3y}}\log(2+|\vartheta|)^B & \text{sinon,}\end{cases}$$

où a_n et b_n sont définis en (2.49) *et $\widehat{\tau}_1(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta)$ en* (2.35).

Démonstration. La seule différence par rapport à la démonstration du Lemme 2.2.15 est l'utilisation du Lemme 2.2.13 pour majorer le produit eulérien. □

2.3 Estimation de $C(n,\boldsymbol{\chi})$ et $D(n,\boldsymbol{\chi})$

Pour $0 < \sigma \leqslant 1/10$, nous notons

$$\mathcal{L}_1(\sigma) := \exp\Big(\sqrt{\log(1/\sigma)\log_2(1/\sigma)}\Big). \tag{2.50}$$

Pour $\sigma > 0$, g une fonction arithmétique et $T > 1$, nous notons

$$\mathfrak{S}_1(\sigma,g,\boldsymbol{\chi}) := \sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+\sigma}}g(n)C(n,\boldsymbol{\chi}),$$

où $C(n,\boldsymbol{\chi})$ est défini en (2.18) et a_n et b_n sont définis en (2.49). L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 2.3.1. *Soit $\boldsymbol{\chi} = (\chi_1, \chi_2)$ un couple de deux caractères de Dirichlet non principaux tels que $\chi_1\overline{\chi_2}$ soit non principal. Soient A, c des constantes strictement positives, $\eta \in]0,1[$ et $g \in \mathcal{M}_A(\boldsymbol{\chi}, c, \eta)$. Si $0 < y = y(g)$, il existe une constante $\alpha > 0$, dépendant au plus de g, $\boldsymbol{\chi}$, c et η, telle que nous ayons, uniformément pour $\sigma > 0$*

$$\mathfrak{S}_1(\sigma, g, \boldsymbol{\chi}) \ll \frac{1}{\sigma^{\max\{y+1, m(y,\rho)\}}} \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha,$$

où $m(y,\rho)$ est défini en (2.10), et où nous avons posé

$$\log T := \Big(\frac{9yq \log \frac{1}{\sigma}}{c}\Big)^{1/\eta} \tag{2.51}$$

et

$$q := \sqrt{\frac{\log(1/\sigma)}{\log_2(1/\sigma)}}. \tag{2.52}$$

Nous avons le même résultat en remplaçant $C(n, \boldsymbol{\chi})$ par $D(n, \boldsymbol{\chi})$.

2.3.1 Estimation de $\Delta^{(k)}(n, \boldsymbol{\chi}, \vartheta)$

Pour $\sigma > 0$, g une fonction arithmétique et $\vartheta \in \mathbb{R}$, nous notons

$$\mathfrak{S}^{(k)}(\sigma, g, \boldsymbol{\chi}, \vartheta) := \sum_{n \geqslant 1} \frac{\mu^2(n) g(n)}{a_n b_n^{1+\sigma}} \Delta^{(k)}(n, \boldsymbol{\chi}, \vartheta)^2,$$

où $\Delta^{(k)}(n, \boldsymbol{\chi}, \vartheta)$ est défini en (2.22) et a_n et b_n sont définis en (2.49) à partir de la valeur de T déterminée en (2.51).

Proposition 2.3.2. *Soient $\boldsymbol{\chi} = (\chi_1, \chi_2)$ un couple de deux caractères de Dirichlet non principaux tels que $\chi_1\overline{\chi_2}$ soit non principal. Soient A, c des constantes strictement positives, $\eta \in]0,1[$ et $g \in \mathcal{M}_A(\boldsymbol{\chi}, c, \eta)$. Pour $0 < y = y(g)$, il existe une constante $\alpha > 0$, dépendant au plus de g, $\boldsymbol{\chi}$, c et η, telle que nous ayons, uniformément pour $\sigma > 0$, $k \leqslant \sqrt{\log 1/\sigma}$ entier et $|\vartheta| \leqslant q\sigma$*

$$\mathfrak{S}^{(k)}(\sigma, g, \boldsymbol{\chi}, \vartheta) \ll \frac{(k+1)^3}{\sigma^{3y}} \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha,$$

uniformément pour $\sigma > 0$, $k \leqslant \sqrt{\log 1/\sigma}$ entier et $q\sigma \leqslant |\vartheta| \leqslant \frac{q}{\log T}$

$$\mathfrak{S}^{(k)}(\sigma, g, \boldsymbol{\chi}, \vartheta) \ll \frac{(k+1)^3 |\vartheta|^{m(y,\rho)-3y}}{\sigma^{m(y,\rho)}} \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha,$$

uniformément pour $\sigma > 0$, $k \leqslant \sqrt{\log 1/\sigma}$ entier et $\frac{q}{\log T} \leqslant |\vartheta| \leqslant \mathrm{e}^{c(\log T)^\eta}$

$$\mathfrak{S}^{(k)}(\sigma, g, \boldsymbol{\chi}, \vartheta) \ll \frac{(k+1)^3}{\sigma^{m(y,\rho)}} \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha \log(3 + |\vartheta|)^B$$

et uniformément pour $\sigma > 0$, $k \leqslant \sqrt{\log 1/\sigma}$ entier et $|\vartheta| \geqslant \mathrm{e}^{c(\log T)^\eta}$

$$\mathfrak{S}^{(k)}(\sigma, g, \boldsymbol{\chi}, \vartheta) \ll \frac{(k+1)^3}{\sigma^{4y}} \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha \log(2 + |\vartheta|)^B,$$

où ρ est défini en (2.9), $\mathcal{L}_1(\sigma)$ est défini en (2.50), et T et q sont définis en (2.51) et (2.52).

Démonstration. Cette démonstration s'appuie sur la méthode différentielle de [5].

Nous commençons par utiliser le Lemme 2.2.4 pour majorer $\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta)$. Le membre de droite du majorant se traite au moyen du Lemme 2.2.15, qui fournit la majoration

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+\sigma}}g(n)\max_{d|n}|\tau(d,\chi_1,\vartheta)|^2 \ll \frac{1}{\sigma^{m(y,\rho)}}.$$

Pour traiter le membre de gauche du majorant, nous utilisons dans un premier temps le Lemme 2.2.5, qui nous permet de restreindre la somme aux entiers n pour lesquels le facteur $E(n)$, défini en (2.24) n'est pas trop petit. Pour de tels entiers n, le terme $E(n)^{-4/q}$, où q est défini en (2.52), est uniformément majoré par $\mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha$ pour une constante α bien choisie. Il s'agit donc étudier

$$L^{(k)}_{\vartheta,T,q}(\sigma) := \sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+\sigma}}g(n)M^{(k)}_{2q}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta)^{1/q},$$

où $M^{(k)}_{2q}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta)$ est défini en en (2.32). Nous énonçons alors le lemme suivant.

***Lemme* 2.3.3.** *Soient $\sigma>0$, $k\leqslant\sqrt{\log 1/\sigma}$, $\vartheta\in\mathbb{R}$, $q\geqslant 1$ et $T\geqslant 1$, nous avons*

$$\begin{aligned}-(L^{(k)}_{\vartheta,T,q})'(s) \leqslant& \frac{D(s)}{s}L^{(k)}_{\vartheta,T,q}(s)\\ &+\frac{A}{s^{1-1/q}}\Big(L^{(k)}_{\vartheta,T,q}(s)\Big)^{(q-2)/(q-1)}\Big((k+1)^2\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+\sigma}}\widehat{\tau}_1(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta)\Big)^{1/(q-1)}\\ &+B_1\frac{(k+1)^{1/q}(\log T)^{9y}}{s^{9y+1-1/q}\,\mathrm{e}^{-c/q(\log T)^\eta}}\end{aligned}$$

où

$$D(s,\vartheta) := s\sum_{p>T}\frac{g(p)}{p^{1+s}}\big(\max(1,|1+\chi_1(p)p^{i\vartheta}|^2)+O(1/q)\big)\log p,$$

$\widehat{\tau}_1(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta)$ est défini en (2.35) *et A et B_1 sont des constantes absolues.*

Démonstration. En dérivant la fonction $L^{(k)}_{\vartheta,T,q}(\sigma)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}-(L^{(k)}_{\vartheta,T,q})'(s) &= \sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}}g(n)M^{(k)}_{2q}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta)^{1/q}\log b_n\\ &= \sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}}g(n)M^{(k)}_{2q}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta)^{1/q}\sum_{\substack{p|n\\ p>T}}\log p\\ &= \sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}}g(n)\sum_{\substack{(n,p)=1\\ p>T}}M^{(k)}_{2q}(np,\boldsymbol{\chi},\vartheta)^{1/q}\frac{g(p)\log p}{p^{1+s}}.\end{aligned}$$

Un calcul explicite de la quantité $\Delta^{(k)}(np,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u,v_1,v_2)$, valable pour tout p premier et $n\in\mathbb{N}$ tels que $(n,p)=1$, fournit

$$\Delta^{(k)}(np,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u,v_1,v_2) = (1+\chi_1(p)p^{i\vartheta})\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u,v_1,v_2)+\chi_2(p)\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u-\log p,v_1,v_2).$$

En prenant le module à la puissance $2q$ de cette égalité, et en utilisant des inégalités classiques, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&|\Delta^{(k)}(np,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u,v_1,v_2)|\\
\leqslant&2|1+\chi_1(p)p^{i\vartheta}|^{2q}|\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u,v_1,v_2)|^{2q}\\
&+3|\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u-\log p,v_1,v_2)|^{2q}\\
&+(1+q)4^q\sum_{j=1}^{q-1}\binom{2q}{2j}|\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u,v_1,v_2)|^{2j}|\Delta^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,u-\log p,v_1,v_2)|^{2(q-j)}.
\end{aligned}$$

En intégrant cette inégalité sur $\mathbb{R}\times[0,1]^2$, nous obtenons

$$M_{2q}^{(k)}(np,\chi,\vartheta)\leqslant\Big(2|1+\chi_1(p)p^{i\vartheta}|^{2q}+3\Big)M_{2q}^{(k)}(n,\chi,\vartheta)+W_q^{(k)}(n,p,\vartheta),$$

où

$$W_q^{(k)}(n,p,\vartheta):=(1+q)4^q\sum_{j=1}^{q-1}\binom{2q}{2j}N_{j,q}^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,\log p),$$

les $N_{j,q}^{(k)}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta,\log p)$ étant définis en (2.42). Des inégalités de Hölder et le Lemme 2.2.9 fournissent

$$\begin{aligned}
-(L_{\vartheta,T,q}^{(k)})'(s)\leqslant&\frac{D(s,\vartheta)}{s}L_{\vartheta,T,q}^{(k)}(s)\\
&+\frac{A}{s^{1-1/q}}\Big(L_{\vartheta,T,q}^{(k)}(s)\Big)^{(q-2)/(q-1)}\Big((k+1)^2\sum_{n\geqslant1}\frac{\mu^2(n)}{a_nb_n^{1+\sigma}}\widehat{\tau}_1(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta)\Big)^{1/(q-1)}\\
&+B_1\frac{(k+1)^{1/q}(\log T)^{9y}}{s^{9y+1-1/q}\,\mathrm{e}^{-c/q(\log T)^\eta}}
\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration du lemme. □

Ce lemme nous permet de considérer $L_{\vartheta,T,q}^{(k)}$ comme sur solution d'une équation différentielle. Il nous faut désormais déterminer une sous solution de cette équation différentielle. Comme nous allons le voir, cette sous solution va dépendre de ϑ.

Si $|\vartheta|\leqslant q\sigma$, le Lemme 2.2.10 fournit $D(s)\leqslant 3y+O(1/q)$ pour tout $s\geqslant\sigma$. De plus, par le Lemme 2.2.16, nous avons

$$\begin{aligned}
-(L_{\vartheta,T,q}^{(k)})'(s)\leqslant&\frac{3y+a_1/q}{s}L_{\vartheta,T,q}^{(k)}(s)+A\frac{(k+1)^{2/(q-1)}\Big(L_{\vartheta,T,q}^{(k)}(s)\Big)^{(q-2)/(q-1)}}{s^{1+3y/(q-1)-1/q}}\\
&+B_1\frac{(\log T)^9}{s^{9y+1-1/q}\,\mathrm{e}^{-c(\log T)^\eta}},
\end{aligned}$$

où $a_1>0$ est une constante absolue. En posant

$$\varepsilon:=B_1(\log T)^{9y}e^{-(\log T)^\eta c/q},\quad\beta:=9y-1/q,$$

nous obtenons

$$-(L_{\vartheta,T,q}^{(k)})'(s)\leqslant\phi_1(s,L_{\vartheta,T,q}^{(k)}(s)),$$

avec

$$\phi_1(s,x):=\frac{3y+a_1/q}{s}x+\frac{A(k+1)^{2/(q-1)}x^{(q-2)/(q-1)}}{s^{1-1/q+3y/(q-1)}}+\frac{\varepsilon}{s^{\beta+1}}.$$

Posons

$$\gamma_1 := 3y + \frac{b_1}{q}, \quad X_1(s) := \frac{K_1}{s^{\gamma_1}} + \frac{\varepsilon}{s^{\beta}}$$

où $b_1 > a_1$ est une constante. Remarquons dans ce cas l'inégalité suivante

$$\gamma_1 + 1 \geqslant 1 - \frac{1}{q} + \frac{3y}{q-1} + \frac{q-2}{q-1}\gamma_1.$$

En supposant les inégalités

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &> (3y + \frac{a_1}{q}) + A(k+1)^{2/(q-1)} K_1^{-1/(q-1)}, \\
\beta &> 3y + \frac{a_1}{q} + A(k+1)^{2/(q-1)} K_1^{-1/(q-1)} + 1,
\end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned}
-X_1'(s) =& \frac{K_1\gamma_1}{s^{\gamma_1+1}} + \frac{\epsilon\beta}{s^{\beta+1}} \\
\geqslant& \frac{K_1(3y + a_1/q)}{s^{\gamma_1+1}} + \frac{\varepsilon(3y + a_1/q)}{s^{\beta+1}} + \frac{A(k+1)^{2/(q-1)} K_1^{(q-2)/(q-1)}}{s^{\gamma_1+1}}\Big(1 + \frac{\varepsilon s^{\gamma_1}}{K_1 s^{\beta}}\Big) \\
&+ \frac{\varepsilon}{s^{\beta+1}} \\
\geqslant& \frac{K_1(3y + a_1/q)}{s^{\gamma+1}} + \frac{\varepsilon(3y + a_1/q)}{s^{\beta+1}} \\
&+ \frac{A(k+1)^{2/(q-1)} K_1^{(q-2)/(q-1)}}{s^{\gamma_1+1}}\Big(1 + \frac{\varepsilon s^{\gamma_1}}{K_1 s^{\beta}}\Big)^{(q-2)/(q-1)} + \frac{\varepsilon}{s^{\beta+1}} \\
\geqslant& \phi_1\big(s, X_1(s)\big).
\end{aligned}$$

Remarque 2.3.4. Les hypothèses sur γ_1 et β sont vérifiées dès que nous choisissons K de l'ordre de $(k+1)^2(qC_2)^q$ pour une constante C_2 assez grande.

Comme tout ceci n'est valable que pour $s \leqslant \frac{1}{\log T}$, nous notons $s_0 = \frac{1}{\log T}$. Remarquons dans ce cas que

$$L^{(k)}_{\vartheta,T,q}(s) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}} \tau_3(n)^2 \ll \frac{(\log T)^{9y}}{s^{9y}}.$$

Ainsi,

$$L^{(k)}_{\vartheta,T,q}(s_0) \leqslant X_1(s_0)$$

en choisissant $K = (k+1)^2(qC_2)^q(\log T)^{18y}$. Le lemme 70.2 de [17] permet alors de montrer l'inégalité suivante

$$L^{(k)}_{\vartheta,T,q}(s) \leqslant \frac{(k+1)^2(qC_2)^q(\log T)^{18y}}{s^{3y+a_1/q}} + \frac{B_1(\log T)^{9y}}{\mathrm{e}^{(\log T)^{\eta}c/q}\, s^{9y-1/q}}$$

dès que $\sigma \leqslant s \leqslant s_0$. Les choix de T (2.51) et de q (2.52) impliquent alors

$$L^{(k)}_{\vartheta,T,q}(\sigma) \ll \frac{(k+1)^2}{\sigma^{3y}} \mathcal{L}_1(\sigma)^{\alpha}.$$

Le cas $q\sigma \leqslant |\vartheta| \leqslant \frac{q}{\log T}$ est le plus délicat, puisque le majorant de $D(s)$ fourni par le Lemme 2.2.10 change en fonction de la position de s par rapport à $\frac{|\vartheta|}{q}$.

Pour $\frac{|\vartheta|}{q} \leqslant s \leqslant \frac{1}{\log T}$, nous avons toujours $D(s) \leqslant 3y + a_1/q$, la suite de la démonstration est inchangée, et nous permet d'avoir

$$L^{(k)}_{\vartheta,T,q}(\frac{|\vartheta|}{q}) \ll \frac{(k+1)^2}{|\vartheta|^{3y}} \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha$$

car $|\vartheta| \geqslant \sigma$ et $\mathcal{L}_1$ est décroissante. Par ailleurs, le facteur q^{3y} peut être absorbé par le terme $\mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha$ quitte à augmenter α.

Pour $s \leqslant \frac{|\vartheta|}{q}$, nous avons cette fois $D(s) \leqslant (\rho+2)y + a_1/q$. Nous modifions donc γ_1 et K_1 par rapport à précédemment, nous choisissons

$$\gamma_1 := m(y,\rho) + b_1/q,$$

de manière à vérifier

$$\gamma_1 + 1 \geqslant 1 - \frac{1}{q} + \frac{3y}{q-1} + \frac{q-2}{q-1}\gamma_1$$

et

$$\gamma_1 > (\rho+2)y + a_1/q + A(k+1)^{2/(q-1)} K_1^{-1/(q-1)}.$$

Par ailleurs, pour assurer l'inégalité

$$L^{(k)}_{\vartheta,T,q}(\frac{|\vartheta|}{q}) \leqslant X_1(\frac{|\vartheta|}{q}),$$

nous choisissons

$$K_1 := (k+1)^2 |\vartheta|^{m(y,\rho)-3y} \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha.$$

Nous obtenons ainsi

$$L^{(k)}_{\vartheta,T,q}(\sigma) \ll \frac{(k+1)^2 |\vartheta|^{m(y,\rho)-3y}}{\sigma^{m(y,\rho)}} \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha.$$

Si $\frac{q}{\log T} \leqslant |\vartheta| \leqslant \mathrm{e}^{c(\log T)^\eta}$, nous avons systématiquement $D(s) \leqslant (\rho+\ 2)y +\ a_1/q$ et le Lemme 2.2.16 fournit cette fois la majoration

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\mu^2(n) g(n)}{a_n b_n^{1+s}} \widehat{\tau}_1(n, \boldsymbol{\chi}, \vartheta) \ll \frac{1}{s^{3y}} \log(3+|\vartheta|)^B.$$

Nous choisissons ainsi

$$\gamma_1 := m(y,\rho) + \frac{b_1}{q}$$

et

$$K_1 := (k+1)^2 (qC_2)^q \log(3+|\vartheta|)^B$$

pour obtenir

$$L^{(k)}_{\vartheta,T,q}(\sigma) \ll \frac{(k+1)^2}{\sigma^{m(y,\rho)}} \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha.$$

Enfin, si $|\vartheta| \geqslant \mathrm{e}^{c(\log T)^\eta}$, nous avons $D_1(s) \leqslant 4y + \frac{a_1}{q}$. Nous choisissons ainsi

$$\gamma_1 := 4y + \frac{b_1}{q}$$

et

$$K_1 := (k+1)^2 (qC_2)^q \log(2+|\vartheta|)^B$$

pour obtenir

$$L^{(k)}_{\vartheta,T,q}(\sigma) \ll \frac{(k+1)^2}{\sigma^{4y}} \log(2+|\vartheta|)^B \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha.$$

□

2.3.2 Démonstration du Théorème 2.3.1

La Proposition 2.3.2 nous permet de déterminer la majoration du Théorème 2.3.1 pour $C(n,\boldsymbol{\chi})$, défini en (2.18). En effet, d'après le théorème de Parseval, pour tout triplet $(u_2,v_1,v_2)\in\mathbb{R}\times[0,1]$, nous avons

$$C(n,\boldsymbol{\chi},u_2,v_1,v_2)\ll\int_{\mathbb{R}}|\Delta^{(0)}(n,\chi_2,\chi_1,\vartheta,u_2,v_2,v_1)|^2\frac{\mathrm{d}\vartheta}{1+\vartheta^2},$$

où $\Delta^{(0)}(n,\chi_2,\chi_1,\vartheta,u_2,v_2,v_1)$ est défini en (2.22). Ainsi,

$$C(n,\boldsymbol{\chi})\ll\int_{\mathbb{R}}|\Delta^{(0)}(n,\chi_2,\chi_1,\vartheta)|^2\frac{\mathrm{d}\vartheta}{1+\vartheta^2}.$$

Remarque 2.3.5. Nous ne savons pas actuellement si cette manière de majorer $C(n,\boldsymbol{\chi})$ est optimale. Il est raisonnable de penser qu'elle ne l'est pas mais c'est la plus efficace connue à ce jour.

Elle nous permet également de déterminer la majoration du Théorème 2.3.1 pour $D(n,\boldsymbol{\chi})$, défini en (2.19). Cependant, les calculs sont plus complexes. Nous commençons par le lemme suivant, qui représente une formule d'inversion de Fourier.

***Lemme* 2.3.6.** *Soient $n\geqslant 1$ et $\boldsymbol{\chi}=(\chi_1,\chi_2)$ un couple de caractères de Dirichlet, nous avons, pour tout (u,u_2) sauf un nombre fini*

$$\begin{aligned}
&\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},u-u_2,u_2,v_1,v_2)\\
=&\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\tau(n,\boldsymbol{\chi},-\vartheta_1,-\vartheta_2)k(0,v_1,\vartheta_1)k(0,v_2,\vartheta_2)\,\mathrm{e}^{i\vartheta_1(u-u_2)}\,\mathrm{e}^{i\vartheta_2u_2}\,\mathrm{d}\vartheta_1\mathrm{d}\vartheta_2\\
=&\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\tau(n,\boldsymbol{\chi},-\vartheta_1,-\vartheta_2)k(0,v_1,\vartheta_1)k(0,v_2,\vartheta_2)\,\mathrm{e}^{i\vartheta_1u}\,\mathrm{e}^{i(\vartheta_2-\vartheta_1)u_2}\,\mathrm{d}\vartheta_1\mathrm{d}\vartheta_2\\
=&\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\tau(n,\boldsymbol{\chi},-\vartheta_1,-\vartheta_2-\vartheta_1)k(0,v_1,\vartheta_1)k(0,v_2,\vartheta_1+\vartheta_2)\,\mathrm{e}^{i\vartheta_1u}\,\mathrm{e}^{i\vartheta_2u_2}\,\mathrm{d}\vartheta_1\mathrm{d}\vartheta_2,
\end{aligned}\tag{2.53}$$

où $\tau(n,\boldsymbol{\chi},-\vartheta_1,-\vartheta_2)$ est défini en (2.34) *et*

$$k(v_1,v_2,\vartheta):=\frac{\mathrm{e}^{i(v_1+v_2)\vartheta}-\mathrm{e}^{iv_1\vartheta}}{i\vartheta}.\tag{2.54}$$

Démonstration. Calculons, pour tout v_1,v_2 la transformée de Fourier de la fonction

$$(u_1,u_2)\mapsto\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},u_1,u_2,v_1,v_2)$$

que nous noterons

$$\widehat{\Delta}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta_1,\vartheta_2,v_1,v_2).$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta}(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta_1,\vartheta_2,v_1,v_2)&=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},u_1,u_2,v_1,v_2)\,\mathrm{e}^{-i\vartheta_1u_1}\,\mathrm{e}^{-i\vartheta_2u_2}\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\\
&=\sum_{d_1d_2|n}\chi_1(d_1)\chi_2(d_2)\int_{\log d_1-v_1}^{\log d_1}\int_{\log d_2-v_2}^{\log d_2}\mathrm{e}^{-i\vartheta_1u_1}\,\mathrm{e}^{-i\vartheta_2u_2}\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\\
&=\tau(n,\boldsymbol{\chi},-\vartheta_1,-\vartheta_2)k(0,v_1,\vartheta_1)k(0,v_2,\vartheta_2),
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout (u_1, u_2) sauf un nombre fini, nous avons, d'après la formule d'inversion de Fourier

$$\begin{aligned}&\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, u_1, u_2, v_1, v_2)\\ =&\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \tau(n, \boldsymbol{\chi}, -\vartheta_1, -\vartheta_2)k(0, v_1, \vartheta_1)k(0, v_2, \vartheta_2)\,\mathrm{e}^{i\vartheta_1 u_1}\,\mathrm{e}^{i\vartheta_2 u_2}\,\mathrm{d}\vartheta_1\mathrm{d}\vartheta_2\end{aligned}$$

En remplaçant u_1 par $u - u_2$, puis en effectuant le changement de variable $\vartheta_2 = \vartheta_2 - \vartheta_1$, nous obtenons le résultat. □

Posons

$$\begin{aligned}&F(n, \boldsymbol{\chi}, u, v_1, v_2, \vartheta_2)\\ :=&\int_{\mathbb{R}} \tau(n, \boldsymbol{\chi}, -\vartheta_1, -\vartheta_2 - \vartheta_1)k(0, v_1, \vartheta_1)k(0, v_2, \vartheta_1 + \vartheta_2)\,\mathrm{e}^{i\vartheta_1 u}\,\mathrm{d}\vartheta_1.\end{aligned} \tag{2.55}$$

Le théorème de Parseval nous permet de relier la valeur de $D(n, \boldsymbol{\chi}, u, v_1, v_2)$ au moment L^2 de $F(n, \boldsymbol{\chi}, u, v_1, v_2, \vartheta_2)$. Nous transformons l'expression de F afin de relier cette fonction à des fonctions Δ de type (2.22) et pouvoir utiliser la Proposition 2.3.2 pour estimer $D(n, \boldsymbol{\chi})$.Pour cela, nous définissons, pour $(v_1, v_2, \vartheta_1, \vartheta_2) \in [0, 1]^2 \times \mathbb{R}^2$,

$$k_1(v_1, v_2, \vartheta_1, \vartheta_2) := k(v_2, v_1, \vartheta_1) \tag{2.56}$$

$$k_2(v_1, v_2, \vartheta_1, \vartheta_2) := k(v_1, v_2, \vartheta_1 + \vartheta_2) \tag{2.57}$$

$$k_3(v_1, v_2, \vartheta_1, \vartheta_2) := k(v_1, v_2, \vartheta_1) - k(v_1, v_2, \vartheta_1 + \vartheta_2)\,\mathrm{e}^{-iv_1\vartheta_2} \tag{2.58}$$

$$k_4(v_1, v_2, \vartheta_1, \vartheta_2) := k(0, v_2, \vartheta_1 + \vartheta_2)\,\mathrm{e}^{-iv_1\vartheta_2} - k(0, v_2, \vartheta_1), \tag{2.59}$$

et pour $j = 1, \ldots 4$, nous posons

$$\begin{aligned}&F_j(n, \boldsymbol{\chi}, u, v_1, v_2, \vartheta_2)\\ :=&\int_{\mathbb{R}} \tau(n, \boldsymbol{\chi}, -\vartheta_1, -\vartheta_2 - \vartheta_1)k_j(v_1, v_2, \vartheta_1, \vartheta_2)\,\mathrm{e}^{i\vartheta_1 u}\,\mathrm{d}\vartheta_1.\end{aligned} \tag{2.60}$$

Nous pouvons alors énoncer le lemme suivant, qui relie $D(n, \boldsymbol{\chi})$ aux fonctions F_j.

***Lemme* 2.3.7.** *Soient $n \geqslant 1$ et $\boldsymbol{\chi} = (\chi_1, \chi_2)$ un couple de caractères de Dirichlet. Nous avons*

$$\begin{aligned}D(n, \boldsymbol{\chi}) \ll &\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\vartheta_2^2} \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}\\(v_1,v_2)\in[0,1]^2}} |F_1(n, \boldsymbol{\chi}, u, v_1, v_2, \vartheta_2)|^2 \mathrm{d}\vartheta_2\\ &+ \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\vartheta_2^2} \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}\\(v_1,v_2)\in[0,1]^2}} |F_2(n, \boldsymbol{\chi}, u, v_1, v_2, \vartheta_2)|^2 \mathrm{d}\vartheta_2\\ &+ \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\vartheta_2^2} \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}\\(v_1,v_2)\in[0,1]^2}} |F_3(n, \boldsymbol{\chi}, u, v_1, v_2, \vartheta_2)|^2 \mathrm{d}\vartheta_2\\ &+ \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\vartheta_2^2} \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}\\(v_1,v_2)\in[0,1]^2}} |F_4(n, \boldsymbol{\chi}, u, v_1, v_2, \vartheta_2)|^2 \mathrm{d}\vartheta_2.\end{aligned} \tag{2.61}$$

Démonstration. Pour démontrer ce lemme, nous commençons par linéariser en ϑ_1 la quantité $k(0, v_1, \vartheta_1)k(0, v_2, \vartheta_1 + \vartheta_2)$. Nous utilisons à cette fin la décomposition en éléments simples,

$$\frac{1}{\vartheta_1(\vartheta_2 + \vartheta_1)} = \frac{1}{\vartheta_1\vartheta_2} - \frac{1}{\vartheta_2(\vartheta_2 + \vartheta_1)}. \tag{2.62}$$

Par ailleurs, nous avons

$$\begin{aligned}&(\mathrm{e}^{iv_1\vartheta_1}-1)(\mathrm{e}^{iv_2(\vartheta_1+\vartheta_2)}-1)\\=&(\mathrm{e}^{iv_1\vartheta_1}-1)(\mathrm{e}^{iv_2(\vartheta_1+\vartheta_2)}-\mathrm{e}^{iv_2\vartheta_1}+\mathrm{e}^{iv_2\vartheta_1}-1)\\=&(\mathrm{e}^{iv_2\vartheta_2}-1)(\mathrm{e}^{i(v_1+v_2)\vartheta_1}-\mathrm{e}^{iv_2\vartheta_1})+(\mathrm{e}^{iv_2\vartheta_1}-1)(\mathrm{e}^{iv_1\vartheta_1}-1)\end{aligned}\tag{2.63}$$

et

$$\begin{aligned}&(\mathrm{e}^{iv_1\vartheta_1}-1)(\mathrm{e}^{iv_2(\vartheta_1+\vartheta_2)}-1)\\=&(\mathrm{e}^{iv_1((\vartheta_1+\vartheta_2)-\vartheta_2)}-1)(\mathrm{e}^{iv_2(\vartheta_1+\vartheta_2)}-1)\\=&(\mathrm{e}^{iv_1((\vartheta_1+\vartheta_2)-\vartheta_2)}-\mathrm{e}^{-iv_1\vartheta_2}+\mathrm{e}^{-iv_1\vartheta_2}-1)(\mathrm{e}^{iv_2(\vartheta_1+\vartheta_2)}-1)\\=&\,\mathrm{e}^{-iv_1\vartheta_2}(\mathrm{e}^{iv_1(\vartheta_1+\vartheta_2)}-1)(\mathrm{e}^{iv_2(\vartheta_1+\vartheta_2)}-1)+(\mathrm{e}^{-iv_1\vartheta_2}-1)(\mathrm{e}^{iv_2(\vartheta_1+\vartheta_2)}-1)\end{aligned}\tag{2.64}$$

Ainsi, d'après (2.62), (2.63) et (2.64), nous avons

$$\begin{aligned}&k(0,v_1,\vartheta_1)k(0,v_2,\vartheta_1+\vartheta_2)\\=&\frac{1}{i\vartheta_2}\frac{(\mathrm{e}^{iv_1\vartheta_1}-1)(\mathrm{e}^{iv_2(\vartheta_1+\vartheta_2)}-1)}{i\vartheta_1}\\&-\frac{1}{i\vartheta_2}\frac{(\mathrm{e}^{iv_1\vartheta_1}-1)(\mathrm{e}^{iv_2(\vartheta_1+\vartheta_2)}-1)}{i(\vartheta_1+\vartheta_2)}\\=&\frac{\mathrm{e}^{iv_2\vartheta_2}-1}{i\vartheta_2}\frac{(\mathrm{e}^{i(v_1+v_2)\vartheta_1}-\mathrm{e}^{iv_2\vartheta_1})}{i\vartheta_1}+\frac{1}{i\vartheta_2}\frac{(\mathrm{e}^{iv_1\vartheta_1}-1)(\mathrm{e}^{iv_2\vartheta_1}-1)}{i\vartheta_1}\\&-\frac{\mathrm{e}^{-iv_1\vartheta_2}}{i\vartheta_2}\frac{(\mathrm{e}^{iv_1(\vartheta_1+\vartheta_2)}-1)(\mathrm{e}^{iv_2(\vartheta_1+\vartheta_2)}-1)}{i(\vartheta_1+\vartheta_2)}-\frac{\mathrm{e}^{-iv_1\vartheta_2}-1}{i\vartheta_2}\frac{\mathrm{e}^{iv_2(\vartheta_1+\vartheta_2)}-1}{i(\vartheta_1+\vartheta_2)}\\=&k(0,v_2,\vartheta_2)k(v_2,v_1,\vartheta_1)+\frac{1}{i\vartheta_2}(k(v_1,v_2,\vartheta_1)-k(0,v_2,\vartheta_1))\\&+k(-v_1,v_1,\vartheta_2)k(0,v_2,\vartheta_1+\vartheta_2)-\frac{\mathrm{e}^{-iv_1\vartheta_2}}{i\vartheta_2}(k(v_1,v_2,\vartheta_1+\vartheta_2)-k(0,v_2,\vartheta_1+\vartheta_2))\\=&k(0,v_2,\vartheta_2)k(v_2,v_1,\vartheta_1)+k(-v_1,v_1,\vartheta_2)k(v_1,v_2,\vartheta_1+\vartheta_2)\\&+\frac{1}{i\vartheta_2}(k(v_1,v_2,\vartheta_1)-k(v_1,v_2,\vartheta_1+\vartheta_2)\,\mathrm{e}^{-iv_1\vartheta_2})\\&+\frac{1}{i\vartheta_2}(k(0,v_2,\vartheta_1+\vartheta_2)\,\mathrm{e}^{-iv_1\vartheta_2}-k(0,v_2,\vartheta_1)).\end{aligned}\tag{2.65}$$

En injectant les équations (2.65) à (2.60) dans (2.55), nous obtenons

$$\begin{aligned}&F(n,\boldsymbol{\chi},u,v_1,v_2,\vartheta_2)\\=&k(0,v_2,\vartheta_2)F_1(n,\boldsymbol{\chi},u,v_1,v_2,\vartheta_2)+k(-v_1,v_1,\vartheta_2)F_2(n,\boldsymbol{\chi},u,v_1,v_2,\vartheta_2)\\&+\frac{1}{i\vartheta_2}F_3(n,\boldsymbol{\chi},u,v_1,v_2,\vartheta_2)+\frac{1}{i\vartheta_2}F_4(n,\boldsymbol{\chi},u,v_1,v_2,\vartheta_2).\end{aligned}$$

D'après le théorème de Parseval et l'égalité (2.53), nous avons

$$D(n,\boldsymbol{\chi},u,v_1,v_2)\ll\int_{\mathbb{R}}|F(n,\boldsymbol{\chi},u,v_1,v_2,\vartheta_2)|^2\mathrm{d}\vartheta_2,$$

où $D(n,\boldsymbol{\chi},u,v_1,v_2)$ est défini en (2.21). En injectant (2.60) dans cette inégalité, nous obtenons le résultat. □

Nous voyons ainsi que l'estimation de

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu^2(n)g(n)}{n^{1+\sigma}}D(n,\boldsymbol{\chi})$$

se déduit de celle de

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu^2(n)g(n)}{n^{1+\sigma}}\sup_{u,v_1,v_2}|F_j(n,\boldsymbol{\chi},u,v_1,v_2,\vartheta_2)|^2 \tag{2.66}$$

pour $j=1,\dots,4$. Il nous faut maintenant relier les fonctions F_j aux fonctions Δ de type (2.22).
Pour cela, nous énonçons le lemme suivant.

***Lemme* 2.3.8.** *Soient $n\geqslant 1$, $\boldsymbol{\chi}=(\chi_1,\chi_2)$ un couple de caractères de Dirichlet, $\vartheta_2\in\mathbb{R}$ et $v_1,v_2\in[0,1]^2$. Nous avons, pour tout $u\in\mathbb{R}$ sauf un nombre fini*

$$F_1(n,\boldsymbol{\chi},u,v_1,v_2,\vartheta_2)=\sum_{\substack{d_1d_2|n\\ \mathrm{e}^{u+v_2}\leqslant d_1d_2<\mathrm{e}^{u+v_1+v_2}}}\chi_1(d_1)\chi_2(d_2)d_2^{-i\vartheta_2} \tag{2.67}$$

$$F_2(n,\boldsymbol{\chi},u,v_1,v_2,\vartheta_2)=\sum_{\substack{d_1d_2|n\\ \mathrm{e}^{u+v_1}\leqslant d_1d_2<\mathrm{e}^{u+v_1+v_2}}}\chi_1(d_1)\chi_2(d_2)d_1^{i\vartheta_2}\,\mathrm{e}^{-iu\vartheta_2} \tag{2.68}$$

$$F_3(n,\boldsymbol{\chi},u,v_1,v_2,\vartheta_2)=\sum_{\substack{d_1d_2|n\\ \mathrm{e}^{u+v_1}\leqslant d_1d_2<\mathrm{e}^{u+v_1+v_2}}}\chi_1(d_1)\chi_2(d_2)d_2^{-i\vartheta_2}\big(1-(d_1d_2)^{i\vartheta_2}\,\mathrm{e}^{-i(u+v_1)\vartheta_2}\big) \tag{2.69}$$

$$F_4(n,\boldsymbol{\chi},u,v_1,v_2,\vartheta_2)=\sum_{\substack{d_1d_2|n\\ \mathrm{e}^{u}\leqslant d_1d_2<\mathrm{e}^{u+v_2}}}\chi_1(d_1)\chi_2(d_2)d_2^{-i\vartheta_2}\big((d_1d_2)^{i\vartheta_2}\,\mathrm{e}^{-i(u+v_1)\vartheta_2}-1\big). \tag{2.70}$$

Démonstration. Pour $(v_1,v_2,\vartheta_2)\in[0,1]^2\times\mathbb{R}$ et tout $u\in\mathbb{R}$ sauf un nombre fini, nous avons, d'après la formule d'inversion de Fourier,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}\tau(n,\boldsymbol{\chi},-\vartheta_1,-\vartheta_2-\vartheta_1)k(v_1,v_2,\vartheta_1)\,\mathrm{e}^{i\vartheta_1u}\,\mathrm{d}\vartheta_1\\
&=\int_{\mathbb{R}}\sum_{d_1d_2|n}\chi_1(d_1)\chi_2(d_2)d_2^{-i\vartheta_2}(d_1d_2)^{-i\vartheta_1}k(v_1,v_2,\vartheta_1)\,\mathrm{e}^{i\vartheta_1u}\,\mathrm{d}\vartheta_1\\
&=\sum_{d_1d_2|n}\chi_1(d_1)\chi_2(d_2)d_2^{-i\vartheta_2}\int_{\mathbb{R}}(d_1d_2)^{-i\vartheta_1}k(v_1,v_2,\vartheta_1)\,\mathrm{e}^{i\vartheta_1u}\,\mathrm{d}\vartheta_1\\
&=\sum_{\substack{d_1d_2|n\\ \mathrm{e}^{u+v_1}\leqslant d_1d_2<\mathrm{e}^{u+v_1+v_2}}}\chi_1(d_1)\chi_2(d_2)d_2^{-i\vartheta_2},
\end{aligned}$$

où $\tau(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta_1,\vartheta_2)$ est défini en (2.34) et $k(v_1,v_2,\vartheta_1)$ en (2.54). De même, en effectuant le changement de variable $\vartheta_1=\vartheta_1+\vartheta_2$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}\tau(n,\boldsymbol{\chi},-\vartheta_1,-\vartheta_2-\vartheta_1)k(v_1,v_2,\vartheta_1+\vartheta_2)\,\mathrm{e}^{i\vartheta_1u}\,\mathrm{d}\vartheta_1\\
&=\int_{\mathbb{R}}\tau(n,\boldsymbol{\chi},\vartheta_2-\vartheta_1,-\vartheta_1)k(v_1,v_2,\vartheta_1)\,\mathrm{e}^{i(\vartheta_1-\vartheta_2)u}\,\mathrm{d}\vartheta_1\\
&=\sum_{\substack{d_1d_2|n\\ \mathrm{e}^{u+v_1}\leqslant d_1d_2<\mathrm{e}^{u+v_1+v_2}}}\chi_1(d_1)\chi_2(d_2)d_1^{i\vartheta_2}\,\mathrm{e}^{-iu\vartheta_2}\,.
\end{aligned}$$

En injectant les deux dernières égalités, ainsi que la formule (2.65) dans (2.60), nous obtenons le résultat. □

Dans le cas où u est tel que l'une des égalités ci-dessus n'est pas vérifiée, nous pouvons approcher $D(n,\boldsymbol{\chi},u,v_1,v_2)$ par $D(n,\boldsymbol{\chi},u+\varepsilon,v_1,v_2)$ où $\varepsilon>0$ est suffisamment petit et tel que les égalités (2.67) à (2.70) soient vérifiées pour $u+\varepsilon$. L'erreur que l'on commet est alors dominée par $\log(n)(\Delta^*(n,\chi_1)^2+\Delta^*(n,\chi_2)^2)$ d'après (2.21), la quantité $\Delta^*(n,\chi)$ étant définie en (2.26).

La majoration (2.61) se réécrit donc

$$\begin{aligned} D(n,\boldsymbol{\chi}) \ll & \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\vartheta_2^2} \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}\\(v_1,v_2)\in[0,1]^2}} |F_1(n,\boldsymbol{\chi},u,v_1,v_2,\vartheta_2)|^2 \mathrm{d}\vartheta_2 \\ & + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\vartheta_2^2} \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}\\(v_1,v_2)\in[0,1]^2}} |F_2(n,\boldsymbol{\chi},u,v_1,v_2,\vartheta_2)|^2 \mathrm{d}\vartheta_2 \\ & + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\vartheta_2^2} \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}\\(v_1,v_2)\in[0,1]^2}} |F_3(n,\boldsymbol{\chi},u,v_1,v_2,\vartheta_2)|^2 \mathrm{d}\vartheta_2 \\ & + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\vartheta_2^2} \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}\\(v_1,v_2)\in[0,1]^2}} |F_4(n,\boldsymbol{\chi},u,v_1,v_2,\vartheta_2)|^2 \mathrm{d}\vartheta_2 \\ & + \log n(\Delta^*(n,\chi_1)^2+\Delta^*(n,\chi_2)^2), \end{aligned} \tag{2.71}$$

où les fonctions F_j sont désormais définies par les équations (2.67) à (2.70).

L'estimation de la somme (2.66) pour $j=1,2$ se déduit alors de la Proposition 2.3.2. Nous ne traitons ici que le cas $j=1$, le cas $j=2$ étant identique. Dans ce cas, nous pouvons utiliser la remarque 2.1.3 afin de ne considérer que les entiers n qui sont premiers avec q_1q_2, où q_i désigne le conducteur de χ_i pour $i=1,2$. Nous pouvons donc poser $d_3=n/(d_1d_2)$ dans la somme (2.67) afin d'obtenir

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{d_1d_2|n\\ \mathrm{e}^{u+v_2}\leqslant d_1d_2<\mathrm{e}^{u+v_1+v_2}}} \chi_1(d_1)\chi_2(d_2)d_2^{-i\vartheta_2} &= \sum_{\substack{d_2d_3|n\\ n\,\mathrm{e}^{-u-v_1-v_2}<d_3\leqslant n\,\mathrm{e}^{-u-v_2}}} \chi_1\Big(\frac{n}{d_2d_3}\Big)\chi_2(d_2)d_2^{-i\vartheta_2} \\ &= \chi_1(n) \sum_{\substack{d_2d_3|n\\ n\,\mathrm{e}^{-u-v_1-v_2}<d_3\leqslant n\,\mathrm{e}^{-u-v_2}}} \overline{\chi_1}(d_3)\overline{\chi_1}\chi_2(d_2)d_2^{-i\vartheta_2}. \end{aligned}$$

Nous avons donc, uniformément pour $u,\vartheta_2,v_1,v_2\in\mathbb{R}^2\times[0,1]^2$

$$\sum_{n\geqslant1}\frac{\mu^2(n)g(n)}{n^{1+\sigma}}\sup_{u,v_1,v_2}|F_1(u,v_1,v_2,\vartheta_2)|^2 \leqslant \sum_{n\geqslant1}\frac{\mu^2(n)g(n)}{n^{1+\sigma}}|\Delta_1^{(0)}(n,\overline{\chi_1},\overline{\chi_1}\chi_2,-\vartheta_2)|^2.$$

La Proposition 2.3.2, appliquée à $k=0$, fournit alors

$$\int_{\mathbb{R}}\sum_{n\geqslant1}\frac{\mu^2(n)g(n)}{n^{1+\sigma}}\sup_{u,v_1,v_2}|F_1(u,v_1,v_2,\vartheta_2)|^2\frac{\mathrm{d}\vartheta}{1+\vartheta_2^2} \ll \frac{1}{\sigma^{m(y,\rho)}}\mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha, \tag{2.72}$$

où $m(y,\rho)$ est défini en (2.10) et $\mathcal{L}_1(\sigma)$ en (2.50).

Pour $j=3,4$, une difficulté apparaît, du fait que l'intégrale de $\frac{1}{\vartheta_2^2}$ est divergente en 0. Nous ne détaillons que le cas $j=3$, le cas $j=4$ étant identique. Posons $\vartheta_0:=\mathcal{L}_1(\sigma)^{-1}$.

Pour $|\vartheta_2| \geqslant \vartheta_0$ et $j=3$, nous écrivons

$$\begin{aligned}\big|F_3(u,v_1,v_2,\vartheta_2)\big|^2 \ll & \frac{1}{|\vartheta_2|^2}\Big|\sum_{\substack{d_1d_2|n\\ \mathrm{e}^{u+v_1}\leqslant d_1d_2<\mathrm{e}^{u+v_1+v_2}}}\chi_1(d_1)\chi_2(d_2)d_2^{-i\vartheta_2}\Big|^2\\ & + \frac{1}{|\vartheta_2|^2}\Big|\sum_{\substack{d_1d_2|n\\ \mathrm{e}^{u+v_1}\leqslant d_1d_2<\mathrm{e}^{u+v_1+v_2}}}\chi_1(d_1)\chi_2(d_2)d_1^{i\vartheta_2}\Big|^2.\end{aligned}$$

La Proposition 2.3.2, appliquée à $k=0$, fournit alors

$$\int_{|\vartheta|>\vartheta_0}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu^2(n)g(n)}{n^{1+\sigma}}\sup_{u,v_1,v_2}|F_1(u,v_1,v_2,\vartheta_2)|^2\frac{\mathrm{d}\vartheta_2}{\vartheta_2^2}\ll\frac{1}{\sigma^{m(y,\rho)}}\mathcal{L}_1(\sigma)^{\alpha+1}. \tag{2.73}$$

Il nous reste à traiter le cas $|\vartheta_2|\leqslant\vartheta_0$. Pour cela, nous effectuons un développement limité de

$$1-\mathrm{e}^{-i(u+v_1)\vartheta_2}(d_1d_2)^{i\vartheta_2}$$

par rapport à ϑ_2. Nous obtenons

$$1-\mathrm{e}^{-i(u+v_1)\vartheta_2}(d_1d_2)^{i\vartheta_2}=-\sum_{k=1}^{k_0}\frac{\vartheta_2^k}{k!}\Big(\log(d_1d_2)-u-v_1\Big)^k+O\Big(\frac{|\vartheta_2|^{k_0+1}}{(k_0+1)!}\Big).$$

Ce qui implique, d'après (2.69),

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\vartheta_2^2}\big|F_3(u,v_1,v_2,\vartheta_2)\big|^2\\ &\leqslant\frac{1}{\vartheta_2^2}\sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{k!}\sum_{k=1}^{k_0}\frac{\vartheta_2^{2k}}{k!}\Big|\sum_{\substack{d_1d_2|n\\ \mathrm{e}^{u+v_1}\leqslant d_1d_2<\mathrm{e}^{u+v_1+v_2}}}\chi_1(d_1)\chi_2(d_2)d_2^{-i\vartheta_2}\Big(\log(d_1d_2)-u-v_1\Big)^k\Big|^2\\ &\quad+O\Big(\frac{\vartheta_2^{2(k_0-1)}}{(k_0+1)!^2}\tau_3(n)^2\Big)\\ &\leqslant\mathrm{e}\sum_{k=1}^{k_0}\frac{\vartheta_2^{2(k-1)}}{k!}\Big|\sum_{\substack{d_2d_3|n\\ n\,\mathrm{e}^{-u-v_1-v_2}<d_3\leqslant n\,\mathrm{e}^{-u-v_1}}}\overline{\chi_1}(d_3)\overline{\chi_1}\chi_2(d_2)d_2^{-i\vartheta_2}\Big(\log n-u-v_1-\log d_3\Big)^k\Big|^2\\ &\quad+O\Big(\frac{\vartheta_2^{2(k_0-1)}}{(k_0+1)!^2}\tau_3(n)^2\Big)\\ &\leqslant\mathrm{e}\sum_{k=1}^{k_0}\frac{\vartheta_2^{2(k-1)}}{k!}\Big|\Delta^{(k)}(n,\overline{\chi_1},\chi_2\overline{\chi_1},-\vartheta_2)\Big|^2+O\Big(\frac{\vartheta_2^{2(k_0-1)}}{(k_0+1)!^2}\tau_3(n)^2\Big).\end{aligned}\tag{2.74}$$

La Proposition 2.3.2 fournit alors , pour tout $1\leqslant k\leqslant k_0$,

$$\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu^2(n)g(n)}{n^{1+\sigma}}\sup_{u,v_1,v_2}\Big|\Delta^{(k)}(n,\overline{\chi_1},\chi_2\overline{\chi_1},-\vartheta_2)\Big|^2\frac{\vartheta_2^{2(k-1)}}{k!}\mathrm{d}\vartheta\ll\frac{(k+1)^3}{k!\sigma^{m(y,\rho)}}\mathcal{L}_1(\sigma)^{\alpha}. \tag{2.75}$$

Nous choisissons ensuite $k_0:=[5y\sqrt{\frac{\log 1/\sigma}{\log_2 1/\sigma}}]+2$, de sorte que

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu^2(n)g(n)}{n^{1+\sigma}}\tau_3(n)^2\frac{1}{(k_0+1)!^2}\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0}\vartheta^{2(k_0-1)}\mathrm{d}\vartheta\ll 1. \tag{2.76}$$

En combinant les majorations (2.75) et (2.76) dans l'inégalité (2.74), nous obtenons

$$\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{n^{1+\sigma}} \sup_{u,v_1,v_2} |F_3(u,v_1,v_2,\vartheta_2)|^2 \frac{\mathrm{d}\vartheta_2}{\vartheta_2^2} \ll \frac{1}{\sigma^{m(y,\rho)}} \mathcal{L}_1(\sigma)^{\alpha+1}. \tag{2.77}$$

Les équations (2.73) et (2.77) fournissent alors

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{n^{1+\sigma}} \sup_{u,v_1,v_2} |F_3(u,v_1,v_2,\vartheta_2)|^2 \frac{\mathrm{d}\vartheta_2}{\vartheta_2^2} \ll \frac{1}{\sigma^{m(y,\rho)}} \mathcal{L}_1(\sigma)^{\alpha+1}. \tag{2.78}$$

Enfin, le Théorème 2.4.1, qui sera énoncé et démontré dans la section suivante, fournit la majoration

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu^2(n)}{n^{1+\sigma}} g(n) \log n \Delta^*(n,\chi)^2 \ll \frac{1}{\sigma^{\max\{y+1,m(y,\rho)\}}} \mathcal{L}_1(\sigma)^{\alpha}, \tag{2.79}$$

valable lorsque χ est un caractère de Dirichlet non principal.
En combinant les équations (2.72), (2.78) et (2.79) à l'inégalité (2.71), nous obtenons

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu^2(n)}{n^{1+\sigma}} g(n) D(n,\boldsymbol{\chi}) \ll \frac{1}{\sigma^{\max\{y+1,m(y,\rho)\}}} \mathcal{L}_1(\sigma)^{\alpha},$$

ce qui correspond à l'énoncé du Théorème 2.3.1 pour $D(n,\boldsymbol{\chi})$.

2.4 Démonstration du Théorème 2.1.1

2.4.1 Majoration de $\Delta^*(n,\chi)$

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 2.4.1. *Soient χ un caractère de Dirichlet non principal, A, c des constantes strictement positives, $\eta \in]0,1[$ et $g \in \mathcal{M}_A(\chi,c,\eta)$. Il existe une constante $\alpha > 0$, dépendant au plus de g, χ, c et η, telle que nous ayons, uniformément pour $\sigma \in]0,\frac{1}{10}[$*

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu^2(n)}{n^{1+\sigma}} g(n) \Delta^*(n,\chi)^2 \ll \frac{1}{\sigma^{\max\{y,m(y,\rho)-1\}}} \mathcal{L}_1(\sigma)$$

où $y = y(g)$, ρ est défini en (2.9), $\mathcal{L}_1(\sigma)$ en (2.50) et $m(y,\rho)$ en (2.10).

Démonstration. Nous commençons par utiliser la majoration (2.30) du Lemme 2.2.3. Le membre de droite du majorant ne pose aucune difficulté, puisque nous avons

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu^2(n)}{n^{1+\sigma}} g(n) \tau(n)^{1/q} \ll \frac{1}{\sigma^{y2^{1/q}}} = \frac{1}{\sigma^{y+O(1/q)}}.$$

Le terme q sera de l'ordre de $\sqrt{\frac{\log(1/\sigma)}{\log_2(1/\sigma)}}$, donc

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu^2(n)}{n^{1+\sigma}} g(n) \tau(n)^{1/q} \ll \frac{\mathcal{L}_1(\sigma)}{\sigma^y}.$$

Nous nous intéressons donc au membre de gauche du majorant de (2.30). Le Lemme 2.2.5, nous permet de considérer uniquement les entiers n pour lesquels le facteur $E(n)$ n'est pas trop petit, ce qui nous amène à étudier la somme

$$L_q^{\dagger}(\sigma) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu^2(n)}{n^{1+\sigma}} g(n) M_{2q}^{\dagger}(n,\chi)^{1/q}$$

où $M_{2q}^{\dagger}(n,\chi)$ est défini en (2.28). Plus précisément nous étudions

$$L_{T,q}^{\dagger}(\sigma)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+\sigma}}g(n)M_{2q}^{\dagger}(n,\chi)^{1/q}$$

où a_n et b_n sont définis en (2.49) et T un paramètre que nous fixerons par la suite. Nous employons alors la méthode différentielle de [5] pour majorer cette somme.

Pour cela, nous utilisons l'égalité

$$\Delta(np,\chi,u,v)=\Delta(n,\chi,u,v)+\chi(p)\Delta(n,\chi,u-\log p,v)$$

valable pour tout $(n,p)=1$ si p est premier. Ainsi,

$$M_{2q}^{\dagger}(np,\chi)\leqslant 6M_{2q}^{\dagger}(n,\chi)+W_q^{\dagger}(n,p)$$

où

$$W_q^{\dagger}(n,p):=(1+q)\sum_{j=1}^{q-1}\binom{2q}{2j}N_{j,q}^{\dagger}(n,\chi,\log p).$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}L_{T,q}^{\dagger}(s)&=\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}}g(n)M_{2q}^{\dagger}(n,\chi)^{1/q}\log b_n\\
&\leqslant\sum_{p>T}g(p)\frac{\log p}{p^{1+s}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}}g(n)M_{2q}^{\dagger}(np,\chi)^{1/q}\\
&\leqslant\sum_{p>T}g(p)\frac{\log p}{p^{1+s}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}}g(n)\big(6M_{2q}^{\dagger}(n,\chi)+W_q^{\dagger}(n,p)\big)^{1/q}\\
&\leqslant\sum_{p>T}g(p)\frac{\log p}{p^{1+s}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}}g(n)\Big(\big(6M_{2q}^{\dagger}(n,\chi)\big)^{1/q}+W_q^{\dagger}(n,p)^{1/q}\Big)\\
&\leqslant\frac{6^{1/q}(y+as)}{s}L_{T,q}^{\dagger}(s)+\sum_{n\geqslant 1}g(n)\frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}}\sum_{p>T}g(p)\frac{\log p}{p^{1+s}}W_q^{\dagger}(n,p)^{1/q}.
\end{aligned}$$

où a est une constante absolue. Une inégalité de Hölder fournit

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}L_{T,q}^{\dagger}(s)\leqslant&\frac{6^{1/q}(y+as)}{s}L_{T,q}^{\dagger}(s)\\
&+\sum_{n\geqslant 1}g(n)\frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}}\Big(\sum_{p>T}g(p)\frac{\log p}{p}W_q^{\dagger}(n,p)\Big)^{1/q}\Big(\sum_{p>T}g(p)\frac{\log p}{p^{1+sq/(q-1)}}\Big)^{(q-1)/q}.
\end{aligned}$$

L'application du Lemme 2.2.8 et une inégalité de Hölder permettent ainsi d'avoir

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}L_{T,q}^{\dagger}(s)\leqslant&\frac{6^{1/q}(y+as)}{s}L_{T,q}(s)\\
&+\frac{A}{s^{1-1/q}}\Big(L_{T,q}^{\dagger}(s)\Big)^{(q-2)/(q-1)}\Big(\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}}g(n)\widehat{\tau}_0(n,\chi)\Big)^{1/(q-1)}\\
&+B_1\frac{(\log T)^{9y}}{s^{9y+1-1/q}\,\mathrm{e}^{-c/q(\log T)^{\eta}}},
\end{aligned}$$

où A et B_1 sont des constantes absolues. Le Lemme 2.2.15 fournit une majoration du terme

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}}g(n)\widehat{\tau}_0(n,\chi).$$

En effet

$$\begin{aligned}\widehat{\tau}_0(n,\chi) &= \Big(\sum_{d|n}\Big(\int_{\mathbb{R}}|\tau(d,\chi,\vartheta)|^2\frac{\mathrm{d}\vartheta}{1+\vartheta^2}\Big)^q\Big)^{1/q}\\ &\leqslant \tau(n)^{1/q}\max_{d|n}\Big(\int_{\mathbb{R}}|\tau(d,\chi,\vartheta)|^2\frac{\mathrm{d}\vartheta}{1+\vartheta^2}\Big)\\ &\leqslant \tau(n)^{1/q}\int_{\mathbb{R}}\max_{d|n}\left(|\tau(d,\chi,\vartheta)|^2\right)\frac{\mathrm{d}\vartheta}{1+\vartheta^2},\end{aligned}$$

ce qui nous permet d'utiliser ce lemme.

Remarque 2.4.2. Nous ne savons pas actuellement si cette majoration de $\widehat{\tau}_0(n,\chi)$ est optimale. Il semble peu probable qu'elle le soit, cependant, c'est la plus efficace connue à ce jour.

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}L^{\dagger}_{T,q}(s) \leqslant &\frac{6^{1/q}(y+as)}{s}L_{T,q}(s)+A\Big(L_{T,q}(s)\Big)^{(q-2)/(q-1)}\frac{1}{s^{1+m(y,\rho)/(q-1)-1/q+O(1/q^2)}}\\ &+B_1\frac{(\log T)^{9y}}{s^{9y+1-1/q}\,\mathrm{e}^{-c/q(\log T)^{\eta}}},\end{aligned}$$

où $m(y,\rho)$ est défini en (2.10). En posant

$$\varepsilon := B_1(\log T)^{9y}e^{-(\log T)^{\eta}c/q},\quad \beta := 9y-1/q,$$

nous obtenons

$$-L^{\dagger\prime}_{T,q}(s)\leqslant \phi(s,L^{\dagger}_{T,q}(s)),$$

avec

$$\phi(s,x) := 6^{1/q}\frac{y+as}{s}x+\frac{Ax^{(q-2)/(q-1)}}{s^{1-1/q+m(y,\rho)/(q-1)}}+\frac{\varepsilon}{s^{\beta+1}}.$$

Posons

$$\gamma := \max\Big(m(y,\rho)-\frac{q-1}{q}+O\Big(\frac{q-1}{q^2}\Big),y+\frac{b}{q}\Big),\quad X(s) := \frac{K}{s^{\gamma}}+\frac{\varepsilon}{s^{\beta}}$$

pour une certaine constante b, de sorte que

$$\gamma+1\geqslant 1-\frac{1}{q}+\frac{m(y,\rho)}{q-1}+O(\frac{1}{q^2})+\frac{q-2}{q-1}\gamma,$$

et

$$\gamma > 6^{1/q}(y+as_0),$$

où s_0 est petit devant $\frac{1}{q}$. Pour s_0 suffisamment petit devant $\frac{1}{q}$, en supposant les inégalités

$$\begin{aligned}\gamma &> 6^{1/q}(y+as_0)+AK^{-1/(q-1)},\\ \beta &> 6^{1/q}(y+as_0)+AK^{-1/(q-1)}+1,\end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned}
-X'(s) =& \frac{K\gamma}{s^{\gamma+1}} + \frac{\epsilon\beta}{s^{\beta+1}} \\
\geqslant& \frac{6^{1/q}K(y+as)}{s^{\gamma+1}} + \frac{\varepsilon 6^{1/q}(y+as)}{s^{\beta+1}} + \frac{AK^{(q-2)/(q-1)}}{s^{\gamma+1}}\Big(1+\frac{\varepsilon s^{\gamma}}{Ks^{\beta}}\Big) \\
&+ \frac{\varepsilon}{s^{\beta+1}} \\
\geqslant& \frac{6^{1/q}K(y+as)}{s^{\gamma+1}} + \frac{\varepsilon 6^{1/q}(y+as)}{s^{\beta+1}} \\
&+ \frac{AK^{(q-2)/(q-1)}}{s^{\gamma+1}}\Big(1+\frac{\varepsilon s^{\gamma}}{Ks^{\beta}}\Big)^{(q-2)/(q-1)} + \frac{\varepsilon}{s^{\beta+1}} \\
\geqslant& \phi\big(s, X(s)\big).
\end{aligned}$$

Remarque 2.4.3. Les hypothèses sur γ et β sont vérifiées pour s_0 suffisamment petit devant $\frac{1}{q}$ dès que nous choisissons K de l'ordre de $(qC_2)^q$ pour une constante C_2 assez grande.

Comme tout ceci n'est valable que pour $s \leqslant \frac{1}{\log T}$, nous notons $s_0 = \frac{1}{\log T}$. Le réel T sera choisi de telle sorte que $\frac{1}{\log T}$ soit petit devant $\frac{1}{q}$. Remarquons dans ce cas que

$$L^{\dagger}_{T,q}(s) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}} \tau_3(n)^2 \ll \frac{(\log T)^{9y}}{s^{9y}}.$$

Ainsi

$$L^{\dagger}_{T,q}(s_0) \leqslant X(s_0)$$

en choisissant $K = (qC_2)^q(\log T)^{18}$. Le lemme 70.2 de [17] permet alors de montrer l'inégalité suivante

$$L^{\dagger}_{T,q}(s) \leqslant \frac{(qC_2)^q(\log T)^{18}}{s^{m(y,\rho)-1+1/q}} + \frac{B(\log T)^{9y}}{\mathrm{e}^{(\log T)^{\eta}c/q}\, s^{9y-1/q}}.$$

Nous choisissons T de sorte que

$$\mathrm{e}^{(\log T)^{\eta}c/q} = \sigma^{-9y}$$

ce qui implique

$$\Big(\frac{9yq\log\frac{1}{\sigma}}{c}\Big)^{1/\eta} = \log T.$$

Dans le cas où q est de l'ordre de $\sqrt{\frac{\log(1/\sigma)}{\log_2(1/\sigma)}}$, nous avons bien $\sigma \leqslant \frac{1}{\log T}$. De plus, le terme dominant est celui de gauche, ainsi

$$L^{\dagger}_{T,q}(\sigma) \ll \frac{1}{\sigma^{\max\{y, m(y,\rho)-1\}}}\mathcal{L}_1(\sigma)^{\alpha},$$

où α est une constante strictement positive. □

2.4.2 Fin de la démonstration

Dans cette partie, nous utilisons les différents théorèmes et lemmes vus précédemment afin de démontrer le Théorème 2.1.1. Pour commencer nous appliquons la méthode de Rankin, ainsi que la formule (25) de [32] pour obtenir la majoration

$$\mathfrak{S}(x, g, \boldsymbol{\chi}) \ll \frac{x^{1+\sigma}}{\log x}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu^2(n)}{n^{1+\sigma}} g(n)\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi})^2 := \mathfrak{S}_0(\sigma, g, \boldsymbol{\chi}).$$

Le Lemme 2.2.1 permet de majorer $\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi})^2$. La contribution des deuxième et troisième termes du majorant est, selon le Théorème 2.4.1 $\ll \frac{1}{\sigma^{\max\{y,m(y,\rho)-1\}}}\mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha$. Pour traiter le premier terme du majorant, nous utilisons le Lemme 2.2.5 pour ne travailler que sur la somme suivante

$$L_q(\sigma) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu^2(n)}{n^{1+\sigma}} g(n) M_{2q}(n,\boldsymbol{\chi})^{1/q},$$

où $M_q(n,\boldsymbol{\chi})$ est défini en (2.25). Plus précisément, nous étudions

$$L_{T,q}(\sigma) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{a_n b_n^{1+\sigma}} M_{2q}(n,\boldsymbol{\chi})^{1/q},$$

où a_n et b_n sont définis en (2.49). En dérivant par rapport à σ la fonction précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned}
-L'_{T,q}(\sigma) &= \sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+\sigma}} g(n) M_{2q}(n,\boldsymbol{\chi})^{1/q} \log b_n \\
&= \sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+\sigma}} g(n) M_{2q}(n,\boldsymbol{\chi})^{1/q} \sum_{\substack{p|n \\ p>T}} \log p \\
&= \sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+\sigma}} g(n) \sum_{p>T} \frac{g(p)}{p^{1+\sigma}} \log p M_{2q}(np,\boldsymbol{\chi})^{1/q}.
\end{aligned}$$

Pour majorer $M_{2q}(np,\boldsymbol{\chi})$, il nous faut dans un premier temps calculer $\Delta_3(np,\boldsymbol{\chi},\mathbf{u},\mathbf{v})$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\Delta_3(np,\boldsymbol{\chi},\mathbf{u},\mathbf{v}) =& \Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},\mathbf{u},\mathbf{v}) + \chi_1(p)\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},u_1-\log p,u_2,\mathbf{v}) \\
&+ \chi_2(p)\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},u_1,u_2,\mathbf{v}).
\end{aligned} \tag{2.80}$$

En prenant le module à la puissance $2q$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left|\Delta_3(np,\boldsymbol{\chi},\mathbf{u},\mathbf{v})\right|^{2q} \\
&\leqslant \sum_{i+j+k=2q} \binom{2q}{i,j,k} \left|\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},\mathbf{u},\mathbf{v})\right|^i \left|\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},u_1-\log p,u_2,\mathbf{v})\right|^j \left|\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},u_1,u_2-\log p,\mathbf{v})\right|^k
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Si les trois exposants i,j,k sont non nuls, nous considérons le plus grand de ces trois exposants. Nous pouvons supposer sans perdre de généralité qu'il s'agit de k. Nous décomposons alors k de la manière suivante

$$k = k_1 + k_2,$$

où k_1 et k_2 vérifient

$$\begin{aligned}
i + k_1 &= q \\
j + k_2 &= q.
\end{aligned}$$

Nous appliquons alors l'inégalité

$$ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$$

à

$$a = \Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})\Big|^i \Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v})\Big|^{k_1}$$

et

$$b = \Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, u_1 - \log p, u_2, \mathbf{v})\Big|^j \Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v})\Big|^{k_2}$$

afin d'obtenir

$$\begin{aligned}
&\Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})\Big|^i \Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, u_1 - \log p, u_2, \mathbf{v})\Big|^j \Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v})\Big|^k \\
\leqslant &\frac{1}{2}\Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})\Big|^{2i} \Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v})\Big|^{2(q-i)} \\
&+ \frac{1}{2}\Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, u_1 - \log p, u_2, \mathbf{v})\Big|^{2j} \Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v})\Big|^{2(q-j)}.
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Si l'un des trois exposants est nul, disons k, nous utilisons les majorations suivantes.

$$\begin{aligned}
&\Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})\Big|^{2h+1} \Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v})\Big|^{2q-2h-1} \\
\leqslant &\frac{1}{2}\Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})\Big|^{2h} \Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v})\Big|^{2q-2h} \\
&+ \frac{1}{2}\Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})\Big|^{2h+2} \Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v})\Big|^{2q-2h-2} \qquad (1 \leqslant h \leqslant q-2), \\
&\Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})\Big|\Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v})\Big|^{2q-1} \\
\leqslant &\frac{1}{2q}\Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v})\Big|^{2q} \\
&+ \frac{q}{2}\Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})\Big|^{2} \Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v})\Big|^{2q-2}, \\
&\Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})\Big|^{2q-1} \Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v})\Big| \\
\leqslant &\frac{q}{2}\Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})\Big|^{2(q-1)} \Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v})\Big|^{2} \\
&+ \frac{1}{2q}\Big|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})\Big|^{2q}.
\end{aligned}$$

La majoration de $M_{2q}(np, \boldsymbol{\chi})$ fait donc intervenir les quantités $N_{1,j,q}(n, \boldsymbol{\chi}, \log p)$ et $N_{2,j,q}(n, \boldsymbol{\chi}, \log p)$ définies respectivement en (2.36) et (2.37). Pour la suite, nous définissons

$$n(y, \rho) := \max\{y+1, (\rho+2)y, 3y-1\} = \max\{y+1, m(y, \rho)\}. \tag{2.83}$$

Le Lemme 2.2.9 fournit alors

$$\begin{aligned}
-L'_{T,q}(s) \leqslant & \frac{9^{1/q}(y+as)}{s} L_{T,q}(s) \\
& + \frac{A}{s^{1-1/q}} \Big(L_{T,q}(s)\Big)^{(q-2)/(q-1)} \Big(\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{a_n b_n^{1+s}} C(n,\boldsymbol{\chi})\Big)^{1/q} \\
& \Big(\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{a_n b_n^{1+s}} \widehat{\tau}_2(n,\boldsymbol{\chi})\Big)^{1/q(q-1)} \\
& + \frac{A}{s^{1-1/q}} \Big(L_{T,q}(s)\Big)^{(q-2)/(q-1)} \Big(\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{a_n b_n^{1+s}} C(n,{}^t\boldsymbol{\chi})\Big)^{1/q} \\
& \Big(\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{a_n b_n^{1+s}} \widehat{\tau}_2(n,\boldsymbol{\chi})\Big)^{1/q(q-1)} \\
& + \frac{A}{s^{1-1/q}} \Big(L_{T,q}(s)\Big)^{(q-2)/(q-1)} \Big(\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{a_n b_n^{1+s}} D(n,\boldsymbol{\chi})\Big)^{1/q} \\
& \Big(\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{a_n b_n^{1+s}} \widehat{\tau}_2(n,\boldsymbol{\chi})\Big)^{1/q(q-1)} \\
& + B_1 \frac{(\log T)^{9y}}{s^{9y+1-1/q}\, \mathrm{e}^{-c/q(\log T)^\eta}}
\end{aligned}$$

où ${}^t\boldsymbol{\chi} = (\chi_2, \chi_1)$. D'après le Théorème 2.3.1, nous avons

$$\begin{aligned}
-L'_{T,q}(s) \leqslant & \frac{9^{1/q}(y+as)}{s} L_{T,q}(s) + A\Big(L_{T,q}(s)\Big)^{(q-2)/(q-1)} \frac{\mathcal{L}_1(s)^{\alpha/(q-1)}}{s^{1+(n(y,\rho)/q-1/q+9y/q(q-1)}} \\
& + B_1 \frac{(\log T)^{9y}}{s^{9y+1-1/q}\, \mathrm{e}^{-c/q(\log T)^\eta}}.
\end{aligned}$$

En posant

$$\varepsilon := B_1 (\log T)^{9y} e^{-(\log T)^\eta c/q}, \quad \beta := 9y - 1/q,$$

nous obtenons

$$-L'_{T,q}(s) \leqslant \phi_2(s, L_{T,q}(s)),$$

avec

$$\phi_2(s,x) := 9^{1/q} \frac{y+as}{s} x + \frac{A\mathcal{L}_1(\sigma)^{\alpha/(q-1)} x^{(q-2)/(q-1)}}{s^{1-1/q+n(y,\rho)/(q-1)+9y/q(q-1)}} + \frac{\varepsilon}{s^{\beta+1}}.$$

Posons

$$\gamma_2 := \max\Big(y + \frac{b}{q}, n(y,\rho) - 1 + \frac{9y}{q}\Big), \quad X_2(s) := \frac{K_2}{s^{\gamma_2}} + \frac{\varepsilon}{s^\beta},$$

de sorte que nous ayons les inégalités suivantes,

$$\gamma_2 + 1 \geqslant 1 - \frac{1}{q} + \frac{n(y,\rho)}{q-1} + \frac{9y}{q(q-1)} + \frac{q-2}{q-1}\gamma_2,$$

et

$$\gamma_2 > 9^{1/q}(y + as_0)$$

pour s_0 suffisamment petit devant $\frac{1}{q}$. Pour que X_2 vérifie

$$-X'_2(s) \geqslant \phi_2(s, X_2(s)),$$

il faut choisir K_2 de l'ordre de $(qC_3)^q\mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha$ où C_3 est une constante suffisamment grande. Nous obtenons finalement, pour les choix de T et de q définis en (2.51) et (2.52),

$$L_{T,q}(\sigma) \ll \frac{1}{\sigma^{n(y,\rho)-1}}\mathcal{L}_1(\sigma)^{\alpha_1},$$

où $\alpha_1 > \alpha$. En spécifiant $\sigma = 1/\log x$, nous obtenons, d'après (2.83),

$$\mathfrak{S}(x,g,\boldsymbol{\chi}) \ll x(\log x)^{\max\{y-1,(\rho+2)y-2,3y-3\}}\mathcal{L}(x)^{\alpha_1}.$$

2.5 Démonstration du Théorème 2.1.4

Démonstration. L'inégalité

$$\sum_{n\geqslant x}\mu^2(n)y^{\omega(n)}\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi})^2 \gg x(\log x)^{y-1}$$

se déduit de la minoration triviale

$$\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi})^2 \geqslant 1.$$

La deuxième inégalité est obtenue par application du théorème de Parseval. Comme la fonction $\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},\mathbf{u},\mathbf{v})$ est nulle si u_1 ou u_2 est plus grand que $\log n$ en valeurs absolue, nous pouvons écrire que pour tout $n \leqslant x$

$$\Delta_3^2(n,\boldsymbol{\chi}) \gg \frac{1}{(\log x)^2}\int_{\mathbb{R}^2\times[0,1]^2}|\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},\mathbf{u},\mathbf{v})|^2\mathrm{d}\mathbf{u}\mathrm{d}\mathbf{v}. \tag{2.84}$$

La fonction $\mathbf{u} \to \Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},\mathbf{u},\mathbf{v})$ est intégrable et de carré intégrable, nous pouvons donc utiliser le théorème de Parseval pour calculer l'intégrale ci-dessus. Nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}^2\times[0,1]^2}|\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},\mathbf{u},\mathbf{v})|^2\mathrm{d}\mathbf{u}\mathrm{d}\mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^2\times[0,1]^2}|\tau(n,\boldsymbol{\chi},\boldsymbol{\vartheta})|^2\prod_{i=1}^{2}\frac{\sin^2(v_i\vartheta_i/2)}{(\vartheta_i/2)^2}\mathrm{d}\boldsymbol{\vartheta}\mathrm{d}\mathbf{v},$$

où $\tau(n,\boldsymbol{\chi},\boldsymbol{\vartheta})$ est défini en (2.34).

L'avantage de cette nouvelle fonction est qu'elle est multiplicative, nous savons donc estimer sa fonction sommatoire. Tout d'abord le calcul de l'intégrale en v_1 et v_2 montre que

$$\int_{\mathbb{R}^2\times[0,1]^2}|\Delta_3(n,\boldsymbol{\chi},\mathbf{u},\mathbf{v})|^2\mathrm{d}\mathbf{u}\mathrm{d}\mathbf{v} \gg \int_{[0,1]^2}|\tau(n,\boldsymbol{\chi},\boldsymbol{\vartheta})|^2\mathrm{d}\boldsymbol{\vartheta}. \tag{2.85}$$

Soit $F(s)$ la série de Dirichlet associée à la fonction

$$\mu^2(n)y^{\omega(n)}|\tau(n,\boldsymbol{\chi},\boldsymbol{\vartheta})|^2.$$

Pour $\mathfrak{Re}(s) > 1$, cette série de Dirichlet admet le développement en produit eulérien suivant

$$F(s) = \prod_p\Big(1+\frac{y}{p^s}|1+\chi_1(p)p^{i\vartheta_1}+\chi_2(p)p^{i\vartheta_2}|^2\Big)$$

que nous pouvons réécrire sous la forme

$$\begin{aligned}F(s) = \prod_p\Big\{1+\frac{y}{p^s}\Big(&3+\chi_1(p)p^{i\vartheta_1}+\overline{\chi_1(p)}p^{-i\vartheta_1}+\chi_2(p)p^{i\vartheta_2}+\overline{\chi_2(p)}p^{-i\vartheta_2}\\ &+\chi_1(p)\overline{\chi_2(p)}p^{i(\vartheta_1-\vartheta_2)}+\overline{\chi_1(p)}\chi_2(p)p^{i(\vartheta_2-\vartheta_1)}\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

Dans le cas où $\chi_1\overline{\chi_2}$ n'est pas principal, nous avons

$$\begin{aligned} F(s) =&\zeta(s)^{3y}L(s-i\vartheta_1,\chi_1)^yL(s+i\vartheta_1,\overline{\chi_1})^yL(s-i\vartheta_2,\chi_2)^yL(s+i\vartheta_2,\overline{\chi_2})^y \\ &L(s-i(\vartheta_1-\vartheta_2),\chi_1\overline{\chi_2})^yL(s+i(\vartheta_1-\vartheta_2),\overline{\chi_1}\chi_2)^yF_1(s), \end{aligned} \tag{2.86}$$

où $F_1(s)$ est une série de Dirichlet absolument convergente pour $\Re e(s) > 3/4$.

La méthode de Selberg-Delange assure alors que lorsque $|\vartheta_1|$, $|\vartheta_2|$ et $|\vartheta_1-\vartheta_2|$ sont plus grands que $c/\log(x)$ pour une certaine constante c, nous avons

$$\sum_{n\leqslant x}\mu^2(n)y^{\omega(n)}|\tau(n,\boldsymbol{\chi},\boldsymbol{\vartheta})|^2 \gg x\log(x)^{3y-1}. \tag{2.87}$$

Les formules (2.84),(2.85) et (2.87) permettent de conclure dans le cas où $\chi_1\overline{\chi_2}$ est non principal.

Dans le cas où $\chi_1=\chi_2=\chi$, les deux dernières fonctions L qui apparaissaient dans la formule (2.86) ne sont plus des fonctions L mais des fonctions ζ, cependant le fait que leur argument ne soit pas s nous empêche d'appliquer la méthode de Selberg-Delange pour conclure. Afin de contourner cette difficulté, nous constatons que si ϑ_1 et ϑ_2 sont très proches, alors $\zeta\big(s+i(\vartheta_1-\vartheta_2)\big)$ est proche de $\zeta(s)$, ce qui nous conduit à énoncer le lemme suivant.

***Lemme* 2.5.1.** *Pour $x\geqslant 16$, il existe une constante c telle que pour $|\vartheta_1-\vartheta_2|\leqslant c/\log x$, il existe une constante B dépendant uniquement de c telle que pour tout $n\leqslant x$ sans facteur carré*

$$\Big|\log\Big(\frac{f(n)}{g(n)}\Big)\Big|\leqslant B,$$

où

$$f(n)=|\tau(n,\chi,\chi,\vartheta_1,\vartheta_2)|^2$$

et

$$g(n)=|\tau(n,\chi,\chi,\vartheta_1,\vartheta_1)|^2.$$

Supposons le lemme démontré. Dans ce cas sur la bande $|\vartheta_1-\vartheta_2|\leqslant c/\log x$, nous avons

$$\sum_{n\leqslant x}\mu^2(n)y^{\omega(n)}f(n)\gg\sum_{n\leqslant x}\mu^2(n)y^{\omega(n)}g(n) \tag{2.88}$$

et si nous notons G la série de Dirichlet associée à $\mu^2(n)y^{\omega(n)}g(n)$, nous pouvons écrire

$$G(s)=\zeta(s)^{5y}L(s-i\vartheta_1,\chi)^{2y}L(s+i\vartheta_1,\chi)^{2y}G_1(s),$$

où $G_1(s)$ est une série de Dirichlet absolument convergente pour $\Re e(s) > 3/4$.

La méthode de Selberg-Delange assure alors que si $|\vartheta_1|\geqslant c'/\log x$ pour une certaine constante $c'>0$, alors

$$\sum_{n\leqslant x}\mu^2(n)y^{\omega(n)}g(n)\gg x\log(x)^{5y-1}. \tag{2.89}$$

Les formules (2.50), (2.85), (2.88) (qui n'est valable que sur un ensemble de mesure $1/\log x$) et (2.89) permettent de conclure dans le cas où $\chi_1=\chi_2$. □

Il nous reste à démontrer le lemme.

Démonstration. Pour $p \leqslant x$, nous avons

$$\frac{\tau(p,\chi,\chi,\vartheta_1,\vartheta_2)}{\tau(p,\chi,\chi,\vartheta_1,\vartheta_1)} = \frac{1+\chi(p)\big(p^{i\vartheta_1}+p^{i\vartheta_2}\big)}{1+2\chi(p)p^{i\vartheta_1}}.$$

Par inégalité triangulaire, le module du dénominateur est toujours plus grand que 1, nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}\frac{\tau(p,\chi,\chi,\vartheta_1,\vartheta_2)}{\tau(p,\chi,\chi,\vartheta_1,\vartheta_1)} &= \frac{1+2\chi(p)p^{i\vartheta_1}+\chi(p)\big(p^{i\vartheta_2}-p^{i\vartheta_1}\big)}{1+2\chi(p)p^{i\vartheta_1}}\\ &= 1+O\big((\vartheta_1-\vartheta_2)\log(p)\big).\end{aligned}$$

Ainsi, si la différence $\vartheta_1-\vartheta_2$ est suffisamment petite par rapport à $1/\log x$, d'une part la fraction ne s'annule pas, nous pouvons donc considérer le logarithme du module de cette fraction, et d'autre part, le développement limité du logarithme nous assure que

$$\log\Big|\frac{\tau(p,\chi,\chi,\vartheta_1,\vartheta_2)}{\tau(p,\chi,\chi,\vartheta_1,\vartheta_1)}\Big| = O\big((\vartheta_1-\vartheta_2)\log(p)\big).$$

Nous avons donc pour tout $n \leqslant x$ sans facteur carré

$$\begin{aligned}\log\Big(\frac{f(n)}{g(n)}\Big) &= \sum_{p|n} 2\log\Big|\frac{\tau(p,\chi,\vartheta_1,\vartheta_2)}{\tau(p,\chi,\vartheta_1,\vartheta_1)}\Big|\\ &= \sum_{p|n} O\big((\vartheta_1-\vartheta_2)\log(p)\big)\\ &= O\big((\vartheta_1-\vartheta_2)\log(n)\big)\\ &= O(1).\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Chapitre 3

Sur le nombre d'idéaux dont la norme est la valeur d'une forme binaire de degré 3

Ce chapitre est la reproduction intégrale de l'article [24] disponible sur Arxiv.

3.1 Introduction et résultats

Lorsque $\mathcal{R}$ désigne un domaine de $\mathbb{R}^2$ et $\xi \in \mathbb{R}_+^*$, nous désignons par $\mathcal{R}(\xi)$ le domaine de $\mathbb{R}^2$ obtenu en dilatant $\mathcal{R}$ par ξ, c'est-à-dire

$$\mathcal{R}(\xi) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{x}/\xi \in \mathcal{R}\}.$$

Soit $\mathbb{K}$ une extension cyclique de $\mathbb{Q}$ de degré 3, soit $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$ son groupe de Galois et χ un caractère non trivial de G. L'application χ est donc un caractère de Dirichlet non trivial d'ordre 3 et nous notons par la suite q son conducteur.
Rappelons que pour f et g deux fonctions arithmétiques, le produit de convolution $f * g$ est la fonction arithmétique définie par

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\Big(\frac{n}{d}\Big) \qquad \forall n \geqslant 1.$$

Nous définissons pour la suite la fonction arithmétique r_3 par

$$r_3(n) := (1 * \chi * \chi^2)(n), \tag{3.1}$$

où la dépendance en χ est omise. La quantité $r_3(n)$ compte le nombre d'idéaux de l'anneau des entiers du corps de nombre $\mathbb{K}$ dont la norme vaut n. Cela provient du théorème 6 de [19].

Nous désignons par $F \in \mathbb{Z}[X, Y]$ une forme binaire, homogène de degré 3. Nous proposons dans cet article une estimation asymptotique en ξ de la quantité $Q(F, \mathcal{R}, \xi)$ définie de la manière suivante

$$Q(F, \xi, \mathcal{R}) := \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^2 \cap \mathcal{R}(\xi)} r_3(F(\boldsymbol{x})), \tag{3.2}$$

lorsque le domaine $\mathcal{R}$ et la forme binaire F vérifient les hypothèses suivantes :

(H1)	Le domaine $\mathcal{R}$ est un ouvert borné convexe dont la frontière est continuement différentiable ;
(H2)	$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}$, $\|\|\boldsymbol{x}\|\| \leqslant \sigma$;
(H3)	$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}$, $\|F(\boldsymbol{x})\| \leqslant \vartheta^3$;
(H4)	La forme F est irréductible sur $\mathbb{K}$,

pour certaines valeurs $\sigma > 0$ et $\vartheta > 0$. Cela peut être vu comme une version analogue de l'étude de [4] qui étudie la somme de $(1 * \chi)(T(\boldsymbol{x}))$ lorsque χ est le caractère non principal modulo 4 et T une forme binaire quartique.
Nous introduisons les ensembles

$$\mathcal{E} := \bigcup_{\alpha \in G_1} \{n \in \mathbb{N}^* : \exists d \mid q^\infty,\, n \equiv \alpha d \bmod dq\} \tag{3.3}$$

où

$$G_1 := \mathrm{Ker}(\chi) \subset (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$$

et pour $d \mid q^\infty$, nous notons $\mathcal{E}_d$ la projection de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{E}_d = \bigcup_{\alpha \in G_1} \{n \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} : \exists d_1 \mid q^\infty,\, n \equiv \alpha d \bmod (d_1 q, d)\}. \tag{3.4}$$

Enfin, nous définissons l'exposant

$$\eta := 0,0034. \tag{3.5}$$

Rappelons que pour $\{s \ : \ \mathfrak{Re}(s) > 0\}$ et χ un caractère de Dirichlet non principal, la fonction L de Dirichlet est définie par

$$L(s, \chi) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Théorème 3.1.1. *Soient $\varepsilon > 0$, $\xi > 0$, $\mathbb{K}$ une extension cyclique de $\mathbb{Q}$ de degré 3, χ un caractère non principal de G, $F \in \mathbb{Z}[X, Y]$ une forme binaire de degré 3, $\mathcal{R}$ un domaine de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $\vartheta > 0$ et $\sigma > 0$ tels que les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4) sont vérifiées et sous les conditions*

$$1/\sqrt{\xi} \leqslant \sigma \leqslant \xi^{3/2}, \quad 1/\sqrt{\xi} \leqslant \vartheta \leqslant \xi^{3/2},$$

nous avons

$$Q(F, \xi, \mathcal{R}) = K(F) L(1, \chi) L(1, \chi^2) \mathrm{vol}(\mathcal{R}) \xi^2 + O\Big(\frac{\|\|F\|\|^\varepsilon (\sigma^2 + \vartheta^2) \xi^2}{(\log \xi)^\eta}\Big) \tag{3.6}$$

où $\|\|F\|\|$ désigne le maximum des coefficients de F et

$$K(F) := K_q(F) \prod_{p \nmid q} K_p(F) \tag{3.7}$$

avec

$$K_p(F) := \Big(1 - \frac{\chi(p)}{p}\Big)\Big(1 - \frac{\chi^2(p)}{p}\Big) \sum_{\nu \geqslant 0} \frac{\varrho_F^+(p^\nu)}{p^{2\nu}} (\chi * \chi^2)(p^\nu) \tag{3.8}$$

pour tout p premier avec q et

$$K_q(F) = \lim_{k \to \infty} \frac{3}{q^{2k}} \Big|\Big\{\boldsymbol{x} \in (\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z})^2 \ : F(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{E}_{q^k}\Big\}\Big|, \tag{3.9}$$

où $\mathcal{E}_{q^k}$ est défini en (3.4).

Remarque 3.1.2. Si de plus l'anneau des entiers $O_{\mathbb{K}}$ est principal, nous pouvons décomposer $K(F)$ en produit de facteurs non archimédiens qui possèdent chacun une interprétation géométrique. Nous étudierons ce cas dans la section 5.

Ce résultat repose sur la méthode utilisée dans [6] et nécessite le Théorème 3.2.9. Cependant, plusieurs difficultés techniques apparaissent. D'une part, le conducteur q de χ ne possède pas forcément un unique facteur premier, ce qui complique la paramétrisation de la section 3.2. D'autre part, l'exposant ρ apparaissant dans le Théorème 3.2.9 n'est pas suffisamment précis pour adapter directement les calculs menés dans [6].

Nous trouverons dans l'appendice B.4 de [8] une liste de corps $\mathbb{K}$ vérifiant les hypothèses du Théorème 3.1.1. On peut ainsi choisir $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[\alpha]$ où α est une racine d'un des polynômes suivants : $X^3 + X^2 - 2X - 1$, $X^3 - 3X - 1$, $X^3 - X^2 - 4X - 1$.

3.2 Rappels

3.2.1 Étude du nombre de solutions locales d'une équation polynomiale

Nous rappelons dans cette section les résultats préliminaires et les notations nécessaires à la démonstration du Théorème 3.1.1. Lorsque $F \in \mathbb{Z}[X, Y]$ est une forme binaire homogène de degré 3, nous notons $\mathcal{D}(F) := \mathrm{disc}(F)$ son discriminant

$$\mathcal{D}(F(X, Y)) = \mathcal{D}(F(X, 1)) = \mathcal{D}(F(1, Y)).$$

Lorsque $s \in \mathbb{N}^*$, nous posons

$$\varrho_F^-(s) := \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant s \\ F(a,1) \equiv 0 \bmod s}} 1, \qquad \varrho_F^+(s) := \sum_{\substack{1 \leqslant a,b \leqslant s \\ F(a,b) \equiv 0 \bmod s}} 1.$$

Nous introduisons ensuite les ensembles

$$\Lambda(s, F) := \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \ : \ s \mid F(m, n)\} \tag{3.10}$$

et

$$\Lambda^*(s, F) := \{(m, n) \in \Lambda(s, F) \ : \ (m, n, s) = 1\} \tag{3.11}$$

et nous posons

$$\varrho_F^*(s) := |\Lambda^*(s, F) \cap [0, s[^2|.$$

Lorsque le polynôme F est irréductible sur $\mathbb{Q}$, nous pouvons considérer k un corps de rupture du polynôme $F(X, 1)$ et la fonction zêta de Dedekind, ζ_k définie sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} : \Re e(s) > 1\}$. Les résultats suivants sont établis dans [6].

Proposition 3.2.1. *Soient $F \in \mathbb{Z}[X, Y]$ une forme binaire de degré 3 et $\mathbb{K}$ une extension cyclique de $\mathbb{Q}$ de degré 3 tels que F soit irréductible sur $\mathbb{K}$. Il existe des fonctions multiplicatives h_F^-, h_F^+ et h_F^* telles que pour tout $\Re e(s) > 1$, nous avons*

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\varrho_F^-(n)}{n^s} = \zeta_k(s) \sum_{n \geqslant 1} \frac{h_F^-(n)}{n^s} \tag{3.12}$$

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\varrho_F^+(n)}{n^{s+1}} = \zeta_k(s) \sum_{n \geqslant 1} \frac{h_F^+(n)}{n^s} \tag{3.13}$$

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\varrho_F^*(n)}{n^{s+1}} = \zeta_k(s) \sum_{n \geqslant 1} \frac{h_F^*(n)}{n^s}. \tag{3.14}$$

De plus, ces fonctions multiplicatives vérifient, pour tout $\kappa \in]0, 1/6[$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{|h_F^-(n)| + |h_F^+(n)| + |h_F^*(n)|}{n^{1-\kappa}} \ll ||F||^{\varepsilon}. \tag{3.15}$$

Le comportement moyen de $(\chi * \chi^2)(n)\varrho_F^{\pm}(n)$ découle des propriétés analytiques des fonctions $L_k(s,\chi)$ et $L_k(s,\chi^2)$ où nous avons posé

$$L_k(s,\chi) := \sum_{\mathcal{U}\in\mathcal{I}(\mathcal{O}_k)} \frac{\chi(N_{k/\mathbb{Q}}(\mathcal{U}))}{N_{k/\mathbb{Q}}(\mathcal{U})^s},$$

où $\mathcal{I}(\mathcal{O}_k)$ désigne l'ensemble des idéaux de l'anneau des entiers algébriques de k. Nous pouvons ainsi énoncer une version analogue de la proposition ci-dessus en prenant en compte les caractères χ et χ^2.

Proposition 3.2.2. *Soient* $\mathbb{K}$ *une extension cyclique de* $\mathbb{Q}$ *de degré* 3, χ *un caractère non principal de* $Gal(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$ *et* $F \in \mathbb{Z}[X,Y]$ *une forme binaire de degré* 3 *irréductible sur* $\mathbb{K}$. *Il existe des fonctions multiplicatives* $h_F^-(\,\cdot\,;\chi)$, $h_F^+(\,\cdot\,;\chi)$ *et* $h_F^*(\,\cdot\,;\chi)$ *telles que pour tout* $\Re e(s) > 1$, *nous avons*

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\chi(n)\varrho_F^-(n)}{n^s} = L_k(s,\chi)\sum_{n\geqslant 1}\frac{h_F^-(n;\chi)}{n^s} \tag{3.16}$$

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\chi(n)\varrho_F^+(n)}{n^{s+1}} = L_k(s,\chi)\sum_{n\geqslant 1}\frac{h_F^+(n;\chi)}{n^s} \tag{3.17}$$

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\chi(n)\varrho_F^*(n)}{n^{s+1}} = L_k(s,\chi)\sum_{n\geqslant 1}\frac{h_F^*(n;\chi)}{n^s}. \tag{3.18}$$

De plus, ces fonctions multiplicatives vérifient, pour tout $\kappa \in]0, 1/6[$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{|h_F^-(n;\chi)| + |h_F^+(n;\chi)| + |h_F^*(n;\chi)|}{n^{1-\kappa}} \ll ||F||^{\varepsilon}. \tag{3.19}$$

Les mêmes résultats restent valables si l'on remplace χ *par* χ^2.

Rappelons la définition de la fonction logarithme intégral, notée li. Pour tout $x \geqslant 2$,

$$\mathrm{li}(x) := \int_2^x \frac{1}{\log t}\mathrm{d}t.$$

Ces deux propositions nous permettent d'énoncer le lemme suivant, établi dans [19].

***Lemme* 3.2.3.** *Soient* $\mathbb{K}$ *une extension cyclique de* $\mathbb{Q}$ *de degré* 3, χ *un caractère non principal de* $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$ *et* $F \in \mathbb{Z}[X,Y]$ *une forme binaire de degré* 3 *irréductible sur* $\mathbb{K}$. *Il existe une constante* $c > 0$ *telle que, uniformément pour* $x \geqslant 2$

$$\sum_{p\leqslant x} \varrho_F^-(p) = \mathrm{li}(x) + O(x\,\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}}) \tag{3.20}$$

$$\sum_{p\leqslant x} \chi(p)\varrho_F^-(p) = O(x\,\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}}) \tag{3.21}$$

$$\sum_{p\leqslant x} \chi^2(p)\varrho_F^-(p) = O(x\,\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}}). \tag{3.22}$$

Nous avons les mêmes estimations en remplaçant la fonction $\varrho_F^-(p)$ *par* $\frac{\varrho_F^+(p)}{p}$ *ou* $\frac{\varrho_F^*(p)}{p}$.

***Lemme* 3.2.4.** *Soient $\varepsilon > 0$, $\mathbb{K}$ une extension cyclique de $\mathbb{Q}$ de degré 3, χ un caractère non principal de $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$ et $F \in \mathbb{Z}[X, Y]$ une forme binaire de degré 3 irréductible sur $\mathbb{K}$. Nous avons, uniformément pour $y \geqslant 2$*

$$\sum_{d>y} (\chi * \chi^2)(d) \frac{\varrho_F^*(d)}{d^2} \ll \frac{||F||^\varepsilon}{\log y} \tag{3.23}$$

et

$$\sum_{(d_1,d_2)\notin[1,y]^2} \chi(d_1)\chi^2(d_2) \frac{\varrho_F^*(d_1 d_2)}{d_1^2 d_2^2} \ll \frac{||F||^\varepsilon}{\log y}. \tag{3.24}$$

Démonstration. La majoration (3.23) se déduit des équations (3.18) et (3.19) au moyen d'une formule de Perron. Pour démontrer la majoration (3.24), nous utilisons dans un premier temps la majoration (3.23) pour majorer

$$\sum_{d>y^2} (\chi * \chi^2)(d) \frac{\varrho_F^*(d)}{d^2}.$$

Il nous reste à majorer

$$\sum_{\substack{(d_1,d_2)\notin[1,y]^2 \\ d_1 d_2 \leqslant y^2}} \chi(d_1)\chi^2(d_2) \frac{\varrho_F^*(d_1 d_2)}{d_1^2 d_2^2}.$$

Majorons la contribution des couples (d_1, d_2) tels que $d_1 \leqslant y$. La contribution complémentaire est majorée de manière identique. Nous posons

$$f_{d_1}(n) := \frac{\varrho_F^*(d_1 n)}{\varrho_F^*(d_1)}.$$

Il est facile de voir que la fonction f_{d_1} est multiplicative. De plus, elle coïncide avec $\varrho_F^*(n)$ lorsque n est premier avec d_1.

Déterminons une majoration de

$$\sum_{y<d_2\leqslant y^2/d_1} \chi^2(d_2) \frac{\varrho_F^*(d_1 d_2)}{\varrho_F^*(d_1) d_2^2}. \tag{3.25}$$

Considérons la série de Dirichlet associée à la fonction $\chi^2(n) f_{d_1}(n)$, que nous noterons $F_{d_1}(s)$. Si nous notons $G(s)$ la série de Dirichlet associée à la fonction $\chi^2(n)\varrho_F^*(n)$, nous pouvons déduire l'existence d'une fonction H_{d_1} admettant une écriture en produit eulérien absolument convergent sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(s) > 1\}$ telle que $F_{d_1}(s) = H_{d_1}(s)G(s)$. De plus, ce produit eulérien s'écrit

$$H_{d_1}(s) = \prod_{p|d_1} \sum_{\nu\geqslant 0} \frac{h_{d_1}(p^\nu)}{p^{\nu s}}. \tag{3.26}$$

Nous pouvons déduire une majoration de la somme (3.25) à partir d'une estimation des termes $h_{d_1}(p) = \chi^2(p)\Big(\frac{\varrho_F^*(p^{n+1})}{\varrho_F^*(p^n)} - \varrho_F^*(p)\Big)$, où $n = v_p(d_1)$, pour tout $p \mid d_1$. Dans le cas où p ne divise pas $F(1,0)\mathcal{D}(F)$, qui est non nul car F est irréductible sur $\mathbb{K}$, nous pouvons utiliser le lemme 3.2 de [6] afin d'obtenir

$$\begin{aligned} |h_{d_1}(p)| &\leqslant p|1 - \varrho_F^-(p)| + \varrho_F^-(p) \\ &\leqslant 2p + 3. \end{aligned}$$

Cela fournit

$$\sum_{y<d_2\leqslant y^2/d_1} \chi^2(d_2)\frac{\varrho_F^*(d_1d_2)}{\varrho_F^*(d_1)d_2^2} = O\Big(||F||^\varepsilon \frac{d_1^2}{\phi(d_1)^2}\frac{1}{(\log y)^2}\Big). \tag{3.27}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant d_1\leqslant y} \chi(d_1)\frac{\varrho_F^*(d_1)}{d_1^2} \sum_{y<d_2\leqslant y^2/d_1} \chi^2(d_2)\frac{\varrho_F^*(d_1d_2)}{\varrho_F^*(d_1)d_2^2} &\ll \frac{||F||^\varepsilon}{(\log y)^2}\sum_{1\leqslant d_1\leqslant y}\frac{\varrho_F^*(d_1)}{\phi(d_1)^2}\\ &\ll \frac{||F||^{2\varepsilon}}{\log y},\end{aligned}$$

ce qui démontre la majoration (3.24). □

3.2.2 Estimation de fonctions arithmétiques appliquées à des formes binaires

Avant d'énoncer le prochain résultat, établi dans [4], nous définissons une certaine classe de fonctions.

Lorsque $A_1 \geqslant 1$, $A_2 \geqslant 1$, et $\varepsilon > 0$, nous notons $\mathcal{M}(A_1, A_2, \varepsilon)$ la classe des fonctions arithmétiques f positives ou nulles satisfaisant la condition

$$f(ab) \leqslant \min(A_1^{\Omega(a)}, A_2a^\varepsilon)f(b)$$

pour tout $(a, b) = 1$. Par ailleurs, pour $v \geqslant 1$ et f une fonction arithmétique, nous définissons

$$E_F(v, f) := \prod_{4<p\leqslant v}\Big(1 - \frac{\varrho_F^+(p)}{p^2}\Big)\sum_{1\leqslant s\leqslant v} f(s)\frac{\varrho_F^+(s)}{s^2}. \tag{3.28}$$

***Lemme* 3.2.5.** *Soit $F \in \mathbb{Z}[X, Y]$ une forme binaire primitive de degré au plus 3 irréductible sur $\mathbb{Q}$. Pour tout $\delta \in]0, 1[$, $A_1 \geqslant 1$, $A_2 \geqslant 1$, il existe une constante c_0 telle que, uniformément sous les conditions*

$$0 < \varepsilon \leqslant \delta/4000, \qquad f \in \mathcal{M}(A_1, A_2, \varepsilon), \qquad \min(x, y) \geqslant c_0 \max(x, y, ||F||)^\delta,$$

on ait

$$\sum_{\substack{m\leqslant x\\ n\leqslant y}} f(|F(m, n)|) \ll xyE_F(x + y, f). \tag{3.29}$$

De plus, il existe une constante $C = C(A_1) > 0$ telle que

$$E_F(v, f) \ll \prod_{p|\mathcal{D}(F)}\Big(1 + \frac{1}{p}\Big)^C \exp\Bigg(\sum_{\substack{p\leqslant v\\ p\nmid\mathcal{D}(F)}} \frac{\varrho_F^-(p)}{p}(f(p) - 1)\Bigg), \tag{3.30}$$

où $\mathcal{D}(F)$ désigne le discriminant de F.

***Lemme* 3.2.6.** *Soient $J \in \mathbb{Z}[X,Y]$ une forme binaire irréductible sur $\mathbb{Q}$ de degré au plus 3, $A_1 \geqslant 1$, $A_2 \geqslant 1$, $\kappa > 0$, $D \in \mathbb{N}^*$ et $M \in M_2(\mathbb{Z})$ de déterminant non nul. On suppose que la forme binaire*

$$F(X,Y) = \frac{J(M(X,Y))}{D}$$

est à coefficients entiers. Il existe alors un réel $\varepsilon_1 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, pour tout $f \in \mathcal{M}(A_1, A_2, \varepsilon)$ et uniformément sous la condition

$$v \geqslant ||M||^\kappa + \mathrm{e}^{\kappa D}$$

on ait

$$E_F(v,f) \ll ||F||^\varepsilon E_J(v,f), \qquad E_J(v,f) \ll \prod_{p \leqslant v} \Big(1 + \frac{\rho_J^+(p)}{p}(f(p)-1)\Big).$$

3.2.3 Sur les fonctions Delta de Hooley généralisées

Pour $n \geqslant 1$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ un couple de fonctions arithmétiques, $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in [0,1]^2$, nous posons

$$\Delta_3(n, \mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{\substack{d_1 d_2 | n \\ \mathrm{e}^{u_i} < d_i \leqslant \mathrm{e}^{u_i + v_i}}} f_1(d_1) f_2(d_2),$$

$$\Delta_3(n, \mathbf{f}) := \sup_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{v} \in [0,1]^2}} |\Delta_3(n, \mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{v})|.$$

Lorsque $\mathbf{f} = (1,1)$, nous obtenons la fonction de Hooley Δ_3, étudiée notamment aux chapitres 6 et 7 de [17]. Pour $A_1 \geqslant 1$, nous désignons par $\mathcal{M}(A_1)$ l'ensemble

$$\cap_{\varepsilon > 0} \cup_{A_2 \geqslant 1} \mathcal{M}(A_1, A_2, \varepsilon).$$

Pour tout $c > 0$, nous notons $\mathcal{M}(A_1, c)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}(A_1)$ constitué des fonctions g vérifiant

$$\sum_{p \leqslant x} g(p) = \mathrm{li}(x) + O(x\, \mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}}).$$

Enfin, pour tout χ, caractère de Dirichlet d'ordre 3, nous notons $\mathcal{M}(A_1, \chi, c)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}(A_1, c)$ constitué des fonctions arithmétiques g vérifiant

$$\sum_{p \leqslant x} \chi(p) g(p) \ll x\, \mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}},$$
$$\sum_{p \leqslant x} \chi^2(p) g(p) \ll x\, \mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}}.$$

Remarque 3.2.7. La fonction $n \to \Delta_3(n, \chi, \chi^2)$ appartient à $\mathcal{M}(3)$.

Définissons

$$\mathcal{L}(x) := \exp \sqrt{\log_2 x \log_3 x}$$

et

$$\rho := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max(1, |1 + \mathrm{e}^{it}|^2) \mathrm{d}t - 2 \approx 0.21800. \tag{3.31}$$

Nous rappelons dans un premier temps le résultat fondamental obtenu par Hall et Tenenbaum, correspondant aux théorèmes 70 et 71 de [17].

Théorème 3.2.8. *Soient $A_1 \geqslant 1$, $c > 0$ et $g \in \mathcal{M}(A_1, c)$. Pour tout $y > 0$, lorsque $x \geqslant 16$, il existe une constante $\alpha = \alpha(g, y) > 0$ telle que l'on ait*

$$\sum_{n \leqslant x} g(n) y^{\omega(n)} \Delta_3(n) \ll x (\log x)^{\max\{y-1, 3y-3\}} \mathcal{L}(x)^{\alpha}. \tag{3.32}$$

Le résultat suivant, correspondant au théorème 1.1 de [23], fournit une estimation des compensations dues aux oscillations des caractères χ et χ^2 dans des intervalles du type $]\,\mathrm{e}^{u_1}, \mathrm{e}^{u_1+1}] \times]\,\mathrm{e}^{u_2}, \mathrm{e}^{u_2+1}]$.

Théorème 3.2.9. *Soient χ un caractère de Dirichlet d'ordre 3, $A_1 \geqslant 1$, $c > 0$ et g une fonction appartenant à $\mathcal{M}(A_1, \chi, c)$. Pour tout $y > 0$, lorsque $x \geqslant 16$, il existe une constante $\alpha = \alpha(g, y) > 0$ telle que l'on ait*

$$\sum_{n \leqslant x} g(n) y^{\omega(n)} \Delta_3(n, \chi, \chi^2)^2 \ll x (\log x)^{\max\{y-1, (\rho+2)y-2, 3y-3\}} \mathcal{L}(x)^{\alpha}. \tag{3.33}$$

Des compensations des oscillations seraient d'ordre statistique si l'exposant de $\log x$ valait $\max\{y-1, 3y-3\}$, autrement dit, si nous avions $\rho = 0$. La valeur de ρ obtenue permet néanmoins d'appliquer ce résultat au problème de comptage du Théorème 3.1.1.

3.3 Simplification du problème

3.3.1 Une bonne approximation

Pour estimer $Q(F, \xi, \mathcal{R})$, nous constatons que nous pouvons le réécrire sous la forme suivante

$$\begin{aligned} Q(F, \xi, \mathcal{R}) &= \sum_{(d_1, d_2) \in (\mathbb{N}^*)^2} \chi(d_1) \chi^2(d_2) \sum_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^2 \cap \mathcal{R}(\xi) \\ d_1 d_2 | F(\boldsymbol{x})}} 1 \\ &= \sum_{(d_1, d_2) \in (\mathbb{N}^*)^2} \chi(d_1) \chi^2(d_2) |\Lambda(d_1 d_2, F) \cap \mathcal{R}(\xi)|, \end{aligned}$$

où $\Lambda(s, F)$ est défini en (3.10). Nous aurons donc besoin d'une bonne approximation de la quantité $|\Lambda(d_1 d_2, F) \cap \mathcal{R}(\xi)|$ pour démontrer le Théorème 3.1.1. Pour des raisons techniques qui apparaitront par la suite, nous remplaçons $\mathcal{R}(\xi)$ par $\mathcal{D}_q \cap \mathcal{R}(\xi)$ où $\mathcal{D}_q$ est défini par

$$\mathcal{D}_q := \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : (m, q) = 1\}. \tag{3.34}$$

Pour $y_1, y_2 \geqslant 1$, $\sigma, \xi, \vartheta > 0$ et $F \in \mathbb{Z}[X, Y]$ une forme binaire de degré 3, nous posons

$$\Phi(\xi, y_1, y_2, F, \sigma, \vartheta) := \sum_{\substack{1 \leqslant d_1 \leqslant y_1 \\ 1 \leqslant d_2 \leqslant y_2 \\ (q, d_1 d_2) = 1}} \sup_{\mathcal{R}} \Big| |\Lambda(d_1 d_2, F) \cap \mathcal{D}_q \cap \mathcal{R}(\xi)| - \mathrm{vol}(\mathcal{R}) \xi^2 \frac{\varphi(q) \varrho_F^+(d_1 d_2)}{q d_1^2 d_2^2} \Big|$$

où le sup est pris sur l'ensemble des domaines $\mathcal{R}$ vérifiant les hypothèses (H1), (H2) et (H3).

***Lemme* 3.3.1.** *Soient $\kappa > 0$, $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$, $\vartheta > 0$, J une forme binaire de degré 3 irréductible sur $\mathbb{Q}$, $F(\boldsymbol{x}) = J(M\boldsymbol{x})/D \in \mathbb{Z}[X, Y]$, avec $M \in M_2(\mathbb{Z})$ de déterminant non nul et $D \in \mathbb{N}^*$. Sous les conditions*

$$y_1, y_2 \geqslant 2, \quad \xi \geqslant ||M||^{\kappa} + \mathrm{e}^{\kappa D}, \quad 1/\sqrt{\xi} \leqslant \sigma \leqslant \xi^{3/2}, \quad 1/\sqrt{\xi} \leqslant \vartheta \leqslant \xi^{3/2},$$

nous avons

$$\Phi(\xi, y_1, y_2, F, \sigma, \vartheta) \ll ||F||^{\varepsilon} (\sigma \xi \sqrt{y_1 y_2} + y_1 y_2) \mathcal{L}(\sigma \xi)^{\sqrt{3}+\varepsilon}. \tag{3.35}$$

Une majoration analogue à la majoration (3.35) a été démontrée par Daniel au lemme 3.3 de [9]. Nous l'adaptons ici au cas de deux diviseurs (d_1, d_2) en utilisant les résultats de Hall et Tenenbaum sur les fonctions Δ.

Démonstration. Le début de la démonstration est identique à celui du lemme 5.2 de [6]. Nous pouvons supposer que la forme F est primitive, la majoration recherchée découle alors d'une majoration de la quantité suivante

$$\Phi^* := \sum_{\substack{1\leqslant d_1\leqslant y_1\\ 1\leqslant d_2\leqslant y_2\\ (q,d_1d_2)=1}} \sup_{\mathcal{R}} \Big| |\Lambda^*(d_1d_2, F)\cap \mathcal{D}_q \cap \mathcal{R}(\xi)| - \mathrm{vol}(\mathcal{R})\xi^2 \frac{\varphi(q)\varrho_F^*(d_1d_2)}{qd_1^2d_2^2}\Big|, \tag{3.36}$$

où Λ^* est défini en (3.11). De même que dans la démonstration du lemme 5.2 de [6], nous utilisons la formule d'inversion de Möbius et l'approximation du nombre de points d'un réseau dans un domaine convexe de $\mathbb{R}^2$ pour obtenir

$$\Phi^* \ll \sigma\xi\Phi_1^* + \Phi_2^* \tag{3.37}$$

où

$$\Phi_1^* := \sum_{\substack{b_1\leqslant y_1\\ b_2\leqslant y_2}} \sum_{\substack{t_1\leqslant y_1/b_1\\ t_2\leqslant y_2/b_2}} \sum_{\mathcal{A}\in\mathcal{U}_F(b_1b_2t_1t_2)} \frac{1}{||v_{t_1t_2}(\mathcal{A})||}$$

et

$$\Phi_2^* := \sum_{\substack{s_1\leqslant y_1\\ s_2\leqslant y_2}} \frac{\varrho_F^*(s_1s_2)}{\phi(s_1s_2)} \sum_{\substack{b_1\leqslant y_1\\ b_2\leqslant y_2\\ b_1|s_1\\ b_2|s_2}} \min\Big\{1, \frac{\sigma^2\xi^2}{b_1b_2s_1s_2}\Big\}.$$

Dans Φ_1^*, pour $s\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{U}_F(s)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $\Lambda^*(s,F)$ défini par la relation $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$ si et seulement si il existe $\lambda\in\mathbb{Z}$ tel que $\boldsymbol{x}\equiv\lambda\boldsymbol{y} \bmod s$. Cet ensemble est de cardinal $\varrho_F^*(s)/\phi(s)$. Pour $\mathcal{A}\in\mathcal{U}_F(s)$, $t\mid s$ et $\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}$, nous désignons par $\mathcal{A}_t$ l'ensemble

$$\mathcal{A}_t := \{\mathbf{y}\in\mathbb{Z}^2 : \exists\lambda\in\mathbb{Z},\ \boldsymbol{y}\equiv\lambda\boldsymbol{x} \bmod t\},$$

puis, nous définissons $v_t(\mathcal{A})$ comme un vecteur minimal non nul de $\mathcal{A}_t$. Ce vecteur vérifie alors

$$||v_t(\mathcal{A})|| \leqslant \sqrt{2t}.$$

Nous réutilisons la formule (5.29) de [6] pour majorer Φ_1^*.
Lorsque $||v_{t_1t_2}||/\sqrt{2y_1y_2/b_1b_2}\in\,]1/2^{j+1}, 1/2^j]$, nous avons $t_1t_2 > y_1y_2/(b_1b_2 2^{2(j+1)})$. Nous pouvons donc écrire

$$\Phi_1^* \ll \sum_{\substack{b_1\leqslant y_1\\ b_2\leqslant y_2}} \frac{1}{b_1b_2} \sum_{j\geqslant 0} \sum_{\substack{y_1/(b_12^{2(j+1)})<t_1\leqslant y_1/b_1\\ y_2/(b_22^{2(j+1)})<t_2\leqslant y_2/b_2}} \frac{2^j}{\sqrt{y_1y_2/b_1b_2}} \sum_{\substack{v\in(\mathbb{Z}^2)^*\\ ||v||\leqslant\sqrt{2y_1y_2/b_1b_2}/2^j\\ t_1t_2|T(v)}} 1.$$

Nous appliquons alors le Lemme 3.2.5 pour obtenir

$$\begin{aligned}\Phi_1^* &\ll \sum_{\substack{b_1\leqslant y_1\\ b_2\leqslant y_2}} \frac{1}{b_1b_2} \sum_{j\geqslant 0} \frac{(j+1)^2 2^j}{\sqrt{y_1y_2/b_1b_2}} \sum_{\substack{v\in(\mathbb{Z}^2)^*\\ ||v||\leqslant\sqrt{2y_1y_2/b_1b_2}/2^j}} \Delta_3(F(v),1)\\ &\ll ||F||^\varepsilon\sqrt{y_1y_2}\,\mathcal{L}(\sigma\xi)^{\sqrt{3}+\varepsilon}.\end{aligned} \tag{3.38}$$

Majorons à présent Φ_2^*. La contribution Φ_{21}^* à Φ_2^* des entiers s_1, s_2 tels que $b_1b_2s_1s_2 \geqslant \sigma^2\xi^2$ vérifie

$$\Phi_{21}^* \leqslant \sigma^2\xi^2 \sum_{s\leqslant y_1y_2} \frac{\varrho_F^*(s)\tau(s)}{\varphi(s)} \sum_{\substack{b\leqslant y_1y_2\\ b|s\\ bs>\sigma^2\xi^2}} \frac{\tau(b)}{bs}. \tag{3.39}$$

Cette majoration s'obtient en posant $b = b_1b_2$ et $s = s_1s_2$ dans la somme définissant Φ_{21}^*. Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned}
\Phi_{21}^* &\ll_\varepsilon ||F||^{\varepsilon/3}\sigma^2\xi^2 \sum_{b>(\sigma\xi)^2/(y_1y_2)} \frac{\varrho_F^*(b)\tau^2(b)}{\varphi(b)b^2} \sum_{\sigma^2\xi^2/b<t\leqslant y_1y_2/b} \frac{\varrho_F^*(t)\tau(t)}{\varphi(t)}\\
\Phi_{21}^* &\ll_\varepsilon ||F||^{2\varepsilon/3}\sigma^2\xi^2 \sum_{b>(\sigma\xi)^2/(y_1y_2)} \frac{\varrho_F^*(b)\tau^2(b)}{\varphi(b)b^2} \log^2\Big(2+\frac{y_1y_2b}{\sigma^2\xi^2}\Big)\\
\Phi_{21}^* &\ll_\varepsilon ||F||^{\varepsilon} \min(\sigma^2\xi^2, y_1y_2)\log^2\Big(2+\frac{y_1y_2}{\sigma^2\xi^2}\Big).
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Par ailleurs, la contribution Φ_{22}^* à Φ_2^* des entiers s_1, s_2 tels que $b_1b_2s_1s_2 \leqslant \sigma^2\xi^2$ vérifie

$$\begin{aligned}
\Phi_{22}^* &\leqslant \sum_{\substack{b_1\leqslant y_1\\ b_2\leqslant y_2}} \sum_{\substack{t_1\leqslant y_1/b_1\\ t_2\leqslant y_2/b_2\\ t_1t_2\leqslant\sigma^2\xi^2/(b_1^2b_2^2)}} \frac{\varrho_F^*(b_1b_2t_1t_2)}{\varphi(b_1b_2t_1t_2)}\\
&\ll_\varepsilon ||F||^{\varepsilon/5} \sum_{\substack{b_1\leqslant y_1\\ b_2\leqslant y_2}} \frac{\varrho_F^*(b_1)\varrho_F^*(b_2)}{\varphi(b_1)\varphi(b_2)} \sum_{t_1\leqslant y_1/b_1} \frac{\varrho_F^*(t_1)}{\varphi(t_1)} \sum_{t_2\leqslant\min\{(y_2/b_2,\sigma^2\xi^2/(b_1^2b_2^2t_1)\}} \frac{\varrho_F^*(t_2)}{\varphi(t_2)}\\
&\ll_\varepsilon ||F||^{2\varepsilon/5} \sum_{\substack{b_1\leqslant y_1\\ b_2\leqslant y_2}} \frac{\varrho_F^*(b_1)\varrho_F^*(b_2)}{\varphi(b_1)\varphi(b_2)} \sum_{t_1\leqslant y_1/b_1} \frac{\varrho_F^*(t_1)}{\varphi(t_1)b_2} \min\Big(\frac{\sigma^2\xi^2}{t_1b_1^2b_2}, y_2\Big)\\
&\ll_\varepsilon ||F||^{2\varepsilon/5} \sum_{b_1\leqslant y_1} \frac{\varrho_F^*(b_1)}{\varphi(b_1)} \sum_{t_1\leqslant y_1/b_1} \frac{\varrho_F^*(t_1)}{\varphi(t_1)} \sum_{b_2\leqslant y_2} \frac{\varrho_F^*(b_2)}{\varphi(b_2)} \min\Big(\frac{\sigma^2\xi^2}{t_1b_1^2b_2}, y_2\Big).
\end{aligned}$$

Nous utilisons la majoration de Φ_{22}^* déterminée dans [6], en remplaçant la quantité $\sigma^2\xi^2$ par $\sigma^2\xi^2/(t_1b_1^2)$, pour majorer la somme intérieure. Nous obtenons ainsi

$$\Phi_{22}^* \ll_\varepsilon ||F||^{3\varepsilon/5} y_2 \sum_{b_1\leqslant y_1} \frac{\varrho_F^*(b_1)}{\varphi(b_1)} \sum_{t_1\leqslant y_1/b_1} \frac{\varrho_F^*(t_1)}{\varphi(t_1)} \min\Big(\frac{\sigma^2\xi^2}{t_1b_1^2y_2}, 1\Big)\log\Big(2+\frac{\sigma^2\xi^2}{t_1b_1^2y_2}\Big).$$

Notons β le majorant de Φ_{22}^* ci dessus. Nous souhaitons utiliser la majoration de Φ_2^* déterminée dans [6], en remplaçant $\sigma^2\xi^2$ par $\sigma^2\xi^2/y_2$. Cependant, nous devons tenir compte du terme $\log\Big(2+\frac{\sigma^2\xi^2}{t_1b_1^2y_2}\Big)$ apparaissant dans la somme. En modifiant légèrement la démonstration de cette majoration, nous parvenons néanmoins au résultat souhaité. En effet, lorsque $t_1b_1^2 \geqslant \sigma^2\xi^2/y_2$, nous avons $\log\Big(2+\frac{\sigma^2\xi^2}{t_1b_1^2y_2}\Big) \ll 1$. Ainsi, nous pouvons utiliser la majoration de Φ_{21}^* de [6] pour majorer la contribution β_1 à β des entiers b_1 et t_1 tels que $t_1b_1^2 \geqslant \sigma^2\xi^2/y_2$. Nous obtenons

$$\beta_1 \ll_\varepsilon ||F||^{\varepsilon}\sigma\xi\min(\sigma\xi, \sqrt{y_1y_2})\log\Big(2+\frac{y_1y_2}{\sigma^2\xi^2}\Big). \tag{3.41}$$

Pour majorer la contribution β_2 à β des entiers b_1, t_1 tels que $t_1 b_1^2 \leqslant \sigma^2\xi^2/y_2$, nous écrivons

$$\begin{aligned}\beta_2 &\ll_\varepsilon ||F||^{3\varepsilon/5} y_2 \sum_{b_1\leqslant y_1} \frac{\varrho_F^*(b_1)}{\varphi(b_1)} \sum_{t_1\leqslant \min(y_1/b_1,\sigma^2\xi^2/(b_1^2y_2)} \frac{\varrho_F^*(t_1)}{\varphi(t_1)} \log\Big(\frac{\sigma^2\xi^2}{t_1b_1^2y_2}\Big)\\ &\ll_\varepsilon ||F||^{4\varepsilon/5} y_2 \sum_{b_1\leqslant y_1} \frac{\varrho_F^*(b_1)}{\varphi(b_1)b_1} \min\Big(y_1, \frac{\sigma^2\xi^2}{b_1y_2}\Big) \log\Big(2+\frac{\sigma^2\xi^2}{y_1b_1y_2}\Big)\\ &\ll_\varepsilon ||F||^{\varepsilon} y_2 \min\Big(y_1, \frac{\sigma^2\xi^2}{y_2}\Big) \log\Big(2+\frac{\sigma^2\xi^2}{y_1y_2}\Big)\end{aligned} \tag{3.42}$$

Les inégalités (3.41) et (3.42) fournissent

$$\beta \ll_\varepsilon ||F||^\varepsilon \sigma\xi \min(\sqrt{y_1y_2}, \sigma\xi)\log_2\xi. \tag{3.43}$$

La majoration de Φ_2^* se déduit alors des majorations (3.40) et (3.43).

$$\Phi_2^* \ll_\varepsilon ||F||^\varepsilon \sigma\xi \min(\sqrt{y_1y_2}, \sigma\xi)\Big\{\log_2\xi + \log\Big(2+\frac{y_1y_2}{\sigma^2\xi^2}\Big)\Big\}. \tag{3.44}$$

En reportant les équations (3.38) et (3.44) dans la formule (3.37), nous obtenons la majoration (3.35). □

Nous énonçons deux corollaires de ce résultat.

Corollaire 3.3.2. *Soient $y \geqslant 2$, ε, σ, ξ vérifiant les mêmes conditions que celles du Lemme 3.3.1. Nous avons uniformément pour $u \in \mathbb{R}^+$*

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\leqslant d_1d_2\leqslant y\\ \mathrm{e}^u<d_2\leqslant \mathrm{e}^{u+1}\\ (q,d_1d_2)=1}} \sup_{\mathcal{R}} \Big|\big|\Lambda(d_1d_2,F)\cap\mathcal{D}_q\cap\mathcal{R}(\xi)\big| - \mathrm{vol}(\mathcal{R})\xi^2\frac{\varphi(q)\varrho_F^+(d_1d_2)}{qd_1^2d_2^2}\Big|\\ \ll_\varepsilon ||F||^\varepsilon\big((\sigma+\vartheta)\xi\sqrt{y}+y\big)\mathcal{L}(\sigma\xi)^{\sqrt{3}+\varepsilon}.\end{aligned} \tag{3.45}$$

Démonstration. Les conditions $d_1d_2 \leqslant y$ et $\mathrm{e}^u < d_2 \leqslant \mathrm{e}^{u+1}$ impliquent $d_2 \leqslant \mathrm{e}^{u+1}$ et $d_1 \leqslant y\,\mathrm{e}^{-u}$. Il nous suffit d'appliquer le Lemme 3.3.1 avec ces valeurs pour y_1 et y_2 afin d'obtenir le résultat. □

Pour le second corollaire, nous posons

$$\begin{aligned}\phi &:= \phi(\xi,y,F,\sigma,\vartheta)\\ &:= \sum_{\substack{1\leqslant d_1d_2\leqslant y\\ (q,d_1d_2)=1}} \sup_{\mathcal{R}} \Big|\big|\Lambda(d_1d_2,F)\cap\mathcal{D}_q\cap\mathcal{R}(\xi)\big| - \mathrm{vol}(\mathcal{R})\xi^2\frac{\varphi(q)\varrho_F^+(d_1d_2)}{qd_1^2d_2^2}\Big|.\end{aligned} \tag{3.46}$$

Corollaire 3.3.3. *Soient $A>0$, $\kappa>0$, $\varepsilon>0$, $\sigma>0$, $\vartheta>0$, J une forme binaire de degré 3 irréductible sur $\mathbb{Q}$ et $F(\boldsymbol{x}) = J(M\boldsymbol{x})/D \in \mathbb{Z}[X,Y]$, avec $M \in M_2(\mathbb{Z})$ de déterminant non nul. Sous les conditions*

$$2 \leqslant y \leqslant \xi^A, \quad \xi \geqslant ||M||^\kappa + \mathrm{e}^{\kappa D}, \quad 1/\sqrt{\xi} \leqslant \sigma \leqslant \xi^{3/2}, \quad 1/\sqrt{\xi} \leqslant \vartheta \leqslant \xi^{3/2},$$

nous avons

$$\phi(\xi,y,F,\sigma,\vartheta) \ll_{\varepsilon,A} ||F||^\varepsilon\big(\sigma\xi\sqrt{y}+y\big)\mathcal{L}(\sigma\xi)^{\sqrt{2}+\varepsilon}\log\xi. \tag{3.47}$$

Démonstration. Nous pouvons réécrire ϕ sous la forme suivante

$$\phi = \sum_{k=0}^{[\log y]} \sum_{\substack{1\leqslant d_1d_2\leqslant y \\ \mathrm{e}^k\leqslant d_2<\mathrm{e}^{k+1} \\ (q,d_1d_2)=1}} \sup_{\mathcal{R}} \Big| |\Lambda(d_1d_2,F)\cap\mathcal{D}_q\cap\mathcal{R}(\xi)| - \mathrm{vol}(\mathcal{R})\xi^2\frac{\varphi(q)\varrho_F^+(d_1d_2)}{qd_1^2d_2^2}\Big|.$$

Nous utilisons le Corollaire 3.3.2 pour majorer la somme intérieure uniformément en k, nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}\phi &\ll_\varepsilon \sum_{k=0}^{[\log y]} ||F||^\varepsilon\big((\sigma+\vartheta)\xi\sqrt{y}+y\big)\mathcal{L}(\sigma\xi)^{\sqrt{3}+\varepsilon} \\ &\ll_\varepsilon ||F||^\varepsilon\big((\sigma+\vartheta)\xi\sqrt{y}+y\big)\mathcal{L}(\sigma\xi)^{\sqrt{3}+\varepsilon}\log y \\ &\ll_{\varepsilon,A} ||F||^\varepsilon\big((\sigma+\vartheta)\xi\sqrt{y}+y\big)\mathcal{L}(\sigma\xi)^{\sqrt{3}+\varepsilon}\log\xi.\end{aligned}$$

□

3.3.2 Paramétrisation de la somme (3.2)

L'objectif dans cette section, est de paramétrer l'ensemble des couples (m,n) pour lesquels $r_3\big(F((m,n))\big)\neq 0$, où r_3 est défini en (3.1).

Notons que pour $d\mid q^\infty$ et $n\in\mathbb{Z}$, nous avons

$$r_3(dn)=r_3(n)$$

Nous pouvons, dans un premier temps, nous ramener au cas où $(m,n,q)=1$. En effet, comme le polynôme F est homogène, nous pouvons écrire

$$Q(F,\xi,\mathcal{R}) = \sum_{d\mid q^\infty} Q_1\Big(F,\frac{\xi}{d},\mathcal{R}\Big) \tag{3.48}$$

où

$$Q_1(F,\xi,\mathcal{R}) := \sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathcal{R}(\xi)\cap\mathbb{Z}^2 \\ (q,\boldsymbol{x})=1}} r_3(F(\boldsymbol{x})).$$

Pour $\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2$ tel que $(q,\boldsymbol{x})=1$, si nous posons $\boldsymbol{x}:=(m,n)$, il existe un unique entier $d_1\mid q^\infty$ tel que $m=d_1m_1$ et $(m_1,q)=1$. La condition $(q,m,n)=1$ est alors équivalente à la condition $(d_1,n)=1$. De plus, si nous notons $d_2=(q^\infty,F(\boldsymbol{x}))$ alors $r_3(F(\boldsymbol{x}))\neq 0$ implique qu'il existe $\alpha_1\in(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ vérifiant $\chi(\alpha_1)=1$ tel que $F(\boldsymbol{x})/d_2\equiv\alpha_1 \bmod q$. Nous rappelons que $G_1=\mathrm{Ker}(\chi)\subset(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ et nous constatons de suite qu'il contient le groupe des cubes de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. En posant $\alpha=\alpha_1m_1^{-3}\in(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, nous avons $\alpha\in G_1$ et $F(\boldsymbol{x})/d_2\equiv m_1^3\alpha \bmod q$.

Pour $\alpha\in G_1$, $d_1\mid q^\infty$ et $d_2\mid q^\infty$, nous notons W_{α,d_1,d_2} l'ensemble des $\beta\in\mathbb{Z}/d_2q\mathbb{Z}$ premiers avec d_1 (Les entiers d_1 et d_2 étant des diviseurs de q^∞, cette condition de primalité est bien définie.), assimilés à un système de représentants dans $[1,d_2q]$, vérifiant la congruence $F(d_1,\beta)\equiv\alpha d_2 \bmod d_2q$. Nous pouvons alors écrire la congruence suivante

$$\boldsymbol{x}\equiv m_1(d_1,\beta) \bmod d_2q.$$

Cela signifie qu'il existe un entier $n_1 \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$\boldsymbol{x} = (d_1 m_1, \beta m_1 + d_2 q n_1) = U_{\beta,d_1,d_2}(m_1, n_1)$$

où nous avons posé

$$U_{\beta,d_1,d_2} := \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ \beta & d_2 q \end{pmatrix}.$$

Notons que cette matrice est de déterminant $d_1 d_2 q$.
Ainsi, un couple $\boldsymbol{x}$ contribuant à la somme (3.6) peut être déterminé par cinq paramètres $(d_1, \beta, d_2, m_1, n_1)$, il se trouve que cette détermination est unique. Nous obtenons ainsi l'égalité suivante sur Q_1

$$Q_1(F, \xi, \mathcal{R}) = \sum_{d_1 | q^\infty} \sum_{\alpha \in G_1} \sum_{d_2 | q^\infty} \sum_{\beta \in W_{\alpha,d_1,d_2}} Q_2(F_{\beta,d_1,d_2}, \xi, \mathcal{R}_{\beta,d_1,d_2}), \tag{3.49}$$

où nous avons posé

$$\begin{aligned} F_{\beta,d_1,d_2}(m,n) &:= \frac{F(U_{\beta,d_1,d_2}(m,n))}{d_1}, \\ \mathcal{R}_{\beta,d_1,d_2} &:= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : U_{\beta,d_1,d_2}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{R}\}, \\ Q_2(F, \xi, \mathcal{R}) &:= \sum_{(m,n) \in \mathcal{D}_q \cap \mathcal{R}(\xi)} r_3(F(m,n)) \end{aligned}$$

où $\mathcal{D}_q$ est défini en (3.34).

3.3.3 Estimation de la vitesse de convergence des sommes dans la formule (3.49)

Afin d'exploiter la formule (3.49) dans la démonstration du Théorème 3.1.1, nous avons besoin d'une estimation de la vitesse de convergence des sommes sur d_1 et sur d_2. Pour cela, nous énonçons les lemmes suivants.

***Lemme* 3.3.4.** *Soient $d_2 \mid q^\infty$ et $\alpha \in G_1$. Pour tout $d_1 \mid q^\infty$, le cardinal de W_{α,d_1,d_2} ne dépend que de $d_3 := (d_1, d_2 q)$.*

Démonstration. D'après le théorème chinois, il existe un couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$d_1 u + d_2 q v = d_3.$$

Il est par ailleurs possible de choisir u tel que $(u, d_2 q) = 1$. Un tel u fournit alors une bijection entre W_{α,d_1,d_2} et W_{α,d_3,d_2}, d'où le résultat. □

***Lemme* 3.3.5.** *Soit $d_2 \mid q^\infty$ et $d_3 \mid d_2 q$. Pour tout $\alpha > 0$, nous avons*

$$\sum_{\substack{d_2 | q^\infty \\ (d_2, d_1 q) = d_3}} \frac{1}{d_2^\alpha} \ll_{q,\alpha} \frac{1}{d_3^\alpha}.$$

***Lemme* 3.3.6.** *La contribution des entiers $d_2 \geqslant \log(\xi)^{\frac{5 \log p_{\omega(q)}}{2 \log p_1}}$ à la somme (3.49) peut être incluse dans le terme d'erreur de (3.6).*

Démonstration. Notons dans un premier temps que pour $\alpha \in G_1$, $d_2 \mid q^\infty$ et $d_3 \mid d_2 q$ fixés, pour $\beta \in W_{\alpha,d_3,d_2}$, il existe $\varphi(d_2q/d_3)$ éléments $\boldsymbol{x} = (d_3m_1, n) \in (\mathbb{Z}/(d_2q)\mathbb{Z})^2$ tels que $n \equiv m_1\beta \bmod (d_1q)$ et $(m_1, d_2q/d_3) = 1$. Ces éléments vérifient alors la congruence $F(\boldsymbol{x}) \equiv m_1^3\alpha d_2 \bmod (d_2q)$, en particulier, ils vérifient $F(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \bmod d_2$. Cela fournit l'inégalité

$$\sum_{d_3|d_2q} \varphi\Big(\frac{d_2q}{d_3}\Big)|W_{\alpha,d_3,d_2}| \leqslant q^2\varrho_F^+(d_2) \ll_F 1.$$

Ainsi,

$$\sum_{d_3|d_2q} \frac{|W_{\alpha,d_3,d_2}|}{d_3} \leqslant \frac{q^2\varrho_F^+(d_2)}{\phi(q)d_2} \ll_{F,q} 1. \tag{3.50}$$

Pour conclure la démonstration, nous notons que nous avons nécessairement $d_2 \leqslant \xi^{O(1)}$, ce qui permet de dominer toutes les valuations p-adiques de d_2 par $\log\xi$. Lorsque $\xi/d_2 \leqslant \xi^{\varepsilon/3}$, une majoration triviale fournit

$$\sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2\cap\mathcal{R}_{\beta,d_1,d_2}(\xi)} \tau_3(F_{\beta,d_1,d_2}(\boldsymbol{x})) \ll \frac{(\sigma\xi)^{1+\varepsilon}}{d_1},$$

ce qui est un terme d'erreur acceptable pour (3.6) d'après (3.50), le Lemme 3.3.5 et le Lemme 3.3.4. Dans le cas contraire, nous sommes en mesure d'appliquer le théorème 4 de [20] pour évaluer la sommation relative à m de la somme ci-dessus. Il vient

$$\sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2\cap\mathcal{R}_{\beta,d_1,d_2}(\xi)} \tau_3(F_{\beta,d_1,d_2}(\boldsymbol{x})) \ll \frac{||F||^\varepsilon\sigma^2\xi^2\log(\xi)^2}{(d_1d_2)^{1-\varepsilon}}.$$

En reportant dans (3.49), la somme portant sur les entiers $d_2 \geqslant \log(\xi)^{\frac{5\log p_{\omega(q)}}{2\log p_1}}$ est

$$\ll \sum_{\substack{d_2|q^\infty\\ d_2\geqslant(\log\xi)^B}} \sum_{\alpha\in G_1} \sum_{d_1|q^\infty} \frac{|W_{\alpha,d_1,d_2}|}{(d_1d_2)^{1-\varepsilon}}.$$

Nous utilisons ensuite le Lemme 3.3.5 pour majorer la somme sur d_1. Ainsi, la somme qui nous intéresse est

$$\ll_q \sum_{\substack{d_2|q^\infty\\ d_2\geqslant(\log\xi)^A}} \sum_{\alpha\in G_1} \sum_{d_3|d_2q} \frac{|W_{\alpha,d_3,d_2}|}{(d_2d_3)^{1-\varepsilon}},$$

où $A := \frac{5\log p_{\omega(q)}}{2\log p_1}$. Nous majorons alors d_3^ε par $(d_2q)^\varepsilon$ et nous utilisons la majoration (3.50). La contribution à la somme (3.49) des entiers $d_2 \geqslant (\log\xi)^A$ est donc

$$\ll_q \sum_{\substack{d_2|q^\infty\\ d_2\geqslant(\log\xi)^A}} \frac{1}{d_1^{1-2\varepsilon}}.$$

Comme la condition sur d_1 implique que l'une des valuations p-adiques de d_1 est plus grande que $\frac{5\log_2(\xi)}{2\log p_1}$, la contribution à la somme (3.49) des entiers $d_1 \geqslant (\log\xi)^B$ est

$$\ll_q ||F||^\varepsilon\sigma^2\xi^2\log(\xi)^{-0,4}.$$

□

Il nous reste à déterminer la vitesse de convergence de la somme sur d_1 dans la formule (3.49). Pour cela, nous travaillons avec la quantité suivante

$$Q_3(F,\xi,\mathcal{R}) := \sum_{d_1|q^\infty} \sum_{\substack{d_2|q^\infty \\ d_1\leqslant(\log\xi)^A}} \sum_{\alpha\in G_1} \sum_{\beta\in W_{\alpha,d_1,d_2}} Q_2(F_{\beta,d_1,d_2},\xi,\mathcal{R}_{\beta,d_1,d_2}) \tag{3.51}$$

où

$$A := \frac{5\log p_{\omega(q)}}{2\log p_1}.$$

Lemme 3.3.7. *La contribution des entiers $d_1 \geqslant \log(\xi)^5$ à la somme* (3.51) *peut être incluse dans le terme d'erreur de* (3.6).

Démonstration. Lorsque $\xi/d_1 \leqslant \xi^\varepsilon$, une majoration triviale fournit

$$\sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2\cap\mathcal{R}_{\beta,d_1,d_2}(\xi)} \tau_3(F_{\beta,d_1,d_2}(\boldsymbol{x})) \ll \frac{\sigma^2\xi^{3/2+\varepsilon}}{d_1^{1/2}}.$$

Nous verrons qu'il s'agit d'un terme d'erreur acceptable pour (3.6). Dans le cas contraire, nous appliquons de nouveau le théorème 4 de [20] pour évaluer cette somme. Nous obtenons

$$\sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2\cap\mathcal{R}_{\beta,d_1,d_2}(\xi)} \tau_3(F_{\beta,d_1,d_2}(\boldsymbol{x})) \ll \frac{||F||^\varepsilon\sigma^2\xi^2(\log\xi)^2}{(d_1d_2)^{1-\varepsilon}}.$$

Nous minorons $d_1^{1-\varepsilon}$ par $d_1^{1/2}(\log\xi)^B$ où $B := 5/2-5\varepsilon$. En reportant dans la formule (3.51), nous obtenons que la contribution recherchée est

$$\begin{aligned}\ll &\sum_{\substack{d_1|q^\infty \\ d_1\geqslant(\log\xi)^{2B}}} \sum_{\substack{d_2|q^\infty \\ d_2\leqslant(\log\xi)^A}} \sum_{\alpha\in G_1} \sum_{\beta\in W_{\alpha,d_1,d_2}} \frac{||F||^\varepsilon\sigma^2\xi^2(\log\xi)^2}{(\log\xi)^B d_1^{1/2}d_2^{1-\varepsilon}} \\ &+ \sum_{\substack{d_1|q^\infty \\ d_1\geqslant(\log\xi)^{2B}}} \sum_{\substack{d_2|q^\infty \\ d_2\leqslant(\log\xi)^A}} \sum_{\alpha\in G_1} \sum_{\beta\in W_{\alpha,d_1,d_2}} \frac{||F||^\varepsilon\sigma^2\xi^{3/2+\varepsilon}}{d_1^{1/2}}.\end{aligned}$$

Nous utilisons le Lemme 3.3.5 avec $\alpha = 1/2$ afin d'obtenir, uniformément pour $d_2 \mid q^\infty$ et pour tout $d_3 \mid d_2q$,

$$\sum_{\substack{d_1|q^\infty \\ (d_1,d_2q)=d_3}} \frac{1}{d_1^{1/2}} \ll_q \frac{1}{d_3^{1/2}}.$$

La contribution recherchée est donc

$$\begin{aligned}
&\ll_q \frac{||F||^\varepsilon \sigma^2 \xi^2 (\log \xi)^2}{(\log \xi)^B} \sum_{\substack{d_2 | q^\infty \\ d_2 \leqslant (\log \xi)^A}} \sum_{d_3 | d_2 q} \sum_{\alpha \in G_1} \frac{|W_{\alpha,d_3,d_2}|}{d_3^{1/2} d_2^{1-\varepsilon}} \\
&\quad + ||F||^\varepsilon \sigma^2 \xi^{3/2+\varepsilon} \sum_{\substack{d_2 | q^\infty \\ d_2 \leqslant (\log \xi)^A}} \sum_{d_3 | d_2 q} \sum_{\alpha \in G_1} \frac{|W_{\alpha,d_3,d_2}|}{d_3^{1/2}} \\
&\ll_q \frac{||F||^\varepsilon \sigma^2 \xi^2 (\log \xi)^2}{(\log \xi)^B} \sum_{\substack{d_2 | q^\infty \\ d_2 \leqslant (\log \xi)^A}} \sum_{d_3 | d_2 q} \sum_{\alpha \in G_1} \frac{|W_{\alpha,d_3,d_2}|}{d_3 d_2^{1/2-\varepsilon}} \\
&\quad + ||F||^\varepsilon \sigma^2 \xi^{3/2+\varepsilon} \sum_{\substack{d_2 | q^\infty \\ d_2 \leqslant (\log \xi)^A}} \sum_{d_3 | d_2 q} \sum_{\alpha \in G_1} \frac{d_2^{1/2} |W_{\alpha,d_3,d_2}|}{d_3} \\
&\ll_q \frac{||F||^\varepsilon \sigma^2 \xi^2 (\log \xi)^2}{(\log \xi)^B} + ||F||^\varepsilon \sigma^2 \xi^{3/2+\varepsilon} (\log \xi)^{3A/2},
\end{aligned}$$

ce qui est un terme d'erreur acceptable pour (3.6). □

La proposition suivante nous permet d'estimer $Q_2(F_{\beta,d_1,d_2}, \xi, \mathcal{R}_{\beta,d_1,d_2})$ lorsque d_1 et d_2 sont de tailles contrôlées.

Proposition 3.3.8. *Soient $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$, $\xi > 0$, $\kappa > 0$, $\mathcal{R}$ un domaine de $\mathbb{R}^2$, J une forme binaire de degré 3 irréductible sur $\mathbb{K}$, $F(\boldsymbol{x}) = J(M\boldsymbol{x})/D \in \mathbb{Z}[X,Y]$ avec $M \in M_2(\mathbb{Z})$ de déterminant non nul, $D \in \mathbb{N}^*$ et tel que $\chi(F(\boldsymbol{x})) = 1$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_q$ (défini en (3.34)). Lorsque les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4) sont vérifiées et sous les conditions*

$$\xi \geqslant ||M||^\kappa + \mathrm{e}^{\kappa D} \qquad 1/\sqrt{\xi} \leqslant \sigma \leqslant \xi^{3/2}, \quad 1/\sqrt{\xi} \leqslant \vartheta \leqslant \xi^{3/2},$$

nous avons

$$Q_2(F, \xi, \mathcal{R}) = K_1(F) L(1,\chi) L(1,\chi^2) \mathrm{vol}(\mathcal{R}) \xi^2 + O\Big(\frac{||F||^\varepsilon (\sigma^2 + \vartheta^2) \xi^2}{(\log \xi)^\eta}\Big) \tag{3.52}$$

où η est défini en (3.5) et

$$K_1(F) := 3 \frac{\varphi(q)}{q} \prod_{p \nmid q} K_p(F).$$

Les termes $K_p(F)$ sont définis en (3.8).

3.4 Démonstration de la Proposition 3.3.8 et du Théorème 3.1.1

Démonstration. Nous réécrivons dans un premier temps la formule (3.52) sous la forme suivante

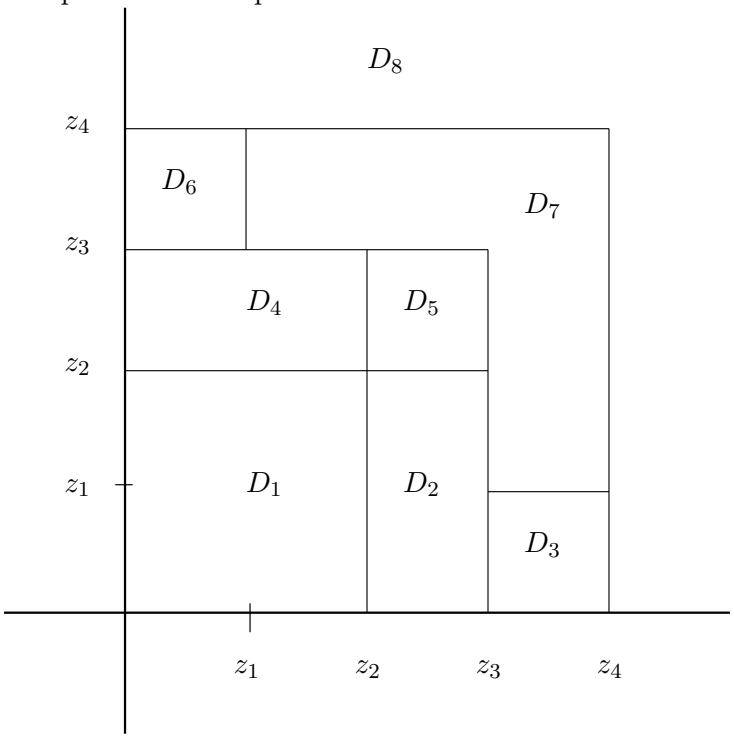
$$Q_2(F, \xi, \mathcal{R}) = \sum_{\substack{1 \leqslant d_1 \\ 1 \leqslant d_2}} \chi(d_1)\chi(d_2) |\Lambda(d_1 d_2, F) \cap \mathcal{D}_q \cap \mathcal{R}(\xi)|. \tag{3.53}$$

Pour estimer cette somme, nous mettons à profit la symétrie des couples (d_1, d_2) tels que $d_1 d_2 \mid F(\boldsymbol{x})$ autour des valeurs $d_1 = \vartheta\xi$ et $d_2 = \vartheta\xi$ afin d'utiliser les Lemmes 3.3.3 et 3.3.1.

Cependant, la partition est plus difficile que celle réalisée dans le lemme 7.1 de [6]. Pour la suite, nous posons

$$\begin{aligned} z_1 &:= \vartheta\xi(\log\xi)^{-4}, \\ z_2 &:= \vartheta\xi(\log\xi)^{-2\delta}, \\ z_3 &:= \vartheta\xi(\log\xi)^{\delta}, \\ z_4 &:= \vartheta\xi(\log\xi)^{3} \end{aligned} \tag{3.54}$$

et nous procédons à la partition suivante.



Nous notons C_j la contribution à Q_2 des couples (d_1, d_2) appartenant au domaine D_j. Nous verrons que seuls les termes C_1 et C_8 contribuent au terme principal. Par ailleurs, nous verrons que la contribution C_5 ne relève pas du Lemme 3.3.1 et de ses corollaires et nécessite un traitement particulier.

Pour estimer C_1, nous utilisons le Lemme 3.3.1 avec $y_1 = y_2 = z_2$, nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} C_1 =& \frac{\varphi(q)}{q}\mathrm{vol}(\mathcal{R})\xi^2 \sum_{\substack{d_1\leqslant z_2\\ d_2\leqslant z_2}} \chi(d_1)\chi^2(d_2)\frac{\varrho_F^+(d_1d_2)}{d_1^2d_2^2} \\ &+ O\Big(\frac{||F||^{\varepsilon}(\sigma^2+\vartheta^2)\xi^2\mathcal{L}(\sigma\xi)^{\sqrt{3}+\varepsilon}}{(\log\xi)^{2\delta}}\Big) \end{aligned}$$

L'estimation (3.24) fournit alors

$$\begin{aligned} C_1 =& \frac{\varphi(q)}{q}\mathrm{vol}(\mathcal{R})\xi^2 \prod_{p\nmid q}\Big(\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{\varrho_F^+(p^\nu)}{p^{2\nu}}(\chi*\chi^2)(p^\nu)\Big) \\ &+ O\Big(\frac{||F||^{\varepsilon}(\sigma^2+\vartheta^2)\xi^2\mathcal{L}(\sigma\xi)^{\sqrt{3}+\varepsilon}}{(\log\xi)^{4\delta}}\Big). \end{aligned} \tag{3.55}$$

Pour estimer C_8, nous utilisons un changement de variable et le Corollaire 3.3.3.

$$\begin{aligned}C_8 = &\sum_{\substack{z_4<d_1\\1\leqslant d_2}} \chi(d_1)\chi^2(d_2)|\Lambda(d_1d_2,F)\cap\mathcal{D}_q\cap\mathcal{R}(\xi)|\\ &+\sum_{\substack{1\leqslant d_1\\z_4<d_2}} \chi(d_1)\chi^2(d_2)|\Lambda(d_1d_2,F)\cap\mathcal{D}_q\cap\mathcal{R}(\xi)|\\ &-\sum_{\substack{z_4<d_1\\z_4<d_2}} \chi(d_1)\chi^2(d_2)|\Lambda(d_1d_2,F)\cap\mathcal{D}_q\cap\mathcal{R}(\xi)|\end{aligned}$$

Nous exploitons alors l'égalité $\chi(F(\boldsymbol{x}))=1$ de la manière suivante : pour la première et la troisième somme, nous posons $d_1'=\frac{F(\boldsymbol{x})}{d_1d_2}$, pour la deuxième, nous posons $d_2'=\frac{F(\boldsymbol{x})}{d_1d_2}$. En posant

$$\mathcal{R}_i(\xi,d):=\{\boldsymbol{x}\in\mathcal{R}(\xi) : d\leqslant F(\boldsymbol{x})/z_i\}, \tag{3.56}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}C_8 = &\sum_{d_1'd_2<\vartheta^3\xi^3/z_4} \chi^2(d_1')\chi(d_2)|\Lambda(d_1'd_2,F)\cap\mathcal{D}_q\cap\mathcal{R}_4(\xi,d_1'd_2)|\\ &+\sum_{d_1d_2'<\vartheta^3\xi^3/z_4} \chi^2(d_1)\chi(d_2')|\Lambda(d_1d_2',F)\cap\mathcal{D}_q\cap\mathcal{R}_4(\xi,d_1d_2')|\\ &-\sum_{\substack{d_1'd_2<\vartheta^3\xi^3/z_4\\z_4<d_2}} \chi^2(d_1')\chi(d_2)|\Lambda(d_1'd_2,F)\cap\mathcal{D}_q\cap\mathcal{R}_4(\xi,d_1'd_2)|.\end{aligned}$$

Nous utilisons le Corollaire 3.3.3 pour estimer ces différentes sommes en posant $y=\vartheta^3\xi^3/z_4$.

$$\begin{aligned}C_8 =&\frac{\varphi(q)}{q}\Big(\sum_{d_1'd_2<\vartheta^3\xi^3/z_4} \mathrm{vol}(\mathcal{R}_4(\xi,d_1'd_2))\chi^2(d_1')\chi(d_2)\frac{\varrho_F^+(d_1'd_2)}{d_1'^2d_2^2}\\ &+\sum_{d_1d_2'<\vartheta^3\xi^3/z_4} \mathrm{vol}(\mathcal{R}_4(\xi,d_1d_2'))\chi^2(d_1)\chi(d_2')\frac{\varrho_F^+(d_1d_2')}{d_1^2d_2'^2}\\ &-\sum_{\substack{d_1'd_2<\vartheta^3\xi^3/z_4\\z_4\leqslant d_2\leqslant\vartheta^3\xi^3/z_4}} \mathrm{vol}(\mathcal{R}_4(\xi,d_1'd_2))\chi^2(d_1')\chi(d_2)\frac{\varrho_F^+(d_1'd_2)}{d_1'^2d_2^2}\Big)\\ &+O\Big(\frac{||F||^\varepsilon(\sigma^2+\vartheta^2)\xi^2}{(\log\xi)^{1/3}}\Big).\end{aligned}$$

Notons que

$$\mathcal{R}(\xi)\backslash\mathcal{R}_i(\xi,d)=\{\boldsymbol{x}\in\mathcal{R}(\xi) : F(\boldsymbol{x})/z_i<d\}. \tag{3.57}$$

La majoration (3.23) et une adaptation de l'estimation (3.27) fournissent alors

$$\begin{aligned}C_8 =&2\frac{\varphi(q)}{q}\mathrm{vol}(\mathcal{R})\xi^2\prod_{p\nmid q}\Big(\sum_{\nu\geqslant0}\frac{\varrho_F^+(p^\nu)}{p^{2\nu}}(\chi*\chi^2)(p^\nu)\Big)\\ &+O\Big(\int_{\mathcal{R}(\xi)}\frac{\log\xi}{\log^2(F(\boldsymbol{x})/z_4^2+2)}\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\frac{||F||^\varepsilon(\sigma^2+\vartheta^2)\xi^2}{(\log\xi)^{1/3}}\Big).\end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons

$$\int_{\mathcal{R}(\xi)} \frac{\log \xi}{\log^2(F(\boldsymbol{x})/z_4^2+2)} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \ll \frac{||F||^{\varepsilon}\sigma^2\xi^2}{\log(\xi)\text{dét}(M)}, \tag{3.58}$$

ainsi,

$$\begin{aligned} C_8 =& 2\frac{\varphi(q)}{q}\mathrm{vol}(\mathcal{R})\xi^2 \prod_{p\nmid q}\Big(\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{\varrho_F^+(p^\nu)}{p^{2\nu}}(\chi*\chi^2)(p^\nu)\Big) \\ &+ O\Big(\frac{||F||^{\varepsilon}(\sigma^2+\vartheta^2)\xi^2}{(\log\xi)^{1/3}}\Big). \end{aligned} \tag{3.59}$$

Pour estimer C_2, nous faisons appel au Lemme 3.3.1, avec $y_1 = z_3$ et $y_2 = z_2$ et à la majoration (3.24) afin obtenir

$$\begin{aligned} C_2 =& \frac{\varphi(q)}{q}\mathrm{vol}(\mathcal{R})\xi^2 \sum_{\substack{z_2<d_1\leqslant z_3\\ d_2\leqslant z_2}} \chi(d_1)\chi^2(d_2)\frac{\varrho_F^+(d_1d_2)}{d_1^2d_2^2} \\ &+ O\Big(\frac{||F||^{\varepsilon}(\sigma^2+\vartheta^2)\xi^2\mathcal{L}(\sigma\xi)^{\sqrt{3}+\varepsilon}}{(\log\xi)^{\delta}}\Big) \\ =& O\Big(\frac{||F||^{\varepsilon}(\sigma^2+\vartheta^2)\xi^2\mathcal{L}(\sigma\xi)^{\sqrt{3}+\varepsilon}}{(\log\xi)^{\delta/2}}\Big). \end{aligned} \tag{3.60}$$

La contribution C_4 s'estime de manière analogue, en échangeant simplement les valeurs de y_1 et y_2. Ainsi,

$$C_4 = O\Big(\frac{||F||^{\varepsilon}(\sigma^2+\vartheta^2)\xi^2\mathcal{L}(\sigma\xi)^{\sqrt{3}+\varepsilon}}{(\log\xi)^{\delta/2}}\Big). \tag{3.61}$$

Les contributions C_3 et C_6 s'estiment également de la même manière, en posant simplement $y_1 = z_4$ et $y_2 = z_1$ pour C_3, et l'inverse pour C_6. Nous obtenons

$$C_3 + C_6 = O\Big(\frac{||F||^{\varepsilon}(\sigma^2+\vartheta^2)\xi^2\mathcal{L}(\sigma\xi)^{\sqrt{3}+\varepsilon}}{\sqrt{\log\xi}}\Big). \tag{3.62}$$

Pour estimer la contribution C_7, nous écrivons

$$\begin{aligned} C_7 =& \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{D}_q\cap\mathcal{R}(\xi)} \sum_{\substack{d_1d_2|F(\boldsymbol{x})\\ z_1<d_1\leqslant z_4\\ z_3<d_2\leqslant z_4}} \chi(d_1)\chi^2(d_2) \\ &+ \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{D}_q\cap\mathcal{R}(\xi)} \sum_{\substack{d_1d_2|F(\boldsymbol{x})\\ z_3<d_1\leqslant z_4\\ z_1<d_2\leqslant z_4}} \chi(d_1)\chi^2(d_2) \\ &- \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{D}_q\cap\mathcal{R}(\xi)} \sum_{\substack{d_1d_2|F(\boldsymbol{x})\\ z_3<d_1\leqslant z_4\\ z_3<d_2\leqslant z_4}} \chi(d_1)\chi^2(d_2) \\ :=& C_{71} + C_{72} - C_{73}, \end{aligned}$$

où z_1, z_3 et z_4 sont définis en (3.54). Les trois sommes C_{71}, C_{72} et C_{73} se traitant de la même manière, nous ne nous intéressons qu'à C_{71}. Nous effectuons alors le changement de variable $d_2' = F(\boldsymbol{x})/(d_1d_2)$ afin d'obtenir

$$\begin{aligned}
C_{71} &= \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{D}_q\cap\mathcal{R}(\xi)} \sum_{\substack{d_1d_2'|F(\boldsymbol{x})\\ z_1<d_1\leqslant z_4\\ F(\boldsymbol{x})/z_4\leqslant d_1d_2'<F(\boldsymbol{x})/z_3}} \chi^2(d_1)\chi(d_2') \\
&= \sum_{\substack{z_1<d_1\leqslant z_4\\ d_1d_2'<\vartheta^3\xi^3/z_3}} \chi^2(d_1)\chi(d_2')\big|\Lambda(d_1d_2',F)\cap\mathcal{D}_q\cap\big(\mathcal{R}_3(\xi,d_1d_2')\backslash\mathcal{R}_4(\xi,d_1d_2')\big)\big| \\
&= \sum_{k\in I} \sum_{\substack{\mathrm{e}^k<d_1\leqslant \mathrm{e}^{k+1}\\ d_1d_2'<\vartheta^3\xi^3/z_3}} \chi^2(d_1)\chi(d_2')\big|\Lambda(d_1d_2',F)\cap\mathcal{D}_q\cap\big(\mathcal{R}_3(\xi,d_1d_2')\backslash\mathcal{R}_4(\xi,d_1d_2')\big)\big|.
\end{aligned}$$

où $\mathcal{R}_i(\xi,d)$ est défini en (3.56) et $I := \mathbb{Z}\cap[\log\xi - 4\log_2\xi, \log\xi + 3\log_2\xi]$. La somme extérieure comportant $O(\log_2\xi)$ termes, la majoration (3.45) et l'égalité (3.57) fournissent

$$\begin{aligned}
C_{71} \ll \int_{\mathcal{R}(\xi)} \sum_{\substack{z_1<d_1\leqslant z_4\\ F(\boldsymbol{x})/z_4\leqslant d_1d_2'}} \chi^2(d_1)\chi(d_2')\frac{\varrho_F^+(d_1d_2')}{d_1^2d_2'^2}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
+ \frac{||F||^\varepsilon(\sigma^2+\vartheta^2)\xi^2\mathcal{L}(\sigma\xi)^{\sqrt{3}+\varepsilon}\log_2\xi}{(\log\xi)^{\delta/2}}.
\end{aligned}$$

Une adaptation de l'estimation (3.27) fournit alors

$$\begin{aligned}
C_{71} \ll \int_{\mathcal{R}(\xi)} \frac{\log_2\xi}{\log^2(F(\boldsymbol{x})/z_4^2+2)}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
+ \frac{||F||^\varepsilon(\sigma^2+\vartheta^2)\xi^2\mathcal{L}(\sigma\xi)^{\sqrt{3}+\varepsilon}\log_2\xi}{(\log\xi)^{\delta/2}}.
\end{aligned}$$

L'intégrale étant majorée par (3.58), nous obtenons

$$C_{71} \ll \frac{||F||^\varepsilon(\sigma^2+\vartheta^2)\xi^2\mathcal{L}(\sigma\xi)^{\sqrt{3}+\varepsilon}\log_2\xi}{(\log\xi)^{\delta/2}}. \tag{3.63}$$

Il nous reste à majorer C_5. Posons

$$\Upsilon(\Xi,\xi,\vartheta,b) := \sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathcal{R}(\Xi)\\ (m,n)=1}} \sum_{\substack{d_1d_2|b^3F(\boldsymbol{x})\\ (d_1,d_2)\in D_5}} \chi(d_1)\chi^2(d_2),$$

de sorte que

$$C_5 = \sum_{(b,q)=1} \Upsilon(\xi/b,\xi,\vartheta,b).$$

Notons la majoration triviale

$$\Upsilon(\Xi,\xi,\vartheta,b) \leqslant \tau_3(b^3) \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2\cap\mathcal{R}(\Xi)} \tau_3(F(\boldsymbol{x})) \ll_\varepsilon \tau_3(b^3)||F||^\varepsilon\sigma^2\Xi^2(\log\Xi)^2$$

qui résulte des Lemmes 3.2.5 et 3.2.6.

Cette majoration fournit l'estimation suivante

$$C_5 = \sum_{\substack{b\leqslant L\\(b,q)=1}} \Upsilon(\xi/b,\xi,\vartheta,b) + O_\varepsilon\Big(\frac{||F||^\varepsilon\sigma^2\xi^2}{\sqrt{\log\xi}}\Big), \tag{3.64}$$

où nous avons posé $L := (\log\xi)^5$.
Déterminons une majoration de $\Upsilon(\Xi,\xi,\vartheta,b)$ lorsque $\xi/L \leqslant \Xi \leqslant \xi$ et $b \leqslant L$.

$$\Upsilon(\Xi,\xi,\vartheta,b) = \sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2\cap\mathcal{R}(\Xi)\\(m,n)=1}} \sum_{\substack{d_1d_2|b^3F(\boldsymbol{x})\\z_2<d_1\leqslant z_3\\z_2<d_2\leqslant z_3}} \chi(d_1)\chi^2(d_2). \tag{3.65}$$

Nous séparons tout d'abord la somme selon la valeur de $\Omega_z(F(\boldsymbol{x}))$, où

$$\Omega_z(n) := \sum_{\substack{p>z\\p^\nu||n}} \nu$$

et où $z = z(\varepsilon)$ vérifie $\log 2/\log z > \varepsilon$. Ainsi, toute fonction sous multiplicative f vérifiant $f \leqslant 2^{\Omega_z}$ vérifie les hypothèses du Lemme 3.2.5 pour la forme F. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned}\Upsilon(\Xi,\xi,\vartheta,b) = &\sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2\cap\mathcal{R}(\Xi)\\(m,n)=1\\\Omega_z(F(\boldsymbol{x}))\leqslant 3a\log_2\xi}} \sum_{\substack{d_1d_2|b^3F(\boldsymbol{x})\\z_2<d_1\leqslant z_3\\z_2<d_2\leqslant z_3}} \chi(d_1)\chi^2(d_2)\\ &+ \sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2\cap\mathcal{R}(\Xi)\\(m,n)=1\\\Omega_z(F(\boldsymbol{x}))>3a\log_2\xi}} \sum_{\substack{d_1d_2|b^3F(\boldsymbol{x})\\z_2<d_1\leqslant z_3\\z_2<d_2\leqslant z_3}} \chi(d_1)\chi^2(d_2)\end{aligned} \tag{3.66}$$

où a est un paramètre que nous déterminerons par la suite. En observant que la somme intérieure est $\ll \tau_3(b^3)\Delta_3(F(\boldsymbol{x}),\chi)(\log_2\xi)^2$, nous appliquons l'inégalité de Cauchy Schwarz à chacun des deux membres de droite de (3.66). Il vient

$$\begin{aligned}\Upsilon(\Xi,\xi,\vartheta,b) \ll &\tau_3(b^3)(\log_2\xi)^2B_1(\Xi,\xi,\vartheta,b,\delta,a)^{1/2}\Big(\sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2\cap\mathcal{R}(\Xi)\\\Omega_z(F(\boldsymbol{x}))\leqslant 3a\log_2\xi}} \Delta_3^2(F(\boldsymbol{x}),\chi,\chi^2)\Big)^{1/2}\\ &+ \tau_3(b^3)(\log_2\xi)^2B_2(\Xi,\xi,\vartheta,b,\delta,a)^{1/2}\Big(\sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2\cap\mathcal{R}(\Xi)\\\Omega_z(F(\boldsymbol{x}))>3a\log_2\xi}} \Delta_3^2(F(\boldsymbol{x}),\chi,\chi^2)\Big)^{1/2}\end{aligned} \tag{3.67}$$

où nous avons posé

$$B_1(\Xi,\xi,\vartheta,b,\delta,a) := \sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2\cap\mathcal{R}(\Xi)\\(m,n)=1\\\exists d_1d_2|b^3F(\boldsymbol{x})\\z_2<d_1,d_2\leqslant z_3\\\Omega_z(F(\boldsymbol{x}))\leqslant 3a\log_2\xi}} 1$$

et

$$B_2(\Xi,\xi,\vartheta,b,\delta,a) := \sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2\cap\mathcal{R}(\Xi)\\(m,n)=1\\\exists d_1d_2|b^3F(\boldsymbol{x})\\z_2<d_1,d_2\leqslant z_3\\\Omega_z(F(\boldsymbol{x}))>3a\log_2\xi}} 1.$$

Nous commençons par majorer la contribution du second terme du membre de droite de (3.67). Pour cela, nous devons estimer $B_2(\Xi, \xi, \vartheta, b, \delta, a)$. La méthode paramétrique fournit, pour tout $y \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} B_2(\Xi, \xi, \vartheta, b, \delta, a) &\leqslant \sum_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^2 \cap \mathcal{R}(\Xi) \\ (m,n)=1 \\ \exists d_1 d_2 | b^3 F(\boldsymbol{x}) \\ z_2 < d_1, d_2 \leqslant z_3}} y^{\Omega_z(F(\boldsymbol{x})) - 3a \log_2 \xi} \\ &\leqslant \sum_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^2 \\ ||\boldsymbol{x}|| \leqslant \sigma \Xi}} y^{\Omega_z(F(\boldsymbol{x})) - 3a \log_2 \xi}. \end{aligned}$$

En choisissant $y = 3a$, ce qui n'est légitime que si $3a \geqslant 1$, nous obtenons, en vertu du Lemme 3.2.5

$$B_2(\Xi, \xi, \vartheta, b, \delta, a) \ll \frac{||F||^{\varepsilon} \sigma^2 \Xi^2}{(\log \xi)^{Q(3a)}} \tag{3.68}$$

où la fonction Q est définie par

$$\begin{array}{llll} Q: & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \displaystyle\int_1^x \log(t) \mathrm{d}t. \end{array}$$

Ainsi

$$Q(x) = x \log x - x + 1.$$

Nous estimons à présent

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^2 \cap \mathcal{R}(\Xi) \\ \Omega_z(F(\boldsymbol{x})) > 3a \log_2 \xi}} \Delta_3^2(F(\boldsymbol{x}), \chi, \chi^2).$$

Pour cela, nous utilisons les Lemmes 3.2.5, 3.2.6, ainsi que le Théorème 3.2.9 afin d'obtenir

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^2 \cap \mathcal{R}(\Xi) \\ \Omega_z(F(\boldsymbol{x})) > 3a \log_2 \xi}} \Delta_3^2(F(\boldsymbol{x}), \chi, \chi^2) &\leqslant \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^2 \cap \mathcal{R}(\Xi)} \Delta_3^2(F(\boldsymbol{x}), \chi, \chi^2) \\ &\ll ||F||^{\varepsilon} \sigma^2 \Xi^2 (\log \xi)^{\rho} \mathcal{L}(\xi)^{\alpha} \end{aligned} \tag{3.69}$$

En combinant (3.68) et (3.69), nous obtenons que le second terme du membre de droite de (3.67) est

$$\ll \tau_3(b^3)(\log_2 \xi)^2 ||F||^{\varepsilon} \sigma^2 \Xi^2 (\log \xi)^{\rho - Q(3a)} \mathcal{L}(\xi)^{\alpha/2}. \tag{3.70}$$

Nous estimons à présent la contribution du premier terme du membre de droite de (3.67). Majorons dans un premier temps

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^2 \cap \mathcal{R}(\Xi) \\ \Omega_z(F(\boldsymbol{x})) \leqslant 3a \log_2 \xi}} \Delta_3^2(F(\boldsymbol{x}), \chi, \chi^2).$$

Pour cela, nous utilisons à nouveau la méthode paramétrique.

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2\cap\mathcal{R}(\Xi)\\ \Omega_z(F(\boldsymbol{x}))\leqslant 3a\log_2\xi}} \Delta_3^2(F(\boldsymbol{x}),\chi,\chi^2) \leqslant \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2\cap\mathcal{R}(\Xi)} y^{\Omega_z(F(\boldsymbol{x}))-3a\log_2\xi}\Delta_3^2(F(\boldsymbol{x}),\chi,\chi^2)$$

valable pour tout $y\leqslant 1$. En appliquant les Lemmes 3.2.5, 3.2.6 et le Théorème 3.2.9 avec $y=1/(1+\rho)$, nous obtenons

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2\cap\mathcal{R}(\Xi)\\ \Omega_z(F(\boldsymbol{x}))\leqslant 3a\log_2\xi}} \ll ||F||^{\varepsilon}\sigma^2\Xi^2(\log\xi)^{3a\log(\rho+1)-\rho/(\rho+1)}\mathcal{L}(\xi)^{\alpha}. \tag{3.71}$$

Il ne nous reste plus qu'à estimer $B_1(\Xi,\xi,\vartheta,b,\delta,a)$. Nous séparons pour cela la somme en trois. Nous désignons ainsi par $B_{1j}(1\leqslant j\leqslant 3)$ les contributions à $B_1(\xi,\delta,a)$ des vecteurs $\boldsymbol{x}$ et des diviseurs d_1, d_2 satisfaisant respectivement les conditions

(B_{11}) $\quad \Omega(d_1d_2)\leqslant 2a\log_2\xi$

(B_{12}) $\quad F(\boldsymbol{x})\leqslant \vartheta^3\Xi^3/(\log\xi)^{3/(2\kappa)}$

(B_{13}) $\quad \Omega(d_1d_2)>2a\log_2\xi, \qquad F(\boldsymbol{x})>\vartheta^3\Xi^3/(\log\xi)^{3/(2\kappa)}$

Pour estimer B_{11}, observons dans un premier temps que l'existence d'un couple (d_1,d_2) tel que $d_1d_2\mid b^3F(\boldsymbol{x})$ avec $z_2<d_i\leqslant z_3$ implique l'existence d'un couple (d_1',d_2') tel que $d_1'd_2'\mid F(\boldsymbol{x})$ avec $z_2/b^3\leqslant d_i'\leqslant z_3$. Dans un second temps, nous utilisons la méthode paramétrique. Pour $y\leqslant 1$, nous avons, d'après le lemme 5.1 de [6], les Lemmes 3.2.5 et 3.2.6

$$\begin{aligned}
B_{11} &\leqslant \sum_{z_2/b^3<d_1,d_2\leqslant z_3} y^{\Omega_z(d_1d_2)-2a\log_2\xi} \sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in\Lambda(d_1d_2,F)\cap\mathcal{R}(\Xi)\\ (m,n)=1}} 1\\
&\ll (\log\xi)^{-2a\log y}\sum_{z_2/b^3<d_1,d_2\leqslant z_3} y^{\Omega_z(d_1d_2)}\frac{\varrho_F^+(d_1d_2)}{d_1d_2}\Big(\frac{\sigma^2\Xi^2}{d_1d_2}+1\Big)\\
&\ll ||F||^{\varepsilon}(\sigma^2\Xi^2+z_3^2)(\log_2\xi)^2(\log\xi)^{-2a\log y+2y-2}
\end{aligned}$$

Pour le choix de $y=a$, qui n'est valable que pour $a\leqslant 1$, nous obtenons, en reportant dans la majoration ci-dessus la valeur de z_3

$$B_{11}\ll ||F||^{\varepsilon}(\sigma^2+\vartheta^2)\xi^2(\log_2\xi)^2(\log\xi)^{2\delta-2Q(a)} \tag{3.72}$$

Le lemme 3.4 de [9] fournit la majoration suivante.

$$\mathrm{vol}\{\boldsymbol{x}\in\mathcal{R}\ :\ |F(\boldsymbol{x})|/\vartheta^3\leqslant\beta\}\ll\vartheta^2\beta^{2/3}\sqrt{D}.$$

En l'appliquant à $\beta=(\log\xi)^{-3/(2\kappa)}$, nous obtenons

$$B_{12}\ll ||F||^{\varepsilon}\vartheta^2\Xi^2/\sqrt{\log\xi}. \tag{3.73}$$

Il nous reste à estimer B_{13}. Pour cela, nous observons que puisque $\Omega_z(d_1d_2)>2a\log_2\xi$, l'un des deux, que nous noterons d_i, vérifie $\Omega_z(d_i)>a\log_2\xi$. Notons d_j l'autre diviseur et $d_k=b^3F(\boldsymbol{x})/d_id_j$. Nous avons alors

$$\Omega_z(d_jd_k)=\Omega(b^3F(\boldsymbol{x})/d_i)<\Omega_z(b^3)+2a\log_2\xi.$$

et

$$\vartheta^3\Xi^3/\{z_3^2(\log\xi)^{3/(2\kappa)+2\delta}\}<d_k<b^3\vartheta^3\Xi^3/z_2^2.$$

Nous faisons de nouveau appel au lemme 5.1 de [6], au Lemme 3.2.5 et au Lemme 3.2.6 pour majorer B_{13}, nous obtenons

$$\begin{aligned}
B_{13} \leqslant & \sum_{\substack{z_2\leqslant d_1\leqslant z_3\\ \vartheta^3\Xi^3/\{z_3^2(\log\xi)^{3/(2\kappa)}\}\leqslant d_2\leqslant b^3\vartheta^3\Xi^3/z_2^2}} y^{\Omega_z(d_1d_2)-2a\log_2\xi-\Omega_z(b^3)} \sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in\Lambda(d_1d_2,F)\cap\mathcal{R}(\Xi)\\ (m,n)=1}} 1\\
\ll & \quad y^{-\Omega_z(b^3)}(\log\xi)^{-2a\log y} \sum_{\substack{z_2\leqslant d_1\leqslant z_3\\ \vartheta^3\Xi^3/\{z_3^2(\log\xi)^{3/(2\kappa)}\}\leqslant d_2\leqslant b^3\vartheta^3\Xi^3/z_2^2}} y^{\Omega_z(d_1d_2)}\frac{\varrho_F^+(d_1d_2)}{d_1d_2}\Big(\frac{\sigma^2\Xi^2}{d_1d_2}+1\Big)\\
\ll & \quad y^{-\Omega_z(b^3)}||F||^{\varepsilon}\Big(\sigma^2\Xi^2+\vartheta^3b^3\frac{\Xi^3z_3}{z_2^2}\Big)(\log_2\xi)^2(\log\xi)^{-2a\log y+2y-2}.
\end{aligned}$$

En choisissant $y=a$ et en reportant les valeurs de z_2 et z_3, nous obtenons

$$B_{13}\ll a^{-\Omega_z(b^3)}||F||^{\varepsilon}\Big(\sigma^2\Xi^2+\vartheta^2b^3\frac{\Xi^3}{\xi}\Big)(\log_2\xi)^2(\log\xi)^{5\delta-2Q(a)}. \tag{3.74}$$

Les équations (3.72), (3.73) et (3.74) fournissent

$$B_1(\Xi,\xi,\vartheta,b,\delta,a)\ll a^{-\Omega_z(b^3)}||F||^{\varepsilon}\Big(\sigma^2\Xi^2+\vartheta^2b^3\frac{\Xi^3}{\xi}\Big)(\log_2\xi)^2(\log\xi)^{5\delta-2Q(a)}. \tag{3.75}$$

Les équations (3.71) et (3.75) montrent alors que le premier terme du membre de droite de (3.67) est

$$\begin{aligned}
\ll&\tau_3(b^3)a^{-\Omega_z(b^3)/2}(\log_2\xi)^3||F||^{\varepsilon}\Big(\sigma^2\Xi^2+\vartheta^2b^3\frac{\Xi^3}{\xi}\Big)^{1/2}\\
&\sigma\Xi(\log\xi)^{1/2(3a\log(\rho+1)-\rho/(\rho+1)-2Q(a)+5\delta)}\mathcal{L}(\xi)^{\alpha/2}.
\end{aligned} \tag{3.76}$$

En reportant les équations (3.70) et (3.76) dans l'équation (3.67), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Upsilon(\Xi,\xi,\vartheta,b)\ll&\tau_3(b^3)a^{-\Omega_z(b^3)/2}||F||^{\varepsilon}\Big(\sigma^2\Xi^2+\vartheta^2b^3\frac{\Xi^3}{\xi}\Big)^{1/2}\\
&\sigma\Xi\mathcal{L}(\xi)^{\alpha/2}(\log_2\xi)^3\Big((\log\xi)^{\gamma_1}+(\log\xi)^{\gamma_2}\Big).
\end{aligned} \tag{3.77}$$

En reportant dans (3.64), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{D}_q\cap\mathcal{R}(\xi)}\sum_{\substack{d_1d_2|F(\boldsymbol{x})\\ (d_1,d_2)\in5}}\chi(d_1)\chi^2(d_2)\\
\ll&||F||^{\varepsilon}(\sigma^2+\vartheta^2)\xi^2\mathcal{L}(\xi)^{\alpha/2}(\log_2\xi)^{O_a(1)}\Big((\log\xi)^{\gamma_1}+(\log\xi)^{\gamma_2}\Big).
\end{aligned} \tag{3.78}$$

où nous avons posé

$$\gamma_1=\frac{1}{2}\Big(3a\log(\rho+1)-\frac{\rho}{\rho+1}-2Q(a)+5\delta\Big)$$

et

$$\gamma_2=\frac{1}{2}(\rho-Q(3a)).$$

Pour les choix de $a=\frac{1{,}742}{3}$, qui est compatible avec les conditions $a\leqslant 1$ et $3a\geqslant 1$, et $\delta=0,0069$, nous obtenons

$$\sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{D}_q\cap\mathcal{R}(\xi)}\sum_{\substack{d_1d_2|F(\boldsymbol{x})\\ (d_1,d_2)\in5}}\chi(d_1)\chi^2(d_2)\ll||F||^{\varepsilon}(\sigma^2+\vartheta^2)\xi^2\mathcal{L}(\xi)^{\alpha/2}(\log_2\xi)^{O(1)}(\log\xi)^{-\eta} \tag{3.79}$$

où η est défini en (3.5).

La proposition 3.3.8 s'obtient en reportant les estimations (3.55), (3.59), (3.60), (3.61), (3.62), (3.63) et (3.79) dans la formule (3.53) avec le choix $\delta = 0,0069$.

Nous utilisons la Proposition 3.3.8 pour estimer les termes $Q_2(F_{\beta,d_1,d_2}, \xi, \mathcal{R}_{\beta,d_1,d_2})$ dans la formule (3.49) lorsque d_1 et d_2 sont majorés par une puissance de $\log \xi$. La contribution des couples (d_1, d_2) complémentaires est traitée par le Lemme 3.3.6 et le Lemme 3.3.7. Par ailleurs, en reprenant les notations de la Proposition 3.3.8, nous utilisons l'égalité suivante

$$\varrho_F^+(p) = \varrho_J^+(p),$$

valable pour tout p tel que $(p, D\text{dét}(M)) = 1$. Cela fournit

$$\begin{aligned} Q_1(F,\xi,\mathcal{R}) =& \frac{1}{q}\mathrm{vol}(\mathcal{R})\xi^2 L(1,\chi)L(1,\chi^2)K_1(F) \sum_{d_1|q^\infty}\sum_{\alpha\in G_1}\sum_{d_2|q^\infty}\frac{|W_{\alpha,d_1,d_2}|}{d_1d_2} \\ &+ O\Big(\frac{||F||^\varepsilon(\sigma^2+\vartheta^2)\xi^2}{(\log\xi)^\eta}\Big). \end{aligned} \tag{3.80}$$

En reportant cette estimation dans l'égalité (3.48), nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} Q(F,\xi,\mathcal{R}) =& \frac{1}{q}\mathrm{vol}(\mathcal{R})\xi^2 L(1,\chi)L(1,\chi^2)K_1(F) \sum_{d|q^\infty}\frac{1}{d^2}\sum_{d_1|q^\infty}\sum_{\alpha\in G_1}\sum_{d_2|q^\infty}\frac{|W_{\alpha,d_1,d_2}|}{d_1d_2} \\ &+ O\Big(\frac{||F||^\varepsilon(\sigma^2+\vartheta^2)\xi^2}{(\log\xi)^\eta}\Big) \end{aligned}$$

Cela achève la démonstration du Théorème 3.1.1 et nous permet de déterminer $K(F)$.

$$\begin{aligned} K(F) &= \frac{3\varphi(q)}{q^2}\prod_{p\nmid q}\Big(\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{\varrho_F^+(p^\nu)}{p^{2\nu}}(\chi*\chi^2)(p^\nu)\Big)\sum_{d|q^\infty}\frac{1}{d^2}\sum_{d_1|q^\infty}\sum_{\alpha\in G_1}\sum_{d_2|q^\infty}\frac{|W_{\alpha,d_1,d_2}|}{d_1d_2} \\ &= \prod_{p\nmid q}K_p(F)K_q(F), \end{aligned} \tag{3.81}$$

avec

$$K_q(F) := \frac{3\varphi(q)}{q^2}\sum_{d|q^\infty}\frac{1}{d^2}\sum_{d_1|q^\infty}\sum_{\alpha\in G_1}\sum_{d_2|q^\infty}\frac{|W_{\alpha,d_1,d_2}|}{d_1d_2}. \tag{3.82}$$

□

Afin de démontrer l'égalité (3.9) portant sur la constante $K_q(F)$, nous rappelons la définition des ensembles suivants

$$\mathcal{E} := \bigcup_{\alpha\in G_1}\{n\in\mathbb{N}^* : \exists d \mid q^\infty,\ n\equiv \alpha d \bmod dq\},$$

où $G_1 = \mathrm{Ker}(\chi)$ et pour $d \mid q^\infty$, nous notons $\mathcal{E}_d$ la projection de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{E}_d = \bigcup_{\alpha\in G_1}\{n\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} : \exists d_1 \mid q^\infty,\ n\equiv \alpha d_1 \bmod (d_1q, d)\}.$$

***Lemme* 3.4.1.** *Nous avons*

$$K_q(F) = \lim_{k\to\infty} \frac{3}{q^{2k}} \Big|\Big\{\boldsymbol{x} \in (\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z})^2 \,:\, F(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{E}_{q^k}\Big\}\Big|.$$

Démonstration. Nous écrivons

$$\begin{aligned}&\frac{1}{q^{2k}}\Big|\Big\{\boldsymbol{x} \in (\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z})^2 : F(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{E}_{q^k}\Big\}\Big|\\ =&\frac{1}{q^{2k}}\sum_{d|q^k}\Big|\Big\{\boldsymbol{x} \in (\mathbb{Z}/(q^k/d)\mathbb{Z})^2 : d^3F(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{E}_{q^k},\ (\boldsymbol{x}, q^k/d) = 1\Big\}\Big|.\end{aligned}$$

Lorsque $d \mid q^{[k/4]}$, la condition $(\boldsymbol{x}, q^k/d) = 1$ est équivalente à $(\boldsymbol{x}, q) = 1$. Le cas complémentaire peut être aisément vu comme un terme d'erreur. Ainsi

$$\begin{aligned}&\frac{1}{q^{2k}}\Big|\Big\{\boldsymbol{x} \in (\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z})^2 : F(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{E}_{q^k}\Big\}\Big|\\ =&\frac{1}{q^{2k}}\sum_{d|q^{[k/4]}}\Big|\Big\{\boldsymbol{x} \in (\mathbb{Z}/(q^k/d)\mathbb{Z})^2 : d^3F(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{E}_{q^k},\ (\boldsymbol{x}, q) = 1\Big\}\Big| + o(1)\\ =&\frac{1}{q^{2k}}\sum_{d|q^{[k/4]}}\sum_{d_1|q^k/d}|A_{d,d_1,k}| + o(1)\end{aligned}$$

où

$$A_{d,d_1,k} := \Big\{\boldsymbol{x} \in (\mathbb{Z}/(q^k/d)\mathbb{Z})^2 : d^3F(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{E}_{q^k},\ m = d_1m',\ (m', q^k/dd_2) = 1,\ (d_1m', n, q) = 1\Big\}.$$

Lorsque $d_2 \mid q^{k-1}/d$, la condition $(m', q^k/dd_2) = 1$ est équivalente à $(m', q) = 1$, nous pouvons en déduire que la condition $(d_1m', n, q) = 1$ est équivalente à la condition $(n, d_1) = 1$. Le cas complémentaire peut être aisément vu comme un terme d'erreur. Ainsi

$$\begin{aligned}&\frac{1}{q^{2k}}\Big|\Big\{\boldsymbol{x} \in (\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z})^2 : F(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{E}_{q^k}\Big\}\Big|\\ =&\frac{1}{q^{2k}}\sum_{d|q^{[k/4]}}\sum_{d_1|q^{k-1}/d}|A_{d,d_1,k}| + o(1),\end{aligned}$$

où nous avons réécrit

$$A_{d,d_1,k} := \Big\{\boldsymbol{x} \in (\mathbb{Z}/(q^k/d)\mathbb{Z})^2 : d^3F(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{E}_{q^k},\ m = d_1m',\ (m', q) = 1,\ (d_1, n) = 1\Big\}.$$

Lorsque $d \mid q^{[k/4]}$, la condition $d^3F(\mathbf{x}) \in \mathcal{E}_{q^k}$ est équivalente à l'existence d'un entier $d_2 \mid q^\infty$ et d'un $\alpha \in G_1$ tel que

$$F(\mathbf{x}) \equiv \alpha d_2 \bmod (d_2q, q^k/d^3).$$

La contribution des entiers d_2 tels que $d_2 \nmid q^{k-1}/d^3$ étant négligeable, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}&\frac{1}{q^{2k}}\Big|\Big\{\boldsymbol{x} \in (\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z})^2 : F(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{E}_{q^k}\Big\}\Big|\\ =&\frac{1}{q^{2k}}\sum_{d|q^{[k/4]}}\sum_{d_1|q^{k-1}/d}\sum_{d_2|q^{k-1}/d^3}|B_{d,d_1,d_2,k}| + o(1)\end{aligned}$$

où

$$B_{d,d_1,d_2,k} := \Big\{\boldsymbol{x} \in (\mathbb{Z}/(q^k/d)\mathbb{Z})^2 : F(\boldsymbol{x}) \in E_{d_2},\ m = d_1m',\ (m', q) = 1,\ (n, d_1) = 1\Big\}$$

avec

$$E_{d_2} := \bigcup_{\alpha\in G_1}\{n \in \mathbb{N}^* : ,\ n \equiv \alpha d_2 \bmod d_2q\}.$$

Il existe $\varphi(q^k/dd_1)$ entiers m dans $\mathbb{Z}/(q^k/d)\mathbb{Z}$ s'écrivant d_1m' avec $(m',q)=1$, et il existe $q^{k-1}/dd_1 \sum_{\alpha\in G_1} |W_{\alpha,d_1,d_2}|$ éléments β de $\mathbb{Z}/(q^k/d)\mathbb{Z}$ tels que

$$F(d_1,\beta)\equiv \alpha d_2 \bmod d_2q$$

pour un certain $\alpha\in G_1$ avec $(d_1,\beta)=1$. La donnée d'un tel couple (m',β) détermine de manière unique chaque élément de l'ensemble $B_{d,d_1,d_2,k}$ en posant

$$\boldsymbol{x}=(d_1m',m'\beta)\in(\mathbb{Z}/(q^k/d)\mathbb{Z})^2.$$

Cela fournit l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{q^{2k}}\Big|\Big\{\boldsymbol{x}\in(\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z})^2 : F(\boldsymbol{x})\in\mathcal{E}_{q^k}\Big\}\Big|\\
=&\frac{1}{q^{2k}}\sum_{d|q^{[k/4]}}\sum_{d_1|q^{k-1}/d^3}\sum_{d_2|q^{k-1}/d}\sum_{\alpha\in G_1}\varphi\Big(\frac{q^k}{dd_2}\Big)\frac{q^{k-1}}{dd_1}|W_{\alpha,d_1,d_2}|+o(1)\\
=&\frac{\phi(q)}{q^2}\sum_{d|q^{[k/4]}}\sum_{d_1|q^{k-1}/d^3}\sum_{d_2|q^{k-1}/d}\sum_{\alpha\in G}\frac{|W_{\alpha,d_1,d_2}|}{d^2d_1d_2}+o(1).
\end{aligned}$$

Par passage à la limite, nous obtenons

$$K_q(F)=\lim_{k\to\infty}\frac{3}{q^{2k}}\Big|\Big\{\boldsymbol{x}\in(\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z})^2 : F(\boldsymbol{x})\in\mathcal{E}_{q^k}\Big\}\Big|,$$

ce qui démontre l'égalité (3.9). □

3.5 Interprétation géométrique de $K(F)$

Nous supposons dans toute cette partie que l'anneau des entiers $O_{\mathbb{K}}$ est principal. Notre objectif ici est de démontrer la dernière assertion du Théorème 3.1.1.

3.5.1 Interprétation géométrique de $K_q(F)$

Nous notons $G_1=\mathrm{Ker}(\chi)$ qui est un sous groupe de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ d'indice 3.

Nous utilisons l'égalité du Lemme 3.4.1 portant sur $K_q(F)$ afin de décomposer cette quantité en produit de facteurs non archimédiens.

Pour cela, nous devons fixer une $\mathbb{Z}$-base de $O_{\mathbb{K}}$, $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$. Cela nous permet de définir un polynôme homogène à 3 variables P en posant

$$P(y,z,t)=N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(y\omega_1+z\omega_2+t\omega_3).$$

Proposition 3.5.1. *Soient $n\geqslant 1$ et $A\geqslant 1$ deux entiers tels que pour tout $p\mid q$, nous avons $n\geqslant 1+v_p(A)$ et tels que la partie de A qui est première avec q appartienne à G_1. Si $O_{\mathbb{K}}$ est principal, nous avons*

$$\Big|\Big\{(y,z,t)\in(\mathbb{Z}/q^n\mathbb{Z})^3 : P(y,z,t)=A\Big\}\Big|=3q^{2n}.$$

Pour démontrer cette proposition, nous aurons besoin du lemme suivant.

***Lemme* 3.5.2.** *Soit n un entier premier à q. Les assertions suivantes sont équivalentes.*
— $\chi(n) = 1$,
— *Il existe* $(y, z, t) \in \mathbb{Z}^3$ *tels que*

$$n \equiv P(y, z, t) \bmod q.$$

Démonstration. Ce lemme se démontre facilement en considérant un nombre premier congru à n modulo q et en notant que la fonction $1 * \chi * \chi^2(n)$ compte le nombre d'idéaux de norme n. L'anneau $O_{\mathbb{K}}$ étant principal, cela fournit le résultat. □

La seconde assertion est une propriété locale, il suffit de la vérifier pour chaque nombre premier p divisant q. Ce lemme nous permet donc d'affirmer que G_1 s'écrit de la façon suivante.

$$G_1 = \prod_{p|q} G_p,$$

où G_p est un sous groupe de $(\mathbb{Z}/p^{v_p(q)}\mathbb{Z})^\times$. Nous notons r_p son indice. Nous avons dans ce cas

$$\prod_{p|q} r_p = 3.$$

La proposition 3.5.1 peut donc être déduite de la proposition suivante.

Proposition 3.5.3. *Soit p un nombre premier divisant q. Soient $n \geqslant 1$ et $A \geqslant 1$ tels que $n \geqslant v_p(q) + v_p(A)$ et tels que la partie de A qui est première avec p appartienne à G_p. Sous l'hypothèse que $O_{\mathbb{K}}$ est principal, nous avons*

$$\left|\left\{(y, z, t) \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^3 \ : P(y, z, t) = A\right\}\right| = r_p p^{2n}.$$

Démonstration. Notons $E(p, n)$ l'ensemble

$$E(p, n) = \{(y, z, t) \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^3 : p \nmid P(y, z, t)\}.$$

La condition $p \nmid P(y, z, t)$ ne dépend que de la congruence de y, z et t modulo p. Par ailleurs, comme $(1 * \chi * \chi^2)(p) = 1$, il n'existe qu'un idéal $\mathfrak{B}_p$ de norme p. Cet idéal est engendré par un élément β_p. La condition $p \nmid P(y, z, t)$ est donc équivalente à la condition $\beta_p \nmid y\omega_1 + z\omega_2 + t\omega_3$ dans $O_{\mathbb{K}}$. De plus, le choix d'une base nous permet d'expliciter l'isomorphisme.

$$\begin{array}{llll} \psi : & (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^3 & \longrightarrow & O_{\mathbb{K}}/pO_{\mathbb{K}} \\ & (y, z, t) & \mapsto & y\omega_1 + z\omega_2 + t\omega_3 \end{array}$$

En notant π la surjection canonique

$$\pi : O_{\mathbb{K}}/pO_{\mathbb{K}} \longrightarrow O_{\mathbb{K}}/\mathfrak{B}_p,$$

l'application $\pi \circ \psi$ est un morphisme de groupes surjectif et puisque

$$O_{\mathbb{K}}/\mathfrak{B}_p \approx \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},$$

nous avons

$$|E(p,1)| = p^3 - p^2.$$

donc

$$|E(p,n)| = p^{3n-1}(p-1).$$

Il est par ailleurs possible de munir $E(p,n)$ d'une structure de groupe multiplicatif via le produit usuel de $O_{\mathbb{K}}$. Cette structure de groupe fait de l'application suivante

$$\begin{array}{cccc} \phi : & E(p,n) & \mapsto & (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times \\ & (y,z,t) & \mapsto & P(y,z,t) \end{array}$$

un morphisme de groupes dont l'image est l'ensemble des éléments dont leur réduction modulo $p^{v_p(q)}$ appartient à G_p. Cet ensemble est de cardinal $p^{n-v_p(q)}p^{v_p(q)-1}(p-1)/r_p$. Le noyau de ce morphisme est donc de cardinal $r_p p^{2n}$, ce qui démontre le résultat dans le cas où A est premier avec p.

Nous déduisons le cas général en raisonnant par récurrence sur la valuation p-adique de A, au moyen du diagramme commutatif suivant et des isomorphismes entre les groupes $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^3$ et $O_{\mathbb{K}}/p^kO_{\mathbb{K}}$.

$$\begin{tikzcd} O_{\mathbb{K}}/\mathfrak{B}_p^{3n-1} \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, ".\beta_p"'] & O_{\mathbb{K}}/p^{n-1}O_{\mathbb{K}} \arrow[r, "N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}"] & (\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z}) \arrow[d, ".p"] \\ O_{\mathbb{K}}/p^nO_{\mathbb{K}} \arrow[rr, "N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}"'] & & (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

où $.\beta_p$ désigne la multiplication par β_p dans $O_{\mathbb{K}}$, tandis que π_n désigne la surjection canonique de $O_{\mathbb{K}}/\mathfrak{B}_p^{3n-1}$ vers $O_{\mathbb{K}}/p^{n-1}O_{\mathbb{K}}$. Les applications $.\beta_p$ et $.p$ sont injectives tandis que le noyau de π_n est de cardinal p^2. Enfin, l'hypothèse $n \geqslant v_p(A) + v_p(q)$ montre que si $v_p(A) \geqslant 1$, alors l'unique antécédent de A par la multiplication par p est également bien défini modulo $p^{v_p(q)}$, ce qui nous permet d'appliquer la récurrence. □

La proposition 3.5.1 permet alors d'écrire

$$\begin{aligned} K_q(F) &= \lim_{k\to\infty} \frac{3}{q^{2k}}\Big|\Big\{\boldsymbol{x} \in (\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z})^2 : F(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{E}_{q^k}\Big\}\Big| \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{3}{q^{2k}}\Big(\sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in(\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z})^2 \\ F(\boldsymbol{x})\in\mathcal{E}_{q^k} \\ \forall p|q \;\; v_p(F(\boldsymbol{x}))\leqslant k-1}} 1 + \sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in(\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z})^2 \\ F(\boldsymbol{x})\in\mathcal{E}_{q^k} \\ \exists p|q \;\; v_p(F(\boldsymbol{x}))>k-1}} 1\Big) \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{3}{q^{2k}} \sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in(\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z})^2 \\ F(\boldsymbol{x})\in\mathcal{E}_{q^k} \\ \forall p|q \;\; v_p(F(\boldsymbol{x}))\leqslant k-1}} \frac{|\{(y,z,t) \in (\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z})^3 : P(y,z,t) \equiv F(\boldsymbol{x}) \bmod q^k\}|}{3q^{2k}} \\ &\quad + O\Big(\sum_{p|q} \frac{\varrho_F^+(p^k)}{p^{2k}}\Big) \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{q^{4k}}\Big|\Big\{(\boldsymbol{x},y,z,t) \in (\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z})^5 : F(\boldsymbol{x}) \equiv P(y,z,t) \bmod q^k\Big\}\Big|. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$K_q(F) = \prod_{p|q} K_p(F)$$

où

$$K_p(F) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^{4k}} \Big|\Big\{(\boldsymbol{x}, y, z, t) \in (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^5 : F(\boldsymbol{x}) \equiv P(y, z, t) \bmod p^k\Big\}\Big|.$$

3.5.2 Interprétation géométrique de $K_p(F)$ lorsque p ne divise pas q

Rappelons la définition de $K_p(F)$ lorsque p ne divise pas q.

Définition 3.5.4. Nous avons, pour tout $p \nmid q$

$$K_p(F) := \Big(1 - \frac{\chi(p)}{p}\Big)\Big(1 - \frac{\chi^2(p)}{p}\Big) \sum_{k\geqslant 0} \frac{\varrho_F^+(p^k)}{p^{2k}} (\chi * \chi^2)(p^k) \tag{3.83}$$

où

$$\varrho_F^+(p^k) := \Big|\Big\{\boldsymbol{x} \in (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^2 : F(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \bmod p^k\Big\}\Big|.$$

Définition 3.5.5. Pour tout p premier, nous notons

$$K_{pg}(F) := \lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^{4k}} \Big|\Big\{(\boldsymbol{x}, y, z, t) \in (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^5 : F(\boldsymbol{x}) \equiv P(y, z, t) \bmod p^k\Big\}\Big|.$$

Notre objectif dans cette section est de démontrer la proposition suivante

Proposition 3.5.6. *Pour tout $p \nmid q$, nous avons*

$$K_p(F) = K_{pg}(F). \tag{3.84}$$

Notons également pour la suite, pour A et k deux entiers, et p un nombre premier

$$S(A, p^k) := \Big|\Big\{(y, z, t) \in (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^3 : P(y, z, t) \equiv A \bmod p^k\Big\}\Big|$$

où P est défini dans la section précédente à partir d'une $\mathbb{Z}$-base de $O_{\mathbb{K}}$. La démonstration de la proposition ci dessus passe par un calcul explicite de $S(A, p^k)$, analogue aux calculs menés dans [2], [1] et [18].

Cas $\chi(p) \neq 1$

Dans ce cas, $pO_{\mathbb{K}}$ est un idéal premier de $O_{\mathbb{K}}$, nous pouvons alors énoncer le lemme suivant.

***Lemme* 3.5.7.** *Soient A et k deux entiers. Si $\chi(p) \neq 1$, nous avons*

$$S(A, p^k) = \begin{cases} p^{2k}\Big(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\Big) & \text{si } 3 \mid v_p(A) \text{ et } v_p(A) < k \\ 0 & \text{si } 3 \nmid v_p(A) \text{ et } v_p(A) < k \\ p^{3[2k/3]} & \text{si } v_p(A) \geqslant k \end{cases}$$

Démonstration. Nous utilisons de nouveau l'isomorphisme

$$\psi : (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^3 \longrightarrow O_{\mathbb{K}}/p^k O_{\mathbb{K}}.$$

Si $v_p(A) = 0$ et

$$N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(y\omega_1 + z\omega_2 + t\omega_3) \equiv A \bmod p^k$$

alors $y\omega_1 + z\omega_2 + t\omega_3 \in (O_{\mathbb{K}}/p^k O_{\mathbb{K}})^\times$. L'application $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}$ induit un morphisme surjectif de groupes multiplicatifs

$$N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}} : (O_{\mathbb{K}}/p^k O_{\mathbb{K}})^\times \longrightarrow (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times$$

ce qui nous permet d'écrire

$$S(A, p^k) = p^{2k}\Big(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\Big)$$

si $v_p(A) = 0$. Nous pouvons raisonner par récurrence sur $v_p(A)$ pour conclure dans le cas où $v_p(A) < k$. En fait, si $v_p(A) \geqslant 3$, et

$$N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(y\omega_1 + z\omega_2 + t\omega_3) \equiv A \bmod p^k$$

alors p divise y, z et t. Ainsi

$$\begin{aligned} S(A, p^k) &= \Big|\Big\{(y', z', t') \in (\mathbb{Z}/p^{k-1}\mathbb{Z})^3 : P(y', z', t') \equiv \frac{A}{p^3} \bmod p^{k-3}\Big\}\Big| \\ &= p^6 S(\frac{A}{p^3}, p^{k-3}) \end{aligned}$$

Le cas $v_p(A) \geqslant k$ se démontre par récurrence sur k au moyen de l'égalité ci-dessus et des conditions initiales

$$S(0,1) = S(0,p) = 1, \quad S(0,p^2) = p^3.$$

□

Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} K_{pg}(F) &= \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{p^{2\nu}} \sum_{k=0}^{\nu-1} \sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^2 \\ v_p(F(\boldsymbol{x}))=k}} \frac{1}{p^{2\nu}} S(F(\boldsymbol{x}), p^\nu) + o(1) \\ &= \Big(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\Big) \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{p^{2\nu}} \sum_{\substack{k=0 \\ 3|k}}^{\nu-1} \big(\varrho_F^+(p^k) p^{2(\nu-k)} - \varrho_F^+(p^{k+1}) p^{2(\nu-k-1)}\big) \\ &= \Big(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\Big) \sum_{\substack{k\geqslant 0 \\ 3|k}} \Big(\frac{\varrho_F^+(p^k)}{p^{2k}} - \frac{\varrho_F^+(p^{k+1})}{p^{2(k+1)}}\Big). \end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque $\chi(p) \neq 1$ et que χ est d'ordre 3, il est facile de vérifier que

$$\Big(1 - \frac{\chi(p)}{p}\Big)\Big(1 - \frac{\chi^2(p)}{p}\Big) = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}$$

et

$$(\chi * \chi^2)(p^k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \equiv 0 \bmod 3 \\ -1 & \text{si } k \equiv 1 \bmod 3 \\ 0 & \text{si } k \equiv 2 \bmod 3 \end{cases}$$

Ainsi, nous avons

$$K_{pg}(F) = \Big(1 - \frac{\chi(p)}{p}\Big)\Big(1 - \frac{\chi^2(p)}{p}\Big) \sum_{k\geqslant 0} \frac{\varrho_F^+(p^k)}{p^{2k}} (\chi * \chi^2)(p^k) = K_p(F).$$

Cas $\chi(p) = 1$

Dans ce cas, $pO_{\mathbb{K}}$ se décompose en produit de trois idéaux premiers

$$pO_{\mathbb{K}} = \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3.$$

. Nous pouvons alors énoncer le lemme suivant.

***Lemme* 3.5.8.** *Soient A et k deux entiers. Nous avons*

$$S(A,p^k) = \begin{cases} p^{2k}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^2\binom{v_p(A)+2}{2} & si\ v_p(A) < k \\ p^{2k}\Big\{\frac{k(k+1)}{2}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^2 + k\Big(1-\frac{1}{p}\Big)+1\Big\} & si\ v_p(A) \geqslant k \end{cases}$$

Démonstration. Il s'agit de compter les éléments de norme A mod p^k dans $O_{\mathbb{K}}/p^kO_{\mathbb{K}}$. Nous considérons l'isomorphisme d'anneaux

$$O_{\mathbb{K}}/p^kO_{\mathbb{K}} \approx O_{\mathbb{K}}/\mathfrak{B}_1^k \times O_{\mathbb{K}}/\mathfrak{B}_2^k \times O_{\mathbb{K}}/\mathfrak{B}_3^k.$$

Si $v_p(A) = 0$, l'application $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}$ induit de nouveau un morphisme de groupes surjectif

$$N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}} : (O_{\mathbb{K}}/p^kO_{\mathbb{K}})^\times \longrightarrow (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times,$$

mais lorsque $\chi(p) = 1$, le cardinal de $(O_{\mathbb{K}}/p^kO_{\mathbb{K}})^\times$ est $p^{3k}(1-\frac{1}{p})^3$. Cela démontre l'égalité

$$S(A,p^k) = p^{2k}(1-\frac{1}{p})^2$$

si $v_p(A) = 0$. Dans le cas où $v_p(A) < k$, la condition

$$N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(y\omega_1 + z\omega_2 + t\omega_3) \equiv A \bmod p^k$$

implique qu'il existe des exposants (i,j,h) tels que

$$i + j + h = v_p(A)$$

et un élément $\boldsymbol{u}$ premier avec p tels que

$$y\omega_1 + z\omega_2 + t\omega_3 = \beta_1^i\beta_2^j\beta_3^h\boldsymbol{u}$$

avec

$$\mathfrak{B}_\ell = (\beta_\ell), \quad \ell = 1,2,3.$$

Un tel $\boldsymbol{u}$ est défini de manière unique dans

$$O_{\mathbb{K}}/\mathfrak{B}_1^{k-i} \times O_{\mathbb{K}}/\mathfrak{B}_2^{k-j} \times O_{\mathbb{K}}/\mathfrak{B}_3^{k-h}.$$

Une fois fixés les exposants (i,j,h), il est facile de voir que le nombre d'éléments $\boldsymbol{u} \in O_{\mathbb{K}}/\mathfrak{B}_1^{k-i} \times O_{\mathbb{K}}/\mathfrak{B}_2^{k-j} \times O_{\mathbb{K}}/\mathfrak{B}_3^{k-h}$ tels que

$$N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\boldsymbol{u}) \equiv \frac{A}{p^{v_p(A)}} \bmod p^{k-v_p(A)}$$

est de cardinal $p^{2k}(1-\frac{1}{p})^2$. Il existe enfin $\binom{v_p(A)+2}{2}$ choix possibles pour les exposants (i,j,h). Enfin, dans le cas où $v_p(A) \geqslant k$, l'ensemble des solutions correspond à un choix d'un triplet (i,j,h) tels que $i+j+h \geqslant k$ et d'un élément $\boldsymbol{u} \in O_{\mathbb{K}}/\mathfrak{B}_1^{k-i} \times O_{\mathbb{K}}/\mathfrak{B}_2^{k-j} \times O_{\mathbb{K}}/\mathfrak{B}_3^{k-h}$ premier avec p. □

Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}
K_{pg}(F) &= \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{p^{2\nu}} \sum_{k=0}^{\nu-1} \sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^2 \\ v_p(F(\boldsymbol{x}))=k}} \frac{1}{p^{2\nu}} S(F(\boldsymbol{x}), p^\nu) + o(1) \\
&= \Big(1-\frac{1}{p}\Big)^2 \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{p^{2\nu}} \sum_{k=0}^{\nu-1} \Big(\varrho_F^+(p^k)p^{2(\nu-k)} - \varrho_F^+(p^{k+1})p^{2(\nu-k-1)}\Big)\binom{k+2}{2} \\
&= \Big(1-\frac{1}{p}\Big)^2 \sum_{k\geqslant 0} \frac{\varrho_F^+(p^k)}{p^{2k}}(k+1).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque $\chi(p)=1$, il est facile de vérifier que

$$\Big(1-\frac{\chi(p)}{p}\Big)\Big(1-\frac{\chi^2(p)}{p}\Big) = \Big(1-\frac{1}{p}\Big)^2$$

et

$$(\chi * \chi^2)(p^k) = k+1.$$

Ainsi, nous avons

$$K_{pg}(F) = \Big(1-\frac{\chi(p)}{p}\Big)\Big(1-\frac{\chi^2(p)}{p}\Big) \sum_{k\geqslant 0} \frac{\varrho_F^+(p^k)}{p^{2k}} (\chi * \chi^2)(p^k) = K_p(F).$$

Bibliographie

[1] R. de la Bretèche et T. D. Browning, *Binary linear forms as sums of two squares*, Compositio Mathematica **144** (2008), no. 6, 1375–1402.

[2] _____, *Binary forms as sums of two squares and Châtelet surfaces*, (2011).

[3] R. de la Bretèche, T. D. Browning, et E. Peyre, *On Manin's conjecture for a family of Châtelet surfaces*, 2010.

[4] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum, *Moyennes de fonctions arithmétiques de formes binaires*, Mathematika **58**, no. 2, 290–304.

[5] _____, *Oscillations localisées sur les diviseurs*, J. London Math. Soc. (2012), 669–693, 85 n° 2.

[6] _____, *Sur la conjecture de Manin pour certaines surfaces de Châtelet*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu **12** (2013), no. 4, 759–819.

[7] F. Châtelet, *Points rationnels sur certaines surfaces cubiques*, Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres **12** (1958-1959), no. 1 (fr), talk :12.

[8] H. Cohen, *A course in computational algebraic numeber theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1993.

[9] S. Daniel, *On the divisor-sum problem for binary forms*, Journal fűr die reine und angewandte Mathematik **1999** (1999), no. 507.

[10] K. Destagnol, *La conjecture de Manin pour certaines surfaces de Châtelet*, Acta Arithmetica (2016), 1–67.

[11] P. Erdős, *On the distribution function of additive functions*, Annals of Mathematics **47** (1946), no. 1, 1–20.

[12] _____, *On the density of some sequences of integers*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), no. 8, 685–692.

[13] K. Ford, B. Green, et D. Koukoulopoulos, *Equal sums in random sets and the concentration of divisors*, 2019.

[14] J. Franke, Y. Manin, et Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on Fano varieties*, Invent Math (1989), 421–435.

[15] R. R. Hall et G. Tenenbaum, *On the Average and Normal Orders of Hooley's Delta Function*, Journal of The London Mathematical **s2-25** (1982), 392–406.

[16] _____, *The average orders of Hooley's Δ_r-functions, II*, Compositio Mathematica **60** (1986), no. 2, 163–186 (en).

[17] _____, *Divisors*, Cambridge University Press, 1988, Cambridge tracts in mathematics n° 90.

[18] D.R. Heath-Brown, *Linear relations amongst sums of two squares*, London Mathematical Society Lecture Note Series, pp. 133–176, Cambridge University Press, 2004.

[19] H. Heilbronn, *Zeta-functions and L-functions*, in Algebraic Number Theory, 204–230.

[20] K. Henriot, *Nair-tenenbaum bounds uniform with respect to the discriminant*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **152** (2012), no. 3, 405–424.

[21] C. Hooley, *On a new technique and its applications to the theory of numbers*, Proceedings of the London Mathematical Society **s3-38** (1979), 115–151.

[22] A. Lartaux, *Moments de la fonction Delta de Hooley associée à un caractère*, (2021), prépublication.

[23] _____, *Sur la fonction Delta de Hooley associée à des caractères*, (2021), prépublication.

[24] _____, *Sur le nombre d'idéaux dont la norme est la valeur d'une forme binaire de degré* 3, (2021), prépublication.

[25] H. Maier et G. Tenenbaum, *On the set of divisors of an integer*, Invent Math **76** (1984), 121–128.

[26] _____, *On the normal concentration of divisors*, Journal of the London Mathematical Society **s2-31** (1985), no. 3, 393–400.

[27] _____, *On the normal concentration of divisors, 2*, Mathematical Proceedings of The Cambridge Philosophical Society **147** (2009).

[28] E. Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79** (1995), no. 1, 101–218.

[29] _____, *Points de hauteur bornée, topologie adélique et mesures de Tamagawa*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **15** (2003), no. 1, 319–349 (fr).

[30] O. Robert, *Sur le nombre des entiers représentables comme somme de trois puissances*, Acta Arithmetica **149** (2011), 1–21.

[31] P. Shiu, *A Brun-Titchmarsh theorem for multiplicative functions*, J. reine angew Math (1980), 161–170, 313.

[32] G. Tenenbaum, *Sur la concentration moyenne des diviseurs*, Commentarii Mathematici Helvetici **60** (1985), 411–428.

[33] _____, *Sur une question d'Erdős et Schinzel, II*, Inventiones mathematicae **99** (1990), 215–224.

[34] _____, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Belin, 2015, quatrième édition.