



HAL
open science

Tropical Hodge theory and applications

Matthieu Piquerez

► **To cite this version:**

Matthieu Piquerez. Tropical Hodge theory and applications. Algebraic Geometry [math.AG]. Institut Polytechnique de Paris, 2021. English. NNT : 2021IPPAX073 . tel-03499730

HAL Id: tel-03499730

<https://theses.hal.science/tel-03499730>

Submitted on 21 Dec 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT
POLYTECHNIQUE
DE PARIS

NNT : 2021IPPAX073

Thèse de doctorat



Théorie de Hodge tropicale et applications

Thèse de doctorat de l'Institut Polytechnique de Paris
préparée à l'École polytechnique

École doctorale n°574 Ecole Doctorale de Mathématiques Hadamard (EDMH)
Spécialité de doctorat : Mathématiques fondamentales

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 16 novembre 2021, par

MATTHIEU PIQUEREZ

Composition du Jury :

Sébastien Boucksom Directeur de recherche, Ecole polytechnique (CMLS)	Président
June Huh Professeur, Princeton University (Department of Mathematics)	Rapporteur
Ilya Itenberg Professeur, Sorbonne Université (IMJ-PRG)	Rapporteur
Johannes Nicaise Professeur, Imperial College London (Department of Mathematics)	Examineur
Vincent Pilaud Chargé de recherche, Ecole polytechnique (LIX)	Examineur
Kris Shaw Professeur associée, University of Oslo (Department of Mathematics)	Examinatrice
Tony Yue Yu Professeur, California Institute of Technology (PMA)	Examineur
Omid Amini Chargé de recherche, Ecole polytechnique (CMLS)	Directeur de thèse

Remerciements

En tout premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse, Omid Amini. Cette thèse n'aurait pu voir le jour sans sa disponibilité, sa patience et sa gentillesse apparemment sans limite. Si j'ai bien appris une chose grâce à lui, c'est que même les tâches qui semblent les plus difficiles peuvent être entreprises, et le résultat dépasse souvent nos espérances. J'espère que cette thèse marque le début d'une longue et fructueuse collaboration.

Je souhaite ensuite remercier June Huh et Ilia Itenberg pour m'avoir fait l'honneur de rapporter ma thèse, ainsi que Sébastien Boucksom, Johannes Nicaise, Vincent Pilaud, Kris Shaw et Tony Yue Yu pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie également le personnel et les membres du CMLS et du DMA, et plus généralement de Polytechnique et de l'ÉNS, pour leur accueil chaleureux et leur efficacité à régler toute sorte de problèmes.

Merci également à tous les membres de la communauté mathématique avec qui j'ai pu discuter ou qui ont organisé ou participé aux différentes conférences auxquelles j'ai pu assister.

Enfin, je remercie tous ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin pendant ma thèse, en particulier ma famille qui m'a littéralement soutenu de très près pendant ces quelques mois de confinement.

Préface

Version française

L'objet principal de cette thèse est d'établir une théorie de Hodge pour les variétés tropicales. Cette théorie tire toute sa richesse de ses nombreuses interactions avec différents domaines des mathématiques allant de la géométrie complexe ou tropicale à la théorie de Hodge asymptotique en passant par la théorie quantique des champs et la combinatoire des polytopes, des complexes simpliciaux et des matroïdes. Tous ces domaines apportent des intuitions sur les objets et les phénomènes apparaissant dans la théorie développée, et, en retour, cette dernière offre de nombreuses perspectives d'applications.

Depuis une vingtaine d'année, la géométrie tropicale s'est révélée être une théorie très féconde en apportant une nouvelle façon d'aborder des problèmes difficiles en mathématiques. En première approximation, elle permet de faire de la géométrie algébrique sur des espaces linéaires par morceaux, sur lesquels on peut plus facilement faire des calculs et utiliser des méthodes combinatoires. L'objectif est en général d'en déduire des résultats en géométrie classique, souvent en géométrie réelle ou complexe. Par exemple, plusieurs résultats montrent que les courbes tropicales sont très similaires aux surfaces de Riemann, et la géométrie tropicale permet de mieux comprendre la dégénérescence de ces surfaces [BN07, GK08, MZ08, Cop16, CV10, AB15, C DPR12b, BJ16, ABBF16, AN20].

Dans cette thèse, nous nous intéressons plutôt aux variétés tropicales de dimensions quelconques. Ces dernières apparaissent notamment en tant que limites de familles de variétés complexes qui dégèrent. Plusieurs indices laissent penser que, comme pour le cas de la dimension un, les variétés tropicales devraient encoder beaucoup d'information sur ces dégénérescences. Les résultats que nous obtenons vont dans ce sens, l'analogie entre une variété tropicale et une famille de variétés complexes étant sous-jacente à une grande partie de nos travaux.

Récemment, dans l'objectif de mieux comprendre cette interaction entre une dégénérescence d'une famille de variétés complexes et sa limite tropicale, Itenberg, Katzarkov, Mikhalkin et Zharkov ont introduit une homologie tropicale dans [IKMZ19]. Cette homologie et la cohomologie associée se sont révélées très riches et avoir de nombreuses applications [JSS19, MZ14, JRS18, GS19b, GS19a, AB14, ARS19, Aks19, AP20b, Mik20a, AP20c, AP21]. À bien des égards, la cohomologie d'une variété tropicale ressemble à celle d'une variété complexe. Une théorie très importante en géométrie complexe est la théorie de Hodge qui montre toute la richesse de la structure cohomologique des variétés complexes et dont les applications sont innombrables. Dans cette thèse, nous parvenons à établir une théorie de Hodge tropicale. Nous obtenons ainsi une bien meilleure compréhension de la cohomologie d'une variété tropicale. Cela ouvre de nombreuses perspectives pour l'étude des dégénérescences de variétés complexes, ce qui forme la majeure partie des applications que nous envisageons pour notre théorie.

Comme nous l'avons dit, un des intérêts de la géométrie tropicale est que l'on peut utiliser des outils combinatoires. Ainsi, pour établir notre théorie, nous nous inspirons des méthodes développées en théorie de Hodge combinatoire. Cette théorie et celles qui lui sont associées ont permis de résoudre des conjectures importantes en combinatoire des complexes

simpliciaux, des matroïdes, etc., avec les travaux précurseurs de Stanley [Sta80], ou des travaux plus récents [McM93, Kar04, AHK18, Adi18, BHM⁺20a, BHM⁺20b, BH19]. Cette thèse montre que certains objets combinatoires importants apparaissant dans les articles cités peuvent être compris grâce à la cohomologie tropicale. Cela, nous donne un nouveau point de vue pour mieux comprendre et dépasser certains de ces résultats.

Ainsi l'on voit se dessiner deux domaines principaux. D'une part, l'étude des dégénérescences de variétés complexes, et d'autre part, certains champs de la combinatoire. En ajoutant les outils de la géométrie tropicale, la théorie de Hodge tropicale crée un pont entre ces deux domaines et ouvre de nouvelles perspectives d'applications dans chacun d'eux, mais aussi dans d'autres sujets que nous n'avons pas encore évoqués. En plus de présenter le fondement de la théorie de Hodge tropicale, cette thèse propose un aperçu de développements et d'applications, réelles ou potentielles, de cette théorie, dont plusieurs feront l'objets de nos futurs travaux.

Organisation de la thèse. La thèse contient cinq chapitres. Les quatre derniers sont les quatre articles écrits durant la thèse, simplement concaténés, avec quelques retouches mineures. Il nous a paru bon d'écrire une présentation détaillée, constituant le premier chapitre, et qui reprend l'ensemble des résultats de la thèse et les met en perspective.

Les chapitres 2, 3, 4 correspondent aux articles [AP21, AP20b, AP20c]¹. Ils ont été écrits en collaboration avec Omid Amini. Ils constituent le début d'un programme de recherche que nous menons ensemble dont le but est d'établir une théorie de Hodge tropicale et d'en déduire différentes applications.

Le dernier chapitre reprend et complète un travail effectué par l'auteur de cette thèse au début de celle-ci, [Piq19b], au sujet de la géométrie de certains polynômes associés à des complexes simpliciaux. Il s'agit en fait d'un sujet proche de la théorie de Hodge tropicale, créée a posteriori.

Décrivons brièvement ces quatre articles. Nous parlerons ensuite plus en détail du contenu de la présentation détaillée qui est spécifique à cette thèse.

Homologie des éventails tropicaux. Le second chapitre étudie le cas local de la géométrie tropicale, c'est-à-dire le cas des éventails tropicaux. Nous y étendons la notion de lissité tropicale en allant au-delà de celle utilisée jusqu'à présent qui s'appuie sur les éventails de Bergman des matroïdes. En effet, nous pensons que cette nouvelle notion sera utile dans nos futurs travaux sur les dégénérescences de variétés complexes. Pour nous, une variété tropicale sera lisse si elle vérifie localement la dualité de Poincaré. La lissité tropicale a pour but de refléter le fait que la limite tropicale se souvient de nombreuses informations concernant la dégénérescence. Elle est liée à la notion de dégénérescence maximale en géométrie complexe, et nos travaux tendent à montrer qu'une définition purement homologique devrait être particulièrement adaptée.

Nous construisons ensuite une famille d'éventails tropicaux, dits tropicalement épluchables, qui sont lisses. Celle-ci contient notamment les éventails de Bergman, montrant que notre notion de lissité est plus générale que la précédente.

Par ailleurs, nous étudions les anneaux de Chow des éventails unimodulaires. Il s'agit d'objets importants en combinatoire. Dans le chapitre 2, nous montrons que l'anneau de Chow d'un éventail est inclus dans la cohomologie tropicale de la compactification canonique de l'éventail. Dans le cas où l'éventail est lisse, nous obtenons un isomorphisme. Ainsi, cela fournit une nouvelle interprétation, et une généralisation, de l'article d'Adiprasito, Huh et Katz [AHK18]

1. Notons que la version de l'article [AP20b] ici présente s'appuie sur [AP21] bien qu'elle ait été rédigée auparavant. Aussi mériterait-elle une révision pour harmoniser les notations et améliorer certaines preuves que nous comprenons désormais mieux. Cela sera fait très prochainement et l'article révisé sera disponible peu après la publication de cette thèse.

sur l'anneau de Chow des éventails de Bergman. Les propriétés qui y sont montrées sont en fait des propriétés de la cohomologie tropicale de la compactification canonique de l'éventail.

Cette compactification canonique des éventails et des complexes polyédraux joue un rôle central dans tout notre travail. On peut la voir comme une généralisation d'un analogue tropical de la théorie des compactifications magnifiques de complémentaires d'arrangements d'hyperplans introduites par De Concini et Procesi [DP95]. Par la suite, Feichtner et Yuzvinski ont montré dans [FY04] que la cohomologie de ces compactifications est calculée par l'anneau de Chow de l'éventail correspondant. Nos travaux permettent de généraliser leur résultat, notamment grâce à l'introduction d'un analogue tropical de la suite spectrale de Deligne dans le cas spécifique des éventails tropicaux lisses. Nous l'appelons la suite exacte de Deligne tropicale.

Théorie de Hodge pour les variétés tropicales. Dans le troisième chapitre, nous établissons à proprement parler la théorie de Hodge tropicale. Nous démontrons que la cohomologie tropicale d'une variété tropicale projective lisse localement kählérienne vérifie plusieurs propriétés de symétrie appelées propriétés kählériennes. Ces propriétés sont la dualité de Poincaré, le théorème de Lefschetz difficile, les relations de Hodge-Riemann et la conjecture monodromie-poids.

Ce résultat est d'abord démontré pour les éventails grâce aux outils développés dans le chapitre 2. Nous généralisons en particulier l'article [AHK18] où les auteurs établissent les propriétés kählériennes pour les éventails de Bergman.

Nous obtenons alors le résultat global. Pour ce faire, nous nous inspirons de [IKMZ19] et introduisons un analogue tropical de la suite spectrale de Steenbrink. Nous généralisons le résultat de [IKMZ19] au cas non approximable, résultat qui montre que cette suite spectrale dégénère vers la cohomologie tropicale. Pour cela nous utilisons de nouveau la suite exacte de Deligne tropicale.

Nous nous inspirons ensuite du travail de Guillén et Navarro Aznar sur le théorème des cycles invariants [GN90]. Cela nous permet de montrer que la cohomologie tropicale ainsi calculée est une structure de Hodge-Lefschetz polarisée au sens de Saito [Sai88], c'est-à-dire qu'elle vérifie les propriétés kählériennes.

Notons qu'en l'absence du contexte géométrique, nous ne pouvons nous appuyer simplement sur les résultats préexistants. Nous devons construire des analogues tropicaux des différents objets et redémontrer les résultats directement dans le cadre tropical grâce à de nouvelles techniques de preuve. Certains des outils développés, comme l'analogue tropical des formes de Kähler, jouent un rôle central dans les applications en géométrie complexe sur lesquels nous travaillons actuellement.

Une dernière étape de la preuve consiste à étendre nos résultats à toutes les variétés tropicales concernées. Pour cela nous utilisons un théorème d'existence de bonnes triangulations démontré pour l'occasion, ainsi qu'un théorème de fibré projectif tropical permettant de montrer que, sous certaines conditions, les propriétés souhaitées sont stables lorsque l'on éclate ou contracte un diviseur tropical à l'infini.

L'opérateur eigenwave introduit dans [MZ14] par Mikhalkin et Zharkov, aussi appelé opérateur de monodromie tropical, joue un rôle central dans ce travail. Notamment nous résolvons la conjecture monodromie-poids apparaissant dans [MZ14, Liu19] et qui énonce que l'opérateur induit un isomorphisme entre les parties de bidegrés (p, q) et (q, p) pour deux entiers p et q .

Suite de Clemens et Schmid tropicale et existence de cycles tropicaux. Vient ensuite une application de la théorie de Hodge tropicale. Dans le chapitre 4, nous résolvons la conjecture de Hodge tropicale pour les variétés tropicales projectives lisses localement kählériennes admettant une triangulation rationnelle : les classes de Hodge sont exactement les

classes de bidegrés (p, p) dans le noyau de la monodromie. Dans [Zha20], Zharkov présente une idée de Kontsevich selon laquelle un contre-exemple à la conjecture de Hodge tropicale pour une variété tropicale abélienne fournirait un contre-exemple à la conjecture de Hodge classique. Sans pour autant infirmer cette idée, notre résultat va nettement dans le sens inverse.

Pour démontrer notre théorème, nous introduisons un analogue tropical de la suite exacte de Clemens et Schmid [Cle77, Sch73]. Nous obtenons ainsi un analogue du théorème des cycles invariants, et la preuve consiste ensuite à construire des cycles tropicaux associés à ces cycles invariants, ce que nous faisons grâce aux résultats de [AP20b].

Une généralisation des polynômes de Symanzik en dimensions supérieures. Finalement, dans le dernier chapitre, motivé par la description de l'asymptotique de l'accouplement de hauteur de cycles sur une famille de variétés complexes qui dégénère, nous généralisons les polynômes de Symanzik au cas des complexes simpliciaux et au-delà.

En dimension un, les deux polynômes de Symanzik d'un graphe métrique sont utilisés en théorie quantique des champs pour calculer les intégrales de Feynman. Ils sont connus pour avoir de nombreuses propriétés. Il s'agit notamment de spécialisations du polynôme de Tutte multivarié, aussi connu sous le nom de modèle de Potts en physique. Notre généralisation conserve la plupart de ses propriétés.

D'autre part, les polynômes que nous définissons sont entre autres liés à un théorème de type Kirchhoff pour les complexes simpliciaux découvert récemment [DKM09], et à d'autres travaux sur les probabilités déterminantales et les complexes simpliciaux aléatoires [Lyo03, Lyo09].

Récemment, Amini, Bloch, Burgos Gil et Fresán ont montré dans [ABBF16] que le rapport des deux polynômes de Symanzik sur la limite tropicale peut décrire l'asymptotique de l'accouplement de hauteur de deux cycles de degré zéro sur une famille de surfaces de Riemann. Ces polynômes sont aussi reliés à la limite tropicale des mesures canoniques sur les fibres de la famille. Notre généralisation peut être vue comme une première étape pour étendre ces résultats en dimensions supérieures.

En particulier, nous généralisons un théorème de stabilité sur le rapport des deux polynômes de Symanzik vis-à-vis d'une variation bornée de la géométrie du complexe simplicial. Un cas particulier de ce théorème en dimension un est étudié dans [Ami19] pour apporter une nouvelle preuve des résultats de [ABBF16]. Ce phénomène de stabilité doit par ailleurs être lié aux théorèmes de l'orbite SL_2 et de l'orbite nilpotente en théorie de Hodge asymptotique.

Pour démontrer le théorème de stabilité, nous fournissons une description complète du graphe d'échange des paires d'indépendants d'un matroïde. Ce résultat est par exemple lié à une conjecture de White [Whi80] et pourrait avoir un intérêt en soi.

Présentation détaillée. Le premier chapitre, écrit en français, est spécifique à cette thèse et vise plusieurs objectifs.

Tout d'abord, il s'agit d'une présentation détaillée de l'ensemble des quatre articles. Il est conçu pour pouvoir être lu indépendamment, bien que nous renvoyons régulièrement aux autres chapitres pour les détails. Nous y esquissons tout de même une sélection de démonstrations qui nous ont paru particulièrement dignes d'intérêt.

Au fur et à mesure de l'élaboration des quatre articles, des liens avec d'autres théories et des applications potentielles sont apparus. Notre travail est par exemple lié à la conjecture de Hodge tropicale ou à la théorie de Hodge asymptotique. De manière plus intéressante, nous mettons en lumière des liens étroits, jusqu'alors apparemment passés inaperçus, entre le programme que nous développons en théorie de Hodge tropicale et les travaux menés par exemple par Adiprasito et Huh en théorie de Hodge combinatoire. Cette connexion pourrait permettre de mieux comprendre voire de dépasser certains travaux dans ce domaine.

Un second objectif de la présentation détaillée est d'expliciter tous ces liens entretenus avec la combinatoire mais aussi avec les autres théories mentionnées. Nous ne présenterons pas toujours ces dernières de manière précise, soit parce qu'une telle présentation nous emmènerait trop loin de notre sujet, soit parfois parce que l'auteur de cette thèse ne maîtrise pas forcément suffisamment bien ces différentes théories. Dans ces cas-là, notre but est plutôt de donner une intuition quitte à perdre en rigueur. Nous espérons que cette simplification de certains concepts pourra être utile à des lecteurs peu familier des thèmes présentés pour mieux comprendre ou découvrir de nouvelles notions.

Pour expliciter certains de ces liens, des généralisations attendues de notre travail sont nécessaires. C'est pourquoi nous proposons un cadre suffisamment général pour donner un sens précis à ces relations et à certaines questions associées. En plus de généraliser plusieurs théorèmes et d'obtenir une meilleure compréhension des précédents travaux, nous obtenons aussi quelques résultats originaux intéressants. Un aperçu de ces nouvelles contributions est donné ci-dessous. Pour ne pas trop alourdir la présentation, les preuves de ces résultats sont simplement esquissées. Si notre cadre généralisé permet en effet d'obtenir les applications envisagées, ces démonstrations seront de toute façon complètement rédigées dans de futurs articles.

Par ailleurs il se trouve que le cadre dans lequel nous travaillons permet de simplifier significativement certaines preuves, notamment parmi celles utilisées dans la présente version de [AP20b]. Ces nouvelles idées apparaîtront dans une future version de l'article.

Décrivons les principales nouveautés de la présentation détaillée par rapport aux articles.

Liens avec la combinatoire des complexes simpliciaux. Dans le chapitre 1, nous travaillons avec des structures simpliciales affines, objets créés pour l'occasion, qui sont des complexes simpliciaux abstraits munis localement d'une structure affine semblable à celle présente sur les variétés tropicales triangulées. Ces structures ne sont pas forcément localement plongeables dans \mathbb{R}^n car deux faces peuvent se superposer, par exemple si la restriction des fonctions affines à ces deux faces coïncident.

Un des avantages de cette description est de pouvoir généraliser un théorème de l'article [AP21] aux complexes simpliciaux abstraits. Dans cet article, nous montrons que l'anneau de Chow d'un éventail Σ est isomorphe à la cohomologie tropicale de la compactification canonique de Σ restreinte aux parties de bidegrés (p, p) pour $0 \leq p \leq \dim(\Sigma)$.

Plus généralement, si Δ est un complexe simplicial de dimension d , on peut regarder l'anneau de Stanley-Reisner $SR^\bullet(\Delta)$ et choisir d éléments suffisamment génériques dans $SR^1(\Delta)$. Le quotient de $SR^1(\Delta)$ par l'idéal Θ engendré par ces d éléments est l'analogue de l'anneau de Chow pour l'éventail $\text{cone}(\Delta)$ induit par Δ . On le note $A^\bullet(\Delta)$. Par exemple cet anneau vérifie la dualité de Poincaré si Δ est une sphère simpliciale.

Les d éléments engendrant Θ induisent une structure simpliciale linéaire naturelle sur $\text{cone}(\Delta)$. Notons la Σ . Nous montrons que

$$A^p(\Delta) \simeq H^{p,p}(\overline{\Sigma}),$$

où le membre de droite est la cohomologie tropicale de la compactification canonique de Σ . Ce résultat pourrait permettre d'introduire des outils cohomologiques ou faisceautiques pour étudier $A^\bullet(\Delta)$. Par exemple, l'isomorphisme ci-dessus permet de redémontrer la dualité de Poincaré pour $A^p(\Delta)$ lorsque Δ est une sphère simpliciale.

Nous montrons aussi que le complexe de partition utilisé par Adiprasito dans [Adi18] pour démontrer la g -conjecture pour les sphères simpliciales correspond à ce que nous appelons la suite exacte de Deligne tropicale, que nous utilisons de manière cruciale à plusieurs reprises dans nos travaux. Peut-être que ce lien permettra dans le futur d'apporter un nouveau point de vue voire de dépasser le travail d'Adiprasito.

Structures simpliciale rationnelles. Dans [AP20b] nous travaillons avec des complexes simpliciaux unimodulaires. Or l'unimodularité est une condition qui n'est pas toujours facile à conserver. Nous avons ainsi besoin de théorèmes combinatoires relativement difficiles à démontrer. Cette condition d'unimodularité est très importante lorsque l'on travaille à coefficients entiers, comme on peut le constater dans [AP21]. Mais pour le cas rationnel, on peut en fait se passer de cette condition d'unimodularité et travailler directement avec des complexes simpliciaux rationnels quelconques, ou bien des structures simpliciales rationnelles. Cela permet de simplifier considérablement certaines preuves comme nous le verrons dans le chapitre 1.

Par ailleurs, nos preuves s'appuient systématiquement sur des triangulations. Comme la cohomologie est indépendante de la triangulation choisie sur la variété tropicale, il devrait être possible de travailler directement avec la variété sans choisir de triangulation. Néanmoins nous ignorons comment faire pour le moment. Cela entraîne une certaine limite à nos résultats car certaines variétés tropicales rationnelles n'admettent pas de triangulation rationnelle. Notamment notre travail sur la conjecture de Hodge tropicale [AP20c] ne s'applique pas à ces variétés. Pour tenter de pallier à cette limite, nous définissons les structures simpliciales faiblement rationnelles qui semblent bien adaptées à ce problème. Nous autorisons des faces rationnelles et d'autres non rationnelles à coexister. On peut par exemple définir les classes de Hodge rationnelles dans ce contexte et ainsi poser précisément la conjecture de Hodge tropicale. Notamment, nous présentons l'intérêt de cette définition pour étudier les variétés abéliennes tropicales, ce qui nous permet d'inclure le problème posé par Kontsevich et Zharkov dans [Zha20] dans notre théorie.

English version

The main objective of this thesis is to establish a Hodge theory for tropical varieties. The power of this theory comes from its numerous interactions with various other fields of mathematics: with algebraic, tropical, and complex geometry, with algebraic topology, with asymptotic Hodge theory, but also with quantum field theory or the combinatorics of simplicial complexes, polytopes and matroids. These classical subjects provide a guiding intuition and principles on the objects and the phenomena that appear in the theory we wish to develop. As a counterpart, our theory leads to many perspectives of applications.

For two decades, tropical geometry has established itself as a very productive theory which provides a new approach towards difficult until now resisting problems in mathematics, in different branches. At a first glance, it is a way to do algebraic geometry on piecewise linear spaces, on which one can more easily do some computations or use powerful combinatorial methods. Usually, the primary goal is to deduce some results in classical geometry, for instance in real or complex geometry. For example, many results show that tropical curves are very similar to Riemann surfaces, and tropical geometry leads to a better understanding of degenerations of these surfaces [BN07, GK08, MZ08, Cop16, CV10, AB15, CDPR12b, BJ16, ABBF16, AN20].

In this thesis, we are interested in tropical varieties of any dimension. They appear, for instance, as tropical limits of degenerating families of complex varieties. Several evidences let us think that, as in dimension one, tropical varieties should encode much data about the degenerations. The results we obtain provide new evidences: the analogy between tropical varieties and family of complex varieties underlies a large part of our work.

Recently, in order to better understand the interactions between a family of complex varieties and its tropical limit, Itenberg, Katzarkov, Mikhalkin et Zharkov introduced a tropical homology [IKMZ19]. This homology and the corresponding cohomology have been already studied a lot and have led to many applications [JSS19, MZ14, JRS18, GS19b, GS19a,

AB14, ARS19, Aks19, AP20b, Mik20a, AP20c, AP21]. The cohomology of a tropical variety mimics that of a complex variety. A theory of great importance in complex geometry is Hodge theory. It shows numerous interesting properties of cohomologies of complex varieties, and over the decades it has plenty of applications. In this thesis, we achieve to establish a tropical Hodge theory, that is a Hodge theory for tropical varieties. This leads to a better understanding of the cohomology of tropical varieties, and opens up diverse perspectives in the study of degenerations of complex varieties, which are the main applications we have in mind for the development of our theory.

One of the interesting features of tropical geometry is that one can use combinatorial tools. In particular, in our work, we use ideas coming from combinatorial Hodge theory. This theory has been used to overcome important conjectures concerning the combinatorics of simplicial complexes, matroids, etc. We can cite in particular the pioneering work of Stanley [Sta80], or more recent works as [McM93, Kar04, AHK18, Adi18, BHM⁺20a, BHM⁺20b, BH19]. This thesis shows that some combinatorial objects at the heart of these recent papers could be computed thanks to tropical cohomology. We thus get a new point of view and a bridge to classical Hodge theory that should lead to a better understanding or generalizations of some of these results.

We can therefore see two main underlying topics. On the one hand, the study of degenerations of complex varieties. And on the other hand some parts of combinatorics. With the help of tools coming from tropical geometry, tropical Hodge theory brings a bridge between these two fields, opening new perspectives of applications to both, and also to other domains we did not mention yet. Apart from presenting foundations of tropical Hodge theory, this thesis gives an overview of some developments and some applications, either potential or concrete, of our theory. Several of them will be part of our future work.

Organization of the thesis. This thesis consists of five chapters. The last four chapters are actually four concatenated papers, which were written during the thesis, with a few minor modifications. Moreover, we wrote a detailed presentation in French as a first chapter. It presents the different results of the thesis and highlights the links they maintain with other subjects in mathematics.

Chapters 2, 3 and 4 correspond to the papers [AP21, AP20b, AP20c]². These are joint works with Omid Amini and they are part of our program aiming to establish a tropical Hodge theory and to deduce diverse applications.

The last chapter takes up, and complements by adding some new materials, a work done at the beginning of the thesis [Piq19b] on geometry of polynomials associated to combinatorial structures. It is in fact about a subject having many relations with tropical Hodge theory, which was developed later.

In the rest of this introduction, we give brief overview of the four articles. Then we will describe in more details the content of the first chapter.

Homology of tropical fans. The second chapter studies the local case of tropical geometry, namely that of tropical fans. We extend the notion of tropical smoothness beyond the one that is currently in use in tropical geometry, which is based on matroids and their Bergman fans. We believe that this new notion will be useful in our future work about degenerations of complex varieties. In our work, a tropical variety is smooth if it verifies Poincaré duality locally. Tropical smoothness aims to reflect the intuitive idea that the tropical limit recalls as

2. The current version of [AP20b] is based on [AP21] though it was written before. That is why it would deserve further revision in order to harmonize the notations and to improve some of the proofs that we now understand better. This will be done soon, and the revised article should appear just after the publication of this thesis.

much as possible data about the degeneration. This is linked to the notion of maximal degeneracy in complex geometry, and our work tends to show that a purely homological definition suits for our purpose.

We then build a family of tropical fans, called tropically shellable, which are smooth. Among them one can find Bergman fans. Hence our notion of smoothness generalizes the previous one.

Furthermore, we study the Chow rings of unimodular fans. These rings are important for instance because of their applications in combinatorics. In Chapter 2, we show that the Chow ring of a fan is included in the tropical cohomology of the canonical compactification of the fan. If the fan is smooth, we even get an isomorphism. This leads to a new interpretation and a generalization of the work of Adiprasito, Huh and Katz in [AHK18] about Chow rings of Bergman fans. The results of that article are in fact properties of the tropical cohomology of the canonical compactifications of fans.

Canonical compactifications of fans and polyhedral complexes play a fundamental role in our whole work. One can consider them as a generalization of a tropical analog of the theory of wonderful compactifications, for example that of hyperplane arrangements complements in the torus introduced by De Concini and Procesi in [DP95]. Later, Feichtner and Yuzvinski proved in [FY04] that the cohomology of these compactifications in the case of hyperplane arrangements can be computed thanks to the Chow ring of the corresponding fans. Our work generalizes their results. To do so, we introduce the tropical Deligne exact sequence for smooth tropical fans, which is the tropical analog of the Deligne spectral sequence in this specific case.

Hodge theory for tropical varieties. In the third chapter, we establish tropical Hodge theory. More precisely, we prove that a smooth projective tropical variety that is locally Kähler verifies the Kähler package. Namely, it verifies the Poincaré duality, the hard Lefschetz theorem, the Hodge-Riemann bilinear relations and the monodromy-weight conjecture.

We first prove the result for fans thanks to the tools developed in Chapter 2. In particular, we generalize, by providing a new proof, of the work of Adiprasito-Huh-Katz [AHK18] in which the authors prove the Kähler package for Bergman fans.

To obtain the global result, we build on [IKMZ19] and introduce an tropical analog of the Steenbrink spectral sequence. Then we generalize a result of [IKMZ19] to tropical varieties that are not approximable: we show that the spectral sequence computes the tropical cohomology. Once again, we use the tropical Deligne exact sequence.

Then, we look at the work of Guillén and Navarro Aznar about invariant cycles theorem [GN90]. We are able to prove that the tropical cohomology computed by the Steenbrink spectral sequence is a polarized Hodge-Lefschetz structure in the sense of Saito [Sai88], i.e., it verifies the Kähler package.

We note that without the geometric context in background, we cannot simply rely on preexisting results. We have to construct tropical analogs of the different objects and to do again the whole proof directly in the tropical world thanks to new technics of proof. Some of the tools developed, like the tropical analog of Kähler forms, play a central role in the applications of the results in complex geometry we are currently investigating.

The last step is to extend the theorem to all the suitable tropical varieties. This is done thanks to theorems that state the existence of good triangulations on these varieties, and to a tropical projective bundle formula which prove that, under some good assumptions, the Kähler package is preserved when we perform blow-ups or blow-downs on a tropical divisor at infinity.

The eigenwave operator introduced in [MZ14] by Mikhalkin and Zharkov, also called the tropical monodromy operator, plays a major role in our work. In particular we solve the monodromy-weight conjecture which appears in [MZ14, Liu19] and which states that

the operator induces an isomorphism between the parts of bidegree (p, q) and (q, p) for any integers p and q .

Tropical Clemens-Schmid sequence and existence of tropical cycles. Chapter 4 is about an application of tropical Hodge theory. We solve the tropical Hodge conjecture for smooth projective tropical varieties that are locally Kähler and that admit a rational triangulation. More precisely, we prove that the Hodge classes are exactly the classes of bidegree (p, p) that are in the kernel of the monodromy. In [Zha20], Zharkov presents an idea of Kontsevich, according to which any counter-example of the tropical Hodge conjecture for an abelian tropical variety would give a counter-example for the classical Hodge conjecture. Our theorem goes into the opposite direction, even if it does not invalidate the idea of Kontsevich.

In order to prove the theorem, we introduce a tropical analog of the Clemens-Schmid exact sequence [Cle77, Sch73]. Hence we obtain an analog of the invariant cycle theorem. Then the proof consists in constructing a tropical cycle associated to these invariant cycles. We achieve to do this thanks to the results of [AP20b].

A multidimensional generalization of Symanzik polynomials. Finally, in the last chapter, motivated by describing the asymptotic of height pairing between cycles on degenerating families of complex varieties, we provide a generalization of Symanzik polynomials to simplicial complexes and beyond.

In dimension one, the two Symanzik polynomials of a metric graph are used in quantum field theory to compute Feynman integrals. Both polynomials have many known properties. In particular, they are some specializations of the multivariate Tutte polynomial, also known as Potts model in physics. Most of these properties remain true for our generalization.

Besides, the polynomials we defined are linked to a Kirchhoff matrix-tree theorem on simplicial complexes that has been discovered recently [DKM09], and to other works on determinantal probabilities and random simplicial complexes [Lyo03, Lyo09].

Recently, Amini, Bloch, Burgos Gil and Fresán proved that the ratio of the two Symanzik polynomials on the tropical limit of a family of Riemann surfaces can describe the asymptotic of the height pairing between two degree zero divisors. The polynomials are also linked to the tropical limit of canonical measures on the fibers of the family. Our generalization could be regarded a first step to higher dimensional extensions of these results.

In particular, we prove a somehow surprising stability theorem for the ratio of the two polynomials under some bounded variations of the geometry of the simplicial complex. A one-dimensional specific case of this theorem is studied in [Ami19] in order to give a new proof of the results in [ABBF16]. This stability phenomenon should also have links to the nilpotent and SL_2 orbit theorems in asymptotic Hodge theory.

In the course of the proof of the stability theorem, we provide a complete description of the exchange graph of pair of independent sets of a general matroid. This result is linked to a conjecture of White [Whi80] and might be of independent interest.

Detailed presentation. The first chapter, written in French, is specific to this thesis and has several objectives.

First, it is a detailed presentation of the four papers. It can be read on its own, though we often refer to the papers for the details. Nevertheless, we occasionally sketch some notable proofs.

While we were working on the four papers, some connections to other theories and potential applications appeared. For example it is linked to the tropical Hodge conjecture or to asymptotic Hodge theory. More interestingly, we highlight some strong links, which has apparently not been noticed yet, between our program about tropical Hodge theory and the works undertaken, for instance, by Adiprasito and Huh in combinatorial Hodge theory. These

connections might give a better understanding or even a generalization of some works in this domain.

The second objective of this detailed presentation is to make explicit the connections with combinatorics and with the other theories mentioned above. We do not always present these theories in detail, either because it would take us too far away from our present subject, or because the author of this thesis does not have enough understanding of those theories yet. In these cases, our goal is more to give a general idea of the theories even if the presentation is not entirely rigorous. We hope that these simplifications of some concepts will be useful to the readers who are not familiar with these topics, and will help them to better understand or to discover new concepts.

In order to present some of those links, some generalizations of our work are necessary. That is why establishing a sufficiently general framework was necessary to give a precise meaning to some of the connections and to associated questions. We do not only generalize several theorems but we also obtain some new and interesting results. An overview of these results could be found below. To not make the presentation too technical, we only sketch the proof of the results. Anyway, if our generalized framework would actually allow us to get some of the applications, those proofs would be fully given in future papers.

Moreover, the framework we are working with makes some of the previous proofs much simpler, especially among those of [AP20b]. The new ideas might be given in a future version of this paper.

Let us describe the main additions of the detailed presentation compared to the other chapters.

Links to the combinatorics of simplicial complexes. In chapter 1, we work with affine simplicial structures. These are abstract simplicial complexes endowed with an affine structure similar to those that we find on the triangulable tropical varieties. These structures cannot necessarily be embedded in \mathbb{R}^n because two faces might overlap. For example that might happen if the restrictions of affine forms to two different faces coincide.

One of the benefits of this description is that we can generalize one of the theorems of [AP21] to abstract simplicial complexes. In this paper, we show that the Chow ring of a fan Σ is isomorphic to the tropical cohomology of the canonical compactification of Σ restricted to the parts of bidegree (p, p) for $0 \leq p \leq \dim(\Sigma)$.

More generally, if Δ is a simplicial complex of dimension d , we can consider the Stanley-Reisner ring $\text{SR}^\bullet(\Delta)$ and choose d sufficiently generic elements in $\text{SR}^1(\Delta)$. Let Θ be the ideal generated by these elements. The quotient of $\text{SR}^1(\Delta)$ by Θ is the analogous of the Chow ring for the fan cone(Δ) induced by Δ . We denote it by $A^\bullet(\Delta)$. For example this ring verifies the Poincaré duality if Δ is a simplicial sphere.

The d elements generating Θ induce a natural linear simplicial structure on cone(Δ). We denote it by Σ . We prove that

$$A^p(\Delta) \simeq H^{p,p}(\overline{\Sigma}),$$

where the right hand-side member is the cohomology of the canonical compactification of Σ . This result might let one use cohomological tools or sheaf theory to study $A^\bullet(\Delta)$. For instance, thanks to the above isomorphism, we can give a new proof of the Poincaré duality for $A^p(\Delta)$ when Δ is a simplicial sphere.

We also prove that the partition complex used by Adiprasito in [Adi18] to prove the g -conjecture for simplicial spheres corresponds to what we call the tropical Deligne exact sequence that we use in a critical way throughout our series of work discussed above. This connection might lead to a new point of view and a better understanding of the work of Adiprasito.

Rational simplicial structures. In [AP20b] we work with unimodular simplicial complexes. But the unimodularity condition is not always easy to preserve. Hence we need some combinatorial theorems rather hard to prove. This unimodularity condition is very important when we work with integral coefficients, as we can see in [AP21]. But in the rational case, we do not need this unimodularity condition anymore and we can directly work with any rational simplicial complex, or with rational simplicial structures. This allows to simplify considerably some of the proofs, as we will see this in Chapter 1.

Moreover, our proofs in [AP20b, AP20c] are systematically based on triangulations. As the cohomology is independent of the chosen triangulation on the tropical variety, it should be possible to work directly without choosing any triangulation. Nevertheless, we do not know yet how to do this. This puts some limitations on our results because some rational tropical varieties do not admit any rational triangulation. In particular, our work on the tropical Hodge conjecture does not apply to these varieties. In order to overcome this limitation, we define weakly rational simplicial structures that seem well fitted to this problem. We allow some rational and non-rational faces to coexist. In this context we can for instance define the rational Hodge classes and therefore state precisely the tropical Hodge conjecture. We will present the utility of such a definition for abelian tropical varieties. This allows us to include the problem stated by Kontsevich and Zharkov in [Zha20] in our theory.

Contents

Remerciements	5
Préface	7
Version française	7
English version	12
Chapitre 1. Présentation détaillée du travail de thèse	21
1. Rappels de géométrie tropicale	21
2. Structures simpliciales	36
3. Cohomologie tropicale, dualité de Poincaré et lissité	44
4. Comparaison de $H^{\bullet, \bullet}(\Sigma)$, $H_c^{\bullet, \bullet}(\Sigma)$ et $H^{\bullet, \bullet}(\overline{\Sigma})$	53
5. Théorie de Hodge combinatoire et anneau de Chow d'un éventail	61
6. Théorie de Hodge pour les structures simpliciales linéaires	71
7. Théorie de Hodge pour les structures simpliciales affines	88
8. Conjecture de Hodge pour les structures simpliciales kähleriennes fortement rationnelles	105
9. Comparaison des compactifications des sous-variétés du tore complexe et du tore tropical	110
10. Une généralisation des polynômes de Symanzik	112
Chapter 2. Homology of tropical fans	119
1. Introduction	119
2. Preliminaries	128
3. Smoothness in tropical geometry	134
4. Tropical divisors	140
5. Tropical shellability	144
6. Chow rings of tropical fans	157
7. Hodge isomorphism for unimodular fans	169
8. Tropical Deligne resolution	178
9. Compactifications of complements of hyperplane arrangements	181
10. Homology of tropical modifications and shellability of smoothness	184
11. Examples and further questions	189
Chapter 3. Hodge theory for tropical varieties	193
1. Introduction	193
2. Tropical varieties	207
3. Local Hodge-Riemann and Hard Lefschetz	218
4. Quasi-projective unimodular triangulations of polyhedral complexes	234
5. Tropical Steenbrink spectral sequence	244
6. Kähler tropical varieties	269
7. Hodge-Lefschetz structures	280
8. Projective bundle theorem	290
9. Proof of Theorem 1.7	296
Appendix	299

10. Spectral resolution of the tropical complex	299
11. Tropical monodromy	311
Chapter 4. Tropical Clemens-Schmid sequence and existence of tropical cycles with a given cohomology class	313
1. Introduction and statement of the main theorem	313
2. Preliminaries on tropical varieties	315
3. Minkowski weights and tropical cycles	324
4. Integral tropical Hodge conjecture in the local case	325
5. Tropical Steenbrink double complex and the comparison theorem	327
6. Tropical surviving and relative cohomology groups	333
7. Tropical Clemens-Schmid sequence	335
8. Existence of cycles with a given Hodge class: proof of Theorem 1.1	339
9. Proof of Theorem 1.3	340
Chapter 5. A multidimensional generalization of Symanzik polynomials	343
1. Introduction	343
2. Kirchhoff and Symanzik polynomials and duality	352
3. Symanzik polynomials on simplicial complexes	361
4. Generalization to matroids over hyperfields	374
5. Exchange graph for matroids	382
6. Variation of Symanzik rational fractions	387
Bibliography	397

Présentation détaillée du travail de thèse

1. Rappels de géométrie tropicale

L'objet principal de cette thèse est de développer une théorie de Hodge tropicale. À une exception près, voir section 9, les résultats de cette thèse, bien qu'analogues à des résultats de la géométrie classique, sont inhérents au monde tropical dans le sens où ils peuvent être établis indépendamment de la géométrie classique. Toutefois nous discuterons abondamment de l'interprétation géométrique de nos résultats et des applications potentielles de ceux-ci, par exemple en liant avec la théorie de Hodge classique ou asymptotique, avec la géométrie torique mais aussi avec d'autres domaines notamment en combinatoire. La présente section expose entre autre certains objets qui ne sont pas formellement utiles pour nos résultats mais qui sont liés à ces applications. Plusieurs d'entre elles feront d'ailleurs l'objet de nos futurs travaux, et nous présentons d'ores et déjà certains résultats partiels et certaines idées dans cette thèse.

À dire vrai, dans ce chapitre nous ne travaillerons pas avec des variétés tropicales mais avec des objets que nous appelons *structures simpliciales* et qui sont façonnés spécifiquement pour pouvoir appliquer notre théorie à certains domaines. Ces objets se comportent globalement comme les variétés tropicales mais sont plus abstraits. Afin d'avoir une bonne intuition du comportement de ces structures simpliciales, il est bien de connaître les objets que nous généralisons. Cette section est là pour cela. Nous y définissons des objets dont nous reparlerons régulièrement dans la suite, le plus souvent comme des exemples d'application de notre théorie généralisée.

Ainsi, pour les lecteurs non familiers du sujet, nous faisons ici quelques rappels sur la géométrie tropicale, sur les variétés tropicales, mais aussi sur les éventails de Bergman d'un matroïde et sur les dégénérescences de familles de variétés complexes, sur leurs limites tropicales et sur les liens entre les deux. Ceci dit, en particulier concernant la géométrie tropicale, ce court chapitre ne peut valoir la lecture de l'une ou l'autre des nombreuses introductions du sujet disponibles dans la littérature [BIMS15, Mik06, RGST05, MS15, MR09, IMS09].

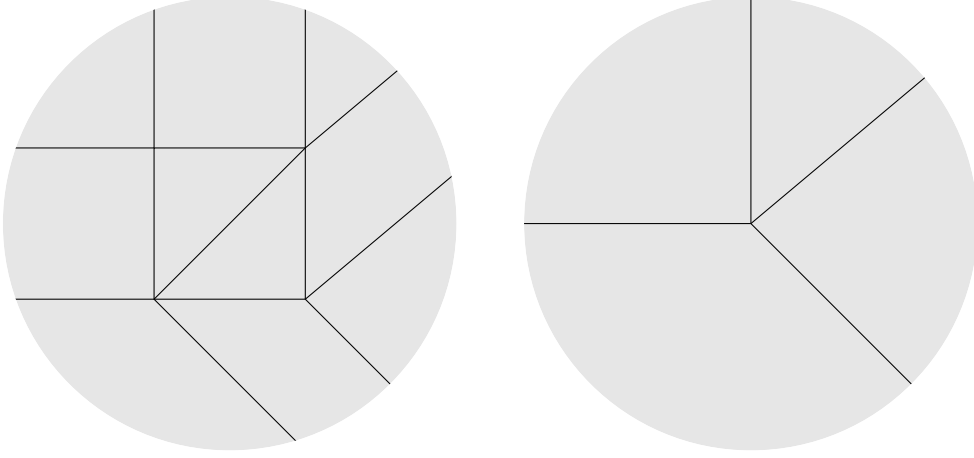
Conventions et notations. Dans toute cette thèse, nous désignerons par \mathbb{N} l'ensemble des entiers *strictement* positifs, et par \mathbb{R}_+ , resp. \mathbb{R}_- , les nombre réels positifs ou nuls, resp. négatifs ou nuls. Si $n \in \mathbb{N}$, la notation $[n]$ désigne l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Si E est un ensemble et si $e \in E$, nous noterons parfois $E - e$ l'ensemble $E \setminus \{e\}$. Si e est un élément qui n'est pas dans E , nous noterons parfois $E + e$ l'ensemble $E \cup \{e\}$.

Nous aurons souvent affaire à un ensemble ordonné de faces, $(X, <)$. Pour les objets indexés par les faces δ , nous utilisons δ en indice pour les objets liés à l'espace tangent de δ , par exemple C_δ , et δ en exposant pour les objets liés au quotient par l'espace tangent de δ , par exemple C^δ . Si $\gamma < \delta$ est une autre face, nous aurons en général des applications de C_γ dans C_δ , ou de C^γ dans C^δ , que nous noterons avec l'indice $\gamma < \delta$, par exemple $i_{\gamma < \delta}$, ou des applications dans l'autre sens, et nous utiliserons alors l'indice $\delta > \gamma$, par exemple $i_{\delta > \gamma}^*$. Si l'on préfère, on peut voir la description ci-dessus comme des notations pour des foncteurs covariants ou contravariants de domaine la catégorie induite par $(X, <)$.

Si E est un ensemble et \mathbb{k} un corps, on note $\mathbb{k}^E := \bigoplus_{e \in E} \mathbb{k}e$ l'espace vectoriel sur \mathbb{k} de dimension $\text{card}(E)$ engendré par les éléments de e .

FIGURE 1. Une structure simpliciale et son éventail de récession.



Si V est un espace vectoriel, ou un réseau, on note V^* son dual. Si U est un sous-ensemble de V , on note $\text{Vect}(U)$ le sous-espace vectoriel engendré par U . On note $\bigwedge^\bullet V$ l'algèbre extérieure sur V , ces éléments sont appelés des *multi-vecteurs*. Les éléments de $\bigwedge^\bullet V^*$ sont appelés des *formes*. Si k est un entier, si $\alpha \in \bigwedge^k V^*$ est une forme et v un vecteur, on note $\iota_v(\alpha)$ la contraction de α par v , c'est-à-dire l'élément de $\bigwedge^{k-1} V^* \simeq (\bigwedge^{k-1} V)^*$ défini par

$$\iota_v(\alpha)(\mathbf{v}') = \alpha(v \wedge \mathbf{v}')$$

pour tout $\mathbf{v}' \in \bigwedge^{k-1} V$. On étend alors la contraction par un vecteur à des contractions par des multi-vecteurs en posant $\iota_{v \wedge \mathbf{v}'} := \iota_{\mathbf{v}'} \circ \iota_v$.

De manière duale, on peut définir la contraction d'un multi-vecteur $\mathbf{v} \in \bigwedge^k V$ par une forme linéaire $\ell \in V^*$, notée $\iota_\ell(\mathbf{v})$, en posant, pour des vecteurs v_1, \dots, v_k ,

$$\iota_\ell(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \ell(v_i) v_1 \wedge \dots \wedge \widehat{v}_i \wedge \dots \wedge v_k,$$

où \widehat{v}_i signifie que l'on retire le facteur v_i du produit. On étend comme ci-dessus la définition à la contraction par une forme quelconque.

1.1. Espaces polyédraux. Nous devons d'abord rappeler le vocabulaire des complexes polyédraux. Des exemples de complexes polyédraux peuvent être trouvés en figures 1, 5 et 6. Notamment la première figure représente un complexe simplicial complet et son pseudo-éventail de récession qui est un éventail simplicial. Les deux autres figures présentent en fait des objets plus compliqués, mais à première vue on peut les considérer comme des complexes polyédraux.

Soit $N \simeq \mathbb{Z}^n$ un réseau de rang n . (Dans ce chapitre, n représentera toujours un élément de \mathbb{N} et généralement ce sera la dimension d'un espace vectoriel ambiant.) On pose $N_{\mathbb{Q}} := N \otimes \mathbb{Q}$ et $N_{\mathbb{R}} := N \otimes \mathbb{R}$. On note $M := N^*$ le dual de N et on définit $M_{\mathbb{Q}}$ et $M_{\mathbb{R}}$ de manière similaire.

Un *polyèdre convexe* de $N_{\mathbb{R}}$ est par définition une intersection d'un nombre fini de demi-espaces affines. Un tel polyèdre est dit *fortement convexe* s'il ne contient pas de droite affine. Dans cette thèse nous n'étudierons que des polyèdres fortement convexes, que nous appellerons simplement polyèdres. Les polyèdres de dimension zéro sont appelés *sommets*, les polyèdres de dimension un sont appelés *arêtes* s'ils sont compacts et *rayons* sinon.

Soit δ un polyèdre. On peut associer à δ son *espace tangent* noté $N_{\delta, \mathbb{R}}$ qui est par définition le sous-espace vectoriel de $N_{\mathbb{R}}$ défini par $\text{Vect}(\{x - y \mid x, y \in \delta\})$. On définit $N_{\mathbb{R}}^{\delta}$ comme le quotient de $N_{\mathbb{R}}$ par $N_{\delta, \mathbb{R}}$. La *dimension* de δ est notée $|\delta|$ et est par définition égale à $\dim(N_{\delta, \mathbb{R}})$. On dit que δ est *rationnel* si $N_{\delta, \mathbb{R}}$ l'est, i.e. si $N_{\delta, \mathbb{R}} \cap N_{\mathbb{Q}}$ est un \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension

$|\delta|$. On pose alors $N_{\delta, \mathbb{Q}} = N_{\delta, \mathbb{R}} \cap N_{\mathbb{Q}}$ et $N_{\delta} = N_{\delta, \mathbb{R}} \cap N$. On définit de même $N_{\mathbb{Q}}^{\delta}$ et N^{δ} ainsi que les espaces duaux $M_{\delta} := N_{\delta}^*$, etc.

Si H est un hyperplan affine, on peut définir H_- et H_+ comme les deux demi-espaces fermés délimités par H . Si δ est inclus dans H_- et si $\delta \cap H \neq \emptyset$, alors $\delta \cap H$ est un polyèdre γ . On dit que γ est une *face* de δ et l'on note $\gamma < \delta$. On considère aussi que δ est une face de lui-même. Si de plus $|\gamma| = |\delta| - 1$, on note $\gamma \prec \delta$.

Un *polytope (convexe) de $N_{\mathbb{R}}$* est un polyèdre compact, ou, de manière équivalente, l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points. Un *cône (fortement convexe) de $N_{\mathbb{R}}$* est un polyèdre ayant pour seul sommet l'origine de $N_{\mathbb{R}}$. Un cône σ est dit *simplicial* si ses rayons sont linéairement indépendants : si l'on note ρ_1, \dots, ρ_k les rayons de σ et si l'on prend des vecteurs non nuls v_i dans $N_{\rho_i, \mathbb{R}}$ pour chaque $i \in \{1, \dots, k\}$, alors σ est simplicial si les v_i sont linéairement indépendants. Si de plus σ est rationnel, on dit que σ est unimodulaire si l'on peut choisir les v_i dans N de sorte qu'ils forment une base de N_{σ} .

Considérons l'espace $N_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}_+$. Dans cet espace, on a les hyperplans $H_0 := N_{\mathbb{R}} \times \{0\}$ et $H_1 := N_{\mathbb{R}} \times \{1\}$. Soit δ un polyèdre de $N_{\mathbb{R}}$. Notons δ_1 l'image de δ dans H_1 . On appelle le *cône sur δ* et l'on note $\text{cone}(\delta)$ l'adhérence de $\mathbb{R}_+ \delta_1$. Il s'agit bien entendu d'un cône. On définit le *cône de récession de δ* par $\delta_{\text{rec}} := \text{cone}(\delta) \cap H_0 \hookrightarrow N_{\mathbb{R}}$, qui est aussi la limite $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \delta$ pour $\lambda > 0$.

On dit que δ est simplicial, resp. unimodulaire, si $\text{cone}(\delta)$ l'est. Un polytope est simplicial si et seulement si c'est un simplexe. Pour les polyèdres généraux, si δ est simplicial, alors on peut montrer que δ possède une unique face compacte maximale, qui est un simplexe, et que l'on note δ_f : c'est la *partie finie de δ* . De plus, on peut montrer que δ_{rec} est simplicial, que $N_{\delta_f, \mathbb{R}}$ et $N_{\delta_{\text{rec}}, \mathbb{R}}$ sont transverses et que

$$\delta = \delta_f + \delta_{\text{rec}} := \{x + y \mid x \in \delta_f, y \in \delta_{\text{rec}}\}.$$

Un *complexe polyédral dans $N_{\mathbb{R}}$* est un ensemble X de polyèdres tel que si δ est dans X , toutes les faces de δ sont dans X et si δ' est une autre face de X , alors $\delta \cap \delta'$ est soit vide, soit une face commune à δ et à δ' . Les faces maximales de X sont appelées *facettes*. On dit que X est *pur de dimension d* si toutes les facettes de X sont de dimension d . En général nous ne considérerons que des complexes polyédraux purs.

Le *support de X* est noté $|X|$ et est par définition $\bigcup_{\delta \in X} \delta \subseteq N_{\mathbb{R}}$. On dit que X est *complet* si $|X| = N_{\mathbb{R}}$. Un *espace polyédral dans $N_{\mathbb{R}}$* est par définition un sous-ensemble de $N_{\mathbb{R}}$ qui est le support d'un complexe polyédral de $N_{\mathbb{R}}$. Un complexe polyédral est dit *simplicial*, resp. *rationnel*, resp. *unimodulaire*, si ses faces le sont. Un *éventail* est un complexe polyédral dont toutes les faces sont des cônes. On note $\underline{0}$ l'unique sommet d'un éventail. Par exemple, le *cône de X* , noté $\text{cone}(X)$ et défini par $\text{cone}(X) = \{\text{cone}(\delta) \mid \delta \in X\} \subseteq N_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}_+$, est un éventail.

Si X est un complexe polyédral et si γ est une face de X , on note X^{γ} et l'on appelle *éventail transverse autour de γ* l'éventail de $N_{\mathbb{R}}^{\gamma}$ induit par les faces $\delta > \gamma$. Plus précisément, à $\delta > \gamma$ on associe le cône

$$\delta^{\gamma} := \mathbb{R}_+ \{\pi_{\underline{0} < \gamma}(x - y) \mid x \in \delta, y \in \gamma\}$$

où $\pi_{\underline{0} < \gamma} : N_{\mathbb{R}} \rightarrow N_{\mathbb{R}}^{\gamma}$ est la projection naturelle. X^{γ} est alors l'ensemble $\{\delta^{\gamma} \mid \delta > \gamma\}$.

Si X est un complexe polyédral, on définit son *pseudo-éventail de récession X_{rec}* comme l'ensemble des cônes δ_{rec} pour $\delta \in X$. Comme son nom l'indique, il ne s'agit pas toujours d'un éventail car deux polyèdres δ et δ' peuvent être disjoints mais vérifier que $\delta_{\text{rec}} \cap \delta'_{\text{rec}}$ ne soit pas une face commune des deux cônes.

Nous utiliserons parfois le terme assez vague de pseudo-éventail dans la suite. En première approche, on peut voir un pseudo-éventail Σ comme un multi-ensemble de cônes tel que si $\sigma \in \Sigma$ alors toutes les faces de σ sont dans Σ . Si l'on souhaite une définition rigoureuse, la définition suivante devrait être raisonnable. Un *pseudo-éventail de $N_{\mathbb{R}}$* est un éventail Σ dans

\mathbb{R}^m pour un certain entier m et une projection linéaire $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow N_{\mathbb{R}}$ tels que la restriction de π à tout cône σ de Σ induit un isomorphisme sur son image (autrement dit, $|\sigma| = |\pi(\sigma)|$). De plus, on identifie deux pseudo-éventails (Σ, π) et (Σ', π') de $N_{\mathbb{R}}$ s'il existe une bijection entre les cônes de Σ et les cônes de Σ' qui préserve l'ordre des faces et telle que toute paire de cônes σ et σ' en bijection vérifie $\pi(\sigma) = \pi'(\sigma')$. Nous pourrions de même définir les pseudo-complexes polyédraux.

1.2. Première approche de la géométrie tropicale : les amibes. Il y a plusieurs façons d'aborder la géométrie tropicale. Commençons par la tropicalisation des variétés complexes. Soit X une sous-variété complexe de \mathbb{C}^n . Pour $0 < t < 1$ on définit l'*amibe en base t de X* par l'image $\text{Log}_t(X)$ où

$$\text{Log}_t : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n, \\ (z_1, \dots, z_n) & \longmapsto & (\log_t(|z_1|), \dots, \log_t(|z_n|)). \end{array}$$

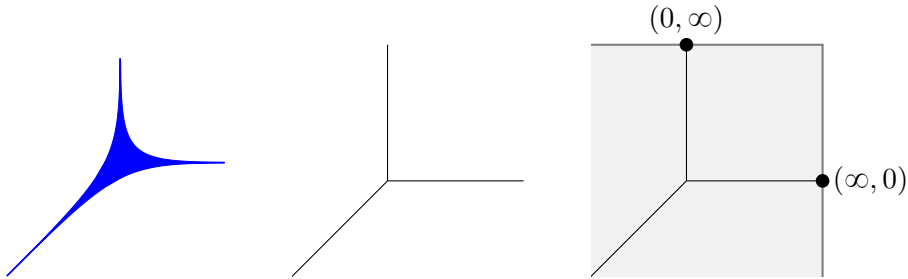
Comme $t < 1$, il faut plutôt penser à la fonction \log_t comme à la fonction $-\log$. On définit alors la *tropicalisation de X* par

$$\text{Trop}(X) = \lim_{t \rightarrow 0} \text{Log}_t(X).$$

On peut montrer que cette tropicalisation est toujours le support d'un éventail. Le terme d'amibe a été introduit dans [GKZ94], mais ces objets étaient déjà étudiés auparavant. Voir par exemple [Ber71, EKL06, Mik04b, Mik04a, PR04] et les introductions à la géométrie tropicale sus-citées.

EXEMPLE 1.1. L'exemple ultra-classique de la droite tropicale, obtenue comme la tropicalisation de $\{z_1 + z_2 - 1 = 0\} \subseteq \mathbb{C}^2$, est donné en figure 2. On peut voir trois branches partant à l'infini, la branche verticale correspond à $z_1 \approx 1$ et $z_2 \approx 0$, la branche horizontale à $z_1 \approx 0$ et $z_2 \approx 1$ et la branche diagonale à $|z_1|, |z_2| \gg 0$. Diminuer t revient à faire une homothétie de l'amibe par un facteur inférieur à 1. À la limite, on obtient donc un cône pas forcément convexe. Il s'agit en fait du support d'un éventail. On peut obtenir des espaces tropicaux plus généraux en regardant des familles de variétés comme cela sera brièvement expliqué en section 1.11.1. \diamond

FIGURE 2. Amibe, tropicalisation et tropicalisation étendue de la droite $z_1 + z_2 - 1 = 0$.



Un lecteur attentif a pu se rendre compte que la fonction précédente est mal définie. Si l'une des coordonnées z_i est nulle, alors $\log_t(|z_i|)$ n'est pas défini, ou éventuellement vaut $+\infty$. Et en effet, l'élément neutre pour l'addition en géométrie tropicale correspond à l'infini (voir section 1.6). L'*espace affine tropical* naturel à considérer dans ce cadre est donc \mathbb{T}^n où $\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Dans ce cas, la définition de Log_t s'étend naturellement en une fonction dans \mathbb{T}^n (voir l'exemple de la droite tropicale figure 2).

1.3. Éventails de Bergman. Nous verrons plus loin d'autres façons de définir des variétés tropicales qui permettent d'obtenir des espaces polyédraux plus généraux. Ce que nous avons vu est néanmoins suffisant pour aborder un exemple important d'éventail tropical : l'éventail de Bergman d'un matroïde.

Soient k et n des entiers et ℓ_0, \dots, ℓ_n des formes linéaires non nulles sur \mathbb{C}^{k+1} . Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, soit $H_i := \ker(\ell_i)$ l'hyperplan associé à ℓ_i . Soit $\widetilde{A} := \mathbb{C}^{k+1} \setminus \bigcup_{i=0}^n H_i$. On peut faire agir naturellement \mathbb{C}^* par multiplication sur \widetilde{A} . En quotientant par l'action de cette multiplication, on obtient $A := \widetilde{A}/\mathbb{C}^* \subseteq \mathbb{C}\mathbb{P}^k$. On appelle A un *complémentaire d'arrangement d'hyperplans*.

On peut naturellement plonger \widetilde{A} dans le tore complexe $T_{\mathbb{C}}^{n+1} := (\mathbb{C}^*)^{n+1}$ (nommé ainsi car il est homotopiquement équivalent au tore $(\mathbb{S}^1)^{n+1}$) via l'application

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &\longrightarrow T_{\mathbb{C}}^{n+1}, \\ z &\longmapsto (\ell_0(z), \dots, \ell_n(z)). \end{aligned}$$

En quotientant de nouveau par \mathbb{C}^* , on obtient plutôt un plongement de A dans $T_{\mathbb{C}}^{n+1}/\mathbb{C}^* \simeq T_{\mathbb{C}}^n$. On obtient simplement un espace affine de \mathbb{C}^n restreint au tore $T_{\mathbb{C}}^n$.

On peut maintenant tropicaliser $A \hookrightarrow T_{\mathbb{C}}^n$ et on obtient le support d'un éventail rationnel dans $N_{\mathbb{R}}$ où $N := \mathbb{Z}^n$. Nous appelons ce support un *support de Bergman* car il a été étudié par Bergman dans [Ber71].

Nous pouvons décrire explicitement à partir des ℓ_i un éventail simplicial unimodulaire Σ qui possède ce support. Celui-ci a été défini par Ardila et Klivans dans [AK06], et c'est ce qu'on appelle la *subdivision fine du support de Bergman associée à l'arrangement d'hyperplans*. Dans cette thèse, nous l'appellerons simplement l'*éventail de Bergman associé à l'arrangement d'hyperplans*.

Posons $E = \{\ell_0, \dots, \ell_n\} \subseteq (\mathbb{C}^{k+1})^*$. On choisit une base (e_1, \dots, e_n) de $N \subseteq N_{\mathbb{R}}$ et l'on pose $e_0 = -e_1 - \dots - e_n$. On dit qu'un sous-ensemble F de E est *fermé*, ou est *un fermé*, si

$$\text{Vect}(F) \cap E = F.$$

À un fermé F non trivial ($F \neq \emptyset$ et $F \neq E$) on associe le vecteur

$$e_F := \sum_{i, \ell_i \in F} e_i.$$

Un *drapeau de fermés* est un ensemble de fermés $\{F_1, \dots, F_s\}$ tel que

$$\emptyset \subsetneq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \dots \subsetneq F_s \subsetneq E.$$

On définit alors l'éventail de Bergman associé à E par l'ensemble des cônes

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} \mathbb{R}_+ e_F$$

associés aux drapeaux de fermés \mathcal{F} de E . Par exemple, l'éventail de Bergman associé à quatre éléments génériques de $(\mathbb{C}^3)^*$ est représenté en figure 5.

1.4. Matroïdes. On peut remarquer que l'éventail de Bergman ne dépend que des relations de dépendance entre les éléments de E . Les matroïdes sont justement des objets combinatoires qui encodent et généralisent les dépendances entre un nombre fini de vecteurs. Ils ont été introduits indépendamment par Whitney dans [Whi35], par van der Waerden dans [van37] et par Nakasawa. Pour un livre de référence, voir [Oxl11].

En plus du lien avec l'algèbre linéaire, on peut aussi associer un matroïde à un graphe. Le langage des matroïdes et leurs propriétés héritent de ces deux mondes simultanément. De plus, il existe de nombreuses définitions intéressantes et non trivialement équivalentes (on dit qu'elles sont *cryptomorphiques*) des matroïdes. Cela fait des matroïdes des objets combinatoires riches et présents dans divers domaines des mathématiques, par exemple en combinatoire et physique

statistique [Tut65, MP67, GW06, SS14, Piq19b], en topologie [Mac91, GM92], ou en géométrie algébrique [Mnë88, Laf03, BB03, BL18, Stu02].

La définition que nous proposons est celle mimant les relations de dépendance dans une famille de vecteurs.

DÉFINITION 1.2. Un *matroïde* $\mathfrak{M} = (E, \mathfrak{I})$ est la donnée d'un *ensemble de base* fini E et d'un ensemble d'*indépendants* $\mathfrak{I} \subseteq 2^E$ tel que

- $\emptyset \in \mathfrak{I}$,
- si $I \in \mathfrak{I}$ et $J \subseteq I$ alors $J \in \mathfrak{I}$,
- si $I, J \in \mathfrak{I}$ et $\text{card}(J) > \text{card}(I)$ alors il existe un élément $j \in J$ tel que $(I + j) \in \mathfrak{I}$. \diamond

Par exemple, si E est un ensemble de formes linéaires comme ci-dessus, si l'on définit \mathfrak{I} comme l'ensemble des sous-familles de E linéairement indépendantes, alors (E, \mathfrak{I}) est un matroïde.

On peut définir le *rang* $\text{rk}(G)$ d'un sous-ensemble G de E comme étant le cardinal du plus grand indépendant I inclus dans G . Une *base* de E est un élément maximal de \mathfrak{I} pour l'inclusion. On peut montrer que toutes les bases ont le même rang r , que l'on appelle le *rang de* \mathfrak{M} et qui est noté $\text{rk}(\mathfrak{M})$. Si $G \subseteq E$, la *cloture de* G , notée $\text{cl}(G)$, est le plus grand ensemble contenant G et de même rang que G . Enfin, un *fermé de* \mathfrak{M} est un ensemble $F \subseteq E$, tel que $\text{cl}(F) = F$.

Comme auparavant, on peut associer un éventail de Bergman $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ de dimension $\text{rk}(\mathfrak{M}) - 1$ dans $N_{\mathbb{R}}$, où $N \simeq \mathbb{Z}^{\text{card}(E)-1}$, à tout matroïde \mathfrak{M} . Dans la suite, nous appellerons *éventail de Bergman* l'éventail de Bergman d'un matroïde quelconque. Un *support de Bergman* désignera le support de n'importe quel éventail de Bergman. De plus nous définissons un *éventail de Bergman généralisé* comme étant n'importe quel éventail isomorphe, via un isomorphisme préservant le réseau N , à un éventail dont le support est un support de Bergman.

Ajoutons que la plupart des matroïdes ne sont pas issus d'une famille de vecteurs, ont dit qu'ils ne sont pas *réalisables*. De même, les support de Bergman ne sont pas tous réalisables, voir par exemple [Yu17], dans le sens où ils ne sont pas la tropicalisation d'une variété. Nous reparlerons de réalisabilité des variétés tropicales en remarque 1.10.

REMARQUE 1.3 (Espaces linéaires tropicaux). Les support de Bergman jouent le rôle des espaces linéaires en géométrie tropicale. En effet, on a déjà vu qu'un espace linéaire de \mathbb{C}^n que l'on restreint au tore a pour tropicalisation un support de Bergman. De plus, on peut définir une notion de degré tropical, et, par un résultat de Fink, on sait que les supports de Bergman sont exactement les supports des éventails tropicaux de degré un. Entre autre, deux supports de Bergman de dimensions complémentaires translatés génériquement ont un unique point d'intersection. Voir [Fin13, Spe08] pour plus de détails. \diamond

1.5. Tropicalisation par valuation. Nous allons maintenant parler d'une autre méthode qui permet de définir la tropicalisation de variétés sur des corps non archimédiens valués.

Plutôt que de définir ce que sont ces corps, nous allons simplement définir un exemple de tel corps : le *corps des séries de Puiseux sur* \mathbb{C} , noté $\mathbb{C}\{\{t\}\}$. Une *série de Puiseux sur* \mathbb{C} est une somme formelle de la forme

$$Q(T) := \sum_{i=i_0}^{+\infty} a_{i/m} T^{i/m}$$

pour des entiers $m \in \mathbb{N}$ et $i_0 \in \mathbb{Z}$ et des coefficients $a_{i/m} \in \mathbb{C}$. On peut montrer que $\mathbb{C}\{\{T\}\}$ est algébriquement clos. On définit le *degré* de Q , noté $\text{deg}(Q)$, comme le plus petit nombre rationnel q tel que $a_q \neq 0$, et l'on pose $\text{deg}(0) = +\infty$.

On obtient une *valuation* : si Q et Q' sont deux séries de Puiseux, alors

- $\deg(Q) = +\infty \iff Q = 0$,
- $\deg(QQ') = \deg(Q) + \deg(Q')$,
- $\deg(Q + Q') \geq \min(\deg(Q), \deg(Q'))$ avec égalité si $\deg(Q) \neq \deg(Q')$.

Maintenant, si V est une variété algébrique dans $\mathbb{C}\{\{T\}\}^n$, par exemple si V est le lieu d'annulation d'un polynôme $P(z_1, \dots, z_n)$, alors on peut définir la *tropicalisation de V* , notée $\text{Trop}(V) \subseteq \mathbb{T}^n$ comme l'adhérence de l'image de V par l'application

$$\begin{aligned} \text{trop} : \quad \mathbb{C}\{\{T\}\}^n &\longrightarrow \mathbb{T}^n, \\ (Q_1, \dots, Q_n) &\longmapsto (\deg(Q_1), \dots, \deg(Q_n)). \end{aligned}$$

On peut montrer que $\text{Trop}(V)$ restreint à \mathbb{R}^n est un espace polyédral rationnel.

EXEMPLE 1.4. Si l'on prend la droite V d'équation $z_1 + z_2 - 1 = 0$ dans $\mathbb{C}\{\{T\}\}^2$, $\text{Trop}(V)$ est la droite tropicale de la figure 2. Si l'on regarde plutôt l'équation $T^{-a}z_1 + T^{-b}z_2 - 1 = 0$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$, on obtient la droite tropicale de centre de coordonnées (a, b) . \diamond

EXEMPLE 1.5. La figure 6 est la surface tropicale obtenue comme la tropicalisation de la surface d'équation

$$1 + Tz_1 + Tz_2 + Tz_3 + z_2z_3 + T^3z_1z_3 + T^3z_1z_2 + T^5z_1^2 + T^5z_2^2 + T^5z_3^2 = 0.$$

Il existe en fait une méthode combinatoire élémentaire pour construire des hypersurfaces tropicales ayant la forme voulue en utilisant le polytope de Newton du polynôme et un théorème de dualité : voir les références sus-citées. \diamond

1.6. Hypercorps tropical. On peut en fait définir directement des polynômes tropicaux dans $\mathbb{T}[x_1, \dots, x_n]$ et considérer leurs lieux d'annulation. Définissons donc les opérations sur \mathbb{T} . Généralement on définit \mathbb{T} comme un semi-corps (l'addition n'a pas d'inverse) en le munissant des opérations $a \boxplus b = \min(a, b)$ et $a \boxtimes b = a + b$. En fait, il est souvent plus utile de considérer \mathbb{T} comme un hypercorps, que l'on notera $\tilde{\mathbb{T}}$, en posant

$$a \boxplus b = \begin{cases} \{\min(a, b)\} & \text{si } a \neq b, \\ [\min(a, b), +\infty] & \text{si } a = b. \end{cases}$$

Ainsi par exemple,

$$(1 \boxplus 1) \boxplus 0 = [1; +\infty] \boxplus 0 = \bigcup_{a \in [1; +\infty]} \{a \boxplus 0\} = \{0\}.$$

On se rend compte que ces opérations miment les propriétés de la valuation.

Nous n'utiliserons pas vraiment la notion d'hypercorps par la suite, et nous n'allons donc pas entrer dans les détails de la définition (celle-ci est disponible dans [BB19]), mais c'est une définition que l'auteur apprécie et qui permet de comprendre de nombreuses définitions de la géométrie tropicale, comme la définition du lieu d'annulation des polynômes tropicaux dont nous parlons ci-dessous. Pour une jolie application simple de ce point de vue, nous renvoyons à [BL21]. Pour plus de littérature sur les hypercorps, sur la géométrie associée et sur les liens avec la géométrie tropicale, voir [BB19, BL18, Lor15, Lor19].

Dans \mathbb{T} , l'élément neutre pour l'addition est $+\infty$ et l'élément neutre pour la multiplication est 0. Si $P(z_1, \dots, z_k)$ est un polynôme sur $\mathbb{C}\{\{T\}\}$. On peut définir le polynôme tropical associé $\text{trop}(P)(x_1, \dots, x_k)$ en remplaçant les coefficients par leurs valuations, les produits par \boxtimes et les sommes par \boxplus . Le lieu des zéros du polynôme $\text{trop}(P)$ est par définition l'ensemble des points (x_1, \dots, x_k) tels que $+\infty \in \text{trop}(P)(x_1, \dots, x_k)$. C'est aussi l'ensemble des points tels qu'au moins deux monômes de P voient leurs valeurs coïncider et être minimales comparées aux autres monômes. Le théorème fondamental de la géométrie tropicale énonce que le lieu des zéros de $\text{trop}(P)$ coïncide avec la tropicalisation du lieu des zéros de P . Ce théorème se généralise à l'intersection des variétés associée à un idéal sous certaines conditions (voir par exemple [MS15]).

1.7. Condition d'équilibre. Un phénomène important en géométrie tropicale est la condition d'équilibre [SS03, Spe05, Mik04b] ou les introductions suscités. Si l'on prend une variété tropicale \mathfrak{X} dans $N_{\mathbb{R}}$ provenant d'une variété algébrique comme ci-dessus, on peut choisir un complexe polyédral rationnel X de support \mathfrak{X} . Il y a une manière naturelle de mettre des poids $w(\sigma) \in \mathbb{N}$ sur les facettes σ de X qui vérifie la condition suivante.

Soit τ une face de X de codimension un. X^τ est un éventail de dimension un dont les rayons sont σ^τ pour $\sigma \succ \tau$. Pour chaque rayon σ^τ , on note ν_σ^τ le vecteur générateur de $N \cap \sigma^\tau$.

THÉORÈME 1.6 (Condition d'équilibre). *Avec les notations ci-dessus, on a*

$$\sum_{\sigma \succ \tau} w(\sigma) \nu_\sigma^\tau = 0.$$

Nous verrons en section 3.4 que cette condition d'équilibre est l'analogie de la notion d'orientabilité en topologie.

1.8. Compactification canonique. Dans cette thèse, nous sommes surtout intéressés par les variétés tropicales compactes qui, comme pour les variétés complexes compactes, ont généralement de meilleures propriétés que les variétés quelconques. Pour l'instant, les sous-variétés tropicales que nous avons définies sont rarement compactes. Il va donc falloir compactifier. Pour un éventail, la compactification canonique est la bonne façon de compactifier, du moins allons-nous essayer de le justifier. Comme c'est un objet central dans ce travail, qui fournit de nombreux moyens pour étudier non seulement les variétés tropicales mais aussi des objets apparaissant en théorie de Hodge combinatoire, comme les éventails de Bergman ou l'anneau de Stanley-Reisner de complexes simpliciaux, il nous semble important de commenter cette construction et de donner une intuition par des illustrations.

1.8.1. *Espace projectif tropical.* Nous avons vu dans l'exemple 1.1 à propos de la droite tropicale que l'on peut partiellement compactifier les sous-variétés de \mathbb{R}^n dans l'espace affine tropical \mathbb{T}^n . Mais comme l'espace affine n'est pas compact, ses sous-variétés ne le sont pas non plus en général. Cela nous amène à définir l'espace projectif tropical \mathbb{TP}^n .

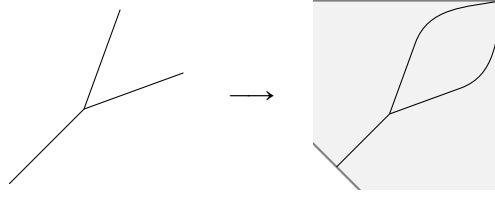
Dans le cas complexe, on a par définition $\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}) / \mathbb{C}^*$. La transposition exacte dans le cadre tropical est donc

$$\mathbb{TP}^n = (\mathbb{T}^{n+1} \setminus \{(\infty, \dots, \infty)\}) / \mathbb{R}(1, \dots, 1),$$

où le quotient signifie que l'on identifie deux points de \mathbb{T}^{n+1} de la forme (a_0, \dots, a_n) et $(a_0 + \lambda, \dots, a_n + \lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui correspond bien à multiplier au sens tropical un point par le scalaire λ . L'espace obtenu est naturellement homéomorphe à un simplexe Δ à n sommets dont le bord se situe à l'infini. Les faces de codimension k du simplexe correspondent aux points ayant au moins k coordonnées infinies (voir figures 4 et 6).

On peut désormais prendre la compactification de n'importe quelle sous-variété tropicale de \mathbb{R}^n , et même de n'importe quel espace polyédral, dans \mathbb{TP}^n (voir par exemple la Figure 6). On obtient ce qu'on appelle un espace polyédral étendu où l'on autorise certains polyèdres à avoir une partie infinie (voir [IKMZ19] pour une étude précise). Malheureusement, cela peut mener à des espaces pathologiques comme dans la figure 3 (voir la notion de régularité dans [IKMZ19]). Il faut donc adapter la compactification à la variété pour obtenir des espaces suffisamment sympathiques.

1.8.2. *Variétés toriques tropicales.* Nous voulons donc compactifier un espace polyédral de \mathbb{R}^n . Rappelons de plus que $\mathbb{R} = \mathbb{T}^*$ est l'analogie de \mathbb{C}^* . Donc \mathbb{R}^n est l'analogie du tore complexe $(\mathbb{C}^*)^n$, ou plus généralement du tore algébrique \mathbb{G}_m^n . La géométrie torique nous explique comment compactifier, éventuellement partiellement, un tore. L'idée suivante a été introduite par Demazure dans [Dem70] et développée par la suite, voir par exemple [Dan78, Ful93]. À chaque éventail simplicial Σ de \mathbb{R}^n , on peut associer une compactification (partielle si Σ n'est pas complet) du tore que l'on note \mathbb{CP}_Σ . On peut donner un sens à la tropicalisation étendue de \mathbb{CP}_Σ , et son image est alors une compactification partielle de \mathbb{R}^n , notée \mathbb{TP}_Σ , et

FIGURE 3. Compactification pathologique dans \mathbb{TP}^2 .

que l'on nomme *variété torique tropicale associée à Σ* . Il se trouve que la compactification de Σ dans \mathbb{TP}_Σ est un espace symplectique, facile à décrire. Notamment, si Σ est simplicial, on retrouve la compactification canonique que nous allons définir dans la section 1.8.4.

Les définitions et les descriptions détaillées de \mathbb{TP}_Σ et de la compactification canonique de Σ peuvent être trouvées en chapitre 2 section 2.2, ou encore dans [Pay09, Kaj08, Thu07, OR11, MR18]. Nous nous contenterons en section 1.8.3 d'un bref aperçu, en insistant sur les liens entre \mathbb{TP}_Σ et \mathbb{CP}_Σ dans le cas simplicial.

Le cas des compactifications canoniques des éventails non simpliciaux serait intéressant à étudier et à comparer par exemple avec le travail de Karu [Kar04]. Nous en reparlerons plus en détail avec la question 5.1 et la discussion associée (voir aussi la question 1.9).

Il nous faut maintenant parler des travaux importants qui expliquent en partie pourquoi les compactifications canoniques sont des espaces si symplectiques (pour ne pas dire magnifiques). Dans [DP95], De Concini et Procesi expliquent comment compactifier de manière symplectique un complémentaire d'arrangement d'hyperplans. Ici symplectique signifie que l'on obtient une compactification lisse en ajoutant un diviseur à croisements normaux. Ces compactifications sont appelées *compactifications magnifiques*. La construction s'appuie sur des objets combinatoires nommés « building sets » et « nested sets ». Ces objets permettent de trouver des éventails Σ tels que la compactification \bar{X} de X dans \mathbb{CP}_Σ soit magnifique. Ce qui est particulièrement intéressant est que l'on peut notamment prendre Σ l'éventail de Bergman associé à l'arrangement d'hyperplans.

Par la suite, Feichtner et Yuzvinsky ont montré dans [FY04] que la cohomologie de \bar{X} est calculée par l'anneau de Chow de Σ , résultat que nous généralisons en section 9. Dans cette thèse, nous montrons que cet anneau de Chow correspond en fait à la cohomologie de la compactification canonique de $\bar{\Sigma}$, voir théorème 5.7. Il se trouve que $\bar{\Sigma} \subseteq \mathbb{TP}_\Sigma$ est la tropicalisation étendue de $\bar{X} \subseteq \mathbb{CP}_\Sigma$. Ainsi, dans ce cas précis, la cohomologie de $\bar{\Sigma}$ est égale à la cohomologie d'une variété complexe projective lisse et vérifie donc toutes les propriétés associées (notamment le théorème de Lefschetz difficile et les relations de Hodge-Riemann).

Dans [Tev07], Tevelev montre que, plus généralement, la tropicalisation d'une sous-variété X du tore fournit un support d'éventail intéressant pour compactifier cette variété. Par exemple, un éventail Σ ayant ce support va vérifier que l'adhérence de X dans \mathbb{CP}_Σ est compacte. Pour certaines variétés, qualifiées de *schön*, les compactifications obtenues ont de bonnes propriétés similaires à celles des compactifications des complémentaires d'arrangement d'hyperplans. Une description plus précise est donnée en chapitre 2 section 9. Le travail de Tevelev pourrait être un premier pas pour tenter de répondre à la question suivante : *peut-on trouver des propriétés intéressantes vérifiées par une variété en ne connaissant que sa tropicalisation ?* Voici un exemple de question concrète que l'on peut se poser.

QUESTION 1.7. Quelles sont les sous-variétés du tore dont la tropicalisation est lisse au sens de la section 3.7? \diamond

On sait par exemple qu'une sous-variété du tore dont la tropicalisation est un support de Bergman est forcément un complémentaire d'arrangement d'hyperplans (cf. [IKMZ19]).

FIGURE 4. L'éventail projectif de dimension 2 et les stratifications associées de \mathbb{TP}^2 et de \mathbb{RP}^2 en tores.

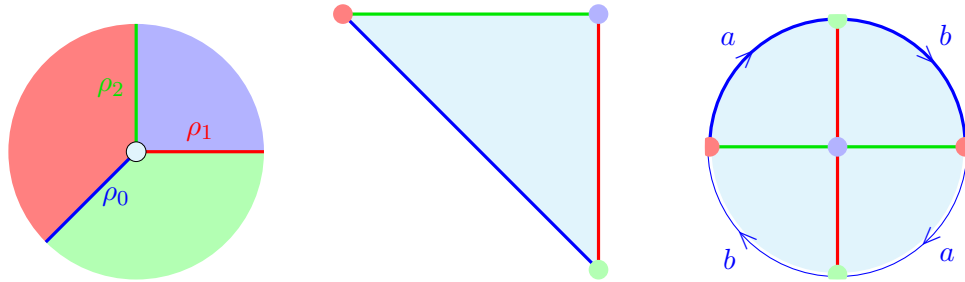


FIGURE 5. L'éventail de Bergman Σ associé au matroïde U_4^3 , sa compactification canonique ainsi qu'une partie de la variété torique tropicale \mathbb{TP}_Σ .

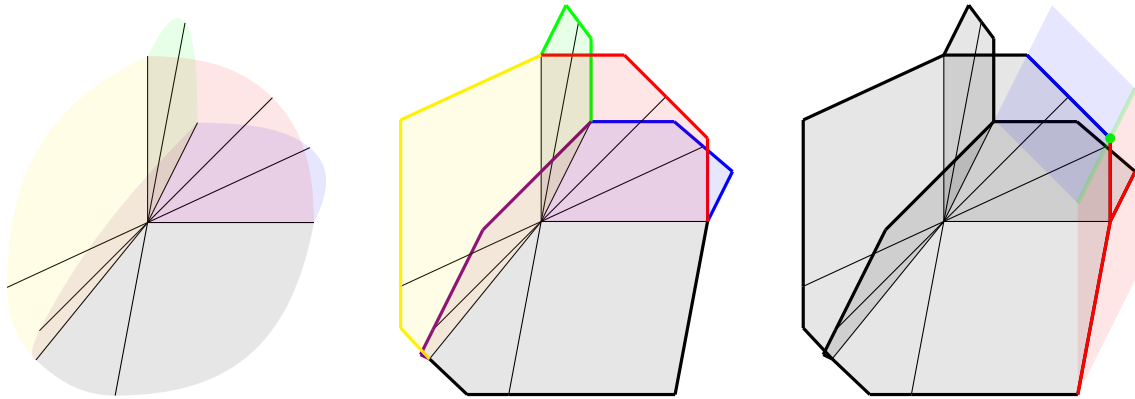
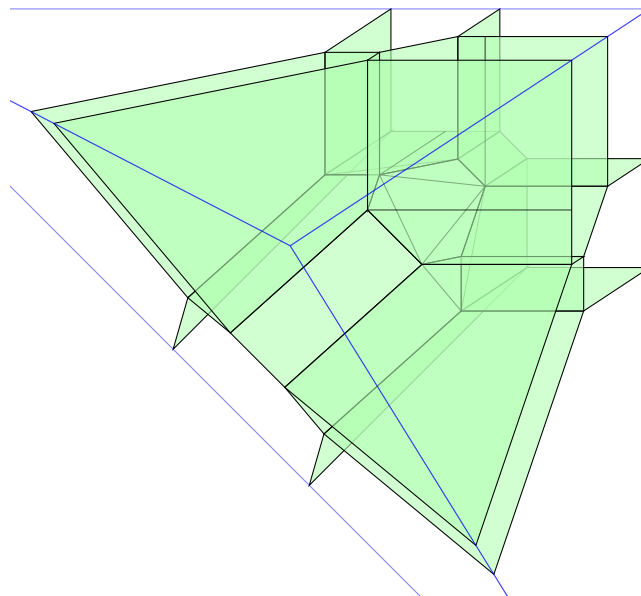


FIGURE 6. Une surface tropicale triangulée canoniquement compactifié dans \mathbb{TP}^3 générée à l'aide de Polymake^{ab}.



^aLogiciel Polymake : <https://www.polymake.org>

^bAnimation et code source disponibles ici : http://matthieu.piquerez.fr/partage/tropical_surface.pl
http://matthieu.piquerez.fr/partage/tropical_surface.html

1.8.3. *Comment associer une variété à un éventail ?* Nous nous proposons ici d'expliquer comment obtenir une compactification partielle du tore tropical $T_{\mathbb{T}}^n = \mathbb{R}^n$ à partir d'un éventail simplicial de $N_{\mathbb{R}}$. Nous ferons aussi le lien avec la construction classique pour la compactification du tore complexe $T_{\mathbb{C}}^n = (\mathbb{C}^*)^n$ et du tore réel $T_{\mathbb{R}}^n = (\mathbb{R}^*)^n$; c'est surtout le cas complexe qui nous intéresse ici, mais le cas réel est plus facile à représenter. Nous ne ferons qu'esquisser la manière de construire les compactifications dans le cas classique. En effet, en général la définition utilise des concepts de géométrie algébrique. Notre but est de nous passer de ces concepts afin de rendre cette jolie construction compréhensible par le plus grand nombre, quitte à perdre en précision et en généralité. Les détails peuvent être facilement trouver dans la littérature, voir par exemple [Ful93].

Nous commençons par décrire la construction dans le cadre tropical. On pose $N = \mathbb{Z}^n$ et on considère $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$. D'un autre côté, on a le tore tropical $T_{\mathbb{T}}^n = \mathbb{R}^n$ que l'on va identifier avec $N_{\mathbb{R}}$. Soit σ un cône simplicial dans \mathbb{R}^n de dimension k . Soient e_1, \dots, e_k des éléments de $N_{\mathbb{R}}$ engendrant chacun un rayon de σ . On peut compléter ces vecteurs en une base de $N_{\mathbb{R}}$ en ajoutant des éléments e_{k+1}, \dots, e_n . Notons U_{σ} la compactification partielle du tore $T_{\mathbb{T}}^n$ associée à σ . Tout élément du tore $T_{\mathbb{T}}^n$ peut s'écrire sous la forme $a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$. L'idée est d'autoriser a_1, \dots, a_k à valoir ∞ . Plus précisément, on utilise l'isomorphisme linéaire $T_{\mathbb{T}}^n \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}^n$ qui envoie (e_1, \dots, e_n) sur la base standard et celui-ci se prolonge naturellement en un isomorphisme $U_{\sigma} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

On peut facilement voir que si τ est une face du cône σ , alors U_{τ} est naturellement un ouvert de U_{σ} . Notamment U_{\emptyset} est le tore lui-même. Si Σ est un éventail simplicial, en collant tous les U_{σ} pour $\sigma \in \Sigma$ en respectant les inclusions $U_{\tau} \hookrightarrow U_{\sigma}$ pour $\tau < \sigma$, on obtient la variété torique tropicale \mathbb{TP}_{Σ} associée à Σ .

De plus, il y a une stratification naturelle sur \mathbb{TP}_{Σ} . Pour chaque face $\sigma \in \Sigma$ on obtient une strate $T_{\mathbb{T}}^{\sigma} := U_{\sigma} \setminus \bigcup_{\tau < \sigma} U_{\tau}$ qui est isomorphe au tore $T_{\mathbb{T}}^{n-|\sigma|}$. En outre, l'adhérence de $T_{\mathbb{T}}^{\sigma}$ dans \mathbb{TP}_{Σ} est isomorphe à $\mathbb{TP}_{\Sigma^{\sigma}}$ et nous la notons $\mathbb{TP}_{\Sigma}^{\sigma}$. La figure 5 présente un éventail Σ , sa compactification canonique $\overline{\Sigma}$, c'est-à-dire l'adhérence de Σ dans \mathbb{TP}_{Σ} , ainsi que quelques strates de \mathbb{TP}_{Σ} . De même, la figure 6, présente la compactification d'un complexe simplicial X dans $\mathbb{TP}_{X_{\text{rec}}}$. Il se trouve qu'ici $\mathbb{TP}_{X_{\text{rec}}}$ est simplement l'espace projectif tropical \mathbb{TP}^3 privé de ses quatre sommets.

Pour faire le lien avec les variétés toriques réelles et complexes, nous donnons un exemple dans lequel nous construisons le plan projectif en tant que compactification du tore de dimension $n = 2$.

EXEMPLE 1.8 (Compactification du tore en un plan projectif). Dans cet exemple, nous montrons comment compactifier le tore réel $T_{\mathbb{R}}^2 = (\mathbb{R}^*)^2$ en le plan projectif réel \mathbb{RP}^2 en utilisant l'éventail projectif de $N_{\mathbb{R}} := \mathbb{R}^2$. Le même éventail est utilisé pour obtenir le plan projectif tropical \mathbb{TP}^2 . Les différentes constructions sont représentées en figure 4.

Soit (χ_1, χ_2) la base standard de $N_{\mathbb{R}}$, et notons (x_1, x_2) les coordonnées correspondantes. L'éventail projectif de $N_{\mathbb{R}}$ est l'éventail rationnel complet Σ contenant trois rayons $\rho_1 = \mathbb{R}_+ \chi_1$, $\rho_2 = \mathbb{R}_+ \chi_2$ et $\rho_0 = \mathbb{R}_+ (-\chi_1 - \chi_2)$, et trois cônes de dimension deux, $\sigma_{12} = \rho_1 + \rho_2$, $\sigma_{01} = \rho_0 + \rho_1$ et $\sigma_{02} = \rho_0 + \rho_2$.

Le point de départ de la construction est le tore $T_{\mathbb{R}}^2 = (\mathbb{R}^*)^2$, dont les points ont pour coordonnées (z_1, z_2) avec z_1 et z_2 non nuls. Ici on appelle tropicalisation du point (z_1, z_2) le point $\text{trop}(z_1, z_2) = (-\log(|z_1|), -\log(|z_2|))$. Cette fonction définit une surjection de $T_{\mathbb{R}}^2$ sur $T_{\mathbb{T}}^2$, chaque image ayant quatre antécédents en fonction des signes de z_1 et de z_2 (dans le cas complexe, la fibre au-dessus de chaque point est isomorphe à $(\mathbb{S}^1)^2$ en fonction des arguments de z_1 et de z_2).

Prenons un rayon de Σ , par exemple ρ_1 (en rouge sur la figure 4). Dans le cas tropical, on autorise x_1 à valoir $+\infty$. Via la fonction trop, cela revient naturellement dans le cas réel (ou complexe) à laisser z_1 valoir zéro. On obtient donc la compactification partielle associée

au rayon ρ_1 , $U_{\rho_1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. La strate $T_{\mathbb{R}}^{\rho_1}$ correspondant à ρ_1 est indiquée en rouge sur le dessin, vaut par définition $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \setminus T_{\mathbb{R}}^2$, et est isomorphe à $T_{\mathbb{R}}^1$. En prolongeant par continuité la fonction trop, c'est ce qu'on appelle la *tropicalisation étendue*, la strate est naturellement envoyée sur la strate tropicale correspondante $T_{\mathbb{T}}^{\rho_1}$. Sur cette strate, chaque point de l'image n'a plus que deux antécédents.

De même, la compactification partielle associée à ρ_2 est celle où l'on autorise z_2 à valoir zéro. Il s'agit donc de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et la strate associée est indiquée en vert.

Maintenant passons au dernier rayon $\rho_0 = \mathbb{R}\chi_0$ avec $\chi_0 = (-1, -1)$. La fonction coordonnée associée via la fonction trop est $z_1^{-1}z_2^{-1} = 1/z_1z_2$. La compactification associée est celle où l'on autorise $1/z_1z_2$ à valoir zéro. Pour être plus précis, dans le cas tropical, on ajoute les limites lorsque $-x_1 - x_2$ tend vers l'infini à $x_1 - x_2 = a \in \mathbb{R}$ fixé. De même ici, on ajoute un point pour chaque $a \in \mathbb{R}^*$ à la limite où $1/z_1z_2$ tend vers zéro, à $z_1/z_2 = a$ fixé. On obtient la droite à l'infini moins deux points (en bleu sur le dessin). Précisons que les deux extrémités d'une droite $z_2 = az_1$ pour $a \in \mathbb{R}^*$ convergent vers le même point. Jusqu'à présent, nous avons donc bien obtenu le plan projectif à l'exception de trois points.

Les trois cônes de dimensions deux complètent ces points. Le cône σ_{12} autorise z_1 et z_2 à valoir zéro simultanément, σ_{02} autorise $1/z_1z_2$ et z_2 à valoir zéro simultanément (on ajoute donc le point à l'extrémité de l'axe des abscisses $[0 : 1 : 0]$ en coordonnées homogènes $[z_0 : z_1 : z_2]$), et σ_{01} permet d'ajouter le dernier point $[0 : 0 : 1]$.

La construction du plan projectif complexe est similaire. \diamond

De manière générale et de façon peu précise (la définition usuelle est plus élégante mais aussi plus technique), un cône simplicial $\sigma \in N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ va participer à la compactification par une strate $T_{\mathbb{k}}^{\sigma}$, avec $\mathbb{k} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{T}, \mathbb{C}\}$, qui est obtenue de la manière suivante. Si σ^{\perp} désigne l'ensemble des formes linéaires entières qui s'annulent sur σ , alors à tout $\ell \in \sigma^{\perp}$ on peut associer la fonction coordonnée sur $T_{\mathbb{k}}^n$ donnée par $f_{\ell}(z) = z_1^{\ell(x_1)} \dots z_n^{\ell(x_n)}$ pour $z = (z_1, \dots, z_n) \in T_{\mathbb{k}}^n$. La strate $T_{\mathbb{k}}^{\sigma}$ est alors obtenue en ajoutant des points à la limite lorsque les coordonnées correspondant à σ tendent vers 0 tout en gardant fixe les valeurs f_{ℓ} pour $\ell \in \sigma^{\perp}$.

Dans tous les cas la fonction trop étendue respecte la stratification, et donc à chaque face σ de Σ est associée une strate de codimension $|\sigma|$ dans la variété torique $\mathbb{k}\mathbb{P}_{\Sigma}$ correspondante. Cette strate est isomorphe au tore de dimension correspondante, et son adhérence est isomorphe à la variété torique associée à $\Sigma^{\sigma} \subseteq N_{\mathbb{R}}^{\sigma}$.

1.8.4. *Compactification canonique.* Soit Σ un éventail simplicial. On définit la *compactification canonique de Σ* , notée $\overline{\Sigma}$, comme la compactification de Σ dans $\mathbb{T}\mathbb{P}_{\Sigma}$. On peut en fait décrire $\overline{\Sigma}$ de la manière suivante.

À chaque cône $\sigma \in \Sigma$, on peut associer sa *compactification canonique* $\overline{\sigma} := \sigma \otimes_{\mathbb{R}_+} \mathbb{T}_+$ où $\mathbb{T}_+ = [0, +\infty]$. Ici, \mathbb{R}_+ et \mathbb{T}_+ ne sont pas des anneaux mais des semi-anneaux, mais on peut définir le produit tensoriel de manière usuelle. On appelle $\overline{\sigma}$ un *polyèdre étendu*. Si $\tau < \sigma$, on a une inclusion $\overline{\tau} \subseteq \overline{\sigma}$. Le *support de $\overline{\Sigma}$* , noté $|\overline{\Sigma}|$, est par définition l'union des $\overline{\sigma}$ pour $\sigma \in \Sigma$ où l'on identifie les points de $\overline{\tau}$ et leurs images par l'inclusion dans $\overline{\sigma}$ pour toute paire de cônes $\tau < \sigma$.

La figure 5 présente un éventail de Bergman Σ , sa compactification canonique et une partie de $\mathbb{T}\mathbb{P}_{\Sigma}$.

On peut munir $|\overline{\Sigma}|$ d'une structure de faces de manière naturelle. Si $\tau < \sigma$, on pose $\sigma_{\infty}^{\tau} := \overline{\sigma} \cap T_{\mathbb{T}}^{\tau}$, et $\overline{\sigma}_{\infty}^{\tau} = \overline{\sigma} \cap \mathbb{T}\mathbb{P}_{\Sigma}^{\tau}$ désigne l'adhérence de σ_{∞}^{τ} dans $|\overline{\Sigma}|$. Par exemple, $\sigma_{\infty}^0 = \sigma^0 = \sigma$. L'ensemble des faces $\overline{\sigma}_{\infty}^{\tau}$ forme un complexe polyédral étendu qui est noté $\overline{\Sigma}$. Pour cette structure de face, $\overline{\sigma}_{\infty}^{\tau}$ devient isomorphe à un hypercube de dimension $|\sigma| - |\tau|$.

On note Σ_{∞}^{τ} l'ensemble des faces de la forme σ_{∞}^{τ} pour $\sigma > \tau$. On obtient un éventail qui est isomorphe à l'éventail Σ^{τ} . L'adhérence de Σ_{∞}^{τ} dans $\overline{\Sigma}$ est isomorphe à $\overline{\Sigma}^{\tau}$ et est notée $\overline{\Sigma}_{\infty}^{\tau}$.

La même construction est possible lorsque Σ est un éventail polyédral quelconque, cf. chapitre 2 section 2.2. Cela pose d'ailleurs une question intéressante.

QUESTION 1.9. Soit σ un cône polyédral quelconque. La structure de faces naturelle sur $\bar{\sigma}$ est-elle la structure de face d'un polytope ? \diamond

On peut facilement montrer qu'il s'agit du moins d'un polytope abstrait, c'est-à-dire que l'ensemble ordonné des faces obtenues vérifie la *propriété diamant*, i.e. pour toute paire de faces $\gamma < \eta$ avec $|\eta| = |\gamma| + 2$, il existe exactement deux faces δ et δ' telles que $\gamma < \delta, \delta' < \eta$.

On peut de même compactifier canoniquement des complexes simpliciaux (voire des complexes polyédraux). Nous avons vu que chaque face δ de X est de la forme $\delta_f + \delta_{\text{rec}}$. On définit alors $\bar{\delta} := \delta_f + \bar{\delta}_{\text{rec}}$. Ainsi $\bar{\delta}$ devient le produit d'un simplexe et d'un hypercube. En recollant tous les $\bar{\delta}$, on obtient la compactification canonique de X , notée \bar{X} . Elle est naturellement munie d'une structure de faces comme pour le cas des éventails : les faces sont de la formes $\bar{\delta}^\sigma := \delta_f + \bar{\delta}_{\text{rec},\infty}^\sigma \subseteq \bar{\delta}$ pour $\delta \in X$ et $\sigma < \delta_{\text{rec}}$. Ce n'est plus un complexe cubique comme dans le cas des éventails mais plutôt une structure hybride simplicial-cubique. Par exemple la figure 6 présente la compactification canonique d'une surface tropicale.

Dans le cas où le pseudo-éventail X_{rec} est un éventail, \bar{X} est simplement la compactification de X dans $\mathbb{TP}_{X_{\text{rec}}}$. On a alors une stratification de \bar{X} par les strates $\bar{X}^\sigma := \bar{X} \cap \mathbb{TP}_{X_{\text{rec}}}^\sigma$ pour $\sigma \in X_{\text{rec}}$.

1.9. Variétés tropicales. La définition d'une variété tropicale générale est assez technique et ne nous sera pas utile dans ce chapitre. Nous donnons des définitions approximatives afin que le lecteur ait une idée des objets dont nous parlons. Des définitions formelles peuvent être trouvées en chapitre 3 section 2 ou dans [JSS19].

Un *espace polyédral étendu* est un espace topologique connexe muni d'un atlas de cartes $\phi_i : U_i \rightarrow \mathfrak{X}_i$ où \mathfrak{X}_i est un ouvert de la compactification dans \mathbb{T}^n d'un espace polyédral de \mathbb{R}^n , et les applications de transitions entre deux cartes sont des applications affines étendues. Un *complexe polyédral étendu* est un espace polyédral étendu muni d'une structure de faces, chaque face vivant entièrement dans au moins une carte.

Une *variété tropicale pondérée* est un complexe polyédral étendu dont chaque facette est munie d'un poids et qui vérifie la condition d'équilibre. Une telle variété est dite *localement matroïdale* si elle est localement isomorphe à $|\bar{\Sigma}| \times \mathbb{T}^k$ où Σ est un éventail de Bergman. Être localement matroïdale et de poids constant égal à un est la définition classique de lissité pour les variétés tropicales. En section 3.7, nous proposerons une nouvelle définition de lissité plus générale.

REMARQUE 1.10 (Réalisation d'une variété tropicale). En général, toutes les sous-variétés tropicales de \mathbb{R}^n ne sont pas la tropicalisation d'une variété. On dit qu'elles ne sont pas *réalisables*. Si l'on souhaite obtenir une variété tropicale comme limite tropicale de variétés complexes au sens de la section 1.11.1 on parle plutôt d'*approximabilité*.

On peut montrer que les hypersurfaces tropicales sont approximables, voir [Vir01, Rul01, Mik04b]. Notamment la méthode du « patchwork » de Viro permet de construire des variétés approximant une hypersurface tropicale et est très utilisées pour construire des hypersurfaces réelles intéressantes : voir [Vir80, Vir06] ou la plupart des introductions suscitées.

Pour les variétés tropicales de codimensions supérieures, même pour le cas des courbes, la réalisabilité d'une variété tropicale est un problème difficile : voir [BS15] et les nombreux travaux qui y sont mentionnés. \diamond

1.10. Espaces de Berkovich. Dans ce chapitre, nous ne ferons que mentionner les espaces de Berkovich [Ber90, Ber93]. Nous en parlons très brièvement ici, pour plus de détail, voir par exemple [DFN15]. L'analytifié de Berkovich d'une variété peut être vu comme la limite projective de toutes les tropicalisations possibles d'une variété [Pay09, FGP14]. C'est un espace très gros qui contient la variété de départ. Ainsi si l'on a un résultat sur suffisamment de tropicalisations possibles d'une variété, on peut espérer passer à la limite et obtenir des résultats sur la variété.

1.11. Familles de variétés complexes. Dans cette dernière partie sur les rappels, nous présentons les familles de variétés complexes, leurs limites tropicales et les liens entre les deux. Une fois de plus nous serons assez imprécis étant donné que nous n'utiliserons ces concepts que dans des discussions et des exemples. Pour nous il s'agira du passage privilégié pour espérer obtenir des résultats en théorie de Hodge asymptotique à partir de la géométrie tropicale.

1.11.1. *Limite tropicale d'une famille de variétés complexes.* Commençons par décrire la limite tropicale d'une famille de variétés complexes dans un cas simple. Soit $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ le disque unité complexe, et $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$. On peut considérer par exemple une famille d'hypersurfaces W_t pour $t \in \Delta^*$, chacune dans le tore $T_{\mathbb{C}}^n = (\mathbb{C}^*)^n$, où la *fibre générale* W_t est le lieu des zéros du polynôme $P_t(z_1, \dots, z_n)$ dont les coefficients sont, par exemple, analytiques en t . Si l'on prend $n = 2$ et $P_t(z_1, z_2) = z_1 + tz_2 + z_1z_2 + t^2z_2^2 + z_1^2z_2 + tz_1z_2^2$, une fibre générale de la variété est une courbe complexe qui pourrait ressembler à la première image de la figure 7 (sans les points bleus). Au lieu de prendre une seule famille de polynômes, on peut en considérer plusieurs pour obtenir des familles de variétés de codimensions supérieures.

L'amibe associée à $t \in \Delta^*$ est par définition égale à $\text{Log}_t(W_t)$ où, on le rappelle,

$$\text{Log}_t((z_1, \dots, z_n)) = (\log_t(|z_1|), \dots, \log_t(|z_n|)).$$

On peut alors définir la limite tropicale comme précédemment par $\lim_{t \rightarrow 0} \text{Log}_t(W_t)$. Cette fois-ci, comme la variété considérée dépend elle aussi de t , augmenter t ne revient pas simplement à faire une homothétie. À la limite, on obtient un espace polyédral, qui est en fait une variété tropicale, ressemblant à celui de la figure 8. Notons cet espace \mathfrak{X} . Le cône asymptotique $\mathfrak{X}_{\text{rec}}$ de \mathfrak{X} , c'est-à-dire $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \mathfrak{X}$, est simplement la tropicalisation de W_t pour n'importe quel $t \in \Delta^*$.

Ainsi, si l'on subdivise $\mathfrak{X}_{\text{rec}}$ en un éventail noté X_{rec} , on peut considérer la compactification de chacune des variétés W_t dans $\mathbb{C}P_{X_{\text{rec}}}$. Nous noterons cette compactification \overline{W}_t . On peut de même regarder la compactification $\overline{\mathfrak{X}}$ de \mathfrak{X} dans $\mathbb{TP}_{X_{\text{rec}}}$. Sur la figure, la partie ajoutée en-dehors du tore est indiquée en bleu.

1.11.2. *Réduction semi-stable.* Un autre point de vue pour la famille de variétés $(W_t)_{t \in \Delta^*}$ est de considérer la variété $\mathcal{W}^* \subseteq T_{\mathbb{C}}^n \times \Delta^*$ qui est le lieu des zéros de $P(z_1, \dots, z_n, t) = P_t(z_1, \dots, z_n)$, ainsi que la projection $\pi : \mathcal{W}^* \rightarrow \Delta^*$. Les éléments de la famille sont alors simplement les fibres de la projection : $W_t = \pi^{-1}(t)$. On peut aussi voir P comme un polynôme sur $\mathbb{C}\{\{t\}\}$. La variété tropicale associée à ce polynôme est simplement la limite tropicale de la famille. Supposons maintenant que \mathcal{W}^* et toutes les fibres sont lisses.

Nous aimerions compléter \mathcal{W}^* au-dessus de zéro, c'est-à-dire obtenir une compactification partielle \mathcal{W} de \mathcal{W}^* avec une projection $\pi : \mathcal{W} \rightarrow \Delta$ tel que $\mathcal{W}^* = \pi^{-1}(\Delta^*)$. De plus, nous aimerions que la *fibre centrale* $W_0 = \pi^{-1}(0)$ soit sympathique. Si les coefficients de P_t se prolonge en 0, on peut bien prolonger \mathcal{W}^* en \mathcal{W} . Supposons que \mathcal{W} est lisse. Une construction de Mumford et coauteurs [KKMS06] nous explique que, quitte à prendre un revêtement étal fini de Δ^* , on peut faire en sorte que W_0 soit un diviseur à croisements normaux dans \mathcal{W} , c'est-à-dire une union de composantes irréductibles lisses dont les intersections sont elles-mêmes lisses et de la dimension attendue. La fibre W_0 obtenue est appelée la *fibre spéciale* ou la *fibre centrale*. Notons que toutes les fibres générales sont homéomorphes. Nous considérons aussi \overline{W}_0 la compactification de W_0 dans $\mathbb{C}P_{X_{\text{rec}}}$. Notons que \mathcal{W} se rétracte par déformation sur W_0 .

Géométriquement, ce que l'on voit c'est que lorsque t tend vers 0, certains cycles de W_t se contractent. Dans la figure 7, nous avons ainsi représenté en seconde image une fibre proche, c'est-à-dire une variété W_t pour t proche de 0. À la limite $t = 0$, ces cycles ont entièrement disparus : ce sont les *cycles évanescents*.

1.11.3. *Complexe dual à la fibre spéciale.* La construction de Mumford utilise un complexe simplicial compact inclus dans \mathfrak{X} . Soit X un complexe simplicial de support \mathfrak{X} . Supposons que son éventail de récession soit X_{rec} et que sa partie finie nous donne la réduction semi-stable. On obtient alors une stratification intéressante de la fibre spéciale indexée par les faces de X .

FIGURE 7. Une fibre générale, une fibre proche et la fibre spéciale d'une dégénérescence de courbes complexes, ainsi que les décompositions associées à la fibration en tores.

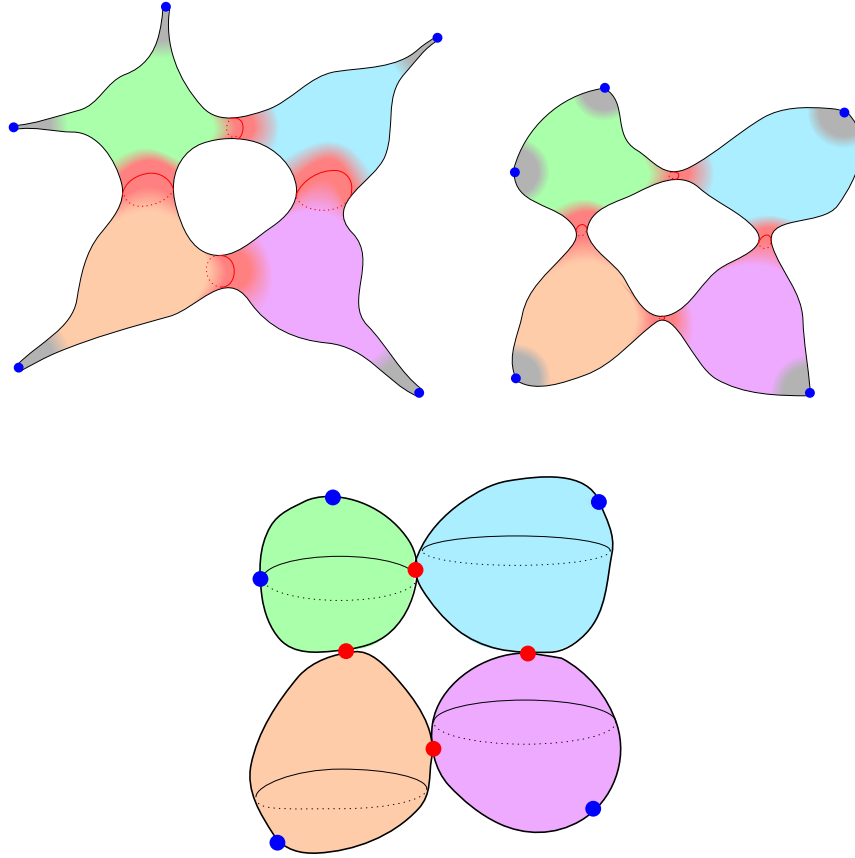
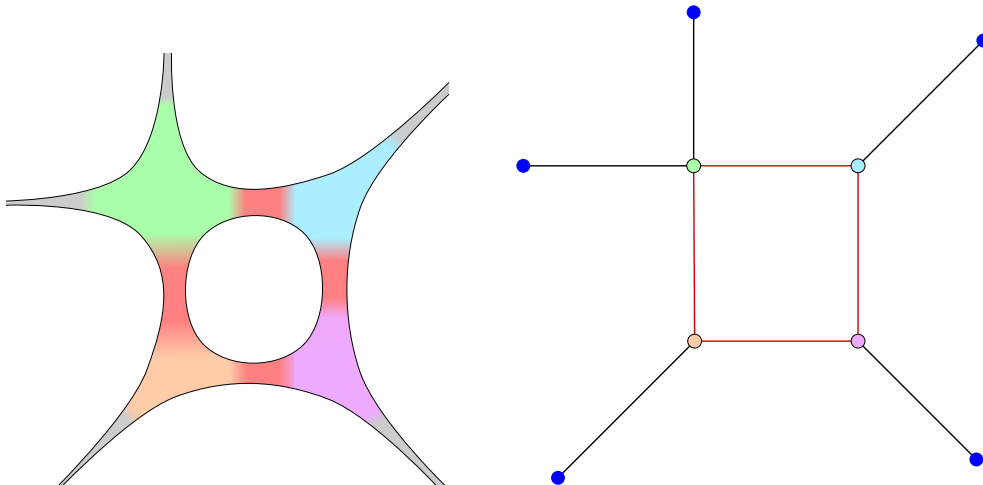


FIGURE 8. Une amibe et la limite tropicale associées à la famille ci-dessus.



- Les composantes irréductibles de \overline{W}_0 sont naturellement en bijection avec les sommets de X . Nous notons $\overline{W}_{0,s}$ la composante irréductible associée à un sommet $s \in X_0$.
- Pour un ensemble de sommets $S \subseteq X_0$, les composantes irréductibles associées s'intersectent si et seulement si les sommets S appartiennent à une même face de X_f . Dans ce cas nous notons $\overline{W}_{0,S} := \bigcap_{s \in S} \overline{W}_{0,s}$ la sous-variété associée.
- Pour un cône $\sigma \in X_{\text{rec}}$ et une face $\delta \in X_f$, $\overline{W}_{0,\delta}$ intersecte la strate $\mathbb{C}\mathbb{P}_{X_{\text{rec}}}^\sigma \subseteq \mathbb{C}\mathbb{P}_{X_{\text{rec}}}$ si et seulement si $\delta + \sigma$ est une face de X . Nous notons $\overline{W}_{0,\delta+\sigma}$ la strate associée.

Nous obtenons une stratification de \overline{W}_0 et l'inclusion des strates correspond à l'inclusion des faces dans X dans le sens opposé.

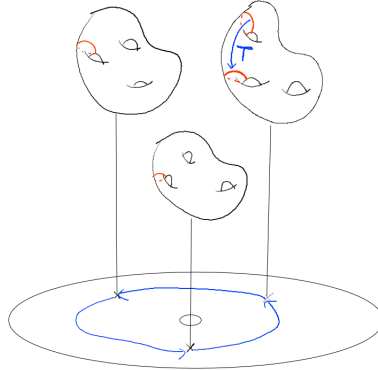
Si l'on oublie les faces non compactes de X , on obtient tout de même une stratification et X_f est connu sous le nom de *complexe de Clemens*, ou *complexe dual*, de \overline{W}_0 .

Pour chaque strate $W_{0,\delta}$, $\delta \in X$, nous notons $U_{0,\delta}$ la partie ouverte correspondante, à savoir $U_{0,\delta} := \overline{W}_{0,\delta} \setminus \bigcup_{\eta > \delta, \eta \neq \delta} \overline{W}_{0,\eta}$. Nous obtenons ainsi une partition de \overline{W}_0 .

1.11.4. *Monodromie.* Soit $t_0 \in \Delta^*$ et soit a_0 une classe dans $H^k(W_{t_0})$. On peut regarder le lacet $\phi : [0, 1] \rightarrow \Delta^*$, $s \mapsto e^{is}t_0$, qui tourne autour de 0. Pour tout s , on peut alors choisir un élément $a_s \in H^k(W_s)$ pour que $s \mapsto a_s$ soit constant dans les trivialisations locales de la fibration. Dans ce cas, $a_1 \in H^k(W_{t_0})$ est a priori différent de a_0 . On peut représenter cela schématiquement par la figure 9. On obtient ainsi une application $T : H^k(W_{t_0}) \rightarrow H^k(W_{t_0})$ appelé l'*opérateur de monodromie*. On peut montrer que, quitte à prendre un revêtement fini de Δ^* comme précédemment, T est unipotent, c'est-à-dire que $(T - \text{id})^m$ est nulle pour m suffisamment grand. On peut donc définir formellement le logarithme de T , $N := \log(T)$. Par abus de langage, on appelle aussi N l'*opérateur de monodromie*. Cet opérateur induit un opérateur sur la limite tropicale que l'on appelle l'*opérateur « eigenwave »* [MZ14]. Ce dernier joue un rôle central dans notre théorème principal, théorème 7.6, et nous l'appellerons simplement l'*opérateur de monodromie tropical* en suivant notamment [Liu19].

Une autre façon de définir la monodromie est de considérer le revêtement universel $\widetilde{\Delta}^*$ de Δ^* , et de relever \mathcal{W}^* en $\widetilde{\mathcal{W}}^*$ au-dessus de $\widetilde{\Delta}^*$. L'opérateur de monodromie T est alors induit par l'action naturelle du générateur du groupe fondamental $\pi_1(\widetilde{\Delta}^*) \simeq \mathbb{Z}$ sur $\widetilde{\Delta}^*$. L'opérateur de monodromie $N = -\log(T)$ induit une application $N : H^\bullet(\widetilde{\mathcal{W}}^*) \rightarrow H^\bullet(\widetilde{\mathcal{W}}^*)$. Notons que $\widetilde{\mathcal{W}}^*$ se contracte par déformation sur n'importe quelle fibre générale. Nous verrons que la monodromie définit une filtration intéressante sur la cohomologie de $H^\bullet(\widetilde{\mathcal{W}}^*)$.

FIGURE 9. Représentation de l'opérateur de monodromie T .



2. Structures simpliciales

De nombreux résultats de cette thèse ont pu être obtenus grâce au développement de multiples points de vue pour calculer la cohomologie tropicale de différents espaces fortement

liés entre eux. Le but de cette section est de définir un cadre général plutôt vaste dans lequel ces outils peuvent être appliqués. L'objectif est double. D'abord, dans ce cadre nous ne considérons pas le réseau entier N inhérent à la géométrie tropicale qui rajoute un peu de technicité aux preuves, sans que cela soit utile pour les applications que nous proposons. Ensuite, l'oubli de ce réseau rapproche nos travaux de la théorie de Hodge combinatoire. Nous montrons ainsi comment la théorie des faisceaux pourrait être utilisée dans ce domaine en section 5.

2.1. Structures simpliciales linéaires. Soit E un ensemble fini. Un *éventail simplicial abstrait* Σ sur E est un ensemble de parties de E contenant notamment les parties de cardinal au plus un et stable par inclusion : si $\sigma \in \Sigma$ et $\tau \subseteq \sigma$, alors $\tau \in \Sigma$. Les éléments de Σ sont appelés des *cônes* ou des *faces* de Σ . La *dimension* d'un cône σ de Σ est notée $|\sigma|$ et est égale au cardinal de σ . L'ensemble des faces de dimension k est noté Σ_k . Le sous-éventail constitué des faces de dimensions au plus k est appelé le k -squelette de Σ et noté $\Sigma_{\leq k}$. L'unique cône de dimension zéro est noté $\mathbf{0}$, et les cônes de dimension un sont appelés des *rayons*. Nous identifions naturellement Σ_1 et E . Les cônes maximaux pour l'inclusion sont appelés *facettes*. La dimension de Σ est par définition le maximum de $|\sigma|$ pour $\sigma \in \Sigma$ et Σ est dit *pur de dimension* d si toutes les facettes ont dimension d . Sauf mention contraire, tous les éventails considérés seront purs.

REMARQUE 2.1. La définition ci-dessus est très proche de la définition d'un complexe simplicial abstrait. Les principales différences sont la définition des dimensions, et le fait que l'on considère toujours l'ensemble vide comme une face. On peut voir un éventail simplicial abstrait comme le cône sur un complexe simplicial abstrait. \diamond

Si τ et σ sont deux faces de Σ , on notera $\tau < \sigma$ si τ est une face de σ , c'est-à-dire si $\tau \subseteq \sigma$. Cela définit un ordre partiel sur Σ . On peut prolonger cet ordre à $\mathcal{L}_\Sigma := \Sigma \sqcup \{\mathbf{1}\}$ en posant $\sigma < \mathbf{1}$ pour tout $\sigma \in \mathcal{L}_\Sigma$. En notant $\mathbf{0} = \mathbf{0}$, on obtient un *treillis* d'élément minimal $\mathbf{0}$ et d'élément maximal $\mathbf{1}$. Pour $\tau, \sigma \in \Sigma$, les opérations associées sont données par

- la rencontre : $\tau \wedge \mathbf{1} := \tau$ et $\tau \wedge \sigma := \tau \cap \sigma$,
- et la jointure : $\tau \vee \mathbf{1} := \mathbf{1}$ et $\tau \vee \sigma$ vaut $\tau \cup \sigma$ si cette union est dans Σ et $\mathbf{1}$ sinon.

Si σ *couvre* τ , c'est-à-dire si $\sigma > \tau$ est $|\sigma| = |\tau| + 1$, nous utiliserons la notation $\sigma > \tau$. Si $\sigma \vee \tau \neq \mathbf{1}$, nous dirons que σ et τ sont *comparables*. Finalement, nous noterons $\sigma \sim \tau$ si σ et τ sont comparables et si $\sigma \wedge \tau = \mathbf{0}$.

L'*éventail étoile* de Σ autour de σ , noté $\text{St}_\sigma(\Sigma)$, est le sous-éventail constitué de tous les cônes comparables avec σ . L'*éventail transverse* de Σ autour de σ est par définition l'éventail abstrait $\{\eta \setminus \sigma \mid \eta > \sigma\}$ sur $E \setminus \sigma$. On le note Σ^σ . La face $\eta \setminus \sigma$ sera alors noté η^σ .

Si l'on a deux éventails simpliciaux abstraits Σ sur E et Σ' sur E' , on peut définir leur produit $\Sigma \times \Sigma'$ sur $E \sqcup E'$ dont les faces sont de la forme $\sigma \sqcup \sigma'$ pour $\sigma \in \Sigma$ et $\sigma' \in \Sigma'$.

DÉFINITION 2.2. Une *structure simpliciale linéaire* est une paire (Σ, Lin) où Σ est un éventail simplicial abstrait et Lin est l'*espace des formes linéaires* sur Σ , c'est-à-dire un sous-espace linéaire de $(\mathbb{R}^E)^\star$ tel que pour tout $\sigma \in \Sigma$, la projection de Lin sur $(\mathbb{R}^\sigma)^\star$ soit surjective. \diamond

La projection de Lin sur $(\mathbb{R}^\sigma)^\star$ est notée Lin_σ et on l'appelle l'*espace des formes linéaires restreintes à σ* . Elle est par définition isomorphe à $(\mathbb{R}^\sigma)^\star$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous noterons simplement Σ la structure simpliciale linéaire, et Lin désignera naturellement les formes linéaires sur Σ .

EXEMPLE 2.3. L'image à avoir en tête est celle d'un éventail simplicial dans $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$. Rappelons d'abord qu'un cône simplicial est de la forme $\mathbb{R}_+e_1 + \dots + \mathbb{R}_+e_s$ où e_1, \dots, e_s sont des vecteurs indépendants de $N_{\mathbb{R}}$. Les faces de σ sont simplement les cônes engendrés par une sous-famille de (e_1, \dots, e_s) . Un éventail simplicial est naturellement muni d'une structure

d'éventail abstrait aussi noté Σ . Pour chaque rayon ρ de Σ , on peut choisir un vecteur $\mathbf{e}_\rho \in \rho$ que l'on appellera *vecteur unitaire* de ρ . Pour chaque forme linéaire ℓ dans $M_{\mathbb{R}}$, ℓ induit une fonction $\Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $\rho \mapsto \ell(\mathbf{e}_\rho)$, fonction qui se prolonge naturellement en un élément de $(\mathbb{R}^{\Sigma_1})^*$. En considérant toutes les formes linéaires de $M_{\mathbb{R}}$, on obtient donc un sous-espace linéaire Lin de $(\mathbb{R}^{\Sigma_1})^*$. La paire (Σ, Lin) est alors une structure simpliciale linéaire. Néanmoins, une structure simpliciale linéaire n'a en général pas de représentation en tant qu'éventail de \mathbb{R}^n . \diamond

EXEMPLE 2.4. Soit (Σ, Lin) une structure simpliciale linéaire. Soit n la dimension de Lin . On peut choisir une base ℓ_1, \dots, ℓ_n de Lin . Pour chaque rayon $\varrho \in \Sigma_1$, on définit le *vecteur unitaire du rayon* par $\mathbf{e}_\varrho = (\ell_1(\varrho), \dots, \ell_n(\varrho)) \in N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$. On obtient une représentation de Σ en prenant l'ensemble des cônes convexes

$$\sum_{\substack{\varrho < \sigma \\ \varrho \in \Sigma_1}} \mathbb{R}_+ e_\varrho$$

pour $\sigma \in \Sigma$. Ce n'est a priori pas un éventail au sens habituel car deux cônes convexes peuvent avoir une intersection qui n'est pas une face commune. Il s'agit plutôt d'un pseudo-éventail. L'espace vectoriel Lin est alors induit par $M_{\mathbb{R}}$. \diamond

Soit (Σ, Lin) une structure simpliciale linéaire. Si Δ est un *sous-éventail* de Σ , i.e. si Δ est un éventail abstrait inclus dans Σ , on note $\text{Lin}|_{\Delta}$ la restriction de Lin aux rayons de Δ . On obtient alors une structure simpliciale linéaire $(\Delta, \text{Lin}|_{\Delta})$.

Soit σ un cône de Σ . On définit $\text{Lin}(\sigma) := \text{Lin}|_{\text{St}_\sigma(\Sigma)}$ l'espace des formes linéaires stellaires autour de σ . L'espace des formes transverses autour de σ , noté Lin^σ , sera le noyau de la projection $\text{Lin}(\sigma) \rightarrow \text{Lin}_\sigma$. Notamment, on obtient une structure linéaire $(\Sigma^\sigma, \text{Lin}^\sigma)$ sur l'éventail transverse. On définit de manière naturelle Lin_σ^τ par

$$\text{Lin}_\sigma^\tau := (\text{Lin}^\tau)_{\sigma^\tau} = (\text{Lin}_\sigma)^\tau.$$

Si (Σ, Lin) et (Σ', Lin') sont deux structures simpliciales linéaires sur E et E' respectivement, on peut définir le produit $\Sigma \times \Sigma'$ en munissant l'éventail abstrait sous-jacent de l'espace des formes linéaires produits $\text{Lin} \oplus \text{Lin}' \subseteq (\mathbb{R}^{E \sqcup E'})^*$.

DÉFINITION 2.5. Une *structure simpliciale linéaire faiblement rationnelle* est un triplet $(\Sigma, \text{Lin}, M_{\mathbb{Q}})$ où $M_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}^{\dim(\text{Lin})}$ est un \mathbb{Q} -espace vectoriel inclus dans Lin tel que $M_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$ soit naturellement isomorphe à Lin . On exige de plus que pour toute face σ de Σ , le \mathbb{Q} -espace vectoriel $M_{\mathbb{Q}}(\sigma)$ induit par la restriction $\text{Lin} \rightarrow \text{Lin}(\sigma)$ vérifie $\dim(M_{\mathbb{Q}}(\sigma)) = \dim(\text{Lin}(\sigma))$.

Dans ce cas, pour $\sigma \in \Sigma$, σ est une *face rationnelle* de Σ si l'espace $M_{\sigma, \mathbb{Q}}$ induit par $M_{\mathbb{Q}}$ sur Lin_σ est de dimension $|\sigma|$.

Enfin, Σ est dite *fortement rationnelle*, ou simplement *rationnelle*, si toutes ses faces sont rationnelles. \diamond

Notons que la condition $\dim(M_{\mathbb{Q}}(\sigma)) = \dim(\text{Lin}(\sigma))$ pour tout $\sigma \in \Sigma$ est équivalente à demander la même égalité uniquement pour les facettes de Σ .

REMARQUE 2.6. En pratique nous travaillerons surtout avec les structures fortement rationnelles. Nous définissons les structures faiblement rationnelles principalement pour énoncer des conjectures et proposer un cadre pour les résoudre, voir en particulier la conjecture 8.2. \diamond

EXEMPLE 2.7. Soit $\tilde{\Sigma}$ un éventail dans $N_{\mathbb{R}}$ et soit Σ la structure simpliciale induite. La définition ci-dessus est cohérente avec les définitions analogues pour Σ . Notamment, les faces rationnelles pour $\tilde{\Sigma}$ sont les faces rationnelles pour Σ . Le fait d'être faiblement rationnelle signifie pour Σ que toutes les facettes sont incluses dans des espaces linéaires rationnels.

Supposons que Σ soit rationnel. Soit Σ' une subdivision simpliciale de Σ . À toute face σ' de Σ' on peut associer la face minimale de Σ qui contient σ' . Remarquons que $M_{\mathbb{Q}}(\sigma') =$

$M_{\mathbb{Q}}(\sigma)$. Donc, même si la subdivision n'est pas rationnelle, Σ' est tout de même une structure simpliciale linéaire faiblement rationnelle. Cette définition plus souple nous permettra par la suite de considérer des objets comme le tore affine $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\theta\mathbb{Z}$, avec θ un réel générique, qui est naturellement muni d'une structure faiblement rationnelle mais qui n'admet pas de triangulation rationnelle (voir section 8.4). \diamond

Par analogie avec la section 1, pour une structure simpliciale Σ quelconque, on posera $M_{\mathbb{R}} := \text{Lin}$ et $N_{\mathbb{R}} := M_{\mathbb{R}}^*$. Si $\sigma \in \Sigma$, $M_{\sigma, \mathbb{R}}$ désigne Lin_{σ} et $N_{\sigma, \mathbb{R}}$ est son dual, et l'on définit de même $M_{\mathbb{R}}(\sigma)$, $M_{\mathbb{R}}^{\sigma}$, $N_{\mathbb{R}}(\sigma)$ et $N_{\mathbb{R}}^{\sigma}$. Si Σ est faiblement rationnelle et si $\sigma \in \Sigma$, on pose $N_{\mathbb{Q}}(\sigma)$ le dual de $M_{\mathbb{Q}}(\sigma)$ à $M(\sigma)$. Si σ est rationnel dans Σ , on pose $N_{\sigma, \mathbb{Q}}$ le dual de $M_{\sigma, \mathbb{Q}}$. Nous définissons alors $M_{\mathbb{Q}}^{\sigma}$ comme le noyau de la projection $M_{\mathbb{Q}}(\sigma) \rightarrow M_{\sigma, \mathbb{Q}}$ et $N_{\mathbb{Q}}^{\sigma}$ comme son dual.

Convention. Dans les prochaines sections, par souci de compatibilité avec les autres chapitres et pour simplifier, nous utiliserons la notation $M_{\mathbb{R}}$ au lieu de Lin .

2.2. Représentation géométrique. Avec les définitions très générales précédentes, il n'est pas tout à fait clair comment donner un sens aux subdivisions d'une structure simpliciale linéaire Σ . Pour définir cette notion, nous allons définir le support de Σ .

Soit $(\Sigma, \text{Lin}_{\Sigma})$ une structure simpliciale linéaire sur E . On définit la *représentation géométrique* de Σ comme étant l'éventail de \mathbb{R}^E dont les cônes sont $\{\sum_{e \in \sigma} \mathbb{R}_+ e \mid \sigma \in \Sigma\}$. Nous notons $\widehat{\Sigma}$ cet éventail. Le *support* de Σ désigne le support de $\widehat{\Sigma}$ et est noté $|\Sigma|$. On peut aussi associer à chaque face $\sigma \in \Sigma$ son support $|\sigma| \subseteq \Sigma$. N.B., si la structure simpliciale Σ provient d'un éventail, par abus de notation, le support de Σ désignera parfois le support de l'éventail plutôt que le support de $\widehat{\Sigma}$.

On peut vérifier que $\widehat{\Sigma}$ est bien un éventail, et l'éventail abstrait induit est Σ . Notons toutefois que la structure linéaire induite par \mathbb{R}^E sur $\widehat{\Sigma}$ est a priori très différente de celle de Σ . Néanmoins, l'ensemble Lin_{Σ} forme naturellement un sous-espace de $(\mathbb{R}^E)^*$.

Soit $\tilde{\Delta}$ une subdivision simpliciale de $\widehat{\Sigma}$ et soit Δ l'éventail abstrait associé. On peut choisir un élément dit unitaire ϵ_{ρ} pour chaque rayon ρ de $\tilde{\Delta}$. Dans ce cas, par évaluation sur ces éléments, Lin_{Σ} induit naturellement une structure simpliciale linéaire $(\Delta, \text{Lin}_{\Delta})$ sur Δ . On dit que $(\Delta, \text{Lin}_{\Delta})$ est une *subdivision simpliciale*, ou une *triangulation*, de Σ .

2.3. Structures simpliciales affines. Nous voulons maintenant généraliser les complexes simpliciaux. Notons que dans [Car19], Cartwright définit des complexes tropicaux qu'il serait intéressant de comparer à nos définitions.

Soit X un complexe simplicial. Rappelons que si δ est une face de X , alors $\delta = \delta_f + \delta_{\text{rec}}$ où $\delta_f \in X_f$ et $\delta_{\text{rec}} \in X_{\text{rec}}$.

Si E est un ensemble fini, une *structure simpliciale abstraite* X sur E est la donnée d'un éventail simplicial abstrait sur E ainsi que d'une partition de E en deux ensembles, $E = E_{\text{rec}} \sqcup E_f$, avec $E_f \neq \emptyset$, où E_{rec} désigne l'ensemble des *rayons asymptotiques* de E et E_f l'ensemble des *sommets* de E .

La structure X restreinte à E_{rec} est un éventail simplicial abstrait noté X_{rec} et appelé *éventail de récession* de X . Les *faces* de X sont les éléments de l'éventail simplicial abstrait correspondant qui ne sont pas dans X_{rec} . Par abus de notations, on écrit $\delta \in X$ si δ est une face de X . Pour désigner n'importe quel élément de X , face ou cône, nous parlerons simplement d'*élément* de X . Toute face δ de X peut être séparée en une face $\delta_f = \delta \cap X_f$ et un cône de X_{rec} , $\delta_{\text{rec}} := \delta \cap X_{\text{rec}}$. La *partie finie* de X , notée X_f est la restriction de X à E_f . Les faces de X_f correspondent aux faces compactes. X_f peut naturellement être vue comme un complexe simplicial abstrait au sens usuel, et nous dirons que X est *connexe* si X_f l'est. La dimension d'une face δ de X est de nouveau notée $|\delta|$ mais désigne désormais $\text{card}(\delta) - 1$. On note de nouveau X_k l'ensemble des faces de dimension k , et l'on appelle *sommets* les faces de X_0 . Les faces de X_1 incluses dans E_f sont appelées des *arêtes* de X , les autres faces de X_1 sont

appelées *rayons*. On définit comme précédemment la dimension de X , les facettes de X et l'on dit que X est *pure de dimension d* si toutes les facettes ont dimensions d , et si tous les éléments maximaux de X sont des faces, autrement dit, si tous les cônes de X_{rec} sont inclus dans au moins une face de X .

Dans la suite, sauf mention contraire, nous considérerons uniquement des structures simpliciales abstraites pures et connexes.

À partir d'une structure simpliciale abstraite X sur E , on obtient naturellement un éventail abstrait E en oubliant la partition sur E . On note cet éventail $\text{cone}(X)$. Pour toute face δ de X , on définit l'éventail transverse autour de δ par $X^\delta := \text{cone}(X)^\delta$.

REMARQUE 2.8 (Éventail en tant que structure affine). Inversement, si Σ est un éventail simplicial abstrait sur E , on peut considérer la structure simpliciale abstraite X sur $E \sqcup \{O\}$ dont l'unique sommet est O et dont les faces sont de la forme $\sigma + O$ pour tout $\sigma \in \Sigma$. Le plus souvent, une définition concernant les structures simpliciales affines peut ainsi être étendue au cas des structures simpliciales linéaires. Nous nous contenterons donc généralement d'une définition dans le premier cas. \diamond

EXEMPLE 2.9. Considérons un complexe simplicial X dans \mathbb{R}^n . Alors $\text{cone}(X)$, comme défini en section 1.1 induit un éventail simplicial abstrait sur l'ensemble des rayons E de $\text{cone}(X)$. Notons H_0 l'hyperplan $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. Posons E_{rec} l'ensemble des rayons inclus dans H_0 et notons E_f le complémentaire. On obtient alors une structure simpliciale abstraite \widetilde{X} sur E . Les notions de faces et de dimensions pour \widetilde{X} coïncident avec les notions habituelles sur X . De plus, \widetilde{X}_f correspond aux faces compactes, $\widetilde{X}_{\text{rec}}$ est l'éventail abstrait associé à la restriction de $\text{cone}(X)$ à H_0 , et $\text{cone}(\widetilde{X})$ est la version abstraite de $\text{cone}(X)$. \diamond

Nous cherchons maintenant à définir les formes affines aux voisinage de δ . Pour cela, remarquons que ces formes affines peuvent être prolongées comme des formes linéaires sur $\text{St}_\delta(\text{cone}(X))$. Nous munissons l'éventail étoile $\text{St}_\delta(\text{cone}(X))$ d'un espace de formes linéaires, noté $\text{Aff}(\delta)$, pour obtenir une structure simpliciale linéaire $(\text{St}_\delta(\text{cone}(X)), \text{Aff}(\delta))$. Si l'on appelle *fonctions constantes* les fonctions valant une constante a , pour $a \in \mathbb{R}$, sur E_f et 0 sur E_{rec} , on demandera de plus que les restrictions de ces fonctions constantes à St_δ appartiennent à $\text{Aff}(\delta)$.

DÉFINITION 2.10. Une *structure simpliciale affine* est la donnée d'une structure simpliciale abstraite X et, pour chaque face $\delta \in X$, d'un espace de fonctions affines au voisinage de δ noté $\text{Aff}(\delta)$ et défini comme ci-dessus. De plus, on demande que pour toute paire de faces δ, δ' et pour tout élément ζ de X tel que $\zeta < \delta$ et $\zeta < \delta'$,

$$\text{Aff}(\delta)|_{\text{St}_\zeta(\text{cone}(X))} = \text{Aff}(\delta')|_{\text{St}_\zeta(\text{cone}(X))}. \quad \diamond$$

Si X est une structure simpliciale affine, on obtient localement des structures simpliciales linéaires $(X^\delta, \text{Lin}^\delta)$ où $\text{Lin}^\delta = \text{Aff}(\delta)^\delta$ (remarquons que $X^\delta = \text{St}_\delta(\text{cone}(X))^\delta$). On obtient alors une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \text{Lin}^\delta \longrightarrow \text{Aff}(\delta) \longrightarrow \text{Aff}_\delta \longrightarrow 0,$$

où $\text{Aff}_\delta = (\mathbb{R}^\delta)^*$. On définit $\text{Lin}(\delta)$ en quotientant $\text{Aff}(\delta)$ par les fonctions constantes, et l'on obtient une seconde suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \text{Lin}^\delta \longrightarrow \text{Lin}(\delta) \longrightarrow \text{Lin}_\delta \longrightarrow 0,$$

où Lin_δ peut être identifié à $(\text{Lin}^s)_{\delta^s}$ pour n'importe quel sommet $s \in \delta$.

DÉFINITION 2.11. Une *structure simpliciale affine faiblement rationnelle* est la donnée d'une structure simpliciale affine X et, pour chaque face $\delta \in X$, d'un \mathbb{Q} -espace vectoriel $M_{\mathbb{Q}}(\delta) \subset \text{Lin}(\delta)$ tel que $M_{\mathbb{Q}}(\delta) \otimes \mathbb{R} = \text{Lin}(\delta)$. De plus pour chaque paire de faces δ, δ' et pour tout élément ζ tel que $\zeta < \delta$ et $\zeta < \delta'$, les \mathbb{Q} -espaces vectoriels induits par $M_{\mathbb{Q}}(\delta)$ et $M_{\mathbb{Q}}(\delta')$ dans $\text{Lin}(\zeta)$ doivent coïncider. \diamond

Une face δ telle que la restriction de $M_{\mathbb{Q}}(\delta)$ à δ soit de dimension $|\delta|$ est appelée *rationnelle*. Dans ce cas, on peut définir $M_{\delta, \mathbb{Q}}$, ainsi que $M_{\mathbb{Q}}^{\delta}$, comme précédemment. Pour les faces quelconques $\delta \in X$, on peut de même définir $M_{\delta, \mathbb{R}}$, $M_{\mathbb{R}}(\delta)$ et $M_{\mathbb{R}}^{\delta}$. On définit aussi les espaces duaux correspondants $N_{\delta, \mathbb{R}}$, etc. Toutes les définitions précédentes s'étendent à tous les éléments de X . Une structure simpliciale affine faiblement rationnelle est dite (*fortement*) *rationnelle* si toutes ses faces sont rationnelles.

EXEMPLE 2.12 (Éventail en tant que structure affine, suite). Poursuivons la remarque 2.8. Si (Σ, Lin) est une structure simpliciale linéaire sur E , alors en prolongeant Lin sur $E \sqcup \{O\}$ par 0 sur O et en ajoutant la fonction constante qui vaut 1 sur O et 0 ailleurs, on obtient un espace de fonctions affines Aff sur la structure simpliciale abstraite sur $E \sqcup \{O\}$. On note la structure simpliciale affine obtenue $\text{aff}(\Sigma)$.

Convention. Par abus de notation, on identifie Σ et $\text{aff}(\Sigma)$. Cela nous permet de prendre en compte les structures simpliciales linéaires dans les définitions concernant les structures simpliciales affines. Notamment, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, les faces de $\text{aff}(\Sigma)$ sont notées σ au lieu de $\sigma + O$, Σ_{rec} désigne $\text{aff}(\Sigma)_{\text{rec}} = \Sigma$, etc. Remarquons notamment que les notations sont cohérentes dans le sens où $\text{Lin}(\sigma)$ dans Σ est égal à $\text{Lin}(\sigma + O)$ dans $\text{aff}(\Sigma)$, et idem pour la partie transverse et la partie restreinte. \diamond

EXEMPLE 2.13. Poursuivons l'exemple du complexe simplicial de $N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$, exemple 2.9. Pour obtenir une structure affine, il faut d'abord choisir des vecteurs unitaires pour chaque rayon de $\text{cone}(X)$. Pour les rayons $\rho \in E_f$, on prend naturellement le vecteur \mathbf{e}_{ρ} comme étant l'unique point de $\rho \cap H_1$. Pour les autres rayons $\rho \in E_{\text{rec}}$, on choisit arbitrairement des vecteurs \mathbf{e}_{ρ} . Les fonctions affines sur X induisent naturellement des formes linéaires sur $\text{cone}(X)$. À chaque face δ de X correspond un cône $\text{cone}(\delta)$ que l'on note σ . On définit alors $\text{Aff}(\delta)$ en restreignant l'espace des formes linéaires de $\text{cone}(X)$ à $\text{St}_{\sigma}(\text{cone}(X))$. On obtient bien une structure simpliciale affine. De plus, cette structure a la particularité que chaque fonction affine locale est la restriction d'une fonction affine globale : elle est issue d'une structure simpliciale linéaire au sens de la définition 2.14 ci-dessous. Dans l'exemple 2.15, nous verrons que ce n'est pas toujours le cas.

Si le complexe simplicial X est rationnel, alors $M_{\mathbb{Q}}$ induit naturellement une structure rationnelle sur $\text{cone}(X)$ et donc sur \widetilde{X} . On obtient même une structure entière induite par M . Les subdivisions simpliciales quelconques de X induiront alors des structures faiblement rationnelles, ou faiblement entières (voir remarque 2.16). \diamond

DÉFINITION 2.14. Soit X une structure simpliciale affine. On dit que X est issue d'une structure simpliciale linéaire si l'on peut munir $\text{cone}(X)$ d'un espace de formes linéaires Lin' tel que $\text{Aff}(\delta)$ soit égal à $\text{Lin}'(\delta)$ pour tout $\delta \in X$. On demande de plus qu'il existe un élément de Lin' qui vaut 1 sur les éléments de E_f et 0 sur les éléments de E_{rec} . \diamond

Nous verrons en section 7 qu'il est plus facile d'établir une théorie de Hodge sur ces structures.

EXEMPLE 2.15. Le cercle affine $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est naturellement muni d'une structure affine. Pour obtenir un complexe simplicial, on peut par exemple le couper en trois sommets, $s_1 = 0$, $s_2 = \pi$ et $s_3 = 3\pi/2$, et l'on obtient les trois segments correspondants. La structure affine naturelle autour de s_1 , par exemple, est donnée par l'espace $\text{Aff}(s_1) \subset (\mathbb{R}^{\{s_1, s_2, s_3\}})^*$ des fonctions f telles que $f(s_1) = \frac{2}{3}f(s_3) + \frac{1}{3}f(s_2)$. Néanmoins, les seules fonctions affines globales sont les constantes. Le cercle affine n'est pas issue d'une structure simpliciale linéaire.

Pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, Lin^{s_i} peut être naturellement identifié avec le dual \mathbb{R}^* de \mathbb{R} . Si l'on veut obtenir une structure rationnelle, la manière naturelle de procéder est de considérer le réseau $M_{\mathbb{Q}}^{s_i} \simeq \mathbb{Q}^* \subseteq \text{Lin}^{s_i}$. Notons que les fonctions de $\text{Aff}(s_i)$ provenant de M^{s_i} prennent des valeurs non rationnelles sur les sommets adjacents (essentiellement parce que les longueurs des segments sont irrationnelles). \diamond

REMARQUE 2.16 (Structures entières). En général, les variétés tropicales triangulées sont non seulement munies d'une structure faiblement rationnelle, mais aussi d'une structure faiblement entière. Toutefois, il n'est pas clair quelle est la bonne définition pour une structure simpliciale affine entière. Pour définir la cohomologie tropicale, il suffit de se donner des réseaux de rang maximaux $M(\eta) \subseteq \text{Lin}(\eta)$ pour chaque facette η de X . La question est alors de savoir quelles sont les conditions de compatibilité à demander. Il faudrait par exemple que les $M_{\mathbb{Q}}(\eta) := M(\eta) \otimes \mathbb{Q}$ soient induits par une structure faiblement rationnelle.

Une première définition naturelle qui se rapproche du travail de Gross et Shokrieh [GS19b] serait de choisir des réseaux $M(\delta) \subseteq \text{Lin}(\delta)$ pour chaque face δ de manière compatible. Cette façon de faire, combinée avec une définition légèrement différente de la cohomologie tropicale à coefficients entiers que celle que nous proposons au chapitre 2, permet d'obtenir des résultats plus élégants (voir le commentaire sous le théorème 1.3 du chapitre 2). Toutefois, cette définition ne dépend pas uniquement du support de la variété, dans le sens où connaître le réseau $N_{\eta} = M_{\eta}^*$ sur les facettes η ne suffit pas en général pour connaître la variété.

Si l'on souhaite au contraire une définition qui ne dépend que du support, une possibilité est de choisir des réseaux de rangs maximaux $M(\sigma)$ pour chaque face σ tels que $M(\sigma) = \sum_{\eta > \sigma} M(\eta)$ et que, pour chaque $\eta > \sigma$, $M(\eta)$ soit la restriction de $M(\sigma)$ à $M_{\mathbb{R}}(\eta)$.

Dans tous les cas, ces définitions induisent la même structure faiblement rationnelle, et généralement l'étude du cadre rationnel, voire réel, suffit pour la plupart des applications. Dans ce chapitre, pour éviter une gestion délicate de la torsion, nous nous contenterons donc d'étudier les cas réelles et rationnelles. Toutefois le chapitre 2 propose une étude du cas entier pour les éventails simpliciaux. \diamond

On étend la notion de représentation géométrique aux structures simpliciales affines de la façon suivante. On considère la représentation géométrique de $\text{cone}(X)$ dans \mathbb{R}^E . Soit $(x_e)_{e \in E}$ le système de coordonnées correspondant. Soit H_1 l'hyperplan affine défini par $\sum_{e \in E_f} x_e = 1$. Alors la *représentation géométrique de X* est par définition le complexe simplicial obtenu en intersectant H_1 avec $\text{cone}(X)$. Notons-la \widehat{X} . Le *support de X* , noté $|X|$, est le support de ce complexe simplicial. Chaque face $\delta \in X$ a son support $|\delta| \subseteq |X|$.

Si Σ est une subdivision simpliciale de $\text{cone}(X)$, alors Σ induit un sous-complexe simplicial \widetilde{Y} de \widehat{X} . On note Y la structure simpliciale abstraite associée. Il faut ensuite choisir des vecteurs unitaires pour chaque rayon de \widetilde{Y} . Maintenant, à chaque face $\delta \in Y$ on peut associer une face minimale η de X telle que le support de δ dans \widetilde{Y} soit inclus dans $|\eta|$. Les fonctions affines $\text{Aff}_X(\eta)$ induisent alors naturellement un espace de fonctions affines $\text{Aff}_Y(\delta)$ au voisinage de δ . On obtient ainsi une structure simpliciale affine sur Y , et on dit que Y est une *subdivision simpliciale de X* .

2.4. Fonctions linéaires par morceaux.

2.4.1. *Définition.* Commençons par le cas d'un complexe simplicial.

EXEMPLE 2.17. Soit X un complexe simplicial dans \mathbb{R}^n . On peut étudier les fonctions continues $f : |X| \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont affines sur chaque face. Cela revient à se donner une valeur sur chaque sommet et une pente de manière cohérente sur chaque rayon infini. En fait, pour forcer la cohérence et obtenir une fonction intéressante, on va supposer que le pseudo-éventail de récession X_{rec} est un éventail de récession et que f induit naturellement une fonction linéaire par cône f_{rec} sur chaque cône de X_{rec} . Voir chapitre 3 section 4 pour plus de détail.

Si de plus $f_{\text{rec}} = 0$ alors f s'étend naturellement sur la compactification canonique \overline{X} . \diamond

Soit X une structure simpliciale affine sur E . Une *fonction affine par morceaux sur X* désigne n'importe quelle fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Dans le cas où X est de la forme $\text{aff}(\Sigma)$ avec Σ une structure simpliciale linéaire, nous parlerons de *fonction linéaire par morceaux sur X* si de plus f est nulle sur l'unique sommet de X . Dans les deux cas, ces fonctions forment un

\mathbb{R} -espace vectoriel. La restriction de f à E_{rec} définit une fonction linéaire par morceaux sur X_{rec} notée f_{rec} . De même, la restriction de f à E_f induit une fonction affine par morceaux sur X_f notée f_f .

Si f_{rec} est nulle, alors f s'étend naturellement sur la compactification canonique \bar{X} de X en une fonction $\bar{f} : \bar{X}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ en envoyant $(\sigma + s)^\sigma$ sur $f(s)$ pour tout sommet $s \in X_{f,1}$ et tout cône $\sigma \in X_{\text{rec}}$ comparable à s . Les fonctions de la forme \bar{f} comme ci-dessus sont appelées les *fonctions affines par morceaux sur \bar{X}* .

2.4.2. *Convexité.* De nouveau, guidons notre intuition par un exemple.

EXEMPLE 2.18. En général, une fonction $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il existe une forme affine $\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f - \ell$ est nulle sur x et positive autour de x . L'ensemble des fonctions convexes forme un cône, et les éléments dans l'intérieur relatif de ce cône sont appelés strictement convexes. On peut restreindre cette définition à un support plus petit, par exemple à un espace polyédral. On obtient alors la définition suivante.

Si X est un complexe simplicial, on dit qu'une fonction affine par morceaux f est *convexe*, resp. *strictement convexe*, si pour toute face $\delta \in X$, il existe une forme affine ℓ telle que $f - \ell$ soit nulle sur $|\delta|$ et positive, resp. strictement positive, sur un voisinage de l'intérieur relatif de δ dans $|X|$. \diamond

Soit f est une fonction affine par morceaux sur X . Soit δ une face de X . La fonction f induit naturellement une fonction affine par morceaux sur l'éventail étoile $\text{St}_\delta(X)$. Notons cette fonction f_δ . On peut lui soustraire n'importe quelle fonction affine $\ell \in \text{Aff}(\delta)$. On dit que f est *convexe autour de δ* , resp. *strictement convexe autour de δ* , s'il existe $\ell \in \text{Aff}(\delta)$ telle que $f_\delta - \ell$ est nulle sur δ et positive, resp. strictement positive, sur $(\text{St}_\delta(X))_1 \setminus \delta$. On dit que f est *convexe*, resp. *strictement convexe*, si elle l'est autour de chaque face.

On dit que X est *quasi-projective* si X admet une fonction strictement convexe. La compactification canonique \bar{X} est alors dite *projective*.

REMARQUE 2.19. Dans le cas où Σ est un éventail simplicial rationnel de \mathbb{R}^n , alors la structure simpliciale linéaire associée à Σ est quasi-projective si et seulement si $\mathbb{C}\mathbb{P}_\Sigma$ est quasi-projectif. L'article [GM12] explicite le lien entre la convexité des fonctions sur Σ et les propriétés des diviseurs associés sur $\mathbb{C}\mathbb{P}_\Sigma$. \diamond

QUESTION 2.20. Soit X un complexe simplicial dans \mathbb{R}^n dont la structure simpliciale affine associée est quasi-projective. Peut-on plonger X dans un espace projectif $\mathbb{T}\mathbb{P}^n$ telle que l'adhérence de l'image soit isomorphe à \bar{X} ? \diamond

2.5. Compactification canonique revisitée. Soit X une structure simpliciale. On note \bar{X} et on appelle *compactification canonique* de X le complexe polyédral abstrait dont les faces sont les couples (σ, δ) où σ est un cône de X_{rec} et δ est une face de X contenant σ . On note un tel élément δ^σ , ou parfois δ_∞^σ pour éviter de confondre avec les éléments de X_{rec}^σ . Un tel couple est appelé une *face* de \bar{X} , et σ est appelé la *sédentarité* de cette face et est noté $\text{sed}(\delta^\sigma)$. Par abus de langage, on appelle aussi *sédentarité* la dimension de $\text{sed}(\delta^\sigma)$. La *dimension* de δ^σ est $|\delta^\sigma| = \text{card}(\delta) - \text{card}(\sigma) - 1$. Toujours par notre convention, nous utiliserons la notation $\eta \in \bar{X}$ pour signifier que η est une face de \bar{X} . En ajoutant un élément minimal $\mathbf{0}$ et un élément maximal $\mathbf{1}$, les faces de \bar{X} forment un treillis où $\gamma^\sigma < \delta^\tau$ si $\gamma < \delta$ et $\sigma > \tau$. Notons que \bar{X} n'est pas simplicial en général (voir section 1.8).

Pour chaque cône $\sigma \in X_{\text{rec}}$, l'ensemble des faces de \bar{X} de la forme δ^σ forme naturellement les faces d'une structure simpliciale que l'on note X_∞^σ (notamment $X_\infty^{\mathbf{0}} = X$). L'éventail de récession associé $X_{\infty, \text{rec}}^\sigma$ est isomorphe à $(X_{\text{rec}})^\sigma$. Sa compactification \bar{X}_∞^σ peut être vue comme incluse dans \bar{X} : les faces correspondantes sont celles de la forme δ^η pour $\eta > \sigma$. Les structures X_∞^σ pour $\sigma \in X_{\text{rec}}$ sont appelées les *strates divisorielles ouvertes* de \bar{X} et forment une partition de \bar{X} . Les éléments \bar{X}_∞^σ seront appelés les *strates divisorielles fermées*. Pour justifier cette

dénomination, si $\rho \in X_{\text{rec}}$ est un rayon et si X est associée à une variété tropicale, la strate \overline{X}_∞^ρ est un diviseur tropical de \overline{X} (lié au diviseur de $\mathbb{C}\mathbb{P}_{X_{\text{rec}}}$ associé au rayon ρ).

DÉFINITION 2.21. Si X est une structure simpliciale affine, la *compactification canonique* \overline{X} de X est la compactification de la structure simpliciale sous-jacente munie des espaces affines $\text{Aff}(\delta^\sigma) = \text{Aff}(\delta)^\sigma$.

La compactification canonique \overline{X} de X est dite *faiblement rationnelle*, resp. *rationnelle*, si X est faiblement rationnelle, resp. rationnelle, et si X_{rec} est rationnelle. \diamond

On aura donc $\text{Lin}^{\delta^\sigma} = \text{Lin}^\delta$, $\text{Lin}(\delta^\sigma) = \text{Lin}(\delta)^\sigma$, où l'on voit σ comme un cône de $\text{St}_\delta(X)$, et $\text{Lin}_{\delta^\sigma} = \text{Lin}_\delta^\sigma$.

En particulier, si $\gamma^\sigma < \delta^\tau$ sont deux faces de \overline{X} , on a une flèche naturelle $\text{Lin}(\gamma^\sigma) \rightarrow \text{Lin}(\delta^\tau)$. Celle-ci est obtenue en composant l'inclusion $\text{Lin}(\gamma^\sigma) \hookrightarrow \text{Lin}(\gamma^\tau)$ et la restriction $\text{Lin}(\gamma^\tau) \rightarrow \text{Lin}(\delta^\tau)$.

À propos de la rationalité, on doit exiger que X_{rec} soit fortement rationnelle pour que les strates à l'infini soient elles-mêmes rationnelles. Ainsi, si \overline{X} est faiblement rationnelle, resp. rationnelle, alors \overline{X}^σ est faiblement rationnelle, resp. rationnelle, pour tout cône $\sigma \in X_{\text{rec}}$.

EXEMPLE 2.22 (Éventail en tant que structure affine, suite et fin). Par notre convention de l'exemple 2.13, on peut considérer qu'une structure linéaire Σ est une structure affine. Notamment sa compactification canonique $\overline{\Sigma}$ a un sens. Ses faces sont σ_∞^τ pour $\tau < \sigma$ (ici l'indice ∞ est particulièrement important) et la structure linéaire associée est $\text{Lin}(\sigma_\infty^\tau) = \text{Lin}(\sigma)^\tau$. N.B., $|\sigma_\infty^\tau| = |\sigma| - |\tau|$, de plus on note parfois ∞_σ au lieu de σ_∞^σ pour les sommets. \diamond

La *représentation géométrique de \overline{X}* est simplement l'adhérence de la représentation géométrique de X dans $\mathbb{R}^{E_f} \times \mathbb{T}^{E_{\text{rec}}}$ (ou de manière équivalente dans \mathbb{T}^E). La topologie sur \mathbb{T} est celle induite par \mathbb{R} et par les voisinages ouverts de l'infini $]a; \infty]$, pour $a \in \mathbb{R}$. On munit $|\overline{X}|$ de la topologie induite par la topologie produit sur \mathbb{T}^E .

Si X' est une subdivision de X telle que $X'_{\text{rec}} = X_{\text{rec}}$, alors on appelle \overline{X}' une *subdivision de \overline{X}* .

EXEMPLE 2.23. Si X est issue d'un complexe polyédral \widetilde{X} de \mathbb{R}^n , alors il existe un homéomorphisme entre le support $|X|$ de X et le support de \widetilde{X} qui est compatible avec le support des faces. Dans 1.8, nous avons vu comment construire directement la compactification canonique de \widetilde{X} , et l'homéomorphisme se prolonge alors sur les compactifications respectives. Dans ce cadre-là, nous identifierons naturellement le support de X avec celui de \widetilde{X} . \diamond

REMARQUE 2.24. Nous considérerons souvent des sous-structures d'une compactification canoniques qui ne sont pas à proprement parler des structures simpliciales affines, voir l'exemple 2.25 ci-dessous. On pourra facilement étendre certaines définitions à ce cadre, par exemple la cohomologie tropicale fait sens pour ces sous-structures. \diamond

EXEMPLE 2.25. On peut considérer la structure simpliciale affine induite par le complexe polyédral sur \mathbb{R} constitué de trois faces : $\{0\}$, \mathbb{R}_- et \mathbb{R}_+ . La compactification canonique peut être vue comme un complexe polyédral étendu sur $[-\infty, +\infty]$. On peut alors considérer le sous-complexe induit sur $] -\infty, +\infty]$, que l'on peut qualifier de structure simpliciale affine naturelle sur \mathbb{T} . \diamond

3. Cohomologie tropicale, dualité de Poincaré et lissité

Rappelons que, par convention, nous remplaçons désormais Lin par $M_{\mathbb{R}}$, et de même pour toutes les formes dérivées.

L'homologie tropicale a été introduite par Itenberg, Katzarkov, Mikhalkin et Zharkov dans [IKMZ19] pour retrouver les nombres de Hodge d'une fibre générale d'une famille de variétés complexes à partir de sa limite tropicale. Nous reviendrons en section 3.8 sur les

résultats de cet article en proposant une justification pour la définition ci-dessous qui est peu naturelle a priori.

3.1. Éléments canoniques et orientation. Soit X une structure simpliciale affine (ou linéaire). Si $\gamma \prec \delta$, on note $\mathbf{n}_{\delta/\gamma}$ et on appelle *vecteur canonique de δ normal à γ* tout vecteur de $N_{\delta, \mathbb{R}}$ tel que pour tout $\ell \in M_{\mathbb{R}}^{\gamma}$, la valeur de ℓ sur la projection de $\mathbf{n}_{\delta/\gamma}$ vaut $\ell(\delta^{\gamma})$. Dans le cas où δ est représentée par un simplexe, $\mathbf{n}_{\delta/\gamma}$ peut par exemple être n'importe quel vecteur d'origine un point de γ et d'extrémité le sommet de δ qui n'est pas dans γ .

Si e est une arête de X et si v_1, v_2 sont les extrémités de e , alors $\mathbf{n}_{e/v_1} = -\mathbf{n}_{e/v_2}$. On choisit arbitrairement l'un de ces deux vecteurs que l'on note ν_e . Si $\rho \in X_1$ est un rayon, on pose $\nu_{\rho} := \mathbf{n}_{\rho/v}$ où v est l'extrémité du rayon. Plus généralement, si δ est une face de X et si s est un sommet de δ , on pose $\nu_{\delta} \in \bigwedge^{|\delta|}(N_{\delta, \mathbb{R}})$ égal à $\pm \bigwedge_e \nu_e$ où e parcourt les arêtes de δ contenant s . Ce multi-vecteur est bien défini modulo un signe, on choisit ce signe arbitrairement. De plus, si $\delta = s$ est un sommet, on prend $\nu_s = 1 \in \bigwedge^0 N_{s, \mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}$. On appelle ν_{δ} le *multi-vecteur canonique de δ* . On note $\omega_{\delta} \in \bigwedge^{|\delta|} M_{\delta, \mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}$ le dual de ν_{δ} , que l'on appelle la *forme canonique de δ* .

REMARQUE 3.1. Dans les chapitres 2, 3 et 4, ν_{δ} et $\mathbf{n}_{\delta/\gamma}$ désignent en fait des multiples des définitions données ci-dessus pour qu'ils deviennent unitaires pour le réseau sous-jacent. Dans le cas d'une triangulation unimodulaire, les deux définitions coïncident. \diamond

En notant $\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, +1\}$ la fonction associant à chaque nombre son signe, on peut définir $\text{sign}_{\delta} := \text{sign} \circ \omega_{\delta}$. La donnée $(\text{sign}_{\delta})_{\delta \in X}$ définit une *orientation* sur X . Pour toute paire $\gamma \prec \delta$, on définit alors le signe

$$\text{sign}(\gamma, \delta) := \text{sign}_{\delta}(\mathbf{n}_{\delta/\gamma} \wedge \nu_{\gamma}).$$

Ces signes ne dépendent pas du choix précis des ν_{δ} mais seulement de l'orientation. Dans la suite, on supposera toujours que les structures simpliciales affines sont munies de multi-vecteurs canoniques, des formes canoniques correspondantes et de l'orientation correspondante.

On étend ces définitions de manière naturelle à \bar{X} , c'est-à-dire que pour tout $\delta \in X$ et pour toute paire $\tau \prec \sigma$ dans X_{rec} avec $\sigma \prec \delta$, on prend $\nu_{\delta\sigma}$ égal à la projection de $\nu_{\delta \setminus \sigma}$ dans $N_{\delta, \mathbb{R}}^{\sigma} = N_{\delta\sigma, \mathbb{R}}$, et l'on pose $\mathbf{n}_{\delta\tau/\delta\sigma}$ égal à la projection de $-\mathbf{n}_{\delta \setminus \tau / \delta \setminus \sigma}$ dans $N_{\delta, \mathbb{R}}$.

Toutes ces notions induisent des éléments naturels sur les structures transverses. À la face $\delta^{\gamma} \in \Sigma^{\gamma}$ on associe $\nu_{\delta}^{\gamma} \in \bigwedge^{|\delta| - |\gamma|} N_{\delta, \mathbb{R}}^{\gamma}$ comme la projection de n'importe quel multi-vecteur \mathbf{v} de δ tel que $\nu_{\gamma} \wedge \mathbf{v} = \nu_{\delta}$. La définition ne dépend pas du choix de ce multi-vecteur.

REMARQUE 3.2 (Cas rationnel). Soit X est une structure simpliciale rationnelle de dimension au moins deux. Supposons que pour toute paire de faces τ, τ' dans X_1 , il existe une suite de faces τ_0, \dots, τ_s dans X_1 telle que $\tau_0 = \tau$, $\tau_s = \tau'$ et $\tau_i \vee \tau_{i+1} \in X_2$. C'est le cas dans la plupart des exemples intéressants, par exemple si X est irréductible et orientable comme définie en section 3.4. Soit $\sigma \in X_2$ et $\tau \prec \sigma$. On peut trouver un facteur λ non nul tel que $\lambda \nu_{\tau}$ soit rationnel. On peut alors montrer que pour tout $\tau' \prec \sigma$, $\lambda \nu_{\tau'}$ est rationnel. De proche en proche, on en déduit que tous les $\lambda \nu_{\tau''}$ pour $\tau'' \in X_1$ sont rationnels. Quitte à effectuer une homothétie de rapport λ , on peut donc supposer que tous les multi-vecteurs canoniques sont rationnels. \diamond

3.2. Homologie et cohomologie tropicales. Soit Z une structure simpliciale affine de dimension d ou sa compactification canonique. Soit δ une face de Z . Soit $\mathbb{k} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$ (pour $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$, on suppose Z faiblement rationnelle). Pour tout $p \in \{0, \dots, d\}$, on pose

$$\mathbf{F}_p(\delta, \mathbb{k}) := \sum_{\eta \succ \delta} \bigwedge^p N_{\eta, \mathbb{k}} \subseteq \bigwedge^p N_{\mathbb{k}}(\delta), \quad \text{et} \quad \mathbf{F}^p(\delta) = \mathbf{F}_p(\delta)^{\star}.$$

Pour plus d'information sur l'origine de cette définition, nous renvoyons le lecteur à la section 3.8. Pour toute paire $\gamma < \delta$, l'inclusion $N_{\mathbb{k}}(\gamma) \rightarrow N_{\mathbb{k}}(\delta)$ induit naturellement une application $\partial_{\delta > \gamma} : \mathbf{F}_p(\delta, \mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{F}_p(\gamma, \mathbb{k})$ et l'application duale $d^{\gamma < \delta} : \mathbf{F}^p(\gamma, \mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{F}^p(\delta, \mathbb{k})$.

On définit, pour toute paire d'entiers p et q ,

$$C_{p,q}(Z, \mathbb{k}) := \bigoplus_{\substack{\delta \in Z_q \\ \delta \text{ compact}}} \mathbf{F}_p(\delta, \mathbb{k}).$$

Si $\delta \in Z_q$ et si $\mathbf{v} \in \mathbf{F}_p(\delta, \mathbb{k})$, nous noterons (δ, \mathbf{v}) l'élément de $C_{p,q}(Z, \mathbb{k})$ qui vaut \mathbf{v} sur la face δ et zéro ailleurs.

On obtient un complexe de chaînes

$$C_{p,\bullet}(Z, \mathbb{k}) : \quad \cdots \longrightarrow C_{p,q+1}(Z, \mathbb{k}) \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_{p,q}(Z, \mathbb{k}) \xrightarrow{\partial_q} C_{p,q-1}(Z, \mathbb{k}) \longrightarrow \cdots$$

où les différentielles sont définies de manière habituelle en envoyant (δ, \mathbf{v}) , avec $\delta \in Z_q$ et $\mathbf{v} \in \mathbf{F}_p(\delta, \mathbb{k})$, sur

$$\sum_{\gamma < \delta} \text{sign}(\gamma, \delta)(\gamma, \partial_{\delta > \gamma} \mathbf{v}) \in C_{p,q-1}(Z, \mathbb{k}).$$

On obtient alors l'*homologie tropicale à coefficients dans \mathbb{k}* en posant

$$H_{p,q}(Z, \mathbb{k}) := \frac{\ker(\partial_q : C_{p,q}(Z, \mathbb{k}) \longrightarrow C_{p,q-1}(Z, \mathbb{k}))}{\text{Im}((\partial_{q+1} : C_{p,q+1}(Z, \mathbb{k}) \longrightarrow C_{p,q}(Z, \mathbb{k}))}.$$

On peut définir de la même manière l'*homologie de Borel-Moore tropicale de Z à coefficient dans \mathbb{k}* , $H_{p,q}^{\text{BM}}(Z, \mathbb{k})$, à partir des groupes de chaînes suivants :

$$C_{p,q}^{\text{BM}}(Z, \mathbb{k}) := \bigoplus_{\delta \in Z_q} \mathbf{F}_p(\delta, \mathbb{k}),$$

où cette fois-ci l'on n'exige plus la compacité des faces concernées.

On définit ensuite les notions duales. On pose

$$C^{p,q}(Z, \mathbb{k}) := C_{p,q}(Z, \mathbb{k})^* \simeq \bigoplus_{\substack{\delta \in Z_q \\ \delta \text{ compact}}} \mathbf{F}^p(\delta, \mathbb{k}),$$

et l'on obtient le complexe de cochaînes dual au complexe de chaînes $C_{p,\bullet}$,

$$C^{p,\bullet}(Z, \mathbb{k}) : \quad \cdots \longrightarrow C^{p,q-1}(Z, \mathbb{k}) \xrightarrow{d^{q-1}} C^{p,q}(Z, \mathbb{k}) \xrightarrow{d^q} C^{p,q+1}(Z, \mathbb{k}) \longrightarrow \cdots$$

On définit alors la *cohomologie tropicale de Z à coefficients dans \mathbb{k}* , notée $H^{p,q}(Z, \mathbb{k})$, comme étant la cohomologie de ce complexe de cochaînes. Notamment on obtient $H^{p,q}(Z, \mathbb{k}) \simeq H_{p,q}(Z, \mathbb{k})^*$ car ici \mathbb{k} est un corps, donc il n'y a pas de torsion.

De même, le dual de $C_{p,q}^{\text{BM}}(Z, \mathbb{k})$ est noté $C_c^{p,q}(Z, \mathbb{k})$. La cohomologie associée est appelée la *cohomologie tropicale à support compact de Z à coefficients dans \mathbb{k}* , et est notée $H_c^{p,q}(Z, \mathbb{k})$. On obtient un isomorphisme $H_c^{p,q}(Z, \mathbb{k}) \simeq H_{p,q}^{\text{BM}}(Z, \mathbb{k})^*$.

On définit de plus le $k^{\text{ème}}$ groupe d'*homologie tropicale* par

$$H_k(Z, \mathbb{k}) := \bigoplus_{p+q=k} H_{p,q}(Z, \mathbb{k}),$$

et l'on définit $H_k^{\text{BM}}(Z, \mathbb{k})$, $H^k(Z, \mathbb{k})$ et $H_c^k(Z, \mathbb{k})$ de manière similaire. Ces dernières définitions amène une question naturelle.

QUESTION 3.3. Existe-t-il une définition intrinsèque du $k^{\text{ème}}$ groupe d'homologie tropical sans passer par l'homologie bigraduée ? \diamond

Notons que si Z est une compactification canonique, alors trivialement $H_{\bullet,\bullet}^{\text{BM}}(Z, \mathbb{k}) \simeq H_{\bullet,\bullet}(Z, \mathbb{k})$ et $H_c^{\bullet,\bullet}(Z, \mathbb{k}) \simeq H^{\bullet,\bullet}(Z, \mathbb{k})$.

REMARQUE 3.4. Si Z est faiblement rationnel, remarquons que, par le théorème des coefficients universels, $H^{p,q}(Z, \mathbb{R}) \simeq H^{p,q}(Z, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R}$, et de même pour la cohomologie à support compact et pour les deux versions d'homologie. \diamond

Convention. Dans la suite, nous poserons \mathbb{k} égal à \mathbb{R} ou \mathbb{Q} et nous omettrons de préciser le corps \mathbb{k} utilisé pour calculer la cohomologie. Dans le cas $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$, nous supposons que les objets concernés sont *fortement* rationnels. En effet, bien que certaines définitions s'étendent directement au cas faiblement rationnel, pour d'autres cela est moins évident. Nous ferons parfois quelques commentaires sur le cas faiblement rationnel.

3.3. Définitions alternatives. Bien que l'on étudie des cohomologies simpliciales dont les coefficients dépendent de la face, on peut, comme pour la cohomologie classique, calculer les mêmes groupes de cohomologie grâce à de nombreuses versions différentes.

Comme expliqué plus tôt, l'homologie tropicale, plus précisément la version cellulaire, a été introduite dans [IKMZ19]. Une étude plus générale de la cohomologie tropicale, notamment l'équivalence entre la version cellulaire et des versions singulières et faisceautiques, a été décrite par la suite dans [MZ14]. Pour étudier la dualité de Poincaré, les versions compactes et de Borel-Moore sont introduites dans [JSS19] et [JRS18]. Dans [JSS19] est aussi introduite la cohomologie de Dolbeault tropicale, qui ressemble beaucoup à la cohomologie de Dolbeault classique, c'est-à-dire à une version complexe de la cohomologie de de Rham. C'est probablement la version qui peut paraître la plus naturelle pour une personne familière de la théorie de Hodge classique. Elle s'appuie sur une définition similaire pour les espaces de Berkovich [CLD12, Jel16a, Jel16b, Liu20].

Nous n'utiliserons que la version cellulaire décrite ci-dessus dans la suite de ce chapitre. Toutefois, nous décrivons la version faisceautique ci-dessous. Celle-ci a été particulièrement fouillée dans [GS19b]. L'existence d'une version faisceautique nous est utile car elle montre que la cohomologie ne dépend que du support.

Un *ouvert basique* de $|Z|$ est un ouvert connexe U tel qu'il existe une face $\gamma \in Z$, appelée *face minimale* de U , avec $U \cap |\gamma|$ connexe et telle que U inclus dans l'union des intérieurs (relatifs) des $|\eta|$ pour $\eta > \gamma$. Ces ouverts forment une base pour la topologie sur Z .

On définit le faisceau $\mathcal{F}_{Z,\mathbb{k}}^p$ en posant $\mathcal{F}_{Z,\mathbb{k}}^p(U) = \mathbf{F}^p(\gamma)$ pour n'importe quel ouvert basique U de face minimale γ . Cela définit bien de manière unique un faisceau sur Z .

THÉORÈME 3.5. *Pour tout entier p, q , on a*

$$H^q(|Z|, \mathcal{F}_{Z,\mathbb{k}}^p) \simeq H^{p,q}(Z, \mathbb{k}) \quad \text{et} \quad H_c^q(|Z|, \mathcal{F}_{Z,\mathbb{k}}^p) \simeq H_c^{p,q}(Z, \mathbb{k}).$$

DÉMONSTRATION. Le faisceau $\mathcal{F}_{Z,\mathbb{k}}^p$ est un faisceau constructible stratifié par les supports $|Z_{\leq k}|$ pour $k \geq 0$. On peut calculer sa cohomologie via le faisceau cellulaire correspondant (voir [She85]), qui est exactement la cohomologie tropicale définie plus haut. Nous renvoyons à [She85, Cur14] pour la théorie générale des faisceaux cellulaires ou simpliciaux et à [MZ14, JSS19, JRS18] pour le cas particulier de la cohomologie tropicale. \square

REMARQUE 3.6. Du point de vue de la cohomologie de Dolbeault tropicale, le faisceau $\mathcal{F}_{Z,\mathbb{k}}^p$ est l'analogue tropical du faisceau des p -formes holomorphes d'une variété complexes : c'est le noyau pour les $(p, 0)$ -formes lisses de la différentielle anti-holomorphe tropicale. Ainsi, $H^q(|Z|, \mathcal{F}_{Z,\mathbb{k}}^p)$ est bien l'analogue du groupe de cohomologie de Dolbeault classique de bidegré (p, q) . \diamond

COROLLAIRE 3.7. *Soit X une structure simpliciale affine. Si X' est une subdivision simpliciale de X , alors $H^{\bullet,\bullet}(X, \mathbb{k}) \simeq H^{\bullet,\bullet}(X', \mathbb{k})$ et $H_c^{\bullet,\bullet}(X, \mathbb{k}) \simeq H_c^{\bullet,\bullet}(X', \mathbb{k})$. De plus, si $X'_{\text{rec}} = X_{\text{rec}}$, alors $H^{\bullet,\bullet}(\bar{X}, \mathbb{k}) \simeq H^{\bullet,\bullet}(\bar{X}', \mathbb{k})$. \square*

Le cadre des structures simpliciales affines est assez général. Toutefois, il n'est pas clair qu'il contient par exemple les variétés tropicales lisses au sens de [JSS19].

QUESTION 3.8. Soit \mathcal{Z} un espace polyédral compact au sens de [JSS19] qui est localement matroïdal. Soit \mathfrak{X} sa partie de sédentarité nulle. Peut-on munir \mathfrak{X} d'une structure simpliciale X telle que \mathcal{Z} soit le support de \bar{X} ? \diamond

Il existe aussi une notion de polyèdres étendus réguliers, par exemple dans [IKMZ19], qui sont des polyèdres respectant la stratification à l'infini. Dans la question précédente, si l'on suppose de plus que \mathcal{Z} est munie d'une structure de faces régulières, alors il devrait être possible de trouver une triangulation de la partie de sédentarité 0 de \mathcal{Z} qui fournirait une réponse positive à la question.

On devrait aussi pouvoir sans trop de difficulté définir des espaces topologiques enrichis d'une structure affine généralisant simultanément les espaces polyédraux étendus et les structures simpliciales affines. Nous n'avons pas essayé de le faire ici car, de toute façon, les démonstrations des théorèmes principaux de cette thèse utilisent des triangulations. En section 7.1.3, nous verrons une tentative de preuve pour établir une théorie de Hodge tropicale sans passer par les triangulations, qui pour l'instant n'a pas aboutie.

3.4. Orientabilité, irréductibilité et classes fondamentales. Soit X une structure simpliciale affine de dimension d . On dit que X est \mathbb{R} -orientable, ou simplement *orientable* (à ne pas confondre avec les orientation au sens de la section 3.1), s'il existe un cycle dans $C_{d,d}^{\text{BM}}(X, \mathbb{R})$ de support X_d tout entier. On dit que X est \mathbb{R} -orientée, ou simplement *orientée*, si de plus on a fait le choix d'un tel cycle. Dans ce cas, on note ce cycle $[X]$ et on l'appelle l'*élément canonique de X* . La classe correspondante dans $H_{d,d}^{\text{BM}}(X, \mathbb{R})$ est elle aussi notée $[X]$ et est appelée la *classe fondamentale de X* .

Cette notion est très liée à la notion de condition d'équilibre en géométrie tropicale. En effet, on a la proposition suivante qui se démontre immédiatement par le calcul (voir exemple 3.10).

PROPOSITION 3.9. *Un élément $\sum_{\eta \in X_d} w(\eta)(\eta, \nu_\eta)$ est un cycle si et seulement s'il est équilibré dans le sens suivant : pour toute face $\tau \in X_{d-1}$,*

$$\sum_{\eta > \tau} w(\eta) \mathbf{n}_{\eta/\tau} \in N_{\tau, \mathbb{R}}. \quad \square$$

Si X est orientée, alors pour tout $\delta \in X$ la structure transverse X^δ de X est naturellement orientée. En effet, si $[X] = \sum_{\eta \in X_d} w(\eta)(\eta, \nu_\eta)$, alors on pose

$$[X^\delta] = \sum_{\substack{\eta \in X^d \\ \eta > \delta}} w(\eta)(\eta^\delta, \nu_\eta^\delta).$$

Si X est orientable et si $H_{d,d}^{\text{BM}}(X, \mathbb{R})$ est de dimension un, nous dirons que X est *irréductible*. Dans ce cas, l'élément canonique de X est bien défini à un facteur près.

Notons que $C_{d,d}^{\text{BM}}(X, \mathbb{R}) = C_{d,d}^{\text{BM}}(\bar{X}, \mathbb{R}) = C_{d,d}(\bar{X}, \mathbb{R})$. Ainsi, \bar{X} sera dite *orientable*, resp. *orientée*, resp. *irréductible*, si X l'est. L'élément canonique de \bar{X} est l'élément induit par $[X]$.

De même, si X est faiblement rationnelle, on peut définir la \mathbb{Q} -orientabilité, etc., mais par le théorème des coefficients universels, toutes ses propriétés sont équivalentes au cas réel. Toutefois, notons qu'une structure simpliciale \mathbb{Q} -orientée a un élément canonique rationnel.

Convention. Dans le cas fortement rationnel, si une structure est \mathbb{Q} -orientable, nous ferons automatiquement l'hypothèse que les éléments canoniques ν_δ sont rationnels. Dans le cas où la structure est de dimension au moins deux, cela peut se faire sans perte de généralité par la remarque 3.11. Une telle hypothèse n'est pas toujours possible pour la dimension un, mais ce cas-là peut être traité à part et nous ne nous en préoccupons pas ici.

EXEMPLE 3.10. Soit \mathfrak{X} une variété tropicale pondérée de dimension d dans \mathbb{R}^n . Il s'agit donc du support d'un complexe simplicial rationnel X de \mathbb{R}^n . De plus, chaque facette σ de X est munie d'un poids $w(\sigma)$. Pour simplifier en évitant d'introduire de nouvelles notations, supposons que X soit munie d'une triangulation unimodulaire par rapport à $N = \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Pour chaque face $\eta \in \Sigma$, le multi-vecteur canonique $\nu_\eta \in \bigwedge^{|\eta|} N_{\eta, \mathbb{Q}}$ est alors unitaire pour le réseau N_η .

Alors, comme on l'a vu en section 1.7, X vérifie la condition d'équilibre pondérée : pour toute face $\tau \in X_{d-1}$,

$$\sum_{\sigma \succ \tau} w(\sigma) \mathbf{n}_{\sigma/\tau} \in N_\tau.$$

Pour toute paire $\sigma \succ \tau$, on a $\nu_\sigma = \text{sign}(\tau, \sigma) \mathbf{n}_{\sigma/\tau} \wedge \nu_\tau$. Ainsi, par la condition d'équilibre ci-dessus, pour toute face τ de codimension un,

$$\sum_{\sigma \succ \tau} \text{sign}(\tau, \sigma) w(\sigma) \nu_\sigma = 0.$$

Donc $\sum_{\sigma \in \Sigma_d} (\sigma, w(\sigma) \nu_\sigma) \in C_{d,d}^{\text{BM}}(X)$ est un cycle. C'est même un choix canonique pour l'élément canonique $[X]$ de X .

Toute variété tropicale pondérée triangulée de \mathbb{R}^n est donc naturellement une structure simpliciale affine orientée faiblement rationnelle. On voit bien le lien ici entre le fait d'être tropical, c'est-à-dire équilibré, et l'orientabilité. \diamond

3.5. Cup-produit. Soit X une structure simpliciale affine de dimension d sur E . Alors il existe un cup-produit naturel $\smile : H^{p,q}(X) \otimes H_c^{p',q'}(X) \rightarrow H_c^{p+p',q+q'}(X)$. On peut l'obtenir en adaptant le cup-produit simplicial classique sur $\text{cone}(X)$, ou bien par exemple via les formes de Dolbeault comme dans [JSS19].

De même, nous avons un cup-produit $\smile : H^{p,q}(\bar{X}) \otimes H^{p',q'}(\bar{X}) \rightarrow H^{p+p',q+q'}(\bar{X})$.

EXEMPLE 3.11 (Cas d'un éventail). Traitons le cas d'une structure simpliciale linéaire Σ . Ce cas est particulièrement simple. En effet, Σ n'a qu'une seule face compacte : $\underline{0}$. Donc

$$H^{p,q}(\Sigma) = C^{p,q}(\Sigma) = \begin{cases} \mathbf{F}^p(\underline{0}) & \text{si } q = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut alors définir le cup-produit directement sur les cochaînes de la façon suivante. Si $a = (\underline{0}, \alpha) \in C^{p,0}(\Sigma)$ avec $\alpha \in \mathbf{F}^p(\underline{0})$ et si $b = (\sigma, \beta)$ est un élément de $C^{p',q'}(\Sigma)$, $a \smile b$ est simplement égal à $(\sigma, \alpha \wedge \beta)$.

Pour la compactification canonique, rappelons que $\bar{\Sigma}$ est naturellement un complexe cubique. Il existe une manière naturelle de définir le cup-produit sur les complexes cubiques. On peut ainsi donner une formule explicite, ce qui est fait en chapitre 2 section 7.4.

Dans le cas de la compactification canonique d'une structure simpliciale affine X , on peut calculer le cup-produit en travaillant dans $\overline{\text{cone}(X)}$ quitte à mettre 0 sur les éléments de $\overline{\text{cone}(X)}$ ne correspondant pas à des faces de \bar{X} . \diamond

3.6. Dualité de Poincaré. Soit Z une structure simpliciale affine irréductible orientée ou sa compactification. Alors on note $\text{deg} \in H_c^{d,d}(Z)^*$ l'élément dual à $[Z]$ que l'on appelle l'*application degré*, et que l'on peut aussi interpréter comme l'intégrale sur Z (cf. [JSS19]). Pour toute paire d'entiers p et q , en composant l'application degré et le cup-produit nous obtenons donc un accouplement

$$H^{p,q}(Z) \otimes H_c^{d-p,d-q}(Z) \rightarrow \mathbb{k}.$$

DÉFINITION 3.12. On dit que Z vérifie la *dualité de Poincaré* si l'accouplement ci-dessus est parfait, c'est-à-dire si $H^{p,q}(Z) \rightarrow H_c^{d-p,d-q}(Z)^*$ est un isomorphisme. \diamond

EXEMPLE 3.13. Poursuivons l'étude de la structure simpliciale linéaire Σ . Dans ce cas, la dualité de Poincaré revient à montrer que $H_c^{p,q}(\Sigma)$ est nul pour $q \neq d$, et que $H_c^{p,d}(\Sigma) \simeq \mathbf{F}_{d-p}(\underline{0})$. L'application $H_c^{p,d}(\Sigma) \rightarrow \mathbf{F}_{d-p}(\underline{0})$ peut être facilement décrite. Elle envoie (η, α) sur $\iota_\alpha(\nu_\eta)$. On peut montrer que cette application est toujours surjective. Nous poursuivons cette étude en section 4. \diamond

3.7. Lissité. Comment définir la lissité pour un espace polyédral ? La définition géométrique classique de lissité est difficile à adapter dans ce contexte. En effet, pour deux points quelconque, les voisinages des deux points peuvent être très différents.

Une première idée serait de définir la lissité en demandant d'être localement la tropicalisation d'une variété lisse. C'est a priori une mauvaise définition car une telle tropicalisation peut prendre plusieurs formes dont certaines très singulières. De plus, les variétés tropicales ne sont pas toujours réalisables, même localement, comme nous l'avons vu dans la remarque 1.10.

Toutefois, les tropicalisations des complémentaires d'arrangement d'hyperplans dans le tore ont de bonnes propriétés. Il s'agit de support de Bergman comme nous l'avons vu en section 1.3. Jusqu'à présent, une variété tropicale était dite lisse si elle était localement matroïdale, c'est-à-dire, nous le rappelons, localement de la forme $|\Sigma| \times \mathbb{T}^k$ avec $|\Sigma|$ un support de Bergman. C'est la définition utilisée dans [IKMZ19] et par la suite dans [JSS19, MZ14, MR18, JRS18, GS19b, GS19a] par exemple. Les variétés tropicales lisses dans ce sens vérifient la dualité de Poincaré [JSS19].

Nous souhaitons proposer une nouvelle définition de lissité, plus large. Nous allons proposer une définition purement homologique, allant dans le sens de l'étude des variétés homologiques, cf. [Čec33, Lef33, Beg42, Bor57, Wil65, BFMW96, BFMW07, Mio00, Wei02]. A priori la lissité doit être une notion locale, et une variété lisse doit vérifier la dualité de Poincaré. Nous proposons donc la définition informelle suivante. Un espace polyédral muni des faisceaux tropicaux \mathcal{F}^\bullet est lisse si tout ouvert connexe de cette variété vérifie la dualité de Poincaré. De même, on souhaite dire qu'une structure simpliciale affine X est lisse si l'espace polyédral $|X|$ est lisse au sens précédent.

Le paragraphe ci-dessus est une justification intuitive de la nouvelle définition de lissité. Toutefois, d'un point de vue pragmatique, si une variété tropicale est la limite d'une famille de variétés, nous souhaiterions que la lissité implique que la variété tropicale se souviennent de nombreuses informations des fibres proches de la fibre centrale. C'est un rôle que remplit parfaitement la notion d'être localement matroïdal. Avec Amini, nous avons pour projet de montrer que la nouvelle notion de lissité remplit bien ce rôle, notamment dans la perspective d'étudier des variétés algébriques proches de la limites tropicales pour des familles plus générales que celles étudiées par [IKMZ19] (voir section 3.8).

À partir de la définition informelle de lissité ci-dessus, essayons de justifier la définition 3.14. Des résultats plus précis seront donnés plus tard. Dans les espaces polyédraux raisonnables (on souhaite entre autre éviter le cas de la figure 3, cf. [IKMZ19, JSS19, Sma17]), chaque point a un voisinage isomorphe à un espace de la forme $|\Sigma| \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^l$ où $|\Sigma|$ est le support d'un éventail. Si le monde est bien fait, \mathbb{R} et \mathbb{T} devraient être lisses, et donc devraient vérifier la dualité de Poincaré. Le point essentiel est donc la dualité de Poincaré pour Σ .

DÉFINITION 3.14. Une structure simpliciale affine orientée X est *lisse* si X^δ vérifie la dualité de Poincaré pour toute face δ de X . De plus, \bar{X} est dite *lisse* si X l'est. \diamond

THÉORÈME 3.15. *Si X est une structure simpliciale affine orientée lisse, alors X et \bar{X} vérifient la dualité de Poincaré.*

Nous n'avons pas encore les outils pour faire la preuve avec la cohomologie cellulaire, ce que nous ferons dans le cas des structures simpliciales linéaires en théorème 3.15. Nous donnons ci-dessous une preuve faisceutique qui, au passage, justifie la définition de la lissité.

DÉMONSTRATION. Montrons le résultat pour \bar{X} . La preuve est similaire pour X . Soit δ^σ une face de \bar{X} . Alors tout ouvert basique de $|\bar{X}|$ de face minimale δ^σ est homéomorphe à $|X^\delta| \times \mathbb{R}^{|\delta^\sigma|} \times \mathbb{T}^{|\sigma|}$. L'homéomorphisme induit des isomorphismes de faisceaux pour les faisceaux \mathcal{F}^\bullet associés. On vérifie directement la dualité de Poincaré pour les espaces \mathbb{R} et \mathbb{T} . De plus, par hypothèse, $|X^\delta|$ vérifie aussi la dualité de Poincaré. Via la formule de Künneth (cf. [GS19b], voir aussi théorème 6.1), on en déduit que le produit, et donc l'ouvert de base, vérifie la dualité de Poincaré. Rappelons que les ouverts de base forment une base d'ouverts pour la topologie. On obtient alors la dualité de Poincaré pour \bar{X} en utilisant une résolution par des faisceaux fins comme dans [JSS19]. \square

Dans [GS19b], Gross et Shokrieh ont montré que toute variété tropicale localement matroïdale vérifie la dualité de Verdier à coefficients entiers. Plus précisément, si \mathcal{Z} est une variété tropicale localement matroïdale de dimension d munie d'une structure entière, le faisceau $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^p$ est dual à $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^{d-p}[d]$ dans la catégorie dérivée des complexes de cochaînes bornées de $\mathbb{Z}_{\mathcal{Z}}$ -modules. Voici une question qui nous a été posée par Shokrieh.

QUESTION 3.16. Peut-on étendre ce résultat aux variétés tropicales lisses ? \diamond

La proposition suivante est immédiate par la définition.

PROPOSITION 3.17. *Si X est lisse, alors pour toute face δ de X , X^δ et \bar{X}^δ sont lisses. De plus, pour toute face $\sigma \in X_{\text{rec}}$, les strates à l'infini X^σ et \bar{X}^σ sont lisses.* \square

EXEMPLE 3.18 (Cas de la dimension 1). Dans cette thèse, nous appellerons *droite tropicale* une structure simpliciale linéaire Σ de dimension un orientable et irréductible, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'une seule relation de dépendance entre les ν_ρ pour $\rho \in \Sigma$ de la forme $\sum_{\rho \in \Sigma} a_\rho \nu_\rho = 0$ et que les coefficients a_ρ sont tous non nuls. Il s'agit exactement des éventails de Bergman de dimension un.

On se convainc facilement qu'il s'agit des seules structures simpliciales linéaires lisses de dimension un. \diamond

3.8. Lien avec les variétés complexes. Cette section ne vise qu'à développer une intuition de certains phénomènes, souvent conjecturaux, et à suggérer des applications et des généralisations possibles des résultats de cette thèse. Nous ne prétendons pas énoncer des résultats précis. Ainsi, toute affirmation de cette section doit être considérée avec précaution, et nous renvoyons le lecteur à différents articles pour plus de précision.

Pour mieux comprendre la définition de la géométrie tropicale et pourquoi elle possède de si bonnes propriétés, il nous semble utile d'expliquer son origine. Le but originel de l'homologie tropicale, développé dans [IKMZ19], est de retrouver la cohomologie d'une fibre générale d'une famille de variétés projectives complexes à partir de sa limite tropicale dans des cas spécifiques (voir ci-dessous). Pour cela, les auteurs ont exploité la théorie de Hodge asymptotique. Nous en reparlerons plus loin.

D'un autre côté, dans le cas des hypersurfaces projectives complexes, il existe une jolie décomposition en pantalons de la fibre générale, décomposition dont les parties sont indexées par les faces d'une certaine triangulation sur la limite tropicale [Mik04b]. En fait, la fibre générale se projette sur la limite tropicale en des fibres que l'on peut décrire explicitement. Nous appelons cette fibration une *fibration en tores* pour une raison qui deviendra bientôt claire. Dans le cas où la limite tropicale est lisse, le lien entre la cohomologie tropicale de la limite et la cohomologie de la fibre générale peut être vu très naturellement (cf. [Arn20]).

L'existence d'une fibration en tores dans le cas général, notamment dans le cas des variétés de Calabi-Yau, est un problème intéressant lié notamment à la conjecture SYZ en symétrie miroir [SYZ96, Zha00, Li20].

Une fibration similaire apparaît dans [Cle69] pour essayer de comprendre l'action de la monodromie sur une famille de variétés. Rappelons que la monodromie a un équivalent sur la

limite tropicale, l'opérateur eigenwave, qui est lié aux déformations de la variété tropicale et à la famille l'approximant [MZ14].

Dans cette section, nous nous placerons dans un cas idéal où la fibration susmentionnée existe.

3.8.1. *Fibration en tores.* En s'inspirant des figures 7 et 8, nous pourrions espérer l'existence d'une fibration en tores de la forme suivante pour les fibres proches W_t .

- L'application étendue $\text{Log}_t : \overline{W}_t \rightarrow \mathbb{TP}_{X_{\text{rec}}}$ se rétracte en une application surjective continue $\text{trop}_t : \overline{W}_t \rightarrow \overline{\mathfrak{X}}$ qui respecte les stratifications des variétés toriques $\mathbb{CP}_{X_{\text{rec}}}$ et $\mathbb{TP}_{X_{\text{rec}}}$.
- À chaque face δ^σ de la compactification canonique \overline{X} et à chaque point x de $|\delta^\sigma| \subseteq \overline{\mathfrak{X}}$ on peut associer $F_{x,\delta^\sigma} \subseteq \text{trop}_t^{-1}(x)$ qui est homéomorphe à $U_\delta \times (\mathbb{S}^1)^{|\delta^\sigma|} \simeq U_\delta \times \mathbb{T}_{\mathbb{R}}^{|\delta^\sigma|}$, où l'on rappelle que U_δ est la partie ouverte de la composante associée à δ dans la fibre centrale (cf. section 1.11.3).
- On peut choisir ces homéomorphismes tels qu'il existe une application continue $\overline{W}_t \rightarrow \overline{W}_0$ qui induit les projections naturelles $U_\delta \times (\mathbb{S}^1)^{|\delta^\sigma|} \rightarrow U_\delta$.
- Pour chaque point x , si η est la face minimale de \overline{X} contenant x dans son support, alors $\text{trop}_t^{-1}(x) = \overline{F}_{x,\eta} = \bigsqcup_{\eta' \ni x} F_{x,\eta'}$.
- Pour chaque ouvert basique de $\overline{\mathfrak{X}}$ de face minimale δ^σ , sa préimage par trop_t est homéomorphe à $\delta^\sigma \times U_\delta \times (\mathbb{S}^1)^{|\delta^\sigma|} \times \mathbb{C}^{|\sigma|}$, c'est-à-dire à $U_\delta \times \mathbb{T}_{\mathbb{C}}^{|\delta^\sigma|} \times \mathbb{C}^{|\sigma|}$.

Notons qu'un analogue tropical de cette décomposition est valable sur $\overline{\mathfrak{X}}$. Il faut alors remplacer U_δ par un point qui se souvient que son éventail transverse est X^δ , remplacer \mathbb{S}^1 par un point et \mathbb{C} par \mathbb{T} .

EXEMPLE 3.19. Dans les figures 7 et 8, nous obtenons bien cette décomposition. Chaque arête de la limite tropicale correspond à un cylindre (en rouge ou gris) homéomorphe à \mathbb{C}^* . Les cycles représentés dans ces cylindres représente la préimage de l'un des points. Les sommets de sédentarité zéro correspondent aux parties ouvertes des composantes irréductibles correspondantes. Enfin les points bleus représentent la partie de la compactification en-dehors du tore. \diamond

QUESTION 3.20. De manière générale, dans quel cas la fibration en tores décrite ci-dessus existe-t-elle ?

Par ailleurs, en fixant une fibre spéciale et une variété tropicale associée, peut-on construire une famille de variétés qui dégénère vers cette fibre spéciale et dont les fibres générales admettent une fibration en tores au-dessus de la limite tropicale ? \diamond

Pour la seconde question, on pourrait par exemple tenter de généraliser la méthode du patchwork en codimension supérieure.

3.8.2. *Comparaison des cohomologies.* Dans le cas où la limite tropicale est localement matroïdale, on peut montrer que les strates ouvertes U_{0,δ^σ} de la fibre spéciale sont des complémentaires d'arrangement d'hyperplans dont la tropicalisation est exactement le support de Bergman $|X_\infty^{\delta^\sigma}| \simeq |X^\delta|$ (voir [IKMZ19]). Par un résultat de Zharkov [Zha13], le groupe de cohomologie $H^p(U_{0,\delta^\sigma})$ est isomorphe à $\mathbf{F}^p(\underline{0}_{\delta^\sigma})$, où $\underline{0}_{\delta^\sigma}$ désigne le cône $\{0\}$ de l'éventail $X_\infty^{\delta^\sigma}$, et donc à $H^{p,0}(X_\infty^{\delta^\sigma}) \simeq H^p(X^{\delta^\sigma})$. Notons au passage que le fait que $H^p(X^{\delta^\sigma})$ soit concentré en bidegré $(p, 0)$ est lié au fait que la structure de Hodge mixte associée à $H^p(U_{0,\delta^\sigma})$ est pure de poids $2p$, [Sha93], nous y reviendrons en section 9.

Supposons que la décomposition en tores est possible. Remarquons de plus que la cohomologie du tore $H^p(\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^k)$ est isomorphe à $\bigwedge^p \mathbb{R}^k$, et donc à $H^{p,0}(\mathbb{T}_{\mathbb{T}}^k)$. Maintenant, si U est un ouvert basique de \overline{X} de face minimale δ^σ , alors $\text{trop}_t^{-1}(U) \simeq U_\delta \times \mathbb{T}_{\mathbb{C}}^{|\delta^\sigma|} \times \mathbb{C}^{|\sigma|}$ et, par la

formule de Künneth,

$$(3.1) \quad H^{\bullet}(\mathrm{trop}_t^{-1}(U)) \simeq H^{\bullet}(U_{\delta}) \otimes H^{\bullet}(\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^{|\delta^{\sigma}|}) \otimes H^{\bullet}(\mathbb{C}^{|\sigma|}) \simeq \mathbf{F}^{\bullet}(\mathbb{Q}_{\delta^{\sigma}}) \otimes \mathbf{F}^{\bullet}(\mathbb{R}^{|\delta^{\sigma}|}) \simeq \mathbf{F}^{\bullet}(\delta^{\sigma}).$$

Ainsi, le faisceau $\mathcal{F}_{\bar{X}}^{\bullet}$ a pour section locale la cohomologie de l'ouvert vivant au-dessus dans \bar{W}_t . Il est donc naturel de penser que la cohomologie tropicale de \bar{X} calcule la cohomologie de \bar{W}_t . C'est ce qui est démontré dans [IKMZ19], sans toutefois utiliser la décomposition ci-dessus, qui est conjecturale même dans ce cadre, mais en utilisant la théorie de Hodge asymptotique comme nous le verrons en section 7.1.4.

Dans le cas où la limite tropicale n'est pas localement matroïdale, on peut remplacer le faisceau $\mathcal{F}_{\bar{X}}^{\bullet}$ par le faisceau \mathcal{G}^{\bullet} tel que, pour les ouverts basiques U , $\mathcal{G}^{\bullet}(U) = H^{\bullet}(\mathrm{trop}_t^{-1}(U))$. Le cofaisceau homologique cellulaire associé est appelé homologie ronde dans [Arn20]. Nous travaillons actuellement avec Amini pour généraliser les propriétés de la cohomologie tropicale à d'autres faisceaux similaires à \mathbf{F}^{\bullet} .

Dans le cas où la décomposition en tores d'une fibre générale n'existe pas, nous pouvons toujours construire un espace topologique \bar{W} et une application $\mathrm{trop} : \bar{W} \rightarrow \bar{\mathfrak{X}}$ qui vérifie la décomposition en tores. Dans ce cadre, on peut définir le faisceau \mathcal{G} grâce à \bar{W} . La cohomologie associée calcule alors la deuxième page de la suite spectrale de Leray-Serre de la fibration, suite spectrale qui dégénère vers la cohomologie de \bar{W} . De là, on peut tenter de calculer les pages suivantes directement sur $\bar{\mathfrak{X}}$.

QUESTION 3.21. Le faisceau \mathcal{G} permet-il de calculer la cohomologie d'une fibre générale \bar{W}_t ? \diamond

En cas de réponse affirmative, cela donnerait plus de légitimité à la question 3.20.

4. Comparaison de $H^{\bullet,\bullet}(\Sigma)$, $H_c^{\bullet,\bullet}(\Sigma)$ et $H^{\bullet,\bullet}(\bar{\Sigma})$

Comme nous l'avons déjà dit, la plupart des résultats de cette thèse ont été obtenus grâce à des outils efficaces pour calculer et lier les deux versions des cohomologies tropicales d'une variété tropicale, de ses éventails transverses et de leurs compactifications respectives. Ces outils sont en fait des suites spectrales issues de double complexes, et leurs natures très algébriques nous permettent de facilement les généraliser à des structures simpliciales affines quelconques. Dans cette section nous traitons le cadre des structures simpliciales linéaires. Nous définirons les différents double complexes dans ce cadre, et nous renverrons aux autres chapitres pour les preuves. Bien que ces preuves ne s'appliquent a priori qu'à des éventails de \mathbb{R}^n , le lecteur se convaincra facilement qu'elles se généralisent au cas général.

À propos des suites spectrales. « The words “spectral sequence” strike fear into the hearts of many hardened mathematicians. These notes will attempt to demonstrate that spectral sequences are not so scary, and also very powerful. » Ce sont les premières phrases d'une courte (et incomplète) introduction aux suites spectrales par Hutchings que l'auteur de cette thèse recommande à toute personne ne connaissant peu ou pas du tout ce domaine et souhaitant en apprendre plus [Hut]. Pour une référence plus complète, voir [McC00].

Pour rendre cette partie relativement lisible pour les lecteurs peu habitués aux suites spectrales, et pour habituer les autres lecteurs aux notations utilisées, nous allons détailler la première utilisation de suites spectrales, et nous irons plus vite ensuite.

Nous n'étudierons que des suites spectrales bornées et issues de doubles complexes (à une exception près), ce qui nous donne un cadre assez simple. Dans les diagrammes, la premier indice de la suite spectrale augmentera de gauche à droite, et le second indice de haut en bas.

Dans toute cette section, Σ est une structure simpliciale linéaire orientée de dimension d , et $\bar{\Sigma}$ est sa compactification canonique.

4.1. Principaux résultats. Nous énonçons ici les principaux résultats que nous montrons dans la suite de cette section.

Pour commencer, posons pour tout entier p, q ,

$$C_{\square}^{p,q}(\bar{\Sigma}) := \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_q} \mathbf{F}^{p-q}(\infty_{\sigma}),$$

où nous rappelons que ∞_{σ} désigne le sommet σ_{∞}^{σ} . Notons que la somme porte bien sur des faces de Σ et non de $\bar{\Sigma}$. Nous obtenons le complexe de cochaînes suivant

$$C_{\square}^{p,\bullet}(\bar{\Sigma}) : \quad \dots \longrightarrow C_{\square}^{p,q-1}(\bar{\Sigma}) \xrightarrow{d_{\square}^{q-1}} C_{\square}^{p,q}(\bar{\Sigma}) \xrightarrow{d_{\square}^q} C_{\square}^{p,q+1}(\bar{\Sigma}) \longrightarrow \dots$$

dont la différentielle d_{\square}^q est donnée par la somme sur les paires de faces $\tau \prec \sigma$, $\tau \in \Sigma_q$, des applications

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^q(\infty_{\tau}) &\longrightarrow \mathbf{F}^{q-1}(\infty_{\sigma}), \\ \alpha &\longmapsto \pi_{\tau \prec \sigma, *}(l_{\nu_{\tau}}(\alpha)). \end{aligned}$$

On note $H_{\square}^{p,\bullet}(\bar{\Sigma})$ la cohomologie associée.

On peut définir un morphisme $C_{\square}^{p,q}(\bar{\Sigma}) \rightarrow C_{\square}^{p,q}(\bar{\Sigma})$ de la manière suivante. Soit $\sigma \in \Sigma_q$. Rappelons au passage que $\bar{\sigma} := \sigma_{\infty}^0 \in \bar{\Sigma}$. On peut considérer les rayons ρ_1, \dots, ρ_q qui engendrent σ dans un ordre tel que $\nu_{\sigma} = \nu_{\rho_1} \wedge \dots \wedge \nu_{\rho_q}$. Le morphisme envoie alors $(\bar{\sigma}, \alpha)$, pour $\alpha \in \mathbf{F}^p(\sigma)$, sur $(\sigma, l_{\nu_{\sigma}}(\alpha)) \in C_{\square}^{p,q}(\bar{\Sigma})$. Ce morphisme commute avec les différentielles, et on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME 4.1. *Le morphisme ci-dessus induit un isomorphisme en cohomologie :*

$$H_{\square}^{\bullet,\bullet}(\bar{\Sigma}) \simeq H^{\bullet,\bullet}(\bar{\Sigma}).$$

La preuve utilise une décomposition des faces de $\bar{\Sigma}$ en hypercubes, ce qui justifie l'utilisation du symbole \square en indice.

De ce théorème, nous déduisons immédiatement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 4.2. *La cohomologie $H_{\square}^{p,q}(\bar{\Sigma})$ est triviale pour $p < q$ et pour $p > q = 0$. Si de plus $\bar{\Sigma}$ vérifie la dualité de Poincaré, alors sa cohomologie est concentrée en bidegré (p, p) pour $0 \leq p \leq d$.*

DÉMONSTRATION. Si $p < q$, alors $C_{\square}^{p,q}(\bar{\Sigma})$ est trivial. Donc $H_{\square}^{p,q}(\bar{\Sigma}) = H_{\square}^{p,q}(\bar{\Sigma}) = 0$.

Pour $q = 0$ et $p > 0$, on a

$$H_{\square}^{p,0}(\bar{\Sigma}) = H_{\square}^{p,0}(\bar{\Sigma}) = \ker(\mathbf{F}^p(\underline{0}) \rightarrow \bigoplus_{\varrho \in \Sigma_1} \mathbf{F}^{p-1}(\varrho)).$$

Une forme $\alpha \in \mathbf{F}^p(\underline{0})$ qui est dans ce noyau doit être nulle lorsqu'on le contracte par ν_{ϱ} pour n'importe quel rayon $\varrho \in \Sigma_1$. Cela implique que α est nulle (voir chapitre 2 section 7.3) et donc que $H_{\square}^{p,0}(\bar{\Sigma}) = 0$.

La dernière partie de l'énoncé est triviale. □

Ryota Mikami a démontré un théorème similaire dans [Mik20a] sur l'analytifié de Berkovich d'une variété algébrique lisse pour un analogue de la cohomologie tropicale.

Le double complexe utilisé pour démontrer le théorème 4.1 nous permet aussi d'obtenir le résultat suivant.

THÉORÈME 4.3. *Supposons que Σ^{σ} vérifie la dualité de Poincaré pour tout cône $\sigma \in \Sigma$ différent de $\underline{0}$. Alors Σ vérifie la dualité de Poincaré si et seulement si $\bar{\Sigma}$ vérifie la dualité de Poincaré.*

Voici deux corollaires immédiats, le second se montre par récurrence.

COROLLAIRE 4.4. *Si $\bar{\Sigma}$ est lisse, alors $\bar{\Sigma}$ vérifie la dualité de Poincaré.* □

En particulier, on retrouve le théorème 3.15 dans le cas linéaire.

COROLLAIRE 4.5. Σ est lisse si et seulement $\overline{\Sigma}^\sigma$ vérifie la dualité de Poincaré pour tout $\sigma \in \Sigma$. \square

Nous avons vu dans l'exemple 3.13 que si Σ vérifie la dualité de Poincaré, alors $H_C^{p,q}(\Sigma)$ est trivial pour $q < d$. Nous souhaitons citer ici une jolie réciproque trouvée par Edvard Aksen dans [Aks21].

On dit que Σ est *normal* si pour toute face τ de codimension un dans Σ , Σ^τ est lisse (i.e. Σ^τ est une droite tropicale).

THÉORÈME 4.6. Si un éventail simplicial tropical rationnel Σ de dimension d est normal et vérifie que pour toute face $\sigma \in \Sigma$ et toute paire d'entiers p, q avec $q < d - |\sigma|$ $H_C^{p,q}(\Sigma^\sigma) = 0$, alors Σ est lisse.

Nos méthodes permettent de retrouver une version affaiblie de ce théorème pour toute structure linéaire orientée qui nécessite une condition plus forte : on demande en plus de la normalité que Σ^σ soit lisse pour toute face $\sigma \in \Sigma$ de codimension deux.

Enfin, une seconde suite spectrale nous permet d'obtenir le théorème suivant.

THÉORÈME 4.7. Si Σ est lisse, alors pour tout entier p nous avons la suite exacte suivante.

$$0 \rightarrow H^{p,p}(\overline{\Sigma}) \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_1} H^{p,p}(\overline{\Sigma}^\sigma) \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_2} H^{p,p}(\overline{\Sigma}^\sigma) \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{d-p}} H^{p,p}(\overline{\Sigma}^\sigma) \rightarrow \mathbf{F}_{d-p}(\mathbb{Q}) \rightarrow 0.$$

Les différentielles sont obtenues en sommant les applications $\text{sign}(\tau, \sigma) i_{\tau < \sigma}^*$ pour $\tau < \sigma$ où $i_{\tau < \sigma}^* : C^{p,q}(\overline{\Sigma}^\tau) \rightarrow C^{p,q}(\overline{\Sigma}^\sigma)$ désigne la restriction.

Cette suite exacte est très importante et nous l'utiliserons à de nombreuses reprises car elle nous fournit une résolution du (dual du) faisceau \mathbf{F}^\bullet . De plus, cette résolution est donnée par la cohomologie tropicale qui est elle-même calculée par le faisceau. C'est une sorte de théorème d'inclusion-exclusion, ce qui sera d'autant plus clair lorsque nous verrons la preuve. Ce genre de phénomène a déjà été étudié dans [Pet17].

Nous reviendrons en section 4.6 sur le lien de cette suite exacte avec la théorie de Hodge classique et avec la suite spectrale de Deligne, et en section 5 sur son lien avec le complexe de partition concernant la combinatoire des complexes simpliciaux.

REMARQUE 4.8. Les théorèmes 4.1 et 4.7 peuvent être généralisés aux structures simpliciales affines. Nous n'énonçons pas ces généralisations par souci de simplification. \diamond

Dans la suite de cette section, nous allons démontrer en partie les résultats ci-dessus dans l'objectif d'introduire deux double complexes et de montrer leur importance. Nous éviterons autant que possible trop de technicité, et renvoyons aux sections 7 et 8 du chapitre 2 pour des preuves complètes.

4.2. Décomposition cubique de la cohomologie. Nous commençons par introduire un double complexe qui calcule la cohomologie de $\overline{\Sigma}$. Les suites spectrales associées donnent beaucoup d'information sur Σ et permettent notamment de démontrer la plupart des résultats cités ci-dessus.

Rappelons que la cohomologie $H^{p,\bullet}(\overline{\Sigma})$ est par définition la cohomologie du complexe

$$C^{p,\bullet}(\overline{\Sigma}) : \dots \longrightarrow \bigoplus_{\eta \in \overline{\Sigma}_{q-1}} \mathbf{F}^p(\eta) \longrightarrow \bigoplus_{\eta \in \overline{\Sigma}_q} \mathbf{F}^p(\eta) \longrightarrow \bigoplus_{\eta \in \overline{\Sigma}_{q+1}} \mathbf{F}^p(\eta) \longrightarrow \dots$$

À la place de simplement regarder la dimension des faces, on pourrait de plus regarder leurs sédentarités, ce qui permet de décomposer $C^{p,\bullet}$ en un double complexe, c'est-à-dire en un complexe bigradué. Ainsi, on pose

$${}_p\text{Cub}^{a,b}(\overline{\Sigma}) := \bigoplus_{\substack{\eta \in \Sigma_a \\ \sigma \in \Sigma_{-b} \\ \sigma < \eta}} \mathbf{F}^p(\eta^\sigma).$$

FIGURE 10. Le double complexe ${}_p\text{Cub}^{\bullet,\bullet}$ de la décomposition cubique de $H^{p,\bullet}(\overline{\Sigma})$.

$$\begin{array}{ccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{\eta \in \Sigma_2} \mathbf{F}^p(\infty_\eta) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \bigoplus_{\substack{\eta \in \Sigma_d \\ \sigma \in \Sigma_2 \\ \sigma < \eta}} \mathbf{F}^p(\eta^\rho) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \bigoplus_{\rho \in \Sigma_1} \mathbf{F}^p(\infty_\rho) & \longrightarrow & \bigoplus_{\substack{\eta \in \Sigma_2 \\ \rho \in \Sigma_1 \\ \rho < \eta}} \mathbf{F}^p(\eta^\rho) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \bigoplus_{\substack{\eta \in \Sigma_d \\ \rho \in \Sigma_1 \\ \rho < \eta}} \mathbf{F}^p(\eta^\rho) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\mathbf{F}^p(\underline{0}) & \longrightarrow & \bigoplus_{\rho \in \Sigma_1} \mathbf{F}^p(\rho) & \longrightarrow & \bigoplus_{\eta \in \Sigma_2} \mathbf{F}^p(\eta) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \bigoplus_{\eta \in \Sigma_d} \mathbf{F}^p(\eta)
\end{array}$$

Pour ne pas trop alourdir les notations, nous omettrons de mentionner $\overline{\Sigma}$ dans la suite. Le double complexe peut être trouvé en figure 10. Les éléments de ${}_p\text{Cub}^{a,b}$ sont dits de *bidegré* (a, b) et de *degré* $a + b$. Ce double complexe est muni de deux différentielles.

— La différentielle verticale vérifie

$$d_{\downarrow} = \sum_{a,b} d_{\downarrow}^{a,b} : {}_p\text{Cub}^{\bullet,\bullet} \rightarrow {}_p\text{Cub}^{\bullet,\bullet+1}$$

où $d_{\downarrow}^{a,b} : {}_p\text{Cub}^{a,b} \rightarrow {}_p\text{Cub}^{a,b+1}$ est définie comme la somme des $\pi_{\eta^\sigma < \eta^\tau}^* : \mathbf{F}^p(\eta^\sigma) \rightarrow \mathbf{F}^p(\eta^\tau)$ avec $|\eta| = a$, $|\sigma| = -b$ et $\tau < \sigma$. Notons que le signe moins devant b a justement été choisi pour que d_{\downarrow} respecte la convention cohomologique d'augmenter le degré.

— La différentielle horizontale vérifie

$$d_{\rightarrow} = \sum_{a,b} d_{\rightarrow}^{a,b} : {}_p\text{Cub}^{\bullet,\bullet} \rightarrow {}_p\text{Cub}^{\bullet+1,\bullet}$$

où $d_{\rightarrow}^{a,b} : {}_p\text{Cub}^{a,b} \rightarrow {}_p\text{Cub}^{a+1,b}$ est définie comme la somme des $i_{\tau^\eta < \sigma^\eta}^* : \mathbf{F}^p(\tau^\eta) \rightarrow \mathbf{F}^p(\sigma^\eta)$ avec $|\tau| = a$, $|\eta| = -b$ et $\sigma \succ \tau$.

L'avantage de ce double complexe cubique est que l'on obtient maintenant un complexe par rangée et un complexe par colonne de ${}_p\text{Cub}^{\bullet,\bullet}$, et que la cohomologie de chacun de ces complexes est plus simple à calculer que la cohomologie de $C^{p,\bullet}(\overline{\Sigma})$. Par exemple, à la rangée numéro b est associé le complexe ${}_p\text{Cub}^{\bullet,b}$ muni de la différentielle $d_{\rightarrow}^{\bullet,b}$. On notera généralement d_{\rightarrow} , voire simplement d , la différentielle concernée dans la suite.

Le *complexe total associé* à ${}_p\text{Cub}^{\bullet,\bullet}$, noté $\text{Tot}^{\bullet}({}_p\text{Cub}^{\bullet,\bullet})$, est par définition

$$\text{Tot}^k({}_p\text{Cub}^{\bullet,\bullet}) = \bigoplus_{a+b=k} {}_p\text{Cub}^{a,b}$$

et est muni de la différentielle induite par $d_{\downarrow} + d_{\rightarrow}$.

Reste à savoir comment retrouver la cohomologie de $C^{p,\bullet}(\overline{\Sigma}) = \text{Tot}^{\bullet}({}_p\text{Cub}^{\bullet,\bullet})$ à partir de la cohomologie des colonnes par exemple. C'est ce que nous explique la théorie des suites spectrales. Nous allons tout de suite voir comment appliquer cette théorie.

4.3. Preuve du théorème 4.1. Étudions d'abord la suite spectrale $\downarrow_p \text{Cub}_0^{\bullet,\bullet}$ induite par la filtration selon la première coordonnée. Cela signifie simplement que l'on va commencer par calculer la cohomologie des colonnes.

Par définition, la page 0 de la suite spectrale, notée $\downarrow_p \text{Cub}_0^{\bullet,\bullet}$, est égale à $\downarrow_p \text{Cub}_0^{\bullet,\bullet}$. Ensuite la première page $\downarrow_p \text{Cub}_1^{\bullet,\bullet}$ est obtenue en calculant la cohomologie des colonnes :

$$\downarrow_p \text{Cub}_1^{a,b} := \frac{\ker\left(d_\downarrow : \downarrow_p \text{Cub}_0^{a,b} \rightarrow \downarrow_p \text{Cub}_0^{a,b+1}\right)}{\text{Im}\left(d_\downarrow : \downarrow_p \text{Cub}_0^{a,b-1} \rightarrow \downarrow_p \text{Cub}_0^{a,b}\right)}.$$

4.3.1. *Calcul de la première page.* La $a^{\text{ème}}$ colonne est donnée par

$$\downarrow_p \text{Cub}_0^{a,\bullet} : \quad \cdots \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\eta \in \Sigma_a \\ \sigma \in \Sigma_{-b+1} \\ \sigma < \eta}} \mathbf{F}^p(\eta^\sigma) \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\eta \in \Sigma_a \\ \sigma \in \Sigma_{-b} \\ \sigma < \eta}} \mathbf{F}^p(\eta^\sigma) \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\eta \in \Sigma_a \\ \sigma \in \Sigma_{-b-1} \\ \sigma < \eta}} \mathbf{F}^p(\eta^\sigma) \longrightarrow \cdots$$

On peut voir qu'elle se décompose en une somme directe de complexes

$$\downarrow_p \text{Cub}_0^{a,\bullet} = \bigoplus_{\eta \in \Sigma_a} \downarrow_p \text{Cub}_0^{\eta,\bullet},$$

où chaque terme est défini par

$$\downarrow_p \text{Cub}_0^{\eta,\bullet} : \quad \cdots \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\sigma \in \Sigma_{-b+1} \\ \sigma < \eta}} \mathbf{F}^p(\eta^\sigma) \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\sigma \in \Sigma_{-b} \\ \sigma < \eta}} \mathbf{F}^p(\eta^\sigma) \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\sigma \in \Sigma_{-b-1} \\ \sigma < \eta}} \mathbf{F}^p(\eta^\sigma) \longrightarrow \cdots$$

Fixons $\eta \in \Sigma_a$. L'ensemble des faces de la forme η^σ pour $\sigma < \eta$ forme un sous-treillis de Σ isomorphe au treillis de l'hypercube semi-ouvert $\mathbb{T}^{|\eta|}$ (où l'on munit \mathbb{T} des faces \mathbb{T} et $\{\infty\}$). De plus, on a une décomposition non canonique

$$\mathbf{F}^p(\eta^\sigma) \simeq \bigoplus_{p_1+p_2=p} \mathbf{F}^{p_1}(\infty_\eta) \otimes \mathbf{F}^{p_2}(\mathbb{R}^{|\eta|-|\sigma|}).$$

Les détails de cette preuve sont dans la section 7.2.3 du chapitre 2, voir aussi section 7.4.3 concernant la décomposition ci-dessus. Brièvement, on obtient

$$\downarrow_p \text{Cub}_0^{\eta,\bullet} \simeq \bigoplus_{p_1+p_2=p} \mathbf{F}^{p_1}(\infty_\eta) \otimes C^{p_2,\bullet+|\eta|}(\mathbb{T}^{|\eta|}),$$

puis, comme la cohomologie de \mathbb{T}^k est concentrée en bidegré (k, k) et $H^{k,k}(\mathbb{T}^k) \simeq \mathbb{k}$, on obtient finalement que

$$\downarrow_p \text{Cub}_1^{\eta,b} := H^b(\downarrow_p \text{Cub}_0^{\eta,\bullet}) = \begin{cases} \mathbf{F}^{p-|\eta|}(\infty_\eta) & \text{si } b = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Finalement la première page $\downarrow_p \text{Cub}_1^{\bullet,\bullet}$ est triviale partout sauf en rangée zéro où elle est isomorphe à $C_\square^{p,\bullet}(\overline{\Sigma})$; les isomorphismes de doubles complexes doivent conserver le degré donc cela signifie que $\downarrow_p \text{Cub}_1^{a,0} = C_\square^{p,a}(\overline{\Sigma})$.

4.3.2. *Calcul de la deuxième page.* On peut facilement montrer que la différentielle d_\downarrow induit une différentielle $d_\rightarrow : \downarrow_p \text{Cub}_1^{\bullet,\bullet} \rightarrow \downarrow_p \text{Cub}_1^{\bullet+1,\bullet}$ sur la première page. La deuxième page consiste à calculer la cohomologie selon cette différentielle :

$$\downarrow_p \text{Cub}_2^{a,b} := H^a(\downarrow_p \text{Cub}_1^{\bullet,b}, d_\rightarrow).$$

Ici, nous pouvons vérifier que la différentielle induite par d_\rightarrow est bien la différentielle associée à $C_\square^{p,\bullet}(\overline{\Sigma})$, c'est-à-dire

$$(\downarrow_p \text{Cub}_1^{\bullet,0}, d_\rightarrow) \simeq (C_\square^{p,\bullet}(\overline{\Sigma}), d_\square).$$

Donc la deuxième page de la suite spectrale est concentrée en rang 0 et elle est isomorphe à la cohomologie de $C_{\square}^{p,\bullet}(\overline{\Sigma})$:

$$\downarrow_p \text{Cub}_2^{a,b} = \begin{cases} H_{\square}^{p,a}(\overline{\Sigma}) & \text{si } b = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.3.3. *Calcul des pages suivantes.* Il existe une différentielle naturelle d_2 sur la seconde page de toute suite spectrale $E_{\bullet,\bullet}^{\bullet,\bullet}$ de bidegré $(2, -1)$ c'est-à-dire que $d_2 : E_2^{\bullet,\bullet} \rightarrow E_2^{\bullet+2,\bullet-1}$. La troisième page consiste à prendre la cohomologie pour cette différentielle.

De manière générale, nous obtenons à la $k^{\text{ème}}$ page une différentielle $d_k : E_k^{\bullet+k,\bullet+1-k}$ et la page $E_{k+1}^{\bullet,\bullet}$ est obtenue en prenant la cohomologie pour cette différentielle.

Dans le cas qui nous intéresse ici, comme $E_2^{\bullet,\bullet}$ est concentrée en rang 0, la différentielle d_2 est triviale. Donc $E_3^{\bullet,\bullet} = E_2^{\bullet,\bullet}$. De même, d_3 est triviale et ainsi de suite. Donc $E_r^{\bullet,\bullet} = E_2^{\bullet,\bullet}$ pour tout $r \geq 2$. On dit que la suite spectrale *dégénère* en page deux.

Comme nous n'étudions ici que des suites spectrales bornées (c'est-à-dire que $E_0^{a,b} = 0$ pour $|a|$ ou $|b|$ grand), les suites spectrales vont forcément dégénérer en une page r fini, et l'on note $E_{\infty}^{\bullet,\bullet}$ la page obtenue, c'est-à-dire $E_{\infty}^{\bullet,\bullet} = E_k^{\bullet,\bullet}$ pour tout $k \geq r$.

4.3.4. *Fin de la preuve.* Le théorème fondamental des suites spectrales nous dit que dans notre cas

$$\text{Tot}^{\bullet}(\downarrow_p \text{Cub}_{\infty}^{\bullet,\bullet}) \simeq H^{\bullet}(\text{Tot}^{\bullet}(\downarrow_p \text{Cub}_0^{\bullet,\bullet})).$$

Cet isomorphisme est vrai ici car nous travaillons avec des espaces vectoriels, mais même dans ce cas, il n'est en général pas canonique. En toute généralité, les parties $\downarrow_p \text{Cub}_{\infty}^{a,b}$ avec $a + b = q$ forment en fait les gradués d'une filtration de $H^q(\text{Tot}^{\bullet}(\downarrow_p \text{Cub}_0^{\bullet,\bullet}))$. Comme il n'y a pas forcément d'isomorphisme, on écrit généralement

$$\downarrow_p \text{Cub}_{\infty}^{\bullet,\bullet} \implies H^{\bullet}(\text{Tot}^{\bullet}(\downarrow_p \text{Cub}_0^{\bullet,\bullet})).$$

Dans notre cas, comme $\downarrow_p \text{Cub}_{\infty}^{\bullet,\bullet} = \downarrow_p \text{Cub}_2^{\bullet,\bullet}$ est concentrée en une seule rangée, le complexe total associé est simplement $H_{\square}^{p,\bullet}(\overline{\Sigma})$. Chaque groupe du complexe total n'est constitué que d'une seule partie non triviale, l'isomorphisme est donc canonique. En rappelant que $\text{Tot}^{\bullet}(\downarrow_p \text{Cub}_0^{\bullet,\bullet})$ n'est autre que $C^{p,\bullet}(\overline{\Sigma})$, nous obtenons finalement ce que nous souhaitons, à savoir l'isomorphisme

$$H_{\square}^{\bullet,\bullet}(\overline{\Sigma}) \simeq H^{\bullet,\bullet}(\overline{\Sigma}). \quad \square$$

4.4. **Preuve du théorème 4.3.** Supposons que Σ^{σ} vérifie la dualité de Poincaré pour toute face $\sigma \neq \emptyset$. Nous voulons montrer que Σ vérifie la dualité de Poincaré si et seulement si c'est le cas pour $\overline{\Sigma}$. La preuve peut être trouvée en chapitre 2 section 7.2.4.

Montrons d'abord le sens direct. Pour cela, nous allons exploiter la seconde suite spectrale associée à $\downarrow_p \text{Cub}^{\bullet,\bullet}$, à savoir celle induite par la filtration selon les rangées. Nous la notons naturellement $\rightarrow_p \text{Cub}^{\bullet,\bullet}$.

Calculons d'abord la première page, c'est-à-dire la cohomologie de chaque rangée. On peut décomposer la rangée b en la somme directe suivante

$$\rightarrow_p \text{Cub}_0^{\bullet,b} = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{-b}} C_c^{p,\bullet+b}(\Sigma_{\infty}^{\sigma}).$$

Si σ est de dimension $-b$, par la dualité de Poincaré pour Σ^{σ} , comme nous l'avons déjà vu dans l'exemple 3.13, alors

$$H_c^{p,q}(\Sigma_{\infty}^{\sigma}) = \begin{cases} \mathbf{F}_{d+b-p}(\infty_{\sigma}) & \text{si } q = d + b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc la première page est concentrée en colonne d et vérifie

$$\rightarrow_p \mathbf{Cub}_1^{d,b} = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{-b}} \mathbf{F}_{d+b-p}(\infty_\sigma).$$

On reconnaît le dual du complexe de cochaîne $C_\square^{d-p,\bullet}(\overline{\Sigma})$. C'est en effet bien le cas car Σ est orientée (nous passons les détails ici). En utilisant le dual du théorème 4.1, on obtient donc que l'homologie de ce dual est isomorphe à $H_{d-p,\bullet}(\overline{\Sigma})$.

En prenant en compte le décalage, on en déduit que la deuxième page $\rightarrow_p \mathbf{Cub}_2^{\bullet,\bullet}$ est concentrée en colonne d et est isomorphe à $H_{d-p,d-\bullet}(\overline{\Sigma})$. De plus, la suite spectrale dégénère en page deux. Comme précédemment,

$$\rightarrow_p \mathbf{Cub}^{\bullet,\bullet} \implies H^{p,\bullet}(\overline{\Sigma}).$$

On en déduit l'isomorphisme $H_{d-p,d-\bullet}(\overline{\Sigma}) \simeq H^{p,\bullet}(\overline{\Sigma})$. Il s'agit bien de la dualité de Poincaré.

Le sens réciproque est plus délicat à montrer car a priori la rangée zéro de la première page n'est pas triviale. Nous pouvons tout de même nous en sortir grâce à une étude plus poussée de la suite spectrale. Nous ne la reproduisons pas ici. \square

La preuve du théorème 4.6 affaibli se fait de manière similaire. L'hypothèse que $H_C^{p,q}(\Sigma^\sigma) = 0$ pour $q < d - |\sigma|$ revient à dire que la première page $\rightarrow_p \mathbf{Cub}_1^{\bullet,\bullet}$ est concentrée en colonne d . Par récurrence, on peut de plus supposer que tous les éventails Σ^σ vérifient la dualité de Poincaré pour $\sigma \neq \underline{0}$. La première page est donc isomorphe au dual de $C_\square^{d-p,\bullet}(\overline{\Sigma})$ (avec un décalage), sauf le dernier terme : $\rightarrow_p \mathbf{Cub}_1^{d,0} = H_C^{p,d}(\Sigma)$ qui n'est pas forcément isomorphe $\mathbf{F}_{d-p}(\underline{0})$. Comme le début des deux complexes coïncident, on peut tout de même conclure comme précédemment que $H^{p,q}(\overline{\Sigma}) \simeq H_{d-p,d-q}(\overline{\Sigma})$, sauf pour q égal à d ou $d - 1$. Mais dans ces cas-là, on utilise simplement le fait que l'on a déjà la dualité pour q égal 0 ou 1. Cela ne fonctionne que si $d > 2$, d'où la condition. \square

4.5. Preuve du théorème 4.7. Le double complexe précédent est une façon de décomposer la cohomologie de $\overline{\Sigma}$ en les cohomologies à support compact des structures simpliciales Σ_∞^σ . Cela peut être interprété comme un analogue cohomologique du fait que $\overline{\Sigma}$ est l'union disjointe des Σ_∞^σ .

Le théorème d'inclusion-exclusion nous dit alors que Σ peut être décomposée sous la forme $\sum_{\sigma \in \Sigma} (-1)^{|\sigma|} \overline{\Sigma}_\infty^\sigma$. Pour que cela ait un sens, on peut par exemple considérer les fonctions caractéristiques sur les supports associés. En terme cohomologique, on peut interpréter cela de la façon suivante. Considérons le double complexe $\mathbf{Del}^{\bullet,\bullet}$ défini par

$$\mathbf{Del}^{a,\bullet} = \bigoplus_{\eta \in \Sigma_a} C_{\text{cell}}^{\bullet}(\overline{\Sigma}_\infty^\eta),$$

où $C_{\text{cell}}^{\bullet}(\overline{\Sigma}_\infty^\sigma)$ désigne le complexe de cochaînes cellulaire, ou polyédral, classique. Les différentielles horizontales sont donnés par les restrictions : on envoie $[\sigma_\infty^\tau] \in C_{\text{cell}}^q(\overline{\Sigma}_\infty^\tau)$ sur $\text{sign}(\eta, \eta')[\sigma_\infty^\tau] \in C_{\text{cell}}^q(\overline{\Sigma}_\infty^{\eta'})$ où $\eta < \eta' < \tau < \sigma$, et $q = |\sigma_\infty^\tau|$. Chaque face σ^τ apparaît une fois pour chaque face $\eta < \tau$. En utilisant un argument similaire à la preuve de la formule d'inclusion-exclusion, on en déduit que seules les faces de sédentarité $\underline{0}$ survivent à la cohomologie :

$$H^a(\mathbf{Del}^{\bullet,b}) \simeq \begin{cases} C_{\text{cell},c}^b(\Sigma) & \text{si } a = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce n'est pas totalement immédiat mais le même argument fonctionne si l'on remplace le faisceau constant par le faisceau \mathbf{F}^p . On peut aussi faire le même argument avec le faisceau \mathcal{F}^p , c'est ce qui est fait en section 7 du chapitre 2 pour démontrer ce même théorème 4.7. Posons

$${}_p \mathbf{Del}^{a,\bullet} = \bigoplus_{\eta \in \Sigma_a} C^{p,\bullet}(\overline{\Sigma}_\infty^\eta).$$

Étudions d'abord la suite spectrale induite par la filtration selon les rangées. Par l'argument ci-dessus, la première page $\vec{p}\text{Del}_1^{\bullet,\bullet}$ est concentrée en colonne 0 et est isomorphe à $C_c^{p,\bullet}(\Sigma)$. Donc la suite spectrale dégénère en deuxième page et

$$\vec{p}\text{Del}_1^{\bullet,\bullet} \implies H_c^{p,\bullet}(\Sigma).$$

Maintenant on peut étudier l'autre suite spectrale, qui elle aussi va calculer $H_c^{p,\bullet}(\Sigma)$. Par la définition de ${}_p\text{Del}^{\bullet,\bullet}$, la première page est donnée par

$$\downarrow\text{Del}_1^{a,b} = \bigoplus_{\eta \in \Sigma_a} H^{p,b}(\overline{\Sigma}_\infty^\eta).$$

Si Σ est lisse, par le corollaire 4.2, $\downarrow\text{Del}_1^{\bullet,\bullet}$ est concentré en colonne p et est isomorphe au complexe

$$0 \rightarrow H^{p,p}(\overline{\Sigma}) \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_1} H^{p,p}(\overline{\Sigma}^\sigma) \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_2} H^{p,p}(\overline{\Sigma}^\sigma) \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{d-p}} H^{p,p}(\overline{\Sigma}^\sigma) \rightarrow 0.$$

Donc $\downarrow\text{Del}_1^{\bullet,\bullet}$ dégénère en page deux. On en déduit que la cohomologie du complexe ci-dessus coïncide avec la cohomologie $H_c^{p,\bullet}(\Sigma)$. Comme Σ est lisse, cette dernière est triviale sauf en degré d où elle est isomorphe à $\mathbf{F}_{d-p}(\mathbb{0})$. Dans le complexe ci-dessus, le degré d correspond au dernier terme. Ceci conclut la preuve de l'exactitude de la suite étudiée et donc le théorème 4.7. \square

4.6. Lien avec la suite spectrale de Deligne. Nous pouvons maintenant expliquer le lien entre le théorème 4.7 et ce qu'on appelle la suite spectrale de Deligne. Une variété projective lisse complexe W possède toujours une décomposition naturelle de sa cohomologie à coefficients complexes de la forme $H^k(W) = \bigoplus_{k=p+q} H^{p,q}(W)$. C'est ce qu'on appelle une structure de Hodge. Nous souhaiterions avoir une telle décomposition pour toutes les variétés quasi-projectives lisses (et pour les variétés projectives non lisses), c'est-à-dire lorsque l'on ne suppose plus que W est compacte. Une décomposition aussi simple n'est plus possible en général, mais nous pouvons tout de même munir $H^k(W)$ d'une structure légèrement plus compliquée appelée structure de Hodge mixte. C'est ce qu'a montré Deligne dans une série d'articles [Del71b, Del71a, Del74], pour une courte introduction parmi de nombreuses autres, voir [Dur81].

Pour assigner une telle structure à une variété non compacte V , l'idée est de trouver une bonne compactification \overline{V} de V , puis d'utiliser la suite spectrale de Deligne qui calcule la structure de Hodge mixte sur V à partir des structures de Hodge des strates qui, elles, sont compactes.

Pour voir le lien avec notre travail, supposons que V soit le plongement d'un complémentaire d'arrangement d'hyperplans dans le tore. On peut utiliser la compactification de V donnée par l'éventail de Bergman associé. Comme les cohomologies des strates sont très simples, la suite spectrale de Deligne est elle-même très simple. On obtient finalement le théorème suivant, ici donné sous sa forme tropicale.

THÉORÈME 4.9 (Résolution de Deligne tropicale). *Si Σ est lisse, nous avons la suite exacte suivante*

$$0 \rightarrow \mathbf{F}^k(\mathbb{0}) \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_k} H^0(\overline{\Sigma}_\infty^\sigma) \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{k-1}} H^2(\overline{\Sigma}_\infty^\sigma) \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_1} H^{2k-2}(\overline{\Sigma}_\infty^\sigma) \rightarrow H^{2k}(\overline{\Sigma}) \rightarrow 0. \quad \square$$

Cette suite exacte est simplement le dual de Poincaré du théorème 4.7 en posant $k = d - p$. Du point de vue de la discussion ci-dessus, si Σ est l'éventail de Bergman associé à V , on peut interpréter $\mathbf{F}^k(\mathbb{0})$ comme la cohomologie de degré k de V , et $H^{2k}(\overline{\Sigma}_\infty^\sigma)$ comme la cohomologie la strate fermée associée à σ dans la compactification $\overline{V} \subseteq \mathbb{C}\mathbb{P}_\Sigma$. En effet, par le travail de Feichtner et Yuzvinsky [FY04], comme nous le verrons en section 9, la cohomologie de cette strate est nulle en degrés impairs et est égale à $H^{2k}(\overline{\Sigma}_\infty^\sigma)$ en degré $2k$.

QUESTION 4.10. Peut-on établir une théorie des structures de Hodge tropicales mixtes? \diamond

Notamment, pour les structures simpliciales affines lisses, l'analogie du théorème 4.9 s'applique à la compactification canonique. Pour le cas non lisse, il s'agirait de développer une théorie de désingularisation pour les variétés tropicales, voir question 6.14.

5. Théorie de Hodge combinatoire et anneau de Chow d'un éventail

Commençons par donner un bref récapitulatif historique du développement de la théorie de Hodge combinatoire. Le vocabulaire utilisé ci-dessous sera défini plus loin dans cette section.

Si P est un polytope simple de dimension d , c'est-à-dire si tous ses sommets sont adjacents à d arêtes, on peut se demander quelle est la forme de son f -vecteur (f_0, \dots, f_n) où f_i désigne le nombre de faces de P de dimension i . En général, on regarde plutôt son h -vecteur qui est défini par

$$\sum_i h_i x^i = \sum_i f_i (x-1)^i.$$

Par exemple, h_d vaut toujours 1, et h_0 est la caractéristique d'Euler-Poincaré du polytope donc $h_0 = 1$. Plus généralement, Sommerville a montré en 1927 que $h_i = h_{n-i}$. En 1970, McMullen va plus loin et énonce la g -conjecture dans [McM71] qui caractérise entièrement les h -vecteurs des polytopes simples. Dans [BL81], Billera et Lee montrent la suffisance des conditions de McMullen. Stanley a finalement résolu la conjecture dans [Sta80] en remarquant que la nécessité était impliquée par le théorème de Lefschetz difficile pour l'anneau de Chow associé à P . Par la suite, la théorie de Hodge combinatoire s'est beaucoup développée. (Ici on parle de théorie de Hodge dans un sens assez large; on y inclut notamment le théorème de Lefschetz difficile.) En particulier, cette théorie a connu d'importants résultats dans ces dernières années [Kar04, FK10, AHK18, Adi18, BHM⁺20a, BHM⁺20b].

Citons en premier lieu [Adi18] où Adiprasito généralise le théorème de Lefschetz difficile, et donc le g -théorème, aux sphères simpliciales. Dans cette section, nous souhaitons présenter un nouveau point de vue qu'apporte la théorie de Hodge tropicale sur certains outils employés par Adiprasito, outils qui sont exposés dans [AY20].

Citons ensuite [AHK18] où Adiprasito, Huh et Katz montrent que l'anneau de Chow d'un éventail de Bergman vérifie le théorème de Lefschetz difficile et les relations de Hodge-Riemann. Cela a permis de résoudre plusieurs conjectures en combinatoire, comme la log-concavité des coefficients du polynôme caractéristique d'un matroïde. Dans cette thèse, nous montrons que ces résultats sur les éventails de Bergman font en fait partie d'un cadre plus général à savoir la théorie de Hodge tropicale. Entre autre, nous généralisons le résultat de [AHK18] à d'autres éventails, tout en apportant une nouvelle preuve plus naturelle sur certains points.

Nous souhaitons aussi parler du résultat de Karu dans [Kar04] où il montre que la cohomologie d'intersection de l'éventail dual de n'importe quel polytope P , a priori ni rationnel ni simple, vérifie le théorème de Lefschetz difficile et les relations de Hodge-Riemann. Cette cohomologie d'intersection combinatoire est étudiée dans [BBFK02]. Dans le cas rationnel, l'argument de Stanley donne déjà le résultat via la cohomologie d'intersection de la variété torique associée. Notons que les nombres de Betti de la cohomologie ne donnent pas le h -vecteur du polytope P comme défini ci-dessus : le g -théorème est faux pour un polytope quelconque. Dans le cas d'un éventail non simplicial, on peut définir sa compactification canonique comme dans 2.2 du chapitre 2.

QUESTION 5.1. Y a-t-il un lien entre la cohomologie d'intersection d'un éventail complet Σ et la cohomologie tropicale ou une cohomologie similaire sur la compactification canonique de Σ ? \diamond

EXEMPLE 5.2. S'il existe, ce lien n'est pas trivial. En effet, soit σ un cône tridimensionnel à quatre rayons. Considérons $\bar{\sigma}$ sa compactification canonique, et U l'intérieur relatif de sa

compactification canonique. On vérifie facilement que $H^{p,q}(U)$ est concentrée en bidegré $(0,0)$ alors que $H_{2,2}^{\text{BM}}(U)$ est non trivial. On voit donc qu'en général la compactification canonique d'un éventail non simplicial ne va pas vérifier pas la dualité de Poincaré localement et ne sera donc pas lisse. \diamond

Bien que nous ne résolvons pas de nouveaux problèmes combinatoires à proprement parler dans cette thèse, il nous semble important de souligner les nombreux points d'intersections entre la théorie de Hodge combinatoire et la théorie de Hodge tropicale. Dans cette section, nous énonçons les résultats allant dans cette direction, certaines preuves seront toutefois faites dans les prochaines sections.

5.1. Anneau de Chow.

5.1.1. *Définition.* Soit Σ une structure simpliciale linéaire de dimension d . Pour $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$, on suppose de plus que Σ est rationnelle. Nous discutons du cas faiblement rationnel en remarque 5.29. Considérons l'algèbre de polynômes $\mathbb{k}[x_\varrho \mid \varrho \in \Sigma_1]$. Si F est un sous-ensemble de Σ_1 , typiquement $F = \sigma \in \Sigma$, on pose $x_F = \prod_{\varrho \in F} x_\varrho$. On définit un premier idéal

$$I_1 = (x_F \mid F \notin \Sigma).$$

Le quotient $\mathbb{k}[x_\varrho \mid \varrho \in \Sigma_1]/I_1$ est appelé l'*anneau de Stanley-Reisner* de Σ . Le second idéal est défini par

$$I_2 = \left(\sum_{\varrho \in \Sigma_1} \ell(\nu_\varrho) x_\varrho \mid \ell \in M_{\mathbb{k}} \right).$$

DÉFINITION 5.3. L'*anneau de Chow* de Σ , noté $A^\bullet(\Sigma)$, est l'algèbre graduée sur \mathbb{k} définie par

$$\mathbb{k}[x_\rho \mid \rho \in \Sigma_1]/(I_1 + I_2).$$

La graduation est celle induite par le degré des polynômes. \diamond

Le nom « anneau de Chow » est justifié par la propriété suivante. Si Σ est un éventail simplicial rationnel unimodulaire dans \mathbb{R}^n , alors l'anneau de Chow de Σ est isomorphe à l'anneau de Chow de la variété torique $\mathbb{C}\mathbb{P}_\Sigma$, cf. [Dan78, BDP90, Bri96, FS97]. On peut se poser la question de l'analogue tropical. Les groupes de Chow tropicaux sont par exemple définis dans [AR10].

QUESTION 5.4. Quel est le lien entre l'anneau de Chow tropical de TP_Σ et $A^\bullet(\Sigma)$? \diamond

Venons-en au lien avec l'introduction de cette section.

EXEMPLE 5.5. Soit P un polytope simple. Soit Σ son éventail dual, supposé rationnel. C'est un éventail simplicial. On a alors $\dim(A^i(\Sigma)) = h_i$ où h_i est le $i^{\text{ème}}$ terme du h -vecteur de P . Ainsi, par exemple, la dualité de Poincaré pour $A^\bullet(\Sigma)$ implique que le h -vecteur est symétrique. \diamond

En choisissant Θ une base de $M_{\mathbb{k}}$, et en considérant Σ comme un complexe simplicial abstrait plutôt que comme un éventail abstrait, l'anneau de Chow de Σ correspond à l'algèbre graduée notée $A(\Sigma)$ dans [AY20].

5.1.2. *Lemme de localisation.* Nous présentons ici une description alternative importante de l'anneau de Chow, à comparer avec la proposition 3.1 de [Adi18], qui renvoie à [Lee96], et avec la preuve de la proposition 5.6 de [AHK18].

Soit

$$Z^k(\Sigma) = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_k} \mathbb{k}x_\sigma \hookrightarrow \mathbb{k}[x_\varrho \mid \varrho \in \Sigma_1].$$

Il s'agit donc de la partie sans facteur carré de l'anneau de Stanley-Reisner. On a une application naturelle $Z^k(\Sigma) \rightarrow A^k(\Sigma)$. Rappelons la notation $\sigma \sim \tau$ qui signifie que σ et τ sont deux

faces vérifiant $\sigma \wedge \tau = \underline{0}$ et $\sigma \vee \tau \neq \mathbf{1}$. De plus, pour toute face $\tau \in \Sigma_{k-1}$ et toute application $\ell \in M_{\mathbb{k}}$ qui est nulle sur τ , ce qu'on peut écrire $\ell \in M_{\tau, \mathbb{k}}^{\perp}$, l'élément

$$\sum_{\substack{\varrho \in \Sigma_1 \\ \varrho \sim \tau}} \ell(\nu_{\varrho})_{x_{\varrho} x_{\tau}} \in Z^k(\Sigma)$$

est dans le noyau de $Z^k(\Sigma) \rightarrow A^k(\Sigma)$. En effet, modulo un élément de I_1 , cette somme est égale à $x_{\tau} \sum_{\varrho \in \Sigma_1} \ell(\nu_{\varrho})_{x_{\varrho}} \in I_2$.

LEMME 5.6 (Lemme de localisation). *L'application $Z^k(\Sigma) \rightarrow A^k(\Sigma)$ est surjective et son noyau est engendré par les éléments de la forme*

$$\sum_{\substack{\varrho \in \Sigma_1 \\ \varrho \sim \tau}} \ell(\nu_{\varrho})_{x_{\varrho} x_{\tau}}$$

pour $\tau \in \Sigma_k$ et $\ell \in M_{\tau, \mathbb{k}}^{\perp}$.

DÉMONSTRATION. Il n'est pas très difficile de se convaincre de la surjectivité. Considérons par exemple un élément de la forme $x_{\rho}^2 x_{\rho_3} \cdots x_{\rho_k}$, avec $\rho, \rho_3, \dots, \rho_k$ différents. Si l'élément n'est pas dans I_1 , alors les rayons forment un cône τ . Comme $M_{\tau, \mathbb{k}}$ est de dimension $\dim(\tau)$, on peut trouver un élément $\ell \in M_{\mathbb{k}}$ qui est nul sur $\tau \setminus \{\rho\}$ et qui vaut un sur ν_{ρ} . Alors, modulo un élément de I_2 , notre élément de départ est équivalent à

$$\sum_{\varrho \in \Sigma_1 \setminus \{\rho\}} -\ell(\nu_{\varrho})_{x_{\varrho} x_{\rho} x_{\rho_3} \cdots x_{\rho_k}}$$

qui n'a pas de facteur carré. En supprimant les termes qui sont dans I_1 , on obtient bien un élément de $Z^k(\Sigma)$. Cet argument peut facilement se généraliser pour prouver la surjectivité. Avec plus de travail, on peut aussi trouver une preuve élémentaire du lemme : voir la section 6.8 du chapitre 2. \square

Il serait intéressant de définir un anneau de Chow pour les structures simpliciales affines. Par exemple, dans le cas où une telle structure est issue de la limite tropicale d'une famille de variétés, l'idée serait de comprendre la partie combinatoire de l'anneau de Chow de la fibre spéciale de la famille. Dans [Ami16], Amini étudie un anneau de Chow pour des produits de graphes et montre un théorème similaire au lemme de localisation ci-dessus.

5.1.3. *Lien avec la cohomologie tropicale.* Dans le cas où Σ est l'éventail dual d'un polytope qui est rationnel et unimodulaire, l'anneau de Chow de Σ est isomorphe à l'anneau de Chow et aussi à la cohomologie de $\mathbb{C}\mathbb{P}_{\Sigma}$ qui est une variété complexe projective lisse. C'est d'ailleurs comme cela que Stanley en déduit le théorème de Lefschetz difficile pour $A^{\bullet}(\Sigma)$, puisque ce théorème est connu initialement pour les variétés complexes projectives lisses. McMullen a généralisé ce résultat au cas où Σ est l'éventail dual d'un polytope simple quelconque dans [McM93].

Dans le cas où Σ est un éventail de Bergman réalisable sur \mathbb{C} , son support est donc la tropicalisation d'un complémentaire d'arrangement d'hyperplans W dans le tore. Le travail de Feichtner et Yuzvinsky [FY04] nous explique qu'une fois de plus $A^{\bullet}(\Sigma)$ est la cohomologie de $\overline{W} \subseteq \mathbb{C}\mathbb{P}_{\Sigma}$ qui est projective lisse. On en déduit de nouveau le théorème de Lefschetz difficile pour Σ .

Toutefois, lorsque l'éventail de Bergman n'est plus réalisable, l'argument ci-dessus n'est plus possible, voir [AHK18, théorème 5.12]. ($A^{\bullet}(\Sigma)$ est tout de même isomorphe l'anneau de Chow de $\mathbb{C}\mathbb{P}_{\Sigma}$ mais cette variété n'est pas compacte.) Le théorème ci-dessus, combiné avec le théorème 6.31, montre qu'il s'agit bien de la cohomologie d'une variété projective lisse mais au sens tropical.

THÉORÈME 5.7. *Soit Σ une structure simpliciale linéaire. Alors*

$$\begin{aligned} H^{k,k}(\overline{\Sigma}) &\longrightarrow A^k(\Sigma), \\ (\sigma, \alpha) &\longmapsto \alpha(\nu_\sigma)x_\sigma \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Cet isomorphisme induit un morphisme d'algèbres graduées $H^{\bullet,\bullet}(\overline{\Sigma}) \rightarrow A^\bullet(\Sigma)$ en envoyant $H^{p,q}(\overline{\Sigma})$ sur zéro pour $p \neq q$. De plus, si $\overline{\Sigma}$ vérifie la dualité de Poincaré, alors on obtient un isomorphisme $H^{\bullet,\bullet}(\overline{\Sigma}) \simeq A^\bullet(\Sigma)$.

DÉMONSTRATION. Pour les détails, voir la preuve du chapitre 2 théorème 7.1. Par le théorème 4.1,

$$H^{k,k}(\overline{\Sigma}) \simeq H_{\square}^{k,k}(\overline{\Sigma}) = \text{coker} \left(\bigoplus_{\tau \in \Sigma_{k-1}} \mathbf{F}^1(\infty_\tau) \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_k} \mathbf{F}^0(\infty_\sigma) \right).$$

Par comparaison avec le lemme de localisation 5.6, on obtient que ce conoyau est simplement $A^k(\Sigma)$.

Le fait que l'on obtient un morphisme d'algèbre est montré en chapitre 2 section 7.4, où l'on donne un inverse explicite pour l'application $H^{k,k}(\overline{\Sigma}) \rightarrow A^k(\Sigma)$ et où l'on décrit précisément le cup-produit sur $H^{\bullet,\bullet}(\overline{\Sigma})$.

La dernière partie de la preuve est une simple conséquence du corollaire 4.2. \square

5.2. Morphisme de Gysin et restriction. Si $\sigma \in \Sigma$, il y a un *morphisme de restriction* $i_{\underline{0}<\sigma}^* : A^\bullet(\Sigma) \rightarrow A^\bullet(\Sigma^\sigma)$. C'est un morphisme d'algèbres surjectif naturel correspondant à la restriction $i_{\underline{0}<\sigma}^* : H^{\bullet,\bullet}(\overline{\Sigma}) \rightarrow H^{\bullet,\bullet}(\overline{\Sigma}^\sigma)$ entièrement décrit par

$$i_{\underline{0}<\sigma}^*(x_\rho) = \begin{cases} x_{(\sigma \vee \rho)^\sigma} & \text{si } \rho \sim \sigma, \\ 0 & \text{si } \rho \text{ n'est pas comparable à } \sigma. \end{cases}$$

Si $\rho \in \sigma$, l'image de x_ρ peut être calculé en ajoutant un élément de l'idéal I_2 .

Si Σ est lisse, ou simplement si $A^\bullet(\Sigma)$ et $A^\bullet(\Sigma^\sigma)$ vérifie la dualité de Poincaré, alors $i_* : A^k(\Sigma) \rightarrow A^k(\Sigma^\sigma)$ induit un morphisme $A^{d-k}(\Sigma)^\star \rightarrow A^{d-|\sigma|-k}(\Sigma^\sigma)^\star$. Le morphisme dual est appelé *morphisme de Gysin* et noté $\text{gys}_{\sigma>\underline{0}} : A^\bullet(\Sigma^\sigma) \rightarrow A^{\bullet+|\sigma|}(\Sigma)$. C'est un morphisme linéaire injectif entièrement décrit par

$$\text{gys}_{\sigma>\underline{0}}(x_{\eta^\sigma}) = x_\eta$$

pour tout $\eta > \sigma$. On note de même l'application correspondante

$$\text{gys}_{\sigma>\underline{0}} : H^{\bullet,\bullet}(\Sigma^\sigma) \rightarrow H^{\bullet+|\sigma|,\bullet+|\sigma|}(\Sigma).$$

Plus généralement, si Σ est lisse, pour toute paire de faces $\tau < \sigma$, on obtient des applications $i_{\tau<\sigma}^* : A^\bullet(\Sigma^\tau) \rightarrow A^\bullet(\Sigma^\sigma)$ et $\text{gys}_{\sigma>\tau} : A^\bullet(\Sigma^\sigma) \rightarrow A^{\bullet+|\sigma|-|\tau|}(\Sigma^\tau)$, et de même en cohomologie. On vérifie alors facilement la proposition suivante.

PROPOSITION 5.8. *La composition $\text{gys}_{\sigma>\tau} \circ i_{\tau<\sigma}^* : A^\bullet(\Sigma^\tau) \rightarrow A^{\bullet+|\sigma|-|\tau|}(\Sigma^\tau)$ correspond à la multiplication par x_σ .* \square

5.3. Lefschetz difficile et Hodge-Riemann. Nous supposons désormais que Σ est orientée. Par le théorème 5.7, on obtient une application degré naturelle

$$\begin{aligned} \text{deg} : A^d(\Sigma) &\rightarrow \mathbb{k}, \\ x_\eta &\rightarrow w(\eta), \end{aligned}$$

où $w(\eta)$ désigne le poids de la face η dans l'élément canonique $[\Sigma]$.

DÉFINITION 5.9 (Dualité de Poincaré). On dit que l'anneau de Chow de Σ vérifie la *dualité de Poincaré* si pour tout entier k , la composition

$$A^k(\Sigma) \otimes A^{d-k}(\Sigma) \longrightarrow A^d(\Sigma) \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{k}$$

est un accouplement parfait. \diamond

Voici une conséquence directe du théorème 5.7.

PROPOSITION 5.10. *Si la cohomologie tropicale de $\bar{\Sigma}$ vérifie la dualité de Poincaré alors $A^\bullet(\Sigma)$ vérifie la dualité de Poincaré.* \square

La réciproque est fautive en générale car $H^{p,q}(\bar{\Sigma})$ pour $p > q$ n'est pas forcément nul (voir exemple 11.1 dans le chapitre 2).

DÉFINITION 5.11. Supposons que Σ vérifie la dualité de Poincaré. Soit ℓ un élément de $A^1(\Sigma)$. On dit que ℓ est un opérateur de Lefschetz si pour tout entier $k \leq d/2$, l'application

$$\begin{aligned} \cdot \ell^{d-2k} : A^k(\Sigma) &\longrightarrow A^{d-k}(\Sigma), \\ a &\longmapsto \ell^{d-2k} a, \end{aligned}$$

est un isomorphisme. On note cette propriété $\text{HL}(A^\bullet(\Sigma), \ell)$.

On dit que $A^\bullet(\Sigma)$ vérifie le *théorème de Lefschetz difficile*, noté HL en bref pour « Hard Lefschetz », si $A^1(\Sigma)$ contient au moins un opérateur de Lefschetz. \diamond

Soit ℓ un opérateur de Lefschetz pour $A^\bullet(\Sigma)$. On peut alors définir les *parties primitives* de Σ associées par

$$A_{\text{prim}}^k(\Sigma) = \ker(\ell^{d-2k+1} : A^k(\Sigma) \rightarrow A^{d-k+1}(\Sigma)) \subseteq A^k(\Sigma).$$

On démontre facilement la proposition suivante.

PROPOSITION 5.12. *L'application $\cdot \ell : A^k(\Sigma) \rightarrow A^{k+1}(\Sigma)$ est injective pour $k < d/2$ et surjective pour $k \geq d/2$. De plus, pour tout $k \leq d/2$,*

$$A^k(\Sigma) = \bigoplus_{i=0}^k \ell^i A_{\text{prim}}^{k-i}(\Sigma). \quad \square$$

DÉFINITION 5.13. Soit ℓ un opérateur de Lefschetz pour $A^\bullet(\Sigma)$. On dit que la paire $(A^\bullet(\Sigma), \ell)$ vérifie les *relations de Hodge-Riemann*, et l'on note $\text{HR}(A^\bullet(\Sigma), \ell)$, si pour tout entier $k \leq d/2$, l'accouplement

$$\begin{aligned} A^k(\Sigma) \otimes A^k(\Sigma) &\longrightarrow \mathbb{k}, \\ a \otimes b &\longmapsto \deg(\ell^{d-2k} ab) \end{aligned}$$

est définie positive sur $A_{\text{prim}}^k(\Sigma)$. \diamond

De nombreuses propriétés liant ces trois différentes définitions peuvent être trouvées en chapitre 3, proposition 3.5. Les trois propriétés sont appelées dans cette thèse les *propriétés kählériennes*, ce qui est une tentative de traduction pour « Kähler package ».

EXEMPLE 5.14. Soit V une variété complexe projective lisse, ou plus généralement une variété kählérienne. Alors toute classe ample $\ell \in H^2(V)$, ou plus généralement toute classe de Kähler, vérifie le théorème de Lefschetz difficile $\text{HL}(H^{2\bullet}(V), \ell)$ et les relations de Hodge-Riemann $\text{HR}(H^{2\bullet}(V), \ell)$ où les définitions ci-dessus sont adaptées pour l'algèbre graduée $H^{2\bullet}(V)$. Tous les indices doivent être multipliés par deux ; par exemple, on a un isomorphisme $\cdot \ell^{d-2k} : H^{2k}(V) \rightarrow H^{2d-2k}(V)$. \diamond

EXEMPLE 5.15. Soit P un polytope simple de dimension d et soit Σ son éventail dual. On a vu que $A^\bullet(\Sigma)$ vérifie HL. On en déduit que $A^k(\Sigma) \simeq A^{d-k}(\Sigma)$ et que $\dim(A^k(\Sigma)) \leq \dim(A^{k+1}(\Sigma))$, pour $k < d/2$. Ainsi, le h -vecteur de Σ est symétrique, $h_k = h_{d-k}$, et unimodal, c'est-à-dire qu'il est croissant puis décroissant. C'est le genre d'application typique de la théorie de Hodge combinatoire. \diamond

En section 6, nous construisons toute une famille de structures simpliciales linéaires qui vérifient les propriétés kählériennes. Cette famille contient notamment les éventails duaux aux éventails des polytopes, ainsi que les éventails de Bergman généralisés, ce qui fournit une généralisation de [AHK18]. En section 7, nous montrons comment passer du local au global, c'est-à-dire des structures simpliciales linéaires aux structures simpliciales affines.

Rappelons que nous avons défini la notion de fonctions linéaires par morceaux sur Σ en section 2.4. Si f est une telle fonction, on peut naturellement lui associer un élément de $A^1(\Sigma)$ défini par $\sum_{\varrho \in \Sigma_1} f(\varrho) x_{\varrho}$. Si f est strictement convexe, alors l'élément obtenu est appelé une *classe ample*. C'est l'exemple typique d'élément que l'on va prendre pour tenter d'avoir un opérateur de Lefschetz. Si de plus on a les propriétés kählériennes $\text{HL}(\Sigma, \ell)$ et $\text{HR}(\Sigma, \ell)$, on appelle ℓ une *classe kählérienne*. Nous verrons en section 6.11 qu'une classe ample n'est pas forcément une classe kählérienne même si Σ lisse.

DÉFINITION 5.16. Soit Σ une structure simpliciale linéaire. On dit que Σ est *kählérienne* si elle est quasi-projective et si toute classe ample de $A^1(\Sigma)$ est kählérienne. \diamond

5.4. Dualité de Poincaré pour les sphères simpliciales. Dans cette section nous redémontrons grâce à la théorie développée précédemment certains résultats connus en théorie de Hodge combinatoire qui sont notamment présents dans l'article [AY20].

Soit Σ une structure simpliciale linéaire de dimension d . On dit que Σ est *de dimension maximale* si $\dim(\Sigma) = \dim(M_{\mathbb{k}})$. Notons que, dans ce cas, toutes les structures transverses Σ^{σ} sont elles aussi de dimensions maximales.

PROPOSITION 5.17. Si Σ est de dimension maximale, alors $H_c^{p,q}(\Sigma) = H_{\text{sing},c}^q(\Sigma) \otimes \bigwedge^p M_{\mathbb{k}}$.

Ici $H_{\text{sing}}^{\bullet}(\Sigma)$ désigne l'homologie singulière classique de Σ à coefficients dans \mathbb{k}

DÉMONSTRATION. Comme $M_{\mathbb{k}}$ est de dimension d , pour toute facette $\eta \in \Sigma_d$, $M_{\eta, \mathbb{k}} = M_{\mathbb{k}}$. Donc pour toute face $\sigma \in \Sigma$, $M_{\mathbb{k}}(\sigma) = M_{\mathbb{k}}$. La cohomologie tropicale $H_c^{p,\bullet}(\Sigma)$ est alors à coefficients constants, à savoir à coefficients dans $\bigwedge^p M_{\mathbb{k}}$. Le théorème des coefficients universels conclut la démonstration. \square

On dit qu'une structure simpliciale linéaire Σ , ou plus généralement qu'un éventail abstrait Σ , est *de Cohen-Macaulay* si pour tout cône $\sigma \in \Sigma$, la cohomologie classique $H_{\text{sing},c}^{\bullet}(\Sigma^{\sigma})$ de l'éventail transverse est concentrée en degré $d - |\sigma|$.

PROPOSITION 5.18. Soit Σ une structure simpliciale linéaire de Cohen-Macaulay de dimension maximale. Alors la projection $H^{\bullet,\bullet}(\overline{\Sigma}) \rightarrow A^{\bullet}(\Sigma)$ est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. Par la proposition 5.17, comme Σ est de Cohen-Macaulay, la cohomologie $H_c^{p,\bullet}(\Sigma^{\sigma})$ est concentrée en degré $d - |\sigma|$ pour tout $\sigma \in \Sigma$. Comme pour la preuve de théorème 4.6, nous en déduisons que la première page $\vec{p}\text{Cub}_1^{\bullet,\bullet}$ de Σ est concentrée en colonne d . De plus, $\vec{p}\text{Cub}_1^{\bullet,\bullet}$ est concentrée entre les rangées $-(d-p)$ et 0 . Ainsi la première page est concentrée entre les degrés $p = d + (-(d-p))$ et $d = d + 0$. Comme $\vec{p}\text{Cub}_1^{\bullet,\bullet} \Rightarrow H^{p,\bullet}(\overline{\Sigma})$, on en déduit que $H^{p,\bullet}(\overline{\Sigma})$ est concentrée en degré au moins p . Par le corollaire 4.2, on sait que le complexe est trivial en degrés plus que p . Donc $H^{p,q}(\overline{\Sigma})$ est trivial pour $p \neq q$. On conclut avec le théorème 5.7. \square

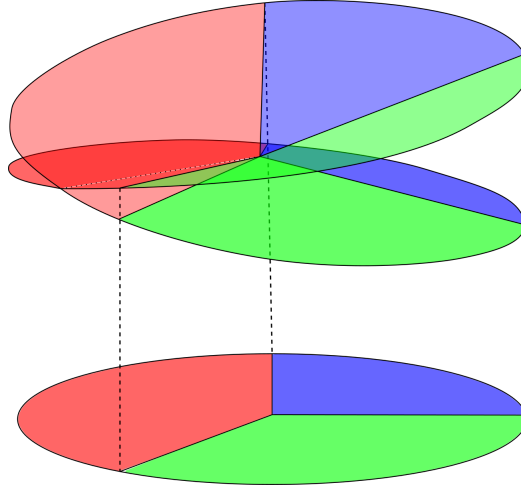
On dit qu'une structure simpliciale linéaire Σ , ou plus généralement qu'un éventail abstrait Σ , est *le cône d'une sphère simpliciale* si Σ est de Cohen-Macaulay et si de plus, pour tout $\sigma \in \Sigma$, $\dim(H_{\text{sing},c}^{d-|\sigma|}(\Sigma^{\sigma})) = 1$.

EXEMPLE 5.19. Un éventail complet de \mathbb{R}^d induit une structure simpliciale linéaire qui est le cône d'une sphère simpliciale et qui est de dimension maximale. \diamond

EXEMPLE 5.20 (Revêtement double de l'éventail projectif de dimension deux). Considérons la structure simpliciale linéaire Σ de dimension deux sur $\{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5\}$ représentée en figure 11. Ses cônes de dimensions deux sont les paires de la forme $\{\rho_i, \rho_{i+1}\}$ où $i \in \{0, \dots, 5\}$ est considéré modulo 6. L'espace des formes sur Σ est engendré par deux formes dont l'évaluation sur les différents rayons est, dans l'ordre, $-1, 1, 0, -1, 1, 0$ pour la première forme et $-1, 0, 1, -1, 0, 1$ pour la seconde. Σ est alors le cône d'une sphère simpliciale qui peut être vu comme un revêtement d'ordre deux sur l'éventail projectif complet dans \mathbb{R}^2 décrit dans l'exemple 1.8 et dans la figure 4.

Cet exemple est intéressant et nous y reviendrons en section 6.11 car Σ est lisse et quasi-projectif mais ne vérifie pas les relations de Hodge-Riemann. \diamond

FIGURE 11. Double revêtement de l'éventail projectif dans \mathbb{R}^2 .



La seconde partie du résultat suivant est connu depuis longtemps. Voir par exemple une preuve dans [AY20]. Nous apportons une nouvelle preuve fondée sur la cohomologie de $\bar{\Sigma}$.

THÉORÈME 5.21. *Tout cône d'une sphère simpliciale Σ de dimension maximale est lisse. Par conséquent, $A^\bullet(\Sigma)$ vérifie la dualité de Poincaré.*

DÉMONSTRATION. Par récurrence, il suffit de montrer que Σ vérifie la dualité de Poincaré. Par la proposition 5.17, $H_c^{p,q}(\Sigma) \simeq H_{\text{sing},c}^q(\Sigma) \otimes \bigwedge^p M_{\mathbb{k}}$. Comme Σ est le cône d'une sphère simpliciale, on obtient que $H_c^{p,\bullet}(\Sigma)$ est concentrée en degré d et

$$H_c^{p,d}(\Sigma) \simeq \bigwedge^p M_{\mathbb{k}} \simeq \mathbf{F}^p(0).$$

Choisir un élément canonique $[\Sigma]$ revient à choisir un élément dans $\bigwedge^d N_{\mathbb{k}}$. Cette élément induit un isomorphisme naturel

$$\mathbf{F}^p(0) \simeq \mathbf{F}^{d-p}(0)^* \simeq H^{d-p,0}(\Sigma)^*.$$

On en déduit la dualité de Poincaré pour Σ .

La deuxième partie du théorème est une conséquence de la proposition 5.10 combinée au corollaire 4.4. \square

La réciproque est vraie.

THÉORÈME 5.22. *Toute structure simpliciale linéaire lisse de dimension maximale est le cône d'une sphère simpliciale.*

DÉMONSTRATION. Pour tout $\sigma \in \Sigma$, Σ^σ vérifie la dualité de Poincaré. Notamment, pour $q < d - |\sigma|$,

$$H_{\text{sing},c}^q(\Sigma^\sigma) \simeq H_c^{0,q}(\Sigma^\sigma) = 0,$$

et pour $q = d - |\sigma|$,

$$H_{\text{sing},c}^{d-|\sigma|}(\Sigma^\sigma) \simeq H_c^{0,d-|\sigma|}(\Sigma^\sigma) \simeq \mathbf{F}_{d-|\sigma|}(\infty_\sigma) \simeq \bigwedge^{d-|\sigma|} M_{\mathbb{k}}(\infty_\sigma).$$

Comme Σ^σ est de dimension maximale, $\dim(M_{\mathbb{k}}(\infty_\sigma)) = d - |\sigma|$ et le produit extérieur ci-dessus est isomorphe à \mathbb{k} . Donc $\dim(H_{\text{sing},c}^{d-|\sigma|}(\Sigma^\sigma)) = 1$. Ainsi, Σ est le cône d'une sphère simpliciale. \square

On peut améliorer le théorème précédent de la façon suivante.

PROPOSITION 5.23. *Soit Σ une structure linéaire orientée de Cohen-Macaulay de dimension maximale. Supposons que Σ^σ est lisse pour toute face σ de codimension deux. Alors Σ est le cône d'une sphère simpliciale lisse.*

Dans la proposition précédente, on peut probablement affaiblir la condition et demander simplement que Σ soit normale. Il suffirait pour le vérifier de généraliser la preuve d'Aksnes du théorème 4.6 au cas des structures simpliciales linéaires.

DÉMONSTRATION. Par la proposition 5.17, comme Σ est de Cohen-Macaulay, on sait que $H^{p,q}(\Sigma^\sigma) = 0$ pour $\sigma \in \Sigma$ et $q < d - |\sigma|$. Comme Σ est orientée, on peut appliquer la généralisation du théorème 4.6 pour obtenir que Σ est lisse. \square

Le fait que l'anneau de Chow du cône d'une sphère simpliciale vérifie la dualité de Poincaré est connu de longue date. Dans [Adi18], Adiprasito montre que si Σ est un éventail abstrait qui est le cône d'une sphère simpliciale, si l'on prend un espace de fonctions linéaire générique $M_{\mathbb{k}}$ tel que $(\Sigma, M_{\mathbb{k}})$ soit une structure linéaire affine de dimension maximale et si l'on prend un élément générique ℓ de $A^1(\Sigma)$, alors ℓ est un opérateur de Lefschetz pour l'anneau de Chow de Σ .

QUESTION 5.24. Peut-on mieux comprendre le théorème de Lefschetz difficile pour les sphères simpliciales en exploitant le lien avec la cohomologie tropicale? \diamond

5.5. Complexe de partition. Dans [Adi18, AY20] apparaît un complexe intéressant appelé le *complexe de partition* :

$$\mathcal{P}^{k,\bullet} : A^k(\Sigma) \rightarrow \bigoplus_{\varrho \in \Sigma_1} A^k(\Sigma^\varrho) \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_2} A^k(\Sigma^\sigma) \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_d} A^k(\Sigma^\sigma).$$

Le morphisme de bord est donné par les restrictions i_* avec un signe. Rappelons que par le théorème 5.7, $A^k(\Sigma) \simeq H^{k,k}(\overline{\Sigma})$, et dans le cas lisse $H^{k,k}(\overline{\Sigma}) \simeq H^{2k}(\overline{\Sigma})$. Ainsi, via ces isomorphismes, le complexe de partition est isomorphe à la suite du théorème 4.7 auquel on a enlevé le dernier terme, c'est-à-dire au dual de Poincaré de la résolution de Deligne tropicale du théorème 4.9.

Ce nouveau point de vue permet par exemple d'obtenir une nouvelle preuve du théorème de partition de l'unité de [AY20].

THÉORÈME 5.25. *Soit Σ une structure linéaire de dimension maximale telle que Σ^σ est de Cohen-Macaulay pour tout $\sigma \neq \emptyset$. Alors,*

$$H^q(\mathcal{P}^{p,\bullet}) \simeq H_c^{p,p+q}(\Sigma).$$

Notamment,

$$\dim(H^q(\mathcal{P}^{p,\bullet})) = \binom{\dim(\Sigma)}{p} \dim(H_{\text{sing},c}^{p+q}(\Sigma)).$$

DÉMONSTRATION. Reprenons la preuve du théorème 4.7 écrite en section 4.5. On a une suite spectrale

$$\downarrow_p \text{Del}_c^{\bullet, \bullet} \implies H_c^{p, \bullet}(\Sigma).$$

Rappelons de plus que la première page est donnée par

$$\downarrow_p \text{Del}_1^{a, b} = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_a} H^{p, b}(\overline{\Sigma}^\sigma).$$

Décrivons la seconde page. Dans le cas qui nous concerne, pour $\sigma \neq \emptyset$, Σ^σ est de Cohen-Macaulay et de dimension maximale. Notamment, par la proposition 5.18, la cohomologie $H^{p, \bullet}(\overline{\Sigma}^\sigma)$ est concentrée en degré p . De plus, par le corollaire 4.2, $H^{p, q}(\overline{\Sigma})$ est nulle pour $q > p$. Donc $\downarrow_p \text{Del}_2^{a, b}$ est non nul seulement pour $a = 0$ et $b \leq p$ et pour $b = p$. Notamment, la suite spectrale dégénère en page deux et

$$H_c^{p, k}(\Sigma) \simeq \begin{cases} \downarrow_p \text{Del}_2^{0, k} & \text{si } k \leq p \\ \downarrow_p \text{Del}_2^{k-p, p} & \text{si } k \geq p. \end{cases}$$

Ajoutons que $\downarrow_p \text{Del}_2^{a, p}$ est égale à $H^a(\mathcal{P}^{p, \bullet})$, ce qui conclut la première partie du théorème. Pour la seconde partie, il suffit d'utiliser la proposition 5.17. \square

5.6. Poids de Minkowski. Soit Σ une structure simpliciale linéaire de dimension d . On suppose toujours Σ fortement rationnelle si $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$.

DÉFINITION 5.26. Un *poids de Minkowski de dimension k de Σ* est une fonction $w : \Sigma_k \rightarrow \mathbb{k}$ telle que

$$\sum_{\sigma \in \Sigma_k} w(\sigma)(\sigma, \nu_\sigma)$$

est un cycle dans $C_{k, k}^{\text{BM}}(\Sigma)$. On note $\text{MW}_k(\Sigma)$ l'espace vectoriel des poids de Minkowski de dimension k de Σ . \diamond

La définition fournit une inclusion naturelle $\text{MW}_k(\Sigma) \hookrightarrow C_{k, k}^{\text{BM}}(\Sigma)$, que l'on peut prolonger en $\text{MW}_k(\Sigma) \hookrightarrow C_{k, k}(\overline{\Sigma})$. Dans les deux cas, l'image est un cycle. Dans le cadre de la géométrie tropicale, on peut interpréter la condition d'être un cycle comme une condition d'équilibre pondérée par le poids w .

Si $w \in \text{MW}_k(\Sigma)$, on obtient naturellement une sous-structure simpliciale linéaire orientée de dimension k de Σ dont les facettes sont les cônes $\sigma \in \Sigma_k$ tels que $w(\sigma) \neq 0$.

Il y a un accouplement naturel $Z^k(\Sigma) \otimes \text{MW}_k(\Sigma) \rightarrow \mathbb{k}$ défini par $\langle x_\sigma, w \rangle = w(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Sigma_k$. Cela induit un accouplement $A^k(\Sigma) \otimes \text{MW}_k(\Sigma)$ qui est bien défini par le théorème suivant.

THÉORÈME 5.27. *Le groupe $\text{MW}_k(\Sigma)$ est naturellement isomorphe à $A^k(\Sigma)^\star$. De plus, cette dualité est compatible avec la dualité en homologie : l'application $\text{MW}_k(\Sigma) \rightarrow H_{k, k}(\overline{\Sigma})$ est duale à l'isomorphisme $H^{k, k}(\overline{\Sigma}) \xrightarrow{\simeq} A^k(\Sigma)$ décrit dans le théorème 5.7. Notamment, $\text{MW}_k(\Sigma) \rightarrow H_{k, k}(\overline{\Sigma})$ est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. La première partie découle du lemme de localisation 5.6, cf. [AHK18, Proposition 5.6]. Le reste du théorème s'en déduit aisément. \square

Si Σ est orientée, l'élément canonique $[\Sigma] \in H_{d, d}^{\text{BM}}(\Sigma)$ fournit un élément canonique dans $\text{MW}_d(\Sigma)$, noté aussi $[\Sigma]$, qui correspond à l'application degré dans $A^d(\Sigma)^\star$.

Dans le cas où $A^\bullet(\Sigma)$ vérifie la dualité de Poincaré, la structure d'anneau sur $A^\bullet(\Sigma)$ induit un produit d'intersection sur $\text{MW}_\bullet(\Sigma)$. Ce produit d'intersection et son lien avec les variétés toriques est étudié dans [FS97]. Plus généralement, le produit d'intersection sur les éventails ou sur les variétés tropicales est un objet très étudié [RGST05, Mik06, AR10, Sha11, Sha13b, OP13, OR11, Kat12, Ham14].

REMARQUE 5.28 (Conjecture de Hodge locale). Si Σ vérifie la dualité de Poincaré, la composition

$$\text{MW}_k(\Sigma) \rightarrow H_{k,k}(\overline{\Sigma}) \simeq H^{k,k}(\overline{\Sigma})^* \simeq H^{d-k,d-k}(\overline{\Sigma})$$

correspond à l'application classe de cycle. Par le théorème précédent, cette application est un isomorphisme. Cela montre la conjecture de Hodge pour les structures simpliciales linéaires rationnelles. Nous résolvons en section 8 un analogue de la conjecture de Hodge dans le cadre des structures simpliciales affines rationnelles.

Notons que l'isomorphisme $A^{d-k}(\Sigma) \simeq H_{k,k}(\Sigma)$ est facile à décrire. Il suffit d'envoyer x_σ , pour $\sigma \in \Sigma_{d-k}$, sur $i_{\sigma>0,*}([\overline{\Sigma}^\sigma])$. \diamond

REMARQUE 5.29 (Cas faiblement rationnel). Soit Σ une structure simpliciale linéaire faiblement rationnelle et posons $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$. Il paraît naturel de définir $\text{MW}_k(\Sigma, \mathbb{Q})$ comme les poids $w : \Sigma_k \rightarrow \mathbb{Q}$ dont l'image dans $C_{k,k}^{\text{BM}}(\Sigma)$ est un cycle et tel que $w(\sigma) = 0$ si $\sigma \in \Sigma_k$ n'est pas rationnel. Vue la remarque précédente, on pourrait alors définir l'anneau de Chow de Σ à coefficients rationnels comme l'image de $\text{MW}_\bullet(\Sigma, \mathbb{Q}) \rightarrow A^{d-\bullet}(\Sigma, \mathbb{R})$. Une définition plus explicite devrait exister. Une telle définition pourrait aider à résoudre la conjecture de Hodge tropicale 8.2 pour les structures simpliciales affines faiblement rationnelles. \diamond

EXEMPLE 5.30. Justifions la dénomination « poids de Minkowski ». Soit P un polytope de dimension maximale dans \mathbb{R}^d et soit Σ son éventail dual dans l'espace vectoriel normé \mathbb{R}^d . Pour rester dans notre cadre de travail, supposons P simple, mais ce qui suit est vrai dans le cas général. Pour tout entier k et à chaque face σ de Σ_k correspond une face σ^\vee de codimension k dans P . On suppose que les vecteurs canoniques de chaque rayon sont choisis de norme un dans \mathbb{R}^d . On peut montrer assez facilement que le poids w qui à σ associe le volume de σ^\vee est un élément de $\text{MW}_k(\Sigma)$, c'est ce qu'on appelle la relation de Minkowski, cf. [McM96].

Minkowski a démontré une réciproque : à un élément strictement positif $w \in \text{MW}_1(\Sigma)$, on peut associer un unique polytope P à translation près qui est un inverse pour l'application décrite ci-dessus (cf. [Kla04]). Un tel polytope P fournit en retour un élément $a \in A^1(\Sigma)$ donné par

$$a = \sum_{\varrho \in \Sigma_1} \langle \nu_\varrho, u_\varrho \rangle x_\varrho$$

où u_ϱ est n'importe quel point de la facette de P correspondant à ϱ . Si l'on translate P , on ajoute un élément de l'idéal I_1 à a donc a est bien défini. On peut montrer que l'élément a obtenu est ample, et que tout élément ample de $A^1(\Sigma)$ provient d'un polytope de cette façon. On obtient donc une bijection entre les éléments strictement positifs de $\text{MW}_1(\Sigma)$ et les éléments amples de $A^1(\Sigma)$. Cette bijection est donnée par l'application

$$A^1(\Sigma) \rightarrow A^{d-1}(\Sigma) \rightarrow A^1(\Sigma)^* \simeq \text{MW}_1(\Sigma)$$

qui envoie ℓ sur le dual de Poincaré de $\ell^{d-1}/(d-1)!$ [McM96]. Le fait que l'élément obtenu soit strictement positif deviendra clair après la discussion ci-dessous. \diamond

Cet exemple nous amène à énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 5.31. *Soit ℓ un élément ample de $A^1(\Sigma)$. Alors pour tout élément $w \in \text{MW}_k(\Sigma)$ positif non nul, l'accouplement $\langle \ell^k, w \rangle$ est strictement positif.*

DÉMONSTRATION. Cette proposition découle directement de la proposition suivante. \square

PROPOSITION 5.32. *Soit ℓ un élément ample de $A^1(\Sigma)$ et soit $a \in A^k(\Sigma)$, $k < d$, qui possède un antécédent dans $Z^k(\Sigma)$ dont tous les coefficients sont strictement positifs. Alors $\ell \cdot a \in A^{k+1}(\Sigma)$ possède un antécédent dans $Z^{k+1}(\Sigma)$ dont tous les coefficients sont strictement positifs.*

DÉMONSTRATION. Soit $\tau \in \Sigma_k$ un cône de dimension k . Alors par convexité, on peut écrire ℓ sous la forme

$$\sum_{\varrho \in \Sigma_1} \ell_{\varrho} x_{\varrho}$$

avec $\ell_{\varrho} = 0$ si $\varrho < \tau$ et $\ell_{\varrho} > 0$ si $\varrho \sim \tau$. Donc

$$\ell \cdot x_{\tau} = \sum_{\varrho \sim \tau} \ell_{\varrho} x_{\tau \vee \varrho}$$

possède un antécédent dans $Z^k(\Sigma)$ dont tous les coefficients sont positifs et dont les coefficients correspondant aux faces $\sigma > \tau$ sont strictement positifs. De là la preuve se conclut facilement. \square

On peut se poser la question de la réciproque.

QUESTION 5.33 (Critère de Nakai-Moishezon). Un élément de $\ell \in A^1(\Sigma)$ est-il ample selon notre définition si et seulement si pour tout élément positif w de $\text{MW}_k(\Sigma)$, $\langle \ell^k, w \rangle > 0$? \diamond

6. Théorie de Hodge pour les structures simpliciales linéaires

Dans cette section, nous construisons une famille de structures simpliciales linéaires, dites épluchables, qui sont lisses. Ces structures sont construites à partir des cônes de sphères simpliciales en utilisant les opérations suivantes : le produit, la modification tropicale et l'éclatement, aussi appelé la subdivision étoilée, ainsi que son inverse la contraction, ou soudure étoilée. Si l'on se restreint aux structures épluchables quasi-projectives construites à partir de cônes de sphères simpliciales vérifiant HR, on obtient une famille vérifiant HR. Ces familles contiennent notamment tous les éventails de Bergman généralisés quasi-projectifs.

6.1. Formule de Künneth. La cohomologie du produit de deux structures simpliciales linéaires est très simple à calculer car la formule de Künneth s'applique.

THÉORÈME 6.1 (Formule de Künneth). Soient Σ et Σ' deux structures simpliciales linéaires. Alors on a des isomorphismes d'algèbres

$$\begin{aligned} H^{\bullet, \bullet}(\Sigma \times \Sigma') &\simeq H^{\bullet, \bullet}(\Sigma) \otimes H^{\bullet, \bullet}(\Sigma'), \\ H_c^{\bullet, \bullet}(\Sigma \times \Sigma') &\simeq H_c^{\bullet, \bullet}(\Sigma) \otimes H_c^{\bullet, \bullet}(\Sigma'), \\ H^{\bullet, \bullet}(\overline{\Sigma \times \Sigma'}) &\simeq H^{\bullet, \bullet}(\overline{\Sigma}) \otimes H^{\bullet, \bullet}(\overline{\Sigma'}), \\ A^{\bullet}(\Sigma \times \Sigma') &\simeq A^{\bullet}(\Sigma) \otimes A^{\bullet}(\Sigma'). \end{aligned}$$

De plus, on a un isomorphisme

$$\text{MW}_{\bullet}(\Sigma \times \Sigma') \simeq \text{MW}_{\bullet}(\Sigma) \otimes \text{MW}_{\bullet}(\Sigma').$$

DÉMONSTRATION. La preuve classique de la formule de Künneth peut facilement être adaptée à ce cadre pour la cohomologie. Voir aussi [GS19b]. Pour l'anneau de Chow et les poids de Minkowski, voir chapitre 2 proposition 6.3. \square

6.2. Diviseurs. Soit Σ une structure simpliciale linéaire orientée de dimension d . Soit f une fonction linéaire par morceaux sur Σ . Soit τ une face de codimension un dans Σ . Soit $w : \Sigma_d \rightarrow \mathbb{k}$ le poids associé à l'élément canonique $[\Sigma] \in \text{MW}_d(\Sigma)$. On a alors la condition d'équilibre

$$\sum_{\sigma > \tau} w(\sigma) \mathbf{n}_{\sigma/\tau} \in N_{\tau, \mathbb{k}}.$$

On définit l'ordre d'annulation de f sur τ , noté $\text{ord}_{\tau}(f)$, par

$$\text{ord}_{\tau}(f) = - \sum_{\sigma > \tau} w(\sigma) f_{\sigma}(\mathbf{n}_{\sigma/\tau}) + f_{\tau} \left(\sum_{\sigma > \tau} w(\sigma) \mathbf{n}_{\sigma/\tau} \right),$$

où pour $\sigma \in \Sigma$, $f_\sigma \in M_{\sigma, \mathbb{k}}$ est l'élément induit par la restriction de f à σ . Cette définition ne dépend pas des vecteurs $\mathbf{n}_{\sigma/\tau}$ choisis.

PROPOSITION 6.2. *La chaîne $\sum_{\tau \in \Sigma_{d-1}} \text{ord}_\tau(f)(\tau, \nu_\tau) \in C_{d-1, d-1}^{\text{BM}}(\Sigma)$ est un cycle.*

DÉMONSTRATION. Voir chapitre 2, proposition 4.2. \square

Le *diviseur de f* , noté $\text{div}(f)$, désigne la sous-structure simpliciale linéaire de Σ dont les facettes sont les faces $\tau \in \Sigma_{d-1}$ telles que $\text{ord}_\tau(f) \neq 0$. Le diviseur est naturellement orienté par l'élément canonique

$$[\text{div}(f)] = \sum_{\tau \in \Sigma_{d-1}} \text{ord}_\tau(f)(\tau, \nu_\tau).$$

On peut aussi voir $\text{div}(f)$ comme un poids de Minkowski dans $\text{MW}_{d-1}(\Sigma)$.

Rappelons qu'à f on peut associer un élément de $A^1(\Sigma)$ défini par $\sum_{\varrho \in \Sigma_1} f(\varrho)x_\varrho$. Comme Σ est orientée, on a une flèche naturelle $A^1(\Sigma) \rightarrow A^{d-1}(\Sigma)^\star$, et par le théorème 5.27, $A^{d-1}(\Sigma)^\star \simeq \text{MW}_{d-1}(\Sigma)$. Si l'on note $\mathcal{L}^{\text{pm}}(\Sigma)$ l'ensemble des fonctions linéaires par morceaux sur Σ , on peut donc composer les flèches suivantes

$$(6.1) \quad \mathcal{L}^{\text{pm}}(\Sigma) \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} A^1(\Sigma) \xrightarrow{\quad} A^{d-1}(\Sigma)^\star \xrightarrow{\sim} \text{MW}_{d-1}(\Sigma) \\ \searrow \text{div} \nearrow \end{array}$$

On peut montrer que cette composition est égale à l'application div (voir proposition 4.8 du chapitre 2). Mentionnons au passage qu'une forme explicite du cap-product $A^l(\Sigma) \otimes \text{MW}_k(\Sigma) \rightarrow \text{MW}_{k-l}(\Sigma)$ peut être trouvée dans [FS97, AHK18].

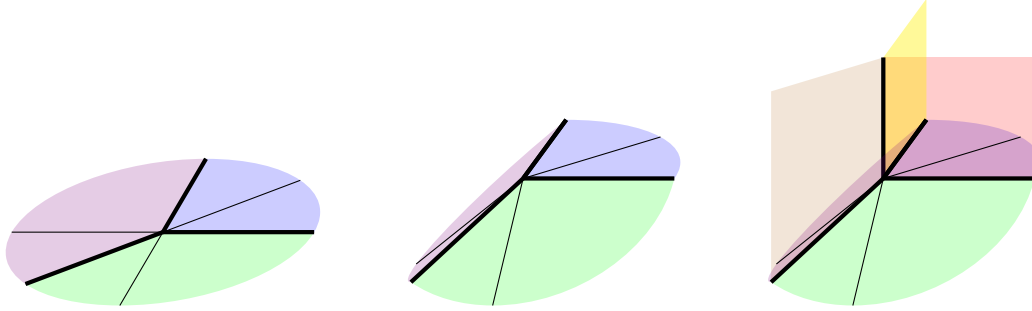
On appelle *diviseur de Σ* tout élément de $\text{MW}_{d-1}(\Sigma)$ considéré comme une sous-structure simpliciale linéaire orientée de Σ . On note $\text{Div}(\Sigma)$ l'espace vectoriel des diviseurs de Σ .

REMARQUE 6.3. Tentons de donner une intuition pour voir pourquoi il s'agit bien du diviseur de f . Avertissons néanmoins le lecteur que nous ne savons pas comment formaliser rigoureusement ce qui suit. Soit Σ un éventail simplicial orienté de \mathbb{R}^n et soit f une fonction linéaire par morceaux sur Σ . Le diviseur de f est censé être l'ensemble des points où f s'annule. Soit τ une face de codimension un dans Σ . Supposons que f est convexe autour de τ . Pour chaque facette σ contenant τ , $f|_\sigma$ est linéaire, ce qui correspond à un monôme tropical. Si $\text{ord}_\tau(f) \neq 0$ alors f n'est pas linéaire autour de τ . On peut voir f comme un polynôme tropical, chaque forme linéaire sur chaque facette correspond à un monôme de f , et la valeur de f est le minimum des formes linéaires correspondantes. Au moins deux monômes différents coïncident et sont minimaux sur la face τ . Donc f s'annule sur τ au sens tropical. \diamond

Un diviseur est dit *principal* s'il est le diviseur d'une fonction linéaire par morceaux. Σ est dit *principale en $\mathbb{0}$* si tous les diviseurs de Σ sont principaux. De plus, Σ est dit *divisoriellement fidèle en $\mathbb{0}$* si toute fonction f linéaire par morceaux non globalement linéaire a un diviseur non trivial. En utilisant le diagramme (6.1), on s'aperçoit facilement que les deux dernières conditions correspondent respectivement à la surjectivité et à l'injectivité de l'application $A^1(\Sigma) \rightarrow A^{d-1}(\Sigma)^\star$. Ainsi, la conjonction des deux correspond à la dualité de Poincaré en codimension un pour $A^\bullet(\Sigma)$. Par exemple les structures simpliciales lisses sont principales et divisoriellement fidèles en $\mathbb{0}$.

Une étude plus précise de ces propriétés et des éventails les vérifiant est donnée dans le chapitre 2, voir par exemple le théorème 4.9 et la série d'exemples et de contre-exemples donnée en 11.

6.3. Modification tropicale. Commençons par le cas d'un éventail.

FIGURE 12. Une modification tropicale de l'éventail projectif sur \mathbb{R}^2 .

EXEMPLE 6.4. Soit Σ un éventail simplicial orienté de \mathbb{R}^n . Soit f une fonction linéaire par morceaux sur Σ . Il est naturel de regarder le graphe de la fonction f . On pose

$$\Gamma_f : \begin{cases} |\Sigma| & \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto (x, f(x)). \end{cases}$$

Le graphe est alors par définition $\Gamma_f(|\Sigma|)$ qui est naturellement muni d'une structure d'éventail que l'on note $\Gamma_f(\Sigma)$.

Un exemple est donné en figure 12. On peut regarder l'éventail projectif Σ sur \mathbb{R}^2 et la fonction linéaire par morceaux qui vaut 0 sur l'orthant supérieur droit et -1 sur $(-1, -1)$. Le graphe est représenté dans la deuxième image (ici on a de plus coupé chaque facette en deux). On voit immédiatement que $\Gamma_f(\Sigma)$ n'est pas équilibré donc pas orientable.

Pour pallier à ce problème, il existe une construction naturelle appelée modification tropicale de Σ par rapport à f . Cela consiste à rajouter des faces à $\Gamma_f(\Sigma)$. Pour chaque face τ dans $\text{div}(f)$, on ajoute la face $\tau_{\perp} := \Gamma_f(\tau) + \mathbb{R}_+ e_{\perp}$ où $e_{\perp} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. On obtient la modification tropicale ouverte de Σ notée $\mathcal{TM}_f(\Sigma)$. Celle-ci est illustrée par la troisième image dans la figure 12. Si l'on remplace τ_{\perp} par $\tau_{\pm} := \Gamma_f(\tau) + \mathbb{T}_+ e_{\perp} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}$, on obtient la modification tropicale fermée de Σ notée $\mathcal{CTM}_f(\Sigma)$.

Si $\tau \in \text{div}(f)$ est une face de codimension un dans Σ alors τ_{\perp} est une facette de $\mathcal{TM}_f(\Sigma)$. On peut lui associer le poids $\text{ord}_f(\tau)$. On obtient alors un élément canonique dans $C_{d,d}^{\text{BM}}(\mathcal{TM}_f(\Sigma))$.

On peut voir $\mathcal{TM}_f(\Sigma)$ comme un éclatement tropical de Σ le long du diviseur $\text{div}(f)$. Bien que cette analogie soit intéressante, voir question 6.14, il semble qu'il faut plutôt voir $\mathcal{CTM}_f(\Sigma)$ comme le graphe tropical de la fonction f , comme nous le verrons dans l'exemple 6.9. En poursuivant la justification intuitive de la remarque 6.3, le diviseur de f correspond à l'ensemble des zéros tropicaux de f . Soit $\tau \in \text{div}(f)$ de codimension un dans Σ . Si f est concave, on peut voir f comme le minimum d'une fonction tropicale \tilde{f} à valeur dans l'hypercorps \mathbb{T} , ainsi $\tilde{f} : |\Sigma| \rightarrow 2^{\mathbb{T}}$. Dans ce cas, pour tout $x \in \tau$, \tilde{f} s'annule sur τ , c'est-à-dire que $\tilde{f}(x) \ni \infty$. Donc $\tilde{f}(x)$ est l'intervalle $[f(x), \infty]$. Le graphe de \tilde{f} correspond bien à $\mathcal{CTM}_f(\Sigma)$. \diamond

Soit Σ une structure simpliciale linéaire orientée de dimension d sur E . Soit f une fonction linéaire par morceaux sur Σ .

DÉFINITION 6.5. On définit la *modification tropicale ouverte de Σ par rapport à f* et l'on note $\mathcal{TM}_f(\Sigma)$ la structure simpliciale linéaire orientée de dimension d sur $E_{\perp} := E \cup \{e_{\perp}\}$ définie comme ci-dessous. \diamond

Pour chaque face $\sigma \in \Sigma$, on note $\sigma_o \subseteq E_{\perp}$ le sous-ensemble égal à σ . Pour chaque face $\tau \in \text{div}(f)$, on note $\tau_{\perp} \subseteq E_{\perp}$ le sous-ensemble $\tau \cup \{\rho_{\perp}\}$ où $\rho_{\perp} = \{e_{\perp}\}$ désigne le nouveau rayon. En tant qu'éventail abstrait, $\mathcal{TM}_f(\Sigma)$ est simplement égale à

$$\{\sigma_o \mid \sigma \in \Sigma\} \cup \{\tau_{\perp} \mid \tau \in \text{div}(f)\}.$$

On a une projection naturelle $\mathbf{p} : \mathbb{k}^{E_\perp} \rightarrow \mathbb{k}^E$ qui envoie e_\perp sur zéro. Notons $f_\perp \in (\mathbb{k}^{E_\perp})^*$ la fonction linéaire telle que, pour $e \in E_\perp$,

$$f_\perp(e) = \begin{cases} f(e) & \text{si } e \in E \\ 1 & \text{si } e = e_\perp. \end{cases}$$

On définit alors l'espace des fonctions linéaires sur $\mathcal{TM}_f(\Sigma)$, noté $M_{\perp, \mathbb{k}}$ comme le sous-espace de $(\mathbb{k}^{E_\perp})^*$ engendré par $\mathbf{p}^*(M_{\mathbb{k}}) \cup \{f_\perp\}$. On suppose de plus que ν_{ρ_\perp} est choisi de sorte que $f_\perp(\nu_{\rho_\perp}) = 1$ et que l'orientation sur $\mathcal{TM}_f(\Sigma)$ vérifie $\text{sign}(\tau_o, \tau_\perp) = +1$ pour tout $\tau \in \text{div}(f)$.

Passons à la définition de l'élément canonique $[\mathcal{TM}_f(\Sigma)]$. Notons $w : \Sigma_d \rightarrow \mathbb{k}$ le poids de $[\Sigma] \in \text{MW}_d(\Sigma)$. On pose alors

$$\begin{aligned} w_\perp : \mathcal{TM}_f(\Sigma)_d &\longrightarrow \mathbb{k} \\ \sigma_o &\longmapsto w(\sigma) && \text{pour } \sigma \in \Sigma_d, \\ \tau_\perp &\longmapsto \text{ord}_f(\tau) && \text{pour } \tau \in \text{div}(f) \cap \Sigma_{d-1}. \end{aligned}$$

PROPOSITION 6.6. *L'élément $\sum_{\sigma \in \mathcal{TM}_f(\Sigma)_d} (w_\perp(\sigma), \nu_\sigma) \in C_{d,d}^{\text{BM}}(\mathcal{TM}_f(\Sigma))$ est un cycle.*

DÉMONSTRATION. Soit τ une face de codimension un dans $\mathcal{TM}_f(\Sigma)$. Soit $g \in M_{\perp, \mathbb{k}}$ une forme linéaire qui est nulle sur τ . En décomposant g sous la forme $\mathbf{p}^*h + af_\perp$, avec $h \in M_{\mathbb{k}}$ et $a \in \mathbb{k}$, on vérifie facilement que g s'annule sur $\sum_{\varrho \sim \tau} w(\tau \vee \varrho)\nu_\varrho$, et donc que cette somme est dans $N_{\tau, \mathbb{k}}$, ce qui permet de conclure. Voir aussi chapitre 2 proposition 5.1 dans le cas particulier où $\text{ord}_f(\tau)$ vaut zéro ou un pour toute face $\tau \in \Sigma_{d-1}$. \square

Le poids w_\perp est donc un poids de Minkowski qui fournit un élément canonique $[\mathcal{TM}_f(\Sigma)] \in \text{MW}_d(\mathcal{TM}_f(\Sigma))$. Ceci conclut la définition de $\mathcal{TM}_f(\Sigma)$. \diamond

Rappelons que par notre remarque 2.24, nous nous permettons de considérer des sous-structures de compactifications canoniques qui ne sont pas à proprement parler des structures simpliciales affines ou linéaires ni des compactifications canoniques de celles-ci.

DÉFINITION 6.7. On définit la *modification tropicale fermée de Σ par rapport à f* , notée $\mathcal{CTM}_f(\Sigma)$, comme la restriction de $\overline{\mathcal{TM}_f(\Sigma)}$ aux faces de sédentarité $\underline{0}$ ou ρ_\perp .

La *modification tropicale fermée étendue de $\overline{\Sigma}$ par rapport à f* , notée $\mathcal{CTM}_f(\overline{\Sigma})$, désigne $\overline{\mathcal{TM}_f(\Sigma)}$.

Enfin, la *modification tropicale ouverte étendue de $\overline{\Sigma}$ par rapport à f* , notée $\mathcal{TM}_f(\overline{\Sigma})$, désigne la sous-structure de $\overline{\mathcal{TM}_f(\Sigma)}$ contenant les faces δ telles que $e_\perp \notin \text{sed}(\delta)$. \diamond

EXEMPLE 6.8. Soit W une variété sur un corps non archimédien suffisamment gros (voir les articles cités ci-dessous pour plus de précision). Supposons que l'on peut plonger W dans une variété torique. On peut alors regarder la tropicalisation pour les coordonnées associées. Rappelons que l'analytifié de Berkovich W^{an} de W peut être vu comme la limite projective des tropicalisations de W (voir section 1.10).

Si X est une tropicalisation de W et si X' est une modification tropicale de X , on peut penser à X' comme à une nouvelle tropicalisation lorsque l'on ajoute une coordonnée (voir [Mik06, Mik07] et la section 9.2). Notamment la projection $W^{\text{an}} \rightarrow X$ se factorise en $W^{\text{an}} \rightarrow X' \rightarrow X$. On peut donc considérer la modification tropicale comme un moyen de voir un nouveau bout de W^{an} qui ne change pas fondamentalement la variété sous-jacente. D'ailleurs, dans [Jel19], Jell montre que, si W est normale et admet au moins un plongement fermé dans une variété torique, alors la cohomologie de Dolbeault à support compact de W^{an} est la limite de la cohomologie tropicale des tropicalisations de W . Ceci est à comparer avec le théorème 6.10 ci-dessous, montrant que dans certains cas la modification tropicale préserve la cohomologie. \diamond

6.4. Propriétés de la modification tropicale. Nous avons vu que la modification tropicale d'une structure simpliciale linéaire doit être considérée comme le graphe d'une fonction sur celle-ci. Poursuivons l'analogie.

EXEMPLE 6.9. Soit V une variété topologique de \mathbb{R}^n . Soit f une fonction de V dans \mathbb{R} . Notons $\Gamma_f(V)$ le graphe de f dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Alors la cohomologie classique de $\Gamma_f(V)$ est clairement égale à celle de V . Dans le cadre tropical, on peut donc conjecturer que la modification tropicale d'un éventail a la même cohomologie tropicale que cet éventail. Dans cette section, nous verrons que c'est bien le cas si l'éventail est lisse, mais que ce n'est pas forcément vrai dans le cas général. \diamond

Si Σ est une structure simpliciale linéaire et si Δ est une sous-structure de Σ , on définit naturellement l'homologie de Borel-Moore de Σ relative à Δ par

$$H_{p,q}^{\text{BM}}(\Sigma, \Delta) := H_q\left(\text{coker}\left(C_{p,\bullet}^{\text{BM}}(\Delta) \hookrightarrow C_{p,\bullet}^{\text{BM}}(\Sigma)\right)\right).$$

THÉORÈME 6.10. *Soit Σ une structure simpliciale linéaire lisse. Soit f une fonction linéaire par morceaux sur Σ . Alors,*

$$H_{\bullet,\bullet}^{\text{BM}}(\mathcal{TM}_f(\Sigma)) \simeq H_{\bullet,\bullet}^{\text{BM}}(\Sigma, \text{div}(f)) \quad \text{et} \quad H_{\bullet,\bullet}(\mathcal{CTM}_f(\bar{\Sigma})) \simeq H_{\bullet,\bullet}(\bar{\Sigma}).$$

Les relations analogues que l'on peut imaginer pour la cohomologie et pour les différentes modifications tropicales sont aussi vraies : voir le théorème 10.1 du chapitre 2. Nous nous plaçons ici dans le cadre homologique car il nous semble que cela rend les isomorphismes plus simples à comprendre.

Pour une face $\tau \in \Delta$, on peut considérer τ comme une face de Δ ou comme une face de Σ , ce qui peut mener à une ambiguïté sur la notation $\mathbf{F}_{\bullet}(\tau)$. Pour lever cette ambiguïté, on différenciera $\mathbf{F}_{\bullet}^{\Delta}(\tau)$ et $\mathbf{F}_{\bullet}^{\Sigma}(\tau)$.

REMARQUE 6.11. Décrivons brièvement les différents isomorphismes du théorème. Le premier isomorphisme est simplement induit par la projection $\mathbf{p}_* : \mathbf{F}_{\bullet}(\sigma_o) \rightarrow \mathbf{F}_{\bullet}^{\Sigma}(\sigma)$ pour $\sigma \in \Sigma$. Pour le second isomorphisme, on doit y ajouter les inclusions $\mathbf{i}_* : \mathbf{F}_{\bullet}(\tau_{\infty}^{\rho_{\infty}}) \simeq \mathbf{F}_{\bullet}^{\Delta}(\tau) \hookrightarrow \mathbf{F}_{\bullet}^{\Sigma}(\tau)$ pour $\tau \in \Delta$. \diamond

La preuve s'appuie essentiellement sur le lemme suivant.

LEMME 6.12 (Formule locale pour la modification tropicale). *Soit Σ une structure simpliciale linéaire lisse, et soit $\Delta = \text{div}(f)$ avec f une fonction linéaire par morceaux sur Σ . Posons $\tilde{\Sigma} := \mathcal{TM}_f(\Sigma)$.*

Soient σ une face de $\Sigma \setminus \Delta$, τ une face de Δ , et p un entier positif. Alors on a les suites exactes suivantes.

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathbf{F}_p^{\tilde{\Sigma}}(\sigma_o) \xrightarrow{\mathbf{p}_*} \mathbf{F}_p^{\Sigma}(\sigma) \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow \mathbf{F}_{p-1}^{\Delta}(\tau) \longrightarrow \mathbf{F}_p^{\tilde{\Sigma}}(\tau_{\infty}) \xrightarrow{\mathbf{p}_*} \mathbf{F}_p^{\Delta}(\tau) \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow \mathbf{F}_{p-1}^{\Delta}(\tau) \longrightarrow \mathbf{F}_p^{\tilde{\Sigma}}(\tau_o) \xrightarrow{\mathbf{p}_*} \mathbf{F}_p^{\Sigma}(\tau) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

où la première flèche de chacune des deux dernières suites exactes est donnée par $\mathbf{v} \mapsto e_{\infty} \wedge \mathbf{p}^*(\mathbf{v})$ où $\mathbf{p}^*(\mathbf{v})$ désigne n'importe quelle préimage de \mathbf{v} par \mathbf{p}_* .

DÉMONSTRATION. Voir le lemme 10.3 du chapitre 2. La seconde suite exacte est triviale. Ce n'est pas le cas des deux autres. Pour la première, on peut montrer que cela découle du fait que Σ^{σ} est divisoriellement fidèle (voir l'exemple 6.13). Pour la dernière, l'idée est d'utiliser les résolutions des faisceaux \mathbf{F}_{\bullet} données par le théorème 4.7, c'est-à-dire par le dual de la résolution de Deligne tropicale. L'une des difficultés est qu'il ne s'agit d'une résolution que pour $\mathbf{F}_{\bullet}^{\Sigma}$ car Σ est lisse, mais pas forcément pour $\mathbf{F}_{\bullet}^{\Delta}$ et $\mathbf{F}_{\bullet}^{\tilde{\Sigma}}$. \square

EXEMPLE 6.13. Soit Σ la *croix tropicale*, c'est-à-dire l'éventail de dimension un dans \mathbb{R}^2 de rayons ρ_1, \dots, ρ_4 engendrés par $e_1, e_2, -e_1$ et $-e_2$ respectivement où (e_1, e_2) est la base standard de \mathbb{R}^2 . On peut considérer la fonction f linéaire par morceaux qui vaut 1 sur e_1 , -1 sur e_2 et 0 sur $-e_1$ et $-e_2$. Alors $\operatorname{div}(f)$ est trivial. La modification tropicale $\tilde{\Sigma} := \mathcal{TM}_f(\Sigma)$ est isomorphe à la droite tropicale dans \mathbb{R}^3 . Notamment $\mathbf{F}_1^{\tilde{\Sigma}}(\underline{0}_o)$ n'est pas isomorphe à $\mathbf{F}_1^{\Sigma}(\underline{0})$.

Cela ne contredit pas le lemme 6.12 car Σ n'est pas lisse. Le problème ici est essentiellement que Σ n'est pas divisoriellement fidèle en $\underline{0}$. Notons que la modification tropicale, elle, est lisse. Il est donc naturel de se poser la question suivante.

QUESTION 6.14. Existe-t-il une théorie de désingularisation tropicale fondée sur les modifications tropicales? \diamond

Cette question va dans le sens à considérer la modification tropicale plutôt comme un éclatement que comme le graphe d'une fonction. \diamond

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6.10. À partir du lemme 6.12, la preuve est essentiellement déjà présente dans [Sha15, JSS19, JRS18]. Nous proposons une nouvelle preuve en section 10 du chapitre 2 qui consiste à utiliser le lemme 6.12 pour décomposer les complexes de chaînes $C_{\bullet, \bullet}^{\text{BM}}(\Sigma)$ et $C_{\bullet, \bullet}(\bar{\Sigma})$ et ainsi obtenir pour chacun une suite exacte courte de complexes de chaînes. Les suites exactes longues associées en cohomologie permettent de montrer le théorème. \square

Le théorème 6.10 possède un analogue pour le groupe de Chow qui nécessite moins de conditions.

THÉORÈME 6.15. Soit Σ une structure simpliciale linéaire orientée. Soit f une fonction linéaire par morceaux sur Σ . Alors on a un morphisme d'anneau surjectif

$$A^\bullet(\Sigma) \rightarrow A^\bullet(\mathcal{TM}_f(\Sigma)).$$

Si de plus Σ est divisoriellement fidèle, alors cette application est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. L'application consiste à envoyer x_ρ sur x_{ρ_o} pour tout rayon $\rho \in \Sigma_1$. On vérifie facilement que l'application est bien définie, et aussi qu'elle est surjective car la nouvelle variable x_{ρ_ω} peut facilement être exprimée grâce aux autres variables. L'injectivité dans le cas divisoriellement fidèle est plus délicate, voir chapitre 2 section 10.3. \square

6.5. Subdivision étoilée. Soit Σ une structure simpliciale linéaire sur E . Soit η une face de Σ . On dit qu'un vecteur $v \in N_{\eta, \mathbb{k}}$ est à l'intérieur de η si

$$v = \sum_{\substack{\rho \in \Sigma_1 \\ \rho < \eta}} a_\rho \nu_\rho$$

où les a_ρ sont des coefficients strictement positifs.

DÉFINITION 6.16. La *subdivision étoilée de Σ le long de v* est notée $\Sigma_{(v)}$ et est une structure simpliciale linéaire sur $E \cup \{e_v\}$ définie de la manière suivante. L'ensemble des faces de $\Sigma_{(v)}$ est

$$\{\sigma \in \Sigma \mid \sigma \not\prec \eta\} \cup \{\tau \cup \{e_v\} \mid \tau \not\prec \eta, \tau \text{ comparable à } \eta\}.$$

L'espace des formes linéaires sur $\Sigma_{(v)}$ est engendré par les formes linéaires $\ell \in M_{\mathbb{k}}$ que l'on prolonge sur $(\mathbb{k}^{E \cup \{e_v\}})^*$ par $\ell(e_v) = \sum a_\rho \ell(\nu_\rho)$. \diamond

Notons que $\Sigma_{(v)}$ est bien une subdivision simpliciale de Σ au sens de la section 2.2. Si Σ est orientée, alors $\Sigma_{(v)}$ est naturellement orientée : chaque facette de $\Sigma_{(v)}$ hérite du multi-vecteur de $[\Sigma]$ associé à l'unique facette de Σ lui correspondant (la face correspondant à $\tau \vee \{e_v\}$ est $\tau \vee \eta$).

REMARQUE 6.17. La définition ci-dessus est encore valide si v est à l'extérieur de η . Dans ce cas nous n'obtenons pas une subdivision de $\Sigma_{(v)}$ mais il est probable que certaines propriétés de l'éclatement décrites en section 6.6 restent vraies dans ce cadre, ce qui peut permettre de construire de nouvelles structures simpliciales intéressantes. \diamond

EXEMPLE 6.18. La subdivision étoilée est bien connue en géométrie torique pour la raison suivante. Soit Σ un éventail unimodulaire de \mathbb{R}^n . Prenons ν_ϱ unitaire pour tout $\varrho \in \Sigma_1$. Soit $\mathbb{C}\mathbb{P}_\Sigma$ la variété torique associée. Soit η une face de Σ et soit

$$v := \sum_{\substack{\varrho \in \Sigma_1 \\ \varrho < \eta}} \nu_\varrho,$$

son barycentre. Alors $\mathbb{C}\mathbb{P}_{\Sigma_{(v)}}$ correspond à l'éclatement de $\mathbb{C}\mathbb{P}_\Sigma$ le long de la strate fermée associée à η .

L'étude du lien entre l'éclatement combinatoire et l'éclatement des variétés toriques est au cœur du théorème de factorisation faible dans l'article [AKMW02] d'Abramovich, Karu, Matsuki et Włodarczyk. Ce théorème énonce que n'importe quelle application birationnelle entre deux variétés complexes projectives lisses peut être décomposée en un nombre fini d'éclatements et de contractions (l'inverse d'un éclatement) de sous-variétés lisses. Nous utilisons certains de leurs résultats dans cette thèse : voir le théorème 6.29 et le commentaire en-dessous. \diamond

Par analogie avec l'exemple précédent, on appelle également $\Sigma_{(v)}$ l'éclatement de Σ le long de v . À l'inverse, Σ est appelé la *soudure étoilée*, ou la *contraction*, de $\Sigma_{(v)}$ le long de ρ_v où $\rho_v = \{e_v\}$ est le nouveau rayon associé à v .

6.6. Propriétés de l'éclatement. Comme pour les modifications tropicales, l'effet d'un éclatement sur la cohomologie d'une structure simpliciale est très bien compris. D'abord, comme l'éclatement ne modifie pas le support de l'éventail, la cohomologie ne change pas (cf. corollaire 3.7) :

$$H^{\bullet, \bullet}(\Sigma_{(v)}) \simeq H^{\bullet, \bullet}(\Sigma) \quad \text{et} \quad H_c^{\bullet, \bullet}(\Sigma_{(v)}) \simeq H_c^{\bullet, \bullet}(\Sigma).$$

L'éclatement devient plus intéressant lorsque l'on s'intéresse à l'anneau de Chow de Σ où à la cohomologie de $\bar{\Sigma}$.

Dans le cas de l'éclatement d'une variété le long d'une sous-variété, le lemme de Keel (théorème 1 de l'annexe dans [Kee92]) permet de calculer l'anneau de Chow de l'éclatement par rapport à l'anneau de Chow de la variété de départ. Voici l'analogie dans notre cadre.

Soient Σ une structure simpliciale linéaire lisse, η une face de Σ et $v \in N_{\eta, \mathbb{k}}$ à l'intérieur de η . Soit $\Sigma_{(v)}$ l'éclatement de Σ le long de v et soit ρ_v le nouveau rayon. On peut écrire

$$\nu_{\rho_v} = \sum_{\substack{\varrho \in \Sigma_1 \\ \varrho < \eta}} a_\varrho \nu_\varrho,$$

pour d'uniques coefficients $a_\varrho > 0$. Pour différencier les variables de $A^\bullet(\Sigma)$ des variables de $A^\bullet(\Sigma_{(v)})$, nous notons x'_σ les variables du second anneau.

THÉORÈME 6.19 (Lemme de Keel). *Soit \mathfrak{J} le noyau de la surjection $i_{\underline{0} < \eta}^* : A^\bullet(\Sigma) \rightarrow A^\bullet(\Sigma^\eta)$. Posons*

$$P(T) := \prod_{\substack{\varrho \in \Sigma_1 \\ \varrho < \eta}} (x_\varrho + a_\varrho T).$$

Alors

$$A^\bullet(\Sigma_{(v)}) \simeq A^\bullet(\Sigma)[T]/(\mathfrak{J}T + P(T)),$$

et l'isomorphisme est donné par l'application

$$\chi : A^\bullet(\Sigma)[T]/(\mathfrak{J}T + P(T)) \xrightarrow{\sim} A^\bullet(\Sigma_{(v)})$$

qui envoie T sur $-x'_{\rho_v}$ et qui vérifie

$$\forall \varrho \in \Sigma_1, \quad \chi(x_\varrho) = \begin{cases} x'_\varrho + a_\varrho x'_{\rho_v} & \text{si } \varrho < \eta, \\ x'_\varrho & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier on obtient une décomposition de $A^\bullet(\Sigma_{(v)})$ en tant qu'espace vectoriel

$$(6.2) \quad A^\bullet(\Sigma_{(v)}) \simeq A^\bullet(\Sigma) \oplus A^{\bullet-1}(\Sigma^\eta) T \oplus \dots \oplus A^{\bullet-|\eta|+1}(\Sigma^\eta) T^{|\eta|-1}.$$

Le reste de la section 6.6 est consacré à la description des parties importantes de la preuve de ce théorème. Nous allons voir que la décomposition 6.2 possède de bonnes propriétés notamment vis-à-vis de la dualité de Poincaré. Notons que dans le cas où Σ est un éventail unimodulaire et que v est choisi comme dans l'exemple 6.18, la proposition découle simplement du lemme de Keel classique. Dans le cas général, on peut établir une preuve élémentaire, que nous décrivons brièvement ici (à comparer avec [AHK18, Section 6] qui traite un problème similaire).

Précisons d'abord ce que signifie la dernière décomposition dans l'énoncé du théorème. Considérons le complexe simplicial $\underline{\eta}$ qui est la restriction de Σ aux faces de η . On peut éclater $\underline{\eta}$ en v pour obtenir $\underline{\eta}_{(v)}$. Notons $\Delta = \underline{\eta}_{(v)}^{\rho_v}$ l'éventail transverse autour du nouveau rayon. Alors $\Sigma_{(v)}^{\rho_v} \simeq \Delta \times \Sigma^\eta$. Notamment, par la formule de Künneth,

$$A^\bullet(\Sigma_{(v)}^{\rho_v}) \simeq A^\bullet(\Delta) \otimes A^\bullet(\Sigma^\eta).$$

On a donc une inclusion naturelle $A^\bullet(\Sigma^\eta) \hookrightarrow A^\bullet(\Sigma_{(v)}^{\rho_v})$ qui envoie a sur $1 \otimes a$. On peut montrer que l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & \cdot T & & \\ & & \curvearrowright & & \\ A^\bullet(\Sigma) & \xrightarrow{i^*} & A^\bullet(\Sigma^\eta) & & A^\bullet(\Sigma)[T] \\ & \downarrow \chi & \downarrow & \dashrightarrow \cdot T & \downarrow \chi \\ A^\bullet(\Sigma_{(v)}) & \xrightarrow{i^*} & A^\bullet(\Sigma_{(v)}^{\rho_v}) & \xrightarrow{-\text{gys}} & A^{\bullet+1}(\Sigma_{(v)}) \\ & & \cdot (-x'_{\rho_v}) & & \end{array}$$

Le terme $A^\bullet(\Sigma^\eta) T$ désigne donc l'image de $A^\bullet(\Sigma^\eta)$ par l'application $\cdot T$ définie par le diagramme ci-dessus.

Revenons à la preuve. On vérifie facilement que l'application $A^\bullet(\Sigma) \rightarrow A^\bullet(\Sigma_{(v)})$ est bien définie et se prolonge en un morphisme surjectif $A^\bullet(\Sigma)[T] \rightarrow A^\bullet(\Sigma_{(v)})$. De plus $P(T)$ est envoyé sur $\prod_{\varrho \in \Sigma_1, \varrho < \eta} x'_\varrho$ qui est nul dans $A^\bullet(\Sigma_{(v)})$. Ensuite, vu le diagramme ci-dessus, tout élément $a \in \mathfrak{J}$ vérifie $\chi(aT) = 0$.

Il reste à montrer l'injectivité. Pour cela on utilise la dualité de Poincaré. En posant $C = \prod_{\varrho < \eta} a_\varrho$, un calcul (cf. la preuve du théorème 6.13 du chapitre 2) montre que l'on a le diagramme commutatif suivant

$$(6.3) \quad \begin{array}{ccccc} & & \text{gys}_{\eta > 0} & & \\ & & \curvearrowright & & \\ A^{d-|\eta|}(\Sigma^\eta) & \xrightarrow{\cdot (-CT^{|\eta|})} & A^d(\Sigma_{(v)}) & \xleftarrow{\sim \chi} & A^d(\Sigma) \\ & \downarrow \text{deg} & \downarrow \text{deg} & & \downarrow \text{deg} \\ & & \mathbb{k} & & \end{array}$$

On en déduit par exemple le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
A^{d-|\eta|-k}(\Sigma^\eta) \otimes A^k(\Sigma^\eta) & \longrightarrow & A^{d-|\eta|}(\Sigma^\eta) \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{k} \\
\downarrow \cdot T^i & & \downarrow \cdot T^{|\eta|-i} \nearrow -C \cdot \text{deg} \\
A^{d-|\eta|-k}(\Sigma^\eta) T^i \otimes A^k(\Sigma^\eta) T^{|\eta|-i} & \longrightarrow & A^d(\Sigma_{(v)})
\end{array}$$

En particulier, la dualité de Poincaré pour Σ^η implique que les deux applications verticales doivent être injectives.

Plus généralement, si on note $\Psi_k(\Sigma^\eta)$ l'accouplement entre $A^k(\Sigma^\eta)$ et $A^{d-|\eta|-k}(\Sigma^\eta)$, on obtient la matrice de la figure 13, dont l'étude permet de conclure l'injectivité de χ et l'existence de la décomposition dans l'énoncé du théorème. On peut en fait en déduire la dualité de Poincaré pour $A^\bullet(\Sigma_{(v)})$. \square

FIGURE 13. Décomposition de l'accouplement $A^k(\Sigma_{(v)}) \otimes A^{d-k}(\Sigma_{(v)}) \rightarrow \mathbb{k}$ donnée par le lemme de Keel.

$$\begin{array}{c}
A^k(\Sigma) \\
A^{k-1}(\Sigma^\eta)T \\
\vdots \\
A^{k-|\eta|+1}(\Sigma^\eta)T^{|\eta|-1}
\end{array}
\begin{pmatrix}
A^{d-k}(\Sigma) & A^{d-k-|\eta|+1}(\Sigma^\eta)T^{|\eta|-1} & \dots & A^{d-k-1}(\Sigma^\eta)T \\
\Psi_k(\Sigma) & 0 & & \\
0 & -\Psi_{k-1}(\Sigma^\eta) & & 0 \\
\vdots & & \ddots & \\
0 & * & & -\Psi_{k-|\eta|+1}(\Sigma^\eta)
\end{pmatrix}$$

6.7. Épluchabilité tropicale. Dans les sections précédentes, nous avons étudié trois opérations qui se comportent bien vis-à-vis de la cohomologie tropicale et de l'anneau de Chow. En combinant ces trois opérations, on peut donc obtenir des familles de structures simpliciales linéaires orientées et montrer des propriétés intéressantes sur ces structures par récurrence.

DÉFINITION 6.20 (Épluchabilité tropicale). Soient \mathcal{C} une classe de structures simpliciales linéaires orientées et \mathcal{S} une sous-classe de \mathcal{C} . On dit que \mathcal{S} est *stable par épluchage tropical dans \mathcal{C}* si les propriétés suivantes sont vérifiées.

- (Stabilité par produit) Si $\Sigma, \Sigma' \in \mathcal{S}$ et si $\Sigma \times \Sigma' \in \mathcal{C}$, alors $\Sigma \times \Sigma' \in \mathcal{S}$.
- (Stabilité par modification tropicale le long d'un diviseur tropicalement épluchable) Si $\Sigma \in \mathcal{S}$ et si f est une fonction linéaire par morceaux sur Σ telle que $\text{div}(f) \in \mathcal{S}$, ou telle que $\text{div}(f)$ soit trivial, et si de plus $\mathcal{TM}_f(\Sigma) \in \mathcal{C}$, alors $\mathcal{TM}_f(\Sigma) \in \mathcal{S}$.
- (Stabilité par éclatement ou contraction d'un centre épluchable) Si $\Sigma \in \mathcal{C}$, pour tout $\eta \in \Sigma$ et tout $v \in N_{\eta, \mathbb{k}}$ dans l'intérieur de η tel que $\Sigma^\eta \in \mathcal{S}$ et $\Sigma_{(v)} \in \mathcal{C}$, alors

$$\Sigma \in \mathcal{S} \iff \Sigma_{(v)} \in \mathcal{S}.$$

Si \mathcal{B} est un sous-ensemble de \mathcal{C} appelé *ensemble de base*, on note $\text{Sh}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ le plus petit sous-ensemble de \mathcal{C} contenant \mathcal{B} stable par épluchage tropical dans \mathcal{C} . \diamond

L'épluchabilité est une notion importante car de nombreuses propriétés sont stables par épluchage tropical. Une liste est donnée en théorème 5.9 du chapitre 2. Dans la prochaine

section, nous nous contenterons d'énoncer les deux propriétés les plus importantes parmi celles-ci, à savoir la lissité et HR.

En pratique, la restriction à \mathcal{C} de l'épluchage évite de faire n'importe quel éclatement ou contraction. Pour \mathcal{C} nous prendrons typiquement $\mathcal{O}_{\text{orient}}$, à savoir l'ensemble de toutes les structures simpliciales linéaires orientées, ou $\mathcal{O}_{\text{qproj}}$, à savoir l'ensemble de celles qui sont quasi-projectives. Ces deux ensembles sont stables par produits, modifications tropicales et éclatements (voir le théorème 5.6 du chapitre 2), mais $\mathcal{O}_{\text{qproj}}$ n'est pas stable par contraction.

Un ensemble de base typique est $\{\{0\}, \Lambda\}$ où $\Lambda = \{0, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-\}$ est la droite tropicale dans \mathbb{R} . En section 6.10, nous verrons que $\mathcal{S}h_{\mathcal{O}_{\text{qproj}}}(\mathcal{B}_0)$ contient déjà de nombreuses structures intéressantes, notamment les éventails de Bergman généralisés.

6.8. Théorèmes principaux. Citons maintenant les résultats montrant l'importance de la notion que nous venons d'introduire.

THÉORÈME 6.21 (Stabilité de la lissité par épluchage). *L'ensemble des structures linéaires simpliciales lisses est stable par épluchage tropical dans $\mathcal{O}_{\text{orient}}$. Notamment les éléments de $\mathcal{S}h_{\mathcal{O}_{\text{orient}}}(\mathcal{B}_0)$ et de $\mathcal{S}h_{\mathcal{O}_{\text{orient}}}(\mathcal{S}\mathcal{S})$ sont lisses, où $\mathcal{S}\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des cônes de sphères simpliciales de dimensions maximales.*

DÉMONSTRATION. Voir le théorème 10.4 dans le chapitre 2. Nous nous contentons d'esquisser la preuve ici.

Si Σ est lisse, alors Σ^σ est lisse pour tout $\sigma \in \Sigma$. Par récurrence sur la dimension, on peut donc se contenter de montrer la stabilité de la dualité de Poincaré par les différentes opérations (cet argument n'est pas tout à fait trivial, voir le lemme 5.10 du chapitre 2).

- La stabilité par produit est une conséquence directe de la formule de Künneth, théorème 6.1.
- Pour la stabilité par modification tropicale, on justifie de la manière suivante. Soit Σ une structure simpliciale linéaire lisse et soit f une fonction linéaire par morceaux sur Σ telle que $\text{div}(f)$ soit lisse. Posons $\tilde{\Sigma} := \mathcal{T}\mathcal{M}_f(\Sigma)$. Si Σ est lisse, alors $\tilde{\Sigma}$ est lisse par définition, et, par le corollaire 4.4, $\tilde{\Sigma}$ vérifie la dualité de Poincaré. Par le théorème 6.10, on sait que $H^{\bullet, \bullet}(\mathcal{C}\mathcal{T}\mathcal{M}_f(\tilde{\Sigma})) \simeq H^{\bullet, \bullet}(\tilde{\Sigma})$. Donc $\mathcal{C}\mathcal{T}\mathcal{M}_f(\tilde{\Sigma})$ vérifie la dualité de Poincaré. Par récurrence sur la dimension, on sait que pour tout $\sigma \in \tilde{\Sigma}$ avec $\sigma \neq 0$, $\tilde{\Sigma}^\sigma$ est lisse. Comme de plus $\tilde{\Sigma} = \mathcal{C}\mathcal{T}\mathcal{M}_f(\tilde{\Sigma})$ vérifie la dualité de Poincaré, on peut appliquer le théorème 4.3 pour obtenir la dualité de Poincaré pour $\tilde{\Sigma}$, ce qui conclut.
- La stabilité par éclatement et contraction est triviale ici car la lissité est stable par subdivision par le corollaire 3.7.

Pour la seconde partie du théorème, comme $\{0\}$ et \mathcal{B}_0 sont lisses et comme les éventails lisses sont stables par épluchage tropical dans $\mathcal{O}_{\text{orient}}$, $\mathcal{S}h_{\mathcal{O}_{\text{orient}}}(\mathcal{B}_0)$ est un sous-ensemble de l'ensemble des éventails lisses. On utilise le même argument pour $\mathcal{S}\mathcal{S}$. \square

THÉORÈME 6.22 (Stabilité de HR par épluchage). *L'ensemble des structures linéaires simpliciales kählériennes est stable par épluchage dans $\mathcal{O}_{\text{qproj}}$. Notamment les éléments de $\mathcal{S}h_{\mathcal{O}_{\text{qproj}}}(\mathcal{B}_0)$ vérifient cette propriété.*

Notons que comme $A^\bullet(\Sigma)$ est isomorphe à $H^{\bullet, \bullet}(\tilde{\Sigma})$ dans le cas lisse, le théorème précédent montre les relations de Hodge-Riemann pour la cohomologie de $\tilde{\Sigma}$.

Avant d'esquisser la preuve, faisons quelques remarques importantes sur les classes amples et les fonctions convexes.

Soit Σ une structure simpliciale linéaire quasi-projective. Soit f une fonction strictement convexe sur Σ . Pour tout $\sigma \in \Sigma$, f induit une fonction strictement convexe sur Σ^σ , notée f^σ , qui est bien définie modulo une forme linéaire. À f on peut associer la classe ample $\ell :=$

$\sum_{\rho \in \Sigma_1} f(\rho) x_\rho \in A^1(\Sigma)$. On obtient alors des classes amples ℓ^σ sur chaque éventail transverse Σ^σ .

Si $\tilde{\Sigma}$ est une modification tropicale de Σ alors la fonction f prolongée par zéro sur le nouveau rayon ρ_\perp est une fonction strictement convexe. Donc $\tilde{\Sigma}$ est quasi-projective et l'on obtient une classe ample dans $A^1(\tilde{\Sigma})$.

Si $\eta \in \Sigma$ est une face de Σ et si $v \in N_{\eta, \mathbb{k}}$ est à l'intérieur de η avec

$$v = \sum_{\substack{\rho \in \Sigma_1 \\ \rho < \eta}} a_\rho \nu_\rho,$$

alors $\Sigma_{(v)}$ est quasi-projective. En effet, la fonction f prolongée sur le nouveau rayon par

$$-\varepsilon + \sum_{\substack{\rho \in \Sigma_1 \\ \rho < \eta}} a_\rho f(\rho)$$

est strictement convexe pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

Enfin, si Σ' est une autre structure quasi-projective munie d'une classe ample ℓ' , alors l'élément

$$\ell \otimes 1 + 1 \otimes \ell' \in A^1(\Sigma) \otimes A^0(\Sigma') \oplus A^0(\Sigma) \otimes A^1(\Sigma') \simeq A^1(\Sigma \times \Sigma')$$

est ample dans $\Sigma \times \Sigma'$. Notamment le produit $\Sigma \times \Sigma'$ est quasi-projectif.

DÉMONSTRATION. Tous les détails sont dans la section 3 du chapitre 3, voir notamment la remarque 3.21. La formule de Künneth, théorème 6.1, permet de montrer la stabilité par produit de HL et HR. Le théorème 6.15 montre que l'anneau de Chow est préservé par modification tropicale et donc HL et HR sont aussi préservées. Le point délicat est de démontrer la stabilité par éclatement et contraction. Pour ce point, on peut s'inspirer de la preuve de [AHK18]. La preuve est essentiellement en deux étapes.

D'abord, un calcul assez simple montre que si l'on a $\text{HR}(\Sigma^\rho, \ell^\rho)$ pour tout rayon ρ de Σ , alors on a $\text{HL}(\Sigma, \ell)$. Donc par récurrence sur la dimension, on obtient $\text{HL}(\Sigma, \ell)$ pour toute classe ample $\ell \in A^1(\Sigma)$. L'ensemble des classes amples forme un cône connexe dans $A^1(\Sigma)$ noté \mathcal{K}_+ . De plus, on montre facilement en utilisant la décomposition en parties primitives que la véracité de $\text{HR}(\Sigma, \ell)$ est entièrement déterminée par la signature des formes quadratiques induites par ℓ sur $A^k(\Sigma)$ pour $k \leq d/2$: voir la définition 3.3 et la propriété (3.3) dans le chapitre 3. Par le théorème de Lefschetz difficile, les éléments de \mathcal{K}_+ induisent des formes quadratiques non dégénérées, donc la signature ne peut pas changer sur \mathcal{K}_+ qui est connexe. On s'est donc ramené à démontrer $\text{HR}(\Sigma, \ell)$ pour une unique classe ample.

La deuxième partie de la preuve consiste à démontrer la propriété suivante. Soit $\Sigma_{(v)}$ un éclatement de Σ et ρ le nouveau rayon. Si ℓ est une classe kählérienne sur Σ , on a vu que $\ell_\varepsilon := \chi(\ell + \varepsilon T)$ est une classe ample pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, où χ est l'application $A^\bullet(\Sigma)[T] \rightarrow A^\bullet(\Sigma_{(v)})$ définie dans le lemme de Keel, théorème 6.19. On veut alors montrer que

$$\text{HR}(\Sigma, \ell) \iff \forall 0 < \varepsilon \ll 1, \text{HR}(\Sigma_{(v)}, \chi(\ell_\varepsilon)).$$

Le sens direct, correspondant à l'éclatement, est appelé l'ascension, et le sens réciproque, associé à la contraction, est appelé la descente. L'idée pour la preuve de l'ascension est assez connue : par exemple, elle est utilisée pour déduire la conjecture standard de type Lefschetz pour un éclatement à partir du même résultat pour la variété de départ. La descente est légèrement plus compliquée, notamment on utilise $\text{HL}(\Sigma, \ell)$, ce qui n'est pas nécessaire pour l'ascension. Remarquons que dans les deux cas on utilise $\text{HR}(\Sigma^\eta, \ell^\eta)$ où η est la face qui a été éclatée.

En effet, cette deuxième partie de la preuve repose sur une étude précise de l'action de l'opérateur de Lefschetz sur la décomposition de $A^\bullet(\Sigma_{(v)})$ donnée par le lemme de Keel. Les détails sont présents en section 3.11 du chapitre 3. Ici nous nous contenterons de montrer HR

pour $A^1(\Sigma_{(v)})$ en supposant HR pour $A^\bullet(\Sigma)$. Dans ce cas, HR signifie simplement que la forme quadratique Q_ε induite par ℓ_ε sur $A^1(\Sigma_{(v)})$ a pour signature $(1, \dim(A^1(\Sigma_{(v)})) - 1)$. Le lemme de Keel nous donne une décomposition

$$A^1(\Sigma_{(v)}) \simeq A^1(\Sigma) \oplus TA^0(\Sigma^\eta).$$

La forme quadratique induite par ℓ_ε sur la partie $A^1(\Sigma)$ est égale à celle induite par ℓ plus un grand O de ε , donc pour ε petit, sa signature est $(1, \dim(A^1(\Sigma)) - 1)$. Il reste à montrer que la forme est définie négative sur $TA^0(\Sigma)$, c'est-à-dire que

$$\deg((\ell^\eta + \varepsilon T)^{d-2} T^2) < 0.$$

Lorsque l'on développe, comme $(\ell^\eta)^{d-|\eta|+1} = 0$, on trouve que ce degré vaut

$$\varepsilon^{|\eta|-2} \binom{d-2}{|\eta|-2} \left(\deg(T^{|\eta|} (\ell^\eta)^{d-|\eta|}) + O(\varepsilon) \right).$$

Comme on a $\text{HR}(\Sigma^\eta, \ell^\eta)$, ou simplement parce que ℓ^η est ample, le degré de $(\ell^\eta)^{d-|\eta|} \in A^{d-|\eta|}(\Sigma^\eta)$ est positif, et donc le degré de $T^{|\eta|} (\ell^\eta)^{d-|\eta|}$ est négatif par le diagramme 6.3. C'est ce que l'on souhaitait. La preuve en degrés supérieurs est essentiellement dans le même esprit mais plus technique.

La dernière partie du théorème découle du fait que les éléments de \mathcal{B}_0 vérifient que toutes leurs classes amples sont kähleriennes. \square

Dans la section 7 nous expliquons comment étendre ces résultats aux structures simpliciales affines.

6.9. Théorème de factorisation faible. Nous énonçons maintenant un théorème de factorisation faible réelle. Ce théorème est très utile pour montrer que les familles stables par épluchage tropical dans $\mathcal{O}_{\text{orient}}$ ou $\mathcal{O}_{\text{proj}}$ contiennent beaucoup d'éléments, cf. théorème 5.7 du chapitre 2. Nous citerons ensuite le théorème de factorisation faible classique pour les éventails qui a été mentionné dans l'exemple 6.18.

THÉORÈME 6.23 (Théorème de factorisation faible réelle). *Soient Σ et Σ' deux structures simpliciales linéaires qui possèdent une subdivision commune. Alors il existe une suite de structures simpliciales linéaires $\Sigma = \Sigma_{(0)}, \Sigma_{(1)}, \dots, \Sigma_{(k)} = \Sigma'$ telle que pour tout $0 \leq i < k$, $\Sigma_{(i+1)}$ soit obtenue à partir de $\Sigma_{(i)}$ par un éclatement ou une contraction.*

Si de plus Σ et Σ' sont quasi-projectives alors on peut supposer que $\Sigma_{(0)}, \dots, \Sigma_{(k)}$ sont quasi-projectives.

Rappelons que dans le cas de deux éventails de \mathbb{R}^n , avoir une subdivision commune est équivalent à avoir le même support.

Avant de passer à la preuve, énonçons la définition suivante.

DÉFINITION 6.24. Soit Σ une structure simpliciale linéaire et Δ une subdivision de Σ . On dit que Δ est *projective relativement à Σ* s'il existe une fonction linéaire par morceaux f sur Δ telle que la restriction de f à la sous-structure $\Delta|_\sigma$ de Δ induite par n'importe quelle face σ de Σ est strictement convexe. Une telle fonction f est dite *strictement convexe relativement à Σ* . \diamond

Par exemple, Σ est toujours projective relativement à elle-même (on peut prendre la fonction nulle), et si Δ est quasi-projective, alors Δ est projective relativement à Σ . Cette définition est fort utile car nous avons les deux propositions et les deux exemples suivants.

EXEMPLE 6.25 (Découpe par un hyperplan). Les détails de cette construction sont en section 4.2.1 du chapitre 3. Soit Σ un éventail simplicial (ou un complexe simplicial) de \mathbb{R}^n et soit H un hyperplan dans \mathbb{R}^n . On peut considérer la découpe hyperplane de Σ par H notée $\Sigma \cdot H$ qui est une subdivision (par forcément simpliciale) de Σ dont toutes les faces sont incluses

dans l'un des deux demi-espaces délimités par H . On peut considérer la fonction distance à H . La restriction de cette fonction à $\Sigma \cdot H$ est strictement convexe relativement à Σ . \diamond

EXEMPLE 6.26 (Éclatement). Soient Σ une structure simpliciale linéaire, $\eta \in \Sigma$ et v à l'intérieur de η . Alors $\Sigma_{(v)}$ est projective relativement à Σ . En effet, on peut considérer la fonction f linéaire par morceaux sur Σ qui vaut zéro sur tous les rayons sauf sur v où elle vaut $-\varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ petit. \diamond

PROPOSITION 6.27. *La bijection entre les subdivisions d'une structure simpliciale linéaire Σ et les subdivisions de sa représentation géométrique $\widehat{\Sigma}$ vue comme un éventail de \mathbb{R}^E induit une bijection entre les subdivisions projective relatives.* \square

PROPOSITION 6.28. *Soient Σ une structure simpliciale linéaire, Δ une subdivision simpliciale de Σ et Δ' une subdivision simpliciale de Δ .*

- *Si Δ' est projective relativement à Σ , alors Δ' est projective relativement à Δ .*
- *Si Δ' est projective relativement à Δ et Δ est projective relativement à Σ , alors Δ' est projective relativement à Σ .*
- *Si Δ est projective relativement à Σ et si Σ est quasi-projective, alors Δ est quasi-projective.*

DÉMONSTRATION. La preuve est moins immédiate que pour la première proposition. L'idée est simple. Pour la troisième partie par exemple, si g est une fonction linéaire par morceaux strictement convexe sur Σ et si f est une fonction linéaire par morceaux sur Δ strictement convexe relativement à Σ , alors $g + \varepsilon f$ est strictement convexe sur Σ pour ε suffisamment petit. Voir 4.3 du chapitre 3 pour plus de détail. \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6.23. Commençons par la première partie où l'on ne suppose pas la quasi-projectivité. Soit Δ'' une subdivision commune de Σ et Σ' .

Nous commençons en construisant une subdivision Δ' de Δ'' qui est projective relativement à Σ et à Δ'' . La première étape de cette construction consiste à considérer la subdivision de l'éventail $\widehat{\Sigma}$ correspondant à Δ'' et de découper $\widehat{\Sigma}$ par des hyperplans bien choisis afin qu'après la découpe on obtienne une subdivision (pas forcément simpliciale) de celle induite par Δ'' . Ensuite on effectue des éclatements des faces non simpliciales pour obtenir une subdivision simpliciale (voir chapitre 3 proposition 4.4). En utilisant les exemples et les propositions ci-dessus, on a bien obtenu une subdivision Δ' de Δ'' qui est projective relativement à Σ et à Δ'' .

Comme Δ' est une subdivision de Σ' , on peut de même construire une subdivision Δ de Δ' qui est relativement projective par rapport à Σ' et à Δ' . On obtient finalement une subdivision commune Δ de Σ et Σ' qui est relativement projective par rapport à chacun.

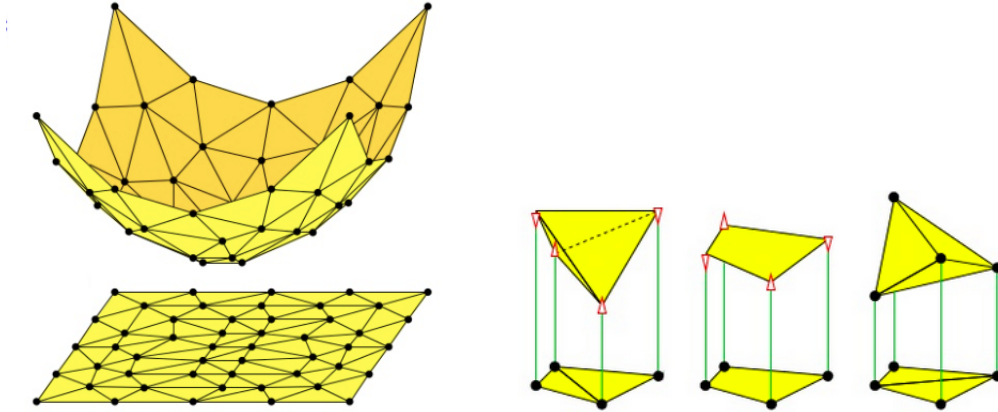
Maintenant, on s'est ramené au problème suivant. Soit Δ une subdivision relativement projective de Σ . Alors on peut trouver une série d'éclatements et de contractions pour aller de Σ à Δ . Pour faire cela, on peut s'inspirer d'une construction classique, par exemple utilisée par McMullen dans [McM93]; pour un livre de référence, voir [DRS10].

On va d'abord considérer un cas simple. Soit Δ un simplexe dans \mathbb{R}^d et soit Υ une subdivision simpliciale relativement projective de Δ . Nous voulons montrer que l'on peut obtenir Υ à partir de Δ par une série d'éclatements et de contractions. Notons v_0, \dots, v_r les sommets de Υ . Soit $f : \Upsilon_0 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction linéaire par morceaux sur Υ strictement convexe relativement à Δ (donc strictement convexe tout court). Quitte à modifier légèrement les valeurs de f en chaque sommet, on peut supposer f suffisamment générique. On peut considérer le graphe de la fonction f ,

$$\Gamma_f : \begin{array}{l} \Upsilon_0 \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \\ v \mapsto (v, f(v)). \end{array}$$

L'enveloppe convexe de $\Gamma_f(\Upsilon_0)$ est un polytope P_f . Les faces inférieures de P_f sont par définition les facettes de P_f dont le vecteur normal extérieur a sa dernière coordonnée négative, ainsi que toutes les faces de ces facettes. On peut projeter ces faces inférieures sur \mathbb{R}^d , et l'on retrouve la subdivision Υ , comme dans la figure 14.

FIGURE 14. Une triangulation du carré donnée par une fonction convexe, et un flip.



CC BY 4.0 : issue d'une présentation par Jorathan Richard Shewchuk publié par Pranav Kant Gaur
<https://www.slideshare.net/PranavKantGaur/shewchuk>

Pour mieux visualiser la suite, supposons que f est négative. Maintenant on va descendre les points un par un. Par exemple, si l'on numérote les sommets de Υ par v_0, \dots, v_r , on peut poser

$$h : \mathbb{R} \times \Upsilon_0 \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$(t, v_i) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq i, \\ (t - i)f(v_i) & \text{si } i \leq t \leq i + 1, \\ f(v_i) & \text{si } i + 1 \leq t. \end{cases}$$

Ainsi, $h(0, \cdot)$ est la fonction nulle et $h(r + 1, \cdot) = f$. À chaque instant t , on regarde l'enveloppe convexe P_t des points $(v_i, h(t, v_i))$, et l'enveloppe inférieure de P_t définit une subdivision Υ_t de Δ . Mis à part en un nombre fini d'instant, on est dans un intervalle de temps ouvert dans lequel la subdivision simpliciale ne change pas. Mais de temps en temps, un sommet peut apparaître ou disparaître, ce qui correspond respectivement à un éclatement ou une contraction (vu notre construction, la disparition n'est pas possible ici), ou encore, il peut y avoir à certains instants t une face de dimension s avec $s + 2$ sommets, qui n'est donc pas un simplexe. Ce dernier cas est représenté à droite dans la figure 14. (Dans cette figure tous les points bougent en même temps, mais l'idée reste la même.) Soit t_0 un tel instant. Dans ce cas, juste avant et juste après, nous avons bien des triangulations Υ_{t_0-} et Υ_{t_0+} de Δ . L'opération pour passer de Υ_{t_0-} à Υ_{t_0+} est connue sous le nom de *flip* ou d'*opération bistellaire*, et c'est la composée d'un éclatement et d'une contraction. Rien d'autre ne peut arriver durant la descente des différents sommets. Comme $\Upsilon_0 = \Delta$ et $\Upsilon_{r+1} = \Upsilon$, cela montre bien que l'on peut obtenir Υ à partir de Δ par une série d'éclatements et de contractions.

On peut facilement se convaincre que le cas du simplexe peut être généralisé à tout complexe simplicial, ou éventail simplicial ou même structure simpliciale linéaire, en traitant les sommets de la subdivision un par un et en considérant les faces indépendamment mais simultanément : on choisit une fonction relativement projective globale, on descend un par un les sommets comme ci-dessus, mais l'on considère les enveloppes convexes et les subdivisions induites face par face, en regardant pour chaque face le graphe de la restriction de la fonction à cette face. Cela conclut la première partie de la preuve.

Pour la deuxième partie, notons que pour le simplexe, par construction, \mathcal{T}_t est projective relativement à Δ à tout moment. Donc la construction généralisée aux complexes simpliciaux donnera à tout moment une triangulation relativement projective, et donc quasi-projective. Ceci conclut la preuve du théorème. \square

Comme nous l'avons expliqué plus tôt, le théorème de factorisation faible est utilisé en géométrie birationnelle pour décomposer un morphisme birationnel en série d'éclatements et de contractions. Nous souhaitons alors que toutes les variétés intermédiaires et que tous les centres des éclatements soient lisses. Dans le cas des variétés toriques, la lissité est l'analogue de l'unimodularité pour les éventails. Ainsi, le théorème de factorisation faible utilisé dans ce cadre est le suivant.

THÉORÈME 6.29 (Théorème de factorisation faible pour les éventails). *Soient Σ et Σ' deux éventails unimodulaires ayant le même support. Alors il existe une suite d'éventails $\Sigma = \Sigma_{(0)}, \Sigma_{(1)}, \dots, \Sigma_{(k)} = \Sigma'$ tels que tous ces éventails soient unimodulaires et que $\Sigma_{(i+1)}$ soit obtenu depuis $\Sigma_{(i)}$ par un éclatement ou une contraction.*

De plus, si Σ et Σ' sont quasi-projectifs, on peut supposer que tous les éventails intermédiaires le sont aussi.

DÉMONSTRATION. Voir section 3.12 du chapitre 3. \square

Ce théorème est nettement plus compliqué à démontrer et les démonstrations utilisent souvent des résultats non élémentaires, comme le théorème d'Hironaka dans le cas torique par exemple. C'est le théorème 6.29 que nous utilisons dans l'article original [AP20b], ici le chapitre 3, où nous étudions des variétés tropicales munies d'une triangulation unimodulaire. La nouvelle approche que nous proposons ici permet d'éviter cela. Notons toutefois que la condition d'unimodularité est très utile dans le cas de la cohomologie à coefficients entiers (voir le chapitre 2).

Concluons ce commentaire en citant la conjecture de factorisation forte dans le cas des éventails, aussi connue sous le nom de conjecture d'Oda. Le lecteur intéressé pourra regarder [dSK11] pour un aperçu sur l'état d'avancement de la résolution de cette conjecture.

CONJECTURE 6.30 (Conjecture de factorisation forte d'Oda). *Soient Σ et Σ' deux éventails unimodulaires ayant le même support. Alors il existe une série d'éventails $\Sigma = \Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_k = \Sigma'$ et un entier l entre 0 et k tels que tous ces éventails soient unimodulaires et que Σ_{i+1} soit obtenu depuis Σ_i par un éclatement si $i < k$ et par une contraction si $i \geq k$.*

Par exemple, si cette conjecture est vraie, si Σ et Σ' sont quasi-projectifs, alors tous les éventails intermédiaires sont automatiquement quasi-projectifs puisque les éclatements préservent la quasi-projectivité.

6.10. Épluchabilité des éventails de Bergman généralisés. Les résultats des sections précédentes permettent d'obtenir une grande famille d'éventails lisses : c'est la famille des éventails de Bergman généralisés définies en section 1.3. Rappelons que, traditionnellement, une variété tropicale est dite lisse si elle est localement modelée par des supports de Bergman. Le théorème suivant montre que notre notion de lissité étend celle utilisée précédemment.

THÉORÈME 6.31. *Une structure simpliciale linéaire Σ issue d'un éventail de Bergman généralisé est lisse. De plus, si Σ est quasi-projective, alors les classes amples dans $\ell \in A^1(\Sigma)$ sont kähleriennes.*

La deuxième partie du théorème généralise le travail de [AHK18]. Cette généralisation a été prouvée indépendamment dans [ADH20]. Adiprasito nous a également informé qu'il était au courant de cette généralisation étant donné qu'elle découle de [AHK18] en utilisant la méthode décrite dans [McM93, FK10]. Ceci dit, le théorème 6.22 va au-delà de cette généralisation, cf. exemple 6.34.

Remarquons que l'ensemble des éventails de Bergman généralisés est clairement stable par éclatement et par contraction, mais aussi par produit par la proposition 5.14 du chapitre 2.

Si l'on a une famille de vecteurs (v_1, \dots, v_n) , on peut considérer la famille privée de v_n ainsi que la famille obtenue en projetant le long de v_n . Pour un matroïde \mathfrak{M} sans boucle (une boucle correspond au vecteur nul) et un élément e de \mathfrak{M} , les opérations correspondantes sont la suppression $\mathfrak{M} \setminus \{e\}$ et la contraction $\mathfrak{M}/\{e\}$. Dans la suite, on supposera sans perte de généralité que les matroïdes considérés n'ont pas de boucle. Notons $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ l'éventail de Bergman associé au matroïde \mathfrak{M} . En effet, supprimer les boucles ne change pas l'éventail associé.

Si e n'est pas une co-boucle (il ne correspond pas à un vecteur indépendant des autres), alors l'éventail de Bergman $\Sigma_{\mathfrak{M}/\{e\}}$ est naturellement un diviseur de codimension un de $\Sigma_{\mathfrak{M} \setminus \{e\}}$. Un principe important en théorie des matroïdes et que l'on peut souvent travailler par récurrence en récupérant des propriétés sur \mathfrak{M} à partir des propriétés correspondantes sur $\mathfrak{M} \setminus \{e\}$ et $\mathfrak{M}/\{e\}$. Dans le cadre qui nous concerne, cela se traduit par l'existence d'une fonction f linéaire par morceaux sur $\Sigma_{\mathfrak{M} \setminus \{e\}}$ telle que

$$|\Sigma_{\mathfrak{M}}| = |\mathcal{TM}_f(\Sigma_{\mathfrak{M} \setminus \{e\}})|, \quad \text{et} \quad \text{div}(f) = \Sigma_{\mathfrak{M}/\{e\}}.$$

REMARQUE 6.32. Notons que $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ n'est en général pas égal à $\mathcal{TM}_f(\Sigma_{\mathfrak{M} \setminus \{e\}})$. Il faut effectuer un certain nombre d'éclatements pour obtenir $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ à partir de la modification tropicale. Ces éclatements correspondent à des rayons $\rho_{F \cup \{e\}}$ associés aux fermés F de \mathfrak{M} qui sont maximaux dans ce qu'on appelle la coupe modulaire de l'extension \mathfrak{M} au-dessus de $\mathfrak{M}/\{e\}$. On note \mathcal{S} l'ensemble de ces fermés.

Par le théorème 6.31, $\Sigma_{\mathfrak{M} \setminus \{e\}}$ est lisse. Donc par le théorème 6.15,

$$A^\bullet(\mathcal{TM}_f(\Sigma_{\mathfrak{M} \setminus \{e\}})) \simeq A^\bullet(\Sigma_{\mathfrak{M} \setminus \{e\}}).$$

De là, on peut comprendre l'anneau de Chow après les différents éclatements par des éléments $\rho_{F \cup \{e\}}$ avec $F \in \mathcal{S}$ grâce au lemme de Keel 6.19, et finalement calculer $A^\bullet(\Sigma_{\mathfrak{M}})$. Nous n'avons pas vérifié les détails mais cela permet probablement de retrouver le résultat de l'article [BHM⁺20a] qui montre que l'on peut décomposer $A^\bullet(\Sigma_{\mathfrak{M}})$ sous la forme suivante

$$A^\bullet(\Sigma_{\mathfrak{M}}) \simeq \theta(A^\bullet(\Sigma_{\mathfrak{M} \setminus \{e\}})) \oplus \bigoplus_{F \in \mathcal{S}} x_{\rho_{F \cup \{e\}}} \theta(A^\bullet(\Sigma_{\mathfrak{M} \setminus \{e\}})),$$

où θ est une certaine application définie dans l'article. \diamond

PROPOSITION 6.33. *Les éventails de Bergman généralisés sont dans $\mathcal{Sh}_{\text{Orient}}(\mathcal{B}_0)$. De plus, ceux qui sont quasi-projectifs sont dans $\mathcal{Sh}_{\text{Qproj}}(\mathcal{B}_0)$.*

DÉMONSTRATION. On travaille par récurrence sur la taille des matroïdes. Soit \mathfrak{M} un matroïde à k éléments.

Une première possibilité est que tous les éléments de \mathfrak{M} sont des co-boucles, auquel cas $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ est un éventail complet de support \mathbb{R}^n avec $n = \text{rk}(\mathfrak{M}) - 1$. Dans ce cas, on sait que Λ^n , où Λ est l'éventail de support \mathbb{R} , est dans $\mathcal{Sh}_{\text{Orient}}(\mathcal{B}_0)$, et $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ a le même support. Donc, par le théorème 6.23, $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ est aussi dans $\mathcal{Sh}_{\mathcal{B}_0}(\Sigma)$.

Sinon, \mathfrak{M} a au moins un élément e qui n'est pas une co-boucle. Par récurrence, $\Sigma_{\mathfrak{M} \setminus \{e\}}$ et $\Sigma_{\mathfrak{M}/\{e\}}$ sont dans $\mathcal{Sh}_{\mathcal{B}_0}(\Sigma)$. Donc la modification tropicale $\mathcal{TM}_f(\Sigma_{\mathfrak{M} \setminus \{e\}})$ avec $\text{div}(f) = \Sigma_{\mathfrak{M}/\{e\}}$ est dans $\mathcal{Sh}_{\mathcal{B}_0}(\Sigma)$. Comme cette modification tropicale a le même support que $\Sigma_{\mathfrak{M}}$, de nouveau par le théorème 6.23, $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ appartient à $\mathcal{Sh}_{\mathcal{B}_0}(\Sigma)$, et c'est aussi le cas de tous les éventails simpliciaux qui ont le même support que $\Sigma_{\mathfrak{M}}$. Ceci montre la première partie.

La deuxième partie se démontre de la même façon car $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ est toujours quasi-projectif. \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6.31. Le théorème découle directement de la proposition 6.33 et des théorèmes 6.21 et 6.22. \square

EXEMPLE 6.34. L'exemple 11.11 du chapitre 2 est un éventail de $\mathcal{Sh}_{\text{Orient}}(\mathcal{B}_0)$ qui n'est pas un éventail de Bergman généralisé. Cela montre que notre notion de lissité est strictement

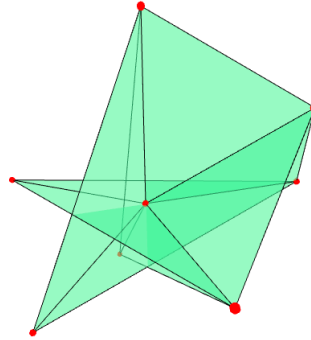
plus large que la notion localement matroïdale. Dans la section suivante, nous verrons que la famille des éventails lisses est bien plus large que $\mathcal{Sh}_{\text{Orient}}(\mathcal{B}_0)$. \diamond

6.11. Un éventail intéressant. Dans cette section, nous nous intéressons à un exemple découvert par Babae et Huh dans [BH17]. Il s'agit d'un éventail Σ'' dans \mathbb{R}^4 lisse et quasi-projectif mais dont l'anneau de Chow ne vérifie HR pour aucun élément ample (mais il vérifie HL). Ceci est une différence majeure avec la théorie de Hodge classique : une variété complexe projective lisse vérifie toujours les relations de Hodge-Riemann. Nous proposons ici une méthode de construction de Σ'' qui utilise la modification tropicale et qui diffère de celle proposée dans [BH17].

Rappelons que dans l'exemple 5.20 et la figure 11 nous avons introduit une structure simpliciale linéaire Σ qui est un revêtement double de l'éventail projectif de \mathbb{R}^2 . Cette structure a six rayons et six facettes. C'est un cône de sphère simpliciale, donc Σ est lisse. De plus, une fonction strictement convexe sur l'éventail projectif induit une fonction strictement convexe sur Σ , donc Σ est quasi-projective. Pourtant on vérifie directement que Σ ne vérifie HR pour aucun élément. En effet, l'accouplement $A^1(\Sigma) \otimes A^1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{k}$ possède trois valeurs propres positives alors que les relations de Hodge-Riemann impliqueraient qu'elle n'en ait qu'une seule.

On peut considérer la fonction f sur Σ qui vaut 1 sur ρ_0 , -1 sur ρ_1 et ρ_5 et zéro sur les autres rayons. Le diviseur $\text{div}(f)$ est simplement une droite tropicale, donc il est lisse. Notamment $\Sigma' := \mathcal{TM}_f(\Sigma)$ est lisse. Si l'on plonge naturellement Σ' dans \mathbb{R}^3 grâce à une base de fonctions linéaires sur Σ' , on n'obtient pas un éventail mais presque : seules trois paires de facettes se rencontrent le long d'un rayon dans leur intérieur, voir figure 15. L'anneau de Chow de Σ' est isomorphe à celui de Σ donc il ne vérifie toujours pas HR.

FIGURE 15. L'éventail de Babae-Huh avant la dernière modification tropicale, générée par Polymake. ^{ab}



^aLogiciel Polymake : <https://www.polymake.org>

^bAnimation et code source disponibles ici : http://matthieu.piquerez.fr/partage/babae_huh.pl
http://matthieu.piquerez.fr/partage/babae_huh.html

Maintenant on peut trouver une subdivision par éclatements de Σ' puis effectuer une modification tropicale au-dessus d'un diviseur qui de nouveau est une droite tropicale pour obtenir une troisième structure linéaire Σ'' . Celle-ci est toujours lisse et quasi-projective mais elle ne vérifie toujours pas HR. Par contre, cette fois-ci, le plongement naturel de Σ'' dans \mathbb{R}^4 est un éventail : c'est l'exemple de Babae et Huh. Notamment on remarque que Σ'' est un éventail lisse qui ne peut pas être dans $\mathcal{Sh}_{\text{Oqproj}}(\mathcal{B}_0)$ (ni dans $\mathcal{Sh}_{\text{Orient}}(\mathcal{B}_0)$ d'ailleurs) puisqu'il ne vérifie pas HR.

La construction décrite ci-dessus soulève plusieurs questions intéressantes.

QUESTION 6.35 (Plongement dans \mathbb{R}^n). Soit Σ une structure simpliciale linéaire. Existe-t-il toujours une structure Σ' qui est issue d'un éventail de \mathbb{R}^n et telle que Σ' peut être obtenue à partir de Σ par modifications tropicales et éclatements ? \diamond

QUESTION 6.36. Existe-t-il des structures simpliciales projectives lisses qui ne sont pas dans $Sh_{\mathcal{O}\text{-orient}}(\mathcal{SS})$ où \mathcal{SS} est l'ensemble des cônes de sphères simpliciales de dimensions maximales ? \diamond

7. Théorie de Hodge pour les structures simpliciales affines

Dans toute cette section, on fixe une structure simpliciale affine lisse X , et l'on note $Z = \overline{X}$ sa compactification canonique.

7.1. De la théorie de Hodge classique à la théorie de Hodge tropicale. Nous avons vu que dans le cas d'une structure simpliciale linéaire lisse, la cohomologie est très simple car elle est concentrée en bidegrés (p, p) . Ce n'est pas le cas pour les structures simpliciales affines où tous les bidegrés sont représentés en général. On se demande donc naturellement si le théorème de Lefschetz difficile et les relations de Hodge-Riemann s'étendent à ce cas, et s'ils respectent le bidegré. Rappelons donc le cas d'une variété complexe projective lisse.

7.1.1. *Cas complexe.* On poursuit l'exemple 5.14. Soit V une variété complexe projective lisse de dimension d . Alors V vérifie les propriétés kählériennes suivantes.

- Hodge nous a appris que la cohomologie de V à coefficients complexes se décompose de la manière suivante

$$H^k(V, \mathbb{C}) = \bigoplus_{\substack{p+q=k \\ p, q \geq 0}} H^{p,q}(V, \mathbb{C})$$

et $H^{p,q}(V, \mathbb{C}) \simeq \overline{H^{q,p}(V, \mathbb{C})}$. Le cup-produit et la dualité de Poincaré respecte le bidegré :

$$H^{p,q}(V, \mathbb{C}) \simeq H^{d-p, d-q}(V, \mathbb{C})^*.$$

- Le théorème de Lefschetz difficile énonce alors que si $\ell \in H^{1,1}(V, \mathbb{C}) \cap H^2(V, \mathbb{R})$ est une classe kählérienne, ou plus généralement une classe de Kähler, alors on a un isomorphisme

$$\cdot \ell^{d-p-q} : H^{p,q}(V, \mathbb{C}) \simeq H^{d-q, d-p}(V, \mathbb{C}),$$

pour toute paire d'entiers p et q telle que $p + q \leq d$. Cet isomorphisme donne une décomposition naturelle en parties primitives

$$H^{p,q}(V, \mathbb{C}) = \bigoplus_{k \geq 0} \ell^k P^{p-k, q-k}$$

où

$$P^{p,q} := \ker \left(\cdot \ell^{d-p-q+1} : H^{p,q}(V, \mathbb{C}) \rightarrow H^{d-q+1, d-p+1}(V, \mathbb{C}) \right).$$

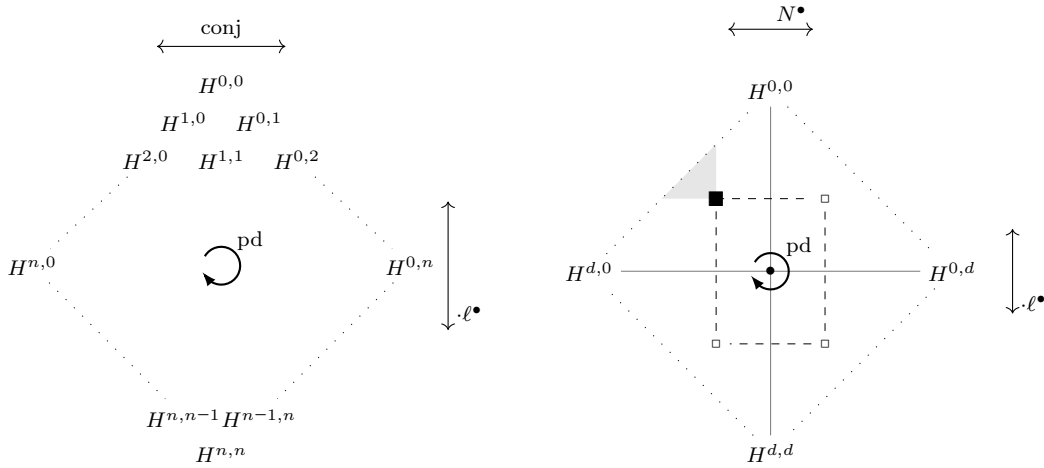
- Les relations bilinéaires de Hodge-Riemann s'énoncent de la manière suivante. Pour toute paire d'entiers p, q tels que $p + q \leq d$, la forme hermitienne

$$\begin{array}{ccc} H^{p,q}(V, \mathbb{C}) \otimes H^{p,q}(V, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ a \otimes b & \longmapsto & i^{p-q} \deg(a \ell^{d-p-q} \bar{b}) \end{array}$$

est définie positive sur $P^{p,q}$.

On peut résumer une partie de ces propriétés par le diamant de Hodge, figure 16, sur lequel sont représentés différents isomorphismes vus comme des symétries du diamant.

FIGURE 16. Les diamants de Hodge complexe et tropical.



7.1.2. *Comparaison avec le cas tropical.* Soit Z la compactification canonique d’une structure simpliciale affine quasi-projective lisse. L’existence d’une décomposition

$$H^k(Z) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(Z)$$

est tautologique. De plus, la dualité de Poincaré est par définition compatible avec cette décomposition. Contrairement au cas complexe, cette décomposition existe à coefficients réels, et même à coefficients entiers si Z est munie d’une structure entière, ce qui est plutôt étonnant. À l’inverse, ce qui manque comme nous l’avons vu en question 3.3, c’est une interprétation naturelle pour $H^k(Z)$.

L’isomorphisme donné par la conjugaison complexe n’a pour l’instant pas trouvé d’analogue tropical satisfaisant. La cohomologie de Dolbeault tropicale définit des analogues des formes holomorphes et antiholomorphes, et l’on peut naïvement définir une involution échangeant les uns en les autres, mais cette involution est encore mal comprise.

QUESTION 7.1. Peut-on trouver un analogue tropical de la conjugaison complexe induisant un isomorphisme $H^{p,q}(Z) \simeq H^{q,p}(Z)$ pour tout entiers p et q ? \diamond

Dans l’article [AP20b], nous avons montré avec Amini qu’il y a bien un isomorphisme $H^{p,q}(Z) \simeq H^{q,p}(Z)$ (voir théorème 7.6), mais cet isomorphisme est plus compliqué que la simple conjugaison complexe. Il est obtenu par un second opérateur de type Lefschetz $N : H^{\bullet,\bullet}(Z) \rightarrow H^{\bullet-1,\bullet+1}(Z)$. C’est l’opérateur de monodromie tropicale. Cet opérateur vérifie le théorème de Lefschetz difficile dans le sens où, pour $p > q$, $N^{q-p} : H^{p,q}(Z) \rightarrow H^{q,p}(Z)$ est un isomorphisme. Cet isomorphisme était conjecturé dans [MZ14, Liu19], conjecture que nous appelons la conjecture monodromie-poids.

Pour les autres propriétés kählériennes, nous obtenons des analogues tropicaux, ce qui, avec la monodromie, donne une structure encore plus riche que celle du diamant de Hodge d’une variété complexe projective lisse. Une représentation de cette structure peut être trouvée en figure 16, et le théorème 7.6 décrit précisément cette structure.

7.1.3. *Preuve classique de la décomposition de Hodge.* Avant de donner les idées principales de la preuve de l’existence de telles structures, il semble intéressant de parler d’une tentative que nous avons menée avec Amini et qui pour l’instant n’a pas abouti.

L’idée est de suivre la preuve classique de l’existence d’une décomposition de Hodge sur les variétés complexes projectives lisses. Rappelons que dans [CLD12, GK17, BH17, JSS19]

est défini l'analogie tropicale des formes holomorphes et antiholomorphes ainsi que les différentielles correspondantes. On note $\mathcal{A}^{p,q}(Z)$ l'espace des (p, q) -formes de Dolbeault tropicales sur Z . On a des différentielles $d' : \mathcal{A}^{\bullet,\bullet}(Z) \rightarrow \mathcal{A}^{\bullet+1,\bullet}(Z)$ et $d'' : \mathcal{A}^{\bullet,\bullet}(Z) \rightarrow \mathcal{A}^{\bullet,\bullet+1}(Z)$.

Pour adapter la preuve classique au cas tropical, il faudrait d'abord obtenir un élément fermé de $\mathcal{A}^{1,1}(Z)$ qui donne une métrique non dégénérée en tout point. Cela n'est pas possible avec la définition actuelle des formes de Dolbeault tropicales, mais en modifiant légèrement la définition on peut en trouver. Ensuite on souhaite définir les opérateurs duaux à d' et à d'' , en utilisant par exemple l'étoile de Hodge. Le problème est que cette étoile est très irrégulière au niveau des faces de codimension au moins un. Si l'on arrive à passer cette étape, on peut définir un laplacien $\mathcal{A}^{\bullet,\bullet}(Z) \rightarrow \mathcal{A}^{\bullet,\bullet}(Z)$ de bidegré $(0, 0)$. Le noyau de ce laplacien donne les formes harmoniques tropicales et chaque classe cohomologique a un unique représentant harmonique. Le reste de la décomposition découle ensuite naturellement via une preuve purement algébrique.

QUESTION 7.2. Peut-on définir un laplacien tropical? Peut-on définir les formes harmoniques tropicales? \diamond

Nous utilisons nous-même un autre type de laplacien en section 7.7 pour obtenir les propriétés kählériennes sur la décomposition, mais ce laplacien n'est pas directement défini sur les formes de Dolbeault ni sur l'espace des cochaînes tropicales.

7.1.4. *Le cas approximable.* Nous allons maintenant expliquer les idées de la preuve d'un point de vue géométrique. Dans le cas où la structure simpliciale est la limite tropicale d'une famille de variétés complexes, on peut s'inspirer de [IKMZ19]. Reprenons notre discussion de la section 3.8. Nous avons une famille de variétés complexes projectives lisses \overline{W}_t , pour $t \in \Delta^*$, une fibre centrale \overline{W}_0 , et la limite tropicale Z . Les composantes irréductibles de \overline{W}_0 sont indexées par les sommets de Z_f ; on les note $\overline{W}_{0,s}$ pour $s \in Z_{f,0}$. De plus, les intersections de k de ces composantes sont naturellement indexées par les faces de $Z_{f,k}$.

On a aussi vu que l'on peut relever la famille \mathcal{W}^* en $\widetilde{\mathcal{W}}^*$ au-dessus du revêtement universel de Δ^* . Il se trouve que l'on peut mettre une structure de Hodge mixte sur la cohomologie du relevé $\widetilde{\mathcal{W}}^*$ en utilisant la filtration induite par la monodromie [Sch73]. On l'appelle la *structure de Hodge limite*. Les gradués de cette structure de Hodge sont calculés par la suite spectrale de Steenbrink notée $\mathbf{ST}^{\bullet,\bullet}$ [Ste76, SP08]. Celle-ci dégénère en page deux. Dans le cas étudié dans [IKMZ19], où la limite Z est localement matroïdale et vit dans \mathbb{TP}^n , les gradués de la structure de Hodge limite sont très simples. En degré k , les parties de poids impairs sont triviales et la partie de poids $2p$, $p \in \mathbb{Z}$, est concentrée en bidegré (p, p) et est calculée par $\mathbf{ST}_\infty^{k-2p, 2p}$. De plus, la dimension de $\mathbf{ST}_\infty^{k-2p, 2p}$ est égal au nombre de Hodge d'une fibre générale $h^{p, k-p} := \dim(H^{p, k-p}(\overline{W}_t))$.

La première page de la suite spectrale $\mathbf{ST}_1^{\bullet,\bullet}$ est entièrement décrite à partir de la cohomologie (à coefficients rationnels) des différentes composantes. Or, dans le cas où les composantes ouvertes sont des complémentaires d'arrangement d'hyperplans, comme nous le verrons avec le théorème 9.1

$$H^{\bullet,\bullet}(\overline{W}_{0,\delta}) \simeq H^{\bullet,\bullet}(Z^\delta).$$

Donc on peut calculer la suite spectrale de Steenbrink, et donc les nombres de Hodge d'une fibre générale, directement sur la limite tropicale. Il ne reste plus qu'à montrer que la limite de la suite spectrale de Steenbrink correspond bien à la cohomologie tropicale, voir section 7.4 à ce propos.

Pour que la structure de Hodge limite soit simple comme ci-dessus, il n'est pas nécessaire que les composantes $\overline{W}_{0,\delta}$ de la fibre centrale soient des compactifications lisses de complémentaires d'arrangement d'hyperplans. Il suffit par exemple que la cohomologie de chaque composante soit concentrée en bidegrés (p, p) pour $0 \leq p \leq \dim(W_{0,\delta})$, ou bien que la dégénérescence soit maximale au sens de Deligne.

QUESTION 7.3. Peut-on étendre les résultats de [IKMZ19] à ce cadre plus général, quitte à changer la définition des faisceaux \mathbf{F}^\bullet ? \diamond

Cette question est reliée à la question 3.21. En collaboration avec Amini, nous avons établi une conjecture plus précise et travaillons à sa résolution.

Maintenant, pour obtenir les propriétés kählériennes, on peut s'inspirer de l'article de Guillén et Navarro Aznar [GN90] qui montre que la première page $\mathrm{ST}_1^{\bullet,\bullet}$ est une structure de Hodge-Lefschetz polarisée. Ces structures possèdent de nombreuses propriétés de type kählérien, étudiées notamment par Deligne et Saito [Sai88]. Sous de bonnes conditions, ces propriétés sont préservées sur la cohomologie; donc ici sur $\mathrm{ST}_2^{\bullet,\bullet}$ et donc sur $H^{\bullet,\bullet}(Z)$. Comme nous l'avons évoqué ci-dessus, en plus de l'opérateur de Lefschetz, induit par une classe kählérienne, ces structures possèdent un second opérateur de type Lefschetz, à savoir l'opérateur de monodromie tropical.

7.1.5. *Cas général.* Dans le cas de la compactification canonique d'une structure simpliciale affine conique, on peut définir formellement la première page de la suite spectrale de Steenbrink $\mathrm{ST}_1^{\bullet,\bullet}$.

QUESTION 7.4. Peut-on définir une page zéro de la suite spectrale de Steenbrink à partir de la variété tropicale? Faut-il enrichir la variété tropicale d'informations supplémentaires concernant une famille de variétés virtuelle? \diamond

La première page $\mathrm{ST}_1^{\bullet,\bullet}$ possède une différentielle naturelle qui nous permet d'obtenir la seconde page. Comme dans le cas géométrique la suite spectrale dégénère en page deux, dans le cas tropical on impose naturellement que $\mathrm{ST}_\infty^{\bullet,\bullet} = \mathrm{ST}_2^{\bullet,\bullet}$. On montre facilement que $\mathrm{ST}_1^{\bullet,\bullet}$ est une structure de Hodge-Lefschetz. Ensuite, comme dans [GN90], la théorie très générale des structures de Hodge-Lefschetz polarisées s'applique automatiquement et l'on obtient les propriétés kählériennes sur $\mathrm{ST}_\infty^{\bullet,\bullet}$. Il reste à voir sous quelles conditions $\mathrm{ST}_\infty^{\bullet,\bullet}$ est isomorphe à $H^{\bullet,\bullet}(Z)$ (modulo un décalage des degrés, voir théorème 7.8).

Le fait que la cohomologie tropicale est bigraduée même à coefficients rationnels, comme pour la suite spectrale de Steenbrink, et l'existence d'un opérateur de monodromie canonique sur la variété tropicale tend à montrer que l'on doit considérer une variété tropicale comme une famille de variétés plutôt que comme une variété seule.

Néanmoins, pour l'instant, on ne sait retrouver que les gradués de la structure de Hodge limite et non pas la structure de Hodge elle-même. On peut maintenant reposer la question 3.3 concernant l'existence d'une bonne définition d'un $k^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie tropicale.

QUESTION 7.5. Peut-on retrouver tropicalement le groupe $H^k(\widetilde{W}^*)$ dans le cas approximable? Faut-il ajouter des informations supplémentaires concernant la famille de variétés? \diamond

Si la réponse à la première question est positive, les $H^{p,q}(Z)$ pour $p + q = k$ seraient les gradués de la filtration de $H^k(Z)$ par une structure de poids.

7.2. Énoncé du théorème principal. Le théorème 7.6 s'applique à deux types de structures simpliciales affines définis en section 7.6, à savoir les structures kählériennes et les structures asymptotiquement kählériennes. Ces deux notions devraient pouvoir être unifiées en une seule et même notion, par exemple en définissant de manière faisceautique une classe de Kähler (voir question 7.22). Le problème dans le cadre des structures simpliciales est qu'une telle classe de Kähler sur la représentation géométrique n'aurait pas forcément de représentant adapté à la structure simpliciale, et cette structure est au cœur de la preuve actuelle du théorème. En attendant les définitions précises, nous pouvons d'ores et déjà annoncer que la compactification canonique d'une structure simpliciale affine quasi-projective est kählérienne.

THÉORÈME 7.6 (Propriétés kählériennes pour les structures simpliciales affines). *Soit Z la compactification canonique d'une structure simpliciale affine lisse kählérienne ou asymptotiquement kählérienne. Selon notre convention habituelle, si $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$, on suppose que Z est fortement rationnelle.*

- (Conjecture monodromie poids) *Pour toute paire d'entiers $p \geq q$, l'opérateur de monodromie tropical induit un isomorphisme*

$$N^{p-q} : H^{p,q}(Z) \xrightarrow{\simeq} H^{q,p}(Z).$$

- (Lefschetz difficile) *Si $p + q \leq d$, la classe de Kähler $\ell \in H^{1,1}(Z)$ induit un isomorphisme*

$$\ell^{d-p-q} : H^{p,q}(Z) \xrightarrow{\simeq} H^{d-q,d-p}(Z).$$

- (Hodge-Riemann) *Pour $q \leq p$ et $p + q \leq d$, l'accouplement*

$$\begin{array}{ccc} H^{p,q}(Z) \otimes H^{p,q}(Z) & \longrightarrow & \mathbb{k} \\ a \otimes b & \longmapsto & (-1)^p \deg(a\ell^{d-p-q}N^{p-q}b) \end{array}$$

est définie positif sur la partie primitive PP^q de $H^{p,q}(Z)$.

Ici, pour $q \leq p$ et $p + q \leq d$, la *partie primitive de Hodge-Lefschetz* de $H^{p,q}(Z)$, notée PP^q , est définie par

$$\ker\left(\ell^{d-p-q+1} : H^{p,q}(Z) \rightarrow H^{d-q+1,d-p+1}(Z)\right) \cap \ker\left(N^{p-q+1} : H^{p,q}(Z) \rightarrow H^{q-1,p+1}(Z)\right).$$

Notamment le théorème précédent implique une décomposition en parties primitives. Pour $q \leq p$ et $p + q \leq d$, on a

$$H^{p,q}(Z) = \bigoplus_{k,l \geq 0} \ell^k N^l PP^{p-k+l,q-k-l}.$$

Le théorème est illustré par la figure 16. Les quatre carrés sont isomorphes, et le carré noir peut être décomposé grâce aux parties primitives des groupes de la partie grisée dont le degré a la bonne parité.

Dans [Sha15, Sha11], Shaw construit une famille de surfaces tropicales dans \mathbb{TP}^3 et se rend compte par un calcul explicite que l'intersection des courbes tropicales induit une forme bilinéaire de signature $(1 + b_2, h^{1,1} - b_2 - 1)$, où $b_2 = h^{0,2} = \dim(H^{0,2}(Z))$ est le second nombre de betti de la surface et $h^{1,1} := \dim(H^{1,1}(Z))$ est le nombre de Hodge de bidegré $(1, 1)$. Cette signature contredit le théorème de l'indice de Hodge naïf qui énoncerait que la signature serait $(1, h^{1,1} - 1)$. Le théorème 7.6 permet d'expliquer cette formule.

THÉORÈME 7.7 (Théorème de l'indice de Hodge pour les surfaces tropicales). *La signature de $H^{1,1}(Z) \otimes H^{1,1}(Z) \rightarrow \mathbb{k}$ est égal à $(1 + b_2, h^{1,1} - 1 - b_2)$ where b_2 is the second Betti number of \mathfrak{X} and $h^{1,1} = \dim_{\mathbb{Q}} H_{\text{trop}}^{1,1}(\mathfrak{X})$.*

DÉMONSTRATION. Par le théorème 7.6, $H^{1,1}(Z)$ se décompose de la manière suivante :

$$\begin{aligned} H^{1,1}(Z) &= P^{1,1}(Z) \oplus \ell P^{0,0}(Z) \oplus NP^{2,0}(Z) \\ &= P^{1,1}(Z) \oplus \ell H^{0,0}(Z) \oplus NH^{2,0}(Z). \end{aligned}$$

De plus, l'accouplement $H^{1,1}(Z) \otimes H^{1,1}(Z) \rightarrow \mathbb{k}$ est défini négatif sur la première partie et défini positif sur les deux dernières parties. Cela conclut la preuve car

$$\dim(\ell H^{0,0}(Z) \oplus NH^{2,0}(Z)) = \dim(H^{0,0}(Z)) + \dim(H^{2,0}(Z)) = 1 + b_2. \quad \square$$

7.3. Suite spectrale de Steenbrink tropicale. Comme nous l'avons dit, le théorème principal découle du fait que l'on peut définir une suite spectrale $\mathrm{ST}_1^{\bullet, \bullet}$ qui possède une structure riche et qui calcule la cohomologie tropicale.

On définit la première page $\mathrm{ST}_1^{\bullet, \bullet}$ de la *suite spectrale de Steenbrink tropicale* de la manière suivante.

$$\mathrm{ST}_1^{a,b} := \bigoplus_{\substack{s \geq |a| \\ s \equiv a \pmod{2}}} \mathrm{ST}_1^{a,b,s}$$

où

$$\mathrm{ST}_1^{a,b,s} := \bigoplus_{\substack{\delta \in Z_f \\ |\delta| = s}} H^{a+b-s}(\bar{Z}^\delta).$$

Ici \bar{Z}^δ désigne la compactification canonique de l'éventail transverse Z^δ autour de δ . Précisons que l'on note $Z_f := X_f$ et $Z_{\mathrm{rec}} := X_{\mathrm{rec}}$. Rappelons que, comme Z est lisse, pour $\delta \in Z$ et $k \in \mathbb{Z}$,

$$H^{2k}(\bar{Z}^\delta) = H^{k,k}(\bar{Z}^\delta) \simeq A^{k/2}(Z^\delta) \quad \text{et} \quad H^{2k+1} = 0.$$

Notamment $\mathrm{ST}_1^{a,b}$ est trivial pour b impair.

Nous avons les morphismes suivants sur $\mathrm{ST}_1^{a,b}$,

$$i^{a,b*} : \mathrm{ST}_1^{a,b} \rightarrow \mathrm{ST}_1^{a+1,b} \quad \text{et} \quad \mathrm{gys}^{a,b} : \mathrm{ST}_1^{a,b} \rightarrow \mathrm{ST}_1^{a+1,b},$$

où, par exemple, $i^{a,b*}$ est la somme des morphismes $\mathrm{sign}(\gamma, \delta) i_{\gamma < \delta}^*$ où $\gamma, \delta \in Z_f$ parcourent les faces appropriées de Z_f et vérifient $\gamma < \delta$. On définit alors la différentielle $d : \mathrm{ST}_1^{\bullet, \bullet} \rightarrow \mathrm{ST}_1^{\bullet+1, \bullet}$ par $d = \mathrm{gys} + i^*$.

En général, définir une différentielle ne suffit pas à définir la suite spectrale. Mais ici, la suite spectrale est nulle en rangées impaires, donc la différentielle de la seconde page est triviale. En fait, on impose formellement que la suite spectrale dégénère en page deux : $\mathrm{ST}_\infty^{\bullet, \bullet} := \mathrm{ST}_2^{\bullet, \bullet}$. Voici le théorème annoncé.

THÉORÈME 7.8 (Théorème de comparaison Steenbrink-tropical). *Pour toute paire d'entiers p, q il y a un isomorphisme canonique*

$$H^{p,q}(Z) \simeq \mathrm{ST}_\infty^{q-p, 2p} = H^{q-p}(\mathrm{ST}_1^{\bullet, 2p}, d).$$

De plus, les termes de rang impair $\mathrm{ST}_1^{a, 2p+1}$, $a, p \in \mathbb{Z}$, sont tous triviaux.

Le changement d'indice peut être visualisé dans la figure 17.

7.4. Schéma de preuve pour le théorème 7.8. La preuve entière peut être trouvée en section 5 du chapitre 3 et s'appuie sur la dernière section de [IKMZ19]. Elle est assez technique, mais le schéma de preuve est assez simple et fait apparaître des objets intéressants, notamment la filtration par le poids torique du faisceau \mathbf{F}^\bullet . Fixons un entier p . Nous souhaitons montrer qu'il existe un isomorphisme canonique

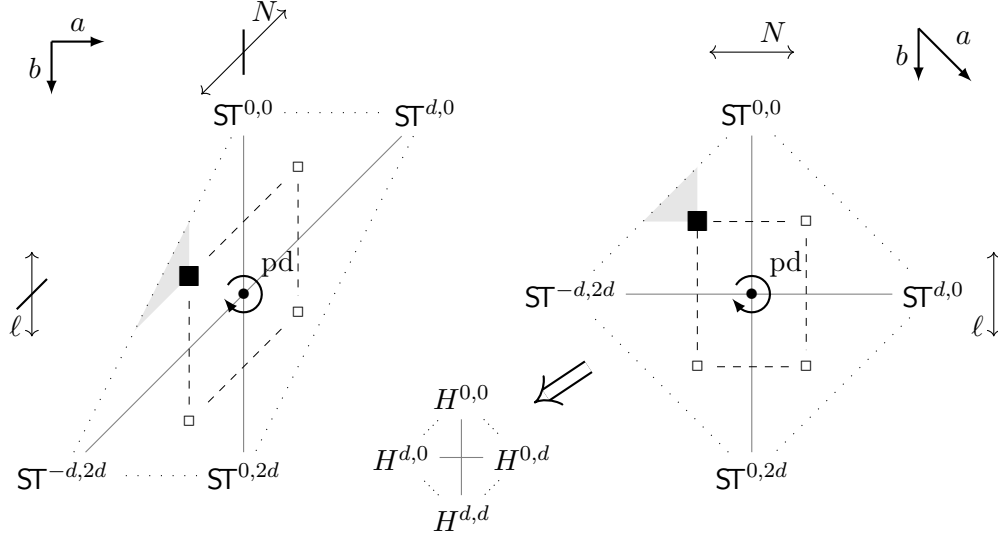
$$H^{p,q}(Z) \simeq H^{q-p}(\mathrm{ST}_1^{\bullet, 2p}, d).$$

7.4.1. *Le double complexe ${}_p\mathrm{St}^{\bullet, \bullet}$.* Remarquons tout d'abord que l'on peut « déplier » le complexe $\mathrm{ST}_1^{\bullet, 2p}$ en un double complexe ${}_p\mathrm{St}^{\bullet, \bullet}$ défini par

$${}_p\mathrm{St}^{a,b} := \mathrm{ST}^{a+b-p, 2p, p+a-b}$$

où i^* joue le rôle de la différentiel de bidegré $(1, 0)$, et gys celui de la différentielle de bidegré $(0, 1)$. On vérifie facilement que $\mathrm{ST}_1^{\bullet-p, 2p} = \mathrm{Tot}^\bullet({}_p\mathrm{St}^{\bullet, \bullet})$. On peut trouver le diagramme de ${}_p\mathrm{St}^{\bullet, \bullet}$ en figure 3 du chapitre 3.

FIGURE 17. La suite spectrale de Steenbrink est munie d'une structure de Hodge-Lefschetz et calcule la cohomologie tropicale.



7.4.2. *Extension de Steenbrink à Z .* Pour l'instant, la suite spectrale de Steenbrink tropicale est définie sur la partie finie de Z . On peut étendre sa définition, ou la définition de ${}_p\mathbf{St}^{\bullet,\bullet}$ ce qui est équivalent, sur Z tout entier. On obtient un double complexe ${}_p\overline{\mathbf{St}}^{\bullet,\bullet}$ défini dans le chapitre 3 en section 5.5 et représenté en 4.

PROPOSITION 7.9. *La suite spectrale et son extension ont la même cohomologie : l'inclusion ${}_p\mathbf{St}^{\bullet,\bullet} \hookrightarrow {}_p\overline{\mathbf{St}}^{\bullet,\bullet}$ induit un isomorphisme en cohomologie*

$$H^\bullet(\mathrm{Tot}^\bullet({}_p\mathbf{St}^{\bullet,\bullet})) \rightarrow H^\bullet(\mathrm{Tot}^\bullet({}_p\overline{\mathbf{St}}^{\bullet,\bullet})).$$

DÉMONSTRATION. Voir chapitre 3 section 5.9. Cette proposition peut être vue comme un analogue pour Steenbrink du théorème 4.1, théorème que l'on peut généraliser au cas des structures simpliciales affines. D'ailleurs, au lieu d'étendre Steenbrink, on aurait pu utiliser la généralisation du théorème 4.1 pour restreindre $C^{\bullet,\bullet}(Z)$ à la partie finie ; mais nous avons choisi de rester le plus proche possible de la démonstration originale du théorème 7.6. \square

Au double complexe ${}_p\overline{\mathbf{St}}^{\bullet,\bullet}$, on peut associer la suite spectrale induite par la filtration par les colonnes

$$\downarrow {}_p\overline{\mathbf{St}}^{\bullet,\bullet} \implies H^{\bullet-p}(\mathbf{ST}_1^{\bullet,2p}, d).$$

7.4.3. *La filtration par le poids torique sur \mathbf{F}^p .* Nous avons décomposé le complexe $\mathbf{ST}_1^{\bullet,2p}$ en un double complexe. Maintenant il paraît naturel d'essayer de décomposer de même $C^{p,\bullet}(Z)$ en un double complexe. En fait, il ne s'agit pas d'un double complexe mais de la page zéro d'une suite spectrale induite par une filtration.

DÉFINITION 7.10 (Filtration par le poids torique). Soit δ une face de Z . Pour tout entier $a \geq 0$, on définit la *filtration par le poids torique de $\mathbf{F}^p(\delta)$* en posant

$$\widetilde{W}_a \mathbf{F}^p(\delta) := \left\{ \alpha \in \mathbf{F}^p(\delta) \mid \text{la restriction de } \alpha \text{ sur } \bigwedge^{a+1} N_{\delta, \mathbb{k}} \wedge \mathbf{F}_{p-a-1}(\delta) \text{ de } \mathbf{F}_p(\delta) \text{ est triviale} \right\}.$$

Pour justifier le nom de la filtration, nous avons vu avec l'équation (3.1) que, moralement,

$$\mathbf{F}_\bullet(\delta) \simeq \bigwedge^\bullet N_{\delta, \mathbb{k}} \otimes \mathbf{F}_\bullet(0_\delta) \simeq H_\bullet(\mathbb{T}_\mathbb{C}^{|\delta|}) \otimes H_\bullet(U_\delta)$$

où $\underline{0}_\delta := \delta^\delta$ désigne le cône trivial dans Z^δ et où U_δ est une certaine strate ouverte complexe associée à δ . Ainsi, on peut définir de manière analogue $\widetilde{W}_a H^p(\mathbb{T}_\mathbb{C}^{|\delta|} \times U_\delta)$ comme l'ensemble des classes s'annulant sur $H_{a+1}(\mathbb{T}_\mathbb{C}^{|\delta|}) \otimes H_{p-a-1}(U_\delta)$, d'où le nom de la filtration.

En pratique, nous travaillerons plutôt avec la filtration décroissante

$$W^a \mathbf{F}^p(\delta) := \widetilde{W}_{-a+|\delta|} \mathbf{F}^p(\delta).$$

PROPOSITION 7.11. (1) Pour toute face δ , le $a^{\text{ème}}$ gradué de la filtration vérifie

$$\text{gr}_W^a \mathbf{F}^p(\delta) \simeq \bigwedge^{|\delta|-a} M_{\delta, \mathbb{k}} \otimes \mathbf{F}^{p+a-|\delta|}(\underline{0}_\delta).$$

(2) Pour toute paire de faces $\gamma \prec \delta$, la restriction $\mathbf{F}^p(\gamma) \rightarrow \mathbf{F}^p(\delta)$ respecte la filtration W^\bullet .

La filtration induit une suite spectrale qui calcule la cohomologie tropicale

$${}_p \mathbf{C}^{\bullet, \bullet} \implies H^\bullet(Z, \mathbf{F}^p) = H_{\text{trop}}^{\bullet, \bullet}(X).$$

La page zéro est donnée par

$${}_p \mathbf{C}_0^{a, b} = \text{gr}_W^a C^{a+b}(Z, \mathbf{F}^p) = \bigoplus_{\substack{\delta \in Z \\ |\delta|=a+b}} \bigwedge^b M_{\delta, \mathbb{k}} \otimes \mathbf{F}^{p-b}(\underline{0}_\delta),$$

voir figure 2 du chapitre 3.

7.4.4. *Isomorphisme en page un.* Pour démontrer le théorème 7.8, il nous reste donc à montrer que ${}_p \mathbf{C}^{\bullet, \bullet}$ et $\downarrow_p \overline{\text{St}}^{\bullet, \bullet}$ calculent la même cohomologie. Commençons par montrer que ${}_p \mathbf{C}_1^{a, b} \simeq \downarrow_p \overline{\text{St}}_1^{a, b}$ pour toute paire d'entiers a, b .

Pour cela, il suffit de montrer que pour tout entier a

$$\begin{aligned} {}_p \mathbf{C}_0^{a, \bullet} : \quad 0 \rightarrow \bigoplus_{|\delta|=a} \bigwedge^0 M_{\delta, \mathbb{k}} \otimes \mathbf{F}^p(\underline{0}_\delta) \rightarrow \bigoplus_{|\delta|=a+1} \bigwedge^1 M_{\delta, \mathbb{k}} \otimes \mathbf{F}^{p-1}(\underline{0}_\delta) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \bigoplus_{|\delta|=a+p} \bigwedge^p M_{\delta, \mathbb{k}} \otimes \mathbf{F}^0(\underline{0}_\delta) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

est quasi-isomorphe à

$$\downarrow_p \overline{\text{St}}_0^{a, \bullet} : \quad 0 \rightarrow \bigoplus_{\substack{|\delta|=p+a \\ |\delta_{\text{rec}}| \leq a}} H^0(\delta) \rightarrow \bigoplus_{\substack{|\delta|=p+a-1 \\ |\delta_{\text{rec}}| \leq a}} H^2(\delta) \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\substack{|\delta|=a \\ |\delta_{\text{rec}}| \leq a}} H^{2p}(\delta) \rightarrow 0.$$

On introduit alors le double complexe ${}_a \mathbf{D}^{\bullet, \bullet}$ défini par

$${}_a \mathbf{D}^{b, b'} := \bigoplus_{|\delta|=a+b} \bigwedge^b M_{\delta, \mathbb{k}} \otimes \left(\bigoplus_{\substack{\eta > \delta \\ |\eta|=p+a-b' \\ \text{sed}(\eta)=\text{sed}(\delta)}} H^{2b'}(\eta) \right).$$

Les différentielles sont définies en section 5.6 du chapitre 3, la différentielle verticale est induite par gys . Ce double complexe joue le rôle de pont entre les deux cohomologies car il a les propriétés très particulières suivantes.

PROPOSITION 7.12. Pour tout entier b , la colonne ${}_a \mathbf{D}^{b, \bullet}$ est une résolution de ${}_p \mathbf{C}_0^{a, b}$, i.e. la suite

$$0 \rightarrow {}_p \mathbf{C}_0^{a, b} \rightarrow {}_a \mathbf{D}^{b, 0} \rightarrow {}_a \mathbf{D}^{b, 1} \rightarrow \dots \rightarrow {}_a \mathbf{D}^{b, p-b} \rightarrow 0$$

est exacte. De même, pour tout entier b' , la rangée ${}_a \mathbf{D}^{\bullet, b'}$ est une résolution de $\downarrow_p \overline{\text{St}}_0^{a, \bullet}$, i.e. la suite

$$0 \rightarrow \downarrow_p \overline{\text{St}}_0^{a, b'} \rightarrow {}_a \mathbf{D}^{0, b'} \rightarrow {}_a \mathbf{D}^{1, b'} \rightarrow \dots \rightarrow {}_a \mathbf{D}^{p-b', b'} \rightarrow 0$$

est exacte.

DÉMONSTRATION. Voir chapitre 3 section 5.6. Pour la première suite exacte, on peut la réécrire comme la somme directe

$$\bigoplus_{|\delta|=a+1} \bigwedge^b M_{\delta, \mathbb{k}} \otimes K^\bullet$$

où K^\bullet est exactement la suite exacte de Deligne 4.9 associée à $\mathbf{F}^p(\underline{0}_\delta)$.

Pour la seconde suite exacte, cette fois-ci on peut factoriser par le second facteur et l'on obtient la décomposition

$$\bigoplus_{|\eta|=p+a-b'} L^\bullet \otimes H^{2b'}(\eta)$$

où L^\bullet est un complexe de cochaînes sur les faces de η de sédentarité $\text{sed}(\eta)$. Comme η est très simple, on peut faire un calcul explicite et vérifier que l'on obtient bien une suite exacte. \square

Les inclusions ${}_p\mathcal{C}_0^{a,b} \hookrightarrow {}_a\mathcal{D}^{b,0}$ de la proposition 7.12 induisent un morphisme de complexe ${}_p\mathcal{C}_0^{a,\bullet} \hookrightarrow \text{Tot}^\bullet({}_a\mathcal{D}^{\bullet,\bullet})$ bien défini. On peut donc considérer le double complexe obtenu en insérant ${}_p\mathcal{C}_0^{a,\bullet}$ au-dessus de ${}_a\mathcal{D}^{\bullet,\bullet}$ en rangée -1 . La proposition 7.12 montre que la cohomologie de ce double complexe est triviale. Cela implique immédiatement que l'inclusion

$${}_p\mathcal{C}_0^{a,\bullet} \hookrightarrow \text{Tot}^\bullet({}_a\mathcal{D}^{\bullet,\bullet})$$

induit un isomorphisme en cohomologie. (En effet, on a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \text{Tot}^\bullet({}_a\mathcal{D}^{\bullet,\bullet}) \rightarrow \text{cone}^\bullet\left({}_p\mathcal{C}_0^{a,\bullet} \hookrightarrow \text{Tot}^\bullet({}_a\mathcal{D}^{\bullet,\bullet})\right) \rightarrow {}_p\mathcal{C}_0^{a,\bullet+1} \rightarrow 0,$$

voir par exemple [KS90] pour l'application cone, et la suite exacte longue associée nous donne l'isomorphisme.)

Le même raisonnement nous montre que l'inclusion

$$\downarrow {}_p\overline{\text{St}}_0^{a,\bullet} \hookrightarrow \text{Tot}^\bullet({}_a\mathcal{D}^{\bullet,\bullet})$$

est un quasi-isomorphisme. On en déduit ce qu'on souhaitait, à savoir que ${}_p\mathcal{C}_0^{a,\bullet}$ et $\downarrow {}_p\overline{\text{St}}_0^{a,\bullet}$ ont la même cohomologie et donc ${}_p\mathcal{C}_1^{a,b} \simeq \downarrow {}_p\overline{\text{St}}_1^{a,b}$ pour tout bidegré (a, b) .

7.4.5. *Fin de la preuve.* Le fait que les premières pages des deux suites spectrales coïncident ne signifie pas que leurs limites soient égales, et encore moins que les complexes ayant donné la page zéro aient la même cohomologie. Pour montrer cela, la preuve que nous fournissons dans le chapitre 3 ne fonctionne pas dans notre cadre, par exemple parce que l'on choisit un produit scalaire global sur l'espace ambiant ce qui n'est pas possible dans le cas d'une structure simpliciale affine quelconque. Il faut alors revenir à la preuve originelle de [IKMZ19].

Dans cet article, les auteurs définissent un double complexe $K_{(p)}^{\bullet,\bullet}$ et une filtration W^\bullet sur ce double complexe (ce double complexe est défini en homologie dans l'article mais ici on considère son dual). Le $a^{\text{ème}}$ gradué de $K_{(p)}^{\bullet,\bullet}$ est exactement

$$\text{gr}_W^a K_{(p)}^{\bullet,\bullet} = {}_a\mathcal{D}^{\bullet,\bullet}.$$

De plus on a une inclusion $C^{p,\bullet} \hookrightarrow \text{Tot}^\bullet(K_{(p)}^{\bullet,\bullet})$ qui respecte les filtrations respectives. La discussion ci-dessus montrent que cette inclusion est un quasi-isomorphisme.

De même, on a une inclusion de $\text{Tot}^\bullet({}_p\overline{\text{St}}^{\bullet,\bullet})$ dans $\text{Tot}^\bullet(K_{(p)}^{\bullet,\bullet})$ qui respecte les filtrations (on considère toujours la filtration par colonnes sur ${}_p\overline{\text{St}}^{\bullet,\bullet}$). De nouveau, cette inclusion est un isomorphisme. Ceci conclut la démonstration du théorème 7.8. \square

7.5. Monodromie. Reprenons la preuve du théorème principal. Nous avons un double complexe

$$\mathrm{ST}_1^{a,b} = \bigoplus_{\substack{s \geq |a| \\ s \equiv a \pmod{2}}} \mathrm{ST}_1^{a,b,s}, \quad \mathrm{ST}_1^{a,b,s} = \bigoplus_{\substack{\delta \in Z_f \\ |\delta| = s}} H^{a+b-s}(\bar{Z}^\delta).$$

On voit que $\mathrm{ST}_1^{a,b,s}$ ne dépend que de $a+b$ et de s . On en déduit qu'il y a une inclusion triviale $\mathrm{ST}_1^{a,b} \hookrightarrow \mathrm{ST}_1^{a+2,b-2}$ pour $a < 0$ et une surjection triviale $\mathrm{ST}_1^{a,b} \twoheadrightarrow \mathrm{ST}_1^{a+2,b-2}$ pour $a \geq -1$.

DÉFINITION 7.13. L'opérateur de monodromie sur $\mathrm{ST}_1^{\bullet,\bullet}$ est défini par l'application

$$N : \mathrm{ST}_1^{\bullet,\bullet} \rightarrow \mathrm{ST}_1^{\bullet+2,\bullet-2},$$

induite par les injections et les surjections décrites ci-dessus.

Cet opérateur commute avec la différentielle et induit donc un opérateur noté et appelé de la même manière sur $\mathrm{ST}_\infty^{\bullet,\bullet} = \mathrm{ST}_2^{\bullet,\bullet}$. \diamond

Du côté tropical, l'opérateur de monodromie est plus délicat à définir. Il n'est pas défini de manière canonique au niveau des cochaînes, voir [MZ14].

Pour une face $\delta \in Z_f$, on choisit arbitrairement un point o_δ dans $|\delta| \subseteq \widehat{Z}$. Si $\gamma \prec \delta$, $o_\delta - o_\gamma$ correspond naturellement à un élément de $N_{\delta,\mathbb{k}}$. Pour les faces $\eta \in Z$ de sédentarité $\underline{0}$, on pose $o_\eta = o_{\eta_f}$ et pour les faces η de sédentarité $\sigma \neq \underline{0}$, on a $\eta = \delta^\sigma$ pour un certain $\delta \in Z$ de sédentarité $\underline{0}$ et l'on pose o_η égal à la projection de o_δ .

Pour tout bidegré (p, q) , on obtient une application

$$\begin{aligned} N : C^{p,q}(Z) &\rightarrow C^{p-1,q+1}(Z), \\ (\gamma, \alpha) &\mapsto \sum_{\substack{\delta \succ \gamma \\ \mathrm{sed}(\delta) = \mathrm{sed}(\gamma)}} \mathrm{sign}(\gamma, \delta) (\delta, \iota_{o_\delta - o_\gamma}(\alpha)). \end{aligned}$$

DÉFINITION - PROPOSITION 7.14. L'application N définie ci-dessus induit une application $N : H^{p,q}(Z) \rightarrow H^{p-1,q+1}(Z)$ qui ne dépend pas des points o_δ choisis. On appelle cette application l'opérateur de monodromie tropical.

PROPOSITION 7.15. L'isomorphisme Steenbrink-tropical du théorème 7.8 commute avec les opérateurs de monodromie respectifs.

DÉMONSTRATION. Voir le théorème 6.20 du chapitre 3. \square

7.6. Variétés kählériennes. Passons à la définition d'une forme de Kähler. Ce doit être un cocycle dans $C^{1,1}(Z)$, ou dans $\mathrm{ST}_1^{0,2}$, qui est localement positif. On a par définition

$$\mathrm{ST}_1^{0,2} \simeq \bigoplus_{s \in Z_{f,0}} H^2(\bar{Z}^s) \oplus \bigoplus_{\delta \in Z_{f,2}} H^0(\bar{Z}^\delta).$$

En rappelant que $H^2(\bar{Z}^s) \simeq A^1(Z^s)$, si Z^s est kählérienne, on peut définir un élément kählérien sur s .

DÉFINITION 7.16. Une forme de Kähler dans $\mathrm{ST}_1^{\bullet,\bullet}$ est par définition un élément

$$(\ell_s)_{s \in Z_{f,0}} \in \bigoplus_{s \in Z_{f,0}} H^2(\bar{Z}^s) \subseteq \mathrm{ST}_1^{0,2}$$

telle que ℓ_s soit kählérienne dans $A^1(Z^s)$ et avec la condition de compatibilité suivante. Pour chaque arête $e \in Z_{f,1}$ d'extrémités s_1 et s_2 ,

$$i_{s_1 \prec e}^*(\ell_{s_1}) = i_{s_2 \prec e}^*(\ell_{s_2}). \quad \diamond$$

La condition de compatibilité revient exactement à demander que la forme de Kähler soit un cocycle. La définition correspondante dans $C^{1,1}(Z)$ est moins satisfaisante. Une forme de Kähler serait un cocycle ℓ dans $C^{1,1}(Z)$ tel que, pour chaque sommet $s \in X_f$, la somme suivante soit kählérienne.

$$\sum_{e>s} \ell|_e(\nu_e)_{X_{e^s}} \in A^1(Z^s).$$

DÉFINITION 7.17. Soit Z la compactification d'une structure simpliciale affine lisse. Alors Z est dite *kählérienne* si Z possède une subdivision possédant une forme de Kähler. \diamond

Rappelons que, par définition, une subdivision de Z doit préserver l'éventail de récession Z_{rec} .

PROPOSITION 7.18. Si Z est projective et si Z^δ est kählérienne pour tout $\delta \in Z_f$, alors Z possède une forme de Kähler.

DÉMONSTRATION. Soit X la structure simpliciale affine telle que $\bar{X} = Z$. Soit f une fonction linéaire par morceaux strictement convexe sur X . Alors pour tout sommet $s \in Z_f$, f induit une fonction linéaire par morceaux f^s strictement convexe sur Z^s . Donc f^s donne une classe ample $\ell^s \in A^1(Z^s)$. Comme on a supposé que Z^s est kählérienne, on en déduit que ℓ^s est kählérienne. La compatibilité des ℓ^s ainsi construits vient du fait que f induit aussi des éléments $\ell^e \in A^1(Z^e)$ pour chaque arête $e = \{s_1, s_2\} \in Z_{1,f}$, et l'on a

$$i_{s_1 < e}^*(\ell_{s_1}) = \ell_e = i_{s_2 < e}^*(\ell_{s_2}). \quad \square$$

REMARQUE 7.19. Si f est n'importe quelle fonction linéaire par morceaux sur X , on obtient de même un cocycle dans $\Sigma\Gamma_1^{0,2}$, et donc une classe de $H^{1,1}(Z)$. De plus, si l'on modifie la valeur de f sur un sommet, le nouveau cocycle diffère de l'ancien d'un cobord, donc cela ne change pas la classe obtenue dans $H^{1,1}(Z)$. Ainsi celle-ci ne dépend que de f_{rec} .

Par la dualité de Poincaré, on obtient un élément de $H_{d-1,d-1}(Z)$. Cet élément correspond au cycle tropical

$$\sum_{\varrho \in X_{\text{rec}}} f(\varrho)[Z_\infty^\varrho] \in C_{d-1,d-1}(Z),$$

où, par l'inclusion $C_{d-1,d-1}(Z_\infty^\varrho) \hookrightarrow C_{d-1,d-1}(Z)$, on peut voir $[Z_\infty^\varrho]$ comme un élément de $C_{d-1,d-1}(Z)$ (ici Z_∞^ϱ désigne \bar{X}_∞^ϱ). \diamond

DÉFINITION 7.20. La structure Z est dite *asymptotiquement kählérienne* si

- Z^δ est kählérienne pour tout $\delta \in Z_f$,
- Z est issue d'une structure simpliciale linéaire Σ au sens de la définition 2.14,
- et la structure simpliciale linéaire induite par Σ sur Z_{rec} est quasi-projective kählérienne. \diamond

DÉFINITION 7.21. Si Z est kählérienne, on appelle *classe de Kähler sur Z* tout élément $\ell \in H^{1,1}(Z)$ tel qu'il existe une subdivision Z' de Z et une forme de Kähler ℓ' de Z' dont la classe dans $H^{1,1}(Z') \simeq H^{1,1}(Z)$ correspond à ℓ .

Si Z est asymptotiquement kählérienne, on appelle *classe de Kähler sur Z* tout élément de $H^{1,1}(Z)$ qui est dual de Poincaré d'un élément de la forme

$$\sum_{\varrho \in Z_{\text{rec}}} f_{\text{rec}}(\varrho)[Z_\infty^\varrho],$$

où f_{rec} est une fonction linéaire par morceaux strictement convexe sur Z_{rec} . \diamond

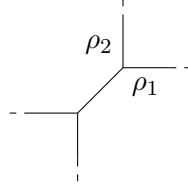
Notons que pour la deuxième partie, on peut par exemple prolonger f_{rec} par zéro sur Z_f et on obtient la classe de Kähler directement dans $H^{1,1}(Z)$ via la remarque 7.19.

QUESTION 7.22. Peut-on unifier les structures kählériennes et les structures asymptotiquement kählériennes dans une même définition ? Par exemple, peut-on donner une version faisceautique de classe de Kähler, et dans ce cas peut-on étendre le théorème 7.6 à ce cadre ?

Ou alors peut-on montrer que si Z est asymptotiquement kählérienne alors Z est kählérienne ? \diamond

L'exemple suivant montre que même si Z est quasi-projective et issue d'une structure simpliciale linéaire, il n'est pas évident de savoir si Z_{rec} est quasi-projective.

EXEMPLE 7.23 (Une fonction convexe qui n'est pas convexe sur l'éventail de récession). Soit X la courbe tropicale suivante.



Considérons la fonction f affine par morceaux sur X qui vaut zéro partout sauf sur ρ_1 où elle a une pente de 2 et sur ρ_2 où sa pente vaut -1 . Alors f est convexe sur X , et f induit une fonction f_{rec} sur l'éventail de récession, mais f_{rec} n'est pas convexe. \diamond

7.7. Structures de Hodge-Lefschetz. Dans cette section, nous expliquons dans les grandes lignes la preuve du théorème 7.6 dans le cas kählérien en suivant les sections 6 et 7 du chapitre 3. Supposons que Z est kählérienne. Quitte à subdiviser, ce qui ne change pas la cohomologie, on peut supposer que Z possède une forme de Kähler $\ell \in \text{ST}_1^{0,2}$.

Pour toute face $\delta \in Z_f$, la forme de Kähler induit un élément kählérien

$$\ell^\delta := i_{s \prec \delta}^*(\ell^s) \in H^2(Z^\delta)$$

où s est un sommet de δ . Cet élément ne dépend pas du choix du sommet s par la condition de compatibilité sur ℓ . On a donc une multiplication par ℓ bien définie $\ell : H^{2\bullet}(Z^\delta) \rightarrow H^{2\bullet+2}(Z^\delta)$ pour toute face δ . On obtient un morphisme $\ell : \text{ST}_1^{\bullet,\bullet} \rightarrow \text{ST}_1^{\bullet+2,\bullet}$ en appliquant la multiplication par ℓ à chaque partie de $\text{ST}_1^{\bullet,\bullet}$.

On remarque alors que le théorème de Lefschetz difficile sur chaque partie, à savoir les isomorphismes $\ell^{d-|\delta|-2k} : H^{2k}(Z^\delta) \simeq H^{2(d-|\delta|-2k)}(Z^\delta)$, induisent des isomorphismes globaux

$$\ell^{d-a-b} : \text{ST}_1^{a,b} \simeq \text{ST}_1^{a,2d-2a-b}$$

pour toute paire d'entiers a, b avec $a + b \leq d$.

Par ailleurs, lorsque l'on regarde la définition de $\text{ST}_1^{\bullet,\bullet}$, on remarque que, pour $a \leq 0$, $\text{ST}_1^{a,b}$ et $\text{ST}_1^{-a,b+2a}$ sont trivialement isomorphes car ils sont composés des mêmes parties. De plus, cet isomorphisme est réalisé par l'opérateur de monodromie

$$N^{-a} : \text{ST}_1^{a,b} \simeq \text{ST}_1^{-a,b+2a}.$$

À ce stade, on obtient la décomposition en parties primitives suivante pour $a \leq 0$ et $a + b \leq d$:

$$\text{ST}_1^{a,b} = \bigoplus_{k,l \geq 0} N^k \ell^l P^{a-2k,b+2k-2l},$$

où $P^{a,b}$ désigne la *partie primitive de Hodge-Lefschetz* de $\text{ST}_1^{a,b}$, c'est-à-dire

$$P^{a,b} := \ker\left(\ell^{d-a-b+1} : \text{ST}_1^{a,b} \rightarrow \text{ST}_1^{a,2d-2a-b+2}\right) \cap \ker\left(N^{-a+1} : \text{ST}_1^{a,b} \rightarrow \text{ST}_1^{-a+2,b+2a-2}\right).$$

On se retrouve donc avec toutes les symétries du diamant de Hodge, comme illustré en figure 17.

Ensuite, les dualités de Poincaré locales $H^{2k}(Z^\delta) \simeq H^{2(d-|\delta|)-2k}(Z^\delta)^\star$ induisent des dualités de Poincaré globales. Pour toute paire d'entiers a et b , on a un isomorphisme

$$\mathcal{ST}_1^{-a,b} \simeq (\mathcal{ST}_1^{a,2d-b})^\star.$$

Cela nous fournit un accouplement global, appelé *polarisation*, $\psi : \mathcal{ST}_1^{\bullet,\bullet} \otimes \mathcal{ST}_1^{\bullet,\bullet} \rightarrow \mathbb{k}$, où l'on impose à $\mathcal{ST}_1^{a,b}$ et à $\mathcal{ST}_1^{a',b'}$ d'être orthogonaux si $a + a' \neq 0$ ou si $b + b' \neq 2d$, et sinon on utilise l'accouplement ci-dessus (avec un signe qui simplifie la suite de la discussion).

Une étude attentive montre alors que la forme bilinéaire $\psi(\cdot, \ell^{d-a-b} N^a \cdot)$ est définie positive sur chaque partie primitive $P^{a,b}$, avec $a \leq 0$ et $a + b \leq d$. À ce stade-là, on a donc montré le théorème 7.6 où l'on a remplacé la cohomologie tropicale par la première page de la suite spectrale de Steenbrink $\mathcal{ST}_1^{a,b}$. Il nous faut alors montrer les mêmes propriétés mais sur la deuxième page.

En fait $\mathcal{ST}_1^{\bullet,\bullet}$ a encore plus de structure puisqu'il possède une différentielle d . Tous ces opérateurs et la polarisation ont des relations de compatibilité : les opérateurs commutent (ou anticommulent) entre eux et ils sont autoadjoints (ou antiautoadjoints) par rapport à la polarisation. On dit alors que $\mathcal{ST}_1^{\bullet,\bullet}$ est une *structure de Hodge-Lefschetz polarisée différentielle*.

On utilise alors la théorie de structures de Hodge-Lefschetz, voir par exemple [GN90, SS20, Sai88], qui nous donne automatiquement que la cohomologie $\mathcal{ST}_2^{\bullet,\bullet}$ est une structure de Hodge-Lefschetz polarisée, i.e. elle vérifie le théorème 7.6 ce qui conclut la démonstration.

Commentons rapidement le fonctionnement de cette théorie dans notre cas, car la preuve partage plusieurs similarités avec la preuve classique de l'existence de la décomposition de Hodge dans le cas complexe.

On peut définir un opérateur w qui envoie isomorphiquement $\mathcal{ST}_1^{a,b}$ sur $\mathcal{ST}_1^{-a,2d-b}$ pour toute paire d'entiers (a, b) et qui effectue donc une symétrie centrale sur le diamant de Hodge. L'opérateur w est entièrement défini grâce à N et ℓ . En posant $\phi = \psi(\cdot, w \cdot)$ on obtient une forme symétrique définie positive partout sur $\mathcal{ST}_1^{\bullet,\bullet}$. On peut alors définir l'adjoint $d^\star : \mathcal{ST}_1^{\bullet,\bullet} \rightarrow \mathcal{ST}_1^{\bullet-1,\bullet}$ de la différentielle d par rapport à ϕ . Notamment, on obtient la formule

$$d^\star = -w^{-1}dw,$$

donc w joue le rôle de l'étoile de Hodge. On définit alors le laplacien

$$\Delta := dd^\star + d^\star d.$$

Une étape délicate dans la preuve est de montrer que ℓ et N commutent avec le laplacien. Pour se faire, on peut utiliser le langage de la théorie des représentations. Nous proposons aussi une preuve élémentaire, mais calculatoire, qui n'utilise pas cette théorie en section 7.6.

Ensuite on peut montrer que chaque classe dans $\mathcal{ST}_2^{\bullet,\bullet}$ possède un unique représentant dans le noyau du laplacien, et l'on s'est donc ramené à montrer que le noyau du laplacien dans $\mathcal{ST}_1^{\bullet,\bullet}$ est une structure de Hodge-Lefschetz polarisée, ce qui se fait facilement grâce à toutes les relations de compatibilité entre les différents opérateurs.

7.8. Extension au cas des structures asymptotiquement kählériennes. Supposons que Z est asymptotiquement kählérienne. Soit X la structure simpliciale affine telle que $\bar{X} = Z$ et soit Σ une structure simpliciale linéaire sur $\text{cone}(X)$ qui induit la structure affine sur X . On veut étendre le théorème 7.6 à Z . Nous pouvons bien parler d'extension ici car nous allons partir d'une structure kählérienne $Z_{(0)}$, qui vérifie donc déjà le théorème, et montrer de proche en proche le théorème pour des structures intermédiaires $Z_{(1)}, Z_{(2)}, \dots$, pour finalement arriver à Z .

PROPOSITION 7.24. *La structure Σ admet une subdivision quasi-projective $\Sigma_{(0)}$.*

DÉMONSTRATION. Comme nous l'avons vu dans l'exemple 2.4, si l'on choisit une base de l'espace des formes linéaires $M_{\mathbb{k}}$ sur Σ , on obtient une projection $\pi : \mathbb{R}^E \rightarrow \mathbb{R}^n$, où $n =$

$\dim(M_{\mathbb{k}})$, qui envoie $\widehat{\Sigma}$ sur un pseudo-éventail $\widetilde{\Sigma}$ et π induit un isomorphisme sur chaque cône de $\widehat{\Sigma}$.

Soit Δ un éventail quasi-projectif complet dans \mathbb{R}^n . On peut découper Δ par les hyperplans supports des faces de $\widetilde{\Sigma}$, comme pour la preuve du théorème de factorisation faible 6.23, voir aussi chapitre 3 section 4.5. On effectue ensuite des éclatements pour obtenir finalement une subdivision quasi-projective simpliciale $\Delta_{(0)}$ de Δ . Ces coupes par des hyperplans et ces éclatements peuvent être remontés dans $\widehat{\Sigma}$ et l'on obtient une subdivision $\widehat{\Sigma}_{(0)}$ de $\widehat{\Sigma}$, et la subdivision correspondante $\Sigma_{(0)}$ de Σ . De plus, π induit un morphisme d'éventails : chaque face de $\widehat{\Sigma}_{(0)}$ est envoyée de manière isomorphe sur une face de $\Delta_{(0)}$.

Maintenant, on peut choisir une fonction linéaire par morceaux strictement convexe f sur $\Delta_{(0)}$ et f induit une fonction strictement convexe sur $\Sigma_{(0)}$, ce qui conclut. \square

En appliquant la proposition, on obtient une subdivision $\Sigma_{(0)}$ de Σ qui est quasi-projective, et donc une subdivision $X_{(0)}$ de X qui est elle aussi quasi-projective. Rappelons de plus que, par hypothèse, les structures transverses X^δ , $\delta \in X_f$, sont kählériennes. Comme $X_{(0)}$ est une subdivision de X , on montre facilement que les $X_{(0)}^\delta$, $\delta \in X_{(0),f}$ sont eux aussi kählériennes.

Posons $Z_{(0)} = \overline{X}_{(0)}$. Notons que $Z_{(0)}$ n'est pas nécessairement une subdivision de Z car l'éventail de récession a pu changer. Cette remarque nous amène à formuler la question suivante. Une réponse affirmative à cette question fournirait automatiquement une réponse affirmative à la dernière partie de la question 7.22.

QUESTION 7.25. Existe-t-il toujours une subdivision projective de Z ? \diamond

Soit f une fonction strictement convexe sur $\Sigma_{(0)}$. Alors f_{rec} est elle aussi strictement convexe, et par la remarque 7.19 on peut associer une classe de Kähler $\ell \in H^{1,1}(Z_{(0)})$ à f . Notons que ℓ est à la fois une classe de Kähler pour $Z_{(0)}$ vue comme structure kählérienne et pour $Z_{(0)}$ vue comme structure asymptotiquement kählérienne. Notamment, $(Z_{(0)}, \ell)$ vérifie les propriétés kählériennes.

Maintenant la démonstration suit essentiellement celle du cas local, section 6.8, voir aussi les sections 8 et 9 du chapitre 3. Nous reprenons rapidement les différentes étapes.

PROPOSITION 7.26. *Si une structure asymptotiquement kählérienne vérifie les propriétés kählériennes pour une classe de Kähler, alors elle les vérifie pour toutes les classes de Kähler.*

DÉMONSTRATION. Une classe de Kähler quelconque ℓ induit des classes de Kähler $\ell^\varrho \in H^{1,1}(Z_\infty^\varrho)$ sur chaque diviseur à l'infini. Par récurrence, on peut supposer que ℓ^ϱ vérifie les relations de Hodge-Riemann. Comme dans le cas local, cela implique que ℓ vérifie le théorème de Lefschetz difficile dans Z . Les classes de Kähler de Z forment un cône connexe dans $H^{1,1}(Z)$. Comme le théorème de Lefschetz difficile est vrai sur l'ensemble de ce cône, on en déduit que soit tous les éléments de ce cône vérifient les relations de Hodge-Riemann, soit aucun d'entre eux ne les vérifient. \square

On peut définir un éclatement sur une structure simpliciale affine X comme la subdivision induite par un éclatement sur $\text{cone}(X)$. On définit la contraction comme étant l'opération inverse.

PROPOSITION 7.27. *Il existe un entier k et une suite de structures affines $X_{(0)}, \dots, X_{(m)}$, où $X_{(0)}$ est définie ci-dessus et $X_{(m)} = X$, et telle que $X_{(i+1)}$ est obtenue à partir de $X_{(i)}$ par un éclatement ou une contraction. De plus, on peut supposer que les $X_{(i)}$ sont toutes des subdivisions relativement projectives de X .*

DÉMONSTRATION. La preuve est exactement la même que dans le cas des structures simpliciales linéaires, voir la démonstration du théorème 6.23. \square

Comme toutes les structures intermédiaires $X_{(i)}$ sont des subdivisions relativement projectives de X , $X_{(i),\text{rec}}$ est relativement projective par rapport à X_{rec} . Comme X_{rec} est quasi-projective, on en déduit que $X_{(i),\text{rec}}$ est quasi-projective pour tout i , et donc $Z_{(i)} := \bar{X}_{(i)}$ est asymptotiquement kählérienne.

Soit Y une structure simpliciale affine lisse, soit v un point à l'intérieur d'un élément de Y et soit $Y' := Y_{(v)}$ l'éclatement de Y le long de v . Il y a deux cas. Si le centre de l'éclatement v n'est pas dans un cône de Y_{rec} , alors \bar{Y}' est une subdivision de \bar{Y} . Notamment les cohomologies des deux compactifications coïncident et donc les propriétés kählériennes sont préservées dans ce cas.

Le cas intéressant est donc lorsque l'éclatement est le long d'un point v à l'intérieur d'un cône η de l'éventail de récession. Soit ρ le nouveau rayon. Soient $W := \bar{Y}$, $W' := \bar{Y}'$ et $T \in H^{1,1}(Y')$ le dual de Poincaré de $-[W'_{\infty}] \in H_{d-1,d-1}(Y')$. Dans ce cas, on a l'analogie global du lemme de Keel (théorème 6.19).

THÉORÈME 7.28 (Lemme de Keel global). *Avec les notations ci-dessus, on a une décomposition*

$$H^k(W') \simeq H^k(W) \oplus TH^{k-2}(W_{\infty}^{\eta}) \oplus T^2H^{k-4}(W_{\infty}^{\eta}) \oplus \dots \oplus T^{|\eta|-1}H^{k-2|\eta|+2}(W_{\infty}^{\eta}).$$

DÉMONSTRATION. Voir chapitre 3 section 8.4. On peut démontrer ce théorème grâce à $\text{ST}_1^{\bullet,\bullet}$. Dans ce cas, T peut être vu comme l'élément de $\bigoplus_{s \in W'_{f,0}} A^1(W'^s) \subseteq \text{ST}_1^{2,0}$ qui vaut $(T^s)_{s \in W'_{f,0}}$ où $T^s \in A^1(W'^s)$ et

$$T^s = \begin{cases} -x_{\rho^s} & \text{si } s \text{ est comparable à } \rho \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La décomposition induite par le lemme de Keel sur chaque morceau de $\text{ST}_1^{\bullet,\bullet}$ induit une décomposition globale qui passe à la cohomologie.

On peut aussi voir ce théorème comme une application de l'analogie tropical de la formule du fibré projectif, ou de la formule de l'éclatement, ce qui donne une autre preuve intéressante de ce théorème, voir la section 8.5 du chapitre 3. \square

Si ℓ est une classe de Kähler sur W , alors $\ell - \varepsilon T$ est une classe de Kähler sur W' pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. En utilisant la décomposition ci-dessus et en travaillant par récurrence comme dans le cas local, on peut montrer que W vérifie les propriétés kählériennes pour ℓ si et seulement si W' vérifie les propriétés kählériennes pour $\ell - \varepsilon T$ pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

Maintenant, on combine les propositions 7.27 et 7.26. Comme $Z_{(0)}$ vérifie les propriétés kählériennes pour une classe kählérienne, elle les vérifie pour toutes les classes kählériennes et donc le théorème 7.6 est vrai sur $Z_{(0)}$. Par la discussion ci-dessus, on en déduit de proche en proche que $Z_{(1)}, Z_{(2)}, \dots, Z_{(m)} = Z$ vérifient aussi le théorème, ce qui conclut. \square

7.9. Existence d'une subdivision préservant l'éventail de récession. La version du théorème 7.6 présente dans le chapitre 3 est un peu différente. Elle ne traite que de certaines variétés tropicales \mathfrak{X} de \mathbb{R}^n . Plus précisément, dans ce théorème, on suppose \mathfrak{X} est le support d'un complexe simplicial unimodulaire orienté X donc l'élément canonique dans $[X] \in \text{MW}_d(X)$ n'a que des poids égaux à un. Rappelons que $\mathfrak{X}_{\text{rec}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \mathfrak{X}$. Dans ce cas, par contre, cette version est a priori plus générale que le théorème 7.6 car elle énonce que, si \mathfrak{X} est quasi-projectif et localement kählérienne, alors pour tout éventail unimodulaire quasi-projectif Σ de support $\mathfrak{X}_{\text{rec}}$, l'adhérence $\bar{\mathfrak{X}} \subseteq \mathbb{TP}_{\Sigma}$ a une cohomologie vérifiant les propriétés kählériennes.

Afin de confirmer que le théorème 7.6 est en effet plus général que la version correspondante du chapitre 3 (théorème 1.7), on énonce le théorème suivant. Ce théorème affirme que \mathfrak{X} admet

une triangulation X telle que $X_{\text{rec}} = \Sigma$. Dans ce cas, $\bar{\mathfrak{X}} \subseteq \mathbb{TP}_\Sigma$ est isomorphe à $|\bar{X}|$. Comme \bar{X} est asymptotiquement kählérienne, on peut appliquer le théorème 7.6. Le théorème 7.29 permet aussi de compléter la preuve du théorème 8.6 dans le chapitre 3.

THÉORÈME 7.29. *Soit X un complexe simplicial de \mathbb{R}^n . On suppose de plus que $[X] \in \text{MW}_d(X)$ n'a que des poids positifs. Soit Σ' un structure simpliciale linéaire de support $|X|_{\text{rec}}$. Alors il existe un complexe simplicial X' tel que $X'_{\text{rec}} = \Sigma'_{\text{rec}}$ et telle que $|X| = |X'|$.*

Une fois de plus, nous ne décrivons que les étapes principales de la preuve. Dans celle-ci, nous supposons sans perte de généralité que tous les complexes simpliciaux X' considérés vérifient que X'_{rec} est un éventail. De plus, nous considérerons X' comme un complexe simplicial de \mathbb{R}^n et comme une structure simpliciale affine simultanément.

7.9.1. Réduction du problème. Posons $\Sigma := X_{\text{rec}}$. Le théorème de factorisation faible 6.23 implique que l'on peut trouver une suite d'éventails $\Sigma = \Sigma_{(0)}, \Sigma_{(1)}, \dots, \Sigma_{(m)} = \Sigma'$ telle que $\Sigma_{(i+1)}$ est obtenue à partir de $\Sigma_{(i)}$ par un éclatement ou une contraction. Supposons que l'on a construit une structure simpliciale affine $X_{(i)}$ dont l'éventail de récession est $\Sigma_{(i)}$.

Si $\Sigma_{(i+1)}$ est obtenu en éclatant $\Sigma_{(i)}$ le long de v , on peut effectuer le même éclatement sur $X_{(i)}$ pour obtenir une subdivision $X_{(i+1)}$ dont l'éventail de récession est $\Sigma_{(i+1)}$.

Le cas délicat est lorsque $\Sigma_{(i+1)}$ est une contraction de $\Sigma_{(i)}$. Dans ce cas, on peut supposer sans perte de généralité que la contraction a pour centre un élément v dans une face de dimension deux de $\Sigma_{(i+1)}$. En effet, tout éclatement peut facilement être décomposé en une série d'éclatements et de contractions, chacun ayant pour centre un point dans une face de dimension deux.

On se ramène donc au problème suivant. Soient Σ un éventail et Σ' l'éclatement de Σ le long d'un point v à l'intérieur d'une face $\eta \in \Sigma_2$. Soit ρ le nouveau rayon. Soit X' un complexe simplicial orienté d'élément canonique positif et dont l'éventail de récession est Σ' . Existe-t-il un complexe simplicial X de même support que X' dont l'éventail de récession est Σ ?

7.9.2. Description des faces contenant ρ . Soit \mathbf{n} un vecteur non nul de $N_{\eta, \mathbb{R}}$ transverse à ρ . Nous souhaitons montrer que toutes les facettes δ de X' avec $\delta > \rho$ contiennent \mathbf{n} dans leur espace tangent. De manière équivalente, on peut montrer que toutes les facettes de X'^ρ contiennent (la projection de) \mathbf{n} .

On peut supposer sans perte de généralité que $\dim(X'^\rho) < \dim(N_{\mathbb{R}}^\rho)$. Par l'absurde, soit δ une facette de X'^ρ telle que $\mathbf{n} \notin N_{\delta, \mathbb{R}}$. Soit H un espace affine générique de $N_{\mathbb{R}}^\rho$ de codimension $\dim(X'^\rho) - 1$ qui contient \mathbf{n} et qui intersecte δ . Posons G l'intersection de H avec X'^ρ . C'est un complexe simplicial orienté de dimension 1 tel que $[G] \in \text{MW}_1(G)$ n'a que des poids strictement positifs.

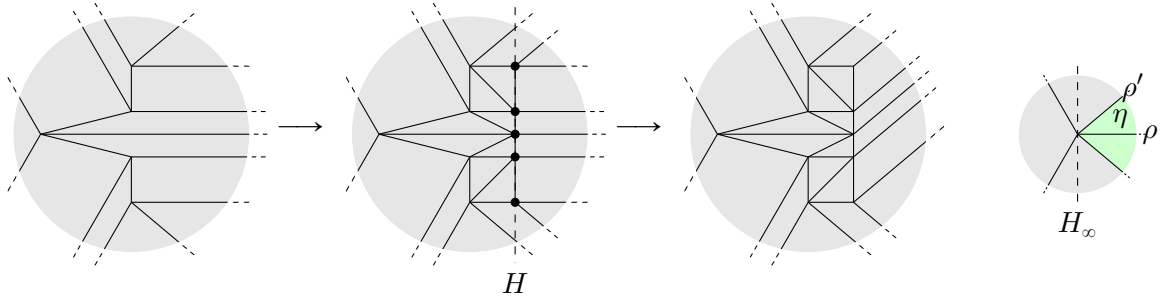
On choisit une forme linéaire générique ℓ sur H qui est nulle sur \mathbf{n} . On part d'un point x de l'arête $e := G \cap \delta$ et l'on va dans la direction ℓ croissant. À un moment, on va atteindre un sommet s . Par la condition d'équilibre, comme $\ell(\mathbf{n}_{e/s}) < 0$, il doit exister une arête e' incidente à s telle que $\ell(\mathbf{n}_{e'/s}) > 0$. On poursuit notre chemin en empruntant l'arête e' , et ainsi de suite.

Comme la valeur de ℓ ne cesse de croître le long de notre chemin, nous allons finalement arriver à un rayon non compact ϱ' de G qui n'est pas parallèle à \mathbf{n} . Ce rayon correspond à une facette non compacte δ' de X'^ρ qui ne contient pas \mathbf{n} dans son espace tangent. De plus, ϱ' est un rayon infini dans δ' , donc il induit un rayon dans δ'_{rec} . Comme H a été choisi générique, δ'_{rec} est nécessairement de dimension $\dim(X'^\rho)$. Donc δ'_{rec} est une facette de X'_{rec}^ρ dont l'espace tangent ne contient pas \mathbf{n} .

Ceci est impossible. En effet, X'_{rec} vaut Σ' qui est par hypothèse égal à l'éclatement $\Sigma_{(\rho)}$. Donc toutes les facettes σ' de Σ' contenant ρ proviennent d'une facette σ de Σ contenant η et $N_{\sigma, \mathbb{R}} = N_{\sigma', \mathbb{R}} \supseteq N_{\eta, \mathbb{R}} \ni \mathbf{n}$. On en déduit que toutes les facettes de X'_{rec}^ρ doivent contenir \mathbf{n} dans leur espace tangent. Notamment δ'_{rec} et donc δ' contiennent \mathbf{n} dans leur espace tangent ce qui est une contradiction.

Finalement, toutes les facettes $\delta > \rho$ dans X' contiennent \mathfrak{n} dans leur espace tangent. Remarquons que nous obtenons aussi que $|X'^{\rho}|$ peut s'écrire comme le produit d'un espace polyédral avec $\mathbb{R}\mathfrak{n}$.

FIGURE 18. Schéma de preuve pour induire une contraction sur l'éventail de récession.



7.9.3. *Coupe par un hyperplan.* Dans la figure 18 on peut voir qu'on ne peut pas directement retirer les rayons horizontaux sans changer l'éventail de récession. On découpe donc préalablement partiellement par un hyperplan, sans modifier l'éventail de récession. Pour cela, prenons $H \subseteq \mathbb{R}^n$ un hyperplan affine générique tel que η soit située d'un seul côté de l'hyperplan linéaire associé H_{rec} et tel que tous les sommets de X' soit dans le demi-espace $H + \mathbb{R}_{-}\nu_{\rho}$. On effectue alors un éclatement de X' en chaque point s qui est l'intersection de H avec un rayon $\varrho \in X'_1$ tel que $\varrho > \rho$. On obtient alors un nouveau complexe simplicial X'' , qui a le même éventail de récession puisque qu'il n'y a pas eu d'éclatement dans X'_{rec} . De plus, tout sommet de X''_0 comparable à ρ vit dans H , et donc toute face finie de X'' comparable à ρ est incluse dans H .

7.9.4. *Fin de la preuve.* On peut alors s'inspirer de la figure 18 pour conclure la preuve. Soit ρ' un des deux rayons de η . On définit X de la manière suivante. On retire tous les éléments $\delta \in X''$ telles que $\delta > \rho$ et on les remplace par les éléments $\gamma + \mathbb{R}_{+}\nu_{\rho'}$ où γ parcourt les faces de X'' qui sont comparables à ρ mais qui ne contiennent ni ρ ni ρ' .

Pour vérifier que X est bien un complexe simplicial de même support que X'' , le point principal est de vérifier que pour tout point x dans une face δ de X'' comparable à ρ mais ne contenant pas ρ' , le rayon $x + \mathbb{R}_{>0}\nu_{\rho'}$ est inclus dans $|X''|$ et reste dans des faces contenant ρ , tandis ce que le rayon $x + \mathbb{R}_{-}\nu_{\rho'}$ rencontre une unique face τ telle que $\tau \sim \rho$. Nous passons les détails ici.

De plus, il est clair que X_{rec} est la contraction de $X'_{\text{rec}} = X''_{\text{rec}}$ le long de ρ . Ceci conclut la preuve du théorème. \square

EXEMPLE 7.30 (Contre-exemple avec des poids négatifs). Si l'on autorise des poids négatifs, alors $|X'^{\rho}|$ n'est plus forcément le produit d'une droite et d'un espace polyédral (voir figure 19). Dans ce cas, la contraction ne sera clairement pas relevable. \diamond

EXEMPLE 7.31 (Contre-exemple avec des pseudo-éventails). Dans la figure 20, à gauche est représenté un éventail de récession avec un rayon à contracter, et à droite une structure simpliciale affine X' dont tous les poids sont 2 sauf les faces bleues qui ont été dédoublées. On voit bien que la contraction ne peut pas être relevée. \diamond

Dans le reste de ce chapitre, nous allons présenter quelques applications de la théorie de Hodge tropicale développée ci-dessus.

FIGURE 19. Un exemple de X'^ρ contredisant le théorème 7.29 pour des poids négatifs

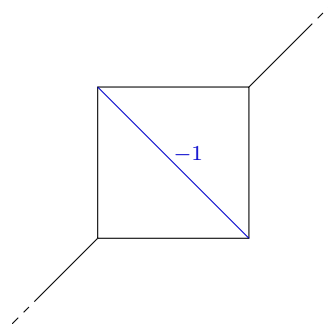
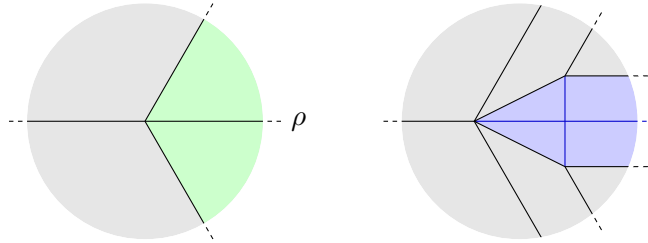


FIGURE 20. Contre-exemple au théorème 7.29 pour des pseudo-éventails



8. Conjecture de Hodge pour les structures simpliciales kählériennes fortement rationnelles

La limite tropicale d’une famille de variétés devrait donner des informations sur une fibre générale de la variété. De plus, l’étude de la limite tropicale est potentiellement plus simple que l’étude directe d’une fibre générale. Il est donc naturel de se demander si l’on pourrait avancer sur la conjecture de Hodge en regardant le cas tropical.

Ainsi, comme Zharkov l’explique dans [Zha20], Kontsevich a eu l’idée qu’il serait possible de trouver un contre-exemple à la conjecture de Hodge en construisant un contre-exemple à la conjecture de Hodge tropicale. Plus précisément, certaines familles de variétés abéliennes ont une limite tropicale de support le tore plat (voir section 8.4), et un contre-exemple à la conjecture de Hodge sur cette limite tropicale fournirait un contre-exemple à la conjecture de Hodge sur les variétés abéliennes.

Au contraire, nous montrons dans ce chapitre que la conjecture de Hodge est valide pour les structures simpliciales kählériennes ou asymptotiquement kählériennes qui sont fortement rationnelles. Cela n’infirme pas la suggestion de Kontsevich car, en général, les limites tropicales étudiées ne sont que faiblement rationnelles.

8.1. Théorèmes principaux. Énonçons plus précisément le théorème que nous démontrons. D’abord définissons les classes de Hodge. Soit X une structure simpliciale affine orientée de dimension d . On peut définir de manière naturelle les *poids de Minkowski de dimension k sur X* , que l’on note $MW_k(X)$, comme étant les poids $w : X_k \rightarrow \mathbb{k}$ tels que l’élément

$$\sum_{\delta \in X_k} w(\delta)(\delta, \nu_\delta) \in C_{k,k}(X)$$

soit un cycle. Comme dans le cas local, on peut aussi interpréter un tel poids comme une sous-structure simpliciale orientée de dimension k de X . Notons de plus que la somme ci-dessus

est un cycle dans X si et seulement si c'est un cycle dans $Z := \bar{X}$ car pour toute face δ de sédentarité \mathcal{Q} , la projection de ν_δ le long de n'importe quel rayon de δ_{rec} est nulle.

Soit w un poids de Minkowski de dimension k dans X . On peut associer à w sa classe $\text{cl}(w)$ dans $H^{d-k, d-k}(Z)$ via la composition

$$\text{MW}_k(X) \rightarrow H_{k,k}(Z) \rightarrow H^{d-k, d-k}(Z).$$

On appelle *classe de Hodge de degré $d - k$* tout élément de $H^{d-k, d-k}(Z)$ dans l'image de cl . On note $\text{Hod}^{d-k}(Z)$ l'ensemble des classes de Hodge de degré $d - k$.

THÉORÈME 8.1 (Conjecture de Hodge pour les structures kählériennes fortement rationnelles ou réelles). *Soit X une structure simpliciale affine lisse kählérienne ou asymptotiquement kählérienne. Si $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$, on suppose que X est fortement rationnelle. Soit Z la compactification canonique de X . Alors pour tout entier k , $\text{Hod}^k(Z)$ coïncide avec le noyau de la monodromie*

$$\ker(N : H^{k,k}(Z) \rightarrow H^{k-1, k+1}(Z)).$$

Nous démontrons le théorème en section 8.3.

On peut se demander si le même théorème est valide dans le cas faiblement rationnelle, avec $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$. Dans ce cas on se restreint aux poids de Minkowski supportés sur les faces rationnelles.

CONJECTURE 8.2 (Conjecture de Hodge pour les structures kählériennes faiblement rationnelles). *Soit X une structure simpliciale affine lisse kählérienne ou asymptotiquement kählérienne faiblement rationnelle. Soit Z la compactification canonique de X . Existe-t-il une subdivision de Z telle que, pour tout entier k , $\text{Hod}^k(Z)$ coïncide avec le noyau de la monodromie*

$$\ker(N : H^{k,k}(Z) \rightarrow H^{k-1, k+1}(Z)) ?$$

Dans le cas où $k = d - 1$, Jell, Rau et Shaw montrent dans [JRS18] le théorème (1, 1) de Lefschetz tropical suivant. Soit X une variété tropicale localement matroïdale de dimension d telle que $[X] \in \text{MW}_d(X)$ ait un poids constant égal à 1. Alors l'image des cycles tropicaux de dimension un dans X par l'application classe de cycle est exactement le noyau de la monodromie dans $H^{d-1, d-1}(X)$.

QUESTION 8.3. Peut-on étendre le résultat de [JRS18] aux structures simpliciales affines lisses? \diamond

Dans le cas complexe, la conjecture de Hodge implique que l'équivalence numérique et l'équivalence algébrique coïncident sur les cycles algébriques (conjecture standard D). Dans le cas tropical, nous obtenons un analogue, qui répond partiellement à une question de Gross et Shokrieh dans [GS19c].

THÉORÈME 8.4. *Soit Z définie comme dans le théorème 8.1. Alors l'équivalence numérique et l'équivalence homologique coïncident sur les cycles tropicaux.*

DÉMONSTRATION. Voir chapitre 4 théorème 1.3. \square

8.2. Suite exacte de Clemens et Schmid tropicale. La preuve du théorème 8.1 s'appuie essentiellement sur un analogue de la suite exacte de Clemens et Schmid. En fait, la partie de la suite exacte qui nous intéresse est celle correspondant au théorème des cycles invariants. Pour une famille de variétés \mathcal{W} sur le disque Δ , les cycles d'une fibre W_t invariant par la monodromie T , et donc dans le noyau de $N = -\log(T)$, proviennent tous de \mathcal{W} . Nous sommes parvenu à traduire cela dans le monde tropical par l'existence de cycles tropicaux représentant les classes dans le noyau de la monodromie.

Dans le cas classique, cette suite exacte peut être décrite de la façon suivante. Soit \mathcal{W} une famille de variétés lisses sur le disque unité complexe Δ comme dans la section 1.11. On

suppose de plus que la famille est projective. Comme précédemment, la fibre centrale W_0 est un diviseur à croisements normaux qui a été construit par la méthode de [KKMS06] à partir d'une triangulation X sur la limite tropicale.

On considère aussi le revêtement universel $\widetilde{\Delta}^*$ de Δ^* , et le relèvement $\widetilde{\mathcal{W}}^*$ de \mathcal{W}^* au-dessus de $\widetilde{\Delta}^*$, ainsi que l'opérateur de monodromie N qui agit sur la cohomologie de $\widetilde{\mathcal{W}}^*$, et la structure de Hodge mixte limite sur $H^\bullet(\widetilde{\mathcal{W}}^*)$.

En considérant de plus la projection $\widetilde{\mathcal{W}}^* \rightarrow \mathcal{W}^*$, on peut montrer que l'on obtient une suite exacte longue

$$(8.1) \quad \cdots \rightarrow H^\bullet(\mathcal{W}^*) \rightarrow H^\bullet(\widetilde{\mathcal{W}}^*) \xrightarrow{N} H^\bullet(\widetilde{\mathcal{W}}^*) \rightarrow H^{\bullet+1}(\mathcal{W}^*) \rightarrow \cdots$$

À propos de cette suite exacte, remarquons simplement que T agit trivialement sur les cocycles de $H^\bullet(\mathcal{W}^*)$, donc l'image de $H^\bullet(\mathcal{W}^*)$ est bien dans le noyau de la monodromie $N = -\log(T)$.

D'un autre côté, l'inclusion $\mathcal{W}^* \subseteq \mathcal{W}$ permet de définir la *cohomologie relative* $H^\bullet(\mathcal{W}, \mathcal{W}^*)$ et l'on obtient la suite exacte longue

$$(8.2) \quad \cdots \rightarrow H^\bullet(\mathcal{W}, \mathcal{W}^*) \rightarrow H^\bullet(\mathcal{W}) \rightarrow H^\bullet(\mathcal{W}^*) \rightarrow H^{\bullet+1}(\mathcal{W}, \mathcal{W}^*) \rightarrow \cdots$$

En combinant ces deux suites exactes, Clemens a construit dans [Cle77] la suite exacte longue (de période quatre!) de structures de Hodge mixtes suivante

$$(8.3) \quad \cdots \rightarrow H^\bullet(\mathcal{W}) \rightarrow H^\bullet(\widetilde{\mathcal{W}}^*) \xrightarrow{N} H^\bullet(\widetilde{\mathcal{W}}^*) \rightarrow H^{\bullet+2}(\mathcal{W}, \mathcal{W}^*) \rightarrow H^{\bullet+2}(\mathcal{W}) \rightarrow \cdots$$

Les groupes $H^\bullet(\mathcal{W})$ forment ce qu'on va naturellement appeler la *cohomologie survivante*. En effet, \mathcal{W} se rétracte par déformation sur W_0 , donc on a

$$H^\bullet(W_0) \simeq H^\bullet(\mathcal{W}) \rightarrow H^\bullet(\mathcal{W}^*),$$

et l'image de la composée de ces applications constitue les classes qui survivent sur la fibre centrale.

Soit X une structure simpliciale affine lisse kählérienne, ou asymptotiquement kählérienne et soit $Z := \overline{X}$.

On a vu que $H^\bullet(\widetilde{\mathcal{W}}^*)$ correspond à la structure de Hodge limite. Si l'on cherche un analogue tropical à la suite (8.3), on peut remplacer $H^\bullet(\widetilde{\mathcal{W}}^*)$ par $H^\bullet(Z)$.

Reste à savoir comment définir la cohomologie survivante tropicale $H_s^\bullet(Z)$ et la cohomologie relative tropicale $H_{\text{rel}}^\bullet(Z)$. La première va être définie comme la cohomologie du noyau de la monodromie sur $\text{ST}_1^{\bullet, \bullet}$, et la seconde comme la cohomologie du conoyau de la monodromie sur $\text{ST}_1^{\bullet, \bullet}$.

Plus précisément, soit

$$K^{a,b} := \ker(N : \text{ST}_1^{a,b} \rightarrow \text{ST}_1^{a+2,b-2}) = \text{ST}_1^{a,b,a}.$$

On définit alors

$$H_s^{p,q}(Z) := H^{q-p}(K^{\bullet, 2p}).$$

De plus, soit

$$L^{a,b} := \text{coker}(N : \text{ST}_1^{a-2,b+2} \rightarrow \text{ST}_1^{a,b}) = \text{ST}_1^{a,b,-a}.$$

On définit alors

$$H_{\text{rel}}^{p,q}(Z) := H^{q-p}(L^{\bullet, 2p}).$$

Remarquons que, contrairement à $H^{p,q}(Z)$, $H_s^{p,q}(Z)$ et $H_{\text{rel}}^{p,q}(Z)$ ne sont pas stables par subdivision en général.

Ces définitions sont justifiées par la proposition suivante qui montre qu'elles fournissent bien les analogues tropicaux des suites exactes (8.1) et (8.2).

PROPOSITION 8.5. *Pour tout entier p , nous avons deux suites exactes en cohomologie*

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H^\bullet(\text{cone}^{\bullet-1}(N)) \rightarrow H^{p+1,\bullet}(Z) \xrightarrow{N} H^{p,\bullet+1}(Z) \rightarrow H^{\bullet+1}(\text{cone}^{\bullet-1}(N)) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow H_{\text{rel}}^{p,\bullet}(Z) \xrightarrow{0} H_s^{p+1,\bullet}(Z) \rightarrow H^\bullet(\text{cone}^{\bullet-1}(N)) \rightarrow H_{\text{rel}}^{p,\bullet+1}(Z) \xrightarrow{0} \cdots \end{aligned}$$

où $\text{cone}^\bullet(N)$ désigne le cône de l'opérateur monodromie décalé

$$\text{cone}^\bullet(N) := \text{cone}^{\bullet-p-1}\left(N : \text{ST}_1^{\bullet,2p+2} \rightarrow \text{ST}_1^{\bullet+2,2p}\right).$$

DÉMONSTRATION. L'exactitude de la première suite est triviale par les propriétés du complexe de cône. Ensuite, comme la monodromie est très simple sur $\text{ST}_1^{\bullet,\bullet}$, on peut tout y calculer explicitement et montrer que la seconde suite est elle aussi exacte, voir proposition 6.2 dans le chapitre 4. \square

En combinant les deux suites exactes ci-dessus, on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME 8.6 (Suite exacte de Clemens et Schmid tropicale). *Nous avons la suite exacte suivante*

$$\cdots \rightarrow H_s^k(Z) \rightarrow H^k(Z) \xrightarrow{N} H^k(Z) \rightarrow H_{\text{rel}}^{k+2}(Z) \rightarrow H_s^{k+2}(Z) \rightarrow H^{k+2}(Z) \xrightarrow{N} H^{k+2}(Z) \rightarrow \cdots$$

On trouve en fait deux suites exactes en fonction de la parité de k .

DÉMONSTRATION. Nous proposons un aperçu ici, voir chapitre 4 section 7 pour les détails. Pour tout entier p , on a une suite exacte à quatre termes

$$0 \rightarrow K^{\bullet,2p} \rightarrow \text{ST}_1^{\bullet,2p} \xrightarrow{N} \text{ST}_1^{\bullet+2,2p-2} \rightarrow L^{\bullet+2,2p-2} \rightarrow 0.$$

De plus, comme N est un opérateur de type Lefschetz sur $\text{ST}_1^{\bullet,\bullet}$, $K^{a,b}$ est trivial pour $a < 0$ et $L^{a,b}$ est trivial pour $a > 0$. Donc la suite exacte ci-dessus est une suite exacte courte lorsque l'on restreint à chaque degré, mais ce n'est pas une suite exacte courte globale.

On peut tout de même appliquer le lemme du serpent sur les degrés suffisamment positifs (le cas négatif est similaire) pour obtenir une suite longue qui est exacte en degrés suffisamment positifs

$$\cdots \rightarrow H^\bullet(K^{\bullet,2p}) \rightarrow \text{ST}_2^{\bullet,2p} \xrightarrow{N} \text{ST}_2^{\bullet+2,2p-2} \rightarrow H^{\bullet+1}(K^{\bullet,2p}) \rightarrow \cdots$$

Mais N est aussi un opérateur de type Lefschetz sur $\text{ST}_2^{\bullet,\bullet}$. Donc la flèche N ci-dessus est surjective en degrés positifs. La suite exacte longue se coupe donc en suites exactes courtes

$$0 \rightarrow H^\bullet(K^{\bullet,2p}) \rightarrow \text{ST}_2^{\bullet,2p} \xrightarrow{N} \text{ST}_2^{\bullet+2,2p-2} \rightarrow 0.$$

Pour les degrés suffisamment négatifs, on trouve de même des suites exactes courtes

$$0 \rightarrow \text{ST}_2^{\bullet,2p} \xrightarrow{N} \text{ST}_2^{\bullet+2,2p-2} \rightarrow H^\bullet(L^{\bullet+2,2p-2}) \rightarrow 0.$$

Autour du degré zéro toutefois, on ne peut plus appliquer le lemme du serpent. Une chasse au diagramme classique nous permet d'obtenir la suite exacte à six termes suivante.

$$0 \rightarrow \text{ST}_2^{-2,2p} \rightarrow \text{ST}_2^{0,2p-2} \rightarrow H^0(L^{\bullet,2p-2}) \rightarrow H^0(K^{\bullet,2p}) \rightarrow \text{ST}_2^{0,2p} \rightarrow \text{ST}_2^{-2,2p-2} \rightarrow 0.$$

La suite exacte de Clemens et Schmid s'obtient comme la somme directe de toutes ces contributions. \square

8.3. Preuve du théorème 8.1. On peut réécrire la suite exacte à six termes avec la cohomologie tropicale.

$$(8.4) \quad 0 \rightarrow H^{p,p-2}(Z) \xrightarrow{N} H^{p-1,p-1}(Z) \rightarrow H_{\text{rel}}^{p-1,p-1}(Z) \rightarrow H_s^{p,p}(Z) \rightarrow H^{p,p}(Z) \xrightarrow{N} H^{p-1,p+1}(Z) \rightarrow 0.$$

On voit directement que c'est la partie qui va nous être utile. En effet, le noyau de la monodromie dans $H^{p,p}(Z)$ provient de la cohomologie survivante. Il reste à faire le lien entre $H_s^{p,p}(Z)$ et les classes de Hodge.

Soit α une classe de $H_s^{p,p}(Z)$. On veut construire un élément $w \in \text{MW}_{d-p}(Z)$ tel que $\text{cl}(w) = \alpha$. Comme $K^{\bullet,2p}$ est nul en degrés strictement négatifs, on a

$$H_s^{p,p}(Z) = H^0(K^{\bullet,2p}) = \ker(\text{ST}_1^{0,2p,0} \xrightarrow{i^*} \text{ST}_1^{1,2p,1}).$$

Donc α est simplement un cocycle de

$$\text{ST}_1^{0,2p,0} = \bigoplus_{s \in Z_{f,0}} H^{2p}(Z^s).$$

On peut décomposer α en $(\alpha^s)_{s \in Z_{f,0}}$. Par la conjecture de Hodge locale, théorème 5.27, pour chaque sommet s , il existe un poids de Minkowski $w_s \in \text{MW}_{d-p}(Z^s)$ tel que $\alpha^s = \text{cl}(w_s)$. De plus, le fait que α soit un cocycle est équivalent au fait que les w_s se recollent en un poids de Minkowski global $w \in \text{MW}_{d-p}(Z)$, voir la section 8 du chapitre 4 pour les détails (cela montre au passage que les classes des poids de Minkowski sont bien dans le noyau de la monodromie). On vérifie ensuite que l'on a bien $\text{cl}(w) = \alpha$, ce qui conclut la démonstration du théorème 8.1. \square

8.4. Variétés tropicales abéliennes. Dans [Zha20], Zharkov expose une idée de Kontsevich. On peut faire dégénérer des variétés abéliennes complexes vers une variété abélienne tropicale \mathcal{Z} que nous décrivons ci-dessous. Dans ce cas, un contre-exemple à la conjecture de Hodge tropicale sur \mathcal{Z} pourrait être approximé par un contre-exemple de la conjecture de Hodge classique.

Décrivons \mathcal{Z} . On pose $N := \mathbb{Z}^n$. On choisit une forme bilinéaire symétrique définie positive Q sur $N_{\mathbb{R}}$. Soit $\Gamma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ le réseau dual à N pour la forme Q . On définit \mathcal{Z} comme le tore plat $N_{\mathbb{R}}/\Gamma$. Les fonctions affines rationnelles sur \mathcal{Z} sont les éléments de $M_{\mathbb{Q}}$.

Nous travaillons à coefficients rationnels : $\mathbb{k} := \mathbb{Q}$. Montrons que \mathcal{Z} admet une triangulation induisant une structure simpliciale affine faiblement rationnelle kählérienne. Notons qu'un argument similaire à celui de la remarque 3.2 montre que \mathcal{Z} n'admet pas de structure simpliciale fortement rationnelle pour une forme Q générique.

Soit $\tilde{\Gamma} := \Gamma/m$ pour $m \in \mathbb{N}$ suffisamment grand. Posons la fonction f définie par

$$f : N_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto \min_{v \in \tilde{\Gamma}} \sqrt{Q(x-v, x-v)}.$$

Clairement f induit une fonction de \mathcal{Z} dans \mathbb{R} .

Mis à part les points de $\tilde{\Gamma}$ dans \mathcal{Z} , les points de non dérivabilité de f forment le diagramme de Voronoï du réseau Γ noté L . Montrons que l'on obtient un cycle tropical rationnel.

D'abord il est connu que les cellules de Voronoï, c'est-à-dire les composantes connexes de $N_{\mathbb{R}} \setminus L$, sont des polyèdres. Si m est suffisamment grand, ces cellules forment un complexe polyédral sur \mathcal{Z} . On obtient naturellement une structure de complexe polyédral sur L . De plus L est rationnel car ses facettes sont incluses dans des hyperplans de la forme $(v_1 - v_2)^{\perp}$ pour v_1, v_2 des sommets de $\tilde{\Gamma}$. Comme $v_1 - v_2$ est rationnel par rapport à Γ , $(v_1 - v_2)^{\perp}$ est rationnel par rapport à N par dualité.

Enfin justifions que L vérifie la condition d'équilibre. Soit x_0 un point de L . Quitte à translater, on peut voir x_0 comme l'origine de $N_{\mathbb{R}}$. Soit U_0 une cellule de Voronoï qui contient

x_0 dans son adhérence. Soit v_0 le sommet de $\tilde{\Gamma}$ dans U_0 . Posons $g = f - \sqrt{Q(v_0, v_0)}$. Maintenant soit U une autre cellule touchant x_0 et soit v le sommet dans U . Alors sur U , au premier ordre, la fonction g ressemble à $x \mapsto Q(v, x)$ au voisinage de x_0 . Notons \tilde{g} le linéariser de g autour de x_0 . Alors \tilde{g} est une fonction linéaire par morceaux et, au voisinage de x_0 , L est simplement le diviseur de \tilde{g} .

De plus, si x_0 est un sommet de L , $-\tilde{g}$ est convexe autour de x_0 . La fonction induit donc une classe kählérienne ℓ^{x_0} , qui de plus est rationnelle puisque son dual de Poincaré est L (voir remarque 5.29). En rassemblant toutes les classes ℓ^{x_0} pour les sommets x_0 de L , on obtient une classe de Kähler rationnelle sur \mathcal{Z} .

Quitte à effectuer des éclatements on peut obtenir une structure simpliciale affine faiblement rationnelle sur \mathcal{Z} munie d'une forme de Kähler. La forme de Kähler n'est plus forcément rationnelle autour des points d'éclatements, mais sa classe est la même que précédemment. La classe associée est donc une classe de Kähler rationnelle.

QUESTION 8.7. La variété abélienne tropicale \mathcal{Z} vérifie-t-elle la conjecture de Hodge? \diamond

9. Comparaison des compactifications des sous-variétés du tore complexe et du tore tropical

Dans la section 1.8.2, nous avons discuté du phénomène suivant. Si W est une sous-variété du tore complexe $T_{\mathbb{C}}^n$, alors pour de bons éventails Σ dont le support est la tropicalisation $\text{Trop}(W)$ de W , la compactification \overline{W} de W dans $\mathbb{C}P_{\Sigma}$ vérifie de bonnes propriétés. Notamment, \overline{W} est toujours compacte, et l'intersection de \overline{W} avec la strate $\mathbb{C}P_{\Sigma}^{\sigma}$, $\sigma \in \Sigma$, a toujours pour dimension $\dim(W) - |\sigma|$. Voir la section 9 du chapitre 2 pour plus de détails. La tropicalisation étendue de \overline{W} est alors le support de la compactification canonique de $\overline{\Sigma} \subseteq \text{TP}_{\Sigma}$. Il est naturel de se demander le lien entre la cohomologie de \overline{W} et la cohomologie tropicale de $\overline{\Sigma}$. C'est ce dont nous allons discuter dans cette section.

Nous rappelons une partie du résultat de Feichtner et Yuzvinsky [FY04]. Soit W un complémentaire d'arrangement d'hyperplans. La tropicalisation de W est le support de Bergman associé à cet arrangement d'hyperplans, et l'on peut regarder l'éventail de Bergman associé. C'est un éventail unimodulaire noté Σ . Alors le théorème de Feichtner et Yuzvinsky montre que l'application

$$A^{\bullet}(\Sigma) \simeq A^{\bullet}(\text{TP}_{\Sigma}) \rightarrow H^{\bullet, \bullet}(\overline{W})$$

est un isomorphisme. Notamment, par le théorème 5.7, $A^{\bullet}(\Sigma) \simeq H^{\bullet, \bullet}(\overline{\Sigma})$ et l'on obtient bien un isomorphisme

$$H^{\bullet, \bullet}(\overline{\Sigma}) \simeq H^{\bullet, \bullet}(\overline{W}).$$

En fait le résultat de Feichtner et Yuzvinsky s'applique aux compactifications magnifiques définies par De Concini et Procesi dans [DP95] qui repose sur des éventails construits à partir de « building sets » et de « nested sets ». Ces constructions ne permettent pas d'obtenir tous les éventails de Bergman unimodulaires généralisés.

THÉORÈME 9.1. *Soit W un complémentaire d'arrangement d'hyperplans plongé dans $T_{\mathbb{C}}^n$. Soit Σ un éventail de Bergman unimodulaire généralisé de support $\text{Trop}(W)$. Soit \overline{W} la compactification de W dans $\mathbb{C}P_{\Sigma}$. Alors l'application*

$$H^{\bullet, \bullet}(\overline{\Sigma}) \simeq A^{\bullet}(\Sigma) \simeq A^{\bullet}(\text{TP}_{\Sigma}) \rightarrow H^{\bullet, \bullet}(\overline{W})$$

est un isomorphisme.

Nous montrons ce résultat dans la section 9.1 en utilisant la suite exacte de Deligne, proposition 4.9, qui permet de travailler directement par récurrence sur la dimension. Dans la section 9.2, nous présentons une idée s'appuyant sur l'épluchabilité tropicale qui pourrait peut-être aboutir à une généralisation plus vaste du théorème de Feichtner-Yuzvinsky.

9.1. Preuve du théorème 9.1. Nous présentons brièvement la preuve donnée en section 9 du chapitre 2.

Les résultats de Tevelev montrent que $\overline{W} \setminus W$ forme un diviseur à croisements normaux. On peut alors appliquer la suite spectrale de Deligne qui calcule la structure de Hodge mixte de W à partir des strates de \overline{W} . Comme W est un complémentaire d'arrangement d'hyperplans, la cohomologie de W est très simple [Sha93] : $H^p(W)$ est pure de poids (p, p) . On a alors simplement une suite exacte (voir [IKMZ19])

$$0 \rightarrow H^p(W) \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_p} H^0(\overline{W}^\sigma) \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{p-1}} H^2(\overline{W}^\sigma) \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_1} H^{2p-2}(\overline{W}^\sigma) \rightarrow H^{2p}(\overline{W}) \rightarrow 0.$$

D'un autre côté, nous avons montré l'existence d'une suite exacte de Deligne tropicale (théorème 4.9)

$$0 \rightarrow \mathbf{F}^p(\underline{0}) \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_p} H^0(\overline{\Sigma}_\infty^\sigma) \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{p-1}} H^2(\overline{\Sigma}_\infty^\sigma) \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_1} H^{2p-2}(\overline{\Sigma}_\infty^\sigma) \rightarrow H^{2p}(\overline{\Sigma}) \rightarrow 0.$$

Notons que, si $\sigma \in \Sigma$, alors W^σ est un complémentaire d'arrangement d'hyperplans dont la tropicalisation est $|\Sigma^\sigma|$. De plus, \overline{W}^σ est la compactification de W^σ dans $\mathbb{C}\mathbb{P}_{\Sigma^\sigma}$. Par récurrence, on peut donc supposer que pour toute face $\sigma \neq \emptyset$ de Σ , $H^\bullet(\overline{\Sigma}_\infty^\sigma) \simeq H^\bullet(\overline{W}^\sigma)$.

De plus, par un résultat de Zharkov [Zha13] que nous avons déjà cité, $\mathbf{F}^\bullet(\underline{0})$ est isomorphe à la cohomologie de W .

Donc les deux suites exactes ci-dessus sont isomorphes sauf pour le dernier terme. On en déduit l'isomorphisme pour le dernier terme :

$$H^{2p}(\overline{W}) \simeq H^{2p}(\overline{\Sigma}). \quad \square$$

9.2. Schéma de preuve pour une généralisation. Nous souhaiterions généraliser le théorème précédent. Avec Amini, nous avons une conjecture plus précise mais globalement la question est la suivante.

QUESTION 9.2. Soit W une sous-variété du tore. Soit Σ un éventail sur sa tropicalisation. Supposons que la compactification $\overline{W} \subseteq \mathbb{C}\mathbb{P}_\Sigma$ a de bonnes propriétés. Quitte à changer le faisceau \mathbf{F}^\bullet en un autre faisceau \mathbf{G}^\bullet , peut-on obtenir un isomorphisme

$$H^\bullet(\overline{\Sigma}, \mathbf{G}^\bullet) \simeq H^\bullet(\overline{W}) ? \quad \diamond$$

Si les strates ouvertes W^σ sont assez simples, par exemple si leur cohomologie de degré p est pure de poids (p, p) , et si $\overline{W} \setminus W$ est un diviseur à croisements normaux, la preuve ci-dessus devrait fonctionner à condition que le faisceau \mathbf{G}^\bullet ait des propriétés similaires à celles de \mathbf{F}^\bullet , et que $\mathbf{G}^\bullet(\infty_\sigma)$ soit isomorphe à $H^\bullet(W^\sigma)$.

Pour des cas plus compliqués, il faudrait potentiellement développer une théorie des structures de Hodge mixtes tropicales.

Une autre piste pour généraliser le théorème 9.1 serait d'utiliser la modification tropicale. Prenons une fonction régulière $g : W \rightarrow \mathbb{C}$. Supposons que g corresponde à une fonction f linéaire par morceaux sur Σ telle que la tropicalisation de $\text{div}(g)$ corresponde à $\text{div}(f)$. Dans ce cas, le graphe $\Gamma_g(W) \subseteq \mathbb{T}_\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ de la fonction g devrait avoir pour tropicalisation le support de $\mathcal{CTM}_f(\Sigma) \subseteq \mathbb{T}_\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}$. Clairement, $H^\bullet(\Gamma_g(W)) \simeq H^\bullet(W)$. De plus, si Σ est lisse, on sait par le théorème 6.10 que $H^\bullet(\mathcal{CTM}_f(\Sigma))$ est isomorphe à $H^\bullet(\Sigma)$.

Posons $\Sigma' := \mathcal{TM}_f(\Sigma)$. En vérifiant que l'on a une correspondance entre les strates de $\overline{\Gamma}_g(W) \subseteq \mathbb{T}\mathbb{P}_{\Sigma'}$ et les strates de $\overline{\Sigma}'$, on doit pouvoir montrer que si $H^\bullet(\overline{\Sigma}) \simeq H^\bullet(\overline{W})$, alors

$$H^\bullet(\overline{\Gamma}_g(W)) \simeq H^\bullet(\overline{\mathcal{TM}_f(\Sigma)}).$$

Ainsi on peut envisager le fait que l'isomorphisme entre $H^\bullet(\overline{W})$ et $H^\bullet(\overline{\Sigma})$ soit stable par épluchabilité.

Un tel argument fonctionne dans le cas des éventails de Bergman généralisés et permet de montrer que

$$H^\bullet(\overline{W}, \mathbb{Z}) \simeq H^\bullet(\overline{\Sigma}, \mathbb{Z}),$$

où l'on reprend les notations du théorème 9.1 pour Σ et W : voir chapitre 2 remarque 9.5.

Une fois que le cas local sera bien compris, on pourra s'attaquer au cas global et par exemple tenter de généraliser le théorème de [IKMZ19] à des dégénérescences de familles de variétés dont la fibre centrale n'a pas que des composantes ouvertes qui sont des complémentaires d'arrangements d'hyperplans, voir question 7.3.

10. Une généralisation des polynômes de Symanzik

Une question naturelle sous-jacente à cette thèse est de savoir si l'étude de la limite tropicale d'une famille de variétés qui dégènèrent peut permettre de trouver des informations sur la famille.

Par exemple, dans [AN20], dans le cas où les variétés sont de dimension un, Amini et Nicolussi définissent des espaces hybrides mêlant la fibre centrale et la limite tropicale. Ils définissent des mesures canoniques sur les espaces hybrides ainsi construits. Ils obtiennent alors que les mesures canoniques sur les fibres générales d'une famille s'étendent de manière continue à la fibre centrale hybride de cette famille. Pour définir ces mesures hybrides, les auteurs s'inspirent d'un analogue de la mesure canonique, appelé mesure de Zhang [Zha93], qui peut être définie sur la partie finie de limite tropicale. Ici, cette partie finie est simplement un graphe métrique. L'une des définitions possibles pour la mesure de Zhang fait intervenir le polynôme de Kirchhoff, c'est-à-dire le dual du polynôme de Symanzik qui nous intéresse ici.

Dans cette section, nous nous intéressons principalement à un autre exemple. Toujours dans le cas d'une famille de surfaces de Riemann, Amini, Bloch, Burgos Gil et Fresán ont pu montrer dans [ABBF16] que l'asymptotique de l'accouplement de hauteur de deux diviseurs de degrés zéro peut être décrite grâce aux rapports des deux polynômes de Symanzik sur la limite tropicale, comme nous allons l'expliquer plus en détail en section 10.4.

QUESTION 10.1. Peut-on étendre les résultats ci-dessus en dimensions supérieures? \diamond

Pour tenter de répondre à cette question, dans [Piq19b], qui correspond au chapitre 5, nous avons généralisé les polynômes de Symanzik en dimensions supérieures. Ces polynômes de Symanzik généralisés possèdent des propriétés étonnantes en lien avec différents sujets des mathématiques. Nous allons énoncer quelques-unes de ces propriétés dans cette section.

10.1. Origine des polynômes de Symanzik. Les polynômes de Symanzik sont utilisés en théorie quantique des champs pour calculer des intégrales de Feynman, et leur étude a amené à développer différentes théories intéressantes [BB03, BEK06, Bro15, BS12, BY11]. Une intégrale de Feynman est grossièrement une intégrale sur tous les parcours possibles de particules qui interagissent. Cette intégrale est assez mal définie a priori, mais on peut la simplifier pour l'exprimer comme une somme sur des graphes G d'intégrales impliquant $\exp(-i\text{Sym}_{2G}/\text{Sym}_G)$ où Sym_G et Sym_{2G} sont respectivement le premier et le second polynôme de Symanzik du graphe G .

Soit G un graphe. Notons V l'ensemble des sommets du graphe G et E l'ensemble de ses arêtes. Supposons G connexe. Rappelons qu'un arbre couvrant sur G est un sous-graphe maximal de G sans cycle. Alors Sym_G est un polynôme dans $\mathbb{R}[y_e \mid e \in E]$ défini par

$$\text{Sym}_G(\underline{y}) = \sum_{T \in \mathcal{T}} y^{E \setminus T},$$

où \mathcal{T} est l'ensemble des arbres couvrants de G et $y^{E \setminus T}$ désigne le produit des y_e pour e une arête qui n'est pas dans T . Ici, \underline{y} est un raccourci pour le E -uplet $(y_e)_{e \in E}$.

Nous ne définissons pas le second polynôme de Symanzik ici. Nous définirons directement sa généralisation plus loin.

Les polynômes de Symanzik ont de nombreuses propriétés, la plupart sont résumées dans [BW10]. Notamment, le premier polynôme de Symanzik est une spécialisation du polynôme de Tutte multivarié, aussi connu aussi sous le nom de modèle de Potts en physique. Cela implique déjà beaucoup de propriétés. Par exemple, il peut être calculé par récurrence par contraction-suppression, voir la section 1.2 du chapitre 5. Citons aussi [Bro15] dans lequel apparaît un théorème de factorisation pour le polynôme qui fait intervenir les mineurs du graphe et qui a son importance pour certaines applications en physique, voir la section suscitée. Ces propriétés et celles dont nous allons parler dans la suite s'étendent le plus souvent au cas des polynômes de Symanzik généralisés.

10.2. Polynômes de Kirchhoff et dualité. Le lecteur peut se référer aux sections 2 et 3 pour les détails et les preuves sur cette section et la suivante.

On définit le polynôme de Kirchhoff du graphe G par

$$\text{Kir}_G(\underline{y}) = \sum_{T \in \mathcal{T}} y^T.$$

Soit $U \in \mathbb{R}^{V \times E}$ la matrice d'incidence du graphe, qui est une matrice dont les rangées sont indexées par V , les colonnes par E , et telle que pour chaque arête e d'extrémités v_1, v_2 , le terme $U_{v_1, e}$ vaut 1, et le terme $U_{v_2, e}$ vaut -1 (ou l'inverse, on fait des choix arbitraires ici), et tous les autres termes $U_{v, e}$, pour v et e qui ne sont pas incidents, valent 0. Choisissons un sommet v_0 quelconque et définissons $\tilde{U} \in \mathbb{R}^{(V-v_0) \times E}$ la matrice U à laquelle on a retiré la rangée v_0 . Alors le théorème suivant est bien connu et peut-être montré grâce à la formule de Cayley [Cay49].

THÉORÈME 10.2 (Théorème de Kirchhoff pondéré). *On a*

$$\text{Kir}_G(\underline{y}) = \det(\tilde{U}Y\tilde{U}^\top)$$

où Y est la matrice diagonale $\text{diag}((y_e)_{e \in E})$. □

Cela permet notamment de compter le nombre d'arbres couvrants du graphe puisque ce nombre vaut $\text{Kir}_G(1, \dots, 1)$.

Le polynôme de Symanzik peut être vu comme le dual du polynôme de Kirchhoff car si G est un graphe planaire, le polynôme de Symanzik de G est le polynôme de Kirchhoff du graphe dual à G .

De plus, on a le dual du théorème de Kirchhoff ci-dessus.

THÉORÈME 10.3. *Soit K une matrice de rang maximale, dont les colonnes sont indépendantes et telle que $UK = 0$. Alors il existe un facteur C que l'on peut calculer explicitement tel que*

$$\text{Sym}_G(\underline{y}) = C \det(K^\top Y K). \quad \square$$

10.3. Généralisation du premier polynôme de Symanzik. La définition du polynôme de Kirchhoff ne dépend que de la matrice d'incidence. Ainsi, on peut remplacer cette matrice par n'importe quelle autre matrice (voire, ce qui est en fait assez naturel, par des matroïdes sur des hypercorps, voir la section 4 du chapitre 5). Soit E un ensemble quelconque. Soit U une matrice dont les colonnes sont indexées par E . Soit \tilde{U} la même matrice où l'on a seulement gardé $\text{rk}(U)$ rangées indépendantes. Soit enfin K une matrice de rang maximale dont les colonnes sont indépendantes et telle que $UK = 0$.

DÉFINITION 10.4. On définit le *polynôme de Kirchhoff de U* par

$$\text{Kir}(U; \underline{y}) = \det(\tilde{U}Y\tilde{U}^\top)$$

et le *polynôme de Symanzik* de U par

$$\text{Sym}(U; \underline{y}) = \det(K^\top Y K).$$

Ces polynômes ne sont bien définis qu'à un facteur près. \diamond

Le fait que les polynômes ne soient définis qu'à un facteur près ne sera plus un problème lorsque l'on étudiera le rapport des deux polynômes de Symanzik. Dans le cas où la matrice U est à coefficients entiers, nous donnons une manière canonique de définir les polynômes dans le chapitre 5, ce qui lève l'ambiguïté.

On peut trouver d'autres formulations pour ces polynômes en utilisant la formule de Cayley. Toujours à un facteur près, on a

$$\begin{aligned} \text{Kir}(U; \underline{y}) &= \sum_{F \subseteq E} \det(\tilde{U}|_F)^2 \underline{y}^F, \\ \text{Sym}(U; \underline{y}) &= \sum_{F \subseteq E} \det(\tilde{U}|_F)^2 \underline{y}^{E \setminus F}, \end{aligned}$$

où la somme est sur les sous-ensembles de E de rang $\text{rk}(U)$. Notamment, la deuxième formule montre qu'à un facteur près qui ne dépend pas de F ,

$$\det(\tilde{U}|_F) = \pm \det(K^\top|_{E \setminus F}).$$

Dans le cas des graphes, on a vu que le polynôme de Kirchhoff compte le nombre d'arbres couvrants. Si l'on regarde une structure simpliciale affine X de dimension d , on peut définir un analogue de la matrice d'incidence pour X en prenant la matrice $U \in \mathbb{Z}^{X_{d-1} \times X_d}$ associée au morphisme de bord $d : \mathbb{Z}^{X_d} \rightarrow \mathbb{Z}^{X_{d-1}}$ de l'homologie simpliciale. On pose alors

$$\text{Kir}(X; \underline{y}) := \text{Kir}(U; \underline{y}) \quad \text{et} \quad \text{Sym}(X; \underline{y}) := \text{Sym}(U; \underline{y}).$$

Dans ce cas, Duval, Klivans et Martin ont montré dans [DKM09] que $\text{Kir}(U; 1, \dots, 1)$ compte le nombre d'arbres couvrants avec multiplicités de X (voir aussi [BK16]). Expliquons-nous. Par analogie avec le cas des graphes, on peut appeler *arbre couvrant de X* tout sous-ensemble maximal acyclique de X_d . Par acyclique nous voulons dire que la restriction de X à ce sous-ensemble a une cohomologie de degré d triviale. La multiplicité correspond aux facteurs $\det(\tilde{U}|_F)^2$ et est due à la torsion ; par exemple un arbre couvrant composé d'un plan projectif réel et de parties contractiles sera compté 2^2 fois.

Ce lien entre polynômes de Kirchhoff, déterminants et arbres couvrants est aussi étudié par Lyons dans son article [Lyo09] à propos des complexes aléatoires. Le fait que le polynôme de Kirchhoff soit défini à partir de déterminants le lie étroitement à la théorie des mesures de probabilité déterminantales [Lyo03], qui sont des mesures ayant de bonnes propriétés dû au fait qu'elles sont définies à partir de certains déterminants.

Notons aussi que d'autres généralisations des polynômes de Symanzik ont été étudiées mais dans des objectifs différents : voir [GR07, KRTW10].

10.4. Accouplements de hauteur et second polynôme de Symanzik. Prenons une famille de courbes complexes projectives lisses $(W_t)_{t \in \Delta^*}$ qui dégénèrent en $t = 0$. Prenons aussi deux familles de diviseurs de degré zéro $(D_t)_t$ et $(D'_t)_t$. Supposons que sur chaque fibre générale W_t , $t \in \Delta^*$, D_t et D'_t sont de supports disjoints. On peut alors définir l'accouplement de hauteur

$$\langle D_t, D'_t \rangle = \text{Re} \left(\int_{\gamma_{D_t}} \omega_{D'_t} \right),$$

où γ_{D_t} est une 1-chaîne n'intersectant pas le support de D'_t et dont le bord est D_t , et $\omega_{D'_t}$ est une certaine forme différentielle logarithmique canonique de résidu D'_t . On s'intéresse maintenant à l'asymptotique de l'accouplement ci-dessus lorsque t tend vers 0. Les auteurs de [ABBF16] ont montré que, sous de bonnes conditions, l'asymptotique peut être décrite

grâce à un accouplement de hauteur défini sur la partie finie de la limite tropicale, qui ici est un graphe. Plus précisément,

$$(10.1) \quad \langle D_t, D'_t \rangle = \langle D_{\text{trop}}, D'_{\text{trop}} \rangle_{\underline{y}(t)} + O(1)$$

où le second accouplement est l'accouplement tropical entre les limites tropicales de $(D_t)_t$ et $(D'_t)_t$, et $\underline{y}(t)$ est une famille de nombre réels tendant vers $+\infty$. Cet accouplement tropical est lui-même décrit comme le rapport des deux polynômes de Symanzik du graphe. C'est ce que nous allons expliquer maintenant, en toute dimension.

Soit X une structure simpliciale affine compacte (i.e. $X = X_f$) de dimension d . Soit D un bord simplicial, c'est-à-dire un élément dans l'image de la différentielle simpliciale $d : \mathbb{R}^{X_d} \rightarrow \mathbb{R}^{X_{d-1}}$. On peut voir D comme un diviseur tropical, mais aussi comme un vecteur dans $\mathbb{R}^{X_{d-1}}$. Soit $\underline{y} = (y_\delta)_{\delta \in X_d}$ une famille de variables indexées par les facettes. On peut alors étudier le rapport des deux polynômes de Symanzik

$$\widetilde{\text{Sym}}(X, D; \underline{y}) := \frac{\text{Sym}(X, D; \underline{y})}{\text{Sym}(X; \underline{y})}$$

où le second polynôme de Symanzik est défini en appliquant la définition 10.5 à la matrice d'incidence U de X et au vecteur associé au diviseur D .

DÉFINITION 10.5. Soient V et E deux ensembles, $U \in \mathbb{R}^{V \times E}$ une matrice et $\underline{y} = (y_e)_{e \in E}$ une famille de variables. Soient u un vecteur dans l'image de U et y_u une nouvelle variable. Alors on définit le *second polynôme de Symanzik associé à la paire (U, u)* , et l'on note $\text{Sym}(U, u; \underline{y})$, le polynôme $\text{Sym}(U'; \underline{y}, y_u)$ évalué en $y_u = 0$ où U' est la matrice U à laquelle on a ajouté le vecteur u en dernière colonne. \diamond

On vérifie facilement que $\widetilde{\text{Sym}}(X, D; \underline{y})$ est quadratique en D . On peut donc définir sa forme bilinéaire associée : si D et D' sont deux bords simpliciaux dans $\mathbb{Z}^{X_{d-1}}$, alors on définit l'*accouplement de hauteur tropical de D et D' en \underline{y}* par

$$\frac{1}{2} (\widetilde{\text{Sym}}(X, D + D'; \underline{y}) - \widetilde{\text{Sym}}(X, D; \underline{y}) - \widetilde{\text{Sym}}(X, D'; \underline{y})).$$

QUESTION 10.6. L'accouplement de hauteur tropical ainsi défini permet-il de décrire l'asymptotique de l'accouplement de hauteur pour une famille de variétés de dimension quelconque ? \diamond

10.5. Invariance par subdivision. Soit X une structure simpliciale affine orientée compacte de dimension d . Dans le rapport des deux polynômes de Symanzik de X , on peut par exemple interpréter la variable $(y_\delta)_{\delta \in X_d}$ comme le volume de la facette δ . Dans notre cadre, cela signifie que l'on obtient un invariant intéressant si l'on pose $y_\delta = 1/w(\delta)$ où $w \in \text{MW}_d(X)$ est l'élément canonique. Ici $1/w$ représente bien un volume car si on subdivise une facette δ en des facettes $\delta_1, \dots, \delta_s$, pour $i \in \{1, \dots, s\}$ on souhaite que

$$\frac{y_\delta}{y_{\delta_i}} = \frac{\text{Vol}(\delta)}{\text{Vol}(\delta_i)} ;$$

or, comme $w(\delta)\nu_\delta = w(\delta_i)\nu_{\delta_i}$ et

$$\nu_{\delta_i} = \frac{\text{Vol}(\delta_i)}{\text{Vol}(\delta)} \nu_\delta,$$

on obtient bien la relation souhaitée en posant $y_\delta = 1/w(\delta)$.

Par le corollaire 3.22 du chapitre 5, contrairement au polynôme de Kirchhoff, le rapport des deux polynômes de Symanzik est invariant par subdivision si l'on évalue les y_δ en $1/w(\delta)$. Cette invariance montre que l'on peut en fait définir les polynômes de Symanzik sur des espaces polyédraux mesurés même sans assigner de triangulation.

En fait, cette propriété est analogue aux propriétés des réseaux de résistances électriques, voir [CCK12]. Si X est un graphe, si $w(e)$ représente la conductance d'une arête e , la dualité entre les polynômes de Symanzik et les polynômes de Kirchhoff est l'analogue de la dualité entre résistance et conductance. On peut par exemple calculer la résistance entre deux sommets avec des sommes sur les arbres couvrants ressemblant beaucoup aux polynômes de Symanzik. Cela permet aussi de calculer certaines probabilités concernant la marche aléatoire sur le graphe, ce qui est très lié aux mesures de probabilités déterminantales et aux mesures de Zhang dont nous avons déjà parlés.

10.6. Stabilité du rapport des deux polynômes. Reprenons notre discussion de la section 10.4. Pour montrer que l'asymptotique des accouplements de hauteur sur la famille vérifie l'équation (10.1), une première étape est d'utiliser le théorème de l'orbite nilpotente. Il faut ensuite contrôler le rapport $\widetilde{\text{Sym}}(X, D; \underline{y})$. Pour cela on peut utiliser un résultat de [BGHdJ18], comme dans [ABBF16]. Dans [Ami19], Amini propose une autre démonstration par des méthodes élémentaires. On obtient alors le théorème 10.7 ci-dessous restreint au cas des graphes. Nous avons nous-même généralisé ce théorème dans le cadre des polynômes de Symanzik généralisés (et même un peu au-delà), voir chapitre 5 section 6, ce qui est une première étape pour généraliser le calcul de l'asymptotique de l'accouplement de hauteur en dimensions supérieures. Ainsi, notre généralisation devrait elle aussi être reliée aux théorèmes de l'orbite nilpotente et de l'orbite SL2.

Soient V et E deux ensembles, $U \in \mathbb{R}^{V \times E}$ une matrice et $\underline{y} = (y_e)_{e \in E}$ des variables. Soit u un vecteur dans l'image de U .

Pour énoncer le théorème, nous devons d'abord expliciter la formule déterminantale permettant de calculer le second polynôme de Symanzik. Soit K une matrice de rang maximal dont les colonnes sont indépendantes et telle que $UK = 0$. Soit \tilde{u} un vecteur tel que $U\tilde{u} = u$. Soit enfin K' la matrice obtenue à partir de K en ajoutant le vecteur \tilde{u} en dernière colonne. Alors, à un facteur près,

$$\text{Sym}(U, u; \underline{y}) = \det(K'^T Y K'),$$

où Y est la matrice diagonale $\text{diag}(\underline{y})$.

THÉORÈME 10.7 (Stabilité du rapport des deux polynômes de Symanzik). *Soit $Z = Z(\underline{y})$ une matrice bornée fonction des variables \underline{y} . Avec les notations ci-dessus, la différence*

$$\frac{\det(K'^T Y K')}{\det(K^T Y K)} - \frac{\det(K'^T (Y + Z) K')}{\det(K^T (Y + Z) K)}$$

est bornée lorsque les variables de \underline{y} tendent simultanément vers $+\infty$. Autrement dit, il existe des constantes positives C et M telles que la différence soit majorée en valeur absolue par M lorsque $y_e \geq C$ pour tout $e \in E$.

DÉMONSTRATION. Voir la section 6 du chapitre 5. □

Commentons ce théorème. Remarquons d'abord que la première fraction est égale au rapport des deux polynômes de Symanzik. Si l'on interprète les valeurs \underline{y} comme les volumes des facettes d'une structure simpliciale que l'on fait diverger, et Z comme une perturbation bornée de ces volumes, le théorème ci-dessus peut être interprété comme le fait que le rapport des deux polynômes de Symanzik répond de manière bornée à une déformation bornée de la géométrie.

Ensuite, notons que ce théorème est plutôt surprenant a priori car les numérateurs sont des polynômes de degré un de plus que les dénominateurs, et quand bien même ce ne serait pas le cas, une variable y_e qui n'apparaîtrait que dans le numérateur pourrait diverger bien plus vite que les autres, faisant diverger chaque fraction au passage.

Les polynômes de Symanzik vus comme des fonctions sont donc des polynômes aux propriétés remarquables, rentrant ainsi dans un domaine actif des mathématiques étudiant justement

les propriétés remarquables de certains polynômes associés à des structures combinatoires. D'autres propriétés de ces polynômes en tant que fonctions étaient déjà connues. Par exemple, on peut vérifier que les polynômes de Symanzik vérifie la propriété du demi-plan : il ne s'annule pas dans la partie où toutes les variables y_e sont dans le demi-plan complexe supérieur. Les polynômes vérifiant ce genre de propriétés ont été étudiés dans [COSW04, Brä07, BBL07]. Citons aussi le récent article de Brändén et Huh, [BH19], sur les polynômes lorentzien, qui ont aussi des propriétés remarquables, notamment des propriétés de type Hodge-Riemann qui les lient donc par ailleurs avec le reste de cette thèse.

10.7. Graphe d'échange d'un matroïde. Terminons cette section en citant un joli théorème concernant les matroïdes que l'on peut trouver dans la section 5 du chapitre 5. Bien qu'à première vue ce théorème n'a pas de lien avec les polynômes de Symanzik, il est en fait utilisé pour montrer le théorème 10.7.

Sur un graphe connexe G , il est bien connu qu'à partir d'un arbre couvrant T , on peut obtenir n'importe quel autre arbre couvrant T' par une suite d'arbres couvrants $T = T_0, T_1, \dots, T_s = T'$ où, pour $1 \leq i \leq s$, T_i est obtenu à partir de T_{i-1} en effectuant un flip, c'est-à-dire en retirant une arête et en rajoutant une autre. Le même théorème est en fait vrai pour tout matroïde \mathfrak{M} . Pour toutes bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' de \mathfrak{M} , il existe une suite de bases $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_s = \mathcal{B}'$ telles que, pour $1 \leq i \leq s$, \mathcal{B}_i est obtenue à partir de \mathcal{B}_{i-1} en retirant un élément et en rajoutant un autre.

Nous généralisons ce principe à des paires d'indépendants du matroïde.

Ce genre de propriétés peut être utile par exemple si l'on souhaite générer une base aléatoire. On part d'une base arbitraire, puis en faisant un certains nombre de flips aléatoire on obtient finalement une base aléatoire selon une mesure de probabilités intéressantes [FM92, ALOGV19], le second utilise d'ailleurs les résultats de [AHK18] à propos la log-concavité sur les matroïdes.

Soit \mathfrak{M} un matroïde sur l'ensemble E et soit \mathcal{I} son ensemble d'indépendants. On définit le *graphe d'échange* \mathcal{G} de \mathfrak{M} de la manière suivante. Les sommets de \mathcal{G} sont les paires d'indépendants $(I_1, I_2) \in \mathcal{I}^2$. Deux sommets (I_1, I_2) et (J'_1, J'_2) de \mathcal{G} sont reliés s'il existe un élément $i \in I_1 \setminus J_2$ tel que $J'_1 = I_1 - i$ et $J'_2 = J_2 + i$. Si a et b sont deux entiers avec $1 \leq a \leq \text{rk}(\mathcal{G})$ et $0 \leq b \leq \text{rk}(\mathcal{G}) - 1$, on note $\mathcal{G}_{a,b}$ la restriction du graphe \mathcal{G} aux paires d'indépendants (I_1, I_2) avec $\text{card}(I_1) = a$ et $\text{card}(I_2) = b$ ou bien $\text{card}(I_1) = a - 1$ et $\text{card}(I_2) = b + 1$.

On s'intéresse aux composantes connexes de \mathcal{G} . Remarquons d'abord l'existence d'un invariant trivial : deux sommets (I_1, I_2) et (I'_1, I'_2) d'une même composante vérifient que l'union avec multiplicité $I_1 \uplus I_2$ est égale à $I'_1 \uplus I'_2$.

Un autre invariant moins évident est ce qu'on appelle la paire codépendante maximale. Soit (I_1, I_2) un sommet de \mathcal{G} . Soient $A \subseteq I_1$ et $B \subseteq I_2$ telles que leurs clôtures $\text{cl}(A)$ et $\text{cl}(B)$ coïncident. Alors (A, B) est appelée une *paire codépendante de* (I_1, I_2) . On peut démontrer que l'ensemble de ces paires possède un maximum pour l'inclusion. On appelle cette paire la *paire codépendante maximale de* (I_1, I_2) . Les éléments de cette paire ne peuvent pas passer de l'autre côté sans casser l'indépendance : il s'agit bien d'un invariant.

Le théorème énonce que ces deux invariants forment un système complet d'invariants.

THÉORÈME 10.8. *Deux sommets (I_1, I_2) et (I'_1, I'_2) de \mathcal{G} sont dans la même composante connexe si et seulement si $I_1 \uplus I_2 = I'_1 \uplus I'_2$ et les deux sommets ont la même paire codépendante maximale.*

Le même résultat est vrai pour tous les sous-graphes $\mathcal{G}_{a,b}$.

DÉMONSTRATION. Voir la section 5 du chapitre 5. □

Citons finalement une conjecture en lien avec le théorème ci-dessus.

Un ensemble $I \subseteq E$ est un *coindépendant dans* \mathfrak{M} si $E \setminus I$ est indépendant dans le dual de \mathfrak{M} , autrement dit s'il existe une base \mathcal{B} de \mathfrak{M} incluse dans I . On peut alors étendre le graphe

\mathcal{G} en prenant pour sommets les paires (I_1, I_2) où I_1 est un indépendant ou un coindépendant et de même pour I_2 .

CONJECTURE 10.9. *Le théorème 10.8 est vrai sur $\mathcal{G}_{r,r}$ où $r := \text{rk}(\mathfrak{M})$.*

Cette conjecture est équivalente à la conjecture 1.8 de [Bla08] qui fait partie de la conjecture de White concernant les idéaux toriques des matroïdes, voir aussi [Whi80, LM14].

Homology of tropical fans

Abstract : The aim of this paper is to study homological properties of tropical fans and to propose a *notion of smoothness* in tropical geometry, which goes beyond matroids and their Bergman fans and which leads to an enrichment of the category of smooth tropical varieties.

Among the resulting applications, we prove the *Hodge isomorphism theorem* which asserts that the Chow rings of smooth unimodular tropical fans are isomorphic to the tropical cohomology rings of their corresponding canonical compactifications, and prove a slightly weaker statement for any unimodular fan. We furthermore introduce a *notion of shellability* for tropical fans and show that shellable tropical fans are smooth and thus enjoy all the nice homological properties of smooth tropical fans. Several other interesting properties for tropical fans are shown to be shellable. Finally, we obtain a generalization, both in the tropical and in the classical setting, of the pioneering work of Feichtner-Yuzvinsky and De Concini-Procesi on the *cohomology ring of wonderful compactifications* of complements of hyperplane arrangements.

The results in this paper form the basis for our subsequent works on Hodge theory for tropical and non-Archimedean varieties.

1. Introduction

The work undertaken in this paper is motivated by the following fundamental questions in tropical geometry:

QUESTION 1.1. — What it means for a tropical variety to be smooth?

— What are algebraic varieties which admit a smooth tropicalization? \diamond

As in differential topology and algebraic geometry, tropical smoothness should be a local notion. Since tropical fans and their supports form the building blocks of more general tropical varieties, the first part of the question will be reduced to the same one for tropical fans. We precise what we mean by a tropical fan.

Let $N \simeq \mathbb{Z}^n$ be a lattice of finite rank and denote by $N_{\mathbb{R}}$ the vector space generated by N . Recall that a fan Σ in $N_{\mathbb{R}}$ is a non-empty collection of strongly convex polyhedral cones which verify the following two properties. First, for any cone $\sigma \in \Sigma$, any face of σ belongs to Σ . Moreover, for two cones σ and η in Σ , the intersection $\sigma \cap \eta$ is a common face of both σ and η . In particular, Σ always contains the cone $\underline{0} := \{0\}$. We denote by $|\sigma|$ the dimension of a face σ . A fan is called rational if any cone in Σ is rational in the sense that it is generated by rays which have non-zero intersection with the lattice N . In that case, each cone σ in Σ defines a sublattice N_{σ} of N of the same rank as the dimension of σ , and given by the integral points of the vector subspace of $N_{\mathbb{R}}$ generated by σ . A fan is pure dimensional if all its maximal cones have the same dimension. The support of a fan Σ is denoted by $|\Sigma|$.

A *tropical fan* is a pure dimensional rational fan Σ in $N_{\mathbb{R}}$ as above which in addition verifies the following foundational principle in tropical geometry called the balancing condition: for any cone τ of codimension one in Σ , we have the vanishing in the quotient lattice N/N_{τ} of the following sum

$$\sum_{\sigma \supset \tau} \mathbf{e}_{\sigma}^{\tau} = 0$$

where the sum is over faces σ of maximal dimension containing τ and \mathbf{e}_σ^τ is the vector which generates the quotient $(\sigma \cap N)/(\tau \cap N) \simeq \mathbb{Z}_{\geq 0}$. This might be regarded as a polyhedral analogue of *orientability* and leads to the definition of a *fundamental class* which plays an important role in the treatment of the duality and other finer geometric properties in polyhedral geometry.

A special class of tropical fans are the *realizable* ones which are those arising from (faithful) tropicalizations of subvarieties of algebraic tori over trivially valued fields. Tropical fans and their supports form the local charts for more general tropical varieties. This includes in particular the realizable ones which are those coming from (faithful) tropicalizations of subvarieties of algebraic tori and more general toric varieties over non-Archimedean fields.

As in classical geometry, the natural properties we can expect for a tropical notion of smoothness are the following:

- (1) Tropical smoothness should be a property only of the support.
- (2) Smoothness for a tropical fan should be itself a local condition: local star fans which appear around each point of a smooth tropical fan should be themselves smooth.
- (3) Smooth tropical fans should satisfy a polyhedral analogue of the Poincaré duality.

The main objective of this paper is to propose a notion of smoothness in tropical geometry with the above desired list of properties. On the way to doing this, we establish several other interesting properties enjoyed by tropical fans in general, and by smooth tropical fans in particular, which we hope could be of independent interest. We also derive some applications of our results to algebraic geometry; more in connection with Hodge theory and in the direction of answering the second part of Question 1.1 will be elaborated in our forthcoming work.

In the remaining of this introduction, we provide a brief discussion of our results.

1.1. Tropical smoothness. The definition of tropical smoothness that we propose in this work is homological. In this regard, it is in the spirit of the notion of homology manifold [Čec33, Lef33, Beg42, Bor57, Wil65, BFMW96, BFMW07, Mio00, Wei02] and the homological characterization of regular local rings [Ser55, AB56, AB57, Ser97].

Let Σ be a rational fan. We denote by \mathbf{F}_p the sheaf of p -multivectors on Σ and by \mathbf{F}^p its dual. The sheaf \mathbf{F}_p is simplicial and on each cone σ is defined by

$$\mathbf{F}_p(\sigma) := \sum_{\substack{\eta \in \Sigma \\ \eta \supseteq \sigma}} \bigwedge^p N_\eta \subseteq \bigwedge^p N, \quad \text{and} \quad \mathbf{F}^p(\sigma) := \mathbf{F}_p(\sigma)^\star.$$

The dual \mathbf{F}^p (with real coefficients) can be regarded as the sheaf of tropical holomorphic p -forms on Σ , cf [JSS19].

The above coefficient sheaves lead to the definition of cohomology and homology groups $H^{p,q}(\Sigma)$, $H_c^{p,q}(\Sigma)$, $H_{p,q}(\Sigma)$, and $H_{p,q}^{\text{BM}}(\Sigma)$, with the last one being the tropical analogue of the Borel-Moore homology. These were introduced in [IKMZ19] and further studied in [JSS19, MZ14, JRS18, GS19b, GS19a, AB14, ARS19, Aks19, AP20b, Mik20a, AP20c]. We recall the relevant definitions in Section 2.

Let Σ be a tropical fan of dimension d . The Borel-Moore homology group $H_{d,d}^{\text{BM}}(\Sigma)$ contains a canonical element ν_Σ , the analogue of the fundamental cycle in the tropical setting.

Using the cap product \frown , we get a natural map

$$\cdot \frown \nu_\Sigma : H^{p,q}(\Sigma) \longrightarrow H_{d-p,d-q}^{\text{BM}}(\Sigma).$$

We say that a simplicial tropical fan Σ verifies the *Poincaré duality* if the above map is an isomorphism for any bidegree (p, q) . As we will show later, it is easy to see that this is in fact equivalent to the vanishing of $H_{a,b}^{\text{BM}}(\Sigma)$ for $b \neq d$, and the *surjectivity* of the natural maps

$$\mathbf{F}^p(\underline{0}) \rightarrow H_{d-p,d}^{\text{BM}}(\Sigma), \quad \alpha \mapsto \iota_\alpha(\nu_\Sigma),$$

defined by contraction of multivectors. We will see in Section 3 that this map is always injective for any tropical fan. The question of classification of tropical fans which verify the Poincaré duality is an interesting problem, and some results in this direction has been obtained by Edvard Aksnes in his master thesis [Aks19].

A tropical fan Σ is called *smooth* if for any cone $\sigma \in \Sigma$, the star fan Σ^σ verifies the Poincaré duality. In this paper, the star fan Σ^σ refers to the fan in $N_{\mathbb{R}}/N_{\sigma, \mathbb{R}}$ induced by the cones η in Σ which contain σ as a face.

The following is a list of properties satisfied in the category of smooth tropical fans.

- (1) Smoothness only depends on the support of the tropical fan.
- (2) Smoothness is a local condition, namely that, a tropical fan is smooth if it is smooth around each of its points.
- (3) The category of smooth tropical fans is closed under products. In fact, we have the following stronger property: Let Σ_1, Σ_2 be two tropical fans and set $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$ (which is again a tropical fan). Then Σ is smooth if and only if Σ_1 and Σ_2 are both smooth.
- (4) Any complete rational fan, i.e., a fan with support equal to $N_{\mathbb{R}}$, is tropically smooth.

The current-in-use notion of smoothness in tropical geometry has been so far based on the notion of *matroids* and their associated *Bergman fans*. To any matroid \mathfrak{M} over a base set E one associates a polyhedral fan $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ called the Bergman fan of the matroid in the real vector space $\mathbb{R}^E/\mathbb{R}(1, \dots, 1)$. We give the precise definition in Section 5.10. In the case the matroid is given by an arrangement of hyperplanes, the Bergman fan can be identified with the tropicalization of the complement of the hyperplane arrangement, for the coordinates given by the linear functions which define the hyperplane arrangement. From the calculation of homology groups of Bergman fans, proved in [Sha13b, JSS19, JRS18], and the observation that star fans of Bergman fans are themselves Bergman, it follows that

- (5) Bergman fans of matroids are tropically smooth in the above sense.

This last property shows that the results we will prove in this paper in particular apply to those tropical varieties which are locally modeled by the support of Bergman fans of matroids.

The proof of the Poincaré duality for matroids is based on the use of tropical modifications and the operations of deletion and contraction on matroids, which allow to proceed by induction [Sha13b]. More generally, we will prove the following result.

- (6) The category of smooth tropical fans is stable under tropical modifications along smooth divisors.

The notions of divisors and tropical modifications along a divisor will be studied in detail in Sections 4 and 5, and lead to a notion of *tropical shellability* for fans in tropical geometry discussed in Section 1.4 below. We prove that

- (7) Any shellable tropical fan is smooth.

We will see that Bergman fans are shellable but there exist shellable tropical fans which are not coming from matroids. This shows that the category of smooth tropical fans introduced in this paper is strictly larger than the category of *generalized Bergman fans* which are those fans having the same support as the Bergman fan of a matroid.

From the above properties, we deduce the following global duality theorem.

THEOREM 1.2 (Poincaré duality for smooth tropical varieties). *Let X be a smooth connected tropical variety of dimension d . The cap product with the fundamental class $\nu_X \in H_{d,d}^{\text{BM}}(X)$ leads to the Poincaré duality with integral coefficients*

$$\cdot \frown \nu_X: H^{p,q}(X) \rightarrow H_{d-p,d-q}^{\text{BM}}(X).$$

In particular, we have $H_c^{d,d}(X, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$ and the natural pairing

$$H^{p,q}(X, \mathbb{Q}) \times H_c^{d-p,d-q}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H_c^{d,d}(X, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$$

is perfect.

1.2. Chow groups of unimodular fans and Hodge isomorphism theorem. Recall that for a unimodular fan Σ in $N_{\mathbb{R}}$ with the set of rays denoted by Σ_1 , the Chow ring $A^\bullet(\Sigma)$ is defined as the quotient

$$A^\bullet(\Sigma) := \mathbb{Z}[X_\rho \mid \rho \in \Sigma_1] / (I_1 + I_2)$$

where

- I_1 is the ideal generated by the products $X_{\rho_1} \cdots X_{\rho_k}$, $k \in \mathbb{N}$, such that ρ_1, \dots, ρ_k do not form a cone in Σ , and
- I_2 is the ideal generated by the elements of the form

$$\sum_{\rho \in \Sigma_1} \langle m, \mathbf{e}_\rho \rangle X_\rho$$

for $m \in M$ where \mathbf{e}_ρ is the generator of $N \cap \rho$.

It is well-known that this can be identified with the Chow ring of the toric variety \mathbb{P}_Σ associated to Σ , see [Dan78, Jur80] for complete unimodular fans and [BDP90, Bri96, FY04] for the general case.

We prove the following general theorem on the relation between Chow groups of unimodular fans and tropical cohomology groups of their canonical compactifications.

The *canonical compactification* $\bar{\Sigma}$ of a simplicial fan Σ in \mathbb{R}^N is defined as the result of completing any cone of Σ to a hypercube, by adding some faces at infinity. So any ray ϱ becomes a segment by adding a point ∞_ϱ at infinity. Any two dimensional cone σ with two rays ϱ_1 and ϱ_2 becomes a parallelogram with vertex set the origin, $\infty_{\varrho_1}, \infty_{\varrho_2}$, and a new point ∞_σ associated to σ . The higher dimensional cones are completed similarly, see Section 2 for more details. Alternatively, $\bar{\Sigma}$ is obtained by taking the closure of Σ in the partial compactification of $N_{\mathbb{R}}$ given by the tropical toric variety \mathbb{TP}_Σ associated to Σ , obtained by taking the tropicalization of the toric variety \mathbb{P}_Σ .

THEOREM 1.3 (Hodge isomorphism for unimodular fans). *Let Σ be a unimodular fan of dimension d . Assume that $A^1(\Sigma^\sigma)$ is torsion-free for all $\sigma \in \Sigma$. Then, for any non-negative integer $p \leq d$, there is an isomorphism $A^p(\Sigma) \simeq H^{p,p}(\bar{\Sigma})$. These isomorphisms together induce an isomorphism of \mathbb{Z} -algebras between the Chow ring of Σ and the tropical cohomology ring $\bigoplus_p H^{p,p}(\bar{\Sigma})$. Moreover, the cohomology groups $H^{p,q}(\bar{\Sigma})$ for $p < q$ or $p > q = 0$ are all vanishing. Finally, the result holds with rational coefficients without the torsion-freeness assumption.*

Torsion-freeness of $A^1(\Sigma)$ in the statement of the theorem is equivalent to requiring that the primitive vectors of the rays of Σ generate the full lattice induced by N in the vector space defined by Σ . If this happens for all star fans Σ^σ , we say that the fan Σ is *saturated*. Without this condition, the statement cannot be true. In this case, the map is always surjective but we might have a torsion kernel. As stated in the theorem, the result holds for rational coefficients without the torsion-freeness assumption. The same holds with integral coefficients if one works with the version of tropical cohomology given by Gross and Shokrieh [GS19b].

Note that in the above theorem, we do not assume that the fan is tropical. In the case Σ is a smooth tropical fan, the canonical compactification $\bar{\Sigma}$ is a smooth tropical variety. By Poincaré duality for $\bar{\Sigma}$ stated in Theorem 1.2, and by the vanishing result in Theorem 1.3, we

get vanishing of the cohomology groups $H^{p,q}(\bar{\Sigma})$ for $p > q$. This leads to the following refined theorem in the smooth setting. For each $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, define

$$H^k(\bar{\Sigma}) := \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(\bar{\Sigma}).$$

THEOREM 1.4 (Hodge isomorphism for smooth unimodular tropical fans). *Let Σ be a saturated unimodular tropical fan in $N_{\mathbb{R}}$. Suppose in addition that Σ is tropically smooth. Then we get an isomorphism of rings $A^{\bullet}(\Sigma) \simeq H^{2\bullet}(\bar{\Sigma})$. Moreover, all the cohomology groups $H^{2\bullet+1}(\bar{\Sigma})$ are vanishing.*

As we will see later, the Hodge isomorphism property actually leads to an equivalent formulation of the notion of smoothness in tropical geometry. The precise statement is as follows.

THEOREM 1.5 (Alternate characterization of tropical smoothness). *A unimodular tropical fan Σ is smooth if and only if for any face σ of Σ , the canonically compactified star fan $\bar{\Sigma}^{\sigma}$ verifies the Poincaré duality. That is, if and only if, for any σ , $H^{p,q}(\bar{\Sigma}^{\sigma}) = 0$ for $p > q$ and the ring $H^{\bullet}(\bar{\Sigma}^{\sigma})$ verifies the Poincaré duality.*

More generally, a tropical fan Σ is smooth if any unimodular fan with the same support as Σ verifies the content of Theorem 1.5. This theorem implies that the tropical smoothness studied in this paper reflects a notion of *maximal degeneracy* in the polyhedral setting, consistent with the work of Deligne [Del97]. We will elaborate on this in our forthcoming work.

The above results in particular provide on one side a tropical analogue of a generalized version of a theorem of Feichtner and Yuzvinsky [FY04], which proves a similar in spirit result for some specific combinatorially defined wonderful compactifications of complements of hyperplane arrangements, and on the other side shed light on the work of Adiprasito-Huh-Katz [AHK18] on Hodge theory for matroids:

- Concerning the latter, as it was noted in [AHK18], in the case where the matroid \mathfrak{M} is non-realizable over any field, the Chow ring $A^{\bullet}(\Sigma_{\mathfrak{M}})$ does not correspond to the Chow ring of any smooth projective variety over any field. So it came somehow as a surprise that in the non-realizable case, the Chow ring $A^{\bullet}(\Sigma_{\mathfrak{M}})$, which is the Chow ring of a non-complete smooth toric variety, verifies all the nice properties enjoyed by the cohomology rings of projective complex manifolds. Our Hodge isomorphism theorem above, combined with the observation that $\bar{\Sigma}_{\mathfrak{M}}$ is a smooth projective tropical variety, explains that although \mathfrak{M} is non-realizable, the ring $A^{\bullet}(\Sigma_{\mathfrak{M}})$ is still the cohomology ring of a smooth projective variety... in the *tropical world*. The results in our series of work, starting with this and its companions [AP20b, AP20c], provide generalizations of the results of [AHK18] to more general classes of tropical varieties.

- Concerning the former, Feichtner and Yuzvinsky proved in [FY04] that the Chow ring of the realizable matroid \mathfrak{M} given by an arrangement of complex hyperplanes becomes isomorphic to the cohomology ring of a wonderful compactification of the complement of the hyperplane arrangement. Theorem 1.7 stated below provides a generalization of this result to any smooth *tropical compactification* (in the sense of Tevelev [Tev07], we will recall this later in Section 9) of the complement of the hyperplane arrangement, by doing away with the combinatorial data of building and nested sets, assumed usually in the framework of wonderful compactifications for getting control on cohomology. Since Theorem 1.3 holds for any saturated unimodular fan and Theorem 1.4 for any smooth saturated tropical fan, which as we mentioned form a richer class compared to generalized Bergman fans, one can expect that Theorem 1.7 stated below should also hold for more general classes of tropical compactifications.

A non-Archimedean version of the vanishing statement in Theorem 1.3, with rational coefficients, is independently proved in a recent work of Ryota Mikami [Mik20a] where building on the work of Liu [Liu20], and using a non-Archimedean analogue of the Gersten resolution [Mik20b], he proves that the tropical cohomology groups of the Berkovich analytification

X^{an} of a smooth variety X over a trivially valued field vanish in bidegrees (p, q) for $p < q$. Mikami also establishes an isomorphism between the Chow groups of X and the tropical cohomology groups in Hodge bidegrees of the analytification X^{an} . By the work of Jell [Jel19], the cohomology groups of the Berkovich analytification X^{an} for projective X can be obtained as the limit of its tropicalizations. In this regard, Mikami's results and our theorem stated above are complementing each other.

1.3. Tropical Deligne resolution and cohomology of wonderful compactifications. Let Σ be a smooth unimodular tropical fan. By definition, for any $\sigma \in \Sigma$, the star fan Σ^σ is a smooth unimodular tropical fan in $N_{\mathbb{R}}^\sigma$. We denote by $\overline{\Sigma}^\sigma$ its canonical compactification and as before set

$$H^k(\overline{\Sigma}^\sigma) := \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(\overline{\Sigma}^\sigma).$$

By our Theorem 1.4, $H^k(\overline{\Sigma}^\sigma)$ is non-vanishing only in even degrees in which case it becomes equal to $H^{k/2,k/2}(\overline{\Sigma}^\sigma)$. In Section 8 we prove the following theorem.

THEOREM 1.6 (Tropical Deligne resolution). *Let Σ be a smooth unimodular tropical fan. Then for any non-negative integer p , we have the following long exact sequence*

$$0 \rightarrow \mathbf{F}^p(\underline{0}) \rightarrow \bigoplus_{\substack{\sigma \in \Sigma \\ |\sigma|=p}} H^0(\overline{\Sigma}^\sigma) \rightarrow \bigoplus_{\substack{\sigma \in \Sigma \\ |\sigma|=p-1}} H^2(\overline{\Sigma}^\sigma) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{\substack{\sigma \in \Sigma \\ |\sigma|=1}} H^{2p-2}(\overline{\Sigma}^\sigma) \rightarrow H^{2p}(\overline{\Sigma}) \rightarrow 0.$$

In the above sequence, the notation $|\sigma|$ stands for the dimension of the face σ , and the maps between cohomology groups are given by the Gysin maps in tropical geometry, as we will expand later in the paper.

The above theorem could be regarded as a *cohomological version of the inclusion-exclusion principle* in the sense that the cohomology groups are described with the help of coefficient sheaves and the coefficient sheaves themselves can be recovered from the cohomology groups.

The origin of the name given to the theorem comes from the Deligne spectral sequence in Hodge theory [Del71a] which puts a mixed Hodge structure on the cohomology of smooth quasi-projective complex varieties. In the case of a complement of an arrangement of complex hyperplanes, by the results of Orlik-Solomon [OT13] and Zharkov [Zha13], the cohomology in degree p coincides with $\mathbf{F}^p(\underline{0})$ of the Bergman fan $\Sigma_{\mathfrak{M}}$, for the matroid \mathfrak{M} associated to the hyperplane arrangement, and a wonderful compactification of the hyperplanes complement produces a long exact sequence as above with the cohomology groups of the strata in the compactification, see [IKMZ19]. This is a consequence of a theorem of Shapiro [Sha93] which states that the complement of an arrangement of complex hyperplanes has a pure Hodge structure of Hodge-Tate type, concentrated in bidegree (p, p) for the degree p cohomology. The above theorem generalizes this to any smooth tropical fan.

Note that the terms appearing in the statement of our theorem above are with integral coefficients, so even in the case of a complex hyperplane arrangement, we get a refinement over the proof obtained by using Deligne spectral sequence.

The essence of the above stated theorem is thus the assertion that the coefficient group $\mathbf{F}^p(\underline{0})$ of any smooth tropical fan Σ should be regarded as the p -th cohomology group of a variety Y with a Hodge structure of Hodge-Tate type concentrated in bidegree (p, p) . This variety is precisely the support of the tropical fan $Y = |\Sigma|$ which has cohomology $H^p(Y) = H^{p,0}(\Sigma) = \mathbf{F}^p(\underline{0})$ for any p . We will elaborate further on the connection to the Hodge theory of tropical varieties in our upcoming work.

We note here that a similar in spirit sequence dealing with the Stanley-Reisner rings of simplicial complexes and their quotients by (generic) linear forms play a central role in the recent works [Adi18, AY20] on partition complexes, and have found several interesting applications.

We provide in Section 9 an application of the above result to the cohomology of compactifications of complements of hyperplane arrangements. (A second application is discussed in the next section below.) Namely, consider a collection of hyperplanes H_0, H_1, \dots, H_m in $\mathbb{C}\mathbb{P}^r$ given by linear forms $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_m$. Assume furthermore that the vector space generated by $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_m$ has maximum rank, i.e., the intersection $H_0 \cap H_1 \cap \dots \cap H_m$ is empty. Let X be the complement $\mathbb{C}\mathbb{P}^r \setminus \bigcup_{j=0}^m H_j$ and consider the embedding $X \hookrightarrow T$ for the torus $T = \text{Spec}(\mathbb{C}[M])$ with

$$M = \ker(\text{deg}: \mathbb{Z}^{m+1} \rightarrow \mathbb{Z}), \quad \text{deg}(x_0, \dots, x_m) = x_0 + \dots + x_m.$$

The embedding is given by coordinates $[\ell_0 : \dots : \ell_m]$. Denote by N the dual lattice to M .

By the theorem of Ardila and Klivans [AK06], the tropicalization of X with respect to the above embedding coincides with the support of the Bergman fan $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ for the matroid \mathfrak{M} associated to the arrangement. We prove the following theorem.

THEOREM 1.7. *Let Σ be a unimodular fan with support $\text{Trop}(X) = |\Sigma_{\mathfrak{M}}|$ and denote by \bar{X} the corresponding compactification obtained by taking the closure of X in the toric complex variety $\mathbb{C}\mathbb{P}_{\Sigma}$. The cohomology ring of \bar{X} is concentrated in even degrees and it is of Hodge-Tate type, i.e., the Hodge-decomposition in degree $2p$ is concentrated in bidegree (p, p) . Moreover, the restriction map*

$$A^{\bullet}(\Sigma) \simeq A^{\bullet}(\mathbb{C}\mathbb{P}_{\Sigma}) \longrightarrow H^{2\bullet}(\bar{X})$$

is an isomorphism of rings.

Combined with Theorem 1.4, this leads to an isomorphism

$$H^{2p}(\bar{\Sigma}) \simeq H^{2p}(\bar{X}).$$

As we mentioned previously, the theorem provides a *tropical* generalization of the results of Feichtner-Yuzvinsky [FY04] and De Concini-Procesi [DP95], by doing away with the combinatorial data of building and nested sets, assumed usually in the theory of wonderful compactifications. In this regard, it would be interesting to extend the above theorem to the setting of arrangements of more general subvarieties, for examples those considered in [Li09, FM94, Kee93, DD15, CD17, CDD⁺20, DG18, DG19, DS18].

1.4. Tropical shellability. In order to show the category of smooth tropical fans is large, we introduce a tropical notion of shellability. This will be based on two types of operations on tropical fans: *star subdivision* and *tropical modification*. Star subdivision corresponds to the fundamental notion of blow-up in algebraic geometry. And the importance of tropical modifications in tropical algebraic geometry was pointed out by Mikhalkin [Mik06, Mik07], and resides in the possibility of producing richer tropicalizations out of the existing ones by introducing *new coordinates*. A tropical fan will be called *shellable* if, broadly speaking, it can be obtained from a collection of *basic tropical fans* by only using these two operations.

We give the idea of the definition here and refer to Section 5 for more precisions. Let \mathcal{C} be a class of tropical fans. Let \mathcal{B} be a subset of \mathcal{C} that we call the *base set*. The set of *tropically \mathcal{C} -shellable fans over \mathcal{B}* denoted by $\mathcal{Sh}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ is defined as the smallest class of tropical fans all in \mathcal{C} which verifies the following properties.

- (Any element in the base set is tropically \mathcal{C} -shellable) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{Sh}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$.
- (Closeness under products) If $\Sigma, \Sigma' \in \mathcal{Sh}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ and the product $\Sigma \times \Sigma'$ belongs to \mathcal{C} , then $\Sigma \times \Sigma' \in \mathcal{Sh}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$.
- (Closeness under tropical modifications along a tropically shellable divisor) If $\Sigma \in \mathcal{Sh}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$, then a tropical modification $\tilde{\Sigma}$ of Σ along a divisor Δ which is in $\mathcal{Sh}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ belongs to $\mathcal{Sh}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ provided that it remains in \mathcal{C} .

- (Closeness under blow-ups and blow-downs with shellable center) If $\Sigma \in \mathcal{C}$, for any cone $\sigma \in \Sigma$ whose star fan Σ^σ belongs to $\mathcal{S}h_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ and such that the star subdivision of Σ at σ belongs to \mathcal{C} , we have $\Sigma \in \mathcal{S}h_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ if and only if the star subdivision belongs to $\mathcal{S}h_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$.

The main examples of classes \mathcal{C} of tropical fans which are of interest to us are *all*, resp. *simplicial*, resp. *unimodular*, resp. *quasi-projective*, resp. *principal*, resp. *div-faithful*, and resp. *locally irreducible* tropical fans. If \mathcal{C} is the class of all tropical fans, we just write $\mathcal{S}h(\mathcal{B})$. The last three classes and their properties will be introduced and studied later in the paper.

An important example of the base set is the set $\mathcal{B}_0 = \{\underline{0}, \Lambda\}$ where Λ is the complete fan in \mathbb{R} with three cones $\underline{0}, \mathbb{R}_{\geq 0}$, and $\mathbb{R}_{\leq 0}$. In fact, already in this case, $\mathcal{S}h(\mathcal{B}_0)$ contains many interesting fans. For example, complete and generalized Bergman fans are all within this class, but $\mathcal{S}h(\mathcal{B}_0)$ is strictly larger.

DEFINITION 1.8. — If \mathcal{C} is a class of tropical fans, a tropical fan Σ is called *shellable in \mathcal{C}* if $\Sigma \in \mathcal{S}h_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}_0)$. If $\mathcal{C} = \mathcal{T}rop$, we simply say that Σ is shellable.

- If P is a predicate on tropical fans and \mathcal{C} is a class of tropical fans, then P is called *shellable in \mathcal{C}* if the subclass \mathcal{S} of fans of \mathcal{C} verifying P verifies $\mathcal{S}h_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. \diamond

As we will show later in Sections 5, 6, and 10, several nice properties of tropical fans are shellable:

- (1) Normality, local irreducibility, and div-faithfulness are all shellable.
- (2) Principality is shellable in the class of locally irreducible fans.
- (3) Poincaré duality for the Chow ring is shellable in the class of div-faithful unimodular tropical fans.

For the algebraic geometric terminology *normal*, *irreducible*, *principal*, *div-faithful* for tropical fans, we refer to Sections 3 and 4.

Most notably, we prove the following result.

THEOREM 1.9. *Tropical smoothness is shellable.*

The proof of this theorem is based on results we prove on cohomology groups of tropical modifications, which we hope could be of independent interest, and which we obtain as a second application of the tropical Deligne resolution theorem.

We will prove in [AP20b] the following theorem which provides a generalization of the main result of Adiprasito, Huh, and Katz [AHK18] and its refinement for generalized Bergman fans, proved independently in [ADH20] by Ardila, Denham, and Huh, and in an earlier version of our work [AP20b]. (Further related results on geometry of matroids and their Bergman fans can be found in [BHM⁺20a, BHM⁺20b, BES19, BEST21, Eur20, DR21, Ard18, Bak18, Cha18].)

THEOREM 1.10. *The fact to verify the Hard Lefschetz property and the Hodge-Riemann relations for the Chow ring is shellable for quasi-projective unimodular fans.*

This local result furthermore leads to the development of Hodge theory for smooth projective tropical varieties, the account of which can be found in our work [AP20b].

1.5. Reformulation of the tropical smoothness. After finishing the writing of this paper, we learned from Edvard Aksen that in his forthcoming paper [Aks21] he proves the following theorem.

THEOREM 1.11. *Let Σ be a tropical fan of dimension $n \geq 2$. Suppose that for any face σ of Σ , the Borel-Moore homology groups $H_{a,b}^{\text{BM}}(\Sigma^\sigma, \mathbb{Q})$ are vanishing for all pairs a, b with $b \neq |\sigma|$.*

Then Σ satisfies the Poincaré duality if each of the star-fans Σ^σ for $\sigma \neq \underline{0}$ satisfies the Poincaré duality.

From the above theorem, proceeding by induction, and working with rational coefficients (instead of integral), one can deduce the following reformulation of the smoothness.

THEOREM 1.12. *A tropical fan Σ is smooth if and only if it is smooth in codimension one and the vanishing property $H_{a,b}^{\text{BM}}(\Sigma^\sigma, \mathbb{Q}) = 0$ holds for any face σ of Σ and any pair of integers a, b with $b \neq |\sigma|$.*

1.6. Organization of the paper. In Section 2 we provide necessary background in polyhedral geometry, recall the definition of canonical compactifications and give the definitions of tropical homology and cohomology groups.

Tropical fans are introduced in Section 3. That section introduces the notions of normality, (local) irreducibility, and smoothness for tropical fans and discuss basic properties enjoyed by smooth tropical fans.

Divisors on tropical fans and their characteristics are studied in Section 4. In that section we introduce the class of principal and div-faithful tropical fans and show that smooth tropical fans are both principal and div-faithful.

In Section 5, we recall the definition of tropical modification along a divisor on tropical fans and introduce the above mentioned notion of shellability for tropical fans. Basic properties of shellability are studied in this section.

In Section 6 we define the cycle class map from the Chow groups of a tropical fan to the tropical homology groups of the canonical compactification, and show the compatibility of tropical modifications with the cycle class map. Moreover, we show the invariance of the Chow ring with respect to tropical modifications in the class of div-faithful tropical fans. We furthermore prove the shellability of principality and div-faithfulness, and use these results to show the property for the Chow ring of a tropical fan to satisfy the Poincaré duality is shellable in the class of unimodular div-faithful tropical fans.

In Section 7, we prove the Hodge isomorphism theorem for saturated unimodular fans, and derive the equivalent formulation of smoothness stated in Theorem 1.5.

Tropical Deligne resolution for smooth tropical fans is proved in Section 8.

The generalization of the theorem of Feichtner and Yuzvinsky on cohomology rings of tropical compactifications of complements of hyperplane arrangement is presented in Section 9.

Finally, in Section 10 we prove Theorem 1.9 on shellability of tropical smoothness. The technical part is to show that smoothness is preserved by tropical modifications along smooth divisors, which we do by using the tropical Deligne resolution.

1.7. Basic notations. The set of natural numbers is denoted by $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. For any natural number n , we denote by $[n]$ the set $\{1, \dots, n\}$. For a set E , a subset $A \subseteq E$ and an element $a \in E$, if $a \in A$, we denote by $A - a$ the set $A \setminus \{a\}$; if $a \notin A$, we denote by $A + a$ the set $A \cup \{a\}$.

The set of non-negative real numbers is denoted by \mathbb{R}_+ .

We use basic results and constructions in multilinear algebra. In particular, for a lattice N , we view its dual $M = N^*$ as (linear) forms on N and refer to elements of the exterior algebras $\bigwedge^\bullet N$ and $\bigwedge^\bullet M$ as multivectors and multiforms, respectively. If $\ell \in M$ is a linear map on N and if $\mathbf{v} \in \bigwedge^p N$ is a multivector, we denote by $\iota_\ell(\mathbf{v}) \in \bigwedge^{p-1} N$ the classical contraction of \mathbf{v} by ℓ . For $v_1, \dots, v_p \in N$ and $\mathbf{v} = v_1 \wedge \dots \wedge v_p$, this is given by

$$\iota_\ell(v_1 \wedge \dots \wedge v_p) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \ell(v_i) v_1 \wedge \dots \wedge \widehat{v}_i \wedge \dots \wedge v_p \in \bigwedge^{p-1} N,$$

where the notation \widehat{v}_i indicates, as usual, that the factor v_i is removed from the wedge product. We extend this definition to k -forms, for any $k \in \mathbb{N}$, by setting, recursively, $\iota_{\ell \wedge \alpha} := \iota_\alpha \circ \iota_\ell$ for any $\alpha \in \bigwedge^k M$ and $\ell \in M$.

Given a poset $(P, <)$ and a functor ϕ from P to a category \mathcal{C} , if ϕ is covariant (resp. contravariant), then for a pair of elements $\tau < \sigma$ in P , we denote by $\phi_{\tau < \sigma}$ (resp. $\phi_{\sigma > \tau}$), the corresponding map $\phi(\tau) \rightarrow \phi(\sigma)$ (resp. $\phi(\sigma) \rightarrow \phi(\tau)$) in \mathcal{C} , the idea being that in the subscript of the map ϕ_{\bullet} representing the arrow in \mathcal{C} , the first item refers to the source and the second to the target. This convention will be in particular applied to the poset of faces in a polyhedral complex.

In this article, unless otherwise stated, we will work with homology and cohomology with integral coefficients.

2. Preliminaries

The aim of this section is to introduce basic notations and definitions which will be used all through the paper.

Throughout, N will be a free \mathbb{Z} -module of finite rank and $M = N^* = \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$ will be the dual of N . We denote by $N_{\mathbb{R}}$ and $M_{\mathbb{R}}$ the corresponding real vector spaces, so we have $M_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}}^*$. For a rational polyhedral cone σ in $N_{\mathbb{R}}$, we use the notation $N_{\sigma, \mathbb{R}}$ to denote the real vector subspace of $N_{\mathbb{R}}$ generated by elements of σ and set $N_{\mathbb{R}}^{\sigma} := N_{\mathbb{R}} / N_{\sigma, \mathbb{R}}$. Since σ is rational, we get natural lattices N^{σ} and N_{σ} in $N_{\mathbb{R}}^{\sigma}$ and $N_{\sigma, \mathbb{R}}$, respectively, which are both of full rank.

For the ease of reading, we adopt the following convention. We use σ (or any other face of Σ) as a superscript where referring to the quotient of some space by $N_{\sigma, \mathbb{R}}$ or to the elements related to this quotient. In contrast, we use σ as a subscript for subspaces of $N_{\sigma, \mathbb{R}}$ or for elements associated to these subspaces.

We denote by $\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ the extended real line with the topology induced by that of \mathbb{R} and a basis of open neighborhoods of infinity given by intervals $(a, \infty]$ for $a \in \mathbb{R}$. Extending the addition of \mathbb{R} to \mathbb{T} in a natural way, by setting $\infty + a = \infty$ for all $a \in \mathbb{T}$, gives \mathbb{T} the structure of a topological monoid called the monoid of *tropical numbers*. We denote by $\mathbb{T}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ the submonoid of non-negative tropical numbers with the induced topology. Both monoids admit a natural scalar multiplication by non-negative real numbers (setting $0 \cdot \infty = 0$). Moreover, the multiplication by any factor is continuous. As such, \mathbb{T} and \mathbb{T}_+ can be seen as modules over the semiring \mathbb{R}_+ . Recall that modules over semirings are quite similar to classical modules over rings except that, instead of being abelian groups, they are commutative monoids. Another important collection of examples of topological modules over \mathbb{R}_+ are the cones. We can naturally define the tensor product of two modules over \mathbb{R}_+ .

2.1. Fans. Let Σ be a fan of dimension d in $N_{\mathbb{R}}$. The *dimension* of a cone σ in Σ is denoted by $|\sigma|$. The set of k -dimensional cones of Σ is denoted by Σ_k , and elements of Σ_1 are called *rays*. We denote by $\underline{0}$ the cone $\{0\}$. Any k -dimensional cone σ in Σ is determined by its set of rays in Σ_1 . The *support* of Σ denoted $|\Sigma|$ is the closed subset of $N_{\mathbb{R}}$ obtained by taking the union of the cones in Σ . A *facet* of Σ is a cone which is maximal for the inclusion. Σ is *pure dimensional* if all its facets have the same dimension. The *k -skeleton* of Σ is by definition the subfan of Σ consisting of all the cones of dimension at most k , and we denote it by $\Sigma_{\leq k}$.

Let Σ be a fan in $N_{\mathbb{R}}$. The set of *linear functions on Σ* is defined as the restriction to $|\Sigma|$ of linear functions on $N_{\mathbb{R}}$; such a linear function is defined by an element of $M_{\mathbb{R}}$. In the case Σ is rational, a linear function on Σ is called *integral* if it is defined by an element of M .

Let $f: |\Sigma| \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function. We say that f is *conewise linear on Σ* if on each face σ of Σ , the restriction $f|_{\sigma}$ of f to σ is linear. In such a case, we simply write $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, and denote by f_{σ} the linear form on $N_{\sigma, \mathbb{R}}$ which coincides with $f|_{\sigma}$ on σ . If the linear forms f_{σ} are all integral, then we say f is *conewise integral linear*.

A conewise linear function $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ is called *convex*, resp. *strictly convex*, if for each face σ of Σ , there exists a linear function ℓ on Σ such that $f - \ell$ vanishes on σ and is non-negative, resp. strictly positive, on $U \setminus \sigma$ for an open neighborhood U of the relative interior of σ in $|\Sigma|$.

A fan Σ is called *quasi-projective* if it admits a strictly convex conewise linear function. A *projective* fan is a fan which is both projective and complete. In the case Σ is rational, it is quasi-projective, resp. projective, if and only if the toric variety \mathbb{P}_Σ is quasi-projective, resp. projective.

A rational fan Σ is called *saturated at σ* for $\sigma \in \Sigma$ if the set of integral linear functions on Σ^σ coincides with the set of linear functions which are conewise integral. This amounts in asking the lattice generated by $\Sigma^\sigma \cap N^\sigma$ to be saturated in N^σ . The fan Σ is called *saturated* if it is saturated at all its faces.

We recall that in this paper the star fan Σ^σ refers to the fan in $N_\mathbb{R}/N_{\sigma,\mathbb{R}}$ induced by the cones η in Σ which contain σ as a face. This is consistent with the terminology used in [AHK18] and differs from the one in [Kar04, BBFK02] where this is called *transversal fan*.

For any fan Σ of pure dimension d , we define the *connectivity-through-codimension-one graph* of Σ as follows. This is the graph $G = (\Sigma_d, E)$ whose vertex set is equal to the set of facets Σ_d and has an edge connecting any pair of facets σ and η which share a codimension one face in Σ . We say Σ is *connected through codimension one* if the connectivity-through-codimension-one graph of Σ is connected.

Convention. In this paper we work with fans modulo isomorphisms. For a rational fan Σ , we denote by N_Σ the restriction of the ambient lattice to the subspace spanned by Σ . Two rational fans Σ and Σ' are called *isomorphic* if there exists an integral linear isomorphism $\phi: N_\Sigma \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} N_{\Sigma'} \otimes \mathbb{R}$ inducing an isomorphism between N_Σ and $N_{\Sigma'}$ such that for each face $\sigma \in \Sigma$, $\phi(\sigma)$ is a face of Σ' and for each face $\sigma' \in \Sigma'$, $\phi^{-1}(\sigma')$ is a face of Σ .

Any rational fan is isomorphic to a fan in the space \mathbb{R}^n endowed with the lattice \mathbb{Z}^n for a sufficiently big n . Hence we can talk about the set of isomorphism classes of rational fans. In practice, by an abuse of the language, we will make no difference between an isomorphism class of rational fans and one of its representative.

2.2. Canonical compactification. In this section, we describe canonical compactifications of fans, and describe their combinatorics. In the case the fan is rational, the compactification is the extended tropicalization of the corresponding toric variety. A more detailed presentation of the constructions is given in [AP20b, OR11].

Let Σ be a fan in $N_\mathbb{R}$. We do not need to suppose for now that Σ is rational.

For any cone σ , denote by σ^\vee the *dual cone* defined by

$$\sigma^\vee := \left\{ m \in M_\mathbb{R} \mid \langle m, a \rangle \geq 0 \text{ for all } a \in \sigma \right\}.$$

The *canonical compactification* $\bar{\sigma}$ of σ (called sometimes the *extended cone* of σ) is defined by

$$\bar{\sigma} := \sigma \otimes_{\mathbb{R}_+} \mathbb{T}_+.$$

Alternatively, $\bar{\sigma}$ is given by $\text{Hom}_{\mathbb{R}_+}(\sigma^\vee, \mathbb{T}_+)$, i.e., by the set of morphisms $\sigma^\vee \rightarrow \mathbb{T}_+$ in the category of \mathbb{R}_+ -modules. In both definitions, we can naturally identify σ with the corresponding subset of $\bar{\sigma}$.

The topology on $\bar{\sigma}$ is the natural one, i.e., the finest one such that the projections

$$\begin{aligned} (\sigma \times \mathbb{T}_+)^k &\longrightarrow \bar{\sigma} \\ (x_i, a_i)_{1 \leq i \leq k} &\longmapsto \sum_i x_i \otimes a_i, \end{aligned}$$

for $k \in \mathbb{N}$, are continuous. This makes $\bar{\sigma}$ a compact topological space whose induced topology on σ coincides with the usual one.

There is a special point ∞_σ in $\bar{\sigma}$ defined by $x \otimes \infty$ for any x in the relative interior of σ (equivalently by the map $\sigma^\vee \rightarrow \mathbb{T}$ which is zero on σ^\perp and ∞ elsewhere). The definition does not depend on the chosen x . Note that for the cone $\underline{0}$, we have $\infty_{\underline{0}} = 0$.

For an inclusion of cones $\tau \subseteq \sigma$, we get an inclusion map $\bar{\tau} \subseteq \bar{\sigma}$. This identifies $\bar{\tau}$ as the topological closure of τ in $\bar{\sigma}$.

The *canonical compactification* $\bar{\Sigma}$ is defined as the union of extended cones $\bar{\sigma}$, $\sigma \in \Sigma$, where for an inclusion of cones $\tau \subseteq \sigma$ in Σ , we identify $\bar{\tau}$ with the corresponding subspace of $\bar{\sigma}$. The topology of $\bar{\Sigma}$ is the induced quotient topology. Note that each extended cone $\bar{\sigma}$ naturally embeds as a subspace of $\bar{\Sigma}$.

2.3. Partial compactification \mathbb{TP}_Σ of $N_\mathbb{R}$. The canonical compactification $\bar{\Sigma}$ of a fan Σ naturally lives in a partial compactification \mathbb{TP}_Σ of $N_\mathbb{R}$ defined by the fan Σ . Moreover, this partial compactification allows to enrich the conical stratification of $\bar{\Sigma}$ that we will define in Section 2.4 into an extended polyhedral structure which will be described in Section 2.7.

We define \mathbb{TP}_Σ as follows. For any cone σ in Σ , we consider the space $\tilde{\sigma}$ defined as the pushout $N_\mathbb{R} +_\sigma \bar{\sigma}$ in the category of \mathbb{R}_+ -modules, for the inclusions $N_\mathbb{R} \leftarrow \sigma \hookrightarrow \bar{\sigma}$, that we endow with the finest topology for which the sum $N_\mathbb{R} \times \bar{\sigma} \rightarrow \tilde{\sigma}$ becomes continuous. Alternatively, one can define $\tilde{\sigma}$ as $\text{Hom}_{\mathbb{R}_+}(\sigma^\vee, \mathbb{T})$. Notice that $\text{Hom}_{\mathbb{R}_+}(\sigma^\vee, \mathbb{R}) \simeq N_\mathbb{R}$. We set $N_{\infty, \mathbb{R}}^\sigma := N_\mathbb{R} + \infty_\sigma \subseteq \tilde{\sigma}$. Note that with these notations we have $N_{\infty, \mathbb{R}}^{\underline{0}} = N_\mathbb{R}$.

The space $\tilde{\sigma}$ is naturally stratified into a disjoint union of subspaces $N_{\infty, \mathbb{R}}^\tau$ each isomorphic to $N_\mathbb{R}^\tau$ for τ running over faces of σ . Moreover, the inclusions $\tilde{\tau} \subseteq \tilde{\sigma}$ for pairs of elements $\tau \subseteq \sigma$ in Σ allow to glue these spaces and to define the space \mathbb{TP}_Σ .

The partial compactification \mathbb{TP}_Σ of $N_\mathbb{R}$ is naturally stratified as the disjoint union of $N_{\infty, \mathbb{R}}^\sigma \simeq N_\mathbb{R}^\sigma$ for $\sigma \in \Sigma$.

We have a natural inclusion of $\bar{\sigma}$ into $\tilde{\sigma}$. We thus get an embedding $\bar{\Sigma} \subseteq \mathbb{TP}_\Sigma$ which identifies $\bar{\Sigma}$ as the closure of Σ in \mathbb{TP}_Σ .

2.4. Conical stratification of $\bar{\Sigma}$. The canonical compactification admits a natural stratification into cones that we will enrich later into an extended polyhedral structure.

Consider a cone $\sigma \in \Sigma$ and a face τ of σ . Let C_σ^τ be the subset of $\bar{\sigma}$ defined by

$$C_\sigma^\tau := \{\infty_\tau + x \mid x \in \sigma\}.$$

Under the natural isomorphism $N_{\infty, \mathbb{R}}^\tau \simeq N_\mathbb{R}^\tau$, one can see that C_σ^τ becomes isomorphic to the projection of the cone σ into the linear space $N_{\infty, \mathbb{R}}^\tau \simeq N_\mathbb{R}^\tau$; the isomorphism is given by adding ∞_τ . We denote by $\overset{\circ}{C}_\sigma^\tau$ the relative interior of C_σ^τ . The following proposition gives a precise description of how these different sets are positioned together in the canonical compactification.

PROPOSITION 2.1. *Let Σ be a fan in $N_\mathbb{R}$.*

- *The canonical compactification $\bar{\Sigma}$ is a disjoint union of (open) cones $\overset{\circ}{C}_\sigma^\tau$ for pairs (τ, σ) of elements of Σ with $\tau \subseteq \sigma$. The linear span of the cone C_σ^τ is the real vector space $N_{\infty, \sigma, \mathbb{R}}^\tau$, i.e., the projection of $N_{\sigma, \mathbb{R}}$ into $N_{\infty, \mathbb{R}}^\tau$.*
- *For any pair (τ, σ) , the closure \overline{C}_σ^τ of C_σ^τ in $\bar{\Sigma}$ is the union of all the (open) cones $\overset{\circ}{C}_{\sigma'}^{\tau'}$ with $\tau \subseteq \tau' \subseteq \sigma' \subseteq \sigma$.*

Note that in order to lighten the notations, we write \overline{C}_σ^τ for the compactification of C_σ^τ instead of the more correct form $\overline{\overline{C}_\sigma^\tau}$. We use this kind of simplifications all through the paper.

PROOF. The proof is a consequence of the tropical orbit-stratum correspondence theorem in the tropical toric variety \mathbb{TP}_Σ and the observation we made previously that $\bar{\Sigma}$ is the closure of Σ in \mathbb{TP}_Σ . We omit the details. \square

The cones $\overset{\circ}{C}_\sigma^\tau$ form the *open strata* of what we call the *conical stratification* of $\overline{\Sigma}$. We refer to the topological closures \overline{C}_σ^τ as the *closed strata* of $\overline{\Sigma}$.

In the case Σ is simplicial, closed stratum of dimension k are isomorphic to the hypercube \mathbb{T}_+^k . In this case, we prefer to use the notation \square_σ^τ instead of \overline{C}_σ^τ .

2.5. Stratification of $\overline{\Sigma}$ into fans. There is a second stratification of $\overline{\Sigma}$ into fans that we describe now.

DEFINITION 2.2 (Fans at infinity). Let τ be a cone in Σ . The *fan at infinity based at ∞_τ* denoted by Σ_∞^τ is the fan in $N_{\infty, \mathbb{R}}^\tau$ which consists of all the cones C_σ^τ for σ in Σ with $\sigma \supseteq \tau$. Note that we have $\Sigma_\infty^0 = \Sigma$, and more generally, Σ_∞^τ is isomorphic to the star fan Σ^τ of τ . \diamond

From the above descriptions, we get the following proposition.

PROPOSITION 2.3. *The collection of fans at infinity Σ_∞^τ , $\tau \in \Sigma$, provides a partition of $\overline{\Sigma}$ into locally closed subspaces. The closure of Σ_∞^τ in $\overline{\Sigma}$ is naturally isomorphic to the canonical compactification $\overline{\Sigma}^\tau$ of the star fan Σ^τ .*

PROOF. The proof follows directly from Proposition 2.1. \square

2.6. Combinatorics of the conical and fan stratifications of $\overline{\Sigma}$. For a fan Σ , we denote by \mathcal{L}_Σ the face poset of Σ in which the partial order $<$ is given by the inclusion of faces: we write $\tau < \sigma$ if $\tau \subseteq \sigma$. Set $\mathbf{0} := \emptyset$. The *extended poset* $\widehat{\mathcal{L}}_\Sigma$ is defined as $\widehat{\mathcal{L}}_\Sigma := \mathcal{L}_\Sigma \sqcup \{\mathbf{1}\}$ obtained by adding an element $\mathbf{1}$ and extending the partial order to $\widehat{\mathcal{L}}_\Sigma$ by declaring $\sigma < \mathbf{1}$ for all $\sigma \in \mathcal{L}_\Sigma$.

The *join* and *meet* operations \vee and \wedge on \mathcal{L}_Σ are defined as follows. For two cones σ and τ of Σ , we set $\sigma \wedge \tau := \sigma \cap \tau$. To define the operation \vee , note that the set of cones in Σ which contain both σ and τ is either empty or has a minimal element $\eta \in \Sigma$. In the former case, we set $\sigma \vee \tau := \mathbf{1}$, and in the latter case, $\sigma \vee \tau := \eta$. The two operations are extended to the augmented poset $\widehat{\mathcal{L}}_\Sigma$ by $\sigma \wedge \mathbf{1} = \sigma$ and $\sigma \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}$ for any cone σ of Σ .

Notations. The above discussion leads to the following notations. Let τ and σ be a pair of faces in Σ . We say σ *covers* τ and write $\tau \prec \sigma$ if $\tau < \sigma$ and $|\tau| = |\sigma| - 1$. A family of faces $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ are called *comparable* if $\sigma_1 \vee \dots \vee \sigma_k \neq \mathbf{1}$. Moreover, we use the notation $\sigma \sim \sigma'$ for two faces σ and σ' if $\sigma \wedge \sigma' = \mathbf{0}$ and $\sigma \vee \sigma' \neq \mathbf{1}$.

The following proposition is straightforward.

PROPOSITION 2.4. *The poset $(\widehat{\mathcal{L}}_\Sigma, <)$ with the operations \wedge and \vee , and minimal and maximal elements $\mathbf{0}$ and $\mathbf{1}$, respectively, is a lattice.*

The term lattice in the proposition is understood in the sense of order theory [MMT18].

For a poset (\mathcal{L}, \leq) , and two elements a, b in \mathcal{L} , the *(closed) interval* $[a, b]$ is the set of all elements c with $a \leq c \leq b$. By an abuse of the notation, we denote the empty interval by $\mathbf{0}$. Note in particular that the interval $[\mathbf{0}, \mathbf{0}] = \{\mathbf{0}\}$ is different from $\mathbf{0}$. We denote by $\mathcal{I}(\mathcal{L})$ the *poset of intervals* of \mathcal{L} ordered by inclusion.

For a lattice $\widehat{\mathcal{L}}$, the poset of intervals $\mathcal{I}(\widehat{\mathcal{L}})$ becomes a lattice for the join and meet operations \vee and \wedge on the intervals defined by

- $[a_1, b_1] \wedge [a_2, b_2] := [a_1 \vee a_2, b_1 \wedge b_2]$, and
- $[a_1, b_1] \vee [a_2, b_2] := [a_1 \wedge a_2, b_1 \vee b_2]$.

We have the following characterization of the combinatorics of open and closed strata in the above two stratifications of the canonical compactification of a fan.

THEOREM 2.5. *Let Σ be a fan in $N_{\mathbb{R}}$ and consider its canonical compactification $\overline{\Sigma}$.*

- (1) *There is a bijection between the open strata in the conical stratification of $\overline{\Sigma}$ and the non-empty elements of the interval lattice $\mathcal{I}(\mathcal{L}_\Sigma)$. Under the above bijection, the poset of closed strata of $\overline{\Sigma}$ (for the partial order given by inclusion) becomes isomorphic to the poset $\mathcal{I}(\mathcal{L}_\Sigma) - \mathbf{0}$ of non-empty intervals in the lattice \mathcal{L}_Σ .*
- (2) *Consider now the fan stratification of $\overline{\Sigma}$. The induced poset by closed strata $\overline{\Sigma}^\tau$ in this stratification is isomorphic to the opposite poset of \mathcal{L}_Σ .*

PROOF. Both the claims can be proved by straightforward verification. \square

QUESTION 2.6. Characterize the interval lattices associate to the face lattices of polyhedra. In particular, is it true that the interval lattice of the face lattice of a polyhedron is itself the face lattice of a polyhedron? \diamond

2.7. Extended polyhedral structure. The closed strata \overline{C}_σ^τ , for $\tau < \sigma$ a pair of faces of Σ , endow $\overline{\Sigma}$ with an *extended polyhedral structure*. We give a brief description of these structures here and refer to [JSS19, MZ14, IKMZ19, ACP15, AP20b] for more details.

Extended polyhedral structures in [JSS19, MZ14] are called polyhedral spaces with a face structure. In our context, the *faces* of $\overline{\Sigma}$ are the closed strata in the conical stratification we defined above. These faces verify the same axioms as those of polyhedral complexes with the difference that each face is now an *extended polyhedron*. An extended polyhedron is the closure of a polyhedron in the partial compactification of the ambient vector space induced by this polyhedron. For instance, using the notations of Section 2.3, \overline{C}_σ^τ is the closure of the polyhedron $C_\sigma^\tau \subseteq N_{\infty, \mathbb{R}}^\tau$ in the associated partial compactification \tilde{C}_σ^τ of $N_{\infty, \mathbb{R}}^\tau$, where the cone C_σ^τ is seen as a face of $\Sigma_\infty^\tau \simeq \Sigma^\tau$.

In the rest of this article, all canonical compactifications $\overline{\Sigma}$ are considered as extended polyhedral structures. We extend to $\overline{\Sigma}$ the notations introduced for simplicial complexes. In particular, $\delta \in \overline{\Sigma}$ means that δ is a face of $\overline{\Sigma}$, $|\overline{\Sigma}|$ denotes the support of $\overline{\Sigma}$, and $\overline{\Sigma}_k$ denotes the set of faces of dimension k in $\overline{\Sigma}$.

In the setting considered in this paper, the *sedentarity* of a face $\delta = \overline{C}_\sigma^\tau$ denoted by $\text{sed}(\delta)$ is by definition the element τ of Σ , and refers to the point ∞_τ at which the stratum C_σ^τ is based. By an abuse of the terminology, remembering only the dimension of $\text{sed}(\delta)$, we might say sometimes that δ has sedentarity k where k is the dimension of τ .

2.8. Canonical elements, unit normal vectors and orientations. Let now Σ be a rational fan of pure dimension d . Let σ be a cone of Σ and let τ be a face of codimension one in σ . Then, $N_{\tau, \mathbb{R}}$ cuts $N_{\sigma, \mathbb{R}}$ into two closed half-spaces only one of which contains σ . Denote this half-space by H_σ . By a *unit normal vector to τ in σ* we mean any vector v of $N_\sigma \cap H_\sigma$ such that $N_\tau + \mathbb{Z}v = N_\sigma$. We usually denote such an element by $\mathbf{n}_{\sigma/\tau}$ and note that it induces a well-defined vector in $N_\sigma^\tau = N_\sigma/N_\tau$ that we denote by \mathbf{e}_σ^τ . We naturally extend the definition to similar pair of faces in $\overline{\Sigma}$ having the same sedentarity. In the case σ is a ray (and τ is a point of the same sedentarity as σ), we also use the notation \mathbf{e}_σ instead of $\mathbf{n}_{\sigma/\tau}$.

On each face σ of Σ , we choose a generator of $\bigwedge^{|\sigma|} N_\sigma$ denoted by ν_σ . We call this element the *canonical multivector of σ* . The dual notion in $\bigwedge^{|\sigma|} N_\sigma^*$ is denoted ω_σ and is called the *canonical form on σ* . In the rest of the article, we assume that $\nu_\emptyset = 1$ and that $\nu_\rho = \mathbf{e}_\rho$ for any ray ρ .

From the above discussion, we obtain in particular *the canonical element* of Σ that we denote by ν_Σ as

$$\nu_\Sigma := (\nu_\eta)_{\eta \in \Sigma_d} \in \bigoplus_{\eta \in \Sigma_d} \bigwedge^d N_\eta.$$

As we will see later, in the case of tropical fans, this defines an element of the Borel-Moore homology $H_{d,d}^{\text{BM}}(\Sigma)$ (defined in Section 2.9 below) that we call the *fundamental class of Σ* .

We extend the above definitions to $\bar{\Sigma}$ by choosing an element $\nu_\sigma^\tau \in \bigwedge^{|\sigma|-|\tau|} N_\sigma^\tau$ for each polyhedron \bar{C}_σ^τ (as we see below, for simplicial Σ , there is a natural choice).

These choices define an *orientation* on $\bar{\Sigma}$. In particular, to any pair of closed faces $\gamma \prec \delta$ of $\bar{\Sigma}$, we associate a *sign* defined as follows. If both faces have the same sedentarity, then $\text{sign}(\gamma, \delta)$ is the sign of $\omega_\delta(\mathbf{n}_{\delta/\gamma} \wedge \nu_\gamma)$. Otherwise, there exists a pair of cones $\tau' \prec \tau$ and a cone σ in Σ such that $\gamma = \bar{C}_\sigma^{\tau'}$ and $\delta = \bar{C}_\sigma^\tau$. In this case, $\text{sign}(\gamma, \delta)$ is the sign of $-\omega_\delta(\mathbf{e}_\tau^{\tau'} \wedge \pi_{\tau' \prec \tau}^*(\nu_\gamma))$ where $\pi_{\tau' \prec \tau}: N_\infty^{\tau'} \rightarrow N_\infty^\tau$ is the natural projection and $\mathbf{e}_\tau^{\tau'}$ refers, as above, to the primitive vector of the ray $C_\tau^{\tau'}$ in $C_\sigma^{\tau'}$.

In the case Σ is simplicial, there is a natural choice for extending the orientation of Σ to $\bar{\Sigma}$. If $\tau < \sigma$ is a pair of cones, there exists a unique minimal τ' such that $\sigma = \tau \vee \tau'$. Then we set ν_σ^τ to be the image of $\nu_{\tau'}$ via the projection $N_\mathbb{R} \rightarrow N_{\infty, \mathbb{R}}^\tau \simeq N_\mathbb{R}^\tau$.

2.9. Tropical homology and cohomology groups. Let Σ be a rational fan. The extended polyhedral structure on $\bar{\Sigma}$ leads to the definition of tropical homology groups and cohomology groups introduced in [IKMZ19] and further studied in [JSS19, MZ14, JRS18, GS19b, GS19a, AB14, ARS19, Aks19, AP20b, Mik20a, AP20c].

We recall the definition of the multi-tangent and multi-cotangent (integral) spaces \mathbf{F}_p and \mathbf{F}^p for $\bar{\Sigma}$ for the face structure given by the closed strata \bar{C}_σ^τ in the conical stratification of $\bar{\Sigma}$, for pairs of faces $\tau < \sigma$ in Σ , and give a combinatorial complex which calculates the tropical homology and cohomology groups of $\bar{\Sigma}$. The definitions are naturally adapted to faces in Σ .

For any face $\delta = \bar{C}_\sigma^\tau$, we set $N_\delta = N_{\infty, \sigma}^\tau \simeq N_{\sigma, \mathbb{R}}^\tau / N_{\tau, \mathbb{R}}^\tau$. For any non-negative integer p , the p -th multi-tangent and the p -th multicotangent space of $\bar{\Sigma}$ at δ denoted by $\mathbf{F}_p(\delta)$ and $\mathbf{F}^p(\delta)$, respectively, are given by

$$\mathbf{F}_p(\delta) := \sum_{\substack{\eta > \delta \\ \text{sed}(\eta) = \text{sed}(\delta)}} \bigwedge^p N_\eta \subseteq \bigwedge^p N^\tau, \quad \text{and} \quad \mathbf{F}^p(\delta) := \mathbf{F}_p(\delta)^*.$$

For an inclusion of faces $\gamma < \delta$ in $\bar{\Sigma}$, we get maps $i_{\delta > \gamma}: \mathbf{F}_p(\delta) \rightarrow \mathbf{F}_p(\gamma)$ and $i_{\gamma < \delta}^*: \mathbf{F}^p(\gamma) \rightarrow \mathbf{F}^p(\delta)$ defined as follows. If γ and δ have the same sedentarity, the map $i_{\delta > \gamma}$ is just an inclusion. If $\gamma = \bar{C}_\sigma^{\tau'}$ and $\delta = \bar{C}_\sigma^\tau$ with $\tau < \tau' < \sigma$, then the map $i_{\delta > \gamma}$ is induced by the projection $N_{\infty, \mathbb{R}}^\tau \rightarrow N_{\infty, \mathbb{R}}^{\tau'}$. In the general case, $i_{\delta > \gamma}$ is given by the composition of the projection and the inclusion; the map $i_{\gamma < \delta}^*$ is the dual of $i_{\delta > \gamma}$.

Let X be a fan or its compactification. For a pair of non-negative integers p, q , define

$$C_{p,q}(X) := \bigoplus_{\substack{\delta \in X \\ |\delta| = q \\ \delta \text{ compact}}} \mathbf{F}_p(\delta)$$

and consider the corresponding complexes

$$C_{p,\bullet}: \quad \dots \longrightarrow C_{p,q}(X) \xrightarrow{\partial_q} C_{p,q-1}(X) \xrightarrow{\partial_{q-1}} C_{p,q-2}(X) \longrightarrow \dots$$

where the differential is given by the sum of maps $\text{sign}(\gamma, \delta) \cdot i_{\delta > \gamma}$ with the signs corresponding to a chosen orientation on X as explained in Section 2.8.

The *tropical homology* of X is defined by

$$H_{p,q}(X) := H_q(C_{p,\bullet}).$$

Similarly, we have a cochain complex

$$C^{p,\bullet}: \quad \dots \longrightarrow C^{p,q-2}(X) \xrightarrow{d^{q-2}} C^{p,q-1}(X) \xrightarrow{d^{q-1}} C^{p,q}(X) \longrightarrow \dots$$

where

$$C^{p,q}(X) := C_{p,q}(X)^* \simeq \bigoplus_{\substack{\delta \in X \\ |\delta|=q \\ \delta \text{ compact}}} \mathbf{F}^p(\delta)$$

and the *tropical cohomology* of X is defined by

$$H^{p,q}(X) := H^q(C^{p,\bullet}).$$

We can also define the *compact-dual versions* of tropical homology and cohomology by allowing non-compact faces. These are called Borel-Moore homology and cohomology with compact support, and are defined as follows. We define

$$C_{p,q}^{\text{BM}}(X) := \bigoplus_{\substack{\delta \in X \\ |\delta|=q}} \mathbf{F}_p(\delta) \quad \text{and} \quad C_c^{p,q}(X) := \bigoplus_{\substack{\delta \in X \\ |\delta|=q}} \mathbf{F}^p(\bar{\delta}).$$

We get the corresponding (co)chain complexes $C_{p,\bullet}^{\text{BM}}$ and $C_c^{p,\bullet}$, and the *Borel-Moore tropical homology* and the *tropical cohomology with compact support* are respectively

$$H_{p,q}^{\text{BM}}(X) := H_q(C_{p,\bullet}^{\text{BM}}(X)) \quad \text{and} \quad H_c^{p,q}(X) := H^q(C_c^{p,\bullet}(X)).$$

If X is compact, then both notions of homology and both notions of cohomology coincide.

Here, we defined the cellular versions of tropical homology and cohomology. As in the classical setting, there exist other ways of computing the same groups: for instance using either of singular, cubical, or sheaf cohomologies. We note in particular that the homology and cohomology only depends on the support. Moreover, when it is more convenient, we sometimes use one of these alternative versions.

Homology and cohomology in this paper refer to the tropical ones, so we usually omit the mention of the word tropical.

3. Smoothness in tropical geometry

In this section we study a natural notion of smoothness in tropical geometry. As in differential topology, the smoothness is a local notion, and we consider therefore local charts for tropical varieties which are *supports of tropical fans*.

3.1. Balancing condition and tropical fans. We start by giving the definition of tropical fans and present some of their basic properties. More results related to algebraic and complex geometry can be found in [Mik06, Mik07, AR10, GKM09, KM09, Kat12, Bab14, BH17, Gro18] and [MS15, MR09, BIMS15].

A *tropical fan* Σ is a rational fan of pure dimension d , for a natural number $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, which in addition verifies the so-called *balancing condition*: namely, for any cone τ of dimension $d-1$ in Σ , we require

$$\sum_{\sigma \succ \tau} \mathbf{n}_{\sigma/\tau} \in N_\tau.$$

Equivalently, this means, for any τ of dimension $d-1$, we have

$$(3.1) \quad \sum_{\sigma \succ \tau} \mathbf{e}_\sigma^\tau = 0 \quad \text{in } N_\sigma^\tau.$$

If the above relation between the vectors $\mathbf{n}_{\sigma/\tau}$ is the only one up to multiplication by a scalar, that is, if for any $\tau \in \Sigma_{d-1}$ and real numbers a_σ for $\sigma \succ \tau$, the relation

$$\sum_{\sigma \succ \tau} a_\sigma \mathbf{n}_{\sigma/\tau} \in N_\tau$$

implies that all the coefficients a_σ are equal, then we say that Σ is *tropically normal*, or simply *normal* if it is understood that Σ is a tropical fan, or that Σ is *smooth in codimension one*. This is equivalent to requiring the one-dimensional star fan Σ^τ to be a tropical line (i.e., its

rays be generated by independent unit vectors e_1, \dots, e_k and a last vector $e_0 = -e_1 - \dots - e_k$, for any codimension one face τ of Σ .

Under the *normality condition* for a tropical fan Σ , we also qualify the canonical compactification $\bar{\Sigma}$ as being *normal*.

REMARK 3.1 (Balancing condition and tropicalization). The balancing condition is extended naturally to weighted pure dimensional fans (or polyhedral complexes) where each facet is endowed with an (integral) number called *weight* of the facet. This is the point of view taken in [GKM09, AR10], for example, for defining tropical fans and studying their intersection theory. Weighted tropical fans arise naturally in connection with tropicalizations of subvarieties of algebraic tori. In this regard, tropical fans we consider in this paper, with weights all equal to one, are the abstract generalization of those which arise from *faithful tropicalizations*: roughly speaking, if the tropicalization of $X \subseteq T$, for an algebraic tori $T = \text{Spec}(\mathbb{k}[M])$, over a trivially valued field \mathbb{k} , is a tropical fan $\Sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ with all weights equal to one, then Σ naturally embeds in the Berkovich analytification X^{an} of X and forms a skeleton in X^{an} , see [GRW17, GRW16] for more precise discussion.

Some of the results of this article extend naturally to the more general setting of tropical fans in the presence of a nontrivial weight function. Since our primary purpose in this paper is to discuss the smoothness properties in tropical geometry, in which case all the weights should be equal to one, in order to simplify the presentation, we restrict ourselves to the *reduced* case meaning that we require all the weights to be equal to one on the ambient tropical fan. This being said, we note that even in this case, the weighted balancing condition appears naturally when we will talk later about divisors and Minkowski weights. \diamond

As a follow-up to the above remark we make the following definition.

DEFINITION 3.2 (Realizable tropical fan). A tropical fan Σ which arises as the tropicalization of a subvariety X of an algebraic torus $T = \text{Spec}(\mathbb{k}[M])$ over a trivially valued field \mathbb{k} is called *realizable over \mathbb{k}* . A tropical fan is called *realizable* if it can be realized over some field \mathbb{k} . \diamond

REMARK 3.3 (Balancing condition and smoothness). In continuation of the previous remark, we note that the balancing condition is a crucial ingredient for extracting a tropical notion of smoothness. In fact, it can be seen as a tropical analogue of orientability which allows to define a fundamental class for the fan. In the foundational works [CLD12, GK17, BH17, JSS19], this is used to establish a tropical analogue of the Stoke’s formula, ultimately leading to the Poincaré duality in [JSS19] under the extra condition for the tropical varieties in question to be *matroidal*. It plays a central role as well in almost all the results we prove in this paper. \diamond

3.1.1. *Localness of the balancing condition.* A property P on rational fans is called *local* or *stellar-stable* if for any fan Σ verifying P , all the star fans Σ^σ for $\sigma \in \Sigma$ also verify P .

A property P is called a *property of the support*, or we say *P only depends on the support*, if a rational fan Σ inside $N_{\mathbb{R}}$ verifies P if and only if any rational fan Σ' considered with a possibly different lattice N' such that $|\Sigma| = |\Sigma'|$ and $|\Sigma| \cap N = |\Sigma'| \cap N'$ verifies P .

We have the following proposition which summarizes basic properties of tropical fans.

PROPOSITION 3.4. — (Support property) *Both the balancing condition and the tropical normality are properties of the support.*

— (Localness of the balancing condition) *To be tropical, resp. tropically normal, is a local property.*

PROOF. The first part can be obtained by direct verification. The second part is obtained by identifying star fans of cones in a star fan Σ^η , for $\eta \in \Sigma$, as appropriate star fans in the original fan Σ . \square

3.1.2. *Stability under products.* We have the following basic result.

PROPOSITION 3.5. *The category of tropical fans and their supports is closed under products. The same holds for the category of normal tropical fans.*

PROOF. A codimension one cone in the product $\Sigma \times \Sigma'$ of two fans Σ and Σ' is of the form $\sigma \times \tau'$ or $\tau \times \sigma'$ for facets σ and σ' of Σ and Σ' , and codimension one faces τ and τ' of Σ and Σ' , respectively. It follows that the star fan of a codimension one face in the product fan can be identified with the star fan of a codimension one face in either Σ or Σ' , from which the result follows. \square

3.1.3. *The fundamental class of a tropical fan.* Recall from Section 2 that to a rational fan Σ of pure dimension d , we associate its canonical element ν_Σ

$$\nu_\Sigma = (\nu_\sigma)_{\sigma \in \Sigma_d} \in \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_d} \bigwedge^d N_\sigma.$$

Here, for each facet σ of Σ , ν_σ is the canonical multivector of σ which is a generator of $\bigwedge^{|\sigma|} N_\sigma = \mathbf{F}_{|\sigma|}(\sigma)$. We have the following well-known property, see for example [BH17, CLD12].

PROPOSITION 3.6. *The fan Σ is tropical if and only if ν_Σ is a cycle of $C_{d,d}^{\text{BM}}(\Sigma)$.*

In this case, by an abuse of the notation, we denote by ν_Σ the corresponding element in $H_{d,d}^{\text{BM}}(\Sigma)$ and call it the *fundamental class* of Σ .

3.1.4. *Tropical irreducibility.* We now present a tropical notion of *irreducibility* which as we show below will be directly related to (but slightly stronger than) the normality of tropical fans introduced in the previous section. This is a property which we will need to assume at some occasions in the paper.

DEFINITION 3.7 (Tropical irreducibility). A tropical fan Σ is called *irreducible at η* , for a cone $\eta \in \Sigma$, if the homology group $H_{d-|\eta|, d-|\eta|}^{\text{BM}}(\Sigma^\eta)$ is generated by the fundamental cycle ν_{Σ^η} . A tropical fan irreducible at $\underline{0}$ is simply called *irreducible*.

The fan Σ is called *locally irreducible* if it is irreducible at any cone $\eta \in \Sigma$. \diamond

PROPOSITION 3.8 (Localness of local irreducibility). *Being locally irreducible is a local property of tropical fans.*

PROOF. This is tautological from the definition. \square

The following theorem gives a link between normality and local irreducibility.

THEOREM 3.9 (Characterization of locally irreducible tropical fans). *A tropical fan Σ is locally irreducible if and only if it is normal and each star fan Σ^η , $\eta \in \Sigma$, is connected through codimension one.*

PROOF. Suppose Σ is locally irreducible. Consider a cone τ of codimension one in Σ . The star fan Σ^τ is an irreducible tropical fan of dimension one. Let ρ_1, \dots, ρ_k be the rays of Σ^τ . Then the balancing condition for Σ^τ implies that the vectors $\mathbf{e}_{\rho_1}, \dots, \mathbf{e}_{\rho_k}$ sum up to zero, and the local irreducibility implies that the canonical cycle ν_{Σ^τ} is a generator of $H_{1,1}^{\text{BM}}(\Sigma^\tau)$. For any relation in N^τ of the form

$$\sum_{j=1}^k a_j \mathbf{e}_{\rho_j} = 0$$

for scalars a_j , we get an element $\alpha \in H_{1,1}^{\text{BM}}(\Sigma^\tau)$. Since Σ^τ is irreducible, α is a multiple of ν_{Σ^τ} which implies that the scalars a_j are all equal. This proves that Σ is normal.

Consider now a cone $\eta \in \Sigma$. It remains to prove that Σ^η is connected through codimension one. Suppose this is not the case. Then we can find a partition of the facets of Σ^η into a

disjoint union $S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_l$, for some $l \geq 2$, so that S_j form the connected components of the connectivity-through-codimension-one graph of the facets of Σ^η . It follows that each element $\alpha_j := (\nu_\sigma)_{\sigma \in S_j}$ form a cycle in $H_{d,d}^{\text{BM}}(\Sigma^\eta)$ which contradicts the irreducibility of Σ^η .

We now prove the reverse implication. Suppose Σ is normal and that for each $\eta \in \Sigma$, Σ^η is connected through codimension one. Let η be a face of Σ and let $\alpha = \sum_{\sigma \in \Sigma_{d-|\eta|}^\eta} a_\sigma \nu_\sigma$ be an element in $H_{d-|\eta|,d-|\eta|}^{\text{BM}}(\Sigma^\eta)$. Applying the normality condition to a codimension one face τ of Σ^η , we infer that the scalars α_σ are all equal for $\sigma \succ \tau$. Using now the connectivity of Σ^η through codimension one, we conclude that the scalars a_σ are all equal. This shows α is a multiple of ν_{Σ^η} and the irreducibility at η follows. Since this holds for any η , we conclude the local irreducibility of Σ . \square

Theorem 3.9 justifies the following definition via Corollary 3.11.

DEFINITION 3.10 (Irreducible components of a normal tropical fan). Let Σ be a normal tropical fan of dimension d . Consider the connectivity-through-codimension-one graph $G = (\Sigma_d, E)$ of Σ . Any connected component of G with vertex set $V \subseteq \Sigma_d$ defines a subfan of Σ which is tropical, normal and connected through codimension one. We refer to these as the *irreducible components* of Σ . \diamond

COROLLARY 3.11. *Let Σ be a normal tropical fan of dimension d . The irreducible components of Σ are irreducible. Moreover, they induces a partition of the facets Σ_d .*

PROOF. This follows from the proof of Theorem 3.9 and from the definition. \square

Note that the statement in the corollary claims the irreducibility only at $\underline{0}$ (this is weaker than local irreducibility by Example 11.3).

REMARK 3.12. Another natural definition for irreducible components of a tropical fan Σ is the following. A subfan Δ of Σ is an irreducible component of Σ if it is the support of a nonzero element in $H_{d,d}^{\text{BM}}(\Sigma)$, and if it is minimal among the subfans with this property. In the case Σ is normal, this definition coincides with the one given above. However, for general tropical fans, irreducible components might not induce a partition of Σ_d (Example 11.13). \diamond

PROPOSITION 3.13. *The category of locally irreducible tropical fans is closed under products.*

PROOF. This follows from Theorem 3.9 and the same property for the category of tropical normal fans and fans which are connected through codimension one. \square

3.2. Poincaré duality and cap product. Recall that the coefficient ring of our homology and cohomology groups is \mathbb{Z} unless otherwise stated.

Let Σ be a simplicial tropical fan. Then $H_{d,d}^{\text{BM}}(\Sigma)$ contains a canonical element ν_Σ . Using the cap product \frown

$$\frown: H^{p_1, q_1}(\Sigma) \times H_{p_2, q_2}^{\text{BM}}(\Sigma) \longrightarrow H_{p_2 - p_1, q_2 - q_1}^{\text{BM}}(\Sigma),$$

that we describe below, we get a natural map

$$\cdot \frown \nu_\Sigma: H^{p, q}(\Sigma) \longrightarrow H_{d-p, d-q}^{\text{BM}}(\Sigma).$$

DEFINITION 3.14 (Integral Poincaré duality). We say that a simplicial tropical fan Σ verifies the *integral Poincaré duality* if the above map is an isomorphism for any bidegree (p, q) . \diamond

Since the homology and cohomology groups of Σ only depend on the support $|\Sigma|$, we get the following.

PROPOSITION 3.15. *The integral Poincaré duality is a property of the support.*

The above notion of duality can be defined in the same way for the compactification of Σ . In this case, $H^{d,d}(\overline{\Sigma})$ still contains a canonical element $\nu_{\overline{\Sigma}}$. Since Σ is simplicial, $\overline{\Sigma}$ is a cubical complex, and so the cap product can be defined. For unimodular tropical fans, we get the following theorem. (See Theorem 3.23 for a more general statement.)

THEOREM 3.16. *Let Σ be a unimodular tropical fan. Assume that for any face σ of Σ (including $\underline{0}$), Σ^σ verifies the integral Poincaré duality. Then $\overline{\Sigma}$ verifies the integral Poincaré duality.*

PROOF. There is a natural cover of Σ by open sets \mathcal{U}_σ where \mathcal{U}_σ is the union of all relative interior of faces containing ∞_σ . Then \mathcal{U}_σ is isomorphic to a nice open set of $\Sigma^\sigma \times \mathbb{T}^{|\sigma|}$ and the arguments of [JRS18, Section 5] can be applied to prove the Poincaré duality for the \mathcal{U}_σ and to glue them together. An alternate proof can be obtained from the results we prove later in Section 7, see Theorem 7.9 and below. \square

3.2.1. *Description of the cohomology of fans and of the cap product.* Let Σ be a tropical fan. The cohomology of Σ is very simple since the only compact face of Σ is $\underline{0}$. Thus,

$$H^{p,q}(\Sigma) \simeq C^{p,q}(\Sigma) \simeq \begin{cases} \mathbf{F}^p(\underline{0}) & \text{if } q = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Keeping this in mind, we now describe the cap product on Σ . Recall from Section 1.7 that for a k -form $\alpha \in \bigwedge^k M$, we denote by ι_α the contraction of multivectors by α . Contraction naturally extends to chains by linearity and gives a map

$$\iota_\alpha: C_{p,q}^{\text{BM}}(\Sigma) \rightarrow C_{p-k,q}^{\text{BM}}(\Sigma).$$

Identifying now $C^{k,0}(\Sigma)$ with $\mathbf{F}^k(\underline{0}) \subseteq \bigwedge^k M$, we can view this as the cap product.

3.2.2. *Reformulation of the integral Poincaré duality.* The discussion from the previous section leads to a map

$$\mathbf{F}^p(\underline{0}) \rightarrow H_{d-p,d}^{\text{BM}}(\Sigma), \quad \alpha \mapsto \iota_\alpha(\nu_\Sigma).$$

For any p , this is an injective map. The surjectivity of this map in any degree as well as the vanishing of $H_{p,q}^{\text{BM}}(\Sigma)$ for $q \neq d$ is the essence of the integral Poincaré duality for Σ .

3.2.3. *Stable invariance of the Poincaré duality.* A property P of fans which only depends on the support is called *stably invariant* if for a fan Σ and a positive integer k , fans supported on $|\Sigma|$ verify P if and only if those supported on $|\mathbb{R}^k \times \Sigma|$ verify P .

PROPOSITION 3.17. *Poincaré duality is stably invariant.*

We actually prove the following stronger property.

PROPOSITION 3.18. *Let Σ and Σ' be two tropical fans and consider the product $\Sigma \times \Sigma'$ which is a tropical fan. Then $\Sigma \times \Sigma'$ verifies the Poincaré duality if and only if Σ and Σ' verify the Poincaré duality.*

PROOF OF PROPOSITION 3.17. Any fan Σ' supported in \mathbb{R}^k verifies the Poincaré duality. Applying the above proposition to Σ , Σ' and the product $\Sigma \times \Sigma'$ leads to the result. \square

PROOF OF PROPOSITION 3.18. Let d and d' be the dimensions of Σ and Σ' , respectively. We first prove that if both Σ and Σ' verify the Poincaré duality, then so does $\Sigma \times \Sigma'$.

By Künneth decomposition [GS19b], since the cohomology groups $H^{\bullet,\bullet}(\Sigma)$ and $H^{\bullet,\bullet}(\Sigma')$ are torsion-free, and since by Poincaré duality the same holds for the Borel-Moore homology groups, we get decompositions

$$H^{p,q}(\Sigma \times \Sigma') \simeq \bigoplus_{\substack{0 \leq r \leq p \\ 0 \leq s \leq q}} H^{r,s}(\Sigma) \otimes H^{p-r,q-s}(\Sigma'), \quad \text{and}$$

$$H_{p,q}^{\text{BM}}(\Sigma \times \Sigma') \simeq \bigoplus_{\substack{0 \leq r \leq p \\ 0 \leq s \leq q}} H_{r,s}^{\text{BM}}(\Sigma) \otimes H_{p-r,q-s}^{\text{BM}}(\Sigma').$$

The Poincaré duality pairing (the cap product) is compatible with the Künneth decomposition. This leads to the assertion that $\Sigma \times \Sigma'$ verifies the Poincaré duality.

For the other direction, assume $\Sigma \times \Sigma'$ verifies the Poincaré duality. We show this holds as well for Σ , and by symmetry, we get the result for Σ' . The cohomology $H^{\bullet,\bullet}(\Sigma \times \Sigma')$ is torsion-free, and the Poincaré duality implies that $H_{\bullet,\bullet}^{\text{BM}}(\Sigma \times \Sigma')$ is torsion-free. Applying Künneth formula, we get that the cohomology groups and Borel-Moore homology groups of Σ and of Σ' are torsion-free and that the previous decompositions hold.

Once again, the cap product respects these decompositions. Hence, for any integers p, q , the isomorphism

$$H^{p,q}(\Sigma \times \Sigma') \xrightarrow{\simeq} H_{d+d'-p,d+d'-q}^{\text{BM}}(\Sigma \times \Sigma')$$

induces an isomorphism on each part: for each pair r, s with $0 \leq r \leq p$ and $0 \leq s \leq q$,

$$H^{r,s}(\Sigma) \otimes H^{p-r,q-s}(\Sigma') \xrightarrow{\simeq} H_{d-r,d-s}^{\text{BM}}(\Sigma) \otimes H_{d'-p+r,d'-q+s}^{\text{BM}}(\Sigma').$$

In particular, for $r = p$ and $s = q$, we get the Poincaré duality for Σ in bidegree (p, q) . \square

3.3. Tropical smoothness.

DEFINITION 3.19 (Tropical smoothness). A tropical fan Σ is called *smooth* if for any cone $\sigma \in \Sigma$, the star fan Σ^σ verifies the Poincaré duality. \diamond

THEOREM 3.20. *The property of being smooth depends only on the support of the tropical fan.*

PROOF. Let Σ and Σ' be two tropical fans with the same support X . Let x be a point of X and denote by $\sigma \in \Sigma$ and $\tau \in \Sigma'$ the cones of Σ and Σ' which contain x in their relative interiors. It follows that we have the isomorphism $\mathbb{R}^{|\sigma|} \times \Sigma^\sigma \simeq \mathbb{R}^{|\tau|} \times \Sigma'^\tau$. Applying Proposition 3.17, we infer that Σ^σ verifies the Poincaré duality if and only if Σ'^τ does. Since this happens for all points of X , the result follows. \square

PROPOSITION 3.21. *Let Σ and Σ' be two tropical fans. Then $\Sigma \times \Sigma'$ is smooth if and only if Σ and Σ' are smooth. In particular, the category of smooth tropical fans is stable under products.*

PROOF. These follow from Proposition 3.18, and the fact that for any face $\sigma \times \sigma'$ of $\Sigma \times \Sigma'$, $(\Sigma \times \Sigma')^{\sigma \times \sigma'} \simeq \Sigma^\sigma \times \Sigma'^{\sigma'}$. \square

DEFINITION 3.22. — Let X be the support of a tropical fan. We say X is smooth if one, and so any, tropical fan Σ with support X is smooth.

— A tropical variety X is called smooth if each point of X has an open neighborhood which is isomorphic to an open neighborhood of a point in the canonical compactification $\bar{\Sigma}$ of a smooth simplicial tropical fan Σ . \diamond

A tropical variety in the above definition means a connected topological space with a compatible atlas of charts each identified with an open subset of a canonically compactified unimodular tropical fan such that the maps which give transition between the charts are affine integral linear. We omit the formal definition here and refer to [AP20b] and [JSS19] for more details.

3.4. Integral Poincaré duality for smooth tropical varieties. As in the local setting, a tropical variety X of dimension d comes with its canonical class $\nu_X \in H_{d,d}^{\text{sing, BM}}(X)$. Here, $H_{\bullet, \bullet}^{\text{sing, BM}}$ refers to singular Borel-Moore tropical homology as defined in [JRS18]. (As previously mentioned, in the case $X = \Sigma$ or $\bar{\Sigma}$, this coincides with the previously introduced Borel-Moore tropical homology.)

We say X verifies the Poincaré duality with integral coefficients if the cap product

$$\cdot \frown \nu_X : H_{\text{sing}}^{p,q}(X) \rightarrow H_{d-p,d-q}^{\text{sing, BM}}(X)$$

is an isomorphism.

The following is the general form of Theorem 3.16.

THEOREM 3.23 (Poincaré duality for smooth tropical varieties). *A smooth tropical variety verifies the Poincaré duality.*

PROOF. Combined with the results which preceded, concerning the calculation of the cohomology and the integral Poincaré duality for tropical fans, the proof is similar to the one given in [JRS18] for matroidal tropical varieties. We refer as well to [GS19b] for a sheaf-theoretic approach and to [JSS19] for a proof of the duality for cohomology with rational coefficients. Both these proofs are presented for tropical varieties which are locally matroidal, but combined with the results we proved in this section, they can be applied to the general setting considered in this paper. \square

REMARK 3.24. We will later give Example 11.1 which is a normal unimodular tropical fan Σ' with $\text{rk}(H^{2,1}(\bar{\Sigma}')) = 2$ but $\text{rk}(H^{1,2}(\bar{\Sigma}')) = 0$. This shows the theorem does not hold in general only assuming unimodularity, and the smoothness assumption is needed in general to ensure the Poincaré duality for the canonical compactification $\bar{\Sigma}$ of a tropical fan Σ . \diamond

4. Tropical divisors

In this section, we consider a tropical fan Σ of pure dimension d in $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ for some n and study divisors associated to conewise linear functions.

4.1. Minkowski weights on rational fans. Let p, d be two non-negative integers with $p \leq d$. Let Σ be a rational fan of dimension d in $N_{\mathbb{R}}$.

Assume for each cone σ of Σ of dimension $d - p$ we are given a weight which is an integer denoted by $w(\sigma)$. Let $C := (\Sigma_{\leq d-p}, w)$ be the corresponding weighted fan with the weight function w on the facets of $\Sigma_{\leq d-p}$. The weight function w is called a *Minkowski weight* of dimension $d - p$ on Σ if the following balancing condition is verified:

$$\forall \tau \in \Sigma_{d-p-1}, \quad \sum_{\sigma > \tau} w(\sigma) \mathbf{n}_{\sigma/\tau} = 0 \in N^{\tau}.$$

We denote by $\text{MW}_{d-p}(\Sigma)$ the set of all Minkowski weights of dimension $d - p$ on Σ . Addition of weights cell by cell turns $\text{MW}_{d-p}(\Sigma)$ into a group.

Note that in the case where Σ is a tropical fan, we get a *canonical element* denoted by $[\Sigma]$ in $\text{MW}_d(\Sigma)$. This is given by the weight function 1 on facets of Σ .

4.2. Divisors on tropical fans. Let now Σ be a tropical fan. A *divisor* of Σ is the data of a pair (Δ, w) consisting of a (possibly empty) subfan $\Delta \subset \Sigma$ of dimension $d - 1$ and a weight function $w : \Delta_{d-1} \rightarrow \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ such that the weighted fan Δ is balanced. This means for any cone $\eta \in \Delta$ of dimension $d - 2$, the balancing condition

$$\sum_{\substack{\tau \in \Delta_{d-1} \\ \tau > \eta}} w(\tau) \mathbf{n}_{\tau/\eta} \in N_{\eta}$$

holds. Equivalently, a divisor in Σ is any element of $\text{MW}_{d-1}(\Sigma)$. In this case, the fan Δ will be the support of w , i.e., the subfan of Σ defined by all $\tau \in \Sigma_{d-1}$ with $w(\tau) \neq 0$.

In what follows, we denote by $\text{Div}(\Sigma)$ the group of divisors on Σ and note that we have $\text{Div}(\Sigma) = \text{MW}_{d-1}(\Sigma)$.

4.3. Principal divisor associated to a conewise integral linear function. Let $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ be a conewise integral linear function on Σ as defined in Section 2.1, i.e., f is continuous and it is integral linear on each cone σ of Σ . Recall that for each face η of Σ , we denote by f_η the linear form induced by f on $N_{\eta, \mathbb{R}}$.

Let τ be a face of codimension one in Σ . The *order of vanishing of f along τ* denoted by $\text{ord}_\tau(f)$ is defined as

$$\text{ord}_\tau(f) := - \sum_{\sigma \succ \tau} f_\sigma(\mathbf{n}_{\sigma/\tau}) + f_\tau \left(\sum_{\sigma \succ \tau} \mathbf{n}_{\sigma/\tau} \right)$$

with the sums running over over all cones $\sigma \in \Sigma_d$ containing τ .

PROPOSITION 4.1. *Notations as above, the order of vanishing $\text{ord}_\tau(f)$ is well-defined, that is, it is independent of the choice of normal vectors $\mathbf{n}_{\sigma/\tau} \in N_\sigma$.*

PROOF. For each pair $\sigma \succ \tau$, two different choices $\mathbf{n}_{\sigma/\tau}$ and $\mathbf{n}'_{\sigma/\tau}$ of normal vectors differ by a vector in N_τ . It follows that

$$\begin{aligned} & - \sum_{\sigma \succ \tau} f_\sigma(\mathbf{n}_{\sigma/\tau}) + f_\tau \left(\sum_{\sigma \succ \tau} \mathbf{n}_{\sigma/\tau} \right) + \sum_{\sigma \succ \tau} f_\sigma(\mathbf{n}'_{\sigma/\tau}) - f_\tau \left(\sum_{\sigma \succ \tau} \mathbf{n}'_{\sigma/\tau} \right) \\ &= - \sum_{\sigma \succ \tau} f_\sigma(\mathbf{n}_{\sigma/\tau} - \mathbf{n}'_{\sigma/\tau}) + f_\tau \left(\sum_{\sigma \succ \tau} \mathbf{n}_{\sigma/\tau} - \sum_{\sigma \succ \tau} \mathbf{n}'_{\sigma/\tau} \right) \\ &= - \sum_{\sigma \succ \tau} f_\tau(\mathbf{n}_{\sigma/\tau} - \mathbf{n}'_{\sigma/\tau}) + f_\tau \left(\sum_{\sigma \succ \tau} \mathbf{n}_{\sigma/\tau} - \sum_{\sigma \succ \tau} \mathbf{n}'_{\sigma/\tau} \right) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

The order of vanishing function gives a weight function $\text{ord}(f): \Sigma_{d-1} \rightarrow \mathbb{Z}$. We associate to f the data of the pair (Δ, w) where Δ is the fan defined by the support of $\text{ord}(f)$, i.e., by those cones τ of dimension $d-1$ in Σ for which we have $\text{ord}_\tau(f) \neq 0$, and the weight function $w: \Delta_{d-1} \rightarrow \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ is given by $w(\tau) = \text{ord}_\tau(f)$. We have the following well-known result, see for example [AR10].

PROPOSITION 4.2. *Notations as above, the pair (Δ, w) is a divisor.*

PROOF. For the sake of completeness, we provide a proof. We need to prove the balancing condition around each cone η in Δ of dimension $d-2$. It will be enough to work in Σ and extend the weight function w by 0 on all cones which are not included in Δ .

Replacing f with $f - f_\eta$, and passing to the quotient by $N_{\eta, \mathbb{R}}$, we can assume that Σ is a tropical fan of dimension two and $\eta = \underline{0}$. In this case, we have to show that

$$\sum_{\tau \in \Sigma_1} \text{ord}_\tau(f) \mathbf{e}_\tau = 0.$$

We choose primitive vectors $\mathbf{n}_{\sigma/\tau}$ in N for any pair of non-zero cones $\sigma \succ \tau$ in Σ such that we have the balancing condition

$$(4.1) \quad \forall \tau \in \Sigma_1, \quad \sum_{\sigma \succ \tau} \mathbf{n}_{\sigma/\tau} = 0.$$

Consider a pair $\sigma \succ \tau$ and denote by τ' the other ray of σ . We can write

$$b_{\tau, \tau'} \mathbf{n}_{\sigma/\tau} = \mathbf{e}_{\tau'} + a_{\tau, \tau'} \mathbf{e}_\tau$$

for a unique pair of integers $a_{\tau, \tau'}$ and $b_{\tau, \tau'}$. Note that $b_{\tau, \tau'} \neq 0$. Equation (4.1) now reads

$$\sum_{\tau' \sim \tau} \frac{1}{b_{\tau, \tau'}} \mathbf{e}_{\tau'} = - \left(\sum_{\tau' \sim \tau} \frac{a_{\tau, \tau'}}{b_{\tau, \tau'}} \right) \mathbf{e}_\tau,$$

where, we recall, the notation $\tau' \sim \tau$ means τ' and τ are the two rays of a two dimensional cone in Σ . To conclude note that

$$\begin{aligned}
\sum_{\tau \in \Sigma_1} \text{ord}_\tau(f) \mathbf{e}_\tau &= - \sum_{\tau \in \Sigma_1} \sum_{\sigma \succ \tau} f_\sigma(\mathbf{n}_{\sigma/\tau}) \mathbf{e}_\tau + \sum_{\tau \in \Sigma_1} f_\tau \left(\sum_{\sigma \succ \tau} \mathbf{n}_{\sigma/\tau} \right) \mathbf{e}_\tau \\
&= - \sum_{\tau \in \Sigma_1} \sum_{\sigma \succ \tau} f_\sigma(\mathbf{n}_{\sigma/\tau}) \mathbf{e}_\tau \\
&= - \sum_{\tau \in \Sigma_1} \sum_{\tau' \sim \tau} f_\sigma \left(\frac{\mathbf{e}_{\tau'}}{b_{\tau, \tau'}} + \frac{a_{\tau, \tau'} \mathbf{e}_\tau}{b_{\tau, \tau'}} \right) \mathbf{e}_\tau \quad (\text{with } \sigma = \tau \vee \tau') \\
&= - \sum_{\tau \in \Sigma_1} \sum_{\tau' \sim \tau} \frac{f_{\tau'}(\mathbf{e}_{\tau'})}{b_{\tau, \tau'}} \mathbf{e}_\tau - \sum_{\tau \in \Sigma_1} \sum_{\tau' \sim \tau} \frac{f_\tau(\mathbf{e}_\tau) a_{\tau, \tau'}}{b_{\tau, \tau'}} \mathbf{e}_\tau \quad (\text{since } f_\sigma|_\tau = f_\tau \text{ for } \sigma \succ \tau) \\
&= - \sum_{\tau \in \Sigma_1} \sum_{\tau' \sim \tau} \frac{f_{\tau'}(\mathbf{e}_{\tau'})}{b_{\tau, \tau'}} \mathbf{e}_\tau + \sum_{\tau \in \Sigma_1} f_\tau(\mathbf{e}_\tau) \left(- \sum_{\tau' \sim \tau} \frac{a_{\tau, \tau'}}{b_{\tau, \tau'}} \right) \mathbf{e}_\tau \\
&= - \sum_{\tau \in \Sigma_1} \sum_{\tau' \sim \tau} \frac{f_{\tau'}(\mathbf{e}_{\tau'})}{b_{\tau, \tau'}} \mathbf{e}_\tau + \sum_{\tau \in \Sigma_1} f_\tau(\mathbf{e}_\tau) \sum_{\tau' \sim \tau} \frac{1}{b_{\tau, \tau'}} \mathbf{e}_{\tau'} \\
&= - \sum_{\tau \in \Sigma_1} \sum_{\tau' \sim \tau} \frac{f_{\tau'}(\mathbf{e}_{\tau'})}{b_{\tau, \tau'}} \mathbf{e}_\tau + \sum_{\tau \in \Sigma_1} \sum_{\tau' \sim \tau} \frac{f_\tau(\mathbf{e}_\tau)}{b_{\tau, \tau'}} \mathbf{e}_{\tau'} = 0.
\end{aligned}$$

To see the last equality, note that $b_{\tau, \tau'} = b_{\tau', \tau}$, both terms being equal to the covolume of the sublattice of N generated by \mathbf{e}_τ and $\mathbf{e}_{\tau'}$. Using this and the symmetry, we infer that the difference of the last sums is zero. \square

DEFINITION 4.3 (Principal divisors). Let Σ be a tropical fan. For any conewise integral linear function on Σ , we denote by $\text{div}(f)$ the divisor associated to f . Such divisors are called *principal*. Principal divisors form a subgroup of $\text{Div}(\Sigma)$ that we denote by $\text{Prin}(\Sigma)$. \diamond

DEFINITION 4.4 (Effective and reduced divisors). A divisor (Δ, w) on Σ is called *effective* if all the coefficients $w(\tau)$ for τ a $(d-1)$ -dimensional cone in Δ are positive. An effective divisor is called *reduced* if all the weights are equal to one, i.e., $w(\tau) = 1$ for any facet τ of Δ . In such a case, we simply omit the mention of the weight function. \diamond

4.4. Principal and div-faithful tropical fans. We now define a class of tropical fans on which divisors behave nicely.

DEFINITION 4.5. Let Σ be a tropical fan and let η be a cone in Σ .

- We say that Σ is *principal at η* if any divisor on Σ^η is principal. We call the tropical fan Σ *principal* if Σ is principal at any cone $\eta \in \Sigma$.
- We say that Σ is *divisorially faithful at η* or simply *div-faithful at η* if for any conewise integral linear function f on Σ^η , if $\text{div}(f)$ is trivial in $\text{Div}(\Sigma^\eta)$, then f is a linear function on Σ^η . We call the tropical fan Σ *div-faithful* if Σ is div-faithful at any cone $\eta \in \Sigma$. \diamond

The importance of div-faithfulness in our work relies on the fact that tropical modifications behave very nicely on div-faithful tropical fans, cf Section 5.1.6.

PROPOSITION 4.6. *The properties of being principal and div-faithful are both local.*

PROOF. The statement is tautological. \square

REMARK 4.7. Examples 11.5 and 11.3 show that being principal, resp. div-faithful, at $\mathbf{0}$ does not imply the fan is principal, resp. div-faithful. \diamond

4.5. Characterization of principal and div-faithful saturated unimodular tropical fans. We now provide a characterization of principality and divisorial faithfulness in the case the tropical fan is *saturated and unimodular*. This will be given via the map

$$\text{cl}: A^1(\Sigma) \rightarrow \text{Div}(\Sigma) \simeq \text{MW}_{d-1}(\Sigma)$$

that we describe now. Here, as in the introduction, $A^\bullet(\Sigma)$ refers to the Chow ring of Σ .

We start by recalling the definition of the above map. First, for any k , we get a natural isomorphism

$$\text{MW}_k(\Sigma) \simeq A^k(\Sigma)^*.$$

This is [AHK18, Proposition 5.6], and is a consequence of Localization Lemma 6.1, see Remark 6.2.

For $k = d$, this gives the *degree map*

$$\text{deg}: A^d(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \alpha \rightarrow \int_{\Sigma} \alpha$$

where the notation \int_{Σ} means evaluation at the canonical element $[\Sigma]$ of $\text{MW}_d(\Sigma)$ given by the weight function 1 on Σ_d , see Remark 6.2.

The composition of the product map in the Chow ring with the degree

$$\begin{aligned} A^k(\Sigma) \times A^{d-k}(\Sigma) &\rightarrow A^d(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{Z}, \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \text{deg}(\alpha \cdot \beta), \end{aligned}$$

gives the map

$$\text{cl}^k: A^k(\Sigma) \rightarrow A^{d-k}(\Sigma)^* \simeq \text{MW}_{d-k}(\Sigma).$$

For $k = 1$, this gives the map

$$\text{cl}: A^1(\Sigma) \rightarrow \text{Div}(\Sigma).$$

Notice also that, since Σ is unimodular, $Z^1(\Sigma)$ coincides with the set of conewise integral linear forms on Σ . Moreover, since Σ is saturated, $A^1(\Sigma)$ is isomorphic to conewise integral linear forms modulo globally linear ones.

PROPOSITION 4.8. *The map cl is described as follows. Consider an element $\alpha \in A^1(\Sigma)$ with $\alpha = \sum_{\rho \in \Sigma_1} a_{\rho} x_{\rho}$ for some coefficients $a_{\rho} \in \mathbb{Z}$. Let f be the conewise linear function on Σ which takes value a_{ρ} at \mathbf{e}_{ρ} , for any ray ρ . Then we have $\text{cl}(\alpha) = -\text{div}(f)$.*

PROOF. Notations as above, we need to show that for each $\tau \in \Sigma_{d-1}$, we have the equality

$$\text{deg}(\alpha \cdot x_{\tau}) = -\text{ord}_{\tau}(f).$$

Let ℓ be an integral linear function on N which is equal to f on τ and let $x_{\ell} = \sum_{\rho \in \Sigma_1} \ell(\mathbf{e}_{\rho}) x_{\rho}$. Since x_{ℓ} is zero in the Chow ring, replacing α by $\alpha - x_{\ell}$, we can assume that $a_{\rho} = 0$ for any ray ρ in τ . The proposition now follows by observing that

$$\text{deg}(\alpha \cdot x_{\tau}) = \sum_{\substack{\rho \in \Sigma_1 \\ \rho \sim \tau}} a_{\rho} \text{deg}(x_{\rho} x_{\tau}) = \sum_{\substack{\rho \in \Sigma_1 \\ \rho \sim \tau}} a_{\rho} = -\text{ord}_{\tau}(f - \ell) = -\text{ord}_{\tau}(f). \quad \square$$

THEOREM 4.9 (Characterization of principal and div-faithful fans). *Let Σ be a unimodular tropical fan of dimension d and let η be a cone in Σ . Assume Σ is saturated at η . Consider the map $\text{cl}_{\eta}: A^1(\Sigma^{\eta}) \rightarrow \text{Div}(\Sigma^{\eta})$. We have*

- Σ is principal at η if and only if cl_{η} is surjective.
- Σ is div-faithful at η if and only if cl_{η} is injective.

PROOF. Both parts follow directly from Proposition 4.8 applied to Σ^{η} . □

REMARK 4.10. Notice that principality and div-faithfulness are independent of the lattice outside the support of the fan. By this, we mean that a tropical fan Σ in $N_{\mathbb{R}}$ is principal, resp. div-faithful, if and only if for any other lattice N' which verifies $|\Sigma| \cap N = |\Sigma| \cap N'$, Σ is principal, resp. div-faithful, when considered equipped with this new lattice.

For such properties, replacing the lattice N by $\mathbf{F}_1(\Sigma)$ if necessary, there is no harm in assuming that the fan is saturated at $\underline{0}$ (though we cannot assume global saturation by Example 11.10). \diamond

THEOREM 4.11. *A smooth tropical fan is both principal and div-faithful.*

PROOF. Let Σ be a smooth fan. We first assume that Σ is saturated and unimodular. By the Hodge Isomorphism Theorem 7.2 for smooth tropical fans, for any cone $\eta \in \Sigma$, $A^\bullet(\Sigma^\eta)$ verifies the Poincaré duality. Hence, we get an isomorphism $A^k(\Sigma^\eta) \simeq A^{d-k}(\Sigma^\eta)^* \simeq \text{MW}_{d-k}(\Sigma^\eta)$. This implies that the map $\text{cl}_\eta: A^1(\Sigma^\eta) \rightarrow \text{Div}(\Sigma^\eta)$ is bijective. We infer from the previous theorem that Σ is both principal and div-faithful at η . This being the case for any $\eta \in \Sigma$, the theorem follows.

We now argue that the saturation condition is not needed by Remark 4.10. What is more, we do not need to require unimodularity, nor even simpliciality: Theorem 5.7 combined with Theorem 5.9 (3) and (4) imply that div-faithfulness and principality are properties of the support provided the support is locally irreducible. This finishes the proof of our theorem. \square

5. Tropical shellability

As in the previous section, Σ will be a tropical fan of pure dimension d in $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ for some natural number n . We moreover fix an orientation $(\nu_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$, and consider the canonical compactification $\bar{\Sigma}$ of Σ with a compatible orientation.

5.1. Tropical modifications. We start by recalling the definition of tropical modifications and introducing some variants of it in context related to canonical compactifications. A survey of results and references related to the concept can be found in [Kal15].

Let $f: |\Sigma| \rightarrow \mathbb{R}$ be a conewise integral linear function on Σ . Assume that the principal divisor $\text{div}(f)$ is reduced. Denote by Δ the corresponding subfan of Σ . We allow the case the divisor $\text{div}(f)$ is trivial, in which case, Δ will be empty. In this section, we will define three types of tropical modifications defined by Δ , or more precisely by f , that we call *open*, *closed*, and *extended*, as described below.

5.1.1. *Open tropical modification.* We start by defining the open tropical modification of Σ with respect to f . This will be a fan in $\widetilde{N}_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, for the lattice $\widetilde{N} := N \times \mathbb{Z}$, that we will denote by $\mathcal{TM}_f(\Sigma)$.

Consider the graph of f which is the map Γ_f defined as

$$\Gamma = \Gamma_f: \begin{array}{ccc} |\Sigma| & \longrightarrow & \widetilde{N}_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto & (x, f(x)). \end{array}$$

For each cone σ of Σ , we consider the cone σ_o in $\widetilde{N}_{\mathbb{R}}$ which is the image of σ by Γ_f , i.e., $\sigma_o := \Gamma_f(\sigma) \subset \widetilde{N}_{\mathbb{R}}$. Moreover, to each face δ of Δ , we associate the face $\delta_{\perp} := \delta_o + \mathbb{R}_+ \mathbf{e}_{\perp}$, where $\mathbf{e}_{\perp} = (0, 1) \in N_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$. Here 0 in $\mathbf{e}_{\perp} = (0, 1)$ refers to the origin in $N_{\mathbb{R}}$.

The *open tropical modification of Σ along Δ with respect to f* , or simply the tropical modification of Σ along Δ if the other terms are understood from the context, is the fan $\mathcal{TM}_f(\Sigma)$ in $\widetilde{N}_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^{n+1}$ defined as

$$\mathcal{TM}_f(\Sigma) := \{ \sigma_o \mid \sigma \in \Sigma \} \cup \{ \delta_{\perp} \mid \delta \in \Delta \}.$$

PROPOSITION 5.1. *The tropical modification $\mathcal{TM}_f(\Sigma)$ is a tropical fan. Moreover, we have a natural projection map*

$$\mathbf{p}: |\mathcal{TM}_f(\Sigma)| \rightarrow |\Sigma|$$

which is conewise integral linear.

Before going through the proof, we make some remarks and introduce some notations. First, we observe that the fan $\mathcal{TM}_f(\Sigma)$ is rational with respect to the lattice \widetilde{N} , and that for each face $\sigma \in \Sigma$, the lattice \widetilde{N}_{σ_o} can be identified with the image $\Gamma_f(N_\sigma)$. This shows that for an inclusion of cones $\tau \prec \sigma$, we can pick

$$\mathbf{n}_{\sigma_o/\tau_o} = (\mathbf{n}_{\sigma/\tau}, f_\sigma(\mathbf{n}_{\sigma/\tau})) \in \widetilde{N} = N \times \mathbb{Z},$$

where, as before, $f_\sigma \in N_\sigma^*$ denotes the linear form which coincides with f on σ . Second, we observe that for each $\delta \in \Delta$, the lattice $\widetilde{N}_{\delta_\perp}$ can be identified with $\widetilde{N}_{\delta_o} \times \mathbb{Z} \simeq N_\delta \times \mathbb{Z}$, and that we can choose $\mathbf{n}_{\delta_\perp/\delta_o} = \mathbf{e}_\perp$. Finally, for an inclusion of cones $\tau \succ \delta$ in Δ , we can set $\mathbf{n}_{\tau_\perp/\delta_\perp} = (\mathbf{n}_{\tau/\delta}, 0) \in \widetilde{N}$.

PROOF OF PROPOSITION 5.1. We need to prove the balancing condition around any codimension one face of $\mathcal{TM}_f(\Sigma)$. These are of two kinds, namely faces of the form τ_o for $\tau \in \Sigma_{d-1}$ and those of the form δ_\perp for $\delta \in \Delta_{d-2}$.

First let $\tau \in \Sigma_{d-1}$, and consider the codimension one face τ_o of $\mathcal{TM}_f(\Sigma)$. Two cases happen:

- Either $\tau \in \Delta$, in which case the d -dimensional faces around τ_o are of the form σ_o for $\sigma \succ \tau$ in Σ as well as the face τ_\perp . The balancing condition in this case amounts to showing that the vector

$$\mathbf{n}_{\tau_\perp/\tau} + \sum_{\substack{\sigma \succ \tau \\ \sigma \in \Sigma}} \mathbf{n}_{\sigma_o/\tau_o} = \mathbf{e}_\perp + \sum_{\substack{\sigma \succ \tau \\ \sigma \in \Sigma}} (\mathbf{n}_{\sigma/\tau}, f_\sigma(\mathbf{n}_{\sigma/\tau})) = (0, 1) + \left(\sum_{\substack{\sigma \succ \tau \\ \sigma \in \Sigma}} \mathbf{n}_{\sigma/\tau}, \sum_{\substack{\sigma \succ \tau \\ \sigma \in \Sigma}} f_\sigma(\mathbf{n}_{\sigma/\tau}) \right)$$

belongs to \widetilde{N}_{τ_o} . Since $\text{ord}_\tau(f) = 1$, the term on the right hand side of the above equality becomes equal to

$$\left(\sum_{\substack{\sigma \succ \tau \\ \sigma \in \Sigma}} \mathbf{n}_{\sigma/\tau}, f_\tau \left(\sum_{\substack{\sigma \succ \tau \\ \sigma \in \Sigma}} \mathbf{n}_{\sigma/\tau} \right) \right),$$

which by balancing condition at τ in Σ belongs to $\widetilde{N}_{\tau_o} = \Gamma_f(N_\tau)$.

- Or we have $\tau \notin \Delta$, i.e., $\text{ord}_\tau(f) = 0$. In this case, the facets around τ_o are of the form σ_o for $\sigma \succ \tau$ in Σ , and we get

$$\sum_{\substack{\sigma \succ \tau \\ \sigma \in \Sigma}} \mathbf{n}_{\sigma_o/\tau_o} = \sum_{\substack{\sigma \succ \tau \\ \sigma \in \Sigma}} (\mathbf{n}_{\sigma/\tau}, f_\sigma(\mathbf{n}_{\sigma/\tau})) = \left(\sum_{\substack{\sigma \succ \tau \\ \sigma \in \Sigma}} \mathbf{n}_{\sigma/\tau}, \sum_{\substack{\sigma \succ \tau \\ \sigma \in \Sigma}} f_\sigma(\mathbf{n}_{\sigma/\tau}) \right) = \left(\sum_{\substack{\sigma \succ \tau \\ \sigma \in \Sigma}} \mathbf{n}_{\sigma/\tau}, f_\tau \left(\sum_{\substack{\sigma \succ \tau \\ \sigma \in \Sigma}} \mathbf{n}_{\sigma/\tau} \right) \right),$$

which again belongs to $\widetilde{N}_{\tau_o} = \Gamma_f(N_\tau)$.

It remains to check the balancing condition around a codimension one face of the form δ_\perp in $\mathcal{TM}_f(\Sigma)$ with $\delta \in \Delta_{d-2}$. Facets around δ_\perp are all the cones τ_\perp for $\tau \in \Delta_{d-1}$ and $\tau \succ \delta$. Using the balancing condition in $\Delta = \text{div}(f)$ around δ , Proposition 4.2, we see that the sum

$$\sum_{\substack{\tau \succ \delta \\ \tau \in \Delta}} \mathbf{n}_{\tau_\perp/\delta_\perp} = \left(\sum_{\substack{\tau \succ \delta \\ \tau \in \Delta}} \mathbf{n}_{\tau/\delta}, 0 \right)$$

belongs to $N_\delta \times \mathbb{Z} \subseteq \widetilde{N}_{\delta_\perp}$, and the assertion follows.

The second statement is straightforward. □

We naturally endow $\mathcal{TM}_f(\Sigma)$ with the orientation induced by the one of Σ on faces of the form σ_o , for $\sigma \in \Sigma$, and extend it so that $\text{sign}(\delta_o, \delta_\perp) = +1$ for any $\delta \in \Delta$.

5.1.2. *Closed tropical modification.* The closed tropical modification lives in $N_{\mathbb{R}} \times \mathbb{T}$, and is defined as the closure of the open tropical modification.

We still denote by σ_o the image in $\widetilde{N}_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$ of a cone σ of Σ . For each $\delta \in \Delta$, we consider the cone $\delta_{\perp} = \delta_o + \mathbb{R}_+ \mathbf{e}_{\perp}$ defined in the previous section, and denote by δ_{\pm} the closure of δ_{\perp} in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}$. Moreover, for any $\delta \in \Delta$, we denote by δ_{∞} the extended polyhedron $\delta_o + \infty \cdot \mathbf{e}_{\perp}$, which is also equal to $\delta_{\pm} \setminus (N_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R})$.

The *closed tropical modification of Σ with respect to f* is the extended polyhedral complex in $N_{\mathbb{R}} \times \mathbb{T}$ which consists of faces $\{\sigma_o \mid \sigma \in \Sigma\} \cup \{\delta_{\pm} \mid \delta \in \Delta\} \cup \{\delta_{\infty} \mid \delta \in \Delta\}$. We denote it by $\mathcal{CTM}_f(\Sigma)$. We extend the orientation induced by the one on $\mathcal{TM}_f(\Sigma)$, adding the condition $\text{sign}(\delta_{\infty}, \delta_{\perp}) = -1$ for any $\delta \in \Delta$.

5.1.3. *Extended tropical modification.* We now define the extended tropical modification. Let $\overline{\Sigma}$ be the canonical compactification of Σ , and let $\overline{\Delta}$ be the compactification of Δ inside $\overline{\Sigma}$. Then the *closed extended tropical modification of $\overline{\Sigma}$ with respect to f* denoted by $\mathcal{CTM}_f(\overline{\Sigma})$ is defined as the canonical compactification of the fan $\mathcal{TM}_f(\Sigma)$. The set of faces of $\mathcal{CTM}_f(\overline{\Sigma})$ is exactly

$$\{\sigma_o \mid \sigma \in \overline{\Sigma}\} \cup \{\delta_{\pm} \mid \delta \in \overline{\Delta}\} \cup \{\delta_{\infty} \mid \delta \in \overline{\Delta}\},$$

where σ_o, δ_{\pm} and δ_{∞} are defined as above with the map Γ_f extended by continuity. The projection \mathfrak{p} extends to this context.

We also define the *open extended tropical modification of $\overline{\Sigma}$ with respect to f* denoted by $\mathcal{TM}_f(\overline{\Sigma})$ as follows. Let $\widetilde{\Sigma}$ be the tropical modification $\mathcal{TM}_f(\Sigma)$. Then, $\mathcal{TM}_f(\overline{\Sigma})$ is defined as the restriction of $\mathcal{CTM}_f(\overline{\Sigma})$ to the space $\mathbb{TP}_{\widetilde{\Sigma}} \setminus \mathbb{TP}_{\widetilde{\Sigma}_{\infty}}^{\mathbf{e}_{\perp}}$. The set of faces of $\mathcal{TM}_f(\overline{\Sigma})$ is exactly

$$\{\sigma_o \mid \sigma \in \overline{\Sigma}\} \cup \{\delta_{\perp} \mid \delta \in \overline{\Delta}\}.$$

5.1.4. *Degenerate tropical modifications.* In the case where Δ is trivial, the tropical modification of Σ with respect to f still has a meaning. In this case, the tropical modification is called *degenerate*. The closed and the open tropical modifications coincide: they become both equal to the graph of f . The faces of the tropical modification are in one-to-one correspondence with faces of Σ . However, unless f is a linear form on Σ , the tropical modification is not isomorphic to Σ . We refer to Example 11.4 in Section 11 which explains this phenomenon. On the contrary, if f is integral linear, then we just obtain the image of Σ by a linear map, and in this case, the fans Σ and $\mathcal{TM}_f(\Sigma)$ are isomorphic. In particular, if Σ is div-faithful at $\underline{0}$, then the vanishing of $\text{div}(f)$ implies that f is linear, and in this case, the tropical modification becomes isomorphic to Σ .

Unless otherwise stated, in this article we allow tropical modifications to be degenerate.

5.1.5. *The case of tropical fans which are both principal and div-faithful at $\underline{0}$.* Assume Σ is a tropical fan which is principal and div-faithful at the cone $\underline{0} \in \Sigma$. In this case any divisor Δ is the divisor of a conewise integral linear function f on Σ , and in addition, if g is another integral conewise linear function on Σ such that $\text{div}(g) = \Delta$, then $f - g$ is linear. Therefore, when Δ is reduced, the two tropical modifications $\mathcal{TM}_f(\Sigma)$ and $\mathcal{TM}_g(\Sigma)$ are isomorphic via the affine map which sends the point $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ to the point $x + \ell(\mathfrak{p}(x))\mathbf{e}_{\perp}$ where $\ell \in M$ is a linear form restricting to $f - g$ on $|\Sigma|$. Hence, working modulo isomorphisms, we can talk about *the open tropical modification of Σ along Δ* . We denote it by $\mathcal{TM}_{\Delta}(\Sigma)$. The same applies to the extended setting and leads for instance to what we call *the closed extended tropical modification of $\overline{\Sigma}$ along $\overline{\Delta}$* that we denote by $\mathcal{CTM}_{\overline{\Delta}}(\overline{\Sigma})$.

5.1.6. *Star fans of a tropical modification.* Let Σ be any fan and let $\sigma \in \Sigma$. Let f be a conewise linear map on Σ . Then f induces a conewise linear map f^{σ} on the star fan Σ^{σ} defined as follows. Let $\ell \in M_{\mathbb{R}}$ be a linear map that coincide with f on σ . Then $f - \ell$ is zero on σ and we set $f^{\sigma} = \pi_*(f - \ell)$ where $\pi: N_{\mathbb{R}} \rightarrow N_{\mathbb{R}}^{\sigma}$ is the natural projection. Then f^{σ} is a conewise linear map on Σ^{σ} . Note that although f^{σ} depends on the choice of ℓ , it is

well-defined up to an element of $M_{\sigma, \mathbb{R}} = (N_{\mathbb{R}}^{\sigma})^*$. This is enough for our purpose. That is why, abusing the terminology, we sometimes call f^{σ} the conewise linear map induced by f on Σ^{σ} . We also note that in the case Σ is rational and f is integral, by choosing $\ell \in M$ we can ensure that f^{σ} is conewise integral linear on Σ^{σ} .

PROPOSITION 5.2. *Let Σ be a tropical fan and let f be a conewise integral linear map on Σ . Assume the divisor $\text{div}(f)$ is reduced and denote it by Δ . Set $\tilde{\Sigma} = \mathcal{TM}_f(\Sigma)$. Then we have the following description of the star fans of $\tilde{\Sigma}$.*

- If $\delta \in \Delta$, then $\tilde{\Sigma}^{\delta_{\mathbb{L}}} \simeq \Delta^{\delta}$.
- If $\sigma \in \Delta$, then $\tilde{\Sigma}^{\sigma_{\circ}} \simeq \mathcal{TM}_{f^{\sigma}}(\Sigma^{\sigma})$ where f^{σ} is the conewise integral linear map induced by f on Σ^{σ} .
- If $\sigma \in \Sigma \setminus \Delta$, then once again we have $\tilde{\Sigma}^{\sigma_{\circ}} \simeq \mathcal{TM}_{f^{\sigma}}(\Sigma^{\sigma})$. However, this time the tropical modification is degenerate. In particular, if Σ is div-faithful (at σ), then $\tilde{\Sigma}^{\sigma_{\circ}}$ is isomorphic to Σ^{σ} .

PROOF. The proof is a direct verification. □

5.2. Star subdivision. Let Σ be any rational fan. Let $\sigma \in \Sigma$ be any cone of Σ of dimension at least one. Let ρ be a rational ray generated by a vector in the relative interior of σ . The *blow-up of Σ along ρ* , also called the *star subdivision of Σ along ρ* , consists in replacing any face $\sigma \vee \eta'$ for $\eta' \sim \sigma$ by the faces of the form $\tau \vee \rho \vee \eta'$ for any proper subface τ of σ . We obtain a new fan with the same support which we denote by $\Sigma_{(\rho)}$. On the contrary, if Σ is the blow-up of some fan Σ' along a ray ρ , then Σ' is called the *blow-down of Σ along ρ* . By an abuse of the terminology we say a fan $\tilde{\Sigma}$ is obtained by a blow-up of Σ along σ if there exists a ray ρ in the relative interior of σ as above so that $\tilde{\Sigma}$ coincides with $\Sigma_{(\rho)}$.

If Σ is unimodular, a blow-up of Σ along σ is called *unimodular* if $\Sigma_{(\rho)}$ is still unimodular. Such a blow-up is in fact unique. Indeed, for any face σ with rays ρ_1, \dots, ρ_k , there is exactly one ray ρ such that the blow-up along ρ is unimodular. This ray is generated by $\mathbf{e}_{\rho_1} + \dots + \mathbf{e}_{\rho_k}$. Via the link to toric geometry, the unimodular blow-up $\tilde{\Sigma}$ of Σ along σ corresponds to the blow-up of the toric variety \mathbb{P}_{Σ} along the closure D^{σ} of the torus orbit T^{σ} associated to σ . For this reason, we denote this blow-up by $\mathcal{Bl}_{\sigma}(\Sigma)$.

5.3. \mathcal{C} -shellability. In the previous sections, we defined two types of operations on tropical fans: tropical modifications and star subdivisions. In this section, we define a notion of shellability using these operations. Roughly speaking, a tropical fan is shellable if it can be obtained from a collection of *basic tropical fans* by only using the above operations.

The idea behind the definition is that if a property P holds for our basic tropical fans and if, in addition, this property happens to be preserved by the above operations, we then obtain a wide collection of tropical fans all verifying the property P . This happens in practice for many examples of properties which will be discussed later in the paper.

Recall that by our convention from Section 2, we work with fans modulo isomorphisms, so that we can talk about the set of isomorphism classes of rational fans.

DEFINITION 5.3 (Tropical shellability). Let \mathcal{C} be a class of tropical fans (or more precisely, a set of isomorphism classes of tropical fans). Let \mathcal{B} be a subset of \mathcal{C} that we call the *base set*. The set of *tropically \mathcal{C} -shellable fans over \mathcal{B}* denoted by $\mathcal{Sh}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ is defined as the smallest class of tropical fans all in \mathcal{C} which verifies the following properties.

- (Any element in the base set is tropically \mathcal{C} -shellable) We have $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{Sh}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$.
- (Closeness under products) If $\Sigma, \Sigma' \in \mathcal{Sh}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ and the product $\Sigma \times \Sigma'$ belongs to \mathcal{C} , then $\Sigma \times \Sigma' \in \mathcal{Sh}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$.

- (Closeness under tropical modifications along a tropically shellable divisor) If $\Sigma \in \mathcal{S}h_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ and if f is a conewise integral linear function on Σ such that either the divisor $\text{div}(f)$ is reduced and $\text{div}(f) \in \mathcal{S}h_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$, or $\text{div}(f)$ is trivial, and if in addition $\mathcal{T}M_f(\Sigma) \in \mathcal{C}$, then $\mathcal{T}M_f(\Sigma) \in \mathcal{S}h_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$.
- (Closeness under blow-ups and blow-downs with shellable center) If $\Sigma \in \mathcal{C}$, for any cone $\sigma \in \Sigma$ and any ray ρ in the relative interior of σ which verify $\Sigma^\sigma \in \mathcal{S}h_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ and $\Sigma_{(\rho)} \in \mathcal{C}$, we have

$$\Sigma \in \mathcal{S}h_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \iff \Sigma_{(\rho)} \in \mathcal{S}h_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}).$$

If \mathcal{C} is the set of all tropical fans, we just write $\mathcal{S}h(\mathcal{B})$. ◇

We note that the category of tropical fans is stable by the above list of operations. The main purpose of restricting the operations to be performed inside \mathcal{C} is to forbid arbitrary blow-ups and blow-downs. The main examples of classes \mathcal{C} of tropical fans which are of interest to us are *all*, resp. *simplicial*, resp. *unimodular*, resp. *unimodular quasi-projective*, tropical fans that we denote by $\mathcal{T}rop$, $\mathcal{T}rop^{simp}$, $\mathcal{T}rop^{unim}$, and $\mathcal{T}rop^{uqproj}$, respectively. We call them the *standard classes* of tropical fans. These classes only constrain blow-ups and blow-downs since they are all stable by products and by tropical modifications (see Theorem 5.6).

An important example of the base set is the set $\mathcal{B}_0 = \{\{\underline{0}\}, \Lambda\}$ where Λ is the complete fan in \mathbb{R} with three cones $\underline{0}, \mathbb{R}_{\geq 0}$, and $\mathbb{R}_{\leq 0}$. We will later see that $\mathcal{S}h(\mathcal{B}_0)$ contains many interesting fans.

DEFINITION 5.4 (Shellable fans). A fan Σ is called *shellable in \mathcal{C}* if $\Sigma \in \mathcal{S}h_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}_0)$. If $\mathcal{C} = \mathcal{T}rop$, we simply say that Σ is shellable. ◇

DEFINITION 5.5 (Shellable properties). Let \mathcal{C} be a class of tropical fans.

- A subclass \mathcal{S} of \mathcal{C} is called *stable by shellability in \mathcal{C}* if $\mathcal{S}h_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.
- By extension, if P is a predicate on tropical fans of \mathcal{C} , then P is called *stable by shellability in \mathcal{C}* , or simply *shellable*, if the subclass of fans of \mathcal{C} verifying P is stable by shellability. Equivalently, P is shellable if for any subclass \mathcal{B} of \mathcal{C} such that all elements of \mathcal{B} verifies P , then all elements of $\mathcal{S}h_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ verifies P . ◇

5.4. Stellar-stability. A class \mathcal{S} of tropical fans is called *stellar-stable* if for any $\Sigma \in \mathcal{S}$ and any $\sigma \in \Sigma$, the star fan Σ^σ also belongs to \mathcal{S} . For instance, the four standard classes $\mathcal{T}rop$, $\mathcal{T}rop^{simp}$, $\mathcal{T}rop^{unim}$, and $\mathcal{T}rop^{uqproj}$, as well as \mathcal{B}_0 are stellar-stable (cf Theorem 5.6). Recall that a predicate P on fans is called *local* or *stellar-stable* if $P(\Sigma) \Rightarrow P(\Sigma^\sigma)$ for any $\sigma \in \Sigma$.

There is a natural way to construct a stellar-stable predicate from an arbitrary one. If P is any predicate on tropical fans, then we denote by P^\star the predicate

$$P^\star(\Sigma): \quad \forall \sigma \in \Sigma, P(\Sigma^\sigma).$$

For instance, local irreducibility, div-faithfulness, and principality are all defined in this way relative to the corresponding property at $\underline{0}$. The same holds for the smoothness property where P is the Poincaré duality of the fan at cone $\underline{0}$. As we will see later in Lemma 5.10, viewing them this way allows to considerably simplify the proofs we give of their shellability.

5.5. Properties of standard classes. The following theorem summarizes several nice properties enjoyed by the four standard classes of tropical fans that we introduced in the previous section.

THEOREM 5.6. *Let \mathcal{C} be one of the four standard classes of tropical fans. Then \mathcal{C} verifies the following.*

- (Closeness under products) *If Σ and Σ' belong to \mathcal{C} , then we have $\Sigma \times \Sigma' \in \mathcal{C}$.*

- (Closeness under tropical modifications) *If $\Sigma \in \mathcal{C}$ and if f is a conewise integral linear function on Σ such that either $\text{div}(f)$ is reduced, or it is trivial, then $\mathcal{TM}_f(\Sigma) \in \mathcal{C}$.*
- (Containment of the basic fans) *Both fans of \mathcal{B}_0 are in \mathcal{C} .*
- (Stellar-stability) *The class \mathcal{C} is stellar-stable.*
- (Existence of unimodular quasi-projective subdivisions) *Any fan in \mathcal{C} has a subdivision in \mathcal{C} which is unimodular and quasi-projective.*
- (Weak factorization) *Let Σ and Σ' be two fans in \mathcal{C} with the same support. Then there exists a sequence of fans $\Sigma = \Sigma^0, \Sigma^1, \Sigma^2, \dots, \Sigma^k = \Sigma'$ in \mathcal{C} such that for any $i \leq k - 1$, Σ_{i+1} is obtained from Σ_i by performing a blow-up or a blow-down.*

PROOF. We only sketch the proof here.

- (Closeness under products) For \mathcal{T}_{rop} this is stated by Proposition 3.5. Moreover, simpliciality and unimodularity are preserved by taking products. Let us justify that the product of two quasi-projective fans Σ and Σ' is quasi-projective. Let $\pi: \Sigma \times \Sigma' \rightarrow \Sigma$ and $\pi': \Sigma \times \Sigma' \rightarrow \Sigma'$ be the two natural projections. Let f and f' be two convex conewise linear functions on Σ and Σ' , respectively. Then a direct calculation proves that $\pi^*(f) + \pi'^*(f')$ is convex on $\Sigma \times \Sigma'$, and so the product remains quasi-projective.
- (Closeness under tropical modifications) For \mathcal{T}_{rop} , this is Proposition 5.1. The new cones of the form δ_{\perp} with δ in the divisor are simplicial, resp. unimodular, provided δ is simplicial, resp. unimodular. Hence, simpliciality and unimodularity are preserved by tropical modifications. For quasi-projectivity, if g is a convex conewise linear function on a fan Σ and if \mathfrak{p} is the projection associated to a tropical modification $\tilde{\Sigma}$ of Σ , then we claim that $\mathfrak{p}^*(g)$ is convex on $\tilde{\Sigma}$. Take $\delta \in \Delta$ and let us prove that $\mathfrak{p}^*(g)$ is convex around δ_o . By the very definition, we know that there exists a linear form ℓ such that $g - \ell$ is zero on δ and is strictly positive on rays $\rho \sim \delta$. Moreover, let l_{\perp} be a linear form which takes values one on \mathfrak{e}_{\perp} and 0 on δ_o . Then, for a small enough positive real number ε , $\mathfrak{p}^*(g) - \mathfrak{p}^*(\ell) + \varepsilon l_{\perp}$ is zero on δ_o , takes value $\varepsilon > 0$ on \mathfrak{e}_{\perp} , and is strictly positive on rays ρ_o for $\rho \sim \delta$. This proves that $\mathfrak{p}^*(g)$ is convex around δ_o . One can prove similarly that g is convex around other faces of $\tilde{\Sigma}$. Hence $\tilde{\Sigma}$ is quasi-projective.
- (Containment of the basic fans) This is trivial.
- (Stellar-stability) For \mathcal{T}_{rop} , stellar-stability follows from Proposition 3.4. Simpliciality and unimodularity are local properties. For quasi-projectivity, a conewise linear convex function on a fan induces convex functions on the star fans around its faces.
- (Existence of unimodular quasi-projective subdivisions) This is a well-known fact. We refer to Section 4 of [AP20b] for more details.
- (Weak factorization) This last property is far from trivial. For \mathcal{T}_{rop}^{simp} and \mathcal{T}_{rop}^{unim} , this is Theorem A of [Wlo97], proved independently by Morelli [Mor96] and expanded by Abramovich-Matsuki-Rashid, see [AMR99].

For $\mathcal{T}_{rop}^{uproj}$, this can be obtained from relevant parts of [Wlo97, Mor96, AKMW02] as discussed and generalized by Abramovich and Temkin in [AT19, Section 3]. \square

5.6. Shellability, support and factorization. The following shows that in some cases of interest, shellability is only a property of the support and of the ambient lattice.

THEOREM 5.7. *Let \mathcal{C} be a standard class. Let \mathcal{S} be subclass of \mathcal{C} which is both stellar-stable and stable by shellability. Then a tropical fan Σ of \mathcal{C} is in \mathcal{S} if and only if any tropical fan of \mathcal{C} with the same support $|\Sigma|$ and considered with the same lattice is in \mathcal{S} .*

Notice that here we remember the ambient lattice. This is weaker than being a property of the support. For instance, if Σ is not saturated in $N_{\mathbb{R}}$ and if Σ' is the same fan considered with a different lattice $N' = \mathbf{F}_1(\Sigma)$, then the above theorem does not imply that $\Sigma \in \mathcal{S}$ if and only if $\Sigma' \in \mathcal{S}$, even though $\Sigma \cap N = \Sigma' \cap N'$. For many applications, e.g., for properties depending on $\Sigma \cap N$ in the sense of Remark 4.10, this remark has no importance. However, for the study of the Chow ring, for instance for the shellability statement in Theorem 5.9 (5) in the next section, some counter-examples can be easily constructed (see Example 11.8).

PROOF. Let $\Sigma \in \mathcal{S}$ and let Σ' be another fan of \mathcal{C} with the same support and the same lattice. By the weak factorization property of Theorem 5.6, there exists a sequence of fans $\Sigma = \Sigma^0, \Sigma^1, \dots, \Sigma^{k-1}, \Sigma^k = \Sigma'$ all belonging to \mathcal{C} such that Σ^{i+1} is obtained from Σ^i by performing a blow-up or a blow-down.

Let us prove that $\Sigma^1 \in \mathcal{S}$. If Σ^1 is obtained from Σ by blowing up the face $\eta \in \Sigma$, then we have $\Sigma^1 \in \mathcal{S}$ by stellar-stability. Hence \mathcal{S} is closed by blow-up along η , and we have $\Sigma^1 \in \mathcal{S}$. Otherwise, this is Σ which is obtained from Σ^1 by blowing up along a ray ρ which is in the relative interior of some face $\eta' \in \Sigma^1$. In this case, notice that $(\Sigma^1)^{\eta'} = \Sigma^{\tau \vee \rho}$ where τ is any face of codimension one in η' . Once again, $(\Sigma^1)^{\eta'}$ belongs to \mathcal{S} and, by closeness under blow-downs, we get $\Sigma^1 \in \mathcal{S}$.

Proceeding step by step and using the same argument for the next fans in the sequence, we obtain that $\Sigma' = \Sigma^k \in \mathcal{S}$. \square

REMARK 5.8. Note that the proof is still valid if we just require \mathcal{S} to be stellar-stable and closed by blow-ups and blow-downs along faces whose star fan belongs to \mathcal{S} . \diamond

5.7. Examples of shellable properties. The following theorem gives important examples of properties which are shellable in relevant classes of tropical fans.

THEOREM 5.9. *We have the following.*

- (1) *Normality is shellable.*
- (2) *Local irreducibility is shellable.*
- (3) *Div-faithfulness is shellable.*
- (4) *Principality is shellable in the class of locally irreducible fans. More precisely, the property of being both principal and locally irreducible is shellable.*
- (5) *Poincaré duality for the Chow ring is shellable in the class of div-faithful unimodular fans. More precisely, the set of div-faithful fans whose Chow rings verify the Poincaré duality is stable by shellability in $\mathcal{T}_{\text{trop}}^{\text{unim}}$.*
- (6) *The fact to verify both Hodge-Riemann and Hard Lefschetz for the Chow ring is shellable in $\mathcal{T}_{\text{trop}}^{\text{uproj}}$.*
- (7) *Smoothness is shellable.*

PROOF. In order to prove this theorem, we will introduce in Section 5.8 a useful tool called *shellability meta lemma* which allows to simplify the proofs of the different points in the definition of shellability. Then, we will be able to prove points (1) and (2) in Section 5.9.

The other points are treated later: (3) and (4) are the contents of Theorems 6.9 and 6.7, both proved in Section 6. Property (5) is Theorem 6.10, which is also established in the same section.

Point (6) is proved in [AP20b]. The last point is the content of Theorem 10.4 and will be proved in Section 10, using tools we will introduce in Section 8. \square

All the properties of Theorem 5.9 are verified by elements of \mathcal{B}_0 . Hence, all these properties are true in $\mathcal{S}h_{\mathcal{T}_{\text{trop}}^{\text{uproj}}}(\mathcal{B}_0)$. In Section 5.10, we prove that this class contains an interesting class of fans, namely generalized Bergman fans.

5.8. A tool to prove shellability. Checking all the axioms of shellability might be somehow tedious in general. The following meta lemma helps in practice to simplify the verification of these different points.

LEMMA 5.10 (Shellability meta lemma). *Let \mathcal{C} be one of the four standard classes. Let P be a predicate on elements of \mathcal{C} . Assume that the elements of \mathcal{B}_0 verify P .*

Let Σ be an arbitrary fan in \mathcal{C} such that for any face $\sigma \neq \underline{0}$ in Σ , the star fan Σ^σ verifies P^\star , and such that at least one of the following points is verified.

- Σ is the product of two unimodular quasi-projective fans verifying P^\star .
- Σ is the tropical modification of a unimodular quasi-projective fan verifying P^\star with respect to some conewise integral linear function f such that either $\text{div}(f)$ vanishes, or $\text{div}(f)$ is reduced, unimodular, quasi-projective, and verifies P^\star .
- Σ is the blow-up along some ray of a fan verifying P^\star .
- Σ is the blow-down along some ray of a fan verifying P^\star .

If for any fan Σ as above, the property P is verified, then P^\star is shellable in \mathcal{C} .

Moreover, if P is a predicate only depending on the support of the fan, we can restrict ourselves to fans Σ verifying one of the two first points.

Using this lemma, one can now just focus on the following goal: proving that Σ verifies P for each of the four cases. For instance, we have to prove that if Σ is a product of two fans verifying P^\star , then Σ verifies P . To do so, we can assume without loss of generality that the two factors (and thus Σ itself) are unimodular and quasi-projective, and that every proper star fan of Σ verifies P^\star . Most of the time, it is not really needed to assume so many properties to be verified by Σ , and we can proceed in more generality. This being said, we will often assume Σ is unimodular for instance.

The rest of this section is devoted to the proof of the above lemma. First, notice that the very last part of the proposition is clear since blow-ups and blow-downs do not change the support of the fan.

Let $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ be the class of fans verifying P^\star . Since P^\star is stellar-shellable, so is \mathcal{S} . For any integer n , we use the notation $\mathcal{C}^{<n}$, resp. $\mathcal{C}^{\leq n}$, to denote the subset of \mathcal{C} of fans of dimension less than n , resp. at most n . We define $\mathcal{S}^{<n}$ and $\mathcal{S}^{\leq n}$ similarly.

Let us prove that, under the assumption of the lemma, \mathcal{S} is stable by shellability. We prove it by induction on n . Assume that, for some integer n , $\mathcal{S}^{<n}$ is stable by shellability in $\mathcal{C}^{<n}$. This is clear for $n = 1$. We prove that $\mathcal{S}^{\leq n}$ is stable by shellability inside $\mathcal{C}^{\leq n}$.

5.8.1. *Closeness under blow-ups and blow-downs.* We verify that $\mathcal{S}^{\leq n}$ is closed under blow-ups and blow-downs. Let Σ be a fan in $\mathcal{C}^{\leq n}$. Let $\eta \in \Sigma$ be a face and let ρ be the ray in the relative interior of η . Assume that $\Sigma_{(\rho)} \in \mathcal{C}^{\leq n}$. We need to show the equivalence

$$\Sigma \in \mathcal{S}^{\leq n} \iff \Sigma_{(\rho)} \in \mathcal{S}^{\leq n}.$$

We first prove if $\Sigma_{(\rho)} \in \mathcal{S}^{\leq n}$, then $\Sigma \in \mathcal{S}^{\leq n}$. For this, we compare the star fans of Σ and $\Sigma_{(\rho)}$ as follows. Consider a face σ of Σ different from $\underline{0}$. There are three cases.

- First, assume that σ is not comparable with η . In this case, the two star fans $\Sigma_{(\rho)}^\sigma$ and Σ^σ are identical. Since \mathcal{S} is stellar-stable, the first one is in \mathcal{S} by assumption. Hence $\Sigma^\sigma \in \mathcal{S}$.
- Second, we assume that $\sigma > \eta$. In this case, we have $\Sigma^\sigma \simeq \Sigma_{(\rho)}^{\tau \vee \rho}$ where τ is any face of codimension one in σ such that $\tau \wedge \eta < \eta$. Once again $\Sigma^\sigma \in \mathcal{S}$.
- Finally, assume that σ and η are comparable but $\sigma \not> \eta$. Denote by η^σ , resp. ρ^σ , the face corresponding to η , resp. to ρ , in Σ^σ . Then ρ^σ is a ray in the relative interior η^σ . The star fan $\Sigma_{(\rho)}^\sigma$ is then naturally isomorphic to the blow-up star fan $(\Sigma^\sigma)_{(\rho^\sigma)}$. By

assumption, $\Sigma_{(\rho)}^\sigma \in \mathcal{S}^{<n}$. Moreover $(\Sigma^\sigma)^{\eta^\sigma} = \Sigma^{\sigma \vee \eta}$ which is in $\mathcal{S}^{<n}$ by the second point above. Hence, applying the closeness by blow-down of $\mathcal{S}^{<n}$, we deduce that Σ^σ is also in $\mathcal{S}^{<n} \subseteq \mathcal{S}$.

In any case, $\Sigma^\sigma \in \mathcal{S}$ for any face $\sigma \neq \emptyset$. One can apply the assumption of the lemma to deduce that Σ verifies P . Hence, Σ verifies P^\star , thus $\Sigma \in \mathcal{S}^{\leq n}$. This proves the direction \Leftarrow .

To prove the direction \Rightarrow , assume $\Sigma \in \mathcal{S}^{\leq n}$. Take a cone ζ in $\Sigma_{(\rho)}$ different from \emptyset . Apart from the faces which already appeared in the above case analysis for which the reversed argument applies, it remains to consider those faces ζ with $\rho < \zeta$. Denote by $\zeta - \rho$ the face of ζ of codimension one which does not contain ρ . Set $\sigma = (\zeta - \rho) \vee \eta$. Then we get

$$|\Sigma_{(\rho)}^\zeta| \simeq |\Sigma^\sigma| \times \mathbb{R}^k,$$

where $k = |\sigma| - |\zeta| \in \{0, \dots, n-1\}$. Since $\mathcal{S}^{<n}$ is stellar-stable and closed by blow-ups and blow-downs, we can apply Remark 5.8 and Theorem 5.7: $\Sigma_{(\rho)}^\zeta$ is in $\mathcal{S}^{<n}$ if and only if there exists a fan with the same support in $\mathcal{S}^{<n}$. This is the case. Indeed, $\Sigma^\sigma \in \mathcal{S}^{<n}$. Moreover, Λ and $\{\emptyset\}$ belong to \mathcal{S} by assumption. Since $\mathcal{S}^{<n}$ is stable by shellability, we deduce that $\Sigma^\sigma \times \Lambda^k \in \mathcal{S}^{<n}$. This last fan has the same support as $\Sigma_{(\rho)}^\zeta$. Hence, we infer that $\Sigma_{(\rho)}^\zeta \in \mathcal{S}^{<n} \subseteq \mathcal{S}$.

We have proved that $\Sigma_{(\rho)}^\zeta \in \mathcal{S}$ for any nontrivial face $\zeta \in \Sigma_{(\rho)}$. As before, we apply the assumption of the lemma to deduce that $\Sigma_{(\rho)} \in \mathcal{S}^{\leq n}$. Hence, $\mathcal{S}^{\leq n}$ is stable by blow-ups and blow-downs. In particular, we can apply Theorem 5.7 in $\mathcal{S}^{\leq n}$ for the rest of this proof.

5.8.2. *Closeness under products.* We wish to prove that $\mathcal{S}^{\leq n}$ is stable by products inside $\mathcal{C}^{\leq n}$. Let $\tilde{\Sigma} \in \mathcal{C}^{\leq n}$ be the product of two fans in $\mathcal{S}^{\leq n}$. Let us prove that $\tilde{\Sigma} \in \mathcal{S}^{\leq n}$.

Denote this two factors by $\tilde{\Sigma}^1$ and $\tilde{\Sigma}^2$. Let Σ^1 , resp. Σ^2 , be a unimodular quasi-projective subdivision in \mathcal{C} of Σ^1 , resp. of Σ^2 , which exists by Theorem 5.6. Then, clearly Σ^1 has the same support as $\tilde{\Sigma}^1$, and by Theorem 5.7, we get $\Sigma^1 \in \mathcal{S}^{\leq n}$. In the same way, we obtain $\Sigma^2 \in \mathcal{S}^{\leq n}$. Set $\Sigma = \Sigma^1 \times \Sigma^2$. Let $\sigma^1 \times \sigma^2$ be a nontrivial face of Σ . Then

$$\Sigma^{\sigma^1 \times \sigma^2} \simeq (\Sigma^1)^{\sigma^1} \times (\Sigma^2)^{\sigma^2}.$$

By stellar-stability of \mathcal{S} , both factors belong to $\mathcal{S}^{<n}$. Hence, the stability by shellability of $\mathcal{S}^{<n}$ implies that the product belongs to $\mathcal{S}^{<n}$.

Therefore, for any nontrivial face σ of Σ , we get $\Sigma^\sigma \in \mathcal{S}$. Applying the assumption of the lemma, we deduce that Σ verifies P and thus $\Sigma \in \mathcal{S}^{\leq n}$. Since Σ and $\tilde{\Sigma}$ have the same support, we can apply Theorem 5.7 to deduce that $\tilde{\Sigma} \in \mathcal{S}^{\leq n}$ as well. Thus, $\mathcal{S}^{\leq n}$ is stable by products.

5.8.3. *Closeness under tropical modifications.* Let Σ' be a fan in $\mathcal{S}^{\leq n}$. Let f be a conewise integral linear function on Σ' such that $\text{div}(f)$ is reduced. Set $\tilde{\Sigma}' = \mathcal{TM}_f(\Sigma')$. Set $\Delta' = \text{div}(f)$ and assume that Δ' is in $\mathcal{S}^{\leq n}$ (by convention, we assume in this proof that $\emptyset \in \mathcal{S}^{\leq n}$). We wish to prove that $\tilde{\Sigma}'$ is in $\mathcal{S}^{\leq n}$.

Let Σ be a unimodular quasi-projective subdivision of Σ' . Then f is still conewise integral linear on Σ . Moreover, $\Delta := \text{div}(f)$, taken in Σ , is a unimodular quasi-projective subdivision of Δ' . As for the case of the product, Theorem 5.7 implies that both Σ and Δ are in $\mathcal{S}^{\leq n}$. Set $\tilde{\Sigma} = \mathcal{TM}_f(\Sigma)$. A face $\tilde{\sigma}$ of dimension $k > 0$ in $\tilde{\Sigma}$ is of two kinds, either it is equal to δ_\perp for $\delta \in \Delta_{k-1}$ or it coincides with σ_o for $\sigma \in \Sigma_k$. By Proposition 5.2, in the first case, the star fan $\tilde{\Sigma}^{\delta_\perp}$ is isomorphic to Δ^δ and so belongs to \mathcal{S} . So we can now assume that $\tilde{\sigma} = \sigma_o$ for a cone $\sigma \in \Sigma$. Then, $\tilde{\Sigma}^{\sigma_o}$ is the tropical modification of Σ^σ along Δ^σ with respect to the function f^σ . By convention here we set $\Delta^\sigma = \emptyset$ if $\sigma \notin \Delta$. Note that Σ^σ and Δ^σ are in $\mathcal{S}^{<n}$. Since $\mathcal{S}^{<n}$ is stable by shellability, $\mathcal{TM}_{f^\sigma}(\Sigma^\sigma) \in \mathcal{S}^{<n}$. We infer again that $\tilde{\Sigma}^{\sigma_o} \in \mathcal{S}$, as desired.

At this point we have verified that for any nontrivial cone $\tilde{\sigma}$ in $\tilde{\Sigma}$, the star fan $\tilde{\Sigma}^{\tilde{\sigma}}$ is in \mathcal{S} . Using the assumption of the lemma, we deduce that $\tilde{\Sigma}$ verifies P and so $\tilde{\Sigma} \in \mathcal{S}^{\leq n}$. By Theorem 5.7, we deduce that $\tilde{\Sigma}' \in \mathcal{S}^{\leq n}$. Therefore, $\mathcal{S}^{\leq n}$ is closed by tropical modifications.

5.8.4. *End of the proof.* Finally, we have proved that $\mathcal{S}^{\leq n}$ is stable by shellability in $\mathcal{C}^{\leq n}$. By induction, we deduce that \mathcal{S} is stable by shellability, i.e., P^\star is shellable in \mathcal{C} . \square

5.9. Normality and local irreducibility are shellable. In this section, we prove Points (1) and (2) of Theorem 5.9, namely that normality and local irreducibility are shellable. Let us start with normality.

First recall that a tropical fan Σ is shellable if and only if for any face η of codimension one in Σ , Σ^η is isomorphic to the tropical line in some \mathbb{R}^k , i.e., if Σ^η has rays ρ_0, \dots, ρ_k , then the only linear relation of dependence between $\mathbf{e}_{\rho_0}, \dots, \mathbf{e}_{\rho_k}$ is (up to a scalar) $\mathbf{e}_{\rho_0} + \dots + \mathbf{e}_{\rho_k} = 0$. In particular, normality is stellar-stable and only depends on the support (see Proposition 3.4).

Denote by P the predicate for a tropical fan to be normal. Hence $P = P^\star$. Note that elements of \mathcal{B}_0 are normal. Let Σ be a fan verifying the condition of Lemma 5.10. In particular, if the dimension of Σ is at least two, then for any face η of codimension one in Σ , the star fan Σ^η is normal. As a consequence Σ verifies P .

It remains to treat the case where Σ has dimension one. In this special situation, the only nontrivial case is when Σ is the tropical modification of a normal fan, i.e., of the tropical line in \mathbb{R}^k for some integer k . There are two cases.

- First, assume Σ is a non-degenerate tropical modification of the tropical line in \mathbb{R}^k . Let $\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\perp$ be the unit vectors of the rays of Σ with \mathbf{e}_\perp the special one, i.e., the one such that $\mathbf{p}(\mathbf{e}_\perp) = 0$ for the projection map \mathbf{p} associated to the tropical modification. Let a_0, \dots, a_k, a_\perp be some coefficients such that $a_0\mathbf{e}_0 + \dots + a_\perp\mathbf{e}_\perp = 0$. Applying \mathbf{p} we deduce that $a_0\mathbf{p}(\mathbf{e}_0) + \dots + a_k\mathbf{p}(\mathbf{e}_k) = 0$. The normality implies that $a_0 = \dots = a_k$. Moreover, by the balancing condition on Σ , we get $\mathbf{e}_0 + \dots + \mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_\perp$. Thus, $(-a_0 + a_\perp)\mathbf{e}_\perp = 0$. Hence, we should have $a_0 = \dots = a_k = a_\perp$, which proves that Σ is normal.
- Otherwise, Σ is a degenerate tropical modification of a tropical line. One can prove in the same way that Σ is normal in this case.

We have proved that normality fulfills the conditions of Lemma 5.10. Hence, normality is shellable.

Denote by Q the property of being connected in codimension one. Recall that a fan Σ is locally irreducible if and only if it is normal and verifies Q^\star (this is Proposition 3.9). Thanks to Lemma 5.10, one can easily prove that Q^\star is shellable. Since normality is also shellable, it is clear that local irreducibility is shellable. \square

5.10. Shellability of the generalized Bergman fans. Recall that we say a tropical fan Σ is a generalized Bergman fan if it is isomorphic to a tropical fan with the same support as the Bergman fan of a matroid. In this section we prove the following theorem.

THEOREM 5.11. *The Bergman fan of a matroid is shellable in $\mathcal{T}_{\text{trop}}^{\text{uproj}}$. More generally, any unimodular quasi-projective generalized Bergman fan is shellable in $\mathcal{T}_{\text{trop}}^{\text{uproj}}$.*

Note that the Bergman fan of a matroid is quasi-projective. Indeed, the Bergman fan of any matroid is a subfan of the Bergman fan of a free matroid, which is projective. This last observation also implies that any complete fan is a generalized Bergman fan. The above theorem thus implies that projective fans are shellable.

The rest of this section is devoted to recalling basic definitions and properties regarding matroids and their Bergman fans, and then giving the proof of this theorem.

5.10.1. *Matroids.* We start by recalling basic definitions involving matroids and refer to relevant part of [Ox106] for more details.

A matroid can be defined in different equivalent ways, for example by specifying what is called its *collection of independent sets*, or its *collection of bases*, or its *collection of flats*, or its *collection of circuits*, or still by giving its *rank function*. The data of any of these collections determines all the others. The definition of a matroid with respect to independent sets is the following.

DEFINITION 5.12 (Matroid: definition with respect to the family of independent sets). A *matroid* \mathfrak{M} is a pair (E, \mathfrak{I}) consisting of a finite set E called the *ground set* and a collection \mathfrak{I} of subsets of E called the *family of independent sets of* \mathfrak{M} which verifies the following axiomatic properties:

- (1) The empty set is an independent set: $\emptyset \in \mathfrak{I}$.
- (2) (Hereditary property) \mathfrak{I} is stable under inclusion: if $J \subset I$ and $I \in \mathfrak{I}$, then $J \in \mathfrak{I}$.
- (3) (Augmentation property) for two elements $I, J \in \mathfrak{I}$, if $\text{card}(J) < \text{card}(I)$, then one can find an element i in $I \setminus J$ such that $J + i \in \mathfrak{I}$. \diamond

An example of a such a pair (E, \mathfrak{I}) is given by a collection of vectors v_1, \dots, v_m in a finite dimensional vector space H over a field \mathbb{k} . The corresponding matroid \mathfrak{M} has ground set $E = [m]$ and has independent sets \mathfrak{I} consisting of all subsets $I \subseteq [m]$ verifying that the corresponding vectors v_i for $i \in I$ are linearly independent. A matroid \mathfrak{M} of this form is said to be *representable* (over \mathbb{k}). A recent result of Peter Nelson [Nel18] shows that *almost any matroid is non-representable over any field*: denoting by ϵ_m the proportion of representable matroids on the ground set $[m]$ among all the matroids on this ground set, the numbers ϵ_m converge to zero when m goes to infinity.

To a given matroid $\mathfrak{M} = (E, \mathfrak{I})$ we can associate the so-called *rank function* $\text{rk}: 2^E \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ which is defined as follows. Consider a subset $A \subseteq E$. The *rank of* A is then defined by taking the maximum of $\text{card}(I)$ over all independent sets I which are included in A . The *rank of* \mathfrak{M} is then the integer $\text{rk}(E)$. The rank function satisfies what is called the *submodularity property* which is

$$\forall A, A' \subseteq E, \quad \text{rk}(A \cap A') + \text{rk}(A \cup A') \leq \text{rk}(A) + \text{rk}(A').$$

The rank function rk determines \mathfrak{I} as the family of all subsets $I \subseteq E$ which verify $\text{rk}(I) = \text{card}(I)$.

A *basis* of \mathfrak{M} by definition is a maximal independent set. The collection of bases of \mathfrak{M} is denoted by $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$. On the contrary, a *circuit* of \mathfrak{M} is a minimal dependent set, where a set is *dependent* if it is not independent. The collection of circuits of \mathfrak{M} is denoted by $\mathfrak{C}(\mathfrak{M})$.

The *closure* $\text{cl}(A)$ of a subset A in E is defined as

$$\text{cl}(A) := \{a \in E \text{ such that } \text{rk}(A + a) = \text{rk}(A)\}.$$

A *flat* of \mathfrak{M} is a subset $F \subseteq E$ with $\text{cl}(F) = F$. Flats are also equally called *closed sets* and the collection of flats of the matroid \mathfrak{M} is denoted by $\mathcal{C}(\mathfrak{M})$.

For a representable matroid, given by a collection of vectors v_1, \dots, v_m in a vector space $H \simeq \mathbb{k}^n$, the above definitions coincide with the usual ones from linear algebra. For example, a flat F of \mathfrak{M} is a subset of $[m]$ such that $\{v_i\}_{i \in F}$ is the set of all the vectors in the collection which live in a vector subspace of H .

An element e in the ground set is a *loop* if $\{e\}$ is not in \mathfrak{I} , that is, if $\text{rk}(\{e\}) = 0$. Two elements e and e' of E are called *parallel* if $\text{rk}(\{e, e'\}) = \text{rk}(\{e\}) = \text{rk}(\{e'\}) = 1$. A *simple* matroid is a one which neither contains a loop nor parallel elements.

An element $e \in E$ is called a *coloop* if $\text{rk}(E - e) = \text{rk}(E) - 1$. This is equivalent to $E - e$ being a flat.

Finally, a *proper element* in a matroid is an element which is neither a loop nor a coloop.

5.10.2. *Bergman fans.* For a simple matroid \mathfrak{M} on a ground set E , the Bergman fan of \mathfrak{M} denoted by $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ is defined as follows.

Recall that for a subset $A \subseteq E$, we denote by \mathbf{e}_A the sum $\sum_{i \in A} \mathbf{e}_i$. Here $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in E}$ is the standard basis of \mathbb{R}^E . Let $N = \mathbb{Z}^E / \mathbb{Z}\mathbf{e}_E$ and denote by M the dual of N . By an abuse of the notation, we denote by the same notation \mathbf{e}_A the projection in $N_{\mathbb{R}}$ of $\sum_{i \in A} \mathbf{e}_i$. Note in particular that $\mathbf{e}_E = 0$.

The Bergman fan $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ of \mathfrak{M} is a rational fan in $N_{\mathbb{R}}$ of dimension $\text{rk}(\mathfrak{M}) - 1$ defined as follows. First, a *flag of proper flats* \mathcal{F} of \mathfrak{M} is a collection

$$\mathcal{F}: \quad \emptyset \neq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_\ell \neq E$$

consisting of flats F_1, \dots, F_ℓ of \mathfrak{M} . The number ℓ is called the *length* of \mathcal{F} .

To such a flag \mathcal{F} , we associate the rational cone $\sigma_{\mathcal{F}} \subseteq N_{\mathbb{R}}$ generated by the vectors $\mathbf{e}_{F_1}, \mathbf{e}_{F_2}, \dots, \mathbf{e}_{F_\ell}$, that is

$$\sigma_{\mathcal{F}} := \left\{ \lambda_1 \mathbf{e}_{F_1} + \cdots + \lambda_\ell \mathbf{e}_{F_\ell} \mid \lambda_1, \dots, \lambda_\ell \geq 0 \right\}.$$

Obviously, the dimension of $\sigma_{\mathcal{F}}$ is equal to the length of \mathcal{F} .

The *Bergman fan of \mathfrak{M}* is the fan consisting of all the cones $\sigma_{\mathcal{F}}$, \mathcal{F} a flag of proper flats of \mathfrak{M} , i.e.,

$$\Sigma_{\mathfrak{M}} := \left\{ \sigma_{\mathcal{F}} \mid \mathcal{F} \text{ flag of proper flats of } \mathfrak{M} \right\}.$$

It is straightforward using the properties of matroids to check that $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ is a tropical fan of pure dimension $\text{rk}(\mathfrak{M}) - 1$. A *generalized Bergman fan* is any fan isomorphic to a fan of support $|\Sigma_{\mathfrak{M}}|$ (considered with the same lattice) for some matroid \mathfrak{M} .

We now mention some basic properties and examples of generalized Bergman fans. Let \mathfrak{M} be a matroid on the ground set $E = [m]$ and denote by $\mathcal{C}(\mathfrak{M})$ the circuits of \mathfrak{M} . The support of $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ can be described as follows, see [AK06] for more details. Let $\widehat{\Sigma}_{\mathfrak{M}}$ be the set of points $x = (x_i)_{i \in E} \in \mathbb{R}^E$ such that for every circuit $C \in \mathcal{C}(\mathfrak{M})$, the minimum of x_i for $i \in C$ is achieved at least twice. Note that if $x \in \widehat{\Sigma}_{\mathfrak{M}}$, then $x + \lambda(1, \dots, 1) \in \widehat{\Sigma}_{\mathfrak{M}}$ for all $\lambda \in \mathbb{R}$.

PROPOSITION 5.13 (Ardila-Klivans [AK06]). *The support of $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ coincides with the projection of $\widehat{\Sigma}_{\mathfrak{M}}$ in $\mathbb{R}^E / \mathbb{R}(1, \dots, 1)$.*

As we previously said, any complete rational fan Σ is a generalized Bergman fan. To see this, let U_{r+1} be the uniform matroid on the ground set $E = [r + 1]$, with collection of independent sets $\mathcal{I} = 2^{[r+1]}$. In this case, the support of $\Sigma_{U_{r+1}}$ is the full space $\mathbb{R}^r \simeq \mathbb{R}^{r+1} / \mathbb{R}\mathbf{e}_E$.

Let now \mathfrak{M} be a realizable matroid on the ground set $E = [m]$ defined by a collection of non-zero vectors v_1, \dots, v_m in a vector space V over the field \mathbb{k} . We can view v_1, \dots, v_m as elements of the dual vector space of V^* and in this case, we get a collection of hyperplanes $H_1, \dots, H_m \subset V^*$ with $H_j = \ker(v_j: V^* \rightarrow \mathbb{k})$, $j \in [m]$. This leads to a hyperplane arrangement in the projective space $\mathbb{P}(V^*)$ again denoted by an abuse of the notation $H_1, \dots, H_m \subseteq \mathbb{P}(V^*)$.

Let now X be the complement in $\mathbb{P}(V^*)$ of the union $H_1 \cup \cdots \cup H_m$. The collection of linear forms v_j gives an embedding of $X \hookrightarrow T = \text{Spec}(\mathbb{k}[M]) \simeq \mathbb{G}_m^m / \mathbb{G}_m$ with $\mathbb{G}_m = \text{Spec}(\mathbb{k}[x^{\pm 1}])$ the algebraic torus over \mathbb{k} . The quotient $\mathbb{G}_m^m / \mathbb{G}_m$ here refers to the diagonal action of \mathbb{G}_m on \mathbb{G}_m^m . In this case, the tropicalization of $X \hookrightarrow T$ coincides with the Bergman fan $\Sigma_{\mathfrak{M}}$, see [AK06, MS15] for more details.

As mentioned above, we have the following proposition.

PROPOSITION 5.14. *The product of two generalized Bergman fans is again a generalized Bergman fan.*

More precisely, for two matroids \mathfrak{M} and \mathfrak{M}' , we have

$$|\Sigma_{\mathfrak{M}}| \times |\Sigma_{\mathfrak{M}'}| \simeq |\Sigma_{\mathfrak{M} \vee \mathfrak{M}'}|$$

where $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{M}'$ is any *parallel connection* of \mathfrak{M} and \mathfrak{M}' . We give the definition below and refer to [Oxl06, Chapter 7] for more details.

A *pointed matroid* is a matroid \mathfrak{M} on a ground set E with a choice of a distinguished element $* = *_{\mathfrak{M}}$ in E . Let now \mathfrak{M} and \mathfrak{M}' be two pointed matroids on the ground sets E and E' with distinguished elements $*_{\mathfrak{M}} \in E$ and $*_{\mathfrak{M}'} \in E'$, respectively. The parallel connection of \mathfrak{M} and \mathfrak{M}' denoted by $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{M}'$ is by definition the pointed matroid on the ground set $E \vee E' = E \sqcup E' / (*_{\mathfrak{M}} = *_{\mathfrak{M}'})$, the wedge sum of the two pointed sets E and E' , with distinguished element $* = *_{\mathfrak{M}} = *_{\mathfrak{M}'}$, and with the following collection of bases:

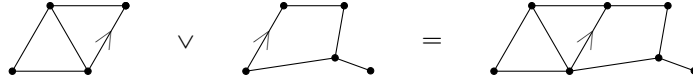
$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(\mathfrak{M} \vee \mathfrak{M}') = & \left\{ B \cup B' \mid B \in \mathfrak{B}(\mathfrak{M}), B' \in \mathfrak{B}(\mathfrak{M}') \text{ with } *_{\mathfrak{M}} \in B \text{ and } *_{\mathfrak{M}'} \in B' \right\} \\ & \cup \left\{ B \cup B' \setminus \{*\} \mid B \in \mathfrak{B}(\mathfrak{M}), B' \in \mathfrak{B}(\mathfrak{M}') \text{ with } *_{\mathfrak{M}} \in B \text{ and } *_{\mathfrak{M}'} \notin B' \right\} \\ & \cup \left\{ B \cup B' \setminus \{*\} \mid B \in \mathfrak{B}(\mathfrak{M}), B' \in \mathfrak{B}(\mathfrak{M}') \text{ with } *_{\mathfrak{M}} \notin B \text{ and } *_{\mathfrak{M}'} \in B' \right\}. \end{aligned}$$

We note that the circuits of $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{M}'$ are given by

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(\mathfrak{M} \vee \mathfrak{M}') = & \mathfrak{C}(\mathfrak{M}) \cup \mathfrak{C}(\mathfrak{M}') \\ & \cup \left\{ (C \cup C') \setminus \{*\} \mid C \in \mathfrak{C}(\mathfrak{M}) \text{ with } *_{\mathfrak{M}} \in C \text{ and } C' \in \mathfrak{C}(\mathfrak{M}') \text{ with } *_{\mathfrak{M}'} \in C' \right\}. \end{aligned}$$

A parallel connection of two matroids \mathfrak{M} and \mathfrak{M}' is the wedge sum of the form $(\mathfrak{M}, e) \vee (\mathfrak{M}', e')$ for choices elements $e \in \mathfrak{M}$ and $e' \in \mathfrak{M}'$ which make pointed matroids out of them.

The analogous operation for graphs consists in gluing two different graphs along distinguished oriented edges as illustrated below. One can check that the relations between the bases, resp. the circuits, of three matroids involved in a parallel connection mimics the relations between the spanning trees, resp. the circuits, of the three graphs.



PROOF OF PROPOSITION 5.14. Let \mathfrak{M} and \mathfrak{M}' be two matroids on ground sets $E = [m]$ and $E' = [m']$, respectively. We show that the support of $\Sigma_{\mathfrak{M}} \times \Sigma_{\mathfrak{M}'}$ is isomorphic, by an integral linear isomorphism on the ambient spaces, to $\Sigma_{\mathfrak{M} \vee \mathfrak{M}'}$.

Consider the following maps

$$\mathbb{R}^{E \vee E'} \xrightarrow{\phi \times \phi'} \mathbb{R}^E \times \mathbb{R}^{E'} \xrightarrow{\pi \times \pi'} \mathbb{R}^E / \mathbb{R}(1, \dots, 1) \times \mathbb{R}^{E'} / \mathbb{R}(1, \dots, 1).$$

Here, π , π' , ϕ and ϕ' are the natural projections.

We follow the notations introduced in Proposition 5.13 and consider the subsets $\widehat{\Sigma}_{\mathfrak{M} \vee \mathfrak{M}'}$, $\widehat{\Sigma}_{\mathfrak{M}}$ and $\widehat{\Sigma}_{\mathfrak{M}'}$ of $\mathbb{R}^{E \vee E'}$, \mathbb{R}^E and $\mathbb{R}^{E'}$, respectively.

Since $\mathfrak{C}(\mathfrak{M} \vee \mathfrak{M}')$ contains $\mathfrak{C}(\mathfrak{M})$ and $\mathfrak{C}(\mathfrak{M}')$, it is clear that $\phi \times \phi'$ restricts to a map $\widehat{\phi} \times \widehat{\phi}'$ from $\widehat{\Sigma}_{\mathfrak{M} \vee \mathfrak{M}'}$ to $\widehat{\Sigma}_{\mathfrak{M}} \times \widehat{\Sigma}_{\mathfrak{M}'}$. Let us denote by $\psi: \widehat{\Sigma}_{\mathfrak{M} \vee \mathfrak{M}'} \rightarrow |\Sigma_{\mathfrak{M}}| \times |\Sigma_{\mathfrak{M}'}|$ the composition of this map with the projection $\pi \times \pi'$. It is clear that ψ is a linear map and that $\ker(\psi) = \mathbb{R}(1, \dots, 1)$. Hence, it remains to prove that ψ is surjective. But the surjectivity can be checked directly by using the description of the circuits in $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{M}'$ given above and by applying Proposition 5.13. \square

5.10.3. *Proof of the shellability of quasi-projective Bergman fans.* We are now in position to give the proof.

PROOF OF THEOREM 5.11. Let \mathfrak{M} be a simple matroid with Bergman fan $\Sigma_{\mathfrak{M}}$. We need to show that any quasi-projective fan Σ with $|\Sigma| = |\Sigma_{\mathfrak{M}}|$ in $\mathcal{T}_{\text{trop}}^{\text{uqproj}}$ is shellable.

By Theorem 5.7, it will be enough to produce one such fan Σ and show it is shellable.

First, we observe that since $\Lambda \in \mathcal{B}_0$, the product Λ^n is shellable. This implies that complete fans in $\mathcal{T}_{\text{trop}}^{\text{uqproj}}$ are all shellable.

It follows that projective fans are shellable. We can therefore assume that \mathfrak{M} is not a free matroid. We now proceed by induction on the size of \mathfrak{M} .

There exists a proper element of \mathfrak{M} that is an element i in the ground set E of M such that $\mathfrak{M} \setminus \{i\}$ has the same rank as \mathfrak{M} . It is well-known that in this case, the tropical modification of $\Sigma_{\mathfrak{M} \setminus \{i\}}$ along the divisor $\Sigma_{\mathfrak{M} \setminus \{i\}} \subset \Sigma_{\mathfrak{M} \setminus \{i\}}$ is a quasi-projective fan of support $|\Sigma_{\mathfrak{M}}|$, see [Sha13b]. By induction, both $\Sigma_{\mathfrak{M} \setminus \{i\}}$ and $\Sigma_{\mathfrak{M} \setminus \{i\}}$ are shellable in $\mathcal{T}_{\text{trop}}^{\text{uqproj}}$. Since $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ is quasi-projective, it is itself shellable in $\mathcal{T}_{\text{trop}}^{\text{uqproj}}$ and the result follows. \square

Example 11.11 shows that the property of *being a generalized Bergman fan* is not shellable, and at the same time provides an example of a shellable tropical fan which is not a generalized Bergman fan.

6. Chow rings of tropical fans

In this section, we study Chow rings of tropical fans. We define a natural cycle class map from the Chow groups to the tropical homology groups of the compactification $\overline{\Sigma}$, and moreover, study the behavior of Chow groups under tropical modifications and blow-ups. From this description, we deduce the shellability of local irreducibility and div-faithfulness stated in Theorem 5.9.

Unless otherwise explicitly stated, Σ will be a simplicial tropical fan; we will assume unimodularity for the cycle class map and for the Poincaré duality.

6.1. The additive structure of the Chow ring of a simplicial fan. Consider a rational simplicial fan Σ in $N_{\mathbb{R}}$. We do not assume in this subsection that Σ is tropical.

Recall that the Chow ring $A^{\bullet}(\Sigma)$ is defined as the quotient

$$A^{\bullet}(\Sigma) = \mathbb{Z}[X_{\rho} \mid \rho \in \Sigma_1] / (I_1 + I_2)$$

where

- I_1 is the ideal generated by the products $x_{\rho_1} \cdots x_{\rho_k}$, for $k \in \mathbb{N}$, such that ρ_1, \dots, ρ_k do not form a cone in Σ , and
- I_2 is the ideal generated by the elements of the form

$$\sum_{\rho \in \Sigma_1} \ell(\mathbf{e}_{\rho}) X_{\rho}$$

for $\ell \in M$ where the primitive vector \mathbf{e}_{ρ} is the generator of $N \cap \rho$.

In order to distinguish to which fan we refer, sometimes we denote by N_{Σ} and M_{Σ} the lattices underlying the definition of Σ , $M_{\Sigma} = N_{\Sigma}^*$, and denote by $I_{\Sigma,1}$ and $I_{\Sigma,2}$ the ideals used above in the definition of $A^{\bullet}(\Sigma)$.

In the following, if σ is a cone of Σ , we set

$$X_{\sigma} := \prod_{\substack{\rho \in \Sigma_1 \\ \rho < \sigma}} X_{\rho}.$$

Let

$$Z^k(\Sigma) := \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_k} \mathbb{Z} X_{\sigma} \hookrightarrow \mathbb{Z}[X_{\rho} \mid \rho \in \Sigma_1]$$

so that we get a well-defined map $Z^k(\Sigma) \rightarrow A^k(\Sigma)$.

LEMMA 6.1 (Localization Lemma). *The map $Z^k(\Sigma) \rightarrow A^k(\Sigma)$ is surjective and its kernel is generated by elements of the form*

$$\sum_{\substack{\rho \in \Sigma_1 \\ \tau \sim \rho}} \ell(\mathbf{e}_\rho)_{X_\rho X_\tau},$$

where $\tau \in \Sigma_{k-1}$ and ℓ is an element in M that is zero on τ .

PROOF. This fact is a special case of a more general result stated in [FMSS95, Theorem 1], which establishes an isomorphism between the Chow groups of a variety coming with an action of a solvable linear algebraic group with the specific Chow groups defined by cycles and relations which are all stable under the action of the group. A generalization of that theorem can be found in [Tot14] and subsequent works [Fra06, Jos01, Pay06].

We will give an elementary combinatorial proof in Section 6.8. □

REMARK 6.2. In the case the fan Σ is unimodular, the above lemma provides an isomorphism $MW_k(\Sigma) \simeq A^k(\Sigma)^*$. Namely, we have a pairing

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: Z^k(\Sigma) \times MW_k(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \langle x_\sigma, (\Sigma_k, w) \rangle \rightarrow w(\sigma)$$

for any $\sigma \in \Sigma_k$. By the balancing condition for the element (Σ_k, w) and Localization Lemma, the pairing vanishes on the kernel of the map $Z^k(\Sigma) \rightarrow A^k(\Sigma)$ and we get the desired map $MW_k(\Sigma) \rightarrow A^k(\Sigma)^*$. A direct application of Localization Lemma shows that this map is actually an isomorphism, see [AHK18, Proposition 5.6]. However, $A^k(\Sigma)$ might have torsion (see Examples 11.8 and 11.10), in which case $A^k(\Sigma)$ is not isomorphic to $MW_k(\Sigma)^*$. We will discuss torsion-freeness of the Chow ring of tropical fans further in Section 7.

For $k = d$ and if Σ is tropical, this gives the degree map $\deg: A^d(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}$ which is obtained by evaluating at the canonical element $[\Sigma] \in MW_d(\Sigma)$. More precisely, the degree map is obtained by sending the element x_σ of $Z^d(\Sigma)$ to 1, for any $\sigma \in \Sigma_d$. ◇

PROPOSITION 6.3 (Künneth formula). *Let Σ and Σ' be two simplicial fans. Then*

$$A^\bullet(\Sigma \times \Sigma') \simeq A^\bullet(\Sigma) \otimes A^\bullet(\Sigma') \quad \text{and} \quad MW_\bullet(\Sigma \times \Sigma') \simeq MW_\bullet(\Sigma) \otimes MW_\bullet(\Sigma').$$

Moreover, the first isomorphism is a ring isomorphism.

In this section, every tensor product is over \mathbb{Z} .

PROOF. Notice that for two simplicial fans Σ and Σ' , we have $M_{\Sigma \times \Sigma'} \simeq M_\Sigma \times M_{\Sigma'}$. Then one can check that

$$\begin{aligned} I_{\Sigma,1} \otimes \mathbb{Z}[x_\rho \mid \rho \in \Sigma'_1] + \mathbb{Z}[x_\rho \mid \rho \in \Sigma_1] \otimes I_{\Sigma',1} &= I_{\Sigma \times \Sigma',1}, \quad \text{and} \\ I_{\Sigma,2} \otimes \mathbb{Z}[x_\rho \mid \rho \in \Sigma'_1] + \mathbb{Z}[x_\rho \mid \rho \in \Sigma_1] \otimes I_{\Sigma',2} &= I_{\Sigma \times \Sigma',2}. \end{aligned}$$

The first part of the statement then follows because the tensor product is right-exact.

For Minkowski weights, there is a perfect pairing $Z^k(\Sigma) \times W_k(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}$ where $W_k(\Sigma) \simeq \mathbb{Z}^{\Sigma_k}$ denotes the group of weights of dimension k on Σ . The orthogonal sum of the different degrees leads to a perfect pairing between $Z^\bullet(\Sigma)$ and $W_\bullet(\Sigma)$. Denote by $Z_0^k(\Sigma)$ the subgroup of $Z^k(\Sigma)$ generated by elements of the form

$$\sum_{\sigma > \tau} \ell(\mathbf{n}_{\sigma/\tau})_{x_\sigma},$$

where $\tau \in \Sigma_{k-1}$ and ℓ is an element in M_Σ that is zero on τ . From the definition of Minkowski weights we infer that $MW_k(\Sigma)$ is equal to $Z_0^k(\Sigma)^\perp$. One can check that

$$Z_0^\bullet(\Sigma) \otimes Z^\bullet(\Sigma') + Z^\bullet(\Sigma) \otimes Z_0^\bullet(\Sigma') = Z_0^\bullet(\Sigma \times \Sigma').$$

Taking the orthogonal of each member in $W_\bullet(\Sigma) \otimes W_\bullet(\Sigma') \simeq W_\bullet(\Sigma \times \Sigma')$, we get the desired isomorphism $MW_\bullet(\Sigma) \otimes MW_\bullet(\Sigma') \simeq MW_\bullet(\Sigma \times \Sigma')$. □

6.2. The cycle class map from the Chow ring to the tropical homology. Let now Σ be a *unimodular* tropical fan. In this section, we prove the following proposition.

PROPOSITION 6.4. *For any integer k , there exists a well-defined map*

$$\psi: A^k(\Sigma) \rightarrow H_{d-k, d-k}(\overline{\Sigma})$$

defined by sending x_σ to the canonical element $\nu_{\overline{\Sigma}_\infty}^\sigma$ associated to $\overline{\Sigma}_\infty^\sigma$.

For any σ , the support of $\nu_{\overline{\Sigma}_\infty}^\sigma$ is the compactification of a tropical fan. Thus, it is a tropical cycle of $\overline{\Sigma}$. One can thus think of the image of $A^\bullet(\Sigma)$ as a part of the homology generated by tropical Chow groups of $\overline{\Sigma}$, endowed with the intersection product.

Recall from Section 2 that for simplicial Σ , and $\tau < \eta$, the face \overline{C}_η^τ of $\overline{\Sigma}$ is denoted by \square_η^τ .

PROOF. The fact that $\nu_{\overline{\Sigma}_\infty}^\sigma$ is a cycle comes from the balancing condition. By Localization Lemma 6.1, it remains to check that, for any $\tau \in \Sigma_{k-1}$ and any $\ell \in M$ orthogonal to τ , $\sum_{\rho \sim \tau} \ell(\mathbf{e}_\rho) \nu_{\overline{\Sigma}_\infty}^{\tau \vee \rho}$ is a boundary. This then shows the natural map $Z^k \rightarrow H_{d-k, d-k}(\overline{\Sigma})$ passes to the quotient and defines the map stated in the proposition.

Since ℓ is orthogonal to τ , it induces a linear map on N^τ which we also denote by ℓ . To each facet $\eta > \tau$, we associate the contraction of ν_η^τ by ℓ denoted $\iota_\ell(\nu_\eta^\tau) \in \mathbf{F}_{d-k}(\square_\eta^\tau)$: if $\rho_1, \dots, \rho_{d-k+1}$ are the rays generating \square_η^τ in $N_{\infty, \mathbb{R}}^\tau$ such that $\nu_\eta^\tau = \mathbf{e}_{\rho_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{\rho_{d-k+1}}$, then

$$\iota_\ell(\nu_\eta^\tau) = \sum_{i=1}^{d-k+1} (-1)^{i-1} \ell(\mathbf{e}_{\rho_i}) \mathbf{e}_{\rho_1} \wedge \dots \wedge \widehat{\mathbf{e}_{\rho_i}} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{\rho_{d-k+1}}.$$

Set $\iota_\ell(\nu_{\overline{\Sigma}_\infty}^\tau) := \sum_{\substack{\eta \in \Sigma_d \\ \eta > \tau}} \ell(\nu_\eta^\tau)$. A direct computation shows that

$$\partial(-\iota_\ell(\nu_{\overline{\Sigma}_\infty}^\tau)) = \sum_{\substack{\rho \in \Sigma_1 \\ \rho \sim \tau}} \ell(\mathbf{e}_\rho) \nu_{\overline{\Sigma}_\infty}^{\tau \vee \rho},$$

which proves the claim, and concludes the proof. \square

There is another natural cycle class map. It is given by the following composition.

$$\phi: A^k(\Sigma) \rightarrow A^{d-k}(\Sigma)^* \simeq \text{MW}_{d-k}(\Sigma) \simeq H_{d-k, d-k}(\overline{\Sigma}).$$

The first map sends α to $(\beta \mapsto \deg(\alpha \cdot \beta))$ and the last map sends a Minkowski weight $(\Sigma_{\leq d-k}, w)$ to $(w(\sigma) \nu_\sigma)_{\sigma \in \Sigma_{d-k}} \in C_{d-k, d-k}(\overline{\Sigma})$. This last map is studied in detail in Section 7 where we prove that it is an isomorphism.

We claim the above two cycle class maps coincide. Let us briefly justify this fact.

Let σ be a face of dimension k in Σ . There is a natural ring morphism $i^*: A^\bullet(\Sigma) \rightarrow A^\bullet(\Sigma_\infty^\sigma)$ described for instance in [AHK18, AP20b]. This map is entirely determined by the property that, for a ray $\rho \not\prec \sigma$, it maps x_ρ to 0 if ρ is not comparable with σ , and to x_{ρ^σ} if $\rho \sim \sigma$ where ρ^σ is the corresponding ray of Σ_∞^σ . Using the arguments in Section 7.4, one can check that the map $A^p(\Sigma) \rightarrow A^p(\Sigma_\infty^\sigma)$ commutes with the restriction map $i^*: H^{p,p}(\overline{\Sigma}) \rightarrow H^{p,p}(\overline{\Sigma}_\infty^\sigma)$. (This is the reason the map between the Chow rings is denoted i^* .) With this in mind, we get the following commutative diagram.

$$\begin{array}{ccccccc} A^0(\Sigma_\infty^\sigma) & \longrightarrow & A^{d-k}(\Sigma_\infty^\sigma)^* & \xrightarrow{\sim} & \text{MW}_{d-k}(\Sigma_\infty^\sigma) & \xrightarrow{\sim} & H_{d-k, d-k}(\overline{\Sigma}_\infty^\sigma) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow i_* \\ A^k(\Sigma) & \longrightarrow & A^{d-k}(\Sigma)^* & \xrightarrow{\sim} & \text{MW}_{d-k}(\Sigma) & \xrightarrow{\sim} & H_{d-k, d-k}(\overline{\Sigma}) \end{array}$$

The second and last vertical maps are the dual of the maps i^* described above. The first vertical map sends 1 to x_σ . In the first row, 1 is mapped to the Minkowski weight $[\Sigma_\infty^\sigma] \in \text{MW}_{d-k}(\Sigma_\infty^\sigma)$ and then to $\nu_{\overline{\Sigma}_\infty}^\sigma$. Hence, the last vertical map sends $\nu_{\overline{\Sigma}_\infty}^\sigma = \psi(x_\sigma)$ to $\phi(x_\sigma)$.

6.3. Chow ring and tropical modifications. In this section, we prove that the Chow ring and the cycle class map behave well with respect to tropical modifications.

Let Σ be a simplicial tropical fan of dimension d and let $\Delta = \text{div}(f)$ be the principal divisor associated to a conewise integral linear function on Σ . Assume that Δ is effective reduced, and let $\tilde{\Sigma}$ be the fan obtained by the open tropical modification of Σ with respect to Σ .

PROPOSITION 6.5. *Notations as above, we have a natural surjective ring morphism*

$$A^\bullet(\Sigma) \twoheadrightarrow A^\bullet(\tilde{\Sigma}).$$

PROOF. Following the notations of Section 5.1, for any ray $\rho \in \Sigma_1$, we denote by ρ_o the corresponding ray in $\tilde{\Sigma}_1$. We assume for now that Δ is nontrivial and denote by ρ the only ray of $\tilde{\Sigma}$ that does not come from Σ , that is, $\rho = \underline{0}_\perp$ where $\underline{0}$ refers to the zero cone $\underline{0}_\Sigma$ of Σ .

Consider the map $\psi: \mathbb{Z}[X_\rho \mid \rho \in \Sigma_1] \rightarrow \mathbb{Z}[X_\rho \mid \rho \in \tilde{\Sigma}_1]$ defined by sending X_ρ to X_{ρ_o} . Let $I_{\Sigma,1}, I_{\Sigma,2}, I_{\tilde{\Sigma},1}$ and $I_{\tilde{\Sigma},2}$ be the ideals appearing in the definition of the Chow rings of Σ and $\tilde{\Sigma}$. We clearly have $\psi(I_{\Sigma,1}) \subseteq I_{\tilde{\Sigma},1}$. Moreover, if ℓ is a linear form on the ambient space of Σ and if \mathbf{p} denotes the projection associated to the tropical modification, since $\mathbf{p}^*\ell$ is zero on the special ray ρ , we get that

$$\psi\left(\sum_{\rho \in \Sigma_1} \ell(\mathbf{e}_\rho)X_\rho\right) = \sum_{\rho \in \Sigma_1} \mathbf{p}^*\ell(\mathbf{e}_{\rho_o})X_{\rho_o} = \sum_{\rho \in \tilde{\Sigma}_1} \mathbf{p}^*\ell(\mathbf{e}_\rho)X_\rho.$$

This implies that $\psi(I_{\Sigma,2}) \subseteq I_{\tilde{\Sigma},2}$. All together, we thus get a well-defined map ψ from $A^\bullet(\Sigma)$ to $A^\bullet(\tilde{\Sigma})$.

To prove the surjectivity, by the definition of ψ , we just need to find a preimage for $X_\rho \in A^\bullet(\tilde{\Sigma})$. For this, take any integral linear form ℓ on \tilde{N} that takes value one on the primitive vector \mathbf{e}_ρ of the special ray ρ . In the Chow ring $A^\bullet(\tilde{\Sigma})$, using ℓ , we can express X_ρ as a linear combination of the X_ρ for $\rho \in \tilde{\Sigma}_1 - \rho$. This linear combination is in the image of ψ , and the surjectivity of ψ follows. In the case $\Delta = \text{div}(f)$ is trivial, the proof is similar. \square

For the sake of completeness, we state the following proposition and refer to Sections 7 and 10 for the definition of the relevant maps used in the statement.

PROPOSITION 6.6. *Let Σ be a unimodular tropical fan. The morphism $A^\bullet(\Sigma) \rightarrow A^\bullet(\tilde{\Sigma})$ commutes via the Hodge isomorphism theorem with the map $H^{\bullet,\bullet}(\Sigma) \rightarrow H^{\bullet,\bullet}(\tilde{\Sigma})$ studied in Section 10. Hence, it also commutes with cycle class maps and we get the following diagram.*

$$\begin{array}{ccc} A^k(\tilde{\Sigma}) & \longrightarrow & H_{d-k,d-k}(\tilde{\Sigma}) \\ \uparrow & & \downarrow \\ A^k(\Sigma) & \longrightarrow & H_{d-k,d-k}(\Sigma) \end{array}$$

PROOF. The proof is straightforward once the different maps have been defined. \square

6.4. Shellability of the principality. In this section we prove the following theorem.

THEOREM 6.7 (Shellability of the principality for locally irreducible tropical fans). *The property for a tropical fan to be both principal and locally irreducible is shellable.*

Local irreducibility assumption is needed here as shown by Example 11.7. To prove the theorem, we need to check the different cases of Lemma 5.10. The fact that elements of \mathcal{B}_0 are locally irreducible and principal is trivial.

6.4.1. *Closeness under products.* Consider two locally irreducible principal tropical fans Σ, Σ' of dimension d and d' , respectively. By Theorem 5.9 (2), local irreducibility is shellable. Hence $\Sigma \times \Sigma'$ is locally irreducible. Let us prove that $\Sigma \times \Sigma'$ is principal at $\underline{0}$. By Künneth formula for Minkowski weights, we get

$$\text{MW}_{d+d'-1}(\Sigma \times \Sigma') = \text{MW}_d(\Sigma) \otimes \text{MW}_{d'-1}(\Sigma') \oplus \text{MW}_{d-1}(\Sigma) \otimes \text{MW}_{d'}(\Sigma').$$

Using the above decomposition, and arguing by symmetry, we only need to verify that divisors of the form $D \times C'$ for $D \in \text{MW}_{d-1}(\Sigma)$ and $C' \in \text{MW}_{d'}(\Sigma')$ are principal.

Since Σ' is locally irreducible, we can suppose that C' is equal to the element $[\Sigma']$ in $\text{MW}_{d'}(\Sigma')$ given by Σ' . Since Σ is principal, we have $D = \text{div}(f)$ for a conewise integral linear function f on Σ . Denote by $\pi: \Sigma \times \Sigma' \rightarrow \Sigma$ the natural projection. We have $\text{div}(\pi^*f) = \text{div}(f) \times [\Sigma'] = D \times C'$, from which the result follows.

6.4.2. *Closeness under tropical modifications.* Let Σ be a locally irreducible principal tropical fan, and let $\tilde{\Sigma}$ be a tropical modification of Σ . Once again $\tilde{\Sigma}$ is locally irreducible. By Lemma 5.10, we can assume without loss of generality that Σ is unimodular.

By Proposition 6.5, the applications $A^1(\Sigma) \rightarrow A^1(\tilde{\Sigma})$ and $A^{d-1}(\Sigma) \rightarrow A^{d-1}(\tilde{\Sigma})$ are both surjective. It follows that the dual map $A^{d-1}(\tilde{\Sigma})^* \rightarrow A^{d-1}(\Sigma)^*$ is injective, and from the explicit description of the map cl^1 given in Proposition 4.8, we get the following commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} A^1(\tilde{\Sigma}) & \longrightarrow & A^{d-1}(\tilde{\Sigma})^* & \xrightarrow{\sim} & \text{MW}_{d-1}(\tilde{\Sigma}) \\ \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A^1(\Sigma) & \longrightarrow & A^{d-1}(\Sigma)^* & \xrightarrow{\sim} & \text{MW}_{d-1}(\Sigma) \end{array}$$

We now show that $\tilde{\Sigma}$ is principal at $\underline{0}$. By Theorem 4.9 this is equivalent to the surjectivity of the map $A^1(\tilde{\Sigma}) \rightarrow \text{MW}_{d-1}(\tilde{\Sigma})$ (saturation is not needed for this part of the theorem). Moreover, since Σ is principal, $A^1(\Sigma) \rightarrow \text{MW}_{d-1}(\Sigma)$ is surjective. Using the above diagram, we obtain the surjectivity of $A^1(\tilde{\Sigma}) \rightarrow \text{MW}_{d-1}(\tilde{\Sigma})$. This in turn implies that $\tilde{\Sigma}$ is principal at $\underline{0}$, as desired.

6.4.3. *Closeness under blow-ups and blow-downs.* Once again, closeness of local irreducibility has already been checked. Consider a tropical fan Σ of dimension d and let σ be a cone of Σ and ρ a ray inside σ . Set $\Sigma' = \Sigma_{(\rho)}$. Assume that Σ and Σ' are principal at any nontrivial face. We need to prove Σ is principal at $\underline{0}_\Sigma$ if and only if Σ' is principal at $\underline{0}_{\Sigma'}$.

Assume first that Σ is principal. Let D be a divisor in Σ' . Let D^ρ be the induced divisor on Σ'^ρ . We infer the existence of a conewise integral linear function f^ρ on Σ'^ρ such that $\text{div}(f^\rho) = D^\rho$. Via the projection map $N_{\mathbb{R}} \rightarrow N_{\mathbb{R}}^\rho$, we view f^ρ as a conewise integral linear function on the fan $\Sigma'' \subset \Sigma'$ consisting of the cones τ comparable with ρ , and extend it to a conewise integral linear function on full Σ' . By an abuse of the notation, we denote this function by f^ρ . The divisor $D - \text{div}(f^\rho)$ on Σ' does not have any of the faces $\tau > \rho$ with $\tau \in \Sigma'_{d-1}$ in its support. This means it can be viewed as a divisor in Σ . Since Σ is principal, we can find a conewise integral linear function f on Σ with $\text{div}(f) = D - \text{div}(f^\rho)$. We infer that D is the divisor of the conewise integral linear function $f + f^\rho$ on Σ' , which shows that D is principal, as desired.

Assume now that Σ' is principal. Let D be divisor in Σ . Viewing D as a divisor in Σ' , we find a conewise integral linear function f on Σ' such that $\text{div}(f) = D$. Take a facet $\eta > \sigma$ in Σ . Denote by $\Sigma'|_\eta$ the fan of support η induced by Σ' . If f is not linear on η , then one can find a face τ of dimension $d-1$ in $\Sigma'|_\eta \setminus \Sigma$ such that $\text{ord}_f(\tau) \neq 0$. This is impossible since D is supported on faces of Σ . Hence f is linear on all the facets of Σ containing σ . Therefore f is conewise integral linear on Σ which proves that D is principal in Σ .

6.4.4. *Proof of Theorem 6.7.* At this point, we have verified all the cases of Lemma 5.10 and this concludes the proof of Theorem 6.7. \square

6.5. Div-faithfulness and stability of the Chow ring under tropical modifications. The following theorem implies the invariance of the Chow ring under tropical modifications under the assumption that the underlying tropical fan Σ is div-faithful.

We follow the preceding notations and denote by $\tilde{\Sigma}$ the tropical modification of Σ along $\Delta = \text{div}(f)$.

THEOREM 6.8 (Stability of the Chow ring under tropical modifications). *Notations as above, let $\tilde{\Sigma}$ be the tropical modification of the tropical fan Σ along Δ . Assume furthermore that Σ is div-faithful. Then we get an isomorphism*

$$A^\bullet(\tilde{\Sigma}) \simeq A^\bullet(\Sigma)$$

between the Chow rings. Moreover, this isomorphism is compatible with the Poincaré duality for Chow rings.

PROOF. If Δ is empty, since Σ is div-faithful, f is linear and $\tilde{\Sigma} \simeq \Sigma$ from which the result follows. Hence, in what follows, we assume $\Delta \neq \emptyset$, and we denote by ρ the special ray of $\tilde{\Sigma}$. We already know there exists a surjective map $\psi: A^\bullet(\Sigma) \rightarrow A^\bullet(\tilde{\Sigma})$ given in Proposition 6.5. We now construct a surjective map $\phi: A^\bullet(\tilde{\Sigma}) \rightarrow A^\bullet(\Sigma)$ and show that $\phi \circ \psi = \text{id}$, from which we get the result.

Consider first the surjective map $\phi: \mathbb{Z}[x_\varrho \mid \varrho \in \tilde{\Sigma}_1] \rightarrow \mathbb{Z}[x_\varrho \mid \varrho \in \Sigma_1]$, which appeared implicitly in the proof of Proposition 6.5. This is defined on the level of generators as follows. Take the linear form ℓ on \tilde{N} that takes value one on the primitive vector \mathbf{e}_ρ of the special ray ρ and that is zero on $N \times \{0\}$. For each ray of $\tilde{\Sigma}$ of the form ϱ_o for $\varrho \in \Sigma_1$, set $\phi(x_{\varrho_o}) := x_\varrho$, and define

$$\phi(x_\rho) = - \sum_{\varrho \in \Sigma} \ell(\mathbf{e}_{\varrho_o}) x_\varrho.$$

Notice that from the equality $\mathbf{e}_{\varrho_o} = (\mathbf{e}_\varrho, f(\mathbf{e}_\varrho))$, we get $\ell(\mathbf{e}_{\varrho_o}) = f(\mathbf{e}_\varrho)$.

We claim that ϕ passes to the quotient. In this case, it is clear that ϕ induces an inverse to ψ , and the isomorphism between $A^\bullet(\Sigma)$ and $A^\bullet(\tilde{\Sigma})$ stated in the theorem follows.

Denote by $I_{\Sigma,1}$, $I_{\Sigma,2}$, $I_{\tilde{\Sigma},1}$ and $I_{\tilde{\Sigma},2}$ the ideals appearing in the definition of the Chow rings of Σ and $\tilde{\Sigma}$, as previously.

We show that we have $\phi(I_{\tilde{\Sigma},2}) \subseteq I_{\Sigma,2}$ and $\phi(I_{\tilde{\Sigma},1}) \subseteq I_{\Sigma,1} + I_{\Sigma,2}$, which allow to pass to the quotient and get the above map on the level of Chow rings.

To show that $\phi(I_{\tilde{\Sigma},2}) \subseteq I_{\Sigma,2}$, consider an integral linear form l on \tilde{N} . Let $l' := l - l(\mathbf{e}_\rho)\ell$. We have $l'(\mathbf{e}_\rho) = 0$ and so l' gives an integral linear form on $N \simeq \tilde{N}/\mathbb{Z}\mathbf{e}_\rho$. We have

$$\phi\left(\sum_{\varrho \in \tilde{\Sigma}_1} l(\mathbf{e}_\varrho) x_\varrho\right) = l(\mathbf{e}_\rho)\phi(x_\rho) + \sum_{\varrho \in \Sigma_1} l(\mathbf{e}_{\varrho_o})\phi(x_{\varrho_o}) = \sum_{\varrho \in \Sigma_1} l'(\mathbf{e}_\varrho) x_\varrho.$$

This shows that $\phi(I_{\tilde{\Sigma},2}) \subseteq I_{\Sigma,2}$.

We now consider the image of $I_{\tilde{\Sigma},1}$. Consider a collection of distinct rays ρ_1, \dots, ρ_k of $\tilde{\Sigma}$, $k \in \mathbb{N}$, and suppose they are not comparable so that we have $x_{\rho_1} \dots x_{\rho_k} \in I_{\tilde{\Sigma},1}$. Two cases can happen.

- (1) Either ρ_1, \dots, ρ_k are different from ρ .
- (2) Or one of the rays, say ρ_1 , is equal to ρ .

Consider first the case (1). Then we have $\rho_j = (\varrho_j)_o$ for $j = 1, \dots, k$ and rays ϱ_j in Σ . Moreover, the rays $\varrho_1, \dots, \varrho_k$ do not form a cone in Σ and we get $\phi(X_{\rho_1} \dots X_{\rho_k}) = X_{\varrho_1} \dots X_{\varrho_k} \in I_{\Sigma,1}$, as desired.

We now study the case (2). Let as in the previous case, $\rho_j = (\varrho_j)_o$ for $j = 2, \dots, k$ and rays ϱ_j in Σ . At this point, two cases can happen. Either, these rays do not form a cone in Σ in which case we get

$$\phi(X_{\rho_1} X_{\rho_2} \dots X_{\rho_k}) = \phi(X_{\rho}) X_{\varrho_2} \dots X_{\varrho_k} \in I_{\Sigma,1}.$$

Or, $\varrho_2, \dots, \varrho_k$ form a cone τ in Σ . Note that $\tau \notin \Delta$: otherwise τ_o and ρ would be comparable which would contradict our assumption. This implies that the divisor induced by $\text{div}(f)$ on Σ^τ is trivial. In particular, taking an integral linear function l on $N_{\mathbb{R}}$ which has restriction to τ equal to f , the difference $f^\tau := f - l$ induces a conewise integral linear function $\pi_*(f^\tau)$ on Σ^τ , where $\pi: N \rightarrow N^\tau$ is the projection, and $\text{div}(\pi_*(f^\tau)) = 0$. Since Σ is div -faithful at τ , this implies that $\pi_*(f^\tau)$ coincides with an integral linear function l^τ on $N_{\mathbb{R}}^\tau$. All together, this means f coincides with the restriction of the linear function $l_\tau := l + \pi^*(l^\tau)$ on all faces σ of Σ with $\sigma > \tau$. Set $\tilde{f} = f - l_\tau$. In particular, \tilde{f} is zero on every ray comparable with τ .

We now observe that

$$\phi(X_\rho) = - \sum_{\varrho \in \Sigma_1} f(\mathbf{e}_\varrho) X_\varrho = - \sum_{\varrho \in \Sigma_1} \tilde{f}(\mathbf{e}_\varrho) X_\varrho - \sum_{\varrho \in \Sigma_1} l_\tau(\mathbf{e}_\varrho) X_\varrho,$$

and so, using the notation $X_\tau = X_{\varrho_2} \dots X_{\varrho_k}$,

$$\phi(X_{\rho_1} X_{\rho_2} \dots X_{\rho_k}) = \phi(X_\rho) X_\tau = - \sum_{\varrho \in \Sigma_1} \tilde{f}(\mathbf{e}_\varrho) X_\varrho X_\tau - \left(\sum_{\varrho \in \Sigma_1} l_\tau(\mathbf{e}_\varrho) X_\varrho \right) X_\tau.$$

Since $\tilde{f}(\mathbf{e}_\varrho)$ is trivial if ϱ is comparable with τ , the first sum is in $I_{\Sigma,1}$. Since $l_\tau \in M$, the second term is in $I_{\Sigma,2}$.

In any case, we conclude that $\phi(X_{\rho_1} X_{\rho_2} \dots X_{\rho_k}) \in I_{\Sigma,1} + I_{\Sigma,2}$, as desired. This finishes the proof of the theorem. \square

6.6. Shellability of div -faithfulness. In this section we prove the following.

THEOREM 6.9. *The property for a tropical fan to be div -faithful is shellable.*

Once again, we study the different cases of Lemma 5.10.

6.6.1. *Closeness under products.* Consider two tropical fans Σ and Σ' that are div -faithful. It will be enough to show that $\Sigma \times \Sigma'$ is div -faithful at $\underline{0}$. We can assume without loss of generality that Σ and Σ' are unimodular (by Lemma 5.10) and saturated at $\underline{0}$ (see Remark 4.10).

We use the decomposition

$$\text{MW}_{d+d'-1}(\Sigma \times \Sigma') = \text{MW}_{d-1}(\Sigma) \otimes \text{MW}_{d'}(\Sigma') \oplus \text{MW}_d(\Sigma) \otimes \text{MW}_{d'-1}(\Sigma').$$

We have injections $\mathbb{Z} = A^0(\Sigma) \hookrightarrow \text{MW}_d(\Sigma)$ and $A^0(\Sigma') \hookrightarrow \text{MW}_{d'}(\Sigma')$. We have moreover a decomposition

$$A^1(\Sigma \times \Sigma') \simeq A^1(\Sigma) \otimes A^0(\Sigma') \oplus A^0(\Sigma) \otimes A^1(\Sigma').$$

The injectivity of the map $A^1(\Sigma \times \Sigma') \rightarrow \text{MW}_{d+d'-1}(\Sigma \times \Sigma')$ now follows from the injectivity of the corresponding maps for Σ and Σ' , given by Theorem 4.9, which shows that $\Sigma \times \Sigma'$ is div -faithful at $\underline{0}$, as desired.

6.6.2. *Closeness under tropical modifications.* Let Σ be a tropical fan that is div -faithful. Let $\tilde{\Sigma}$ be a tropical modification of Σ and let us prove that $\tilde{\Sigma}$ is div -faithful at $\underline{0}$. Once again we assume without loss of generality that Σ is unimodular and saturated at $\underline{0}$.

By Theorem 6.8, we get isomorphisms $A^1(\Sigma) \simeq A^1(\tilde{\Sigma})$ and $A^{d-1}(\Sigma) \simeq A^{d-1}(\tilde{\Sigma})$. The injectivity of the map $A^1(\tilde{\Sigma}) \rightarrow \text{MW}_{d-1}(\tilde{\Sigma})$ then follows from the injectivity of $A^1(\Sigma) \rightarrow \text{MW}_{d-1}(\Sigma)$. This implies that $\tilde{\Sigma}$ is div -faithful at $\underline{0}$.

6.6.3. *Closeness under blow-ups and blow-downs.* Consider a fan Σ , and let σ be a cone of Σ and ρ a ray inside σ . Set $\Sigma' = \Sigma_{(\rho)}$. Assume that Σ and Σ' are div-faithful at any nontrivial faces. Let us prove that Σ is div-faithful at $\underline{0}$ if and only if Σ' is div-faithful at $\underline{0}$.

First assume that Σ' is div-faithful. Let f be a conewise integral linear function on Σ such that $\text{div}(f) = 0$. Then f is also a conewise linear function on Σ' , and since its divisor is trivial, it is linear. This proves the direction \Leftarrow .

In the other direction, assume f is a conewise integral linear function on Σ' whose divisor is trivial. Then the induced conewise integral linear function f^ρ on Σ^ρ also verifies $\text{div}(f^\rho) = 0$. By assumption, Σ^ρ is div-faithful. Thus, f^ρ is integral linear, and we deduce that f is integral linear on each face $\eta > \sigma$ of Σ . Thus, f is conewise integral linear on Σ . We infer that f is globally linear which concludes this part of the proof.

6.6.4. *Proof of Theorem 6.9.* We have studied all the cases of Lemma 5.10. This concludes the proof of Theorem 6.9. \square

6.7. Shellability of the Poincaré duality for the Chow ring of div-faithful unimodular fans. Let Σ be a unimodular tropical fan of dimension d . In this section, we denote by $\text{PD}_{\text{Chow}}(\Sigma)$ the Poincaré duality for the Chow ring of Σ . This is the statement that the map

$$A^\bullet(\Sigma) \times A^{d-\bullet}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (\alpha, \beta) \rightarrow \text{deg}(\alpha \cdot \beta),$$

is a perfect pairing. Recall that the degree map $\text{deg}: A^d(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}$ is given by $[\Sigma] \in \text{MW}_d(\Sigma) \simeq A^d(\Sigma)^\star$. In particular, it maps any element x_σ , σ a facet of Σ , to 1.

In case of Poincaré duality for the Chow ring, $A^d(\Sigma) \simeq \mathbb{Z}$ has a natural generator of degree 1 that we denote ω_Σ . We have $\omega_\Sigma = x_\sigma$ for any facet $\sigma \in \Sigma_d$, this last element being independent of the choice of the facet.

THEOREM 6.10. *The set of div-faithful fans whose Chow rings verify the Poincaré duality is stable by shellability in $\mathcal{T}_{\text{trop}}^{\text{unim}}$.*

As a corollary, we get the following theorem.

THEOREM 6.11. *The property $\text{PD}_{\text{Chow}}^\star$ is shellable in $\mathcal{T}_{\text{trop}}^{\text{unim}}$.*

PROOF. If Σ verifies PD_{Chow} , then it is div-faithful at $\underline{0}$. Indeed, in this case, we have $A^1(\Sigma^\sigma) \simeq \text{MW}_{d-1}(\Sigma^\sigma)$. Hence $\text{PD}_{\text{Chow}}^\star$ implies div-faithfulness. The theorem now follows from Theorem 6.10 via Lemma 5.10. \square

REMARK 6.12. By Remark 7.6 in the next section, the Poincaré duality for Chow ring is implied by the cohomological Poincaré duality for $\overline{\Sigma}$. However, the two notions could be a priori different since the Poincaré duality for Chow groups does not imply the vanishing of the cohomology groups $H^{p,q}$ of canonical compactifications for bidegrees $p > q$. This is for instance the case for Example 11.1 with rational coefficients. The authors are not aware of any such example for integral coefficients.

Example 11.3 describes a fan Σ which verifies PD_{Chow} and such that $\overline{\Sigma}$ verifies the Poincaré duality, but Σ is not smooth and does not verify $\text{PD}_{\text{Chow}}^\star$. This shows that PD_{Chow} is not a local property. \diamond

The rest of this section is devoted to the proof of this theorem. This time, we cannot use Lemma 5.10 since PD_{Chow} is not local as we discussed in the previous remark. We have already proved that div-faithfulness is shellable. Hence in what follows we only focus on the shellability of PD_{Chow} .

6.7.1. *Closeness under products.* Let Σ and Σ' be two unimodular tropical fans of dimension d and d' , respectively. We know that we have a ring isomorphism

$$A^\bullet(\Sigma \times \Sigma') \simeq A^\bullet(\Sigma) \otimes A^\bullet(\Sigma').$$

Moreover, the dual isomorphism sends $\text{deg}_{\Sigma \times \Sigma'}$ to $\text{deg}_{\Sigma} \otimes \text{deg}_{\Sigma'}$. We infer that $\text{PD}_{\text{Chow}}(\Sigma \times \Sigma')$ holds provided that $\text{PD}_{\text{Chow}}(\Sigma)$ and $\text{PD}_{\text{Chow}}(\Sigma')$ both hold.

6.7.2. *Closeness under tropical modifications.* Let Σ be a div-faithful tropical fan and let $\tilde{\Sigma}$ be a tropical modification of Σ . Applying Theorem 6.8, we obtain the Chow stability of tropical modification, namely that the natural ring morphism $A^\bullet(\Sigma) \rightarrow A^\bullet(\tilde{\Sigma})$ is an isomorphism. By compatibility of the degree maps, we conclude that $\text{PD}_{\text{Chow}}(\Sigma)$ implies $\text{PD}_{\text{Chow}}(\tilde{\Sigma})$.

6.7.3. *Closeness under blow-ups and blow-downs.* Consider a unimodular fan Σ of dimension d and let σ be a cone in Σ . Let $\Sigma' = \mathcal{B}l_\sigma(\Sigma)$ be the unimodular star subdivision of Σ obtained by star subdividing the cone σ and denote by ρ the new ray in Σ' , that is, $\rho = \mathbb{R}_+(\mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_k)$ with $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ the primitive vectors of the rays of σ . Recall that for any $\sigma \in \Sigma$, we have a surjective map $i_{0 < \sigma}^* : A^\bullet(\Sigma) \rightarrow A^\bullet(\Sigma^\sigma)$ described in Section 6.2. We state the following useful result.

THEOREM 6.13 (Keel’s lemma). *Let \mathfrak{J} be the kernel of the surjective map $i_{0 < \sigma}^* : A^\bullet(\Sigma) \rightarrow A^\bullet(\Sigma^\sigma)$ and let*

$$P(T) := \prod_{\substack{\varrho < \sigma \\ |\varrho|=1}} (X_\varrho + T).$$

We have

$$A^\bullet(\Sigma') \simeq A^\bullet(\Sigma)[T]/(\mathfrak{J}T + P(T)).$$

The isomorphism is given by the map

$$\chi : A^\bullet(\Sigma)[T]/(\mathfrak{J}T + P(T)) \xrightarrow{\simeq} A^\bullet(\Sigma')$$

which sends T to $-X_\rho$ and which verifies

$$\forall \varrho \in \Sigma_1, \quad \chi(X_\varrho) = \begin{cases} X_\varrho + X_\rho & \text{if } \varrho < \sigma, \\ X_\varrho & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In particular this gives a vector space decomposition of $A^\bullet(\Sigma')$ as

$$(6.1) \quad A^\bullet(\Sigma') \simeq A^\bullet(\Sigma) \oplus A^{\bullet-1}(\Sigma^\sigma)T \oplus \dots \oplus A^{\bullet-|\sigma|+1}(\Sigma^\sigma)T^{|\sigma|-1}.$$

PROOF. This follows from [Kee92, Theorem 1 in the appendix] for the map of toric varieties $\mathbb{P}_{\Sigma'} \rightarrow \mathbb{P}_\Sigma$. Here $P(T)$ is the polynomial in $A^\bullet(\mathbb{P}_\Sigma)$ whose restriction in $A^\bullet(\mathbb{P}_{\Sigma^\sigma})$ is the Chern polynomial of the normal bundle for the inclusion of toric varieties $\mathbb{P}_{\Sigma^\sigma} \hookrightarrow \mathbb{P}_\Sigma$.

For an elementary proof, one can follow the proof of an analogous statement in [AHK18]. □

Assume now $\text{PD}_{\text{Chow}}(\Sigma^\sigma)$. We have to show the equivalence of $\text{PD}_{\text{Chow}}(\Sigma)$ and $\text{PD}_{\text{Chow}}(\Sigma')$. We follow the proof of an analogue result in [AHK18].

By Keel’s lemma, we get $A^d(\Sigma) \simeq A^d(\Sigma')$, and under this isomorphism, the canonical element ω_Σ gets identified with the canonical element $\omega_{\Sigma'}$.

Let α be a lifting of the canonical element ω_{Σ^σ} in $A^{d-|\sigma|}(\Sigma)$, for the restriction map $i_\sigma^* : A^\bullet(\Sigma) \rightarrow A^\bullet(\Sigma^\sigma)$, so that we have $\omega_{\Sigma^\sigma} = i_\sigma^*(\alpha)$. We can obtain such a lifting by fixing a top dimensional cone in Σ^σ , i.e., a cone of the form η^σ for $\eta \in \Sigma_d$ and $\eta > \sigma$. Denoting by τ the face of η generated by all the rays of η not included in σ , we get

$$\omega_{\Sigma^\sigma} = X_{\eta^\sigma} = \prod_{\substack{\zeta < \eta^\sigma \\ |\zeta|=1}} X_\zeta$$

and a lifting of ω_{Σ^σ} in $A^{d-|\sigma|}(\Sigma)$ is given by

$$\alpha = X_\tau = \prod_{\substack{\varrho < \tau \\ |\varrho|=1}} X_\varrho.$$

We now claim that the canonical element $\omega_{\Sigma'}$ can be identified with the element $-T^{|\sigma|}\alpha$ in $A^\bullet(\Sigma') \simeq A^\bullet(\Sigma)[T]/(\mathfrak{J}T + P(T))$. Indeed, using the identity $P(T) = 0$, we get

$$-T^{|\sigma|} = \sum_{j=1}^{|\sigma|} S_j T^{|\sigma|-j}$$

with S_j referring to the j -th symmetric function in the variables $x_\rho \in A^1(\Sigma')$ for ρ a ray in σ . Therefore,

$$-T^{|\sigma|}\alpha = \sum_{j=1}^{|\sigma|} S_j \alpha T^{|\sigma|-j} = \prod_{\substack{\rho < \sigma \\ |\rho|=1}} x_\rho \cdot \alpha + \sum_{j=1}^{|\sigma|-1} S_j \alpha T^{|\sigma|-j}.$$

Since $\omega_{\Sigma^\sigma} = i_\sigma^*(\alpha)$ lives in the top-degree part of $A^\bullet(\Sigma^\sigma)$, the products $S_j \alpha$ all belong to \mathfrak{J} . We infer that the terms of the sum are all vanishing for $j = 1, \dots, |\sigma| - 1$, and

$$-T^{|\sigma|}\alpha = \prod_{\substack{\rho < \sigma \\ |\rho|=1}} x_\rho \cdot \alpha = x_\sigma \cdot x_\tau = \omega_\Sigma = \omega_{\Sigma'}.$$

We thus obtain the following commutative diagram.

$$\begin{array}{ccccc} A^{d-|\sigma|}(\Sigma^\sigma) & \xrightarrow[\sim]{\cdot(-T^{|\sigma|})} & A^d(\Sigma') & \xrightarrow{\sim} & A^d(\Sigma) \\ & \searrow \sim & \downarrow \text{deg} & \swarrow \sim & \\ & & \mathbb{Z} & & \end{array}$$

Let us denote by $\Psi_k(\Sigma')$ the pairing $A^k(\Sigma') \times A^{d-k}(\Sigma') \rightarrow \mathbb{Z}$. We use similar notations for Σ and Σ^σ . The above diagram allows us to describe the pairing induced by $\Psi_k(\Sigma')$ on the different parts of the decomposition given by the Keel's lemma.

- Between $A^k(\Sigma)$ and $A^{d-k}(\Sigma)$ we get the pairing $\Psi_k(\Sigma)$.
- For any integer number i , between $A^{k-i}(\Sigma^\sigma)T^i$ and $A^{d-|\sigma|-k+i}(\Sigma^\sigma)T^{|\sigma|-i}$ we get the pairing $-\Psi_{k-i}(\Sigma^\sigma)$.
- For integers $i < j$, between $A^{k-i}(\Sigma^\sigma)T^i$ and $A^{d-|\sigma|-k+j}(\Sigma^\sigma)T^{|\sigma|-j}$ the pairing is trivial since $A^{d-|\sigma|+j-i}(\Sigma^\sigma)$ is trivial.
- For any integer $i < |\sigma|$, the pairing between $A^k(\Sigma)$ and $A^{d-k-i}(\Sigma^\sigma)T^i$ is trivial. Indeed, the product lives in $A^{d-i}(\Sigma^\sigma)T^i$ which is trivial since $d - i > d - |\sigma|$.

We do not need to compute the pairing between the other parts. The bilinear form $\Psi_k(\Sigma')$ can be written in the form of a block matrix consisting of bilinear maps, as follows.

$$\begin{array}{l} A^k(\Sigma) \\ A^{k-1}(\Sigma^\sigma)T \\ \vdots \\ A^{k-|\sigma|+1}(\Sigma^\sigma)T^{|\sigma|-1} \end{array} \begin{pmatrix} A^{d-k}(\Sigma) & A^{d-k-|\sigma|+1}(\Sigma^\sigma)T^{|\sigma|-1} & \dots & A^{d-k-1}(\Sigma^\sigma)T \\ \Psi_k(\Sigma) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\Psi_{k-1}(\Sigma^\sigma) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & * & \dots & -\Psi_{k-|\sigma|+1}(\Sigma^\sigma) \end{pmatrix}$$

The matrix is lower triangular. On the diagonal, all the bilinear maps apart from the first one are non-degenerate, since we have $\text{PD}_{\text{Chow}}(\Sigma^\sigma)$. Thus, $\Psi_k(\Sigma')$ is non-degenerate if and only if $\Psi_k(\Sigma)$ is non-degenerate. This shows the properties $\text{PD}_{\text{Chow}}(\Sigma)$ and $\text{PD}_{\text{Chow}}(\Sigma')$ are equivalent provided that $\text{PD}_{\text{Chow}}(\Sigma^\sigma)$ holds.

6.7.4. *Proof of Theorem 6.10.* At this point, we have verified all the needed properties for the shellability of the property PD_{Chow} in $\mathcal{T}_{\text{Trop}}^{\text{unim}}$, and this concludes the proof of Theorem 6.10. \square

6.8. Elementary proof of Localization Lemma 6.1. In this section, we give a combinatorial self-contained proof of Lemma 6.1. Although the proof is somehow technical, we hope it could be of independent interest for several reasons. First, the result is used by Adiprasito-Huh-Katz [AHK18] in order to prove the duality between the Chow groups and the Minkowski weights of unimodular simplicial fans. While almost all the proofs in that paper are written to be accessible to a combinatorial audience, this one refers to a more general result taken from [FMSS95] on Chow rings of algebraic varieties admitting a solvable group action. The proof we give is elementary and arguably more transparent. Second, combined with a similar in spirit theorem proved in [Ami16] for the combinatorial Chow rings of products of graphs, in connection with semi-stable reduction theorem, it suggests a more general phenomenon concerning the combinatorial part of the Chow rings of algebraic varieties that certainly merits a further study.

6.8.1. *Admissible expansions.* Let Σ be any simplicial rational fan. It will be convenient in the course of the proof to introduce the following notation. For an element $\ell \in M = N^*$, let

$$X_\ell := \sum_{\rho \in \Sigma_1} \ell(\mathbf{e}_\rho) X_\rho.$$

Let B^k be the group of homogeneous polynomials of degree k in $\mathbb{Z}[X_\rho \mid \rho \in \Sigma_1]$. Recall that I_1 is the ideal generated by the products $X_{\rho_1} \cdots X_{\rho_s}$, for $s \in \mathbb{N}$, such that ρ_1, \dots, ρ_s do not belong to a same cone in Σ , and that I_2 is the ideal generated by the elements X_ℓ for $\ell \in M$.

Recall that $Z^k = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_k} \mathbb{Z}X_\sigma$, which is thus a subgroup of B^k . We need to show that $Z^k \rightarrow B^k/B^k \cap (I_1 + I_2)$ is surjective and to determine its kernel. We will prove the latter, the former becomes clear in the course of the proof; one can also find a proof of the surjectivity in [AHK18].

Let K^k be the subgroup of B^k generated by elements of the form

$$\sum_{\substack{\rho \in \Sigma_1 \\ \rho \sim \tau}} \ell(\mathbf{e}_\rho) X_\rho X_\tau,$$

for $\tau \in \Sigma_{k-1}$ and ℓ an element in M which is orthogonal to τ . Consider an element a of $B^k \cap (I_1 + I_2)$ which belongs to Z^k . We want to prove that $a \in K^k$.

First, notice that we can write a as an element of I_1 plus a sum of monomials of the form $X_\ell X_{\varrho_2} \cdots X_{\varrho_k}$ for some $\ell \in M = N^*$ and rays $\varrho_2, \dots, \varrho_k$. The first step is to prove the following result.

CLAIM 6.14. *Each element $a \in B^k \cap (I_1 + I_2)$ can be written as a sum consisting of an element in I_1 and a sum consisting of elements of the form $X_{\ell_1} X_{\ell_2} \cdots X_{\ell_s} X_\tau$ for $s \in \mathbb{N}$, $\tau \in \Sigma_{k-s}$, and $\ell_1, \dots, \ell_s \in M$.*

An expansion of the form described in the claim for an element $a \in B^k \cap (I_1 + I_2)$ will be called *admissible* in the sequel.

PROOF. To prove the above claim, it will be enough to prove the statement for an element a of the form $X_{\ell_1} \cdots X_{\ell_s} X_{\varrho_{s+1}}^{\kappa_{s+1}} \cdots X_{\varrho_r}^{\kappa_r}$ with $\kappa_{s+1} \geq \cdots \geq \kappa_r$ and $\varrho_{s+1}, \dots, \varrho_r$ distinct and comparable, i.e., they form the rays of some cone τ of dimension $r - s$. Actually, the case $s = 1$ will already give the result, but considering arbitrary values for s allows to proceed by induction on the lexicographical order of the k -tuples of non-negative integer numbers.

To a term of the form $X_{\ell_1} \cdots X_{\ell_s} X_{\varrho_{s+1}}^{\kappa_{s+1}} \cdots X_{\varrho_r}^{\kappa_r}$ with $\kappa_{s+1} \geq \cdots \geq \kappa_r$ we associate the k -tuple of integers $(\kappa_{s+1}, \dots, \kappa_r, 0, \dots, 0)$. We now show that an element as above with $\kappa_{s+1} > 1$ can

be rewritten as the sum of an element of I_1 and a sum of terms of the above form having a k -tuple with strictly smaller lexicographical order.

So suppose $\kappa_{s+1} > 1$. We take a linear form l which takes the value one on $\epsilon_{\varrho_{s+1}}$ and 0 on the other rays $\varrho_{s+2}, \dots, \varrho_r$. This is doable since τ is simplicial. Using

$$X_l = X_{\varrho_{s+1}} + \sum_{\substack{\rho \in \Sigma_1 \\ \rho \prec \tau}} l(\epsilon_\rho) X_\rho,$$

we get

$$\begin{aligned} X_{\ell_1} \cdots X_{\ell_s} X_{\varrho_{s+1}}^{\kappa_{s+1}} \cdots X_{\varrho_r}^{\kappa_r} &= X_{\ell_1} \cdots X_{\ell_s} X_l X_{\varrho_{s+1}}^{\kappa_{s+1}-1} X_{\varrho_{s+2}}^{\kappa_{s+2}} \cdots X_{\varrho_r}^{\kappa_r} \\ &\quad - \sum_{\substack{\rho \in \Sigma_1 \\ \rho \prec \tau}} l(\epsilon_\rho) X_{\ell_1} \cdots X_{\ell_s} X_\rho X_{\varrho_{s+1}}^{\kappa_{s+1}-1} X_{\varrho_{s+2}}^{\kappa_{s+2}} \cdots X_{\varrho_r}^{\kappa_r}. \end{aligned}$$

Each term in the right hand side is either in I_1 or is of the form described above with a lower lexicographic order. Proceeding by induction, we get the claim. \square

So each element $a \in B^k \cap (I_1 + I_2)$ is the sum of an element of I_1 plus a sum of terms of the form $X_{\ell_1} \cdots X_{\ell_s} X_\tau$ with $1 \leq s < k$ and for a cone $\tau \in \Sigma_{k-s}$.

6.8.2. *An auxiliary filtration.* Using admissible expansions, we now introduce an increasing filtration \mathcal{F}_\bullet on $Z^k \cap (I_1 + I_2)$ as follows.

First, for each $s > 0$, denote by \mathcal{G}_s the group generated by the elements of B^k of the form $X_{\ell_1} \cdots X_{\ell_s} X_\tau$ for some linear forms $\ell_1, \dots, \ell_s \in M$ and for some $\tau \in \Sigma_{k-s}$. Moreover, for $s = 0$, define the subgroup $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{G}_1$ as the one generated by the elements of the form $X_\ell X_\tau$ for some $\tau \in \Sigma_{k-1}$ and some linear form ℓ orthogonal to τ .

For any $t \geq 0$, let $\mathcal{H}_t := \mathcal{G}_0 + \cdots + \mathcal{G}_t$ and define $\mathcal{F}_t := Z^k \cap (\mathcal{H}_t + I_1)$. Note that \mathcal{H}_t is the subgroup generated by the elements which admit an admissible expansion having only terms $X_{\ell_1} X_{\ell_2} \cdots X_{\ell_s} X_\tau$ with $s \leq t$. In this way, we get a filtration

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_{k-1} \subseteq \mathcal{F}_k \subseteq Z^k \cap (I_1 + I_2).$$

We now prove that all these inclusions are equalities.

CLAIM 6.15. *We have $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_1 = \cdots = \mathcal{F}_{k-1} = \mathcal{F}_k = Z^k \cap (I_1 + I_2)$.*

PROOF. By Claim 6.14, we have $\mathcal{F}_k = Z^k \cap (I_1 + I_2)$, which proves the last equality. We prove all the other equalities.

So fix $s > 0$ and let a be an element of $\mathcal{F}_s = Z^k \cap (\mathcal{H}_s + I_1)$ admitting an admissible expansion consisting of an element of I_1 plus a sum of terms each in $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{s-1}$ or \mathcal{G}_s . We need to show that $a \in \mathcal{F}_{s-1}$.

We can assume there is a term of a in this admissible expansion which lies in \mathcal{G}_s , i.e., of the form $X_{\ell_1} \cdots X_{\ell_s} X_\tau$, with $\tau \in \Sigma_{k-s}$. Otherwise, the statement $a \in \mathcal{F}_{s-1}$ holds trivially. Consider all the terms in the admissible expansion of a which are of the form $X_{\ell'_1} \cdots X_{\ell'_s} X_\tau$ with the same cone τ , but with possibly different linear forms ℓ'_1, \dots, ℓ'_s . We will prove that the sum of those terms that we denote by a_τ belongs to $\mathcal{G}_{s-1} + I_1$. Applying this to any $\tau \in \Sigma_{k-s}$, we obtain $a \in \mathcal{F}_{s-1}$ and the claim follows.

For each ray ρ of τ , choose a linear form $\ell_{\rho,\tau}$ which takes value one on ϵ_ρ and zero on other rays of τ . This is again possible since Σ is simplicial. Then ℓ_1 , for instance, can be decomposed as the sum

$$\ell_1 = l_1 + \sum_{\substack{\rho \prec \tau \\ \rho \in \Sigma_1}} \ell_1(\epsilon_\rho) \ell_{\rho,\tau}$$

with l_1 vanishing on τ .

The observation now is that the term $X_{l_1}X_{l_2} \cdots X_{l_s}X_\tau$ belongs to $\mathcal{G}_{s-1} + I_1$: this is by definition if $s = 1$, and for $s > 1$ is obtained by expanding the product

$$X_{l_1}X_{l_2} \cdots X_{l_s}X_\tau = \sum_{\substack{\rho \in \Sigma_1 \\ \rho \prec \tau}} l_1(\mathbf{e}_\rho)X_\rho X_{l_2} \cdots X_{l_s}X_\tau$$

and by observing that each term in the right hand side is either in I_1 or is in \mathcal{G}_{s-1} . (Note that the sum is on rays $\rho \prec \tau$ because l_1 vanishes on τ .) Hence, in proving that a_τ belongs to $\mathcal{G}_{s-1} + I_1$, we can ignore this term.

Decomposing in the same way each X_{l_i} which appear in a term in the initial admissible expansion of a_τ , we can rewrite a_τ as a sum of terms which already belong to $\mathcal{H}_{s-1} + I_1$ plus a sum of terms of the form

$$(6.2) \quad \prod_{\substack{\rho \prec \tau \\ \rho \in \Sigma_1}} X_{\ell_{\rho,\tau}}^{\kappa_\rho} X_\tau, \quad \kappa_\rho \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

These all together give a new admissible expansion of a in which a_τ (defined as before in the new admissible expansion) is a sum of the terms of the form in (6.2). We will work from now on with this admissible expansion of a .

Fix non-negative integers κ_ρ for rays ρ of τ whose sum is s . Denote by $[\prod_{\rho \in \tau} X_\rho^{\kappa_\rho+1}]a$ the coefficient of this monomial in a written as sum of monomials in B^k . Since a belongs to Z^k , all the monomials of a are square-free. But the product $\prod_{\rho \in \tau} X_\rho^{\kappa_\rho+1}$ is not square-free since $s > 0$. Hence, the corresponding coefficient is zero.

Consider now the monomial $\prod_{\rho \in \tau} X_\rho^{\kappa_\rho+1}$ and let us see in which terms in the admissible expansion of a it can occur. Such a monomial cannot appear in a term of the admissible expansion of a which belongs to I_1 . It cannot neither be in a term of a of the form $X_{\lambda_1} \cdots X_{\lambda_s} X_\sigma$ with $\sigma \in \Sigma_{k-s'}$ with $s' < s$ nor with $\sigma \in \Sigma_{k-s}$ and $\sigma \neq \tau$.

It follows that the monomial $\prod_{\rho \in \tau} X_\rho^{\kappa_\rho+1}$ can only appear in the terms of a_τ . More precisely, by the definition of $\ell_{\rho,\tau}$, it can only appear in each term of the form $\prod_{\rho \prec \tau} X_{\ell_{\rho,\tau}}^{\kappa_\rho} X_\tau$ for the chosen κ_ρ , and with coefficient one in each term. Hence, the sum of these terms have to cancel out. This proves that a_τ is zero in the new admissible expansion, which shows that $a \in \mathcal{F}_{s-1}$ and the claim follows. \square

6.8.3. *End of the proof.* We can now finish the proof of the lemma.

PROOF OF LEMMA 6.1. Recall that K^k is the set generated by elements of the form

$$\sum_{\substack{\rho \in \Sigma_1 \\ \rho \sim \tau}} \ell(\mathbf{e}_\rho)X_\rho X_\tau,$$

where $\tau \in \Sigma_{k-1}$ and ℓ is orthogonal to τ . The following facts are then clear:

$$\mathcal{F}_0 \subseteq K^k + I_1, \quad K^k \subseteq Z^k, \quad \text{and } I_1 \cap Z^k = \{0\}.$$

Since $\mathcal{F}_0 \subseteq Z^k$, we deduce that $\mathcal{F}_0 \subseteq K^k$. Applying Claim 6.15, we get $Z^k \cap (I_1 + I_2) = \mathcal{F}_0$ which implies $Z^k \cap (I_1 + I_2) \subseteq K^k$. The inclusion $K^k \subseteq Z^k \cap (I_1 + I_2)$ is obvious. So we get $Z^k \cap (I_1 + I_2) = K^k$ which concludes the proof. \square

7. Hodge isomorphism for unimodular fans

In this section we prove the Hodge isomorphism theorem which relates the Chow group of unimodular fans to their cohomology groups. As a byproduct of the methods we develop in this section, we obtain an alternate characterization of tropical smoothness.

Unless otherwise stated, the fans which appear in this section are not assumed to be tropical.

7.1. Statement of the main theorems. The main theorem we prove in this section is the following.

THEOREM 7.1 (Hodge isomorphism for unimodular fans). *Let Σ be a saturated unimodular fan in $N_{\mathbb{R}}$. For any integer p , there is a well-defined isomorphism*

$$\begin{aligned} \Psi: H^{p,p}(\overline{\Sigma}) &\xrightarrow{\sim} A^p(\Sigma) \\ \alpha &\longmapsto \sum_{\sigma \in \Sigma_p} \alpha_{\sigma}(\nu_{\sigma})X_{\sigma} \end{aligned}$$

which induces a ring morphism $H^{\bullet,\bullet}(\overline{\Sigma}) \rightarrow A^{\bullet}(\Sigma)$ by mapping $H^{p,q}(\overline{\Sigma})$ to zero in bidegrees $p \neq q$. Moreover, $H^{p,q}(\overline{\Sigma})$ is trivial in bidegrees $p < q$ and bidegrees $(p, 0)$ for $p > 0$.

As an immediate corollary, we get the following theorem.

THEOREM 7.2 (Hodge isomorphism for smooth unimodular tropical fans). *Let Σ be a saturated unimodular tropical fan in $N_{\mathbb{R}}$. Suppose in addition that Σ is tropically smooth. Then we get an isomorphism of rings $A^{\bullet}(\Sigma) \simeq H^{\bullet,\bullet}(\overline{\Sigma})$. Moreover, $A^{\bullet}(\Sigma)$ verifies the Poincaré duality. In particular, all these groups are torsion-free.*

PROOF. This follows from the discussion in Remark 7.6. □

This saturation hypothesis is not always possible to obtain (see Example 11.10). The following dual version of the above theorem, which does not use the saturation hypothesis, is sometimes more useful for applications.

THEOREM 7.3. *Let Σ be any unimodular fan in $N_{\mathbb{R}}$. Then the natural map $\text{MW}_p(\Sigma) \rightarrow H_{p,p}(\overline{\Sigma})$ is an isomorphism. Moreover, $H_{p,q}(\overline{\Sigma})$ is trivial in bidegrees $p < q$ and bidegrees $(p, 0)$ for $p > 0$.*

PROOF. Once again, this follows from the discussion in Remark 7.6 (and from a direct computation for the vanishing of $H^{p,0}(\overline{\Sigma})$ for $p > 0$). □

In the smooth case, we get the following corollary.

THEOREM 7.4 (Hodge conjecture for tropical fans). *If Σ is a smooth unimodular tropical fan, $H_{p,q}(\overline{\Sigma})$ and $H^{p,q}(\overline{\Sigma})$ are trivial for $p \neq q$. Moreover, to each element α in $H^{p,p}(\overline{\Sigma})$ one can associate a tropical cycle whose class in $H_{d-p,d-p}(\overline{\Sigma})$ is the Poincaré dual of α .*

PROOF. The tropical cycle is obtained via the isomorphism

$$H^{p,p}(\overline{\Sigma}) \simeq H_{d-p,d-p}(\overline{\Sigma}) \simeq \text{MW}_{d-p}(\Sigma).$$

The details can be found in Remark 7.6. □

Before going through the proof of Theorem 7.1, we state some clarifying remarks.

REMARK 7.5 (Non saturated case). The proof of Theorem 7.1 gives as well results in the case Σ is not saturated. In this situation, we still have a surjective ring morphism $A^{\bullet}(\Sigma) \rightarrow H^{\bullet,\bullet}(\Sigma)$, but this is never injective. Indeed, the kernel is a nontrivial torsion group. In particular, we get an isomorphism for rational coefficients, as well as a dual isomorphism for integral coefficients: $A^{\bullet}(\Sigma)^{\star} \simeq H^{\bullet,\bullet}(\overline{\Sigma})^{\star}$. In any case, the last part of the theorem concerning the vanishing are still valid. ◇

REMARK 7.6 (Torsion-freeness and duality for Chow rings). Let Σ be a unimodular fan. By the universal coefficient theorem applied to the tropical chain and cochain complexes of $\overline{\Sigma}$, for each pair of non-negative integers p, q , we get the following exact sequences

$$(7.1) \quad 0 \rightarrow \text{Ext}(H^{p,q+1}(\overline{\Sigma}), \mathbb{Z}) \rightarrow H_{p,q}(\overline{\Sigma}) \rightarrow H^{p,q}(\overline{\Sigma})^{\star} \rightarrow 0, \quad \text{and}$$

$$(7.2) \quad 0 \rightarrow \text{Ext}(H_{p,q-1}(\overline{\Sigma}), \mathbb{Z}) \rightarrow H^{p,q}(\overline{\Sigma}) \rightarrow H_{p,q}(\overline{\Sigma})^{\star} \rightarrow 0.$$

From the first exact sequence, using the vanishing result stated in Theorem 7.1, we obtain an isomorphism $H_{p,q}(\bar{\Sigma}) \simeq H^{p,q}(\bar{\Sigma})^*$ for $p \leq q$. This shows the vanishing of $H_{p,q}(\bar{\Sigma})$ for $p < q$ and an isomorphism $H_{p,p}(\bar{\Sigma}) \simeq H^{p,p}(\bar{\Sigma})^*$. This in turn implies in particular that $H_{p,p}(\Sigma)$ is torsion-free.

In the case Σ is saturated, the dual of the map from $H^{p,p}(\bar{\Sigma})$ to $A^p(\Sigma)$ depicted in the statement of Theorem 7.1 is the natural morphism from the group of Minkowski weights $MW_p(\Sigma)$ to the tropical homology group $H_{p,p}(\bar{\Sigma})$. This map is obtained by sending a Minkowski weight to its closure in $\bar{\Sigma}$, which is a tropical cycle of dimension p , and then taking the corresponding homology class in $H_{p,p}(\bar{\Sigma})$, as described in Section 6.2; for the cycle class map, see for example [MZ14, Sha11, JRS18, GS19a]. Theorem 7.1 implies that this map is an isomorphism. By Remark 7.5, this isomorphism still exists in the non saturated case.

In the case Σ is a smooth saturated unimodular tropical fan, we get an isomorphism $H^{p,q}(\bar{\Sigma}) \simeq H_{d-p,d-q}^{\text{BM}}(\bar{\Sigma}) = H_{d-p,d-q}(\bar{\Sigma})$, $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, which implies as well the vanishing of $H_{p,q}(\bar{\Sigma})$ for $p > q$. Applying the exact sequence (7.2), we infer the isomorphism $H^{p,q}(\bar{\Sigma}) \simeq H_{p,q}(\bar{\Sigma})^*$. This in particular implies that the cohomology groups $H^{p,p}(\bar{\Sigma})$ and so $A^p(\Sigma)$ are all torsion-free, we have $A^p(\Sigma) \simeq MW_p(\Sigma)^*$, and the Chow ring verifies the Poincaré duality. \diamond

REMARK 7.7. The smoothness assumption in the statement of Theorem 7.2 is needed, and the result is not true, in general, for any saturated unimodular tropical fan. Example 11.1 is a saturated unimodular tropical fan Σ with $H^{2,1}(\bar{\Sigma})$ of rank two. \diamond

In order to prove Theorem 7.1, we establish an alternative way of computing the cohomology of $\bar{\Sigma}$ by using its decomposition into *hypercubes*. The proof of the first half then follows quite directly from this description by using the Localization Lemma 6.1 proved in the previous section. To show the second half, concerning the products, we provide an explicit description of the inverse of the map Ψ from $A^p(\Sigma)$ to $H^{p,p}(\bar{\Sigma})$, a result which might be of independent interest.

For non-negative integers p, q , we define

$$C_{\square}^{p,q}(\bar{\Sigma}) := \bigoplus_{|\sigma|=q} \mathbf{F}^{p-q}(\infty_{\sigma}).$$

We get a cochain complex for each integer p

$$C_{\square}^{p,\bullet}: \quad \dots \longrightarrow C_{\square}^{p,q-2}(\bar{\Sigma}) \xrightarrow{d_{\square}^{q-2}} C_{\square}^{p,q-1}(\bar{\Sigma}) \xrightarrow{d_{\square}^{q-1}} C_{\square}^{p,q}(\bar{\Sigma}) \longrightarrow \dots$$

where the differential is given by the sum of the following maps for $\tau \prec \sigma$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^k(\infty_{\tau}) &\longrightarrow \mathbf{F}^{k-1}(\infty_{\sigma}), \\ \alpha &\longmapsto \pi_*(\iota_{\mathbf{e}_{\tau}}(\alpha)). \end{aligned}$$

Here $\pi: N^{\tau} \rightarrow N^{\sigma}$ is the natural projection.

THEOREM 7.8. *The cohomology of $(C_{\square}^{p,\bullet}, d_{\square})$ is $H^{p,\bullet}(\bar{\Sigma})$.*

The theorem is obtained by exploiting the decomposition of $\bar{\Sigma}$ into hypercubes. This explains the notation for this new complex. Note that one can also use the dual complex which compute the homology of $\bar{\Sigma}$.

The proof of Theorem 7.8 uses an interesting double complex. A deeper exploitation of this double complex leads to the proof of the following alternate characterization of smoothness.

THEOREM 7.9 (Alternate characterization of tropical smoothness). *A unimodular tropical fan Σ is smooth if and only if, for any face $\sigma \in \Sigma$, $\bar{\Sigma}^{\sigma}$ verifies the Poincaré duality.*

Note that, in particular, this theorem gives a new proof of Theorem 3.16 which states that if Σ is smooth, then $\bar{\Sigma}$ verifies the Poincaré duality.

The rest of this section is devoted to the proof of the above results.

7.2. Proof of Theorem 7.8. We start with the proof of Theorem 7.8. We fix a non-negative integer p .

7.2.1. *The fine double complex.* The idea behind the proof is quite natural. The original tropical cochain complex $C^{p,\bullet}(\overline{\Sigma})$ has a finer decomposition. Namely, for a face $\square_\sigma^\tau = \overline{C}_\sigma^\tau$ of $\overline{\Sigma}$, instead of using a grading just following its dimension $|\sigma| - |\tau|$, which is what is done in $C^{p,\bullet}(\overline{\Sigma})$, one can remember both $|\sigma|$ and $|\tau|$. In this way, the tropical cochain complex $C^{p,\bullet}(\overline{\Sigma})$ can be unfolded and identified with the total complex of the following double complex:

$${}_pE^{a,b} := \bigoplus_{\substack{\tau < \sigma \\ |\sigma| = a \\ |\tau| = -b}} \mathbf{F}^p(\square_\sigma^\tau)$$

where the differentials are given by the ones between the coefficient groups \mathbf{F}^p of faces of $\overline{\Sigma}$ which define the differentials of $C^{p,\bullet}(\overline{\Sigma})$. So we have $C^{p,\bullet}(\overline{\Sigma}) = \text{Tot}^\bullet({}_pE^{\bullet,\bullet})$.

The cohomology of $C^{p,\bullet}(\overline{\Sigma})$ can be calculated by using the spectral sequence associated to the filtration given by the columns of ${}_pE^{\bullet,\bullet}$. (We will use below the other filtration, the one given by the rows, in the proof the other stated results.)

We denote by $\downarrow_p E_0^{\bullet,\bullet}$ the 0-th page of this spectral sequence which has abutment

$$\downarrow_p E_0^{\bullet,\bullet} \implies H^{p,\bullet}(\overline{\Sigma}).$$

7.2.2. *Computation of the first page.* The proof of Theorem 7.8 is given by the following claim.

CLAIM 7.10. *On the first page of the spectral sequence, we have*

$$\downarrow_p E_1^{a,b} = \begin{cases} C_{\square}^{p,a}(\overline{\Sigma}) & \text{for } b = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Moreover, the differential on the first page for $b = 0$ coincides with the differential d_{\square}^{\bullet} of $C_{\square}^{p,\bullet}(\overline{\Sigma})$.

We prove the claim. Fix an integer a . Then the a -th column in page zero of the spectral sequence is

$$\downarrow_p E_0^{a,\bullet}: \quad \dots \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\tau < \sigma \\ |\sigma| = a \\ |\tau| = -b+1}} \mathbf{F}^p(\square_\sigma^\tau) \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\tau < \sigma \\ |\sigma| = a \\ |\tau| = -b}} \mathbf{F}^p(\square_\sigma^\tau) \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\tau < \sigma \\ |\sigma| = a \\ |\tau| = -b-1}} \mathbf{F}^p(\square_\sigma^\tau) \longrightarrow \dots$$

This complex can be decomposed as a direct sum running on the faces $\sigma \in \Sigma_a$ of the complexes

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\tau < \sigma \\ |\tau| = -b+1}} \mathbf{F}^p(\square_\sigma^\tau) \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\tau < \sigma \\ |\tau| = -b}} \mathbf{F}^p(\square_\sigma^\tau) \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\tau < \sigma \\ |\tau| = -b-1}} \mathbf{F}^p(\square_\sigma^\tau) \longrightarrow \dots$$

Denote this last complex by $\downarrow_p E_0^{\sigma,\bullet}$, $\sigma \in \Sigma$, and let $\downarrow_p E_1^{\sigma,\bullet}$ be its cohomology. We thus have

$$(7.3) \quad \downarrow_p E_0^{a,\bullet} = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_a} \downarrow_p E_0^{\sigma,\bullet}, \quad \downarrow_p E_1^{a,\bullet} = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_a} \downarrow_p E_1^{\sigma,\bullet}.$$

These latter cohomology groups are given by the following lemma.

LEMMA 7.11 (Hypercube vanishing lemma). *For any face σ of Σ , the cohomology $\downarrow_p E_1^{\sigma,\bullet}$ of the complex $\downarrow_p E_0^{\sigma,\bullet}$ is given by*

$$\downarrow_p E_1^{\sigma,b} \simeq \begin{cases} \mathbf{F}^{p-|\sigma|}(\infty_\sigma) & \text{if } b = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

This isomorphism is moreover induced by the natural map

$$\begin{array}{ccc} \downarrow_p E_0^{\sigma,0} & \simeq & \mathbf{F}^p(\overline{\sigma}) \longrightarrow \mathbf{F}^{p-|\sigma|}(\infty_\sigma), \\ \alpha & \longmapsto & \pi_*(\iota_\nu(\alpha)) \end{array}$$

with π referring to the projection $N \rightarrow N^\sigma$, extended to the exterior algebra and restricted to the corresponding subspaces \mathbf{F}^p .

Let us assume the lemma for the moment and finish the proof of the claim.

PROOF OF CLAIM 7.10. By the above lemma, and in view of the decomposition given in 7.3, the first page of the spectral sequence is concentrated in the 0-th row and is given by

$$\downarrow_p \mathbf{E}_1^{a,0} = \bigoplus_{|\sigma|=a} \mathbf{F}^{p-a}(\infty_\sigma),$$

which is exactly $C_\square^{p,a}(\overline{\Sigma})$. It thus remains to check that the differentials coincide. Let $\tau \prec \sigma$ and denote by $d_{\tau \prec \sigma}: \mathbf{F}^{p-|\tau|}(\infty_\tau) \rightarrow \mathbf{F}^{p-|\sigma|}(\infty_\sigma)$ the corresponding part of the differential in $\downarrow_p \mathbf{E}^{\bullet,0}$. By Lemma 7.11, we have the following commutative diagram.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}^p(\overline{\tau}) & \xrightarrow{\text{sign}(\tau,\sigma)i^*} & \mathbf{F}^p(\overline{\sigma}) \\ \downarrow \pi_*^\tau \circ \iota_{\nu_\tau} & & \downarrow \pi_*^\sigma \circ \iota_{\nu_\sigma} \\ \mathbf{F}^{p-|\tau|}(\infty_\tau) & \xrightarrow{d_{\tau \prec \sigma}} & \mathbf{F}^{p-|\sigma|}(\infty_\sigma) \end{array}$$

We infer that the bottom map should be given by $\pi_* \circ \iota_{\nu_\tau}$ with $\pi: N^\tau \rightarrow N^\sigma$, i.e., by the differential of $C_\square^{p,\bullet}(\overline{\Sigma})$. This concludes the proof of the claim. \square

7.2.3. *Proof of the hypercube vanishing lemma.* It remains to prove Lemma 7.11. For faces $\tau < \sigma$, we have isomorphisms

$$\mathbf{F}^p(\square_\sigma^\tau) \simeq \bigoplus_{p_1+p_2=p} \bigwedge^{p_1} N_\sigma^{\tau*} \otimes \mathbf{F}^{p_2}(\infty_\sigma).$$

These isomorphisms are not canonical, nevertheless, we can choose them in a compatible way. In fact, the terms appearing in the above decomposition of $\mathbf{F}_\Sigma^p(\square_\sigma^\tau)$ correspond to the graded pieces associated to a natural filtration on $\mathbf{F}_\Sigma^p(\square_\sigma^\tau)$, that we name the *toric weight filtration*, which plays an important role in the results we prove in [AP20b]. In order to simplify the presentation here, we do not detail this filtration here and refer to the relevant part of [AP20b] for more information.

We can decompose $\downarrow_p \mathbf{E}_0^{\sigma,\bullet}$ as a direct sum of complexes

$$\downarrow_p \mathbf{E}_0^{\sigma,\bullet} \simeq \bigoplus_{p_1+p_2=p} \left(\cdots \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\tau > \sigma \\ |\tau| = -b+1}} \bigwedge^{p_1} N_\sigma^{\tau*} \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\tau > \sigma \\ |\tau| = -b}} \bigwedge^{p_1} N_\sigma^{\tau*} \longrightarrow \cdots \right) \otimes \mathbf{F}^{p_2}(\infty_\sigma).$$

Since σ is unimodular, the cochain complex appearing in the above summand is isomorphic to $C_c^{p_1,\bullet+|\sigma|}(\mathbb{T}^{|\sigma|})$ for the natural subdivision $\{\mathbb{T}, \infty\}^{|\sigma|}$:

$$\downarrow_p \mathbf{E}_0^{\sigma,\bullet} \simeq \bigoplus_{p_1+p_2=p} C_c^{p_1,\bullet+|\sigma|}(\mathbb{T}^{|\sigma|}) \otimes \mathbf{F}^{p_2}(\infty_\sigma).$$

Hence, the cohomology is given by

$$\downarrow_p \mathbf{E}_1^{\sigma,\bullet} \simeq \bigoplus_{p_1+p_2=p} H_c^{p_1,\bullet+|\sigma|}(\mathbb{T}^{|\sigma|}) \otimes \mathbf{F}^{p_2}(\infty_\sigma).$$

The cohomology of $H_c^{\bullet,\bullet}(\mathbb{T}^k)$ is easy to compute: this is only nontrivial in bidegree (k, k) where it is isomorphic to \mathbb{Z} . It follows that $\downarrow_p \mathbf{E}_1^{\sigma,b}$ is trivial unless $b = 0$ in which case it becomes equal to $\mathbf{F}^{p-|\sigma|}(\infty_\sigma)$. The last part of the lemma follows from a cautious study of the different isomorphisms, that we omit here. This concludes the proof of Lemma 7.11. \square

7.2.4. *Proof of Theorem 7.8.* This is a direct consequence of Claim 7.10, which shows that the spectral sequence degenerates at page two, and, moreover, we have

$$H^{p,q}(\overline{\Sigma}) \simeq \downarrow_p \mathbf{E}_2^{q,0} = H^q(C_\square^{p,\bullet}(\overline{\Sigma})). \quad \square$$

Proof of Theorem 7.9. We have so far used only one of the two spectral sequences coming from the double complex. The spectral sequence $\rightarrow_p \mathbf{E}^{\bullet, \bullet}$ given by the filtration by rows will allow to prove Theorem 7.9. We explain this now before going through the proof of the hodge isomorphism theorem.

We first prove the forward direction. Assume that Σ is a smooth unimodular tropical fan. Recall that the b -th row of the double complex is

$$\rightarrow_p \mathbf{E}_0^{\bullet, b}: \quad \dots \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\tau < \sigma \\ |\sigma| = a-1 \\ |\tau| = -b}} \mathbf{F}^p(\square_\sigma^\tau) \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\tau < \sigma \\ |\sigma| = a \\ |\tau| = -b}} \mathbf{F}^p(\square_\sigma^\tau) \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\tau < \sigma \\ |\sigma| = a+1 \\ |\tau| = -b}} \mathbf{F}^p(\square_\sigma^\tau) \longrightarrow \dots$$

We recognize the cochain complex for the cohomology with compact support of the star fans of codimension $-b$:

$$\rightarrow_p \mathbf{E}_0^{\bullet, b} = \bigoplus_{|\tau| = -b} C_c^{p, \bullet + b}(\Sigma^\tau).$$

All the star fans are smooth by assumption, and so $H_c^{p, q}(\Sigma^\tau)$ is trivial unless $q = d - (-b)$, and for this q , we have $H_c^{p, d+b}(\Sigma^\tau) \simeq \mathbf{F}_{d-p+b}(\infty_\tau)$. Hence, the first page is given by

$$\rightarrow_p \mathbf{E}_1^{a, b} = \begin{cases} \bigoplus_{|\tau| = -b} \mathbf{F}_{d-p+b}(\infty_\tau) & \text{if } a = d, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Stated differently, $\rightarrow_p \mathbf{E}^{a, b}$ is trivial unless $a = d$ and

$$\rightarrow_p \mathbf{E}^{d, \bullet} = C_{d-p, -\bullet}^\square(\bar{\Sigma}),$$

where $C_{d-p, \bullet}^\square(\bar{\Sigma})$ denotes the dual complex of $C_{d-p, \bullet}^{\square}(\bar{\Sigma})$. Theorem 7.8 combined with the universal coefficient theorem imply that the homology of $C_{d-p, \bullet}^\square(\bar{\Sigma})$ computes $H_{d-p, \bullet}(\bar{\Sigma})$. Hence, $\rightarrow_p \mathbf{E}^{\bullet, \bullet}$ degenerates at page two, and we have

$$\rightarrow_p \mathbf{E}^{\bullet, \bullet} \Longrightarrow H_{d-p, d-\bullet}(\bar{\Sigma}).$$

On the other hand, by the definition of the double complex, we know that

$$\rightarrow_p \mathbf{E}^{\bullet, \bullet} \Longrightarrow H^{p, \bullet}(\bar{\Sigma}).$$

Therefore, we get the isomorphism of the Poincaré duality $H^{p, q}(\bar{\Sigma}) \simeq H_{d-p, d-q}(\bar{\Sigma})$; more precisely, we infer that

$$H^{p, p}(\bar{\Sigma}) \simeq \downarrow_p \mathbf{E}_\infty^{p, 0} \simeq \rightarrow_p \mathbf{E}_\infty^{d, p-d} \simeq H_{d-p, d-p}(\bar{\Sigma}),$$

and every other terms of $\downarrow_p \mathbf{E}_\infty^{\bullet, \bullet}$ and $\rightarrow_p \mathbf{E}_\infty^{\bullet, \bullet}$ are trivial. This concludes the forward direction.

REMARK 7.12. In the same way that $\downarrow_p \mathbf{E}_\infty^{p, 0}$ is naturally isomorphic to $A^p(\Sigma)$ (in the saturated case), for any unimodular fan Σ we have the following isomorphisms

$$H_{d-p, d-p}(\bar{\Sigma}) \simeq C_{p, d-p}^\square(\bar{\Sigma}) = \ker \left(\bigoplus_{|\sigma| = d-p} \mathbf{F}_0(\infty_\sigma) \rightarrow \bigoplus_{|\tau| = d-p-1} \mathbf{F}_1(\infty_\tau) \right) \simeq \text{MW}_{d-p}(\Sigma).$$

Moreover, if Σ is smooth as above, the study of the spectral sequences gives us a new natural cycle class map $H^{p, p}(\bar{\Sigma}) \simeq \text{MW}_{d-p}(\Sigma)$. To a cocycle a in $C^{p, p}(\bar{\Sigma})$, one can associate the Minkowski weight $(\Sigma_{\leq d-p}, w)$ where $w(\sigma) = \langle a, \nu_{\bar{\Sigma}^\sigma} \rangle$ for any $\sigma \in \Sigma_{d-p}$. \diamond

We now prove the other direction. Assume that $\bar{\Sigma}^\sigma$ verifies the Poincaré duality for any face σ of Σ . By induction, we can assume that Σ^σ is smooth for any proper face σ of Σ .

We have a natural inclusion of complexes $C_c^{p, \bullet}(\Sigma) \simeq \rightarrow_p \mathbf{E}^{\bullet, 0} \hookrightarrow \rightarrow_p \mathbf{E}^{\bullet, \bullet}$. Denote by $\rightarrow_p \mathbf{E}^{\bullet, \bullet < 0}$ the cokernel. We get a short exact sequence of complexes:

$$(7.4) \quad 0 \longrightarrow C_c^{p, \bullet}(\Sigma) \longrightarrow \text{Tot}^\bullet(\rightarrow_p \mathbf{E}^{\bullet, \bullet}) \longrightarrow \text{Tot}^\bullet(\rightarrow_p \mathbf{E}^{\bullet, \bullet < 0}) \longrightarrow 0.$$

We already know the cohomology of the first two terms. For the last one, we can compute the first page as before (since the proper star fans are smooth) and we get ${}_p E_1^{d, \bullet < 0} = C_{d-p, -\bullet > 0}^\square(\bar{\Sigma})$ where

$$C_{d-p, \bullet > 0}^\square(\bar{\Sigma}) := \text{coker}\left(F_{d-p}(\underline{0}) \hookrightarrow C_{d-p, \bullet}^\square(\bar{\Sigma})\right),$$

and every other terms are trivial. Assume for now that $p < d - 1$. The case $p = d$ is trivial and the case $p = d - 1$ is studied later below. Then we get

$$H^k(C_{d-p, \bullet > 0}^\square(\bar{\Sigma})) = \begin{cases} H_{d-p, d-p}(\bar{\Sigma}) & \text{if } k = d - p, \\ F_{d-p}(\underline{0}) & \text{if } k = 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We are now ready to study the long exact sequence associated to (7.4):

$$\dots \longrightarrow H_c^{p,q}(\Sigma) \longrightarrow H^{p,q}(\bar{\Sigma}) \longrightarrow H^q(C_{d-p, (d-\bullet) > 0}^\square(\bar{\Sigma})) \longrightarrow H_c^{p,q+1}(\Sigma) \longrightarrow \dots$$

The two middle terms are trivial unless $q = p$ or $q = d - 1$. In the case $q = p$, we get a map $H^{p,p}(\bar{\Sigma}) \rightarrow H_{d-p, d-p}(\bar{\Sigma})$. By assumption, this is an isomorphism, and we can just replace both terms by 0 in the long exact sequence. For $q = d - 1$, $H^{p, d-1}(\bar{\Sigma}) = H^{p,d}(\bar{\Sigma}) = 0$ and we get

$$0 \longrightarrow F_{d-p}(\underline{0}) \longrightarrow H_c^{p,d}(\Sigma) \longrightarrow 0.$$

All the other terms of $H_c^{p, \bullet}(\Sigma)$ vanish. Using the universal coefficient theorem, we get $H_{p,d}^{\text{BM}}(\Sigma) \simeq H_c^{p,d}(\Sigma)^* \simeq F^{d-p}(\Sigma)$, and $H_{p,q}^{\text{BM}}(\Sigma) = 0$ for $q \neq d$. This is exactly the Poincaré duality for (the homology with coefficients in) \mathbf{F}_p .

It remains to treat the case $p = d - 1$. In this case, $C_{1, \bullet > 0}^\square(\Sigma)$ contains only one nontrivial term: $C_{1, 1 > 0}^\square(\Sigma) = \bigoplus_{\varrho \in \Sigma_1} F_0(\infty_\varrho)$. Its cohomology is identical. In the above long exact sequence, the only interesting part is the first row of the following diagram.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_c^{d-1, d-1}(\Sigma) & \longrightarrow & H^{d-1, d-1}(\bar{\Sigma}) & \longrightarrow & \bigoplus_{\varrho \in \Sigma_1} F_0(\infty_\varrho) & \longrightarrow & H_c^{d-1, d}(\Sigma) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow & & \\ & & 0 & \longrightarrow & \text{MW}_1(\Sigma) & \longrightarrow & \text{W}_1(\Sigma) & \longrightarrow & \mathbf{F}_1(\Sigma) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Let us describe the second row and the vertical maps. We know that $H^{d-1, d-1}(\bar{\Sigma}) \simeq H_{1,1}(\bar{\Sigma}) \simeq \text{MW}_1(\Sigma)$. Here, $\text{W}_1(\Sigma) := \mathbb{Z}^{\Sigma_1} \simeq \bigoplus_{\varrho \in \Sigma_1} F_0(\infty_\varrho)$ denotes the group of one dimensional weights of Σ . Note also that we have a natural map $H_c^{d-1, d}(\Sigma) \rightarrow \mathbf{F}_1(\Sigma)$: it is induced by the dual of the map $\mathbf{F}^1(\Sigma) \rightarrow H_{d-1, d}^{\text{BM}}(\Sigma)$. By the definition of the Minkowski weights, the second row is a short exact sequence. The five lemma implies that the first and the last vertical maps are isomorphisms. Therefore, $H_c^{d-1, q}(\Sigma)$ is trivial for $q \neq d$, and $H_c^{d-1, q}(\Sigma) \simeq \mathbf{F}_1(\Sigma)$. Using the universal coefficient theorem as above, and dualizing, we get the Poincaré duality for $H_{d-1, \bullet}^{\text{BM}}(\Sigma)$. All together we obtain the Poincaré duality for $H_{\bullet, \bullet}^{\text{BM}}(\Sigma)$. \square

7.3. Proof of Theorem 7.1. We conclude with the proof of Theorem 7.1, given in this section and the next one.

First, we note that by Theorem 7.8, we have $H^{p,q}(\bar{\Sigma}) \simeq H^q(C_{\square}^{p, \bullet}(\bar{\Sigma}))$. Notice as well that for $p < q$, $C_{\square}^{p,q}(\bar{\Sigma})$ is trivial. Hence $H^{p,q}(\bar{\Sigma})$ is trivial for $p < q$.

For $q = 0$ and $p > 0$, we get

$$H^{p,0}(\bar{\Sigma}) \simeq \ker(\mathbf{F}^p(\underline{0}) \rightarrow \bigoplus_{\varrho \in \Sigma_1} \mathbf{F}^{p-1}(\infty_\varrho)).$$

Let $\alpha \in \mathbf{F}^p(\underline{0})$ be an element of the kernel. Then $\iota_{\mathbf{e}_\varrho}(\alpha) = 0$ for any $\varrho \in \Sigma_1$. Let $V \subseteq N_{\mathbb{R}}$ be the subspace spanned by Σ . Then $\alpha \in \bigwedge^p V^*$. Since the vectors \mathbf{e}_ϱ , $\varrho \in \Sigma_1$, span V , any

element of $\bigwedge^p V^*$ whose contraction by each ϵ_ρ is trivial must be trivial. Hence, we obtain $\alpha = 0$ and $H^{p,0}(\bar{\Sigma}) = 0$.

For $p = q$, we get

$$H^{p,p}(\bar{\Sigma}) \simeq \text{coker}(C_{\square}^{p,p-1}(\bar{\Sigma}) \rightarrow C_{\square}^{p,p}(\bar{\Sigma})) \simeq \text{coker}\left(\bigoplus_{|\tau|=p-1} \mathbf{F}^1(\infty_\tau) \rightarrow \bigoplus_{|\sigma|=p} \mathbf{F}^0(\infty_\sigma)\right).$$

We have a natural isomorphism $\bigoplus_{|\sigma|=p} \mathbf{F}^0(\infty_\sigma) \simeq Z^p(\Sigma)$. Moreover, since Σ is saturated at any face $\tau \in \Sigma_{p-1}$, $\bigoplus_{|\tau|=p-1} \mathbf{F}^1(\infty_\tau)$ is naturally isomorphic to the kernel of $Z^p(\Sigma) \rightarrow A^p(\Sigma)$ as described in the Localization Lemma 6.1. Hence $H^{p,p}(\bar{\Sigma}) \simeq A^p(\Sigma)$. Moreover, by Lemma 7.11, the isomorphism is induced by the map

$$\begin{aligned} C^{p,p}(\bar{\Sigma}) &\rightarrow C_{\square}^{p,p}(\bar{\Sigma}) \longrightarrow Z^p(\Sigma) \\ \alpha &\longmapsto \sum_{\sigma \in \Sigma_p} \alpha(\nu_\sigma) X_\sigma. \end{aligned}$$

It remains to prove that the above isomorphism respects the products. This can be done by an explicit calculation of the inverse of the map Ψ in the statement of 7.1, given in the next section, which shows that the cup-product in cohomology corresponds to product in Chow ring. The theorem thus follows. \square

7.4. Explicit description of the inverse $\Psi^{-1}: A^p(\Sigma) \rightarrow H^{p,p}(\bar{\Sigma})$. In this section, we provide an explicit description of the inverse of Ψ .

Before going through the description, let us introduce some new notations which will help in working with the cohomology of $\bar{\Sigma}$. In the following, if a is a cochain in $C^{p,q}(\bar{\Sigma})$ with $q = |\sigma| - |\tau|$, we denote by $a_\sigma^\tau \in \mathbf{F}^p(\square_\sigma^\tau)$ the part of a which lives on the face \square_σ^τ . If $\tau = \emptyset$, we just write a_σ . Moreover, if δ is any face of dimension q in $\bar{\Sigma}$ and $\alpha \in \mathbf{F}^p(\delta)$, then we denote by (δ, α) the cochain in $C^{p,q}(\bar{\Sigma})$ whose restriction to δ is α and which vanishes everywhere else.

7.4.1. *The inverse in cohomology degree one.* We consider first the part $A^1(\Sigma)$. Let $\rho \in \Sigma_1$. We give an element of $H^{1,1}(\bar{\Sigma})$ whose image by Ψ coincides with X_ρ . For this, we first define an element $a \in C^{1,1}(\bar{\Sigma})$ as follows. For any cone $\sigma \sim \rho$ in Σ , we choose an element $\alpha_\sigma \in \mathbf{F}^1(\square_{\sigma \vee \rho}^\sigma)$ which takes value one on the vector $\epsilon_{\sigma \vee \rho}^\sigma$. We then set

$$a := \sum_{\sigma \sim \rho} (\square_{\sigma \vee \rho}^\sigma, \alpha_\sigma).$$

Note that the only part of a which has sedentarity \emptyset is $(\square_\rho, \alpha_\rho)$, and we have $\Psi(a) = \alpha_\emptyset(\epsilon_\rho) X_\rho = X_\rho$. So the statement would have followed if a were a cocycle. The idea now is to find an element b in $C^{1,1}(\bar{\Sigma})$ supported only on faces of non-zero sedentarity such that $a - b$ is a cocycle: in that case, since $\Psi(b) = 0$, we still get $\Psi(a - b) = X_\rho$ and the inverse image of X_ρ will be represented by the class of $a - b$.

Recall that $\epsilon_{\sigma \vee \rho}^\sigma$ is the projection of ϵ_ρ at infinity into N_∞^σ . We now describe $\tilde{a} := da$. Consider a pair of faces $\tau < \eta$ in Σ with $|\eta| - |\tau| = 2$. Then, we have $\tilde{a}_\eta^\tau = 0$ if either $\rho \not\prec \eta$ or $\rho < \tau$. In the remaining cases, there must exist a ray ρ' such that $\eta = \tau \vee \rho \vee \rho'$, and in this case, we get

$$\tilde{a}_\eta^\tau = \pm(a_{\tau \vee \rho}^\tau - \pi^*(a_{\tau \vee \rho' \vee \rho}^{\tau \vee \rho'})) = \pm(\alpha_\tau - \pi^*(\alpha_{\tau \vee \rho'})),$$

where π is the projection $N^\tau \rightarrow N^{\tau \vee \rho'}$. In particular, we notice that \tilde{a}_η^τ is zero on the projection of ϵ_ρ .

From the above discussion, we obtain a well-defined pushforward $\pi_*^\rho(\tilde{a}_\eta^\tau) \in \mathbf{F}^1(\square_\eta^{\tau \vee \rho})$ where $\pi^\rho: N_\infty^\tau \rightarrow N_\infty^{\tau \vee \rho}$ is the natural projection.

Set

$$b := \sum_{\tau, \eta} \text{sign}(\square_\eta^{\tau \vee \rho}, \square_\eta^\tau) \left(\square_\eta^{\tau \vee \rho}, \pi_*^\rho(\tilde{a}_\eta^\tau) \right)$$

where the sum is restricted to pairs $\tau < \eta$ for which the term is well-defined, that is those with $\rho \not\prec \tau$, $\rho < \eta$ and $|\eta| - |\tau| = 2$. The element b has been defined in order to get $db = da$ on every face which is not in $\overline{\Sigma}_\infty^\rho$. In particular, the coboundary $c := d(a - b)$ of $a - b$ has support in $\overline{\Sigma}_\infty^\rho$. Since $dc = 0$, the positive-sedentarity-vanishing lemma 7.13 below implies that $c = 0$. This shows that $a - b$ is a cocycle. Since b has support only on the faces of non-zero sedentarity, we get in addition $\Psi(a - b) = X_\rho$, as required.

LEMMA 7.13 (Positive-sedentarity-vanishing lemma). *Let Σ be a unimodular fan. Let ζ be a non-zero face of Σ and let $c \in C^{p,q}(\overline{\Sigma})$ be a cochain supported in Σ_∞^ζ . Assume that $dc = 0$. Then we have $c = 0$.*

PROOF. Actually this is a consequence of the vanishing of $\downarrow_p E_\infty^{a,b}$ for $b < 0$. Let us give a more elementary proof here. Since c is supported in Σ_∞^ζ , we need to show the vanishing of c_σ^τ for τ, σ in Σ with $|\sigma| - |\tau| = q$ and $\zeta < \tau$.

Let ρ be a ray of ζ and set $\eta \prec \tau$ so that we get $\tau = \rho \vee \eta$. Consider the face $\delta = \square_\sigma^\eta$ of $\overline{\Sigma}$ and note that δ is (a hypercube) of dimension $q + 1$. The only face of dimension q in δ which lies in $\overline{\Sigma}_\infty^\zeta$ is \square_σ^τ . Since c has support in $\overline{\Sigma}_\infty^\zeta$, it follows that the components of c on faces of δ different from \square_σ^τ are all zero. Denoting by π the projection $N_\infty^\eta \rightarrow N_\infty^\tau$, which induces a surjection $\pi_*: \mathbf{F}_p(\square_\sigma^\eta) \rightarrow \mathbf{F}_p(\square_\sigma^\tau)$ and in injection $\pi^*: \mathbf{F}^p(\square_\sigma^\tau) \rightarrow \mathbf{F}^p(\square_\sigma^\eta)$, we thus get

$$\pi^*(c_\sigma^\tau) = \pm(dc)_\sigma^\eta = 0.$$

This implies that $c_\sigma^\tau = 0$, and the lemma follows. □

7.4.2. *Cup-product in cubical complexes.* To extend the description of the inverse of Ψ to higher degrees, we need to recall the formula for the cup product in cubical complexes. Let $a \in C^{p,q}(\overline{\Sigma})$ and $b \in C^{p',q'}(\overline{\Sigma})$. Then for any pair of faces $\tau < \eta$ with $|\eta| - |\tau| = q + q'$,

$$(a \smile b)_\eta^\tau = \sum_{\substack{\tau < \sigma < \eta \\ |\sigma| - |\tau| = q}} \omega_\eta^\tau(\nu_\sigma^\tau \wedge \pi^*(\nu_\eta^\sigma)) \cdot a_\sigma^\tau \wedge \pi^*(b_\eta^\sigma)$$

where, for each $\tau < \sigma$, $\pi: N^\tau \rightarrow N^\sigma$ is the projection. As usual, this cup product induces a cup product on cohomology $\smile: H^{p,q}(\overline{\Sigma}) \times H^{p',q'}(\overline{\Sigma}) \rightarrow H^{p+p',q+q'}(\overline{\Sigma})$.

7.4.3. *The inverse in higher cohomological degrees.* Let σ be a cone of dimension p in Σ . By Localization Lemma 6.1, it suffices to find a preimage of X_σ . Let ρ_1, \dots, ρ_p be the rays of σ . For $i \in \{1, \dots, p\}$, we denote by ${}_i a$ the preimage of X_{ρ_i} as defined in Section 7.4.1. In particular, we note that ${}_i a$ is supported by faces of the form \square_σ^τ with $\rho_i < \sigma$. We claim that the element

$$a := {}_1 a \smile {}_2 a \smile \dots \smile {}_p a$$

is a preimage of X_σ . We compute a as follows. Consider a face $\sigma' \in \Sigma_p$ and denote by $\rho'_1, \dots, \rho'_p \in \Sigma_1$ the rays of σ' . In the following, for a permutation $s \in \mathfrak{S}_p$ of $[p]$ and $k \in [p]$, we set

$$\sigma'(s, k) := \rho'_{s(1)} \vee \dots \vee \rho'_{s(k)},$$

the face of σ' with rays $\rho'_{s(1)}, \dots, \rho'_{s(k)}$.

Expanding the cup product using the formula stated in the previous section, we find

$$a_{\sigma'} = \sum_{s \in \mathfrak{S}_p} \omega_{\sigma'}(\nu_{\rho'_{s(1)}} \wedge \dots \wedge \nu_{\rho'_{s(p)}}) \cdot {}_1 a_{\sigma'(s,1)}^{\sigma'(s,0)} \wedge {}_2 a_{\sigma'(s,2)}^{\sigma'(s,1)} \wedge \dots \wedge {}_p a_{\sigma'(s,p)}^{\sigma'(s,p-1)},$$

where for the ease of reading, we omit to precise the pullback by different projections. Each term in the above sum is nontrivial only if $\rho_1 < \sigma'(s, 1)$, $\rho_2 < \sigma'(s, 2)$, \dots , and $\rho_p < \sigma'(s, p)$, i.e., if and only if $\sigma' = \sigma$ and the permutation s is identity.

Since $\pi_{\sigma'(\text{id},j)}(\mathbf{e}_{\rho_i}) = 0$ for $j \geq i$, we get that

$$a_\sigma(\nu_\sigma) = \omega_\sigma(\mathbf{e}_{\rho_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{\rho_p}) \cdot a_\sigma(\mathbf{e}_{\rho_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{\rho_p})$$

$$\begin{aligned}
 &= (\omega_\sigma(\mathbf{e}_{\rho_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{\rho_p}))^2 (1a_{\sigma(\text{id},1)}^{\sigma(\text{id},0)} \wedge 2a_{\sigma(\text{id},2)}^{\sigma(\text{id},1)} \wedge \cdots \wedge pa_{\sigma(\text{id},p)}^{\sigma(\text{id},p-1)}) (\mathbf{e}_{\rho_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{\rho_p}) \\
 &= 1a_{\sigma(\text{id},0) \vee \rho_1}^{\sigma(\text{id},0)} (\mathbf{e}_{\rho_1}) \cdots pa_{\sigma(\text{id},p-1) \vee \rho_p}^{\sigma(\text{id},p-1)} (\mathbf{e}_{\rho_p}) \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

We thus infer that a is a preimage of x_σ . This achieves the description of the inverse of the map Ψ .

8. Tropical Deligne resolution

Let Σ be a smooth unimodular tropical fan. We follow the notations of previous sections. In particular, for each cone σ , we denote by Σ^σ the star fan of σ in Σ , which is a smooth unimodular tropical fan in $N_{\mathbb{R}}^\sigma$, and by $\bar{\Sigma}^\sigma$, we denote its canonical compactification. For the canonical compactification of a tropical fan Σ , recall as well that we set

$$H^k(\bar{\Sigma}) := \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(\bar{\Sigma}).$$

In the case of a smooth unimodular tropical fan Σ , by Theorem 7.4, $H^k(\bar{\Sigma})$ is non-vanishing only in even degrees and in that case it is equal to $H^{k/2,k/2}(\bar{\Sigma})$.

The aim of this section is to prove the following theorem.

THEOREM 8.1 (Tropical Deligne resolution). *Notations as above, we have the following long exact sequence*

$$0 \rightarrow \mathbf{F}^p(\underline{0}) \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_p} H^0(\bar{\Sigma}_\infty^\sigma) \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{p-1}} H^2(\bar{\Sigma}_\infty^\sigma) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_1} H^{2p-2}(\bar{\Sigma}_\infty^\sigma) \rightarrow H^{2p}(\bar{\Sigma}) \rightarrow 0.$$

The maps between cohomology groups in the above sequence are given by the sum of Gysin maps. Namely, for a cone $\sigma \in \Sigma$, using the notations of Section 2, the fan Σ_∞^σ is based at the point ∞_σ of $\bar{\Sigma}$, is naturally isomorphic to Σ^σ , and has closure $\bar{\Sigma}_\infty^\sigma$ in $\bar{\Sigma}$ which can be identified with the canonical compactification $\bar{\Sigma}^\sigma$ of Σ^σ . This means the canonical compactification $\bar{\Sigma}_\infty^\sigma$ naturally lives in $\bar{\Sigma}$. Moreover, for an inclusion of cones $\tau \prec \sigma$, we get an inclusion $i_{\sigma \succ \tau}: \bar{\Sigma}_\infty^\sigma \hookrightarrow \bar{\Sigma}_\infty^\tau$. This induces a map on cohomology $i_{\tau \prec \sigma}^*: H^\bullet(\bar{\Sigma}_\infty^\sigma) \rightarrow H^\bullet(\bar{\Sigma}_\infty^\tau)$, which, by applying the Poincaré duality for the smooth tropical varieties $\bar{\Sigma}_\infty^\sigma$ and $\bar{\Sigma}_\infty^\tau$, leads to the *Gysin map* $\text{Gys}_{\sigma \succ \tau}: H^\bullet(\bar{\Sigma}_\infty^\sigma) \rightarrow H^{\bullet+2}(\bar{\Sigma}_\infty^\tau)$.

In what follows, in order to simplify the notations, sometimes we drop ∞ from indices and identify $\bar{\Sigma}_\infty^\sigma$ with $\bar{\Sigma}^\sigma$ living naturally in $\bar{\Sigma}$ as the closure of those points which have sedentarity equal to σ .

Apart from the last subsection, where we study what happens in the non-smooth case, the rest of this section is devoted to the proof of this theorem. As it becomes clear from the above discussion, using the Poincaré duality for canonical compactifications $\bar{\Sigma}^\sigma$, it will be enough to prove the exactness of the following complex for each k (here $k = d - p$):

$$(8.1) \quad 0 \rightarrow H^{2k}(\bar{\Sigma}) \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_1} H^{2k}(\bar{\Sigma}^\sigma) \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_2} H^{2k}(\bar{\Sigma}^\sigma) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{d-k}} H^{2k}(\bar{\Sigma}^\sigma) \rightarrow \mathbf{F}_{d-k}(\underline{0}) \rightarrow 0.$$

8.1. The sheaf of tropical holomorphic forms. Let Z be a tropical variety with an extended polyhedral structure. We will be only interested here in $Z = \Sigma$ or $\bar{\Sigma}$, for a tropical fan Σ , so there is no harm in assuming this in what follows in this section.

For the tropical variety Z , we denote by Ω_Z^k the sheaf of *tropical holomorphic k -forms* on Z . With real coefficients, this can be defined as the kernel of the second differential operator from Dolbeault $(k, 0)$ -forms to Dolbeault $(k, 1)$ -forms on Z , as in [JSS19, CLD12, GK17]. We will give an alternative characterization of this sheaf which shows that it is actually defined

over \mathbb{Z} as the sheafification of the combinatorial sheaf \mathbf{F}^k . As we are going to use some results from [JSS19], it might be helpful to note that this sheaf is denoted $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}^k$ in *loc. cit.*

Let Z be a tropical variety with an extended polyhedral structure. If U is an open subset of Z , we say that U is *nice* if either U is empty, or there exists a face γ of Z intersecting U such that, for each face δ of Z , every connected components of $U \cap \delta$ contains $U \cap \gamma$. (Compare with the *basic open sets* from [JSS19].) This implies that U is connected, and that for each face $\delta \in Z$ which intersects U , γ is a face of δ and the intersection $\delta \cap U$ is connected. We call γ the *minimum face* of U . We have the following elementary result.

PROPOSITION 8.2. *Nice open sets form a basis of open sets on Z .*

The sheaf Ω_Z^k is the unique sheaf on Z such that for each nice open set U of Z with minimum face γ , we have

$$\Omega_Z^k(U) = \mathbf{F}^k(\gamma).$$

Suppose now \bar{Z} is a compactification of Z and denote by $i: Z \hookrightarrow \bar{Z}$ the inclusion. We denote by $\Omega_{Z,c}^k$ the *sheaf of holomorphic k -forms on \bar{Z} with compact support in Z* defined on connected open sets by

$$\Omega_{Z,c}^k(U) := \begin{cases} \Omega_Z^k(U) & \text{if } U \subseteq Z, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In other words, we have

$$\Omega_{Z,c}^k = i_! \Omega_Z^k$$

that is the *direct image with compact support* of the sheaf Ω_Z^k . In particular, in the case we study here, the cohomology with compact support of Ω_Z^k is computed by the usual sheaf cohomology of $\Omega_{Z,c}^k$, i.e., we have

$$H_c^\bullet(Z, \Omega_Z^k) = H^\bullet(\bar{Z}, \Omega_{Z,c}^k).$$

8.2. Cohomology with coefficients in the sheaf of tropical holomorphic forms.

We now specify the above set-up for $Z = \Sigma$ and $\bar{\Sigma}$ the canonical compactification of Σ .

For each cone $\sigma \in \Sigma$, we get the sheaf $\Omega_{\bar{\Sigma}_\sigma}^k$ of holomorphic k -forms on $\bar{\Sigma}_\sigma \hookrightarrow \bar{\Sigma}$ which by extension by zero leads to a sheaf on $\bar{\Sigma}$. We denote this sheaf by Ω_σ^k . The following proposition describes the cohomology of these sheaves.

PROPOSITION 8.3. *Notations as above, for each pair of non-negative integers m, k , we have*

$$H^m(\bar{\Sigma}, \Omega_\sigma^k) = \begin{cases} H^{2k}(\bar{\Sigma}^\sigma) = H^{k,k}(\bar{\Sigma}^\sigma) & \text{if } m = k, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

PROOF. We have

$$H^m(\bar{\Sigma}, \Omega_\sigma^k) \simeq H^m(\bar{\Sigma}_\sigma^\sigma, \Omega_{\bar{\Sigma}_\sigma^\sigma}^k) \simeq H^m(\bar{\Sigma}^\sigma, \Omega_{\bar{\Sigma}^\sigma}^k) \simeq H^{k,m}(\bar{\Sigma}^\sigma).$$

The result now follows from our Theorem 7.4. □

8.3. The resolution Ω_\bullet^k of the sheaf $\Omega_{\Sigma,c}^k$.

For a pair of faces $\tau < \sigma$ in Σ , from the inclusion maps $\bar{\Sigma}_\sigma^\sigma \hookrightarrow \bar{\Sigma}_\tau^\tau \hookrightarrow \bar{\Sigma}$, we get natural restriction maps of sheaves $i_{\tau < \sigma}^* : \Omega_\tau^k \rightarrow \Omega_\sigma^k$ on $\bar{\Sigma}$. Here as before, the map $i_{\tau < \sigma} = i_{\sigma > \tau}$ denotes the inclusion $\bar{\Sigma}_\sigma^\sigma \hookrightarrow \bar{\Sigma}_\tau^\tau$.

We consider now the following complex of sheaves on $\bar{\Sigma}$

$$(8.2) \quad \Omega_\bullet^k: \quad \Omega_0^k \rightarrow \bigoplus_{\rho \in \Sigma_1} \Omega_\rho^k \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_2} \Omega_\sigma^k \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{d-k}} \Omega_\sigma^k$$

concentrated in degrees $0, 1, \dots, d - k$, given by the dimension of the cones σ in Σ , whose boundary maps are given by

$$\alpha \in \Omega_\sigma^k \mapsto d\alpha := \sum_{\zeta > \sigma} \text{sign}(\sigma, \zeta) i_{\sigma \prec \zeta}^*(\alpha).$$

We will derive Theorem 8.1 by looking at the hypercohomology groups $\mathbb{H}^\bullet(\bar{\Sigma}, \Omega_\bullet^k)$ of this complex and by using the following proposition.

PROPOSITION 8.4. *The following sequence of sheaves is exact*

$$0 \rightarrow \Omega_{\Sigma, c}^k \rightarrow \Omega_{\underline{0}}^k \rightarrow \bigoplus_{\varrho \in \Sigma_1} \Omega_\varrho^k \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_2} \Omega_\sigma^k \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{d-k}} \Omega_\sigma^k \rightarrow 0.$$

PROOF. It will be enough to prove that taking sections over nice open sets U give exact sequences of abelian groups.

If U is included in Σ , clearly by definition we have $\Omega_{\Sigma, c}^k(U) \simeq \Omega_{\underline{0}}^k(U)$, and the other sheaves of the sequence have no nontrivial section over U . Thus, the sequence is exact over U .

It remains to prove that, for every nice open set U having non-empty intersection with $\bar{\Sigma} \setminus \Sigma$, the sequence

$$0 \rightarrow \Omega_{\underline{0}}^k(U) \rightarrow \bigoplus_{\varrho \in \Sigma_1} \Omega_\varrho^k(U) \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_2} \Omega_\sigma^k(U) \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{d-k}} \Omega_\sigma^k(U) \rightarrow 0$$

is exact. Let $\gamma \in \bar{\Sigma}$ be the minimum face of U . Let $\sigma \in \Sigma$ be the sedentarity of γ . The closed strata (for the fan stratification) of $\bar{\Sigma}$ which intersect U are exactly those of the form $\bar{\Sigma}_\infty^\tau \simeq \bar{\Sigma}^\tau$ with $\tau < \sigma$. Moreover, if τ is a face of σ , we have

$$\Omega_\tau^k(U) = \mathbf{F}^k(\gamma).$$

Thus, the previous sequence can be rewritten in the form

$$0 \rightarrow \mathbf{F}^k(\gamma) \rightarrow \bigoplus_{\substack{\tau < \sigma \\ |\tau|=1}} \mathbf{F}^k(\gamma) \rightarrow \bigoplus_{\substack{\tau < \sigma \\ |\tau|=2}} \mathbf{F}^k(\gamma) \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\substack{\tau < \sigma \\ |\tau|=|\sigma|}} \mathbf{F}^k(\gamma) \rightarrow 0.$$

This is just the cochain complex of the simplicial cohomology (for the natural simplicial structure induced by the faces) of the cone σ with coefficients in the group $\mathbf{F}^k(\gamma)$. This itself corresponds to the reduced simplicial cohomology of a simplex shifted by 1. This last cohomology is trivial, thus the sequence is exact. That concludes the proof of the proposition. \square

PROOF OF THEOREM 8.1. We have

$$H^m(\bar{\Sigma}, \Omega_{\Sigma, c}^k) = H_c^m(\Sigma, \Omega_\Sigma^k) = H_c^{k, m}(\Sigma) = \begin{cases} \mathbf{F}^{d-k}(\underline{0})^\star = \mathbf{F}_{d-k}(\underline{0}) & \text{if } m = d, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

By proposition 8.4, the cohomology of $\Omega_{\Sigma, c}^k$ becomes isomorphic to the hypercohomology $\mathbb{H}(\Sigma, \Omega_\bullet^k)$. Thus, we get

$$\mathbb{H}(\Sigma, \Omega_\bullet^k) \simeq \mathbf{F}_{d-k}(\underline{0})[-d],$$

meaning

$$\mathbb{H}^m(\bar{\Sigma}, \Omega_\bullet^k) = \begin{cases} \mathbf{F}_{d-k}(\underline{0}) & \text{for } m = d, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

On the other hand, using the hypercohomology spectral sequence, combined with Proposition 8.3, we infer that the hypercohomology of Ω_\bullet^k is given by the cohomology of the following complex:

$$0 \rightarrow H^{2k}(\bar{\Sigma})[-k] \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_1} H^{2k}(\bar{\Sigma}^\sigma)[-k-1] \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{d-k}} H^{2k}(\bar{\Sigma}^\sigma)[-d] \rightarrow 0.$$

We thus conclude the exactness of the sequence

$$(8.3) \quad 0 \rightarrow H^{2k}(\bar{\Sigma}) \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_1} H^{2k}(\bar{\Sigma}^\sigma) \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_2} H^{2k}(\bar{\Sigma}^\sigma) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{d-k}} H^{2k}(\bar{\Sigma}^\sigma) \rightarrow \mathbf{F}_{d-k}(0) \rightarrow 0,$$

and the theorem follows. \square

8.4. The non-smooth case. In the case where Σ is not necessarily smooth, we still have the following proposition that we will use in Section 10.

PROPOSITION 8.5. *Let Σ be any unimodular tropical fan and let k be an integer. Then the following sequence is exact*

$$\bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{d-k-1}} H^{k,k}(\bar{\Sigma}^\sigma) \longrightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{d-k}} H^{k,k}(\bar{\Sigma}^\sigma) \longrightarrow H_c^{k,d}(\Sigma) \longrightarrow 0.$$

In the smooth case, one can recognize the end of the long exact sequence (8.1): indeed, when Σ is smooth, we have $H_c^{k,d}(\Sigma) \simeq \mathbf{F}_{d-k}(0)$.

PROOF. Proposition 8.4 still holds. However, we only get that

$$\mathbb{H}^\bullet(\Sigma, \Omega_\bullet^k) \simeq H_c^{k,\bullet}(\Sigma),$$

with no further simplification.

If we denote by $\mathbf{E}_\bullet^\bullet$ the hypercohomology spectral sequence, we get

$$\mathbf{E}_1^{a,b} = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_a} H^{k,b}(\bar{\Sigma}^\sigma).$$

By Theorem 7.1 and Remark 7.5, we know that for any $\sigma \in \Sigma$, $H^{k,b}(\bar{\Sigma}^\sigma)$ is trivial if $b > k$. Moreover, $H^{k,b}(\bar{\Sigma}^\sigma)$ is clearly trivial if $|\sigma| > d-k$. Hence $\mathbf{E}_1^{a,b}$ is nontrivial only for $0 \leq a \leq d-k$ and $0 \leq b \leq k$. Computing the further pages, we get that

$$\mathbf{E}_\infty^{d-k,k} = \mathbf{E}_2^{d-k,k} = \text{coker}(\mathbf{E}_1^{d-k-1,k} \rightarrow \mathbf{E}_1^{d-k,k}).$$

Since $\mathbf{E}_\infty^{d-k,k}$ is the only nontrivial term of degree d , we get

$$H_c^{k,d}(\Sigma) \simeq \mathbf{E}_\infty^{d-k,k} = \text{coker}\left(\bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{d-k-1}} H^{k,k}(\bar{\Sigma}^\sigma) \longrightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{d-k}} H^{k,k}(\bar{\Sigma}^\sigma)\right),$$

which concludes the proof. \square

9. Compactifications of complements of hyperplane arrangements

The aim of this section is to discuss an application of the results we proved previously in the study of cohomology rings of wonderful compactifications.

9.1. Tropical compactifications of subvarieties of tori. Let N be a lattice of finite rank n and denote by M the dual lattice. Let $T = \text{Spec}(\mathbb{C}[M])$ be the corresponding complex torus of dimension n .

Let $X \hookrightarrow T$ be a connected closed subvariety of T and let $\text{Trop}(X) \subseteq N_\mathbb{R}$ be the tropicalization of X , which comes with a natural weight function. Any fan with support in the tropicalization $\text{Trop}(X)$ equipped with this weight function verifies the balancing condition [BIMS15, MR09, MS15]. In particular, if the weight function is equal to one, then $\text{Trop}(X)$ is a tropical fan. That is the assumption we make in this section.

We are interested in compactifications of X obtained by taking the closure in a toric variety which contains T as open torus. The following theorem summarizes several known properties of these compactifications.

THEOREM 9.1. *Notations as above, let $X \hookrightarrow T$. Consider a unimodular fan Σ in $N_\mathbb{R}$ and denote by $\mathbb{C}\mathbb{P}_\Sigma$ the corresponding toric variety. Let \bar{X} be the closure of X in $\mathbb{C}\mathbb{P}_\Sigma$.*

- ([Tev07, KKMS06]) \bar{X} is proper if and only if $|\Sigma| \supseteq \text{Trop}(X)$.
- ([ST08, Hac08]) The following conditions are equivalent
 - (1) $|\Sigma| = \text{Trop}(X)$.
 - (2) for any torus orbit T^σ , $\sigma \in \Sigma$, the intersection $\bar{X} \cap T^\sigma$ has pure dimension equal to $m - |\sigma|$.
- ([Tev07, Hac08]) Assume $|\Sigma| = \text{Trop}(X)$. The following conditions are then equivalent
 - (1) for each $\sigma \in \Sigma$, the intersection $\bar{X} \cap T^\sigma$ is smooth.
 - (2) the multiplication map $\mathbf{m}: T \times \bar{X} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_\Sigma$ is smooth.
- ([Tev07]) Assume that $\mathbf{m}: T \times \bar{X} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_\Sigma$ is smooth. Then for any unimodular fan Σ' with support $\text{Trop}(X)$, denoting by \bar{X}' the closure of X in $\mathbb{C}\mathbb{P}_{\Sigma'}$, the multiplication map $\mathbf{m}': T \times \bar{X}' \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_{\Sigma'}$ is smooth.

We have the following definitions introduced by Tevelev [Tev07].

DEFINITION 9.2 (Tropical compactification). Let X be a subvariety of the algebraic torus T .

- Let Σ be a unimodular fan with support $\text{Trop}(X)$. The compactification \bar{X} obtained by taking the closure of X in $\mathbb{C}\mathbb{P}_\Sigma$ is called *tropical* if the multiplication map $\mathbf{m}: T \times \bar{X} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_\Sigma$ is faithfully flat.
- The subvariety X of the torus T is called *schön* if a compactification $\bar{X} \subseteq \mathbb{C}\mathbb{P}_\Sigma$ with Σ unimodular with support $|\Sigma| = \text{Trop}(X)$ (and so any such compactification) has the property that the multiplication map $\mathbf{m}: T \times \bar{X} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_\Sigma$ is smooth. \diamond

Tevelev proved in [Tev07] that any subvariety X of a torus T has a tropical compactification \bar{X} . Moreover, a tropical compactification \bar{X} has the following properties:

- (1) The boundary $\bar{X} \setminus X$ is divisorial.

Denote this divisor by D and let D_1, \dots, D_r be its irreducible components.

- (2) The boundary divisor has combinatorial normal crossings: for any collection of r irreducible divisors D_{i_1}, \dots, D_{i_r} in D , the intersection $D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_r}$ is either empty or it has codimension r in \bar{X} .

It follows from the properties listed above that in the case X is schön, the tropical compactification \bar{X} is smooth and the boundary divisor D is strict normal crossing (we assume the underlying fan Σ is always unimodular, so the toric varieties we consider are all smooth).

9.2. Compactifications of the complement of a hyperplane arrangement. Consider now a collection of hyperplanes H_0, H_1, \dots, H_m in $\mathbb{C}\mathbb{P}^r$ given by linear forms $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_m$. We assume that the vector space generated by $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_m$ has maximum rank, i.e., the intersection $H_0 \cap H_1 \cap \dots \cap H_m$ is empty. Let X be the complement $\mathbb{C}\mathbb{P}^r \setminus \bigcup_{j=0}^m H_j$ and consider the embedding $X \hookrightarrow T$ for the torus $T = \text{Spec}(\mathbb{C}[M])$ with

$$M = \ker(\text{deg}: \mathbb{Z}^{m+1} \rightarrow \mathbb{Z}), \quad \text{deg}(x_0, \dots, x_m) = x_0 + \dots + x_m.$$

The embedding is given by coordinates $[\ell_0 : \dots : \ell_m]$. Denote by N the dual lattice to M .

THEOREM 9.3. *Notations as above, we have the following.*

- (Tevelev [Tev07, Theorem 1.5]) *The subvariety $X \hookrightarrow T$ is schön.*
- (Ardila-Klivans [AK06]) *The tropicalization of X coincides with the support of the Bergman fan $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ of the matroid \mathfrak{M} associated to the hyperplane arrangement.*

Here is the main theorem of this section.

THEOREM 9.4. *Let Σ be a unimodular fan with support $\text{Trop}(X) = |\Sigma_{\text{int}}|$ and denote by \bar{X} the corresponding compactification. The cohomology ring of \bar{X} is concentrated in even degrees and it is of Hodge-Tate type, i.e., the Hodge-decomposition in degree $2p$ is concentrated in bidegree (p, p) . Moreover, the restriction map*

$$A^\bullet(\Sigma) \simeq A^\bullet(\mathbb{C}\mathbb{P}_\Sigma) \longrightarrow H^{2\bullet}(\bar{X})$$

is an isomorphism of rings.

Combined with Theorem 7.2, this leads to an isomorphism

$$H^{2p}(\bar{\Sigma}) \simeq H^{2p}(\bar{X}).$$

The theorem provides a *tropical* generalization of the results of Feichtner-Yuzvinsky and De Concini-Procesi [FY04, DP95], by going beyond the combinatorial data of building and nested sets, assumed usually in the theory of wonderful compactifications.

PROOF OF THEOREM 9.4. We give the proof with rational coefficients, and sketch an alternate proof in Remark 9.5 which works with integral coefficients.

Consider a cone $\sigma \in \Sigma$ and let X^σ be the intersection of \bar{X} with the torus orbit T^σ in $\mathbb{C}\mathbb{P}_\Sigma$ associated to σ . We have the following properties:

- X^σ is itself isomorphic to the complement of a hyperplane arrangement. The embedding $X^\sigma \hookrightarrow T^\sigma$ has tropicalization given by $\text{Trop}(X^\sigma) = |\Sigma_\infty^\sigma| \hookrightarrow N_\infty^\sigma$.
- The closure of X^σ in \bar{X} coincides with the compactification \bar{X}^σ of X^σ in the toric variety $\mathbb{C}\mathbb{P}_{\Sigma_\infty^\sigma}$.

Proceeding by induction on the dimension of X , we can thus assume that the theorem holds for all the strata X^σ for any cone $\sigma \neq \underline{0}$ in Σ .

Consider now the smooth compactification $X \hookrightarrow \bar{X}$ with strict normal crossing divisor, as stated by Tevelev’s theorem. The Deligne spectral sequence, which describes the mixed Hodge structure on the cohomology of X in terms of the cohomology of the closed strata in the stratification of \bar{X} given by the intersection of components of the boundary divisor, gives the following exact sequence:

$$0 \rightarrow H^p(X) \rightarrow \bigoplus_{\substack{\sigma \in \Sigma \\ |\sigma|=p}} H^0(\bar{X}^\sigma) \rightarrow \bigoplus_{\substack{\sigma \in \Sigma \\ |\sigma|=p-1}} H^2(\bar{X}^\sigma) \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\substack{\sigma \in \Sigma \\ |\sigma|=1}} H^{2p-2}(\bar{X}^\sigma) \rightarrow H^{2p}(\bar{X}) \rightarrow 0,$$

where the maps between cohomology groups are again given by the Gysin maps for the embeddings $\bar{X}^\sigma \hookrightarrow \bar{X}^\tau$ for pair of faces $\tau \prec \sigma$. This was proved by [IKMZ19] and is a consequence of a theorem of Shapiro [Sha93] which states that the p -th cohomology of the complement of a hyperplane arrangement is pure of weight $2p$ concentrated in bidegree (p, p) .

In Section 8 we proved a tropical analogue of the above exact sequence for any smooth tropical fan, the tropical Deligne resolution:

$$0 \rightarrow \mathbf{F}^p(\underline{0}) \rightarrow \bigoplus_{\substack{\sigma \in \Sigma \\ |\sigma|=p}} H^0(\bar{\Sigma}_\infty^\sigma) \rightarrow \bigoplus_{\substack{\sigma \in \Sigma \\ |\sigma|=p-1}} H^2(\bar{\Sigma}_\infty^\sigma) \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\substack{\sigma \in \Sigma \\ |\sigma|=1}} H^{2p-2}(\bar{\Sigma}_\infty^\sigma) \rightarrow H^{2p}(\bar{\Sigma}) \rightarrow 0,$$

where the maps between cohomology groups are given by the Gysin maps for the embeddings $\bar{\Sigma}_\infty^\sigma \hookrightarrow \bar{\Sigma}_\infty^\tau$ for pair of faces $\tau \prec \sigma$.

It was also proved by Zharkov [Zha13] that the coefficient group $\mathbf{F}^p(\underline{0})$ is naturally isomorphic to the cohomology group $H^p(X)$. Under this isomorphism and the isomorphism between $H^{2p}(\bar{\Sigma}^\sigma)$ and $H^{2p}(\bar{X}^\sigma)$, obtained by combining the isomorphism of Theorem 7.2 and the restriction maps $A^\bullet(\Sigma^\sigma) \simeq H^{2\bullet}(\mathbb{C}\mathbb{P}_{\Sigma^\sigma}) \rightarrow H^{2\bullet}(\bar{X}^\sigma)$, for all $\sigma \neq \underline{0}$, we get that the above

two Deligne exact sequences are actually isomorphic up to the last piece on the right. This shows that the natural map

$$H^{2p}(\overline{\Sigma}) \rightarrow H^{2p}(\overline{X}),$$

given by the composition of maps $H^{2p}(\overline{\Sigma}) \simeq A^p(\Sigma) \simeq A^p(\mathbb{C}\mathbb{P}_\Sigma) \rightarrow A^p(\overline{X}) \rightarrow H^{2p}(\overline{X})$, must be an isomorphism as well, which proves the theorem in even cohomological degrees.

Again, proceeding by induction, the Deligne spectral sequence implies that the cohomology groups $H^{2p+1}(\overline{X})$ are all vanishing. The same statement was proved for $H^{2p+1}(\overline{\Sigma})$ in Theorem 7.2, so the isomorphism $H^\bullet(\overline{\Sigma}) \simeq H^\bullet(\overline{X})$ holds as well in odd cohomological degrees. \square

REMARK 9.5. We sketch an alternative argument which allows to get the result with integral coefficients.

First, the case where the hyperplanes form the uniform matroid, and the fan Σ has the same support as the Bergman fan $\Sigma_{\mathfrak{M}}$, is direct. In this case, the toric variety and the compactification coincide, and the result follows from the isomorphism between the cohomology ring of the toric variety and the Chow ring of the fan, combined with the Hodge isomorphism theorem.

Proceeding now by induction, we prove the result for the case of an arbitrary hyperplane arrangement with Σ having the same support as $\Sigma_{\mathfrak{M}}$, for \mathfrak{M} the matroid of the hyperplane arrangement. Combining Keel's lemma, the weak factorization theorem, and Theorem 9.3, it will be enough to produce one specific fan with the same support as $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ for which the result holds. We take the linear form ℓ which defines one of the hyperplanes. We take the tropicalization $\text{Trop}(X')$ of the complement X' of all the other hyperplanes with respect to the embedding given by their linear forms, and take the tropicalization of ℓ , viewed as a rational function defined on X' , to obtain a piecewise integral linear function f on $\text{Trop}(X')$. The tropical modification of $\text{Trop}(X')$ along the divisor $\text{div}(f)$ produces a fan Σ with the same support as the Bergman fan $\Sigma_{\mathfrak{M}}$. Let Σ' be the fan structure on $\text{Trop}(X')$ and \overline{X}' the corresponding compactification. Let \overline{X} be the compactification of X with respect to Σ . Then we get an isomorphism $\overline{X} \simeq \overline{X}'$, given by the graph of ℓ , and an isomorphism between the Chow rings of Σ and Σ' , given by Theorem 6.8. Combining these isomorphisms and applying the hypothesis of the induction, we get the theorem for Σ , and thus for any unimodular fan with the same support as Σ . \diamond

10. Homology of tropical modifications and shellability of smoothness

The aim of this section is to study the behavior of homology and cohomology groups under tropical modifications, and to prove shellability of smoothness for tropical fans.

10.1. Computation of the homology and cohomology of a tropical modification.

This section is devoted to the proof of the following theorem.

THEOREM 10.1 (Tropical modification formula). *Let Σ be a smooth tropical fan. Let f be a conewise integral linear function on Σ such that $\text{div}(f)$ is reduced. Set $\Delta = \text{div}(f)$. Then the following equalities between different homology and cohomology groups hold.*

— (Open tropical modifications) *We have*

$$H_c^{\bullet,\bullet}(\mathcal{TM}_f(\Sigma)) \simeq H_c^{\bullet,\bullet}(\Sigma, \Delta) \quad \text{and} \quad H_{\bullet,\bullet}^{\text{BM}}(\mathcal{TM}_f(\Sigma)) \simeq H_{\bullet,\bullet}^{\text{BM}}(\Sigma, \Delta),$$

where $H_c^{\bullet,\bullet}(\Sigma, \Delta)$ and $H_{\bullet,\bullet}^{\text{BM}}(\Sigma, \Delta)$ denote the relative cohomology with compact support and the relative Borel-Moore homology respectively.

— (Closed tropical modifications) *We have*

$$H_c^{\bullet,\bullet}(\mathcal{CTM}_f(\Sigma)) \simeq H_c^{\bullet,\bullet}(\Sigma) \quad \text{and} \quad H_{\bullet,\bullet}^{\text{BM}}(\mathcal{CTM}_f(\Sigma)) \simeq H_{\bullet,\bullet}^{\text{BM}}(\Sigma),$$

and these isomorphisms are compatible with the Poincaré duality.

— (Open extended tropical modifications) *We have*

$$H_c^{\bullet,\bullet}(\mathcal{TM}_f(\bar{\Sigma})) \simeq H_c^{\bullet,\bullet}(\bar{\Sigma}, \bar{\Delta}) \quad \text{and} \quad H_{\bullet,\bullet}^{\text{BM}}(\mathcal{TM}_f(\bar{\Sigma})) \simeq H_{\bullet,\bullet}^{\text{BM}}(\bar{\Sigma}, \bar{\Delta}).$$

— (Closed extended tropical modifications) *We have*

$$H_c^{\bullet,\bullet}(\mathcal{CTM}_f(\bar{\Sigma})) \simeq H_c^{\bullet,\bullet}(\bar{\Sigma}) \quad \text{and} \quad H_{\bullet,\bullet}^{\text{BM}}(\mathcal{CTM}_f(\bar{\Sigma})) \simeq H_{\bullet,\bullet}^{\text{BM}}(\bar{\Sigma}),$$

and these isomorphisms are compatible with the Poincaré duality.

REMARK 10.2. Let us describe briefly the different isomorphisms. For non-extended tropical modifications, it is simply induced by the maps $\mathfrak{p}_* : \mathbf{F}_\bullet(\sigma_o) \rightarrow \mathbf{F}_\bullet^\Sigma(\sigma)$ for $\sigma \in \Sigma$. For the extended tropical modification however, one has to add the maps induced by the inclusions $i : \mathbf{F}_\bullet(\delta_\infty) \simeq \mathbf{F}_\bullet^\Delta(\delta) \hookrightarrow \mathbf{F}_\bullet^\Sigma(\delta)$ for $\delta \in \Delta$. \diamond

Notice that the notation $\mathbf{F}_\bullet(\delta)$ is ambiguous for $\delta \in \Delta$. That is why, here and in the rest of this section, we precise as a superscript in which fan we consider $\mathbf{F}_\bullet(\delta)$: either $\mathbf{F}_\bullet^\Delta(\delta)$ or $\mathbf{F}_\bullet^\Sigma(\delta)$.

First note that the theorem is trivial in the case of a degenerate tropical modification, i.e., if $\Delta = 0$. Indeed, since Σ is smooth, it is div-faithful by Theorem 4.11, and then $\mathcal{TM}_f(\Sigma)$ is isomorphic to Σ (see Proposition 5.2) and the theorem follows easily.

In what follows, we assume the tropical modification is non-degenerate. As usual, we use the notations of Section 5.1. In particular, recall that \mathfrak{p} is the projection associated to the tropical modification, and that \mathbf{e}_\perp is the unit vector of the special new ray above $\underline{0}$ in the tropical modification.

The key point in the proof of the theorem above is the following lemma which provides a description of the coefficient sheaves in the tropical modification.

LEMMA 10.3 (Local tropical modification formula). *Let Σ be a smooth tropical fan, and let $\Delta = \text{div}(f)$ be a reduced divisor associated to a conewise integral linear function on Σ . Let $\tilde{\Sigma} = \mathcal{TM}_\Delta(\Sigma)$.*

Let σ be a face in $\Sigma \setminus \Delta$, δ be a face in Δ , and let p be a non-negative integer. We have the following short exact sequences.

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathbf{F}_p^{\tilde{\Sigma}}(\sigma_o) \xrightarrow{\mathfrak{p}_*} \mathbf{F}_p^\Sigma(\sigma) \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow \mathbf{F}_{p-1}^\Delta(\delta) \longrightarrow \mathbf{F}_p^{\tilde{\Sigma}}(\delta_\perp) \xrightarrow{\mathfrak{p}_*} \mathbf{F}_p^\Delta(\delta) \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow \mathbf{F}_{p-1}^\Delta(\delta) \longrightarrow \mathbf{F}_p^{\tilde{\Sigma}}(\delta_o) \xrightarrow{\mathfrak{p}_*} \mathbf{F}_p^\Sigma(\delta) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

where the first map in the two last sequences is given by $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{e}_\perp \wedge \mathfrak{p}^(\mathbf{v})$ with $\mathfrak{p}^*(\mathbf{v})$ denoting any preimage of \mathbf{v} by \mathfrak{p}_* .*

Note that the map $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{e}_\perp \wedge \mathfrak{p}^*(\mathbf{v})$ does not depend on the chosen preimage of \mathbf{v} . The proof of this lemma is based on the tropical Deligne sequence and will be given in Section 10.3. We now proceed with the proof of the tropical modification formula.

PROOF OF THEOREM 10.1. It is possible to derive the theorem by using the above local lemma and by following the proof of Proposition 5.5 in [JRS18]. We present another proof here using cellular homology.

We first prove the isomorphism stated in the theorem concerning open tropical modifications. Let $\tilde{\Sigma} = \mathcal{TM}_\Delta(\Sigma)$. Summing the short exact sequences of Lemma 10.3 over all faces of $\tilde{\Sigma}$, we get the following short exact sequence for any pair of integers p, q :

$$0 \rightarrow C_{p-1, q-1}^{\text{BM}}(\Delta) \oplus C_{p-1, q}^{\text{BM}}(\Delta) \rightarrow C_{p, q}^{\text{BM}}(\tilde{\Sigma}) \rightarrow C_{p, q-1}^{\text{BM}}(\Delta) \oplus C_{p, q}^{\text{BM}}(\Sigma) \rightarrow 0.$$

An inspection of the boundary operators leads to the following short exact sequence of cochain complexes

$$(10.1) \quad 0 \longrightarrow \text{Cone}_\bullet \left(C_{p-1,\bullet}^{\text{BM}}(\Delta) \xrightarrow{\text{id}} C_{p-1,\bullet}^{\text{BM}}(\Delta) \right) \longrightarrow C_{p,\bullet}^{\text{BM}}(\tilde{\Sigma}) \longrightarrow \text{Cone}_\bullet \left(C_{p,\bullet}^{\text{BM}}(\Delta) \hookrightarrow C_{p,\bullet}^{\text{BM}}(\Sigma) \right) \longrightarrow 0,$$

where for two complexes C^\bullet and D^\bullet and a morphism $\phi: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$, the complex $\text{Cone}_\bullet(\phi)$ is the mapping cone defined as follows

$$\text{Cone}_k(\phi) = C_{k-1} \oplus D_k, \quad \text{and} \quad \partial: C_{k-1} \oplus D_k \longrightarrow C_{k-2} \oplus D_{k-1}, \\ a \oplus b \longmapsto -da \oplus (\phi(a) + db).$$

We refer to [KS90] for more information about the mapping cones and their basic properties.

As usual, we define the relative chain complex $C_{p,\bullet}^{\text{BM}}(\Sigma, \Delta)$ as the cokernel of the inclusion $C_{p,\bullet}^{\text{BM}}(\Delta) \hookrightarrow C_{p,\bullet}^{\text{BM}}(\Sigma)$.

The homology of the cone of the identity map is always zero. Moreover, the homology of $\text{Cone}_\bullet \left(C_{p,\bullet}^{\text{BM}}(\Delta) \hookrightarrow C_{p,\bullet}^{\text{BM}}(\Sigma) \right)$ is isomorphic to the relative homology.

From the long exact sequence associated to the short exact sequence (10.1), we get the following isomorphism

$$H_{\bullet,\bullet}^{\text{BM}}(\tilde{\Sigma}) \simeq H_{\bullet,\bullet}^{\text{BM}}(\Sigma, \Delta),$$

which is exactly the first isomorphism of the theorem.

We now prove the isomorphism between $H_{\bullet,\bullet}^{\text{BM}}(\mathcal{CTM}_f(\Sigma))$ and $H_{\bullet,\bullet}^{\text{BM}}(\Sigma)$. The chain complex of $\mathcal{CTM}_f(\Sigma)$ can be decomposed into the following short exact sequence

$$0 \longrightarrow \text{Cone}_\bullet \left(C_{p-1,\bullet}^{\text{BM}}(\Delta) \xrightarrow{\text{id}_\Delta} C_{p-1,\bullet}^{\text{BM}}(\Delta) \right) \oplus C_{p,\bullet}^{\text{BM}}(\Delta) \longrightarrow C_{p,\bullet}^{\text{BM}}(\mathcal{CTM}_f(\Sigma)) \\ \longrightarrow \text{Cone}_\bullet \left(C_{p,\bullet}^{\text{BM}}(\Delta) \xrightarrow{\text{id}_\Delta} C_{p,\bullet}^{\text{BM}}(\Sigma) \right) \longrightarrow 0.$$

The only new term compared to (10.1) is the one coming from the stratum $\Delta_\infty := \tilde{\Sigma}_\infty^\rho$ (with ρ the special ray) which is isomorphic to Δ . Moreover, when we compare this short exact sequence with the short exact sequence of relative homology, we get the following commutative diagram.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Cone}_\bullet(\text{id}_\Delta) \oplus C_{p,\bullet}^{\text{BM}}(\Delta) & \longrightarrow & C_{p,\bullet}^{\text{BM}}(\mathcal{CTM}_f(\Sigma)) & \longrightarrow & \text{Cone}_\bullet(i_\Delta) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \pi_2 & & \downarrow \mathfrak{p}_* + i_{\Delta_\infty} & & \downarrow \pi_1 \\ 0 & \longrightarrow & C_{p,\bullet}^{\text{BM}}(\Delta) & \longrightarrow & C_{p,\bullet}^{\text{BM}}(\Sigma) & \longrightarrow & C_{p,\bullet}^{\text{BM}}(\Sigma, \Delta) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Here, π_2 denotes the projection on the second part, \mathfrak{p}_* is the usual map coming from the projections $\mathfrak{p}_*: \mathbf{F}_p(\sigma_\rho) \rightarrow \mathbf{F}_p^\Sigma(\sigma)$ for $\sigma \in \Sigma$, i_{Δ_∞} is given by the maps $\mathbf{F}_p(\delta_\infty) \simeq \mathbf{F}_p^\Delta(\delta) \hookrightarrow \mathbf{F}_p^\Sigma(\delta)$ for $\delta \in \Delta$, and π_1 is the natural projection

$$C_{p,\bullet}^{\text{BM}}(\Sigma) \oplus C_{p,\bullet-1}^{\text{BM}}(\Delta) \longrightarrow C_{p,\bullet}^{\text{BM}}(\Sigma) \longrightarrow C_{p,\bullet}^{\text{BM}}(\Sigma)/C_{p,\bullet}^{\text{BM}}(\Delta).$$

Hence we get a morphism between the associated long exact sequences.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{p,q}^{\text{BM}}(\Delta) & \longrightarrow & H_{p,q}^{\text{BM}}(\mathcal{CTM}_f(\Sigma)) & \longrightarrow & H_q(\text{Cone}_\bullet(i_\Delta)) \longrightarrow H_{p,q-1}^{\text{BM}}(\Delta) \longrightarrow \cdots \\ & & \parallel & & \downarrow \mathfrak{p}_* + i_{\Delta_\infty} & & \downarrow \wr & \parallel \\ \cdots & \longrightarrow & H_{p,q}^{\text{BM}}(\Delta) & \longrightarrow & H_{p,q}^{\text{BM}}(\Sigma) & \longrightarrow & H_{p,q}^{\text{BM}}(\Sigma, \Delta) \longrightarrow H_{p,q-1}^{\text{BM}}(\Delta) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

The maps π_2 and π_1 induce isomorphisms in homology, and we conclude by using the five lemma.

The other isomorphisms in the statement of the theorem can be obtained in similar ways (using if necessary, for the cohomology, the dual of the local tropical modification formula, Lemma 10.3). The theorem follows. \square

10.2. Shellability of smoothness. As a consequence of Theorem 10.1, we get the following.

THEOREM 10.4. *Smoothness is shellable in \mathcal{T}_{rop} .*

PROOF. We use Lemma 5.10. It is a trivial fact that elements of \mathcal{B}_0 are smooth. Moreover, since smoothness only depends on the support (Theorem 3.20), we only have to prove the closeness by products and the closeness by tropical modifications. Closeness by products is given by Proposition 3.21. It remains to prove the closeness by tropical modifications.

Let Σ be a tropical fan. Let f be a conewise integral linear function on Σ such that $\text{div}(f)$ is reduced. Set $\Delta = \text{div}(f)$ and let $\tilde{\Sigma} = \mathcal{TM}_f(\Sigma)$. Assume moreover that Δ is smooth (and non-empty). By Lemma 5.10, we just have to prove the Poincaré duality for $\tilde{\Sigma}$.

By Theorem 10.1, we know that $H_{\bullet,\bullet}^{\text{BM}}(\tilde{\Sigma}) \simeq H_{\bullet,\bullet}^{\text{BM}}(\Sigma, \Delta)$. Using the long exact sequence of relative homology, we get the following exact sequence

$$\dots \longrightarrow H_{p,q}^{\text{BM}}(\Delta) \longrightarrow H_{p,q}^{\text{BM}}(\Sigma) \longrightarrow H_{p,q}^{\text{BM}}(\tilde{\Sigma}) \longrightarrow H_{p,q-1}^{\text{BM}}(\Delta) \longrightarrow \dots$$

Since Σ (resp. Δ) verifies the Poincaré duality, its Borel-Moore homology is trivial except for $q = d$ (resp. $q = d - 1$). We deduce that $H_{p,\bullet}^{\text{BM}}(\tilde{\Sigma})$ is trivial except in degree d and that we have a short exact sequence

$$0 \longrightarrow H_{p,d}^{\text{BM}}(\Sigma) \longrightarrow H_{p,d}^{\text{BM}}(\tilde{\Sigma}) \longrightarrow H_{p,d-1}^{\text{BM}}(\Delta) \longrightarrow 0.$$

The cap products $\cdot \frown \nu_{\mathcal{Y}}$ for \mathcal{Y} any of the tropical fans Σ , Δ or $\tilde{\Sigma}$ induces the following commutative diagram.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{F}^{d-p}(\Sigma) & \longrightarrow & \mathbf{F}^{d-p}(\tilde{\Sigma}) & \longrightarrow & \mathbf{F}^{d-p-1}(\Delta) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow \wr \\ 0 & \longrightarrow & H_{p,d}^{\text{BM}}(\Sigma) & \longrightarrow & H_{p,d}^{\text{BM}}(\tilde{\Sigma}) & \longrightarrow & H_{p,d-1}^{\text{BM}}(\Delta) \longrightarrow 0 \end{array}$$

We have already seen that the second row is exact. The first row is also a short exact sequence by the dual of Lemma 10.3. The first and last vertical maps are isomorphisms because Σ and Δ verify the Poincaré duality. Hence, by the five lemma, the second vertical map is an isomorphism, and therefore, $\tilde{\Sigma}$ verifies the Poincaré duality. \square

10.3. Proof of Lemma 10.3. In this final section, we prove Lemma 10.3. So let Σ be a smooth tropical fan. Let f be a conewise integral linear function on Σ such that $\text{div}(f)$ is reduced. Let $\Delta = \text{div}(f)$ and $\tilde{\Sigma} = \mathcal{TM}_f(\Sigma)$. We have to prove the following three exact sequences for any face $\sigma \in \Sigma \setminus \Delta$ and any $\delta \in \Delta$.

$$\begin{aligned} 0 & \longrightarrow \mathbf{F}_p^{\tilde{\Sigma}}(\sigma_o) \xrightarrow{p^*} \mathbf{F}_p^{\Sigma}(\sigma) \longrightarrow 0, \\ 0 & \longrightarrow \mathbf{F}_{p-1}^{\Delta}(\delta) \longrightarrow \mathbf{F}_p^{\tilde{\Sigma}}(\delta_{\downarrow}) \xrightarrow{p^*} \mathbf{F}_p^{\Delta}(\delta) \longrightarrow 0, \\ 0 & \longrightarrow \mathbf{F}_{p-1}^{\Delta}(\delta) \longrightarrow \mathbf{F}_p^{\tilde{\Sigma}}(\delta_o) \xrightarrow{p^*} \mathbf{F}_p^{\Sigma}(\delta) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

For the first exact sequence, let $\sigma \in \Sigma \setminus \Delta$. Let $\ell \in M$ be any integral linear map which coincides with f on σ . Denote by $\pi^{\sigma}: N \rightarrow N^{\sigma}$ the natural projection. Then, $f - \ell$ induces a conewise integral linear map $f^{\sigma} = \pi_*^{\sigma}(f - \ell)$ on Σ^{σ} . Since no codimension one face of Σ containing σ is in $\text{div}(f)$, we deduce that $\text{div}(f^{\sigma})$ is trivial. Since Σ is smooth, it is div-faithful

at σ . As a consequence, f^σ must be a linear map on Σ^σ . Set $\tilde{\ell} = \pi^{\sigma,*}(f^\sigma) + \ell$, and note that $\tilde{\ell}$ is a linear map which coincides with f on the faces containing σ . The isomorphism between $\mathbf{F}_p^\Sigma(\sigma)$ and $\mathbf{F}_p^{\tilde{\Sigma}}(\sigma_o)$ is now induced by the isomorphism between $N_{\mathbb{R}}$ and $\text{Im}(\tilde{\ell})$.

The second exact sequence is clear since $\eta_{\mathbb{L}} \simeq \eta \times \mathbb{R}_+ \mathbf{e}_{\mathbb{L}}$ for any cone $\eta > \delta$ in Δ .

It remains to prove the last one. We prove the exactness of the following sequence

$$0 \longrightarrow \mathbf{F}_{p-1}^\Delta(\mathbb{0}_\Delta) \longrightarrow \mathbf{F}_p^{\tilde{\Sigma}}(\mathbb{0}_{\tilde{\Sigma}}) \longrightarrow \mathbf{F}_p^\Sigma(\mathbb{0}_\Sigma) \longrightarrow 0.$$

The statement then follows by applying the same argument to Δ^δ , $\tilde{\Sigma}^{\delta_o}$, and Σ^δ for all $\delta \in \Delta$, and by using the compatible isomorphisms

$$\mathbf{F}_\bullet^\Upsilon(\mu) \simeq \bigwedge^\bullet N_\mu \otimes \mathbf{F}_\bullet^{\Upsilon^\mu}(\mathbb{0}_{\Upsilon^\mu})$$

for pairs (μ, Υ) equal to (δ, Δ) , $(\delta_o, \tilde{\Sigma})$, and (δ, Σ) . Notice that the terms of the short exact sequence only depend on the support of the respective fan. Hence, we can assume without loss of generality that Δ , Σ and $\tilde{\Sigma}$ are unimodular.

Combining the sequence given by Proposition 8.5 for Δ, Σ and $\tilde{\Sigma}$, we get the diagram depicted in Figure 1 in which the three rows are exact.

$$\begin{array}{ccccc}
& 0 & & 0 & \\
& \downarrow & & \downarrow & \\
\bigoplus_{\substack{\delta \in \Delta \\ |\delta|=d-p-2}} H^{p,p}(\overline{\Delta}^\delta) & \longrightarrow & \bigoplus_{\substack{\delta \in \Delta \\ |\delta|=d-p-1}} H^{p,p}(\overline{\Delta}^\delta) & \longrightarrow & H_c^{p,d-1}(\Delta) \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
\bigoplus_{\substack{\sigma \in \tilde{\Sigma} \\ |\sigma|=d-p-1}} H^{p,p}(\tilde{\Sigma}^\sigma) & \longrightarrow & \bigoplus_{\substack{\sigma \in \tilde{\Sigma} \\ |\sigma|=d-p}} H^{p,p}(\tilde{\Sigma}^\sigma) & \longrightarrow & H_c^{p,d}(\tilde{\Sigma}) \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
\bigoplus_{\substack{\sigma \in \Sigma \\ |\sigma|=d-p-1}} H^{p,p}(\overline{\Sigma}^\sigma) & \longrightarrow & \bigoplus_{\substack{\sigma \in \Sigma \\ |\sigma|=d-p}} H^{p,p}(\overline{\Sigma}^\sigma) & \longrightarrow & H_c^{p,d}(\Sigma) \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
& 0 & & 0 & 0
\end{array}$$

FIGURE 1. End of the duals of tropical Deligne sequences for a tropical modification

We describe the vertical maps. Let $\delta \in \Delta$. Then $\tilde{\Sigma}^{\delta_{\mathbb{L}}} \simeq \Delta^\delta$. In the same way, if $\sigma \in \Sigma \setminus \Delta$, then $\tilde{\Sigma}^{\sigma_o} \simeq \Sigma^\sigma$ because Σ is div-faithful at σ . In both cases, we get an isomorphism in cohomology. The last case concerns $\tilde{\Sigma}^\sigma$ with $\sigma \in \Delta$. In this case, $\tilde{\Sigma}^{\sigma_o} \simeq \mathcal{TM}_{\Delta^\sigma}(\Sigma^\sigma)$. Since Σ^σ is div-faithful, we can combine Theorem 6.8 and Theorem 7.4 to get

$$H^{p,p}(\tilde{\Sigma}^{\sigma_o}) \simeq \text{MW}_{d-p}(\tilde{\Sigma}^{\sigma_o}) \simeq A^{d-p}(\tilde{\Sigma}^{\sigma_o})^* \simeq A^{d-p}(\Sigma^\sigma)^* \simeq H^{p,p}(\overline{\Sigma}^\sigma).$$

Summing all these isomorphisms, we get

$$\bigoplus_{\sigma \in \tilde{\Sigma}_k} H^{p,p}(\tilde{\Sigma}^\sigma) = \bigoplus_{\delta \in \Delta_{k-1}} H^{p,p}(\tilde{\Sigma}^{\delta_{\mathbb{L}}}) \oplus \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_k} H^{p,p}(\tilde{\Sigma}^{\sigma_o}) \simeq \bigoplus_{\delta \in \Delta_{k-1}} H^{p,p}(\overline{\Delta}^\delta) \oplus \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_k} H^{p,p}(\overline{\Sigma}^\sigma).$$

The two first columns of Figure 1 are the split exact sequences obtained via the isomorphism described above. The last column can be defined in a unique way to make the diagram commutative. A diagram chasing proves that we obtain an exact sequence.

$H_c^{p,q}(\Sigma)$	0	1	2
0	0	0	\mathbb{Z}^5
1	0	0	$\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
2	0	\mathbb{Z}^2	\mathbb{Z}

$H^{p,q}(\bar{\Sigma})$	0	1	2
0	\mathbb{Z}	0	0
1	0	\mathbb{Z}^5	0
2	0	\mathbb{Z}^2	\mathbb{Z}

TABLE 1. Cohomology of the fan Σ over the one-skeleton of the cube.

We now observe that we have a second commutative diagram.

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_c^{p,d-1}(\Delta) & \longrightarrow & H_c^{p,d}(\tilde{\Sigma}) & \longrightarrow & H_c^{p,d}(\Sigma) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \wr & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathbf{F}_{d-p-1}^\Delta(\underline{0}_\Delta) & \longrightarrow & \mathbf{F}_{d-p}^{\tilde{\Sigma}}(\underline{0}_{\tilde{\Sigma}}) & \xrightarrow{p^*} & \mathbf{F}_{d-p}^\Sigma(\underline{0}_\Sigma) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

The vertical maps are the dual of the map described in 3.2.2. In the same way that the map in 3.2.2 is injective, the vertical maps are surjective. Moreover, the last vertical map is an isomorphism. Indeed, by assumption Σ is smooth and thus verifies the Poincaré duality. Hence, we have an isomorphism $\mathbf{F}_\Sigma^{d-p}(\underline{0}_\Sigma) \simeq H_{p,d}^{\text{BM}}(\Sigma)$. Moreover, since $H^{p,\bullet}(\Sigma)$ is torsion-free, the Poincaré duality implies that $H_{p,\bullet}^{\text{BM}}(\Sigma)$ is torsion-free, and we have $H_c^{p,d}(\Sigma) \simeq H_{p,d}^{\text{BM}}(\Sigma)^*$. Since $\mathbf{F}_{d-p}^\Sigma(\underline{0}_\Sigma) \simeq \mathbf{F}_\Sigma^{d-p}(\underline{0}_\Sigma)^*$, by dualizing, we get the isomorphism $H_c^{p,d}(\Sigma) \simeq \mathbf{F}_{d-p}^\Sigma(\underline{0}_\Sigma)$. The injectivity of the map $\mathbf{F}_{d-p-1}^\Delta(\underline{0}_\Delta) \rightarrow \mathbf{F}_{d-p}^{\tilde{\Sigma}}(\underline{0}_{\tilde{\Sigma}})$ is clear. The rest of the exactness of the second row then follows from a diagram chasing. This concludes the proof of Lemma 10.3. \square

11. Examples and further questions

In this final section, we provide a collection of examples to which we referred in the text, and complement this with remarks and questions which we hope could clarify the concepts introduced in the paper.

11.1. The fan over the one-skeleton of the cube. A rich source of examples is given by the fan defined over the 1-skeleton of a cube. More precisely, consider the standard cube \square^3 with vertices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, and let Σ be the two-dimensional fan with rays generated by vertices and with facets generated by edges of the cube. The fan Σ is locally irreducible and tropical but not unimodular. We obtain a unimodular fan changing the lattice: in what follows, we work with the lattice $N := \sum_{\rho \in \Sigma_1} \mathbb{Z}\mathbf{e}_\rho$.

Table 1 summarizes the main cohomological data about the cube. One can compute the homology via the universal coefficient theorem: the torsion part is shifted by one column on the left, the rest remains unchanged. Moreover the image of $A^1(\Sigma)$ inside $A^1(\Sigma)^*$ is a sublattice of full rank and of index two.

Some general facts on the cohomology of fans. Let us start by making comments on some relations in these tables that generalize to all fans. First notice that the last rows coincide. This is a more general phenomenon: for any fan Σ' of dimension d , $H_c^{d,q}(\Sigma') \simeq H^{d,q}(\bar{\Sigma}')$. This is due to the vanishing of the sheaf \mathbf{F}^d on faces of positive sedentarity. Moreover, $H_c^{p,0}(\Sigma)$ is trivial and $H_c^{p,1}(\Sigma)$ is torsion-free for any p . Indeed, by definition of $\mathbf{F}_p(\underline{0})$, the map $\bigoplus_{\rho \in \Sigma_1} \mathbf{F}_p(\rho) \rightarrow \mathbf{F}_p(\underline{0})$ is surjective. Hence $H_{p,0}^{\text{BM}}(\Sigma)$ is trivial and the universal coefficient theorem concludes.

Poincaré duality for fans and classical cohomology. Pursuing our study of the cohomology of Σ , one can notice that the first row is just the reduced classical homology of the one-skeleton of the cube shifted by one. This is clear because for $p = 0$ we retrieve the classical homology. This gives us a precious information: a fan Σ' of dimension d which verifies the Poincaré duality must verify that $\Sigma' \setminus \{0\}$ has its classical cohomology concentrated in degree $d - 1$, and moreover, $H_{\text{sing}}^{d-1}(\Sigma') \simeq \mathbb{Z}^{\text{rk}(\mathbf{F}^d(\underline{0}))}$. Combined with the fact that $\text{rk}(\mathbf{F}^d(\underline{0})) \leq \binom{n}{d}$, with n the dimension of the space spanned by Σ , we deduce that locally irreducible tropical fans verifying the Poincaré duality are very specific.

On cohomology groups of $\bar{\Sigma}$ for $p > q > 0$. Notice that by Theorem 7.1, the cohomology groups $H^{p,q}(\bar{\Sigma})$ are trivial when either $p < q$, or $q = 0$ and $p > 0$, and that $H^{p,p}(\bar{\Sigma}) \simeq A^p(\Sigma)$. The theorem however provides no information about $H^{2,1}(\bar{\Sigma})$ for a general fan. For the fan Σ consider here, this cohomology group is nontrivial, hence $\bar{\Sigma}$ does not verify the Poincaré duality.

Other properties of Σ . The fan Σ can be served in the following examples.

EXAMPLE 11.1 (A Chow-duality tropical fan which does not verify the Poincaré duality). The cohomology of Σ does not verify the Poincaré duality. Its Chow ring with integral coefficients neither. On the other hand, its Chow ring with rational coefficients does verify the Poincaré duality. It also verifies the hard-Lefschetz property and the Hodge-Riemann bilinear relations. \diamond

EXAMPLE 11.2 (A non-principal locally irreducible unimodular fan). The map $A^1(\Sigma) \rightarrow A^1(\Sigma)^*$ is not surjective, hence Σ is not principal at $\underline{0}$ for integral coefficients (though it is principal for rational coefficients). Indeed, the divisor $D = \mathbb{R} \cdot (1, 1, 1)$ is not principal, but $2D$ is. In fact, this divisor is not a boundary for integral coefficients, and $H_{1,1}^{\text{BM}}(\Sigma) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ has torsion. \diamond

11.2. The cross. Consider the cross $\{xy = 0\}$ in \mathbb{R}^2 with four rays. We denote it by Δ . It is the simplest singular tropical fan. It can be used in several constructions to find various counter-examples. We propose some of them below.

EXAMPLE 11.3 (Poincaré duality for a non normal compactified fan). Recall that Λ^k is the complete fan on \mathbb{R}^k whose facets are the 2^k orthants. Consider $\Sigma := \mathcal{TM}_{\Delta}(\Lambda^2)$. Since Λ^2 is div-faithful, by Theorem 6.8, $A^{\bullet}(\Sigma) \simeq A^{\bullet}(\Lambda^2)$. Moreover, since Λ^2 is smooth, $H^{\bullet,\bullet}(\bar{\Sigma}) \simeq H^{\bullet,\bullet}(\bar{\Lambda}^2)$. Hence, despite Σ being not normal, both the Chow ring of Σ and the cohomology of $\bar{\Sigma}$ verify the Poincaré duality. In particular, Σ is irreducible, principal and div-faithful at $\underline{0}$. On the other hand, it is neither locally irreducible nor div-faithful globally. However, Σ does not verify the homological Poincaré duality: $H_{0,2}^{\text{BM}}(\Sigma) \simeq \mathbb{Z}^4$ but $\mathbf{F}^2(\underline{0})$ is of rank 3. \diamond

EXAMPLE 11.4 (A nontrivial degenerate tropical modification). Let f be the conewise integral linear function on Δ given by $f = x - y$ on $\{x + y \geq 0\}$ and 0 on the complement. Then $\text{div}(f)$ is trivial. The tropical modification $\mathcal{TM}_f(\Delta)$ is a smooth tropical line. In particular it verifies the Poincaré duality, which is not the case of Δ . This example is quite interesting: it seems that tropical modifications tend to *desingularize* tropical varieties as blow-ups do in algebraic geometry. \diamond

EXAMPLE 11.5 (Two non-principal unimodular tropical fans). Consider the fan $\Sigma = \Delta \times \Lambda$ of dimension two in \mathbb{R}^3 , i.e., it has the six rays of the axes and support $\{x = 0\} \cup \{y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. The divisor $\{y = z = 0\}$ in Σ is not principal. This means Σ is not principal at $\underline{0}$.

Following the idea of Example 11.3, one can go further and create a fan which is principal at $\underline{0}$ but not globally principal: it suffices to take $\mathcal{TM}_{\Sigma}(\Lambda^3)$. \diamond

EXAMPLE 11.6 (Non-irreducible unimodular fans). We can find higher dimensional analogues of the cross in \mathbb{R}^2 . Consider any unimodular fan Δ' of support $\{x_1 = x_2 = 0\} \cup \{x_3 = x_4 = 0\}$ in \mathbb{R}^4 . The fan Σ is normal, div-faithful and principal, but it is not irreducible. \diamond

EXAMPLE 11.7 (A normal div-faithful unimodular fan which is neither irreducible nor principal). Let Δ' be the fan defined in the previous example. Set $\Sigma = \Delta' \times \Lambda$. We get a tropical fan Σ of dimension three which is still normal and div-faithful but it is neither irreducible, nor principal: the divisor $\{x_1 = x_2 = 0\} \times \{0\}$ is not a principal divisor in Σ' . \diamond

11.3. Non saturated and non unimodular fans. Let $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ be the standard basis of \mathbb{Z}^2 and let $\mathbf{e}_0 = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Denote by $\rho_i = \mathbb{R}_+\mathbf{e}_i$, $i \in \{0, 1, 2\}$ the corresponding rays. Let N be the lattice $\mathbb{Z}(1, 0) + \mathbb{Z}(-1/3, -1/3)$. Then the lattice \mathbb{Z}^2 generated by $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ is of index three in N .

EXAMPLE 11.8. Let Σ in \mathbb{R}^2 be the one-dimensional fan with rays ρ_i , for $i = 0, 1, 2$. Then Σ is tropical, and tropically smooth, but it is not saturated. Any element of $(\mathbb{Z}^2)^* \subset M$ induces an integral linear form on Σ . As a consequence, $A^1(\Sigma)$ has torsion. For instance, $x_{\rho_1} - x_{\rho_2}$ is non-zero, but $3 \cdot (x_{\rho_1} - x_{\rho_2})$ is zero in $A^1(\Sigma)$. \diamond

EXAMPLE 11.9. Let Σ be the complete fan in the plane \mathbb{R}^2 , with $N = \mathbb{Z}^2$, whose rays are the ρ_i . This time, Σ is not unimodular. As in example 11.8, $A^1(\Sigma)$ has torsion. Moreover, the cohomology group $H^{1,2}(\overline{\Sigma}) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ is nontrivial even though we are in bidegree $(p, q) = (1, 2)$ with $p < q$. \diamond

EXAMPLE 11.10. Consider again the complete fan Σ of the previous Example. Let f be the conewise integral linear function on Σ which maps \mathbf{e}_0 on -3 and \mathbf{e}_1 and \mathbf{e}_2 on 0 . Then $\text{div}(f)$ is the reduced divisor Δ with rays ρ_i for $i = 0, 1, 2$.

Let Σ' be a unimodular subdivision of Σ ; for instance one can add the rays along the vectors $\frac{1}{3}\mathbf{e}_i + \frac{2}{3}\mathbf{e}_j$ for distinct $i, j \in \{0, 1, 2\}$. This fan is smooth. Set $\tilde{\Sigma} = \mathcal{TM}_f(\Sigma')$ and denote by ρ the new ray. Then $\tilde{\Sigma}$ is a smooth unimodular fan which is saturated at $\underline{0}$ but not at ρ . Even worse, there is no way to change the lattice N to make it saturated without changing $\tilde{\Sigma} \cap N$.

Since $\tilde{\Sigma}$ is saturated at $\underline{0}$, $A^1(\tilde{\Sigma})$ has no torsion. However, the element $x_\rho(x_{\rho_1} - x_{\rho_2}) \in A^2(\tilde{\Sigma})$ is an element of order three. \diamond

The three previous examples show that the saturation and unimodularity assumptions in Theorem 7.1 are needed in general.

11.4. Further examples.

EXAMPLE 11.11 (A shellable tropical fan which is not generalized Bergman). Let Σ be the two-dimensional skeleton of the fan of the projective space of dimension three: it has four rays generated by vectors $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ and $\mathbf{e}_0 = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, where $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ is a basis of N , and the six facets $\mathbb{R}_+\mathbf{e}_i + \mathbb{R}_+\mathbf{e}_j$ for $0 \leq i < j \leq 3$. We have $|\Sigma| = |\Sigma_{\mathfrak{M}}|$ for the uniform matroid $\mathfrak{M} = U_4^3$ of rank three on four elements. Let Δ be the tropical curve in $|\Sigma|$ with four rays ρ_1, ρ_2, ρ_3 and ρ_4 with

$$\rho_1 = \mathbb{R}_+(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2), \quad \rho_2 = \mathbb{R}_+\mathbf{e}_2, \quad \rho_3 = \mathbb{R}_+(\mathbf{e}_0 + 2\mathbf{e}_3), \quad \rho_4 = \mathbb{R}_+(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1).$$

Then we have $\Delta \simeq \Sigma_{\mathfrak{M}'}$ with $\mathfrak{M}' = U_4^2$ the uniform matroid of rank two on four elements. The tropical modification $\mathcal{TM}_\Delta(\Sigma)$ is shellable but does not have the same support as the Bergman fan of any matroid. It means it is not generalized Bergman. \diamond

EXAMPLE 11.12 (A non-shellable smooth fan). We study here an interesting example discovered by Babae and Huh [BH17]. We would like to thank Edvard Aksen and Kris Shaw for pointing out the relevance of this example to us.

A full description of the fan is given in [BH17, Aks19]. We just mention its main properties. It is a normal unimodular tropical fan Σ of dimension two living in \mathbb{R}^4 . Aksen computes its rational homology in [Aks19] and concludes that it is smooth (this remains true with integral coefficients). However, Σ does not verify the Hodge-Riemann bilinear relations: it is

quasi-projective, but the pairing $A^1(\Sigma) \times A^1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}$ has more than one positive eigenvalue. In particular it is not shellable. Indeed, by Theorem 5.9 (6), any quasi-projective shellable fan verifies the Hodge-Riemann bilinear relations. \diamond

EXAMPLE 11.13 (Irreducible components of non normal fans). Let $\Sigma = \star$ be the 1-skeleton of $U_{3,3}$ in \mathbb{R}^2 . There are five irreducible components in the sense of minimal support of an element of $H_{1,1}^{\text{BM}}(\Sigma)$, but they do not induce a partition of Σ_1 . \diamond

11.5. Questions. We end this section with a list of questions naturally arising in our study.

- Is the smoothness of a tropical fan Σ implied by the surjectivity of the map $\mathbf{F}^p(\mathbb{Q}_{\Sigma\sigma}) \rightarrow H_{d-p,d}^{\text{BM}}(\Sigma^\sigma)$, $\sigma \in \Sigma$. In other words, does the vanishing of $H_{p,q}^{\text{BM}}(\Sigma)$ follow from the surjectivity?
- Provide examples of unimodular fans Σ with torsion in $H^{p,q}(\overline{\Sigma})$, for $p > q$.
- Provide a classification of smooth tropical fans.

Hodge theory for tropical varieties

Abstract : In this paper we prove that the cohomology of smooth projective tropical varieties verify the tropical analogs of three fundamental theorems which govern the cohomology of complex projective varieties: Hard Lefschetz theorem, Hodge-Riemann relations and monodromy-weight conjecture.

On the way to establish these results, we introduce and prove other results of independent interest. This includes a combinatorial study of the tropical version of the Steenbrink spectral sequence, a treatment of Kähler forms in tropical geometry and their associated Hodge-Lefschetz structures, a tropical version of the projective bundle formula, and a result in polyhedral geometry on the existence of quasi-projective unimodular triangulations of polyhedral spaces.

Moreover, we provide a generalization with a new proof of the results of Adiprasito, Huh, and Katz, *Hodge theory for combinatorial geometries*, *Annals of Mathematics* 188 (2018), no. 2, 381–452, by showing that being Kähler for tropical fans is shellable, in the sense of our work *homology of tropical fans*. This shows that any quasi-projective shellable tropical fan is Kähler.

1. Introduction

The aim of this work and its forthcoming companions is to study Hodge theoretic aspects of tropical and non-archimedean geometry.

Tropical geometry studies degenerations of algebraic varieties by enriching the theory of semistable models and their dual complexes by polyhedral geometry. This enrichment motivates the development of algebraic geometry for combinatorial and polyhedral spaces [Mik06, MS15, GS11, MZ14, IKMZ19, Car19, JSS19] and their hybrid counter-parts, which contain a mixture of algebraic and polyhedral components [Ber09, AB15, BJ17, AN20, Mik06].

In dimension one, it is now well-understood that graphs and metric graphs are in many ways similar to Riemann surfaces and algebraic curves. For example, the analog of many classical theorems governing the geometry of Riemann surfaces, Riemann-Roch, Abel-Jacobi, Clifford and Torelli, are now established for graphs and metric graphs [BN07, GK08, MZ08, Cop16, CV10, AB15].

This viewpoint and its subsequent extensions and refinements have been quite powerful in applications in the past decade, and have resulted in several advances ranging from the study of curves and their moduli spaces (e.g. Brill-Noether theory [CDPR12a], maximum rank conjecture [JP16], the Kodaira dimension of the moduli spaces of curves [FJP20]) to arithmetic geometry of curves (e.g. uniform bounds on the number of rational points on curves [KRZ16] and equidistribution results [Ami14]). An overview of some of these results can be found in the survey paper [BJ16].

It is expected that higher dimensional combinatorial and polyhedral analogs of graphs and metric graphs should fit into the same picture and fundamental theorems of algebraic geometry should have their combinatorial and polyhedral analogs.

Representative examples of this fresco in higher dimension have emerged in the pioneering work of McMullen and Karu [McM93, Kar04] on hard Lefschetz theorem for polytopes, and more recently, in connection with Hodge theory, in the work of Adiprasito-Huh-Katz [AHK18] in the development of Hodge theory for matroids, in the work of Babae-Huh [BH17] on Demailly's strong reformulation of the Hodge conjecture for currents, in the work of Elias and Williamson [EW14] on Hodge theory of Soergel bimodules and positivity of Kazhdan-Lustig polynomials, and in the work of Adiprasito-Björner [AB14] and Adiprasito [Adi18] on weak and combinatorial Lefschetz theorems, respectively.

Our aim here is to show that cohomology of Kähler tropical varieties verify the tropical analogs of three fundamental theorems which govern the cohomology of complex projective varieties: Hard Lefschetz theorem, Hodge-Riemann relations and monodromy-weight conjecture. As we will explain below, this provides a uniform treatment and a generalization of many of the above mentioned results within the framework of tropical geometry.

In the rest of this introduction, we provide a brief discussion of the results presented in this article.

1.1. Tropical fans. Tropical fans and their supports form the local charts for more general tropical varieties. Let $N \simeq \mathbb{Z}^n$ be a lattice of finite rank and denote by $N_{\mathbb{R}}$ the vector space generated by N . Recall that a fan Σ in $N_{\mathbb{R}}$ is a non-empty collection of strongly convex polyhedral cones which verify the following two properties. First, for any cone $\sigma \in \Sigma$, any face of σ belongs to Σ . Moreover, for two cones σ and η in Σ , the intersection $\sigma \cap \eta$ is a common face of both σ and η . In particular, Σ always contains the cone $\underline{0} := \{0\}$. We denote by $|\sigma|$ the dimension of a face σ . A fan is called rational if any cone in Σ is rational in the sense that it is generated by rays which have non-zero intersection with the lattice N . In that case, each cone σ in Σ defines a sublattice N_{σ} of N of the same rank as the dimension of σ , and given by the integral points of the vector subspace of $N_{\mathbb{R}}$ generated by σ . A cone σ is simplicial if it is of the form $\sum_i \mathbb{R}_+ e_i$ for some family of independent vectors $(e_i)_i$ in $N_{\mathbb{R}}$. If σ is rational, we say it is unimodular if we can choose a basis of N_{σ} for the family $(e_i)_i$. A fan Σ is called simplicial, resp. unimodular, if all its cone are simplicial, resp. unimodular. A fan is pure dimensional if all its maximal cones have the same dimension. The support of a fan Σ is denoted by $|\Sigma|$.

A *tropical fan* is a pure dimensional simplicial rational fan Σ in $N_{\mathbb{R}}$ as above which in addition verifies the following foundational principle in tropical geometry called the balancing condition: for any cone τ of codimension one in Σ , we have the vanishing in the quotient lattice N/N_{τ} of the following sum

$$\sum_{\sigma \supset \tau} \mathbf{e}_{\sigma/\tau} = 0$$

where the sum is over faces σ of maximal dimension containing τ and $\mathbf{e}_{\sigma/\tau}$ is the vector which generates the quotient $(\sigma \cap N)/(\tau \cap N) \simeq \mathbb{Z}_{\geq 0}$. This might be regarded as a polyhedral analogue of *orientability* and leads to the definition of a *fundamental class* which plays an important role in the treatment of the duality and other finer geometric properties in polyhedral geometry.

1.2. Smoothness in tropical geometry. The smoothness is understood in the sense of our work [AP21]. The definition of tropical smoothness that we propose in that work is homological.

Let Σ be a rational fan. We denote by \mathbf{F}_p the sheaf of p -multivectors on Σ and by \mathbf{F}^p its dual. The sheaf \mathbf{F}_p is simplicial and on each cone σ is defined by

$$\mathbf{F}_p(\sigma) := \sum_{\substack{\eta \in \Sigma \\ \eta \supseteq \sigma}} \wedge^p N_{\eta} \subseteq \wedge^p N, \quad \text{and} \quad \mathbf{F}^p(\sigma) := \mathbf{F}_p(\sigma)^*.$$

The dual \mathbf{F}^p (with real coefficients) can be regarded as the sheaf of tropical holomorphic p -forms on Σ , cf. [JSS19].

The above coefficient sheaves lead to the definition of cohomology and homology groups $H^{p,q}(\Sigma)$, $H_c^{p,q}(\Sigma)$, $H_{p,q}(\Sigma)$, and $H_{p,q}^{\text{BM}}(\Sigma)$, with the last one being the tropical analogue of the Borel-Moore homology. These were introduced in [IKMZ19] and further studied in [JSS19, MZ14, JRS18, GS19b, GS19a, AB14, ARS19, Aks19, AP21, Mik20a, AP20c]. We recall the relevant definitions in Section 2.

Let Σ be a tropical fan of dimension d , and let ν_Σ be the canonical element in the Borel-Moore homology group $H_{d,d}^{\text{BM}}(\Sigma)$.

Using the cap product \frown , we get a natural map

$$\cdot \frown \nu_\Sigma : H^{p,q}(\Sigma) \longrightarrow H_{d-p,d-q}^{\text{BM}}(\Sigma).$$

We say that a simplicial tropical fan Σ verifies the *Poincaré duality* if the above map is an isomorphism for any bidegree (p, q) . A tropical fan Σ is called *smooth* if for any cone $\sigma \in \Sigma$, the star fan Σ^σ verifies the Poincaré duality. In this paper, the star fan Σ^σ refers to the fan in $N_\mathbb{R}/N_{\sigma,\mathbb{R}}$ induced by the cones η in Σ which contain σ as a face.

In [AP21] we introduced the notion of shellability and class of shellable tropical fans. One of the main theorems of [AP21] is the following theorem.

THEOREM 1.1. *Smoothness is shellable. In particular, any shellable tropical fan is smooth.*

1.3. Matroids and their Bergman fans. Central objects underlying our results in this paper and [AP21] are combinatorial structures called matroids. Discovered by Whitney [Whi35] in his study on classification of graphs with the same cycle structure, and independently by van der Waerden [van37] and Nakasawa, matroids provide combinatorial axiomatization of central notions of linear algebra. In this way, they lead to a common generalization of other combinatorial structures such as graphs, simplicial complexes and hyperplane arrangements. They appear naturally in diverse fields of mathematics, e.g., in combinatorics and statistical physics [Tut65, MP67, GW06, SS14, Piq19b], optimization theory [Sch03], topology [Mac91, GM92], and algebraic geometry [Mnë88, Laf03, BB03, BL18, Stu02]. In tropical geometry, they are combinatorial structures underlying the idea of maximal degenerations of algebraic varieties [Del97, KS06], and in this way give rise to a tropical notion of smoothness. We refer to [Wil73, Kun86, Ox111] for an introduction and a historical account of the theory of matroids.

To any matroid \mathfrak{M} over a ground set E one associates a fan $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ called the *Bergman fan* of \mathfrak{M} which lives in the real vector space $\mathbb{R}^E/\mathbb{R}(1, \dots, 1)$ and which is rational with respect to the lattice $\mathbb{Z}^E/\mathbb{Z}(1, \dots, 1)$. In the case the matroid is given by an arrangement of hyperplanes, the Bergman fan can be identified with the tropicalization of the complement of the hyperplane arrangement, for the coordinates given by the linear functions which define the hyperplane arrangement [AK06].

The fan $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ has the following description. First, recall that a *flat* of \mathfrak{M} is a set F of elements of E which is closed with respect to the linear dependency, i.e., an element $e \in E$ which is linearly dependent to F already belongs to F . A non-empty flat $F \subsetneq E$ is called *proper*. The Bergman fan $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ consists of cones $\sigma_{\mathcal{F}}$ in correspondence with *flags of proper flats* of \mathfrak{M}

$$\mathcal{F} : F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \dots \subsetneq F_k, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

For such a flag \mathcal{F} , the corresponding cone $\sigma_{\mathcal{F}}$ is the one generated by the characteristic vectors $\mathbf{e}_{F_1}, \dots, \mathbf{e}_{F_k}$ of F_1, \dots, F_k in $\mathbb{R}^E/\mathbb{R}(1, \dots, 1)$. In particular, the rays of $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ are in bijection with the proper flats F of \mathfrak{M} .

We call a *Bergman support* or a *tropical linear space* any subspace of a real vector space which is isomorphic via a linear map of real vector spaces to the support of the Bergman fan of a simple matroid. The terminology comes from [Ber71, Spe08].

By a *generalized Bergman fan* we mean any fan which is supported on a Bergman support. In particular, Bergman fan $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ of a matroid \mathfrak{M} is an example of a generalized Bergman fan. Moreover, with this terminology, any complete fan in a real vector space is a generalized Bergman fan. Indeed, for each integer d , the real vector space \mathbb{R}^d is the support of the Bergman fan of the uniform matroid U_{d+1} of rank $d + 1$ on ground set $[d] := \{0, 1, \dots, d\}$. (In U_d every subset of $[d]$ is an independent set.) Thus, generalized Bergman fans generalize both complete fans and Bergman fans of matroids. In addition, products of Bergman fans remain Bergman.

A *unimodular generalized Bergman fan* in a real vector space V is a generalized Bergman fans Σ which is moreover rational with respect to a full rank sublattice N of V and unimodular (smooth in the language of toric geometry). This means any cone σ in Σ is simplicial, that is generated by $|\sigma|$, the dimension of σ , rays. Moreover, denoting $\varrho_1, \dots, \varrho_{|\sigma|}$ the rays of σ , each ray ϱ_i is rational, and in addition, if \mathbf{e}_{ϱ_i} denotes the primitive vector of the ray ϱ_i , the set of vectors $\mathbf{e}_{\varrho_1}, \dots, \mathbf{e}_{\varrho_{|\sigma|}}$ is part of a basis of the lattice N . The product of two unimodular generalized Bergman fans remains a unimodular generalized Bergman fan.

We proved in [AP21] the following theorem.

THEOREM 1.2. *Unimodular Bergman fans are shellable. As a consequence they are smooth.*

This shows that our notion of smoothness and the corresponding smooth tropical varieties include the previous ones modeled by the supports of Bergman fans.

1.4. Chow rings of tropical fans. Let Σ be a unimodular tropical fan in a vector space V and let N be the corresponding full rank lattice of V , so $V = N_{\mathbb{R}} := N \otimes \mathbb{R}$.

The Chow ring of Σ denoted by $A^\bullet(\Sigma)$ is defined as the quotient of the polynomial ring $\mathbb{Z}[x_\varrho \mid \varrho \in \Sigma_1]$, with generators x_ϱ associated to the rays ϱ of Σ , by the ideal $I_1 + I_2$ defined as follows:

- I_1 is the ideal generated by all monomials of the form $\prod_{\varrho \in S} x_\varrho$ for any subset $S \subseteq \Sigma_1$ which do not form a cone in Σ ; and
- I_2 is the ideal generated by the elements of the form

$$\sum_{\varrho \in \Sigma_1} \langle m, \mathbf{e}_\varrho \rangle x_\varrho$$

for any m in the dual lattice $M = N^*$,

where \mathbf{e}_ϱ denotes the primitive vector of ϱ , and $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the duality pairing between M and N .

This ring is known to be the Chow ring of the toric variety \mathbb{P}_Σ defined by Σ , cf. [Dan78, BDP90, Bri96, FS97].

In the case $\Sigma = \Sigma_{\mathfrak{M}}$ is the Bergman fan of a simple matroid \mathfrak{M} , by the description of the fan $\Sigma_{\mathfrak{M}}$, it is easy to see that the ring $A^\bullet(\Sigma_{\mathfrak{M}})$ coincides with the Chow ring $A^\bullet(\mathfrak{M})$ of the matroid defined as follows.

To any flat F of \mathfrak{M} one associates a variable x_F . The Chow ring $A^\bullet(\mathfrak{M})$ is then a quotient of the polynomial ring $\mathbb{Z}[x_F \mid F \text{ flat of } \mathfrak{M}]$ by the ideal $I_{\mathfrak{M}}$ generated by the polynomials

- $x_F x_H$ for any two *incomparable* flats F and H , i.e., with $F \not\subseteq H$ and $H \not\subseteq F$;
- $\sum_{F \ni e} x_F - \sum_{F \ni f} x_F$ for any pair of elements $e, f \in E$.

In the case the matroid \mathfrak{M} is given by an arrangement of hyperplanes, the Chow ring gets identified with the Chow ring of the wonderful compactification of the complement of the hyperplane arrangement [DP95, FY04]. We generalized this result to any tropical compactifications of the complement of the hyperplane arrangement in [AP21].

1.5. Canonical compactifications. The *canonical compactification* of a simplicial fan Σ in a real vector space $V \simeq \mathbb{R}^n$ is defined as the result of completing any cone of Σ to a *hypercube*, by adding some faces at *infinity*. This is defined more precisely as follows. The fan Σ can be used to define a partial compactification of V which we denote by \mathbb{TP}_Σ . The space \mathbb{TP}_Σ is the tropical analog of the toric variety associated to Σ . In fact, in the case the fan Σ is rational with respect to a full rank lattice N in V , the tropical toric variety \mathbb{TP}_Σ coincides with the tropicalization of the toric variety \mathbb{P}_Σ associated to Σ , see e.g. [Pay09, Thu07]. These partial compactifications of V coincide as well with the ones called *manifolds with corners* considered in [AMS⁺10, Oda88].

The canonical compactification of Σ denoted by $\bar{\Sigma}$ is then defined as the closure of Σ in the tropical toric variety \mathbb{TP}_Σ . The space $\bar{\Sigma}$ has the following description as the *cubical completion* of Σ , see Section 2 for a more precise description. Any ray ρ of Σ becomes a segment by adding a point ∞_ρ at infinity to ρ . Any two dimensional cone σ with two rays ρ_1 and ρ_2 becomes a parallelogram with vertex set the origin, ∞_{ρ_1} , ∞_{ρ_2} , and a new point ∞_σ associated to σ . The higher dimensional cones are completed similarly to parallelepipeds.

Canonical compactifications of fans serve as building blocks for the description and the study of more general tropical varieties, as we will explain below.

1.6. Hodge isomorphism theorem and Poincaré duality. Let Σ be a unimodular smooth tropical fan and let $\bar{\Sigma}$ be the canonical compactification of Σ . The compactification $\bar{\Sigma}$ is a *smooth tropical variety* in the sense that it is locally modelled by unimodular smooth tropical fans, see Section 1.8 below and Section 2 for a precise definition of smoothness built in [AP21].

Denote by $H_{\text{trop}}^{p,q}(\bar{\Sigma})$ the *tropical cohomology group* of $\bar{\Sigma}$ of bidegree (p, q) introduced by Itenberg-Katzarkov-Mikhalkin-Zharkov in [IKMZ19]. We recall the definition of these groups in Section 2. We proved in [AP21] the following general theorem which allows in particular, when applied to the Bergman fan $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ of a matroid \mathfrak{M} , to reinterpret the results of Adiprasito-Huh-Katz [AHK18] as statements about the cohomology groups of a specific projective tropical variety, the canonical compactification of the Bergman fan of the matroid.

THEOREM 1.3 (Hodge isomorphism for unimodular smooth tropical fans [AP21]). *For any unimodular smooth tropical fan Σ of dimension d , and for any non-negative integer $p \leq d$, there is an isomorphism*

$$A^p(\Sigma) \xrightarrow{\sim} H_{\text{trop}}^{p,p}(\bar{\Sigma}, \mathbb{Z}).$$

These isomorphisms induce an isomorphism of \mathbb{Z} -algebras between the Chow ring of Σ and the tropical cohomology ring $\bigoplus_{p=0}^d H_{\text{trop}}^{p,p}(\bar{\Sigma}, \mathbb{Z})$. Furthermore, the cohomology groups $H_{\text{trop}}^{p,q}(\bar{\Sigma}, \mathbb{Z})$ for $p \neq q$ are all trivial.

Saying it differently, the theorem states that the *cycle class map* from Chow groups to tropical cohomology is an isomorphism, and in particular, the tropical cohomology groups of $\bar{\Sigma}$ are generated by Hodge classes.

As a corollary of the above theorem, we obtain the following result [AP21].

THEOREM 1.4 (Poincaré duality). *Let Σ be a unimodular tropical fan of dimension d . There is a canonical isomorphism $\text{deg}: A^d(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}$ called the degree map. With respect to this isomorphism, the Chow ring of Σ satisfies the Poincaré duality, in the sense that the pairing*

$$\begin{aligned} A^k(\Sigma) \times A^{d-k}(\Sigma) &\longrightarrow A^d(\Sigma) \xrightarrow[\text{deg}]{\sim} \mathbb{Z} \\ (a, b) &\longmapsto \text{deg}(ab) \end{aligned}$$

is non-degenerate.

For generalized Bergman fans, this can be obtained via the Hodge isomorphism theorem by the Poincaré duality for matroidal tropical varieties, established by Jell-Shaw-Smacka [JSS19] for rational coefficients and by Jell-Rau-Shaw [JRS18] for integral coefficients. In that case, this was also independently proved by Gross-Shokrieh [GS19a], as well as by Ardila-Denham-Huh [ADH20].

1.7. Kähler tropical fans and shellability. For a unimodular smooth tropical fan Σ of dimension d and an element $\ell \in A^1(\Sigma)$, we say that the pair (Σ, ℓ) verifies the *Hard Lefschetz property* $\text{HL}(\Sigma, \ell)$ if the following holds:

(Hard Lefschetz) for any non-negative integer $k \leq \frac{d}{2}$, the multiplication map by ℓ^{d-2k} induces an isomorphism

$$A^k(\Sigma) \xrightarrow{\sim} A^{d-k}(\Sigma), \quad a \longmapsto \ell^{d-2k} \cdot a.$$

We say the pair (Σ, ℓ) verifies *Hodge-Riemann relations* $\text{HR}(\Sigma, \ell)$ if for any non-negative integer $k \leq \frac{d}{2}$, the following holds:

(Hodge-Riemann relations) for any non-negative integer $k \leq \frac{d}{2}$, the symmetric bilinear form

$$A^k(\Sigma) \times A^k(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (a, b) \longmapsto (-1)^k \deg(\ell^{d-2k} \cdot a \cdot b)$$

is positive definite on the *primitive part* $P^k(\Sigma) \subseteq A^k(\Sigma)$, which by definition, is the kernel of the multiplication by ℓ^{d-2k+1} from $A^k(\Sigma)$ to $A^{d-k+1}(\Sigma)$.

A smooth unimodular tropical fan Σ is called *Kähler* if it is *quasi-projective* and moreover for an *ample* element $\ell \in A^1(\Sigma)$, (Σ, ℓ) verifies Hard Lefschetz and Hodge-Riemann relations. Here ℓ is called *ample* if ℓ can be represented in the form $\sum_{\rho \in \Sigma_1} f(\mathbf{e}_\rho) X_\rho$ for a strictly convex cone-wise linear function f on the fan Σ , see Section 2 for the definition of strict convexity. A fan which admits such a function is called *quasi-projective*. (Note that the Bergman fan $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ of any matroid \mathfrak{M} is quasi-projective.)

In Section 3 we will show the following theorem.

THEOREM 1.5 (Shellability of Kähler property). *To be Kähler for quasi-projective unimodular tropical fans is shellable.*

Theorem 1.4 generalizes Poincaré duality for matroids proved in [AHK18] to any smooth tropical fan. As a consequence of the above theorem, we infer that Chow rings of shellable quasi-projective unimodular tropical fans verify Hard Lefschetz theorem and Hodge-Riemann relations, thus generalizing results of Adiprasito-Huh-Katz [AHK18] to any shellable quasi-projective unimodular tropical fan.

THEOREM 1.6 (Kähler package for shellable fans). *Let Σ be a shellable quasi-projective unimodular tropical fan of dimension d . For any ample element $\ell \in A^1(\Sigma)$, the pair (Σ, ℓ) verifies $\text{HL}(\Sigma, \ell)$ and $\text{HR}(\Sigma, \ell)$. That is Σ is Kähler.*

To prove the above theorem we proceed by induction by using the shellability meta lemma. We use tropical modifications to produce a fan structure on the support of a shellable tropical fan for which the theorem holds by the hypothesis of our induction. The main idea in our approach which allows to proceed by induction, basically by starting from trivial cases and deducing the theorem in full generality, are the *ascent* and *descent* properties proved in Section 3. We then use the *weak factorization theorem* for quasi-projective fans and these properties to get the theorem in its full generality.

We note that an alternate proof of the main result of [AHK18] for the Chow ring of a matroid based on semi-simple decomposition of the Chow ring has been obtained recently by Braden-Huh-Matherne-Proudfoot-Wang [BHM⁺20a]. Moreover, in an independent work parallel to ours, Ardila-Denham-Huh [ADH20] have used weak factorization theorem to get

the above theorem for any unimodular quasi-projective generalized Bergman fan. We note that in the case of generalized Bergman fan, Adiprasito informed us that the above theorem also follows from their theorem [AHK18] and McMullen’s observation refined by Fleming-Karu [McM93, FK10], stating that a support preserving quasi-projective flip preserves both Hodge-Riemann and Hard Lefschetz properties.

As a special case of our theorem, we thus get an alternate proof of all these results. To make a comparison with the above mentioned results, our methods lead to arguably more transparent proofs of these results, trivializing the proof of the existence of a tropical fan on a given support which satisfies the Kähler package. The properties established in the proof of Theorem 1.6 are also thoroughly used in the rest of the paper. In particular, the ascent and descent properties are the final piece of arguments we will need in the global setting to conclude the proof of the main theorems of this paper for any Kähler tropical variety. The possibility of having these nice properties is guaranteed by Keel’s lemma for fans in the local setting, and by our projective bundle formula for tropical cohomology groups in the global setting, cf. the discussion below and the corresponding sections for more details.

1.8. Smoothness in tropical geometry revisited. A tropical variety \mathfrak{X} is an *extended polyhedral space* with a choice of an integral affine structure. A polyhedral complex structure on a tropical variety is a polyhedral complex structure which induces the integral affine structure. We refer to Section 2 which provides the precise definitions of these terminologies.

A tropical variety is called *smooth* if it can be locally modeled by supports of smooth tropical fans [AP21].

The smoothness is meant to reflect in polyhedral geometry the idea of *maximal degeneracy* for varieties defined over non-Archimedean fields. We elaborate on this remark and connection to the work of Deligne [Del97] in our future work.

Examples of smooth tropical varieties include smooth affine manifolds, canonical compactifications of Bergman fans, and tropicalizations of Mumford curves [Jel18].

1.9. Hodge-Riemann and Hard Lefschetz for Kähler tropical varieties. In view of Hodge isomorphism Theorem 1.3 and Kähler package for shellable unimodular quasi-projective tropical fans, Theorem 1.6, the results in Section 1.7 can be regarded as statements concerning the tropical cohomology ring of the canonical compactifications $\bar{\Sigma}$ of shellable unimodular quasi-projective tropical fans. Moreover, one can show that when Σ is quasi-projective, the canonical compactification is projective [AP20a]. One of our aim in this paper is to show that all the results stated above hold more generally for the tropical cohomology groups of any (compact) Kähler tropical variety.

Let $V = N_{\mathbb{R}}$ be a vector space of dimension n and N a full rank sublattice in V . For a fan Δ in V , we denote by \mathbb{TP}_{Δ} the corresponding *tropical toric variety*, which is a partial compactification of V .

Let now \mathcal{Y} be a polyhedral subspace of V , and let Y be a unimodular polyhedral complex structure on \mathcal{Y} with a quasi-projective unimodular *recession fan* Y_{rec} , cf. Section 2 for the definitions of these terminologies. Let \mathfrak{X} be the closure of \mathcal{Y} in $\mathbb{TP}_{Y_{\text{rec}}}$, equipped with the induced polyhedral structure that we denote by X . Let ℓ be a strictly convex cone-wise linear function on Y_{rec} . We will show that ℓ defines an element ω of $H_{\text{trop}}^{1,1}(\mathbb{TP}_{Y_{\text{rec}}}, \mathbb{R})$, which lives in $H_{\text{trop}}^{1,1}(\mathbb{TP}_{Y_{\text{rec}}}, \mathbb{Q})$ if ℓ has integral slopes. By restriction, this element gives an element in $H_{\text{trop}}^{1,1}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q})$ which, by an abuse of the notation, we still denote by ω . Multiplication by ω defines a Lefschetz operator on $H_{\text{trop}}^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q})$ still denoted by ω .

We say \mathcal{Y} is *Kähler* if it is smooth and the star fan Σ^{σ} around each face σ of \mathcal{Y} is Kähler. In this case, \mathfrak{X} is also Kähler, that is the star fans of \mathfrak{X} are all Kähler.

Here is the main theorem of this paper.

THEOREM 1.7 (Kähler package for compact Kähler tropical varieties). *Notations as above and working with \mathbb{Q} coefficients, let \mathfrak{X} be Kähler. Then we have*

- (weight-monodromy conjecture) *For any pair of non-negative integers $p \geq q$, we have an isomorphism*

$$\phi: H_{\text{trop}}^{p,q}(\mathfrak{X}) \xrightarrow{\sim} H_{\text{trop}}^{q,p}(\mathfrak{X}).$$

- (Hard Lefschetz) *For $p + q \leq d$, the Lefschetz operator ℓ induces an isomorphism*

$$\ell^{d-p-q}: H_{\text{trop}}^{p,q}(\mathfrak{X}) \xrightarrow{\sim} H_{\text{trop}}^{d-q,d-p}(\mathfrak{X}).$$

- (Hodge-Riemann) *The pairing $\langle \cdot, \ell^{d-p-q} \phi \cdot \rangle$ induces a positive-definite symmetric bilinear form on the primitive part $P^{p,q}$ of $H_{\text{trop}}^{p,q}$, where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the pairing*

$$H_{\text{trop}}^{p,q}(\mathfrak{X}) \otimes H_{\text{trop}}^{d-p,d-q}(\mathfrak{X}) \longrightarrow H_{\text{trop}}^{d,d}(\mathfrak{X}) \xrightarrow[\sim]{\text{deg}} \mathbb{Q}, \quad \langle a, b \rangle \longmapsto (-1)^p \text{deg}(a \cup b),$$

and ϕ is the isomorphism given in the first point.

As a consequence of the above theorem we get the following theorem.

THEOREM 1.8 (Kähler package for projective locally shellable tropical varieties). *Any projective tropical variety which is locally shellable verifies the properties (weight-monodromy conjecture), (Hard Lefschetz), and (Hodge-Riemann) listed above.*

In particular, this holds for projective matroidal tropical varieties. The first part of the theorem answers in positive a conjecture of Mikhalkin and Zharkov from [MZ14] where they prove the isomorphism of $H_{\text{trop}}^{p,q}(\mathfrak{X})$ and $H_{\text{trop}}^{q,p}(\mathfrak{X})$ in the *approximable case* when \mathfrak{X} is matroidal. Recall that a projective tropical variety \mathfrak{X} is called *approximable* if it is the *tropical limit* of a family of complex projective manifolds.

Various versions of weak Lefschetz and vanishing theorems for projective matroidal tropical varieties were previously obtained by Adiprasito and Bjöner in [AB14]. Our work answers several questions raised in their work for more general classes of tropical varieties, cf. [AB14, Section 11], as well as [AB14, Section 9], and the results presented in the next sections

We mention that an integral version of the weak Lefschetz theorem for hypersurfaces was obtained recently by Arnal-Renaudineau-Shaw in [ARS19].

1.10. Hodge index theorem for tropical surfaces. Our main theorem in the case of smooth tropical surfaces implies the following tropical version of the Hodge index theorem. Let \mathfrak{X} be a compact Kähler tropical surface. In particular, we can take \mathfrak{X} a matroidal projective tropical surface. By Poincaré duality, we have $H_{\text{trop}}^{2,2}(\mathfrak{X}) \simeq \mathbb{Q}$, and the cup-product on cohomology leads to the pairing

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: H_{\text{trop}}^{1,1}(\mathfrak{X}) \times H_{\text{trop}}^{1,1}(\mathfrak{X}) \rightarrow \mathbb{Q},$$

which coincides with the intersection pairing on tropical homology group $H_{1,1}(\mathfrak{X})$.

THEOREM 1.9 (Hodge index theorem for tropical surfaces). *The signature of the intersection pairing on $H_{\text{trop}}^{1,1}(\mathfrak{X})$ is equal to $(1 + b_2, h^{1,1} - 1 - b_2)$ where b_2 is the second Betti number of \mathfrak{X} and $h^{1,1} = \dim_{\mathbb{Q}} H_{\text{trop}}^{1,1}(\mathfrak{X})$.*

This theorem was previously known by explicit computations for an infinite family of surfaces in \mathbb{TP}^3 , that of *floor decomposed surfaces of varying degree d* in \mathbb{TP}^3 , see [Sha13a]. In that case, the second Betti number counts the number of interior points in the standard simplex of width d , i.e., with vertices $(0, 0, 0)$, $(d, 0, 0)$, $(0, d, 0)$, $(0, 0, d)$.

1.11. What follows next gives an overview of the materials we need to establish in order to conclude the proof of Theorem 1.7. A sketch of our strategy appears in Section 1.19 and could be consulted at this point ahead of going through the details of the next coming sections.

1.12. Kähler tropical forms and classes. In this paper we introduce a notion of *Kähler forms* and their corresponding *Kähler classes* in tropical geometry. Our definition is motivated by the study of the tropical Steenbrink sequence and its Hodge-Lefschetz structure, see below for a succinct presentation. A closely related notion of Kähler classes in non-Archimedean geometry has been introduced and studied in an unpublished work of Kontsevich-Tschinkel [KT02] and in the work of Yu on non-Archimedean Gromov compactness [Yu18] (see also [Bou19, BFJ15, BGS95b, CLD12, GK17, Zha95] for related work).

Consider a smooth compact tropical variety \mathfrak{X} equipped with a unimodular polyhedral complex structure X . The polyhedral structure is naturally stratified according to *sedentarity* of its faces, which is a measure of *how far and in which direction at infinity* a point of \mathfrak{X} lies. We denote by X_f the *finite part* of X consisting of all the faces which do not touch the *part at infinity*, cf. Section 2 for the precise definition. A *Kähler form* for X is the data of ample classes ℓ^v in the Chow ring of the local fan around the vertex v , for each vertex $v \in X_f$, such that for each edge $e = \{u, v\}$ of X_f , the restriction of the two classes ℓ^v and ℓ^u in the Chow ring of the local fan around the edge e are equal.

We show in Theorem 6.6 that any Kähler form defines a class in $H_{\text{trop}}^{1,1}(\mathfrak{X})$. We call any class ω induced by a Kähler form coming from a unimodular triangulation a *Kähler class*. A smooth compact tropical variety is then called *Kähler* if it admits a Kähler class. In particular, our definition of Kähler requires the variety to admit a unimodular triangulation. This definition coincides with the definition of Kähler tropical varieties given previously. That is as in the classical setting, we prove the following theorem.

THEOREM 1.10. *A smooth projective tropical variety which admits a quasi-projective triangulation, and has all star fans Kähler, is Kähler in the above sense.*

We believe that *all smooth projective tropical varieties admit quasi-projective triangulations*, and plan to come back to this question in a separate publication. In the next section, we explain a weaker triangulation theorem we will prove in this paper which will be enough for our purpose.

1.13. Quasi-projective and unimodular triangulations of polyhedral spaces. Our treatment of projective tropical varieties is based on the existence of what we call *relatively projective unimodular triangulations*, or *regular unimodular triangulations*, of rational polyhedral spaces in \mathbb{R}^n . Regular triangulations are fundamental in the study of polytopes and their applications across different fields in mathematics and computer science, cf. the book by De Lorea-Rambau-Santos [DRS10] and the book by Gelfand-Kapranov-Zelvinsky [GKZ94], one of the pioneers to the field of tropical geometry, for the definition and its relevance in algebraic geometry.

Regularity for triangulations of a polytope is a notion of convexity, and as such, can be defined for any polyhedral subspace of \mathbb{R}^n . Generalizing the pioneering result of Kemp-Knudson-Mumford and Saint-Donat [KKMS06] in the proof of the semistable reduction theorem, as well as previous variants proved by Itenberg-Kazarkov-Mikhalkin-Zharkov in [IKMZ19] and Włodarczyk [Wło97], we obtain the following theorem on the existence of unimodular quasi-projective triangulations.

THEOREM 1.11 (Triangulation theorem). *Let X be a rational polyhedral complex in \mathbb{R}^n . There exists a relatively projective triangulation of X which is quasi-projective and unimodular with respect to the lattice $\frac{1}{k}\mathbb{Z}^n$, for some integer $k \in \mathbb{N}$.*

We expect stronger versions of the theorem, as well as a theory of *secondary structures on relatively projective triangulations*, and plan to come back to these questions in a future work.

1.14. Canonical compactifications of polyhedral spaces. Let \mathcal{Y} be a polyhedral space in $V = N_{\mathbb{R}}$. The *asymptotic cone* of \mathcal{Y} which we denote by \mathcal{Y}_{rec} is defined as the point-wise limit of the rescaled subsets \mathfrak{X}/t when t goes to $+\infty$. The term asymptotic cone is borrowed from geometric group theory, originating from the pioneering work of Gromov [Gro81, Gro83], and exceptionally refers here to non-necessarily convex cones.

Let \mathcal{Y} be a smooth polyhedral space in $V = N_{\mathbb{R}}$. Let Δ be a unimodular fan structure on the asymptotic cone of \mathcal{Y}_{rec} . Let \mathfrak{X} be the closure of \mathcal{Y} in \mathbb{TP}_{Δ} . The compactification \mathfrak{X} is then smooth. We call it the *canonical compactification of \mathcal{Y} with respect to Δ* .

As in the theory of toric varieties, the tropical toric variety \mathbb{TP}_{Δ} has a natural stratification into *tropical toric orbits*. For each cone $\eta \in \Delta$, we have in particular the corresponding tropical toric subvariety denoted by $\mathbb{TP}_{\Delta}^{\eta}$ and defined as the closure of the torus orbit associated to η .

For the canonical compactification \mathfrak{X} of \mathcal{Y} as above, we define for any $\eta \in \Delta$ the closed stratum D^{η} of \mathfrak{X} as the intersection $\mathfrak{X} \cap \mathbb{TP}_{\Delta}^{\eta}$. With these definitions, we see that the compactification boundary $D := \mathfrak{X} \setminus \mathcal{Y}$ is a *simple normal crossing divisor* in \mathfrak{X} , meaning that

- $D^{\underline{0}} = \mathfrak{X}$, where $\underline{0}$ is the zero cone in V consisting of the origin.
- D^{η} are all smooth of dimension $d - |\eta|$.
- We have

$$D^{\eta} = \bigcap_{\substack{\varrho < \eta \\ |\varrho|=1}} D^{\varrho}.$$

1.15. Projective bundle formula. Notations as in the previous section, let δ be a cone in Δ , and denote by Δ' the fan obtained by the barycentric star subdivision of Δ . Denote by \mathfrak{X}' the closure of \mathcal{Y} in $\mathbb{TP}_{\Delta'}$ and $\pi: \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ the projection map. The tropical variety \mathfrak{X}' is smooth again.

Let ρ be the new ray in Δ' obtained after the star subdivision of $\delta \in \Delta$. Consider the corresponding *tropical divisor* $D'^{\rho} \subseteq \mathfrak{X}'$, i.e., the closed stratum in \mathfrak{X}' associated to ρ .

The divisor D'^{ρ} defines by the tropical cycle class map an element $\text{cl}(D'^{\rho})$ of $H_{\text{trop}}^{1,1}(\mathfrak{X}')$.

For any smooth compact tropical variety \mathcal{W} , and for each integer k , we define the k -th cohomology of \mathcal{W} by

$$H^k(\mathcal{W}) := \sum_{p+q=k} H_{\text{trop}}^{p,q}(\mathcal{W}).$$

THEOREM 1.12 (Projective bundle formula). *We have an isomorphism*

$$H^k(\mathfrak{X}') \simeq H^k(\mathfrak{X}) \oplus TH^{k-2}(D^{\delta}) \oplus T^2H^{k-4}(D^{\delta}) \oplus \dots \oplus T^{|\delta|-1}H^{k-2|\delta|+2}(D^{\delta}).$$

Here the map from the right hand side to the left hand side restricts to π^* on $H^k(\mathfrak{X})$ and sends T to $-\text{cl}(D'^{\rho})$. It is given on each factor $T^s H^{k-2s}(D^{\delta})$ by

$$\begin{aligned} T^s H^{k-2s}(D^{\delta}) &\longrightarrow H^k(\mathfrak{X}') \\ T^s \alpha &\longmapsto (-1)^s \text{cl}(D'^{\rho})^{s-1} \cup \pi^* \circ \text{Gys}(\alpha), \end{aligned}$$

where π^* and Gys are the *pull-back* and *Gysin* maps for the tropical cohomology groups, with respect to the projection $\pi: \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ and the inclusion $D^{\delta} \hookrightarrow \mathfrak{X}$, respectively.

The decomposition stated in the theorem provides for each pair of non-negative integers (p, q) , a decomposition of the form

$$H^{p,q}(\mathfrak{X}') \simeq H^{p,q}(\mathfrak{X}) \oplus TH^{p-1,q-1}(D^{\delta}) \oplus T^2H^{p-2,q-2}(D^{\delta}) \oplus \dots \oplus T^{|\delta|-1}H^{p-|\delta|+1,q-|\delta|+1}(D^{\delta}).$$

REMARK 1.13 (Tropical Chern classes). The theorem describes the cohomology of the *blow-up* \mathfrak{X}' of \mathfrak{X} along the subvariety $D^\delta \subset \mathfrak{X}$. Our proof actually provides more generally a projective bundle theorem for the projective bundle associated to a vector bundle E on a smooth tropical variety \mathfrak{X} . As in the classical setting, it allows to define Chern classes of vector bundles in tropical geometry over smooth projective tropical varieties.

In the situation above, we get

$$T^{|\delta|} + c_1(N_{D^\delta})T^{|\delta|-1} + c_2(N_{D^\delta})T^{|\delta|-2} + \dots + c_{|\delta|}(N_{D^\delta}) = 0$$

where c_i are the Chern classes of the *normal bundle* N_{D^δ} in \mathfrak{X} .

Chern classes of matroids were previously defined and studied by López de Medrano, Rincón, and Shaw in [LRS20]. ◊

1.16. Tropical Steenbrink sequence. Let \mathfrak{X} be a smooth compact tropical variety and let X be a unimodular polyhedral structure on \mathfrak{X} . Denote by X_f the set of faces of X whose closures do not intersect the boundary at infinity of \mathfrak{X} , i.e., the set of compact faces of X_\square .

Inspired by the shape of the first page of the Steenbrink spectral sequence [Ste76], we define bigraded groups $\mathsf{ST}_1^{a,b}$ with a collection of maps between them as follows.

For all pair of integers $a, b \in \mathbb{Z}$, we define

$$\mathsf{ST}_1^{a,b} := \bigoplus_{\substack{s \geq |a| \\ s \equiv a \pmod{2}}} \mathsf{ST}_1^{a,b,s}$$

where

$$\mathsf{ST}_1^{a,b,s} = \bigoplus_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta|=s}} H^{a+b-s}(\overline{\Sigma}^\delta).$$

Here Σ^δ is the *star fan* of X around δ (also called the *transversal fan* of δ in the literature), and $\overline{\Sigma}^\delta = \overline{\Sigma}^\delta$ is the canonical compactification of Σ^δ .

The bigraded groups $\mathsf{ST}_1^{a,b}$ come with a collection of maps

$$i^{a,b*}: \mathsf{ST}_1^{a,b} \rightarrow \mathsf{ST}_1^{a+1,b} \quad \text{and} \quad \text{Gys}^{a,b}: \mathsf{ST}_1^{a,b} \rightarrow \mathsf{ST}_1^{a+1,b}.$$

Both these maps are defined by our sign convention introduced in Section 5 as an alternating sum of the corresponding maps on the level of cohomology groups appearing in the definition of $\mathsf{ST}_1^{a,b,s}$ above. In practice, we drop the indices and denote simply by i^* and Gys the corresponding maps.

Using these two maps, we define the *differential* $d: \mathsf{ST}_1^{a,b} \rightarrow \mathsf{ST}_1^{a+1,b}$ as the sum $d = i^* + \text{Gys}$. For a unimodular triangulation X of \mathfrak{X} and for any integer b , we will show that the differential d makes $\mathsf{ST}_1^{\bullet,b}$ into a cochain complex.

For a cochain complex (C^\bullet, d) , denote by $H^a(C^\bullet, d)$ its a -th cohomology group, i.e.,

$$H^a(C^\bullet, d) = \frac{\ker(d: C^a \rightarrow C^{a+1})}{\text{Im}(d: C^{a-1} \rightarrow C^a)}.$$

We prove the following comparison theorem.

THEOREM 1.14 (Steenbrink-Tropical comparison theorem). *The cohomology of $(\mathsf{ST}_1^{\bullet,b}, d)$ is described as follows. For b odd, all the terms $\mathsf{ST}_1^{a,b}$ are zero, and the cohomology is vanishing. For b even, let $b = 2p$ for $p \in \mathbb{Z}$. Then for $q \in \mathbb{Z}$, we have a canonical isomorphism*

$$H^{q-p}(\mathsf{ST}_1^{\bullet,2p}, d) \simeq H_{\text{trop}}^{p,q}(\mathfrak{X}).$$

In the approximable case, i.e., when \mathfrak{X} arises as the tropicalization of a family of complex projective varieties, this theorem was proved by Itenberg-Katzarkov-Mikhalkin-Zharkov in [IKMZ19]; see also the work of Gross-Siebert [GS10, GS06] for a similar statement for the special case where \mathfrak{X} is an integral affine manifold with singularities.

Our proof is inspired by the one given in the approximable case [IKMZ19], as well as by the use of the sheaf of logarithmic differentials on both Deligne’s construction of a mixed Hodge structure on the cohomology of a smooth algebraic variety [Del71a] and Steenbrink’s construction of the limit mixed Hodge structure on the special fiber of a semistable degeneration [Ste76].

In order to prove the theorem in this generality, we will introduce and develop a certain number of tools which we hope could be of independent interest and which will be used in our forthcoming work.

As a first ingredient, we will use an analogous result in the tropical setting of the *Deligne resolution* which gives a resolution of the coefficient groups \mathbf{F}^p with cohomology groups of the canonically compactified fans $\overline{\Sigma}^\delta$. (The coefficient group \mathbf{F}^p is the discrete tropical analog of the sheaf of holomorphic forms of degree p , and is used to define the tropical cohomology groups $H^{p,q}(\mathfrak{X})$ for all non-negative integer q .) This was established in our work [AP21].

In the approximable case for matroidal tropical varieties, this resolution is a consequence of the Deligne spectral sequence in mixed Hodge theory as was observed in [IKMZ19]. The proof we present in [AP21] for the general setting is entirely within tropical geometry, and is based on the hypercohomology of a complex of sheaves which provides a resolution of the *sheaf of tropical holomorphic forms* of a given order. It uses Poincaré duality as well as our Hodge isomorphism Theorem 1.3, which provides a description of the tropical cohomology groups of the canonically compactified fans.

Inspired by the weight filtration on the sheaf of logarithmic differentials, we define a natural filtration on the coefficient groups $\mathbf{F}^p(\cdot)$ that we call *toric weight filtration*, also somehow explicitly present in [IKMZ19], and study the corresponding spectral sequence on the level of tropical cohomology groups. The resolution of the coefficient groups given by the Deligne exact sequence gives a double complex which allows to calculate the cohomology of the graded cochain complex associated to the weight filtration.

We then show that the spectral sequence associated to the double complex corresponding to the weight filtration which abuts to the tropical cohomology groups, abuts as well to the cohomology groups of the Steenbrink cochain complex. The proof of this latter fact is based on an *unfolding of the Steenbrink sequence into a double complex*, which allows to define new Steenbrink type spectral sequences on each degree, and on a *spectral resolution lemma* which allows to make a bridge between spectral sequences.

While the treatment we give of these constructions might appear quite technical, we would like to note that this should be merely regarded as a manifestation of the rich combinatorial structure of the Steenbrink spectral sequence, and the geometric informations it contains. We hope the effort made to make a *surgery* of this spectral sequence in this paper should be paid off in further applications and developments, some of them will appear in our forthcoming work.

1.17. Main theorem for triangulated tropical Kähler varieties. In order to prove Theorem 1.7, we first establish it for a unimodular triangulation of a smooth tropical variety which admits a Kähler form. The advantage of these triangulations is that we can use the tropical Steenbrink spectral sequence in order to study the tropical cohomology groups. We show that this spectral sequence can be endowed with a *Hodge-Lefschetz structure*, where the monodromy operator is the analog of the one arising in the classical Steenbrink spectral sequence and the Lefschetz operator corresponds to multiplication with the Kähler form. This leads to the following theorem.

THEOREM 1.15. *Let X be a unimodular triangulation of a smooth tropical variety which admits a Kähler form given by classes $\ell^v \in H^{1,1}(v)$ for v vertices of the triangulation. Denote by ℓ the corresponding Lefschetz operator and by N the corresponding monodromy operator. We have*

- (Weight-monodromy conjecture) *For $q > p$ two non-negative integers, we get an isomorphism*

$$N^{q-p}: H_{\text{trop}}^{q,p}(X) \rightarrow H_{\text{trop}}^{p,q}(X).$$

- (Hard Lefschetz) *For $p + q \leq d$, the Lefschetz operator ℓ induces an isomorphism*

$$\ell^{d-p-q}: H_{\text{trop}}^{p,q}(X) \rightarrow H_{\text{trop}}^{d-q,d-p}(X).$$

- (Hodge-Riemann) *For $p + q \leq d$ and $p \leq q$, the pairing $(-1)^p \langle \cdot, \ell^{d-p-q} N^{q-p} \cdot \rangle$ is positive-definite on the primitive part $P^{q,p}$, where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the natural pairing*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: H^{q,p}(X) \otimes H^{d-q,d-p}(X) \rightarrow H^{d,d}(X) \simeq \mathbb{Q}.$$

1.18. Hodge-Lefschetz structures. In order to prove the theorem of the previous section, we show that $\text{ST}_1^{\bullet,\bullet}$ and the tropical cohomology $H_{\text{trop}}^{\bullet,\bullet}$ admit a Hodge-Lefschetz structure. To define this, we need to introduce the monodromy and Lefschetz operators on $\text{ST}_1^{\bullet,\bullet}$.

The monodromy operator is of bidegree $(2, -2)$ and it is defined in such a way to mimic the one obtained from the Steenbrink spectral sequence if we had a semistable family of complex varieties. So it is the data of maps $N^{a,b}: \text{ST}_1^{a,b} \rightarrow \text{ST}_1^{a+2,b-2}$ defined as

$$N^{a,b} = \bigoplus_{\substack{s \geq |a| \\ s \equiv a \pmod{2}}} N^{a,b,s}$$

with

$$(1.1) \quad N^{a,b,s} = \begin{cases} \text{id}: \text{ST}_1^{a,b,s} \rightarrow \text{ST}_1^{a+2,b-2,s} & \text{if } s \geq |a+2|, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Moreover, it coincides with the monodromy operator on the level of Dolbeault cohomology groups defined in [Liu19], via our Steenbrink-Tropical comparison Theorem 1.14 and the comparison theorem between Dolbeault and tropical cohomology groups proved in [JSS19].

The definition of the Lefschetz operator depends on the choice of the Kähler form ℓ . Recall that a Kähler form is the data of ample classes ℓ^v at vertices v which are moreover compatible along edges. This guaranties the compatibility of restrictions to higher dimensional faces giving an ample element $\ell^\delta \in H^2(\delta) = A^1(\delta)$ for all faces $\delta \in X_f$.

The Lefschetz operator $\ell^{a,b}: \text{ST}_1^{a,b} \rightarrow \text{ST}_1^{a,b+2}$ is then defined as the sum

$$\ell^{a,b} = \bigoplus \ell^{a,b,s}: \bigoplus_{\substack{s \geq |a| \\ s \equiv a \pmod{2}}} \text{ST}_1^{a,b,s} \rightarrow \bigoplus_{\substack{s \geq |a| \\ s \equiv a \pmod{2}}} \text{ST}_1^{a,b+2,s}$$

where $\ell^{a,b,s}$ is the sum of the contributions of local ample elements

$$\ell^{a,b,s} = \bigoplus \ell^\delta: \bigoplus_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta|=s}} H^{a+b-s}(\delta) \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta|=s}} H^{a+b+2-s}(\delta).$$

In practice, the indices are dropped and this is denoted simply by ℓ .

The Monodromy and Lefschetz operators N and ℓ verify the following properties

- $[\ell, N] = 0$, $[\ell, i^*] = [\ell, \text{Gys}] = 0$, and $[N, i^*] = [N, \text{Gys}] = 0$.

— for a pair of integers a, b with $a + b \geq d$, the map

$$\ell^{d-a-b} = \underbrace{\ell \circ \ell \circ \dots \circ \ell}_{(d-a-b) \text{ times}}: \mathsf{ST}_1^{a,b} \longrightarrow \mathsf{ST}_1^{a, 2d-2a-b}$$

is an isomorphism.

— for a pair of integers a, b with $a \leq 0$, the map

$$N^{-a} = \underbrace{N \circ N \circ \dots \circ N}_{(-a) \text{ times}}: \mathsf{ST}_1^{a,b} \longrightarrow \mathsf{ST}_1^{-a, b+2a}$$

is an isomorphism.

These properties show that the tropical Steenbrink spectral sequence with the two operators ℓ and N form a Hodge-Lefschetz structure. Moreover, we show that local polarizations allow to define a polarization on $\mathsf{ST}_1^{\bullet, \bullet}$ leading to a polarized Hodge-Lefschetz structure. From this, we deduce that the cohomology of the tropical Steenbrink spectral sequence admits a polarized Hodge-Lefschetz structure. Using this, and combining the corresponding *primitive decomposition* with the comparison Theorem 1.14, we can finish the proof of Theorem 1.15.

Differential Hodge-Lefschetz structures are treated in Saito's work about Hodge modules [Sai88], in the paper by Guillén and Navarro Aznar on invariant cycle theorem [GN90] and in the upcoming book by Sabbah and Schnell [SS20] on mixed Hodge modules. We should however note that the tropical set-up is slightly different, in particular, the differential operator appearing in our setting is skew-symmetric with respect to the polarization. The proof we give of these results is elementary and does not make any recourse to representation theory, although it might be possible to recast in the language of representation theory the final combinatorial calculations we need to elaborate.

We refer to Sections 6 and 7 for more details.

1.19. Proof of Theorem 1.7. Having explained all the needed ingredients, we now explain how the proof of the main theorem can be deduced. Starting with the projective tropical variety \mathfrak{X} , and the quasi-projective unimodular fan structure Δ induced on $\mathfrak{X}_{\text{rec}}$ by the compactification we proceed as follows. The choice of the convex piecewise function ℓ on Δ gives an element $\ell \in H^{1,1}(\mathfrak{X})$. Using the ascent and descent properties, that we extend naturally from the local situation to the global setting using the projective bundle theorem, we show that it will be enough to treat the case where \mathfrak{X} admits a quasi-projective unimodular triangulation X compatible with Δ . In this case, we show that the class $\ell \in H^{1,1}(\mathfrak{X})$ is Kähler, and so we can apply Theorem 1.15 to conclude.

1.20. Organization of the paper. The paper is organized as follows. In the next section, we provide the relevant background on tropical varieties, introduce canonical compactifications, and recall the definition of cohomology groups associated to them. This section introduces as well the corresponding terminology in polyhedral geometry we will be using all through the paper.

In Section 3 we present the proof of the shellability of Hard Lefschetz and Hodge-Riemann properties, thus proving Theorem 1.6. These local results are the basis for all the materials which will appear in the upcoming sections. Moreover, the ascent and descent properties used in the proof of local Hodge-Riemann relations will be again crucial in our proof of the global Hodge-Riemann relations.

Section 4, which is somehow independent of the rest of the paper, is devoted to the proof of our triangulation theorem, cf. Theorem 1.11. The results are crucial in that they allow to introduce a tropical analog to the Steenbrink spectral sequence, which will be the basis for all the results which come thereby after.

In Section 5 we study the tropical Steenbrink spectral sequence, introduce the weight filtration on tropical coefficient groups \mathbf{F}^p , and prove the tropical Deligne resolution theorem as well as the comparison theorem between Steenbrink sequence and tropical cohomology groups, cf. Theorem 1.14. For the ease of reading, few computational points of this section are treated separately in Appendix.

Kähler tropical varieties are introduced in Section 6. For a unimodular triangulation of a smooth tropical varieties which admits a Kähler form, the corresponding tropical Steenbrink spectral sequence can be endowed with a Hodge-Lefschetz structure, where the monodromy operator is the analog of the one arising in the classical Steenbrink spectral sequence and the Lefschetz operator corresponds to multiplication with the Kähler class. Using an adaptation of the theory of Hodge-Lefschetz structure to the tropical setting, Sections 6 and 7 are devoted to the proof of the Kähler package for triangulated tropical varieties, cf. Theorem 1.15. The fact that the Hodge-Lefschetz structure will be inherited in the cohomology in the tropical setting is treated in Section 7.

The last two sections are then devoted to the proof of Theorem 1.7. In Section 8, we present the proof of the projective bundle theorem, cf. Theorem 1.12. Section 9 then finishes the proof of the main theorem using the materials developed in the previous sections, ascent-descent property, projective bundle theorem and Theorem 1.15.

The results presented in Appendix show that a certain triple complex constructed in Section 5 provides a spectral resolution of the tropical spectral sequence, associated to the weight filtration on the tropical complex. Due to the calculatory nature of the content of this section, and necessity of introducing extra notations, we have decided to include it only as an appendix. It is also written somehow independently of the rest of the paper. This means we reproduce some of the materials from the paper there, and in few places, we adapt a terminology slightly different from the one used in the main body. We have found this more adapted both in terms of rigour and compactness to the purpose of this appendix which requires through case by case computations. Every time this change of terminology happens, we make a comment of comparison to the one used in the previous sections.

2. Tropical varieties

The aim of this section is to provide the necessary background on polyhedral spaces and tropical varieties. It contains a brief review of polyhedral geometry, tropical and Dolbeault cohomology, as well as a study of canonical compactifications of polyhedral spaces, which will be all used in the consequent sections. This will be also the occasion to fix the terminology and notations which will be used all through the text.

2.1. Recollection in polyhedral geometry. A (closed convex) *polyhedron* of a real vector space $V \simeq \mathbb{R}^n$ is a non-empty intersection of a finite number of affine half-spaces. All through this paper, a polyhedron means a *strongly convex* one in the sense that we require it does not contain any affine line.

Let P be a polyhedron. The *affine tangent space* of P denoted by $T_{\text{aff}}P$ is by definition the smallest affine subspace of \mathbb{R}^n which contains P ; it is precisely the set of all linear combinations of elements of P whose coefficients sum up to one. The *linear tangent space*, or simply *tangent space*, of P denoted by TP is the linear subspace of \mathbb{R}^n spanned by the differences $x - y$ for any pair of elements x, y of P .

The *dimension* of P is denoted by $|P|$, which is by definition that of its tangent space. A *face* of P is either P or any non-empty intersection $P \cap H$ for any affine hyperplane H such that $P \subset H^+$ where H^+ is one of the two half-spaces delimited by H . Note that a face of a polyhedron P is itself a polyhedron. We use the notation $\gamma < \delta$ for two polyhedra if γ is a face of δ . If moreover γ is of codimension one in δ , i.e., $|\gamma| = |\delta| - 1$, then we write $\gamma \prec \delta$. A face of dimension zero is called a *vertex* of P . A face of dimension one is called an *edge*. The

interior of a polyhedron P refers to the relative interior of P in its affine tangent space, which is by definition the complement in P of all the proper faces of P .

A *cone* is a polyhedron with a unique vertex which is the origin of \mathbb{R}^n . (By our assumption, we only consider strongly convex cones, which means that the cone does not include any line.) A compact polyhedron is called a *polytope*; equivalently, a polytope is a polyhedron which is the convex-hull of a finite number of points.

Suppose now that the vector space $V \simeq \mathbb{R}^n$ comes with a full rank lattice $N \simeq \mathbb{Z}^n$. A polyhedron P in V is called *rational* if the half-spaces used to define P can be defined in $N_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}^n$. We denote by N_P the full-rank lattice $N \cap T(P)$ in $T(P)$.

A polyhedron is called *integral with respect to N* if it is rational and all its vertices are in N . In the sequel, we simply omit to mention the underlying lattice N if this is clear from the context.

The Minkowski sum of two polyhedra P and Q in V is defined by

$$P + Q := \{x + y \mid x \in P, y \in Q\}.$$

By Minkowski-Weyl theorem, every polyhedron P can be written as the Minkowski sum $Q + \sigma$ of a polytope Q and a cone σ . Moreover, one can choose Q to be the convex-hull of the vertices of P and the cone σ is uniquely characterized by the property that for any point $x \in P$, σ is the maximal cone verifying $x + \sigma \subseteq P$. We denote this cone by P_{rec} .

It follows that for any polyhedron P , one can choose points v_0, \dots, v_k and vectors u_1, \dots, u_l in V such that

$$P = \text{conv}(v_0, \dots, v_k) + \sum_{i=1}^l \mathbb{R}_+ u_i.$$

Here and in the whole article, \mathbb{R}_+ denotes the space of non-negative real numbers.

A polyhedron P is called *simplicial* if we can choose the points v_i and the vectors u_j in the above decomposition so that the collection of vectors $(v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0, u_1, \dots, u_l)$ be independent. In this case, there is a unique choice for points v_0, \dots, v_k , which will be the vertices of P . (And the vectors u_1, \dots, u_l are in bijection with the rays of P_{rec} .) We define

$$P_f := \text{conv}(v_0, \dots, v_k),$$

and we have $P = P_f + P_{\text{rec}}$. Furthermore, any point $x \in P$ can be decomposed in a unique way as the sum $x = x_f + x_{\text{rec}}$ of a point $x_f \in P_f$ and a point $x_{\text{rec}} \in P_{\text{rec}}$.

A simplicial polyhedron P is called *unimodular with respect to the lattice N* in V if it is integral with respect to N and moreover, the points v_i and the vectors u_j can be chosen in N so that $(v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0, u_1, \dots, u_l)$ is part of a basis of N (or equivalently, if they form a basis of the lattice $N_P = N \cap T(P)$).

A *polyhedral complex* in a real vector space $V \simeq \mathbb{R}^n$ is a finite non-empty set X of polyhedra in \mathbb{R}^n called *faces of X* such that for any pair of faces $\delta, \delta' \in X$

- (i) any face of δ belongs to X , and
- (ii) the intersection $\delta \cap \delta'$ is either empty or is a common face of δ and δ' .

A finite collection of polyhedra X which only verifies the first condition (i) is called a *polyhedral pseudo-complex*.

If P is a polyhedron, the set of faces of P form a polyhedral complex which we denote by $\text{face}(P)$. A polyhedral complex which has a unique vertex is called a « *fan* » if the unique vertex is the origin of V . In this case, all the faces of the complex are cones. The *finite part of X* denoted by X_f is the set of all compact faces of X , which is itself again a polyhedral complex. The *support of X* denoted by $|X|$ is the union of the faces of X in V . A polyhedral complex whose support is the entire vector space V is said to be *complete*.

A polyhedral complex is called *simplicial*, *rational*, *integral*, or *unimodular* (with respect to the lattice N), if all faces of X are simplicial, rational, integral, or unimodular (with respect to N), respectively.

Let X and Y be two polyhedral complexes in a real vector space V . We say that Y is a *subdivision* of X if X and Y have the same support, and each face of Y is included in a face of X . We say that Y is a *triangulation* of X if in addition Y is simplicial. We say that Y is a *subcomplex* of X or that X *contains* Y if $Y \subseteq X$. In particular, the support of X contains that of Y . We say that X *contains a subdivision of* Y if there exists a subdivision Z of Y which is a subcomplex of X . The same terminology will be used for polyhedral pseudo-complexes.

Let S be a subset of a real vector space $V \simeq \mathbb{R}^n$. The set of *affine linear functions on* S is defined as the restrictions to S of affine linear functions on V and is denoted by $\mathcal{L}(S)$. For a polyhedral complex, we simplify the notation and write $\mathcal{L}(X)$ instead of $\mathcal{L}(|X|)$.

Let $f: |X| \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function. We say that f is *piecewise linear on* X if on each face δ of X , the restriction $f|_\delta$ of f to δ is affine linear. The set of piecewise linear functions on X is denoted by $\mathcal{L}^{\text{plm}}(X)$. (\mathcal{L}^{plm} reads *linéaire par morceaux*.)

A function $f \in \mathcal{L}^{\text{plm}}(X)$ is called *convex*, resp. *strictly convex*, if for each face δ of X , there exists an affine linear function $\ell \in \mathcal{L}(V)$ such that $f - \ell$ vanishes on δ and is non-negative, resp. strictly positive, on $U \setminus \delta$ for an open neighborhood U of the relative interior of δ in $|X|$.

We denote by $\mathcal{K}(X)$, resp. $\mathcal{K}_+(X)$, the set of convex, resp. strictly convex, functions in $\mathcal{L}^{\text{plm}}(X)$. A polyhedral complex X is called *quasi-projective* if the set $\mathcal{K}_+(X)$ is non-empty. We will treat this notion of convexity in more detail in Section 4.3.

2.2. Canonical compactifications of fans. Let $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ be the extended real line with the topology induced by that of \mathbb{R} and a basis of open neighborhoods of infinity given by intervals $(a, \infty]$ for $a \in \mathbb{R}$. Extending the addition of \mathbb{R} to \mathbb{T} in a natural way, by setting $\infty + a = \infty$ for all $a \in \mathbb{T}$, gives \mathbb{T} the structure of a topological monoid. We call $(\mathbb{T}, +)$ the *monoid of tropical numbers* and denote by $\mathbb{T}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ the submonoid of non-negative tropical numbers with the induced topology.

Both monoids admit a natural scalar multiplication by non-negative real numbers (setting $0 \cdot \infty = 0$). Moreover, the multiplication by any factor is continuous. As such, \mathbb{T} and \mathbb{T}_+ can be seen as module over the semiring \mathbb{R}_+ . Recall that modules of semirings are quite similar to classical modules over rings, except that such modules are commutative monoids instead of being abelian groups. Another important collection of examples of topological modules over \mathbb{R}_+ are the cones.

We can consider the tensor product of two modules over \mathbb{R}_+ . In this section, every tensor product will be over \mathbb{R}_+ , thus we will sometimes omit to mention it.

All through, N will be a free \mathbb{Z} -module of finite rank and $M = N^*$ denotes the dual of N . We denote by $N_{\mathbb{R}}$ and $M_{\mathbb{R}}$ the corresponding real vectors spaces, so we have $M_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}}^*$. For a polyhedron δ in $N_{\mathbb{R}}$, we use both the notations $N_{\delta, \mathbb{R}}$ or $\text{T}\delta$, depending on the context, to denote the *linear tangent space* to δ which is the real vector subspace of $N_{\mathbb{R}}$ generated by differences $x - y$ for pairs of elements x, y in δ . Furthermore, we define the *normal vector space* of δ denoted $N_{\mathbb{R}}^\delta$ by $N_{\mathbb{R}}^\delta := N_{\mathbb{R}} / N_{\delta, \mathbb{R}}$. If the polyhedron δ is rational, then we naturally get lattices of full rank N^δ and N_δ in $N_{\mathbb{R}}^\delta$ and $N_{\delta, \mathbb{R}}$, respectively.

By convention, all through this article, we most of the time use δ (or any other face) as a superscript to denote the quotient of some space by $\text{T}\delta$, or to denote elements related to this quotient. On the contrary, we use δ as a subscript for subspaces of $\text{T}\delta$ or elements associated to these subspaces.

For a fan Σ in $N_{\mathbb{R}}$, we denote by Σ_k the set of k -dimensional cones of Σ ; elements of Σ_1 are called *rays*. In the case the fan is rational, for any ray $\rho \in \Sigma_1$, we denote by \mathbf{e}_ρ the generator of $\rho \cap N$.

For any cone σ , denote by $\sigma^\vee \subseteq M_{\mathbb{R}}$ the dual cone defined by

$$\sigma^\vee := \left\{ m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, a \rangle \geq 0 \text{ for all } a \in \sigma \right\}.$$

The *canonical compactification* $\bar{\sigma}$ of a cone σ , called as well the *extended cone* of σ , is defined by

$$\bar{\sigma} := \sigma \otimes_{\mathbb{R}_+} \mathbb{T}_+.$$

The topology on $\bar{\sigma}$ is the natural one, i.e., the finest one such that the projections

$$\begin{aligned} (\sigma \times \mathbb{T}_+)^k &\longrightarrow \bar{\sigma} \\ (x_i, a_i)_{1 \leq i \leq k} &\longmapsto \sum_i x_i \otimes a_i, \end{aligned}$$

for $k \in \mathbb{N}$, are continuous. The space $\bar{\sigma}$ is a compact topological space, whose restriction to σ coincides with the usual topology.

REMARK 2.1. One can also define $\bar{\sigma}$ in the following way. If we work in the category of \mathbb{R}_+ -modules whose morphisms are morphisms of \mathbb{R}_+ -modules. Then, by duality, we have

$$\bar{\sigma} = \text{Hom}_{\mathbb{R}_+}(\sigma^\vee, \mathbb{T}_+).$$

The advantage of this definition is that the link with the compactifications of toric varieties is more direct (cf. below). However, the description of the topology and of the general shape of $\bar{\sigma}$ is easier with the first definition. \diamond

There is a distinguished point ∞_σ in $\bar{\sigma}$ defined by $x \otimes \infty$ for any x in the relative interior of σ . The definition does not depend on the chosen x . Note that for the cone $\underline{0}$, we have $\infty_{\underline{0}} = 0$.

For an inclusion of cones $\tau < \sigma$, we get a map $\bar{\tau} \subseteq \bar{\sigma}$. This inclusion identifies $\bar{\tau}$ as the topological closure of τ in $\bar{\sigma}$.

Let Σ be a rational fan in $N_{\mathbb{R}}$. The canonical compactification $\bar{\Sigma}$ is defined as the union of extended cones $\bar{\sigma}$ for any cone $\sigma \in \Sigma$ where we identify $\bar{\tau}$ with the corresponding subspace of $\bar{\sigma}$ for any inclusion of cones $\tau < \sigma$ in Σ . The topology of $\bar{\Sigma}$ is the induced quotient topology. Each extended cone $\bar{\sigma}$ naturally embeds as a subspace of $\bar{\Sigma}$.

The canonical compactification $\bar{\Sigma}$ of Σ naturally lives in a *partial compactification* of $N_{\mathbb{R}}$ defined by Σ that we denote by \mathbb{TP}_{Σ} . We define \mathbb{TP}_{Σ} as follows. For any cone σ in Σ , we consider the space $\tilde{\sigma} = \text{hom}_{\mathbb{R}_+}(\sigma^\vee, \mathbb{T})$. The topology is defined in a way similar than for $\bar{\sigma}$. We have a natural inclusion of $\bar{\sigma}$ into $\tilde{\sigma}$. Notice that $\text{hom}_{\mathbb{R}_+}(\sigma^\vee, \mathbb{R}) \simeq N_{\mathbb{R}}$. We set $N_{\infty, \mathbb{R}}^\sigma := \infty_\sigma + N_{\mathbb{R}} \subset \tilde{\sigma}$. Clearly $N_{\infty, \mathbb{R}}^{\underline{0}} = N_{\mathbb{R}}$. Moreover, from the fact that for any $x \in \sigma$ and any $\lambda \in \mathbb{R}$, $\infty_\sigma + \lambda x = \infty_\sigma$, we can see the map

$$N_{\mathbb{R}} \rightarrow N_{\infty, \mathbb{R}}^\sigma, \quad z \mapsto z + \infty_\sigma$$

as a projection along $\sigma \otimes \mathbb{R} \simeq N_{\sigma, \mathbb{R}}$. Indeed, one can prove that $N_{\infty, \mathbb{R}}^\sigma \simeq N_{\mathbb{R}}^\sigma$.

Then, $\tilde{\sigma}$ is naturally stratified into a disjoint union of subspaces $N_{\infty, \mathbb{R}}^\tau$, each isomorphic to $N_{\mathbb{R}}^\tau$, for τ running over faces of σ . Because of this isomorphism, we might sometimes omit the ∞ , when it is clear from the context that we are considering the stratum at infinity. Moreover, the inclusions $\tilde{\tau} \subseteq \tilde{\sigma}$ for pairs of elements $\tau < \sigma$ in Σ allow to glue these spaces and define the space \mathbb{TP}_{Σ} .

The partial compactification \mathbb{TP}_{Σ} of $N_{\mathbb{R}}$ is naturally stratified as the disjoint union of $N_{\infty, \mathbb{R}}^\sigma \simeq N_{\mathbb{R}}^\sigma$ for $\sigma \in \Sigma$.

For a rational fan Σ , we have $\mathbb{TP}_{\Sigma} = \text{Trop}(\mathbb{P}_{\Sigma})$ the extended tropicalization of the toric variety \mathbb{P}_{Σ} . In other words, \mathbb{TP}_{Σ} can be viewed as the *tropical toric variety associated to the fan* Σ . In particular, the tropical projective space \mathbb{TP}^n coincides with \mathbb{TP}_{Σ} for Σ the standard fan of the projective space \mathbb{P}^n . We refer to [AP21, BGJK20, Kaj08, Pay09, Thu07] for more details.

The canonical compactification $\bar{\Sigma}$ of Σ admits a natural stratification into cones and fans that we describe now. Moreover, this stratification can be enriched into an *extended polyhedral structure* [AP20a], see Section 2.3 for more details.

Consider a cone $\sigma \in \Sigma$ and a face τ of σ . Let $C_\sigma^\tau := \infty_\tau + \sigma \subseteq \bar{\sigma}$. From this description, one sees that C_σ^τ is isomorphic to the projection of the cone σ in the linear space $N_{\sigma, \mathbb{R}}/N_{\tau, \mathbb{R}} \hookrightarrow N_{\infty, \mathbb{R}}^\tau$. We denote by $C_\sigma^{\circ\tau}$ the relative interior of C_σ^τ .

One can show that the canonical compactification $\bar{\Sigma}$ is a disjoint union of (open) cones $C_\sigma^{\circ\tau}$ for pairs $\tau < \sigma$ of elements of Σ .

For a fixed cone $\tau \in \Sigma$, the collection of cones C_σ^τ for elements $\sigma \in \Sigma$ with $\tau < \sigma$ form a fan with origin ∞_τ that we denote by $\Sigma_\infty^\tau \subset N_{\infty, \mathbb{R}}^\tau$. Note that with this terminology, for the cone $\underline{0}$ of Σ we have $\Sigma_\infty^{\underline{0}} = \Sigma$.

The fan Σ_∞^τ is canonically isomorphic to the *star fan* of τ in Σ denoted by Σ^τ and defined by

$$\Sigma^\tau := \left\{ \pi_\tau(\sigma) \mid \sigma > \tau \text{ is a cone in } \Sigma \right\},$$

where $\pi_\tau: N_{\mathbb{R}} \rightarrow N_{\mathbb{R}}^\tau$. Note that our use of the star fan is consistent with the one used in [AHK18] and differs from the usual terminology, e.g., in [Kar04, BBFK02] where this is called *transversal fan*.

If there is no risk of confusion, we sometimes drop ∞ and write Σ^τ when referring to the fan Σ_∞^τ based at ∞_τ .

For any pair (τ, σ) with $\tau < \sigma$, the closure \bar{C}_σ^τ of C_σ^τ in $\bar{\Sigma}$ is the union of all the cones $C_\sigma^{\circ\tau'}$ with $\tau < \tau' < \sigma' < \sigma$. The closure of Σ_∞^τ is indeed canonically isomorphic to the canonical compactification of $\Sigma^\tau \subseteq N_{\mathbb{R}}^\tau$.

The stratification of $\bar{\Sigma}$ by cones C_σ^τ and their closures is called the *conical stratification* of $\bar{\Sigma}$. Note that there is a second stratification of $\bar{\Sigma}$ into fans Σ_∞^τ for $\tau \in \Sigma$.

By definition, from the inclusion of spaces $\bar{\sigma} \subseteq \tilde{\sigma}$, we get an embedding $\bar{\Sigma} \subseteq \mathbb{TP}_\Sigma$. Since the strata Σ_∞^τ of $\bar{\Sigma}$ lives in $N_{\infty, \mathbb{R}}^\tau$, this embedding is compatible with the stratification of both spaces. In particular, $\bar{\Sigma}$ is the compactification of the fan Σ in the tropical toric variety \mathbb{TP}_Σ .

2.3. Extended polyhedral structures. We now describe an enrichment of the category of polyhedral complexes and polyhedral spaces into *extended polyhedral complexes* and *extended polyhedral spaces* by replacing the ambient spaces $V \simeq \mathbb{R}^n$ with \mathbb{T}^n , or more generally, with a partial compactification \mathbb{TP}_σ for the fan $\text{face}(\sigma)$ associated to a cone σ in V , as described in the previous section. For more details we refer to [JSS19, MZ14, IKMZ19].

Let n be a natural number and let $x = (x_1, \dots, x_n)$ be a point of \mathbb{T}^n . The *sedentarity* of x denoted by $\text{sed}(x)$ is the set J of all integers $j \in [n]$ with $x_j = \infty$. The space \mathbb{T}^n is stratified into subspaces \mathbb{R}_J^n for $J \subseteq [n]$ where \mathbb{R}_J^n consists of all points of x of sedentarity J . Note that $\mathbb{R}_J^n \simeq \mathbb{R}^{n-|J|}$.

More generally, let σ be a cone in V . By an abuse of the notation, we denote by σ the fan in V which consists of σ and all its faces. By the construction described in the previous section, σ provides a partial compactification \mathbb{TP}_σ of V , where we get a bijection between strata V_∞^τ of \mathbb{TP}_σ and faces τ of the cone σ . In the context of the previous section, the stratum V_∞^τ was denoted $N_{\infty, \mathbb{R}}^\tau$.

Generalizing the definition of the sedentarity, for any point $x \in \mathbb{TP}_\sigma$ which lies in the stratum V_∞^τ , with $\tau < \sigma$, the *sedentarity* of x is by definition $\text{sed}(x) := \tau$. For σ the positive quadrant in \mathbb{R}^n , these definitions coincide with the ones in the preceding paragraph, as we get $\mathbb{TP}_\sigma = \mathbb{T}^n$ and the subfaces of σ can be identified with the subsets $[n]$.

An *extended polyhedron* δ in \mathbb{TP}_σ is by definition the topological closure in \mathbb{TP}_σ of any polyhedron included in a strata V_∞^τ for some $\tau < \sigma$. A *face* of δ is the topological closure of a

face of $\delta \cap V_\infty^\zeta$ for some $\zeta < \sigma$. An *extended polyhedral complex* in \mathbb{TP}_σ is a finite collection X of extended polyhedra in \mathbb{TP}_σ such that the two following properties are verified.

- For any $\delta \in X$, any face γ of δ is also an element of X .
- For pair of elements δ and δ' , the intersection $\delta \cap \delta'$ is either empty or a common face of δ and δ' .

The support of the extended polyhedral complex $|X|$ is by definition the union of $\delta \in X$. The space $\mathfrak{X} = |X|$ is then called an *extended polyhedral subspace* of \mathbb{TP}_σ , and X is called an *extended polyhedral structure* on \mathfrak{X} .

We now use extended polyhedral subspaces of partial compactifications of vector spaces of the form \mathbb{TP}_σ as local charts to define more general extended polyhedral spaces.

Let n and m be two natural numbers, and let $V_1 \simeq \mathbb{R}^n$ and $V_2 \simeq \mathbb{R}^m$ be two vector spaces with two cones σ_1 and σ_2 in V_1 and V_2 , respectively. Let $\phi: V_1 \rightarrow V_2$ be an affine map between the two spaces and denote by A be the linear part of ϕ . Let I be the set of rays $\varrho < \sigma_1$ such that $A\varrho$ lives inside σ_2 . Let τ_I be the cone of σ_1 which is generated by the rays in I . The affine map ϕ can be then extended to a map $\bigcup_{\substack{\zeta < \sigma_1 \\ \zeta \subseteq \tau_I}} V_{1,\infty}^\zeta \rightarrow \mathbb{TP}_{\sigma_2}$ denoted by ϕ by an abuse of the notation. We call the extension an *extended affine map*. More generally, for an open subset $U \subseteq \mathbb{TP}_{\sigma_1}$, a map $\phi: U \rightarrow \mathbb{TP}_{\sigma_2}$ is called an *extended affine map* if it is the restriction to U of an extended affine map $\phi: \mathbb{TP}_{\sigma_1} \rightarrow \mathbb{TP}_{\sigma_2}$ as above. (The definition thus requires that U is a subset of $\bigcup_{\substack{\zeta < \sigma_1 \\ \zeta \subseteq \tau_I}} V_{1,\infty}^\zeta$.) In the case V_1 and V_2 come with sublattices of full ranks, the extended affine map is called *integral* if the underlying map ϕ is integral, i.e., if the linear part A is integral with respect to the two lattices.

An *extended polyhedral space* is a Hausdorff topological space \mathfrak{X} with a finite atlas of charts $(\phi_i: W_i \rightarrow U_i \subseteq \mathfrak{X}_i)_{i \in I}$ for I a finite set such that

- $\{W_i \mid i \in I\}$ form an open covering of \mathfrak{X} ;
- \mathfrak{X}_i is an extended polyhedral subspace of \mathbb{TP}_{σ_i} for a finite dimensional real vector space $V_i \simeq \mathbb{R}^{n_i}$ and a cone σ_i in V_i , and U_i is an open subset of \mathfrak{X}_i ; and
- ϕ_i are homeomorphisms between W_i and U_i such that for any pair of indices $i, j \in I$, the transition map

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}: \phi_i(W_i \cap W_j) \rightarrow \mathbb{TP}_{\sigma_j}$$

is an extended affine map.

The extended polyhedral space is called *integral* if the transition maps are all integral with respect to the lattices \mathbb{Z}^{n_i} in \mathbb{R}^{n_i} .

Let \mathfrak{X} be an extended polyhedral space with an atlas of charts $(\phi: W_i \rightarrow U_i \subseteq \mathfrak{X}_i)_{i \in I}$ as above. A *face structure* on \mathfrak{X} is the choice of an extended polyhedral complex X_i with $|X_i| = \mathfrak{X}_i$ for each i and a finite number of closed sets $\theta_1, \dots, \theta_N$, for $N \in \mathbb{N}$, called *facets* which cover \mathfrak{X} such that the following two properties are verified.

- Each facet θ_j is contained in some chart W_i for $i \in I$ such that $\phi_i(\theta_j)$ is the intersection of the open set U_i with a face $\eta_{j,i}$ of the polyhedral complex X_i .
- For any subset $J \subseteq [N]$, any $j \in J$, and any chart W_i which contains θ_j , the image by ϕ_i of the intersection $\bigcap_{j \in J} \theta_j$ in U_i is the intersection of U_i with a face of $\eta_{j,i}$.

A *face* of the face structure is the preimage by ϕ_i of a face of $\eta_{j,i}$ for any $j \in [N]$ and for any $i \in I$ such that $\theta_j \subseteq W_i$. Each face is contained in a chart W_i and the *sedentarity of a face δ in the chart W_i* is defined as the sedentarity of any point in the relative interior of $\phi_i(\delta)$ seen in X_i .

PROPOSITION 2.2. *Let Σ be a fan in $N_{\mathbb{R}}$. The canonical compactification $\overline{\Sigma}$ naturally admits the structure of an extended polyhedral space, and a face structure given by the closure $\overline{C_{\sigma}^{\tau}}$ in $\overline{\Sigma}$ of the cone C_{σ}^{τ} in the conical stratification of $\overline{\Sigma}$, for pairs of cones $\tau < \sigma$ in Σ . The extended polyhedral structure is integral if Σ is a rational fan.*

PROOF. This is proved in [AP20a]. □

Note that the sedentarity of the face $\overline{C_{\sigma}^{\tau}}$ of the conical stratification of $\overline{\Sigma}$ is the set of rays of τ .

2.4. Recession fan and canonical compactification of polyhedral complexes. Let X be a polyhedral complex in a real vector space $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$. The *recession pseudo-fan* of X denoted by X_{rec} is the set of cones $\{\delta_{\text{rec}} \mid \delta \in X\}$. In fact the collection of cones δ_{rec} do not necessary form a fan, as depicted in the following example; we will however see later in Section 4 how to find a subdivision of X whose recession pseudo-fan becomes a fan. In such a case, we will call X_{rec} the *recession fan* of X . Recession fans are studied in [BS11].

EXAMPLE 2.3. Let $V = \mathbb{R}^3$ and denote by (e_1, e_2, e_3) the standard basis of \mathbb{R}^3 . Define

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \mathbb{R}_+ e_1 + \mathbb{R}_+ e_2 \subset \mathbb{R}^3, \\ \sigma_2 &= \mathbb{R}_+ e_1 + \mathbb{R}_+(e_1 + e_2) \subset \mathbb{R}^3, \\ X &= \text{face}(\sigma_1) \cup \text{face}(e_3 + \sigma_2). \end{aligned}$$

Note that X_{rec} contains the cones σ_1 and σ_2 whose intersection is not a face of σ_1 . ◇

Let X be a polyhedral complex in $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ whose recession pseudo-fan X_{rec} is a fan. Let $\mathbb{TP}_{X_{\infty}}$ be the corresponding tropical toric variety. The *canonical compactification* of X denoted by \overline{X} is by definition the closure of X in $\mathbb{TP}_{X_{\infty}}$.

We now describe a natural stratification of \overline{X} . Let $\sigma \in X_{\text{rec}}$, and consider the corresponding stratum $N_{\infty, \mathbb{R}}^{\sigma}$ of \mathbb{TP}_{σ} . Define X_{∞}^{σ} to be the intersection of \overline{X} with $N_{\infty, \mathbb{R}}^{\sigma}$, that without risk of confusion, we simply denote X^{σ} by dropping ∞ . Note that $X^0 = X$, which is the *open part* of the compactification \overline{X} .

Let $D = \overline{X} \setminus X$ be the *boundary at infinity* of the canonical compactification of X . For each non-zero cone σ in X_{rec} , we denote by D^{σ} the closure of X^{σ} in \overline{X} .

THEOREM 2.4 (Tropical orbit-stratum correspondence). *Notations as above, let X be a polyhedral complex in $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$. We have the following.*

- (1) *For each cone $\sigma \in X_{\text{rec}}$, the corresponding strata X^{σ} is a polyhedral complex in $N_{\infty, \mathbb{R}}^{\sigma}$.*
- (2) *The pseudo-recession fan $(X^{\sigma})_{\text{rec}}$ of X^{σ} is a fan which coincides with the fan $(X_{\text{rec}})_{\infty}^{\sigma}$ in $N_{\infty, \mathbb{R}}^{\sigma}$ in the stratification of the canonical compactification $\overline{X_{\text{rec}}}$ of the fan X_{rec} .*
- (3) *The closure D^{σ} of X^{σ} coincides with the canonical compactification of X^{σ} in $N_{\infty, \mathbb{R}}^{\sigma}$, i.e., $D^{\sigma} = \overline{X^{\sigma}}$.*
- (4) *If X has pure dimension d , then each stratum X^{σ} as well as their closures D^{σ} have pure dimension $d - |\sigma|$.*

In particular, the canonical compactification \overline{X} is an extended polyhedral structure with a face structure induced from that of X .

PROOF. The theorem is proved in [AP20a]. □

2.5. Tropical homology and cohomology groups. We recall the definition of tropical cohomology groups and refer to [IKMZ19, JSS19, MZ14, GS19b] for more details.

Let X be an extended polyhedral space with a face structure. We start by recalling the definition of the multi-tangent and multi-cotangent spaces $\mathbf{F}_p(\delta)$ and $\mathbf{F}^p(\delta)$, respectively, for the face δ of X . This leads to the definition of a chain, resp. cochain, complex which calculates the tropical homology, resp. cohomology, groups of X .

For a face δ of X and for any non-negative integer p , the p -th multi-tangent and the p -th multicotangent space of X at δ denoted by $\mathbf{F}_p(\delta)$ and $\mathbf{F}^p(\delta)$ are defined by

$$\mathbf{F}_p(\delta) = \sum_{\substack{\eta > \delta \\ \text{sed}(\eta) = \text{sed}(\delta)}} \bigwedge^p T\eta, \quad \text{and} \quad \mathbf{F}^p(\delta) = \mathbf{F}_p(\delta)^*.$$

For an inclusion of faces $\gamma < \delta$ in X , we get maps $i_{\delta > \gamma}: \mathbf{F}_p(\delta) \rightarrow \mathbf{F}_p(\gamma)$ and $i_{\gamma < \delta}^*: \mathbf{F}^p(\gamma) \rightarrow \mathbf{F}^p(\delta)$.

For a pair of non-negative integers p, q , define

$$C_{p,q}(X) := \bigoplus_{\substack{\delta \in X \\ |\delta| = q}} \mathbf{F}_p(\delta)$$

and consider the cellular chain complex, defined by using maps $i_{\delta > \gamma}$ as above,

$$C_{p,\bullet}: \quad \dots \longrightarrow C_{p,q+1}(X) \xrightarrow{\partial_{q+1}^{\text{trop}}} C_{p,q}(X) \xrightarrow{\partial_q^{\text{trop}}} C_{p,q-1}(X) \longrightarrow \dots$$

The tropical homology of X is defined by

$$H_{p,q}^{\text{trop}}(X) := H_q(C_{p,\bullet}).$$

Similarly, we have a cochain complex

$$C^{p,\bullet}: \quad \dots \longrightarrow C^{p,q-1}(X) \xrightarrow{\partial_{\text{trop}}^{q-1}} C^{p,q}(X) \xrightarrow{\partial_{\text{trop}}^q} C^{p,q+1}(X) \longrightarrow \dots$$

where

$$C^{p,q}(X) := \bigoplus_{\substack{\delta \in X \\ |\delta| = q}} \mathbf{F}^p(\delta).$$

The tropical cohomology of X is defined by

$$H_{\text{trop}}^{p,q}(X) := H^q(C^{p,\bullet}).$$

In the case X comes with a rational structure, one can define tropical homology and cohomology groups with integer coefficients. In this case, for each face δ , the tangent space $T\delta$ has a lattice N_δ . One defines then

$$\mathbf{F}_p(\delta, \mathbb{Z}) = \sum_{\substack{\eta > \delta \\ \text{sed}(\eta) = \text{sed}(\delta)}} \bigwedge^p N_\eta, \quad \text{and} \quad \mathbf{F}^p(\delta, \mathbb{Z}) = \mathbf{F}_p(\delta, \mathbb{Z})^*.$$

Similarly, we get complexes with \mathbb{Z} -coefficients $C_{p,\bullet}^{\mathbb{Z}}$ and $C_{\mathbb{Z}}^{p,\bullet}$, and define

$$H_{p,q}^{\text{trop}}(X, \mathbb{Z}) := H_q(C_{p,\bullet}^{\mathbb{Z}}) \quad H_{\text{trop}}^{p,q}(X, \mathbb{Z}) := H^q(C_{\mathbb{Z}}^{p,\bullet}).$$

Similarly, working with the cochain $C_c^{p,\bullet}$ with *compact support*, one can define tropical cohomology groups with compact support. We denote them by $H_{\text{trop},c}^{p,q}(X, A)$ with coefficients $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, or \mathbb{R} . If the coefficient field is not specified, it means we are working with real coefficients. We define as well the homology groups $H_{p,q}^{\text{BM}}(X, A)$ the tropical analogue of the Borel-Moore homology.

2.6. Dolbeault cohomology and comparison theorem. In this section we briefly recall the formalism of superforms and their corresponding Dolbeault cohomology on extended polyhedral complexes. The main references here are [JSS19, JRS18], see also [Lag12, CLD12, GK17].

Let $V \simeq \mathbb{R}^n$ be a real vector space and denote by V^* its dual. We denote by \mathcal{A}^p the sheaf of differential forms of degree p on V . Note that the sheaf \mathcal{A}^p is a module over the sheaf of rings of smooth functions \mathcal{C}^∞ . The *sheaf of (super)forms of bidegree (p, q)* denoted by $\mathcal{A}^{p,q}$ is defined as the tensor product $\mathcal{A}^p \otimes_{\mathcal{C}^\infty} \mathcal{A}^q$. Choosing a basis $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}$ of V , we choose two copies of the dual vector space V^* with the dual basis $d'x_1, \dots, d'x_n$ for the first copy and $d''x_1, \dots, d''x_n$ for the second. In the tensor product $\mathcal{A}^p \otimes \mathcal{A}^q$ the first basis is used to describe the forms in \mathcal{A}^p and the second basis for the forms in \mathcal{A}^q . So for an open set $U \subseteq V$, a section $\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}$ is uniquely described in the form

$$\alpha = \sum_{\substack{I, J \subseteq [n] \\ |I|=p, |J|=q}} \alpha_{I,J} d'x_I \wedge d''x_J$$

for smooth functions $\alpha_{I,J} \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Here for a subset $I = \{i_1, \dots, i_\ell\} \subseteq [n]$ with $i_1 < i_2 < \dots < i_\ell$, we denote by $d'x_I$ and $d''x_I$ the elements of the two copies of $\bigwedge^\ell V^*$ defined by

$$d'x_I = d'x_{i_1} \wedge \dots \wedge d'x_{i_\ell} \quad \text{and} \quad d''x_I = d''x_{i_1} \wedge \dots \wedge d''x_{i_\ell},$$

respectively. Moreover, for subsets $I, J \subseteq [n]$, $d'x_I \wedge d''x_J$ is the element of $\bigwedge^p V^* \otimes \bigwedge^q V^*$ given by $d'x_I \otimes d''x_J$. The usual rules of the wedge product apply. In particular, for any $i, j \in [n]$,

$$d''x_j \wedge d'x_i = -d'x_i \wedge d''x_j.$$

Observing that $\mathcal{A}^{p,q} \simeq \mathcal{A}^p \otimes_{\mathbb{R}} \bigwedge^q V^*$ and $\mathcal{A}^{p,q} \simeq \bigwedge^p V^* \otimes \mathcal{A}^q$, the collection of bigraded sheaves $\mathcal{A}^{p,q}$ come with differential operators $d': \mathcal{A}^{p,q} \rightarrow \mathcal{A}^{p+1,q}$ and $d'': \mathcal{A}^{p,q} \rightarrow \mathcal{A}^{p,q+1}$ defined by $d' = d_p \otimes \text{id}$ and $d'' = \text{id} \otimes d_q$ where for non-negative integer ℓ , $d_\ell: \mathcal{A}^\ell \rightarrow \mathcal{A}^{\ell+1}$ is the differentiation of smooth ℓ -forms. More explicitly, the differential map d'' is defined by its restriction to open sets $U \subseteq V$

$$\mathcal{A}^{p,q}(U) \rightarrow \mathcal{A}^{p,q+1}(U)$$

and sends a (p, q) -form $\alpha = \sum_{I,J} \alpha_{I,J} d'x_I \wedge d''x_J$ to

$$d''\alpha = \sum_{I,J} \sum_{\ell=1}^n \partial_{x_\ell} \alpha_{I,J} d''x_\ell \wedge d'x_I \wedge d''x_J = (-1)^p \sum_{I,J} \sum_{\ell=1}^n \partial_{x_\ell} \alpha_{I,J} d'x_I \wedge (d''x_\ell \wedge d''x_J).$$

The operator d' has a similar expression.

Consider now a fan Σ in V , and let \mathbb{TP}_Σ be the corresponding partial compactification of V . We define the *sheaf of bigraded (p, q) -forms $\mathcal{A}^{p,q}$* on \mathbb{TP}_Σ as follows. For each pair of cones $\tau < \sigma$ of Σ , we have a natural projection $\pi_{\tau < \sigma}: V_\infty^\tau \rightarrow V_\infty^\sigma$. This projection induces a map $\pi_{\sigma > \tau}^*: \mathcal{A}^{p,q}(V_\infty^\sigma) \rightarrow \mathcal{A}^{p,q}(V_\infty^\tau)$. Let $U \subseteq \mathbb{TP}_\Sigma$ be an open set. A section $\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}(U)$ is the data of the collection of (p, q) -forms $\alpha^\sigma \in \mathcal{A}^{p,q}(U \cap V_\infty^\sigma)$, where $U \cap V_\infty^\sigma$ is viewed as an open subset of the real vector space $V_\infty^\sigma \simeq V/T\sigma$, so that the following compatibility at infinity is verified among these sections. For each pair of cones $\tau < \sigma$ in Σ , there exists a neighborhood U' of $U \cap V_\infty^\sigma$ in U such that the restriction of α^τ to U' is given by the pullback $\pi_{\sigma > \tau}^*(\alpha^\sigma)|_{U'}$.

The differential operators d' and d'' naturally extend to \mathbb{TP}_Σ and define operators

$$d': \mathcal{A}^{p,q} \rightarrow \mathcal{A}^{p+1,q} \quad \text{and} \quad d'': \mathcal{A}^{p,q} \rightarrow \mathcal{A}^{p,q+1}$$

for any pair of non-negative integers (p, q) .

Let now X be a closed polyhedral complex in \mathbb{TP}_Σ , and denote $\iota: X \hookrightarrow \mathbb{TP}_\Sigma$ the inclusion. The sheaf of (p, q) -forms $\mathcal{A}_X^{p,q}$ is defined as a quotient of the restriction $\iota^* \mathcal{A}_{\mathbb{TP}_\Sigma}^{p,q}$ of the sheaf of (p, q) -forms on \mathbb{TP}_Σ to X modulo those sections which vanish on the tangent space of X .

Thus for an open set U in X , a section $\alpha \in \mathcal{A}_X^{p,q}(U)$ is locally around each point x given by a section $\alpha_x \in \mathcal{A}^{p,q}(U_x)$ for an open subset $U_x \subseteq \mathbb{TP}_\Sigma$ with $U_x \cap X \subseteq U$, and two sections α and β in $\mathcal{A}_X^{p,q}(X)$ are equivalent if for any point x living in a face σ of X , the difference $\alpha(x) - \beta(x)$ vanishes on any (p, q) -multivector in $\bigwedge^p T\sigma \otimes \bigwedge^q T\sigma$.

The definition above can be extended to any extended polyhedral complex.

The two differential operators d' and d'' naturally extend to \mathbb{TP}_{X_∞} and we get $d': \mathcal{A}_X^{p,q} \rightarrow \mathcal{A}_X^{p+1,q}$ and $d'': \mathcal{A}_X^{p,q} \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}$ for any pair of non-negative integers (p, q) .

The above definition only depends on the support of X and not on the chosen polyhedral structure on this support. As a consequence, if \mathfrak{X} is any polyhedral space, the sheaf $\mathcal{A}_{\mathfrak{X}}^{p,q}$ is well-defined.

The *Dolbeault cohomology group* $H_{\text{Dol}}^{p,q}(X)$ of bidegree (p, q) is by definition the q -th cohomology group of the cochain complex

$$(\mathcal{A}_X^{p,\bullet}(X), d''): \quad \mathcal{A}_X^{p,0}(X) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,1}(X) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q-1}(X) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q}(X) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}(X) \rightarrow \cdots$$

Similarly, we define Dolbeault cohomology groups with compact support $H_{\text{Dol},c}^{p,q}(X)$ as the q -th cohomology group of the cochain complex

$$(\mathcal{A}_{X,c}^{p,\bullet}(X), d''): \quad \mathcal{A}_{X,c}^{p,0}(X) \rightarrow \mathcal{A}_{X,c}^{p,1}(X) \rightarrow \cdots$$

where $\mathcal{A}_{X,c}^{p,q}(X)$ is the space of (p, q) -forms whose support forms a compact subset of X .

Denote by Ω_X^p the kernel of the map $d'': \mathcal{A}_X^{p,0} \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,1}$. We call this the sheaf of *holomorphic p -forms* on X . By Poincaré lemma for superforms, proved in [Jel16a, JSS19], the complex $(\mathcal{A}^{p,\bullet}, d'')$ provides an acyclic resolution of the sheaf Ω_X^p . We thus get the isomorphism

$$H_{\text{Dol}}^{p,q}(X) \simeq H^q(X, \Omega_X^p),$$

and similarly,

$$H_{\text{Dol},c}^{p,q}(X) \simeq H_c^q(X, \Omega_X^p).$$

Moreover, we have the following comparison theorem from [JSS19].

THEOREM 2.5 (Comparison theorem). *For any extended polyhedral complex X , we have*

$$H_{\text{trop}}^{p,q}(X) \simeq H_{\text{Dol}}^{p,q}(X), \quad \text{and} \quad H_{\text{trop},c}^{p,q}(X) \simeq H_{\text{Dol},c}^{p,q}(X).$$

2.7. Tropical fans, smoothness and shellability. We recall the definition of tropical fans and refer to [AP21] for their basic properties. More results related to algebraic and complex geometry can be found in [Mik06, Mik07, AR10, GKM09, KM09, Kat12, Bab14, BH17, Gro18] and [MS15, MR09, BIMS15].

A *tropical fan* Σ is a rational fan of pure dimension d , for a natural number $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, which verifies the *balancing condition*: namely, for any cone τ of dimension $d - 1$ in Σ , we require

$$\sum_{\sigma > \tau} \epsilon_{\sigma/\tau} = 0 \in N^\tau.$$

Here $\epsilon_{\sigma/\tau}$ is the primitive vector of the ray $\rho_{\sigma/\tau}$ corresponding to σ in $N_{\mathbb{R}}^\tau$.

Let Σ be a tropical fan of dimension d . The Borel-Moore homology group $H_{d,d}^{\text{BM}}(\Sigma)$ contains a canonical element ν_Σ , the analogue of the fundamental cycle in the tropical setting. Using the cap product \frown , we get a natural map

$$\cdot \frown \nu_\Sigma: H^{p,q}(\Sigma) \longrightarrow H_{d-p,d-q}^{\text{BM}}(\Sigma).$$

We say that a simplicial tropical fan Σ verifies the *Poincaré duality* if the above map is an isomorphism for any bidegree (p, q) . A tropical fan Σ is called *smooth* if for any cone $\sigma \in \Sigma$, the star fan Σ^σ verifies the Poincaré duality. In this paper, the star fan Σ^σ refers to the fan in $N_{\mathbb{R}}/N_{\sigma,\mathbb{R}}$ induced by the cones η in Σ which contain σ as a face.

We have the following list of properties of the category of smooth tropical fans.

- (1) Smoothness only depends on the support of the tropical fan.
- (2) Smoothness is a local condition, namely that, a tropical fan is smooth if it is smooth around each of its points.
- (3) The category of smooth tropical fans is closed under products. In fact, we have the following stronger property: Let Σ_1, Σ_2 be two tropical fans and set $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$ (which is again a tropical fan). Then Σ is smooth if and only if Σ_1 and Σ_2 are both smooth.
- (4) Any complete rational fan, i.e., a fan with support equal to $N_{\mathbb{R}}$, is tropically smooth.
- (5) Bergman fans of matroids are tropically smooth in the above sense.
- (6) The category of smooth tropical fans is stable under tropical modifications along smooth divisors.

We refer to [AP21] for more details.

In order to show the category of smooth tropical fans is large, we introduce in [AP21] a tropical notion of shellability. This is based on two types of operations on tropical fans, that of star subdivision and tropical modification. A tropical fan is called *shellable* if it can be obtained from a collection of basic tropical fans by only using these two operations. We refer to [AP21] for the formal definition and basic properties.

We prove the following result in [AP21].

THEOREM 2.6. *Any shellable tropical fan is smooth.*

2.8. Tropical cycles and divisors. Let $V = N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ be a real vector space of dimension n with a full rank lattice N . Let Y be a rational polyhedral complex of pure dimension d in V . For each facet σ of Y , suppose we are given a *weight* which is an integer $w(\sigma)$. Let $C := (Y, w)$ be the weighted polyhedral complex Y with the weight function on its facets w . The weighted polyhedral complex C is called a *tropical cycle* if the following *balancing condition* is verified:

$$\forall \tau \in Y \text{ of dimension } d - 1, \quad \sum_{\sigma > \tau} w(\sigma) \mathbf{e}_{\sigma/\tau} = 0 \in N^{\tau}.$$

The following is a direct consequence of the definition of a tropical fan given in the previous section.

PROPOSITION 2.7. *The tropical fan Σ with weights equal to one on facets is a tropical cycle.*

A *tropical regular function* f on a tropical cycle C is a piecewise affine function with integral slopes which is the restriction to C of a concave function on \mathbb{R}^n . In other words, it is a function of the form

$$f = \min_{i \in I} \{ \langle \alpha_i, \cdot \rangle + \beta_i \}$$

for a finite index set I and $\alpha_i \in \mathbb{Z}^n, \beta_i \in \mathbb{Q}$.

Any tropical regular function induces a subdivision of the tropical cycle C . On each face δ of C , the new polyhedral structure consists of set of the form $\{x \in \delta \mid f(x) = g(x)\}$ where g is an affine linear function such that $g(x) \geq f(x)$ for every x . Keeping the same weight on facets, this leads to a new tropical cycle that we denote by C_1 and note that C and C_1 have the same support and same weight function.

Given a tropical regular function f on C , we can consider the graph Γ_f of f in $V \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{n+1}$, with the polyhedral structure obtained by that of the subdivided C_1 . The graph Γ_f is not necessary a tropical cycle in $V \times \mathbb{R}$ anymore, as it might have unbalanced codimension one faces. In this case, we can add new faces to Γ_f to obtain a tropical cycle. For this, consider

a codimension one face δ of C_1 which turns to be unbalanced in the graph Γ_f . Consider the polyhedron E_δ defined by

$$E_\delta := \left\{ (x, t) \mid x \in \delta \text{ and } t \geq f(x) \right\} \subset V \times \mathbb{R}.$$

Define \tilde{C} as the union of Γ_f with the polyhedra E_δ and their faces, one polyhedron for each unbalanced codimension one face δ of Γ_f . Note that for each such face δ , the primitive vector $\epsilon_{E_\delta/\delta}$ is the one given by the last vector ϵ_{n+1} in the standard basis of $V \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{n+1}$.

One verifies there is a unique integer weight $w(E_\delta)$ which we can associate to new faces E_δ in order to make \tilde{C} a tropical cycle in $V \times \mathbb{R}$. The new tropical cycle in $V \times \mathbb{R}$ is called tropical modification of C along $\text{div}_C(f)$, where $\text{div}_C(f)$ is the union of the δ in C_1 of codimension one which happens to be unbalanced when seen in Γ_f .

2.9. Tropical smoothness of the support. An extended polyhedral complex X is said to have a *tropically smooth*, or simply *smooth*, support if its support $|X|$ is locally isomorphic to a product $\mathbb{T}^a \times |\Sigma|$ for a non-negative integer a and a smooth tropical fan Σ .

We prove in [AP21] that the canonical compactification of any unimodular smooth tropical fan is smooth. In fact, we have the following more general result.

THEOREM 2.8. *Let X be a rational polyhedral complex in $N_{\mathbb{R}}$ with smooth support. Suppose that the recession fan X_{rec} is unimodular. Then the canonical compactification \bar{X} of X has smooth support. Moreover, if the polyhedral structure on X is unimodular, then the induced extended polyhedral structure on \bar{X} , given in Theorem 2.4, is unimodular as well.*

3. Local Hodge-Riemann and Hard Lefschetz

The aim of this section is to study the local situation and to prove Theorem 1.6.

The results in this section are valid for integral, rational, or real Chow rings of smooth tropical fans when they are definable. Since our primary objective in this paper is to establish global versions of these results, and we do not have tried to control the torsion part of the tropical cohomology for more general tropical varieties, to simplify the presentation, we will only consider the case of rational fans and we suppose the coefficient ring \mathbb{K} be either \mathbb{Q} or \mathbb{R} .

3.1. Basic definitions and results. In this section, we review some basic results concerning Hodge theory of finite dimensional algebras.

Let $A^\bullet = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i$ be a graded vector space of finite dimension over \mathbb{K} such that the graded pieces of negative degree are all trivial.

DEFINITION 3.1 (Poincaré duality). We say that A^\bullet verifies

- *weak Poincaré duality for an integer d* denoted by $\text{WPD}^d(A^\bullet)$ if for any integer k , we have the equality $\dim_{\mathbb{K}} A^k = \dim_{\mathbb{K}} A^{d-k}$.

Let $\Phi: A^\bullet \times A^\bullet \rightarrow \mathbb{K}$ be a symmetric bilinear form on A^\bullet . We say that the pair (A^\bullet, Φ) verifies

- *Poincaré duality for an integer d* that we denote by $\text{PD}^d(A^\bullet, \Phi)$ if Φ is non-degenerate and for any integer k , A^k is orthogonal to A^l for all $l \neq d - k$. ◇

Let A^\bullet be a graded \mathbb{K} -vector space of finite dimension as above, let d be a positive integer, and let Q be a symmetric bilinear form on the truncation $\bigoplus_{k \leq \frac{d}{2}} A^k$ such that A^i and A^j are orthogonal for distinct pair of non-negative integers $i, j \leq \frac{d}{2}$.

DEFINITION 3.2 (Hard Lefschetz). Notations as above, we say that the pair (A^\bullet, Q) verifies

- *Hard Lefschetz property* denoted $\text{HL}^d(A^\bullet, Q)$ if A^\bullet verifies $\text{WPD}^d(A^\bullet)$ and Q is non-degenerate. ◇

In the sequel, for any $k \leq d/2$, we denote by Q_k the restriction of Q to A^k .

DEFINITION 3.3 (Hodge-Riemann). We say the pair (A^\bullet, Q) verifies

- *Hodge-Riemann relations* $\text{HR}^d(A^\bullet, Q)$ if A^\bullet verifies $\text{WPD}^d(A^\bullet)$ and moreover, for each non-negative integer $k \leq \frac{d}{2}$, the signature of Q_k is given by the sum

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i (\dim(A^i) - \dim(A^{i-1})). \quad \diamond$$

REMARK 3.4. As we will show in Proposition 3.5 below, the above definitions are in fact equivalent to the ones given in the introduction. \diamond

3.1.1. *Bilinear form associated to a degree map.* Assume that A^\bullet is a unitary graded \mathbb{K} -algebra with unit 1_{A^\bullet} and suppose $A^0 = \mathbb{K} \cdot 1_{A^\bullet}$. Moreover, suppose that we are given a linear form $\text{deg}: A^d \rightarrow \mathbb{K}$ called the *degree map* which we extend to the entire algebra A^\bullet by declaring it to be zero on each graded piece A^k for $k \neq d$. In this way, we get a bilinear form on A^\bullet denoted by Φ_{deg} and defined by

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{deg}}: A^\bullet \times A^\bullet &\rightarrow \mathbb{K}, \\ (a, b) &\mapsto \text{deg}(ab). \end{aligned}$$

3.1.2. *Lefschetz operator and its associated bilinear form.* Notations as in the preceding paragraph, let now $L: A^\bullet \rightarrow A^{\bullet+1}$ be a morphism of degree one which sends any element a of A^\bullet to the element $La \in A^{\bullet+1}$. Let Φ be a symmetric bilinear form on A^\bullet . For example, if we have a degree map on A^\bullet , we can take $\Phi = \Phi_{\text{deg}}$.

We define a bilinear form $Q_{L, \Phi}$ on A^\bullet by setting

$$\forall a \in A^k, b \in A^j, \quad Q_{L, \Phi}(a, b) := \Phi(a, L^{d-2k}b)$$

for all pairs of integers $k, j \leq d/2$. We furthermore require A^j and A^k to be orthogonal for $j \neq k$. In the case $\Phi = \Phi_{\text{deg}}$, we will have $Q_{L, \Phi}(a, b) = \text{deg}(a \cdot L^{d-2k}b)$ and this latter requirement will be automatic.

Assuming that L is auto-adjoint with respect to $Q_{L, \Phi}$, i.e., $\Phi(a, Lb) = \Phi(La, b)$ for all $a, b \in A^\bullet$, we get a symmetric bilinear form $Q = Q_{L, \Phi}$ on A^\bullet .

If L is given by multiplication by an element $\ell \in A^1$ and $\Phi = \Phi_{\text{deg}}$, we write ℓ instead of L for the corresponding map, and write Q_ℓ for the corresponding bilinear form, which is then automatically symmetric: in fact, we have

$$Q_\ell(a, b) = \text{deg}(\ell^{d-2k}ab)$$

for any pair of elements $a, b \in A^k$. In this case, we write $\text{HL}^d(A^\bullet, \ell)$ and $\text{HR}^d(A^\bullet, \ell)$ instead of $\text{HL}^d(A^\bullet, Q_{\ell, \Phi_{\text{deg}}})$ and $\text{HR}^d(A^\bullet, Q_{\ell, \Phi_{\text{deg}}})$, respectively. If there is no risk of confusion, we furthermore omit the mention of the top dimension d in the above notations. Moreover, we sometimes use deg instead of Φ_{deg} in order to simplify the notation.

3.1.3. *Primitive parts induced by a Lefschetz operator.* For a Lefschetz operator $L: A^\bullet \rightarrow A^{\bullet+1}$, as in the preceding section, and for a non-negative integer $k \leq \frac{d}{2}$, the *primitive part of A^k with respect to L* denoted by $A_{\text{prim}, L}^k$ is by definition the kernel of the map

$$L^{r-2k+1}: A^k \longrightarrow A^{k-r+1}.$$

If L is given by an element $\ell \in A^1$, we denote by $A_{\text{prim}, \ell}^k$ the primitive part of A^k with respect to ℓ .

If there is no risk of confusion, and L or ℓ are understood from the context, we simply drop them and write A_{prim}^k for the primitive part of A^k .

3.1.4. *Basic implications and consequences.* For future use, we state here basic results around these notions and some of their consequences.

We start by the following proposition which gathers several useful implications and relations between the properties introduced above.

We use the notations of the preceding paragraph. We suppose the Lefschetz operator L is auto-adjoint with respect to Φ so that the corresponding bilinear form becomes symmetric.

PROPOSITION 3.5. *Notations as above, the following properties are verified.*

$$(3.1) \quad \text{HR}^d(A^\bullet, L, \Phi) \implies \text{HL}^d(A^\bullet, L, \Phi) \implies \text{PD}^d(A^\bullet, \Phi) \implies \text{WPD}^d(A^\bullet).$$

$$(3.2) \quad \text{HL}^d(A^\bullet, L, \Phi) \iff \begin{cases} \text{PD}^d(A^\bullet, \Phi) \text{ and} \\ \forall k \leq d/2, L^{d-2k}: A^k \rightarrow A^{d-k} \text{ is an isomorphism.} \end{cases}$$

$$(3.3) \quad \text{HR}^d(A^\bullet, L, \Phi) \iff \begin{cases} \text{WPD}^d(A^\bullet) \\ \forall k \leq d/2, \text{ the restriction } (-1)^k Q_{L, \Phi}|_{A_{\text{prim}}^k} \text{ is positive definite.} \end{cases}$$

(3.4) For $S: A^\bullet \rightarrow A^\bullet$ an automorphism of degree 0,

$$\begin{aligned} \text{PD}(A^\bullet, \Phi) &\iff \text{PD}(A^\bullet, \Phi \circ S), \\ \text{HL}(A^\bullet, Q) &\iff \text{HL}(A^\bullet, Q \circ S), \\ \text{HR}(A^\bullet, Q) &\iff \text{HR}(A^\bullet, Q \circ S). \end{aligned}$$

(3.5) For two graded \mathbb{K} -algebras A^\bullet and B^\bullet , we have

$$\begin{aligned} \text{WPD}(A^\bullet) \text{ and } \text{WPD}(B^\bullet) &\iff \text{WPD}(A^\bullet) \text{ and } \text{WPD}(A^\bullet \oplus B^\bullet), \\ \text{PD}(A^\bullet, \Phi_A) \text{ and } \text{PD}(B^\bullet, \Phi_B) &\iff \text{PD}(A^\bullet, \Phi_A) \text{ and } \text{PD}(A^\bullet \oplus B^\bullet, \Phi_A \oplus \Phi_B), \\ \text{HL}(A^\bullet, Q_A) \text{ and } \text{HL}(B^\bullet, Q_B) &\iff \text{HL}(A^\bullet, Q_A) \text{ and } \text{HL}(A^\bullet \oplus B^\bullet, Q_A \oplus Q_B), \\ \text{HR}(A^\bullet, Q_A) \text{ and } \text{HR}(B^\bullet, Q_B) &\iff \text{HR}(A^\bullet, Q_A) \text{ and } \text{HR}(A^\bullet \oplus B^\bullet, Q_A \oplus Q_B). \end{aligned}$$

(3.6) For two graded \mathbb{K} -algebras A^\bullet and B^\bullet , we have

$$\begin{aligned} \text{WPD}(A^\bullet) \text{ and } \text{WPD}(B^\bullet) &\implies \text{WPD}(A^\bullet \otimes B^\bullet), \\ \text{PD}(A^\bullet, \Phi_A) \text{ and } \text{PD}(B^\bullet, \Phi_B) &\implies \text{PD}(A^\bullet \otimes B^\bullet, \Phi_A \otimes \Phi_B), \\ \text{HL}(A^\bullet, Q_A) \text{ and } \text{HL}(B^\bullet, Q_B) &\implies \text{HL}(A^\bullet \otimes B^\bullet, Q_A \otimes Q_B), \\ \text{HR}(A^\bullet, Q_A) \text{ and } \text{HR}(B^\bullet, Q_B) &\implies \text{HR}(A^\bullet \otimes B^\bullet, Q_A \otimes Q_B). \end{aligned}$$

(3.7) For two graded \mathbb{K} -algebras A^\bullet and B^\bullet

$$\begin{aligned} \Phi_{\deg_A} \otimes \Phi_{\deg_B} &= \Phi_{\deg_A \otimes \deg_B}, \text{ and} \\ Q_{L_A, \Phi_A} \oplus Q_{L_B, \Phi_B} &= Q_{L_A \oplus L_B, \Phi_A \oplus \Phi_B}. \end{aligned}$$

(3.8) For two graded \mathbb{K} -algebras A^\bullet and B^\bullet , we have

$$\text{HR}(A^\bullet, L_A, \Phi_A) \text{ and } \text{HR}(B^\bullet, L_B, \Phi_B) \implies \text{HR}(A^\bullet \otimes B^\bullet, L_A \otimes \text{id} + \text{id} \otimes L_B, \Phi_A \otimes \Phi_B).$$

Most of these statements are routine. We only give the proof of the first three and the very last statements.

PROOF OF (3.1). The last implication is trivial. If $\text{HL}^d(A^\bullet, L, \Phi)$ holds, then the bilinear form $Q = Q_{L, \Phi}$ is non-degenerate. This implies that for each non-negative integer $k \leq d/2$, the map L^{d-2k} is injective on A^k . By $\text{WPD}^d(A^\bullet)$, this implies that L^{d-2k} induces an isomorphism between A^k and A^{d-k} , and so, as A^j and A^k are orthogonal for distinct pair of integers j and k , by our requirement, this implies that Φ is non-degenerate and so we have $\text{PD}^d(A^\bullet, \Phi)$.

It remains to prove the first implication. We prove by induction on k that Q_k is non-degenerate. The case $k = 0$ is immediate by the assumption on the signature and the fact that $A^0 = \mathbb{K} \cdot 1_{A^\bullet}$. Assume this holds for $k - 1$ and $k \leq d/2$. Since L is auto-adjoint, we have for any $a, b \in A^{k-1}$,

$$Q_{k-1}(a, b) = Q_k(La, Lb)$$

which implies that $L: A^{k-1} \rightarrow A^k$ is injective, and Q_k restricted to $L(A^{k-1})$ is non-degenerate and has signature that of Q_{k-1} . Since the difference between the signature of Q_k and that of Q_{k-1} is $(-1)^k(\dim(A^k) - \dim(A^{k-1})) = (-1)^k(\dim(A^k) - \dim(LA^{k-1}))$, it follows that Q_k is non-degenerate. \square

PROOF OF (3.2). The implication \Rightarrow follows from the proof of (3.1). The reverse implication is a consequence of our requirement that A^j and A^k are orthogonal for Φ if j and k are distinct, which combined with the non-degeneracy of Φ and the isomorphism between A^k and A^{d-k} induced by L^{d-2k} , implies that Q_k is non-degenerate. \square

PROOF OF (3.3). Let $Q = Q_{L, \Phi}$. By (3.1), $\text{HR}^d(A^\bullet, L, \Phi)$ implies $\text{HL}^d(A^\bullet, L, \Phi)$. By Proposition 3.6 below this leads to an orthogonal decomposition

$$A^k = \bigoplus_{i=0}^k L^{k-i} A_{\text{prim}}^i = A_{\text{prim}}^k \oplus LA^{k-1}$$

where the restriction of Q_k to LA^{k-1} coincides with that of Q_{k-1} on A^{k-1} . Proceeding by induction and using $\text{HR}^d(A^\bullet, L, \Phi)$ which gives the signature of Q_k , we get the implication \Rightarrow .

It remains to prove the reverse implication \Leftarrow . We proceed by induction and show that the bilinear form Q_k is non-degenerate, that $L^{d-2k}: A^k \rightarrow A^{d-k}$ is an isomorphism, and that we have an orthogonal decomposition $A^k = A_{\text{prim}}^k \oplus LA^{k-1}$. This shows that L is an isometry with respect to Q_{k-1} and Q_k on the source and target, respectively, and the result on signature follows by the positivity of $(-1)^k Q_k$ on the primitive part combined with $\dim A_{\text{prim}}^k = \dim(A^k) - \dim(A^{k-1})$.

The case $k = 0$ comes from the assumption on the positivity of Q_0 , since $A^0 = A_{\text{prim}}^0$, which implies $L^d: A^0 \rightarrow A^d$ is injective, and the property $\text{WPD}^d(A^\bullet)$. Suppose the property holds for $k - 1$ and that $k \leq d/2$. By the assumption of our induction, $L: A^{k-1} \rightarrow A^k$ is injective, and in addition, it preserves the bilinear forms Q_{k-1} and Q_k . Moreover, A_{prim}^k is orthogonal to LA^{k-1} . We now explain why an element $a \in A^k$ which is orthogonal to LA^{k-1} is in the primitive part A_{prim}^k : for such an element, and for an element $b \in A^{k-1}$, we have

$$Q_k(a, Lb) = \Phi(a, L^{d-2k+1}b) = \Phi(L^{d-2k+1}a, b) = 0.$$

Since Q_{k-1} is non-degenerate, using WPD^d , we infer the bilinear form Φ restricted to $A^{d-k+1} \times A^{k-1}$ is non-degenerate. This implies that $L^{d-2k+1}a$ is zero and so $a \in A_{\text{prim}}^k$.

We thus get the orthogonal decomposition $A^k = A_{\text{prim}}^k \oplus LA^{k-1}$. We infer that Q_k is non-degenerate, and using $\text{WPD}^d(A^\bullet)$, we get the isomorphism $L^{d-2k}: A^k \rightarrow A^{d-k}$. \square

PROOF OF (3.8). By (3.1) and Proposition 3.6, we can decompose each graded piece A^k and B^l for $k \leq d_A/2$ and $l \leq d_B/2$ into the orthogonal sum

$$A^k = \bigoplus_{i=0}^k L_A^{k-i} A_{\text{prim}}^i \quad B^l = \bigoplus_{i=0}^l L_B^{l-i} B_{\text{prim}}^i$$

such that $Q_{A,k}$ and $Q_{B,j}$ are definite on A_{prim}^k and B_{prim}^j , respectively. Taking an orthonormal basis of the primitive parts A_{prim}^k and B_{prim}^j , and making a shift in the degree of graded pieces, by Proposition 3.5, we can reduce to verifying the statement in the case where $A^\bullet = \mathbb{K}[X]/X^{r+1}$ and $B^\bullet = \mathbb{K}[Y]/Y^{s+1}$, for two non-negative integers r and s , and L_A and L_B

are multiplications by x and y , respectively. The proof in this case can be obtained either by using Hodge-Riemann property for the projective complex variety $\mathbb{C}\mathbb{P}^r \times \mathbb{C}\mathbb{P}^s$, or by the direct argument given in [BBFK02, Proposition 5.7], or still by the combinatorial argument given in [McD11, Lemma 2.2] and [AHK18, Lemma 7.8] based on the use of Gessel-Viennot-Lindström lemma [GV85, Lin73]. \square

PROPOSITION 3.6 (Lefschetz decomposition). *Assume that $\mathrm{HL}^d(A^\bullet, L, \Phi)$ holds. Then for $k \leq \frac{d}{2}$, we have the orthogonal decomposition*

$$A^k = \bigoplus_{i=0}^k L^{k-i} A_{\mathrm{prim}}^i,$$

where, for each $i \in \{0, \dots, k\}$, the map $L^{k-i}: A_{\mathrm{prim}}^i \xrightarrow{\simeq} L^{k-i} A_{\mathrm{prim}}^i$ is an isomorphism which preserves respective bilinear forms (Q_i on A^i and Q_k on A^k).

PROOF. First, we observe that for $i \leq k$, the map L^{k-i} induces an isomorphism between A^i and its image $L^{k-i} A^i$ in A^k . This follows from the fact previously stated that for $a, b \in A^j$,

$$Q_j(a, b) = Q_{j+1}(La, Lb)$$

which implies that $L: A^j \rightarrow A^{j+1}$ is injective provided that $j+1 \leq d/2$. Note that A_{prim} is orthogonal to LA^{k-1} . Indeed for $a \in A_{\mathrm{prim}}$ and $b \in A^{k-1}$, we have

$$\Phi(a, L^{d-2k} Lb) = \Phi(L^{d-2k+1} a, b) = 0.$$

Moreover, an element $a \in A^k$ orthogonal to LA^{k-1} is necessarily in the primitive part, cf. the proof of (3.3). We thus get the orthogonal decomposition

$$A^k = A_{\mathrm{prim}}^k \oplus LA^{k-1}.$$

Proceeding by induction on k , this leads to the orthogonal decomposition

$$A^k = A_{\mathrm{prim}}^k \oplus LA^{k-1} = \bigoplus_{i=0}^k L^{k-i} A_{\mathrm{prim}}^i. \quad \square$$

The following proposition is straightforward.

PROPOSITION 3.7. *The properties HR and HL are open conditions in Q (and so in Φ and L). The property PD is open in Φ . Moreover, HR is a closed condition in Q when restricted to the space $\{Q \mid \mathrm{HL}^d(A^\bullet, Q)\}$ consisting of those Q which verify HL.*

3.2. Chow rings of fans. For a simplicial fan Σ of dimension d in a real vector space V , we denote by $A^\bullet(\Sigma)$ its Chow ring with \mathbb{K} coefficients. It is defined as follows.

For each ray $\rho \in \Sigma_1$, pick a vector \mathbf{e}_ρ which generates ρ . If Σ is a rational fan with respect to a lattice, a natural choice for the generating vector is the primitive vector in the lattice which generates the ray.

Consider the polynomial ring $\mathbb{K}[x_\rho]_{\rho \in \Sigma_1}$ with indeterminate variables x_ρ associated to rays ρ in Σ_1 . The Chow ring $A^\bullet(\Sigma)$ is by definition the quotient ring

$$A^\bullet(\Sigma) := \mathbb{K}[x_\rho]_{\rho \in \Sigma_1} / (I_1 + I_2)$$

where

- I_1 is the ideal generated by the products $x_{\rho_1} x_{\rho_2} \dots x_{\rho_k}$ for any positive integer k and rays ρ_1, \dots, ρ_k which do not form a cone in Σ ;
- I_2 is the ideal generated by the homogeneous polynomials of degree one of the form $\sum_{\rho \in \Sigma_1} f(\mathbf{e}_\rho) x_\rho$ where $f \in V^*$ is a linear form on the vector space V , and $f(\rho)$ is the evaluation of f at the generator \mathbf{e}_ρ of ρ .

Note that since the ideal $I_1 + I_2$ is homogeneous, the Chow ring inherits a graded ring structure. Moreover, the definition is well-posed even in the case of non-rational fans, in which case $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, as any two different choices of generating vectors for the rays lead to an isomorphism of the quotient rings. (This isomorphism sends the generator x_ρ in the Chow ring defined with respect to the first generator set to $c_\rho x_\rho$ in the second, for a constant $c_\rho \in \mathbb{R}_{>0}$.)

For each ray ρ of Σ , we denote by x_ρ the image of x_ρ in $A^1(\Sigma)$. Any cone-wise linear function f on Σ gives an element of $A^1(\Sigma)$ defined as

$$\sum_{\rho \in \Sigma_1} f(\mathbf{e}_\rho) x_\rho.$$

In fact, all elements of $A^1(\Sigma)$ are of this form, and $A^1(\Sigma)$ can be identified with the space of cone-wise linear functions on Σ modulo linear functions.

In the case the fan Σ is rational and unimodular with respect to a lattice N in V , one can define Chow rings with integral coefficients by choosing \mathbf{e}_ρ to be the primitive vector of ρ , for each ray ρ , and by requiring f in the definition of I_2 to be integral. In this case, we have the following characterization of the Chow ring, cf. [Dan78, BDP90, Bri96, FS97].

THEOREM 3.8. *Let Σ be a unimodular fan, and denote by \mathbb{P}_Σ the corresponding toric variety. The Chow ring $A^\bullet(\Sigma)$ is isomorphic to the Chow ring of \mathbb{P}_Σ .*

In the sequel, unless otherwise stated, we will be only considering tropical fans, which are thus fans verifying the balancing condition.

3.3. Shellable supports are smooth. We recall the following result from [AP21].

THEOREM 3.9. *A shellable tropical fan Σ is smooth. Moreover, Σ is connected in codimension one.*

3.4. The canonical element and the degree map. The following proposition allows to define a degree map for the Chow ring of a smooth tropical fan. It is proved in [AP21].

PROPOSITION 3.10. *Let Σ be a smooth unimodular tropical fan of dimension d . For each cone $\sigma \in \Sigma_d$, the element*

$$\prod_{\substack{\rho < \sigma \\ |\rho|=1}} x_\rho \in A^d(\Sigma)$$

does not depend on the choice of σ .

We call this element the *canonical element* of $A^d(\Sigma)$ and denote it by ω_Σ .

We recall the following consequence of the localization lemma from [AP21].

PROPOSITION 3.11. *Let Σ be a simplicial fan. Then, for each $k \in \{0, \dots, d\}$, $A^k(\Sigma)$ is generated by square-free monomials.*

COROLLARY 3.12. *Let Σ be a smooth unimodular tropical fan. Then we have $\omega_\Sigma \neq 0$ and $A^d(\Sigma)$ is generated by ω_Σ .*

PROOF. This follows from the fact that $A^d(\Sigma)$ is generated by square-free monomials associated to top-dimensional cones, which by Poincaré duality $A^0(\Sigma) \simeq A^d(\Sigma)^\star$ and Proposition 3.10 ensures the non-vanishing of ω_Σ . □

Let $\text{deg}: A^d(\Sigma) \rightarrow \mathbb{K}$ be the linear map which takes value 1 on the canonical element. This degree map and the corresponding bilinear map Φ_{deg} is systematically used below, so we use our convention and omit the mention of Φ and deg in HL and HR.

3.5. Chow rings of products. Let Σ and Σ' be two fans.

We have the following proposition for the Chow ring of the product fan whose proof is given in [AP21].

PROPOSITION 3.13. *Let Σ and Σ' be two fans. There exists a natural isomorphism of rings*

$$A^\bullet(\Sigma \times \Sigma') \simeq A^\bullet(\Sigma) \otimes A^\bullet(\Sigma').$$

Moreover, under this isomorphism, one has

$$\begin{aligned} \omega_{\Sigma \times \Sigma'} &= \omega_\Sigma \otimes \omega_{\Sigma'}, \\ \deg_{\Sigma \times \Sigma'} &= \deg_\Sigma \otimes \deg_{\Sigma'}. \end{aligned}$$

3.6. Restriction and Gysin maps. For a pair of cones $\tau < \sigma$ in Σ , we define the restriction and Gysin maps $i_{\tau < \sigma}^*$ and $\text{Gys}_{\sigma > \tau}$ between the Chow rings of Σ^τ and Σ^σ .

The restriction map

$$i_{\tau < \sigma}^* : A^\bullet(\Sigma^\tau) \rightarrow A^\bullet(\Sigma^\sigma)$$

is a graded \mathbb{K} -algebra homomorphism given on generating sets

$$i_{\tau < \sigma}^* : A^1(\Sigma^\tau) \rightarrow A^1(\Sigma^\sigma)$$

by

$$\forall \rho \text{ ray in } \Sigma^\tau, \quad i_{\tau < \sigma}^*(x_\rho) = \begin{cases} x_\rho & \text{if } \sigma + \rho \text{ is a cone } \zeta > \sigma, \\ -\sum_{\varrho \in \Sigma_1^\sigma} f(\mathbf{e}_\varrho)x_\varrho & \text{if } \rho \in \sigma \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where in the second equality, f is any linear function on N^τ , viewed naturally in N^* , which takes value 1 on \mathbf{e}_ρ and value zero on all the other rays of σ , and the sum is over all the rays ϱ of Σ^σ . Note that any two such choices of f and f' differ by a linear function on N^σ , and so the element $\sum_{\varrho \in \Sigma^\sigma} f(\mathbf{e}_\varrho)x_\varrho$ in $A^1(\Sigma^\sigma)$ does not depend on the choice of f .

REMARK 3.14. For a pair of cones $\tau < \sigma$ as above, we get an inclusion of canonical compactifications $i : \overline{\Sigma}^\sigma \hookrightarrow \overline{\Sigma}^\tau$. The map $i_{\tau < \sigma}^* : A^k(\Sigma^\tau) \rightarrow A^k(\Sigma^\sigma)$ coincides with the restriction map

$$i^* : H_{\text{trop}}^{k,k}(\overline{\Sigma}^\tau) \longrightarrow H_{\text{trop}}^{k,k}(\overline{\Sigma}^\sigma)$$

via the isomorphism between the Chow and tropical cohomology groups given in Theorem 1.3. \diamond

The Gysin map is the \mathbb{K} -linear morphism

$$\text{Gys}_{\sigma > \tau} : A^\bullet(\Sigma^\sigma) \longrightarrow A^{\bullet+|\sigma|-|\tau|}(\Sigma^\tau)$$

defined as follows. Let $r = |\sigma| - |\tau|$, and denote by ρ_1, \dots, ρ_r the rays of σ which are not in τ .

Consider the \mathbb{K} -linear map

$$\mathbb{K}[x_\varrho]_{\varrho \in \Sigma_1^\sigma} \longrightarrow \mathbb{K}[x_\varrho]_{\varrho \in \Sigma_1^\tau}$$

defined by multiplication by $x_{\rho_1}x_{\rho_2}\dots x_{\rho_r}$. Obviously, it sends an element of the ideal I_2 in the source to an element of the ideal I_2 in the target. Moreover, any linear function on N^σ defines a linear function on N^τ via the projection

$$N^\tau = N/N_\tau \longrightarrow N^\sigma = N/N_\sigma.$$

This shows that the elements of I_1 in the source are sent to elements of I_1 in the target as well. Passing to the quotient, we get a \mathbb{K} -linear map

$$\text{Gys}_{\sigma > \tau} : A^k(\Sigma^\sigma) \longrightarrow A^{k+|\sigma|-|\tau|}(\Sigma^\tau).$$

REMARK 3.15. For a pair of cones $\tau < \sigma$ as above, from the inclusion of canonical compactifications $i: \overline{\Sigma}^\sigma \hookrightarrow \overline{\Sigma}^\tau$, we get a restriction map

$$i^*: H_{\text{trop}}^{d-|\sigma|-k, d-|\sigma|-k}(\overline{\Sigma}^\tau) \longrightarrow H_{\text{trop}}^{d-|\sigma|-k, d-|\sigma|-k}(\overline{\Sigma}^\sigma)$$

which by Poincaré duality on both sides, gives the Gysin map

$$\text{Gys}_{\sigma>\tau}: H_{\text{trop}}^{k,k}(\overline{\Sigma}^\sigma) \longrightarrow H_{\text{trop}}^{k+|\sigma|-|\tau|, k+|\sigma|-|\tau|}(\overline{\Sigma}^\tau).$$

This map coincides with the Gysin map between Chow groups defined in the preceding paragraph, via the isomorphism of Chow and tropical cohomology given in Theorem 1.3. \diamond

The following proposition gathers some basic properties of the restriction and Gysin maps.

PROPOSITION 3.16. *Let $\tau < \sigma$ be a pair of faces, and let $x \in A^\bullet(\Sigma^\tau)$ and $y \in A^\bullet(\Sigma^\sigma)$. Denote by $\rho_{\sigma/\tau}$ the unique ray associated to σ in Σ^τ , and by $x_{\sigma/\tau}$ the associated element of $A^1(\Sigma^\tau)$. The following properties hold.*

$$(3.9) \quad i_{\tau<\sigma}^* \text{ is a surjective ring homomorphism.}$$

$$(3.10) \quad \text{Gys}_{\sigma>\tau} \circ i_{\tau<\sigma}^*(x) = x_{\sigma/\tau} \cdot x.$$

$$(3.11) \quad \text{Gys}_{\sigma>\tau}(i_{\tau<\sigma}^*(x) \cdot y) = x \cdot \text{Gys}_{\sigma>\tau}(y).$$

Moreover, if $\text{deg}_\tau: A^{d-|\tau|}(\Sigma^\tau) \rightarrow \mathbb{K}$ and $\text{deg}_\sigma: A^{d-|\sigma|}(\Sigma^\sigma) \rightarrow \mathbb{K}$ are the corresponding degree maps, then

$$(3.12) \quad \text{deg}_\sigma = \text{deg}_\tau \circ \text{Gys}_{\sigma>\tau}.$$

Finally, $\text{Gys}_{\sigma>\tau}$ and $i_{\tau<\sigma}^*$ are dual in the sense that

$$(3.13) \quad \text{deg}_\tau(x \cdot \text{Gys}_{\sigma>\tau}(y)) = \text{deg}_\sigma(i_{\tau<\sigma}^*(x) \cdot y).$$

PROOF. In order to simplify the presentation, we drop the indices of Gys and i^* . Properties (3.9) and (3.10) follow directly from the definitions. From Equation (3.10), we can deduce Equation (3.11) by the following calculation. Let \tilde{y} be a preimage of y by i^* . Then,

$$\text{Gys}(i^*(x) \cdot y) = \text{Gys}(i^*(x \cdot \tilde{y})) = x_{\delta/\gamma} \cdot x \cdot \tilde{y} = x \cdot \text{Gys} \circ i^*(\tilde{y}) = x \cdot \text{Gys}(y).$$

For Equation (3.12), let η be a maximal cone of Σ^σ . Let $\tilde{\eta}$ be the corresponding cone containing $\rho_{\sigma/\tau}$ in Σ^τ . The cone $\tilde{\eta}$ is maximal in Σ^τ . We have the respective corresponding generators $x_{\tilde{\eta}} \in A^{d-|\tau|}(\Sigma^\tau)$ and $x_\eta \in A^{d-|\sigma|}(\Sigma^\sigma)$. By definition of the degree maps, $\text{deg}_\tau(x_{\tilde{\eta}}) = \text{deg}_\sigma(x_\eta)$. Using the definition of Gys, we get that $x_{\tilde{\eta}} = \text{Gys}(x_\eta)$. Thus, we can conclude that

$$\text{deg}_\sigma = \text{deg}_\tau \circ \text{Gys}.$$

Finally, we get Equation (3.13):

$$\text{deg}_\tau(x \cdot \text{Gys}(y)) = \text{deg}_\tau(\text{Gys}(i^*(x) \cdot y)) = \text{deg}_\sigma(i^*(x) \cdot y). \quad \square$$

3.7. Primitive parts of the Chow ring. Let Σ be a smooth tropical fan of dimension d . For an element $\ell \in A^1(\Sigma)$ and any non-negative integer number $k \leq \frac{d}{2}$, the primitive part $A_{\text{prim}, \ell}^k(\Sigma)$ of $A^k(\Sigma)$ is the kernel of the Lefschetz operator given by multiplication with ℓ^{d-2k+1}

$$\ell^{d-2k+1} \cdot -: A^k(\Sigma) \longrightarrow A^{d-k+1}(\Sigma).$$

Let Q be the bilinear form defined on A^k , for $k \leq \frac{d}{2}$, by

$$\forall a, b \in A^k(\Sigma), \quad Q(a, b) = \text{deg}(\ell^{d-2k} ab).$$

Note that by Propositions 3.5 and 3.6, we have the following properties.

— $\text{HL}(\Sigma, \ell)$ is equivalent to the following: For each $k \leq \frac{d}{2}$, the map

$$\ell^{d-2k} \cdot -: A^k(\Sigma) \rightarrow A^{d-k}(\Sigma)$$

is an isomorphism.

- $\text{HR}(\Sigma, \ell)$ is equivalent to the following: The bilinear form $(-1)^k Q(\cdot, \cdot)$ restricted to the primitive part $A_{\text{prim}}^k(\Sigma)$ is positive definite.
- Assume that $\text{HL}(\Sigma, \ell)$ holds. Then for $k \leq \frac{d}{2}$, we have the Lefschetz decomposition

$$A^k(\Sigma) = \bigoplus_{i=0}^k \ell^{k-i} A_{\text{prim}}^i(\Sigma).$$

3.8. Hodge-Riemann for star fans of rays implies Hard Lefschetz. Let $\ell \in A^1(\Sigma)$. We assume that ℓ has a representative in $A^1(\Sigma)$ with strictly positive coefficients, i.e.,

$$\ell = \sum_{\rho \in \Sigma_1} c_\rho x_\rho$$

for scalars $c_\rho > 0$ in \mathbb{K} . For each $\rho \in \Sigma_1$, define $\ell^\rho = i_{\underline{0} < \rho}^*(\ell) \in A^1(\Sigma^\rho)$.

The following is well-known, see e.g. [dCM05] or [AHK18, Proposition 7.15].

PROPOSITION 3.17. *If $\text{HR}(\Sigma^\rho, \ell^\rho)$ holds for all rays $\rho \in \Sigma_1$, then we have $\text{HL}(\Sigma, \ell)$.*

PROOF. Let $k \leq \frac{d}{2}$ be a non-negative integer where d denotes the dimension of Σ . We need to prove that the bilinear form Q_ℓ defined by

$$\forall a, b \in A^k(\Sigma), \quad Q_\ell(a, b) = \deg(\ell^{d-2k} ab)$$

is non-degenerate. By Poincaré duality for $A^\bullet(\Sigma)$, Theorem 1.4, this is equivalent to showing the multiplication map

$$\ell^{d-2k} \cdot - : A^k(\Sigma) \longrightarrow A^{d-k}(\Sigma)$$

is injective. Let $a \in A^k(\Sigma)$ such that $\ell^{d-2k} \cdot a = 0$. We have to show that $a = 0$.

There is nothing to prove if $k = d/2$, so assume $2k < d$. For each $\rho \in \Sigma_1$, define $a_\rho := i_{\underline{0} < \rho}^*(a)$. It follows that

$$(\ell^\rho)^{d-2k} \cdot a_\rho = i_{\underline{0} < \rho}^*(\ell^{d-2k} a) = 0,$$

and so $a_\rho \in A_{\text{prim}, \ell^\rho}^k(\Sigma^\rho)$ for each ray $\rho \in \Sigma_1$.

Using now Proposition 3.16, for each $\rho \in \Sigma_1$, we get

$$\deg_\rho((\ell^\rho)^{d-2k-1} \cdot a_\rho \cdot a_\rho) = \deg_\rho(i_{\underline{0} < \rho}^*(\ell^{d-2k-1} \cdot a) \cdot a_\rho) = \deg(\ell^{d-2k-1} \cdot a \cdot x_\rho \cdot a).$$

We infer that

$$\sum_{\rho \in \Sigma_1} c_\rho \deg_\rho((\ell^\rho)^{d-2k-1} \cdot a_\rho \cdot a_\rho) = \deg(\ell^{d-2k-1} \cdot a \cdot (\sum_{\rho} c_\rho x_\rho) \cdot a) = \deg(\ell^{d-2k} \cdot a \cdot a) = 0.$$

By $\text{HR}(\Sigma^\rho, \ell^\rho)$, since $a_\rho \in A_{\text{prim}, \ell^\rho}^k(\Sigma^\rho)$, we have $(-1)^k \deg_\rho((\ell^\rho)^{d-2k-1} \cdot a_\rho \cdot a_\rho) \geq 0$ with equality if and only if $a_\rho = 0$. Since $c_\rho > 0$ for all ρ , we conclude that $a_\rho = 0$ for all $\rho \in \Sigma_1$.

Applying Proposition 3.16 once more, we infer that

$$x_\rho a = \text{Gys}_{\rho > \underline{0}} \circ i_{\underline{0} < \rho}^*(a) = \text{Gys}_{\rho > \underline{0}}(a_\rho) = 0.$$

By Poincaré duality for $A^\bullet(\Sigma)$, and since the elements x_ρ generate the Chow ring, this implies that $a = 0$, and the proposition follows. \square

3.9. Isomorphism of Chow groups under tropical modification. We recall the following theorem proved in [AP21] which states that tropical modifications as defined in [AP21] preserve the Chow groups. This will be served as the basis to prove that HR and HL properties are shellable for tropical fans.

We use the notations of [AP21] and denote by $\tilde{\Sigma}$ the tropical modification of Σ along $\Delta = \text{div}(f)$ for a conewise linear function f on Σ .

THEOREM 3.18 (Stability of the Chow ring under tropical modifications). *Let $\tilde{\Sigma}$ be the tropical modification of the tropical fan Σ along Δ . Assume furthermore that Σ is div-faithful. Then we get an isomorphism*

$$A^\bullet(\tilde{\Sigma}) \simeq A^\bullet(\Sigma)$$

between the Chow rings. Moreover, this isomorphism is compatible with the Poincaré duality for Chow rings.

3.10. Keel's lemma. Let Σ be a unimodular fan and let σ be a cone in Σ . Let Σ' be the star subdivision of Σ obtained by star subdividing σ . Denote by ρ the new ray in Σ' . In this paper we only consider barycentric star subdivisions of rational fans. This means that $\rho = \mathbb{R}_+(\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_k)$ where $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ are the primitive vectors of the rays of σ .

THEOREM 3.19 (Keel's lemma). *Let \mathfrak{J} be the kernel of the surjective map $i_{0 < \sigma}^*: A^\bullet(\Sigma) \rightarrow A^\bullet(\Sigma^\sigma)$ and let*

$$P(T) := \prod_{\substack{\varrho < \sigma \\ |\varrho|=1}} (x_\varrho + T).$$

We have

$$A^\bullet(\Sigma') \simeq A^\bullet(\Sigma)[T]/(\mathfrak{J}T + P(T)).$$

The isomorphism is given by the map

$$\chi: A^\bullet(\Sigma)[T]/(\mathfrak{J}T + P(T)) \xrightarrow{\simeq} A^\bullet(\Sigma')$$

which sends T to $-x_\rho$ and which verifies

$$\forall \varrho \in \Sigma_1, \quad \chi(x_\varrho) = \begin{cases} x_\varrho + x_\rho & \text{if } \varrho < \sigma \\ x_\varrho & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In particular this gives a vector space decomposition of $A^\bullet(\Sigma')$ as

$$(3.14) \quad A^\bullet(\Sigma') \simeq A^\bullet(\Sigma) \oplus A^{\bullet-1}(\Sigma^\sigma)T \oplus \cdots \oplus A^{\bullet-|\sigma|+1}(\Sigma^\sigma)T^{|\sigma|-1}.$$

We refer to [AP21] for the proof.

3.11. Ascent and Descent. Situation as in Section 3.10, let Σ be a unimodular fan and σ a cone in Σ . Let Σ' be the star subdivision of Σ obtained by star subdividing σ . Denote by ρ the new ray in Σ' . Let ℓ be an element of $A^1(\Sigma)$, and denote by ℓ^σ the restriction of ℓ to Σ^σ , i.e., the image of ℓ under the restriction map $A^\bullet(\Sigma) \rightarrow A^\bullet(\Sigma^\sigma)$.

THEOREM 3.20. *We have the following properties.*

- (Ascent) *Assume the property $\text{HR}(\Sigma^\sigma, \ell^\sigma)$ holds. Then $\text{HR}(\Sigma, \ell)$ implies $\text{HR}(\Sigma', \ell' - \epsilon x_\rho)$ for any small enough $\epsilon > 0$, where*

$$\ell' = \sum_{\varrho \in \Sigma} \ell(\mathbf{e}_\varrho) x_\varrho + \left(\sum_{\substack{\varrho < \sigma \\ |\varrho|=1}} \ell(\mathbf{e}_\varrho) \right) x_\rho.$$

- (Descent) *We have the following partial inverse: if both the properties $\text{HR}(\Sigma^\sigma, \ell^\sigma)$ and $\text{HL}(\Sigma, \ell)$ hold, and if we have the property $\text{HR}(\Sigma', \ell' + \epsilon T)$ for any small enough $\epsilon > 0$, then we have $\text{HR}(\Sigma, \ell)$.*

Notice that the definition of ℓ' does not depend on the chosen representative of the class of ℓ as a cone-wise linear function on Σ .

REMARK 3.21. One can check in the proof of Theorem 3.20 below that we only use Keel's lemma, Poincaré duality and Proposition 3.5. For instance, we do not use that we are dealing with fans. Therefore, Theorem 3.20 might be useful in other contexts where an analog of Keel's lemma holds. In particular, this remark will be useful in Section 9 where we need a similar ascent-descent theorem in the global case. \diamond

In preparation for the proof, we introduce some preliminaries. Let d be the dimension of Σ . By Keel's lemma, we have $A^d(\Sigma) \simeq A^d(\Sigma')$, and under this isomorphism, the canonical element ω_Σ corresponds to the canonical element $\omega_{\Sigma'}$.

Let α be a lifting of ω_{Σ^σ} in $A^{d-|\sigma|}(\Sigma)$ for the restriction map $A^\bullet(\Sigma) \rightarrow A^\bullet(\Sigma^\sigma)$. Such a lifting can be obtained for example by fixing a maximum dimensional cone τ in Σ^σ ; in this case we have

$$\omega_{\Sigma^\sigma} = \prod_{\substack{\varrho < \tau \\ |\varrho|=1}} x_\varrho$$

and a lifting α of ω_{Σ^σ} is given by taking the product $\prod_{\varrho < \tilde{\tau}} x_\varrho$ in $A^{d-|\sigma|}(\Sigma)$, where $\tilde{\tau}$ is the face of Σ corresponding to τ .

Using this lifting, the canonical element $\omega_{\Sigma'}$ can be identified with $-T^{|\sigma|}\alpha$ in $A^\bullet(\Sigma') \simeq A^\bullet(\Sigma)[T]/(\mathfrak{J}T + P(T))$. Indeed, since $P(T) = 0$, we get

$$-T^{|\sigma|} = \sum_{j=0}^{|\sigma|-1} S_j T^{|\sigma|-j},$$

with S_j the j -th symmetric function in the variables x_ϱ for ϱ a ray in σ , seen as an element of $A^\bullet(\Sigma')$. Therefore we get

$$\begin{aligned} -T^{|\sigma|}\alpha &= \sum_{j=1}^{|\sigma|} S_j \alpha T^{|\sigma|-j} \\ &= \prod_{\substack{\varrho < \sigma \\ |\varrho|=1}} x_\varrho \cdot \alpha + \sum_{j=1}^{|\sigma|-1} S_j \alpha T^{|\sigma|-j}. \end{aligned}$$

Since $\omega_{\Sigma^\sigma} = i_\sigma^*(\alpha)$ lives in the top-degree part of $A^\bullet(\Sigma^\sigma)$, the products $S_j \omega_{\Sigma^\sigma}$ belongs to \mathfrak{J} . Thus the terms of the sum are all vanishing for $j = 1, \dots, |\sigma| - 1$. Therefore, we get

$$-T^{|\sigma|}\alpha = \prod_{\substack{\varrho < \sigma \\ |\varrho|=1}} x_\varrho \cdot \alpha = \prod_{\substack{\varrho < \sigma \\ |\varrho|=1}} x_\varrho \cdot \prod_{\substack{\varrho < \tilde{\tau} \\ |\varrho|=1}} x_\varrho = \omega_\Sigma = \omega_{\Sigma'}.$$

We infer that the following commutative diagram holds.

$$\begin{array}{ccc} A^{d-|\sigma|}(\Sigma^\sigma) & \xrightarrow[\sim]{(-T^{|\sigma|})} & A^d(\Sigma') & \xrightarrow[\sim]{} & A^d(\Sigma) \\ & \searrow \sim & \downarrow \text{deg} & \swarrow \sim & \\ & \text{deg} & \mathbb{K} & \text{deg} & \end{array}$$

We are now ready to give the proof of the main theorem of this section.

PROOF OF THEOREM 3.20. (Ascent) The idea for the proof of the ascent property is well-known, e.g., it is used as a way to derive Grothendieck's standard conjecture of Lefschetz type for a blow-up from the result on the base. It is also used in [AHK18]. We give the proof here. Let $\epsilon > 0$ and define the linear automorphism

$$S_\epsilon: A^\bullet(\Sigma') \rightarrow A^\bullet(\Sigma')$$

of degree 0 which is the identity map id on $A^\bullet(\Sigma)$ and multiplication by $\epsilon^{-|\sigma|/2+k}\text{id}$ on each $A^\bullet(\Sigma^\sigma)T^k$, in the direct sum decomposition in Theorem 3.19.

We admit for the moment that $Q_{\ell'+\epsilon T} \circ S_\epsilon$ admits a limit Q such that the pair $(A^\bullet(\Sigma'), Q)$, consisting of a graded vector space and a bilinear form on this vector space, is naturally isomorphic to the pair

$$\Xi := \left(A^\bullet(\Sigma) \oplus (T \cdot (\mathbb{R}[T]/T^{|\sigma|-1}) \otimes A^\bullet(\Sigma^\sigma)), \ell \oplus (T \otimes \text{id} + \text{id} \otimes \ell^\sigma) \right).$$

It follows from the statement (3.8) in Proposition 3.5, the hypothesis of the theorem, and $\text{HR}(\mathbb{R}[T]/T^{|\sigma|-1}, T)$, that the pair Ξ verifies $\text{HR}(\Xi)$. Using Keel's lemma, it follows that we have $\text{HR}(A^\bullet(\Sigma'), Q)$. By Proposition 3.7, the property $\text{HR}(A^\bullet(\Sigma'), Q_{\ell'+\epsilon T} \circ S_\epsilon)$ holds for any small enough value of $\epsilon > 0$. Finally, applying Proposition 3.5, we get $\text{HR}(A^\bullet(\Sigma'), Q_{\ell'+\epsilon T})$, which finishes the proof of the ascent part of our theorem.

Before turning to the proof of the existence of the limit, let us explain the proof of the descent part.

(Descent) We again use Proposition 3.5. By our assumption, we have $\text{HL}(A^\bullet(\Sigma), \ell)$ and $\text{HR}(A^\bullet(\Sigma^\sigma), \ell^\sigma)$, from which we get the property

$$\text{HR}\left((T \cdot (\mathbb{R}[T]/T^{|\sigma|-1}) \otimes A^\bullet(\Sigma^\sigma)), (T \otimes \text{id} + \text{id} \otimes \ell^\sigma) \right).$$

Defining Ξ as in the first part of the proof, we deduce $\text{HL}(\Xi)$ by applying Proposition 3.5. By the statement (3.5) in that proposition, it will be enough to prove $\text{HR}(\Xi)$ in order to get $\text{HR}(A^\bullet(\Sigma), \ell)$.

Note that by the hypothesis in the theorem, we have $\text{HR}(A^\bullet(\Sigma'), Q_{\ell'+\epsilon T})$ for small enough values of $\epsilon > 0$. Using Proposition 3.5, we deduce that $\text{HR}(A^\bullet(\Sigma'), Q_{\ell'+\epsilon T} \circ S_\epsilon)$ holds for $\epsilon > 0$ small enough. It follows that we have as well $\text{HL}(A^\bullet(\Sigma'), Q_{\ell'+\epsilon T} \circ S_\epsilon)$.

Applying now Proposition 3.7, since HR is a closed condition restricted to the space of bilinear forms which verify HL , we deduce that $\text{HR}(\Xi)$ holds: indeed, Q is the limit of $Q_{\ell'+\epsilon T} \circ S_\epsilon$ and $\text{HR}(A^\bullet(\Sigma'), Q_{\ell'+\epsilon T} \circ S_\epsilon)$ and $\text{HL}(A^\bullet(\Sigma'), Q_{\ell'+\epsilon T} \circ S_\epsilon)$ hold for $\epsilon > 0$ small enough.

We are thus left to prove the last point, namely the existence of the limit $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Q_{\ell'+\epsilon T} \circ S_\epsilon$.

Consider the decomposition (3.14) given in Keel's lemma. The decomposition for degree k part $A^k(\Sigma')$ of the Chow ring has pieces $A^k(\Sigma)$ and $A^{k-i}(\Sigma^\sigma)T^i$ for $1 \leq i \leq \min\{k, |\sigma| - 1\}$. Consider the bilinear form $\Phi_{A^\bullet(\Sigma')}$ given by the degree map of $A^\bullet(\Sigma')$.

For this degree bilinear form, each piece $A^{k-i}(\Sigma^\sigma)T^i$ is orthogonal to the piece $A^{d-k}(\Sigma)$ as well as to the piece $A^{d-k-j}(\Sigma^\sigma)T^j$ for $j < |\sigma| - i$, in the decomposition of $A^{d-k}(\Sigma')$ given in Keel's lemma.

We now work out the form of the matrix of the bilinear forms $Q_{\ell'+\epsilon T} \circ S_\epsilon$ in degree k with respect to the decomposition given in (3.14).

First, note that for $a, b \in A^k(\Sigma)$, we have

$$Q_{\ell'+\epsilon T}(a, b) = \text{deg}(a\ell'^{d-2k}b) + \mathcal{O}(\epsilon^{|\sigma|}).$$

Second, for an element $a \in A^k(\Sigma)$ and an element $b \in A^{k-i}(\Sigma^\sigma)T^i$, we get the existence of an element $c \in A^{d-2k-|\sigma|+i}(\Sigma')$ such that

$$Q_{\ell'+\epsilon T}(a, b) = \text{deg}(ac(\epsilon T)^{|\sigma|-i}\epsilon^{-|\sigma|/2+i}b) = \mathcal{O}(\epsilon^{|\sigma|/2}).$$

Third, for an element $a \in A^{k-i}(\Sigma^\sigma)T^i$ and an element $b \in A^{k-j}(\Sigma^\sigma)T^j$, with $i + j \leq |\sigma|$, we get

$$\begin{aligned} Q_{\ell+\epsilon T}(a, b) &= \deg \left(\epsilon^{-|\sigma|/2+i} a (C(\epsilon T)^{|\sigma|-i-j} \ell^{d-2k-|\sigma|+i+j} + \mathcal{O}(\epsilon^{|\sigma|-i-j+1})) \epsilon^{-|\sigma|/2+j} b \right) \\ &= C \deg_{A^\bullet(\Sigma^\sigma)}(a(\ell^\sigma)^{d-|\sigma|-2k+i+j} b) + \mathcal{O}(\epsilon), \end{aligned}$$

with $C = \binom{d-2k}{|\sigma|-i-j}$.

Finally, if $a \in A^{k-i}(\Sigma^\sigma)T^i$ and $b \in A^{k-j}(\Sigma^\sigma)T^j$, with $i + j > |\sigma|$, we get

$$Q_{\ell+\epsilon T}(a, b) = \deg(\epsilon^{-|\sigma|/2+i} a \mathcal{O}(1) \epsilon^{-|\sigma|/2+j} b) = \mathcal{O}(\epsilon^{i+j-|\sigma|}).$$

Doing the same calculation for the bilinear form $Q_{\tilde{L}}$ associated to the linear map of degree one $\tilde{L}: A^\bullet(\Sigma') \rightarrow A^{\bullet+1}(\Sigma')$ given by the matrix

$$\begin{pmatrix} \ell & & & & & \\ 0 & \ell^\sigma & & & & \\ & T & \ell^\sigma & & & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & & T & \ell^\sigma \end{pmatrix}$$

relative to the decomposition (3.14) given in Keel’s lemma, we see that

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Q_{\ell+\epsilon T} = Q_{\tilde{L}}.$$

To conclude, we observe that the pair $(A^\bullet(\Sigma'), Q_{\tilde{L}})$ is isomorphic to the previously introduced pair,

$$\Xi = \left(A^\bullet(\Sigma) \oplus (T \cdot (\mathbb{R}[T]/T^{|\sigma|-1}) \otimes A^\bullet(\Sigma^\sigma)), \ell \oplus (T \otimes \text{id} + \text{id} \otimes \ell^\sigma) \right),$$

as claimed. □

3.12. Weak factorization theorem. Two unimodular fans with the same support are called *elementary equivalent* if one can be obtained from the other by a barycentric star subdivision. The *weak equivalence* between unimodular fans with the same support is then defined as the transitive closure of the elementary equivalence relation.

THEOREM 3.22 (Weak factorization theorem). *Two unimodular fans with the same support are always weakly equivalent.*

PROOF. This is Theorem A of [Wlo97] proved independently by Morelli [Mor96] and expanded by Abramovich-Matsuki-Rashid, see [AMR99]. □

We will be interested in the class of quasi-projective unimodular fans on the same support. In this class, we define the *weak equivalence* between quasi-projective unimodular fans as the transitive closure of the elementary equivalence relation between quasi-projective unimodular fans with the same support. This means all the intermediate fans in the star subdivision and star assembly are required to remain quasi-projective.

THEOREM 3.23 (Weak factorization theorem for quasi-projective unimodular fans). *Two quasi-projective unimodular fans with the same support are weakly equivalent within the class of quasi-projective fans.*

PROOF. This can be obtained from relevant parts of [Wlo97, Mor96, AKMW02] as discussed and generalized by Abramovich and Temkin in [AT19, Section 3]. □

We thank Kenji Matsuki and Kalle Karu for helpful correspondence and clarification on this subject.

3.13. Ample classes. Let $\Sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ be a unimodular tropical fan. Let f be a strictly convex cone-wise linear function on Σ . Recall that if ϱ is a ray in Σ_1 , we denote by \mathbf{e}_{ϱ} the primitive element of ϱ and by x_{ϱ} the corresponding element of $A^1(\Sigma)$. We denote by $\ell(f)$ the element of $A^1(\Sigma)$ defined by

$$\ell(f) := \sum_{\varrho \in \Sigma_1} f(\mathbf{e}_{\varrho})x_{\varrho}.$$

PROPOSITION 3.24. *Notations as above, let σ be a cone of Σ and let ϕ be a linear form on $N_{\mathbb{R}}$ which coincides with f on σ . The function $f - \phi$ induces a cone-wise linear function on Σ^{σ} which we denote by f^{σ} . Then*

$$\ell(f^{\sigma}) = i_{0 < \sigma}^*(\ell(f)).$$

In particular, $\ell(f^{\sigma})$ does not depend on the chosen ϕ .

Moreover, if f is strictly convex on Σ , then f^{σ} is strictly convex on Σ^{σ} .

PROOF. We write $\varrho \sim \sigma$ if ϱ is a ray in the link of σ , i.e., $\varrho \notin \sigma$ and $\sigma + \varrho$ is a face of Σ . Such rays are in one-to-one correspondence with rays of Σ^{σ} . Recall the following facts:

$$\ell(\phi) = 0, \quad i_{0 < \sigma}^*(x_{\varrho}) = 0 \text{ if } \varrho \not\sim \sigma \text{ and } \varrho \notin \sigma, \quad f(\mathbf{e}_{\varrho}) = \phi(\mathbf{e}_{\varrho}) \text{ if } \varrho < \sigma.$$

Then we have

$$\begin{aligned} i_{0 < \sigma}^*(\ell(f)) &= i_{0 < \sigma}^*(\ell(f - \phi)) \\ &= \sum_{\varrho \in \Sigma_1} (f - \phi)(\mathbf{e}_{\varrho}) i_{0 < \sigma}^*(x_{\varrho}) = \sum_{\substack{\varrho \in \Sigma_1 \\ \varrho \sim \sigma}} (f - \phi)(\mathbf{e}_{\varrho}) i_{0 < \sigma}^*(x_{\varrho}) \\ &= \sum_{\substack{\varrho \in \Sigma^{\sigma} \\ |\varrho|=1}} f^{\sigma}(\mathbf{e}_{\varrho})x_{\varrho} = \ell(f^{\sigma}). \end{aligned} \quad \square$$

For the last point, let f be a strictly convex cone-wise linear function on Σ . We have to prove that f^{σ} is strictly convex. Let ζ be a cone of Σ^{σ} . The cone ζ corresponds to a unique cone $\tilde{\zeta}$ in Σ that contains σ . Since f is strictly convex, there exists a linear form ψ on $N_{\mathbb{R}}$ such that $f - \psi$ is strictly positive around $\tilde{\zeta}$ (in the sense of Section 4.3). Then $\psi - \phi$ is zero on σ , thus induces a linear form ψ^{σ} on $N_{\mathbb{R}}^{\sigma}$. We get that $f^{\sigma} - \psi^{\sigma}$ is strictly positive around ζ , thus f^{σ} is strictly convex around ζ . We infer that f^{σ} is strictly convex on Σ^{σ} .

DEFINITION 3.25. Let Σ be a tropical fan. An element $\ell \in A^1(\Sigma)$ is called an *ample class* if there exists a strictly convex cone-wise linear function f on Σ such that $\ell = \ell(f)$. \diamond

3.14. Main Theorem. Here is the main theorem of this section.

THEOREM 3.26. *Any shellable quasi-projective unimodular tropical fan Σ verifies $\text{HR}(\Sigma, \ell)$ for any ample class $\ell \in A^1(\Sigma)$.*

The following proposition is the base of our proof. It allows to start with a fan on a support which verifies the Hodge-Riemann relations, and then use the ascent and descent properties to propagate the property to any other fan on the same support.

PROPOSITION 3.27. *For any shellable tropical fan support, there exists a quasi-projective unimodular fan Σ on this support and a strictly convex element $\ell \in A^1(\Sigma)$ which verifies $\text{HR}(\Sigma, \ell)$.*

We prove both statements, in the theorem and proposition, by induction on the dimension of the ambient space. So suppose by induction that the theorem and the proposition hold for all shellable support of \mathbb{R}^k with $k < n$, and for any quasi-projective unimodular fan with a shellable support lying in \mathbb{R}^k for $k < n$.

PROOF OF PROPOSITION 3.27. If the support is \mathbb{R}^n , that is if the tropical fan is complete, in this case, we can take any projective unimodular fan. For example, the fan of the projective space \mathbb{P}^n , equivalently of \mathbb{TP}^n , $\Sigma_{\mathbb{TP}^n}$ has Chow ring isomorphic to $\mathbb{R}[x]/x^{n+1}$. In this case, we can take $\ell = x$, and we have $\text{HR}(\mathbb{R}[x]/x^{n+1}, x)$.

Otherwise, the support is obtained by one of the operations in the definition of shellability out of other fans. Consider the case where we have a tropical fan $\tilde{\Sigma}$ obtained by the tropical modification of Σ along the divisor $\Delta = \text{div}(f)$ for a conewise linear function f on Σ . By the induction hypothesis, there exists a quasi-projective unimodular fan Σ' of support Σ . Doing some blow-ups if necessary, we can assume that Σ' contains a subdivision Δ' of Δ (cf. Section 4 for more details on this argument). Let ℓ' be a strictly convex function on Σ' . Modifying ℓ' by adding a linear function if necessary, we can suppose without loss of generality that ℓ' is strictly positive on $|\Sigma'| \setminus \{0\}$. Let $\tilde{\Sigma}'$ be the unimodular fan with support $|\tilde{\Sigma}'|$ obtained as the tropical modification of Δ' in Σ' . Using Theorem 3.18, we deduce $\text{HR}(\tilde{\Sigma}', \ell)$ from $\text{HR}(\Sigma', \ell')$ where ℓ is the cone-wise linear function on Σ which takes value 0 on the new ray ρ of Σ and which coincides on other rays with $\Gamma_*(\ell')$ where $\Gamma: \Sigma' \hookrightarrow \tilde{\Sigma}'$ is the natural injective map. One easily verifies that ℓ is strictly convex. So the proposition follows.

For the other operations in the definition of the shellability, we argue similarly. In particular, for the product, we use property (3.8). \square

PROPOSITION 3.28. *For any unimodular fan Σ of dimension d , we have the equivalence of the following statements.*

- $\text{HR}(\Sigma, \ell)$ is true for any strictly convex element $\ell \in A^1(\Sigma)$.
- $\text{HR}(\Sigma, \ell)$ is true for a strictly convex element $\ell \in A^1(\Sigma)$.

PROOF. Let ℓ be a strictly convex piecewise linear function on Σ . For all $\sigma \in \Sigma$, we get a strictly convex function ℓ^σ on Σ^σ . By the hypothesis of our induction, we know that $\text{HR}(\Sigma^\sigma, \ell^\sigma)$ holds. By Proposition 3.17 we thus get $\text{HL}(\Sigma, \ell)$.

By Proposition 3.7 we know that $\text{HR}(\Sigma, \ell)$ is an open and closed condition on the set of all ℓ which satisfy $\text{HL}(\Sigma, \ell)$. In particular, if there exists ℓ_0 in the cone of strictly convex elements which verifies $\text{HR}(\Sigma, \ell_0)$, any ℓ in this cone should verify $\text{HR}(\Sigma, \ell)$. \square

Let Σ be a unimodular fan of dimension d , ℓ a strictly convex element on Σ , and let Σ' be the fan obtained from Σ by star subdividing a cone $\sigma \in \Sigma$. Denote by ρ the new ray in Σ' , and let

$$\ell' := \ell + \left(\sum_{\substack{\varrho < \sigma \\ |\varrho|=1}} \ell(\mathbf{e}_\varrho) \right) x_\rho.$$

The following is straightforward.

PROPOSITION 3.29. *For any small enough $\epsilon > 0$, the element $\ell' - \epsilon x_\rho$ of $A^1(\Sigma')$ is strictly convex.*

PROPOSITION 3.30. *Notations as above, the following statements are equivalent.*

- (i) We have $\text{HR}(\Sigma, \ell)$.
- (ii) The property $\text{HR}(\Sigma', \ell' - \epsilon x_\rho)$ holds for any small enough $\epsilon > 0$.

PROOF. It will be enough to apply Theorem 3.20. A direct application of the theorem, and the fact that T is identified with $-x_\rho$ via Keel's lemma, leads to the implication (i) \Rightarrow (ii).

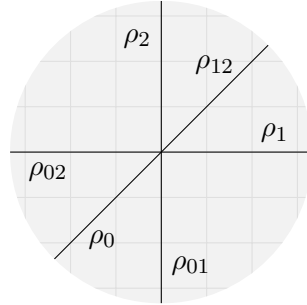
We now explain the implication (ii) \Rightarrow (i). By the hypothesis of our induction, we have $\text{HR}(\Sigma^\sigma, \ell^\sigma)$. Moreover, Proposition 3.17 and our induction hypothesis imply that we have $\text{HL}(\Sigma, \ell)$. Applying now the descent part of Theorem 3.20 gives the result. \square

PROOF OF THEOREM 3.26. Let Σ be a shellable quasi-projective tropical fan. By Proposition 3.27 there exists a quasi-projective unimodular fan Σ_0 with support $|\Sigma|$ and a strictly convex element $\ell_0 \in A^1(\Sigma_0)$ such that $\text{HR}(\Sigma_0, \ell_0)$ holds. By Propositions 3.30 and 3.28, for any quasi-projective fan Σ in the quasi-projective weak equivalence class of Σ_0 , so with support $|\Sigma|$, and any strictly convex element $\ell \in A^1(\Sigma)$, we get $\text{HR}(\Sigma, \ell)$. The theorem now follows in dimension n by applying Theorem 3.23 \square

3.15. Examples. We finish this section with some concrete examples of fans verifying the Hodge-Riemann relations with respect to ample and non-ample classes.

3.15.1. Let Σ be the complete Bergman fan associated to the uniform matroid $U_{3,3}$ on the ground set $\{0, 1, 2\}$ as illustrated in Figure 1. The flats of $U_{3,3}$ are $\mathcal{C}(U_{3,3}) := \{1, 12, 2, 02, 0, 01\}$

FIGURE 1. The Bergman fan of $U_{3,3}$



(where ij denote the set $\{i, j\}$). The rays of Σ correspond to the flats of $U_{3,3}$ and are denoted ρ_F with $F \in \mathcal{C}(U_{3,3})$. These rays corresponds to elements of $A^1(\Sigma)$ denoted x_F , for $F \in \mathcal{C}(U_{3,3})$. We have

$$\dim(A^1(\Sigma)) = |\mathcal{C}(U_{3,3})| - \dim(\mathbb{R}^{2*}) = 4.$$

We have a natural degree map $\text{deg}: A^2(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ which verifies the following.

$$\text{deg}(x_F x_G) = \begin{cases} -1 & \text{if } F = G, \\ 1 & \text{if } F \neq G \text{ and } F \text{ and } G \text{ are comparable,} \\ 0 & \text{if } F \text{ and } G \text{ are not comparable.} \end{cases}$$

Let $\ell := x_1 + x_{12} + x_2 + x_{02} + x_0 + x_{01} \in A^1(\Sigma)$. This element corresponds to a strictly convex cone-wise linear function on Σ , thus, it must verify the Hodge-Riemann relations $\text{HR}(\Sigma, \ell)$. Let us check that this is the case. We have to check that $\text{deg}(\ell^2) > 0$ and that

$$Q_1: \begin{matrix} A^1(\Sigma) \times A^1(\Sigma) & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x, y) & \mapsto & \text{deg}(xy), \end{matrix}$$

has signature $-2 = 2 \dim(A^0) - \dim(A^1)$. We have

$$\text{deg}(\ell x_1) = \text{deg}(x_1^2 + x_1 x_{12} + x_1 x_{01}) = 1,$$

and, by symmetry, $\text{deg}(\ell x_F) = 1$ for every $F \in \mathcal{C}(U_{3,3})$. Thus, $\text{deg}(\ell^2) = 6$.

For Q_1 we have an orthogonal basis $(x_0, x_1, x_2, x_0 + x_{01} + x_1)$. Moreover $\text{deg}(x_0^2) = \text{deg}(x_1^2) = \text{deg}(x_2^2) = -1$ and

$$\text{deg}((x_0 + x_{01} + x_1)^2) = \text{deg}(x_0^2 + x_{01}^2 + x_1^2 + 2x_0 x_{01} + 2x_{01} x_1) = 1.$$

Thus, the signature of Q_1 is -2 and the Hodge-Riemann relations are verified.

3.15.2. Let us give another example in the same Chow ring treated in the previous paragraph. Let $\ell' = x_1 + x_{12} + x_2$. The cone-wise linear function associated to ℓ' is not convex. It is even zero around ρ_0 , which implies that $i_{0 < \rho_0}^*(\ell') = 0$. Nevertheless, ℓ' verifies the Hodge-Riemann relations $\text{HR}(\Sigma, \ell')$. We only have to check that $\deg(\ell'^2) > 0$, since Q_1 does not depend on ℓ' and we have already checked that Q_1 has signature -2 . We have

$$\deg((x_1 + x_{12} + x_2)^2) = \deg(x_1^2 + x_{12}^2 + x_2^2 + 2x_1x_{12} + 2x_{12}x_2) = 1 > 0.$$

This gives us an example of a non-ample element verifying the Hodge-Riemann relations.

3.15.3. As a last example, let Σ be the Bergman fan of the uniform matroid $U_{3,4}$ on the ground set $\{0, 1, 2, 3\}$, and let $\ell = (2 + 2\epsilon)x_0 + x_2 + x_3 + \epsilon x_{01} + (3 + \epsilon)(x_{02} + x_{03}) - x_{23} \in A^1(\Sigma)$ where ϵ is a small positive number. Then ℓ is not ample, but we have $\text{HR}(\Sigma, \ell)$. Indeed, we have something stronger: ℓ^σ is ample for any $\sigma \in \Sigma \setminus \{0\}$ where $\ell^\sigma = i_{0 < \sigma}^*(\ell)$.

4. Quasi-projective unimodular triangulations of polyhedral complexes

In this section we show that any rational polyhedral complex in \mathbb{R}^n admits a simplicial subdivision which is both *quasi-projective* and *unimodular* with respect to the lattice $\frac{1}{k}\mathbb{Z}^n$, for some natural number k , in a sense which we will precise in a moment. Moreover, we will show this property holds for any *tropical compactification* of X . The novelty here is in ensuring the *convexity property* underlying the definition of quasi-projective triangulations which will be the crucial property used in what will follow later, as well as in ensuring the unimodularity of unbounded polyhedra which form the polyhedral subdivision of X . The theorem thus extends the pioneering result proved in [KKMS06], in Mumford's proof of the semistable reduction theorem, as well as previous variants proved in [IKMZ19] and [Wlo97].

4.1. Statement of the triangulation theorem. This theorem corresponds to Theorem 1.11 stated in the introduction. However, we add a technical result about the existence of strictly convex functions to the statement which will be needed later.

THEOREM 4.1 (Triangulation theorem). *Let X be a rational polyhedral complex in \mathbb{R}^n . There exists an integer k and a triangulation X' of X which is quasi-projective and unimodular with respect to the lattice $\frac{1}{k}\mathbb{Z}^n$.*

Moreover we ensure that X'_{rec} is a fan, and that there exists a strictly convex function f on X' such that f_{rec} is well-defined and strictly convex.

The terminology will be introduced in the next section.

Furthermore, we will prove the following theorem which will be later used in Section 8.

THEOREM 4.2 (Unimodular triangulation preserving the recession fan). *Let X be a polyhedral complex in \mathbb{R}^n such that its pseudo-recession fan X_{rec} is a unimodular fan. Then there exists a positive integer k and a subdivision Y of X which is unimodular with respect to $\frac{1}{k}\mathbb{Z}^n$ and which verifies $Y_{\text{rec}} = X_{\text{rec}}$.*

4.2. Preliminary definitions and constructions. This section presents certain constructions which will be needed later. While definitions are given here for the case of polyhedral complexes and fans, we note that the majority of the constructions naturally extend to the case of polyhedral pseudo-complexes and pseudo-fans.

4.2.1. *Restriction, intersection, and hyperplane cut.* Let X be a polyhedral complex of \mathbb{R}^n and let S be a subset of \mathbb{R}^n . The *restriction of X to S* denoted by $X|_S$ is by definition the polyhedral complex consisting of all the faces of X which are included in S . If S is an affine hyperplane, an affine half-space, or more generally a polyhedron of \mathbb{R}^n , the *intersection of X with S* denoted by $X \cap S$ is the polyhedral complex whose faces are $\delta \cap S$ for any face δ of X , i.e.,

$$X \cap S := \{\delta \cap S \mid \delta \in X\}.$$

For an affine hyperplane H in \mathbb{R}^n , the *hyperplane cut of X by H* denoted by $X \cdot H$ is the subdivision of X defined by

$$X \cdot H := (X \cap H) \cup (X \cap H_+) \cup (X \cap H_-),$$

where H_+ et H_- are the two half-spaces of \mathbb{R}^n defined by H .

4.2.2. *Slicing with respect to a pencil of hyperplanes.* Let Σ be a fan of \mathbb{R}^n . For any cone $\sigma \in \Sigma$, choose a collection of half-spaces $H_{\sigma,1}^+, \dots, H_{\sigma,k_\sigma}^+$ for $k_\sigma \in \mathbb{Z}_{>0}$ each defined by hyperplanes $H_{\sigma,1}, \dots, H_{\sigma,k_\sigma}$, respectively, such that σ is the intersection of these half-spaces. We call the collection of hyperplanes

$$\mathcal{P}_\Sigma := \left\{ H_{\sigma,j} \mid \sigma \in \Sigma \text{ and } j = 1, \dots, k_\sigma \right\}$$

a *pencil of hyperplanes defined by Σ* .

Let now Δ be a complete fan in \mathbb{R}^n and let Σ be a second (arbitrary) fan in \mathbb{R}^n . The *slicing of Δ with a pencil of hyperplanes \mathcal{P}_Σ* defined by Σ is the fan denoted by $\Delta \cdot \mathcal{P}_\Sigma$ and defined by

$$\Delta \cdot \mathcal{P}_\Sigma := \Delta \cdot H_{\sigma_1,1} \cdot H_{\sigma_1,2} \cdots H_{\sigma_1,k_{\sigma_1}} \cdots H_{\sigma_m,k_{\sigma_m}},$$

i.e., defined by starting from Δ and successively taking hyperplane cuts by elements $H_{\sigma,j}$ of the pencil \mathcal{P}_Σ .

PROPOSITION 4.3. *The slicing of a complete fan with a pencil of hyperplanes \mathcal{P}_Σ defined by a fan Σ necessarily contains a subdivision of Σ .*

PROOF. First note that if Δ is a fan in \mathbb{R}^n and H is a hyperplane, all the cones $\delta \in \Delta \cdot H$ live in one of the two half-spaces H^+ and H^- defined by H . This property holds as well for any subdivision of $\Delta \cdot H$.

Let now Δ be complete. Let \mathcal{P}_Σ be a pencil of hyperplanes defined by the fan Σ consisting of hyperplanes $H_{\sigma,j}$ for $\sigma \in \Sigma$ and $j = 1, \dots, k_\sigma$ as above. Let $\Delta' = \Delta \cdot \mathcal{P}_\Sigma$. In order to prove the proposition, we will need to show the following two properties:

- (1) the support of the restriction $\Delta'|_{|\Sigma|}$ is the entire support $|\Sigma|$; and
- (2) any face of $\Delta'|_{|\Sigma|}$ is included in a face of Σ .

In order to prove (1), let x be a point in $|\Sigma|$. It will be enough to show the existence of a face of Δ' which contains x and which is entirely in $|\Sigma|$.

Let δ be the smallest face of Δ' which contains x ; δ is the face which contains x in its interior. Let $\sigma \in \Sigma$ be a face which contains x . We will show that $\delta \subseteq \sigma$.

By what preceded, for each $i \in \{1, \dots, k_\sigma\}$, there exists $\epsilon_i \in \{+, -\}$ such that δ is included in $H_{\sigma,i}^{\epsilon_i}$. Recall that by definition, we have $\sigma = \cap_{i=1}^{k_\sigma} H_{\sigma,i}^+$. We will show that we can take $\epsilon_i = +$ for each i , which gives the result. Suppose $\epsilon_i = -$ for an $i \in \{1, \dots, k_\sigma\}$. In particular, x belongs to both half-spaces $H_{\sigma,i}^-$ and $H_{\sigma,i}^+$, and so $x \in H_{\sigma,i}$. Since $\delta \cap H_{\sigma,i}$ is a non-empty face of δ which contains x , by minimality of δ , we infer that $\delta \subset H_{\sigma,i}$ which shows that we can choose $\epsilon_i = +$. This proves (1).

In order to prove the second assertion, let δ be a face of the restriction $\Delta'|_{|\Sigma|}$. Let x be a point in the interior of δ , so δ is the smallest face of Δ' which contains x . Let σ be a face of Σ which contains x . As we showed in the proof of (1), we have the inclusion $\delta \subseteq \sigma$, which is the desired property in (2).

It follows that $\Delta'|_{|\Sigma|}$ is a subdivision of Σ and the proposition follows. □

4.2.3. *Blow-ups and existence of triangulations.* Let σ be a cone in \mathbb{R}^n and let x be a vector of $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. The *blow-up of σ at x* is the fan denoted by $\sigma_{(x)}$ and defined by

$$\sigma_{(x)} := \begin{cases} \bigcup_{\substack{\tau < \sigma \\ x \notin \tau}} \{ \tau, \tau + \mathbb{R}_+ x \} & \text{if } x \in \sigma, \\ \text{face}(\sigma) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Note that $\sigma_{(x)}$ is a polyhedral subdivision of $\text{face}(\sigma)$. Moreover, the definition depends only on the half line $\mathbb{R}_+ x$.

More generally, if Σ is a fan, we define the *blow-up of Σ at x* to be the fan denoted by $\Sigma_{(x)}$ and defined as the union of blow-ups $\sigma_{(x)}$ for $\sigma \in \Sigma$, i.e.,

$$\Sigma_{(x)} = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma_{(x)}.$$

Then $\Sigma_{(x)}$ is a subdivision of Σ .

For a pair of points x_1, x_2 , we denote by $\Sigma_{(x_1)(x_2)}$ the fan obtained by first blowing-up Σ at x_1 , and then blowing-up the resulting fan at x_2 . The definition extends to any ordered sequence of points x_1, \dots, x_k in \mathbb{R}^n .

PROPOSITION 4.4. *Let Σ be a fan. Let $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ be the minimal faces of Σ which are not simplicial. For each such face σ_i , $i \in \{1, \dots, k\}$, pick a vector x_i in its interior. Then*

$$\Sigma_{(x_1)(x_2)\dots(x_k)}$$

is a triangulation of Σ .

PROOF. Faces of $\Sigma_{(x_1)}$ which were not in Σ are of the form $\tau + \mathbb{R}_+ x_1$ where $\tau \in \Sigma$ and $x_1 \notin \tau$. Let $\tau' = \tau + \mathbb{R}_+ x_1$ be such a new face. Clearly τ' is simplicial if and only if τ is simplicial. By contrapositive, if τ' is not simplicial, then $\tau < \tau'$ is not simplicial. In any case, τ' is not a non-simplicial minimal cone of $\Sigma_{(x_1)}$. Therefore, the non-simplicial minimal cones of $\Sigma_{(x_1)}$ are included in (in fact, equal to) $\{\sigma_2, \dots, \sigma_k\}$. We conclude the proof by repeating this argument k -th time. \square

4.2.4. *External cone over a polyhedral complex.* We now define external cones over polyhedral complexes.

First, let $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ be an affine linear application and let X be a polyhedral complex in \mathbb{R}^n . The *image of X by ϕ* denoted by $\phi(X)$ is the polyhedral pseudo-complex $\{\phi(\delta) \mid \delta \in X\}$ of \mathbb{R}^m . If the restriction $\phi|_X$ is injective, $\phi(X)$ is a polyhedral complex.

For a subset S of \mathbb{R}^n , we denote by $\text{adh}(S)$ the topological closure of S in \mathbb{R}^n .

PROPOSITION 4.5 (Coning over a polyhedron). *Let δ be an arbitrary polyhedron which does not contain the origin in \mathbb{R}^n . Let H be any affine hyperplane containing $T_{\text{aff}}\delta$ but not 0 , and denote by H_0 the linear hyperplane parallel to H . Let H_0^+ be the half-space defined by H_0 which contains δ in its interior. Then*

- (1) $\sigma := \text{adh}(\mathbb{R}_+ \delta)$ is a cone which verifies $\delta = \sigma \cap H$ and $\delta_{\text{rec}} = \sigma \cap H_0$.
- (2) Moreover, σ is the unique cone included in H_0^+ which verifies $\delta = \sigma \cap H$.
- (3) In addition, if δ is rational, resp. simplicial, then so is σ .

Note that by the terminology adapted in this paper, part (1) means σ is strongly convex, i.e., it does not contain any line.

PROOF. For part (1), we will show more precisely that if

$$\delta = \text{conv}(v_0, \dots, v_l) + \mathbb{R}_+ u_1 + \dots + \mathbb{R}_+ u_m,$$

for points v_0, \dots, v_l in \mathbb{R}^n and vectors u_1, \dots, u_m in H_0 , then $\sigma = \sigma'$ where

$$\sigma' := \mathbb{R}_+v_0 + \dots + \mathbb{R}_+v_l + \mathbb{R}_+u_1 + \dots + \mathbb{R}_+u_m.$$

Note that obviously we have $\delta \subset \sigma'$, which implies the inclusion $\sigma \subseteq \sigma'$. To prove the inclusion $\sigma' \subseteq \sigma$, since $v_0, \dots, v_l \in \sigma$, we need to show $u_1, \dots, u_m \in \sigma$. Let x be an element of δ . For all $\lambda \geq 0$, all the points $x + \lambda u_j$ are in δ . Dividing by λ , we get $x/\lambda + u_j \in \sigma$. Making λ tend to infinity, we get $u_j \in \sigma$ for all $j = 1, \dots, m$. This proves $\sigma = \sigma'$.

We now show that σ is a cone, i.e., it does not contain any line. To show this, let $\lambda_0, \dots, \lambda_l, \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}_+$ such that $\lambda_0v_0 + \dots + \lambda_lv_l + \mu_1u_1 + \dots + \mu_mu_m = 0$. It will be enough to show all the coefficients λ_j and μ_i are zero.

First, if one of the coefficients λ_j was non-zero, dividing by the linear combination above with the sum $\sum_{j=1}^l \lambda_j$, we would get $0 \in \delta$, which would be a contradiction. This shows all the coefficients λ_j are zero. Moreover, δ_{rec} is a cone, i.e., it is strongly convex, which proves that all the coefficients μ_i are zero as well. (Note that in our definition of polyhedra, we assume that a polyhedron is strongly convex, that is it does not contain any affine line.)

To finish the proof of part (1), it remains to show $\delta = \sigma \cap H$ and that $\delta_{\text{rec}} = \sigma \cap H_0$.

Obviously, we have the inclusion $\delta \subseteq \sigma \cap T_{\text{aff}}\delta \subseteq \sigma \cap H$. Proceeding by absurd, suppose there exists $y \in (\sigma \cap H) \setminus \delta$. We can write $y = \lambda_0v_0 + \dots + \lambda_lv_l + \mu_1u_1 + \dots + \mu_mu_m$ with non-negative coefficients λ_j, μ_i .

We first show that all the coefficients λ_j are zero. Otherwise, let $\Lambda = \sum_i \lambda_i$, which is non-zero. Since we are assuming $y \notin \delta$, we get $\Lambda \neq 1$. The point $x = y/\Lambda$ belongs to δ , and so both points $x, y \in \delta \subset H$. It follows that any linear combination $(1 - \lambda)x + \lambda y$ for $\lambda \in \mathbb{R}$ belongs to H . In particular,

$$0 = \frac{\Lambda}{1 - \Lambda}x - \frac{1}{1 - \Lambda}y \in H,$$

which is a contradiction. This shows $\lambda_0 = \dots = \lambda_l = 0$.

We thus infer that $y = \mu_1u_1 + \dots + \mu_mu_m$ belongs to H_0 . But this is a contradiction because $H \cap H_0 = \emptyset$. We conclude with the equality $\delta = \sigma \cap H$.

We are left to show $\delta_{\text{rec}} = \sigma \cap H_0$. Take a point $y \in \sigma \cap H_0$, and write $y = \lambda_0v_0 + \dots + \lambda_nv_n + \mu_1u_1 + \dots + \mu_mu_m$ with non-negative coefficients λ_j, μ_i . Then by a similar reasoning as above, all the coefficients λ_i should be zero, which implies $y \in \delta_{\text{rec}}$. This implies the inclusion $\sigma \cap H_0 \subseteq \delta_{\text{rec}}$. The inclusion $\delta_{\text{rec}} \subset H_0$ comes from the inclusion $\delta_{\text{rec}} \subset T\delta \subseteq H_0$ and the inclusion $\delta_{\text{rec}} \subset \sigma$.

We now prove part (2). Let σ' be a cone included in H_0^+ such that $\sigma' \cap H = \delta$. Obviously, $\sigma = \text{adh}(\mathbb{R}_+\delta) \subseteq \sigma'$. To prove the inverse inclusion, let y be a point σ' . If $y \notin H_0$, then there exists a scalar $\lambda > 0$ such that $\lambda y \in H$. It follows that $\lambda y \in \delta$ and so $y \in \sigma$. If now $y \in H_0$, then for all points $x \in \delta$ and any real $\lambda > 0$, the point $x + \lambda y$ belongs to $\sigma \cap H$, which is equal to δ by the first part of the proposition. We infer that $y \in \delta_{\text{rec}} \subset \sigma$. This implies that $\sigma' = \sigma$ and the unicity follows.

Part (3) follows from the description of the cone σ given in the beginning of the proof. \square

Let now X be a polyhedral complex in \mathbb{R}^n . We define the *cone over* X denoted by \mathbb{R}_+X by

$$\mathbb{R}_+X := \left\{ \text{adh}(\mathbb{R}_+\delta) \mid \delta \in X \right\} \cup \left\{ \underline{0} \right\}.$$

In particular, we note that this is not always a pseudo-fan. However, if one assumes that $|X|$ does not contain 0, then \mathbb{R}_+X is indeed a pseudo-fan which contains X_{rec} .

We define the *external cone over* X denoted by $\text{cone}(X)$ as the pseudo-fan of \mathbb{R}^{n+1} defined as follows. This is also called sometimes the *homogenization of* X ,

Let (e_0, \dots, e_n) be the standard basis of \mathbb{R}^{n+1} , and let x_0, \dots, x_n be the corresponding coordinates. Consider the projection $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ defined by

$$\pi(x_0, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n).$$

Consider the affine hyperplane H_1 of \mathbb{R}^{n+1} given by the equation $x_0 = 1$. The restriction of π to H_1 gives an isomorphism $\pi_1: H_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$, and we define

$$\text{cone}(X) := \mathbb{R}_+ \pi_1^{-1}(X).$$

In particular, for any polyhedron δ , we get the external cone

$$\text{cone}(\delta) := \mathbb{R}_+ \pi_1^{-1}(\delta).$$

By Proposition 4.5, intersecting with H_1 gives

$$\pi(\text{cone}(X) \cap H_1) = X.$$

The pseudo-fan $\text{cone}(X)$ is included in $\{x_0 \geq 0\}$. Moreover, denoting by H_0 the linear hyperplane $\{x_0 = 0\}$, we get

$$\text{cone}(X)|_{H_0} = \text{cone}(X) \cap H_0.$$

Applying again Proposition 4.5, we deduce that $\pi(\text{cone}(X) \cap H_0)$ is the recession pseudo-fan X_{rec} of X .

4.2.5. *From X_{rec} to X and vice-versa.* Let X be any polyhedral complex such that X_{rec} is a fan. Let f be a piecewise linear function on X . The function f naturally induces a function on $\mathbb{R}_+(X) \cap H_1$. This function can be extended by linearity to $\mathbb{R}_+X \setminus H_0$. We denote this extension by \tilde{f} . We say that f_{rec} is well-defined if \tilde{f} can be extended by continuity to H_0 . In this case, we define f_{rec} to be the restriction of \tilde{f} to $X_{\text{rec}} = \text{cone}(X) \cap H_0$.

REMARK 4.6. Notice that if f is strictly convex and if f_{rec} is well-defined, then f_{rec} is strictly convex. \diamond

Assume X is simplicial. In this case, recall that for any polyhedron $\delta \in X$ and any point x in δ , there is a unique decomposition $x = x_f + x_{\text{rec}}$ with $x_f \in \delta_f$ and $x_{\text{rec}} \in \delta_{\text{rec}}$. We define the *projection onto the finite part* $\pi_f: |X| \rightarrow |X_f|$ as the map $x \mapsto x_f$. Similarly, we define the *projection onto the asymptotic part* $\pi_{\text{rec}}: |X| \rightarrow |X_{\text{rec}}|$ by $x \mapsto x_{\text{rec}}$. If Y_f is subdivision of X_f , we define

$$\pi_f^{-1}(Y_f) := \bigcup_{\delta \in X} \left\{ \gamma + \sigma \mid \sigma < \delta_{\text{rec}}, \gamma \in Y_f, \gamma \subset \delta_f \right\}.$$

REMARK 4.7. Setting $Z := \pi_f^{-1}(Y_f)$, one can show that Z is a polyhedral complex, which is moreover simplicial if Y_f is simplicial. In addition, we have $Z_f = Y_f$ et $Z_{\text{rec}} = X_{\text{rec}}$. \diamond

4.3. **Regular subdivisions and convexity.** Let now X be a polyhedral complex in \mathbb{R}^n , and let δ be a face of X . Recall that a function f is called strictly positive around δ if there exists a neighborhood V of the relative interior of δ such that f vanishes on δ and it is strictly positive on $V \setminus \delta$. Recall as well from Section 2 that a function $f \in \mathcal{L}^{\text{pm}}(X)$ is called *strictly convex around δ* if there exists a function $\ell \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ such that $f - \ell$ is strictly positive around the relative interior of δ in $|X|$. We also note that $\mathcal{K}_+(X)$ denotes the set of strictly convex functions on X , i.e., the set of those functions in $\mathcal{L}^{\text{pm}}(X)$ which are strictly convex around any face δ of X .

REMARK 4.8. For a polyhedral complex X , the set $\mathcal{K}_+(X)$ is an open convex cone in the real vector space $\mathcal{L}^{\text{pm}}(X)$, i.e., it is an open set in the natural topology induced on $\mathcal{L}^{\text{pm}}(X)$, and moreover, if $f, g \in \mathcal{K}_+(X)$, then we have $f + g \in \mathcal{K}_+(X)$ and $\lambda f \in \mathcal{K}_+(X)$ for any positive real number $\lambda > 0$. In addition, for $\ell \in \mathcal{L}(X)$, we have $f + \ell \in \mathcal{K}_+(X)$. \diamond

EXAMPLE 4.9. If P is a polyhedron in \mathbb{R}^n , then we have $0 \in \mathcal{K}_+(\text{face}(P))$. Indeed, for each face τ of P , by definition of faces δ in a polyhedron, there exists a linear form ℓ on \mathbb{R}^n which is zero on δ and which is strictly negative on $P \setminus \delta$, so $0 - \ell = -\ell$ is strictly positive around δ . \diamond

We call a polyhedral complex X *quasi-projective* if the set $\mathcal{K}_+(X)$ is non-empty. Quasi-projective polyhedral complexes are sometimes called *convex* in the literature.

REMARK 4.10. In the case of fans, the notion coincides with the notion of quasi-projectivity (convexity) used in the previous section. \diamond

We are now going to make a list of operations on a polyhedral complex which preserves the quasi-projectivity property. To start, we have the following which is straightforward.

PROPOSITION 4.11. *Any subcomplex of a quasi-projective polyhedral complex is itself quasi-projective.*

Let now Y be a subdivision of X . For each face δ of X , recall that the restriction $Y|_\delta$ consists of all the faces of Y which are included in δ .

Let X be a polyhedral complex. A *relatively projective subdivision* of X is a subdivision Y such that there exists a function $f \in \mathcal{L}^{\text{pm}}(Y)$ whose restriction to $Y|_\delta$ for any face $\delta \in X$ is strictly convex. In this case, we say Y is *projective relative to X* , and that the function f is *strictly convex relative to X* . For example, a strictly convex function f on Y is necessary strictly convex relative to X (but the inverse is not necessarily true).

REMARK 4.12. In the theory of triangulations of polytopes and secondary polytopes (see [GKZ94, DRS10]), a polyhedral subdivision of a polytope is relatively projective in our sense if and only if it is regular in the sense of [GKZ94]. \diamond

REMARK 4.13. To justify the terminology, we should emphasize that our notion is indeed a relative notion : the underlying polyhedral complex of a relatively projective subdivision does not need to be quasi-projective. \diamond

REMARK 4.14. A function $f \in \mathcal{L}^{\text{pm}}(Y)$ which is strictly convex relative to X allows to recover the subdivision Y as the polyhedral complex whose collection of faces is

$$\bigcup_{\delta \in X} \bigcup_{\substack{\ell \in (\mathbb{R}^n)^* \\ \ell|_\delta \leq f|_\delta}} \{x \in \delta \mid \ell(x) = f(x)\} \setminus \{\emptyset\}. \quad \diamond$$

PROPOSITION 4.15. *A relatively projective subdivision of a quasi-projective polyhedral complex is itself quasi-projective.*

PROOF. Let X be a quasi-projective polyhedral complex in \mathbb{R}^n and let $f \in \mathcal{K}_+(X)$. Let Y be a relatively projective subdivision of X and let $g \in \mathcal{L}^{\text{pm}}(Y)$ be strictly convex relative to X . We show that for any small enough $\epsilon > 0$, the function $f + \epsilon g \in \mathcal{L}^{\text{pm}}(Y)$ is strictly convex on Y , which proves the proposition.

Let γ be a face of Y . It will be enough to show that $f + \epsilon g$ is strictly convex around γ for any sufficiently small value of $\epsilon > 0$.

Let δ be the smallest face of X which contains γ . Let $\ell \in \mathcal{L}(X)$ and $\ell' \in \mathcal{L}(Y|_\delta)$ be two affine linear functions such that $f - \ell$ is strictly positive around δ and $g|_\delta - \ell'$ is strictly positive around γ . Without loss of generality, we can assume that $\ell' \in \mathcal{L}(X)$.

Let V be a small enough neighborhood of the interior of γ in $|X|$. Equipping \mathbb{R}^n with its Euclidean norm, we can in addition choose V in such a way that for each point $x \in V$, the closest point of x in δ belongs to V .

Since f and g are piecewise linear, we can find $c, c' > 0$ such that for any $x \in V$,

$$\begin{aligned} f(x) - \ell(x) &\geq c \operatorname{dist}(x, \delta) \quad \text{and} \\ g(x) - \ell'(x) &\geq \min_{y \in V \cap \delta} \{g(y) - \ell'(y)\} - c' \operatorname{dist}(x, \delta) = -c' \operatorname{dist}(x, \delta), \end{aligned}$$

where $\operatorname{dist}(x, \delta)$ denotes the Euclidean distance between the point x and the face δ .

We infer that the function $f + \epsilon g - (\ell + \epsilon \ell')$ is strictly positive around γ for any value of $\epsilon < c/c'$. It follows that $f + \epsilon g$ is strictly convex around γ for small enough values of $\epsilon > 0$, as required. This shows that Y is quasi-projective. \square

As an immediate consequence we get the following.

COROLLARY 4.16. *The relation of « being a relatively projective subdivision » is transitive.*

PROOF. Let Y be a relatively projective subdivision of a polyhedral complex X with $f \in \mathcal{L}^{\text{pm}}(Y)$ strictly convex relative to X , and let Z be a relatively projective subdivision of Y with $g \in \mathcal{L}^{\text{pm}}(Z)$ strictly convex relative to Y . It follows that for a face $\delta \in X$, the restriction $f|_{\delta}$ is strictly convex on $Y|_{\delta}$, and the restriction $g|_{\delta}$, seen as a function in $\mathcal{L}^{\text{pm}}(Z|_{\delta})$, is strictly convex relative to $Y|_{\delta}$.

By the previous proposition, more precisely by its proof, for sufficiently small values of $\epsilon > 0$, the function $f|_{\delta} + \epsilon g|_{\delta}$ is strictly convex on $Z|_{\delta}$. Taking $\epsilon > 0$ small enough so that this holds for all faces δ of X , we get the result. \square

PROPOSITION 4.17. *Let Σ be a fan in \mathbb{R}^n and take a point $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. The blow-up $\Sigma_{(x)}$ of Σ at x is projective relative to Σ .*

PROOF. There exists a unique function $f \in \mathcal{L}^{\text{pm}}(\Sigma_{(x)})$ which vanishes on any face of Σ that does not contain x and which takes value -1 at x . We show that this function is strictly convex relative to Σ , which proves the proposition.

Let $\sigma \in \Sigma$. If σ does not contain x , then σ belongs to $\Sigma_{(x)}$, and f is zero, therefore convex, on $\Sigma_{(x)}|_{\sigma} = \text{face}(\sigma)$. Consider now the case where $x \in \sigma$. Let τ be a face of σ not containing x . By the definition of the blow-up, we have to show that $f|_{\sigma}$ is convex around τ and around $\tau + \mathbb{R}_+x$. Let $\ell \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ be an affine linear function which vanishes on τ and which is strictly negative on $\sigma \setminus \tau$. Moreover, we can assume without losing generality that $\ell(x) = -1$. The function $f - \ell$ is therefore zero on $\tau + \mathbb{R}_+x$. In addition, if ν is a face of σ not containing x , f vanishes on ν , so $f - \ell$ is strictly positive on $\nu \setminus \tau$. If now y is a point lying in $\sigma \setminus (\tau + \mathbb{R}_+x)$, there is a face ν of σ such that y belongs to $(\nu \setminus \tau) + \mathbb{R}_+x$, so we can write $y = \lambda x + z$ for some real number $\lambda \geq 0$ and an element $z \in \nu \setminus \tau$. Given the definition of f and the choice of ℓ , we see that

$$(f - \ell)(y) = \lambda \cdot 0 + (f - \ell)(z) > 0.$$

Thus, $f - \ell$ is strictly positive around $\tau + \mathbb{R}_+x$ in σ . In the same way, we see that $f - 2\ell$ is strictly positive around τ in σ . So $f|_{\sigma}$ is strictly convex around $\tau + \mathbb{R}_+x$ and around τ in $\Sigma_{(x)}|_{\sigma}$, and the proposition follows. \square

PROPOSITION 4.18. *Let P be a polytope in \mathbb{R}^n which contains 0. The fan*

$$\Sigma := \mathbb{R}_+ \text{face}(P)|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$$

consisting of cones of the form $\mathbb{R}_+\sigma$ for σ a face of P is quasi-projective.

PROOF. We omit the proof that Σ is a fan. In order to prove the quasi-projectivity, let τ be a face of P which does not contain 0. There exists an affine linear ℓ^τ function on \mathbb{R}^n which takes value 0 on τ and which takes negative values on $P \setminus \tau$. Moreover, we can assume that $\ell^\tau(0) = -1$. The restrictions $\ell^\tau|_{\mathbb{R}_+\tau}$ glue together to define a piecewise affine linear function f on Σ . One can show that f is strictly convex on Σ . \square

PROPOSITION 4.19. *Let X be a polyhedral complex and let H be an affine hyperplane in \mathbb{R}^n . The hyperplane cut $X \cdot H$ is projective relative to X .*

PROOF. Let $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ be the Euclidean distance in \mathbb{R}^n . It is easy to see that the distance function $x \mapsto \text{dist}(x, H)$ is strictly convex on $X \cdot H$ relative to X . \square

COROLLARY 4.20. *Suppose that X is quasi-projective. Then the intersection $X \cap H$ is quasi-projective as well.*

PROOF. If X is quasi-projective, then combining the preceding proposition with Proposition 4.15, we infer that the hyperplane cut $X \cdot H$ is quasi-projective as well. Since $X \cap H = (X \cdot H)|_H$ is a polyhedral subcomplex of $X \cdot H$, it will be itself quasi-projective by Proposition 4.11. \square

PROPOSITION 4.21. *Let X be a polyhedral complex in \mathbb{R}^n . If X is simplicial and Y_f is a relatively projective subdivision of X_f , the subdivision $Y := \pi_f^{-1}(Y_f)$ of X is projective relative to X . Moreover, there exists a function $f \in \mathcal{L}^{\text{pm}}(Y)$ which is strictly convex relative to X and such that $f_{\text{rec}} = 0$.*

PROOF. By Remark 4.7, the polyhedral complex Y is a subdivision of X whose finite part coincides with Y_f .

Let f_f be a piecewise affine linear function on Y_f which is strictly convex relative to X_f . Let $f := \pi_f^*(f_f) = f_f \circ \pi_f$ be the extension of f to $|Y| = |X|$. It is clear that $f_{\text{rec}} = 0$. For a face $\gamma \in Y$, since both the projection $\pi_f|_\gamma: \gamma \rightarrow \gamma_f$ and the restriction $f_f|_{\gamma_f}$ are affine linear, $f|_\gamma$ is also affine linear. This shows that $f \in \mathcal{L}^{\text{pm}}(Y)$. We now show that f is strictly convex relative to X , which proves the proposition.

Let δ be a face of X and let γ be a face in Y which is included in δ . We need to show that $f|_\delta$, as a piecewise linear function on $Y|_\delta$, is strictly convex around γ . By the choice of f_f , we know that f_f is strictly convex around γ_f in $Y_f|_{\delta_f}$. Let ℓ_f be an element of $\mathcal{L}(\delta_f)$ such that $f_f|_{\delta_f} - \ell_f$ is strictly positive around $\text{int}(\gamma_f)$ in δ_f , where $\text{int}(\gamma_f)$ denotes the relative interior of γ_f .

The function $\ell := \pi_f^*(\ell_f)$ is an element of $\mathcal{L}(\delta)$. Moreover, the difference $f - \ell$ is strictly positive around $\text{int}(\gamma_f) + \delta_{\text{rec}}$ in δ . Notice that the relative interior of γ is included in $\text{int}(\gamma_f) + \delta_{\text{rec}}$. Let $\ell' \in \mathcal{L}(\delta)$ be an affine linear function which is zero on γ and which takes negative values on $(\gamma_f + \delta_{\text{rec}}) \setminus \gamma$. Then, for $\epsilon > 0$ small enough, $f - \ell - \epsilon \ell'$ is strictly positive around $\text{int}(\gamma)$. Thus, f is strictly convex around γ , and the proposition follows. \square

4.4. Unimodularity. In this section, we discuss the existence of unimodular subdivisions of a rational polyhedral complex in \mathbb{R}^n .

PROPOSITION 4.22. *Let Σ be a rational simplicial fan in \mathbb{R}^n . There exists a subdivision $\tilde{\Sigma}$ projective relative to Σ which is in addition unimodular with respect to \mathbb{Z}^n . Moreover, we can assume that unimodular cones of Σ are still in $\tilde{\Sigma}$.*

PROOF. This follows from the results of [Wlo97, Section 9], where it is shown how to get a unimodular subdivision $\tilde{\Sigma}$ of Σ by a sequence of blow-ups on some non-unimodular cones. By Proposition 4.17 and Corollary 4.16, the resulting fan $\tilde{\Sigma}$ is a projective subdivision of Σ , from which the result follows. \square

For a rational vector subspace W of \mathbb{R}^n , we denote by $p_W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/W$ the resulting projection map. We endow the quotient \mathbb{R}^n/W by the quotient lattice $\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n \cap W$.

Let now P be a simplicial polyhedron in \mathbb{R}^n and $W := T(P_f)$. We say that P_{rec} is unimodular relative to P_f if the projection $p_W(P_{\text{rec}})$ is unimodular in \mathbb{R}^n/W .

REMARK 4.23. If P_{rec} is unimodular relative to P_f , then for any polytope Q included in $T(P_f)$, for the Minkowski sum $R := Q + P_{\text{rec}}$ we see that R_{rec} is unimodular relative R_f \diamond

PROPOSITION 4.24. *Let P be an integral simplicial polyhedron in \mathbb{R}^n . Then P is unimodular if and only if both the following conditions are verified:*

- (1) P_f is unimodular; and
- (2) P_{rec} is unimodular relative to P_f .

For a collection of vectors v_1, \dots, v_m in a real vector space, we set $\text{Vect}(v_1, \dots, v_m) := \mathbb{R}v_1 + \dots + \mathbb{R}v_m$ the vector subspace generated by the vectors v_i .

PROOF. We can write $P = \text{conv}(v_0, \dots, v_l) + \mathbb{R}_+v_{l+1} + \dots + \mathbb{R}_+v_m$, as in Section 2.1. Moreover, we can suppose without loss of generality that $v_0 = 0$, that v_i is primitive in \mathbb{R}_+v_i for $i \in \{l+1, m, \dots\}$, and that $T(P) = \mathbb{R}^n$. The claimed equivalence can be rewritten in the form: *(v_1, \dots, v_m) is a basis of \mathbb{Z}^n if and only if (v_1, \dots, v_l) is a basis of $\mathbb{Z}^n \cap \text{Vect}(v_1, \dots, v_m)$ and (v_{l+1}, \dots, v_m) is a basis of $\mathbb{Z}^n / \mathbb{Z}^n \cap \text{Vect}(v_1, \dots, v_m)$.* This is clear. \square

COROLLARY 4.25. *If a polyhedron P is rational and its coning cone(P) is unimodular in \mathbb{R}^{n+1} , with respect to the lattice \mathbb{Z}^{n+1} , then P_{rec} is unimodular relative to P_f .*

PROOF. We use the notations used in the definition of cone(P). So let $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ be the projection, and let H_0 be the hyperplane $\{x_0 = 0\}$ and $\pi_0 := \pi|_{H_0}$. Let $u_1, \dots, u_l, u_{l+1}, \dots, u_m$ in \mathbb{R}^{n+1} be so that cone(P) = $\mathbb{R}_+u_1 + \dots + \mathbb{R}_+u_m$ and $u_1, \dots, u_l \notin H_0$ while $u_{l+1}, \dots, u_m \in H_0$, and u_1, \dots, u_m is part of a basis of \mathbb{Z}^{n+1} .

We apply the preceding proposition to $P' := \text{conv}(0, u_1, \dots, u_l) + \mathbb{R}_+u_{l+1} + \dots + \mathbb{R}_+u_m$ which is clearly unimodular. Setting $W' = T(P'_f)$, we infer that $p_{W'}(P'_{\text{rec}})$ is a unimodular cone in \mathbb{R}^{n+1}/W' . Note that $\mathbb{R}^{n+1}/W' = H_0/W' \cap H_0$. Moreover, the linear application $\pi_0: H_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ is an isomorphism which preserves the corresponding lattices, and which sends $P'_{\text{rec}} = \text{cone}(P) \cap H_0$ onto P_{rec} , and $W' \cap H_0$ onto $W := T(P_f)$. Therefore, π_0 induces an isomorphism from $H_0/W' \cap H_0$ to \mathbb{R}^n/W which sends $p_{W'}(P'_{\text{rec}})$ onto $p_W(P_{\text{rec}})$. This finally shows that $p_W(P_{\text{rec}})$ is unimodular. \square

THEOREM 4.26. *Let X be a compact rational polyhedral complex in \mathbb{R}^n (so $X_{\text{rec}} = \{0\}$). There exists a positive integer k and a subdivision Y projective relative to X such that Y is unimodular with respect to the lattice $\frac{1}{k}\mathbb{Z}^n$.*

PROOF. This is a consequence of Theorem 4.1 of [KKMS06, Chapter III]. \square

REMARK 4.27. Note that if a fan Σ in \mathbb{R}^n is unimodular with respect to \mathbb{Z}^n , then it is as well unimodular with respect to any lattice of the form $\frac{1}{k}\mathbb{Z}^n$. \diamond

4.5. Proof of Theorem 4.1. We are now in position to prove the main theorem of this section. Let $\Sigma_X := \text{cone}(X)$, which is a pseudo-fan, and define H_0, H_1 and $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ as in the definition of the external cone. We thus have $X = \pi(\Sigma_X \cap H_1)$ and $X_{\text{rec}} = \pi(\Sigma_X \cap H_0)$.

We first prove the existence of a relatively projective subdivision of Σ_X .

Let P be a polytope containing 0 in its interior. Define the fan $\Sigma_1 := \mathbb{R}_+\text{face}(P)|_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$. This is a complete fan which moreover, by Proposition 4.18, is projective. Define Σ_2 as the fan obtained by slicing Σ_1 with respect to a pencil of hyperplanes associated to Σ_X . (We defined the slicing with respect to a fan but as mentioned previously, the definition extends to pseudo-fans.)

By Proposition 4.3, Σ_2 contains a subdivision of Σ_X . Moreover, since Σ_1 is quasi-projective, and since by Proposition 4.19, Σ_2 is projective relative to Σ_1 (being obtained by a sequence of hyperplane cuts), it follows that Σ_2 is quasi-projective.

Let $\Sigma_3 := \Sigma_2 \cdot H_0$, and note that this is a relatively projective subdivision of Σ_2 by the same proposition. In particular, Σ_3 itself is quasi-projective. The fan Σ_3 is special in that if

Σ' if a subdivision of Σ_3 , then any cone in Σ' is included in one of the two half-spaces H_0^+ or H_0^- defined by H_0 .

Let Σ_4 be a rational triangulation of Σ_3 obtained from Σ_3 by applying Proposition 4.4. Note that Σ_4 is obtained from Σ_3 by blow-ups, thus, by Proposition 4.17, it is projective relative to Σ_3 . In particular, it is quasi-projective.

Let Σ_5 be a unimodular subdivision of Σ_4 , which exists by Proposition 4.22. The fan Σ_5 is therefore unimodular and quasi-projective, and it contains moreover a subdivision of Σ_X .

We now use Σ_5 to get a subdivision of X . Let $X_1 := \pi(\Sigma_5 \cap H_1)$.

Since Σ_5 is quasi-projective, the intersection $\Sigma_5 \cap H_1$ is quasi-projective as well. Since Σ_5 contains a subdivision of Σ_X , it follows that $\Sigma_5 \cap H_1$ contains a subdivision of $\Sigma_X \cap H_1 = X$.

Passing now to the projection, we infer that X_1 is quasi-projective and contains a subdivision of X . More precisely, there exists a strictly convex function f on X_1 such that f_{rec} is well-defined.

Pick δ in X_1 , and let σ be a cone in Σ_5 such that $\pi(\sigma \cap H_1) = \delta$. Applying Proposition 4.5 to $\delta' := \sigma \cap H_1$ and to the hyperplane H_1 , given that σ is included in the half-space defined by H_0 which contains δ' , we infer that $\sigma = \text{adh}(\mathbb{R}_+\delta) = \text{cone}(\delta)$. Since σ is unimodular, by Corollary 4.25 we infer that δ_{rec} is unimodular relative δ_f .

Let $X_2 := X_1|_{|X|}$. It follows that X_2 is a subdivision of X which is rational, simplicial, and quasi-projective, and moreover, for any $\delta \in X_2$, the cone δ_{rec} is unimodular relative to δ_f .

At this moment, we are left to show the existence of a unimodular subdivision Y that is projective relative to X_2 . By Theorem 4.26, there exists an integer $k \geq 1$ and a relatively projective subdivision Y_f of $X_{2,f}$ such that Y_f is unimodular with respect to the lattice $\frac{1}{k}\mathbb{Z}^n$. Define $Y := \pi_f^{-1}(Y_f)$. By Proposition 4.21, Y is projective relative to X_2 , and so by quasi-projectivity of X_2 , it is quasi-projective itself. More precisely, there exists a function f strictly convex on Y such that Y_{rec} is well-defined.

Using Remark 4.23, we infer that for each face $\delta \in Y$, the cone δ_{rec} is unimodular relative to δ_f , with respect to the lattice \mathbb{Z}^n of \mathbb{R}^n . By Remark 4.27, this remains true for the lattice $\frac{1}{k}\mathbb{Z}^n$ as well.

Applying Proposition 4.24, we finally conclude that Y is unimodular with respect to the lattice $\frac{1}{k}\mathbb{Z}^n$. At present, we have obtained a relatively projective subdivision Y of X which is moreover quasi-projective and unimodular with respect to the lattice $\frac{1}{k}\mathbb{Z}^n$. Moreover, it is clear that Y_{rec} is a fan. This finishes the proof of Theorem 4.1. \square

4.6. Unimodular triangulations preserving the recession fan. We finish this section by presenting the proof of Theorem 4.2. We use the same notations as in the previous section for external cones.

PROOF OF THEOREM 4.2. Let $\Sigma_1 = \text{cone}(X)$. We know that $\Sigma_1|_{H_0} = X_{\text{rec}}$ is a unimodular fan. Thus Σ_1 is a fan.

By Proposition 4.4, we can construct a simplicial subdivision Σ_2 of Σ_1 . Moreover, since faces of $\Sigma_1|_{H_0}$ are already simplicial, the construction described in Proposition 4.4 does not change this part of the fan, i.e., $\Sigma_2|_{H_0} = \Sigma_1|_{H_0}$.

In the same way, by Proposition 4.22, there exists a unimodular subdivision Σ_3 of Σ_2 . Moreover, since $\Sigma_2|_{H_0}$ is unimodular, the same proposition ensures we can assume $\Sigma_3|_{H_0} = \Sigma_2|_{H_0}$.

Set $X_1 = \pi(\Sigma_3 \cap H_1)$. Then X_1 is a triangulation of X with $X_{1,\text{rec}} = X_{\text{rec}}$.

By Theorem 4.26, there exists an integer $k \geq 1$ and a subdivision Y_f of $X_{1,f}$ such that Y_f is unimodular with respect to the lattice $\frac{1}{k}\mathbb{Z}^n$. Define $Y := \pi_f^{-1}(Y_f)$. Clearly, $Y_{\text{rec}} = X_{1,\text{rec}} = X_{\text{rec}}$.

Using the same argument as in the final part of the proof of Theorem 4.1 in the previous section, we infer that Y is unimodular, which concludes the proof. \square

5. Tropical Steenbrink spectral sequence

Let $V := \mathbb{R}^n$ be a vector space. Denote by N the lattice $\mathbb{Z}^n \subset V$, thus $V = N_{\mathbb{R}}$. Let Y be a unimodular polyhedral complex of dimension d in $N_{\mathbb{R}}$ whose support $|Y|$ is a smooth tropical variety. Assume that the recession pseudo-fan of Y is a fan Y_{rec} . This fan induces a partial compactification $\mathbb{TP}_{Y_{\infty}}$ of \mathbb{R}^n . Denote by X the extended polyhedral complex induced by Y on the closure of Y in $\mathbb{TP}_{Y_{\infty}}$. Then, $|X|$ is a smooth compact tropical variety. To simplify the notations, we will denote by X_{rec} the recession fan Y_{rec} of Y , and by $\mathbb{TP}_{X_{\infty}}$ the partial compactification $\mathbb{TP}_{Y_{\infty}}$ of \mathbb{R}^n .

Recall from Section 2 that the space $\mathbb{TP}_{X_{\infty}}$ is naturally stratified by open strata $N_{\mathbb{R}}^{\sigma}$ for $\sigma \in X_{\text{rec}}$. If $\sigma \in X_{\text{rec}}$, we denote by X^{σ} the intersection of X with $N_{\mathbb{R}}^{\sigma}$. Notice that X^{σ} is a unimodular simplicial complex of dimension $d - |\sigma|$. In particular, $X^0 = Y$. If $\delta \in X$ is a face, we denote by $\text{sed}(\delta) \in X_{\text{rec}}$ its sedentarity: this is the unique cone $\sigma \in X_{\text{rec}}$ such that the relative interior of δ is in $N_{\mathbb{R}}^{\sigma}$.

Recall that for a simplicial polyhedron δ in \mathbb{R}^n , we defined δ_{rec} and δ_f in Section 2. We extend the definition to faces δ of X of higher sedentarity as follows. By δ_{rec} (resp. δ_f) we mean $(\delta \cap N_{\mathbb{R}}^{\text{sed}(\delta)})_{\text{rec}}$ (resp. $(\delta \cap N_{\mathbb{R}}^{\text{sed}(\delta)})_f$) which belongs to the fun $(X^{\text{sed}(\delta)})_{\text{rec}}$ (resp. $(X^{\text{sed}(\delta)})_f$).

The *max-sedentarity* of a face $\delta \in X$ that we denote by $\text{maxsed}(\delta)$ is defined as

$$\text{maxsed}(\delta) := \max\left\{\text{sed}(\gamma) \mid \gamma \prec \delta\right\}.$$

One verifies directly that we have $\text{maxsed}(\delta) = \text{sed}(\delta) + \delta_{\text{rec}}$ and that this is the maximum cone $\sigma \in X_{\text{rec}}$ such that δ intersects $N_{\mathbb{R}}^{\sigma}$.

For each $\delta \in X$, let Σ^{δ} be the fan in $N_{\mathbb{R}}^{\text{sed}(\delta)}/T\delta$ induced by the star of δ in X . Unimodularity of X implies that the fan Σ^{δ} is unimodular. We denote as before by $\overline{\Sigma}^{\delta}$ the canonical compactification of Σ^{δ} .

We define the k -th cohomology $H^k(\delta)$ of $\overline{\Sigma}^{\delta}$ by

$$H^k(\delta) := \bigoplus_{r+s=k} H_{\text{trop}}^{r,s}(\overline{\Sigma}^{\delta}) = \begin{cases} H_{\text{trop}}^{k/2,k/2}(\overline{\Sigma}^{\delta}) \simeq A^{k/2}(\Sigma^{\delta}) & \text{if } k \text{ is even} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

where the last equalities follows from Theorem 1.3, proved in [AP21].

5.1. Basic maps. We define some basic maps between the cohomology groups associated to faces of X .

5.1.1. *The sign function.* We will need to make the choice of a *sign function* for X . This is a function

$$\text{sign}: \left\{(\gamma, \delta) \in X \times X \mid \gamma \prec \delta\right\} \longrightarrow \{-1, +1\}$$

which takes a value $\text{sign}(\gamma, \delta) \in \{-1, +1\}$ for a pair of faces $\gamma, \delta \in X$ with $\gamma \prec \delta$, and which verifies the following property that we call the *diamond property*.

DEFINITION 5.1 (Diamond property for a sign function). Let δ be a face of dimension at least 2 in X and ν be a face of codimension 2 in δ . The diamond property of polyhedra

ensures that there exist exactly two different faces $\gamma, \gamma' \in X$ such that $\nu \prec \gamma, \gamma' \prec \delta$. Then, we require the sign function to verify the following compatibility

$$\text{sign}(\nu, \gamma)\text{sign}(\gamma, \delta) = -\text{sign}(\nu, \gamma')\text{sign}(\gamma', \delta).$$

Moreover, if e is an edge in X and if u and v are its extremities, then we require the sign function to verify

$$\text{sign}(u, e) = -\text{sign}(v, e).$$

◇

For the existence, note that such a sign function can be easily defined by choosing an orientation on each face.

From now on, we assume that a sign function for X has been fixed once for all.

5.1.2. *The restriction and Gysin maps.* If γ and δ are two faces with $\gamma \prec \delta$, we have the *Gysin map*

$$\text{Gys}_{\delta > \gamma}: H^k(\delta) \rightarrow H^{k+2}(\gamma),$$

and the *restriction map*

$$i_{\gamma < \delta}^*: H^k(\gamma) \rightarrow H^k(\delta),$$

where we define both maps to be zero if γ and δ do not have the same sedentarity. If γ and δ have the same sedentarity, these maps correspond to the corresponding maps in the level of Chow groups defined in Section 3.

REMARK 5.2. We recall that if γ and δ have the same sedentarity, using the isomorphism of the Chow groups with the tropical cohomology groups, the two maps have the following equivalent formulation. First, we get an inclusion $\overline{\Sigma}^\delta \hookrightarrow \overline{\Sigma}^\gamma$. To see this, note that δ gives a ray $\rho_{\delta/\gamma}$ in Σ^γ . The above embedding identifies $\overline{\Sigma}^\delta$ with the closure of the part of sedentarity $\rho_{\delta/\gamma}$ in $\overline{\Sigma}^\gamma$. The restriction map $i_{\gamma < \delta}^*$ is then the restriction map $H^k(\overline{\Sigma}^\gamma) \rightarrow H^k(\overline{\Sigma}^\delta)$ induced by this inclusion. The Gysin map is the dual of the restriction map $i_{\gamma < \delta}^*: H^{2d-2|\delta|-k}(\overline{\Sigma}^\gamma) \rightarrow H^{2d-2|\delta|-k}(\overline{\Sigma}^\delta)$, which by Poincaré duality for $\overline{\Sigma}^\delta$ and $\overline{\Sigma}^\gamma$, is a map from $H^k(\overline{\Sigma}^\delta)$ to $H^{k+2}(\overline{\Sigma}^\gamma)$.

◇

In addition to the above two maps, if two faces γ and δ do not have the same sedentarity, the projection map $\pi_{\delta > \gamma}: N_{\mathbb{R}}^{\text{sed}(\delta)} \rightarrow N_{\mathbb{R}}^{\text{sed}(\gamma)}$ induces an isomorphism $\Sigma^\delta \simeq \Sigma^\gamma$, which leads to an isomorphism of the canonical compactifications, and therefore of the corresponding cohomology groups that we denote by

$$\pi_{\gamma < \delta}^*: H^k(\gamma) \simeq H^k(\delta).$$

REMARK 5.3. All the three above maps can be defined actually even if γ is not of codimension 1 in δ . Note that in this case, the Gysin map is a map $\text{Gys}_{\delta > \gamma}: H^k(\delta) \rightarrow H^{k+2|\delta|-2|\gamma|}(\gamma)$.

◇

Let now S and T be two collections of faces of X . We can naturally define the map

$$i_{S,T}^*: \bigoplus_{\gamma \in S} H^k(\gamma) \longrightarrow \bigoplus_{\delta \in T} H^k(\delta),$$

by sending, for any $\gamma \in S$, any element x of $H^k(\gamma)$ to the element

$$i_{S,T}^*(x) := \sum_{\substack{\delta \in T \\ \delta > \gamma}} \text{sign}(\gamma, \delta) i_{\gamma < \delta}^*(x),$$

and extend it by linearity to the direct sum $\bigoplus_{\gamma \in S} H^k(\gamma)$.

In the same way, we define

$$\text{Gys}_{S,T}: \bigoplus_{\delta \in S} H^k(\delta) \longrightarrow \bigoplus_{\gamma \in T} H^{k+2}(\gamma),$$

by setting for $x \in H^k(\delta)$, for $\delta \in S$,

$$\text{Gys}_{S,T}(x) := \sum_{\substack{\gamma \in T \\ \delta > \gamma}} \text{sign}(\gamma, \delta) \text{Gys}_{\delta > \gamma}(x).$$

Similarly, we get

$$\pi_{S,T}^*: \bigoplus_{\gamma \in S} H^k(\gamma) \longrightarrow \bigoplus_{\delta \in T} H^k(\delta).$$

In what follows, we will often extend maps in this way. Moreover, we will drop the indices if they are clear from the context.

5.2. Combinatorial Steenbrink and the main theorem. Denote by X_f the set of faces of X whose closures do not intersect the boundary of \mathbb{TP}_X , i.e., the set of compact faces of X_0 . Note that this was previously denoted by $X_{0,f}$ that we now simplify to X_f for the ease of presentation.

In what follows, inspired by the shape of the first page of the Steenbrink spectral sequence [Ste76], we define bigraded groups $\text{ST}_1^{a,b}$ with a collection of maps between them. In absence of a geometric framework reminiscent to the framework of degenerating families of smooth complex projective varieties, the heart of this section is devoted to the study of this combinatorial shadow in order to obtain interesting information about the geometry of X .

For all pair of integers $a, b \in \mathbb{Z}$, we define

$$\text{ST}_1^{a,b} := \bigoplus_{\substack{s \geq |a| \\ s \equiv a \pmod{2}}} \text{ST}_1^{a,b,s}$$

where

$$\text{ST}_1^{a,b,s} = \bigoplus_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta|=s}} H^{a+b-s}(\delta).$$

The bigraded groups $\text{ST}_1^{a,b}$ come with a collection of maps

$$i^{a,b*}: \text{ST}_1^{a,b} \rightarrow \text{ST}_1^{a+1,b} \quad \text{and} \quad \text{Gys}^{a,b}: \text{ST}_1^{a,b} \rightarrow \text{ST}_1^{a+1,b},$$

where both these maps are defined by our sign convention introduced in the previous section.

In practice, we drop the indices and denote simply by i^* and Gys the corresponding maps.

REMARK 5.4. More precisely, we could view the collection of maps i^* and Gys bi-indexed by a, b as maps of bidegree $(1, 0)$

$$i^* = \bigoplus_{a,b} i^{a,b*}: \bigoplus_{a,b} \text{ST}_1^{a,b} \longrightarrow \bigoplus_{a,b} \text{ST}_1^{a,b},$$

and

$$\text{Gys} = \bigoplus_{a,b} \text{Gys}^{a,b}: \bigoplus_{a,b} \text{ST}_1^{a,b} \longrightarrow \bigoplus_{a,b} \text{ST}_1^{a,b}. \quad \diamond$$

PROPOSITION 5.5. *The two collections of maps i^* and Gys have the following properties.*

$$i^* \circ i^* = 0, \quad \text{Gys} \circ \text{Gys} = 0, \quad i^* \circ \text{Gys} + \text{Gys} \circ i^* = 0.$$

PROOF. Section 5.10 is devoted to the proof of this proposition. □

We now define the *differential* $d: \text{ST}_1^{a,b} \rightarrow \text{ST}_1^{a+1,b}$ as the sum $d = i^* + \text{Gys}$. It follows from the properties given in the above proposition that we have the following.

PROPOSITION 5.6. *For a unimodular triangulation of \mathfrak{X} and for any integer b , the differential d makes $\text{ST}_1^{\bullet,b}$ into a cochain complex.*

REMARK 5.7. This proposition suggests $\mathrm{ST}_1^{\bullet,\bullet}$ might be the first page of a spectral sequence converging to the cohomology of X . We could think that such a spectral sequence could be defined if we could *deform infinitesimally the tropical variety*. In the sequel we will only use the property stated in the proposition, that the lines of $\mathrm{ST}_1^{\bullet,\bullet}$ with the differential d form a cochain complex, as well as certain combinatorial properties of these cochain complexes. \diamond

For a cochain complex (C^\bullet, d) , denote by $H^a(C^\bullet, d)$ its a -th cohomology group, i.e.,

$$H^a(C^\bullet, d) = \frac{\ker(d: C^a \rightarrow C^{a+1})}{\mathrm{Im}(d: C^{a-1} \rightarrow C^a)}.$$

In this section we prove the following theorem, generalizing the main theorem of [IKMZ19] from approximable setting (when X arises as the tropicalization of a family of complex projective varieties) to any general smooth tropical variety.

THEOREM 5.8 (Steenbrink-Tropical comparison theorem). *The cohomology of $(\mathrm{ST}_1^{\bullet,b}, d)$ is described as follows. For b odd, all the terms $\mathrm{ST}_1^{a,b}$ are zero, and the cohomology is vanishing. For b even, let $b = 2p$ for $p \in \mathbb{Z}$, then for $q \in \mathbb{Z}$, we have*

$$H^{q-p}(\mathrm{ST}_1^{\bullet,2p}, d) = H_{\mathrm{trop}}^{p,q}(\mathfrak{X}).$$

The rest of this section is devoted to the proof of Theorem 5.8.

In absence of a geometric framework reminiscent to the framework of degenerating families of smooth complex projective varieties, the heart of our proof is devoted to introducing and developing certain tools, constructions, and results about the combinatorial structure of the Steenbrink spectral sequence.

Broadly speaking, the proof which follows is inspired by the one given in the approximable case [IKMZ19], as well as by the ingredients in Deligne’s construction of the mixed Hodge structure on the cohomology of a smooth algebraic variety [Del71a] and by Steenbrink’s construction of the limit mixed Hodge structure on the special fiber of a semistable degeneration [Ste76], both based on the use of the sheaf of logarithmic differentials and their corresponding spectral sequences.

In particular, we are going to prove first an analogous result in the tropical setting of the Deligne exact sequence which gives a resolution of the coefficient groups \mathbf{F}^p with cohomology groups of the canonically compactified fans $\overline{\Sigma}^\delta$. The proof here is based on the use of Poincaré duality and our Theorem 1.3, the tropical analog of Feichtner-Yuzvinsky theorem [FY04], which provides a description of the tropical cohomology groups of the canonically compactified fans. We then define a natural filtration that we call the *tropical weight filtration* or *toric weight filtration* on the coefficient groups $\mathbf{F}^p(\cdot)$, inspired by the weight filtration on the sheaf of logarithmic differentials, and study the corresponding spectral sequence. The resolution of the coefficient groups given by the Deligne spectral resolution gives a double complex which allows to calculate the cohomology of the graded cochain complex associated to the weight filtration. We then show that the spectral sequence associated to the double complex corresponding to the weight filtration which abuts to the tropical cohomology groups, abuts as well to the cohomology groups of the Steenbrink cochain complex, which concludes the proof. The proof of this last result is based on the use of our Spectral Resolution Lemma 5.25 which allows to make a bridge between different spectral sequences.

5.3. Tropical Deligne resolution. Let Σ be a smooth unimodular tropical fan. We follow the notations of the previous section. In particular, for each cone σ , we denote by Σ^σ the induced fan on the star of σ in Σ , and by $\overline{\Sigma}^\sigma$ its canonical compactification. We proved in [AP21] the following theorem.

THEOREM 5.9 (Tropical Deligne resolution). *We have the following exact sequence of \mathbb{Q} -vector spaces:*

$$0 \rightarrow \mathbf{F}^p(\underline{0}) \rightarrow \bigoplus_{\substack{\sigma \in \Sigma \\ |\sigma|=p}} H^0(\sigma) \rightarrow \bigoplus_{\substack{\sigma \in \Sigma \\ |\sigma|=p-1}} H^2(\sigma) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{\substack{\sigma \in \Sigma \\ |\sigma|=1}} H^{2p-2}(\sigma) \rightarrow H^{2p}(\underline{0}) \rightarrow 0,$$

where the maps between cohomology groups are given by Gys.

5.4. Toric weight filtration on \mathbf{F}^p . In this section, we introduce a natural filtration on the structure sheaf \mathbf{F}^p . This filtration could be regarded as the analog in polyhedral geometry of the weight filtration on the sheaf $\Omega^p(\log \mathfrak{X}_0)$ of logarithmic differentials around the special fiber \mathfrak{X}_0 of a semistable degeneration \mathfrak{X} over the unit disk.

Let δ be a face of the triangulation X of the tropical variety \mathfrak{X} . First we define a filtration denoted by \widetilde{W}_\bullet on $\mathbf{F}^p(\delta)$, and then define the weight filtration W_\bullet by shifting the filtration induced by \widetilde{W}_\bullet .

The tangent space $\mathrm{T}\delta$ of δ is naturally included in $\mathbf{F}_1(\delta)$. More generally, for any integer s , we have an inclusion $\bigwedge^s \mathrm{T}\delta \subseteq \mathbf{F}_s(\delta)$, which in turn gives an inclusion

$$\bigwedge^s \mathrm{T}\delta \wedge \mathbf{F}_{p-s}(\delta) \subseteq \mathbf{F}_p(\delta)$$

for any non-negative integer s .

DEFINITION 5.10. For any integer $s \geq 0$, define $\widetilde{W}_s \mathbf{F}^p(\delta)$ as follows

$$\widetilde{W}_s \mathbf{F}^p(\delta) := \left\{ \alpha \in \mathbf{F}^p(\delta) \mid \text{restriction of } \alpha \text{ on subspace } \bigwedge^{s+1} \mathrm{T}\delta \wedge \mathbf{F}_{p-s-1}(\delta) \text{ of } \mathbf{F}_p(\delta) \text{ is trivial} \right\}.$$

◇

Recall that for a pair of faces $\gamma \prec \delta$, we denote by $i_{\gamma \prec \delta}^*$ the restriction map $\mathbf{F}^p(\gamma) \rightarrow \mathbf{F}^p(\delta)$.

PROPOSITION 5.11. *Let γ be a face of codimension one of δ . We have the following two cases.*

- If γ and δ have the same sedentarity, then the natural map $i_{\gamma \prec \delta}^*: \mathbf{F}^p(\gamma) \rightarrow \mathbf{F}^p(\delta)$ sends $\widetilde{W}_{s-1} \mathbf{F}^p(\gamma)$ into $\widetilde{W}_s \mathbf{F}^p(\delta)$.
- If γ and δ do not have the same sedentarity, then the natural map $\pi_{\gamma \prec \delta}^*: \mathbf{F}^p(\gamma) \rightarrow \mathbf{F}^p(\delta)$ sends $\widetilde{W}_s \mathbf{F}^p(\gamma)$ into $\widetilde{W}_s \mathbf{F}^p(\delta)$.

PROOF. For the first point, let $\mathbf{n}_{\delta/\gamma}$ be a primitive normal vector to $\mathrm{T}\gamma$ in $\mathrm{T}\delta$. The map $\mathbf{F}_p(\delta) \rightarrow \mathbf{F}_p(\gamma)$ restricted to the subspace $\bigwedge^{s+1} \mathrm{T}\delta \wedge \mathbf{F}_{p-s-1}(\delta)$ can be decomposed as the composition of the following maps

$$\begin{aligned} \bigwedge^{s+1} \mathrm{T}\delta \wedge \mathbf{F}_{p-s-1}(\delta) &= \bigwedge^s \mathrm{T}\gamma \wedge \mathbf{n}_{\delta/\gamma} \wedge \mathbf{F}_{p-s-1}(\delta) + \bigwedge^{s+1} \mathrm{T}\gamma \wedge \mathbf{F}_{p-s-1}(\delta) \\ &\longrightarrow \bigwedge^s \mathrm{T}\gamma \wedge \mathbf{n}_{\delta/\gamma} \wedge \mathbf{F}_{p-s-1}(\gamma) + \bigwedge^{s+1} \mathrm{T}\gamma \wedge \mathbf{F}_{p-s-1}(\gamma) \hookrightarrow \bigwedge^s \mathrm{T}\gamma \wedge \mathbf{F}_{p-s}(\gamma). \end{aligned}$$

An element of $\widetilde{W}_{s-1} \mathbf{F}^p(\gamma)$ is thus sent to an element of $\mathbf{F}^p(\delta)$ which restricts to zero on the subspace $\bigwedge^{s+1} \mathrm{T}\delta \wedge \mathbf{F}_{p-s-1}(\delta)$, in other words, to an element of $\widetilde{W}_s \mathbf{F}^p(\delta)$.

For the second point, the projection $\pi_{\delta \succ \gamma}$ maps $\mathrm{T}\delta$ onto $\mathrm{T}\gamma$. Thus, it also maps $\bigwedge^{s+1} \mathrm{T}\delta$ onto $\bigwedge^{s+1} \mathrm{T}\gamma$. The image of an element of $\widetilde{W}_s \mathbf{F}^p(\gamma)$ thus restricts to zero on $\bigwedge^s \mathrm{T}\delta$, i.e., it is an element of $\widetilde{W}_s \mathbf{F}^p(\delta)$. □

We now consider the graded pieces $\mathrm{gr}_s^{\widetilde{W}} \mathbf{F}^p(\delta) := \widetilde{W}_s \mathbf{F}^p(\delta) / \widetilde{W}_{s-1} \mathbf{F}^p(\delta)$.

For $\delta \in X$, we denote as before by $\underline{0}^\delta$ the zero cone of the fan Σ^δ induced by the triangulation X around δ . The following proposition gives the description of the graded pieces of the filtration.

PROPOSITION 5.12. *For each face δ , we have*

$$\mathrm{gr}_s^{\widetilde{W}} \mathbf{F}^p(\delta) \simeq \bigwedge^s \mathbf{T}^* \delta \otimes \mathbf{F}^{p-s}(\underline{0}^\delta).$$

Here $\mathbf{T}^* \delta$ is the cotangent space of the face δ .

In order to prove this proposition, we introduce some useful maps. Denote by π_δ the natural projection $N_{\mathbb{R}}^{\mathrm{sed}(\delta)} \rightarrow N_{\mathbb{R}}^\delta$. We choose a projection $\mathrm{p}_\delta: N_{\mathbb{R}}^{\mathrm{sed}(\delta)} \rightarrow \mathbf{T}\delta$. Both projections naturally extend to exterior algebras, and for any integer p , we get maps

$$\begin{aligned} \mathrm{p}_\delta: \bigwedge^p N_{\mathbb{R}}^{\mathrm{sed}(\delta)} &\rightarrow \bigwedge^p \mathbf{T}\delta, \\ \pi_\delta: \bigwedge^p N_{\mathbb{R}}^{\mathrm{sed}(\delta)} &\rightarrow \bigwedge^p N_{\mathbb{R}}^\delta. \end{aligned}$$

Furthermore, we get a map

$$\pi_\delta: \mathbf{F}_p(\delta) \rightarrow \mathbf{F}_p(\underline{0}^\delta).$$

We have the corresponding pullback p_δ^* and π_δ^* between the corresponding dual spaces $\mathbf{F}^p(\delta)$ and $\mathbf{F}(\underline{0}^\delta)$. Moreover, if $\alpha \in \mathbf{F}^p(\delta)$ is zero on $\mathbf{T}\delta \wedge \mathbf{F}_{p-1}(\delta)$, since $\mathbf{T}\delta = \ker(\pi_\delta)$, we can define a natural pushforward $\pi_{\delta*}(\alpha)$ of α in $\mathbf{F}_p(\underline{0}^\delta)$. This leads to a map (in fact an isomorphism)

$$\pi_{\delta*}: \widetilde{W}_0(\mathbf{F}^p(\delta)) \rightarrow \mathbf{F}^p(\underline{0}^\delta).$$

PROOF OF PROPOSITION 5.12. Let α be an element of $\widetilde{W}_s \mathbf{F}^p(\delta)$. Let $\mathbf{u} \in \bigwedge^s \mathbf{T}\delta$. Recall that the contraction of α by \mathbf{u} is the multiform $\beta := \alpha(\mathbf{u} \wedge \cdot) \in \mathbf{F}^{p-s}(\delta)$.

Since α is in $\widetilde{W}_s \mathbf{F}^p(\delta)$, and $\mathbf{u} \wedge \mathbf{T}\delta \wedge \mathbf{F}_{p-s-1}(\delta) \subseteq \bigwedge^{s+1} \mathbf{T}\delta \wedge \mathbf{F}_{p-s-1}(\delta)$, by definition of the filtration \widetilde{W}_\bullet , the contracted multiform β is zero on $\mathbf{T}\delta \wedge \mathbf{F}_{p-s-1}(\delta)$. Thus, $\beta \in \widetilde{W}_0(\delta)$. Hence, we get a morphism

$$\begin{aligned} \Psi: \widetilde{W}_s \mathbf{F}^p(\delta) &\longrightarrow \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^s \mathbf{T}\delta, \mathbf{F}^{p-s}(\underline{0}^\delta)\right) \simeq \bigwedge^s \mathbf{T}^* \delta \otimes \mathbf{F}^{p-s}(\underline{0}^\delta), \\ \alpha &\longmapsto (\mathbf{u} \longmapsto \pi_{\delta*}(\alpha(\mathbf{u} \wedge \cdot))). \end{aligned}$$

Notice that the kernel of Ψ is $\widetilde{W}_{s-1}(\mathbf{F}^p(\delta))$, i.e., its cokernel is $\mathrm{gr}_s^{\widetilde{W}}(\mathbf{F}^p(\delta))$.

Set

$$\begin{aligned} \Phi: \bigwedge^s \mathbf{T}^* \delta \otimes \mathbf{F}^{p-s}(\underline{0}^\delta), &\longrightarrow \mathbf{F}^p(\delta) \\ x \otimes y &\longmapsto \mathrm{p}_\delta^*(x) \wedge \pi_\delta^*(y), \end{aligned}$$

and extended by linearity.

One verifies directly that $\mathrm{Im}(\Psi) \subseteq \widetilde{W}_s \mathbf{F}^p(\delta)$, and $\Psi \circ \Phi$ is identity on $\bigwedge^s \mathbf{T}^* \delta \otimes \mathbf{F}^{p-s}(\underline{0}^\delta)$. In particular, Ψ is surjective. We thus infer that Ψ induces an isomorphism between its cokernel and $\bigwedge^s \mathbf{T}^* \delta \otimes \mathbf{F}^{p-s}(\underline{0}^\delta)$. This concludes the proof as we have seen that its cokernel of Ψ is $\mathrm{gr}_s^{\widetilde{W}}(\mathbf{F}^p(\delta))$. \square

DEFINITION 5.13 (Toric weight filtration). For each $\delta \in X$, we define the *tropical weight filtration* or *toric weight filtration* W_\bullet on $\mathbf{F}^p(\delta)$ and its *opposite filtration* W^\bullet by

$$\begin{aligned} W_s \mathbf{F}^p(\delta) &= \widetilde{W}_{s+|\delta|} \mathbf{F}^p(\delta), \text{ and} \\ W^s \mathbf{F}^p(\delta) &= \widetilde{W}_{-s+|\delta|} \mathbf{F}^p(\delta), \end{aligned}$$

for each integer s . \diamond

Proposition 5.12 directly translates into the following facts about the filtration W^\bullet .

COROLLARY 5.14. *The following holds.*

(1) *For each face δ , we have*

$$\mathrm{gr}_W^s \mathbf{F}^p(\delta) \simeq \bigwedge^{|\delta|-s} \mathbf{T}^* \delta \otimes \mathbf{F}^{p+s-|\delta|}(\underline{0}^\delta).$$

- (2) For inclusion of faces $\gamma < \delta$, the map $\mathbf{F}^p(\gamma) \rightarrow \mathbf{F}^p(\delta)$ respects the filtration W^\bullet . In particular, we get an application at each graded piece $\mathrm{gr}_W^s \mathbf{F}^p(\gamma) \rightarrow \mathrm{gr}_W^s \mathbf{F}^p(\delta)$.

5.4.1. *Description of the restriction maps on graded pieces of the weight filtration.* We would now like to explicitly describe the map induced by i^* on the level of graded pieces. In what follows, we identify $\mathrm{gr}_W^s \mathbf{F}^p(\delta)$ with the decomposition $\bigwedge^{|\delta|-s} \mathbf{T}^* \delta \otimes \mathbf{F}^{p+s-|\delta|}(\underline{0}^\delta)$ and also, by duality, with $\mathrm{Hom}\left(\bigwedge^{|\delta|-s} \mathbf{T} \delta, \mathbf{F}^{p+s-|\delta|}(\underline{0}^\delta)\right)$. We call $\bigwedge^{|\delta|-s} \mathbf{T}^* \delta$ and $\mathbf{F}^{p+s-|\delta|}(\underline{0}^\delta)$ the *parallel part* and the *transversal part* of the graded piece of the filtration, respectively. We use the notation $\alpha_{\parallel}, \beta_{\parallel}$, etc. when referring to the elements of the parallel part, and use $\alpha_{\perp}, \beta_{\perp}$, etc. when referring to the elements of the transversal part. In particular, each element of the graded piece is a sum of elements of the form $\alpha_{\parallel} \otimes \alpha_{\perp}$.

We denote by $\Psi_{s,\delta}: W^s \mathbf{F}^p(\delta) \rightarrow \mathrm{gr}_W^s \mathbf{F}^p(\delta)$ the projection. As we have seen in the proof of Proposition 5.12, this map is explicitly described by

$$\begin{aligned} \Psi_{s,\delta}: W^s \mathbf{F}^p(\delta) &\longrightarrow \mathrm{gr}_W^s \mathbf{F}^p(\delta) \\ \alpha &\longmapsto (\mathbf{u} \longmapsto \pi_{\delta*}(\alpha(\mathbf{u} \wedge \cdot))). \end{aligned}$$

We also have a section $\Phi_{s,\delta}$, which this time depends on the chosen projection p_δ , and which is given by

$$\begin{aligned} \Phi_{s,\delta}: \mathrm{gr}_W^s \mathbf{F}^p(\delta) &\longrightarrow W^s \mathbf{F}^p(\delta) \\ \alpha_{\parallel} \otimes \alpha_{\perp} &\longmapsto p_\delta^*(\alpha_{\parallel}) \wedge \pi_\delta^*(\alpha_{\perp}). \end{aligned}$$

Consider now two faces $\gamma < \delta$ in X . We define two maps i_{\parallel}^* and i_{\perp}^* between parallel and transversal parts of the graded pieces as follows. For each non-negative integer t , the map

$$i_{\parallel}^*: \bigwedge^t \mathbf{T}^* \gamma \longrightarrow \bigwedge^{t+1} \mathbf{T}^* \delta$$

sends an element $\alpha_{\parallel} \in \bigwedge^t \mathbf{T}^* \gamma$ to the element $\beta_{\parallel} = i_{\parallel}^*(\alpha_{\parallel})$ of $\bigwedge^{t+1} \mathbf{T}^* \delta$ defined as follows. The multiform β_{\parallel} is the unique element of $\bigwedge^{t+1} \mathbf{T}^* \delta$ which restricts to zero on $\bigwedge^{t+1} \mathbf{T} \gamma$ under the inclusion map $\bigwedge^{t+1} \mathbf{T} \gamma \hookrightarrow \bigwedge^{t+1} \mathbf{T} \delta$, and which verifies

$$\beta_{\parallel}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{n}_{\delta/\gamma}) = \alpha_{\parallel}(\mathbf{u}) \quad \text{for any } \mathbf{u} \in \bigwedge^t \mathbf{T} \gamma \subset \bigwedge^t \mathbf{T} \delta.$$

Here $\mathbf{n}_{\delta/\gamma}$ is any primitive normal vector to $\mathbf{T} \gamma$ in $\mathbf{T} \delta$. In other words,

$$\beta_{\parallel} = p_\gamma^*(\alpha_{\parallel})|_{\mathbf{T} \delta} \wedge \mathbf{n}_{\delta/\gamma}^*,$$

where $\mathbf{n}_{\delta/\gamma}^*$ is the form on $\mathbf{T} \delta$ which vanishes on $\mathbf{T} \gamma$ and which takes value 1 on $\mathbf{n}_{\delta/\gamma}$.

For any positive integer t , the other map

$$i_{\perp}^*: \mathbf{F}^t(\underline{0}^\gamma) \longrightarrow \mathbf{F}^{t-1}(\underline{0}^\delta)$$

between transversal parts is similarly defined as follows. This is the unique linear map which sends an element α_{\perp} of $\mathbf{F}^t(\underline{0}^\gamma)$ to the element $\beta_{\perp} = i_{\perp}^*(\alpha_{\perp})$ which verifies

$$\alpha_{\perp}(\mathbf{e}_{\delta/\gamma} \wedge \mathbf{v}) = \beta_{\perp}(\pi_{\gamma < \delta}(\mathbf{v})) \quad \text{for any } \mathbf{v} \in \mathbf{F}_{t-1}(\underline{0}^\gamma).$$

Here, as in the previous sections, $\mathbf{e}_{\delta/\gamma}$ is the primitive vector of the ray $\rho_{\delta/\gamma}$ corresponding to δ in Σ^γ , and $\pi_{\gamma < \delta}$ is the projection from $\overline{\Sigma}^\gamma$ to $\overline{\Sigma}^\delta$ (along $\mathbb{R} \mathbf{e}_{\delta/\gamma}$), which naturally induces a surjective map from $\mathbf{F}_{t-1}(\underline{0}^\gamma) \rightarrow \mathbf{F}_{t-1}(\underline{0}^\delta)$. In other words, β_{\perp} is the pushforward by $\pi_{\gamma < \delta}$ of the contraction of α_{\perp} by $\mathbf{e}_{\delta/\gamma}$ (which is well-defined because $\ker \pi_{\gamma < \delta} = \mathbb{R} \mathbf{e}_{\delta/\gamma}$).

PROPOSITION 5.15. *Let $\gamma < \delta$ be two faces in X . Notations as above, the induced map on graded pieces $\mathrm{gr}_W^s \mathbf{F}^p(\gamma) \rightarrow \mathrm{gr}_W^s \mathbf{F}^p(\delta)$ is zero provided that $\mathrm{sed}(\gamma) \neq \mathrm{sed}(\delta)$. Otherwise, it coincides with the map*

$$\begin{aligned} i_{\parallel}^* \otimes i_{\perp}^*: \bigwedge^{|\gamma|-s} \mathbf{T}^* \gamma \otimes \mathbf{F}^{p+s-|\gamma|}(\underline{0}^\gamma) &\longrightarrow \bigwedge^{|\delta|-s} \mathbf{T}^* \delta \otimes \mathbf{F}^{p+s-|\delta|}(\underline{0}^\delta), \\ \alpha_{\parallel} \otimes \alpha_{\perp} &\longmapsto \mathrm{sign}(\gamma, \delta) \beta_{\parallel} \otimes \beta_{\perp}, \end{aligned}$$

where $\beta_{\parallel} = i_{\parallel}^*(\alpha_{\parallel})$ and $\beta_{\perp} = i_{\perp}^*(\alpha_{\perp})$.

PROOF. If $\text{sed}(\delta) \neq \text{sed}(\gamma)$, then the natural map $\mathbf{F}^p(\gamma) \rightarrow \mathbf{F}^p(\delta)$ is $\pi_{\gamma < \delta}^*$, and it sends $W^s \mathbf{F}^p(\gamma)$ onto $W^{s+1} \mathbf{F}^p(\delta)$. Thus, it induces the zero map on the graded pieces.

Assume $\text{sed}(\delta) = \text{sed}(\gamma)$. Let $\alpha = \alpha_{\parallel} \otimes \alpha_{\perp} \in \text{gr}_W^s \mathbf{F}^p(\gamma)$. By definition, the map induced by i^* on the graded pieces maps α onto $\Psi_{s+1, \delta} \circ i_{\gamma < \delta}^* \circ \Phi_{s, \gamma}(\alpha)$. To understand this image, take an element $\mathbf{u}_{\parallel} \otimes \mathbf{u}_{\perp}$ in $\bigwedge^{|\delta| - s} \text{T}\delta \otimes \mathbf{F}_{p+s-|\delta|}(\underline{0}^{\delta})$. By definition of $\Psi_{s+1, \delta}$ we get

$$\Psi_{s+1, \delta} \circ i_{\gamma < \delta}^* \circ \Phi_{s, \gamma}(\alpha) (\mathbf{u}_{\parallel} \otimes \mathbf{u}_{\perp}) = i_{\gamma < \delta}^* \circ \Phi_{s, \gamma}(\alpha) (\mathbf{u}_{\parallel} \wedge \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}),$$

where $\tilde{\mathbf{u}}_{\perp}$ is any preimage of \mathbf{u}_{\perp} by $\Phi_{s, \gamma}$. Then,

$$\begin{aligned} i_{\gamma < \delta}^* \circ \Phi_{s, \gamma}(\alpha) (\mathbf{u}_{\parallel} \wedge \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}) &= \Phi_{s, \gamma}(\alpha) (\mathbf{u}_{\parallel} \wedge \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}) \\ &= (p_{\gamma}^*(\alpha_{\parallel}) \wedge \pi_{\gamma}^*(\alpha_{\perp})) (\mathbf{u}_{\parallel} \wedge \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}). \end{aligned}$$

Here, $\mathbf{u}_{\parallel} \in \bigwedge^{|\delta| - s} \text{T}\delta$, and we have the decomposition

$$\bigwedge^{|\delta| - s} \text{T}\delta = \bigwedge^{|\gamma| - s + 1} \text{T}\gamma \oplus \bigwedge^{|\gamma| - s} \text{T}\gamma \wedge \mathbf{n}_{\delta/\gamma},$$

where $\mathbf{n}_{\delta/\gamma}$ is a primitive normal vector to $\text{T}\gamma$ in $\text{T}\delta$. Thus, it suffices to study the following two cases.

— Assume that $\mathbf{u}_{\parallel} = \mathbf{u}'_{\parallel} \wedge \mathbf{n}_{\delta/\gamma}$ with $\mathbf{u}'_{\parallel} \in \bigwedge^{|\gamma| - s} \text{T}\gamma$. Since $\text{T}\gamma = \ker(\pi_{\gamma})$, we get

$$\begin{aligned} (p_{\gamma}^*(\alpha_{\parallel}) \wedge \pi_{\gamma}^*(\alpha_{\perp})) (\mathbf{u}'_{\parallel} \wedge \mathbf{n}_{\delta/\gamma} \wedge \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}) &= \alpha_{\parallel}(p_{\gamma}(\mathbf{u}'_{\parallel})) \cdot \alpha_{\perp}(\pi_{\gamma}(\mathbf{n}_{\delta/\gamma} \wedge \tilde{\mathbf{u}}_{\perp})) \\ &= \alpha_{\parallel}(\mathbf{u}'_{\parallel}) \cdot \alpha_{\perp}(\mathbf{e}_{\delta/\gamma} \wedge \pi_{\gamma}(\tilde{\mathbf{u}}_{\perp})) \\ &= \beta_{\parallel}(\mathbf{u}_{\parallel}) \cdot \beta_{\perp}(\mathbf{u}_{\perp}), \end{aligned}$$

since $\mathbf{u}_{\parallel} = \mathbf{u}'_{\parallel} \wedge \mathbf{n}_{\delta/\gamma}$ and $\mathbf{u}_{\perp} = \pi_{\gamma < \delta}(\pi_{\gamma}(\tilde{\mathbf{u}}_{\perp}))$.

— If $\mathbf{u}_{\parallel} \in \bigwedge^{|\gamma| - s + 1} \text{T}\gamma$, since $p_{\gamma}^*(\alpha_{\parallel}) \in \bigwedge^{|\gamma| - s} N_{\mathbb{R}}^{\text{sed}(\gamma)}$, a part of \mathbf{u}_{\parallel} must be evaluated by $\pi_{\gamma}^*(\alpha_{\perp})$. But this evaluation will be zero since $\text{T}\gamma = \ker(\pi_{\gamma})$. Thus,

$$\begin{aligned} 0 &= (p_{\gamma}^*(\alpha_{\parallel}) \wedge \pi_{\gamma}^*(\alpha_{\perp})) (\mathbf{u}'_{\parallel} \wedge \mathbf{n}_{\delta/\gamma} \wedge \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}) \\ &= \beta_{\parallel}(\mathbf{u}_{\parallel}) \cdot \beta_{\perp}(\mathbf{u}_{\perp}). \end{aligned}$$

In any case, the statement of the proposition holds. \square

Using the above proposition, we identify in the sequel the graded pieces of the opposite weight filtration and the maps between them by $\bigwedge^{\bullet} \text{T}^{\bullet} \gamma \otimes \mathbf{F}^{\bullet}(\underline{0}^{\gamma})$ and maps between them.

5.5. Yoga of spectral sequences and proof of the main theorem. In this section, we study the combinatorics behind the Steenbrink spectral sequence, and use this to prove Theorem 5.8. We introduce two spectral sequences. One of these spectral sequences computes the tropical cohomology $H_{\text{trop}}^{p, \bullet}$, and the another one computes the cohomology of the $2p$ -th row of the tropical Steenbrink spectral sequence. We show that the two spectral sequences are isomorphic in page one. Then using a *spectral resolution lemma* we generalize the isomorphism in page one to all pages, from which we will deduce that these two cohomologies coincide as stated by Theorem 5.8.

Consider first the cochain complex $C^{\bullet}(X, \mathbf{F}^p)$ which calculates the tropical cohomology groups $H_{\text{trop}}^{p, q}(X)$. By Corollary 5.14, the decreasing filtration W^{\bullet} on \mathbf{F}^p induces a decreasing filtration on the cochain complex $C^{\bullet}(X, \mathbf{F}^p)$. By an abuse of the notation, we denote this filtration by W^{\bullet} . This leads to a spectral sequence

$$(5.1) \quad {}_p C_0^{\bullet, \bullet} \implies H^{\bullet}(X, \mathbf{F}^p) = H_{\text{trop}}^{p, \bullet}(X)$$

FIGURE 2. The zero-th page of the tropical spectral sequence ${}_p\mathbf{C}_0^{\bullet,\bullet}$ over \mathbf{F}^p .

$$\begin{array}{ccccc}
 \bigoplus_{|\delta|=0} \wedge^0 \mathbf{T}^* \delta \otimes \mathbf{F}^p(\underline{0}^\delta) & \xrightarrow{\pi^* + d^i} & \bigoplus_{|\delta|=1} \wedge^0 \mathbf{T}^* \delta \otimes \mathbf{F}^p(\underline{0}^\delta) & \cdots & \bigoplus_{|\delta|=d-p} \wedge^0 \mathbf{T}^* \delta \otimes \mathbf{F}^p(\underline{0}^\delta) \\
 \downarrow i^* \otimes i_\perp^* & & \downarrow & & \downarrow \\
 \bigoplus_{|\delta|=1} \wedge^1 \mathbf{T}^* \delta \otimes \mathbf{F}^{p-1}(\underline{0}^\delta) & \dashrightarrow & \bigoplus_{|\delta|=2} \wedge^1 \mathbf{T}^* \delta \otimes \mathbf{F}^{p-1}(\underline{0}^\delta) & \cdots & \bigoplus_{|\delta|=d-p+1} \wedge^1 \mathbf{T}^* \delta \otimes \mathbf{F}^{p-1}(\underline{0}^\delta) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \bigoplus_{|\delta|=p} \wedge^p \mathbf{T}^* \delta \otimes \mathbf{F}^0(\underline{0}^\delta) & \dashrightarrow & \bigoplus_{|\delta|=p+1} \wedge^p \mathbf{T}^* \delta \otimes \mathbf{F}^0(\underline{0}^\delta) & \cdots & \bigoplus_{|\delta|=d} \wedge^p \mathbf{T}^* \delta \otimes \mathbf{F}^0(\underline{0}^\delta)
 \end{array}$$

where

$${}_p\mathbf{C}_0^{a,b} = \text{gr}_w^a C^{a+b}(X, \mathbf{F}^p) = \bigoplus_{\substack{\delta \in X \\ |\delta|=a+b}} \wedge^b \mathbf{T}^* \delta \otimes \mathbf{F}^{p-b}(\underline{0}^\delta)$$

and the differentials in page zero, which are of bidegree $(0, 1)$, are given by Proposition 5.15. We call this the *tropical spectral sequence*. The zero-th page of this spectral sequence is given in Figure 2. The dashed arrows correspond to the maps of the first page. The explicit form of all these maps appear later in this section.

Before introducing the second spectral sequence, let us consider the $2p$ -th row $\mathbf{ST}_1^{\bullet,2p}$ of the Steenbrink spectral sequence. This row can be decomposed into a double complex as follows. We define the double complex ${}_p\mathbf{St}^{\bullet,\bullet}$ by

$${}_p\mathbf{St}^{a,b} := \begin{cases} \bigoplus_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta|=p+a-b}} H^{2b}(\delta) & \text{if } a \geq 0 \text{ and } b \leq p, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

whose differential of bidegree $(1, 0)$ is i^* and whose differential of bidegree $(0, 1)$ is Gys . From the identification

$${}_p\mathbf{St}^{a,b} = \mathbf{ST}^{a+b-p, 2p, p+a-b},$$

and the following equivalence

$$p + a - b \geq |a + b - p| \iff a \geq 0 \text{ and } b \leq p,$$

we deduce that

$$\mathbf{ST}_1^{\bullet,2p} = \text{Tot}^\bullet({}_p\mathbf{St}^{\bullet,\bullet})[p].$$

The double complex ${}_p\mathbf{St}^{\bullet,\bullet}$ is represented in Figure 3.

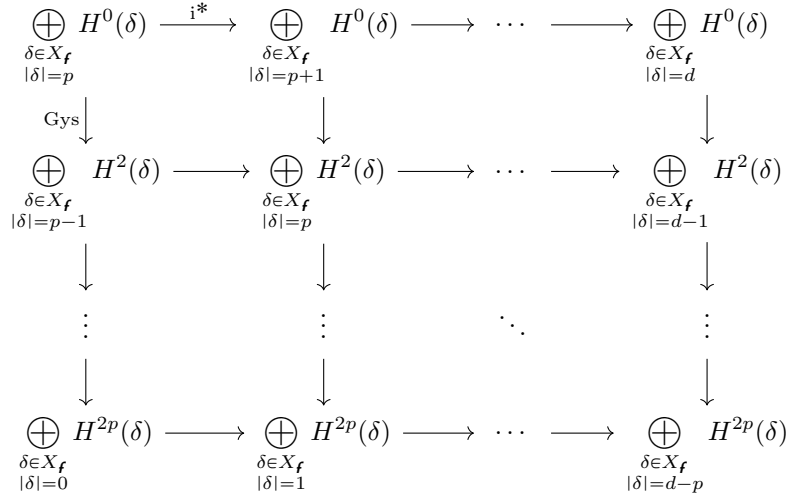
Finally, we introduce another double complex ${}_p\overline{\mathbf{St}}^{\bullet,\bullet}$, which will play the role of a bridge between ${}_p\mathbf{St}_0^{\bullet,\bullet}$ and ${}_p\mathbf{C}_0^{\bullet,\bullet}$ via Proposition 5.16 and Theorem 5.17 below. Recall that for $\delta \in X$, the max-sedentarity of δ is defined by

$$\text{maxsed}(\delta) := \max\{\text{sed}(x) \mid x \in \delta\} \in X_{\text{rec}}.$$

The double complex ${}_p\overline{\mathbf{St}}^{\bullet,\bullet}$ is defined by

$${}_p\overline{\mathbf{St}}^{\bullet,\bullet} = \bigoplus_{\sigma \in X_{\text{rec}}} {}_p\overline{\mathbf{St}}^{\sigma,\bullet}$$

FIGURE 3. The p -th unfolded Steenbrink double complex ${}_p\text{St}^{\bullet,\bullet}$.



where, for $\sigma \in X_{\text{rec}}$, we set

$${}_p\overline{\text{St}}^{\sigma,a,b} := \begin{cases} \bigoplus_{\substack{\delta \in X \\ \text{maxsed}(\delta)=\sigma \\ |\delta|=p+a-b \\ |\delta_{\text{rec}}| \leq a}} H^{2b}(\delta) & \text{if } b \leq p, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

On ${}_p\overline{\text{St}}^{\sigma,\bullet,\bullet}$, the differentials of bidegree $(0, 1)$ are given by Gys, and those of bidegree $(1, 0)$ are given by $i^* + \pi^*$. Note that, on the whole complex ${}_p\overline{\text{St}}^{\sigma,\bullet,\bullet}$, no differentials goes from ${}_p\overline{\text{St}}^{\sigma,\bullet,\bullet}$ to ${}_p\overline{\text{St}}^{\sigma',\bullet,\bullet}$ if $\sigma \neq \sigma'$. In other words, the differentials Gys and i^* are restricted to those pairs of faces $\gamma \prec \delta$ such that $\text{maxsed}(\gamma) = \text{maxsed}(\delta)$ and $\text{sed}(\gamma) = \text{sed}(\delta)$, or equivalently such that $|\gamma_{\text{rec}}| = |\delta_{\text{rec}}|$ and $\text{sed}(\gamma) = \text{sed}(\delta)$.

The total double complex ${}_p\overline{\text{St}}^{\bullet,\bullet,\bullet}$ is represented in Figure 4.

For the cone $\underline{0}$ of X_{rec} , the double complex ${}_p\overline{\text{St}}^{\underline{0},\bullet,\bullet}$ is described as follows. Faces δ such that $\text{maxsed}(\delta) = \underline{0}$ are exactly faces of X_f . Moreover, this implies that $|\delta_{\text{rec}}| = 0$. Thus, $|\delta_{\text{rec}}| \leq a$ is equivalent to $a \geq 0$. Hence,

$${}_p\overline{\text{St}}^{\underline{0},\bullet,\bullet} = {}_p\text{St}^{\bullet,\bullet,\bullet}.$$

For any non-zero cone $\sigma \in X_{\text{rec}}$, we have the following result whose proof will be given at the end of this section.

PROPOSITION 5.16. *Let $\sigma \in X_{\text{rec}} \setminus \{0\}$. Then the cohomology of $\text{Tot}^\bullet({}_p\overline{\text{St}}^{\sigma,\bullet,\bullet})$ is zero.*

PROOF. Section 5.9 is devoted to the proof of this proposition. □

Filtration by columns of the double complex ${}_p\overline{\text{St}}^{\bullet,\bullet,\bullet}$ gives a spectral sequence ${}^{\downarrow}{}_p\overline{\text{St}}_0^{\bullet,\bullet,\bullet}$, which abuts to the cohomology of the total complex of ${}_p\overline{\text{St}}^{\bullet,\bullet,\bullet}$. By the previous discussion and Proposition 5.16, this cohomology is just the cohomology of $\text{Tot}^\bullet({}_p\text{St}^{\bullet,\bullet,\bullet})$, i.e.,

$$(5.2) \quad {}^{\downarrow}{}_p\overline{\text{St}}_0^{\bullet,\bullet,\bullet} \implies H^\bullet(\text{Tot}^\bullet({}_p\text{St}^{\bullet,\bullet,\bullet})) = H^\bullet(\text{ST}_1^{\bullet,2p})[-p].$$

The link between the two spectral sequences ${}_p\mathbf{C}^{\bullet,\bullet,\bullet}$ and ${}^{\downarrow}{}_p\overline{\text{St}}^{\bullet,\bullet,\bullet}$ is summarized by the following theorem.

FIGURE 4. The p -th extended Steenbrink double complex ${}_p\overline{\text{St}}^{\bullet,\bullet}$. The filtration by columns gives the spectral sequence $\downarrow {}_p\overline{\text{St}}^{\bullet,\bullet}$. Note that here, Gys has to be restricted to pairs of faces with the same max-sedentarity.

$$\begin{array}{ccccc}
 \bigoplus_{\substack{|\delta|=p \\ |\delta_\infty| \leq 0}} H^0(\delta) & \xrightarrow{i^* + \pi^*} & \bigoplus_{\substack{|\delta|=p+1 \\ |\delta_\infty| \leq 1}} H^0(\delta) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \bigoplus_{\substack{|\delta|=d \\ |\delta_\infty| \leq d-p}} H^0(\delta) \\
 \text{Gys} \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 \bigoplus_{\substack{|\delta|=p-1 \\ |\delta_\infty| \leq 0}} H^2(\delta) & \longrightarrow & \bigoplus_{\substack{|\delta|=p \\ |\delta_\infty| \leq 1}} H^2(\delta) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \bigoplus_{\substack{|\delta|=d-1 \\ |\delta_\infty| \leq d-p}} H^2(\delta) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \ddots & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 \bigoplus_{\substack{|\delta|=0 \\ |\delta_\infty| \leq 0}} H^{2p}(\delta) & \longrightarrow & \bigoplus_{\substack{|\delta|=1 \\ |\delta_\infty| \leq 1}} H^{2p}(\delta) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \bigoplus_{\substack{|\delta|=d-p \\ |\delta_\infty| \leq d-p}} H^{2p}(\delta)
 \end{array}$$

THEOREM 5.17. *The Tropical Deligne exact sequence induces compatible canonical isomorphisms*

$${}_p\mathbf{C}_k^{\bullet,\bullet} \simeq \downarrow {}_p\overline{\text{St}}_k^{\bullet,\bullet},$$

between the k -th pages for any $k \geq 1$.

PROOF. Section 5.6 is devoted to the proof of the isomorphism between first pages, and Section 5.8 extends the isomorphism to further pages. \square

We can now present the proof of the main theorem of this section.

PROOF OF THEOREM 5.8. We recall that we have to prove

$$H^\bullet(\text{ST}_1^{\bullet,2p}, d)[-p] = H_{\text{trop}}^{p,\bullet}(\mathfrak{X}).$$

By Theorem 5.17, we have

$${}_p\mathbf{C}_k^{\bullet,\bullet} \simeq \downarrow {}_p\overline{\text{St}}_k^{\bullet,\bullet},$$

for any $k \geq 0$. In particular, both spectral sequences have the same abutment. This implies y (5.1) and (5.2) that we have a (non-canonical) isomorphism

$$H^\bullet(\text{ST}_1^{\bullet,2p}, d)[-p] \simeq H_{\text{trop}}^{p,\bullet}(\mathfrak{X}). \quad \square$$

REMARK 5.18. We note that though we cannot expect to have a canonical isomorphism $H^\bullet(\text{ST}_1^{\bullet,2p}, d)[-p] \simeq H_{\text{trop}}^{p,\bullet}(\mathfrak{X})$, the isomorphism

$$\text{gr}_F^s H^\bullet(\text{ST}_1^{\bullet,2p}, d)[-p] \simeq \text{gr}_W^s H_{\text{trop}}^{p,\bullet}(\mathfrak{X})$$

between the graduations is canonical for any s . Here the filtration F^\bullet is the filtration induced by columns of ${}_p\overline{\text{St}}^{\bullet,\bullet}$. The isomorphism between the two cohomology groups above should depend on the data of a smooth deformation of \mathfrak{X} . \diamond

In the remaining of this section, we present the proofs of Theorem 5.17, Proposition 5.16 and Proposition 5.5.

5.6. From ${}_p\mathbf{C}_1^{\bullet,\bullet}$ to $\downarrow {}_p\overline{\mathbf{St}}_1^{\bullet,\bullet}$. In this section and the two following ones, we prove Theorem 5.17, which states that ${}_p\mathbf{C}_k^{\bullet,\bullet}$ is canonically isomorphic to ${}_p\overline{\mathbf{St}}_k^{\bullet,\bullet}$ for $k \geq 1$. As a warm-up, in this section, we study the case of the first page $k = 1$. Some of the results and constructions in this section will be used in the next section to achieve the isomorphism of other pages. In order to keep the reading flow, a few technical points of this section will be treated in Appendix 10.

We have to prove that, for every integer a , the cochain complex

$${}_p\mathbf{C}_0^{a,\bullet} : \quad 0 \rightarrow \bigoplus_{|\delta|=a} \wedge^0 \mathbf{T}^* \delta \otimes \mathbf{F}^p(\underline{0}^\delta) \rightarrow \bigoplus_{|\delta|=a+1} \wedge^1 \mathbf{T}^* \delta \otimes \mathbf{F}^{p-1}(\underline{0}^\delta) \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow \bigoplus_{|\delta|=a+p} \wedge^p \mathbf{T}^* \delta \otimes \mathbf{F}^0(\underline{0}^\delta) \rightarrow 0$$

is quasi-isomorphic to

$${}_p\overline{\mathbf{St}}_0^{a,\bullet} : \quad 0 \rightarrow \bigoplus_{\substack{|\delta|=p+a \\ |\delta_{\text{rec}}| \leq a}} H^0(\delta) \rightarrow \bigoplus_{\substack{|\delta|=p+a-1 \\ |\delta_{\text{rec}}| \leq a}} H^2(\delta) \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\substack{|\delta|=a \\ |\delta_{\text{rec}}| \leq a}} H^{2p}(\delta) \rightarrow 0.$$

Moreover, the induced isomorphisms in cohomology must commute with the differentials of degree $(1, 0)$ on the respective first pages:

$$\begin{array}{ccc} {}_p\mathbf{C}_1^{a,\bullet} & \longrightarrow & {}_p\mathbf{C}_1^{a+1,\bullet} \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \downarrow {}_p\overline{\mathbf{St}}_1^{a,\bullet} & \xrightarrow{i^* + \pi^*} & \downarrow {}_p\overline{\mathbf{St}}_1^{a+1,\bullet} \end{array}$$

In order to calculate the cohomology of the first cochain complex, we use the tropical Deligne resolution. Applying that exact sequence to the unimodular fan Σ^δ and to any integer s , we get the exact sequence

$$0 \rightarrow \mathbf{F}^s(\underline{0}^\delta) \rightarrow \bigoplus_{\substack{\zeta \in \Sigma^\delta \\ |\zeta|=s}} H^0(\zeta) \rightarrow \bigoplus_{\substack{\zeta \in \Sigma^\delta \\ |\zeta|=s-1}} H^2(\zeta) \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\substack{\zeta \in \Sigma^\delta \\ |\zeta|=1}} H^{2s-2}(\zeta) \rightarrow H^{2s}(\underline{0}^\delta) \rightarrow 0.$$

Given the correspondence between cones $\zeta \in \Sigma^\delta$, and faces $\eta \in X$ which contain δ , with the same sedentarity, we rewrite the exact sequence above in the form

$$0 \rightarrow \mathbf{F}^s(\underline{0}^\delta) \rightarrow \bigoplus_{\substack{\eta > \delta \\ |\eta|=s+|\delta| \\ \text{sed}(\eta) = \text{sed}(\delta)}} H^0(\eta) \rightarrow \bigoplus_{\substack{\eta > \delta \\ |\eta|=s-1+|\delta| \\ \text{sed}(\eta) = \text{sed}(\delta)}} H^2(\eta) \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\substack{\eta > \delta \\ |\eta|=1+|\delta| \\ \text{sed}(\eta) = \text{sed}(\delta)}} H^{2s-2}(\eta) \rightarrow H^{2s}(\delta) \rightarrow 0.$$

Replacing now each $\mathbf{F}^s(\underline{0}^\delta)$ in ${}_p\mathbf{C}_0^{a,\bullet}$ by the resolution given by the tropical Deligne complex, we get the double complex ${}_a\mathbf{D}^{b,b'}$ whose total complex has the same cohomology as ${}_p\mathbf{C}^{a,\bullet}$. More precisely, define the double complex ${}_a\mathbf{D}^{\bullet,\bullet}$ as follows.

$${}_a\mathbf{D}^{b,b'} := \bigoplus_{|\delta|=a+b} \wedge^b \mathbf{T}^* \delta \otimes \left(\bigoplus_{\substack{\eta > \delta \\ |\eta|=p+a-b' \\ \text{sed}(\eta) = \text{sed}(\delta)}} H^{2b'}(\eta) \right).$$

The differential d' of bidegree $(0, 1)$ comes from the Deligne sequence and is $\text{id} \otimes \text{Gys}$. The differential of bidegree $(1, 0)$ is defined as follows, thanks to the map $i_{\parallel}^* : \wedge^s \mathbf{T}^* \gamma \rightarrow \wedge^{s+1} \mathbf{T}^* \delta$ which has been defined right before Proposition 5.15. The differential d of bidegree $(1, 0)$ is chosen to be $i_{\parallel}^* \otimes \text{id}$ (extended using our sign function as in Section 5.1) on rows with even indices and to be $-i_{\parallel}^* \otimes \text{id}$ on rows with odd indices. More concisely, we set

$$d := (-1)^{b'} i_{\parallel}^* \otimes \text{id}.$$

PROPOSITION 5.19. *We have $dd' + d'd = 0$. Moreover, the inclusion $({}_pC_0^{a,\bullet}, i_{//}^* \otimes i_{\perp}^*) \hookrightarrow ({}_aD^{\bullet,0}, d')$ is a morphism of cochain complexes.*

PROOF. This follows by a simple computation. The details are given in Appendix 10. \square

By the exactness of the tropical Deligne sequence that we proved in Proposition 5.9, we know that the b -th column of ${}_aD_0^{b,\bullet}$ of ${}_aD_0^{\bullet,\bullet}$ is a right resolution of ${}_pC_0^{a,b}$.

We claim the following result.

PROPOSITION 5.20. *The b' -th row ${}_aD_0^{\bullet,b'}$ of ${}_aD_0^{\bullet,\bullet}$ is a right resolution of ${}_p\overline{St}_0^{a,b'}$.*

The proof of this proposition is given in Section 5.7. Admitting this result for the moment, we explain how to finish the proof of the isomorphism between first pages. We will need the following Lemma, which seems to be folklore, for which we provide a proof.

LEMMA 5.21 (Zigzag isomorphism). *Let $A^{\bullet,\bullet}$ be a double complex of differentials d and d' of respective degree $(1, 0)$ and $(0, 1)$. Assume that*

- $dd' + d'd = 0$,
- $A^{b,b'} = 0$ if $b < 0$ or $b' < 0$,
- $A^{b,\bullet}$ is exact if $b > 0$,
- $A^{\bullet,b'}$ is exact if $b' > 0$.

Then, there is a canonical isomorphism

$$H^{\bullet}(A^{0,\bullet}) \simeq H^{\bullet}(A^{\bullet,0}).$$

Moreover, if $B^{\bullet,\bullet}$ is another double complex with the same property, and if $\Phi: A^{\bullet,\bullet} \rightarrow B^{\bullet,\bullet}$ is a morphism of double complexes, then the following diagram commutes.

$$\begin{array}{ccc} H^{\bullet}(A^{0,\bullet}) & \xrightarrow{\Phi} & H^{\bullet}(B^{0,\bullet}) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ H^{\bullet}(A^{\bullet,0}) & \xrightarrow{\Phi} & H^{\bullet}(B^{\bullet,0}) \end{array}$$

where Φ denotes the induced maps on the cohomologies. This also holds if Φ anticommutes with the differentials.

The isomorphism $H^{\bullet}(A^{0,\bullet}) \simeq H^{\bullet}(A^{\bullet,0})$ comes from the inclusions

$$(A^{0,\bullet}, d') \hookrightarrow (\text{Tot}(A^{\bullet,\bullet}), d + d') \hookleftarrow (A^{\bullet,0}, d)$$

which are both quasi-isomorphisms. In the following, we give a canonical description of this isomorphism.

Let b be a non-negative integer and b' be any integer. Define

$$L^{b,b'} := \frac{\ker(dd') \cap A^{b,b'}}{(\text{Im}(d) + \text{Im}(d')) \cap A^{b,b'}} \quad \text{and} \quad R^{b,b'} := \frac{\ker(d) \cap \ker(d') \cap A^{b,b'+1}}{\text{Im}(dd') \cap A^{b,b'+1}}.$$

We claim the following.

CLAIM 5.22. *Notations as in Lemma 5.21, the map d' induces an isomorphism*

$$L^{b',b'} \xrightarrow[d']{\simeq} R^{b,b'}.$$

PROOF. Let y be an element of $\ker(d) \cap \ker(d') \cap A^{b,b'+1}$. By the exactness of the b -th column, there exists a preimage x of y by d' . Moreover, $x \in \ker(dd') \cap A^{b,b'}$. Hence,

d' is surjective from $\ker(dd') \cap \mathbf{A}^{b,b'}$ to $\ker(d) \cap \ker(d') \cap \mathbf{A}^{b,b'+1}$. From the trivial identity $\text{Im}(dd') = d'\text{Im}(d)$, we get

$$d'^{-1}(\text{Im}(dd') \cap \mathbf{A}^{b,b'+1}) = (\text{Im}(d) + \ker(d')) \cap \mathbf{A}^{b,b'} = (\text{Im}(d) + \text{Im}(d')) \cap \mathbf{A}^{b,b'}.$$

This gives the isomorphism $d': \mathbf{L}^{b,b'} \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}^{b,b'+1}$. □

PROOF OF LEMMA 5.21. Let b be a non-negative and b' be any integer. By the previous claim, we have an isomorphism $d': \mathbf{L}^{b,b'} \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}^{b,b'+1}$.

By symmetry, if b' is non-negative and b is any integer, we get a second isomorphism $d: \mathbf{L}^{b,b'} \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}^{b+1,b'}$. Thus, for any non-negative integer k , we obtain a zigzag of isomorphisms:

$$\begin{array}{c}
 \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \mathbf{L}^{k,0} \\
 \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \downarrow \\
 \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \downarrow \\
 \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \downarrow \\
 \mathbf{L}^{0,k} \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet
 \end{array}
 \quad \mathbf{L}^{k,0} \xrightarrow{\sim_{d'}} \mathbf{R}^{k,1} \xleftarrow{\sim_{-d}} \mathbf{L}^{k-1,1} \xrightarrow{\sim_{d'}} \mathbf{R}^{k-1,2} \xleftarrow{\sim_{-d}} \dots \xrightarrow{\sim_{d'}} \mathbf{R}^{1,k} \xleftarrow{\sim_{-d}} \mathbf{L}^{0,k}.$$

Notice that we take $-d$ and not d . We refer to Remark 5.23 for an explanation of this choice.

Since d' is injective on $\mathbf{A}^{\bullet,0}$, and since $\text{Im}(d') \cap \mathbf{A}^{k,0} = \{0\}$, we obtain

$$\mathbf{L}^{k,0} = \frac{\ker(dd') \cap \mathbf{A}^{k,0}}{(\text{Im}(d) + \text{Im}(d')) \cap \mathbf{A}^{k,0}} = \frac{\ker(d) \cap \mathbf{A}^{k,0}}{\text{Im}(d) \cap \mathbf{A}^{k,0}} = H^k(\mathbf{A}^{\bullet,0}).$$

By a symmetric argument, $\mathbf{L}^{0,k} = H^k(\mathbf{A}^{0,\bullet})$. This gives an isomorphism

$$H^k(\mathbf{A}^{\bullet,0}) \xrightarrow{\sim} H^k(\mathbf{A}^{0,\bullet}).$$

The second part of the lemma is clear from the above claim and the preceding arguments. (In the case Φ anticommutes, the commutative diagram holds for $(-1)^{b+b'}\Phi$ which commutes.) □

REMARK 5.23. We now explain why we choose the isomorphisms d' and $-d$ in the above proof. Let $a \in \mathbf{R}^{k-i,i+1}$. The zigzag map sends a to $b \in \mathbf{L}^{k-i,i}$ such that $d'b = a$, and also to $a' = -db \in \mathbf{R}^{k-i+1,i}$. Thus, $a - a' = (d + d')b \in \text{Im}(d + d')$. Moreover, by the definition of $\mathbf{R}^{\bullet,\bullet}$, it is clear that a and a' belong to $\ker(d + d')$. Hence, a and a' are two representatives of the same element of

$$H^{k+1}(\text{Tot}(\mathbf{A}^{\bullet,\bullet}, d + d')),$$

i.e., the zigzag isomorphism is just identity on the cohomology of $\mathbf{A}^{\bullet,\bullet}$. ◇

PROOF OF THEOREM 5.17 IN PAGE ONE. Define the double complex ${}_a\mathbf{A}^{b,b'}$ by shifting the double complex ${}_a\mathbf{D}^{b,b'}$ by the vector $(1, 1)$ and by inserting the the complexes ${}_p\mathbf{C}_0^{a,\bullet}[-1]$ and ${}_p\overline{\mathbf{S}}\mathbf{T}_0^{a,\bullet}[-1]$ as the zero-th row and the zero-th column, respectively. More precisely, we set

$${}_a\mathbf{A}^{b,b'} = \begin{cases} 0 & \text{if } b < 0 \text{ or } b' < 0, \\ {}_p\mathbf{C}_0^{a,b-1} & \text{if } b' = 0 \\ {}_p\overline{\mathbf{S}}\mathbf{T}_0^{a,b'-1} & \text{if } b = 0 \\ {}_a\mathbf{D}^{b-1,b'-1} & \text{if } b > 0 \text{ and } b' > 0, \end{cases}$$

with the corresponding differentials d and d' of respective bidegree $(1, 0)$ and $(0, 1)$ such that

$$\begin{aligned}
 {}_a\mathbf{A}^{\bullet,0} &= {}_p\mathbf{C}_0^{a,\bullet-1}, \\
 {}_a\mathbf{A}^{\bullet,b'} &= \left({}_p\overline{\mathbf{S}}\mathbf{T}_0^{a,b'-1} \hookrightarrow {}_a\mathbf{D}^{\bullet-1,b'-1} \right) \quad \forall b' \geq 1, \\
 {}_a\mathbf{A}^{0,\bullet} &= {}_p\overline{\mathbf{S}}\mathbf{T}_0^{a,\bullet-1}, \text{ and} \\
 {}_a\mathbf{A}^{b,\bullet} &= \left({}_p\mathbf{C}_0^{a,b-1} \hookrightarrow {}_a\mathbf{D}^{b-1,\bullet-1} \right) \quad \forall b \geq 1.
 \end{aligned}$$

One can easily extend Proposition 5.19 to get that d and d' commute (the details are given in Appendix 10). Moreover, by the exactness of Deligne sequence and by Proposition 5.20, all rows but the 0-th one and all columns but the 0-th one are exact. Thus we can apply Lemma 5.21 to get an isomorphism

$$H^\bullet({}_a\mathbf{A}^{\bullet,0}) \simeq H^\bullet({}_a\mathbf{A}^{0,\bullet}).$$

Looking at the definition of ${}_a\mathbf{A}^{\bullet,\bullet}$, up to a shift by 1, this isomorphism is just what we want, i.e., the following isomorphism in page one.

$${}_p\mathbf{C}_1^{a,\bullet} \simeq {}_p\overline{\mathbf{St}}_1^{a,\bullet}.$$

It remains to prove the commutativity of the following diagram.

$$\begin{array}{ccc} {}_p\mathbf{C}_1^{a,\bullet} & \xrightarrow{i^*+\pi^*} & {}_p\mathbf{C}_1^{a+1,\bullet} \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ {}_p\overline{\mathbf{St}}_1^{a,\bullet} & \xrightarrow{i^*+\pi^*} & {}_p\overline{\mathbf{St}}_1^{a+1,\bullet} \end{array}$$

To prove this, we construct two anticommutative morphisms of double complexes.

The first morphism corresponds to π^* and is naturally defined as follows. On ${}_p\mathbf{C}^{a,b}$ it is given by $\pi^* \otimes \text{id}$, on ${}_p\overline{\mathbf{St}}^{a,b'}$ it equals π^* , and on ${}_a\mathbf{D}^{b,b'}$ it is defined by $\pi^* \otimes \text{id}$. The anticommutativity properties are easy to check.

The second morphism, which we denote d^i , corresponds to i^* and is defined as follows. To keep the reading flow, we postpone the proof that d^i is indeed a morphism and more details about the construction to Appendix 10.

For each face $\delta \in X$, let $p_\delta: N_{\mathbb{R}}^{\text{sed}(\delta)} \rightarrow T_\delta$ be a projection as defined just after Proposition 5.12. Assume moreover that the projections p_δ are compatible in the following sense:

- if $\gamma \prec \delta$ have not the same sedentarity, then $\pi_{\text{sed}(\delta) \prec \text{sed}(\gamma)} p_\delta = p_\gamma \pi_{\text{sed}(\delta) \prec \text{sed}(\gamma)}$, where $\pi_{\text{sed}(\delta) \prec \text{sed}(\gamma)}: N_{\mathbb{R}}^{\text{sed}(\delta)} \rightarrow N_{\mathbb{R}}^{\text{sed}(\gamma)}$ is the natural projection;
- if $\gamma < \delta$, then $p_\gamma p_\delta = p_\gamma$.

For instance, we can choose an inner product on $N_{\mathbb{R}}$ and extend it naturally on all the strata $N_{\mathbb{R}}^\sigma$ for $\sigma \in X_{\text{rec}}$. Then, if the projections p_δ are chosen to be the orthogonal projections with respect to this inner product, then they are compatible in the above sense.

With these conventions, we define d^i on ${}_p\overline{\mathbf{St}}^{a,b'}$ by $d^i := i^*$. On ${}_p\mathbf{C}^{a,b}$, let $\alpha \otimes \beta \in \wedge^b T^* \gamma \otimes \mathbf{F}^{p-b}(\underline{0}^\gamma)$, where $\delta \succ \gamma$ is a pair of faces of same sedentarity and $|\gamma| = a + b$. Then the part of its image by d^i in $\wedge^b T^* \delta \otimes \mathbf{F}^{p-b}(\underline{0}^\delta)$ is defined by

$$(5.3) \quad \text{sign}(\gamma, \delta) p_\gamma|_{T_\delta}^*(\alpha) \otimes (\mathbf{u} \mapsto \pi_\delta^* \beta(\mathbf{u}')),$$

where, for $\mathbf{u} \in \mathbf{F}^{p-b}(\underline{0}^\delta)$, the multivector \mathbf{u}' denotes the only element of $\wedge^{p-b} \ker(p_\gamma)$ such that $\pi_\delta(\mathbf{u}') = \mathbf{u}$ (one can check that $\mathbf{u} \in \mathbf{F}_{p-b}(\gamma)$).

On ${}_a\mathbf{D}^{b,b'}$, let $\alpha \otimes x \in \wedge^b T^* \gamma \otimes H^{2b'}(\eta)$ where $\eta \succ \gamma$ is a face of dimension $|\gamma| + p - b - b'$. Then the part of its image by d^i in $\wedge^b T^* \delta \otimes H^{2b'}(\mu)$, with $\mu \succ \delta$, is given by

$$\text{sign}(\eta, \mu) \mathbf{n}_{\delta/\gamma}^*(p_\delta(u)) p_\gamma|_{T_\delta}^*(\alpha) \otimes i_{\eta \prec \mu}^*(x),$$

where u is a vector going from any point of $T\gamma$ to the vertex of μ which is not in η .

We will prove in Appendix 10 that this map is indeed a morphism, and that the induced map on the first page ${}_p\mathbf{C}_1^{a,\bullet}$ is equal to the differential corresponding to i^* given by the spectral sequence. This concludes the proof of the proposition. \square

5.7. Proof of Proposition 5.20. In order to conclude the proof of isomorphism between the first pages, we are thus left to prove Proposition 5.20. This proposition claims the exactness of the following sequence for any integer b' :

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow \bigoplus_{\substack{|\eta|=p+a-b' \\ |\eta_\infty| \leq a}} H^{2b'}(\eta) &\rightarrow \bigoplus_{|\delta|=a} \bigwedge^0 T^* \delta \otimes \left(\bigoplus_{\substack{\eta > \delta \\ |\eta|=p+a-b' \\ \text{sed}(\eta)=\text{sed}(\delta)}} H^{2b'}(\eta) \right) \rightarrow \bigoplus_{|\delta|=a+1} \bigwedge^1 T^* \delta \otimes \left(\bigoplus_{\substack{\eta > \delta \\ |\eta|=p+a-b' \\ \text{sed}(\eta)=\text{sed}(\delta)}} H^{2b'}(\eta) \right) \rightarrow \\
 &\dots \rightarrow \bigoplus_{|\delta|=a+p-b'} \bigwedge^{p-b'} T^* \delta \otimes \left(\bigoplus_{\substack{\eta > \delta \\ |\eta|=p+a-b' \\ \text{sed}(\eta)=\text{sed}(\delta)}} H^{2b'}(\eta) \right) \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

where we recall that the maps are $i_{\parallel}^* \otimes \text{id}$ and that the relations $\eta > \delta$ only concern those faces which have the same sedentarity $\text{sed}(\eta) = \text{sed}(\delta)$.

As the form of each term suggests, we can decompose this sequence as a direct sum of sequences over fixed η of dimension $s := p + a - b'$ as follows:

$$\bigoplus_{|\eta|=s} \left(0 \rightarrow \mathbb{R}^{\epsilon_\eta} \rightarrow \bigoplus_{\substack{\delta < \eta \\ |\delta|=a}} \bigwedge^0 T^* \delta \rightarrow \bigoplus_{\substack{\delta < \eta \\ |\delta|=a+1}} \bigwedge^1 T^* \delta \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\substack{\delta < \eta \\ |\delta|=s}} \bigwedge^{p-b'} T^* \delta \rightarrow 0 \right) \otimes H^{2b'}(\eta),$$

where

$$\epsilon_\eta = \begin{cases} 1 & \text{if } |\eta_{\text{rec}}| \leq a, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Therefore, the following result clearly implies Proposition 5.20.

PROPOSITION 5.24. *For each pair of non-negative integers $r \leq n$, and for each (simplicial) unimodular polyhedron η of dimension n , the cochain complex*

$$C_r^\bullet(\eta): 0 \rightarrow \bigoplus_{\substack{\delta < \eta \\ |\delta|=r}} \bigwedge^0 T^* \delta[-r] \rightarrow \bigoplus_{\substack{\delta < \eta \\ |\delta|=r+1}} \bigwedge^1 T^* \delta[-r-1] \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\substack{\delta < \eta \\ |\delta|=n}} \bigwedge^{n-r} T^* \delta[-n] \rightarrow 0,$$

whose maps are given by i_{\parallel}^* , has cohomology

$$\begin{cases} \mathbb{R}[-r] & \text{if } |\eta_{\text{rec}}| \leq r, \\ 0 & \text{if } |\eta_{\text{rec}}| > r. \end{cases}$$

PROOF. We will reduce the statement to the computation of some appropriate cohomology groups of the tropical projective spaces.

We begin with the case $|\eta_{\text{rec}}| = 0$, i.e., η is a unimodular simplex. Let us study the dual complex instead, which using the duality between $\bigwedge^r T^* \delta$ and $\bigwedge^{|\delta|-r} T^* \delta$ for each simplex δ , has the following form

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\substack{\delta < \eta \\ |\delta|=n}} \bigwedge^r T^* \delta[-n] \rightarrow \bigoplus_{\substack{\delta < \eta \\ |\delta|=n-1}} \bigwedge^r T^* \delta[-n+1] \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\substack{\delta < \eta \\ |\delta|=r}} \bigwedge^r T^* \delta[-r] \rightarrow 0.$$

The maps in this complex are induced by restriction map $\bigwedge^r T^* \delta \rightarrow \bigwedge^r T^* \zeta$ for inclusion of faces $\zeta \prec \delta$, extended with sign according to our convention in Section 5.1.

For the ease of arguments, it will be convenient to choose an inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on $T\eta$. This inner product restricts to $T\delta$ for each face δ and extends naturally to multivectors. More precisely, for any collection of vectors $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k$, we set

$$\langle u_1 \wedge \dots \wedge u_k, v_1 \wedge \dots \wedge v_k \rangle := \det \left((\langle u_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq k} \right).$$

Let $\gamma \prec \delta$ be a pair of faces. We define $p_{\delta \succ \gamma}: T\delta \rightarrow T\gamma$ to be the orthogonal projection and naturally extend it to multivectors in the exterior algebra.

Let $\alpha \in \bigwedge^r T^* \delta$. We denote by α^* the dual multivector of α , defined by the property

$$\alpha(\mathbf{u}) = \langle \alpha^*, \mathbf{u} \rangle$$

for any $\mathbf{u} \in \bigwedge^r T\delta$.

Moreover, we denote by $\alpha|_\gamma$ the restriction of α on $\bigwedge^r T\gamma$. By adjunction property, we get the following equality:

$$p_{\delta > \gamma}(\alpha^*) = (\alpha|_\gamma)^*.$$

Indeed, for any $\mathbf{u} \in \bigwedge^r T\gamma \subset \bigwedge^r T\delta$, we have

$$\alpha|_\gamma(\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{u}) = \langle \alpha^*, \mathbf{u} \rangle = \langle p_{\delta > \gamma}(\alpha^*), \mathbf{u} \rangle.$$

This implies that the linear map which sends $\alpha \mapsto \alpha^*$ provides an isomorphism between the two following complexes: our original complex on one side,

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\substack{\delta < \eta \\ |\delta|=n}} \bigwedge^r T^* \delta \rightarrow \bigoplus_{\substack{\delta < \eta \\ |\delta|=n-1}} \bigwedge^r T^* \delta \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\substack{\delta < \eta \\ |\delta|=r}} \bigwedge^r T^* \delta \rightarrow 0,$$

and its dual

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\substack{\delta < \eta \\ |\delta|=n}} \bigwedge^r T\delta \rightarrow \bigoplus_{\substack{\delta < \eta \\ |\delta|=n-1}} \bigwedge^r T\delta \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\substack{\delta < \eta \\ |\delta|=r}} \bigwedge^r T\delta \rightarrow 0.$$

Note that the maps of the second complex are given by the orthogonal projections p .

We claim that the second complex above computes $H_{\text{trop}}^{r, \bullet}(\mathbb{TP}^n)$, which leads the result. Indeed, the only non-trivial cohomology groups of \mathbb{TP}^n are $H_{\text{trop}}^{p, p}(\mathbb{TP}^n) \simeq \mathbb{R}$ for $0 \leq p \leq n$.

Denote by $\delta_0, \dots, \delta_n$ all the faces of codimension one of η . For each δ_i , let ℓ_i be the affine map on η which is identically equal to 1 on δ_i and takes value 0 on the opposite vertex to δ_i . Let $\ell_i^0 \in T^* \eta$ be the linear map corresponding to ℓ_i . It is easy to see that $\sum_i \ell_i^0 = 0$. Set $u_i := (\ell_i^0)^* \in T\eta$. Let (e_0, \dots, e_n) be the standard basis of \mathbb{R}^n . We get a linear isomorphism $T\eta \xrightarrow{\simeq} N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^{n+1}/(1, \dots, 1)$ by mapping the u_i to e_i seen in $N_{\mathbb{R}}$. The family $(e_i)_i$ induce a natural compactification of $N_{\mathbb{R}}$ into \mathbb{TP}^n , and each face δ of η corresponds to a stratum $N_{\delta, \mathbb{R}}$ of dimension $|\delta|$. Moreover, the linear isomorphism $T\eta \xrightarrow{\simeq} N_{\mathbb{R}}$ induces a linear isomorphism $T\delta \xrightarrow{\simeq} N_{\delta, \mathbb{R}}$. The projections π on \mathbb{TP}^n and p on η commute with these isomorphisms. Thus we get an isomorphism between complexes:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\substack{\delta < \eta \\ |\delta|=n}} \bigwedge^r T\delta \rightarrow \bigoplus_{\substack{\delta < \eta \\ |\delta|=n-1}} \bigwedge^r T\delta \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\substack{\delta < \eta \\ |\delta|=r}} \bigwedge^r T\delta \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \mathbf{F}^r(N_{\mathbb{R}}) \rightarrow \bigoplus_{\substack{\delta < \eta \\ |\delta|=n-1}} \mathbf{F}^r(N_{\delta, \mathbb{R}}) \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\substack{\delta < \eta \\ |\delta|=r}} \mathbf{F}^r(N_{\delta, \mathbb{R}}) \rightarrow 0.$$

The second complex is just the tropical simplicial complex of \mathbb{TP}^n for the coarsest simplicial subdivision. Hence, its cohomology is $H_{\text{trop}}^{r, \bullet}(\mathbb{TP}^n) = \mathbb{R}[-r]$. These concludes the case $|\eta_{\text{rec}}| = 0$.

It remains to generalize to any simplicial polyhedron η . If $\eta = \rho$ is a ray, by a direct computation, the proposition holds: $H^\bullet(C_0^\bullet(\rho))$ is trivial and $H^\bullet(C_1^\bullet(\rho)) = \mathbb{R}[-1]$. In general,

η is isomorphic to $\eta_f \times \underbrace{\rho \times \cdots \times \rho}_{m \text{ times}}$, where ρ is a ray and $m := |\eta_{\text{rec}}|$. Moreover,

$$C_r^\bullet(\eta) \simeq \bigoplus_{\substack{r_0, \dots, r_m \geq 0 \\ r_0 + \cdots + r_m = r}} C_{r_0}^\bullet(\eta_f) \otimes C_{r_1}^\bullet(\rho) \otimes \cdots \otimes C_{r_m}^\bullet(\rho).$$

By the Künneth formula for cochain complexes of vector spaces, this decomposition also holds for cohomology. I.e., we have

$$H^\bullet(C_r^\bullet(\eta)) \simeq \bigoplus_{\substack{r_0, \dots, r_m \geq 0 \\ r_0 + \cdots + r_m = r}} H^\bullet(C_{r_0}^\bullet(\eta_f)) \otimes H^\bullet(C_{r_1}^\bullet(\rho)) \otimes \cdots \otimes H^\bullet(C_{r_m}^\bullet(\rho)).$$

Looking at the cohomology of the rays, all terms are trivial except the term of indices $r_1 = \cdots = r_m = 1$ and $r_0 = r - m$ if $m \leq r$. In this case, we get

$$\begin{aligned} H^\bullet(C_r^\bullet(\eta)) &\simeq H^\bullet(C_{r-m}^\bullet(\eta_f)) \otimes H^\bullet(C_1^\bullet(\rho))^{\otimes m} \\ &\simeq \mathbb{R}[-r + m] \otimes \mathbb{R}[-1]^{\otimes m} \\ H^\bullet(C_r^\bullet(\eta)) &= \mathbb{R}[-r]. \end{aligned}$$

This concludes the proof of the proposition. □

We have so far proved that the first pages of ${}_p\mathbf{C}^{\bullet, \bullet}$ and of ${}_p\overline{\mathbf{St}}^{\bullet, \bullet}$ coincide. Unfortunately, this is not sufficient in general to conclude that the two spectral sequences have the same abutment. Thus, we have to extend the isomorphism to further pages. A direct use of the zigzag lemma on further pages is tedious. Therefore, in the next section, we present a proof using a kind of generalization of the zigzag lemma.

5.8. Isomorphisms on further pages. In this section, we achieve the proof of Theorem 5.17. To do so, we start by stating a general lemma about spectral sequences which we call the *spectral resolution lemma*. Roughly speaking, this lemma states that, under some natural assumptions, a *resolution* of a spectral sequence results in another spectral sequence which coincides with the first one on any further pages.

To prove Theorem 5.17, we will apply this lemma to the *triply indexed differential complex* $(\bullet\mathbf{D}^{\bullet, \bullet}, \partial = d^i + \pi^* + d + d')$ introduced above (actually a slight modification obtained by inserting the Steenbrink and tropical sequences). This triply indexed complex plays the role of a bridge between the two spectral sequences ${}_p\mathbf{C}^{\bullet, \bullet}$ and ${}_p\overline{\mathbf{St}}^{\bullet, \bullet}$. In fact, as we will show below, it provides a *spectral resolution*, in a sense which will be made precise in a moment, of both the spectral sequences at the same time. Thus, applying the spectral resolution lemma allows to directly conclude the proof of Theorem 5.17.

Though the method presented below gives an alternate proof of the isomorphism in page one, independent of the one given in the previous section, the intermediate results of the previous section will be crucial in showing the stated resolution property, and so to verify the assumption of the spectral resolution lemma. In a sense, this lemma stands upon the basic case treated in the previous section. Moreover, as the proof of the spectral resolution lemma shows, this lemma can be regarded as a generalization of the zig-zag lemma used in the previous section.

5.8.1. *Triplicly indexed differential complexes.* Before we state the lemma, we introduce some conventions. By a *triplicly indexed differential complex* $(\mathbf{E}^{\bullet, \bullet, \bullet}, \partial)$, we mean

$$- \mathbf{E}^{a, b, c} = 0 \text{ unless } a, b, c \geq 0;$$

— the map $\partial: E^{\bullet,\bullet,\bullet} \rightarrow E^{\bullet,\bullet,\bullet}$ is of degree one, i.e., it can be decomposed as follows:

$$\partial = \bigoplus_{\substack{i,j,k \in \mathbb{Z} \\ i+j+k=1}} \partial^{i,j,k}, \text{ with}$$

$$\forall i,j,k \in \mathbb{Z}, \quad \partial^{i,j,k} = \bigoplus_{a,b,c \in \mathbb{Z}} \partial^{i,j,k}|_{E^{a,b,c}},$$

where $\partial^{i,j,k}|_{E^{a,b,c}}$ is a map from $E^{a,b,c}$ to $E^{a+i,b+j,c+k}$;

— we have $\partial\partial = 0$.

With these assumptions, the total complex $\text{Tot}^\bullet(E^{\bullet,\bullet,\bullet})$ becomes a differential complex.

The filtration induced by the first index on $E^{\bullet,\bullet,\bullet}$ is by definition the decreasing filtration

$$E^{\bullet,\bullet,\bullet} = E^{\geq 0,\bullet,\bullet} \supseteq E^{\geq 1,\bullet,\bullet} \supseteq E^{\geq 2,\bullet,\bullet} \supseteq \dots,$$

where

$$E^{\geq a,\bullet,\bullet} = \bigoplus_{a' \geq a} E^{a',\bullet,\bullet}.$$

Notice that the differential ∂ preserves the filtration induced by the first index if and only if $\partial^{i,j,k} = 0$ for any $i < 0$. In such a case, we denote by ${}^I E_0^{\bullet,\bullet}$ the 0-th page of the induced spectral sequence abutting to the cohomology of the total complex $\text{Tot}^\bullet(E^{\bullet,\bullet,\bullet})$. It has the following shape:

$${}^I E_0^{a,b} = \text{Tot}^{a+b}(E^{a,\bullet,\bullet}) = \bigoplus_{\substack{m,n \\ m+n=b}} E^{a,m,n}$$

endowed with the differential

$${}^I \partial := \sum_{j,l \in \mathbb{Z}} \partial^{0,j,l}.$$

The k -th page of this spectral is denoted by ${}^I E_k^{\bullet,\bullet}$.

We use analogous conventions as above to define bi-indexed differential complexes.

5.8.2. *Statement of the spectral resolution lemma.* Let $(C^{\bullet,\bullet}, d)$ be a bi-indexed differential complex. We assume that d preserves the filtration induced by the first index, i.e., we assume $d^{i,j} = 0$ if $i < 0$.

A spectral resolution of $(C^{\bullet,\bullet}, d)$ is a triply indexed differential complex $(E^{\bullet,\bullet,\bullet}, \partial)$ which verifies the following properties enumerated R1-R4:

- (R1) There is an inclusion $i: C^{\bullet,\bullet} \rightarrow E^{\bullet,\bullet,0} \subseteq E^{\bullet,\bullet,\bullet}$ which respects the bi-indices, i.e., such that $id = \partial i$ (here ∂ is not restricted to $E^{\bullet,\bullet,0}$).
- (R2) The differential ∂ of $E^{\bullet,\bullet,\bullet}$ preserves the filtration induced by the first index, i.e., we have $\partial^{i,j,k} = 0$ if $i < 0$.
- (R3) We have $\partial^{i,j,k} = 0$ if $k \geq 2$.

Denote by $\partial_3 := \partial^{0,0,1}$. From the fact that ∂ is a differential and the assumptions above, we deduce that $\partial_3 \partial_3 = 0$. Finally, we assume the following resolution property.

- (R4) For any a, b in \mathbb{Z} , the differential complex $(E^{a,b,\bullet}, \partial_3|_{E^{a,b,\bullet}})$ is a right resolution of $C^{a,b}$.

LEMMA 5.25 (Spectral resolution lemma). *Let $(C^{\bullet,\bullet}, d)$ be a bi-indexed complex such that the differential d preserves the filtration induced by the first index. Let $(E^{\bullet,\bullet,\bullet}, \partial)$ be a spectral resolution of $C^{\bullet,\bullet}$.*

Denote by ${}^I E^{\bullet,\bullet}$ and ${}^I C^{\bullet,\bullet}$ the spectral sequences induced by the filtration by the first indices on $E^{\bullet,\bullet}$ and $C^{\bullet,\bullet}$, respectively. Then, the inclusion $i: C^{\bullet,\bullet} \hookrightarrow E^{\bullet,\bullet}$ induces canonical compatible isomorphisms

$${}^I C_k^{\bullet,\bullet} \simeq {}^I E_k^{\bullet,\bullet}$$

between k -th pages of the two spectral sequences for any values of $k \geq 1$.

We assume for the moment this lemma and finish the proof of Theorem 5.17.

5.8.3. *Proof of Theorem 5.17.* We use the notations of Section 5.6. We will apply the spectral resolution lemma twice in order to achieve the isomorphism of pages staged in the theorem.

We start by gathering the double complexes ${}_a D^{\bullet,\bullet}$ together for all a in order to construct a triply indexed differential complex $(D^{\bullet,\bullet}, \partial)$ as follows. First, set

$$D^{a,b,b'} := {}_a D^{b,b'}$$

and let the two differentials of multidegrees $(0, 1, 0)$ and $(0, 0, 1)$ be equal to the differentials d and d' of the double complexes ${}_a D^{\bullet,\bullet}$.

In the course of proving the isomorphism between the first pages of the spectral sequences in Theorem 5.17, we introduced in Section 5.6 two anticommutative morphisms π^* and d^i of multidegree $(1, 0, 0)$ from ${}_a D^{\bullet,\bullet} \rightarrow {}_{a+1} D^{\bullet,\bullet}$.

We set $\partial = d^i + \pi^* + d + d'$.

PROPOSITION 5.26. *We have $\partial\partial = 0$.*

PROOF. The proof consists of calculating directly all the terms which appear in this decomposition. This will be explained in Appendix 10. □

Denote by ${}_p C^{\bullet,\bullet}$ the bi-indexed complex ${}_p C_0^{\bullet,\bullet}$ which is endowed with the differential $d^i + \pi^* + d$, where d^i , π^* and d are the maps defined on $A^{\bullet,0} = \text{Tot}^\bullet({}_p C^{\bullet,\bullet})$ in the previous section that we restrict to its zero-th row.

The inclusion $A^{\bullet,0} \rightarrow A^{\bullet,1}$ gives an inclusion of complexes of ${}_p C^{\bullet,\bullet}$ into ${}_p D^{\bullet,\bullet}$. Moreover, for any integers a and b , the complex $(D^{a,b,b'}, d')$ is the Deligne resolution of ${}_p C_0^{a,b}$. Thus we can apply the spectral resolution lemma. This gives canonical isomorphisms

$$(5.4) \quad \forall k \geq 1, \quad {}^I C_k^{\bullet,\bullet} \simeq {}^I D_k^{\bullet,\bullet}.$$

A priori, ${}^I C_k^{\bullet,\bullet}$ could be different from ${}_p C_k^{\bullet,\bullet}$. So it might appear somehow surprising to see that they are actually equal thanks to the following proposition.

PROPOSITION 5.27. *The natural isomorphism $C_{\text{trop}}^{p,\bullet} \xrightarrow{\simeq} \text{Tot}^\bullet({}_p C^{\bullet,\bullet})$ is an isomorphism of filtered differential complexes. Here $C_{\text{trop}}^{p,\bullet}$ comes with differential ∂_{trop} and weight filtration W^\bullet , the differential on $\text{Tot}^\bullet({}_p C^{\bullet,\bullet})$ is $d^i + \pi^* + d$ and the filtration is induced by the first index.*

PROOF. The proof of this proposition is given in Appendix 10. □

In the same way, from Section 5.6, we deduce an inclusion of complexes of ${}_a \overline{\text{St}}^{\bullet,\bullet}$, with the usual differentials Gys and $i^* + \pi^*$, into $D^{\bullet,0,\bullet}$. Moreover, by Proposition 5.20, proved in Section 5.7, for any pair of integers a and b' , the complex $(D^{a,\bullet,b'}, d)$ is a resolution of ${}_p \overline{\text{St}}_0^{a,b'}$.

Thus, by applying again the spectral resolution lemma, we get canonical isomorphisms

$$(5.5) \quad \forall k \geq 1, \quad \downarrow {}_p \overline{\text{St}}_k^{\bullet,\bullet} \simeq {}^I D_k^{\bullet,\bullet}.$$

From (5.4) and (5.5), we infer canonical isomorphisms

$${}_p C_k^{\bullet,\bullet} \simeq {}_p \overline{\text{St}}_k^{\bullet,\bullet}$$

between k -th pages for any $k \geq 1$ of the two spectral sequences, which concludes the proof of Theorem 5.17. \square

5.8.4. *Proof of the spectral resolution lemma.* In this section we prove the resolution lemma. Assume that $i: C^{\bullet,\bullet} \hookrightarrow A^{\bullet,\bullet,0} \subseteq A^{\bullet,\bullet,\bullet}$ is a spectral resolution of the bi-indexed differential complex $C^{\bullet,\bullet}$.

PROOF OF LEMMA 5.25. Let $k \geq 1$. By construction of the pages of the spectral sequences, we have

$$I E_k^{a,b} = \frac{\left\{ x \in \text{Tot}^{a+b}(E^{\bullet,\bullet,\bullet}) \cap E^{\geq a,\bullet,\bullet} \mid \partial x \in E^{\geq a+k,\bullet,\bullet} \right\}}{E^{\geq a+1,\bullet,\bullet} + \partial E^{\geq a-k+1,\bullet,\bullet}}.$$

(To be more rigorous, we should replace here the denominator by the intersection of the numerator with the denominator.)

The idea is to prove that one can take a representative of the above quotient in the image of i . To do so, we use the following induction which can be seen as a generalization of the zigzag lemma.

CLAIM 5.28. *Let a be an integer. The following quotient*

$$\frac{\left\{ x \in \text{Tot}^{a+b}(E^{\bullet,\bullet,\bullet}) \cap E^{\geq a,\bullet,\bullet} \mid \partial x \in E^{\geq a+k,\bullet,\bullet} \right\}}{E^{\geq a+k,\bullet,\bullet} + \partial E^{\geq a-k+1,\bullet,\bullet} + i(C^{\geq a,\bullet})}$$

is zero.

Notice that, in the denominator, we did not use $E^{\geq a+1,\bullet,\bullet}$ but $E^{\geq a+k,\bullet,\bullet}$. Doing so we get a stronger result which will be needed later.

Let x be an element of the numerator of the following quotient. We first explain how to associate a vector in \mathbb{Z}^2 to any x in the numerator. Endowing \mathbb{Z}^2 with the lexicographic order, and proceeding by induction on the lexicographical order of vectors associated to the elements x , we show that x is zero in the quotient.

We decompose x as follows

$$x = \sum_{\substack{\alpha,\beta,c \in \mathbb{Z} \\ \alpha \geq a \\ \alpha+\beta+c=a+b}} x_{\alpha,\beta,c}, \quad x_{\alpha,\beta,c} \in E^{\alpha,\beta,c}.$$

Let α be smallest integer such that there exists $\beta, c \in \mathbb{Z}$ with $x_{\alpha,\beta,c} \neq 0$. Note that if no such α exists, then $x = 0$ and we are done. Having chosen α , let now c be the largest integer such that $x_{\alpha,\beta,c} \neq 0$ for $\beta = a + b - \alpha - c$. We associate to x the vector $(-\alpha, c)$.

In order to prove the claim for a fixed value of a , we proceed by induction on the lexicographic order of the associated vectors $(-\alpha, c)$. Given a vector $(-\alpha, c)$, in what follows, we set $\beta := a + b - \alpha - c$.

Base of the induction: $\alpha \geq a + k$. Writing $x = \sum x_{m,n,p}$ for $x_{m,n,p} \in E^{m,n,p}$ we see by the choice of α that $m \geq \alpha \geq a + k$ for all non-zero terms $x_{m,n,p}$ it follows that all these terms belong to $E^{\geq a+k,\bullet,\bullet}$, and so x obviously belongs to the denominator.

first case: $\alpha < a + k$ and $c > 0$. Denote by $y = \sum y_{\alpha',\beta',c'}$ the boundary ∂x of x . Then, since ∂x belongs to $E^{\geq a+k,\bullet,\bullet}$, the element $y_{\alpha,\beta,c+1}$ must be zero. Moreover, since $\partial^{\alpha',\beta',c'} = 0$ if $c' \geq 2$ or $\alpha' < 0$, the part $y_{\alpha,\beta,c+1}$ of y must be equal to $\partial_3(x_{\alpha,\beta,c})$. Thus $x_{\alpha,\beta,c}$ is in the

kernel of ∂_3 . Since $(E^{\alpha,\beta,\bullet}, \partial_3)$ is a resolution, we can take a preimage z of $x_{\alpha,\beta,c}$ in $E^{\alpha,\beta,c-1}$ for ∂_3 . Then

$$\partial z \in \partial E^{\geq a,\bullet,\bullet} \subseteq \partial E^{\geq a-k+1,\bullet,\bullet}.$$

Thus, x is equivalent to $x' = x - \partial z$, the vector associated to x' is strictly smaller than $(-\alpha, c)$, and we conclude again by the hypothesis of our induction for x' .

second case: $\alpha < a + k$ and $c = 0$. We can follow the arguments used in the second case above up to the moment $x_{\alpha,\beta,0} \in \ker(\partial_3)$. Then, $x_{\alpha,\beta,0}$ belongs to $i(C^{\alpha,\bullet})$. Since $i(C^{\geq a,\bullet})$ is in the denominator, we can subtract $x_{\alpha,\beta,0}$ from x and conclude by induction.

In any case, we have proved x is equal to zero and the claim follows. As a consequence, we infer that

$$(5.6) \quad I E_k^{a,b} = \frac{\left\{ x \in \text{Tot}^{a+b}(E^{\bullet,\bullet,\bullet}) \cap E^{\geq a,\bullet,\bullet} \mid \partial x \in E^{\geq a+k,\bullet,\bullet} \right\} \cap \text{Im}(i)}{(E^{\geq a+1,\bullet,\bullet} + \partial E^{\geq a-k+1,\bullet,\bullet}) \cap \text{Im}(i)}.$$

This has to be compared with

$$I C_k^{a,b} = \frac{\left\{ z \in \text{Tot}^{a+b}(C^{\bullet,\bullet}) \cap C^{\geq a,\bullet} \mid dz \in C^{\geq a+k,\bullet} \right\}}{C^{\geq a+1,\bullet} + dC^{\geq a-k+1,\bullet}}.$$

From $\text{id} = \partial i$, we get that the induced map $i: I E_k^{a,b} \rightarrow I C_k^{a,b}$ is well-defined. Moreover, it is now clear that this map is surjective. For the injectivity, we have to work a bit more on the denominator of $I E_k^{a,b}$.

Let x be an element of the intersection of the denominator with the numerator of (5.6). In particular, we have $x \in E^{\geq a,\bullet,\bullet}$. Let $z \in E^{\geq a-k+1,\bullet,\bullet}$ be such that $x - \partial z \in E^{\geq a+1,\bullet,\bullet}$.

Now we show that we can reduce to the case $z \in \text{Im}(i) + E^{\geq a+1,\bullet,\bullet}$. Notice that $\partial z \in E^{\geq a,\bullet,\bullet}$. Thus, z belongs to the numerator of $I E_{k-1}^{a-k+1,b+k-2}$. If $k \geq 2$, we can apply the induction above to get that $z = z_1 + \partial z_2 + iz_3$ with $z_1 \in E^{\geq a,\bullet,\bullet}$, $z_2 \in E^{\geq a-2k+3,\bullet,\bullet}$ and $z_3 \in C^{\geq a-k+1,\bullet}$. This decomposition also holds for $k = 1$ setting $z_1 = z$ and $z_2 = z_3 = 0$. Since we are only concerned by ∂z , we can assume without loss of generality that $z_2 = 0$.

If $z_1 \notin E^{\geq a+1,\bullet,\bullet}$, let c be the maximum integer such that $z_{a,\beta,c} \neq 0$ for $\beta = b-1-c$. Denote by $y = \sum y_{\alpha',\beta',c'}$ the boundary ∂z of z . Since $\partial iz_3 \in E^{\bullet,\bullet,0}$, we get that $y_{a,\beta,c+1} = \partial_3 z_{a,\beta,c}$. Moreover $x - y = x - \partial z \in E^{\geq a+1,\bullet,\bullet}$. Hence, $x_{a,\beta,c+1}$ must be equal to $y_{a,\beta,c+1}$. Since $x \in \text{Im}(i) \subseteq E^{\bullet,\bullet,0}$, $x_{a,\beta,c+1} = 0$. From this we get $y_{a,\beta,c+1} = \partial_3 z_{a,\beta,c} = 0$. Therefore, $z_{a,\beta,c}$ is in the kernel of ∂_3 . Two cases can occur.

- If $c > 0$, then we can find $w \in E^{a,\beta,c-1}$ such that $z_{a,\beta,c} = \partial_1 w$. In this case, $z' := z - \partial w$ has the same boundary as z , and the maximal c' such that $z'_{a,b-1-c',c'} \neq 0$ verifies $c' < c$. Thus, we can apply again the previous argument until we get an element of $E^{\geq a,\bullet,\bullet}$, or until we are in the following case.
- If $c = 0$, then $z_{a,\beta,0} \in i(C^{a,\beta})$.

We deduce that, up to a cycle, we can assume that $z_1 = z'_1 + z''_1$ with $z'_1 \in i(C^{a,\bullet})$ and $z''_1 \in E^{\geq a+1,\bullet,\bullet}$, i.e., $z \in i(C^{\geq a-k+1,\bullet}) + E^{\geq a+1,\bullet,\bullet}$.

Therefore,

$$\begin{aligned} x &\in (E^{\geq a+1,\bullet,\bullet} + \partial(iC^{\geq a-k+1,\bullet} + E^{\geq a+1,\bullet,\bullet})) \cap \text{Im}(i) \\ &= (E^{\geq a+1,\bullet,\bullet} + \text{id}C^{\geq a-k+1,\bullet}) \cap \text{Im}(i) \\ &= E^{\geq a+1,\bullet,\bullet} \cap \text{Im}(i) + \text{id}C^{\geq a-k+1,\bullet} \\ &= i(C^{\geq a+1,\bullet} + dC^{\geq a-k+1,\bullet}). \end{aligned}$$

We can replace Equation (5.6) by

$$I\mathbb{E}_k^{a,b} = \frac{\left\{x \in \text{Tot}^{a+b}(\mathbb{E}^{\bullet,\bullet,\bullet}) \cap \mathbb{E}^{\geq a,\bullet,\bullet} \mid \partial x \in \mathbb{E}^{\geq a+k,\bullet,\bullet}\right\} \cap \text{Im}(i)}{i(C^{\geq a+1,\bullet} + dC^{\geq a-k+1,\bullet})}.$$

The injectivity of $i: I\mathbb{E}_k^{a,b} \rightarrow IC_k^{a,b}$ now follows from the injectivity of $i: C^{\bullet,\bullet} \rightarrow \mathbb{E}^{\bullet,\bullet,0}$, which concludes the proof of the spectral resolution lemma. \square

The two remaining sections contain the proofs of the two Propositions 5.16 and 5.5.

5.9. Vanishing of the cohomology of $\text{Tot}^{\bullet}_p \overline{\text{St}}^{\sigma,\bullet,\bullet}$ for $\sigma \neq \underline{0}$. In this section, we prove Proposition 5.16, which, we recall, claims that the total cohomology of ${}_p \overline{\text{St}}_0^{\sigma,\bullet,\bullet}$ is trivial for $\sigma \neq \underline{0}$, where

$${}_p \overline{\text{St}}^{\sigma,a,b} := \begin{cases} \bigoplus_{\substack{\delta \in X \\ \text{maxsed}(\delta) = \sigma \\ |\delta| = p+a-b \\ |\delta_{\text{rec}}| \leq a}} H^{2b}(\delta) & \text{if } b \leq p, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The differential of bidegree (1, 0) is $i^* + \pi^*$, and the differential of bidegree (0, 1) is Gys.

This double complex can be unfolded into a triple complex: $\text{Tot}^{\bullet}({}_p \overline{\text{St}}^{\sigma,\bullet,\bullet}) = \text{Tot}^{\bullet}(\mathbb{E}^{\bullet,\bullet,\bullet})$ where

$$\mathbb{E}^{a,b,a'} := \begin{cases} \bigoplus_{\substack{\delta \in X \\ \text{maxsed}(\delta) = \sigma \\ |\delta| = p+a+a'-b \\ |\delta_{\text{rec}}| = a'}} H^{2b}(\delta) & \text{if } b \leq p \text{ and } a \geq 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

where the differentials of multidegree (1, 0, 0), (0, 1, 0) and (0, 0, 1) are respectively i^* , Gys and π^* .

To prove that the total cohomology of $\mathbb{E}^{\bullet,\bullet,\bullet}$ is trivial, it suffices to show that $(\mathbb{E}^{a,b,\bullet}, \pi^*)$ is exact for any integers a and b .

Let η be a face of sedentarity $\underline{0}$ such that $\text{maxsed}(\eta) = \sigma$. Notice that $\text{sed}(\eta) = \underline{0}$ implies $\text{maxsed}(\eta) = \eta_{\text{rec}}$. For any cone $\tau < \sigma$, we denote by η_{∞}^{τ} the face of η of sedentarity τ , which is given by

$$\eta_{\infty}^{\tau} = \eta \cap N_{\mathbb{R}}^{\tau}.$$

Note that each face of X of max-sedentarity σ can be written in a unique way in this form. Notice also that

- π_{σ} induces an isomorphism from η_f to $(\eta_{\infty}^{\tau})_f$.
- $\Sigma^{\eta} \simeq \Sigma^{\eta_{\infty}^{\tau}}$. In particular $H^{\bullet}(\eta_{\infty}^{\tau}) \simeq H^{\bullet}(\eta)$.
- $\pi_{\delta > \gamma}^*$ is nontrivial if and only if $\gamma = \eta_{\infty}^{\tau}$ and $\delta = \eta_{\infty}^{\zeta}$ for some η of sedentarity $\underline{0}$, and some pair of cones $\zeta < \tau$ which are faces of $\text{maxsed}(\eta)$.

From all these observations, we deduce that the sequence $(\mathbb{E}^{a,b,\bullet}, \pi^*)$ can be decomposed as a direct sum:

$$\bigoplus_{\substack{\eta \in X^{\underline{0}} \\ \text{maxsed}(\eta) = \sigma \\ |\eta| = p+a+|\sigma|-b}} \left(0 \rightarrow H^{2b}(\eta_{\infty}^{\sigma}) \rightarrow \bigoplus_{\substack{\tau < \sigma \\ |\tau| = |\sigma|-1}} H^{2b}(\eta_{\infty}^{\tau}) \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\substack{\tau < \sigma \\ |\tau| = 1}} H^{2b}(\eta_{\infty}^{\tau}) \rightarrow H^{2b}(\eta) \rightarrow 0 \right).$$

This sequence can be rewritten as

$$\bigoplus_{\substack{\eta \in X^{\underline{0}} \\ \text{maxsed}(\eta) = \sigma \\ |\eta| = p+a+|\sigma|-b}} \left(0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \bigoplus_{\substack{\tau < \sigma \\ |\tau| = |\sigma|-1}} \mathbb{R} \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\substack{\tau < \sigma \\ |\tau| = 1}} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow 0 \right) \otimes H^{2b}(\eta).$$

Thus, it just remains to prove that these sequences are exact for every η . The complex is clearly isomorphic to the simplicial homology of σ with real coefficients. This homology is trivial since it corresponds to the reduced homology of a simplex.

This concludes the proof of Proposition 5.16 and thus that of Theorem 5.8. \square

5.10. Proof of Proposition 5.5. In this final part of this section, we prove Proposition 5.5 which concerns the three basic relations concerning the composition of maps Gys and i^* .

Let us start by proving that the composition $\text{Gys} \circ \text{Gys}$ is vanishing.

Let a, b be a pair of integers, and let $s \geq |a|$ be an integer with $s \equiv a \pmod 2$. Let $x \in \text{ST}_1^{a,b,s}$. We have to prove that $\text{Gys} \circ \text{Gys}(x) = 0$. By linearity of the Gysin maps, we can assume that $x \in H^{a+b-s}(\delta)$ for some $\delta \in X_f$ of dimension s . If $s-1 < |a+1|$, or $s-2 < |a+2|$, then $\text{Gys} \circ \text{Gys}(x) = 0$. Otherwise,

$$\text{Gys} \circ \text{Gys}(x) = \sum_{\gamma < \delta} \sum_{\nu < \gamma} \text{sign}(\nu, \gamma) \text{sign}(\gamma, \delta) \text{Gys}_{\gamma > \nu} \circ \text{Gys}_{\delta > \gamma}(x).$$

This sum can be rewritten in the form

$$\text{Gys} \circ \text{Gys}(x) = \sum_{\substack{\nu < \delta \\ |\nu| = s-2}} \sum_{\substack{\gamma < \delta \\ \gamma > \nu}} \text{sign}(\nu, \gamma) \text{sign}(\gamma, \delta) \text{Gys}_{\gamma > \nu} \circ \text{Gys}_{\delta > \gamma}(x).$$

If ν is a subface of δ of codimension 2, then, by the diamond property, there exist exactly two faces γ and γ' such that $\nu < \gamma, \gamma' < \delta$. Moreover, the composition is just the natural Gysin map from δ to ν . Thus, we have

$$\text{Gys}_{\gamma' > \nu} \circ \text{Gys}_{\delta > \gamma'}(x) = \text{Gys}_{\gamma > \nu} \circ \text{Gys}_{\delta > \gamma}(x),$$

and

$$\text{sign}(\nu, \gamma) \text{sign}(\gamma, \delta) = -\text{sign}(\nu, \gamma') \text{sign}(\gamma', \delta).$$

This shows that the previous sum vanishes, which proves $\text{Gys} \circ \text{Gys} = 0$.

One can prove in the same way that $i^* \circ i^* = 0$, so we omit the details.

We now study the map $i^* \circ \text{Gys} + \text{Gys} \circ i^*$. Let a, b, s, δ and $x \in H^{a+b-s}(\delta) \subseteq \text{ST}_1^{a,b}$ be defined as above. If $s-1 < |a+1|$, then $a \geq 0$ and $s < |a+2|$ and the codomain of $i^* \circ \text{Gys} + \text{Gys} \circ i^*$ is trivial. Otherwise, as in the previous paragraph, we can decompose $i^* \circ \text{Gys}(x) + \text{Gys} \circ i^*(x)$ as a sum

$$\sum_{\substack{\delta' \in X_f \\ |\delta'| = s}} (S_{<, \delta'} + S_{>, \delta'})$$

where

$$S_{<, \delta'} = \sum_{\substack{\gamma < \delta \\ \gamma < \delta'}} \text{sign}(\gamma, \delta') \text{sign}(\gamma, \delta) i_{\gamma < \delta'}^* \circ \text{Gys}_{\delta > \gamma}(x) \text{ and}$$

$$S_{>, \delta'} = \sum_{\substack{\eta > \delta \\ \eta > \delta'}} \text{sign}(\delta', \eta) \text{sign}(\delta, \eta) \text{Gys}_{\eta > \delta'} \circ i_{\delta < \eta}^*(x),$$

and the sums are over faces in X_f . We claim that for each δ' , the sum $S_{<, \delta'} + S_{>, \delta'}$ is zero. This will finish the proof of our proposition.

Four cases can happen.

- (i) Suppose $\delta' \neq \delta$ and $|\delta \cap \delta'| < s-1$.

In this case, both sums $S_{<,\delta'}$ and $S_{>,\delta'}$ have no terms, and they are both zero.

- (ii) Suppose $\delta' \neq \delta$, the face $\gamma := \delta \cap \delta'$ is of dimension $s - 1$, and no face η of dimension $s + 1$ contains both δ and δ' .

In this case, $S_{>,\delta'}$ is a sum with no term. The other sum, $S_{<,\delta'}$, contains only one term which is $i_{\gamma < \delta'}^* \circ \text{Gys}_{\delta > \gamma}(x)$. This term is zero because the ray corresponding to δ and the ray corresponding to δ' in the fan Σ^γ are not comparable.

- (iii) Suppose $\delta' \neq \delta$, the face $\gamma := \delta \cap \delta'$ is of dimension $s - 1$, and there exists a face $\eta \in X$ of dimension $s + 1$ containing both δ and δ' .

In this case, notice that $\eta = \text{conv}(\delta \cup \delta')$, thus $\eta \in X_f$. Moreover the four faces form a diamond, i.e., we have $\gamma < \delta, \delta' < \eta$. We infer that both sums $S_{<,\delta'}$ and $S_{>,\delta'}$ contain a unique term, and the sum is given by

$$\text{sign}(\gamma, \delta') \text{sign}(\gamma, \delta) i_{\gamma < \delta'}^* \circ \text{Gys}_{\delta > \gamma}(x) + \text{sign}(\delta', \eta) \text{sign}(\delta, \eta) \text{Gys}_{\eta > \delta'} \circ i_{\delta < \eta}^*(x).$$

This is zero because

$$i_{\gamma < \delta'}^* \circ \text{Gys}_{\delta > \gamma}(x) = \text{Gys}_{\eta > \delta'} \circ i_{\delta < \eta}^*(x), \text{ and} \\ \text{sign}(\gamma, \delta') \text{sign}(\gamma, \delta) = -\text{sign}(\delta', \eta) \text{sign}(\delta, \eta).$$

It remains only the case $\delta = \delta'$.

- (iv) Suppose $\delta = \delta'$.

This case is more technical. We need some notations. Let v_0, \dots, v_s be the vertices of δ . For $j \in \{0, \dots, s\}$ let $\gamma_j < \delta$ be the face opposite to v_j . Let η_1, \dots, η_r be the compact faces of dimension $s + 1$ containing δ and $\eta_{r+1}, \dots, \eta_{r+t}$ be the non-compact ones. For each $i \in \{1, \dots, r\}$ we denote by w_i the only vertex of η_i which is not in δ . For each $i \in \{r + 1, \dots, r + t\}$, we define u_i to be the primitive vector of the ray $\eta_{i,\text{rec}}$. We will work with the Chow rings. For each $i \in \{1, \dots, r + t\}$, the face η_i corresponds to a ray ρ_i in Σ^δ and to an element x_i in $A^1(\delta)$. Note that every ray of Σ^δ is of this form. Moreover, for any $j \in \{0, \dots, s\}$, each ray ρ_i corresponds to a ray in Σ^{γ_j} which we will also denote by ρ_i . We also denote by x_i the corresponding element in $A^1(\gamma_j)$. We denote by $\rho_{\delta,j}$ the ray of Σ^{γ_j} corresponding to δ , and by $x_{\delta,j}$ the associated element in $A^1(\gamma_j)$. If ℓ is a linear form on $N_{\mathbb{R}}^\eta$ for some face η , and if ϱ is a ray in Σ^η , we will write $\ell(\varrho)$ for the value of ℓ on the primitive vector of ϱ .

Since Gys and i^* are ring homomorphisms, we can assume without loss of generality that the chosen element in $\text{ST}_1^{a,b,s}(X)$ is the unity 1 of $A^0(\Sigma)$. Then, for any $i \in \{1, \dots, r\}$,

$$\text{Gys}_{\eta_i > \delta} \circ i_{\delta < \eta_i}^*(1) = x_i.$$

In this case, $S_{>,\delta}$ is given by the sum over *compact* faces η of dimension $s + 1$ containing δ of

$$\text{sign}(\delta, \eta)^2 \text{Gys}_{\eta > \delta} \circ i_{\delta < \eta}^*(1).$$

It follows that

$$S_{>,\delta} = \sum_{i=1}^r x_i.$$

Let $j \in \{0, \dots, s\}$. We have $\text{Gys}_{\delta > \gamma_j}(1) = x_{\delta,j} \in A^1(\gamma_j)$. Choose an affine form ℓ_j on $N_{\mathbb{R}}$ that is zero on γ_j and -1 on v_j . Let ℓ_j^0 be the corresponding linear form. It induces a linear form λ_j on $N_{\mathbb{R}}^{\gamma_j}$. Moreover, we have the following properties for λ_j :

$$\lambda_j(\rho_{\delta,j}) = \ell(v_j) = -1, \\ \forall i \in \{1, \dots, r\}, \lambda_j(\rho_i) = \ell_j(w_i), \text{ and} \\ \forall i \in \{r + 1, \dots, r + t\}, \lambda_j(\rho_i) = \ell_j^0(u_i).$$

Thus, $x_{\delta,j} \in A^1(\gamma_j)$ is equal to

$$\sum_{i=1}^r \ell_j(w_i)x_i + \sum_{i=r+1}^{r+t} \ell_j^0(u_i)x_i + x',$$

where $x' \in A^1(\gamma_j)$ is incomparable with $x_{\delta,j}$ in the sense that $x'x_{\delta,j} = 0$. Hence, the image of $x_{\delta,j}$ by $i_{\gamma_j < \delta}^*$ is

$$i_{\gamma_j < \delta}^* \circ \text{Gys}_{\delta > \gamma_j}(1) = \sum_{i=1}^r \ell_j(w_i)x_i + \sum_{i=r+1}^{r+t} \ell_j^0(u_i)x_i \in A^1(\delta).$$

Set $\ell = \ell_0 + \dots + \ell_s$ and denote by ℓ^0 the corresponding linear form. Summing over all γ_j , we get

$$S_{<,\delta} = \sum_{i=1}^r \ell(w_i)x_i + \sum_{i=r+1}^{r+t} \ell^0(u_i)x_i.$$

Let $\mathbf{1}$ be the constant function on $N_{\mathbb{R}}$ which takes value 1 everywhere. We can rewrite

$$S_{>,\delta} = \sum_{i=1}^r x_i = \sum_{i=1}^r \mathbf{1}(w_i)x_i.$$

Set $\ell' = \ell + \mathbf{1}$ and let $\ell'^0 = \ell^0$ be the corresponding linear form. We have

$$S_{<,\delta} + S_{>,\delta} = \sum_{i=1}^r \ell'(w_i)x_i + \sum_{i=r+1}^{r+t} \ell'^0(u_i)x_i.$$

Since ℓ equals -1 on each vertex of δ , ℓ' is zero on δ . Thus, it induces a linear form λ' on N_R^δ which verifies

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, r\}, \lambda'(\rho_i) &= \ell'(w_i) \text{ and} \\ \forall i \in \{r+1, \dots, r+t\}, \lambda'(\rho_i) &= \ell'^0(u_i). \end{aligned}$$

Therefore, $S_{<,\delta} + S_{>,\delta} = 0$ in $A^1(\delta)$, which is what we wanted to prove.

In each of the four cases above we showed that $S_{<,\delta'} + S_{>,\delta'} = 0$, thus $\text{Gys} \circ i^*(x) + i^* \circ \text{Gys}(x) = 0$.

The proof of Proposition 5.5 is complete. □

6. Kähler tropical varieties

The aim of this section is to show that $\text{ST}_1^{\bullet,\bullet}$ and the tropical cohomology $H_{\text{trop}}^{\bullet,\bullet}$ admit a Hodge-Lefschetz structure. The precise meaning will only appear in Section 7 where we give a precise definition of Hodge-Lefschetz structures and treat the consequences of the materials introduced in this section in detail.

We introduce the monodromy and Lefschetz operators on $\text{ST}_1^{\bullet,\bullet}$ in this section. The definition of the latter is based on the definition of Kähler forms in tropical geometry which are introduced in this section as well.

6.1. Monodromy operator N on $\mathcal{ST}_1^{\bullet,\bullet}$. The monodromy operator is the data of maps $N^{a,b}: \mathcal{ST}_1^{a,b} \rightarrow \mathcal{ST}_1^{a+2,b-2}$ defined as follows. Writing $\mathcal{ST}_1^{a,b} = \bigoplus \mathcal{ST}_1^{a,b,s}$ for $s \geq |a|$ with $s \equiv a \pmod{2}$, then $N^{a,b}$ is defined by setting its restrictions $N^{a,b,s}$ on $\mathcal{ST}_1^{a,b,s}$ to be

$$(6.1) \quad N^{a,b,s} = \begin{cases} \text{id}: \mathcal{ST}_1^{a,b,s} \rightarrow \mathcal{ST}_1^{a+2,b-2,s} & \text{if } s \geq |a+2|, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

If there is no risk of confusion, we drop all the superscripts and denote simply by N the operator $N^{a,b}$ and all its restrictions $N^{a,b,s}$.

REMARK 6.1. More precisely, we could view the collection of maps $N^{a,b}$ as a map N of bidegree $(2, -2)$

$$N = \bigoplus_{a,b} N^{a,b}: \bigoplus_{a,b} \mathcal{ST}_1^{a,b} \longrightarrow \bigoplus_{a,b} \mathcal{ST}_1^{a,b}.$$

◇

We have the following proposition which summaries the main properties of the monodromy operator.

PROPOSITION 6.2. *We have*

- $[N, i^*] = [N, \text{Gys}] = 0$
- for $a \leq 0$, we have an isomorphism $N^{-a}: \mathcal{ST}_1^{a,b} \rightarrow \mathcal{ST}_1^{-a,b+2a}$
- for $a \leq 0$, $\ker N^{-a+1} \cap \mathcal{ST}_1^{a,b} = \mathcal{ST}_1^{a,b,-a}$.

PROOF. For the first point, let a, b, s be three integers with $a \equiv s \pmod{2}$. We have the following commutative diagrams.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{ST}_1^{a,b,s} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathcal{ST}_1^{a+2,b-2,s} \\ \downarrow i^* & & \downarrow i^* \\ \mathcal{ST}_1^{a+1,b,s+1} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathcal{ST}_1^{a+3,b-2,s+1} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{ST}_1^{a,b,s} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathcal{ST}_1^{a+2,b-2,s} \\ \downarrow \text{Gys} & & \downarrow \text{Gys} \\ \mathcal{ST}_1^{a,b+2,s} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathcal{ST}_1^{a+2,b,s} \end{array}$$

To get the commutativity in $\mathcal{ST}_1^{\bullet,\bullet}$, it remains to check that, in each diagram, if the top-left and bottom-right pieces appear in $\mathcal{ST}_1^{\bullet,\bullet}$, then the two other pieces appear as well. This comes from the following facts, which are easy to check.

$$\begin{aligned} s \equiv a \equiv a+2 \pmod{2} \quad \text{and} \quad s+1 \equiv a+1 \equiv a+3 \pmod{2}, \quad \text{and} \\ s \geq |a| \quad \text{and} \quad s+1 \geq |a+3| \implies s \geq |a+2| \quad \text{and} \quad s+1 \geq |a+1|. \end{aligned}$$

For the second point, for $a \leq 0$, $s \geq |a|$ implies $s \geq |a+2k|$ for any $k \in \{0, \dots, -a\}$. Thus N^{-a} induces the isomorphism $\mathcal{ST}_1^{a,b,s} \simeq \mathcal{ST}_1^{-a,b+2a,s}$, which implies the result.

For the last point, for $a \leq 0$, we have

$$\begin{aligned} \ker N^{-a+1} \cap \mathcal{ST}_1^{a,b} &= (N^{-a})^{-1} \ker(N: \mathcal{ST}_1^{-a,b+2a} \rightarrow \mathcal{ST}_1^{-a+2,b+2a-2}) \\ &= (N^{-a})^{-1} \mathcal{ST}_1^{-a,b+2a,-a} \\ &= \mathcal{ST}_1^{a,b,-a}. \end{aligned} \quad \square$$

DEFINITION 6.3 (Primitive parts of the monodromy). For $a \leq 0$, the kernel of N^{-a+1} on $\mathcal{ST}_1^{a,b}$ is called the *primitive part of bidegree (a, b)* for the monodromy operator N . ◇

6.2. Kähler forms.

6.2.1. *Local ample classes.* Let $\Sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ be a smooth unimodular tropical fan. Recall that an element $\ell \in A^1(\Sigma)$ is called an ample class if it corresponds to a strictly convex cone-wise linear function on Σ .

PROPOSITION 6.4. *Let Σ be a Kähler tropical fan. Let $\ell \in A^1(\Sigma)$ be an ample class of Σ . Then*

- ℓ verifies the Hodge-Riemann relations $\text{HR}(\Sigma, \ell)$,
- for any cone $\sigma \in \Sigma$, $i_{\sigma}^*(\ell) \in A^1(\Sigma^{\sigma})$ is an ample class of Σ^{σ} .

PROOF. The first point is Theorem 3.26. The second point follows from Proposition 3.24 combined with 3.26. \square

The proposition in particular applies to unimodular shellable quasi-projective tropical fans.

6.2.2. *Kähler class.* Let X be a unimodular polyhedral complex structure on a smooth compact tropical variety. Assume that all the star fans of X are Kähler.

DEFINITION 6.5. A *Kähler class* for X is the data of ample classes $\ell^v \in H^2(v)$ for each vertex $v \in X_{\mathcal{f}}$ such that, for each edge e of $X_{\mathcal{f}}$ of extremities u and v , we have the compatibility

$$i_{u \prec e}^*(\ell^u) = i_{v \prec e}^*(\ell^v)$$

in $H^2(e)$. \diamond

THEOREM 6.6. *Each Kähler class defines an element $\omega \in H^{1,1}(X)$.*

PROOF. Let ℓ be a Kähler class. We have

$$\ell \in \bigoplus_{\substack{v \in X_{\mathcal{f}} \\ |v|=0}} H^2(v) = \text{ST}_1^{0,2,0} \subseteq \text{ST}_1^{0,2}.$$

Thus, ℓ can be seen as an element of $\text{ST}_1^{0,2}$. Moreover,

$$\begin{aligned} d\ell &= \sum_{\substack{v \in X_{\mathcal{f}} \\ |v|=0}} \sum_{\substack{e \in X_{\mathcal{f}} \\ e > v}} \text{sign}(v, e) i_{v \prec e}^*(\ell^v) \\ &= \sum_{\substack{e \in X_{\mathcal{f}} \\ |e|=1 \\ u, v \prec e}} \text{sign}(u, e) i_{u \prec e}^*(\ell^u) + \text{sign}(v, e) i_{v \prec e}^*(\ell^v), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hence, ℓ is in the kernel of $\text{ST}_1^{0,2}$ and thus induces an element $\omega \in \text{ST}_2^{0,2} \simeq H^{1,1}(X)$. \square

DEFINITION 6.7. - An element ω in $H^{1,1}(X)$ is called a *Kähler class* if there exist ample elements $\ell^v \in H^2(v)$ as above which define $\omega \in H^{1,1}(X)$.

- A smooth compact tropical variety is called *Kähler* if it admits a unimodular triangulation X , all the star fans of X are Kähler and moreover there is a Kähler class $\omega \in H^{1,1}(X)$. \diamond

6.2.3. *Projective tropical varieties with Kähler star fans are Kähler.* In this section, we consider the case of a unimodular polyhedral complex $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ and the compactification X of Y in the tropical toric variety $\text{TPP}_{Y_{\text{rec}}}$. In this situation $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ is the part of X of sedentarity $\underline{0}$.

We assume that the triangulation Y is quasi-projective. Under this assumption, we will show that X is Kähler, i.e., that there exists a Kähler class in $H^{1,1}(X)$, provided that all the star fans of X are Kähler. In particular, if all the star fans are shellable, then X is Kähler. This applies to tropical varieties which are locally matroidal.

Let f be a strictly convex piecewise linear function on Y . Let δ be a face of X_f , and ϕ be an affine linear form with the same restriction to δ as f . Denote by f^δ the cone-wise linear function induced by $f - \phi$ on Σ^δ .

DEFINITION - PROPOSITION 6.8. The function f^δ is strictly convex. Denote by ℓ^δ the corresponding element $\ell(f^\delta)$ of $H^2(\delta)$. This element ℓ^δ does not depend on the chosen ϕ . Moreover, if γ is a face of δ , then $\ell^\delta = i_{\gamma < \delta}^*(\ell^\gamma)$.

PROOF. For both parts, one can adapt the proof given in Proposition 3.24 in the local case. □

It follows that ℓ^δ is an ample class in $A^1(\delta) = H^2(\delta)$. In particular, this holds for vertices of X_f , giving an element $(\ell^v)_{v \text{ vertex of } X_f} \in \mathbf{ST}_1^{0,2}$. We get the following theorem.

THEOREM 6.9. *A strictly convex function f on Y defines a Kähler class of X .*

PROOF. We just have to notice that, for any edge $e \in X_f$ of extremities u and v ,

$$i_{v < e}^*(\ell^v) = \ell^e = i_{u < e}^*(\ell^u). \quad \square$$

The two following results give a better understanding of the link between piecewise linear functions and elements of $H^{1,1}(\mathfrak{X})$. The corollary will be useful in Section 9.

Let v be a vertex of Y . We define χ_v the *characteristic function* of v to be the unique piecewise linear function on Y which takes value 1 at v , takes value 0 at any other vertex of Y , and whose slope along any non-compact one dimensional face of Y is zero.

PROPOSITION 6.10. *Let v be a vertex of Y and let χ_v be the characteristic function of v . Then the class given by χ_v in $H^{1,1}(\mathfrak{X})$ is trivial.*

PROOF. Let us also denote by χ_v the corresponding element of $\mathbf{ST}_1^{0,2}$. Then

$$\chi_v = -d \sum_{\substack{e \in Y_f \\ e > v}} \text{sign}(v, e) 1_e$$

where 1_e is the natural generator of $H^0(e) \subseteq \mathbf{ST}^{-1,2}$. Hence χ_v is a boundary, and its cohomological class is trivial. □

Recall that if f is a piecewise linear function on Y , then we defined the asymptotic part $f_{\text{rec}} : Y_{\text{rec}} \rightarrow \mathbb{R}$ of f in Section 4.2.5. We immediately get the following corollary.

COROLLARY 6.11. *Let f be a piecewise linear function on Y and let ℓ be the corresponding class in $H^{1,1}(X)$. Assume moreover that f_{rec} is well-defined. Then ℓ only depends on f_{rec} .*

Another equivalent description of the class ℓ is given in Section 8.2.

6.3. The Lefschetz operator. Let ℓ be a Kähler class of X . For each face $\delta \in X_f$, we define $\ell^\delta \in H^2(\delta) \simeq A^1(\delta)$ by

$$\ell^\delta = i_{v < \delta}^*(\ell^v),$$

where v is any vertex of δ . This definition does not depend on the choice of v because, if u is another vertex of δ , we have

$$i_{v < \delta}^*(\ell^v) = i_{e < \delta}^* \circ i_{v < e}^*(\ell^v) = i_{e < \delta}^* \circ i_{u < e}^*(\ell^u) = i_{u < \delta}^*(\ell^u),$$

where e is the edge of extremities u and v .

Let Q_δ be the bilinear form defined on $H^{2k}(\delta) = A^k(\delta)$, for $k \leq \frac{d-|\delta|}{2}$, by

$$\forall a, b \in H^{2k}(\delta), \quad Q_\delta(a, b) = \text{deg}(ab(\ell^\delta)^{d-|\delta|-2k}).$$

Every ℓ^δ is ample by Proposition 6.4.

For each δ , let

$$P^{2k}(\delta) := \ker\left((\ell^\delta)^{d-|\delta|-2k+1} : H^{2k}(\delta) \rightarrow H^{2d-2|\delta|-2k+2}(\delta)\right)$$

be the primitive part of $H^{2k}(\delta)$. Note that with the notations of Section 3, we have $P^{2k}(\delta) = A_{\text{prim}, \ell^\delta}^k(\Sigma^\delta)$.

The following properties hold.

- (Hard Lefschetz) For each $k \leq \frac{d-|\delta|}{2}$, the map

$$(\ell^\delta)^{d-|\delta|-2k} : H^{2k}(\delta) \rightarrow H^{2d-2|\delta|-2k}(\delta)$$

is an isomorphism.

- (Hodge-Riemann) The bilinear form $(-1)^k Q_\delta(\cdot, \cdot)$ restricted to the primitive part $P^{2k}(\delta) = \ker\left((\ell^\delta)^{d-|\delta|-2k+1} : H^{2k}(\delta) \rightarrow H^{2d-2|\delta|-2k+2}(\delta)\right)$ is positive definite.

- (Lefschetz decomposition) For $k \leq \frac{d-|\delta|}{2}$, we have the orthogonal decomposition

$$H^{2k}(\delta) = \bigoplus_{i=0}^k \ell^{k-i} P^{2i}(\delta),$$

where, for each $i \in \{0, \dots, k\}$, the map $\ell^{k-i} : P^{2i}(\delta) \xrightarrow{\sim} \ell^{k-i} P^{2i}(\delta)$ is an isomorphism preserving Q_δ .

We now define the Lefschetz operator $\ell^{a,b} : \mathbf{ST}_1^{a,b} \rightarrow \mathbf{ST}_1^{a,b+2}$ by

$$\ell^{a,b} = \bigoplus \ell^{a,b,s} : \bigoplus_{\substack{s \geq |a| \\ s \equiv a \pmod{2}}} \mathbf{ST}_1^{a,b,s} \rightarrow \bigoplus_{\substack{s \geq |a| \\ s \equiv a \pmod{2}}} \mathbf{ST}_1^{a,b+2,s}$$

and the operator $\ell^{a,b,s}$ is defined by

$$\ell^{a,b,s} = \bigoplus \ell^\delta : \bigoplus_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta|=s}} H^{a+b-s}(\delta) \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta|=s}} H^{a+b+2-s}(\delta).$$

We usually drop the indices a, b and simply denote by ℓ the operator of bidegree $(0, 2)$.

REMARK 6.12. More precisely, we could view the collection of maps $\ell^{a,b}$ as a map ℓ

$$\ell = \bigoplus_{a,b} \ell^{a,b} : \bigoplus_{a,b} \mathbf{ST}_1^{a,b} \longrightarrow \bigoplus_{a,b} \mathbf{ST}_1^{a,b+2}.$$

◇

We now recast Lemma 3.16 in the following.

PROPOSITION 6.13. *Let $\gamma \prec \delta$ be a pair of faces, and let $x \in A^\bullet(\gamma)$ and $y \in A^\bullet(\delta)$. Denote by $\rho_{\delta/\gamma}$ the ray associated to δ in Σ^γ , and by $x_{\delta/\gamma}$ the associated element of $A^1(\gamma)$.*

$$(6.2) \quad i_{\gamma \prec \delta}^* \text{ is a surjective ring homeomorphism,}$$

$$(6.3) \quad \text{Gys}_{\delta \succ \gamma} \circ i_{\gamma \prec \delta}^*(x) = x_{\delta/\gamma} \cdot x,$$

$$(6.4) \quad \text{Gys}_{\delta \succ \gamma}(i_{\gamma \prec \delta}^*(x) \cdot y) = x \cdot \text{Gys}_{\delta \succ \gamma}(y).$$

Moreover, if $\text{deg}_\gamma : A^{d-|\gamma|} \rightarrow \mathbb{R}$ and $\text{deg}_\delta : A^{d-|\delta|} \rightarrow \mathbb{R}$ are the natural degrees map, then

$$(6.5) \quad \text{deg}_\delta = \text{deg}_\gamma \circ \text{Gys}_{\delta \succ \gamma}.$$

Finally, $\text{Gys}_{\delta \succ \gamma}$ and $i_{\gamma \prec \delta}^*$ are dual in the sense that

$$(6.6) \quad \text{deg}_\gamma(x \cdot \text{Gys}_{\delta \succ \gamma}(y)) = \text{deg}_\delta(i_{\gamma \prec \delta}^*(x) \cdot y).$$

PROOF. The proof is similar to the one given in the local case. □

The following proposition summarizes basic properties of the Lefschetz operator ℓ .

PROPOSITION 6.14. *We have*

- $[\ell, N] = 0$, $[\ell, i^*] = [\ell, \text{Gys}] = 0$.
- for a pair of integers a, b with $a + b \geq d$, the map $\ell^{d-a-b}: \text{ST}_1^{a,b} \longrightarrow \text{ST}_1^{a,2d-2a-b}$ is an isomorphism.

PROOF. For the first point, let $\gamma \prec \delta$ be a pair of faces of X_f . We recall that $i_{\gamma \prec \delta}^*: A^\bullet(\gamma) \rightarrow A^\bullet(\delta)$ is a surjective ring homeomorphism. Thus, for any $a \in A^\bullet(\gamma)$,

$$i_{\gamma \prec \delta}^*(\ell^\gamma a) = i_{\gamma \prec \delta}^*(\ell^\gamma) i_{\gamma \prec \delta}^*(a) = \ell^\delta i_{\gamma \prec \delta}^*(a).$$

By Equation (6.4), for any $x \in A^\bullet(\delta)$,

$$\text{Gys}_{\delta \succ \gamma}(\ell^\delta x) = \text{Gys}_{\delta \succ \gamma}(i_{\gamma \prec \delta}^*(\ell^\gamma x)) = \ell^\gamma \text{Gys}_{\delta \succ \gamma}(x).$$

Let a, b, s be three integers with $a \equiv s \pmod{2}$. Multiplying the previous equations by $\text{sign}(\gamma, \delta)$ and summing over couples $\gamma \prec \delta$, we get that the three following diagrams are commutative.

$$\begin{array}{ccc} \text{ST}_1^{a,b,s} & \xrightarrow{\ell} & \text{ST}_1^{a,b+2,s} & \text{ST}_1^{a,b,s} & \xrightarrow{\ell} & \text{ST}_1^{a,b+2,s} & \text{ST}_1^{a,b,s} & \xrightarrow{\ell} & \text{ST}_1^{a,b+2,s} \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow \text{id} & \downarrow i^* & & \downarrow i^* & \downarrow \text{Gys} & & \downarrow \text{Gys} \\ \text{ST}_1^{a+2,b-2,s} & \xrightarrow{\ell} & \text{ST}_1^{a+2,b,s} & \text{ST}_1^{a+1,b,s+1} & \xrightarrow{\ell} & \text{ST}_1^{a+1,b+2,s+1} & \text{ST}_1^{a+1,b,s-1} & \xrightarrow{\ell} & \text{ST}_1^{a+1,b+2,s-1} \end{array}$$

To get the commutativity in $\text{ST}_1^{\bullet, \bullet}$, it remains to check that, in each diagram, if the top-left and bottom-right pieces appear in $\text{ST}_1^{\bullet, \bullet}$, then the two other pieces appear as well, which is immediate.

For the second point, we have

$$\begin{aligned} \text{ST}_1^{a,b} &= \bigoplus_{\substack{s \geq |a| \\ s \equiv a \pmod{2}}} \bigoplus_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta| = s}} H^{a+b-s}(\delta) \\ \text{ST}_1^{a,2d-2a-b} &= \bigoplus_{\substack{s \geq |a| \\ s \equiv a \pmod{2}}} \bigoplus_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta| = s}} H^{2d-a-b-s}(\delta) \end{aligned}$$

and $\ell^{d-a-b}: \text{ST}_1^{a,b} \rightarrow \text{ST}_1^{a,2d-2a-b}$ can be rewritten as

$$\bigoplus_{\substack{s \geq |a| \\ s \equiv a \pmod{2}}} \bigoplus_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta| = s}} (\ell^\delta)^{d-a-b}: H^{a+b-s}(\delta) \longrightarrow H^{2d-a-b-s}(\delta).$$

For each δ of dimension s , since ℓ^δ is ample, we get an isomorphism

$$(\ell^\delta)^{d-a-b}: H^{a+b-s}(\delta) \longrightarrow H^{2d-a-b-s}(\delta) = H^{2(d-|\delta|)-(a+b-s)}.$$

Thus, we conclude that $\ell^{d-a-b}: \text{ST}_1^{a,b} \rightarrow \text{ST}_1^{a,2d-2a-b}$ is an isomorphism. \square

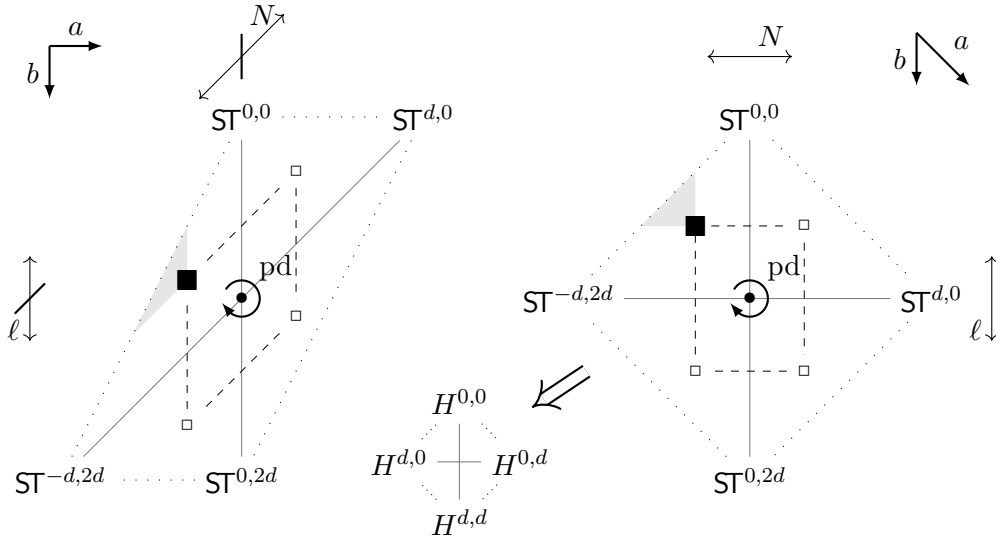
6.4. The Hodge-Lefschetz-primitive part $P^{a,b}$. For $a \leq 0$ and $b \leq d - a$, define the *Hodge-Lefschetz* (or simply *HL*) *primitive part* $P^{a,b}$ of bidegree (a, b) as

$$P^{a,b} := \text{ST}_1^{a,b} \cap \ker(N^{-a+1}) \cap \ker(\ell^{d-a-b+1}).$$

PROPOSITION 6.15. *We have*

$$P^{a,b} = \bigoplus_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta| = -a}} P^{2a+b}(\delta).$$

FIGURE 5. The tropical Hodge diamond



PROOF. For b odd, both parts are zero. So suppose b is even. In this case, we have

$$ST_1^{a,b} \cap \ker(N^{-a+1}) = \bigoplus_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta| = -a}} H^{2a+b}(\delta),$$

and thus

$$P^{a,b} = \ker \left(\bigoplus_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta| = -a}} (\ell^\delta)^{d-a-b+1} : \bigoplus_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta| = -a}} H^{2a+b}(\delta) \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta| = -a}} H^{2d-b+2}(\delta) \right).$$

To conclude, note that since $|\delta| = -a$, we have $d - a - b + 1 = d - |\delta| - (2a + b) + 1$, and thus

$$\ker \left((\ell^\delta)^{d-a-b+1} : H^{2a+b}(\delta) \rightarrow H^{2d-b+2}(\delta) \right) = P^{2a+b}(\delta),$$

and the proposition follows. □

6.5. Hodge diamond. By what we proved in the previous sections, $ST_1^{\bullet,\bullet}$ forms a *Hodge diamond* as illustrated in Figure 5. Let us explain what this means.

We do a change of coordinates $(a, b) \rightarrow (a, d - a - b)$ to form

$$HD^{a,d-a-b} := ST_1^{a,b}.$$

The result of this transformation is that the nonzero terms of $HD^{\bullet,\bullet}$ now form a rhombus.

The horizontal symmetry maps a piece of $HD^{\bullet,\bullet}$ onto an isomorphic piece by applying the monodromy operator N enough number of times. More precisely, for an integer $a \geq 0$, we get

$$N^a : HD^{-a,b} \simeq HD^{a,b}.$$

Similarly, the vertical symmetry maps a piece of $HD^{\bullet,\bullet}$ onto another isomorphic piece by applying the Lefschetz operator ℓ enough number of times: for $b \geq 0$,

$$\ell^b : HD^{a,-b} \simeq HD^{a,b}.$$

In the figure, the four squares in both diagrams, in $ST_1^{\bullet,\bullet}$ and $HD^{\bullet,\bullet}$, represent four isomorphic pieces. Moreover, the central symmetry corresponds to the Poincaré duality $HD^{-a,-b} \simeq H^{a,b}$.

To justify the name of tropical Hodge diamond, on the bottom of the figure is shown the tropical Hodge groups to which the Steenbrink diamond degenerates. We show in Theorem 6.23 that the symmetries described above also hold for the tropical Hodge decomposition, as in the usual Hodge diamond.

Finally, notice that $\text{HD}_{\bullet,\bullet}$ defined by $\text{HD}_{a,b} = \text{HD}^{-a,-b}$ is a HL-structure as defined in Section 7, cf. Definition 7.1.

6.6. Polarization on $\text{ST}_1^{\bullet,\bullet}$. We now describe a natural polarization on $\text{ST}_1^{\bullet,\bullet}$. We prove in the next section that it induces a positive definite symmetric bilinear form on the HL-primitive parts $P^{a,b}$ defined above.

We first define a bilinear form ψ on $\text{ST}_1^{\bullet,\bullet}$ as follows. Let $x \in \text{ST}_1^{a,b,s}$ and $y \in \text{ST}_1^{a',b',s'}$. Write

$$x = \sum_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta|=s}} x_\delta$$

with $x_\delta \in H^{a+b-s}(\delta)$, and similarly for y . We define the *degree map*

$$\text{deg}(x \cdot y) := \begin{cases} \sum_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta|=s}} \text{deg}(x_\delta \cdot y_\delta) & \text{if } s = s', \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The bilinear form ψ is then defined by

$$(6.7) \quad \psi(x, y) := \begin{cases} \epsilon(a, b) \text{deg}(x \cdot y) & \text{if } a + a' = 0, \quad b + b' = 2d, \text{ and } s' = s, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where for a pair of integers a, b , with b even,

$$\epsilon(a, b) := (-1)^{a+\frac{b}{2}},$$

and otherwise, if b is odd, $\epsilon(a, b) = 1$ (but in this case, we necessarily have $x = 0$).

The following proposition gathers basic properties of the the bilinear pairing ψ .

PROPOSITION 6.16. *We have for all pairs of elements $x, y \in \bigoplus_{a,b} \text{ST}_1^{a,b}$,*

- (i) $\psi(x, y) = (-1)^d \psi(y, x)$.
- (ii) $\psi(Nx, y) + \psi(x, Ny) = 0$.
- (iii) $\psi(\ell x, y) + \psi(x, \ell y) = 0$.
- (iv) $\psi(i^* x, y) + \psi(x, \text{Gys}y) = 0$.
- (v) $\psi(\text{Gys}x, y) + \psi(x, i^* y) = 0$.
- (vi) $\psi(dx, y) + \psi(x, dy) = 0$.

PROOF. Let $x \in \text{ST}_1^{a,b,s}$ and $y \in \text{ST}_1^{a',b',s'}$ be two nonzero elements for integers a, b, s, a', b', s' with $s \geq |a|$ and $s' \geq |a'|$. We proceed by verifying the statements point by point.

- (i) if $a + a' \neq 0$ or $b + b' \neq 2d$, then both $\psi(x, y)$ and $\psi(y, x)$ are zero. Otherwise,

$$\epsilon(a', b') = \epsilon(-a, 2d - b) = (-1)^{-a+\frac{2d-b}{2}} = (-1)^d \epsilon(a, b).$$

Thus, $\psi(x, y) = (-1)^d \psi(y, x)$.

- (ii) Recall that N is a map of bidegree $(2, -2)$. If $a + a' + 2 \neq 0$ or $b + b' - 2 \neq 2d$ or $s \neq s'$, then both $\psi(Nx, y)$ and $\psi(x, Ny)$ are zero. Otherwise, $s = s' \geq |a'| = |a + 2|$. Thus $Nx \neq 0$. By symmetry, $Ny \neq 0$. Since N acts as identity on both x and y , we get $\text{deg}(Nx \cdot y) = \text{deg}(x \cdot Ny)$. Moreover, $\epsilon(a + 2, b - 2) = -\epsilon(a, b)$. Hence, we obtain $\psi(Nx, y) + \psi(x, Ny) = 0$.

(iii) Recall that ℓ is a map of bidegree $(0, 2)$. If $a + a' \neq 0$ or $b + b' + 2 \neq 2d$ or $s \neq s'$, then both $\psi(\ell x, y)$ and $\psi(x, \ell y)$ are zero. Otherwise,

$$\deg(\ell x \cdot y) = \sum_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta|=s}} \deg(\ell^\delta \cdot x_\delta \cdot y_\delta) = \deg(x \cdot \ell y).$$

Moreover, $\epsilon(a, b + 2) = -\epsilon(a, b)$. Thus, we get $\psi(\ell x, y) + \psi(x, \ell y) = 0$.

(iv) If $a + a' + 1 \neq 0$ or $b + b' \neq 2d$ or $s + 1 \neq s'$, then $\psi(i^*x, y)$ and $\psi(x, \text{Gys}y)$ are both zero. Otherwise, $s' - 1 = s \geq |a| = |a' + 1|$. Thus, the Gysin map $\text{Gys}: \text{ST}_1^{a', b', s'} \rightarrow \text{ST}_1^{a'+1, b', s'-1}$ has a codomain belonging to $\text{ST}_1^{\bullet, \bullet}$. This also holds for i^* . Moreover, using Equation (6.6), we get

$$\begin{aligned} \deg(i^*(x) \cdot y) &= \sum_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta|=s+1}} \sum_{\substack{\gamma \in X_f \\ \gamma < \delta}} \deg(\text{sign}(\gamma, \delta) i_{\gamma < \delta}^*(x_\gamma) \cdot y_\delta) \\ &= \sum_{\substack{\gamma \in X_f \\ |\gamma|=s}} \sum_{\substack{\delta \in X_f \\ \delta > \gamma}} \deg(x_\gamma \cdot \text{sign}(\gamma, \delta) \text{Gys}_{\delta > \gamma}(y_\delta)) \\ &= \deg(x \cdot \text{Gys}(y)). \end{aligned}$$

Since $\epsilon(a + 1, b) = -\epsilon(a, b)$, we get $\psi(i^*x, y) + \psi(x, \text{Gys}y) = 0$.

(v) The equality $\psi(\text{Gys}x, y) + \psi(x, i^*y) = 0$ follows from the points (i) and (iv).

(vi) Summing up the equalities in (iv) and (v) gives $\psi(dx, y) + \psi(x, dy) = 0$ by the definition of the differential d . □

6.7. Induced polarization on the Hodge-Lefschetz primitive parts. The bilinear form ψ induces a positive definite symmetric bilinear form on the Hodge-Lefschetz primitive parts $P^{a,b}$ that we now describe.

PROPOSITION 6.17. *For integer $a \leq 0$ and $b \leq d - a$, the bilinear form $\psi(\cdot, \ell^{d-a-b} N^{-a} \cdot)$ is symmetric positive definite on $P^{a,b}$. More precisely, it is the orthogonal sum of polarizations $(-1)^{a+b/2} Q_\delta(\cdot, \cdot)$ for $\delta \in X_f$ on the primitive part $P^{2a+b}(\delta)$, under the identification*

$$P^{a,b} = \bigoplus_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta|=-a}} P^{2a+b}(\delta).$$

PROOF. By the properties of the monodromy operator, the isomorphism

$$N^{-a}: \text{ST}_1^{-a, 2d-2a-b} \rightarrow \text{ST}_1^{-a, 2d-b}$$

is the identity map on each isomorphic piece $H^{2a+b}(\delta)$ of $\text{ST}_1^{a, 2d-2a-b}$ and $\text{ST}_1^{-a, 2d-b}$, for any $\delta \in X_f$ with $|\delta| = -a$.

By definition of ψ , for a pair of elements $x, y \in P^{2a+b}(\delta)$, we get

$$\begin{aligned} \psi(x, \ell^{d-a-b} N^{-a} y) &= \psi(x, N^{-a} \ell^{d-a-b} y) \\ &= \epsilon(a, b) \deg(x \cdot \ell^{d-a-b} y) \\ &= (-1)^{a+b/2} \deg(x \cdot \ell^{d-a-b} y) \\ &= (-1)^{a+b/2} Q_\delta(x, y). \end{aligned}$$

This concludes the proof since $(-1)^{a+b/2} Q_\delta$ is symmetric positive definite by local Hodge-Riemann relations. □

6.8. Hodge-Lefschetz decomposition. From the preceding discussion, we get the following theorem. It can be illustrated as in Figure 5: the black square can be decomposed as the direct sum of primitive parts lying in the grey area.

THEOREM 6.18. *For each pair of integers $a \leq 0$ and $b \leq d - a$, we have the decomposition*

$$\mathbf{ST}_1^{a,b} = \bigoplus_{s,r \geq 0} \ell^r N^s P^{a-2s,b+2s-2r}.$$

PROOF. We give here a direct proof based on the definition of $\mathbf{ST}_1^{\bullet,\bullet}$ and using local Lefschetz decompositions. We however note that this theorem can be proved thanks to the general theory of HL-structures, cf. Proposition 7.2. We have

$$\begin{aligned} \mathbf{ST}_1^{a,b} &= \bigoplus_{s \geq 0} \mathbf{ST}_1^{a,b,2s-a} \\ &= \bigoplus_{s \geq 0} N^s \mathbf{ST}_1^{a-2s,b+2s,2s-a} \\ &= \bigoplus_{s \geq 0} N^s \bigoplus_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta|=2s-a}} \underbrace{H^{2a+b-2s}(\delta)}_{\subseteq \mathbf{ST}_1^{a-2s,b+2s}} \\ &= \bigoplus_{s \geq 0} N^s \bigoplus_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta|=2s-a}} \bigoplus_{r \geq 0} \underbrace{\ell^r P^{2a+b-2s-2r}(\delta)}_{\subseteq \mathbf{ST}_1^{a-2s,b+2s-2r}} \\ &= \bigoplus_{r,s \geq 0} \ell^r N^s \bigoplus_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta|=2s-a}} P^{2a+b-2s-2r}(\delta), \\ \mathbf{ST}_1^{a,b} &= \bigoplus_{r,s \geq 0} \ell^r N^s P^{a-2s,b+2s-2r}. \end{aligned} \quad \square$$

6.9. Polarized Hodge-Lefschetz structure on the cohomology of $(\mathbf{ST}_1^{\bullet,b}, d)$. In this section we show that when passing to the cohomology, the operators N , ℓ and the polarization ψ induce a polarized Hodge-Lefschetz structure on the cohomology groups $L^{a,b} := H^a(\mathbf{ST}_1^{\bullet,b}, d)$. By this we mean the following.

First, since $[d, \ell] = 0$ and $[d, N] = 0$, we get induced maps

$$\ell: L^{a,b} \rightarrow L^{a,b+2}$$

and

$$N: L^{a,b} \rightarrow L^{a+2,b-2}$$

such that $[N, \ell] = 0$.

Second, since $\psi(d \cdot, \cdot) = -\psi(\cdot, d \cdot)$, we get an induced pairing

$$\psi: L^{\bullet,\bullet} \times L^{\bullet,\bullet} \rightarrow \mathbb{K}.$$

Moreover, we will show that

THEOREM 6.19. *We have the following properties.*

- For $a \leq 0$, the map $N^{-a}: L^{a,b} \rightarrow L^{-a,b+2a}$ is an isomorphism.
- For a, b with $d - a - b \geq 0$, the map $\ell^{d-a-b}: L^{a,b} \rightarrow L^{a,2d-2a-b}$ is an isomorphism.
- Let $a \leq 0$ and $b \leq d - a$ and denote by $L_0^{a,b}$ the HL-primitive part of $L^{a,b}$ defined by

$$L_0^{a,b} = L^{a,b} \cap \ker(N^{-a+1}) \cap \ker(\ell^{d-a-b+1}).$$

The polarization ψ induces a symmetric bilinear form $\psi(\cdot, \ell^{d-a-b} N^{-a} \cdot)$ which is positive definite on $L_0^{a,b}$.

— For integers $a \leq 0$ and $b \leq d - a$, we have the decomposition

$$L^{a,b} = \bigoplus_{s,r \geq 0} \ell^r N^s L_0^{a-2s,b+2s-2r}.$$

Moreover, this decomposition is orthogonal for the pairing $\psi(\cdot, \ell^{d-a-b} N^{-a} \cdot)$.

PROOF. We can use the change of coordinates $\text{HD}_{-a, -(d-a-b)} := \text{ST}_1^{a,b}$ for any integers a, b . By the previous discussion, we get that $(\text{HD}_{-a, -(d-a-b)}, N, \ell, \phi, d)$ is a differential polarized HL-structure in the sense of Section 7. We can therefore apply Theorem 7.9 to conclude. \square

6.10. Singular monodromy operator. We define the *singular tropical monodromy operator* as follows. For each face $\delta \in X_f$, let o_δ be a point in the affine tangent space $T_{\text{aff}} \delta \subseteq N_{\mathbb{R}}$. For instance, we can take o_δ to be the centroid of δ . Let γ be a face in X_f of dimension q . For other faces δ of sedentarity $\underline{0}$, set $o_\delta := o_{\delta_f}$. For any face δ of any sedentarity σ , set $o_\delta = \pi^\sigma(o_\eta)$, where η is the only face of sedentarity $\underline{0}$ such that $\delta = \eta_\sigma$. Then we set

$$\begin{aligned} N: C^{p,q}(X) &\rightarrow C^{p-1,q+1}(X), \\ \alpha \in F^p(\gamma) &\mapsto \bigoplus_{\substack{\delta > \gamma \\ \text{sed}(\delta) = \text{sed}(\gamma)}} \alpha(\cdot \wedge (o_\delta - o_\gamma)). \end{aligned}$$

THEOREM 6.20. *The singular tropical monodromy operator corresponds to the monodromy operator on $\text{ST}_1^{\bullet, \bullet}$ via the isomorphism of Theorem 5.8.*

PROOF. This is a direct consequence of Proposition 11.1. \square

COROLLARY 6.21. *The operator $N: H^{p,q} \rightarrow H^{p-1,q+1}$ coincides with the eigenwave operator ϕ constructed in [MZ14].*

PROOF. One can show that the singular tropical monodromy operator coincides with the eigenwave operator. So the statement follows from Theorem 6.20. \square

REMARK 6.22. It follows that the monodromy operator N coincides as well with the monodromy operator defined on the level of Dolbeault cohomology groups [Liu19]. This is a consequence of [Jel19] which relates the eigenwave operator to the monodromy on Dolbeault cohomology. \diamond

6.11. HL, HR and Monodromy for tropical cohomology. From the result in the previous section, we get the following theorem.

THEOREM 6.23. *We have*

— (Weight-monodromy conjecture) *For $q > p$ two non-negative integers, we get an isomorphism*

$$N^{q-p}: H_{\text{trop}}^{q,p}(X) \rightarrow H_{\text{trop}}^{p,q}(X).$$

— (Hard Lefschetz) *For $p + q \leq d$, the Lefschetz operator ℓ induces an isomorphism*

$$\ell^{d-p-q}: H_{\text{trop}}^{p,q}(X) \rightarrow H_{\text{trop}}^{d-q,d-p}(X).$$

— (Hodge-Riemann) *For $q > p$, the pairing $(-1)^p \langle \cdot, \ell^{d-p-q} N^{q-p} \cdot \rangle$ induces a positive-definite pairing on the primitive part $P^{q,p}$, where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the natural pairing*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: H^{q,p}(X) \otimes H^{d-q,d-p}(X) \rightarrow H^{d,d}(X) \simeq \mathbb{Q}.$$

6.12. Hodge index theorem for tropical surfaces. In this final part of this section, we explain how to deduce the Hodge index theorem for tropical surfaces from Theorem 6.23.

PROOF OF THEOREM 1.9. The primitive part decomposition theorem implies that we can decompose the cohomology group $H_{\text{trop}}^{1,1}(X, \mathbb{Q})$ into the direct sum

$$H_{\text{trop}}^{1,1}(X, \mathbb{Q}) = \ell H_{\text{trop}}^{0,0}(X, \mathbb{Q}) \oplus N H_{\text{trop}}^{2,0}(X, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{prim}}^{1,1}(X, \mathbb{Q}),$$

where $H_{\text{prim}}^{1,1}(X, \mathbb{Q}) = \ker(\ell) \cap \ker(N)$. Moreover, by Hodge-Riemann, the pairing is positive definite on $\ell H_{\text{trop}}^{0,0}(X, \mathbb{Q})$ and $N H_{\text{trop}}^{2,0}(X, \mathbb{Q})$, and it is negative definite on $H_{\text{prim}}^{1,1}(X, \mathbb{Q})$.

By Poincaré duality, we have $H_{\text{trop}}^{2,0}(X, \mathbb{Q}) \simeq H_{\text{trop}}^{0,2}(X, \mathbb{Q})$. By definition of tropical cohomology, since F^0 is the constant sheaf \mathbb{Q} , we have $H_{\text{trop}}^{0,2}(X, \mathbb{Q}) \simeq H^2(\mathfrak{X}, \mathbb{Q})$. Moreover, we have $H_{\text{trop}}^{0,0}(X, \mathbb{Q}) \sim \mathbb{Q}$. We conclude that the signature of the intersection pairing is given by $(1 + b_2, h^{1,1} - 1 - b_2)$, as stated by the Hodge index theorem. \square

7. Hodge-Lefschetz structures

In this section, we prove that the homology of a differential Hodge-Lefschetz structure is a polarized Hodge-Lefschetz structure, thus finishing the proof of Theorem 6.19 and the main theorem of the previous section.

The main references for differential Hodge-Lefschetz structures are Saito’s work on Hodge modules [Sai88], the paper by Guillén and Navarro Aznar on invariant cycle theorem [GN90] and the upcoming book by Sabbah and Schnell [SS20] on mixed Hodge modules, to which we refer for more information. We note however that our set-up is slightly different, in particular, our differential operator is skew-symmetric with respect to the polarization. The proof in [SS20] is presented also for the case of mono-graded complexes and is based on the use of representation theory of $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ as in [GN90]. So we give a complete self-contained proof of the main theorem. Our proof is direct and does not make any recourse to representation theory, although it might be possible to recast in the language of representation theory the final combinatorial calculations we need to elaborate.

In order to simplify the computations, it turns out that it will be more convenient to work with coordinates different from the ones in the previous section, and that is what we will be doing here. The new coordinates are compatible with the ones in [SS20].

7.1. Hodge-Lefschetz structure.

DEFINITION 7.1. A (bigraded) Hodge-Lefschetz structure, or more simply an HL-structure, $(H_{\bullet,\bullet}, N_1, N_2)$ is a bigraded finite dimensional vector space $H_{\bullet,\bullet}$ endowed with two endomorphisms N_1 and N_2 of respective bidegree $(-2, 0)$ and $(0, -2)$ such that,

- $[N_1, N_2] = 0$,
- for any pair of integers a, b with $a \geq 0$, we have $N_1^a : H_{a,b} \rightarrow H_{-a,b}$ is an isomorphism,
- for any pair of integers a, b with $b \geq 0$, we have $N_2^b : H_{a,b} \rightarrow H_{a,-b}$ is an isomorphism.

\diamond

For the rest of this section, we fix a HL-structure $(H_{\bullet,\bullet}, N_1, N_2)$.

We define the primitive parts of $H_{\bullet,\bullet}$ by

$$\forall a, b \geq 0, \quad P_{a,b} := H_{a,b} \cap \ker(N_1^{a+1}) \cap \ker(N_2^{b+1}).$$

We have the following decomposition into primitive parts.

PROPOSITION 7.2. For each pair of integers $a, b \geq 0$, we have the decomposition

$$H_{a,b} = \bigoplus_{s,r \geq 0} N_1^r N_2^s P_{a+2r, b+2s}.$$

Denote by $H_{\bullet,\bullet}^+$ the bigraded subspace

$$H_{\bullet,\bullet}^+ = \bigoplus_{a,b \geq 0} H_{a,b}.$$

Define $N_1^* : H_{\bullet,\bullet}^+ \rightarrow H_{\bullet,\bullet}^+$ of bidegree $(2, 0)$, by

$$N_1^*|_{H_{a,b}} = \left((N_1|_{H_{a+2,b}})^{a+2} \right)^{-1} \left(N_1|_{H_{a,b}} \right)^{a+1} \quad \forall a, b \geq 0.$$

It verifies the following properties. Let $a, b \geq 0$. Then,

$$N_1^* N_1|_{H_{a+2,b}} = \text{id}|_{H_{a+2,b}} \quad \text{and} \quad \ker(N_1^*) \cap H_{a,b} = \ker(N_1^{a+1}) \cap H_{a,b}.$$

In particular, $N_1 : H_{a+2,b} \rightarrow H_{a,b}$ is injective, and $N_1^* : H_{a,b} \rightarrow H_{a+2,b}$ is surjective.

From this, we can deduce that the map $N_1 N_1^*|_{H_{a,b}}$ is the projection along $\ker(N_1^{a+1}) \cap H_{a,b}$ onto $N_1 H_{a+2,b}$, i.e., for the decomposition

$$H_{a,b} = N_1 H_{a+2,b} \oplus \left(\ker(N_1^{a+1}) \cap H_{a,b} \right).$$

We define N_2^* in a similar way, and note that it verifies similar properties. In particular, $N_2 N_2^*|_{H_{a,b}}$ is the projection along $\ker(N_2^{b+1}) \cap H_{a,b}$ onto $N_2 H_{a,b+2}$ for the decomposition

$$H_{a,b} = N_2 H_{a,b+2} \oplus \left(\ker(N_2^{b+1}) \cap H_{a,b} \right).$$

Moreover, from the commutativity of N_1 and N_2 , more precisely, from

$$[N_1^{a+2}, N_2]|_{H_{a+2,b+2}} = [N_1, N_2^{b+2}]|_{H_{a+2,b+2}} = [N_1^{a+2}, N_2^{b+2}]|_{H_{a+2,b+2}} = 0,$$

we infer that

$$[N_1^*, N_2]|_{H_{a,b+2}} = [N_1, N_2^*]|_{H_{a+2,b}} = [N_1^*, N_2^*]|_{H_{a,b}} = 0.$$

In particular,

$$N_1 N_1^* N_2 N_2^* = N_2 N_2^* N_1 N_1^* = N_1 N_2 N_1^* N_2^*.$$

Notice that $N_1 N_2 N_1^* N_2^*|_{H_{a,b}}$ is a projection onto $N_1 N_2 H_{a+2,b+2}$.

We come back to the proof of the proposition.

PROOF OF PROPOSITION 7.2. Clearly, $N_1 : H_{a+2,b} \rightarrow H_{a,b}$ is injective for $a \geq 0$. Similarly for N_2 . Therefore, proceeding by induction, it suffices to prove that for any pair of integers $a, b \geq 0$, we have

$$H_{a,b} = (N_1 H_{a+2,b} + N_2 H_{a,b+2}) \oplus P_{a,b} \quad \text{and} \quad N_1 H_{a+2,b} \cap N_2 H_{a,b+2} = N_1 N_2 H_{a+2,b+2}.$$

This can be deduced from the following lemma applied to $N_1 N_1^*|_{H_{a,b}}$ and $N_2 N_2^*|_{H_{a,b}}$ and the corresponding decompositions of $H_{a,b}$. \square

LEMMA 7.3. *Let V be a finite dimensional vector space. For $i \in \{1, 2\}$, suppose we have decompositions $V = I_1 \oplus K_1 = I_2 \oplus K_2$ for subspaces $I_1, K_1, I_2, K_2 \subseteq V$. Denote by $\pi_i : V \rightarrow V$ the projection of V onto I_i along K_i . Then, if π_1 and π_2 commute, we get*

$$V = I_1 \cap I_2 \oplus I_1 \cap K_2 \oplus K_1 \cap I_2 \oplus K_1 \cap K_2 \quad \text{and} \quad I_1 \cap I_2 = \text{Im}(\pi_1 \circ \pi_2).$$

PROOF. Since π_1 and π_2 commute, $\pi_2(I_1) \subseteq I_1$. Thus, π_2 can be restricted to I_1 . This restriction is a projection onto $I_2 \cap I_1$ along $K_2 \cap I_1$. Thus,

$$I_1 = I_2 \cap I_1 \oplus K_2 \cap I_1 \quad \text{and} \quad I_1 \cap I_2 = \text{Im}(\pi_2 \circ \pi_1).$$

Applying the same argument to the commuting projections $\text{id} - \pi_1$ and $\text{id} - \pi_2$, we get that

$$K_1 = K_2 \cap K_1 \oplus I_2 \cap K_1.$$

Hence,

$$V = I_1 \oplus K_1 = I_1 \cap I_2 \oplus I_1 \cap K_2 \oplus K_1 \cap I_2 \oplus K_1 \cap K_2. \quad \square$$

7.2. Polarization ψ and its corresponding scalar product ϕ . A *polarization* on the HL-structure $H_{\bullet, \bullet}$ is a bilinear form $\psi(\cdot, \cdot)$ such that:

- for any integers a, b, a', b' and any elements $x \in H_{a,b}$ and $y \in H_{a',b'}$, the pairing $\psi(x, y)$ is zero unless $a + a' = b + b' = 0$,
- for any $a, b \geq 0$, the pairing $\psi(\cdot, N_1^a N_2^b \cdot)$ is symmetric definite positive on $P_{a,b}$,
- N_1 and N_2 are skew-symmetric for ψ .

For the rest of this section, we assume that $H_{\bullet, \bullet}$ is endowed with a polarization ψ .

Denote as in the previous section $H_{\bullet, \bullet}^+$ the bigraded subspace

$$H_{\bullet, \bullet}^+ = \bigoplus_{a, b \geq 0} H_{a,b}.$$

We define the operator w on $H_{\bullet, \bullet}$ as follows.

Let $a, b \geq 0$ and $r, s \geq 0$ be four integers. Let $x \in P_{a,b}$. Then, we set

$$wN_1^r N_2^s x := \begin{cases} (-1)^{r+s} \frac{r!}{(a-r)!} \frac{s!}{(b-s)!} N_1^{a-r} N_2^{b-s} x & \text{if } r \leq a \text{ and } s \leq b \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Using the decomposition into sum of primitive parts from the previous section, one can verify that w is well-defined.

We will provide some explanations about the choice of the operator w , in particular about the choice of the renormalization factors, at the beginning of Section 7.6.

Set $\phi(\cdot, \cdot) := \psi(\cdot, w \cdot)$.

PROPOSITION 7.4. *We have the following properties.*

- The operator w is invertible with its inverse verifying

$$w^{-1} N_1^r N_2^s x = (-1)^{a+b} w N_1^r N_2^s x.$$

- The pairing ϕ is symmetric positive definite.
- The decomposition into primitive parts of $H_{\bullet, \bullet}$ is orthogonal for ϕ . More precisely, let $a, b, r, s \geq 0$ and $a', b', r', s' \geq 0$ be eight integers and let $x \in P_{a,b}$ and $y \in P_{a',b'}$. Then,

$$\phi(N_1^r N_2^s x, N_1^{r'} N_2^{s'} y) = 0 \text{ unless } r = r', s = s', a = a' \text{ and } b = b'.$$

PROOF. The first point is an easy computation. For the two other points, take $x \in P_{a,b}$ and $y \in P_{a',b'}$. We can assume that $r \leq a, s \leq b, r' \leq a'$ and $s' \leq b'$. Set

$$C = \frac{r'! s'!}{(a' - r')! (b' - s')!}.$$

We have

$$\begin{aligned} \phi(N_1^r N_2^s x, N_1^{r'} N_2^{s'} y) &= \psi(N_1^r N_2^s x, w N_1^{r'} N_2^{s'} y) \\ &= (-1)^{r'+s'} C \psi(N_1^r N_2^s x, N_1^{a'-r'} N_2^{b'-s'} y) \\ &= (-1)^{a'+b'} C \psi(N_1^{a'-r'+r} N_2^{b'-s'+s} x, y) \\ &= (-1)^{r'+s'+r+s} C \psi(x, N_1^{a'-r'+r} N_2^{b'-s'+s} y). \end{aligned}$$

Suppose the value of the above pairing is nonzero. Then, since $x \in H_{a,b}$ and

$$N_1^{a'+r-r'} N_2^{b'+s-s'} y \in H_{-a'+2r'-2r, -b'+2s'-2s},$$

we should have $a - a' + 2r' - 2r = 0$. Moreover, since $x \in \ker(N_1^{a'+1})$ and $y \in \ker(N_1^{a'+1})$, we get

$$a' - r' + r \leq a \quad \text{and} \quad a' - r' + r \leq a'.$$

Hence, we get

$$r - r' \leq a - a' = 2(r - r') \quad \text{and} \quad r - r' \leq 0,$$

which in turn implies that $r - r' = a - a' = 0$, i.e., $r = r'$ and $a = a'$. By symmetry, we get $s = s'$ and $b = b'$. We infer that

$$\phi(N_1^r N_2^s x, N_1^r N_2^s y) = C\psi(x, N_1^a N_2^b y),$$

which concludes the proof since $\psi(\cdot, N_1^a N_2^b \cdot)$ is symmetric positive definite on $P_{a,b}$. \square

7.3. Differential polarized HL-structure. On a polarized HL-structure $H_{\bullet,\bullet}$, a *differential* is an endomorphism d of bidegree $(-1, -1)$ such that

- $d^2 = 0$,
- $[d, N_1] = [d, N_2] = 0$,
- d is skew-symmetric for ψ .

In the rest of this section, we fix a differential d on $H_{\bullet,\bullet}$.

PROPOSITION 7.5. *The following holds for any pair of integers $a, b \geq 0$:*

$$dP_{a,b} \subseteq P_{a-1,b-1} \oplus N_1 P_{a+1,b-1} \oplus N_2 P_{a-1,b+1} \oplus N_1 N_2 P_{a+1,b+1},$$

where, by convention, $P_{a',b'} = 0$ if $a' < 0$ or $b' < 0$.

PROOF. Since d and N_1 commute,

$$dP_{a,b} \subseteq \ker(N_1^{a+1}) \cap H_{a-1,b-1} = \bigoplus_{r \geq 0} N_2^r P_{a-1,b-1+2r} \oplus N_1 N_2^r P_{a+1,b-1+2r}.$$

Notice that this is true even if $a = 0$ or $b = 0$. We conclude the proof by combining this result with the symmetric result for N_2 . \square

Using this proposition, if $x \in P_{a,b}$, then for $i, j \in \{0, 1\}$, we define $x_{i,j} \in P_{a-1+2i,b-1+2j}$ such that

$$dx = \sum_{i,j \in \{0,1\}} N_1^i N_2^j x_{i,j}.$$

Since d commutes with N_1 and N_2 , more generally, for any pair of integers $r, s \geq 0$, we get

$$dN_1^r N_2^s x = \sum_{i,j \in \{0,1\}} N_1^{r+i} N_2^{s+j} x_{i,j}.$$

With this notation, the fact that $d^2 = 0$ can be reformulated as follows.

PROPOSITION 7.6. *With the above notations, for any pair $k, l \in \{0, 1, 2\}$,*

$$N_1^{\epsilon_1} N_2^{\epsilon_2} \sum_{\substack{i,j,i',j' \in \{0,1\} \\ i+i'=k \\ j+j'=l}} (x_{i,j})_{i',j'} = 0.$$

where,

$$\epsilon_1 = \begin{cases} 1 & \text{if } a = 0 \text{ and } k = 1 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \text{and} \quad \epsilon_2 = \begin{cases} 1 & \text{if } b = 0 \text{ and } l = 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

PROOF. From the previous discussion, we get that

$$d^2x \in \bigoplus_{k,l \in \{0,1,2\}} N_1^k N_2^l P_{a-2+2k,b-2+2l}.$$

Moreover, the piece corresponding to a fixed k and l is

$$\sum_{\substack{i,j,i',j' \in \{0,1\} \\ i+i'=k \\ j+j'=l}} N_1^k N_2^l (x_{i,j})_{i',j'}.$$

Since, $d^2 = 0$, this last sum is zero:

$$N_1^k N_2^l \sum_{\substack{i,j,i',j' \in \{0,1\} \\ i+i'=k \\ j+j'=l}} (x_{i,j})_{i',j'} = 0.$$

We know that, for any b' , $N_1^k|_{P_{a-2+2k,b'}}$ is injective if $k \leq a - 2 + 2k$. This is also true if $a - 2 + 2k < 0$ because, in this case, the domain is trivial. In both cases, we can remove N_1^k in the above equation. The last case is

$$0 \leq a - 2 + 2k < k.$$

This implies $k = 1$ and $a = 0$, in which case we cannot a priori remove the $N_1^k = N_1$ in the previous equation. This concludes the proof of the proposition. \square

7.4. The Laplace operator Δ . The Laplace operator $\Delta: H_{\bullet,\bullet} \rightarrow H_{\bullet,\bullet}$ is defined by

$$\Delta := dd^* + d^*d$$

where $d^*: H_{\bullet,\bullet} \rightarrow H_{\bullet,\bullet}$ denotes the *codifferential* of bidegree $(1, 1)$ defined by

$$d^* := -w^{-1}dw.$$

Note that Δ is of bi-degree $(0, 0)$. The following summarizes basic properties one expect from the Laplace operator and its corresponding Hodge decomposition.

PROPOSITION 7.7. *We have the following properties.*

- d^* is the adjoint of d with respect to ϕ .
- Δ is symmetric for ϕ .
- On each graded piece $H_{a,b}$, we have the following orthogonal decomposition for ϕ

$$\ker(d) \cap H_{a,b} = \ker(\Delta) \cap H_{a,b} \oplus \text{Im}(d) \cap H_{a,b}.$$

PROOF. To get the first point, note that for any $x, y \in H_{\bullet,\bullet}$, we have

$$\phi(x, d^*y) = -\psi(x, ww^{-1}dwy) = \psi(dx, wy) = \phi(dx, y).$$

It follows that the adjoint of $\Delta = dd^* + d^*d$ is Δ itself.

Last point follows directly from the first two statements, as usual. Denote by $V := (H_{a,b}, \phi)$ the vector space $H_{a,b}$ endowed with the inner product ϕ . In order to simplify the notations, we will write $\text{Im}(d)$ instead of $V \cap \text{Im}(d)$, and similarly for other intersections with V . We have to show that

$$\ker(d) = \ker(\Delta) \oplus \text{Im}(d).$$

From the decomposition $V = \text{Im}(d)^\perp \oplus \text{Im}(d)$, and the inclusion $\text{Im}(d) \subseteq \ker(d)$, we get

$$\ker(d) = \text{Im}(d)^\perp \cap \ker(d) \oplus \text{Im}(d).$$

By adjunction, we get $\text{Im}(d)^\perp = \ker(d^*)$. To conclude, note that $\ker(\Delta) = \ker(d) \cap \ker(d^*)$. Indeed, if $x \in \ker(\Delta)$, then

$$0 = \phi(x, \Delta x) = \phi(x, dd^*x) + \phi(x, d^*dx) = \phi(d^*x, d^*x) + \phi(dx, dx),$$

which, by positivity of ϕ , implies that $d^*x = dx = 0$, i.e., $x \in \ker(d) \cap \ker(d^*)$. The other inclusion $\ker(d) \cap \ker(d^*) \subseteq \ker(\Delta)$ trivially holds. \square

PROPOSITION 7.8. *The Laplace operator commutes with N_1 and N_2 , i.e., $[\Delta, N_1] = [\Delta, N_2] = 0$.*

The proof of this theorem is given in Section 7.6.

7.5. Polarized Hodge-Lefschetz structure on the cohomology of $H_{\bullet,\bullet}$. In this section, we show that, when passing to the cohomology, the operators N_1, N_2 and the polarization ψ induce a polarized Hodge-Lefschetz structure on the cohomology groups

$$L_{a,b} := \frac{\ker(d: H_{a,b} \rightarrow H_{a-1,b-1})}{\text{Im}(d: H_{a+1,b+1} \rightarrow H_{a,b})}.$$

By this we mean the following.

First, since $[d, N_1] = 0$ and $[d, N_2] = 0$, we get induced maps

$$N_1: L_{a,b} \rightarrow L_{a-1,b} \quad \text{and} \quad N_2: L_{a,b} \rightarrow L_{a,b-2}.$$

Second, since $\psi(d \cdot, \cdot) = -\psi(\cdot, d \cdot)$, we get a pairing

$$\psi: L_{\bullet,\bullet} \times L_{\bullet,\bullet} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Then, we will show that

THEOREM 7.9. *For the corresponding induced map, $(L_{\bullet,\bullet}, N_1, N_2, \phi)$ is a polarized HL-structure. Moreover, the decomposition by primitive parts is induced by the corresponding decomposition on $H_{\bullet,\bullet}$.*

PROOF. By Proposition 7.7, the kernel of the Laplace operator gives a section of the cohomology $L_{\bullet,\bullet}$. Moreover, since the Laplacian commutes with N_1 and N_2 , both N_1 and N_2 preserve the kernel of the Laplacian. Consequently, it suffices to prove that $\ker(\Delta)$ is a polarized HL-substructure of $H_{\bullet,\bullet}$. By abuse of notation, we denote by $L_{a,b}$ the kernel $\ker(\Delta: H_{a,b} \rightarrow H_{a,b})$.

Clearly, N_1 and N_2 commutes. Let $a \geq 0$ and $b \in \mathbb{Z}$. Let us prove that N_1^a induces an isomorphism $L_{a,b} \xrightarrow{\sim} L_{-a,b}$. Since Δ is symmetric for ϕ ,

$$H_{a,b} = \ker(\Delta) \cap H_{a,b} \oplus \text{Im}(\Delta) \cap H_{a,b}.$$

Since N_1 preserves $\ker(\Delta)$ and $\text{Im}(\Delta)$, the isomorphism $N_1^a: H_{a,b} \xrightarrow{\sim} H_{-a,b}$ induces isomorphisms for both parts $\ker(\Delta)$ and $\text{Im}(\Delta)$. In particular, we get an isomorphism $N_1^a: L_{a,b} \xrightarrow{\sim} L_{-a,b}$. We use the symmetric argument for N_2 .

The primitive part of $L_{a,b}$ is, by definition,

$$L_{a,b} \cap \ker(N_1^{a+1}) \cap \ker(N_2^{b+1}) = L_{a,b} \cap P_{a,b}.$$

Thus, the decomposition by primitive parts is the one induced by the decomposition of $H_{a,b}$. Finally, the properties about ψ on $L_{a,b}$ comes from the analogous properties on $H_{a,b}$. \square

7.6. Commutative property of the Laplacian. In this section, we prove Proposition 7.8, that $[\Delta, N_1] = [\Delta, N_2] = 0$.

Let us start by justifying our definition of the operator w .

REMARK 7.10. We feel necessary to provide an explanation of why we are not using the simpler more natural operator \tilde{w} which is defined by taking values for $a, b, r, s \geq 0$ and $x \in P_{a,b}$ given by

$$\tilde{w}N_1^rN_2^s x = (-1)^{r+s}N_1^{a-r}N_2^{b-s}x,$$

where negative powers of N_1 and N_2 are considered to be zero.

With this operator, the bilinear form $\tilde{\phi} := \psi(\cdot, \tilde{w}\cdot)$ will be still positive definite, and we can define the corresponding Laplace operator $\tilde{\Delta}$. However, this Laplacian will not commute

with N_1 and N_2 in general. In order to explain where the problem comes from, let us try to proceed with a natural, but *wrong*, proof that this Laplacian commutes N_1 . More precisely, setting $\tilde{d}^\star = -\tilde{w}^{-1}d\tilde{w}$ the adjoint of d , let us try to prove that $[\tilde{d}^\star, N_1] = 0$. Assume $0 \leq r \leq a$ and $0 \leq s \leq b$. Then we can write

$$\begin{aligned} \tilde{d}^\star N_1^r N_2^s x &= -\tilde{w}^{-1}d\tilde{w}N_1^r N_2^s x \\ &= (-1)^{r+s+1}\tilde{w}^{-1}dN_1^{a-r}N_2^{b-s}x \\ &= \sum_{i,j \in \{0,1\}} (-1)^{r+s+1}\tilde{w}^{-1}N_1^{a-r+i}N_2^{b-s+j}x_{i,j}. \end{aligned}$$

We recall that $x_{i,j} \in P_{a-1+2i,b-1+2j}$. Notice that $a - 1 + 2i - (a - r + i) = r - 1 + i$. Thus,

$$\begin{aligned} \tilde{d}^\star N_1^r N_2^s x &= \sum_{i,j \in \{0,1\}} (-1)^{r+s+1}(-1)^{r-1+i+s-1+j}N_1^{r-1+i}N_2^{s-1+j}x_{i,j} \\ &= \sum_{i,j \in \{0,1\}} (-1)^{i+j+1}N_1^{r-1+i}N_2^{s-1+j}x_{i,j}. \end{aligned}$$

Then, $\tilde{d}^\star N_1(N_1^r N_2^s x)$ can be obtained replacing r by $r + 1$ and similarly for $N_1 \tilde{d}^\star(N_1^r N_2^s x)$. Thus, we would conclude that N_1 and \tilde{d}^\star commute!

Where is the mistake? First, notice that the formula for the derivation can only be applied if $a - r$ and $b - s$ are both non-negative. Thus, if $r = a$, we cannot just replace r by $r + 1$ to compute $\tilde{d}^\star N_1(N_1^r N_2^s x)$. Second, notice that $0 = N_1 N_1^{-1} \neq N_1^0$. If $r = 0$ and $i = 0$, we get $r - 1 + i = -1$. Multiplying the corresponding term by N_1 is not equivalent to simply replacing r by $r + 1$. Notice moreover that we did not use the condition $d^2 = 0$ at any moment. Thus, roughly speaking, everything goes well except on the boundaries $r = a, s = b, r = 0$ and $s = 0$. These problems still exist for the operator $\tilde{\Delta}$, which justify why $\tilde{\Delta}$ does not commute in general with N_i .

The solution to remedy these boundary issues is to modify \tilde{w} in such a way that some zero factors on the boundary solve the above evoked problem: if the term $N_1^{r-1+i}N_2^{s-1+j}x_{i,j}$ is multiplied by some zero factor due to the new operator when $r = 0$ and $i = 0$, then multiplying by N_1 corresponds to replacing r by $r + 1$. To find the right form of the Laplacian, one can use tools of representation theory, where Lie brackets can be used to study commutation properties. This is what is done in [GN90, SS20]. These proofs however take place in a slightly different context. For example, our differential is skew symmetric, and not symmetric, and we work in the real instead of the complex world. Nevertheless, one should be able to adapt their proofs to our setting. However, instead of doing this, we decided to provide a completely elementary proof. The arguments which follow are somehow technical but no knowledge in representation theory is needed. \diamond

We now begin the proof of the commutativity of the Laplacian Δ with the operators N_1 and N_2 .

Convention. In order to simplify the calculations, we avoid to write symmetric factors by using the following notations. If A, B, C are some sets, then we follow the following rules to extend the operations between these sets coordinatewise to operations involving their Cartesian products A^2, B^2 and C^2 : if $\zeta: A \rightarrow C$ and $\theta: A \times B \rightarrow C$ are some operations, then we extend them as follows.

$$\begin{aligned} \zeta: \quad A^2 &\rightarrow C^2, & (a_1, a_2) &\mapsto (\zeta(a_1), \zeta(a_2)), \\ \theta: \quad A \times B^2 &\rightarrow C^2, & (a, (b_1, b_2)) &\mapsto (\theta(a, b_1), \theta(a, b_2)), \text{ and} \\ \theta: \quad A^2 \times B^2 &\rightarrow C^2, & ((a_1, a_2), (b_1, b_2)) &\mapsto (\theta(a_1, b_1), \theta(a_2, b_2)). \end{aligned}$$

Moreover, if A is endowed with a product structure, we define $\mathbf{m}: A^2 \rightarrow A$ by $\mathbf{m}(a_1, a_2) = a_1 a_2$.

EXAMPLE 7.11. Let us give some examples. Let $a = (a_1, a_2)$ and $r = (r_1, r_2)$ for integers $a_1, a_2, r_1, r_2 \geq 0$ with $r_1 \leq a_1$ and $r_2 \leq a_2$, and let $x \in P_{a,b}$. With our convention, we get $1 + a = 1 + (a_1, a_2) = (1 + a_1, 1 + a_2)$, $(-1)^a = (-1)^{(a_1, a_2)} = ((-1)^{a_1}, (-1)^{a_2})$, and $\mathbf{m}((-1)^{1+a}) = \mathbf{m}((-1)^a)$.

Let now $N = (N_1, N_2)$. The formula

$$wN_1^{r_1}N_2^{r_2}x = (-1)^{r_1+r_2} \frac{r_1!}{(a_1-r_1)!} \frac{r_2!}{(a_2-r_2)!} N_1^{a_1-r_1} N_2^{a_2-r_2} x,$$

can be rewritten with our notation as follows

$$w\mathbf{m}(N^r)x = \mathbf{m}\left((-1)^r \frac{r!}{(a-r)!} N^{a-r}\right)x.$$

In the same way, we recall that

$$dN_1^{r_1}N_2^{r_2}x = \sum_{i=(i_1, i_2) \in \{0,1\}^2} N_1^{r_1+i_1} N_2^{r_2+i_2} x_{i_1, i_2},$$

if r_1 and r_2 are *non-negative*, where $x_{i_1, i_2} \in P_{a_1-1+2i_1, a_2-1+2i_2}$. With our notations, this formula reads

$$d\mathbf{m}(N^r)x = \sum_{i \in \{0,1\}^2} \mathbf{m}(N^{r+i})x_i.$$

◇

We further use the following conventions. By $(a_1, a_2) \geq (b_1, b_2)$ we mean $a_1 \geq b_1$ and $a_2 \geq b_2$. Moreover, $0^0 = 1$ and $N_1^r = N_2^r = 0$ if r is negative. Notice that $N_1N_1^{-1} \neq N_1^0$, thus we have to be cautious with negative exponents. This is the main difficulty in the proof, besides the exception $k = 1$ and $a = 0$ in Proposition 7.6.

Let $a = (a_1, a_2) \geq 0$. Let $r = (r_1, r_2) \in \mathbb{Z}^2$ with $0 \leq r \leq a$. Let $x \in P_a = P_{a_1, a_2}$ and $y = N_1^{r_1}N_2^{r_2}x$. Set $N = (N_1, N_2)$. We recall that

$$\Delta = -(dw^{-1}dw + w^{-1}dwd)$$

We now explicit $dw^{-1}dy$. We omit ranges of indices in the sums which follow if they are clear from the context.

$$\begin{aligned} dy &= \sum_{i \in \{0,1\}^2} \mathbf{m}(N^{r+i})x_i. \\ w^{-1}dy &= \sum_{\substack{i \\ r+i \leq a-1+2i}} \mathbf{m}\left((-1)^{a-1+2i}(-1)^{r+i} \frac{(r+i)!}{((a-1+2i)-(r+i))!} N^{(a-1+2i)-(r+i)}\right)x_i, \\ &= \sum_{\substack{i \\ a-r-1+i \geq 0}} \mathbf{m}\left((-1)^{a+r+i+1} \frac{(r+i)!}{(a-r-1+i)!} N^{a-r-1+i}\right)x_i. \\ dw^{-1}dy &= \sum_{\substack{i, i' \in \{0,1\}^2 \\ a-r-1+i \geq 0}} \mathbf{m}\left((-1)^{a+r+i} \frac{(r+i)!}{(a-r-1+i)!} N^{a-r-1+i+i'}\right)(x_i)_{i'}. \end{aligned}$$

where we used the fact that $\mathbf{m}((-1)^{a+r+i+1}) = \mathbf{m}((-1)^{a+r+i})$ (since $\mathbf{m}((-1)^{(1,1)}) = 1$).

We can compute in the same way $dwdy$, in which case, using

$$\mathbf{m}((-1)^{a-1+2i}) = \mathbf{m}((-1)^a),$$

we get

$$dwdy = \mathbf{m}((-1)^a)dw^{-1}dy.$$

To get $dw^{-1}dwy$, it suffices to multiply by the good factor and to replace r by $a - r$:

$$\begin{aligned} dw^{-1}dwy &= \mathbf{m}\left((-1)^r \frac{r!}{(a-r)!}\right) \sum_{\substack{i,i' \in \{0,1\}^2 \\ r+i-1 \geq 0}} \mathbf{m}\left((-1)^{r+i} \frac{(a-r+i)!}{(r-1+i)!} N^{r-1+i+i'}\right)(x_i)_{i'} \\ &= \sum_{\substack{i,i' \\ r+i-1 \geq 0}} \mathbf{m}\left((-1)^i \frac{r!}{(r-1+i)!} \frac{(a-r+i)!}{(a-r)!} N^{r-1+i+i'}\right)(x_i)_{i'} \\ &= \sum_{\substack{i,i' \\ r+i-1 \geq 0}} \mathbf{m}\left((-1)^i r^{1-i} (a-r+1)^i N^{r-1+i+i'}\right)(x_i)_{i'}. \end{aligned}$$

Note that in the last sum we can remove the condition $r + i - 1 \geq 0$. Indeed, if, for instance, $r_1 + i_1 - 1 < 0$, then, since r_1, i_1 are non-negative, we should have $r_1 = i_1 = 0$, and the factor $r_1^{1-i_1}$ is automatically zero.

Now, since

$$(a - 2 + 2i + 2i') - (a - r - 1 + i + i') = r - 1 + i + i',$$

we get

$$\begin{aligned} w^{-1}dwdy &= \sum_{\substack{i,i' \\ a-r+i-1 \geq 0}} \mathbf{m}\left((-1)^{r+i} \frac{(r+i)!}{(a-r-1+i)!} (-1)^{r-1+i+i'} \frac{(a-r-1+i+i')!}{(r-1+i+i')!} N^{r-1+i+i'}\right)(x_i)_{i'} \\ &= \sum_{\substack{i,i' \\ a-r+i-1 \geq 0}} \mathbf{m}\left((-1)^{i'} (r+i)^{1-i'} (a-r+i)^{i'} N^{r-1+i+i'}\right)(x_i)_{i'}. \end{aligned}$$

In the last sum, we can again remove the condition $a - r + i - 1 \geq 0$. Indeed, if, for instance, $a_1 - r_1 + i_1 - 1 < 0$, then since $r_1 \leq a_1$ and $i_1 \in \{0, 1\}$, we get $a_1 = r_1$ and $i_1 = 0$. Then, either $i'_1 = 1$ and $(a_1 - r_1 + i_1)^{i'_1} = 0$, or $i'_1 = 0$ and

$$N_1^{r_1-1+i_1+i'_1}(x_i)_{i'} = N_1^{a_1-1}(x_i)_{i'} = 0,$$

because

$$(x_i)_{i'} = (x_{0,i_2})_{0,i'_2} \in P_{a_1-2, a_2-2+i_2+i'_2} \subseteq \ker(N_1^{a_1-1}).$$

In any cases, we get

$$\begin{aligned} -\Delta y &= \sum_{i,i'} \left(\mathbf{m}\left((-1)^i r^{1-i} (a-r+1)^i\right) + \mathbf{m}\left((-1)^{i'} (r+i)^{1-i'} (a-r+i)^{i'}\right) \right) \mathbf{m}(N^{r-1+i+i'})(x_i)_{i'} \\ &= \sum_{i,i'} \left(\mathbf{m}(r^{1-i} (r-a-1)^i) + \mathbf{m}\left((r+i)^{1-i'} (r-a-i)^{i'}\right) \right) \mathbf{m}(N^{r-1+i+i'})(x_i)_{i'} \\ &= \sum_{i,i'} \left(\mathbf{m}(r + 0^{1-i} (-a-1)^i) + \mathbf{m}(r + i^{1-i'} (-a-i)^{i'}) \right) \mathbf{m}(N^{r-1+i+i'})(x_i)_{i'}. \end{aligned}$$

For a fixed a , let $\kappa: \{0, 1, 2\}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ be the function defined by taking for every $i, i' \in \{0, 1\}^2$, the value

$$\kappa(i + i') := 0^{1-i} (-a-1)^i + i^{1-i'} (-a-i)^{i'}.$$

One can verify that the function is well-defined, i.e., if $i + i' = j + j'$ for $i, i', j, j' \in \{0, 1\}^2$ then

$$0^{1-i} (-a-1)^i + i^{1-i'} (-a-i)^{i'} = 0^{1-j} (-a-1)^j + j^{1-j'} (-a-j)^{j'}.$$

The only nontrivial case is when $i_1 + i'_1 = 1$ or when $i_2 + i'_2 = 1$. For instance, if $i_1 = 0, i'_1 = 1$ and $j_1 = 1, j'_1 = 0$, then we get $\kappa(i + i')_1 = 0 - a_1 = -a_1$ which is equal to $\kappa(j + j')_1$.

We also define $C: \{0, 1\}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ by

$$C(i, i') := \mathbf{m}(0^{1-i}(-a-1)^i) + \mathbf{m}(i^{1-i'}(-a-i)^{i'}).$$

We will use the following specific values later:

$$\begin{aligned} \kappa((1, k_2))_1 &= -a_1, \\ C((0, i_2), (0, i'_2)) &= 0, \text{ and} \\ C((1, i_2), (1, i'_2)) &= (-a_1 - 1)\kappa((2, i_2 + i'_2))_2. \end{aligned}$$

Using these terminology, we can now write

$$\Delta y = - \sum_{i, i'} (2r_1 r_2 + \kappa(i + i')_2 r_1 + \kappa(i + i')_1 r_2 + C(i, i')) \mathbf{m}(N^{r-1+i+i'}) (x_i)_{i'}.$$

Set

$$(7.1) \quad \Delta' y := - \sum_{i, i'} C(i, i') \mathbf{m}(N^{r-1+i+i'}) (x_i)_{i'}.$$

We claim that $\Delta y = \Delta' y$. Indeed, we can write

$$(\Delta' - \Delta)y = \sum_{k \in \{0, 1, 2\}^2} \left(2r_1 r_2 + \kappa(k)_2 r_1 + \kappa(k)_1 r_2 \right) \mathbf{m}(N^{r-1+k}) \sum_{\substack{i, i' \in \{0, 1\}^2 \\ i+i'=k}} (x_i)_{i'}.$$

Since $d^2 = 0$, using Proposition 7.6, we get

$$\mathbf{m}(N^{r-1+k}) \sum_{\substack{i, i' \in \{0, 1\}^2 \\ i+i'=k}} (x_i)_{i'} = 0$$

in the above sum unless either, for $k_1 = 1$ and $a_1 = 0$, or for $k_2 = 1$ and $a_2 = 0$.

In the first case $k_1 = 1$ and $a_1 = 0$, we should have $r_1 = 0$ and the remaining factor is $\kappa((1, k_2))_1 r_2$. We have seen that $\kappa((1, k_2))_1 = -a_1$. Thus, here, the factor is zero and there is no contribution in the sum. The same reasoning applies by symmetry to the case $k_2 = 1$ and $a_2 = 0$. Therefore, in any case, we get $\Delta y = \Delta' y$ for any y , and the claim follows.

Finally, we prove that Δ' commutes with N_1 . Recall that $y = N_1^{r_1} N_2^{r_2} x$ and $x \in P_{a_1, a_2}$. We divide the proof into three cases, depending on whether $r_1 = 0, a_1$ or $0 < r_1 < a_1$

— If $0 = r_1 < a_1$, we can compute $\Delta' N_1 y$ by replacing r_1 by $r_1 + 1$ in Equation (7.1). For $N_1 \Delta' y$, this remains true except for the terms with $i_1 = i'_1 = 0$. Indeed,

$$N_1 N_1^{r_1-1+0+0} = 0 \neq N_1^{r_1+1-1+0+0} = \text{id}.$$

Luckily, for those terms, the factor is $C((0, i_2), (0, i'_2))$, which is zero. Thus, in fact, we can also do the replacement for those terms. Hence, $\Delta' N_1 y = N_1 \Delta' y$.

— If $0 < r_1 < a_1$, then we can compute $\Delta' N_1 y$ by replacing r_1 by $r_1 + 1$, and $N_1 \Delta' y$ in the same way. Thus, they are equal.

— Finally, if $r_1 = a_1$, since we used the hypothesis $r_1 \leq a_1$ in all the computations leading to the expression of Δ' , we cannot apply those computations to $N_1 y$. However, in this case, we have $N_1 y = 0$. Thus, we just need to prove that $N_1 \Delta' y = 0$. This can be done thanks to the defining Equation (7.1).

If $i_1 + i'_1 \leq 1$, then $1 + r_1 - 1 + i_1 + i'_1 \geq a_1 - 2 + 2(i_1 + i'_1) + 1$. Since $(x_i)_{i'} \in P_{a_1-2+2(i_1+i'_1), b'}$ for some b' , we get

$$C(i, i') N_1 \mathbf{m}(N^{r-1+i+i'}) (x_i)_{i'} = 0.$$

The only remaining terms are those where $i_1 = i'_1 = 1$. For these terms, we have $C(i, i') = (-a_1 - 1)\kappa(i + i')_2$. Thus,

$$N_1 \Delta' y = (a_1 + 1)N_1 \sum_{k_2 \in \{0,1,2\}} \kappa((2, k_2))_2 \mathbf{m}(N^{r-1+i+i'}) \sum_{\substack{i_2, i'_2 \in \{0,1\}^2 \\ i_2 + i'_2 = k_2}} (x_{1,i_2})_{1,i'_2}.$$

As in the first case, we apply Proposition 7.6 to infer that all the terms in this sum are zero unless for $k_2 = 1$ and $a_2 = 0$. For these values of k_2 and a_2 , we use $\kappa((2, 1))_2 = -a_2 = 0$ to conclude.

In all the cases, we see that N_1 commutes with Δ' . Since we proved $\Delta = \Delta'$, we conclude with $[\Delta, N_1] = 0$, and by symmetry, $[\Delta, N_2] = 0$, as required. \square

8. Projective bundle theorem

Let \mathfrak{X} be a polyhedral space in $V = N_{\mathbb{R}}$. We define the *asymptotic cone* of \mathfrak{X} which we denote by $\mathfrak{X}_{\text{rec}}$ to be the limit set of the rescaled spaces \mathfrak{X}/t when t goes to $+\infty$. Exceptionally, the terminology cone here might refer to a non-necessarily convex cone. Note that, if X is any polyhedral complex structure on \mathfrak{X} , then $\mathfrak{X}_{\text{rec}} = |X_{\text{rec}}|$.

Let \mathcal{Y} be a smooth polyhedral space in $V = N_{\mathbb{R}}$. Let Δ be a unimodular fan subdividing \mathcal{Y}_{rec} . Let \mathfrak{X} be the closure of \mathcal{Y} in \mathbb{TP}_{Δ} . For each cone $\eta \in \Delta$, we define D^{η} as the closure of the intersection $\mathfrak{X} \cap \mathbb{TP}_{\Delta}^{\eta}$.

Using these notations, we see in particular that we have

- $D^0 = \mathfrak{X}$.
- D^{η} are all smooth of dimension $d - |\eta|$.
- We have

$$D^{\eta} = \bigcap_{\substack{\rho < \eta \\ |\rho|=1}} D^{\rho}.$$

In other words, the boundary $D = \mathfrak{X} \setminus \mathcal{Y}$ is a *simple normal crossing divisor* in \mathfrak{X} .

8.1. Cycle classes associated to cones in Δ . In this section, we recall how to associate elements of the tropical cohomology groups to the strata D^{η} defined in the preceding paragraph. So we fix the notations as above. Let Δ be a unimodular fan structure on the asymptotic cone \mathcal{Y}_{rec} , and take $\eta \in \Delta$. The stratum $D^{\eta} \subset \mathfrak{X}$ defines then an element $\text{cl}(D^{\eta})$ of $H_{\text{trop}}^{|\eta|, |\eta|}(\mathfrak{X})$ obtained as follows.

Let d be the dimension of \mathcal{Y} . From the inclusion $D^{\eta} \subseteq \mathfrak{X}$, we get a map

$$\begin{aligned} H_{d-|\eta|, d-|\eta|}(D^{\eta}) &\longrightarrow H_{d-|\eta|, d-|\eta|}(\mathfrak{X}) \xrightarrow{\sim} \left(H^{d-|\eta|, d-|\eta|}(\mathfrak{X}) \right)^{\star} \xrightarrow{\sim} H^{|\eta|, |\eta|}(\mathfrak{X}) \\ [D^{\eta}] &\longmapsto \text{cl}(D^{\eta}), \end{aligned}$$

i.e., $\text{cl}(D^{\eta})$ is the image of $[D^{\eta}] \in H_{d-|\eta|, d-|\eta|}(D^{\eta})$ in $H^{|\eta|, |\eta|}(\mathfrak{X})$ by the composition of above maps. Note that the last isomorphism in the above chain of maps follows from the Poincaré duality for \mathfrak{X} .

8.2. Explicit description of the divisor classes associated to the rays. Consider now the situation where \mathfrak{X} comes with a unimodular polyhedral complex structure X with $X_{\text{rec}} = \Delta$. Moreover, we consider a ray ρ of Δ and its associated stratum D^ρ and its cycle class $\text{cl}(D^\rho) \in H_{\text{trop}}^{1,1}(\mathfrak{X})$. In this case, there is a nice representative $c = (c_\zeta)_{\substack{\zeta \in X \\ |\zeta|=1}}$ in $C_{\text{trop}}^{1,1}(X)$ of $\text{cl}(D^\rho)$, with $c_\zeta \in \mathbf{F}^1(\zeta)$, as we explain now. For details of this construction, we refer to [AP21].

First we define the elements $\zeta \in X$ of dimension one which are *parallel to* ρ .

So let ζ be a one dimensional face of X and denote by $\tau \in \Delta$ the sedentarity of ζ . We say ζ is *parallel to* ρ if the following two properties hold:

- (1) $\sigma := \rho + \tau$ is a cone of Δ which properly contains τ ; and
- (2) $\zeta \cap N_{\infty, \mathbb{R}}^\tau = \sigma_\infty^\tau$.

Here σ_∞^τ is σ/τ seen in the stratum $N_{\infty, \mathbb{R}}^\tau$ of \mathbb{TP}_Δ .

With this preliminary discussion, the element $c = (c_\zeta)_{\substack{\zeta \in X \\ |\zeta|=1}}$ in $C_{\text{trop}}^{1,1}(X)$ is defined as follows.

First, consider a face $\zeta \in X$ which is not parallel to ρ and which has sedentarity τ such that τ does not contain ρ as a ray. For such ζ , we set $c_\zeta = 0$.

Second, consider a one dimensional cone ζ of X which is parallel to ρ . Let τ be the sedentarity of ζ and choose a linear form ϕ_ζ on $N_{\infty, \mathbb{R}}^\tau$ which takes value one on the primitive vector $\mathbf{e}_{\zeta_{\text{rec}}}$ of ζ_{rec} . The elements ϕ_ζ can be naturally seen as an element of $\mathbf{F}^1(\zeta)$. We denote this element by c_ζ .

All the remaining ζ in X are those whose sedentarity contains ρ as a ray. In particular, they are not parallel to ρ . Any such ζ form a side of a unique quadrilateral in X with two sides ζ_1, ζ_2 parallel to ρ , and the last side ζ_3 which is neither parallel to ρ nor with a sedentarity $\text{sed}(\zeta_3)$ containing ρ . By the construction of the previous two cases, we have $c_{\zeta_3} = 0$. Moreover, the difference $c_{\zeta_1} - c_{\zeta_2}$ naturally defines a linear form on $N_{\infty, \mathbb{R}}^\tau$. We define $c_\zeta = \pm(c_{\zeta_1} - c_{\zeta_2})$, for a convenient choice of sign that we omit to precise here.

The element $c = (c_\zeta)_{\substack{\zeta \in X \\ |\zeta|=1}}$ in $C_{\text{trop}}^{1,1}(X)$ thereby defined is closed and its class in the cohomology $H_{\text{trop}}^{1,1}(X)$ coincides with $\text{cl}(D^\rho)$.

Moreover, to each face ζ with sedentarity $\mathbf{0}$ which is parallel to ρ , we can associate the corresponding element x_ζ of $A^1(\zeta_f) = H^2(\zeta_f)$. Note that ζ_f is a vertex of X_f . Since ζ_f is a vertex in X_f , we get an element of $\text{ST}_1^{0,2,0} \subseteq \text{ST}_1^{0,2}$. By summing all the x_ζ , we get an element of $\text{ST}_1^{0,2}$ which is closed in the Steenbrink sequence, and which corresponds to c via the isomorphism of Theorem 5.8.

REMARK 8.1. We have seen in Section 6.2.3 how to associate an element of $\text{ST}_1^{0,2,0}$ to a piecewise linear function f on $Y := X^{\mathbf{0}}$. Let us describe such a function giving the element c considered in the preceding paragraph.

Assume X is simplicial. Denote by χ_ρ the characteristic function of ρ on Δ which takes value one on \mathbf{e}_ρ , value zero on each \mathbf{e}_ϱ for all ray $\varrho \neq \rho$ of Δ , and which is linear on each cone of Δ . Pick any linear form \mathbf{e}_ρ^* on $N_{\mathbb{R}}$ which takes value 1 on \mathbf{e}_ρ . Then χ_ρ can be naturally extended to $\overline{\Delta}$ as follows. For any cone $\sigma \in \Delta$ not containing ρ , we extend χ_ρ by continuity on Δ^σ . For any cone $\sigma \in \Delta$ containing ρ , we define the extension χ_ρ on Δ^σ to be the continuous extension of $\chi_\rho - \mathbf{e}_\rho^*$ to this space.

Then χ_ρ naturally induces a piecewise linear function $\tilde{\chi}_\rho$ on X defined by $x \mapsto \chi_\rho(x_{\text{rec}})$. Moreover, the element of $\text{ST}_1^{0,2,0}$ associated to this function does not depend on the choice of \mathbf{e}_ρ^* and is equal to the element c constructed above. \diamond

8.3. Statement of the theorem. Let now σ be a cone in Δ , and denote by Δ' the fan obtained by the barycentric star subdivision of σ in Δ . Denote by \mathfrak{X}' the closure of \mathscr{Y} in $\mathbb{TP}_{\Delta'}$. By Theorem 2.8 we have the following.

PROPOSITION 8.2. *The variety \mathfrak{X}' is smooth.*

For each cone ζ in Δ' , we define similarly as in the preceding section, the corresponding closed stratum D'^ζ of \mathfrak{X}' . Let ρ be the new ray in Σ' obtained after the star subdivision of $\sigma \in \Delta$.

Note that ρ is the ray generated by the sum of the primitive vectors of the rays of σ , i.e.,

$$\rho = \mathbb{R}_+ \left(\sum_{\substack{\varrho < \sigma \\ |\varrho|=1}} \mathbf{e}_\varrho \right).$$

Consider the divisor $D'^\rho \subseteq \mathfrak{X}'$ and its corresponding cycle class $\text{cl}(D'^\rho)$ of $H_{\text{trop}}^{1,1}(\mathfrak{X}')$.

Recall that for any smooth compact tropical variety \mathscr{W} , and for each integer k , we define the k -th cohomology of \mathscr{W} by

$$H^k(\mathscr{W}) = \sum_{p+q=k} H_{\text{trop}}^{p,q}(\mathscr{W}).$$

For the inclusion $i: \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathscr{W}$ of smooth compact tropical varieties, as in the local case, we get the corresponding restriction maps

$$i^*: H^k(\mathscr{W}) \rightarrow H^k(\mathcal{Z}),$$

and the Gysin map

$$\text{Gys}: H^k(\mathcal{Z}) \rightarrow H^{k+2 \dim(\mathscr{W})-2 \dim(\mathcal{Z})}(\mathscr{W}),$$

which is the Poincaré dual to the restriction map $H^{2 \dim(\mathcal{Z})-k}(\mathscr{W}) \rightarrow H^{2 \dim(\mathcal{Z})-k}(\mathcal{Z})$. The restriction maps respect the bi-degree (p, q) , while the Gysin map sends elements of bidegree (p, q) to elements of bidegree $(p + \dim(\mathscr{W}) - \dim(\mathcal{Z}), q + \dim(\mathscr{W}) - \dim(\mathcal{Z}))$.

PROPOSITION 8.3. *Let \mathcal{Z} be a divisor in \mathscr{W} , and denote by $\text{cl}(\mathcal{Z})$ the class of \mathcal{Z} in $H^{1,1}(\mathscr{W})$. For any $\beta \in H^k(\mathscr{W})$, we have*

$$\text{Gys}(i^*(\beta)) = \text{cl}(\mathcal{Z}) \cup \beta.$$

PROOF. This follows for example by duality from the projection formula for tropical homology groups established in [GS19b, Proposition 4.18]. \square

From the map of fans $\pi: \Delta' \rightarrow \Delta$, we get a projection map $\pi: \mathbb{TP}_{\Delta'} \rightarrow \mathbb{TP}_{\Delta}$ which by restriction leads to a projection map $\pi: \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$. This map is *birational* in the sense that it induces an isomorphism on the open set \mathscr{Y} of \mathfrak{X} and \mathfrak{X}' : in fact, the map π restricts to an isomorphism from $\mathfrak{X}' \setminus D'^\rho$ to $\mathfrak{X} \setminus D^\sigma$. Moreover, it sends D'^ρ to D^σ .

The compositions of Gys and π^* gives now a map

$$\text{Gys} \circ \pi^*: H^s(D^\sigma) \rightarrow H^{s+2}(\mathfrak{X}').$$

With these preliminaries, we can state the main theorem of this section.

THEOREM 8.4 (Projective bundle formula). *We have an isomorphism*

$$H^k(\mathfrak{X}') \simeq H^k(\mathfrak{X}) \oplus TH^{k-2}(D^\sigma) \oplus T^2H^{k-4}(D^\sigma) \oplus \dots \oplus T^{|\sigma|-1}H^{k-2|\sigma|+2}(D^\sigma).$$

Here the map from the right hand side to the left hand side restricts to π^* on $H^k(\mathfrak{X})$ and sends T to $-\text{cl}(D'^\rho)$, so in view of Proposition 8.3, it is given on each factor $T^sH^{k-2s}(D^\sigma)$ by

$$T^sH^{k-2s}(D^\sigma) \longrightarrow H^k(\mathfrak{X}')$$

$$T^s\alpha \longmapsto (-1)^s \text{cl}(D'^\rho)^{s-1} \cup \text{Gys} \circ \pi^*(\alpha).$$

The decomposition stated in the theorem gives a decomposition for each pair of non-negative integers (p, q)

$$H^{p,q}(\mathfrak{X}') \simeq H^{p,q}(\mathfrak{X}) \oplus TH^{p-1,q-1}(D^\sigma) \oplus T^2H^{p-2,q-2}(D^\sigma) \oplus \dots \oplus T^{|\sigma|-1}H^{p-|\sigma|+1,q-|\sigma|+1}(D^\sigma).$$

REMARK 8.5. In this case, we have

$$T^{|\sigma|} + c_1(N_{D^\sigma})T^{|\sigma|-1} + c_2(N_{D^\sigma})T^{|\sigma|-2} + \dots + c_{|\sigma|}(N_{D^\sigma}) = 0$$

where $c_i(N_{D^\sigma})$ are the Chern classes of the normal bundle N_{D^σ} in \mathfrak{X} . ◊

The proof of this theorem is given in the next section. We actually give two proofs, one based on the use of the materials developed in the previous sections, using triangulations and the Steenbrink spectral sequence, and the other one based on Mayer-Vietoris exact sequence for tropical cohomology groups.

It is worth noting that the second proof is more classical in spirit, while the first one being more interesting, requires more refined results about the geometry of tropical varieties which are not developed here and will only appear in our future work.

8.4. Proof of Theorem 8.4 using triangulations. In this section, we give a proof of Theorem 8.4 using the tropical Steenbrink spectral sequence and the isomorphism theorem (Theorem 5.8). We need the following theorem.

THEOREM 8.6. *Suppose \mathcal{Y} is a polyhedral space in \mathbb{R}^n , and let Δ be a unimodular fan structure on \mathcal{Y}_{rec} . There is a unimodular triangulation Y of \mathcal{Y} with $Y_{\text{rec}} = \Delta$.*

PROOF. In the case when \mathcal{Y} comes with a polyhedral structure Y_0 with recession fan Δ , this is proved in Section 4, cf. Theorem 4.2. The point is to show that any polyhedral space \mathcal{Y} admits a polyhedral structure compatible with the choice of such a unimodular fan structure Δ , i.e., with recession fan Δ . This is more subtle and will be treated in our forthcoming work [AP20a]. □

Let Y be such a triangulation of \mathcal{Y} . Let X be its extensions to \mathfrak{X} .

PROPOSITION 8.7. *The star subdivision Δ' of Δ induces a polyhedral structure Y' on \mathcal{Y} . Moreover, this polyhedral structure is unimodular and induces a unimodular polyhedral structure X' on \mathfrak{X}' with the same finite part as X , i.e., $X_f = X'_f$.*

PROOF. The polyhedral structure Y' is the one obtained as follows. Consider a face η in Y , and decompose $\eta = \eta_f + \eta_{\text{rec}}$, with η_f in X_f and η_{rec} in the recession fan Y_{rec} . We define the subdivision η' of η obtained as the result of the barycentric star subdivision of σ in η_{rec} : this means if σ is not a face of η_{rec} , then $\eta' = \eta$ remains unchanged. On the other hand, if $\sigma < \eta_{\text{rec}}$, then we subdivide $\eta_f + \eta_{\text{rec}}$ by first taking the star subdivision η'_{rec} of σ in η_{rec} , and define the subdivision η' as the one consisting of the faces of the form $\gamma + \tau$ with $\gamma < \eta_f$ and $\tau < \eta'_{\text{rec}}$. □

The following proposition describes the star fans of Y' in terms of those of Y . By an abuse of the notation, we also denote by D^σ the subdivision induced by X on D^σ .

PROPOSITION 8.8. *Let $\eta \in X_f = Y_f$ be a compact polyhedron. The star fan Σ'^η of η in X' is obtained from the star fan Σ^η of η as the result of star subdividing σ . In particular, if the star fan of η does not contain σ , the two fans Σ'^η and Σ^η are isomorphic.*

In the above proposition, by star subdividing σ in Σ^η we mean the fan obtained by the star subdivision of the image of σ in the space $N_{\mathbb{R}}^\eta = N_{\mathbb{R}}/N_{\eta,\mathbb{R}}$, where we recall $N_{\eta,\mathbb{R}} = T\eta$.

PROOF. This follows directly from the description of the polyhedra in Y' . □

In the following, in order to distinguish the star fans and their cohomology in an ambient polyhedral complex, we use the following terminology. For a polyhedral complex W , and a face η of W , we write $\Sigma^\eta(W)$ in order to emphasize that the star fan Σ^η is taken in W . We furthermore use $H_W^\bullet(\eta)$ for the cohomology groups $H^\bullet(\overline{\Sigma^\eta(W)})$. In particular, $H_{X'}^\bullet(\eta)$ and $H_{X'}^\bullet(\eta)$ denote the cohomology groups $H^\bullet(\overline{\Sigma^\eta})$ and $H^\bullet(\overline{\Sigma'^\eta})$, respectively.

By Keel's lemma (Theorem 3.19) and the above proposition, for each face $\eta \in X_f$ whose star fan Σ^η contains the cone σ , we obtain a decomposition of the cohomology groups $H_{X'}^k(\eta)$.

PROPOSITION 8.9. *For each cone $\eta \in X_f$ with $\sigma \in \Sigma^\eta$, we have*

$$H_{X'}^k(\eta) = H_X^k(\eta) \oplus T \cdot H_{\Sigma^\eta}^{k-2}(\sigma) \oplus T^2 \cdot H_{\Sigma^\eta}^{k-4}(\sigma) \oplus \cdots \oplus T^{|\sigma|-1} \cdot H_{\Sigma^\eta}^{k-2|\sigma|+2}(\sigma),$$

where T is the class of $-x_\rho \in A^1(\Sigma'^\eta) = H_{X'}^2(\eta)$.

For $W = X', X$, or D^σ , and for any integer l , we denote by ${}_l\text{St}_W^{\bullet, \bullet}$ the double complex we constructed in Section 5.5 whose total complex is the shifted cochain complex $\text{ST}_1^{\bullet, 2l}[-l]$, the $2l$ -th line of the Steenbrink spectral sequence calculated in W .

Let p be a non-negative integer. The previous proposition allows to get a decomposition of the double complex ${}_p\text{St}_{X'}^{\bullet, \bullet}$ in terms of the Steenbrink double complexes associated to X and D^σ .

PROPOSITION 8.10. *Notations as above, we have*

$${}_p\text{St}_{X'}^{\bullet, \bullet} = {}_p\text{St}_X^{\bullet, \bullet} \oplus T \cdot {}_{p-1}\text{St}_{D^\sigma}^{\bullet, \bullet-1} \oplus T^2 \cdot {}_{p-2}\text{St}_{D^\sigma}^{\bullet, \bullet-2} \oplus \cdots \oplus T^{|\sigma|-1} \cdot {}_{p-|\sigma|+1}\text{St}_{D^\sigma}^{\bullet, \bullet-|\sigma|+1}.$$

The map from the decomposition to ${}_p\text{St}_{X'}^{\bullet, \bullet}$ is made clear in the proof.

PROOF. By definition of the Steenbrink double complexes, we have

$${}_p\text{St}_{X'}^{a,b} := \begin{cases} \bigoplus_{\substack{\eta \in X'_f \\ |\eta|=p+a-b}} H_{X'}^{2b}(\eta) & \text{if } a \geq 0 \text{ and } b \leq p, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

whose differential of bidegree $(1, 0)$ is i^* and whose differential of bidegree $(0, 1)$ is Gys. Note that we have $X_f = X'_f$. From the previous proposition, for any $\eta \in X_f$ whose star fan Σ^η in X contains σ , we can decompose

$$H_{X'}^{2b}(\eta) = H_X^{2b}(\eta) \oplus T \cdot H_{\Sigma^\eta}^{2b-2}(\sigma) \oplus T^2 \cdot H_{\Sigma^\eta}^{2b-4}(\sigma) \oplus \cdots \oplus T^{|\sigma|-1} \cdot H_{\Sigma^\eta}^{2b-2|\sigma|+2}(\sigma).$$

Here T is the class of $-x_\rho$ in $H_{\Sigma^\eta}^2(\sigma)$.

Moreover, for any other polytope $\eta \in X_f$, we have $H_{X'}^{2b}(\eta) = H_X^{2b}(\eta)$.

Let $\eta \in X_f$ whose star fan Σ^η contains σ . Then the cone $\sigma \in \Sigma^\eta$ corresponds to the face $\tilde{\eta} := \overline{\eta + \sigma} \in X$. We obtain a polytope $\tilde{\eta} \cap D^\sigma \in X$ in $(D^\sigma)_f$ for the polyhedral structure induced by X on D^σ . We denote this polytope by η_σ . The projection $\pi_\sigma: \mathcal{Y} \rightarrow D^\sigma$ along $T\sigma$ induces an isomorphism $\eta \xrightarrow{\sim} \eta_\sigma$. Moreover, the star fan of σ in Σ^η is naturally isomorphic to the star fan of $\tilde{\eta}$ in X and of η_σ in D^σ .

Using this observation, we rewrite the above decomposition as

$$H_{X'}^{2b}(\eta) = H_X^{2b}(\eta) \oplus T \cdot H_{D^\sigma}^{2b-2}(\eta_\sigma) \oplus T^2 \cdot H_{D^\sigma}^{2b-4}(\eta_\sigma) \oplus \cdots \oplus T^{|\sigma|-1} \cdot H_{D^\sigma}^{2b-2|\sigma|+2}(\eta_\sigma).$$

Moreover, the morphisms i^* and Gys are compatible with this decomposition. It follows that

$${}_p\text{St}_{X'}^{\bullet, \bullet} = {}_p\text{St}_X^{\bullet, \bullet} \oplus T \cdot {}_{p-1}\text{St}_{D^\sigma}^{\bullet, \bullet-1} \oplus T^2 \cdot {}_{p-2}\text{St}_{D^\sigma}^{\bullet, \bullet-2} \oplus \cdots \oplus T^{|\sigma|-1} \cdot {}_{p-|\sigma|+1}\text{St}_{D^\sigma}^{\bullet, \bullet-|\sigma|+1}.$$

Here T can be seen as the element of ${}_1\text{St}_{X'}^{0,1} \subseteq \text{ST}_1^{0,2}(X')$ defined by

$$T = \sum_{\substack{v \in X_f \\ |v|=1 \\ \sum v \ni \sigma}} \underbrace{-x_\rho}_{\in H_{X'}^2(v)} \in \bigoplus_{\substack{v \in X_f \\ |v|=1}} H_{X'}^2(v) \subseteq {}_p\text{St}_{X'}^{0,1}.$$

The multiplication by T is similar to the multiplication by a Kähler class. It multiplies an element of $H^\bullet(\eta)$ by $-x_\rho \in H^2(\eta)$ if $\sigma \in \Sigma^\eta$, and by zero otherwise. \square

We are now ready to prove the projective bundle theorem.

PROOF OF THEOREM 8.4. Applying the previous proposition, and taking the total complexes on both sides, after shifting, gives a decomposition of cochain complexes

$$\text{ST}_1^{\bullet,2p}(X') = \text{ST}_1^{\bullet,2p}(X) \oplus T \cdot \text{ST}_1^{\bullet,2p-2}(D^\sigma) \oplus \dots \oplus T^{|\sigma|-1} \cdot \text{ST}_1^{\bullet,2p-2|\sigma|+2}(D^\sigma).$$

Taking the cohomology of degree $q-p$ on both sides, and using our Isomorphism Theorem 5.8, we get the decomposition

$$H^{p,q}(X') \simeq H^{p,q}(X) \oplus TH^{p-1,q-1}(D^\sigma) \oplus T^2H^{p-2,q-2}(D^\sigma) \oplus \dots \oplus T^{|\sigma|-1}H^{p-|\sigma|+1,q-|\sigma|+1}(D^\sigma),$$

as stated in the theorem. Taking the sum over all p, q with $p+q=k$, gives the decomposition for the k -th cohomology group of X' .

It remains to prove that T corresponds to minus the cycle class associated to D^ρ in $H^{1,1}(X')$. To see that, it suffices to compare the definition of T in the proof of the previous proposition with the description of $\text{cl}(D^\rho)$ in Section 8.2. \square

8.5. Proof of Theorem 8.4 using Mayer-Vietoris. Notations as in the beginning of the section, let \mathfrak{X} and \mathfrak{X}' be the closure of \mathcal{Y} in \mathbb{TP}_Δ and $\mathbb{TP}_{\Delta'}$. We consider the open covering of \mathfrak{X} obtained by $\mathcal{V} := \mathfrak{X} \setminus D^\sigma = \mathfrak{X}' \setminus D^\rho$ and a tubular neighborhood \mathcal{U} of D^σ . Let \mathcal{W} be the intersection of \mathcal{V} and \mathcal{U} . Let $\pi: \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ be the projection map, and let $\mathcal{U}': \pi^{-1}(\mathcal{U})$, which is a tubular neighborhood of D^ρ . Note that $\mathcal{W} = \mathcal{V} \cap \mathcal{U}'$.

The Mayer-Vietoris exact sequences associated to these coverings of \mathfrak{X}' and \mathfrak{X} for tropical cohomology groups with coefficients in \mathbf{F}^p lead to the following pair of long exact sequences where the vertical arrows are induced by the pullbacks.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^{p,q}(\mathfrak{X}) & \longrightarrow & H^{p,q}(\mathcal{V}) \oplus H^{p,q}(\mathcal{U}) & \longrightarrow & H^{p,q}(\mathcal{W}) \longrightarrow H^{p,q+1}(\mathfrak{X}) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & H^{p,q}(\mathfrak{X}') & \longrightarrow & H^{p,q}(\mathcal{V}) \oplus H^{p,q}(\mathcal{U}') & \longrightarrow & H^{p,q}(\mathcal{W}) \longrightarrow H^{p,q+1}(\mathfrak{X}') \longrightarrow \dots \end{array}$$

The following is straightforward.

PROPOSITION 8.11. *The projection map from the tubular neighborhood to D^σ induces an isomorphism*

$$H^{p,q}(\mathcal{U}) \simeq H^{p,q}(D^\sigma)$$

for any q . In a similar way, we get

$$H^{p,q}(\mathcal{U}') \simeq H^{p,q}(D^\rho).$$

PROPOSITION 8.12. *The projection map $D^\rho \rightarrow D^\sigma$ is a fibration with tropical projective spaces of dimension $|\sigma|-1$.*

PROOF. Define the normal vector bundle N_{D^σ} associated to the embedding $D^\sigma \hookrightarrow \mathfrak{X}$.

$$D^\rho \simeq \mathbb{TP}(N_{D^\sigma}),$$

the projectivization of N_{D^σ} , from which the result follows. \square

THEOREM 8.13. *Let E be a vector bundle of rank r over a compact tropical variety \mathcal{Z} , and let $\mathcal{Z}' = \mathbb{TP}(E)$ be the projectivization of E . Then we get an isomorphism*

$$H^{p,q}(\mathcal{Z}') \simeq H^{p,q}(\mathcal{Z}) \oplus TH^{p-1,q-1}(\mathcal{Z}) \oplus T^2H^{p-2,q-2}(\mathcal{Z}) \oplus \dots \oplus T^{r-1}H^{p-r+1,q-r+1}(\mathcal{Z}).$$

PROOF. Applying the Mayer-Vietoris exact sequence, we reduce to the case where the vector bundle is trivial, i.e., $E = \mathbb{R}^r \times \mathcal{Z}$. In this case, we have $\mathbb{TP}(E) = \mathbb{TP}^{r-1} \times \mathcal{Z}$. The theorem now follows by Künneth decomposition theorem for tropical cohomology groups [GS19b]. \square

PROOF OF THEOREM 8.4. The theorem now follows by combining the two Mayer-Vietoris long exact sequences associated to covers $\{\mathcal{V}, \mathcal{W}\}$ and $\{\mathcal{V}', \mathcal{W}'\}$ of \mathfrak{X} and \mathfrak{X}' , and Theorem 8.13 applied to the fibration $D'^\rho \rightarrow D^\sigma$, by using Proposition 8.12, which allows to decompose the cohomology of D'^ρ in terms of the cohomology of D^σ . Indeed, the image of T in $H^{p,q}(\mathcal{W})$ is trivial, and the decomposition follows from a diagram chasing. \square

9. Proof of Theorem 1.7

In this section, we prove Theorem 1.7. We start by recalling the statement of the theorem. Let \mathcal{Y} be a smooth rational polyhedral space in $V = N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$. Assume that all the star fans of \mathcal{Y} are Kähler, that is they are support of Kähler fans. Let Δ be a unimodular recession fan on \mathcal{Y}_{rec} . Let \mathfrak{X} be the closure of \mathcal{Y} in \mathbb{TP}_Δ . Let ℓ be a strictly convex function on Δ . Then, ℓ defines an element of $H^{1,1}(\mathfrak{X})$ given by

$$\sum_{\substack{\varrho \in \Delta \\ |\varrho|=1}} \ell(\varrho) \text{cl}(D^\varrho).$$

By an abuse of the notation, we denote this element and the corresponding Lefschetz operator on $H^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{X})$ by ℓ as well.

Working with \mathbb{Q} coefficients, we have to prove the following statements.

- (Weight-monodromy conjecture) For $q > p$ two non-negative integers, we get an isomorphism

$$N^{q-p}: H_{\text{trop}}^{q,p}(\mathfrak{X}) \rightarrow H_{\text{trop}}^{p,q}(\mathfrak{X}).$$

- (Hard Lefschetz) For $p + q \leq d$, the Lefschetz operator ℓ induces an isomorphism

$$\ell^{d-p-q}: H_{\text{trop}}^{p,q}(\mathfrak{X}) \rightarrow H_{\text{trop}}^{d-q,d-p}(\mathfrak{X}).$$

- (Hodge-Riemann) The pairing $(-1)^p \langle \cdot, \ell^{d-p-q} N^{q-p} \cdot \rangle$ induces a positive-definite pairing on the primitive part $P^{p,q}$ of $H_{\text{trop}}^{p,q}$, where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the natural pairing

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: H_{\text{trop}}^{q,p}(\mathfrak{X}) \otimes H_{\text{trop}}^{d-q,d-p}(\mathfrak{X}) \rightarrow H_{\text{trop}}^{d,d}(\mathfrak{X}) \simeq \mathbb{Q}.$$

9.1. Global ascent-descent. Situation as in the previous section, let $\Delta = \mathcal{Y}_{\text{rec}}$ be unimodular and let σ be a cone in Δ . Let Δ' be the star subdivision of Δ obtained by star subdividing σ . Denote by ρ the new ray in Δ' . For an element ω in $H^{1,1}(\mathfrak{X})$, we denote by ω^σ the restriction of ω to D^σ , i.e., the image of ω under the restriction map $H^{1,1}(\mathfrak{X}) \rightarrow H^{1,1}(D^\sigma)$, for the inclusion of tropical varieties $D^\sigma \hookrightarrow \mathfrak{X}$.

Let ℓ be a strictly convex cone-wise linear function on Δ . Denote by ℓ' the convex function induced by ℓ on Δ' . As in the previous section, we denote by ℓ and ℓ' the corresponding elements of $H^{1,1}(\mathfrak{X})$ and $H^{1,1}(\mathfrak{X}')$, respectively.

The strictly convex function ℓ induces a strictly convex function ℓ^σ on the star fan Σ^σ of σ in Δ . By identification of Σ^σ with the recession fan of D^σ , we get a strictly convex function ℓ^σ on the recession fan D_{rec}^σ . This defines an element in $H^{1,1}(D^\sigma)$ that we denote with our convention above by ℓ^σ .

PROPOSITION 9.1. *The element $\ell^\sigma \in H^{1,1}(D^\sigma)$ coincides with the restriction of $\ell \in H^{1,1}(\mathfrak{X})$ to $D^\sigma \hookrightarrow \mathfrak{X}$.*

PROOF. We can assume without loss of generality that ℓ is zero on σ and that ℓ^σ is the pushforward of ℓ by the projection $\Sigma \rightarrow \Sigma^\sigma$. Denote by D_ℓ the Poincaré dual of ℓ in $H_{1,1}^{\text{trop}}(\mathfrak{X})$, and by D_{ℓ^σ} the Poincaré dual of ℓ^σ in $H_{1,1}^{\text{trop}}(D_\sigma)$. By Poincaré duality, it suffices to prove that the cap product $D_\ell \cap D^\sigma \in H_{1,1}^{\text{trop}}(D^\sigma)$ equals D_{ℓ^σ} . For a ray ϱ of Σ , we write $\varrho \sim \sigma$ if ϱ is in the link of σ , i.e., if $\sigma + \varrho$ is a face of Σ and $\varrho \notin \sigma$. From our assumption that ℓ is zero on σ , we get

$$D_\ell \cap D^\sigma = \sum_{\substack{\varrho \in \Sigma \\ |\varrho|=1}} \ell(\varrho)(D^\varrho \cap D^\sigma) = \sum_{\substack{\varrho \sim \sigma \\ |\varrho|=1}} \ell(\varrho)(D^\varrho \cap D^\sigma) = D_{\ell^\sigma}. \quad \square$$

We now state and prove the following global version of Theorem 3.20.

THEOREM 9.2. *Notations as above, we have the following properties.*

- (Ascent) *Assume the property $\text{HR}(D^\sigma, \ell^\sigma)$ holds. Then $\text{HR}(\mathfrak{X}, \ell)$ implies $\text{HR}(\mathfrak{X}', \ell' - \epsilon \text{cl}(D^\rho))$ for any small enough $\epsilon > 0$.*
- (Descent) *We have the following partial inverse: if both the properties $\text{HR}(D^\sigma, \ell^\sigma)$ and $\text{HL}(\mathfrak{X}, \ell)$ hold, and if we have the property $\text{HR}(\mathfrak{X}', \ell' - \epsilon \text{cl}(D^\rho))$ for any small enough $\epsilon > 0$, then we have $\text{HR}(\mathfrak{X}, \ell)$.*

PROOF. The projective bundle formula (Theorem 8.13) is the global analog of local Keel’s lemma (Theorem 3.19). Moreover Poincaré duality holds for \mathfrak{X} and \mathfrak{X}' . Thus, by Remark 3.21, the proof is identical to that of the corresponding local theorem, Theorem 3.20. \square

9.2. Proof of Theorem 1.7. We proceed as in the proof of the properties HR and HL in the local case.

So let \mathcal{Y} be a smooth tropical variety of dimension d in $V \simeq \mathbb{R}^n$ which is locally the support of Kähler fans. Any unimodular recession fan Δ on \mathcal{Y}_{rec} provides a compactification of \mathcal{Y} by taking its closure in \mathbb{TP}_Δ . We denote by \mathfrak{X}_Δ this compactification in order to emphasize the dependence in Δ . Since \mathcal{Y} is smooth, the variety \mathfrak{X}_Δ for any unimodular fan Δ is a smooth tropical variety. Moreover, all the stars of \mathfrak{X}_Δ are also Kähler support.

From now on we restrict to fans Δ on the support of \mathcal{Y}_{rec} which are in addition quasi-projective. We have to show that for any such fan Δ and any strictly convex function ℓ on Δ , the pair $(H^\bullet(X), \ell)$ verifies HR, HL, and the weight-monodromy conjecture.

Proceeding by induction, we suppose that the theorem holds for all smooth projective tropical varieties of dimension strictly smaller than d .

As in the local case, the following proposition is the base of our proof. It allows to start with a fan structure on the asymptotic cone of \mathcal{Y} such that the corresponding compactification of \mathcal{Y} verifies the Hodge-Riemann relations, and then use the global ascent and descent properties to propagate the property to any other smooth compactification of \mathcal{Y} , given by any other fan structure on \mathcal{Y}_{rec} .

PROPOSITION 9.3. *Notations as above, there exists a quasi-projective unimodular fan Δ_0 on \mathcal{Y}_{rec} such that, for any strictly convex element ℓ_0 on Δ_0 , we have the properties $\text{HR}(\mathfrak{X}_{\Delta_0}, \ell_0)$ and $\text{HL}(\mathfrak{X}_{\Delta_0}, \ell_0)$ for the compactification \mathfrak{X}_{Δ_0} of \mathcal{Y} in \mathbb{TP}_{Δ_0} .*

PROOF. By Theorem 4.1, replacing the lattice N with $\frac{1}{k}N$ for some integer k , we can find a projective unimodular triangulation Y_0 of \mathcal{Y} such that the recession fan Δ_0 of Y_0 is quasi-projective and unimodular.

Let X_{Δ_0} be the compactification of Y_0 in \mathbb{TP}_{Δ_0} . Let $\tilde{\ell}_0$ be a strictly convex function on Y_0 . By the second part of Theorem 4.1, we can assume that $\ell_0 := (\tilde{\ell}_0)_{\text{rec}}$ is a well-defined and strictly convex function on Δ_0 . By theorem 6.9, $\tilde{\ell}_0$ defines a Kähler class of X_{Δ_0} . Moreover, by Corollary 6.11 and Remark 8.1, this class equals $\text{cl}(\ell_0) \in H^{1,1}(\mathfrak{X}_{\Delta_0})$. It thus follows from our Theorem 6.23 that the pair (X_{Δ_0}, ℓ_0) verifies HL and HR. \square

PROPOSITION 9.4. *For any unimodular fan Δ on the support of Y_{rec} , we have the equivalence of the following statements.*

- $\text{HR}(X_\Delta, \ell)$ is true for any strictly convex function ℓ on Δ .
- $\text{HR}(X_\Delta, \ell)$ is true for one strictly convex element ℓ on Δ .

The proof uses the following proposition.

PROPOSITION 9.5. *If $\text{HR}(D^\varrho, \ell^\varrho)$ holds for all rays $\varrho \in \Delta$, then we have $\text{HL}(X, \ell)$.*

PROOF. By Proposition 9.1, we know that $\ell^\varrho = i^*(\ell)$ where i is the inclusion $D^\varrho \hookrightarrow X$. One can now adapt the proof of 3.17 to the global case to prove the proposition. \square

PROOF OF PROPOSITION 9.4. Let ℓ be a strictly convex piecewise linear function on Δ . For all $\varrho \in \Delta$, we get a strictly convex function ℓ^ϱ on the star fan Σ^ϱ of ϱ in Δ . By the hypothesis of our induction, we know that $\text{HR}(D^\varrho, \ell^\varrho)$ holds. By Proposition 9.5 we thus get $\text{HL}(X_\Delta, \ell)$.

By Proposition 3.7, we get that $\text{HR}(X_\Delta, \ell)$ is an open and closed condition on the set of all ℓ which satisfy $\text{HL}(X_\Delta, \ell)$. In particular, if there exists ℓ_0 in the cone of strictly convex elements which verifies $\text{HR}(X_\Delta, \ell_0)$, any ℓ in this cone should verify $\text{HR}(X_\Delta, \ell)$. \square

Let Δ be a unimodular fan of dimension d on \mathcal{Y}_{rec} , let ℓ be a convex piecewise linear function on Δ , and let Δ' be the fan obtained from Δ by star subdividing a cone $\sigma \in \Delta$. Denote by ρ the new ray in Δ' , and let ℓ' be the piecewise linear function induced by ℓ on Δ' .

Denote by χ_ρ the characteristic function of ρ on Δ' which takes value one on ϵ_ρ , value zero on each ϵ_ϱ for all ray $\varrho \neq \rho$ of Δ' , and which is linear on each cone of Δ' . The following is straightforward.

PROPOSITION 9.6. *For any small enough $\epsilon > 0$, the function $\ell' - \epsilon\chi_\rho$ is strictly convex.*

PROPOSITION 9.7. *Notations as above, the following statements are equivalent.*

- (i) We have $\text{HR}(\mathfrak{X}_\Delta, \ell)$.
- (ii) The property $\text{HR}(\mathfrak{X}_{\Delta'}, \ell' - \epsilon\chi_\rho)$ holds for any small enough $\epsilon > 0$.

PROOF. This follows from Theorem 9.2. We first observe that the $(1, 1)$ -class associated to the convex function $\ell' - \epsilon\chi_\rho$ is precisely $\ell' - \epsilon \text{cl}(D^\rho)$, where in this second expression ℓ' represents the class of the convex function ℓ' in $H^{1,1}(X_{\Delta'})$. Moreover, by the hypothesis of our induction, we have $\text{HR}(D^\sigma, l_\sigma)$. Now, a direct application of the ascent part of Theorem 9.2 leads to the implication (i) \Rightarrow (ii).

We now prove (ii) \Rightarrow (i). Proposition 9.5 and our induction hypothesis imply that we have $\text{HL}(X_\Delta, \ell)$. Applying now the descent part of Theorem 9.2 gives the result. \square

PROOF OF THEOREM 1.7. By Proposition 9.3, there exists a fan Δ_0 with support \mathcal{Y}_{rec} and a strictly convex element ℓ_0 on Δ_0 such that the result holds for the pair $(\mathfrak{X}_{\Delta_0}, \ell_0)$. By Propositions 9.7 and 9.4, for any quasi-projective unimodular fan Δ with support \mathcal{Y}_{rec} which can be obtained from Δ_0 by a sequence of star subdivisions and star assemblies, and for any strictly convex function ℓ on Δ , we get $\text{HR}(\mathfrak{X}_\Delta, \ell)$. The properties HR and HL both follow by applying Theorem 3.23.

The weight-monodromy conjecture is preserved by the projective bundle formula, Theorem 8.4. Thus the property propagates from Δ_0 to all quasi-projective fans by Theorem 3.23. \square

Appendix

10. Spectral resolution of the tropical complex

In this section, we prove that the objects used to apply the spectral resolution lemma in Section 5 verify the hypothesis of this lemma. We also prove Proposition 5.27, which states that the isomorphism between the tropical complex $C^{p,\bullet}$ and $\text{Tot}^\bullet({}_p C^{\bullet,\bullet})$ is an isomorphism of filtered complexes for the corresponding differentials and filtrations. We recall all the objects below.

We suppose \mathfrak{X} is a compact smooth tropical variety with a unimodular triangulation that we denote X . We suppose in addition that the underlying polyhedral space \mathfrak{X} is obtained by compactifying a polyhedral space \mathscr{Y} in \mathbb{R}^n . This will allow later to fix a scalar product in \mathbb{R}^n and define *compatible* projections on subspaces of \mathbb{R}^n , in a sense which will be made clear.

10.1. The triple complex $A^{\bullet,\bullet,\bullet}$. We start by recalling the definition of the triple complex $A^{\bullet,\bullet,\bullet}$, which is the main object of study in this section (and which is roughly obtained from ${}_D C^{\bullet,\bullet}$ by inserting the Steenbrink and tropical chain complexes into it).

Let p be a non-negative integer. The triple complex $A^{\bullet,\bullet,\bullet}$ is defined as follows. We set

$$A^{\bullet,\bullet,-1} := {}_p C^{\bullet,\bullet}, \quad A^{\bullet,-1,\bullet} := {}_p \overline{\text{St}}^{\bullet,\bullet}, \quad \text{and} \quad A^{\bullet,\bullet,\bullet} := {}_D C^{\bullet,\bullet}.$$

More explicitly, let $a, b, b' \geq 0$ be three non-negative integers. We set

$$\begin{aligned} - A^{a,b,-1} &:= \bigoplus_{|\delta|=a+b} A^{a,b,-1}[\delta] \quad \text{with} \quad A^{a,b,-1}[\delta] = \bigwedge^b T^* \delta \otimes \mathbf{F}^{p-b}(\underline{0}^\delta). \\ - A^{a,-1,b'} &= \begin{cases} \bigoplus_{\substack{|\eta|=p+a-b' \\ |\eta_{\text{rec}}| \leq a}} A^{a,-1,b'}[\eta] & \text{if } b' \leq p, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \text{with} \quad A^{a,-1,b'}[\eta] := H^{2b'}(\eta). \\ - A^{a,b,b'} = D^{a,b,b'} &= \bigoplus_{\substack{\delta < \eta \\ \text{sed}(\delta) = \text{sed}(\eta) \\ |\delta|=a+b \\ |\eta|=p+a-b'}} A^{a,b,b'}[\delta, \eta] \quad \text{with} \quad A^{a,b,b'}[\delta, \eta] := \bigwedge^b T^* \delta \otimes H^{2b'}(\eta). \\ - \text{All the other pieces } A^{a,b,b'} &\text{ are trivial.} \end{aligned}$$

We now set $A_{\text{trop}}^{\bullet,\bullet} := A^{\bullet,\bullet,-1}$, $A_{\text{ST}}^{\bullet,\bullet} := A^{\bullet,-1,\bullet}$, and define $A_D^{\bullet,\bullet,\bullet}$ as the truncation of $A^{\bullet,\bullet,\bullet}$ at non-negative indices, i.e., such that

$$A_D^{a,b,b'} = \begin{cases} A^{a,b,b'} & \text{if } a, b, b' \geq 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Note that $A_D^{a,b,b'} = {}_a D^{b,b'}$ for the double complex ${}_a D^{b,b'}$ of Section 5.

For $\sigma \in X_{\text{rec}}$, we set

$${}_\sigma A^{\bullet,\bullet,\bullet} := \bigoplus_{\delta \text{ with } \text{sed}(\delta) = \sigma} A^{\bullet,\bullet,\bullet}[\delta],$$

and define ${}_\sigma A_{\text{trop}}^{\bullet,\bullet}$, ${}_\sigma A_{\text{ST}}^{\bullet,\bullet}$, and ${}_\sigma A_D^{\bullet,\bullet,\bullet}$, similarly.

The differentials on $A^{a,b,b'}$ of respective degree $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ and $(0, 0, 1)$ are denoted \mathfrak{d} , d and d' . We will recall all these maps in Section 10.5. Their restrictions to $A_{\text{trop}}^{\bullet,\bullet}$ are denoted by $\mathfrak{d}_{\text{trop}}$, d_{trop} and d'_{trop} respectively. We only restrict the domain here, and not the codomain. Thus d'_{trop} is a morphism from $A_{\text{trop}}^{\bullet,\bullet}$ to $A^{\bullet,\bullet,\bullet}$. We use the same terminology for the two other complexes $A_{\text{ST}}^{\bullet,\bullet}$, and $A_D^{\bullet,\bullet,\bullet}$.

The notation $d[A^{a,b,b'}[\eta] \rightarrow A^{a,b+1,b'}[\mu]]$ denotes restriction of the differential d to $A^{a,b,b'}[\eta]$ projected to the piece $A^{a,b+1,b'}[\mu]$, i.e., this is the composition $\pi d i$ where $i: A^{a,b,b'}[\eta] \hookrightarrow A^{\bullet,\bullet,\bullet}$ is the natural inclusion and $\pi: A^{\bullet,\bullet,\bullet} \twoheadrightarrow A^{a,b+1,b'}[\mu]$ is the natural projection.

Moreover, the star $*$ in the expressions $d[* \rightarrow A^{a,b+1,b'}]$ and $d[A^{a,b,b'} \rightarrow *]$, denotes the natural domain and codomain of d , i.e., $A^{\bullet,\bullet,\bullet}$, respectively. Similarly, in the expressions $d[_\sigma * \rightarrow A^{a,b+1,b'}]$, $d[A^{a,b,b'} \rightarrow _\sigma *]$, and $d[_\sigma * \rightarrow _\sigma *]$, the $_\sigma *$ denotes $_\sigma A^{\bullet,\bullet,\bullet}$.

We use similar notations for other differentials and other pieces of $A^{\bullet,\bullet,\bullet}$.

We decompose the differential \mathfrak{d} as the sum $d^i + d^\pi$ where

$$d^i := \bigoplus_{\sigma \in X_{\text{rec}}} \mathfrak{d}[_\sigma * \rightarrow _\sigma *], \text{ and}$$

$$d^\pi := \bigoplus_{\substack{\tau, \sigma \in X_{\text{rec}} \\ \sigma \succ \tau}} \mathfrak{d}[_\sigma * \rightarrow _\tau *].$$

The two other differential d and d' preserve $_\sigma A^{\bullet,\bullet,\bullet}$ for any $\sigma \in X_{\text{rec}}$.

The first main result of this section is the following.

PROPOSITION 10.1. *The complex $\text{Tot}^\bullet(A_{\text{trop}}^{\bullet,\bullet,\bullet}, \mathfrak{d}_{\text{trop}} + d_{\text{trop}})$ is isomorphic as a complex to $(C_{\text{trop}}^{p,\bullet}, \partial_{\text{trop}})$ where ∂_{trop} is the usual tropical differential.*

The second result is Proposition 5.26, which, we recall, states the following.

PROPOSITION 10.2. *The map $\partial = \mathfrak{d} + d + d'$ is a differential, i.e.,*

$$\partial \partial = 0.$$

This section is supposed to be self-contained, in particular we will recall the maps below. We start by (re)introducing some notations and making some conventions. We note that a few of the notations below differ from the ones used in the previous sections.

10.2. Notations and conventions. Here is a set of conventions and notations we will use.

Naming convention on faces. In what follows, we take faces $\gamma \prec \delta, \delta' \prec \chi$ forming a diamond and $\zeta \prec \eta, \eta' \prec \mu$ forming another diamond such that $\gamma \prec \zeta, \delta \prec \eta, \delta' \prec \eta'$, and $\chi \prec \mu$.

Moreover, we make the convention that if a relation involves both γ and δ , then it is assumed that $\gamma \prec \delta$. However, for this relation, we do *not a priori assume* that there exists a face χ such that $\chi \succ \delta$: δ might be a face of maximum dimension. Unless stated otherwise, we assume that all these faces have the same sedentarity.

Moreover, $\tau \prec \sigma \prec \xi$ will be all the time three cones of X_{rec} .

Convention on maps π, ι, i and p . If ϕ and ψ are two faces of X or cones of $\overline{X_{\text{rec}}}$, we define, when this has a meaning, the map $\pi^{\phi/\psi}: N_{\mathbb{R}}^\psi \rightarrow N_{\mathbb{R}}^\phi$ to be the natural projection. Recall that for ϕ a face of X of sedentarity $\underline{0}$ or a cone of X_{rec} , we define $N_{\phi, \mathbb{R}} = T\phi$ and $N_{\mathbb{R}}^\phi = N_{\mathbb{R}}/N_{\phi, \mathbb{R}}$, and extend this to faces and cones of higher sedentarity by $N_{\mathbb{R}}^\phi = N_{\mathbb{R}}^{\text{sed}(\phi)}/T\phi$.

For the map $\pi^{\phi/\psi}$, it might happen that we use the notation $\pi^{\psi \setminus \phi}$ in order to insist on the fact that the domain of the map concerns the face ψ and the codomain ϕ .

To simplify the notations, if $\psi = \text{sed}(\phi)$, we set $\pi^\phi := \pi^{\psi \setminus \phi}$. Sometimes, we will put the superscript as a subscript instead, for example $\pi_{\phi/\psi}^*$ is another notation for $\pi^{\phi/\psi}$. Moreover, depending on the context and when this is clear, we use $\pi^{\psi \setminus \phi}$ to denote as well the natural projection $\bigwedge^k N_{\mathbb{R}}^\phi \rightarrow \bigwedge^k N_{\mathbb{R}}^\psi$, and also the restriction of this projection to some subspace.

To give an example of these conventions, for instance, the map $\mathbf{F}^k(\delta) \rightarrow \mathbf{F}^k(0^\delta)$ is represented by the notation π^δ .

We denote by η^δ the face corresponding to η in Σ^δ , i.e., $\eta^\delta = \mathbb{R}_+ \pi^\delta(\eta)$. In the same way, if $\sigma < \delta_{\text{rec}}$, we set

$$\delta_\infty^\sigma := \pi^\sigma(\delta) = (\delta + N_{\sigma, \mathbb{R}}) / N_{\sigma, \mathbb{R}}.$$

If $\text{sed}(\delta) = \underline{0}$, it is the intersection of the closure of δ in \mathbb{TP}_{X_∞} with the stratum of sedentarity σ .

If $\gamma < \delta$ are two faces of different sedentarities, then $\pi^{\text{sed}(\delta) \setminus \text{sed}(\gamma)}$ induces a projection from $\mathbb{T}\delta$ to $\mathbb{T}\gamma$. We denote this projection by $\pi_{\delta/\gamma}^{\text{sed}}$. Note that this is quite different from $\pi^{\gamma \setminus \delta}$; for such a pair, the projection $\pi^{\gamma \setminus \delta}$ is in fact an isomorphism $N_{\mathbb{R}}^\delta \xrightarrow{\sim} N_{\mathbb{R}}^\gamma$ and induces an isomorphism $\Sigma^\delta \xrightarrow{\sim} \Sigma^\gamma$. We denote these maps and the corresponding pushforwards by $\text{id}^{\delta/\gamma}$, and the inverse maps and the corresponding pushforwards by $\text{id}^{\gamma \setminus \delta}$.

In the same way, we set $\iota_{\eta/\delta}: \mathbf{F}_\bullet \eta \hookrightarrow \mathbf{F}_\bullet \delta$ and $\iota_\delta: \mathbf{F}_\bullet \delta \hookrightarrow \bigwedge^\bullet N_{\mathbb{R}}^{\text{sed}(\delta)}$ to be the natural inclusions. (By our convention on faces, we have $\delta < \eta$.) The inclusion concerning the canonical compactifications of fans is denoted by $i^{\eta/\delta}: \overline{\Sigma}^\eta \hookrightarrow \overline{\Sigma}^\delta$. The same simplifications hold.

We also introduce projections $p_\delta: N_{\mathbb{R}}^{\text{sed}(\delta)} \rightarrow \mathbb{T}\delta$ as follows. Let (\cdot, \cdot) be an inner product on $N_{\mathbb{R}}$. If $\text{sed}(\delta) = \underline{0}$, then we define p_δ to be the orthogonal projection with respect to (\cdot, \cdot) . (This new definition differs from the previous notation for p used in the rest of this article.) We extend this definition to other strata as follows.

For any face ϕ of sedentarity σ , we observe that we can find a unique face δ of sedentarity $\underline{0}$ such that $\phi = \delta_\infty^\sigma$, and we define p_ϕ as the quotient map

$$p_\phi := \pi_*^\sigma(p_\delta),$$

making the following diagram commutative:

$$\begin{array}{ccc} N_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{p_\delta} & \mathbb{T}\delta \\ \downarrow \pi^\sigma & & \downarrow \pi^\sigma \\ N_{\mathbb{R}}^\sigma = N_{\mathbb{R}} / N_{\sigma, \mathbb{R}} & \xrightarrow{p_\phi} & \mathbb{T}\phi = \mathbb{T}\delta / N_{\sigma, \mathbb{R}} \end{array}$$

In addition, if $\text{sed}(\eta) = \text{sed}(\delta)$, then we define the relative projection map $p_{\eta/\delta}$ by setting

$$p_{\eta/\delta} := p_\delta|_{\mathbb{T}\eta}.$$

If ϕ is a subface of δ with the same sedentarity, we set $p_\delta^\phi := \pi_*^\phi(p_\delta)$ and $p_{\eta/\delta}^\phi := \pi_*^\phi(p_{\eta/\delta})$. We also set $\overline{p}_\delta := \text{id} - p_\delta$ the orthogonal projection onto $\ker(p_\delta)$. We use the same notation for \overline{p}_δ^ϕ , etc.

Notice that $\pi^\delta|_{\ker(p_\delta)}: \ker(p_\delta) \rightarrow N_{\mathbb{R}}^\delta$ is an isomorphism. To simplify the notation, we set $\pi_\delta^{-1} := (\pi^\delta|_{\ker(p_\delta)})^{-1}$. In the same way, $\pi_{\eta/\delta}^{-1} := (\pi^{\eta/\delta}|_{\ker(p_{\eta/\delta}^\delta)})^{-1}$.

Operations on local cohomology groups. Recall that the map $i^{\eta/\delta}$ induces a surjective map $i_{\delta \setminus \eta}^*: H^\bullet(\delta) \rightarrow H^\bullet(\eta)$ of weight 0, where $H^\bullet(\delta) := H^\bullet(\overline{\Sigma}^\delta)$. The Poincaré dual map of $i_{\delta \setminus \eta}^*$ is denoted $\text{Gys}^{\eta/\delta}$. It is an injective map of weight $2(|\eta| - |\delta|)$ from $H^\bullet(\eta)$ to $H^\bullet(\delta)$. We denote by $1^\delta \in H^0(\delta)$ the corresponding unit. We denote by $x_{\delta/\gamma} \in A^1(\delta) \simeq H^2(\delta)$ the element corresponding to the ray δ^γ .

Operations on faces. If ϕ and ψ are subfaces of a same face δ , we denote by $\phi + \psi$ the smallest face containing ϕ and ψ . When this has a meaning, we denote by $\eta - \delta$ the smallest face ϕ such that $\phi + \delta = \eta$. By $\eta - \delta + \gamma$, for instance, we mean $(\eta - \delta) + \gamma$. Abusing of the notation, by $p_{\eta - \delta + \gamma/\gamma}$ we mean $p_{(\eta - \delta + \gamma)/\gamma}$. We might sometimes write $p_{\eta - \delta/\gamma}$ instead of $p_{\eta - \delta + \gamma/\gamma}$.

Multivectors and multiforms e and ν . We have a sign function $\varepsilon_{\cdot/\cdot} = \text{sign}(\cdot, \cdot)$ which verifies the diamond property

$$\varepsilon_{\delta/\gamma} \varepsilon_{\eta/\delta} = \varepsilon_{\delta'/\gamma} \varepsilon_{\eta/\delta'},$$

here the faces are allowed to have different sedentarities, and $\varepsilon_{e/v} = -\varepsilon_{e/v'}$ if v and v' are the two extremities of an edge e .

Let $\mathbf{e}_{\delta/\gamma} \in \mathbb{T}\delta^\gamma$ be the primitive element of the ray δ^γ . Let $e_{\delta/\gamma} := \varepsilon_{\delta/\gamma} \mathbf{e}_{\delta/\gamma}$. Let $s := |\eta| - |\delta|$ and let $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_s$ be a flag of faces such that

$$\delta = \delta_0 \prec \delta_1 \prec \dots \prec \delta_s = \eta.$$

We define the multivector $e_{\eta/\delta} \in \bigwedge^s \mathbb{T}\eta^\delta$ by

$$e_{\eta/\delta} := \varepsilon_{\delta_1/\delta_0} \dots \varepsilon_{\delta_s/\delta_{s-1}} \mathbf{e}_{\delta_1/\delta} \wedge \mathbf{e}_{(\delta_2-\delta_1)/\delta} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{(\delta_s-\delta_{s-1})/\delta}.$$

This definition is independent of the choice of the flag $\delta_0, \dots, \delta_s$.

We set $\mathbf{n}_{\delta/\gamma} := \pi_\gamma^{-1}(\mathbf{e}_{\delta/\gamma})$ and $\nu_{\eta/\delta} := \pi_\delta^{-1}(e_{\eta/\delta})$. (Recall that by our convention, π_δ^{-1} denotes the inverse of the restriction of π_δ to the kernel of the projection map p_δ , which is an isomorphism.)

If ϕ is a subface of δ with the same sedentarity, we set $\nu_{\eta/\delta}^\phi := \pi^\phi(\nu_{\eta/\delta})$. In particular, $\nu_{\eta/\delta}^\delta = e_{\eta/\delta}$. Similarly, for a subface ϕ of γ with the same sedentarity, we set $\mathbf{n}_{\delta/\gamma}^\phi := \pi^\phi(\mathbf{n}_{\delta/\gamma})$.

Let $e_{\delta \setminus \eta}^* \in \bigwedge^s \mathbb{T}^* \eta^\delta$ be the dual of $e_{\eta/\delta}$. Set $\nu_{\delta \setminus \eta}^* := \pi_\delta^*(e_{\delta \setminus \eta}^*) \in \bigwedge^s \mathbb{T}^* \eta$ and $\nu_{\eta \setminus \delta}^{\phi*} := \pi_{\delta/\phi}^*(e_{\eta \setminus \delta}^*) \in \bigwedge^s \mathbb{T}^* \eta^\phi$.

We also denote by $1_\delta^* \in \bigwedge^0 \mathbb{T}^* \delta$ the corresponding unit.

Operations on multivectors and on multiforms. Let V is a vector space. Let $\alpha \in \bigwedge^r V^*$ be a multiform on V and $\mathbf{u} \in \bigwedge^s V$ be a multivector in V . Then we denote by $\alpha \vee \mathbf{u} \in \bigwedge^{r-s} V^*$ the *right contraction of α by \mathbf{u}* , i.e.,

$$\alpha \vee \mathbf{u} := \begin{cases} \alpha(\cdot \wedge \mathbf{u}) & \text{if } s \geq r, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We also define the *left contraction of α by \mathbf{u}* by

$$\mathbf{u} \vee \alpha := \begin{cases} \alpha(\mathbf{u} \wedge \cdot) & \text{if } s \geq r, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We denote by $\ker(\alpha)$ the subspace of V defined by

$$\ker(\alpha) := \{u \in V \mid \alpha \vee u = 0\}.$$

If α is nonzero, the kernel is of dimension $\dim(V) - r$. If $\beta \in \bigwedge^t \ker(\alpha)^*$ then we denote by $\beta \wedge \alpha \in \bigwedge^{t+r} V^*$ the multiform $\tilde{\beta} \wedge \alpha$ where $\tilde{\beta}$ is any extension of β to $\bigwedge^t V$. The definition of $\beta \wedge \alpha$ does not depend on the chosen extension.

10.3. Useful facts. In this section, we list some useful facts which will be used in the proofs of Propositions 10.1 and 10.2.

PROPOSITION 10.3. *Using the conventions introduced in the previous section, the following holds.*

(10.1) *If $\text{sed}(\gamma) \succ \text{sed}(\delta)$ then*

$$\text{maxsed}(\gamma) = \text{maxsed}(\delta).$$

(10.2)

$$\text{maxsed}(\delta)/\text{sed}(\delta) = \delta_{\text{rec}}.$$

(10.3) *If $\text{sed}(\eta) = \text{sed}(\delta) \prec \text{sed}(\gamma)$, then*

$$\zeta = \eta_\infty^{\text{sed}(\gamma)}.$$

Let ℓ and ℓ' be two linear forms, α be a multiform and \mathbf{u} and \mathbf{v} be two multivectors on a vector space V . the following holds.

$$(10.4) \quad \alpha \vee (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \alpha \vee \mathbf{v} \vee \mathbf{u}.$$

(10.5) If $u \in \ker(\ell)$, then

$$\alpha \wedge \ell \vee u = -\alpha \vee u \wedge \ell.$$

(10.6) If $u' \in \ker(\ell)$, then

$$(\ell \wedge \ell')(u \wedge u') = \ell(u) \cdot \ell'(u').$$

$$(10.7) \quad i_{\zeta/\eta}^* \mathbf{Gys}^{\eta/\zeta}(x) = i_{\zeta/\eta}^* \mathbf{Gys}^{\eta/\zeta}(1^\eta)x.$$

$$(10.8) \quad \mathbf{Gys}^{\eta/\zeta} i_{\zeta/\eta}^*(x) = \mathbf{Gys}^{\eta/\zeta} i_{\zeta/\eta}^*(1^\eta)x.$$

$$(10.9) \quad \mathbf{Gys}^{\eta/\zeta}(1^\eta) = i_{\gamma\backslash\zeta}^*(x_{\eta-\zeta/\gamma}).$$

$$(10.10) \quad \nu_{\eta/\phi} = \nu_{\delta/\phi} \wedge \nu_{\eta/\delta}.$$

$$(10.11) \quad \nu_{\phi\backslash\eta}^* = \nu_{\phi\backslash\delta}^* \wedge \nu_{\delta\backslash\eta}^*.$$

(10.12) If $\text{sed}(\gamma) = \text{sed}(\delta) \succ \text{sed}(\delta') = \text{sed}(\eta)$, then,

$$\pi_{\chi/\delta}^{\text{sed}*}(\nu_{\gamma\backslash\delta}^*) = \nu_{\delta'\backslash\chi}^*.$$

(10.13) If β is a multiform on $N_{\mathbb{R}}^\delta$,

$$\pi_*^{\delta\backslash\eta}(\beta \vee \nu_{\eta/\delta}^\delta) \text{ is well-defined.}$$

(10.14) If ϕ is a subface of δ of same sedentarity, then

$$\bar{\mathbf{p}}_\delta(\nu_{\eta/\phi}) = \nu_{\eta/\delta}.$$

$$(10.15) \quad \mathbf{p}_\delta(\nu_{\delta'/\gamma}) = \nu_{\gamma\backslash\delta}^*(\mathbf{p}_\delta(\nu_{\delta'/\gamma}))\nu_{\delta/\gamma}.$$

(10.16) If $\eta = \delta + \zeta$, even if $\text{sed}(\delta) \neq \text{sed}(\gamma)$ (in which case $\pi^{\gamma\backslash\delta} = \text{id}^{\gamma\backslash\delta}$),

$$\pi^{\gamma\backslash\delta}(e_{\eta/\delta}) = (-1)^{|\eta|-|\delta|} \varepsilon_{\delta/\gamma} \varepsilon_{\eta/\zeta} e_{\zeta/\gamma}.$$

$$(10.17) \quad \mathbf{p}_{\gamma\backslash\delta}^* = (\cdot \wedge \nu_{\gamma\backslash\delta}^*) \vee \nu_{\delta/\gamma}.$$

$$(10.18) \quad \mathbf{p}_\delta \mathbf{p}_\eta = \mathbf{p}_\delta \mathbf{p}_\eta = \mathbf{p}_\delta \quad \text{and} \quad \bar{\mathbf{p}}_\delta \mathbf{p}_\eta = \mathbf{p}_\eta \bar{\mathbf{p}}_\delta.$$

(10.19) If $\text{sed}(\gamma) = \text{sed}(\delta) \succ \text{sed}(\delta') = \text{sed}(\eta)$, then

$$\pi_{\delta'/\gamma}^{\text{sed}} \mathbf{p}_{\chi/\delta'} = \mathbf{p}_{\delta/\gamma} \pi_{\chi/\delta}^{\text{sed}}.$$

PROOF. We omit the proof which can be obtained by straightforward computations. \square

10.4. Proof of Proposition 10.1. In this section, we define a (non canonical) isomorphism $\Phi: \text{Tot}^\bullet(\mathbf{A}_{\text{trop}}^{\bullet,\bullet}) \xrightarrow{\simeq} C_{\text{trop}}^{p,\bullet}$. We then prove that we can choose two differentials $\mathfrak{d}_{\text{trop}}$ and $\mathfrak{d}_{\text{trop}}$ of bidegree $(1, 0)$ and $(0, 1)$ on $\mathbf{A}_{\text{trop}}^{\bullet,\bullet}$ such that we have the equality $\mathfrak{d}_{\text{trop}} + \mathfrak{d}_{\text{trop}} = \Phi^{-1} \partial_{\text{trop}} \Phi$ where ∂_{trop} is the usual tropical differential on $C_{\text{trop}}^{p,\bullet}$. The two differentials we obtain are those we have already seen in Section 5. This will prove Proposition 10.1.

Recall that, if $|\delta| = a + b$,

$$\mathbf{A}_{\text{trop}}^{a,b}[\delta] = \bigwedge^b \mathbf{T}^* \delta \otimes \mathbf{F}^{p-b}(\underline{0}^\delta) \quad \text{and} \quad C_{\text{trop}}^{p,|\delta|}[\delta] = \mathbf{F}^p(\delta),$$

and other pieces are zero. The differential ∂_{trop} is equal to the sum $\iota_{\text{trop}}^* + \pi_{\text{trop}}^*$ where

$$\iota_{\text{trop}}^*[C_{\text{trop}}^{p,|\gamma|}[\gamma] \rightarrow C_{\text{trop}}^{p,|\delta|}[\delta]] = \varepsilon_{\delta/\gamma} \iota_{\gamma\backslash\delta}^*$$

and, if $\text{sed}(\gamma) \succ \text{sed}(\delta)$, then

$$\pi_{\text{trop}}^*[C_{\text{trop}}^{p,|\gamma|}[\gamma] \rightarrow C_{\text{trop}}^{p,|\delta|}[\delta]] = \varepsilon_{\delta/\gamma} \pi_{\gamma\backslash\delta}^*.$$

Recall as well from Section 5 that we have a filtration W^\bullet on $C_{\text{trop}}^{p,\bullet}$. With our notations introduced above, this is defined by

$$W^s C_{\text{trop}}^{p,|\delta|}[\delta] := \left\{ \alpha \in \mathbf{F}^p(\delta) \mid \forall \mathbf{u} \in \bigwedge^{|\delta|-s+1} \mathbf{T}_\delta, \alpha \vee \mathbf{u} = 0 \right\}.$$

We proved in Section 5 that this filtration is preserved by ∂_{trop} .

By an abuse of the notation, we also denote by W^\bullet the filtration on $\mathbf{A}_{\text{trop}}^{\bullet,\bullet}$ induced by the first index.

We now define $\Phi: \mathbf{A}_{\text{trop}}^{\bullet,\bullet} \rightarrow C_{\text{trop}}^{p,\bullet}$ by

$$\Phi[\mathbf{A}_{\text{trop}}^{a,b}[\delta] \rightarrow C_{\text{trop}}^{p,a+b}[\delta]] = \mathfrak{p}_\delta^* \wedge \pi_\delta^*$$

if $a + b = |\delta|$, and all other pieces are zero. Set

$$\Phi_a := \Phi[\mathbf{A}_{\text{trop}}^{a,\bullet} \rightarrow *].$$

We define $\Psi: C_{\text{trop}}^{p,\bullet} \rightarrow \mathbf{A}_{\text{trop}}^{\bullet,\bullet}$ by

$$\Psi[C_{\text{trop}}^{p,a+b}[\delta] \rightarrow \mathbf{A}_{\text{trop}}^{a,b}[\delta]](\alpha)(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u} \wedge \pi_\delta^{-1}(\mathbf{v}))$$

if $a + b = |\delta|$, and other pieces are zero. Set

$$\Psi_a := \Psi[* \rightarrow \mathbf{A}_{\text{trop}}^{a,\bullet}].$$

PROPOSITION 10.4. *The map Φ and Ψ are inverse isomorphisms of weight zero, and both preserve the filtration W^\bullet . Moreover, for any a and k , $\Psi_{a+k} \partial_{\text{trop}} \Phi_a$ is zero except for $k \in \{0, 1\}$.*

Set $\mathfrak{d}_{\text{trop}} := \bigoplus_a \Psi_a \partial_{\text{trop}} \Phi_a$ and $\mathfrak{d}_{\text{trop}} := \mathfrak{d}_{\text{trop}}^i + \mathfrak{d}_{\text{trop}}^\pi$ where

$$\mathfrak{d}_{\text{trop}}^i := \Psi_{a+1} \iota_{\text{trop}}^* \Phi_a \quad \text{and} \quad \mathfrak{d}_{\text{trop}}^\pi := \Psi_{a+1} \pi_{\text{trop}}^* \Phi_a.$$

By the previous proposition it is now clear that $\Phi: (\text{Tot}^\bullet(\mathbf{A}_{\text{trop}}^{\bullet,\bullet}), \mathfrak{d}_{\text{trop}} + \mathfrak{d}_{\text{trop}}) \xrightarrow{\simeq} (C_{\text{trop}}^{p,\bullet}, \partial_{\text{trop}})$ is an isomorphism of complexes which respects the filtrations. It remains to give an explicit formula of $\mathfrak{d}_{\text{trop}}$ and $\mathfrak{d}_{\text{trop}}$. This can be shown by direct computations.

PROPOSITION 10.5. *If $|\delta| = a + b$, then*

$$\mathfrak{d}_{\text{trop}}[\mathbf{A}_{\text{trop}}^{a,b-1}[\gamma] \rightarrow \mathbf{A}_{\text{trop}}^{a,b}[\delta]](\alpha \otimes \beta) = \varepsilon_{\delta/\gamma}(\alpha \wedge \nu_{\gamma\backslash\delta}^*) \otimes (\pi_*^{\gamma\backslash\delta}(e_{\delta/\gamma} \vee \beta)),$$

as stated in Proposition 5.15, and

$$\mathfrak{d}_{\text{trop}}^i[\mathbf{A}_{\text{trop}}^{a-1,b}[\gamma] \rightarrow \mathbf{A}_{\text{trop}}^{a,b}[\delta]] = \begin{cases} \varepsilon_{\delta/\gamma} \mathfrak{p}_{\gamma\backslash\delta}^* \otimes (\pi_{\delta/\gamma}^{-1})^*, & \text{if } \text{sed}(\gamma) = \text{sed}(\delta), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

as stated by Equation (5.3). Moreover,

$$d_{\text{trop}}^\pi[A_{\text{trop}}^{a-1,b}[\gamma] \rightarrow A_{\text{trop}}^{a,b}[\delta]] = \begin{cases} \varepsilon_{\delta/\gamma} \pi_{\gamma\backslash\delta}^{\text{sed}*} \otimes \text{id} & \text{if } \text{sed}(\gamma) \succ \text{sed}(\delta), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

It thus follows that d_{trop} and $\mathfrak{d}_{\text{trop}}$ defined above coincide with differential d and $d^i + \pi^*$ on ${}_p\mathbf{C}^{\bullet,\bullet}$ of Section 5.

10.5. Differentials of $\mathbf{A}^{\bullet,\bullet,\bullet}$. We now recall the definition of the differentials on $\mathbf{A}^{\bullet,\bullet,\bullet}$. Recall that, for $|\delta| = a + b$ and $|\eta| = p + a - b'$,

$$\begin{aligned} A_{\text{trop}}^{a,b}[\delta] &= \wedge^b \mathbf{T}^* \delta \otimes \mathbf{F}^{p-b}(\underline{0}^\delta), \\ A_{\text{ST}}^{a,b'}[\eta] &= H^{2b'}(\eta) \text{ if } |\eta_{\text{rec}}| \geq a \text{ and } b' \geq p, \text{ and} \\ A_{\text{D}}^{a,b,b'}[\delta, \eta] &= \wedge^b \mathbf{T}^* \delta \otimes H^{2b'}(\eta). \end{aligned}$$

When the domain or the codomain of a map is clear, we only indicate the concerned faces. For d^π , we assume that $\text{sed}(\gamma) = \text{sed}(\zeta) \succ \text{sed}(\delta) = \text{sed}(\eta)$. We have

$$\begin{aligned} d_{\text{trop}}[\gamma \rightarrow \delta] &= \varepsilon_{\delta/\gamma}(\cdot \wedge \nu_{\gamma\backslash\delta}^*) \otimes \pi_*^{\gamma\backslash\delta}(e_{\delta/\gamma} \vee \cdot), \\ d'_{\text{trop}}[A_{\text{trop}}^{a,b}[\delta] \rightarrow \delta, \eta] &= (-1)^{(a+1)(b+p)+|\text{sed}(\delta)|} \text{id} \otimes (\cdot \vee e_{\eta/\delta}) 1_\eta, \\ d_{\text{trop}}^i[\gamma \rightarrow \delta] &= \varepsilon_{\delta/\gamma} p_{\gamma\backslash\delta}^* \otimes (\pi_{\gamma\backslash\delta}^{-1})^*, \\ d_{\text{trop}}^\pi[\gamma \rightarrow \delta] &= \varepsilon_{\delta/\gamma} \pi_{\gamma\backslash\delta}^{\text{sed}*} \otimes \text{id}^{\gamma\backslash\delta}, \\ d_{\text{ST}}[A_{\text{ST}}^{a,b'}[\eta] \rightarrow \delta, \eta] &= (-1)^{a+b'} 1_\delta^* \otimes \text{id} \text{ if } \text{maxsed}(\delta) = \text{maxsed}(\eta), \\ d'_{\text{ST}}[\mu \rightarrow \eta] &= \varepsilon_{\mu/\eta} \text{Gys}^{\mu/\eta} \text{ if } \text{maxsed}(\eta) = \text{maxsed}(\mu), \\ d_{\text{ST}}^i[\eta \rightarrow \mu] &= \varepsilon_{\mu/\eta} i_{\eta\backslash\mu}^* \text{ if } \text{maxsed}(\eta) = \text{maxsed}(\mu), \\ d_{\text{ST}}^\pi[\eta \rightarrow \mu] &= \varepsilon_{\mu/\eta} \text{id}^{\eta\backslash\mu} \text{ (by (10.1), } \text{maxsed}(\eta) = \text{maxsed}(\mu)), \\ d_{\text{D}}[A^{a,b,b'}[\gamma, \eta] \rightarrow \delta, \eta] &= (-1)^{a+b'} \varepsilon_{\delta/\gamma}(\cdot \wedge \nu_{\gamma\backslash\delta}^*) \otimes \text{id}, \\ d'_{\text{D}}[\delta, \mu \rightarrow \delta, \eta] &= \varepsilon_{\mu/\eta} \text{id} \otimes \text{Gys}^{\mu/\eta}, \\ d_{\text{D}}^i[\gamma, \zeta \rightarrow \delta, \eta] &= \varepsilon_{\eta/\zeta} \mathbf{n}_{\gamma\backslash\delta}^*(p_\delta(\mathbf{n}_{\eta-\zeta/\gamma})) p_{\gamma\backslash\delta}^* \otimes i_{\zeta\backslash\eta}^*, \\ d_{\text{D}}^\pi[\gamma, \zeta \rightarrow \delta, \eta] &= \varepsilon_{\eta/\zeta} \pi_{\gamma\backslash\delta}^{\text{sed}*} \otimes \text{id}^{\zeta\backslash\eta}. \end{aligned}$$

10.6. Proof that $\partial = \mathfrak{d} + d + d'$ is a differential. Let $\partial = \mathfrak{d} + d + d'$ with $\mathfrak{d} = d^i + d^\pi$. In this section, we prove that $\partial \circ \partial = 0$. To do so, we separate thirty cases summarized in the following table. For example, the first case (denoted a in the top-left corner) concerns the proof that $(d^2)[A_{\text{trop}}^{\bullet,\bullet} \rightarrow *] = 0$. The case just after is the proof that $(dd' + d'd)[A_{\text{trop}}^{\bullet,\bullet} \rightarrow *] = 0$, etc. Some cases has been gathered (in particular the easy cases and those that have been already done). In each case, we fix a context by precisising the faces involved. We let the reader check that the studied case is general: no other configuration of faces can be involved.

		trop				ST				D			
		d	d'	d ⁱ	d ^π	d	d'	d ⁱ	d ^π	d	d'	d ⁱ	d ^π
d	d	a	b	a	a	h	f	i	f	j	j	l	j
	d'		c	d	e		g	g	f		k	m, n, o	j
	d ⁱ			a	a			g	f			p	q
	d ^π				a				f				j

- (a) $(d_{\text{trop}} + \mathfrak{d}_{\text{trop}})^2 = 0$. This was already done in Section 10.4.
- (b) $dd' + d'd = 0$ in $\mathbf{A}_{\text{trop}}^{\bullet, \bullet}$. We need to show that for integers a, b , a face γ with $|\gamma| = a + b$, and $\alpha \otimes \beta \in \bigwedge^b \mathbf{T}^* \gamma \otimes \mathbf{F}^{p-b}(\underline{0}^\gamma)$, we have $(dd' + d'd)[\mathbf{A}_{\text{trop}}^{a,b}[\gamma] \rightarrow \mathbf{A}^{a,b,0}[\delta, \eta]](\alpha \otimes \beta) = 0$. This is obtained by the following chain of implications.

$$\begin{aligned} \nu_{\eta/\gamma}^\gamma &= \nu_{\delta/\gamma}^\gamma \wedge \nu_{\eta/\delta}^\gamma \\ \implies (-1)^a \beta \vee e_{\eta/\gamma} &= -(-1)^{a+1} (e_{\delta/\gamma} \vee \beta) \vee \pi_{\delta/\gamma}^{-1}(e_{\eta/\delta}) \\ \implies (-1)^{a+0} \varepsilon_{\delta/\gamma} (-1)^{(a+1)(b+p)+|\text{sed}(\gamma)|} \alpha \vee \nu_{\gamma\backslash\delta}^* &\otimes (\beta \vee e_{\eta/\gamma}) \mathbf{1}_\eta \\ &+ (-1)^{(a+1)(b+1+p)+|\text{sed}(\delta)|} \varepsilon_{\delta/\gamma} \alpha \vee \nu_{\gamma\backslash\delta}^* \otimes (\pi_*^{\gamma\backslash\delta}(e_{\delta/\gamma} \vee \beta) \vee e_{\eta/\delta}) \mathbf{1}_\eta = 0, \end{aligned}$$

which is the desired equality given the differentials.

- (c) We have $d' \circ d' = 0$ in $\mathbf{A}_{\text{trop}}^{\bullet, \bullet}$. Let a, b be two integers, let δ be a face of dimension $|\delta| = a + b$, and choose $\alpha \otimes \beta \in \bigwedge^b \mathbf{T}^* \delta \otimes \mathbf{F}^{p-b}(\underline{0}^\delta)$. Then we have to prove that $(d'^2)[\mathbf{A}_{\text{trop}}^{a,b}[\delta] \rightarrow \mathbf{A}^{a,b,1}[\delta, \eta]](\alpha \otimes \beta) = 0$. We have, using the linear relations in the cohomology ring $H^\bullet(\eta)$ via the isomorphism with the Chow ring of Σ^η ,

$$\begin{aligned} \sum_{\mu'} (\pi_*^{\delta\backslash\eta}(\beta \vee \nu_{\eta/\delta}^\delta)) (\varepsilon_{\mu'/\eta}) x_{\mu'/\eta} &= 0 \\ \implies (-1)^{|\eta|-|\delta|} \sum_{\mu'} (\beta \vee \nu_{\eta/\delta}^\delta \vee \mathbf{n}_{\mu'/\eta}^\delta) x_{\mu'/\eta} &= 0 \\ \implies \sum_{\mu'} \varepsilon_{\mu'/\eta} (\beta \vee \nu_{\mu'/\eta}^\delta \vee \nu_{\eta/\delta}^\delta) x_{\mu'/\eta} &= 0 \\ \implies \sum_{\substack{\mu' \succ \eta \\ \text{sed}(\mu') = \text{sed}(\eta)}} \varepsilon_{\mu'/\eta} (-1)^{(b+p)(a+1)+|\text{sed}(\delta)|} \alpha \otimes (\beta \vee e_{\mu'/\delta}) \text{Gys}^{\mu'/\eta}(1'_\mu) &= 0. \end{aligned}$$

- (d) We have to show that $d'd^i + d^i d' = 0$ in $\mathbf{A}_{\text{trop}}^{\bullet, \bullet}$. Let a, b be two integers, let γ be a face of dimension $|\gamma| = a + b$, and choose $\alpha \otimes \beta \in \bigwedge^b \mathbf{T}^* \gamma \otimes \mathbf{F}^{p-b}(\underline{0}^\gamma)$. We need to prove

$$(d'd^i + d^i d')[\mathbf{A}_{\text{trop}}^{a,b}[\gamma] \rightarrow \mathbf{A}^{a+1,b,0}[\delta, \eta]](\alpha \otimes \beta) = 0.$$

This is equivalent to

$$\begin{aligned} \iff \varepsilon_{\delta/\gamma} (-1)^{(a+2)(b+p)+|\text{sed}(\delta)|} \mathbf{p}_{\gamma\backslash\delta}^*(\alpha) \otimes ((\pi_{\gamma\backslash\delta}^{-1})^*(\beta) \vee e_{\eta/\delta}) \mathbf{1}_\eta \\ + \sum_{\substack{\zeta' < \eta \\ \zeta' > \gamma}} \varepsilon_{\eta/\zeta'} (-1)^{(a+1)(b+p)+|\text{sed}(\gamma)|} \mathbf{n}_{\gamma\backslash\delta}^*(\mathbf{p}_\delta(\mathbf{n}_{\eta-\zeta'/\gamma})) \mathbf{p}_{\gamma\backslash\delta}^*(\alpha) \otimes (\beta \vee e_{\zeta'/\gamma}) \mathbf{i}_{\zeta'\backslash\eta}^*(1_{\zeta'}) &= 0 \\ \iff \varepsilon_{\delta/\gamma} (-1)^{p-(b+1)} \pi_{\delta/\gamma}^{-1}(e_{\eta/\delta}) = \sum_{\zeta'} \varepsilon_{\eta/\zeta'} \mathbf{n}_{\gamma\backslash\delta}^*(\mathbf{p}_\delta(\mathbf{n}_{\eta-\zeta'/\gamma})) e_{\zeta'/\gamma} \\ \iff \nu_{\eta/\delta} = \varepsilon_{\delta/\gamma} (-1)^{|\eta|-|\delta|} \sum_{\zeta'} \varepsilon_{\eta/\zeta'} \mathbf{n}_{\gamma\backslash\delta}^*(\mathbf{p}_\delta(\mathbf{n}_{\eta-\zeta'/\gamma})) \nu_{\zeta'/\gamma}. \end{aligned}$$

Thus, we reduce to proving the last equation. Let $s = |\eta| - |\delta|$. Let $\delta_0, \dots, \delta_s$ such that

$$\delta = \delta_0 \prec \delta_1 \prec \dots \prec \delta_s = \eta.$$

Set $\epsilon = \delta - \gamma$, $\gamma_i = \delta_i - \epsilon$ and $\zeta_i = \eta - (\delta_{i+1} - \delta_i) = \eta - (\gamma_{i+1} - \gamma_i)$. Then

$$\begin{aligned} \nu_{\eta/\delta} &= \bigwedge_{i=0}^{s-1} \varepsilon_{\delta_{i+1}/\delta_i} \mathbf{n}_{\delta_{i+1}-\delta_i/\delta} \\ &= \bigwedge_i -\varepsilon_{\delta_i/\gamma_i} \varepsilon_{\gamma_{i+1}/\gamma_i} \varepsilon_{\delta_{i+1}/\gamma_{i+1}} \bar{\mathbf{p}}_\delta(\mathbf{n}_{\gamma_{i+1}-\gamma_i/\gamma}) \\ &= (-1)^s \varepsilon_{\delta_0/\gamma_0} \varepsilon_{\delta_s/\gamma_s} \bigwedge_i \varepsilon_{\gamma_{i+1}/\gamma_i} (\mathbf{n}_{\gamma_{i+1}-\gamma_i/\gamma} - \mathbf{p}_\delta(\mathbf{n}_{\gamma_{i+1}-\gamma_i/\gamma})). \end{aligned}$$

By (10.15),

$$\mathbf{p}_\delta(\mathbf{n}_{\gamma_{i+1}-\gamma_i/\gamma}) = \mathbf{n}_{\gamma\backslash\delta}^*(\mathbf{p}_\delta(\mathbf{n}_{\eta-\zeta_i})) \mathbf{n}_{\delta/\gamma}.$$

Hence,

$$\begin{aligned} \nu_{\eta/\delta} &= (-1)^s \varepsilon_{\delta/\gamma} \varepsilon_{\eta/\eta-\epsilon} \left(\bigwedge_i \varepsilon_{\gamma_{i+1}/\gamma_i} \mathbf{n}_{\gamma_{i+1}-\gamma_i/\gamma} \right. \\ &\quad \left. - \sum_i (-1)^{s-i-1} \varepsilon_{\gamma_{i+1}/\gamma_i} \mathbf{n}_{\gamma \setminus \delta}^* (\mathbf{p}_\delta(\mathbf{n}_{\eta-\zeta_i/\gamma})) \bigwedge_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{s-1} \varepsilon_{\gamma_{j+1}/\gamma_j} \mathbf{n}_{\gamma_{j+1}-\gamma_j/\gamma} \wedge \mathbf{n}_{\delta/\gamma} \right). \end{aligned}$$

In the big brackets, the first wedge product is simply $\nu_{\gamma_s/\gamma_0} = \nu_{\eta-\epsilon/\gamma}$. For the sum, set $\kappa_i := \gamma_{i+1} - \gamma_i$. We get

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\gamma_{j+1}/\gamma_j} \mathbf{n}_{\gamma_{j+1}-\gamma_j/\gamma} &= \\ &= -\varepsilon_{\gamma_j/\gamma_j-\kappa_i} \varepsilon_{\gamma_{j+1}-\kappa_i/\gamma_j-\kappa_i} \varepsilon_{\gamma_{j+1}/\gamma_{j+1}-\kappa_i} \mathbf{n}_{(\gamma_{j+1}-\kappa_i)-(\gamma_j-\kappa_i)/\gamma}. \end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned} &\bigwedge_{j=i+1}^{s-1} \varepsilon_{\gamma_{j+1}/\gamma_j} \mathbf{n}_{\gamma_{j+1}-\gamma_j/\gamma} \\ &= (-1)^{s-i-1} \varepsilon_{\gamma_{i+1}/\gamma_{i+1}-\kappa_i} \varepsilon_{\gamma_s/\gamma_s-\kappa_i} \nu_{\gamma_s-\kappa_i/\gamma_{i+1}-\kappa_i} \\ &= (-1)^{s-i-1} \varepsilon_{\gamma_{i+1}/\gamma_i} \varepsilon_{\eta-\epsilon/\zeta_i-\epsilon} \nu_{\zeta_i-\epsilon/\gamma_i}. \end{aligned}$$

Thus, the i -th term of the sum equals

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{\eta-\epsilon/\zeta_i-\epsilon} \mathbf{n}_{\gamma \setminus \delta}^* (\mathbf{p}_\delta(\mathbf{n}_{\eta-\zeta_i})) \nu_{\gamma_i/\gamma} \wedge \nu_{\zeta_i-\epsilon/\gamma_i} \wedge \mathbf{n}_{\delta/\gamma} \\ &= \varepsilon_{\eta-\epsilon/\zeta_i-\epsilon} \mathbf{n}_{\gamma \setminus \delta}^* (\mathbf{p}_\delta(\mathbf{n}_{\eta-\zeta_i/\gamma})) \nu_{\zeta_i-\epsilon/\gamma} \wedge \varepsilon_{\zeta_i/\zeta_i-\epsilon} \nu_{\zeta_i/\zeta_i-\epsilon} \\ &= -\varepsilon_{\eta/\zeta_i} \varepsilon_{\eta/\eta-\epsilon} \mathbf{n}_{\gamma \setminus \delta}^* (\mathbf{p}_\delta(\mathbf{n}_{\eta-\zeta_i/\gamma})) \nu_{\zeta_i/\gamma}. \end{aligned}$$

Therefore,

$$\nu_{\eta/\delta} = (-1)^s \varepsilon_{\delta/\gamma} \left(\varepsilon_{\eta/\eta-\epsilon} \nu_{\eta-\epsilon/\gamma} + \sum_i \varepsilon_{\eta/\zeta_i} \mathbf{n}_{\gamma \setminus \delta}^* (\mathbf{p}_\delta(\mathbf{n}_{\eta-\zeta_i})) \nu_{\zeta_i/\gamma} \right).$$

Notice that the ζ_i are exactly the faces ζ' such that $\delta < \zeta' \triangleleft \eta$, and $\eta - \epsilon$ is the only face ζ' such that $\gamma < \zeta' \triangleleft \eta$ and such that $\delta \not\prec \zeta'$. Moreover,

$$\nu_{\gamma \setminus \delta}^* (\mathbf{p}_\delta(\mathbf{n}_{\eta-(\eta-\epsilon)/\gamma})) = \nu_{\gamma \setminus \delta}^* (\mathbf{p}_\delta(\mathbf{n}_{\delta/\gamma})) = 1.$$

Finally,

$$\nu_{\eta/\delta} = (-1)^s \varepsilon_{\delta/\gamma} \sum_{\substack{\zeta' \triangleleft \eta \\ \zeta' > \gamma}} \varepsilon_{\eta/\zeta'} \mathbf{n}_{\gamma \setminus \delta}^* (\mathbf{p}_\delta(\mathbf{n}_{\eta-\zeta'/\gamma})) \nu_{\zeta'/\gamma},$$

which is what we wanted to prove.

- (e) We have to show that $d'd^\pi + d^\pi d' = 0$ in $\mathbf{A}_{\text{trop}}^{\bullet, \bullet}$. Let a, b be two integers, let γ be a face of dimension $|\gamma| = a + b$, and choose $\alpha \otimes \beta \in \bigwedge^b \mathbf{T}^* \gamma \otimes \mathbf{F}^{p-b}(\underline{Q}^\gamma)$. Suppose moreover that $\text{sed}(\eta) = \text{sed}(\delta) \triangleleft \text{sed}(\gamma)$. Let $\zeta = \eta_{\text{sed}(\gamma)}^{\text{sed}(\gamma)}$. Then, we have

$$\begin{aligned} &(d'd^\pi + d^\pi d')[\mathbf{A}_{\text{trop}}^{a,b}[\gamma] \rightarrow \mathbf{A}^{a,b,0}[\delta, \eta]](\alpha \otimes \beta) = 0 \\ &\iff (-1)^{(a+2)(b+p)+|\text{sed}(\delta)|} \varepsilon_{\delta/\gamma} \pi_{\gamma \setminus \delta}^{\text{sed}(\delta)*}(\alpha) \otimes (\text{id}^{\gamma \setminus \delta}(\beta) \vee e_{\eta/\delta}) 1_\eta \\ &\quad + \varepsilon_{\eta/\zeta} (-1)^{(a+1)(b+p)+|\text{sed}(\gamma)|} \pi_{\gamma/\delta}^{\text{sed}(\gamma)*}(\alpha) \otimes (\beta \vee e_{\zeta/\gamma}) \text{id}^{\zeta/\eta}(1_\zeta) = 0, \\ &\iff (-1)^{b+p+1} \varepsilon_{\delta/\gamma} \text{id}^{\delta/\gamma}(e_{\eta/\delta}) = -\varepsilon_{\eta/\zeta} e_{\zeta/\gamma}, \\ &\iff \text{id}^{\delta/\gamma}(e_{\eta/\delta}) = (-1)^{|\eta|-|\delta|} \varepsilon_{\delta/\gamma} \varepsilon_{\eta/\zeta} e_{\zeta/\gamma}, \end{aligned}$$

which follows from the definition.

(f) We need to show that $(d_{\Sigma}^{\pi})^2 = d^i d_{\Sigma}^{\pi} + d^{\pi} d_{\Sigma}^i = d' d_{\Sigma}^{\pi} + d^{\pi} d_{\Sigma}' = dd_{\Sigma}^{\pi} + d^{\pi} d_{\Sigma} = d^i d_{\Sigma}' + d' d_{\Sigma}^i = 0$ in $A_{\Sigma}^{\bullet, \bullet}$. This is clear by looking at the definitions and using (10.3) and the defining property of the sign function.

(g) We have to show that $(d' + d^i)^2[A_{\Sigma}^{a, b'}[\eta] \rightarrow *] = 0$.

Assume $\sigma = \text{sed}\eta$ and $\xi = \text{maxsed}\eta$. If $\sigma = \xi$ the statement holds by applying Proposition 5.5 to $(X^{\sigma})_f$. Otherwise, we can reduce to the previous case as follows. By (f), the two differentials d'_{Σ} and d^i_{Σ} anticommute with d_{Σ}^{π} . Recall that d_{Σ}^{π} is, up to a sign, identity on each piece. Thus, setting

$$\partial := (d^{\pi})^{|\xi| - |\sigma|} \left[\underset{\text{maxsed}=\xi}{\text{sed}=\xi} A_{\Sigma}^{\bullet, \bullet} \rightarrow \underset{\text{maxsed}=\xi}{\text{sed}=\sigma} A_{\Sigma}^{\bullet, \bullet} \right],$$

we get

$$\partial^{-1}(d' + d^i)^2 \partial = (-1)^{|\xi| - |\sigma|} (d' + d^i)^2 \left[\underset{\text{maxsed}=\xi}{\text{sed}=\xi} A_{\Sigma}^{\bullet, \bullet} \rightarrow * \right].$$

(h) This says that $(d^2)[A_{\Sigma}^{a, b'}[\eta] \rightarrow A^{a, 1, b'}[\delta, \eta]](x) = 0$. This is equivalent to

$$\begin{aligned} &\iff \sum_{\substack{\gamma' < \delta \\ \text{maxsed}(\gamma') = \text{maxsed}(\eta) \\ \text{sed}(\gamma') = \text{sed}(\eta)}} (-1)^{a+b'} (-1)^{a+1'} \varepsilon_{\delta/\gamma'} (1_{\delta}^* \wedge \nu_{\gamma' \wedge \delta}^*) \otimes x = 0 \\ &\iff \sum_{\gamma'} \mathbf{n}_{\gamma' \wedge \delta}^* = 0. \end{aligned}$$

Notice that the sum has no term if $\text{maxsed}(\delta) \neq \text{maxsed}(\eta)$. Otherwise, the sum is over facets of δ of same sedentarity and such that $\gamma_{\text{rec}} = \delta_{\text{rec}}$. Thus, every linear forms of the sum is zero on δ_{rec} . Let u and u' be two vertices of δ_f . For any γ' ,

$$\mathbf{n}_{\gamma' \wedge \delta}^*(u' - u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u' \in \gamma' \text{ and } u \notin \gamma', \\ -1 & \text{if } u \in \gamma' \text{ and } u' \notin \gamma' \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The first condition can be rewritten as « if $\gamma' = \delta - u$ » and the second condition as « if $\gamma' = \delta - u'$ ». Thus, the first condition and the second condition each occurs exactly once. Hence, the sum of form applied to $u - u'$ is zero. To conclude, notice that $T\delta$ is spanned by the union of the edges of δ_f and of δ_{rec} .

(i) If $\text{maxsed}(\delta) = \text{maxsed}(\zeta) = \text{maxsed}(\eta)$, we have to show that $(dd^i + d^i d)[A_{\Sigma}^{a, b'}[\zeta] \rightarrow A^{a+1, 0, b'}[\delta, \eta]](x) = 0$. This is equivalent to

$$\begin{aligned} &\iff (-1)^{a+1+b'} \varepsilon_{\eta/\zeta} 1_{\delta}^* \otimes i_{\zeta \setminus \eta}^*(x) \\ &\quad + \sum_{\substack{\gamma' < \delta \\ \text{maxsed}(\gamma') = \text{maxsed}(\delta)}} \varepsilon_{\eta/\zeta} (-1)^{a+b'} \mathbf{n}_{\gamma' \wedge \delta}^*(p_{\delta}(\mathbf{n}_{\eta-\zeta/\gamma'})) p_{\gamma' \wedge \delta}^*(1_{\gamma'}^*) \otimes i_{\zeta \setminus \eta}^*(x) = 0 \\ &\iff 1 = \sum_{\gamma'} \mathbf{n}_{\gamma' \wedge \delta}^*(p_{\delta}(\mathbf{n}_{\eta-\zeta/\gamma'})). \end{aligned}$$

Let v be any vertex of δ_f . We have already seen in (h) that

$$\sum_{\gamma'} \mathbf{n}_{\gamma' \wedge \delta}^* = 0.$$

Thus,

$$\sum_{\gamma'} \mathbf{n}_{\gamma' \wedge \delta}^*(p_{\delta}(\mathbf{n}_{\eta-\zeta/\gamma'})) = \sum_{\gamma'} \mathbf{n}_{\gamma' \wedge \delta}^*(p_{\delta}(\mathbf{n}_{\eta-\zeta/\gamma'} - \mathbf{n}_{\eta-\zeta/v})).$$

For each γ' , set $u_{\gamma'} := \mathbf{n}_{\eta-\zeta/\gamma'} - \mathbf{n}_{\eta-\zeta/v}$. Then $u_{\gamma'}$ is a vector going from some point of $T\gamma'$ to v . Thus, if $v \in \gamma'$, then $u_{\gamma'} \in T\gamma'$ and

$$\mathbf{n}_{\gamma' \wedge \delta}^*(p_{\delta}(u_{\gamma'})) = 0.$$

Otherwise, i.e., for $\gamma' = \delta - v$, up to an element of $\mathbb{T}\gamma'$, $u_{\delta-v}$ will be equal to $\nu_{\delta/\gamma}$, and

$$\mathbf{n}_{\gamma'\wedge\delta}^*(p_\delta(u_{\delta-v})) = 1.$$

Thus, the sum equals 1.

- (j) We have to show that $d_{\mathbb{D}}^2 = d_{\mathbb{D}}d'_{\mathbb{D}} + d'_{\mathbb{D}}d_{\mathbb{D}} = d_{\mathbb{D}}d_{\mathbb{D}}^{\bar{\pi}} + d_{\mathbb{D}}^{\bar{\pi}}d_{\mathbb{D}} = d'_{\mathbb{D}}d_{\mathbb{D}}^{\bar{\pi}} + d_{\mathbb{D}}^{\bar{\pi}}d'_{\mathbb{D}} = (d_{\mathbb{D}}^{\bar{\pi}})^2 = 0$. This follows directly from the definitions, the property of $\varepsilon_{./}$, (10.11), (10.3) and (10.12).
- (k) We need to show that $d_{\mathbb{D}}'^2 = 0$; see the proof that $\text{Gys}^2 = 0$ in Section 5.10.
- (l) This is the property $dd^i + d^id[A_{\mathbb{D}}^{a,b,b'}[\gamma, \eta] \rightarrow A_{\mathbb{D}}^{a,b,b'}[\chi, \mu]](\alpha \otimes x) = 0$, which is equivalent to

$$\begin{aligned} &\iff \sum_{\underline{\delta} \in \{\delta, \delta'\}} (-1)^{a+1+b'} \varepsilon_{\chi/\underline{\delta}} \varepsilon_{\mu/\eta} \mathbf{n}_{\gamma\wedge\underline{\delta}}^*(p_{\underline{\delta}}(\mathbf{n}_{\mu-\eta/\gamma})) p_{\gamma\wedge\underline{\delta}}^*(\alpha) \wedge \nu_{\underline{\delta}\wedge\chi}^* \otimes \mathbf{i}_{\eta\wedge\mu}^*(x) \\ &\quad + (-1)^{a+b'} \varepsilon_{\mu/\eta} \mathbf{n}_{\underline{\delta}\wedge\chi}^*(p_{\chi}(\mathbf{n}_{\mu-\eta/\underline{\delta}})) \varepsilon_{\underline{\delta}/\gamma} p_{\underline{\delta}\wedge\chi}^*(\alpha \wedge \nu_{\gamma\wedge\underline{\delta}}^*) \otimes \mathbf{i}_{\eta\wedge\mu}^*(x) = 0 \\ &\iff \sum_{\underline{\delta}} -\varepsilon_{\chi/\underline{\delta}} \mathbf{n}_{\gamma\wedge\underline{\delta}}^*(p_{\underline{\delta}}(\mathbf{n}_{\mu-\eta/\gamma})) (\alpha \wedge \nu_{\gamma\wedge\underline{\delta}}^* \vee \nu_{\underline{\delta}/\gamma}) \wedge \nu_{\underline{\delta}\wedge\chi}^* \\ &\quad + \varepsilon_{\underline{\delta}/\gamma} \mathbf{n}_{\underline{\delta}\wedge\chi}^*(p_{\chi}(\mathbf{n}_{\mu-\eta/\underline{\delta}})) \alpha \wedge \nu_{\gamma\wedge\underline{\delta}}^* \wedge \nu_{\underline{\delta}\wedge\chi}^* \vee \nu_{\chi/\underline{\delta}} = 0 \tag{10.17} \\ &\iff \alpha \wedge \nu_{\gamma\wedge\chi}^* \left(\sum_{\underline{\delta}} \varepsilon_{\chi/\underline{\delta}} \mathbf{n}_{\gamma\wedge\underline{\delta}}^*(p_{\underline{\delta}}(\mathbf{n}_{\mu-\eta/\gamma})) \nu_{\underline{\delta}/\gamma} + \varepsilon_{\underline{\delta}/\gamma} \mathbf{n}_{\underline{\delta}\wedge\chi}^*(p_{\chi}(\mathbf{n}_{\mu-\eta/\underline{\delta}})) \nu_{\chi/\underline{\delta}} \right) = 0 \tag{10.5}, (10.11) \\ &\iff \sum_{\underline{\delta}} \varepsilon_{\chi/\underline{\delta}} \varepsilon_{\underline{\delta}/\gamma} p_{\underline{\delta}}(\mathbf{n}_{\mu-\eta/\gamma}) + \varepsilon_{\underline{\delta}/\gamma} \varepsilon_{\chi/\underline{\delta}} p_{\chi}(\mathbf{n}_{\mu-\eta/\underline{\delta}}) = 0 \tag{10.15} \\ &\iff p_{\delta}(\mathbf{n}_{\mu-\eta/\gamma}) + p_{\chi}(\mathbf{n}_{\mu-\eta/\delta}) = p_{\delta'}(\mathbf{n}_{\mu-\eta/\gamma}) + p_{\chi}(\mathbf{n}_{\mu-\eta/\delta'}) \\ &\iff p_{\chi} p_{\delta}(\mathbf{n}_{\mu-\eta/\gamma}) + p_{\chi} \bar{p}_{\delta}(\mathbf{n}_{\mu-\eta/\gamma}) = p_{\chi} p_{\delta'}(\mathbf{n}_{\mu-\eta/\gamma}) + p_{\chi} \bar{p}_{\delta'}(\mathbf{n}_{\mu-\eta/\gamma}) \\ &\iff p_{\chi}(\mathbf{n}_{\mu-\eta/\gamma}) = p_{\chi}(\mathbf{n}_{\mu-\eta/\gamma}), \end{aligned}$$

which is obvious.

For cases (m), (n) and (o), recall our naming convention of faces: we have $\gamma \prec \eta, \eta'$. We have to prove that

$$\begin{aligned} &(d'd^i + d^id')[A_{\mathbb{D}}^{a,b,b'}[\gamma, \eta'] \rightarrow A_{\mathbb{D}}^{a+1,b,b'+1}[\delta, \eta]], \text{ and} \\ &(d'd^i + d^id')[A_{\mathbb{D}}^{a,b,b'}[\gamma, \eta] \rightarrow A_{\mathbb{D}}^{a+1,b,b'+1}[\delta, \eta]](\alpha \otimes x) \text{ equals } 0. \end{aligned}$$

For the first equation, we consider two cases depending on whether there exists μ such that $\eta, \eta' \prec \mu$ or not.

- (m) If μ exists, then we have

$$\begin{aligned} &(d'd^i + d^id')[A_{\mathbb{D}}^{a,b,b'}[\gamma, \eta'] \rightarrow A_{\mathbb{D}}^{a+1,b,b'+1}[\delta, \eta]](\alpha \otimes x) = 0 \\ &\iff \varepsilon_{\mu/\eta} \varepsilon_{\mu/\eta'} \mathbf{n}_{\gamma\wedge\delta}^*(p_{\delta}(\mathbf{n}_{\mu-\eta'/\gamma})) p_{\gamma\wedge\delta}^*(\alpha) \otimes \text{Gys}^{\mu/\eta} \mathbf{i}_{\eta'\wedge\mu}^*(x) \\ &\quad + \varepsilon_{\eta/\zeta} \varepsilon_{\eta'/\zeta} \mathbf{n}_{\gamma\wedge\delta}^*(p_{\delta}(\mathbf{n}_{\eta-\zeta/\gamma})) p_{\gamma\wedge\delta}^*(\alpha) \otimes \mathbf{i}_{\zeta\wedge\eta}^* \text{Gys}^{\eta'/\zeta}(x) \\ &\iff \mathbf{n}_{\gamma\wedge\delta}^*(p_{\delta}(\mathbf{n}_{\mu-\eta'/\gamma})) \\ &\quad = \mathbf{n}_{\gamma\wedge\delta}^*(p_{\delta}(\mathbf{n}_{\eta-\zeta/\gamma})) \\ &\iff \mu - \eta' = \eta - \zeta, \end{aligned}$$

which is obviously the case.

- (n) If μ does not exist, then $(d'd^i + d^id')[A_{\mathbb{D}}^{a,b,b'}[\gamma, \eta'] \rightarrow A_{\mathbb{D}}^{a+1,b,b'+1}[\delta, \eta]](\alpha \otimes x) = 0$. We only have the second term from the case (m). However, here, $\mathbf{i}_{\zeta\wedge\eta}^* \text{Gys}^{\eta'/\zeta}(x) = 0$ since η^ζ and η'^ζ are not comparable.

(o) It remains to prove $(d'd^i + d^i d') [A_D^{a,b,b'}[\gamma, \eta] \rightarrow A_D^{a+1,b,b'+1}[\delta, \eta]](\alpha \otimes x) = 0$. This is equivalent to

$$\begin{aligned} &\iff \sum_{\substack{\mu' > \eta \\ \text{sed}(\mu') = \text{sed}(\eta)}} \varepsilon_{\mu'/\eta} \varepsilon_{\mu'/\eta} \mathbf{n}_{\gamma\lambda\delta}^* (\mathbf{p}_\delta(\mathbf{n}_{\mu'-\eta/\gamma})) \mathbf{p}_{\gamma\lambda\delta}^*(\alpha) \otimes \text{Gys}^{\mu'/\eta} i_{\eta\backslash\mu'}^*(x) \\ &\quad + \sum_{\substack{\zeta' < \eta \\ \zeta' > \gamma \\ \text{sed}(\zeta') = \text{sed}(\eta)}} \varepsilon_{\eta/\zeta'} \varepsilon_{\eta/\zeta'} \mathbf{n}_{\gamma\lambda\delta}^* (\mathbf{p}_\delta(\mathbf{n}_{\eta-\zeta'/\gamma})) \mathbf{p}_{\gamma\lambda\delta}^*(\alpha) \otimes i_{\zeta'\backslash\eta}^* \text{Gys}^{\eta/\zeta'}(x) = 0 \\ &\iff \sum_{\mu'} \mathbf{p}_\delta^*(\mathbf{n}_{\gamma\lambda\delta}^*)(\mathbf{n}_{\mu'-\eta/\gamma}) \text{Gys}^{\mu'/\eta} i_{\eta\backslash\mu'}^*(1^\eta) + \sum_{\zeta'} \mathbf{p}_\delta^*(\mathbf{n}_{\gamma\lambda\delta}^*)(\mathbf{n}_{\eta-\zeta'/\gamma}) i_{\zeta'\backslash\eta}^* \text{Gys}^{\eta/\zeta'}(1^\eta) = 0 \\ &\iff \sum_{\mu'} (\mathbf{p}_\delta^\gamma)^*(\mathbf{e}_{\gamma\lambda\delta}^*)(\mathbf{e}_{\mu'-\eta/\gamma}) i_{\gamma\backslash\eta}^*(x_{\mu'-\eta/\gamma}) + \sum_{\zeta'} (\mathbf{p}_\delta^\gamma)^*(\mathbf{e}_{\gamma\lambda\delta}^*)(\mathbf{e}_{\eta-\zeta'/\gamma}) i_{\gamma\backslash\eta}^*(x_{\eta-\zeta'/\gamma}) = 0. \end{aligned}$$

Notice now that rays of the form $\mu'^\gamma - \eta^\gamma$ are exactly the rays of Σ^γ in the link of η^γ , and the rays of the form $\eta^\gamma - \zeta'^\gamma$ are exactly the rays of η^γ . Moreover, if ϱ is a ray which is not in the link of η^γ nor in η^γ , then $i_{\gamma\backslash\eta}^*(x_\varrho) = 0$. Thus, the above sum equals

$$i_{\gamma\backslash\eta}^* \left(\sum_{\substack{\varrho \in \Sigma^\gamma \\ |\varrho|=1}} (\mathbf{p}_\delta^\gamma)^*(\mathbf{e}_{\gamma\lambda\delta}^*)(\mathbf{e}_\varrho) x_\varrho \right),$$

which is clearly zero.

(p) We have to show that $(d^i)^2 [A_D^{a,b,b'}[\gamma, \zeta] \rightarrow A_D^{a+2,b,b'}[\chi, \mu]](\alpha \otimes x) = 0$. This is equivalent to

$$\begin{aligned} &\iff \sum_{\substack{\eta \in \{\eta, \eta'\} \\ \underline{\delta} \in \{\delta, \delta'\} \\ \underline{\delta} < \underline{\eta}}} \varepsilon_{\mu/\underline{\eta}} \mathbf{n}_{\underline{\delta}\backslash\chi}^* (\mathbf{p}_\chi(\mathbf{n}_{\mu-\underline{\eta}/\underline{\delta}})) \varepsilon_{\underline{\eta}/\underline{\zeta}} \mathbf{n}_{\gamma\lambda\delta}^* (\mathbf{p}_{\underline{\delta}}(\mathbf{n}_{\underline{\eta}-\underline{\zeta}/\underline{\gamma}})) \mathbf{p}_{\underline{\delta}\backslash\chi}^* \mathbf{p}_{\gamma\lambda\delta}^*(\alpha) \otimes i_{\underline{\eta}\backslash\mu}^* i_{\underline{\zeta}\backslash\underline{\eta}}^*(x) = 0 \\ &\iff \sum_{\eta, \underline{\delta}} \varepsilon_{\mu/\underline{\eta}} \varepsilon_{\underline{\eta}/\underline{\zeta}} \varepsilon_{\chi/\underline{\delta}} \varepsilon_{\delta/\underline{\gamma}} \nu_{\underline{\delta}\backslash\chi}^* (\mathbf{p}_\chi \bar{\mathbf{p}}_{\underline{\delta}}(\mathbf{n}_{\mu-\underline{\eta}/\underline{\gamma}})) \nu_{\gamma\lambda\delta}^* (\mathbf{p}_\chi \mathbf{p}_{\underline{\delta}}(\mathbf{n}_{\underline{\eta}-\underline{\zeta}/\underline{\gamma}})) = 0 \\ &\iff \sum_{\eta, \underline{\delta}} \varepsilon_{\mu/\underline{\eta}} \varepsilon_{\underline{\eta}/\underline{\zeta}} \varepsilon_{\chi/\underline{\delta}} \varepsilon_{\delta/\underline{\gamma}} \nu_{\gamma\lambda\chi}^* (\bar{\mathbf{p}}_{\underline{\delta}} \mathbf{p}_\chi(\mathbf{n}_{\mu-\underline{\eta}/\underline{\gamma}}) \wedge \mathbf{p}_{\underline{\delta}} \mathbf{p}_\chi(\mathbf{n}_{\underline{\eta}-\underline{\zeta}/\underline{\gamma}})) = 0. \end{aligned}$$

Notice that, if $\delta' \not\prec \eta$, then $\mu - \eta = \delta' - \gamma$ and $\bar{\mathbf{p}}_{\delta'} \mathbf{p}_\chi(\mathbf{n}_{\mu-\eta/\gamma}) = 0$. Using the same argument for δ and η' , this shows that we can now remove the condition $\underline{\delta} < \underline{\eta}$ in the above sum.

Set $u = \mathbf{p}_\chi(\mathbf{n}_{\mu-\eta'/\gamma}) = \mathbf{p}_\chi(\mathbf{n}_{\eta-\zeta/\gamma})$ and $u' = \mathbf{p}_\chi(\mathbf{n}_{\mu-\eta/\gamma}) = \mathbf{p}_\chi(\mathbf{n}_{\eta'-\zeta/\gamma})$. The above sum equals

$$\varepsilon_{\mu/\eta} \varepsilon_{\eta/\zeta} \varepsilon_{\chi/\delta} \varepsilon_{\delta/\gamma} \nu_{\gamma\lambda\chi}^* \left(\bar{\mathbf{p}}_{\delta'}(u') \wedge \mathbf{p}_\delta(u) - \bar{\mathbf{p}}_{\delta'}(u) \wedge \mathbf{p}_\delta(u') - \bar{\mathbf{p}}_{\delta'}(u') \wedge \mathbf{p}_{\delta'}(u) + \bar{\mathbf{p}}_{\delta'}(u) \wedge \mathbf{p}_{\delta'}(u') \right).$$

Then we have

$$\begin{aligned} &\bar{\mathbf{p}}_{\delta'}(u') \wedge \mathbf{p}_\delta(u) - \bar{\mathbf{p}}_{\delta'}(u) \wedge \mathbf{p}_\delta(u') \\ &= (\bar{\mathbf{p}}_{\delta'}(u') + \mathbf{p}_\delta(u')) \wedge (\bar{\mathbf{p}}_{\delta'}(u) + \mathbf{p}_\delta(u)) - \bar{\mathbf{p}}_{\delta'}(u') \wedge \bar{\mathbf{p}}_{\delta'}(u) - \mathbf{p}_\delta(u') \wedge \mathbf{p}_\delta(u) \\ &= u' \wedge u - 0 - \pi_\delta(u') \wedge \pi_\delta(u). \end{aligned}$$

Notice that $\nu_{\gamma\lambda\chi}^*(\mathbf{v}) = 0$ if $\mathbf{v} \in \wedge^2 \text{T}\delta$. Thus, up to a sign, the above sum equals

$$\nu_{\gamma\lambda\chi}^*(u' \wedge u + u \wedge u') = 0.$$

(q) Finally, we have to show that $(d^i d^\pi + d^\pi d^i) [A_D^{a,b,b'}[\gamma, \zeta] \rightarrow A_D^{a+2,b,b'}[\chi, \mu]](\alpha \otimes x) = 0$ with $\text{sed}(\mu) = \text{sed}(\chi) = \text{sed}(\eta') = \text{sed}(\delta') \prec \text{sed}(\eta) = \text{sed}(\delta) = \text{sed}(\zeta) = \text{sed}(\gamma)$. This is equivalent to

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{\mu/\eta'} \mathbf{n}_{\delta'\backslash\chi}^* (\mathbf{p}_\chi(\mathbf{n}_{\mu-\eta'/\delta'})) \varepsilon_{\eta'/\zeta} \mathbf{p}_{\delta'\backslash\chi}^* \pi_{\gamma/\delta'}^{\text{sed}*}(\alpha) \otimes i_{\eta'\backslash\mu}^* \text{id}^{\zeta\backslash\eta'}(x) \\ &\quad + \varepsilon_{\mu/\eta} \varepsilon_{\eta/\zeta} \mathbf{n}_{\gamma\lambda\delta}^* (\mathbf{p}_\delta(\mathbf{n}_{\eta-\zeta/\gamma})) \pi_{\delta\backslash\chi}^{\text{sed}*} \mathbf{p}_{\gamma\lambda\delta}^*(\alpha) \otimes \text{id}^{\eta\backslash\mu} i_{\zeta\backslash\eta}^*(x) = 0, \end{aligned}$$

which is implied by

$$\mathbf{e}_{\delta' \setminus \chi}^{\star}(\mathbf{p}_{\chi}^{\delta'}(\mathbf{e}_{\mu - \eta' / \delta'})) = \mathbf{e}_{\gamma \setminus \delta}^{\star}(\mathbf{p}_{\delta}^{\gamma}(\mathbf{e}_{\eta - \zeta / \gamma})) \text{ and } \pi_{\gamma \setminus \delta'}^{\text{sed}} \mathbf{p}_{\delta' \setminus \chi} = \mathbf{p}_{\gamma \setminus \delta} \pi_{\delta \setminus \chi}^{\text{sed}}.$$

11. Tropical monodromy

In this section, we prove Theorem 6.20 that describes the simplicial tropical monodromy operator and claims that it corresponds to the monodromy operator on Steenbrink. We use the notations and conventions of Section 10. Recall that there is one triple complex $\mathbf{A}^{\bullet, \bullet, \bullet}$ for each even row $\text{ST}_1^{\bullet, 2p}$ of the steenbrink spectral sequence. To distinguish these spectral sequences, we precise the corresponding p as follows: ${}^p\mathbf{A}^{\bullet, \bullet, \bullet}$.

For each face $\delta \in X_f$, let o_{δ} be a point of $T_{\text{aff}}\delta \subseteq N_{\mathbb{R}}$, for instance the centroid of δ . For other faces of δ of sedentarity $\underline{0}$, set $o_{\delta} := o_{\delta_f}$. For any faces δ of any sedentarity σ , set $o_{\delta} = \pi^{\sigma}(o_{\eta})$, where η is the only face of sedentarity $\underline{0}$ such that $\delta = \eta_{\infty}$. If $\gamma \prec \delta$ are two faces with the same sedentarity, we define $v_{\delta \setminus \gamma} := o_{\delta} - o_{\gamma}$.

Let V and W be any vector spaces such that $T\delta \subseteq V$ and k be an integer. We define the morphism $\widetilde{N}_{\gamma \setminus \delta}: \bigwedge^k V^{\star} \otimes W \rightarrow \bigwedge^{k-1} V^{\star} \otimes W$ by

$$\widetilde{N}_{\gamma \setminus \delta} = (\cdot \vee v_{\gamma \setminus \delta}) \otimes \text{id}$$

We define a map between triple complexes $N: {}^p\mathbf{A}^{\bullet, \bullet, \bullet} \rightarrow {}^{p-1}\mathbf{A}^{\bullet, \bullet, \bullet}$ as follows. Assume γ is a face of dimension $a + b$ and η of dimension $a + p - b'$, with $b' \leq p$, and such that $|\eta_{\text{rec}}| \leq a$. Then,

$$N \left[{}^p\mathbf{A}_{\text{trop}}^{a, b}[\gamma] \rightarrow {}^{p-1}\mathbf{A}_{\text{trop}}^{\bullet, \bullet}[\delta] \right] = \widetilde{N}_{\gamma \setminus \delta}(\mathbf{d}_{\text{trop}} + \mathfrak{d}_{\text{trop}}),$$

$$N \left[{}^p\mathbf{A}_{\mathbb{D}}^{a, b, b'}[\gamma, \eta] \rightarrow {}^{p-1}\mathbf{A}_{\mathbb{D}}^{\bullet, \bullet}[\delta, \eta] \right] = \widetilde{N}_{\gamma \setminus \delta}(\mathbf{d}_{\mathbb{D}} + \mathfrak{d}_{\mathbb{D}}),$$

$$N \left[{}^p\mathbf{A}_{\text{ST}}^{a, b'}[\eta] \rightarrow {}^{p-1}\mathbf{A}_{\text{ST}}^{a+1, b'}[\eta] \right] = \begin{cases} \text{id} & \text{if } b' \leq p-1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

PROPOSITION 11.1. *The map N commutes with the differentials of ${}^p\mathbf{A}^{\bullet, \bullet, \bullet}$ and ${}^{p-1}\mathbf{A}^{\bullet, \bullet, \bullet}$.*

PROOF. The fact that $Nd^{\pi} + d^{\pi}N = 0$ is easy to check.

Let us prove that $(Nd - dN)[{}^p\mathbf{A}_{\text{trop}}^{a, b}[\gamma] \rightarrow {}^{p-1}\mathbf{A}_{\text{trop}}^{a+1, b+1}[\chi]] = 0$. The key point is that

$$(d\widetilde{N}_{\gamma \setminus \delta} + \widetilde{N}_{\gamma \setminus \delta}d)[{}^p\mathbf{A}_{\text{trop}}[\eta] \rightarrow *] = 0,$$

which can easily be checked. We simplify the notations by writing $[\gamma \rightarrow \chi]$ instead of $[{}^p\mathbf{A}_{\text{trop}}^{a, b}[\gamma] \rightarrow {}^{p-1}\mathbf{A}_{\text{trop}}^{a+1, b+1}[\chi]]$, or when the corresponding domain and codomain are clear.

Then we get

$$\begin{aligned} (Nd - dN)[\gamma \rightarrow \chi] &= \sum_{\underline{\delta} \in \{\delta, \delta'\}} N[\underline{\delta} \rightarrow \chi]d[\gamma \rightarrow \underline{\delta}] - d[\underline{\delta} \rightarrow \chi]N[\gamma \rightarrow \underline{\delta}] \\ &= \sum_{\underline{\delta} \in \{\delta, \delta'\}} (\widetilde{N}_{\underline{\delta} \setminus \chi} + \widetilde{N}_{\gamma \setminus \underline{\delta}})d[\underline{\delta} \rightarrow \chi]d[\gamma \rightarrow \underline{\delta}]. \end{aligned}$$

From $d^2 = 0$, we deduce that $d[\delta' \rightarrow \chi]d[\gamma \rightarrow \delta'] = -d[\delta \rightarrow \chi]d[\gamma \rightarrow \delta]$. Thus,

$$(Nd - dN)[\gamma \rightarrow \chi] = (\widetilde{N}_{\delta \setminus \chi} + \widetilde{N}_{\gamma \setminus \delta} - \widetilde{N}_{\delta' \setminus \chi} - \widetilde{N}_{\gamma \setminus \delta'})d[\delta \rightarrow \chi]d[\gamma \rightarrow \delta].$$

By definition of \widetilde{N} , to prove this is zero, it suffices to check that

$$v_{\delta \setminus \chi} + v_{\gamma \setminus \delta} - v_{\delta' \setminus \chi} - v_{\gamma \setminus \delta'} = 0.$$

But this vector is by definition

$$(o_\chi - o_\delta) + (o_\delta - o_\gamma) - (o_\chi - o_{\delta'}) - (o_{\delta'} - o_\gamma),$$

which is clearly zero.

One can prove with a similar argument that N and $d + d' + \mathfrak{d}$ commute on the tropical part and also on the D part.

For the Steenbrink part, Proposition 6.2 proves that N commutes with d'_{ST} and d^i_{ST} on X_f . The proposition can easily be extended to all the faces, and the commutativity with d^p_{ST} is also easy to check. Thus, it only remains to see the commutativity with d_{ST} , i.e., with the inclusion $A_{\text{ST}}^{\bullet, \bullet} \hookrightarrow A_D^{\bullet, 0, \bullet}$.

We have

$$\begin{aligned} & (dN - Nd)[{}^p A_{\text{ST}}^{a, b'}[\eta] \rightarrow {}^{p-1} A_D^{a, 0, b'}[\delta, \eta]](x) \\ &= (-1)^{a+1+b'} 1_\delta^* \otimes x - \sum_{\substack{\gamma' < \delta \\ \text{maxsed}(\gamma') = \text{maxsed}(\delta)}} (-1)^{a+b'} \varepsilon_{\delta/\gamma'} v_{\gamma' \setminus \delta} \vee (1_{\gamma'}^* \wedge \nu_{\gamma' \setminus \delta}^*) \otimes x \\ &= (-1 + \sum_{\gamma'} \mathbf{n}_{\gamma' \setminus \delta}^*(v_{\gamma' \setminus \delta})) 1_\delta^* \otimes x. \end{aligned}$$

The terms of the sum are the normalized barycentric coordinates of o_δ in δ_f . Hence, the terms sum up to one. This concludes the proof of the commutativity of N with the differentials. \square

Tropical Clemens-Schmid sequence and existence of tropical cycles with a given cohomology class

Abstract : This is a sequel to our work in tropical Hodge theory. Our aim here is to prove a tropical analogue of the Clemens-Schmid exact sequence in asymptotic Hodge theory. As an application of this result, we prove the tropical Hodge conjecture for smooth projective tropical varieties which are Kähler and rationally triangulable. This in particular applies for those projective tropical varieties which are locally matroidal or more generally, locally shellable.

This provides a partial answer to a question of Kontsevich who suggested the validity of the tropical Hodge conjecture could be used as a test for the validity of the Hodge conjecture.

1. Introduction and statement of the main theorem

1.1. Tropical Hodge conjecture. In this paper we prove the following theorem.

THEOREM 1.1 (Hodge conjecture for rationally triangulable smooth projective Kähler tropical varieties). *Let \mathfrak{X} be a projective tropical variety. Assume that \mathfrak{X} is rationally triangulable and Kähler. The locus of Hodge classes in $H_{\text{trop}}^{p,p}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q})$ associated to codimension p tropical cycles in \mathfrak{X} coincides with the kernel of the tropical monodromy map $N: H_{\text{trop}}^{p,p}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}) \rightarrow H_{\text{trop}}^{p-1,p+1}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q})$.*

The Kähler notion for tropical varieties was introduced in our paper [AP20b], and means that all the star fans of \mathfrak{X} are supports of Kähler tropical fan. We will recall this, the notion of rational triangulability, and the definition of the tropical cohomology groups in Section 2.

In [Zha20], Zharkov explains a suggestion of Kontsevich on how to test the validity of the Hodge conjecture via integral affine manifolds by specialization: if the tropical Hodge conjecture turned out to be false for some tropical limit of abelian varieties, for example, then this would imply that the classical conjecture would be false as well. On the other hand, the validity of the tropical Hodge conjecture for general tropical varieties might be regarded as an evidence for the validity of the Hodge conjecture. Our Theorem 1.1 above goes in the direction of this suggestion. While it does not answer the question of Kontsevich in its original form, which concerns tropical abelian varieties which are in general not rationally triangulable, it goes beyond the case of affine manifolds.

A stronger form of the above theorem in codimension one, the tropical analogue of Lefschetz (1, 1)-theorem, with integral coefficients and without the triangulability assumption, was proved by Jell-Rau-Shaw [JRS18]. The general form of the tropical Hodge conjecture, without the triangulability assumption, is as follows.

CONJECTURE 1.2 (Tropical Hodge conjecture). *Let \mathfrak{X} be a Kähler projective tropical variety. The locus of Hodge classes in $H_{\text{trop}}^{p,p}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q})$ generated by classes of codimension p tropical cycles in \mathfrak{X} coincides with the kernel of the tropical monodromy operator $N: H_{\text{trop}}^{p,p}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}) \rightarrow H_{\text{trop}}^{p-1,p+1}(\mathfrak{X}, \mathbb{R})$.*

In the case where \mathfrak{X} is rationally triangulable, the monodromy operator is rational, and the statement above is the content of Theorem 1.1. In general, N is only defined with real coefficients.

It is well-known that the Hodge conjecture implies the Grothendieck’s standard conjecture of type D, that the numerical and homological equivalence on algebraic cycles coincide, for varieties over a field of characteristic zero. We prove the tropical analogue of this standard conjecture.

THEOREM 1.3. *Let \mathfrak{X} be a Kähler projective tropical variety which is rationally triangulable. The numerical and homological equivalences on tropical cycles coincide.*

This answers a question of Gross and Shokrieh [GS19c] for rationally triangulable smooth projective tropical varieties.

1.2. Tropical Clemens-Schmid. In order to prove the above results, we prove a tropical analogue of the Clemens-Schmid exact sequence in asymptotic Hodge theory [Cle77, Sch73] and its extension to algebraic cycles by Bloch-Gillet-Soulé [BGS95a]. This will be based on results we proved in our paper [AP20b], which we will recall in Sections 2 and 5.

We start by recalling the classical Clemens-Schmid sequence. Let \mathcal{X}^* be a projective family of smooth complex varieties over the punctured disk Δ^* . Passing to a finite étale cover of the punctured disk if necessary, we can complete \mathcal{X}^* to a regular semistable family \mathcal{X} over the disk Δ . This gives a special fiber \mathcal{X}_0 over 0, whose addition as relative boundary results in a relative compactification \mathcal{X} of \mathcal{X}^* over the disk Δ .

Let $\widetilde{\Delta}^* \rightarrow \Delta^*$ be the universal cover of the punctured disk Δ^* and denote by $\widetilde{\mathcal{X}}^*$ the family of complex varieties over $\widetilde{\Delta}^*$ obtained by pulling back \mathcal{X}^* over $\widetilde{\Delta}^*$.

There is a monodromy operator $T: \widetilde{\mathcal{X}}^* \rightarrow \widetilde{\mathcal{X}}^*$ associated to the generator of the fundamental group of the punctured disk Δ^* , which induces an automorphism on each fiber of the original family. The induced operator T on the cohomology of $\widetilde{\mathcal{X}}^*$ is unipotent and leads to the (logarithmic) monodromy operator $N := -\log(T): H^\bullet(\widetilde{\mathcal{X}}^*) \rightarrow H^\bullet(\widetilde{\mathcal{X}}^*)$. The operator N is nilpotent and the corresponding Jacobson-Morosov filtration together with an appropriate Hodge filtration endows the cohomology $H^\bullet(\widetilde{\mathcal{X}}^*)$ of $\widetilde{\mathcal{X}}^*$ with a mixed Hodge structure called the *limit mixed Hodge structure* of the family [Sch73]. This limit mixed Hodge structure can be computed algebraically thanks to the Steenbrink spectral sequence [Ste76].

Since the family \mathcal{X} retracts by deformation to \mathcal{X}_0 , we get an isomorphism of the cohomology $H^\bullet(\mathcal{X})$ with that of \mathcal{X}_0 . For this reason, these cohomology groups might be named the *surviving cohomology* of the family. Each surviving cohomology group comes with a mixed Hodge structure which can be defined using the Deligne spectral sequence [Del71a].

The inclusion $\mathcal{X}^* \hookrightarrow \mathcal{X}$ leads to the definition of the cohomology groups $H^\bullet(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$, which can be named the *relative cohomology* of the family. Again, Deligne’s theory endows these cohomology groups with mixed Hodge structures.

The Clemens-Schmid exact sequence [Cle77] is an exact sequence which establishes a link between the above mixed Hodge structures, on various degrees. This is the following long exact sequence of mixed Hodge structures

$$\dots \rightarrow H^k(\mathcal{X}) \rightarrow H^k(\widetilde{\mathcal{X}}^*) \xrightarrow{N} H^k(\widetilde{\mathcal{X}}^*) \rightarrow H^{k+2}(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*) \rightarrow H^{k+2}(\mathcal{X}) \rightarrow \dots,$$

where the morphisms in the sequence are of specific degrees that we do not precise here.

We also have two distinguished triangles in the derived category:

$$\begin{array}{ccc} H^\bullet(\widetilde{\mathcal{X}}^*) & \xrightarrow{N} & H^\bullet(\widetilde{\mathcal{X}}^*) \\ & \swarrow & \searrow \\ & H^\bullet(\mathcal{X}^*) & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H^\bullet(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\quad} & H^\bullet(\mathcal{X}^*) \\ & \swarrow & \searrow \\ & H^\bullet(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*) & \end{array}$$

+1

In this paper, we define the tropical analogue of the *surviving* and *relative* cohomology groups for a smooth projective tropical variety \mathfrak{X} . Assume that \mathfrak{X} is Kähler.

The definition of these cohomology groups is dependent on the choice of a unimodular triangulation X on \mathfrak{X} (which exists after changing the underlying lattice by a rational multiple, by the rational triangulability assumption). For each pair of non-negative integers p, q , we will define the bigraded surviving and relative cohomology groups $H_s^{p,q}(X, \mathbb{Q})$ and $H_{\text{rel}}^{p,q}(X, \mathbb{Q})$, respectively, and set for any non-negative integer k ,

$$H_s^k(X) := \bigoplus_{p+q=k} H_s^{p,q}(X, \mathbb{Q}) \quad \text{and} \quad H_{\text{rel}}^k(X) := \bigoplus_{p+q=k} H_{\text{rel}}^{p,q}(X, \mathbb{Q}).$$

These cohomology groups come with canonical maps $H_s^k(X) \rightarrow H^k(X)$ and $H_{\text{rel}}^k(X) \rightarrow H_s^k(X)$. Here, we set

$$H^k(\mathfrak{X}) := \bigoplus_{p+q=k} H_{\text{trop}}^{p,q}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q})$$

and note that it does not depend on the choice of the triangulation.

The above cohomology groups fit together and give the following long exact sequence.

THEOREM 1.4 (Tropical Clemens-Schmid exact sequence). *We have the following exact sequence*

$$\dots \rightarrow H_s^k(X) \rightarrow H^k(\mathfrak{X}) \xrightarrow{N} H^k(\mathfrak{X}) \rightarrow H_{\text{rel}}^{k+2}(X) \rightarrow H_s^{k+2}(X) \rightarrow H^{k+2}(\mathfrak{X}) \xrightarrow{N} H^{k+2}(\mathfrak{X}) \rightarrow \dots$$

where the morphism $N: H^k(\mathfrak{X}) \rightarrow H^k(\mathfrak{X})$ is given by the sum of the tropical monodromy maps $N: H_{\text{trop}}^{p,q}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}) \rightarrow H_{\text{trop}}^{p-1,q+1}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q})$.

1.3. Explicit description of the tropical cycle associated to a Hodge class. Let \mathfrak{X} be a Kähler projective tropical variety. Suppose that \mathfrak{X} is rationally triangulable. Let α be a tropical Hodge class, that is $\alpha \in H^{p,p}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}) \cap \ker(N)$, for some non-negative integer p . We fix a unimodular triangulation X of \mathfrak{X} (which again exists after changing the underlying lattice by a rational multiple). Using the Clemens-Schmid exact sequence, we construct an explicit tropical cycle C with cohomology class equal to α . The tropical cycle C is defined by a *Minkowski weight* on the p -dimensional cells of the triangulation X , which is itself obtained by gluing local Minkowski weights around vertices of the triangulation. The existence of local Minkowski weights is a consequence of the tropical Clemens-Schmid exact sequence. The fact that the image of C by the tropical cycle class map coincides with α is a consequence of our proof of the Steenbrink-Tropical comparison theorem [AP20b].

1.4. Organization of the paper. In Section 2, we recall basis results and definitions concerning tropical varieties. In Section 3, we define Minkowski weights in the local and global setting. In Section 4, we discuss the tropical Hodge conjecture in the local setting. Section 5 recalls some results concerning the tropical Steenbrink sequence and the comparison theorem from [AP20b] by making them more explicit for some specific primitive parts which will be of later use in the study of the tropical cycle class map. In Section 6 we introduce the tropical surviving and relative cohomology groups, relative to a triangulation of the tropical variety. In Section 7, we define the tropical Clemens-Schmid sequence and prove Theorem 1.4. Section 8 contains the proof of Theorem 1.1. Finally, Theorem 1.3 is proved in Section 9.

2. Preliminaries on tropical varieties

The aim of this section is to provide a brief account of tropical geometry and the necessary background on the terminology used in the statement of our main theorems. We refer to [AP20b] for more details.

2.1. Polyhedral complexes and star fans. We start by fixing the polyhedral geometry terminology and introducing (extended) polyhedral complexes.

A polyhedron P in a real vector space $V \simeq \mathbb{R}^n$ is by definition a non-empty intersection of a finite number of affine half-spaces. We consider only polyhedra which are strongly convex in the sense that they do not contain any affine line. The tangent space of P that we denote by $T(P)$ or by TP is the linear subspace of V spanned by the differences $x - y$ for pairs of elements x, y of P . We denote by $|P|$ the dimension of P . A face of a polyhedron P is either P itself or a non-empty intersection of P with an affine hyperplane H provided that P lies in one of the two half-spaces delimited by H . For two polyhedra γ and δ , we write $\gamma < \delta$ to indicate that γ is a face of δ . We use the notation $\gamma \prec \delta$ if moreover γ is of codimension one in δ . The partial order $<$ puts a lattice structure on the set of faces of a polyhedron. A face of dimension zero in P is called a vertex and a face of dimension one is called an edge.

By a cone we mean a strongly convex polyhedron with a unique vertex which is the origin of \mathbb{R}^n . A polytope is a compact polyhedron.

Assume now that the real vector space $V \simeq \mathbb{R}^n$ comes with a lattice $N \simeq \mathbb{Z}^n$ of full rank, so that $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = V$. In such a case, we say a polyhedron P in V is rational if all the half-spaces which are used to define P can be defined in $N_{\mathbb{Q}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}^n$. For a rational polyhedron P , we denote by $N_P := N \cap T(P)$ the full-rank lattice of the tangent space $T(P)$.

We say P is integral with respect to N if it is rational and its vertices are all in N . If the lattice N is understood from the context, we omit to mention it.

A polyhedral complex Y in a real vector space V is a finite non-empty collection of polyhedra in V called faces of Y such that for any pair of faces δ, δ' in Y , the following two properties hold.

- (i) Any face of δ is contained in Y .
- (ii) The intersection $\delta \cap \delta'$ is either empty or is a face of both δ and δ' .

A fan is a polyhedral complex Σ which has a unique vertex the origin of V . In this case, all the faces of Σ are cones. A cone of dimension one is called a ray.

For a polyhedral complex Y and for a non-negative integer k , we denote by $Y_{\leq k}$ the k -skeleton of Y which consists of all the faces of Y of dimension at most k and by Y_k the set of k -dimensional faces of Y . The dimension d of Y is the maximum of the dimension of its faces. The elements of Y_d are called facets. We say that Y is of pure dimension d if every face of Y is included in some facet of Y .

The support of a polyhedral complex Y denoted by $|Y|$ is the union of all the faces of Y in V .

A polyhedral complex Y is called rational, integral, unimodular with respect to the lattice N if all faces of Y are rational, integral, or unimodular with respect to N , respectively. We already defined the terminology rational and integral, we recall what unimodular means here.

First, recall that for two polyhedra A and B in V , the Minkowski sum $A+B$ is by definition the polyhedron

$$A + B := \{x + y \mid x \in A, y \in B\}.$$

Every polyhedron P can be written as the Minkowski sum $Q + \sigma$ of a polytope Q and a cone σ by Minkowski-Weyl theorem. The cone σ in the above decomposition is in addition unique and we will denote it by P_{rec} ; for Q we can choose the convex-hull of the vertices of P . In particular, this implies that we can write

$$P = \text{conv}(v_0, \dots, v_k) + \sum_{i=1}^l \mathbb{R}_+ u_i$$

for points v_0, \dots, v_k and vectors u_1, \dots, u_l in V , where \mathbb{R}_+ denotes the space of non-negative real numbers. A polyhedron P is called unimodular if it is integral with respect to N and moreover, the points v_i and the vectors u_j can be chosen in N in such a way that the collection of

vectors $(v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0, u_1, \dots, u_l)$ form a basis of the lattice $N_P = N \cap T(P)$. In this case, the points v_0, \dots, v_k coincide with the vertices of P so that defining $P_f := \text{conv}(v_0, \dots, v_k)$, we get the decomposition $P = P_f + P_{\text{rec}}$. In this decomposition, any point x can be written in a unique way as the sum of two points $x_f \in P_f$ and $x_{\text{rec}} \in P_{\text{rec}}$. If we relax the above condition and only ask the collection of vectors $(v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0, u_1, \dots, u_l)$ to be independent we say the polyhedron P is simplicial.

For a free \mathbb{Z} -module N of finite rank, we denote by $M = N^\vee$ its dual. The real vectors spaces corresponding to N and M are denoted by $N_{\mathbb{R}}$ and $M_{\mathbb{R}}$, respectively, and we have $M_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}}^*$. Note that we use the following convention in this paper: every time we work with a vector space, we use $*$ for the dual vector space, and if we deal with a free \mathbb{Z} -module or a cone, we use instead $^\vee$ for the dual \mathbb{Z} -module and cone, respectively. Recall that for a rational polyhedron δ in $N_{\mathbb{R}}$, we use the notation N_δ to denote the lattice $N \cap T\delta$. We thus get the equality $N_{\delta, \mathbb{R}} = T\delta$. Furthermore, we define the normal vector space of δ which we denote $N_{\mathbb{R}}^\delta$ by taking the quotient $N_{\mathbb{R}}^\delta := N_{\mathbb{R}}/N_{\delta, \mathbb{R}}$. It comes with a full rank lattice $N^\delta = N/N_\delta$.

Let X be a rational polyhedral complex in $N_{\mathbb{R}}$. For any face δ of X , one can choose a basis of N_δ . The exterior product of the elements of this basis gives a generator of $\bigwedge^{|\delta|} N_\delta$. This element is well-defined (that is independent of the choice of the basis) up to a sign. The choice of such an element for each face defines an orientation on X . In this article, we assume that every polyhedral complex is endowed with a fixed orientation. We denote by \mathbf{n}_δ the generator of $\bigwedge^{|\delta|} N_\delta$ corresponding to this orientation and we call it the canonical unit multivector associated to δ . Moreover, we denote by \mathbf{n}_δ^* its dual that we call the canonical $|\delta|$ -form associated to δ . Note that \mathbf{n}_δ^* lives in the dual space $\bigwedge^{|\delta|} N_\delta^\vee$.

Let $\gamma \triangleleft \delta$ be a pair of faces with γ of codimension one in δ . There is a unique generator $u_{\delta/\gamma}$ of $N_\delta/N_\gamma \simeq \mathbb{Z}$ that lives in the part corresponding to δ . We denote by $\nu_{\delta/\gamma}^*$ the linear form on $T\delta$ induced by the one on $T\delta/T\gamma \simeq \mathbb{R}$ which takes value one at $u_{\delta/\gamma}$. The chosen orientation on X induces a sign function on pair of faces $\gamma \triangleleft \delta$ defined by the equation

$$\mathbf{n}_\delta^* = \text{sign}(\gamma, \delta) \mathbf{n}_\gamma^* \wedge \nu_{\delta/\gamma}^*$$

where $\text{sign}(\gamma, \delta) \in \{-1, +1\}$.

We will follow the terminology introduced in our paper [AP20b]: we will use a face δ as a subscript for subspaces of the ambient space or lattice or elements associated to these subspaces. And we use a face δ as a superscript to denote the quotient by N_δ or $N_{\delta, \mathbb{R}}$ of the ambient lattice or space, or to denote elements related to this quotient.

For a fan Σ and a cone $\tau \in \Sigma$, the star fan of τ denoted by Σ^τ is defined by

$$\Sigma^\tau := \left\{ \pi_\tau(\sigma) \mid \sigma \succ \tau \text{ is a cone in } \Sigma \right\}.$$

Here $\pi_\tau: N_{\mathbb{R}} \rightarrow N_{\mathbb{R}}^\tau$ is the projection map to the quotient. Our star fans are sometimes called transversal fans in other places, e.g., in [Kar04, BBFK02]. Our use is consistent with [AP20b, AHK18].

The above definition naturally extends to any polyhedral complex Y and, for a face δ of Y , we denote by Σ^δ the corresponding star fan.

We now recall what we mean by subdivisions and triangulations. We say that a polyhedral complex Y is a subdivision of another polyhedral complex Z if Z and Y share the same support, and in addition, each face of Y is included in a face of Z . A subdivision Y of Z which is in addition simplicial is called a triangulation of Z .

2.2. Canonical compactifications: local case. We denote by $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ the extended real line with the topology extending that of \mathbb{R} by a basis of open neighborhoods of ∞ given by intervals $(a, \infty]$ for any real number a . The addition of \mathbb{R} naturally extends to \mathbb{T} and gives a monoid $(\mathbb{T}, +)$ that we call the monoid of tropical numbers. We denote by

$\mathbb{T}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ the submonoid of non-negative tropical numbers with the induced topology. Both monoids are modules over the semiring \mathbb{R}_+ .

For any cone σ in $N_{\mathbb{R}}$, we denote by $\sigma^\vee \subseteq M_{\mathbb{R}}$ and $\sigma^\perp \subseteq M_{\mathbb{R}}$ the dual cone and the orthogonal plane to σ , respectively, defined by

$$\begin{aligned} \sigma^\vee &:= \left\{ m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, a \rangle \geq 0 \text{ for all } a \in \sigma \right\}, \text{ and} \\ \sigma^\perp &:= \left\{ m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, a \rangle = 0 \text{ for all } a \in \sigma \right\}. \end{aligned}$$

The canonical compactification $\bar{\sigma}$ of the cone σ , also called the extended cone associated to σ , is defined by the tensor product

$$\bar{\sigma} := \sigma \otimes_{\mathbb{R}_+} \mathbb{T}_+,$$

endowed with the topology which is the finest one making all the endomorphisms

$$z \mapsto z + z', \quad a \mapsto x \otimes a, \quad \text{and} \quad x \mapsto x \otimes a$$

continuous for any $z, z' \in \bar{\sigma}$, $a \in \mathbb{T}_+$ and $x \in \sigma$. This topology turns the extended cone $\bar{\sigma}$ into a compact topological space. Moreover, its restriction to σ coincides with the usual topology of σ .

We note that $\bar{\sigma}$ can be equivalently defined as follows. Denote by \mathcal{M} the category of \mathbb{R}_+ -modules. Then, we have, as a set,

$$\bar{\sigma} = \text{Hom}_{\mathcal{M}}(\sigma^\vee, \mathbb{T}_+).$$

The extended cone $\bar{\sigma}$ has a distinguished point that we denote by ∞_σ . It is defined as $\infty_\sigma := x \otimes \infty$ for any x in the relative interior of σ . This definition does not depend on the choice of x . Alternatively, ∞_σ is the point of $\text{Hom}_{\mathcal{M}}(\sigma^\vee, \mathbb{T}_+)$ which takes value zero at any element of σ^\perp and sends all the elements of $\sigma^\vee \setminus \sigma^\perp$ to ∞ . Note in particular that we have $\infty_{\underline{0}} = 0$ where $\underline{0}$ denotes the cone $\{0\}$.

The definition of the canonical compactification is compatible with the inclusion of faces. For a face $\tau < \sigma$, we naturally get a map $\bar{\tau} \subseteq \bar{\sigma}$, which identifies $\bar{\tau}$ with the topological closure of τ in $\bar{\sigma}$.

Let now Σ be a rational fan in $N_{\mathbb{R}}$. We define the canonical compactification of Σ denoted by $\bar{\Sigma}$ as the union of $\bar{\sigma}$ for any cone σ in Σ , where the compactification $\bar{\tau}$ of τ is identified with the corresponding subspace of the extended cone $\bar{\sigma}$ for any $\tau < \sigma$ in Σ . We endow $\bar{\Sigma}$ with the induced quotient topology. In this way, each extended cone $\bar{\sigma}$ naturally embeds as a subspace of $\bar{\Sigma}$.

A rational fan Σ gives naturally rise to a partial compactification of $N_{\mathbb{R}}$ that we denote by \mathbb{TP}_Σ . This partial compactification coincides with the tropicalization of the toric variety \mathbb{P}_Σ associated to Σ . For this reason it is sometimes called the tropical toric variety defined by Σ . The canonical compactification $\bar{\Sigma}$ naturally lives in \mathbb{TP}_Σ : in fact, it coincides with the closure of Σ in \mathbb{TP}_Σ .

The tropical toric variety \mathbb{TP}_Σ is defined as follows. We refer to [AP21, BGJK20, Kaj08, OR11, Pay09, Thu07] for more details.

For any cone σ in Σ , we set

$$\tilde{\sigma} := \text{Hom}_{\mathcal{M}}(\sigma^\vee, \mathbb{T})$$

endowed with a natural topology that we do not precise here. Clearly, we have a natural inclusion of $\bar{\sigma}$ into $\tilde{\sigma}$. We set $N_{\infty, \mathbb{R}}^\sigma := \infty_\sigma + N_{\mathbb{R}} \subseteq \tilde{\sigma}$. This is the set of all elements of $\text{Hom}_{\mathcal{M}}(\sigma^\vee, \mathbb{T})$ which take value ∞ at any point of $\sigma^\vee \setminus \sigma^\perp$ (and finite values on σ^\perp). Clearly $N_{\infty, \mathbb{R}}^0 = N_{\mathbb{R}}$. Moreover, the natural map

$$N_{\mathbb{R}} \rightarrow N_{\infty, \mathbb{R}}^\sigma, \quad z \mapsto z + \infty_\sigma$$

identifies $N_{\infty, \mathbb{R}}^\sigma \simeq N_{\mathbb{R}}^\sigma$. The space $\tilde{\sigma}$ admits a natural stratification into a disjoint union of subspaces $N_{\infty, \mathbb{R}}^\tau \simeq N_{\mathbb{R}}^\tau$, for τ a face of σ .

For a pair of cones $\tau < \sigma$ in Σ , we get an open inclusion $\tilde{\tau} \subseteq \tilde{\sigma}$. This allows to define \mathbb{TP}_Σ as the gluing of $\tilde{\sigma}$, for $\sigma \in \Sigma$, along these inclusions. From the description above, we get a stratification of \mathbb{TP}_Σ into the disjoint union of $N_{\infty, \mathbb{R}}^\sigma \simeq N_{\mathbb{R}}^\sigma$ for $\sigma \in \Sigma$.

For a point $x \in \mathbb{TP}_\sigma$ which lies in the stratum $N_{\infty, \mathbb{R}}^\tau$ for $\tau < \sigma$, the sedentarity of x is by definition $\text{sed}(x) := \tau$. In particular, if σ is the positive quadrant in \mathbb{R}^n , the compactification \mathbb{TP}_σ can be identified with \mathbb{T}^n and the faces of σ with the subsets $[n]$ such that under these identifications, the sedentarity of a point becomes the subset of $[n]$ corresponding to those coordinates which are equal to ∞ . This is consistent with the notation in [JSS19].

The canonical compactification of a fan Σ admits a similar natural stratification into cones and fans that we describe now.

For a cone $\sigma \in \Sigma$ and a face $\tau < \sigma$ of σ , define $C_\sigma^\tau := \infty_\tau + \sigma \subseteq \bar{\sigma}$. This coincides with the set of all elements of $\text{Hom}_{\mathcal{M}}(\sigma^\vee, \mathbb{T})$ which take value ∞ on $\tau^\vee \setminus \tau^\perp$, and finite values elsewhere. The cone C_σ^τ is isomorphic to the projection of σ in $N_{\sigma, \mathbb{R}}/N_{\tau, \mathbb{R}} \hookrightarrow N_{\infty, \mathbb{R}}^\tau$. We denote by \mathring{C}_σ^τ the relative interior of C_σ^τ .

For $\tau \in \Sigma$, the collection of cones C_σ^τ for $\sigma \in \Sigma$ with $\sigma > \tau$ form a fan in $N_{\infty, \mathbb{R}}^\tau$, with origin ∞_τ , that we denote by $\Sigma_\infty^\tau \subseteq N_{\infty, \mathbb{R}}^\tau$. We note that the fan Σ_∞^τ is canonically isomorphic to the star fan Σ^τ . For the cone $\underline{0}$ of Σ , we have $\Sigma_\infty^{\underline{0}} = \Sigma$.

For any pair $\tau < \sigma$ in Σ , the closure \bar{C}_σ^τ of the cone C_σ^τ in $\bar{\Sigma}$ is the union of $\mathring{C}_{\sigma'}^{\tau'}$ with $\tau < \tau' < \sigma' < \sigma$. Moreover, the closure of Σ_∞^τ becomes canonically isomorphic to the canonical compactification of the fan $\Sigma^\tau \subseteq N_{\mathbb{R}}^\tau$.

2.3. Extended polyhedral structures. Tropical compactifications of fans form examples of extended polyhedral complexes, which provide an enrichment of the category of polyhedral complexes and polyhedral spaces. We give a brief description and refer to [JSS19, MZ14, IKMZ19, AP20a] for more details. We restrict to the rational case since these are the only spaces we consider in this paper.

Let σ be a rational cone in $N_{\mathbb{R}}$. An extended polyhedron δ in \mathbb{TP}_σ is the topological closure in \mathbb{TP}_σ of any polyhedron included in a strata $N_{\infty, \mathbb{R}}^\tau$ for some $\tau < \sigma$. The topological closure of a face of $\delta \cap N_{\infty, \mathbb{R}}^\zeta$ for some face ζ of σ is called a face of δ . By an extended polyhedral complex in \mathbb{TP}_σ we mean a finite collection X of extended polyhedra in \mathbb{TP}_σ verifying the two following properties:

- Any face γ of an element $\delta \in X$ belongs to X .
- The intersection of a pair of elements δ and δ' of X is either empty or a common face of δ and δ' .

The support of X denoted by $|X|$ is the union of $\delta \in X$. The space $\mathfrak{X} = |X|$ is called an extended polyhedral subspace of \mathbb{TP}_σ , and X an extended polyhedral structure on \mathfrak{X} .

More general extended polyhedral spaces are then defined by using extended polyhedral subspaces of partial compactifications of vector spaces of the form \mathbb{TP}_σ as local charts.

An integral extended polyhedral space \mathfrak{X} is by definition a Hausdorff topological space endowed with a finite atlas of charts $(\phi_i: W_i \rightarrow U_i \subseteq \mathfrak{X}_i)_{i \in I}$, I a finite set, with the following properties:

- The collection $\{W_i \mid i \in I\}$ gives an open covering of \mathfrak{X} .
- Each \mathfrak{X}_i , $i \in I$, is an extended polyhedral subspace of \mathbb{TP}_{σ_i} for a finite dimensional real vector space $N_{i, \mathbb{R}}$ with N_i a free \mathbb{Z} -module of finite rank and σ_i a rational cone in $N_{i, \mathbb{R}}$. Moreover, U_i is an open subset of \mathfrak{X}_i .

- The map ϕ_i is a homeomorphism between W_i and U_i . Moreover, for any pair of indices $i, j \in I$, the transition map

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}: \phi_i(W_i \cap W_j) \rightarrow \mathbb{TP}_{\sigma_j}$$

is an extended integral affine map (with respect to lattices N_i and N_j).

Recall that for two finite rank lattices N_1 and N_2 , and rational cones σ_1 and σ_2 in $N_{1,\mathbb{R}}$ and $N_{2,\mathbb{R}}$, respectively, an extended integral affine map from an open subset $U \subseteq \mathbb{TP}_{\sigma_1}$ to \mathbb{TP}_{σ_2} is a map which can be obtained as an extension of an integral affine map $\psi: N_{1,\mathbb{R}} \rightarrow N_{2,\mathbb{R}}$. By this we mean the following. Denote by A the linear part of ψ which is thus a \mathbb{Z} -linear map from N_1 to N_2 . Consider the set J consisting of all the rays ρ of σ_1 with the property that $A\rho$ lives inside σ_2 . Denote by τ_J the face of σ_1 generated by these rays. The affine map ψ naturally extends to a map $\bar{\psi}: \bigcup_{\zeta < \tau_J} (N_1)_{\infty,\mathbb{R}}^{\zeta} \rightarrow \mathbb{TP}_{\sigma_2}$. We call this the extended affine map.

The requirement in the above definition is that there exists an extended integral affine map $\bar{\psi}$ from an open subset of \mathbb{TP}_{σ_i} to \mathbb{TP}_{σ_j} such that $\phi_i(W_i \cap W_j) \subseteq \bigcup_{\zeta < \tau_J} (N_1)_{\infty,\mathbb{R}}^{\zeta}$ for the corresponding face τ_J of σ_i , and the transition map $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ is the restriction of $\bar{\psi}$ to $\phi_i(W_i \cap W_j)$.

A face structure on an extended polyhedral space \mathfrak{X} endowed with the corresponding atlas of charts, as above, is the choice, for each i , of an extended polyhedral complex structure X_i with $|X_i| = \mathfrak{X}_i$, and a finite collection $\theta_1, \dots, \theta_N$ of closed set called facets for some integer $N \in \mathbb{N}$ such that the following properties hold:

- The facets cover \mathfrak{X} .
- Each θ_k is entirely contained in some chart W_i for $i \in I$ so that the image $\phi_i(\theta_k)$ is the intersection of a face $\eta_{k,i}$ of X_i with the open set U_i .
- For a subset $J \subseteq [N]$ containing k , and for any chart W_i containing θ_k , the image of the intersection $\bigcap_{j \in J} \theta_j$ by ϕ_i in U_i coincides with the intersection of a face of $\eta_{k,i}$ with U_i .

A face in this face structure is the preimage by ϕ_i of a face of $\eta_{j,i}$ for a $j \in [N]$ and for an $i \in I$ with $\theta_j \subseteq W_i$. Note that each face is contained in a chart W_i . We define the sedentarity of a face δ in a given chart W_i as the sedentarity of any point in the relative interior of $\phi_i(\delta)$, viewed in X_i .

2.4. Canonical compactifications: global case. Consider a polyhedral complex Y in a real vector space $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$. The recession pseudo-fan of Y that we denote by Y_{rec} is the set of cones $\{\delta_{\text{rec}} \mid \delta \in Y\}$. In the case where this collection forms a fan, we call Y_{rec} the recession fan of Y . Any polyhedral complex Y admits a subdivision whose recession pseudo-fan is a fan [AP20b, OR11].

Let now Y be a polyhedral complex in $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ with recession fan Y_{rec} . The canonical compactification of Y denoted by \bar{Y} is defined as the closure of Y in the tropical toric variety $\mathbb{TP}_{Y_{\text{rec}}}$. It has a natural stratification given by cones $\sigma \in Y_{\text{rec}}$. Consider a stratum $N_{\infty,\mathbb{R}}^{\sigma}$ of \mathbb{TP}_{σ} and define Y_{∞}^{σ} as the intersection of \bar{Y} with $N_{\infty,\mathbb{R}}^{\sigma}$. We drop ∞ if there is no risk of confusion and simply write Y^{σ} . We call $Y^0 = Y$ the open part of the compactification \bar{Y} . The boundary at infinity D is defined as $D = \bar{Y} \setminus Y$. For each non-zero cone σ in Y_{rec} , let D^{σ} be the closure of Y_{∞}^{σ} in \bar{Y} .

THEOREM 2.1 (Tropical orbit-stratum correspondence). *Notations as above, for each cone $\sigma \in Y_{\text{rec}}$, we have the following.*

- (1) *The stratum Y_{∞}^{σ} is a polyhedral complex in $N_{\infty,\mathbb{R}}^{\sigma}$.*
- (2) *The recession pseudo-fan $(Y_{\infty}^{\sigma})_{\text{rec}}$ of Y_{∞}^{σ} is a fan. Moreover, it coincides with the fan $(Y_{\text{rec}})_{\infty}^{\sigma}$ in $N_{\infty,\mathbb{R}}^{\sigma}$.*

- (3) D^σ coincides with the canonical compactification of Y_∞^σ in $N_{\infty, \mathbb{R}}^\sigma$, i.e., $D^\sigma = \overline{Y_\infty^\sigma}$.
- (4) If Y has pure dimension d , then Y_∞^σ and D^σ are of pure dimension $d - |\sigma|$.

It follows from the above properties that \overline{Y} is an extended polyhedral structure with a face structure induced from that of Y .

2.5. Tropical homology and cohomology. Tropical homology and cohomology groups were introduced by Itenberg-Katzarkov-Mikhalkin-Zharkov [IKMZ19] and further studied in [JSS19, MZ14, JRS18, GS19b, AP20b]. We briefly recall the definition of these groups.

Consider an extended polyhedral space X with a face structure. We define the multi-tangent and multi-cotangent coefficient groups $\mathbf{F}_p(\delta)$ and $\mathbf{F}^p(\delta)$ associated to each face δ of X . All together, they lead to the definition of chain and cochain complexes which define the tropical homology and cohomology groups of X .

Let δ be a face of X and p be a non-negative integer. The p -th multi-tangent and the p -th multi-cotangent spaces $\mathbf{F}_p(\delta)$ and $\mathbf{F}^p(\delta)$ of X at δ are defined by

$$\mathbf{F}_p(\delta) = \sum_{\substack{\eta > \delta \\ \text{sed}(\eta) = \text{sed}(\delta)}} \wedge^p \mathbf{T}\eta, \quad \text{and} \quad \mathbf{F}^p(\delta) = \mathbf{F}_p(\delta)^*,$$

where as before $\mathbf{F}_p(\delta)^*$ means the dual of $\mathbf{F}_p(\delta)$. An inclusion of faces $\gamma < \delta$ of X gives natural maps $i_{\delta > \gamma}: \mathbf{F}_p(\delta) \rightarrow \mathbf{F}_p(\gamma)$ and $i_{\gamma < \delta}^*: \mathbf{F}^p(\gamma) \rightarrow \mathbf{F}^p(\delta)$.

For a non-negative integer p , the cellular chain complex

$$C_{p, \bullet}: \quad \dots \longrightarrow C_{p, q+1}(X) \xrightarrow{\partial_{q+1}^{\text{trop}}} C_{p, q}(X) \xrightarrow{\partial_q^{\text{trop}}} C_{p, q-1}(X) \longrightarrow \dots$$

is defined by setting

$$C_{p, q}(X) := \bigoplus_{\substack{\delta \in X \\ |\delta| = q}} \mathbf{F}_p(\delta),$$

for any non-negative integer q , and by using maps $i_{\delta > \gamma}$ with signs as in cellular homology theory. The tropical homology of X is defined by taking the homology of the tropical chain complex, that is,

$$H_{p, q}^{\text{trop}}(X) := H_q(C_{p, \bullet}).$$

Similarly, we can define the cochain complex

$$C^{p, \bullet}: \quad \dots \longrightarrow C^{p, q-1}(X) \xrightarrow{\partial_{\text{trop}}^{q-1}} C^{p, q}(X) \xrightarrow{\partial_{\text{trop}}^q} C^{p, q+1}(X) \longrightarrow \dots$$

with

$$C^{p, q}(X) := C_{p, q}(X)^* \simeq \bigoplus_{\substack{\delta \in X \\ |\delta| = q}} \mathbf{F}^p(\delta),$$

and define the tropical cohomology of X by

$$H_{\text{trop}}^{p, q}(X) := H^q(C^{p, \bullet}).$$

If the polyhedral structure X is rational, tropical homology and cohomology groups can be defined with integer or rational coefficients. In fact, for each face δ , we have $\mathbf{T}\delta = N_{\delta, \mathbb{R}}$ for the lattice N_δ associated to δ , and one can define

$$\mathbf{F}_p(\delta, \mathbb{Z}) = \sum_{\substack{\eta > \delta \\ \text{sed}(\eta) = \text{sed}(\delta)}} \wedge^p N_\eta, \quad \text{and} \quad \mathbf{F}^p(\delta, \mathbb{Z}) = \mathbf{F}_p(\delta, \mathbb{Z})^\vee$$

and define the corresponding complexes $C_{p, \bullet}^{\mathbb{Z}}$ and $C^{p, \bullet}_{\mathbb{Z}}$ with \mathbb{Z} -coefficients. This gives

$$H_{p, q}^{\text{trop}}(X, \mathbb{Z}) := H_q(C_{p, \bullet}^{\mathbb{Z}}) \quad H_{\text{trop}}^{p, q}(X, \mathbb{Z}) := H^q(C_{\mathbb{Z}}^{p, \bullet}).$$

Similarly, we get $H_{p, q}^{\text{trop}}(X, \mathbb{Q})$ and $H_{\text{trop}}^{p, q}(X, \mathbb{Q})$.

The above coefficient sheaves lead as well to the definition of cohomology and homology groups $H_c^{p,q}(\Sigma)$ and $H_{p,q}^{\text{BM}}(\Sigma)$, with the last one being the tropical analogue of the Borel-Moore homology. We refer to [AP21] and [JSS19] for the definition.

In this paper, unless otherwise stated, the cohomology and homology groups are all with rational coefficients.

2.6. Smooth tropical varieties. Tropical fans and their supports form the local charts for more general tropical varieties. A *tropical fan* is a pure dimensional simplicial rational fan Σ in $N_{\mathbb{R}}$ which in addition verifies the following foundational principle in tropical geometry called the *balancing condition*: for any cone τ of codimension one in Σ , we have the vanishing in the quotient lattice N/N_{τ} of the following sum

$$\sum_{\sigma \supset \tau} \mathbf{e}_{\sigma}^{\tau} = 0$$

where the sum is over faces σ of maximal dimension containing τ and $\mathbf{e}_{\sigma}^{\tau}$ is the vector which generates the quotient $(\sigma \cap N)/(\tau \cap N) \simeq \mathbb{Z}_{\geq 0}$. This might be regarded as a polyhedral analogue of *orientability* and leads to the definition of a *fundamental class* which plays an important role in the treatment of the duality and other finer geometric properties in polyhedral geometry.

Smoothness in tropical geometry reflects in polyhedral geometry the idea of maximal degeneracy for varieties defined over non-Archimedean fields. We will elaborate on this in our forthcoming work. Since this is a local notion, it amounts to fixing a good class of fans and their supports as local charts. Building on the Hodge theoretic interpretation of maximal degeneracy [Del97], our work [AP20b] suggests these are fans which should satisfy the Poincaré duality for tropical cohomology, and which should have canonical compactifications of Tate type, meaning that the tropical cohomology of the canonical compactification is concentrated in Hodge bidegrees (p, p) .

In [AP21] we introduced a homological notion of smoothness. We recall the definition of tropical varieties and tropical smoothness here.

Let Σ be a tropical fan of dimension d , and let ν_{Σ} be the canonical element in the Borel-Moore homology group $H_{d,d}^{\text{BM}}(\Sigma)$.

Using the cap product \frown , we get a natural map

$$\cdot \frown \nu_{\Sigma} : H^{p,q}(\Sigma) \longrightarrow H_{d-p,d-q}^{\text{BM}}(\Sigma).$$

We say that a simplicial tropical fan Σ verifies the *Poincaré duality* if the above map is an isomorphism for any bidegree (p, q) . A tropical fan Σ is called *smooth* if for any cone $\sigma \in \Sigma$, the star fan Σ^{σ} verifies the Poincaré duality. In this paper, the star fan Σ^{σ} refers to the fan in $N_{\mathbb{R}}/N_{\sigma, \mathbb{R}}$ induced by the cones η in Σ which contain σ as a face.

In [AP21] we introduced the notion of shellability and class of shellable tropical fans. One of the main theorems of [AP21] is the following theorem.

THEOREM 2.2. *Smoothness is shellable. In particular, any shellable tropical fan is smooth.*

Generalized Bergman fans are shellable. It follows that the class of tropically smooth fans contains all Bergman fans including therefore complete fans. Since prior to our work [AP21], generalized Bergman fans and their support were used to define smoothness of tropical varieties, we recall what a generalized Bergman fan means.

A generalized Bergman fan is a fan which has the same support as the Bergman fan of a matroid (the condition concerns only the support and not the fan structure itself). We explain what this means.

Let \mathfrak{M} be a simple matroid on a ground set E of rank $r + 1$. We refer to [Oxl11, Wel10] for the definition and basic properties of matroids. A discussion can be also found in our paper [AP21]. Denote by $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in E}$ the standard basis of \mathbb{Z}^E . For a subset $A \subseteq E$, let \mathbf{e}_A be

the sum $\sum_{i \in A} \mathbf{e}_i$ in \mathbb{Z}^E . Consider the lattice $N = \mathbb{Z}^E / \mathbb{Z}\mathbf{e}_E$. The Bergman fan of \mathfrak{M} denoted by $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ is a rational fan in $N_{\mathbb{R}}$ of dimension r defined as follows. A flag of proper flats \mathcal{F} in \mathfrak{M} is a collection

$$\mathcal{F}: \quad \emptyset \neq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_\ell \neq E$$

consisting of proper flats F_1, \dots, F_ℓ of \mathfrak{M} . To such a flag, we associate the rational cone $\sigma_{\mathcal{F}} \subseteq N_{\mathbb{R}}$ of dimension ℓ generated by the vectors $\mathbf{e}_{F_1}, \mathbf{e}_{F_2}, \dots, \mathbf{e}_{F_\ell}$, i.e.,

$$\sigma_{\mathcal{F}} := \left\{ \lambda_1 \mathbf{e}_{F_1} + \cdots + \lambda_\ell \mathbf{e}_{F_\ell} \mid \lambda_1, \dots, \lambda_\ell \geq 0 \right\}.$$

The Bergman fan $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ of \mathfrak{M} consists of all the cones $\sigma_{\mathcal{F}}$ for \mathcal{F} a flag of proper flats of \mathfrak{M} :

$$\Sigma_{\mathfrak{M}} := \left\{ \sigma_{\mathcal{F}} \mid \mathcal{F} \text{ flag of proper flats of } \mathfrak{M} \right\}.$$

It has pure dimension r .

A Bergman support in a real vector space W is a subset $S \subseteq W$ which is isomorphic to $|\Sigma_{\mathfrak{M}}|$ via a linear map $\phi: W \rightarrow \mathbb{R}^E / \mathbb{R}\mathbf{e}_E$. A fan Σ in W is called generalized Bergman if its support $|\Sigma|$ is Bergman. If W is equipped with a full rank lattice N_W and the map ϕ induces an isomorphism between the two lattices $N_W \cap \text{TS}$ and N , we say Σ is a rational generalized Bergman fan.

Note that the above terminologies are consistent in the sense that the Bergman fan $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ of a matroid \mathfrak{M} is an example of a generalized Bergman fan. In addition, any complete fan in a real vector space is generalized Bergman. The tropicalization of the complement of a hyperplane arrangement is Bergman as well [AK06]. The category of generalized Bergman fans is closed under product, this is in fact a more general properties for smooth tropical fans [AP21].

A smooth tropical variety is an extended polyhedral space with an integral affine structure that is locally modeled by supports of smooth tropical fans [AP21]. In other words, any point has a neighborhood which is isomorphic to an open set in $\Sigma \times \mathbb{T}^k$ for some smooth tropical fan Σ .

We have the following theorem.

THEOREM 2.3. *Consider a rational polyhedral complex Y in $N_{\mathbb{R}}$ with smooth support. Assume the recession fan Y_{rec} of Y is unimodular. In this case, the canonical compactification \overline{Y} of Y has smooth support. If the polyhedral structure on Y is unimodular, then the extended polyhedral structure induced on \overline{Y} is unimodular as well.*

In particular, canonical compactifications of unimodular smooth tropical fans are smooth.

A rationally triangulable smooth projective tropical variety X is by definition a smooth tropical variety which is isomorphic to the canonical compactification \overline{Y} of a rational polyhedral complex Y with smooth support such that the recession fan Y_{rec} is unimodular and quasi-projective. Recall that a rational fan Σ in $N_{\mathbb{R}}$ is called quasi-projective if the corresponding toric variety \mathbb{P}_{Σ} is quasi-projective [Ful93]. By the triangulation theorem proved in [AP20b], any rationally triangulable smooth projective tropical variety admits a triangulation which is unimodular with respect to the lattice $\frac{1}{m}N$ for some positive integer m .

Compact smooth tropical varieties satisfy Poincaré duality [AP21].

2.7. Kähler tropical varieties. We recall the definition of Kähler tropical fans and Kähler tropical varieties introduced in our papers [AP20b].

Let Σ be a unimodular tropical fan in a vector space V and let N be the corresponding full rank lattice of V , so $V = N_{\mathbb{R}} := N \otimes \mathbb{R}$.

The Chow ring of Σ denoted by $A^{\bullet}(\Sigma)$ is defined as the quotient of the polynomial ring $\mathbb{Z}[x_{\varrho} \mid \varrho \in \Sigma_1]$, with generators x_{ϱ} associated to the rays ϱ of Σ , by the ideal $I_1 + I_2$ defined as follows:

- I_1 is the ideal generated by all monomials of the form $\prod_{\varrho \in S} x_\varrho$ for any subset $S \subseteq \Sigma_1$ which do not form a cone in Σ ; and
- I_2 is the ideal generated by the elements of the form

$$\sum_{\varrho \in \Sigma_1} \langle m, \mathbf{e}_\varrho \rangle x_\varrho$$

for any m in the dual lattice $M = N^*$,

where \mathbf{e}_ϱ denotes the primitive vector of ϱ , and $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the duality pairing between M and N .

For a unimodular smooth tropical fan Σ of dimension d and an element $\ell \in A^1(\Sigma)$, we say that the pair (Σ, ℓ) verifies the *Hard Lefschetz property* $HL(\Sigma, \ell)$ if the following holds:

(Hard Lefschetz) for any non-negative integer $k \leq \frac{d}{2}$, the multiplication map by ℓ^{d-2k} induces an isomorphism

$$A^k(\Sigma) \xrightarrow{\sim} A^{d-k}(\Sigma), \quad a \longmapsto \ell^{d-2k} \cdot a.$$

We say the pair (Σ, ℓ) verifies *Hodge-Riemann relations* $HR(\Sigma, \ell)$ if for any non-negative integer $k \leq \frac{d}{2}$, the following holds:

(Hodge-Riemann relations) for any non-negative integer $k \leq \frac{d}{2}$, the symmetric bilinear form

$$A^k(\Sigma) \times A^k(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (a, b) \longmapsto (-1)^k \deg(\ell^{d-2k} \cdot a \cdot b)$$

is positive definite on the *primitive part* $P^k(\Sigma) \subseteq A^k(\Sigma)$, which by definition, is the kernel of the multiplication by ℓ^{d-2k+1} from $A^k(\Sigma)$ to $A^{d-k+1}(\Sigma)$.

A smooth unimodular tropical fan Σ is called *Kähler* if it is *quasi-projective* and moreover for an *ample* element $\ell \in A^1(\Sigma)$, (Σ, ℓ) verifies Hard Lefschetz and Hodge-Riemann relations. Here ℓ is called *ample* if ℓ can be represented in the form $\sum_{\varrho \in \Sigma_1} f(\mathbf{e}_\varrho) x_\varrho$ for a strictly convex cone-wise linear function f on the fan Σ . A fan which admits such a function is called *quasi-projective*. (Note that the Bergman fan $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ of any matroid \mathfrak{M} is quasi-projective.)

In [AP20b] we proved the following theorem.

THEOREM 2.4 (Shellability of Kähler property). *To be Kähler for quasi-projective unimodular tropical fans is shellable.*

In particular we get the following result.

THEOREM 2.5 (Kähler package for shellable fans). *Let Σ be a shellable quasi-projective unimodular tropical fan of dimension d . For any ample element $\ell \in A^1(\Sigma)$, the pair (Σ, ℓ) verifies $HL(\Sigma, \ell)$ and $HR(\Sigma, \ell)$. That is Σ is Kähler.*

A smooth rationally triangulated projective tropical variety Y with support in $N_{\mathbb{R}}$ is called *Kähler* if all the star fans Σ^σ around each face σ of Y is Kähler. Assume that Y_{rec} is a unimodular fan and let X be the corresponding canonical compactification with the induced polyhedral structure. It follows that X is also Kähler, that is the star fans of X are all Kähler.

We proved in [AP20b] that a Kähler projective tropical variety X verifies the Kähler package.

3. Minkowski weights and tropical cycles

The aim of this section is to introduce the Minkowski weights and to explain how they give rise to tropical cycles. We refer to [AR10, MS15, MR09, GS19a] for the definition of tropical cycles and their basic properties.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{MW}_{d-p}(Y) & \longrightarrow & H_{d-p,d-p}^{\text{trop}}(X) & \longrightarrow & H_{\text{trop}}^{d-p,d-p}(X)^* & \xrightarrow[\text{PD}]{\simeq} & H_{\text{trop}}^{p,p}(X) \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 \mathcal{C}_{d-p}(\mathfrak{X}) & \longrightarrow & H_{\text{Dolb}}^{d-p,d-p}(\mathfrak{X}, \mathbb{R})^* & \xrightarrow{\simeq} & H_{\text{trop}}^{d-p,d-p}(X, \mathbb{R})^* & &
 \end{array}$$

FIGURE 1. Main relations between Minkowski weights, tropical cycles and tropical homology and cohomology.

3.1. Minkowski weights. Let p, d be two non-negative integers with $p \leq d$, and let Y be a unimodular polyhedral complex with support a smooth tropical variety of pure dimension d in $N_{\mathbb{R}}$ with a unimodular recession fan Y_{rec} . By Theorem 2.3, the closure $X = \overline{Y}$ of Y in $\mathbb{TP}_{Y_{\text{rec}}}$ is smooth. We denote by \mathfrak{X} and \mathcal{Y} the supports of X and Y , respectively.

Assume for each face δ of Y of dimension $d - p$ we are given a weight which is an integer (or a rational number, depending on the context) denoted by $w(\delta)$. Let $C := (Y_{\leq d-p}, w)$ be the corresponding weighted polyhedral complex Y with the weight function w on the facets of $Y_{\leq d-p}$. The weight function w is called a *Minkowski weight* of dimension $d - p$ on Y if the following *balancing condition* is verified:

$$\forall \gamma \in Y_{d-p-1}, \quad \sum_{\delta > \gamma} w(\delta) \epsilon_{\delta/\gamma} = 0 \in N^{\gamma}.$$

Here $\epsilon_{\delta/\gamma}$ is the primitive vector of the ray $\rho_{\delta/\gamma}$ corresponding to δ in $N_{\mathbb{R}}^{\gamma}$ and the sum is over the face δ such that γ is a subface of codimension one in δ . We denote by $\text{MW}_{d-p}(Y)$ the set of all Minkowski weights of dimension $d - p$ on Y . Addition of weights cell by cell turns $\text{MW}_{d-p}(Y)$ into a group.

From an element of $w \in \text{MW}_{d-p}(Y)$, we naturally obtain an element of the homology group $H_{d-p,d-p}^{\text{trop}}(X)$ by setting on each $(d - p)$ -dimensional face δ the canonical unit multivector \mathbf{n}_{δ} of δ in $F_{d-p}(\delta)$ with the corresponding coefficient $w(\delta)$.

3.2. Tropical cycle associated to a Minkowski weight. Each Minkowski weight on Y gives a tropical cycle in \mathfrak{X} . This is obtained by taking the closure $\overline{C} = (\overline{Y}_{\leq d-p}, w)$ of Y_{d-p} in \mathfrak{X} with the same weight function w on its facets. We call \overline{C} the tropical cycle in X corresponding to the Minkowski weight w on Y . Tropical cycles in \mathfrak{X} which are of this form, for a given choice of a rational polyhedral structure Y on the open part \mathcal{Y} of \mathfrak{X} , are called *admissible*.

3.3. Relation with tropical homology. Each tropical cycle of codimension p gives by integration an element of $H_{\text{Dolb}}^{d-p,d-p}(X, \mathbb{R})^*$, and thus of $H_{\text{trop}}^{d-p,d-p}(X, \mathbb{R})^*$ via the isomorphism between tropical Dolbeault cohomology and tropical singular cohomology [JSS19]. This is depicted in the diagram of Figure 1. In this diagram, we represent the set of tropical cycles of codimension p on \mathfrak{X} by $\mathcal{C}_{d-p}(\mathfrak{X})$.

4. Integral tropical Hodge conjecture in the local case

In this section, unless otherwise explicitly stated, we work with integral coefficients.

4.1. Hodge isomorphism for smooth unimodular tropical fans. Let Σ be a smooth unimodular tropical fan of dimension d and consider its canonical compactification $\overline{\Sigma}$. In this section we explain why Theorem 4.1 below, proved in [AP21], induces an integral version of the Hodge conjecture.

THEOREM 4.1 (Hodge isomorphism for smooth unimodular tropical fans). *For a unimodular smooth tropical fan Σ of dimension d , the cycle class map*

$$\text{cl}: A^p(\Sigma) \xrightarrow{\simeq} H_{\text{trop}}^{p,p}(\overline{\Sigma})$$

$$\begin{CD}
 A^p(\Sigma, \mathbb{Z}) @>\cong>> MW_{d-p}(\Sigma, \mathbb{Z}) @>>> H_{d-p, d-p}^{\text{trop}}(\bar{\Sigma}, \mathbb{Z}) @>>> H_{\text{trop}}^{d-p, d-p}(\bar{\Sigma}, \mathbb{Z})^\vee @>\cong_{\text{PD}}>> H_{\text{trop}}^{p, p}(\bar{\Sigma}, \mathbb{Z}) \\
 @. @VVV @. @VVV @. \\
 @. \mathcal{C}_{d-p}(\bar{\Sigma}, \mathbb{Z}) @>>> H_{\text{Dolb}}^{d-p, d-p}(\bar{\Sigma}, \mathbb{R})^\star @>\cong>> H_{\text{trop}}^{d-p, d-p}(\bar{\Sigma}, \mathbb{R})^\star
 \end{CD}$$

FIGURE 2. The local analogue of the diagram of Figure 1.

induces an isomorphism between the Chow groups of Σ and the tropical cohomology groups of $\bar{\Sigma}$. Moreover, this isomorphism is compatible with the diagram of Figure 2.

This theorem can be regarded as the tropical analogue of a theorem of Feichtner and Yuzvinsky [FY04], which establishes a similar result for wonderful compactifications of hyperplane arrangement complements.

We note that the theorem above actually holds for more general classes of fans. However, for smooth unimodular tropical fans, we furthermore show in [AP21] that the cohomology groups $H_{\text{trop}}^{p, q}(\bar{\Sigma})$ for $p \neq q$ are all trivial.

4.2. Poincaré duality for the Chow ring of a smooth unimodular tropical fan.

The definition of the Chow groups of a fan is given in the previous section; connection to tropical cycles is explained in the next subsection.

Let Σ be a smooth unimodular tropical fan and let $A^\bullet(\Sigma)$ be its Chow ring. If σ is any cone of Σ of dimension p , we set

$$x_\sigma := \prod_{\substack{\varrho \in \Sigma_1 \\ \varrho < \sigma}} x_\varrho \in A^p(\sigma).$$

One can show that for any two maximal cones $\eta, \eta' \in \Sigma_d$, we have $x_\eta = x_{\eta'}$. Moreover, the top degree part $A^d(\Sigma)$ is of rank one and is generated by x_η .

From this, we deduce the degree map $\text{deg}: A^d(\Sigma) \simeq \mathbb{Z}$ by mapping α onto 1. By Poincaré duality [AP21], this map induces a perfect pairing

$$\begin{array}{ccc}
 A^k(\Sigma) \times A^{d-k}(\Sigma) & \rightarrow & \mathbb{Z}, \\
 y, z & \mapsto & \text{deg}(y \cdot z).
 \end{array}$$

4.3. Integral tropical Hodge conjecture in the local case. We can adapt the diagram of Figure 1 to our local case. The diagram can be furthermore completed thanks to the following theorem from [AHK18].

THEOREM 4.2. *Let Σ be a unimodular fan in $N_{\mathbb{R}}$ of dimension d . Then, there is an isomorphism $A^p(\Sigma) \simeq MW_{d-p}(\Sigma)$.*

Thereby, we obtain the diagram in Figure 2. By Theorem 4.1, every map in the first row is an isomorphism. (The one in the middle concerning $H_{d-p, d-p}^{\text{trop}}(\bar{\Sigma}, \mathbb{Z}) \simeq H_{\text{trop}}^{d-p, d-p}(\bar{\Sigma}, \mathbb{Z})^\vee$ is explained in [AP21].) As a consequence, to any element α of $H_{\text{trop}}^{p, p}(\bar{\Sigma}, \mathbb{Z})$ we can associate an admissible tropical cycle in $\mathcal{C}_{d-p}(\bar{\Sigma})$ with integral coefficients whose image by the cycle class map is α . This is the integral Hodge conjecture in the local case.

We will prove Theorem 1.1 by generalizing this picture to the global setting, by showing that each element in the kernel of the monodromy is the image by the cycle class map of an admissible tropical cycle with rational coefficients.

5. Tropical Steenbrink double complex and the comparison theorem

Let \mathfrak{X} be a rationally triangulable compact smooth tropical variety of dimension d . Let X be a unimodular triangulation of \mathfrak{X} . Denote by X_f the set of faces of X that do not intersect the boundary at infinity of X . In [AP20b] we defined the first page of the tropical Steenbrink sequence associated to X by

$$\mathrm{ST}_1^{a,b} := \bigoplus_{\substack{s \geq |a| \\ s \equiv a \pmod{2}}} \mathrm{ST}_1^{a,b,s}$$

where

$$\mathrm{ST}_1^{a,b,s} := \bigoplus_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta|=s}} H^{a+b-s}(\delta).$$

Here, we set $H^k(\delta) := H^k(\overline{\Sigma}^\delta) = \bigoplus_{p+q=k} H_{\mathrm{trop}}^{p,q}(\overline{\Sigma}^\delta)$. The definition is motivated by classical Hodge theory where the Steenbrink spectral sequence is a spectral sequence which calculates the weight-graded pieces of the limit mixed Hodge structure for a degenerating family \mathcal{X}^* over the punctured disk Δ^* . It has a first page with a shape similar to the tropical one above, and described by the special fiber of a semistable extension \mathcal{X} of the family \mathcal{X}^* over Δ (which exists after a finite ramified base change of the base). In the tropical setting, the group $H^k(\delta)$ is zero unless k is even in which case, we get $H^k(\delta) = H_{\mathrm{trop}}^{k/2,k/2}(\overline{\Sigma}^\delta) \simeq A^{k/2}(\Sigma^\delta)$. In particular, the bigraded piece $\mathrm{ST}_1^{a,b}$ in the tropical setting is trivial if b is odd.

In the tropical Steenbrink sequence, the differentials of bidegree $(1, 0)$ are given by $d := \mathrm{Gys} + i^*$, where

$$i^{a,b*} : \mathrm{ST}_1^{a,b} \rightarrow \mathrm{ST}_1^{a+1,b}, \quad \text{and} \quad \mathrm{Gys}^{a,b} : \mathrm{ST}_1^{a,b} \rightarrow \mathrm{ST}_1^{a+1,b}.$$

The map i^* corresponds to the restriction in cohomology, and Gys is the Poincaré dual of the restriction map. The precise definition can be found in [AP20b]. We proved in [AP20b] that for a unimodular triangulation X of \mathfrak{X} and for any integer b , the differential d makes $\mathrm{ST}_1^{\bullet,b}$ into a cochain complex. We denote by $H^a(\mathrm{ST}_1^{\bullet,b}, d)$ the a -th cohomology of this cochain complex.

The cohomology of the Steenbrink cochain complex can be computed by the following theorem.

THEOREM 5.1 (Steenbrink-Tropical comparison theorem). *Notations as above, let \mathfrak{X} be a compact smooth tropical variety of dimension d . Let X be a unimodular triangulation of \mathfrak{X} . The cohomology of $(\mathrm{ST}_1^{\bullet,b}, d)$ is described in the following way. If b is odd, then all the terms $\mathrm{ST}_1^{a,b}$ are zero, and the cohomology is vanishing. For b even, writing $b = 2p$ for $p \in \mathbb{Z}$, we have for any $q \in \mathbb{Z}$ a canonical isomorphism*

$$H^{q-p}(\mathrm{ST}_1^{\bullet,2p}, d) \simeq H_{\mathrm{trop}}^{p,q}(\mathfrak{X}).$$

In the complex approximable case, i.e., when \mathfrak{X} arises as the tropicalization of a family of complex projective varieties, this theorem is proved in [IKMZ19]. The statement in this generality is proved in [AP20b]. Related work on integral affine manifold with singularities can be found in [GS10, GS06, Rud10, Rud20].

This isomorphism restricted to the kernel of the monodromy in $H_{\mathrm{trop}}^{p,p}(\mathfrak{X})$ will be explicitly described in Section 5.3.

5.1. Monodromy. Suppose now that \mathfrak{X} is Kähler and projective. The monodromy operator N on $\mathrm{ST}_1^{\bullet,\bullet}$ is of bidegree $(2, -2)$ and is given by the identity map id on the relevant

parts. More precisely, $N : \mathbf{ST}_1^{a,b} \rightarrow \mathbf{ST}_1^{a+2,b-2}$ is given on each nontrivial part by

$$N|_{\mathbf{ST}_1^{a,b,s}} = \begin{cases} \text{id} : \mathbf{ST}_1^{a,b,s} \rightarrow \mathbf{ST}_1^{a+2,b-2,s} & \text{if } s \geq |a+2|, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

It is not hard to see that it is a Lefschetz operator which verifies the Hard Lefschetz property around 0, that is, the map

$$N^k : \mathbf{ST}_1^{-k,b+k} \rightarrow \mathbf{ST}_1^{k,b-k}$$

is an isomorphism for any k . The Hard Lefschetz property around 0 will be denoted by HL in the sequel.

The operator N commutes moreover with the differential and induces a monodromy operator on the cohomology $\mathbf{ST}_2^{\bullet,\bullet}$ that we still denote by N . This induced operator verifies as well HL as we proved in [AP20b].

We have the following characterization of the monodromy operator in terms of the eigenwave map ϕ defined in [MZ14] and the monodromy on tropical Dolbeault cohomology [Liu19].

THEOREM 5.2. *The monodromy operator $N : H_{\text{trop}}^{p,q}(\mathfrak{X}) \rightarrow H_{\text{trop}}^{p-1,q+1}(X)$ coincides with the eigenwave operator ϕ . With real coefficients, it coincides as well with the monodromy operator on Dolbeault cohomology.*

PROOF. The proof of the first statement is given in [MZ14] for matroidal tropical varieties which are complex approximable case, i.e., in the case the tropical variety arises as a tropical limit of a family of complex projective varieties, and it is proved in [AP20b] for the general case. The proof of the second statement is a consequence of [Jel19] which relates the eigenwave operator to the monodromy operator on tropical Dolbeault cohomology. \square

5.2. Polarization. We now describe a natural polarization on $\mathbf{ST}_1^{\bullet,\bullet}$, which after passing to the cohomology, induces a polarization on cohomology groups $H^a(\mathbf{ST}_1^{\bullet,b}, d)$. We refer to [AP20b] for more details. The material in this section will allow us later to describe the cohomology classes associated to Minkowski weights.

We can define a natural bilinear form ψ on $\mathbf{ST}_1^{\bullet,\bullet}$ as follows. Take two elements $x \in \mathbf{ST}_1^{a,b,s}$ and $y \in \mathbf{ST}_1^{a',b',s'}$, for integers a, b, s, a', b', s' . We can write

$$x = \sum_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta|=s}} x_\delta$$

with $x_\delta \in H^{a+b-s}(\delta)$, and similarly for y . The degree map is defined by setting

$$\text{deg}(x \cdot y) := \begin{cases} \sum_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta|=s}} \text{deg}(x_\delta \cdot y_\delta) & \text{if } s = s', \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

where $\text{deg}(x_\delta \cdot y_\delta)$ is defined in Section 4.2. Note that the notation $x \cdot y$ in the above expression simply means $\sum_\delta x_\delta y_\delta$ whenever this makes sense, with the sum running over the corresponding δ , and it is set to zero otherwise. The bilinear form ψ is now defined by

$$\psi(x, y) := \begin{cases} \epsilon(a, b) \text{deg}(x \cdot y) & \text{if } a + a' = 0, \quad b + b' = 2d, \text{ and } s' = s, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where for a pair of integers a, b , with b even, we set

$$\epsilon(a, b) := (-1)^{a+\frac{b}{2}},$$

and for b odd, we define $\epsilon(a, b) := 1$. In this latter case, we necessarily have $x = 0$.

We proved in [AP20b] that the bilinear pairing ψ satisfies the following nice properties.

PROPOSITION 5.3. *For any pair of elements $x, y \in \bigoplus_{a,b} \mathbf{ST}_1^{a,b}$, we have*

- (i) $\psi(x, y) = (-1)^d \psi(y, x)$.
- (ii) $\psi(Nx, y) + \psi(x, Ny) = 0$.
- (iii) $\psi(dx, y) + \psi(x, dy) = 0$.

It follows from this proposition that the polarization ψ induces a polarization on the cohomology groups $H^a(\mathbf{ST}_1^{\bullet,b}, d)$. By this we mean the following. First, since $[d, N] = 0$, we get an induced map

$$N: H^a(\mathbf{ST}_1^{\bullet,b}, d) \rightarrow H^{a+2}(\mathbf{ST}_1^{\bullet,b-2}, d).$$

Now, since $\psi(d \cdot, \cdot) = -\psi(\cdot, d \cdot)$, we get an induced pairing

$$\psi: H^\bullet(\mathbf{ST}_1^{\bullet,\bullet}, d) \times H^\bullet(\mathbf{ST}_1^{\bullet,\bullet}, d) \rightarrow \mathbb{Q}.$$

We have the following theorem.

THEOREM 5.4. *The following properties hold. For any integer $a \geq 0$, we have*

- *The map $N^a: H^{-a}(\mathbf{ST}_1^{\bullet,b}, d) \rightarrow H^a(\mathbf{ST}_1^{\bullet,b-2a}, d)$ is an isomorphism. In other words, the induced monodromy operator N on cohomology groups satisfies the Hard Lefschetz property HL.*
- *The polarization ψ induces a non-degenerate bilinear form*

$$\psi(\cdot, N^a \cdot): H^{-a}(\mathbf{ST}_1^{\bullet,b}, d) \times H^{-a}(\mathbf{ST}_1^{\bullet,2d-b+2a}, d) \rightarrow \mathbb{Q}.$$

- *Let $a \geq 0$ and b be two integers. Denote by $P^{-a,b}$ the primitive part of $H^{-a}(\mathbf{ST}_1^{\bullet,b}, d)$ with respect to the monodromy defined by*

$$P^{-a,b} := \ker\left(N^{a+1}: H^{-a}(\mathbf{ST}_1^{\bullet,b}, d) \longrightarrow H^{a+2}(\mathbf{ST}_1^{\bullet,b-2a-2}, d)\right).$$

Then, we have the decomposition into primitive parts

$$H^{-a}(\mathbf{ST}_1^{\bullet,b}, d) = \bigoplus_{s \geq 0} N^s P^{-a-2s, b+2s}.$$

Moreover, this decomposition is orthogonal for the pairing $\psi(\cdot, N^a \cdot)$ meaning that the term $N^s P^{-a-2s, b+2s}$ of the above decomposition and the term $N^{s'} P^{-a-2s', 2d-b+2a+2s'}$ in the primitive decomposition of $H^{-a}(\mathbf{ST}_1^{\bullet,2d-b+2a}, d)$ are orthogonal for $s \neq s'$.

PROOF. This follows from the assumption that \mathfrak{X} is Kähler and projective, which shows the existence of a tropical Kähler form on \mathfrak{X} , and from Theorem 6.19 in [AP20b] which proves a more refined statement in terms of the corresponding Hodge-Lefschetz structure. \square

By Steenbrink-Tropical comparison theorem, the above statement can be translated to tropical cohomology. In particular, we get the decomposition

$$H_{\text{trop}}^{p,q}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{s \geq 0} N^s PH_{\text{trop}}^{p+s, q-s}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q})$$

where for any pair of integers p, q with $p \geq q$, we set

$$PH_{\text{trop}}^{p,q}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}) := \ker\left(N^{p-q+1}: H_{\text{trop}}^{p,q}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}) \longrightarrow H_{\text{trop}}^{q-1, p+1}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q})\right),$$

for the primitive parts with respect to the monodromy operator. Moreover, the decomposition is orthogonal with respect to the pairing $\psi(\cdot, N^{p-q} \cdot)$.

5.3. Explicit isomorphism between primitive parts $P^{0,2p}$ and $PH_{\text{trop}}^{p,p}$. In this section we describe more explicitly the isomorphism given by the comparison Theorem 5.1 restricted to primitive parts of respective bidegree $(0, 2p)$ and (p, p) in the Steenbrink sequence and tropical cohomology groups, respectively. These are the relevant parts for our purpose.

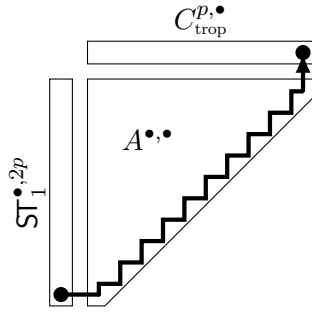


FIGURE 3. Illustration of the zigzag lemma between $ST_1^{p, 2p}$ and $C_{trop}^{p, \bullet}$

5.3.1. *Idea of the proof of the comparison theorem.* Theorem 5.1 is proved in Section 5 of [AP20b]. We recall the main ideas here.

We wish to link the cohomology groups of the tropical Steenbrink sequence $ST_1^{p, 2p}$ with those of $C_{trop}^{p, \bullet}(X)$. The basic idea is based on the use of the following lemma.

LEMMA 5.5 (Zigzag isomorphism). *Let $A^{\bullet, \bullet}$ be a double complex with differentials d and d' of respective degree $(1, 0)$ and $(0, 1)$. Assume that*

- $dd' + d'd = 0$,
- $A^{b, b'} = 0$ if $b < 0$ or $b' < 0$,
- $A^{b, \bullet}$ is exact if $b > 0$,
- $A^{\bullet, b'}$ is exact if $b' > 0$.

Then, there is a canonical isomorphism

$$H^\bullet(A^{0, \bullet}) \simeq H^\bullet(A^{\bullet, 0}).$$

In this lemma, the isomorphism is given by $d'^{-1}dd'^{-1} \dots dd'^{-1}d: A^{0, p} \rightarrow A^{p, 0}$, where, by d'^{-1} we mean choosing any preimage by d' of an element. This map is not well-defined a priori. Nevertheless, we can prove that it induces a well-defined map on the level of the cohomology.

Coming back to our situation, assume now that there exists a double complex A which verifies the conditions of the lemma and moreover, $A^{0, \bullet} = C_{trop}^{p, \bullet}[-1]$ and $A^{\bullet, 0} = ST_1^{p, 2p}[-1]$ as in Figure 3. Then the zigzag lemma implies the isomorphism in cohomology.

Actually, this is not exactly what we do in [AP20b] as the situation is more complicated. We first need to introduce spectral sequences that compute the tropical cohomology groups and the cohomology groups of $ST_1^{p, 2p}$. Then we are able to introduce a triple complex, which is the analogue in the setting of spectral sequences of the double complex $A^{\bullet, \bullet}$ above. This we can do thanks to the tropical Deligne resolution of the coefficient sheaves (cf. Section 5.3 of [AP20b]). Finally, we need to prove a more general version of the zigzag lemma, called the spectral resolution lemma, in order to link both these spectral sequences. All this turns out to be quite technical.

This being said, as far as for the parts which are of interest to us in this paper, everything happens to be luckily on the border, and the restriction of the isomorphism and the analysis can be made completely explicit. The idea is depicted in Figure 3 and the details will be given in the next section. In that figure, the zigzag arrow is the part we have to study in (the spectral resolution analogue of) $A^{\bullet, \bullet}$; everything on the right hand side and below this zigzag arrow is trivial in the double complex. The arrow itself is given in detail in Figure 4. The start of the arrow is the kernel of the monodromy in $ST_1^{0, 2p}$. The end of the arrow is a subquotient of $C_{trop}^{p, p}(X)$.

With this preparation, we can now explain the details of this scheme.

5.3.2. *Details of the zigzag.* Looking at the definitions, we get that

$$\ker(N: \mathbf{ST}_1^{0,2p} \rightarrow \mathbf{ST}_1^{2,2p-2}) = \bigoplus_{v \in X_{f,0}} H^{2p}(v),$$

where the sum is over vertices of X_f . Hence we need to describe the map from $\bigoplus_{v \in X_{f,0}} H^{2p}(v)$ to $C_{\text{trop}}^{p,p}(X)$ which induces the isomorphism on the cohomology given by the Steenbrink-Tropical comparison theorem.

As already mentioned above, from the analysis carried out in Section 5 of [AP20b], we infer that this isomorphism is given by the diagram of Figure 4.

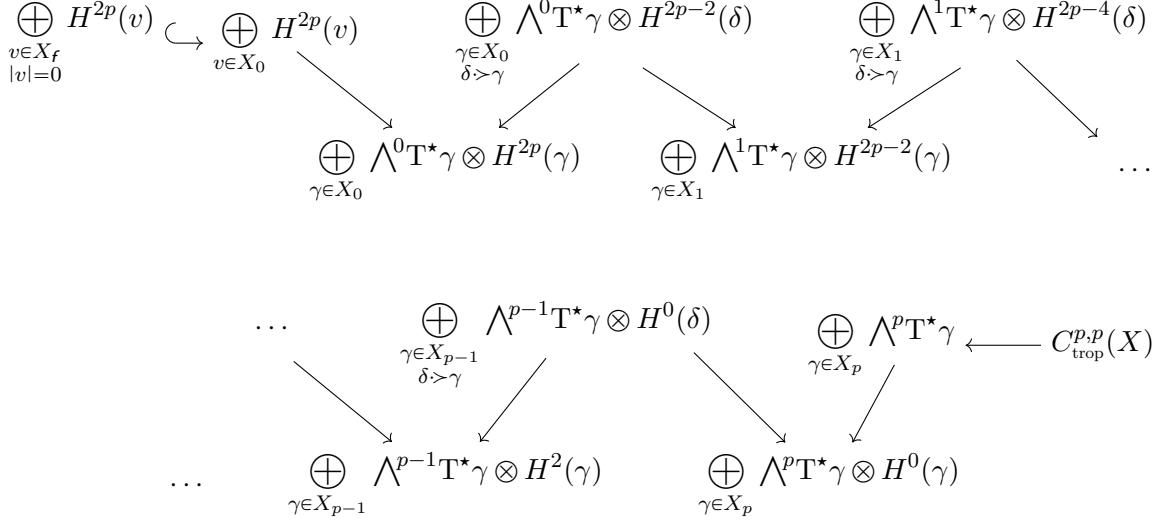


FIGURE 4. Zigzag diagram giving the isomorphism $P^{0,2p} \simeq PH_{\text{trop}}^{p,p}(X)$

In this diagram, the notation $\delta \succ \gamma$ in the direct sum running over faces γ in X of dimension k means we consider any face δ of X such that γ is a face of codimension one in δ (and so δ has dimension $k + 1$), and such that in addition, we have $\text{sed}(\delta) = \text{sed}(\gamma)$. If $\gamma \prec \delta$, we have two natural maps. The first one is

$$\begin{aligned} \cdot \wedge \nu_{\delta/\gamma}^* &: \bigwedge^k T^* \gamma \longrightarrow \bigwedge^{k+1} T^* \delta, \\ \alpha &\longmapsto \tilde{\alpha} \wedge \nu_{\delta/\gamma}^*. \end{aligned}$$

Here, $\tilde{\alpha}$ is any extension of α to $\bigwedge^k T^* \delta$, and we recall that $\nu_{\delta/\gamma}^* \in T_\delta^*$ is zero on $T\gamma$, nonnegative on $T\delta$ and induces a primitive vector in $M_\delta = N_\delta^\vee$. The image of α does not depend on the chosen extension. For the second map, recall first that by the Hodge isomorphism theorem, we have $H^{2k}(\delta) \simeq A^k(\Sigma^\delta)$. Moreover, any ray ϱ in the star fan Σ^δ can be naturally identified with a ray ϱ' of Σ^γ . Hence, we naturally get a map $\iota: A^k(\Sigma^\delta) \rightarrow A^k(\Sigma^\gamma)$ by mapping x_ϱ to $x_{\varrho'}$. The Gysin map is then given by

$$\begin{aligned} \text{Gys}: A^k(\Sigma^\delta) &\longrightarrow A^{k+1}(\Sigma^\gamma), \\ x &\longmapsto \iota(x) \cdot X_{\rho_{\delta/\gamma}}, \end{aligned}$$

where $\rho_{\delta/\gamma}$ is the ray corresponding to δ in Σ^γ .

The maps in Figure 4 are naturally given by (the tensor product of) the two maps we just described, up to some signs. More precisely, the first two and the last two maps are the natural ones. For the arrows going to the left, if we fix a pair of faces $\delta \succ \gamma$ and a face γ' of dimensions $k + 1$, k , and k , respectively, then the map

$$\bigwedge^k T^* \gamma \otimes H^{2(p-k-1)}(\delta) \rightarrow \bigwedge^k T^* \gamma' \otimes H^{2(p-k)}(\gamma')$$

is given by 0 if $\gamma \neq \gamma'$, and by

$$\text{sign}(\gamma, \delta) \text{id} \otimes \text{Gys}_{\delta \succ \gamma},$$

if $\gamma = \gamma'$. For the arrows going to the right, and for a pair of faces $\delta \succ \gamma$ and a face δ' of dimensions $k + 1$, k , and $k + 1$, respectively, the map

$$\bigwedge^k \mathbf{T}^* \gamma \otimes H^{2(p-k-1)}(\delta) \rightarrow \bigwedge^k \mathbf{T}^* \gamma' \otimes H^{2(p-k)}(\gamma')$$

is given by 0 if $\delta \neq \delta'$, and by

$$(\cdot \wedge \nu_{\delta/\gamma}^*) \otimes \text{id}$$

if $\delta = \delta'$.

Note that all the maps except the first one are surjective. Therefore, to an element of $\bigoplus_{v \in X_f, 0} H^{2p}(v)$ we can associate an element of $C_{\text{trop}}^{p,p}(X)$ by following the diagram, and making some choices. However, as explained above, the induced map on the level of the cohomology groups does not depend on these choices and is thus well-defined. The resulting map we obtain in this way is the restriction of the Steenbrink-Tropical comparison isomorphism of Theorem 5.1 which goes from $P^{0,2p}$ to $PH_{\text{trop}}^{p,p}$.

5.4. Pairing with Minkowski weights. Let \mathcal{Y} be the open part of \mathfrak{X} and let Y be the unimodular triangulation induced by X on \mathcal{Y} . Let $p \geq 0$ and let w be a Minkowski weight in $\text{MW}_p(Y)$. The weight w naturally induces a map $w: X_p \rightarrow \mathbb{Q}$ which we also denote by w .

Let v be a vertex on X_f . Let $\alpha_v \in H^{2p}(v)$. We can represent α_v as follows

$$\alpha_v = \sum_{\substack{\eta \succ v \\ |\eta|=p}} a_{v,\eta} X_\eta \in A^p(\Sigma^v).$$

The Minkowski weight w naturally induces an element w_v in $\text{MW}_p(\Sigma^v)$. Via the pairing $A^p(\Sigma^v) \times \text{MW}_p(\Sigma^v) \rightarrow \mathbb{Q}$, we thus get the rational number

$$\langle \alpha_v, w_v \rangle = \sum_{\substack{\eta \prec v \\ |\eta|=p}} a_{v,\eta} w_v(\eta).$$

The fact that this sum does not depend on the chosen representative of α_v is a consequence of the balancing condition (cf. [AHK18]). By summing over all the vertices of X_f , we get a pairing between $\ker(N: \text{ST}_1^{0,2p} \rightarrow \text{ST}_1^{2,2p-2}) \simeq \bigoplus_v H^{2p}(v)$ and $\text{MW}_p(Y)$. One can prove that this induces a pairing

$$P^{0,2p} \times \text{MW}_p(Y) \rightarrow \mathbb{Q}.$$

On the other hand, let $c \in C^{p,p}(X)$. We write $c = \sum_{\eta \in X_p} c_\eta$ with $c_\eta \in \mathbf{F}^p(\eta)$. Then we get a pairing between $C^{p,p}(X)$ and $\text{MW}_p(Y)$ by setting

$$\langle c, w \rangle = \sum_{\eta \in X_p} w(\eta) c_\eta(\mathbf{n}_\eta),$$

where we recall that \mathbf{n}_η is the canonical unit multivector in $\bigwedge^p \mathbf{T}\eta$. Once again, this induces a pairing

$$PH_{\text{trop}}^{p,p}(X) \times \text{MW}_p(Y) \rightarrow \mathbb{Q}.$$

Let $\alpha \in PH_{\text{trop}}^{p,p}(X)$. Let $\bar{C} = (X_{\leq d-p}, w)$ be the tropical cycle associated to w . Then the above pairing is compatible with the integration on tropical Dolbeault cohomology in the sense of [JSS19]:

$$\int_{\bar{C}} \alpha = \langle \alpha, w \rangle,$$

for any $\alpha \in PH_{\text{trop}}^{p,p}(X) \hookrightarrow H_{\text{Dolb}}^{p,p}(X, \mathbb{R})$.

The following theorem states that the two pairing defined above are compatible with the Steenbrink-Tropical comparison theorem.

THEOREM 5.6. *The restriction of the isomorphism of Theorem 5.1 to $P^{0,2p} \simeq PH_{\text{trop}}^{p,p}(X)$ commutes with the pairing with $MW_p(Y)$ in the sense that the following diagram commutes.*

$$\begin{array}{ccc} P^{0,2p} & \xrightarrow{\sim} & PH_{\text{trop}}^{p,p}(X) \\ & \searrow & \swarrow \\ & MW_p(Y)^\star & \end{array}$$

PROOF. It suffices to extend the pairing in a consistent way to all the pieces appearing in the zigzag of Figure 4. We do it as follows. Let w be a Minkowski weight in $MW_p(Y)$, and let $w: X_p \rightarrow \mathbb{Q}$ be the corresponding map on X_p , as above. Let $\delta \succ \gamma$ be a pair of faces of dimensions $k + 1$ and k . Let $\beta_\gamma \in \bigwedge^k T^\star \gamma$ and let $\alpha_\delta \in H^{2(p-k-1)}(\delta)$. We set

$$\langle \beta_\gamma \otimes \alpha_\delta, w \rangle := \text{sign}(\gamma, \delta) \beta_\gamma(\mathbf{n}_\gamma) \langle \alpha_\delta, w_\delta \rangle$$

where w_δ is the natural element of $MW_{d-k-1}(\Sigma^\delta)$ induced by w . In the same way, if $\alpha_\gamma \in H^{2(p-k)}(\gamma)$, then we set

$$\langle \beta_\gamma \otimes \alpha_\gamma, w \rangle := \beta_\gamma(\mathbf{n}_\gamma) \langle \alpha_\gamma, w_\gamma \rangle.$$

A direct computation shows that these pairings commute with the maps of the zigzag. This concludes the proof of the theorem. \square

6. Tropical surviving and relative cohomology groups

In this section we define the tropical surviving and relative cohomology groups.

First, we denote by $K^{\bullet,\bullet}$ the kernel of the monodromy operator $N: ST_1^{\bullet,\bullet} \rightarrow ST_1^{\bullet,\bullet}$. It is explicitly given by

$$K^{a,b} := ST_1^{a,b,a} = \bigoplus_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta|=a}} H^b(\delta).$$

In particular, since the monodromy operator is injective on $ST_1^{a,b}$ for $a < 0$, the groups $K^{a,b}$ are all trivial for any value of $a < 0$. We can naturally endow $K^{a,b}$ with the restriction of the differential d , i.e., with i^* . We set

$$H_s^{p,q}(X) := H^{q-p}(K^{\bullet,2p})$$

and we call it the *surviving cohomology of the tropical variety \mathfrak{X} with respect to the triangulation X* .

REMARK 6.1. To justify the terminology, we note that in the approximable case, when the tropical variety appears as the tropical limit of a projective family of complex varieties, using the correspondence between faces of the tropical limit and the intersection of components of the special fiber, the surviving cohomology gives a way to compute the weight-graded pieces of the cohomology of \mathfrak{X} . More precisely, using the Deligne spectral sequence, the cohomology group $H_s^{p,q}(\mathfrak{X})$ coincides with the weight $2p$ graded piece of the cohomology group H^{p+q} of the special fiber. In the general case, a triangulation equipped with the double complex $K^{\bullet,\bullet}$ given above plays the role of a virtual special fiber. \diamond

Similarly, we denote by $R^{\bullet,\bullet}$ the cokernel of the monodromy operator $N: ST_1^{\bullet,\bullet} \rightarrow ST_1^{\bullet,\bullet}$. It is explicitly given by

$$R^{a,b} := ST_1^{a,b,-a} = \bigoplus_{\substack{\delta \in X_f \\ |\delta|=-a}} H^{2a+b}(\delta).$$

Since the monodromy operator is surjective on $ST_1^{a,b}$ for any $a > 0$, the group $R^{a,b}$ is trivial for $a > 0$. We can endow $R^{a,b}$ with the restriction of the differential d , i.e., with Gys . We set

$$H_{\text{rel}}^{p,q}(X) := H^{q-p}(R^{\bullet,2p})$$

and we call it the *relative cohomology of X relative to the triangulation X* .

To justify the name of the cohomology $H_{\text{rel}}^{\bullet, \bullet}(\mathfrak{X})$, one can compare the proposition which follows with the two triangles in the setting of complex manifolds, that we reproduce here from Section 1.2.

$$\begin{array}{ccc}
 H^\bullet(\widetilde{\mathcal{X}}^*) & \xrightarrow{N} & H^\bullet(\widetilde{\mathcal{X}}^*) \\
 & \swarrow & \searrow +1 \\
 & H^\bullet(\mathcal{X}^*) &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 H^\bullet(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\quad} & H^\bullet(\mathcal{X}^*) \\
 & \swarrow & \searrow +1 \\
 & H^\bullet(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*) &
 \end{array}$$

If $\Phi: A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ is a morphism of complexes, we denote by $\text{Cone}^\bullet(\Phi)$ the mapping cone of Φ . We recall that it is defined by the total complex of the following double complex

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & A^0 & \longrightarrow & A^1 & \longrightarrow & A^2 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi & & \\
 \dots & \longrightarrow & B^0 & \longrightarrow & B^1 & \longrightarrow & B^2 & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

where the pieces which form the degree zero part of the total complex are indicated by a dot. Note that the differentials on the first row are minus the differentials on A^\bullet .

PROPOSITION 6.2. *For any even integer p , we have the two following distinguished triangles in the derived category of bounded cochain complexes*

$$\begin{array}{ccc}
 \text{ST}_1^{\bullet, p+2} & \xrightarrow{N} & \text{ST}_1^{\bullet, p}[2] \\
 & \swarrow & \searrow +1 \\
 & \text{Cone}^\bullet(N)[-1] &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 K^{\bullet, p+2} & \xrightarrow{\quad} & \text{Cone}^\bullet(N)[-1] \\
 & \swarrow 0 & \searrow +1 \\
 & R^{\bullet, p} &
 \end{array}$$

in which $\text{Cone}^\bullet(N)$ refers more precisely to

$$\text{Cone}^\bullet\left(N: \text{ST}_1^{\bullet, p+2} \rightarrow \text{ST}_1^{\bullet, p}[2]\right).$$

PROOF. The first triangle is a distinguished triangle by definition. The shifted mapping cone

$$\text{Cone}\left(N: \text{ST}_1^{\bullet, p+2} \rightarrow \text{ST}_1^{\bullet, p}[2]\right)[-1]$$

is given by the total complex associated to the following double complex

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{d} & \text{ST}_1^{-3, p+2} & \xrightarrow{d} & \text{ST}_1^{-2, p+2} & \xrightarrow{d} & \text{ST}_1^{-1, p+2} & \xrightarrow{d} & \text{ST}_1^{0, p+2} & \xrightarrow{d} & \dots \\
 & & \downarrow N & & \downarrow N & & \downarrow N & & \downarrow N & & \\
 \dots & \xrightarrow{d} & \text{ST}_1^{-1, p} & \xrightarrow{d} & \text{ST}_1^{0, p} & \xrightarrow{d} & \text{ST}_1^{1, p} & \xrightarrow{d} & \text{ST}_1^{2, p} & \xrightarrow{d} & \dots
 \end{array}$$

Recall that $R^{\bullet, p}$ is the cokernel of $N: \text{ST}_1^{\bullet, p+2}[-2] \rightarrow \text{ST}_1^{\bullet, p}$. Thus, we can naturally project the second row onto $R^{\bullet, p}[1]$ to get the map on the right hand side of the second triangle.

The shifted mapping cone

$$\text{Cone}^\bullet\left(K^{\bullet, p+2} \rightarrow \text{Cone}^\bullet(N)[-1]\right)[-1]$$

is given by the total complex associated to the following double complex

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & K^{0,p+2} \longrightarrow K^{1,p+2} \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow \iota & & \downarrow \iota & & \downarrow \iota & & \downarrow \iota \\
 \dots & \longrightarrow & \mathcal{S}\Gamma_1^{-2,p+2} & \longrightarrow & \mathcal{S}\Gamma_1^{-1,p+2} & \longrightarrow & \mathcal{S}\Gamma_1^{0,p+2} & \longrightarrow & \mathcal{S}\Gamma_1^{1,p+2} \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow N & & \downarrow N & & \downarrow N & & \downarrow N \\
 \dots & \longrightarrow & \mathcal{S}\Gamma_1^{0,p} & \longrightarrow & \mathcal{S}\Gamma_1^{1,p} & \longrightarrow & \mathcal{S}\Gamma_1^{2,p} & \longrightarrow & \mathcal{S}\Gamma_1^{3,p} \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

where the dots indicate the pieces of degree zero in the total complex. To simplify the notation, we denote this total complex by T^\bullet .

We just have to prove that the natural projection π of the third row to $R^{\bullet,p}$ induces a quasi-isomorphism between T^\bullet and $R^{\bullet,p}$.

First, we can compute the cohomology of T^\bullet by the spectral sequence given by the filtration by rows. For the first page, we simply obtain $R^{\bullet,p}$ (on the third row but without shift of the degrees). Therefore, $H^\bullet(T^\bullet) \simeq H^\bullet(R^{\bullet,p})$. It remains to prove that this isomorphism is given by the projection π .

To do so, it suffices to prove that for any cocycle x of T^a , $a \leq 0$, if $\pi(x)$ is a coboundary, then x is a coboundary.

Let x be such an element. In what follows, we denote by d the horizontal coboundary maps and by d_T the coboundary maps of the total complex T^\bullet .

Write $x = x_1 + x_2 + x_3 \in T^a$ with $x_1 \in \mathcal{S}\Gamma_1^{a,p}$, $x_2 \in \mathcal{S}\Gamma_1^{a-1,p+2}$ and $x_3 \in K^{a,p+2}$. Let $y' \in R^{a-1,p}$ such that $dy' = \pi(x)$. Let $y_1 \in \mathcal{S}\Gamma_1^{a-1,p}$ such that $\pi(y_1) = y'$. Then $\pi(x_1 - dy_1) = 0$ and there exists $y_2 \in \mathcal{S}\Gamma_1^{a-2,p+2}$ such that $Ny_2 = x_1 - dy_1$. Set $y = y_1 + y_2$. Since x is a cocycle, $d_T(x - d_Ty) = 0$. In particular, $N(x_2 - dy_2) = -d(x_1 - dy_1 - Ny_2) = 0$. Since $N: \mathcal{S}\Gamma_1^{a-1,p+2} \rightarrow \mathcal{S}\Gamma_1^{a+1,p}$ is injective for $a \leq 0$, we deduce that $x_2 - dy_2 = 0$. Thus, $\iota x_3 = -d(x_2 - dy_2) = 0$. By the injectivity of ι , $x_3 = 0$. Finally, $x = d_T(y_1 + y_2)$ is a coboundary, which concludes the proof. \square

7. Tropical Clemens-Schmid sequence

The aim of this section is to prove Theorem 1.4.

7.1. Main theorem in an abstract setting. Let (C^\bullet, d_C) and (D^\bullet, d_D) be two bounded cochain complexes. Let $L: C^\bullet \rightarrow D^\bullet[2]$ be a morphism of cochain complexes. We say that L verifies the Hard Lefschetz property around 0 that we denote again by HL, if for any non-negative integer k , the map $C^{k-1} \xrightarrow{L} D^{k+1}$ is injective provided $k \leq 0$ and surjective provided $k \geq 0$.

Let $H^\bullet(C^\bullet)$ and $H^\bullet(D^\bullet)$ be the cohomology of C^\bullet and D^\bullet , respectively. Assume that $d_D L = L d_C$, and that both $L: C^\bullet \rightarrow D^\bullet[2]$ and the induced map on cohomology $L: H^\bullet(C^\bullet) \rightarrow H^\bullet(D^\bullet)[2]$ verify the hard Lefschetz property around 0 HL. Finally, set

$$K^\bullet := \ker(L: C^\bullet \rightarrow D^\bullet[2]) \quad \text{and} \quad R^\bullet := \text{coker}(L: C^\bullet[-2] \rightarrow D^\bullet).$$

Then we can endow K^\bullet and R^\bullet with the corresponding differential operators to get two cochain complexes. We denote their respective cohomology groups by $H^\bullet(K^\bullet)$ and $H^\bullet(R^\bullet)$.

THEOREM 7.1 (Abstract Clemens-Schmid sequence). *With the above notations, we get the two following long exact sequences depending on the parity of k*

$$\dots \rightarrow H^{k-1}(K^\bullet) \rightarrow H^{k-1}(C^\bullet) \xrightarrow{L} H^{k+1}(D^\bullet) \rightarrow H^{k+1}(R^\bullet) \rightarrow H^{k+1}(K^\bullet) \rightarrow \dots$$

PROOF. First, by the definitions which preceded, we have an exact sequence

$$0 \rightarrow K^\bullet[-1] \rightarrow C^\bullet[-1] \xrightarrow{L} D^\bullet[1] \rightarrow R^\bullet[1] \rightarrow 0.$$

By the injectivity of L on negative degrees, $K^k = 0$ if $k < 0$. In the same way, by the surjectivity of L on degrees at least -1 , we get $R^k = 0$ if $k > 0$. We can thus unfold the previous exact sequence of complexes into the diagram of Figure 5 where rows are all exact.

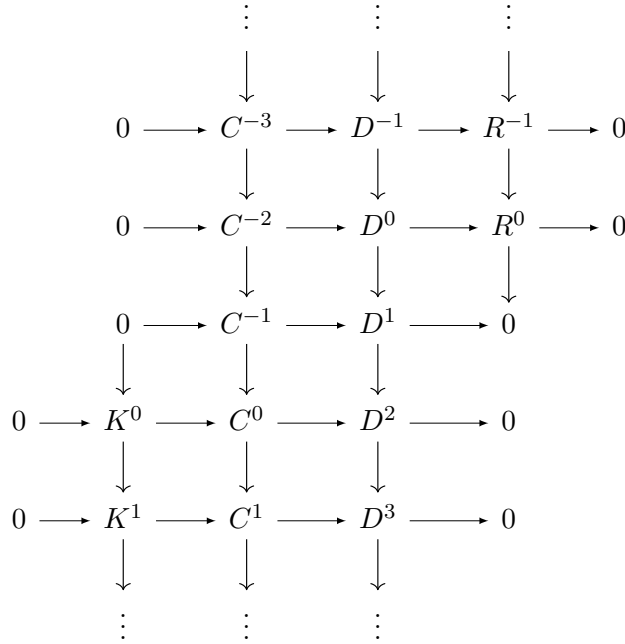


FIGURE 5

For a cochain complex E^\bullet and an integer l , denote by $E_{\leq l}^\bullet$ the truncation of E^\bullet to parts of degree at most l . From the above discussion, we thus get a short exact sequence

$$0 \rightarrow C_{\leq -1}^\bullet[-1] \xrightarrow{L} D_{\leq 1}^\bullet[1] \rightarrow R^\bullet[1] \rightarrow 0,$$

given by the rows on top of the diagram in Figure 5 up to the middle row.

This short exact sequence induces a long exact sequence

$$\begin{aligned}
 (7.1) \quad \dots \rightarrow H^k(C^\bullet) \xrightarrow{L} H^{k+2}(D^\bullet) \rightarrow H^{k+2}(R^\bullet) \rightarrow H^{k+1}(C^\bullet) \rightarrow \dots \\
 \dots \rightarrow H^{-2}(C^\bullet) \xrightarrow{L} H^0(D^\bullet) \rightarrow H^0(R^\bullet) \rightarrow ?
 \end{aligned}$$

where the question mark on the right hand side is the cokernel of the map $C^{-2} \xrightarrow{d} C^{-1}$, which is a priori different from $H^{-1}(C^\bullet)$.

Actually we can split this long exact sequence into short exact sequences. Indeed, we know that $H^{k-1}(C^\bullet) \xrightarrow{L} H^{k+1}(D^\bullet)$ is injective if $k \leq 0$. Thus, maps of the form $H^k(R^\bullet) \rightarrow H^{k-1}(C^\bullet)$ are zero in the sequence for any $k \leq -1$. For such an integer k , we get a short exact sequence

$$0 \rightarrow H^{k-2}(C^\bullet) \xrightarrow{L} H^k(D^\bullet) \rightarrow H^k(R^\bullet) \rightarrow 0.$$

By a symmetric argument, we get short exact sequences

$$0 \rightarrow H^k(K^\bullet) \rightarrow H^k(C^\bullet) \xrightarrow{L} H^{k+2}(D^\bullet) \rightarrow 0,$$

for any $k \geq 1$. By HL, we also know that we have an isomorphism

$$0 \rightarrow H^{-1}(C^\bullet) \rightarrow H^1(D^\bullet) \rightarrow 0.$$

Gluing all these short exact sequences, we almost get the long exact sequences of the theorem. In fact, we directly get the long exact sequence in which all the degrees are odd integers, i.e., with k in the statement of the theorem is even. To see this, note that for a positive even integer k , we have

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \underbrace{H^{-k-1}(K^\bullet)}_0 \rightarrow H^{-k-1}(C^\bullet) \xrightarrow{L} H^{-k+1}(D^\bullet) \rightarrow H^{-k+1}(R^\bullet) \rightarrow \underbrace{H^{-k+1}(K^\bullet)}_0 \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \underbrace{H^{-1}(K^\bullet)}_0 \rightarrow H^{-1}(C^\bullet) \xrightarrow{L} H^1(D^\bullet) \rightarrow \underbrace{H^1(R^\bullet)}_0 \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \underbrace{H^{k-1}(R^\bullet)}_0 \rightarrow H^{k-1}(K^\bullet) \rightarrow H^{k-1}(C^\bullet) \xrightarrow{L} H^{k+1}(D^\bullet) \rightarrow \underbrace{H^{k+1}(R^\bullet)}_0 \rightarrow H^{k-1}(K^\bullet) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

which is exactly the above exact sequences, combined together.

For the other exact sequence in the theorem, i.e., when all the degrees are even, we can apply a similar argument as above to treat all the other cases and reduce to proving the exactness of the following six-term sequence

$$(7.2) \quad 0 \rightarrow H^{-2}(C^\bullet) \rightarrow H^0(D^\bullet) \xrightarrow{d^{-1}} H^0(R^\bullet) \xrightarrow{d^0} H^0(K^\bullet) \xrightarrow{d^1} H^0(C^\bullet) \rightarrow H^2(D^\bullet) \rightarrow 0.$$

The exactness of the beginning of this sequence is a consequence of (7.1) and the injectivity of $L: H^{-2}(C^\bullet) \rightarrow H^0(D^\bullet)$. By a symmetric argument, we infer the exactness of the end of the sequence. It thus remains to describe the central map d^0 , and to prove the exactness of the sequence at other places, i.e., to show that $\text{Im}(d^{-1}) = \ker(d^0)$ and $\text{Im}(d^0) = \ker(d^1)$.

The end of the proof is essentially a diagram chasing. The definition of d^0 is given by the diagram depicted in Figure 6.

In this diagram, the usual maps have been removed for the sake of an increase in readability. The drawn arrows indicate in which order the diagram chasing is done. For instance, the red part has to be read as follows: take an element r in R^0 . There exists a preimage c of r in D^0 , etc. An exclamation mark above a red arrow indicates that the preimage is unique.

The red part defines d^0 by mapping r onto a'' . Moreover, it shows that a'' belongs to $\ker(K^0 \rightarrow K^1)$. The blue part proves that a'' is independent of the choice of c : if instead of c one chooses \tilde{c} , then b'' will not change. Finally, the green part proves that if r is a coboundary, then $c' = 0$, which implies that $a'' = 0$. Altogether, we thus get a well-defined map $d^0: H^0(R^\bullet) \rightarrow H^0(K^\bullet)$.

Moreover, one can deduce from this diagram that the decomposition $d^0 d^{-1}$ is zero. Indeed, if $c \in \ker(D^0 \rightarrow D^1)$ and if we denote by $\text{cl}(c)$ its class in H^0 , then we have $d^0 d^{-1}(\text{cl}(c)) = \text{cl}(a'')$. But $c' = 0$, and so $a'' = 0$.

By a somehow similar reasoning, we get $d^1 d^0 = 0$. Indeed, $d^1 d^0(\text{cl}(r)) = \text{cl}(b'')$ and b'' is a coboundary.

It remains to prove that $\ker(d^0) \subseteq \text{Im}(d^{-1})$ and that $\ker(d^1) \subseteq \text{Im}(d^0)$. For the first inclusion, we use the diagram depicted in Figure 7. The red elements are defined as previously. If $d^0(\text{cl}(r)) = 0$, then $a'' = 0$, and the blue part of the diagram follows. Then b' is in the kernel of the map $C^{-1} \rightarrow C^0$, and the map $L: H^{-1}(C^\bullet) \xrightarrow{\simeq} H^1(D^\bullet)$ is an isomorphism mapping $\text{cl}(b')$ onto $\text{cl}(c')$. Since c' is a coboundary, $\text{cl}(c') = 0$. Hence $\text{cl}(b') = 0$ and b' is a coboundary. From this, we get the green part. Finally, $c - \tilde{c} \in \ker(D^0 \rightarrow D^1)$ and $d^{-1}\text{cl}(c - \tilde{c}) = \text{cl}(r)$.

For the second inclusion $\ker(d^1) \subseteq \text{Im}(d^0)$, we use the diagram in Figure 8. Here a'' is an element of the kernel $\ker(K^0 \rightarrow K^1)$ such that $d^1 \text{cl}(a'') = 0$. Thus, b'' is a coboundary, and the red part follows. For the blue part, notice that c' is in the kernel of $D^1 \rightarrow D^2$. We get a

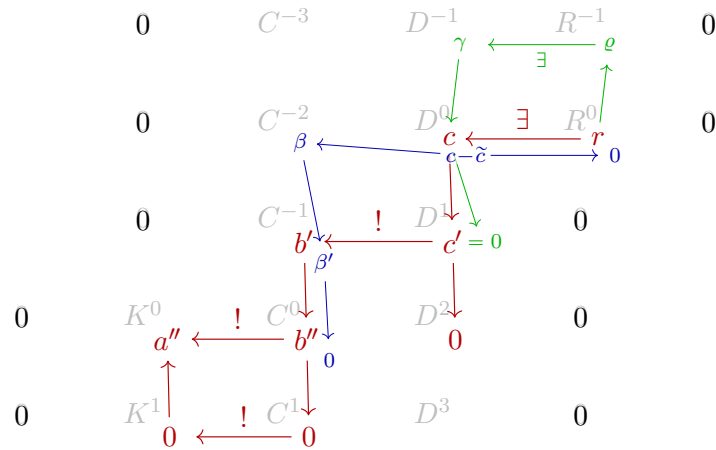


FIGURE 6. Definition of d^0 in the six-term exact sequence (7.2).

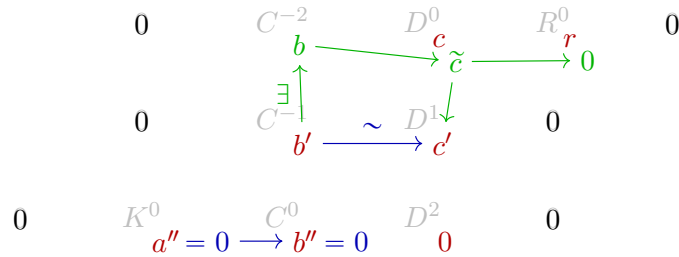


FIGURE 7. Proof of the inclusion $\ker(d^0) \subseteq \text{Im}(d^{-1})$.

cocycle $\tilde{b}' \in C^{-1}$ such that $Lcl(\tilde{b}') = cl(c')$. In particular, there exists a coboundary $\tilde{c}' \in D^1$ such that $L\tilde{b}' = c' - \tilde{c}'$. For the green part, we consider the element $b' - \tilde{b}'$, and every green arrow is clear. Finally, we construct a cocycle r in R^0 such that $d^0 cl(r) = cl(a'')$.

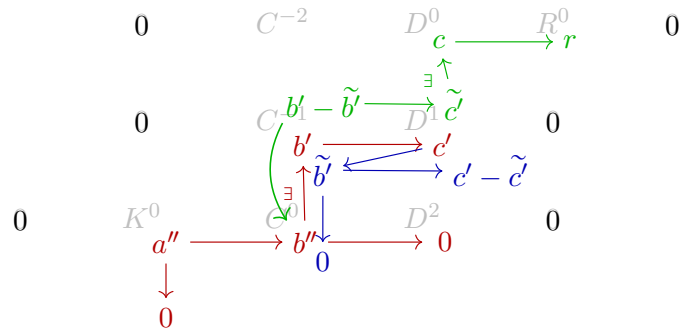


FIGURE 8. Proof of the inclusion $\ker(d^1) \subseteq \text{Im}(d^0)$.

Combining all the previous results together, we get that d^0 is well-defined, that $\text{Im}(d^{-1}) = \ker(d^0)$ and that $\text{Im}(d^0) = \ker(d^1)$. This implies that the sequence

$$0 \rightarrow H^{-2}(C^\bullet) \rightarrow H^0(D^\bullet) \xrightarrow{d^{-1}} H^0(R^\bullet) \xrightarrow{d^0} H^0(K^\bullet) \xrightarrow{d^1} H^0(C^\bullet) \rightarrow H^2(D^\bullet) \rightarrow 0$$

is exact. Gluing all these exact sequences together, we get the long exact sequence of the theorem consisting only of even degrees. This means for an odd integer $k \geq 3$, we have the exact sequence

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow \underbrace{H^{-k-1}(K^\bullet)}_0 \rightarrow H^{-k-1}(C^\bullet) \xrightarrow{L} H^{-k+1}(D^\bullet) \rightarrow H^{-k+1}(R^\bullet) \rightarrow \underbrace{H^{-k+1}(K^\bullet)}_0 \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow \underbrace{H^{-2}(K^\bullet)}_0 \rightarrow H^{-2}(C^\bullet) \rightarrow H^0(D^\bullet) \rightarrow H^0(R^\bullet) \rightarrow H^0(K^\bullet) \rightarrow H^0(C^\bullet) \\ &\hspace{20em} \rightarrow H^2(D^\bullet) \rightarrow \underbrace{H^2(R^\bullet)}_0 \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow \underbrace{H^{k-1}(R^\bullet)}_0 \rightarrow H^{k-1}(K^\bullet) \rightarrow H^{k-1}(C^\bullet) \xrightarrow{L} H^{k+1}(D^\bullet) \rightarrow \underbrace{H^{k+1}(R^\bullet)}_0 \rightarrow H^{k+1}(K^\bullet) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

This concludes the proof of the theorem. □

7.2. Tropical Clemens-Schmid sequence. We can now derive the tropical Clemens-Schmid sequence from the theorem established in the previous section. So let \mathfrak{X} be a rationally triangulable Kähler projective tropical variety and fix a unimodular triangulation X of \mathfrak{X} . Consider the monodromy operator N , of bidegree $(2, -2)$, acting on the tropical Steenbrink double sequence $\text{ST}_1^{\bullet, \bullet}$ associated to N . We know that N verifies the Hard Lefschetz property HL. In particular, $N: \text{ST}_1^{a-1, b} \rightarrow \text{ST}_1^{a+1, b-2}$ is injective if $a \leq 0$ and surjective if $a \geq 0$. Thus, the restriction $N: \text{ST}_1^{\bullet, b} \rightarrow \text{ST}_1^{\bullet, b-2}[2]$ is a monodromy operator verifying HL around 0 in the sense of Section 7.1. Moreover, we know that N induces an operator on $\text{ST}_2^{\bullet, \bullet} = \text{ST}_\infty^{\bullet, \bullet}$ which verifies HL. Thus, $N: H^\bullet(\text{ST}_1^{\bullet, b}) \rightarrow H^\bullet(\text{ST}_1^{\bullet, b-2})[2]$ also verifies HL around 0.

We can apply Theorem 7.1, setting $p = b/2$ and $q = a + b/2$, to get the long exact sequence $\dots \rightarrow H_s^{p, q}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H_{\text{trop}}^{p, q}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{N} H_{\text{trop}}^{p-1, q+1}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}) \rightarrow H_{\text{rel}}^{p-1, q+1}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H_s^{p, q+2}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow \dots$
 Setting

$$\begin{aligned} H^k(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}) &:= \bigoplus_{p+q=k} H_{\text{trop}}^{p, q}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}), \quad \text{and} \\ H_s^k(X, \mathbb{Q}) &:= \bigoplus_{p+q=k} H_s^{p, q}(X, \mathbb{Q}), \quad H_{\text{rel}}^k(X, \mathbb{Q}) := \bigoplus_{p+q=k} H_{\text{rel}}^{p, q}(X, \mathbb{Q}), \end{aligned}$$

we can sum up the above exact sequences to get the tropical Clemens-Schmid exact sequence

$$\dots \rightarrow H_s^k(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^k(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{N} H^k(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}) \rightarrow H_{\text{rel}}^k(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H_s^{k+2}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow \dots$$

as required. This finishes the proof of Theorem 1.4. □

8. Existence of cycles with a given Hodge class: proof of Theorem 1.1

In this section, we prove Theorem 1.1. Let \mathfrak{X} be a Kähler projective tropical variety of dimension d . Assume that \mathfrak{X} is rationally triangulable. We need to prove that any Hodge class α , i.e., any element α in $\ker(N: H_{\text{trop}}^{p, p}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}) \rightarrow H_{\text{trop}}^{p-1, p+1}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}))$, is represented by a tropical cycle. The statement that the image of the tropical cycle class map is in the kernel of the tropical monodromy follows from Theorem 5.2 and the same result proved by Mikhalkin and Zharkov [MZ14] for the eigenwave operator.

Replacing the underlying lattice by a rational multiple, we fix a unimodular triangulation X of \mathfrak{X} with open part Y , and we will show the existence of a Minkowski weight in $\text{MW}_{d-p}(Y)$ whose associated cycle in X represents the Hodge class α .

By the tropical Clemens-Schmid exact sequence, we know that

$$\ker\left(N: H_{\text{trop}}^{p, p}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}) \rightarrow H_{\text{trop}}^{p-1, p+1}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q})\right) = \text{Im}\left(H_s^{p, p}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H_{\text{trop}}^{p, p}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q})\right).$$

Moreover, by definition, we have

$$H_s^{p,p}(X, \mathbb{Q}) = \ker \left(\bigoplus_{v \in X_{f,0}} H^{2p}(v) \longrightarrow \bigoplus_{e \in X_{f,1}} H^{2p}(e) \right).$$

Thus, every Hodge class is represented by a cocycle of

$$K^{0,2p} = \bigoplus_{v \in X_{f,0}} H^{2p}(v).$$

The Hodge class α corresponds therefore to a collection of elements $\alpha_v \in H^{2p}(v)$, for v a vertex in the finite part X_f , with the compatibility condition

$$\forall e = uv \in X_{f,1}, \quad i_{v < e}^*(\alpha_v) = i_{u < e}^*(\alpha_u).$$

For each simplex δ in Y and integer k , let $MW_k(\delta) := MW_k(\Sigma^\delta)$. By Theorems 4.1 and 4.2 we have $H^{2p}(v, \mathbb{Q}) \simeq A^p(\Sigma^v, \mathbb{Q}) \simeq MW_{d-p}(v, \mathbb{Q})$. The fact that α is a cocycle and the isomorphism $H^{2p}(e, \mathbb{Q}) \simeq MW_{d-p}(e, \mathbb{Q})$ now imply that the Minkowski weights around each vertex coincides on the star fans of the incident edges. This shows that α_v glue together and produce a Minkowski weight $C = (Y_{\leq d-p}, w)$ of dimension $d - p$ on Y . As we explained in Section 3, this provides a tropical cycle \overline{C} on \mathfrak{X} .

It remains to prove that the cohomology class $\text{cl}(\overline{C})$ in $H_{\text{trop}}^{p,p}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q})$ associated to \overline{C} coincides with α . Let $\beta = (\beta_v)_v \in K^{0,2d-2p}$. For each vertex v in $X_{f,0}$ and for each face η of dimension $d - p$ containing v , we choose a rational coefficient $b_{v,\eta} \in \mathbb{Q}$ such that

$$\beta_v = \sum_{\eta > v} b_{v,\eta} X_\eta \in A^{d-p}(\Sigma^v, \mathbb{Q}),$$

where the sum is over faces η of dimension $d - p$. The local isomorphism between the Chow ring and the Minkowski weights given in Theorem 4.2 verifies the following equality for any $v \in X_{f,0}$

$$\text{deg}(\alpha_v \cdot \beta_v) = \sum_{\eta > v} w(\eta) b_{v,\eta}.$$

Hence,

$$\text{deg}(\alpha \cdot \beta) = \sum_{v \in X_{f,0}} \sum_{\eta > v} w(\eta) b_{v,\eta}.$$

Moreover, by Section 5.4, the pairing between w and β is

$$\langle \beta, w \rangle = \sum_{v \in X_{f,0}} \sum_{\eta > v} w(\eta) b_{v,\eta}.$$

Using Theorem 5.6, we get

$$\int_{\overline{C}} \beta = \langle \beta, w \rangle = \text{deg}(\alpha \cdot \beta)$$

which shows that the class of \overline{C} coincides with α .

We proved that any Hodge class comes from a tropical cycle, which is the statement of Theorem 1.1. □

9. Proof of Theorem 1.3

In this final section, we prove the equivalence of numerical and homological equivalence for tropical cycles on Kähler projective tropical varieties which admit a rational triangulation.

Let \mathfrak{X} be such a tropical variety of dimension d and consider a unimodular triangulation X of \mathfrak{X} , which exists after replacing the lattice by a rational multiple. The monodromy operator N is a Lefschetz operator on ST_1^{\bullet} and induces a Lefschetz operator on the cohomology of the tropical Steenbrink double sequence. From this, and using the Steenbrink-Tropical comparison

theorem, we infer that $H_{\text{trop}}^{p,p}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}) \simeq H^0(\text{ST}^{\bullet, 2p}(X))$ can be decomposed as a direct sum of the form

$$H^{p,p}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}) = \ker\left(N: H^{p,p}(\mathfrak{X}) \rightarrow H^{p-1,p+1}(\mathfrak{X})\right) \oplus \text{Im}\left(N: H^{p+1,p-1}(\mathfrak{X}) \rightarrow H^{p,p}(\mathfrak{X})\right),$$

where all the cohomology groups are with rational coefficients. Similarly, we get for $q = d - p$,

$$H^{q,q}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}) = \ker\left(N: H^{q,q}(\mathfrak{X}) \rightarrow H^{q-1,q+1}(\mathfrak{X})\right) \oplus \text{Im}\left(N: H^{q+1,q-1}(\mathfrak{X}) \rightarrow H^{q,q}(\mathfrak{X})\right).$$

Consider as in Section 5 the polarization ψ on $\text{ST}_1^{\bullet, \bullet}$ which induces a polarization on the cohomology. The bilinear pairing ψ restricted to $H^{p,p}(\mathfrak{X}) \times H^{q,q}(\mathfrak{X})$ coincides moreover with the Poincaré duality pairing. The operator N verifies $N^* = -N$, for N^* the adjoint of N with respect to ψ . It follows that the above decompositions of $H^{p,p}(\mathfrak{X})$ and $H^{q,q}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q})$ are orthogonal to each other, namely that

$$\ker\left(N: H^{p,p}(\mathfrak{X}) \rightarrow H^{p-1,p+1}(\mathfrak{X})\right) \perp \text{Im}\left(N: H^{q+1,q-1}(\mathfrak{X}) \rightarrow H^{q,q}(\mathfrak{X})\right),$$

and similarly,

$$\ker\left(N: H^{q,q}(\mathfrak{X}) \rightarrow H^{q-1,q+1}(\mathfrak{X})\right) \perp \text{Im}\left(N: H^{p+1,p-1}(\mathfrak{X}) \rightarrow H^{p,p}(\mathfrak{X})\right).$$

From the non-degeneracy of ψ on tropical cohomology, we infer that the induced pairing by the polarization between $\ker\left(N: H^{p,p}(\mathfrak{X}) \rightarrow H^{p-1,p+1}(\mathfrak{X})\right)$ and $\ker\left(N: H^{q,q}(\mathfrak{X}) \rightarrow H^{q-1,q+1}(\mathfrak{X})\right)$ is a duality pairing.

By Theorem 1.1 the two kernels above are generated by the classes of tropical cycles of codimension p and q , respectively. Moreover, the intersection between cycles is compatible with the polarization evaluated at the pair consisting of the cohomological classes associated to the two cycles. With this preparation, we can now finish the proof.

PROOF OF THEOREM 1.3. Let p be a fixed integer between 0 and d . A tropical cycle of codimension p which is homologically trivial has a trivial intersection with any tropical cycle of codimension $q = d - p$. This proves the implication (Homological equivalence) \Rightarrow (Numerical equivalence).

We now prove the other direction. Consider a tropical cycle C of codimension p in \mathfrak{X} and suppose that C has trivial intersection with any tropical cycle of codimension $q = d - p$. It follows from Theorem 1.1 that $\text{cl}(C)$ has a trivial pairing with any element of $\ker\left(N: H^{q,q}(\mathfrak{X}) \rightarrow H^{q-1,q+1}(\mathfrak{X})\right)$. Moreover, it belongs to $\ker\left(N: H^{p,p}(\mathfrak{X}) \rightarrow H^{p-1,p+1}(\mathfrak{X})\right)$. Since the polarization induces a non-degenerate pairing between the two kernels, we finally infer that $\text{cl}(C)$ vanishes. This proves the implication (Numerical equivalence) \Rightarrow (Homological equivalence), and the theorem follows. \square

A multidimensional generalization of Symanzik polynomials

Abstract : Symanzik polynomials are defined on Feynman graphs and they are used in quantum field theory to compute Feynman amplitudes. They also appear in mathematics from different perspectives. For example, recent results show that they allow to describe asymptotic limits of geometric quantities associated to families of Riemann surfaces.

In this paper, we propose a generalization of Symanzik polynomials to the setting of higher dimensional simplicial complexes and study their basic properties and applications. We state a duality relation between these generalized Symanzik polynomials and what we call Kirchhoff polynomials, which have been introduced in recent generalizations of Kirchhoff's matrix-tree theorem to simplicial complexes. Moreover, we obtain geometric invariants which compute interesting data on triangulable manifolds. As the name indicates, these invariants do not depend on the chosen triangulation.

We furthermore prove a stability theorem concerning the ratio of Symanzik polynomials which extends a stability theorem of Amini to higher dimensional simplicial complexes. In order to show that theorem, we will make great use of matroids, and provide a complete classification of the connected components of the exchange graph of a matroid, a graph which encodes the exchange properties between independent sets of the matroid. We hope that this result could be of independent interest.

Finally, we explain how to generalize Symanzik polynomials to the setting of matroids over hyperfields defined recently by Baker and Bowler.

1. Introduction

The aim of this paper is to introduce a family of polynomials that we call *generalized Symanzik polynomials*, and to study their geometric and combinatorial properties.

Classical Symanzik polynomials arising in quantum field theory are associated to *Feynman graphs* and used for computing Feynman amplitudes. They are defined as follows.

Let $G = (V, E)$ be a connected graph with vertex set V and edge set E . Let $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_v)_{v \in V}$ be a collection of vectors called the *external momenta* such that each \mathbf{p}_v , the external momentum of $v \in V$, is an element of the real vector space \mathbb{R}^D , for some positive integer D , which is endowed with a Minkowski bilinear form. Moreover, we suppose that the collection of external momenta verify the conservation of momenta hypothesis, namely that $\sum_{v \in V} \mathbf{p}_v = 0$. Such a pair (G, \mathbf{p}) is called a *Feynman graph*. In what follows we will only consider the case $D = 1$, but the results can be extended to the more general setting as in [ABBF16].

The first Symanzik polynomial denoted by ψ_G is defined by

$$(1.1) \quad \psi_G(x) := \sum_{T \in \mathcal{T}} \prod_{e \notin T} x_e,$$

where \mathcal{T} denotes the set of spanning trees of G , where $x = (x_e)_{e \in E}$ is a collection of variables indexed by the edges of the graph, and the product for a spanning tree $T \in \mathcal{T}$ is on all edges of G which are not in T . (A spanning tree of $G = (V, E)$ is a connected subgraph of G which has vertex set V and which does not have any cycle.) Note in particular that the first Symanzik polynomial does not depend on the external momenta.

The second Symanzik polynomial denoted ϕ_G is defined by

$$(1.2) \quad \phi_G(\mathbf{p}, x) := \sum_{F \in \mathcal{SF}_2} q(F) \prod_{e \notin F} x_e.$$

In this formula, \mathcal{SF}_2 denotes the set of spanning forests of G which have two connected components. (A spanning forest of G is a subgraph with vertex set V and without any cycle.) For a spanning forest $F \in \mathcal{SF}_2$, the term $q(F)$ is defined by $q(F) := -\langle \mathbf{p}_{F_1}, \mathbf{p}_{F_2} \rangle$ where F_1 and F_2 are the two connected components of F , and where, for $i \in \{1, 2\}$, \mathbf{p}_{F_i} is the sum of the momenta of vertices in F_i . Using these polynomials, the Feynman amplitude can be computed then as a path integral of $\exp(-i\phi_G/\psi_G)$.

The above polynomials have many known interesting properties, most of them are summarized in [BW10]. In this paper, we present natural generalizations of the above definitions. In particular, we are going to extend the setting to higher dimensional simplicial complexes. Other generalizations already exist, see e.g., [GR07] and [KRTW10], though the purpose is different from ours. In addition to introducing a larger family of polynomials with interesting properties, we hope that this generalization will provide a better understanding of these polynomials and will widens their applications.

Symanzik polynomials are known to have tight connection to other concepts in mathematics. Before going to the heart of our construction and presenting an overview of our results, we would like to start by highlighting some of these links and making a series of comments to motivate the study undertaken in this paper.

First, Symanzik polynomials of graphs are known to be in a sense *dual* to Kirchhoff polynomials. These latter polynomials are those obtained applying the well-known (weighted) Kirchhoff matrix-tree theorem, which counts the number of spanning trees of a graph as the determinant of a matrix linked to the Laplacian of the graph. Recently, the notion of a spanning tree has been extended to the case of higher dimensional simplicial complexes, and Kirchhoff's theorem has been generalized to this setting, c.f. [DKM09, Lyo09] and [BK16]. In order to generalize the definition of Symanzik polynomials to this setting, it is thus natural to exploit and formulate an appropriate version of the duality theorem in this setting. This is what we have done to find our definition of generalized Symanzik polynomials. In the classical case, this duality infers a determinantal formula for Symanzik polynomials. This is still true after the generalization.

This leads us to our second point which concerns *determinantal probability measures* (see for instance [Lyo03]). This tight relation between Kirchhoff polynomials, spanning trees and determinants is studied thoroughly in the paper [Lyo09] of Lyons on random complexes. In fact, what appears here are determinantal probabilities. For instance, the probability for a uniform (or suitably weighted) spanning tree of a graph to contain a specific edge can be easily computed because it is given by the determinant of some matrix. The Laplacian of the graph is used to define this matrix. In the same way, Kirchhoff polynomials are also obtained using this Laplacian. By analogy, the matrix whose determinant gives the first Symanzik polynomial allows us to compute the probability for a spanning tree not to contain a specific edge. In this paper, we will also generalize Kirchhoff and Symanzik polynomials in two different ways: first to *spanning forests* and second to *higher order determinants* (the classical definition is of order two). This naturally leads to *hyperdeterminants* which are also linked to determinantal probability measures as it was shown in [EG09].

This brings us naturally to the third point, which is the link to *the theory of matroids*. Matroids are mathematical objects obtained by abstracting and generalizing some of the main notions of linear algebra and, in particular, of graph theory, as spanning trees for example (we refer to [Ox11] for further information). In [BW10], the link between matroid theory and Symanzik polynomials is noticed. We go further than [BW10] by defining Kirchhoff

and Symanzik polynomials for matroids and for their recent generalization *matroids over hyperfields* obtained by Baker and Bowler in [BB16] (see also [BB19]). This generalization is needed to understand the generalized operations of deletion and contraction, which are less natural than in the case of graphs. These two operations are at the heart of many properties of classical Kirchhoff and Symanzik polynomials, in particular deletion-contraction formula and a partial factorization of the polynomials used, for instance, in [Bro15] (see below). Behind all this, there is the multivariate Tutte polynomial, which is also known as the Potts model partition function by physicists (cf. [Sok05, (4.11) and (2.18)]). Unfortunately, a canonical Tutte polynomial for matroids over hyperfields does not seem to exist. Though, using the recent work of Dupont, Fink and Moci in [DFM18] (itself based on [KMT18]), we will see that Kirchhoff and Symanzik polynomials over hyperfields still preserve all the properties one could expect of Tutte polynomial and its specializations.

Apart from this generalization, we show that matroids play a major role in understanding some other interesting features of the Symanzik polynomials. These purely combinatorial results about matroids, which we hope should be of independent interest, concern the exchange properties between *independent sets* of a general matroid, which generalize well-known exchange properties between bases. For a connected graph, it is well-known that any spanning tree can be obtained from any other by a sequence consisting of exchanging one edge at a time. The exchange properties between spanning trees and spanning 2-forests in a graph were studied by Amini in [Ami19] for the purpose of understanding the asymptotic of some geometrically defined quantities in a family of Riemann surfaces. Generalizing the definition of the exchange graph of a graph from [Ami19] to any general matroid, we provide a complete characterization of the connected components of this graph and use it to generalize the *stability theorem* of [Ami19] to higher dimensional simplicial complexes.

Let us make two further remarks at this point. It is well-known that the connectivity properties of different kind of exchange graphs is the first step for creating simple and efficient random generation of bases based on Markov chains, c.f. [FM92] and the recent work of [ALOGV19] based on combinatorial Hodge theory for matroids [AHK18]. What we prove in this paper is another geometric manifestation of the exchange properties in matroids. Furthermore, the results we obtain on the exchange graph of a matroid has very close ties to an old conjecture of White on toric ideals of matroids [Whi80, Bla08, LM14]. In fact, by the work of [Bla08], a part of White's conjecture can be rephrased as whether a particular generalization of our exchange graph is always connected, c.f. Remark 5.16. So our results and methods might lead to a new approach in that direction.

As we mentioned previously, Symanzik polynomials for graphs originated from Physics, and recent advances has shown that their properties govern the mathematics of Feynman amplitudes, see e.g., BB03, BEK06, Bro15, BS12, BY11. In particular, Brown shows in [Bro15] how certain arithmetic factorization properties satisfied by the Symanzik polynomials of graphs and their minors play a crucial role in defining the *cosmic Galois group*, a Galois group for Feynman amplitudes. We extend these properties to generalized Symanzik polynomials in this article.

From a point of view inclined towards Physics, we will show that our generalized polynomials present a certain stability (rather different from the stability theorem evoked above). This means that if we start with a sufficiently nice topological space \mathcal{S} , then the Symanzik polynomials of any triangulation of \mathcal{S} come from (more precisely can be factorized into) the same Symanzik polynomial, which can be directly defined then as the Symanzik polynomial of \mathcal{S} . In other words, this stability indicates that these polynomials might be useful for computing interesting features of continuous objects by approximating them with discrete ones. For instance, path integrals are fundamental in the formulation of quantum field theory. But they are generally ill-defined. A way to go through this difficulty is to discretize the paths, and Regge calculus gives a way to do this (originally in the framework of quantum gravity), see,

e.g., the original article of Regge [Reg61], the introductory paper [Wil92], and a more recent approach [Ori07] in the framework of group field theory. We have found striking similarities between the geometry of generalized Symanzik polynomials and Regge calculus, although at this point we are not still able to formalize this.

About the geometrical data computed by generalized Symanzik polynomials, in simple cases as compact orientable manifolds endowed with a volume form, the Symanzik polynomial simply computes the volume of the manifold (setting the good values to variables). There is not always a simple interpretation for the value computed in more complex cases. However, for general metric graphs, the first Symanzik polynomial evaluated at positive reals computes the volume of the Jacobian torus of the graph, which is defined in [KS00].

The Symanzik polynomials of graphs has been generalized in the context of non-commutative quantum field theory [KRTW10]. The article [KRV11] shows how these new polynomial invariants derive from the Bollobás-Riordan polynomial [BR02], which is a generalization of the Tutte polynomial for ribbon graphs. The Bollobás-Riordan polynomial itself has been generalized to higher rank graphs (which are, under some conditions, dual to some pseudo simplicial complexes of higher dimension) in [AGH13] and [Avo16]. Two recent papers [KMT18] and [DFM18] provides a generalization of these polynomials in the context of Hopf algebras. Another recent paper [BC17] studies this kind of generalization for a different purpose. It concerns the geometric Brownian motion, also linked to quantum theory. As far as we know, multidimensional generalizations of Symanzik polynomials have not been studied prior to this work, and it would be certainly valuable to compare our approach to the above cited works.

Symanzik polynomials of graphs form a family of graph polynomials with very interesting properties. As already seen, they are specializations of the multivariate Tutte polynomial. Recent papers study graph polynomials which usually reveal surprising geometric properties. It is not hard to prove that the first Symanzik polynomials of the connected graphs verify the half-plane property, i.e., they are nonvanishing whenever all the variables lie in the open right complex half-plane. The papers [COSW04, Brä07] and [BBL07] study invariant polynomials verifying this property and other linked properties. They might be extended in some cases to our generalization.

Moreover, in [Ami19], it has been proved that a bounded geometrical deformation of the graph only induces a variation of the ratio of the two Symanzik polynomials that is bounded independently of the initial geometry. At the end of this article, we will generalize this stability theorem. The initial goal of Amini in [Ami19] was to give a combinatorial proof of a result he obtained with Bloch, Burgos Gil and Fresán in [ABBF16]. In that work, they expressed the asymptotic of the Archimedean height pairing between two 0-divisors on degenerating families of Riemann surfaces as to the ratio of the two Symanzik polynomials. The generalization presented in this paper should have links to the generalization of that work to higher dimensional varieties. In another direction, Scott and Sokal study in [SS14] strict monotonicity properties of the inverse powers of the Kirchhoff polynomials of graphs and matroids. They give a complete characterization of the exponents in the strict monotonicity range for series-parallel graphs, and raise several questions and conjectures. One might naturally wonder if such results could be generalized to the setting of generalized Symanzik polynomials studied in this paper.

In the rest of this introduction, we give a quick overview of the main results of this paper.

1.1. The generalization. The idea of the generalization comes from Kirchhoff's matrix-tree theorem (observed by Kirchhoff [Kir47]) in its weighted form. We briefly sketch this idea here. Example 2.9 contains all the details. Let $G = (V, E)$ be a connected graph of vertex set V and edge set $E = \{e_1, \dots, e_n\}$. Set a weight $y_e \in \mathbb{R}$ on each edge $e \in E$. Set Q the incident

matrix of G , and Y the diagonal matrix $\text{diag}(y_{e_1}, \dots, y_{e_n})$. Then, the theorem states that

$$(1.3) \quad \sum_{T \in \mathcal{T}} \prod_{e \in T} y_e = \det(\tilde{Q}Y\tilde{Q}^\top),$$

where we removed a row from Q to get \tilde{Q} . Let $E' \subseteq E$ be a subset of $|V| - 1$ edges. We restrict the matrix \tilde{Q} to the columns indexed by the elements of E' . We denote this square matrix by $\tilde{Q}_{E'}$. A step of the proof is to notice that $\det(\tilde{Q}_{E'})^2$ equals 1 if E' corresponds to a spanning tree of G , 0 otherwise. Thus, the first Symanzik polynomial verifies

$$\psi_G(x) = \sum_{\substack{E' \subseteq E \\ |E'| = |V| - 1}} \det(\tilde{Q}_{E'})^2 \prod_{e \notin E'} x_e.$$

In the right-hand member, the graph G is almost absent. The main data we use is its incident matrix. Thus, one can define the Symanzik polynomial of any matrix.

However, we needed to delete a row from the matrix. When the matrix does not come from graphs, we could have to remove several rows, and the result could depend on the chosen rows. To avoid any problem, we introduce a very useful tool: the standard inner product on the exterior algebra. This is used by Lyons in [Lyo03] to deal with a subject not far from ours, as explained above.

Before going through details of our constructions, we need to introduce some terminology which will be used all through the paper.

Notations and conventions. If p, q are integers with $p \leq q$, then the set $\{p, p+1, \dots, q\}$ will be written $[p..q]$, or more simply $[q]$ if $p = 1$. Let I be a finite set. Then $|I|$ is its cardinality and $\mathcal{P}(I)$ is its power set. If $J \in \mathcal{P}(I)$ is a subset of I and if there is no ambiguity, then $J^c := I \setminus J$ denotes the complement of J . If $i \in I^c$, then $I + i := I \cup \{i\}$, and if $i \in I$, then $I - i := I \setminus \{i\}$ (using these notations means, respectively, that $i \in I^c$ and that $i \in I$). If there is an ordering on the elements I , we will also use I to denote the ascending family of elements in I (see below).

Let n be a positive integer. In the whole article, $x = (x_1, \dots, x_n)$ will be a family of variables. $\mathbb{Z}[x]$ is the ring of polynomials over \mathbb{Z} with variables x_1, \dots, x_n . Following a usual notation, if $I \subseteq [n]$,

$$x^I := \prod_{i \in I} x_i.$$

If Δ is a set, $\mathbb{Z}\langle\Delta\rangle$ is the free \mathbb{Z} -module on Δ . By convention, if $a \in \mathbb{Z}$, then

$$a^0 = \begin{cases} 0 & \text{if } a = 0, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Let n, p be positive integers. Then $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{Z})$ will denote the set of matrices with p rows and n columns over \mathbb{Z} and $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ is a simpler notation for $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z})$. If $P \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{Z})$, then $P^\top \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{Z})$ denotes the transpose of P .

Let n, p, q be positive integers. Let $u = (u_1, \dots, u_n)$ be a family of n vectors in \mathbb{R}^p . Then, when there is no ambiguity, the same letter in uppercase, U , will denote the matrix in $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ whose columns are the coordinates of the vectors of u . Reciprocally, if U is a matrix, then one can associate to U a family of vectors u . If $I = (i_1, \dots, i_q)$ is a family of elements of $[n]$, then u_I will be the family $(u_{i_1}, \dots, u_{i_q})$, and $U_I \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ will be the associated matrix. We will sometimes use this notation for variables: $x_I := (x_{i_1}, \dots, x_{i_q})$. Moreover, u^\top will be the family of p vectors in \mathbb{R}^n associated to U^\top . If I is an (unordered) subset of $[n]$ of size q , then u_I , resp. U_I , will denote the family $u_{(i_1, \dots, i_q)}$, resp. the matrix $U_{(i_1, \dots, i_q)}$, where $I = \{i_1, \dots, i_q\}$ and $i_1 < i_2 < \dots < i_q$.

If u and v are two families of elements of a same set of respective size n and m , then $u \star v$ will denote the concatenation of the two families, i.e.,

$$u \star v = (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m).$$

By extension, if $U \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ and $V \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$ are two matrices, then $U \star V$ is the matrix of $\mathcal{M}_{p,n+m}(\mathbb{R})$ associated to $u \star v$.

Let $\bigwedge \mathbb{R}^p = \bigoplus_{l \geq 0} \bigwedge^l \mathbb{R}^p$ be the exterior algebra over \mathbb{R}^p . With the notations of the previous paragraphs, we will denote by $\mathbf{u} \in \bigwedge^n \mathbb{R}^p$, resp. $\mathbf{u}_I \in \bigwedge^q \mathbb{R}^p$, the exterior product $u_1 \wedge \dots \wedge u_l$, resp. $u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_q}$. We endow $\bigwedge \mathbb{R}^p$ with the standard inner product: if n and m are two nonnegative integers, if u, v are two families of respective sizes n and m in \mathbb{R}^p , then

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{cases} \det(U^\top V) & \text{if } n = m, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We have the associated norm $\|\mathbf{u}\| := (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}$.

Note that, if e is the standard basis of \mathbb{R}^p , then the family $(\mathbf{e}_I)_{I \subseteq [p], |I|=l}$ forms an orthonormal basis of $\bigwedge^l \mathbb{R}^p$.

We have the standard inclusion $\mathbb{Z}^p \subset \mathbb{R}^p$. If F is a vector subspace of \mathbb{R}^p , then we denote by $F_{\mathbb{Z}}$ the sublattice $F \cap \mathbb{Z}^p$. If u is a family of vectors in $\mathbb{Z}^p \subset \mathbb{R}^p$, then we denote by $\mathbb{Z}u$ the sub- \mathbb{Z} -module generated by u , and by $\langle u \rangle$ the subspace of \mathbb{R}^p spanned by u . If A is a sub- \mathbb{Z} -module of \mathbb{Z}^p , we will denote by $\|A\|$ the covolume of A , i.e., the value $\|\mathbf{f}\|$ where f is any basis of A .

If $U \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{Z})$, then $\text{Im}(U)$, resp. $\ker(U)$, will always denote vector subspaces, i.e., the image, resp. kernel, of U in \mathbb{R}^p , resp. \mathbb{R}^n .

Let n and p be two positive integers. Let u be a family of n vectors of $\mathbb{Z}^p \subset \mathbb{R}^p$. Let r be the rank of u . We define the Symanzik polynomial of u by

$$\text{Sym}_2(u; x) := \frac{1}{\|\langle u \rangle_{\mathbb{Z}}\|^2} \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=r}} \|\mathbf{u}_I\|^2 x^{I^c}.$$

Actually, one can replace the exponents 2 by any nonnegative even integer k . We will call k the *order* of the polynomial (see Definition 2.10). The order 0 has some theoretical interests, as we will see for matroids. Moreover, Theorem 6.1 about stability holds for every orders. That is why, we will study the case of all the orders in this article. This widens the set of interesting polynomials. However, in this introduction, we set $k = 2$.

The main result of Section 2 is the close link between Symanzik polynomials and the Kirchhoff theorem. To enlight this link, we introduce the Kirchhoff polynomial of u :

$$\text{Kir}_2(u; x) := \frac{1}{\|\langle u \rangle_{\mathbb{Z}}\|^2} \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=r}} \|\mathbf{u}_I\|^2 x^I.$$

Then, the link is given by the duality theorem (Theorem 2.13). If v is a family of maximal rank of $\ker(U)_{\mathbb{Z}}$, then the theorem states that there exists an explicit factor $c \in \mathbb{Q}$ such that

$$\text{Kir}_2(v^\top; x) = c \text{Sym}_2(u; x).$$

Here is the generalization of the second Symanzik polynomial in a specific case (see Definition 2.17 for the general case). If a is an element of $\mathbb{Z}u$, then the Symanzik polynomial of u with parameter a is

$$\text{Sym}_2(u; (a); x) := \text{Sym}_2(u \star (a); x \star (0)).$$

The justification of the definitions of Symanzik polynomials without parameters and of Kirchhoff polynomials are given respectively in Examples 2.12 and 2.9. However, the link between Symanzik polynomials with parameters and second Symanzik polynomials is harder

to establish. We need Proposition 2.20. In this proposition, some orientations hidden in Symanzik polynomials with parameters appear. These orientations are already well-known. They are called *chirotopes* in the theory of oriented matroid (see [FL78, GR13]). One can think about them in the following way. We take a spanning 2-forests (F_1, F_2) of a graph. Then we can orient all edges that link F_1 and F_2 , from F_1 to F_2 . Much detail is given in Example 2.21.

Propositions 2.6, 2.16 and 2.19 state determinantal formulæ similar to that of Equation (1.3). For instance, let v be a basis of $\ker(U)$ belonging to \mathbb{Z}^n , $a \in \mathbb{Z}u$ and $b \in \mathbb{Z}^n$ such that $Ub = a$. Set $\tilde{v} := v \star (b)$. Then,

$$\text{Sym}_2(u; (a); x) = c \det(\tilde{V}^\top X \tilde{V}),$$

for some factor c we explicit in Proposition 2.16, where $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$.

1.2. Deletion-contraction formula and partial factorization. Among the many interesting properties of classical Symanzik polynomials, we will generalize two of them of particular interest.

The first one is the deletion-contraction formula (see, e.g., [BW10, Bro15]). In the classical case, if $G = (V, E)$ is a graph and if e is edge of G , then

$$(1.4) \quad \psi_G(x) = x_e \psi_{G-e}(x_{E-e}) + \psi_{G/\{e\}}(x_{E-e}),$$

where $G - e$ is the graph without e and $G/\{e\}$ is the graph obtained from G by contracting e (i.e., we removed the edge e and identify the two extremities of e). We will provide a generalized version of this property for polynomials defined in this paper. In the context of families of vectors, the result will be the same except that deletion and contraction are more involved to define. For this reason, we do not give more details in this introduction and refer to Section 4.

The second formula we generalize is a partial factorization, used for example in [Bro15]. Let $G = (V, E)$ be a graph and let $\gamma = (V, F)$ be a spanning subgraph of G . If G/γ is the graph obtained from G by contracting every edge in γ , then

$$(1.5) \quad \psi_G(x) = \psi_\gamma(x_F) \psi_{G/\gamma}(x_{E \setminus F}) + R_{\gamma, G}^\psi(x),$$

where the degree of $R_{\gamma, G}^\psi(x)$ in x_F is greater than the degree of $\psi_\gamma(x_F)$. See Proposition 4.13 to see precisely what we mean here. This time, the generalized formula is the same up to a factor. Once more, we refer to Section 4 for more details.

1.3. Geometrical aspects of Symanzik polynomials. Following an idea of Kalai in [Kal83], Duval, Klivans and Martin stated in [DKM09] a generalization of Kirchhoff's theorem for simplicial complexes. This theorem counts the number of generalized spanning trees with some weights. In Section 3.1, we will call these spanning trees *0-forests* (or, more exactly, we use the more convenient definition of spanning trees of Bernardi and Klivans in [BK16]). Readers who are not familiar with simplicial homology theory could consult the details in Section 3.1.

The definition of a 0-forest is really simple: it is a maximal simplicial subcomplex without nontrivial cycles of maximal dimension. To be more precise, let Δ be a finite simplicial complex of dimension d , and let ∂_Δ be the d -th boundary operator of Δ . Let Γ be a subcomplex of Δ with the same $(d - 1)$ -skeleton, and let ∂_Γ be the d -th boundary operator of Γ . Then, for an integer κ , Γ is a κ -forest of Δ if $\ker(\partial_\Gamma) = \{0\}$ and $\text{rk}(\partial_\Delta) - \text{rk}(\partial_\Gamma) = \kappa$. Forests in higher dimensions mostly behave like forests in graphs. Moreover, the two notions coincide on connected graphs. In this case, κ -forests are the spanning forests with $\kappa + 1$ connected components.

The boundary operator ∂_Δ is a linear map. Let U be the associated matrix for some natural bases of simplicial d -chains and of simplicial $(d - 1)$ -chains. It is natural to define the Symanzik

polynomial, resp. Kirchhoff polynomial, of Δ as the one of u . Then $\text{Kir}_2(\Delta; x)$ is what we get applying the higher dimensional Kirchhoff weighted theorem to Δ (see Theorem 3.7):

$$\text{Kir}_2(\Delta; x) = |\text{Tor}(\mathbb{H}_{d-1}(\Delta))|^2 \sum_{\Gamma \text{ 0-forest of } \Delta} |\mathbb{B}_{d-1}(\Delta)/\mathbb{B}_{d-1}(\Gamma)|^2 \prod_{\delta \text{ } d\text{-face of } \Gamma} x_\delta,$$

where $\mathbb{B}_{d-1}(\Delta)$, resp. $\mathbb{B}_{d-1}(\Gamma)$, is the group of $(d - 1)$ -boundaries of Δ , resp. of Γ , and $\text{Tor}(\mathbb{H}_{d-1}(\Delta))$ denotes the torsion part of the $(d - 1)$ -th homology group of Δ .

Unlike the case of graphs, setting $x = (1, \dots, 1)$ does not give the number of 0-forests. Finding this number is difficult in general: there exist examples where all the coefficients of the polynomial are not equal (look at Example 3.27). Knowing the value of the Kirchhoff polynomial for all order k might help us.

However, the weighted number of 0-forests for the order $k = 2$ seems to be the most natural object to consider. The first reason is in [BK16]. The authors explain that this number counts 0-forests of Δ taking into account a *fitted orientation*. The second reason is that Kalai computed in [Kal83] the weighted number of 0-forests of the complete d -dimensional simplicial complex over N vertices. He obtains a pretty nice formula: $N^{\binom{N-2}{d}}$.

Now, for each facet δ of Δ , assign to the variable x_δ a positive number $y_\delta \in \mathbb{R}_+$ that represents the volume of δ . This is natural. For example, let \mathcal{S} be a compact oriented manifold of dimension d , and let ω be a volume form on it. Let Δ be a triangulation of \mathcal{S} (see Section 3.4 for a rigorous definition of triangulation). Then ω induces a volume $y_\delta \in \mathbb{R}_+$ for each facet δ of Δ . It is not hard to verify that

$$\text{Sym}_2(\Delta; y) = \text{Vol}(\mathcal{S}).$$

This is more general. Set \mathcal{S} the topological space of any d -dimensional finite CW-complex. We endow \mathcal{S} with a diffuse measure μ (i.e., a measure which is 0 on any subset homeomorphic to $[0; 1]^{d-1}$). Let Δ be a triangulation of \mathcal{S} , and $y = (y_\delta)$ be the induced volume for each facet δ . Then

$$\text{Sym}_2(\Delta; y) \text{ does not depend on the chosen triangulation } \Delta.$$

The proof essentially consists on defining directly $\text{Sym}_2(\mathcal{S}; \mu)$, which will be the value we get for any triangulation.

The case of a metric graph \mathcal{G} is of particular interest. $\text{Sym}_2(\mathcal{G}; \mu)$ (with μ induced by the metric) is the volume of the Jacobian torus of \mathcal{G} introduced by Kotani and Sunada in [KS00] (see Example 3.12).

1.4. Stability theorem. Let v be any free family of n elements of \mathbb{R}^p . Let a be an element of \mathbb{R}^p independent from v and let $w = v \star (a)$. Let $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ be a family of n elements of \mathbb{R}_+ depending on some parameter t . Let $Y(t)$ be the diagonal matrix $\text{diag}(y_1(t), \dots, y_n(t))$. Let $Z(t)$ be an element of $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ depending on t whose entries are bounded. Theorem 6.1 states, with different notations, that there exists two constant $c, C \in \mathbb{R}_+$ such that, for any t verifying $y_1(t), \dots, y_n(t) \geq C$,

$$(1.6) \quad \left| \frac{\det(W^\top Y(t)W)}{\det(V^\top Y(t)V)} - \frac{\det(W^\top (Y(t) + Z(t))W)}{\det(V^\top (Y(t) + Z(t))V)} \right| \leq c.$$

This result generalizes Theorem 1.1 of [Ami19]. Notice that both ratios are of degree 1 in y . Moreover, even if the ratios were of degree zero, terms like y_1/y_2 are unbounded at infinity. Thus this property is quite rare among ratios of polynomials and it is somehow surprising that Symanzik rational functions verifies it.

Let us roughly explain what this theorem implies for Symanzik polynomials. For the sake of simplicity, we assume that Z is the diagonal matrix $\text{diag}(z_1(t), \dots, z_n(t))$ for all t . One can think about the left-hand member of (1.6) as the absolute value of

$$\frac{\text{Sym}_2(\Delta; (b); y)}{\text{Sym}_2(\Delta; y)} - \frac{\text{Sym}_2(\Delta; (b); y + z)}{\text{Sym}_2(\Delta; y + z)},$$

for some simplicial complex Δ and some parameter b (which is a $(d-1)$ -boundary of Δ). Thus, the first ratio simply corresponds to the ratio of the two Symanzik polynomials. The second one corresponds to the same ratio after a bounded deformation of the geometry of Δ . Hence, such a deformation only induces a variation of the ratio of the two Symanzik polynomials that is bounded independently of how great are the volumes of the facets.

Surprisingly, in order to prove this stability theorem, we crucially use a theorem describing the connected components of the exchange graph of some matroid. This theorem is quite interesting by itself, and for this reason, it seems important to us to give some details about it in this introduction. More can be found in the corresponding section.

1.5. Exchange graph of a matroid. Let T and T' be two spanning trees on some connected graph G . There is a well-known property: for any edge e of T , there exists an edge e' of T' such that $T - e + e'$ and $T' - e' + e$ are still spanning trees of G . We will consider another kind of exchanges. Let F and F' be two spanning forests of G . We authorize the following operation: if there exists $e \in F$ such that $F' + e$ is still a forest, one can remove e from F and add it to F' . Following the same rule, one can also take an edge from F' and add it to F . Then, one can wonder which pairs of forests can be obtained from F and F' . Moreover, what happens if we add the constraint that the exchanges have to alternate (first from F to F' , then from F' to F , etc.)? We answer these questions in this article, generalizing the partial answer of [Ami19, Theorem 2.13].

The natural objects to consider for this kind of questions are matroids. In fact, forests of a graph, but also of a simplicial complex, are encoded by the independents of the matroid associated to this graph. In this setting, the previous questions can be reformulated thanks to the *exchange graph* of the matroid. Let \mathfrak{M} be a matroid and let \mathfrak{I} be its set of independents. The exchange graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ associated to \mathfrak{M} is the graph with vertex set $\mathcal{V} := \mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$ and edge set \mathcal{E} such that two vertices (I_1, I_2) and (I'_1, I'_2) are adjacent if there exists $i \in E$ such that either, $I'_1 = I_1 + i$ and $I'_2 = I_2 - i$, or, $I'_1 = I_1 - i$ and $I'_2 = I_2 + i$. The first question now corresponds to: « under which conditions two vertices (I_1, I_2) and (I'_1, I'_2) of \mathcal{V} are in the same connected component of \mathcal{G} ? » For the second question, one has to restrict \mathcal{G} to some appropriate induced subgraph (see Section 5).

A trivial condition in both cases is that $I_1 \uplus I_2$ (the union with multiplicities) must equal $I'_1 \uplus I'_2$. But this is not sufficient. For example, there cannot be any exchange between two bases (i.e., every pair of bases is isolated in \mathcal{G}) because bases have maximum number of elements among independent sets. More generally, one can find other isolated pairs of independents. If such a pair (A, B) is included in some larger pair (I, J) (in the sense $A \subseteq I$ and $B \subseteq J$), no exchange will happen between A and B . This new kind of constraints is encoded by the *maximal codependent pair (or MCP)* of (I, J) . One can define $\text{MCP}(I, J)$ as the largest vertex (A, B) isolated in \mathcal{G} and included in (I, J) (we will prove that such a vertex always exists). In fact, what we have introduced here is sufficient to classify the connected components of \mathcal{G} .

THEOREM (Corollary 5.15). *Let $(I, J), (I', J')$ be two arbitrary vertices of \mathcal{G} . Then (I, J) and (I', J') are in the same connected component of \mathcal{G} if and only if*

$$I \uplus J = I' \uplus J' \quad \text{and} \quad \text{MCP}(I, J) = \text{MCP}(I', J').$$

For the second question, where we force the exchanges to alternate, the same result holds (up to some isolated vertices, cf. Theorem 5.13).

1.6. Structure of the paper. Section 2 is devoted to the generalization in an abstract setting, and to the important duality theorem (Theorem 2.13) linking Symanzik polynomials to the well-known Kirchhoff theorem. In the third section we develop applications of Symanzik polynomials to geometry. In Section 4 we generalize some other properties of these polynomials thanks to matroids over hyperfields. The two last sections follow Sections 2 and 3 of [Ami19] and generalize the results of this paper to our setting. Section 5 describes a combinatorial

result about what we call the exchange graph of a matroid, which is needed for the last section. In this last section, we state and prove the stability theorem.

Acknowledgements. We wish to express our thanks to our Ph.D. supervisor Omid Amini for suggesting the problem, for his many advices and for careful and patient reading and correcting of the paper. We gratefully acknowledge the many references given by Adrien Kassel, Vincent Rivasseau and Alan Sokal, and the helpful suggestions of Spencer Bloch and Razvan Gurau.

2. Kirchhoff and Symanzik polynomials and duality

2.1. Preliminaries. We begin this section setting up some more tools in order to deal with Symanzik polynomials of higher orders. Note that some important notations and conventions, which we will use all through the paper, have already been introduced in Section 1.1.

In the whole article, k will always be any *nonnegative even* integer.

Let p be a positive integer. If k is nonzero, let $a_1 = (a_{1,1}, \dots, a_{1,p}), \dots, a_k$ be k vectors of \mathbb{R}^p . We define the *standard k -multilinear symmetric product* to be

$$(a_1, \dots, a_k)_k := \sum_{i=1}^p \prod_{j=1}^k a_{j,i}.$$

If y is a family of p variables, then we define the *k -multilinear symmetric product associated to y* by

$$(a_1, \dots, a_k)_{k,y} := \sum_{i=1}^p \left(\prod_{j=1}^k a_{j,i} \right) y_i.$$

We will omit the index k when the number of variables is clear.

Let us define what we call matrix of higher order, and some basic operations on it. Hyperdeterminants were first discovered by Arthur Cayley in 1843 (see [Cay49]).

Let A be any commutative ring. A *matrix of order k and size (n_1, \dots, n_k) on A* , where k is a positive integer, and where the *size* is a k -tuple of positive integers, is a family of elements of A indexed by $[n_1] \times \dots \times [n_k]$. We can naturally sum two matrices of the same size by summing corresponding entries.

Let $C = (c_{i_1, \dots, i_k})_{(i_1, \dots, i_k) \in [n_1] \times \dots \times [n_k]}$ be such a matrix. Let $l \in [k]$ and $P = (p_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n_l, m}(A)$ be a usual matrix. Then the (*right*) *multiplication of C by P along the l -th direction*, denoted by $C \cdot_l P$, is the k -dimensional matrix B of size

$$\text{size}(B) = (n_1, \dots, n_{l-1}, m, n_{l+1}, \dots, n_k),$$

verifying,

$$b_{i_1, \dots, i_k} = \sum_{a=1}^{n_l} c_{i_1, \dots, i_k} \cdot p_{a, i_l},$$

where a is the l -th index of c .

Let $\mathfrak{C}_n^k(A)$ denote the set of *hypercubic matrices of order k and of size n* , i.e., of matrices having size $\underbrace{(n, \dots, n)}_{k \text{ times}}$. Let $C \in \mathfrak{C}_n^k(A)$. We define the *hyperdeterminant of C* by

$$\det(C) := \frac{1}{n!} \sum_{\tau_1, \dots, \tau_k \in \mathfrak{S}_n} \prod_{j=1}^k \sigma(\tau_j) \prod_{a=1}^n c_{\tau_1(a), \dots, \tau_k(a)},$$

where \mathfrak{S}_n is the set of permutations on $[n]$, and $\sigma(\tau)$ denotes the signature of the permutation τ . Notice that this definition coincides with the usual one for $k = 2$. Moreover, the determinant

would be 0 if k was odd. Let D be the diagonal hypermatrix $D := \text{diag}^k(a_1, \dots, a_n)$ defined by

$$D_{i_1, \dots, i_k} = \begin{cases} a_{i_1} & \text{if } i_1 = \dots = i_k, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then $\det(D) = a_1 \cdots a_n$. The determinant is multiplicative: if $l \in [k]$ and if $P \in \mathcal{M}_n(A)$, then

$$\det(C \cdot_l P) = \det(C)\det(P).$$

Let u^1, \dots, u^k be k families of vectors in \mathbb{R}^p of respective size l_1, \dots, l_k . If $(\cdot, \dots, \cdot)_*$ is any k -multilinear symmetric product from $(\mathbb{R}^p)^k$ to a commutative ring, we can extend it to $\bigwedge \mathbb{R}^p$ by

$$(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k)_* = \begin{cases} \det((u_{i_1}^1, \dots, u_{i_k}^k)_*)_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq l_1} & \text{if } l_1 = \dots = l_k, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

One can replace \mathbb{R}^p by any real vector space. We allow ourselves to use standard terminologies and notations of inner products in this case. For instance, $\|\mathbf{u}\|_*^k$ denoted $(\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u})_*$.

For instance, if $l_1 = \dots = l_k = n$, then

$$(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2)_x = \det((U^1)^\top X(U^2)),$$

where $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$, and,

$$(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k)_x = \det(X \cdot_1 U^1 \cdots_k U^k),$$

where X is the diagonal hypercubic matrix $\text{diag}^k(x_1, \dots, x_n)$ (and U^i is the matrix associated to u^i).

We state a simple but very useful lemma.

LEMMA 2.1. *Let r, p, n be three positive integers and $U \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{Z})$ be a matrix of rank r . Let $F \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{Z})$. Assume that $\mathbb{Z}u \subseteq \mathbb{Z}f$. Then, there exists a unique $V \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{Z})$ such that $U = FV$. Moreover, we have the following points.*

(1) *The following properties are equivalent.*

- f is a basis of $\mathbb{Z}u$.
- v^\top is a basis of $\langle u^\top \rangle_{\mathbb{Z}}$.

Furthermore, if they hold, v generates \mathbb{Z}^r and $\|\mathbf{u}_I\| = \|\mathbb{Z}u\| \cdot \|\mathbf{v}_I\|$ for any subset I of $[n]$ of size r .

(2) *The following properties are equivalent.*

- f is a basis of $\langle u \rangle_{\mathbb{Z}}$.
- v^\top is a basis of $\mathbb{Z}u^\top$.

Furthermore, if they hold, $\|\mathbf{u}_I\| = \|\langle u \rangle_{\mathbb{Z}}\| \cdot \|\mathbf{v}_I\|$ for any subset I of $[n]$ of size r .

PROOF. The first part of the lemma is clear. Notice that columns of F , resp. rows of V , have to be free. Let us prove Point (1).

If f is a basis of $\mathbb{Z}u$, then there exists $V' \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{Z})$ such that $F = UV' = FVV'$. Since columns of F are free, $VV' = \text{Id}_r$. Thus, v generates \mathbb{Z}^r . Let w be such that w^\top is a basis of $\langle u^\top \rangle_{\mathbb{Z}}$ (which equals $\langle v^\top \rangle_{\mathbb{Z}}$). This last space contains v^\top . Therefore, there exists a square matrix G such that $V = GW$. Then,

$$1 = \det(VV') = \det(GWV') = \det(G)\det(WV'),$$

which implies that G is invertible, and then that v^\top is in fact a basis of $\langle v^\top \rangle_{\mathbb{Z}}$.

Let us prove the converse. If v^\top is a basis of $\langle u^\top \rangle_{\mathbb{Z}}$, then v^\top can be completed into a basis \tilde{v}^\top of \mathbb{Z}^n . Set $V' = (\tilde{V}^{-1})_{[r]}$. As $UV' = FVV' = F$, $\mathbb{Z}f \subseteq \mathbb{Z}u$. The other inclusion follows from the existence of V . Thus, f is in fact a basis of $\mathbb{Z}u$.

Moreover,

$$\|\mathbf{u}_I\|^2 = \det(U_I^\top U_I) = \det(V_I^\top F^\top F V_I).$$

But V_I and $F^\top F$ are square matrices. Thus, since f is a basis of $\mathbb{Z}u$,

$$\det(V_I^\top F^\top F V_I) = \det(V_I)^2 \det(F^\top F) = \|\mathbf{v}_I\|^2 \|\mathbb{Z}u\|^2.$$

The second point can be proven in a similar way. □

Some specific notations will be introduced later but we can already deal with the heart of the subject.

2.2. Kirchhoff polynomials. In this article, Kirchhoff polynomials are a generalization of polynomials appearing in the weighted Kirchhoff’s matrix tree theorem, whereas Symanzik polynomials generalize first and second Symanzik polynomials better known in Physics (see Examples 2.9, 2.12 and 2.21, Theorem 3.7 and the introduction for more details). They are dual in a very precise way as we will show at the end of this subsection, cf. Theorem 2.13.

We will fix some objects for the rest of the section. Let p, n be two positive integers, u be a family of n elements in \mathbb{Z}^p , and $r := \text{rk}(u)$ be the rank of this family. Recall that k is an even nonnegative integer.

DEFINITION 2.2. The *Kirchhoff polynomial of order k of u* is defined by

$$\text{Kir}_k(u; x) := \frac{1}{\|\langle u \rangle_{\mathbb{Z}}\|^k} \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=r}} \|\mathbf{u}_I\|^k x^I. \quad \diamond$$

REMARK 2.3. Another definition would be obtained replacing $\|\langle u \rangle_{\mathbb{Z}}\|$ by $\|\mathbb{Z}u\|$. A priori, no definition is better than the other. We choose our definition in order to get determinantal formula without any factor (see Propositions 2.6 and 2.7). As a counterpart, factors appear in the duality theorem 2.13. This choice is also justified by Remark 2.5. □

Let I be a subset of $[n]$ of size r , let v be such that v^\top is a basis of $\mathbb{Z}u^\top$, and let $F \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{Z})$ be the unique matrix such that $U = FV$. By Lemma 2.1, f is a basis of $\langle u \rangle_{\mathbb{Z}}$. If \mathbf{u}_I is nonzero, then $\mathbb{Z}u_I$ is a submodule of $\langle u \rangle_{\mathbb{Z}}$ of maximal rank, and we therefore have all the following equalities:

$$(2.1) \quad \frac{\|\mathbf{u}_I\|}{\|\langle u \rangle_{\mathbb{Z}}\|} = \|\mathbf{v}_I\| = |\det(V_I)| = |\langle u \rangle_{\mathbb{Z}} / \mathbb{Z}u_I| = |(\mathbf{v}^\top, \mathbf{e}_I)|,$$

where e is the standard basis of \mathbb{Z}^n . In particular, the coefficients of Kir_k are in \mathbb{Z} .

Moreover, v^\top could be any basis of $\mathbb{Z}u^\top$. But Equation (2.1) gives a formula of the coefficients depending on v alone. Thus,

$$(2.2) \quad \text{Kir}_k(u; x) \text{ only depends on } \mathbb{Z}u^\top.$$

REMARK 2.4. Using $\det(V_I)$ instead of $\|\mathbf{u}_I\|/\|\langle u \rangle_{\mathbb{Z}}\|$ in Definition 2.2, it is possible to define Kirchhoff polynomials for k odd, or even for u a family of vectors over A^n where A is any PID. However, one has to be careful because the k -th power of an element of A^* could be different from 1. The polynomial depends on the chosen v (up to a k -th power of an invertible of A^*). Moreover, one has to add some artificial signs to the Symanzik polynomial (see Definition 2.10) in order to make Theorem 2.13 about the duality true. For more details, we refer to [Piq19a]. □

REMARK 2.5. One can also use $|\langle u \rangle_{\mathbb{Z}} / \mathbb{Z}u_I|$ instead of $\|\mathbf{u}_I\|/\|\langle u \rangle_{\mathbb{Z}}\|$ in Definition 2.2. Then the definition makes sense for any order k . As a counterpart, determinantal formulæ as in Proposition 2.6 are not true anymore. However, for $k = 1$, we recover the main example of *arithmetic matroid* for the group $G = \mathbb{Z}^n$: see [DM11, Subsection 2.4]. □

Kirchhoff polynomials of order 2 have a more computable definition under the condition $r = p$.

PROPOSITION 2.6. *If $r = p$ (or equivalently if u^\top is free), then*

$$\text{Kir}_2(u; x) = \|\mathbf{u}^\top\|_x^2 = \det(UXU^\top),$$

where $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}[x])$ is the diagonal matrix $\text{diag}(x_1, \dots, x_n)$.

PROOF. The second equality comes directly from the definitions. Let e be the standard basis of \mathbb{R}^n . As the standard orthonormal basis of $\bigwedge^r \mathbb{R}^n$ (for the standard inner product) is an orthogonal basis for $(\cdot, \cdot)_x$, we obtain,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^\top\|_x^2 &= \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=r}} (\mathbf{u}^\top, \mathbf{e}_I)^2 \|\mathbf{e}_I\|_x^2 \\ &= \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=r}} \|\mathbf{u}_I\|^2 x^I. \end{aligned}$$

It remains to check that $\|\langle u \rangle_{\mathbb{Z}}\| = 1$, but this is true because $\langle u \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}^p$. □

For orders larger than 2, one can obtain a similar formula.

PROPOSITION 2.7. *If $r = p$ (or equivalently if u^\top is free), then*

$$\text{Kir}_k(u; x) = \|\mathbf{u}^\top\|_{k,x}^k = \det(X \cdot_1 U^\top \cdot_2 \cdots \cdot_k U^\top),$$

where X is the diagonal hypercubic matrix $\text{diag}^k(x_1, \dots, x_n)$.

PROOF. The same proof works if one replaces the computation by

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^\top\|_{k,x}^k &= \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=r}} (\mathbf{u}^\top, \mathbf{e}_I)^k \|\mathbf{e}_I\|_{k,x}^k \\ &= \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=r}} \|\mathbf{u}_I\|^k x^I. \end{aligned} \quad \square$$

EXAMPLE 2.8. How to compute the Kirchhoff polynomial of any family u with the determinantal formula? Take v a family such that v^\top is a basis of $\mathbb{Z}u^\top$. Let F be the unique matrix such that $U = FV$ (it is not necessary to compute f). By Lemma 2.1, for any subset $I \subseteq [n]$ of size r ,

$$\|\mathbf{u}_I\| = \|\mathbf{v}_I\| \|\langle u \rangle_{\mathbb{Z}}\|.$$

As $\langle v \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}^r$, one can rewrite last equation as

$$\frac{\|\mathbf{u}_I\|}{\|\langle u \rangle_{\mathbb{Z}}\|} = \frac{\|\mathbf{v}_I\|}{\|\langle v \rangle_{\mathbb{Z}}\|}.$$

Thus,

$$\text{Kir}_k(u; x) = \text{Kir}_k(v; x) = \|\mathbf{v}^\top\|_{k,x}^k.$$

Note that, if instead of taking a basis of $\mathbb{Z}u^\top$, one takes a basis of $\langle u^\top \rangle_{\mathbb{Z}}$, you will divide all coefficients by a common divisor equal to

$$\left(\frac{\|\mathbb{Z}u\|}{\|\langle u \rangle_{\mathbb{Z}}\|} \right)^k.$$

We will see a meaning of this factor in Remark 3.8. ◇

EXAMPLE 2.9. Let us now explain more precisely the link between Kirchhoff as mathematician and Kirchhoff polynomials. Let $G = (V, E)$ be a connected graph with vertex set V of size p and edge set E of size n . Suppose that vertices are labelled from 1 to p and edges from 1 to n . By abuse of notation, the same letter will denote a vertex, resp. an edge, and its label. Similarly, a set of edges could denote a set of numbers. Let $Q = (q_{v,e}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{Z})$ be an incidence matrix of G , i.e., put an orientation on edges of G and set, for each $v \in V$ and each $e \in E$,

$$q_{v,e} := \begin{cases} 0 & \text{if } e \text{ is a loop,} \\ 1 & \text{if } v \text{ is the head of } e, \\ -1 & \text{if } v \text{ is the tail of } e, \\ 0 & \text{if } v \text{ and } e \text{ are not incident.} \end{cases}$$

Let $i \in [p]$ be any number, and U be the matrix Q where we deleted the i -th row. The well-known Kirchhoff's matrix-tree theorem, in its weighted form, states that

$$\det(UXU^T) = \sum_{I \in \mathcal{T}} x^I,$$

where $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$, and $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(E)$ is the family of all subsets $I \subseteq E$ that verify that the spanning subgraph of G with edge set I is a spanning tree of G . Then Proposition 2.6 implies that

$$\text{Kir}_2(u; x) = \sum_{I \in \mathcal{T}} x^I.$$

In fact, in this very special case, $\text{Kir}_k(u; x)$ does not depend on k . Moreover one can see that $\mathbb{Z}q^T = \mathbb{Z}u^T$. Thus, by (2.2), we even have

$$(2.3) \quad \text{Kir}_k(q; x) = \sum_{I \in \mathcal{T}} x^I.$$

We will see later, in Theorem 3.7, a generalization of Kirchhoff's theorem to the case of finite simplicial complexes. ◊

2.3. Symanzik polynomials. Symanzik polynomials have a similar definition, but note the complement in the last exponent.

DEFINITION 2.10. The *Symanzik polynomial of order k of u* is defined by

$$\text{Sym}_k(u; x) := \frac{1}{\|\langle u \rangle_{\mathbb{Z}}\|^k} \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=r}} \|\mathbf{u}_I\|^k x^{I^c}. \quad \diamond$$

REMARK 2.11. Kirchhoff and Symanzik polynomials are so similar that one can easily define ones from the others thanks to following formulæ.

$$\begin{aligned} \text{Sym}_k(u; x) &= x_1 \cdots x_n \text{Kir}_k(u; (x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1})), \\ \text{Kir}_k(u; x) &= x_1 \cdots x_n \text{Sym}_k(u; (x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1})). \end{aligned} \quad \diamond$$

EXAMPLE 2.12. What is the link between Symanzik polynomials of Definition 2.10 and the first Symanzik polynomial of the introduction (Equation (1.1))? Let G be a graph as defined in Example 2.9. Set $k = 2$. We have seen in Example 2.9 that, using the same notations,

$$\text{Kir}_k(q; x) = \sum_{I \in \mathcal{T}} x^I.$$

Using Remark 2.11, we obtain

$$\begin{aligned} \text{Sym}_k(q; x) &= x_1 \cdots x_n \text{Kir}_k(q; (x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1})) \\ &= \sum_{I \in \mathcal{T}} x^{I^c}, \end{aligned}$$

which is exactly the first Symanzik polynomial. ◊

Symanzik polynomials also have a determinantal formula, cf. Proposition 2.16. As we will show, this formula will be a direct consequence of the duality theorem 2.13. Therefore, we postpone the statement and the proof of the formula to the end of next subsection.

2.4. Duality Theorem. We can now state the duality theorem.

THEOREM 2.13 (Duality). *Let q be a positive integer and v be a family of n vectors in \mathbb{Z}^q such v^\top spans $\ker(U)$. Then*

$$(2.4) \quad \frac{1}{a^k} \text{Sym}_k(u; x) = \frac{1}{b^k} \text{Kir}_k(v; x),$$

where

$$a := \frac{\|\mathbb{Z}u\|}{\|\langle u \rangle_{\mathbb{Z}}\|} = |\langle u \rangle_{\mathbb{Z}} / \mathbb{Z}u| \text{ and}$$

$$b := \frac{\|\mathbb{Z}v\|}{\|\langle v \rangle_{\mathbb{Z}}\|} = |\langle v \rangle_{\mathbb{Z}} / \mathbb{Z}v|.$$

Note that $\ker(U)$ denotes a vector subspace of \mathbb{R}^n , and that $\ker(U) = \langle u^\top \rangle^\perp$.

PROOF. Set \tilde{u} a family of vectors such that \tilde{u}^\top is a basis of $\langle u^\top \rangle_{\mathbb{Z}}$. By Lemma 2.1, one can find a matrix $U' \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{Z})$ such that $\tilde{U}U'^\top = \text{Id}_r$. Similarly, set \tilde{v} such that \tilde{v}^\top is a basis of $\langle v^\top \rangle_{\mathbb{Z}}$, and $V' \in \mathcal{M}_{n-r,n}(\mathbb{Z})$ such that $\tilde{V}V'^\top = \text{Id}_{n-r}$.

Let I be a subset of $[n]$ of size r . The coefficient of x^{I^c} in the left-hand side of (2.4) is

$$\left(\frac{\|\langle u \rangle_{\mathbb{Z}}\|}{\|\mathbb{Z}u\|} \frac{\|\mathbf{u}_I\|}{\|\langle u \rangle_{\mathbb{Z}}\|} \right)^k.$$

Therefore, by Lemma 2.1, this coefficient is equal to $\|\tilde{\mathbf{u}}_I\|^k$. Applying the same argument on the right-hand side, it remains to prove that

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_I\| = \|\tilde{\mathbf{v}}_{I^c}\|.$$

We will deduce this last equality from

$$(2.5) \quad \begin{pmatrix} \tilde{U}_I & \tilde{U}_{I^c} \\ \tilde{V}_I & \tilde{V}_{I^c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Id}_r & \tilde{V}_I^\top \\ 0 & \tilde{V}_{I^c}^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{U}_I & 0 \\ * & \text{Id}_s \end{pmatrix},$$

where $s := n - r$, and from

$$\begin{pmatrix} U'_I & U'_{I^c} \\ \tilde{V}_I & \tilde{V}_{I^c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{U}_I^\top & 0 \\ \tilde{U}_{I^c}^\top & \text{Id}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Id}_r & * \\ 0 & \tilde{V}_{I^c} \end{pmatrix}.$$

Indeed, this implies

$$\|\tilde{\mathbf{u}}^\top \wedge \mathbf{v}'^\top\| \cdot \|\tilde{\mathbf{v}}_{I^c}\| = \|\tilde{\mathbf{u}}_I\|,$$

$$\|\mathbf{u}'^\top \wedge \tilde{\mathbf{v}}^\top\| \cdot \|\tilde{\mathbf{u}}_I\| = \|\tilde{\mathbf{v}}_{I^c}\|.$$

Since all these factors are nonnegative integers. We must have

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_I\| = \|\tilde{\mathbf{v}}_{I^c}\|,$$

which concludes the proof. □

REMARK 2.14. In the proof above, the equality of coefficients implies that

$$\frac{\|\mathbf{u}_I\|}{\|\mathbb{Z}u\|} = \frac{\|\mathbf{v}_{I^c}\|}{\|\mathbb{Z}v\|}.$$

In fact, one can prove something stronger, namely,

$$\mathbb{Z}u / \mathbb{Z}u_I \simeq \mathbb{Z}v / \mathbb{Z}v_{I^c}. \quad \diamond$$

We need a lemma for the proof of Theorem 6.1. We state this lemma here because its proof is very similar to that of Theorem 2.13. If I is a subset of $[n]$ and if \underline{I} is an ordering of the elements of I , then we write $\varepsilon(\underline{I}) := (\mathbf{e}_{\underline{I}}, \mathbf{e}_I)$, i.e., $(-1)^\iota$ where ι is the number of inversions in \underline{I} .

LEMMA 2.15. *Let p, m be two positive integers. Let \tilde{u} and \tilde{v} be such that \tilde{u}^\top and \tilde{v}^\top are two free families of vectors in \mathbb{R}^m of respective size p and $m - p$. Assume that $\tilde{U}\tilde{V}^\top = 0$. Let I be a subset of $[m]$ of size p . Then*

$$\det(\tilde{U}_I) = \lambda \varepsilon(I \star I^c) \det(\tilde{V}_{I^c}),$$

where $\lambda \in \mathbb{R}^*$ does not depend on I .

PROOF. We define $V' \in \mathcal{M}_{m-p,m}(\mathbb{R})$ as in the proof of Theorem 2.13, i.e., such that $\tilde{V}V'^\top = \text{Id}_{m-p}$. We still get Equation (2.5). By reordering columns and by transposing, this equation leads to

$$\varepsilon(I \star I^c) \det(\tilde{U}^\top \star V'^\top) \det(\tilde{V}_{I^c}) = \det(\tilde{U}_I).$$

Then set $\lambda = \det(\tilde{U}^\top \star V'^\top)$ to conclude the proof (λ cannot be 0 since there exists an I such that $\det(\tilde{U}_I) \neq 0$). □

Let us now extend determinantal formulæ to Symanzik polynomials. From the determinantal formula for Kirchoff polynomials (Propositions 2.6 and 2.7) and from the duality theorem (Theorem 2.13), we immediately obtain the following formula.

PROPOSITION 2.16. *If v is a family of vectors in \mathbb{Z}^{n-r} such that v^\top is a basis of the vector subspace $\ker(U)$, then*

$$\text{Sym}_k(u; x) = \left(\frac{a}{b}\right)^k \|v^\top\|_{k,x}^k$$

where $a = \|\mathbb{Z}u\|/\|\langle u \rangle_{\mathbb{Z}}\|$ and $b = \|\mathbb{Z}v\|/\|\langle v \rangle_{\mathbb{Z}}\|$ are defined as in Theorem 2.13.

2.5. Symanzik polynomials with parameters. We now wish to generalize the second Symanzik polynomials defined in the introduction (Equation (1.2)). Actually, one can naturally add more than one parameter.

DEFINITION 2.17. Let l be a nonnegative integer and let $w = (w_1, \dots, w_l)$ be a family of elements in $\langle u \rangle$. The *Symanzik polynomial of order k of u with parameters w_1, \dots, w_l* is defined by

$$\text{Sym}_k(u; w; x) := \frac{1}{\|\langle u \rangle_{\mathbb{Z}}\|^k} \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=r-l}} \|\mathbf{u}_I \wedge \mathbf{w}\|^k x^{I^c}. \quad \diamond$$

REMARK 2.18. In the case $w_1, \dots, w_l \in \mathbb{Z}u$, one simply has

$$\text{Sym}_k(u; w; x) = \text{Sym}_k(u \star w; x \star \underbrace{(0, \dots, 0)}_{l \text{ times}}). \quad \diamond$$

Once more, there is a determinantal formula.

PROPOSITION 2.19. *Let l be a nonnegative integer and w be a family of l elements in $\langle u \rangle$. For $i \in [l]$, let $\tilde{w}_i \in \mathbb{R}^n$ be such that $w_i = U\tilde{w}_i$. Let v be a family of vectors in \mathbb{Z}^{n-r} such that v^\top is a basis of the vector subspace $\ker(U)$. Then,*

$$\text{Sym}_k(u; w; x) = \left(\frac{a}{b}\right)^k \|v^\top \wedge \tilde{\mathbf{w}}\|_{k,x}^k$$

where $a = \|\mathbb{Z}u\|/\|\langle u \rangle_{\mathbb{Z}}\|$ and $b = \|\mathbb{Z}v\|/\|\langle v \rangle_{\mathbb{Z}}\|$ are defined as in Theorem 2.13.

PROOF. By the multilinearity of the determinant and by a density argument, we can restrict our study to the case $w_1, \dots, w_l \in \mathbb{Z}u$. Applying Proposition 2.16 to $\text{Sym}_k(u \star w; x \star (0, \dots, 0))$, one obtains that

$$\text{Sym}_k(u; w; x) = \left(\frac{a'}{b'}\right)^k \|\mathbf{v}'^\top\|_{k,x'}^k,$$

where

$$\begin{aligned} V' &:= \begin{pmatrix} \boxed{V^\top} & \boxed{\widetilde{W}} \\ \boxed{0} & \boxed{-\text{Id}_l} \end{pmatrix}^\top, \\ x' &= (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0), \\ a' &= \frac{\|\mathbb{Z}(u \star w)\|}{\|\langle u \star w \rangle_{\mathbb{Z}}\|} \text{ and} \\ b' &= \frac{\|\mathbb{Z}\mathbf{v}'\|}{\|\langle \mathbf{v}' \rangle_{\mathbb{Z}}\|}. \end{aligned}$$

It is not difficult to see that $a' = a$, $b' = b$ and $\|\mathbf{v}'^\top\|_{k,x'}^k = \|\mathbf{v}^\top \wedge \widetilde{\mathbf{w}}\|_{k,x}^k$. □

We now give another form of Symanzik polynomials which will allow us to explain the link between Definition 2.17 and the second Symanzik polynomial of the introduction (Equation (1.2)). We need to define the following orientation. Choose a volume form ω on $\langle u \rangle$ and, for two subsets I and J of respective sizes $r - l$ and l , set $\varepsilon_I(J) := \text{sign}(\omega(\mathbf{u}_{I \star J})) \in \{-1, 0, 1\}$. Depending on ω , we will get an orientation or its opposite.

PROPOSITION 2.20. *Let l be a nonnegative integer and w be a family of l elements in $\langle u \rangle$. Then,*

$$\text{Sym}_k(u; w; x) = \frac{1}{\|\langle u \rangle_{\mathbb{Z}}\|^k} \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=r-l}} \left(\sum_{\substack{J \subseteq I^c \\ |J|=l}} \varepsilon_I(J) \|\mathbf{u}_{I \cup J}\|(\widetilde{\mathbf{w}}, \mathbf{e}_J) \right)^k x^{I^c},$$

where e is the standard basis of \mathbb{R}^n and \widetilde{w} is defined as in Proposition 2.19.

Note that, since k is even, the right-hand side does not depend on ω .

PROOF. Without loss of generality, assume that members of w are in $\mathbb{Z}u$. Let f be a basis of $\mathbb{Z}u = \mathbb{Z}(u \star w)$ such that $\omega(\mathbf{f}) > 0$. Let $V \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{Z})$ be such that $U = FV$. Then, $\varepsilon_I(J) = \text{sign}(\det(V_{I \star J}))$. Let $T = V\widetilde{W}$. Lemma 2.1 shows that, for $I \subseteq [n]$ of size $r - l$, we have

$$(2.6) \quad \|\mathbf{u}_I \wedge \mathbf{w}\|^k = \|\mathbb{Z}u\|^k \|\mathbf{v}_I \wedge \mathbf{t}\|^k = \|\mathbb{Z}u\|^k (\mathbf{v}^\top, \mathbf{e}_I \wedge \widetilde{\mathbf{w}})^k.$$

Then,

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}^\top, \mathbf{e}_I \wedge \widetilde{\mathbf{w}}) &= \left(\mathbf{v}^\top, \mathbf{e}_I \wedge \left(\sum_{\substack{J \subseteq [n] \\ |J|=l}} (\widetilde{\mathbf{w}}, \mathbf{e}_J) \mathbf{e}_J \right) \right) \\ &= \sum_{\substack{J \subseteq I^c \\ |J|=l}} (\mathbf{v}^\top, \mathbf{e}_I \wedge \mathbf{e}_J) (\widetilde{\mathbf{w}}, \mathbf{e}_J) \\ &= \sum_{\substack{J \subseteq I^c \\ |J|=l}} \varepsilon_I(J) \|\mathbf{v}_{I \cup J}\|(\widetilde{\mathbf{w}}, \mathbf{e}_J). \end{aligned}$$

Hence, by (2.6),

$$\|\mathbf{u}_I \wedge \mathbf{w}\|^k = \|\mathbb{Z}u\|^k \left(\sum_{\substack{J \subseteq I^c \\ |J|=l}} \varepsilon_I(J) \|\mathbf{v}_{I \cup J}\|(\tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{e}_J) \right)^k.$$

By Lemma 2.1, $\|\mathbb{Z}u\| \|\mathbf{v}_{I \cup J}\| = \|\mathbf{u}_{I \cup J}\|$. We conclude the proof using Definition 2.17. \square

EXAMPLE 2.21. In this example, we will explain the link between the second Symanzik polynomial from the introduction and Symanzik polynomials with one parameter introduced above. More precisely, we wish to show that

$$(2.7) \quad \phi_G(\mathbf{p}, x) = \text{Sym}_2(q; (\mathbf{p}); x),$$

where we recall notations below.

Let $G = (V, E)$ be a connected graph as in Example 2.9, and $Q \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{Z})$ be an incidence matrix of G . Take \mathbf{p} a vector in \mathbb{R}^p such that $\sum_{v \in V} \mathbf{p}_v = 0$ (this is a slightly less general case compared to the definition in the introduction since we take $D = 1$). The second Symanzik polynomial, denoted by ϕ_G , is defined by

$$\phi_G(\mathbf{p}, x) := \sum_{F \in \mathcal{SF}_2} -\mathbf{p}_{F_1} \mathbf{p}_{F_2} \prod_{e \notin F} x_e,$$

with the following notations. The set \mathcal{SF}_2 denotes the set of spanning forests of G that have two connected components. For $F \in \mathcal{SF}_2$, F_1 and F_2 denotes the two connected components of F . Then, $\mathbf{p}_{F_i} := \sum_{v \in F_i} \mathbf{p}_v$ for $i \in \{1, 2\}$. Since the sum of \mathbf{p}_v is zero, one can replace $-\mathbf{p}_{F_1} \mathbf{p}_{F_2}$ by $\mathbf{p}_{F_1}^2$.

Since G is a connected graph, $\sum_{v \in V} \mathbf{p}_v = 0$ is equivalent to $\mathbf{p} \in \langle q \rangle$. Now, we compare $\phi_G(\mathbf{p}, x)$ with the Symanzik polynomial $\text{Sym}_2(q; (\mathbf{p}); x)$. By Proposition 2.20, with similar notations,

$$\text{Sym}_2(q; (\mathbf{p}); x) = \frac{1}{\|\langle q \rangle_{\mathbb{Z}}\|^2} \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=r-1}} \left(\sum_{j \in I^c} \varepsilon_I(j) \|\mathbf{q}_{I+j}\| \tilde{\mathbf{p}}_j \right)^2 x^{I^c},$$

where we write $\varepsilon_I(j)$ instead of $\varepsilon_I((j))$. By (2.3), the ratio $\|\mathbf{q}_{I+j}\|^2 / \|\langle q \rangle_{\mathbb{Z}}\|^2$ equals 1 if $I + j$ forms a spanning tree of G , and 0 otherwise. Thus, we can restrict the sum to the sets I that correspond to 2-forests of G . It remains to show that, if $I \subseteq [n]$ corresponds to $F \in \mathcal{SF}_2$, then

$$\left| \sum_{j \in I^c} \varepsilon_I(j) \tilde{\mathbf{p}}_j \right| = |\mathbf{p}_{F_1}|.$$

Let us try to better understand what happens here. On each edge e , we put a weight $\tilde{\mathbf{p}}_e$ such that, for each vertex v , \mathbf{p}_v equals the algebraic sum of the weight of the edges incident to v :

$$\mathbf{p}_v = \sum_{e \in E} q_{v,e} \tilde{\mathbf{p}}_e.$$

Thus, when we sum \mathbf{p}_v over all vertices v of F_1 , each edge in F_1 appears two times with opposite signs and each edge in F_2 does not appear in the sum. Thus, it only remains edges joining F_1 and F_2 :

$$\mathbf{p}_{F_1} = \sum_{e \in E(F_1, F_2)} \varepsilon_{F_2, F_1}(e) \tilde{\mathbf{p}}_e,$$

where $E(F_1, F_2)$ is the set of edges joining F_1 and F_2 , and $\varepsilon_{F_2, F_1}(e)$ equals +1 if e is oriented from F_2 to F_1 , and equals -1 otherwise. Let us now see how ε_I computes this orientation.

More precisely, it remains to show that, if e and e' are two edges of $E(F_1, F_2)$, then e and e' have the same orientation (between F_1 and F_2) if and only if $\varepsilon_I(e) = \varepsilon_I(e')$. Suppose that they do not have the same orientation. In this case, there exists an oriented cycle in

$F + e + e'$ respecting their orientation. This means that, for some nonnegative integer l , there exist $i_1, \dots, i_l \in I$ and $\eta_1, \dots, \eta_l \in \{-1, +1\}$ such that

$$\eta_1 q_{i_1} + \dots + \eta_l q_{i_l} + q_e + q_{e'} = 0.$$

Thus,

$$\begin{aligned} \varepsilon_I(e) &= \text{sign}(\omega(q_I \star q_e)) \\ &= \text{sign}(\omega(q_I \star (-\eta_1 q_{i_1} - \dots - \eta_l q_{i_l} - q_{e'}))) \\ &= \text{sign}(\omega(q_I \star (-q_{e'}))) \\ &= -\varepsilon_I(e'). \end{aligned}$$

The other case, with e and e' having the same orientation, leads to the opposite equality. Thus, $\varepsilon_{F_2, F_1}(e)\varepsilon_I(e) \in \{-1, +1\}$ does not depend on the chosen e . Finally, we have proved (2.7). \diamond

2.6. Symanzik rational fractions. In this subsection, we introduce Symanzik rational fractions. The following definition is more canonical than Definition 2.10 on Symanzik polynomials. Indeed, the problems highlighted in Remarks 2.3 and 2.4 disappear for Symanzik rational fractions. For instance, one can easily define Symanzik rational fractions for families of vectors in \mathbb{R}^p . This is useful in order to compute the nonarchimedean height pairing, as we will see in Section 3.3. Moreover, these rational fractions have a nice property of stability discussed in Section 6.

DEFINITION 2.22. Let u be a family of vectors in \mathbb{R}^p , let l be a nonnegative integer and w be a family of l vectors in $\langle u \rangle$. The (normalized) Symanzik rational fraction of order k of u with parameters w_1, \dots, w_l is defined by

$$\widetilde{\text{Sym}}_k(u; w; x) := \frac{\sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=r-l}} \|\mathbf{u}_I \wedge \mathbf{w}\|^k x^{I^c}}{\sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=r}} \|\mathbf{u}_I\|^k x^{I^c}}. \quad \diamond$$

If elements of u are in \mathbb{Z}^p , then we simply have

$$\widetilde{\text{Sym}}_k(u; w; x) = \frac{\text{Sym}_k(u; w; x)}{\text{Sym}_k(u; x)}.$$

Later in Remark 3.18, we will give a determinantal formula for Symanzik rational fractions in the case $k = 2$.

We have seen in Example 2.9 that Kirchhoff and Symanzik polynomials are linked to graphs. In the next section, we will use our generalization to define Symanzik polynomials over simplicial complexes.

3. Symanzik polynomials on simplicial complexes

Every result in this section can be extended to CW-complexes.

Before extending Symanzik polynomials to simplicial complexes, we will generalize the notion of forests in graph theory to the case of simplicial complexes. Generalized forests will reveal interesting properties of these polynomials.

3.1. Simplicial complexes and forests. Let V be a finite set of vertices. An abstract simplicial complex on V is a nonempty set Δ of subsets of V called faces such that Δ is stable by inclusion: if δ is a face and if $\gamma \subseteq \delta$, then γ is also a face. A simplicial complex Γ is a subcomplex of Δ if $\Gamma \subseteq \Delta$. If δ is a face, its dimension is $\dim(\delta) := |\delta| - 1$. Notice that Δ has always a unique face of dimension -1 : the empty set. The dimension of Δ is the maximal dimension of its faces. We call it d . The d -dimensional faces are called facets. If l is an

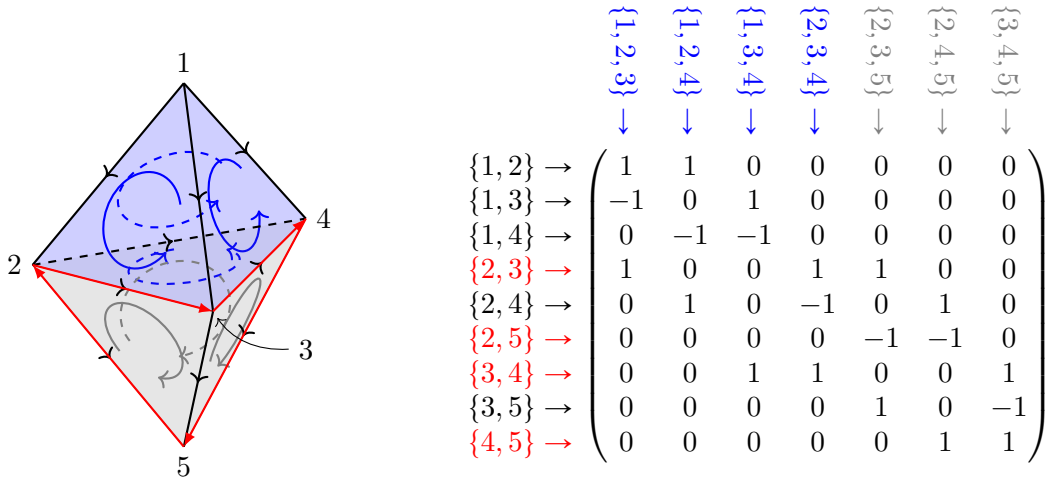


FIGURE 1. A bipyramid and its d -th incidence matrix.

integer, $l \geq -1$, then Δ_l is the set of faces of Δ of dimension l . The l -skeleton $\Delta_{\leq l}$ of Δ is the subcomplex of all faces of dimension at most l of Δ :

$$\Delta_{\leq l} := \bigcup_{i=-1}^l \Delta_i.$$

In this article, we will suppose that a complex Δ is always endowed with an enumeration on each set of faces Δ_l , $l \in [-1 \dots d]$, by numbers from 1 to $|\Delta_l|$.

Let $C_l(\Delta) := \mathbb{Z}\langle \Delta_l \rangle$ be the set of l -chains of Δ , where each simplex has the standard orientation given by the enumeration of Δ_0 . Let ∂_Δ be the d -th boundary operator of the augmented simplicial chain complex:

$$\begin{aligned} \partial_\Delta : \quad C_d(\Delta) &\longrightarrow C_{d-1}(\Delta), \\ \{i_0, \dots, i_d\} \text{ with } i_0 < \dots < i_d &\longmapsto \sum_{j=0}^d (-1)^j \{i_0, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_d\}. \end{aligned}$$

If δ_i denotes the i -th facet for the chosen enumeration, then $(\delta_1, \dots, \delta_{|\Delta_d|})$ is a basis of $C_d(\Delta)$. We identify $C_d(\Delta)$ with $\mathbb{Z}^{|\Delta_d|}$ mapping this basis to the standard basis. We obtain in the same way a basis of $C_{d-1}(\Delta)$ and an identification $C_{d-1}(\Delta) \simeq \mathbb{Z}^{|\Delta_{d-1}|}$. We can now represent ∂_Δ by a matrix in $\mathcal{M}_{|\Delta_{d-1}|, |\Delta_d|}(\mathbb{Z})$ which we will call the d -th incidence matrix of Δ . The kernel of ∂_Δ in $C_d(\Delta)$ is denoted by $Z_d(\Delta)$ and its elements are called d -cycles. The image of ∂_Δ in $C_{d-1}(\Delta)$ is denoted by $B_{d-1}(\Delta)$ and its elements are called $(d-1)$ -boundaries.

We can also define $Z_l(\Delta)$ and $B_{l-1}(\Delta)$ for $l < d$ as the kernel and the image of $\partial_{\Delta, l} := \partial_{\Delta_{\leq l}}$.

Abusing notation, in this section we will denote in the same way an l -chain (or a family of l -chains) and its image by the identification $C_l(\Delta) \simeq \mathbb{Z}^{|\Delta_l|}$.

EXAMPLE 3.1. Figure 1 is an example of a 2-dimensional simplicial complex Δ called the bipyramid. Its 2nd incidence matrix is shown on the right. We represented a 2-cycle in blue and a 1-boundary, $\partial_\Delta(\{2, 3, 5\} + \{3, 4, 5\})$, in red. \diamond

For the rest of this section, we fix V a finite set, Δ an abstract simplicial complex on V , $d := \dim(\Delta)$, $n := |\Delta_d|$ and $p := |\Delta_{d-1}|$. We set $U \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{Z})$ the d -th incidence matrix of Δ . As in the previous section, we set $r := \text{rk}(U)$.

Now we define (simplicial) κ -forests of Δ following [BK16] which is based on [DKM09] and [Kal83]. This definition is one possibility to generalize the notion of forests in graphs to higher dimensions (see [DKM09] for a slightly different definition). Indeed, in dimension one,

our definition will coincide with the usual one if one sees graphs as 1-dimensional simplicial complexes.

DEFINITION 3.2. Let $\Gamma \subseteq \Delta$ be a simplicial subcomplex of Δ such that $\Gamma_{\leq d-1} = \Delta_{\leq d-1}$. Let κ be a nonnegative integer. Then Γ is a κ -forest of the simplicial complex Δ if it verifies the following three properties.

- (1) *acyclicity*: Γ has no nonzero d -cycle,
- (2) $\text{rk}(\partial_\Delta) - \text{rk}(\partial_\Gamma) = \kappa$,
- (3) $|\Gamma_d| = |\Delta_d| - \text{rk}(Z_d(\Delta)) - \kappa$.

The set of κ -forests of Δ is denoted by $\mathcal{F}_\kappa(\Delta)$. Moreover, we will call Γ a *subforest* of Δ if it is acyclic. By Proposition 3.5 below, this is equivalent to being a κ -forest for some $\kappa \geq 0$. \diamond

EXAMPLE 3.3. Let Γ be the bipyramid where we removed facets $\{1, 3, 4\}$ and $\{3, 4, 5\}$. To check that it is a 0-forest, we look at the d -th incidence matrix U_Γ of ∂_Γ (which is a submatrix of U). Clearly $\Gamma_{\leq 1} = \Delta_{\leq 1}$. Moreover, the three conditions are verified:

- (1) the kernel of U_Γ is trivial. Thus, Γ is acyclic.
- (2) $\text{Im}(U_\Gamma) = \text{Im}(U)$. Thus, $\text{rk}(\partial_\Delta) - \text{rk}(\partial_\Gamma) = 0$.
- (3) $|\Gamma_2| = 5$, $|\Delta_2| = 7$ and $\text{rk}(Z_2(\Delta)) = \text{rk}(\ker(\partial_\Delta)) = 2$. Thus,

$$|\Gamma_2| = |\Delta_2| - \text{rk}Z_2(\Delta) - 0. \quad \diamond$$

We will see easier ways to check whether a subcomplex is a κ -forest in this section. But before, let us motivate the name of forest.

EXAMPLE 3.4. If $G = (V, E)$ is a simple graph, then it can be seen as a 1-dimensional complex. The three conditions of Definition 3.2 for a subgraph $F = (V_F, E_F)$ to be a κ -forest can be rewritten as

- (1) F is acyclic,
- (2) F has κ more connected components than G ,
- (3) $|E_F| = |E| - g_G - \kappa$ (which equals $|V| - c_G - \kappa$) where c_G is the number of connected components of G and g_G is the genus of G which equals $|E| - |V| + c_G$.

Thus, for instance, if G is connected, a 0-forest is exactly a spanning tree, and a κ -forest in our definition is what is usually called a $(\kappa + 1)$ -forest (because in graphs it is more natural to count the number of connected components). \diamond

It is well-known that, in graphs, only two out of the three conditions enumerated in the previous example are needed to be a κ -forest. This is still true in simplicial complexes.

PROPOSITION 3.5. A subcomplex Γ of Δ such that $\Gamma_{\leq d-1} = \Delta_{\leq d-1}$ is a κ -forest for a non-negative integer κ if and only if it verifies two out of the three conditions of the Definition 3.2.

PROOF. By the rank-nullity theorem, acyclicity (i.e., triviality of $\ker(\partial_\Gamma)$) is equivalent to $\text{rk}(\partial_\Gamma) = |\Gamma_d|$. The same theorem implies that $\text{rk}(Z_d(\Delta)) = |\Delta_d| - \text{rk}(\partial_\Delta)$. Thus, the three conditions can be rewritten as:

- (1) $\text{rk}(\partial_\Gamma) = |\Gamma_d|$,
- (2) $\text{rk}(\partial_\Delta) - \text{rk}(\partial_\Gamma) = \kappa$,
- (3) $|\Gamma_d| = |\Delta_d| - (|\Delta_d| - \text{rk}(\partial_\Delta)) - \kappa$.

Now, the proposition is clear. \square

Two more remarks before we end this subsection. First, there is a natural bijection between the set of κ -forests Δ and the set of independent subfamilies of u of size $r - \kappa$. Thus, the

subforests naturally form the family of independent sets of a matroid over $[n]$ (we refer to Section 4.1 for a definition of matroids).

Finally, it is useful to have in mind a practical algorithm to create κ -forests of Δ . As long as there are still d -cycles, choose a cycle, pick a facet in this cycle and remove it. At the end, we will obtain a 0-forest. One can then remove any κ more facets to obtain a κ -forest. Every κ -forest can be obtained in this way.

3.2. Kirchhoff and Symanzik polynomials for simplicial complexes. Here is some more notations. Set

$$H_k(\Delta) := Z_k(\Delta)/B_k(\Delta),$$

the k -th reduced homology group of Δ . If A is a \mathbb{Z} -module, $\text{Tor}(A)$ will denote its torsion part. Abusing notations, if a face δ is numbered by i , we will often write δ instead of i . In the same way, a set of faces will sometimes denote the set of numbers associated to these faces. Finally, if $I \subseteq [n]$, $\Delta|_I$ will denote the subcomplex of Δ with facets labeled by an element of I .

DEFINITION 3.6. We define the *Kirchhoff polynomial of order k of Δ* to be the Kirchhoff polynomial of the boundary operator:

$$\text{Kir}_k(\Delta; x) := \text{Kir}_k(u; x),$$

where we recall that U is the matrix associated to ∂_Δ ◇

This definition can be rewritten in terms of forests.

THEOREM 3.7 (Kirchhoff’s theorem for simplicial complexes). *One has*

$$\text{Kir}_k(\Delta; x) = |\text{Tor}(H_{d-1}(\Delta))|^k \sum_{\Gamma \text{ 0-forest of } \Delta} |B_{d-1}(\Delta)/B_{d-1}(\Gamma)|^k x^{\Gamma d}.$$

PROOF. We recall the Definition 2.2 about Kirchhoff polynomials:

$$\text{Kir}_k(u; x) := \frac{1}{\|\langle u \rangle_{\mathbb{Z}}\|^k} \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=r}} \|\mathbf{u}_I\|^k x^I.$$

Notice that \mathbf{u}_I is nonzero if and only if U_I has a trivial kernel, i.e., if and only if $\Delta|_I$ is acyclic. Hence, in the above sum, we can restrict to sets I such that $\Delta|_I$ is a 0-forest of Δ . We have

$$\begin{aligned} \text{Tor}(H_{d-1}(\Delta)) &= \langle B_{d-1}(\Delta) \rangle_{\mathbb{Z}} / B_{d-1}(\Delta) \\ &\simeq \frac{\langle B_{d-1}(\Delta) \rangle_{\mathbb{Z}} / B_{d-1}(\Delta|_I)}{B_{d-1}(\Delta) / B_{d-1}(\Delta|_I)}, \\ &\simeq \frac{\langle u \rangle_{\mathbb{Z}} / \mathbb{Z}u_I}{B_{d-1}(\Delta) / B_{d-1}(\Delta|_I)}, \end{aligned}$$

Since ∂_Δ and $\partial_{\Delta|_I}$ have same rank, we can write

$$|\text{Tor}(H_{d-1}(\Delta))| \cdot |B_{d-1}(\Delta) / B_{d-1}(\Delta|_I)| = |\langle u \rangle_{\mathbb{Z}} / \mathbb{Z}u_I|.$$

We can now use (2.1) to conclude the proof. □

REMARK 3.8. Actually, the equality of the theorem takes a simpler form:

$$\text{Kir}_k(\Delta; x) = \sum_{\Gamma \text{ 0-forest of } \Delta} |\text{Tor}(H_{d-1}(\Gamma))|^k x^{\Gamma d}.$$

Indeed,

$$\text{Tor}(H_{d-1}(\Gamma)) = \langle B_{d-1}(\Gamma) \rangle_{\mathbb{Z}} / B_{d-1}(\Gamma) \simeq \langle u_\Gamma \rangle_{\mathbb{Z}} / \mathbb{Z}u_\Gamma = \langle u \rangle_{\mathbb{Z}} / \mathbb{Z}u_\Gamma.$$

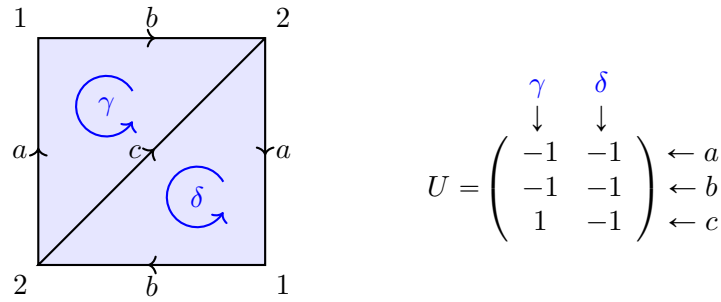


FIGURE 2. A decomposition of $\mathbb{R}P^2$.

Though, the form of the theorem enlightens that $\text{Kir}_k(\Delta; x)$ is divisible by $|\text{Tor}(\mathbb{H}_{d-1}(\Delta))|^k$ in $\mathbb{Z}[x]$. This is the factor we have seen above in Example 2.8, and its the a^k of Theorem 2.13 and Propositions 2.16 and 2.19.

We can compare the above formula to Corollary 21 of [BK16] (called Simplicial matrix tree theorem). Let $R \subseteq [p]$ corresponds to the chosen root. We get the corollary setting $k = 2$, $x = (1, \dots, 1)$ and multiplying both sides by $\|(\mathbf{u}^\top)_R\|^2 / \|\mathbb{Z}\mathbf{u}^\top\|^2$. \diamond

EXAMPLE 3.9. The real projective plane is a very instructive example. In order to simplify calculations, we study it as a Δ -complex, called Δ , instead of a simplicial complex: see Figure 2. We refer to [Hat02, p. 103], for a precise definition of Δ -complexes.

A basis of $\mathbb{Z}\mathbf{u}^\top$ is $((\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}))$. Thus, following Example 2.8,

$$\text{Kir}_2(\Delta; (x_1, x_2)) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2^2 x_1 x_2.$$

We see that Δ has only one 0-forest: itself. Indeed, it does not have nontrivial cycles. Then, looking at Remark 3.8, $|\text{Tor}(\mathbb{H}_{d-1}(\Delta))| = 2$. Indeed, the class of $a + b$ is an element of order 2 in $\text{Tor}(\mathbb{H}_{d-1}(\Delta))$. Unlike the case of graphs, setting $x_1 = x_2 = 1$ does not give the number of 0-forests. Finding this number is difficult in general: there exist examples where all the coefficients of the polynomial are not equal (see Example 3.27). Knowing the value of the Kirchhoff polynomial for all order k might help us. \diamond

Now we only focus on Symanzik polynomials.

DEFINITION 3.10. We define the *Symanzik polynomial of order k of Δ* to be the Symanzik polynomial of the boundary operator:

$$\text{Sym}_k(\Delta; x) := \text{Sym}_k(u; x). \quad \diamond$$

A direct corollary of Theorem 3.7 follows.

COROLLARY 3.11. *One has*

$$\text{Sym}_k(\Delta; x) = |\text{Tor}(\mathbb{H}_{d-1}(\Delta))|^k \sum_{\Gamma \text{ 0-forest of } \Delta} |\mathbb{B}_{d-1}(\Delta) / \mathbb{B}_{d-1}(\Gamma)|^k x^{\Gamma^c}.$$

EXAMPLE 3.12. Symanzik polynomials compute some interesting data on metric graphs. For more details about this example, we refer to [KS00]. Let G be a simple graph with n edges e_1, \dots, e_n . For each $i \in [n]$, set a positive length l_i to the edge e_i . Let \mathcal{G} be the geometric representation of G , i.e., \mathcal{G} is a one dimensional CW-complex with the metric induced by the lengths. We set $y = (l_1, \dots, l_n)$. Let g be the genus of G .

Let v be a basis of $\mathbb{Z}_1(G)$. We define the map

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{C}_1(G) &\rightarrow \mathbb{R}^g, \\ a &\mapsto ((a, v_1)_y, \dots, (a, v_g)_y). \end{aligned}$$

Actually, ϕ could be naturally extended to the singular 1-chains on \mathcal{G} . We now define the Jacobian torus of \mathcal{G} to be

$$\text{Jac}(\mathcal{G}) := \mathbb{R}^g / \phi(Z_1(G)).$$

The standard inner product in \mathbb{R}^g induces an inner product on $C_1(G)$. The latter is associated to the symmetric matrix $\tilde{Y} := YV V^T Y$. Thus,

$$(3.1) \quad \text{Vol}(\text{Jac}(\mathcal{G})) = \sqrt{\det(V^T \tilde{Y} V)} = \sqrt{\det(V^T Y V)^2} = \text{Sym}_2(G, y).$$

In fact, this equality holds for a deeper combinatorial reason, (cf. [KS00]). Choosing an arbitrary point p of \mathcal{G} leads to a bijection between the set of so-called *break divisors* of G and its Jacobian torus. This bijection induced a quasi-partition of the Jacobian torus into parallelotopes labelled by spanning trees of G (see Figure 1 of [ABKS14]). The parallelotope associated to a spanning tree T has volume

$$\prod_{i, e_i \notin E(T)} l_i.$$

This gives another proof of the equality (3.1). ◇

In the previous example, the value of the Symanzik polynomial obtained at the end will not change if one adds or deletes some vertices inside an edge of the metric graph. We will see in the next subsection that this result is more general. Before that, let us define Symanzik polynomials with parameters for simplicial complexes.

DEFINITION 3.13. Let w be a family of size l of $(d - 1)$ -boundaries of Δ . We define the *Symanzik polynomial of order k of Δ with parameters w* to be the Symanzik polynomial of u with parameters w :

$$\text{Sym}_k(\Delta; w; x) := \text{Sym}_k(u; w; x). \quad \diamond$$

The following result is a direct corollary of both Theorem 3.7 and Proposition 2.20.

COROLLARY 3.14. *Let w be a family of size l of $(d - 1)$ -boundaries. Then*

$$\text{Sym}_k(\Delta; w; x) = |\text{Tor}(H_{d-1}(\Delta))|^k \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_l(\Delta)} \sum_{\substack{F \subseteq \Gamma_d^c \\ \Gamma \cup F \in \mathcal{F}_0(\Delta)}} \left(\varepsilon_{\Gamma_d}(F) \left| \frac{B_{d-1}(\Delta)}{B_{d-1}(\Gamma \cup F)} \right| (\tilde{w}, \mathbf{e}_F) \right)^k x^{\Gamma_d^c},$$

where ε is defined before Proposition 2.20, and \tilde{w} is a family of d -chains of Δ such that $\partial \tilde{w}_j = w_j$ for every $j \in [l]$.

REMARK 3.15. As in Example 2.21, ε_{Γ_d} has a geometrical meaning. For instance, if $l = 1$ and if Γ is a 1-forest of Δ , ε_{Γ_d} is one of the two opposite canonical orientations on facets δ of Γ_d^c such that $\Gamma + \delta$ is a 0-forest of Δ . These orientations are characterized by the fact that, for any two different such facets δ, δ' , any cycle of $\Gamma + \delta + \delta'$ will follow the orientation of exactly one of them.

In matroid theory, such orientations are encoded by oriented matroids, or by generalizations of them like \mathbb{R} -matroids. For more details, one can consult [Piq19a] and [BB16]. ◇

3.3. Nonarchimedean height pairing. Let us introduce an interesting inner product which is linked to the Archimedean height pairing. Before going through this construction, let us roughly sketch this link and motivate the results of this section. For more details, the reader can compare Proposition 3.17 with Theorem 1.2 of [ABBF16]. On a smooth projective complex curve X of dimension n , if b and b' are two divisors of degree 0 with disjoint support, one can define the Archimedean height pairing

$$\langle b, b' \rangle_X := \text{Re} \left(\int_{\gamma_b} \omega_{b'} \right),$$

where γ_b is a 1-chain disjoint from the support of b' with boundary b , and $\omega_{b'}$ is a canonical logarithmic differential form with residue b' . If one considers, instead of a single curve X , a degenerating family of curves $\mathcal{X} = (X_s)_s$, parametrized by s and degenerating at $s = 0$, and two families of divisors $(b_s)_{s \neq 0}$ and $(b'_s)_{s \neq 0}$ on it, one can wonder what is the asymptotic of $\langle b_s, b'_s \rangle_{X_s}$ as s approaches 0. Authors of [ABBF16] proved that, under some good conditions, the asymptotic can be described thanks to a Symanzik rational fraction as defined in Section 2.6. More precisely, one can associate to the singular fiber X_0 a dual graph G . Considering G as a 1-dimensional simplicial complex, the divisors will induce some boundaries $b_0, b'_0 \in B_0(G)$ on G . Then one can write

$$\langle b_s, b'_s \rangle_{X_s} = \langle b_0, b'_0 \rangle_{y(s)} + h(s),$$

where h is a bounded function and $\langle b_0, b'_0 \rangle_{y(s)}$ is defined as below (Definition 3.16) where $y(s)$ is a vector depending on s and whose coordinates diverge to $+\infty$, as s approaches 0. This asymptotic is strongly linked to Theorem 6.1 of Section 6. The dual graph appears in the nonarchimedean analytification of X_s , for any $s \neq 0$. Thus, one can interpret $\langle \cdot, \cdot \rangle_y$ as a nonarchimedean height pairing. Moreover, as we mentioned above, this nonarchimedean height pairing, or more precisely the associated quadratic form, can be expressed as a Symanzik rational fraction. This is stated by Proposition 3.17.

If one replaces curves by higher dimensional projective complex manifolds, one can still define an analogous of the dual graph, which will be a higher dimensional complex. One can also define an analogous of the Archimedean height pairing. Thus, one can wonder if the asymptotic of the height pairing can be described thanks to a nonarchimedean height pairing on the dual complex as the one we define in Definition 3.16 below.

Let y be a family of n positive real numbers. We denote by $C_d(\Delta; \mathbb{R})$ the vector subspace $\langle C_d(\Delta) \rangle$. We endow $C_d(\Delta; \mathbb{R})$ with the inner product $(\cdot, \cdot)_y$ and $C_{d-1}(\Delta; \mathbb{R})$ with the standard inner product (\cdot, \cdot) . This allows us to define the adjoint $\partial^* : C_{d-1}(\Delta; \mathbb{R}) \rightarrow C_d(\Delta; \mathbb{R})$ of ∂ according to these products.

Notice that $\text{Im}(\partial^*) \subseteq \ker(\partial)^\perp$ and $\ker(\partial^*) = \text{Im}(\partial)^\perp$. Thus, $\text{rk}(\partial^*) + \dim(\ker(\partial)) \leq \dim(C_d(\Delta; \mathbb{R}))$ and $\dim(\ker(\partial^*)) + \text{rk}(\partial) = \dim(C_{d-1}(\Delta; \mathbb{R}))$. Using the rank-nullity theorem twice, we deduce that the inequality must be an equality. Hence,

$$\text{Im}(\partial^*) = Z_d(\Delta; \mathbb{R})^\perp.$$

Let b and b' be two $(d - 1)$ -boundaries. One can find a unique preimage $a \in C_d(\Delta; \mathbb{R})$ of b which is orthogonal to $Z_d(\Delta; \mathbb{R})$. The orthogonal of $Z_d(\Delta; \mathbb{R})$ is the image of ∂^* . Let f be any preimage of a by ∂^* . Then, we have the following definition.

DEFINITION 3.16. With the above notation, we set

$$\langle b, b' \rangle_y := (f, b'). \quad \diamond$$

Choosing f' such that $b' = \partial \partial^* f'$, one has

$$\langle b, b' \rangle_y := (f, \partial \partial^* f') = (\partial^* f, \partial^* f')_y.$$

Thus, the product is indeed well-defined, symmetric and positive-definite.

PROPOSITION 3.17. *If y is a family of n positive real numbers and if b is a $(d - 1)$ -boundary of Δ , then*

$$\langle b, b \rangle_y = \widetilde{\text{Sym}}_2(\Delta; (b); y) := \frac{\text{Sym}_2(\Delta; (b); y)}{\text{Sym}_2(\Delta; y)}.$$

PROOF. Let a be the preimage of b orthogonal to $Z_d(\Delta; \mathbb{R})$, and let v be a basis of $Z_d(\Delta; \mathbb{R})$. By Propositions 2.16 and 2.19, after simplification of the factors,

$$\frac{\text{Sym}_2(\Delta; (b); y)}{\text{Sym}_2(\Delta; y)} = \frac{\|v \wedge a\|_y^2}{\|v\|_y^2} = \|a\|_y^2 = \langle b, b \rangle_y. \quad \square$$

REMARK 3.18. If rows of U are free, then the matrix corresponding to ∂^* is $Y^{-1}U^\top$. Therefore,

$$\widetilde{\text{Sym}}_2(\Delta; (b); y) = \langle b, b \rangle_y = (b, (\partial\partial^*)^{-1}b) = b^\top (UY^{-1}U^\top)^{-1}b.$$

Following the proof of Proposition 3.17, one can generalize the previous formula. Let w be a family of vectors in $\langle u \rangle$. Then

$$\widetilde{\text{Sym}}_2(\Delta; w; y) = \det(W^\top (UY^{-1}U^\top)^{-1}W). \quad \diamond$$

3.4. Symanzik polynomials on triangulable topological spaces. So far, we only discussed the case of discrete objects. Actually, we can define the Symanzik polynomial of any sufficiently nice topological space endowed with a diffuse measure (see details below). This definition is consistent with above definitions when we discretize the space by taking a triangulation.

Let \mathcal{S} be the topological space underlying a finite CW-complex of dimension d . Assume there is some finite diffuse measure μ on \mathcal{S} , i.e., a measure which is zero on every subset homeomorphic to a $(d - 1)$ -dimensional ball. The main idea of this subsection is to introduce a characteristic function of some sufficiently nice d -dimensional singular chains. For instance, if a is a function from a d -simplex to \mathcal{S} which is a homeomorphism onto its image, one can introduce a function $\omega_a : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ which equals 1 on the image of a (or -1 depending on the orientation), and 0 elsewhere. One can then introduce the canonical k -multilinear symmetric product for this kind of functions with respect to μ . This product will be the continuous analogous of $(\cdot, \dots, \cdot)_{k,y}$ and will be sufficient to define a natural Symanzik polynomial $\text{Sym}_k(\mathcal{S}; \mu)$. In the previous description a is a particular d -chain. In order to take into account enough singular d -chains, we need to use the language of sheaves and of relative singular homology.

Let \mathcal{S}^{sm} be the subset of points z of \mathcal{S} such that z has a neighborhood homeomorphic to a d -dimensional ball (thus, \mathcal{S}^{sm} is a topological d -manifold). Let $(C_{*,\text{sing}}(\mathcal{S}), \partial_{\text{sing}})$ be the complex of singular homology of \mathcal{S} with coefficient in \mathbb{Z} , as defined for example in [Hat02]. Let \mathcal{R} be the presheaf of relative homology defined by $\mathcal{R}(U) := H_{d,\text{sing}}(\mathcal{S}, \mathcal{S} \setminus U)$ for any open subset U (we refer to [Hat02] for a definition of relative homology). We believe that \mathcal{R} may be a sheaf, but we have not found any proof of this in the literature. Anyway, this is not crucial for our purpose, so we leave it as an open question for the moment. One can restrict \mathcal{R} to \mathcal{S}^{sm} to get the orientation sheaf of \mathcal{S}^{sm} denoted by \mathcal{R}^{sm} . Note that any stalk of \mathcal{R}^{sm} is isomorphic to \mathbb{Z} . Though \mathcal{R}^{sm} is not always isomorphic to the constant sheaf $\underline{\mathbb{Z}}_{\mathcal{S}^{\text{sm}}}$, (for instance \mathcal{S}^{sm} could be the projective plane), we have a canonical isomorphism of sheaves (see, e.g., [KS90, Proposition 3.3.4])

$$\mathcal{R}^{\text{sm}} \otimes \mathcal{R}^{\text{sm}} \cong \underline{\mathbb{Z}}_{\mathcal{S}^{\text{sm}}}.$$

Let $a \in C_{d,\text{sing}}(\mathcal{S})$ be a singular d -chain of \mathcal{S} with coefficients in \mathbb{Z} . To a we associate the section $\omega_a \in \mathcal{R}(\mathcal{S} \setminus \text{supp}(\partial_{\text{sing}}a))$ where $\text{supp}(\partial_{\text{sing}}a)$ is the support of the boundary of a (i.e., the union of the images of terms in $\partial_{\text{sing}}a$). If $z \in \mathcal{S}$, providing it is well-defined, we denote by $\omega_a(z)$ the germ of ω_a at z . By an abuse of notations, we also denote by ω_a the restriction of ω_a to \mathcal{R}^{sm} . We denote $C_{d,\text{sing}}^{\text{reg}}(\mathcal{S})$ the vector subspace of all $a \in C_{d,\text{sing}}(\mathcal{S})$ such that ω_a is defined μ -almost everywhere. In particular, if $a \in Z_d(\mathcal{S})$, then ω_a is defined on \mathcal{S} , thus $a \in C_{d,\text{sing}}^{\text{reg}}(\mathcal{S})$.

One can do the same remarks replacing \mathbb{Z} by \mathbb{R} . In particular, if $a \in C_{d,\text{sing}}(\mathcal{S}; \mathbb{R})$ is a singular d -chain with coefficients in \mathbb{R} , one can associate to a the section

$$\omega_a \in (\mathcal{R} \otimes \underline{\mathbb{R}}_{\mathcal{S}})(\mathcal{S} \setminus \text{supp}(\partial_{\text{sing}}a)).$$

We put a (positive semidefinite) multilinear inner product on $C_{d,\text{sing}}^{\text{reg}}(\mathcal{S}; \mathbb{R})$: for k chains $a_1, \dots, a_k \in C_{d,\text{sing}}^{\text{reg}}(\mathcal{S}; \mathbb{R})$,

$$(a_1, \dots, a_k)_{k,\mu} := (\omega_{a_1}, \dots, \omega_{a_k})_{L^k(\mu)} := \int_{\mathcal{S}} \omega_{a_1} \otimes \dots \otimes \omega_{a_k} d\mu,$$

where the tensor product is considered as a section of $\underline{\mathbb{R}}_U$ on some open set U of \mathcal{S}^{sm} of full measure. This inner product is also well-defined on $H_{d,\text{sing}}(\mathcal{S}; \mathbb{R}) \cong (\mathcal{R} \otimes \underline{\mathbb{R}}_{\mathcal{S}})(\mathcal{S})$. Thus, we have the following definition.

DEFINITION 3.19. With the above notations, the *Symanzik polynomial of \mathcal{S} of order k with respect to the measure μ* is defined by

$$\text{Sym}_k(\mathcal{S}; \mu) := |\text{Tor}(H_{d-1,\text{sing}}(\mathcal{S}))|^k \|v\|_{k,\mu}^k,$$

where v is any basis of $H_{d,\text{sing}}(\mathcal{S})$.

Moreover, if w is a family of l elements of $B_{d-1,\text{sing}}(\mathcal{S}; \mathbb{R})$ whose supports have measure zero, then the *Symanzik polynomial of \mathcal{S} of order k with respect to the measure μ and with parameters w* is defined by

$$\text{Sym}_k(\mathcal{S}; w; \mu) := |\text{Tor}(H_{d-1,\text{sing}}(\mathcal{S}))|^k \|v \wedge \tilde{w}\|_{k,\mu}^k,$$

where \tilde{w} is a family of elements of $C_{d,\text{sing}}(\mathcal{S}; \mathbb{R})$ such that $\partial_{\text{sing}} \tilde{w}_j = w_j$ for any $j \in [l]$. ◇

EXAMPLE 3.20. For example, the Symanzik polynomial of any order of a compact orientable manifold endowed with a volume form equals its entire volume (the torsion is trivial by the universal coefficient theorem and Poincaré duality). ◇

Let us now study triangulations. We recall that Δ is a simplicial complex on some vertex set V . Let $m := |\Delta_0|$ be the number of vertices of Δ and assume that $V = [m]$. Set

$$\begin{aligned} \nu_{\Delta} : \quad \Delta &\rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m), \\ \{i_0, \dots, i_l\} &\mapsto \text{conv}(e_{i_0}, \dots, e_{i_l}), \end{aligned}$$

where (e_1, \dots, e_m) is the standard basis of \mathbb{R}^m . We denote by $|\Delta|$ the *standard geometrical realization of Δ* defined by

$$|\Delta| := \bigcup_{\delta \in \Delta} \nu_{\Delta}(\delta).$$

A *triangulation of \mathcal{S}* consists of a simplicial complex Δ and an application Ψ of the form $\Psi = \Phi \circ \nu_{\Delta}$ where $\Phi : |\Delta| \rightarrow \mathcal{S}$ is a homeomorphism.

If \mathcal{S} comes from a regular finite CW-complex, such a triangulation exists. Fix one of them: (Δ, Ψ) . The dimension of Δ is also d .

THEOREM 3.21. *With above notations, one has*

$$\text{Sym}_k(\mathcal{S}; \mu) = \text{Sym}_k(\Delta; y),$$

where $y_{\delta} := \mu(\Psi(\delta))$ for every $\delta \in \Delta_d$.

PROOF. The homeomorphism Ψ induces a map $\Psi' : C_d(\Delta) \rightarrow C_{d,\text{sing}}(\mathcal{S})$. If δ is a facet of Δ , for each $z \in \text{int}(\Psi(\delta))$, $\omega_{\Psi'(\delta)}(z)$ is a generator of the stalk of \mathcal{R}^{sm} over z , and for each $z \in \mathcal{S}^{\text{sm}} \setminus \Psi(\delta)$, $\omega_{\Psi'(\delta)}(z) = 0$. Thus, for k facets $\delta_1, \dots, \delta_k$ of Δ ,

$$\begin{aligned} (\Psi'(\delta_1), \dots, \Psi'(\delta_k))_{\mu} &= \begin{cases} \mu(\Psi(\delta_1)) & \text{if } \delta_1 = \dots = \delta_k, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ &= (\delta_1, \dots, \delta_k)_y. \end{aligned}$$

Moreover, it is well-known that Ψ' induces an isomorphism $\Psi_* : H_d(\Delta) \xrightarrow{\sim} H_{d,\text{sing}}(\mathcal{S})$ [Hat02, Theorem 2.27]. Thus, Ψ_* maps bases of $Z_d(\Delta)$ to bases of $H_{d,\text{sing}}(\mathcal{S})$. If v is a basis of $Z_d(\Delta)$,

and if w is its image by Ψ' , the last equality implies that $\|\mathbf{w}\|_{k,\mu}^k = \|\mathbf{v}\|_{k,y}^k$. Moreover, Theorem 2.27 of [Hat02] also implies

$$|\mathrm{Tor}(\mathbb{H}_{d-1,\mathrm{sing}}(\mathcal{S}))|^k = |\mathrm{Tor}(\mathbb{H}_{d-1}(\Delta))|^k.$$

We conclude by Definition 3.19, Proposition 2.16 and Remark 3.8. □

Thus, the specialization of the polynomial does not depend on the triangulation. Let us study the abstract meaning of this fact.

3.5. Geometrical factorization of Symanzik polynomials. In this subsection, we use Theorem 3.21 to prove that Symanzik polynomials of simplicial complexes are stable by subtriangulation in the sense of Corollary 3.22. Moreover, we deduce a canonical factorization of the Symanzik polynomial of a simplicial complex.

Here is a corollary of Theorem 3.21. Let Δ be any d -dimensional simplicial complex with n facets. Let (Γ, Ψ) be a triangulation of $|\Delta|$. Assume that there exists a map $\varphi : \Gamma_d \rightarrow \Delta_d$ such that, for any facet γ of Γ , $\Psi(\gamma) \subseteq \nu_\Delta(\varphi(\gamma))$. In this case, we call (Γ, Ψ) a *subtriangulation* of Δ . Set $n' := |\Gamma_d|$.

COROLLARY 3.22. *Let x' be a family of n' variables. For $\delta \in \Delta_d$, let*

$$x_\delta := \sum_{\gamma \in \varphi^{-1}(\delta)} x'_\gamma.$$

Then

$$\mathrm{Sym}_k(\Gamma; x') = \mathrm{Sym}_k(\Delta; x).$$

PROOF. Let y' be a family of n' positive real numbers. It is not hard to create a finite diffuse measure μ on $|\Delta|$ such that $\mu(\Psi(\gamma)) = y'_\gamma$ for every $\gamma \in \Gamma_d$. Thus, considering (Δ, ν_Δ) as a second triangulation of $|\Delta|$, Theorem 3.21 implies

$$\mathrm{Sym}_k(\Gamma; y') = \mathrm{Sym}_k(\Delta; y),$$

where, for $\delta \in \Delta_d$,

$$y_\delta = \sum_{\gamma \in \varphi^{-1}(\delta)} y'_\gamma.$$

As this is true for any family y' of positive numbers, the equality holds in $\mathbb{Z}[x']$. □

One can go further in the factorization. Let us use notations of the last subsection. We say that two points $z, z' \in \mathcal{S}^{\mathrm{sm}}$ are equivalent if, for every $c \in \mathbb{H}_{d,\mathrm{sing}}(\mathcal{S})$, $\omega_c(z)$ is zero if and only if $\omega_c(z')$ is zero. In particular, all points of a connected component of $\mathcal{S}^{\mathrm{sm}}$ are equivalent. Equivalent classes form a partition $\mathcal{S}_1^{\mathrm{sm}}, \dots, \mathcal{S}_l^{\mathrm{sm}}$ of $\mathcal{S}^{\mathrm{sm}}$ (notice that some $\mathcal{S}_j^{\mathrm{sm}}$ could contain several connected components: see Example 3.26). In what follows, we do not consider the possible class of points z belonging to no cycle, i.e., such that $\omega_c(z) = 0$ for every cycle c . Let $j \in [l]$, $z_j \in \mathcal{S}_j^{\mathrm{sm}}$ and $c_j \in \mathbb{H}_{d,\mathrm{sing}}(\mathcal{S})$ be such that $|\omega_{c_j}(z_j)| \in \mathbb{Z}_+$ is nonzero and minimal. Finally, let $\tau_j \in \mathcal{R}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{S}^{\mathrm{sm}})$ be zero on $(\mathcal{S}_j^{\mathrm{sm}})^c$ and equal to $\omega_{c_j}|_{\mathcal{S}_j^{\mathrm{sm}}}$ on $\mathcal{S}_j^{\mathrm{sm}}$.

PROPOSITION 3.23. *With above notations, τ_j does not depend on z_j nor c_j . Moreover, there exists a polynomial $P_{\mathcal{S}} \in \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_l]$ such that, for every finite diffuse measure μ on \mathcal{S} ,*

$$\mathrm{Sym}_k(\mathcal{S}; \mu) = P_{\mathcal{S}}(\|\tau_1\|_{L^k(\mu)}^k, \dots, \|\tau_l\|_{L^k(\mu)}^k).$$

PROOF. Let v be a basis of $\mathbb{H}_{d,\mathrm{sing}}(\mathcal{S})$. Let n be the size of v . The Symanzik polynomial equals $P_1((v_{i_1}, \dots, v_{i_k})_{k,\mu})_{i_1, \dots, i_k \in [n]}$, where P_1 is the integer polynomial on n^k variables corresponding to $\mathrm{Tor}(\mathbb{H}_{d-1,\mathrm{sing}}(\mathcal{S}))^k \cdot \det$.

Let $c \in H_{d,\text{sing}}(\mathcal{S})$. Then

$$(3.2) \quad \omega_c = \sum_{j=1}^l \frac{\omega_c(z_j)}{\tau_j(z_j)} \tau_j.$$

Indeed, for the sake of a contradiction, assume there exists $z \in \mathcal{S}^{\text{sm}}$ such that $\omega_c(z) \neq \omega'_c(z)$, where ω'_c denote the right-hand side. Let $j \in [l]$ be such that $z \in \mathcal{S}_j^{\text{sm}}$. Then the cycle

$$c' := \frac{\omega_c(z_j)}{\tau_j(z_j)} c_j - c$$

verifies $\omega_{c'}(z_j) = 0$, but $\omega_{c'}(z) = \omega'_c(z) - \omega_c(z) \neq 0$. This is absurd since z and z_j are equivalent.

In particular, if $z \in \mathcal{S}_j^{\text{sm}}$, then

$$\frac{\omega_c(z)}{\tau_j(z)} = \frac{\omega_c(z_j)}{\tau_j(z_j)}.$$

This implies that τ_j does not depend on z_j and c_j .

Notice that the ratios in (3.2) are integers by the minimality condition on c_j . Rewriting the elements of v in terms of the τ_j , we get that the Symanzik polynomial equals

$$P_2((\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_k})_{k,\mu})_{j_1, \dots, j_k \in [l]}$$

for some integer polynomial P_2 . But clearly, if $j_1, \dots, j_k \in [l]$, then

$$(\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_k})_{k,\mu} = \begin{cases} \|\tau_{j_1}\|_{L^k(\mu)}^k & \text{if } j_1 = \dots = j_k, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Finally, there exists $P_S \in \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_l]$ such that

$$\text{Sym}_k(\mathcal{S}; \mu) = P_S(\|\tau_1\|_{L^k(\mu)}^k, \dots, \|\tau_l\|_{L^k(\mu)}^k). \quad \square$$

Now suppose that $\mathcal{S} = |\Delta|$ for some simplicial complex Δ . For every $\delta \in \Delta_d$, $\text{int}(\nu_\Delta(\delta))$ is included in a connected component of \mathcal{S}^{sm} , thus, in a $\mathcal{S}_j^{\text{sm}}$ for some $j \in [l]$. We pick a point z_δ in the interior of $\nu_\Delta(\delta)$ for every facet $\delta \in \Delta_d$. Then we set, for $j \in [l]$,

$$Q_j(x) = \sum_{\delta \in \Delta_d} (\tau_j(z_\delta))^{\otimes k} x_\delta.$$

Using the argument we used to deduce Corollary 3.22 from Theorem 3.21, we infer the following corollary from Proposition 3.23.

COROLLARY 3.24. *With above notations,*

$$\text{Sym}_2(\Delta; x) = P_{|\Delta|}(Q_1(x), \dots, Q_l(x)).$$

EXAMPLE 3.25. For example, if Δ is the bipyramid (Figure 1), $|\Delta|$ has three equivalence classes: the equatorial plane and both pyramids. The corresponding factorized polynomial is

$$\text{Sym}_k(\Delta; x) = (x_1 + x_2 + x_3)x_4 + (x_1 + x_2 + x_3)(x_5 + x_6 + x_7) + x_4(x_5 + x_6 + x_7). \quad \diamond$$

EXAMPLE 3.26. Let \mathcal{S} be the following Δ -complex. We take two copies of Figure 2 and we identify the four edges labeled by a , and the four edges labeled by b . Then \mathcal{S}^{sm} has two connected components: the interiors of each copy. But it has only one equivalent class because $\text{rk}(\mathbb{Z}_2(\mathcal{S})) = 1$. \diamond

EXAMPLE 3.27. For any $U \in \mathcal{M}_{p,l}(\mathbb{Z})$, it is not hard to create a regular CW-complex \mathcal{S} (of dimension 2) such that U is the matrix associated to the cellular boundary operator of \mathcal{S} . Thus, triangulating \mathcal{S} , there is a simplicial complex Δ and a factorization of $\text{Sym}_2(\Delta; x)$ of the form $\det(UX'U^T)$. Hence, one can somehow obtain any possible Symanzik polynomial from simplicial complexes. \diamond

3.6. Symanzik polynomials with parameters and geometry. We have seen a geometrical interpretation of Symanzik polynomials. In this subsection, we tackle the case of Symanzik polynomials with parameters. We will see in Section 4 that adding a parameter corresponds to doing a *matroidal contraction*. However, this matroidal contraction has, a priori, no concrete geometrical interpretation in general. Nevertheless, in this subsection, we show that, in some simple cases, adding a parameter is equivalent to doing a topological contraction, and we give insight on how to deal with the parameters geometrically for more complex cases.

Recall that Δ is a simplicial complex of dimension d . Let a be a $(d - 1)$ -chain of Δ . If $\delta \in \Delta_{d-1}$, then $[\delta]a \in \mathbb{Z}$ will denote the coefficient of δ in a . The *support of a* , denoted by $\text{supp}(a)$, is the set of $(d - 1)$ -faces associated to a nonzero coefficient in a . One can see Δ as a CW-complex. Then, $\Delta/\text{supp}(a)$ denotes the CW-complex obtained as the result of contracting elements in $\text{supp}(a)$ (see the following example).

EXAMPLE 3.28. The cellular homology of $\Delta/\text{supp}(a)$ is naturally isomorphic to the relative simplicial homology $H_*(\Delta, \Delta|_{\text{supp}(a)})$ (see [Hat02]). For instance, $C_{d-1}(\Delta/\text{supp}(a)) = C_{d-1}(\Delta)/\mathbb{Z}\langle\text{supp}(a)\rangle$. If U is the d -th incidence matrix of Δ , then the d -th incidence matrix of $\Delta/\text{supp}(a)$ is obtained by removing rows of U corresponding to elements of $\text{supp}(a)$. Hence we can still define the Symanzik polynomial of $\Delta/\text{supp}(a)$.

In fact, if (Δ, Ψ) is the triangulation of some CW-complex \mathcal{S} , and if μ is some diffuse finite measure on \mathcal{S} , then

$$\text{Sym}_2(\Delta/\text{supp}(a); y) = \text{Sym}_2(\mathcal{S} / \bigcup_{\alpha \in \text{supp}(a)} \Psi(\alpha); \tilde{\mu}),$$

where, for $\delta \in \Delta_d$, $y_\delta = \mu(\Psi(\delta))$, the quotient on the right-hand side is the topological contraction, and $\tilde{\mu}$ is the induced measure on the contracted space. ◊

DEFINITION 3.29. Let $b \in B_{d-1}(\Delta)$ be a nonzero boundary. Then b is a *simple boundary* of Δ if it is a generator of $\mathbb{Z}\langle\text{supp}(b)\rangle \cap B_{d-1}(\Delta)$.

Let $b, b' \in B_{d-1}(\Delta)$ be two boundaries. Then they are called *cosimple boundaries* if they are simple and if they form an independent family of maximal rank of $\mathbb{Z}\langle\text{supp}(b) \cup \text{supp}(b')\rangle \cap B_{d-1}(\Delta)$. In this case, we define:

$$\theta_{b,b'} := \frac{\|\mathbb{Z}(b, b')\|}{\|\mathbb{Z}\langle\text{supp}(b) \cup \text{supp}(b')\rangle \cap B_{d-1}(\Delta)\|}.$$

◊

PROPOSITION 3.30. For any $(d - 1)$ -boundary $b \in B_{d-1}(\Delta; \mathbb{R})$ with real coefficients, there exist simple boundaries b_1, \dots, b_l , pairwise cosimple, and real numbers $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ such that

$$b = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_l b_l.$$

PROOF. Let D be a maximal subset of $\text{supp}(b)$ such that $\text{rk}(Z_d(\Delta/D)) = \text{rk}(Z_d(\Delta))$. Let $\delta \in \text{supp}(b) \setminus D$. Then $Z_d(\Delta/(D + \delta))/Z_d(\Delta)$ has rank 1. Let \tilde{a}_δ be a generator of this quotient. Let $a_\delta \in C_d(\Delta)$ be a representative of \tilde{a}_δ . Let b_δ be its boundary. One can easily check that $(b_\delta)_{\delta \in \text{supp}(b) \setminus D}$ forms a family of simple and pairwise cosimple boundaries, and that

$$b = \sum_{\delta \in \text{supp}(b) \setminus D} \frac{[\delta]b}{[\delta]b_\delta} b_\delta. \quad \square$$

REMARK 3.31. Let b, b' be cosimple boundaries of Δ and let a, a' be d -chains such that $\partial a = b$ and $\partial a' = b'$. Let v be a basis of $Z_d(\Delta)$. Then, $v \star (a)$ is a basis of $Z_d(\Delta/\text{supp}(b))$, and that $v \star (a, a')$ is a basis of the vector subspace $\langle Z_d(\Delta/(\text{supp}(b) \cup \text{supp}(b'))) \rangle$. Thus, by Propositions 2.16, 2.19 and Remark 3.8,

$$\text{Sym}_k(\Delta; x) = \text{Tor}(H_{d-1}(\Delta))^k \|\mathbf{v}\|_{k,x}^k,$$

$$\begin{aligned} \text{Sym}_k(\Delta; (b); x) &= \text{Tor}(H_{d-1}(\Delta))^k \|\mathbf{v} \wedge a\|_{k,x}^k, \\ \text{Sym}_k(\Delta/\text{supp}(b); x) &= \text{Tor}(H_{d-1}(\Delta/\text{supp}(b)))^k \|\mathbf{v} \wedge a\|_{k,x}^k, \\ \text{Sym}_k(\Delta; (b, b'); x) &= \text{Tor}(H_{d-1}(\Delta))^k \|\mathbf{v} \wedge a \wedge a'\|_{k,x}^k, \\ \text{Sym}_k(\Delta/(\text{supp}(b) \cup \text{supp}(b'))); x) &= \frac{\text{Tor}(H_{d-1}(\Delta/(\text{supp}(b) \cup \text{supp}(b'))))^k}{\theta_{b,b'}^k} \|\mathbf{v} \wedge a \wedge a'\|_{k,x}^k. \end{aligned}$$

The last denominator comes from the following diagram:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \langle v \rangle_{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \langle v \star (a, a') \rangle_{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\partial} & \mathbb{Z} \langle \text{supp}(b) \cup \text{supp}(b') \rangle \cap B_{d-1}(\Delta) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow \cup & & \downarrow \cup & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}v & \longrightarrow & \mathbb{Z}(v \star (a, a')) & \xrightarrow{\partial} & \mathbb{Z}(b, b') & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Thus, adding a parameter which is a simple boundary is equivalent to contracting topologically the support of this boundary, up to a factor. This is still true for two parameters which are cosimple. \diamond

Let y be a family of n variables and $b, b' \in B_{d-1}(\Delta; \mathbb{R})$. We recall from Section 3.3 that

$$\langle b, b' \rangle_y = (h, h')_y,$$

where h , resp. h' , is the unique preimage of b , resp. b' , by ∂ that is orthogonal to $Z_d(\Delta; \mathbb{R})$ for the scalar product $(\cdot, \cdot)_y$.

Thanks to Proposition 3.30 and to Remark 3.31, the following proposition allows us to deal with more complex cases for order 2.

PROPOSITION 3.32. *Let y be a family of n positive real numbers. If v is a basis of $Z_d(\Delta)$ and if a_1, \dots, a_l are some d -chains of Δ with real coefficients, then*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} \wedge (a_1 + \dots + a_l)\|_y^2 &= \sum_{i=1}^l \|\mathbf{v} \wedge a_i\|_y^2 + 2\|\mathbf{v}\|_y^2 \sum_{1 \leq i < j \leq l} \langle \partial a_i, \partial a_j \rangle_y \quad \text{and} \\ \|\mathbf{v}\|_y^2 \langle \partial a_i, \partial a_j \rangle_y &= \text{sign}(\langle \partial a_i, \partial a_j \rangle_y) \sqrt{\|\mathbf{v} \wedge a_i\|_y^2 \|\mathbf{v} \wedge a_j\|_y^2 - \|\mathbf{v}\|_y^2 \|\mathbf{v} \wedge a_i \wedge a_j\|_y^2}. \end{aligned}$$

PROOF. Let π be the orthogonal projection onto $\langle v \rangle = Z_d(\Delta, \mathbb{R})$ for the scalar product $(\cdot, \cdot)_y$. For each $i \in [n]$, let $h_i := a_i - \pi(a_i)$. Then,

$$\|\mathbf{v} \wedge (a_1 + \dots + a_l)\|_y^2 = \|\mathbf{v}\|_y^2 \|h_1 + \dots + h_l\|_y^2 = \|\mathbf{v}\|_y^2 \sum_{i=1}^l \|h_i\|_y^2 + 2\|\mathbf{v}\|_y^2 \sum_{1 \leq i < j \leq l} (h_i, h_j)_y.$$

We have $(h_i, h_j)_y = \langle \partial a_i, \partial a_j \rangle_y$. Moreover one can factorize $\|\mathbf{v}\|_y \|h_i\|_y$ into $\|\mathbf{v} \wedge a_i\|_y$. The following calculation gives us the second part of the proposition:

$$\|\mathbf{v} \wedge a_i \wedge a_j\|_y^2 = \|\mathbf{v}\|_y^2 \|h_i \wedge h_j\|_y^2 = \|\mathbf{v}\|_y^2 (\|h_i\|_y^2 \|h_j\|_y^2 - (h_i, h_j)_y^2). \quad \square$$

REMARK 3.33. Notice that

$$P(y) := \|\mathbf{v}\|_y^2 \langle \partial a_i, \partial a_j \rangle_y = (\mathbf{v} \wedge a_i, \mathbf{v} \wedge a_j)_y$$

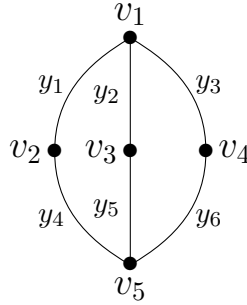
is a polynomial in y . More precisely, it is one of the two square roots of the polynomial $\|\mathbf{v} \wedge a_i\|_y^2 \|\mathbf{v} \wedge a_j\|_y^2 - \|\mathbf{v}\|_y^2 \|\mathbf{v} \wedge a_i \wedge a_j\|_y^2$. Let $J \subseteq [n]$ and $\alpha_J \in \mathbb{R}^*$ be such that $\alpha_J y^{J^c}$ is a nonzero monomial of $P(y)$. It is enough to find the sign of α_J to infer which square root is $P(y)$. The set J corresponds to a 1-forest of Δ . Let $\delta \in J^c$ be a facet such that $\Gamma := \Delta|_{J+\delta}$ is a 0-forest of Δ . Then let $a'_i, a'_j \in C_d(\Gamma; \mathbb{R})$ be such that $\partial a'_i = \partial a_i$ and $\partial a'_j = \partial a_j$. Then,

$$\begin{aligned} P(y) &= (\mathbf{v} \wedge a'_i, \mathbf{v} \wedge a'_j)_y, \text{ and} \\ \alpha_J &= (\mathbf{v} \wedge a'_i, \mathbf{e}_{J^c})(\mathbf{v} \wedge a'_j, \mathbf{e}_{J^c}) = (\pm \det(V_{J^c})[\delta] a'_i) (\pm \det(V_{J^c})[\delta] a'_j), \end{aligned}$$

where the last equality comes from the Laplace cofactor expansion along the last row, and where both signs are equal. Finally, one only has to look to the orientations of δ in a'_i and a'_j :

$$\text{sign}(\alpha_J) = \text{sign}([\delta]a'_i[\delta]a'_j). \quad \diamond$$

EXAMPLE 3.34. The results of this subsection let us make computation like the following one. Consider the following graph G .



For example, we have the following decomposition into simple boundaries $2v_2 - v_3 - v_4 = b + b'$ where $b = v_2 - v_3$ and $b' = v_2 - v_4$. Since we are in a graph, all factors from Remark 3.31 are trivial. Moreover, we have $\text{sign}(\langle b, b' \rangle_y)$ is constant equal to $+1$. Hence,

$$\begin{aligned} \text{Sym}_2(G; (2v_2 - v_3 - v_4); y) &= \text{Sym}_2(G; (b); y) + \text{Sym}_2(G; (b'); y) \\ &\quad + 2\sqrt{\text{Sym}_2(G; (b); y)\text{Sym}_2(G; (b'); y) - \text{Sym}_2(G; y)\text{Sym}_2(G; (b, b'); y)} \\ &= \text{Sym}_2(\text{graph with } v_1, v_2, v_5; y) + \text{Sym}_2(\text{graph with } v_1, v_2, v_4, v_5; y) \\ &\quad + 2\sqrt{\text{Sym}_2(\text{graph with } v_1, v_2, v_3, v_5; y)\text{Sym}_2(\text{graph with } v_1, v_2, v_4, v_5; y) - \text{Sym}_2(\text{graph with } v_1, v_2, v_3, v_4, v_5; y)\text{Sym}_2(\text{graph with } v_1, v_3, v_4, v_5; y)}. \end{aligned}$$

For example, if we set $y_1 = \dots = y_6 = 1$, then it remains to count the number of spanning trees:

$$\text{Sym}_2(G; (2v_2 - v_3 - v_4); y) = 12 + 12 + 2\sqrt{12 \cdot 12 - 12 \cdot 9} = 36. \quad \diamond$$

4. Generalization to matroids over hyperfields

We have seen that many properties of the classical Kirchhoff and Symanzik polynomials on graphs are still true for our generalization. In this section, we wish to generalize two very important properties of the classical case: the deletion contraction formula (1.4) and the partial factorization (1.5).

To generalize these formulæ, we need to define deletion and contraction for family of vectors. The natural objects to consider for contractions and deletions are matroids. We will recall the definitions and the main properties in a first subsection.

But classical matroids do not contain enough data. We have to assign some coefficients to the bases. Recently, in [BB16], Baker and Bowler define matroids over hyperfields. To do so, they use Grassman-Plücker functions. These will be the main tool to achieve our generalization of these formulæ. Though we will work in the general setting of hyperfields, to avoid technicalities one might only consider the case of fields, which will be sufficient for the case of family of vectors.

4.1. Reminder on matroids. We begin with recalling basic definitions and properties about matroids without any proof. We refer to [Oxl11] for more information.

A matroid can have many equivalent, or *cryptomorphic*, definitions. Here is a first one.

DEFINITION 4.1. A *matroid* \mathfrak{M} is a pair which consists of a *ground set* E , which can be any finite set, and a family of *independent sets* \mathfrak{I} , which is a subset of $\mathcal{P}(E)$. We write $\mathfrak{M} = (E, \mathfrak{I})$. A matroid has to verify three axioms:

- (1) $\emptyset \in \mathfrak{I}$,
- (2) (hereditary property) \mathfrak{I} is stable by inclusion ($J \subseteq I \in \mathfrak{I} \Rightarrow J \in \mathfrak{I}$),
- (3) (augmentation property) if $I, J \in \mathfrak{I}$ and if $|J| < |I|$, then there exists $i \in I \setminus J$ such that $J + i \in \mathfrak{I}$. ◊

One could think of E as a set of vectors generating some vector space, and \mathfrak{I} as the set of free subfamilies of E (though, there are matroids which have not such a representation).

Let $\mathfrak{M} = (E, \mathfrak{I})$ be a matroid. If $I \subseteq E$, we define the *rank of I* by

$$\text{rk}(I) := \max_{J \in \mathcal{P}(I) \cap \mathfrak{I}} |J|.$$

The *rank of \mathfrak{M}* is the rank of E . We call the *closure of I* the set

$$\text{cl}(I) := \{i \in E \mid \text{rk}(I \cup \{i\}) = \text{rk}(I)\} \subseteq E.$$

This is a closure operator: it is extensive, increasing and idempotent.

A *basis* is an independent set maximal for the inclusion. The set of all bases is denoted by $\mathcal{B}(\mathfrak{M})$. If l is a nonnegative integer, the set of all independents of rank l is denoted by \mathfrak{I}_l . Note that we have, $\mathcal{B}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{I}_{\text{rk}(\mathfrak{M})}$ and that, for a given ground set E , a matroid is characterized by its bases. The bases verify the following *exchange property*: if B_1, B_2 are two different bases, then for any $i \in B_1 \setminus B_2$, there exists $j \in B_2 \setminus B_1$ such that $B_1 - i + j$ (i.e., $B_1 \setminus \{i\} \cup \{j\}$) is a basis.

An element $e \in E$ is said to be:

- a *loop* if $\{e\} \notin \mathfrak{I}$,
- *free* if it is in every basis, and
- *proper* otherwise.

Let I be a subset of E . One can delete I from \mathfrak{M} to get a new matroid denoted by $\mathfrak{M} \setminus I$ and defined by

$$\mathfrak{M} \setminus I := (E \setminus I, \mathfrak{I} \cap \mathcal{P}(E \setminus I)).$$

We also define the restriction of \mathfrak{M} to I by $\mathfrak{M} | I := \mathfrak{M} \setminus I^c$.

One can also contract I in \mathfrak{M} to get a new matroid denoted by \mathfrak{M} / I and defined by

$$\mathfrak{M} / I := (E \setminus I, \mathfrak{I}'),$$

where

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}' &= \{J \subseteq E \setminus I \mid \exists B \in \mathcal{B}(\mathfrak{M} | I), J \cup B \in \mathfrak{I}\} \\ &= \{J \subseteq E \setminus I \mid \forall B \in \mathcal{B}(\mathfrak{M} | I), J \cup B \in \mathfrak{I}\}. \end{aligned}$$

Concerning the bases, we have the following characterizations:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{B}(\mathfrak{M} | I) &= \{B \cap I \mid B \in \mathcal{B}(\mathfrak{M}) \text{ and } |B \cap I| \text{ is maximal}\}, \text{ and} \\ \mathcal{B}(\mathfrak{M} / I) &= \{B \cap I^c \mid B \in \mathcal{B}(\mathfrak{M}) \text{ and } |B \cap I^c| \text{ is minimal}\}. \end{aligned}$$

Moreover, if $I \subseteq E$ and $B \subseteq E$, any two of the following statements imply the third one.

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet B \cap I \in \mathcal{B}(\mathfrak{M} | I), \\ \bullet B \cap I^c \in \mathcal{B}(\mathfrak{M} / I), \\ \bullet B \in \mathcal{B}(\mathfrak{M}). \end{array} \right.$$

From (4.1) and (4.2), we deduce the following equivalence.

$$(4.3) \quad B \in \mathcal{B}(\mathfrak{M}) \text{ and } |B \cap I| = \text{rk}(I) \iff B \cap I \in \mathcal{B}(\mathfrak{M} | I) \text{ and } B \cap I^c \in \mathcal{B}(\mathfrak{M} / I).$$

The dual of the matroid \mathfrak{M} will be denoted by $\widehat{\mathfrak{M}}$ and is defined by

$$\mathcal{B}(\widehat{\mathfrak{M}}) = \{B^c \mid B \in \mathcal{B}(\mathfrak{M})\}.$$

This is a duality in the sense that we have $\widehat{\widehat{\mathfrak{M}}} = \mathfrak{M}$. Moreover, $\widehat{\mathfrak{M} \setminus \mathcal{J}} = \widehat{\mathfrak{M}}/I$.

4.2. Kirchhoff and Symanzik polynomials of a matroid. Let n be a positive integer, $E := [n]$ be a finite set and $\mathfrak{M} = (E, \mathcal{J})$ be a matroid of rank r .

If $u = (u_1, \dots, u_n)$ is a family of elements of a \mathbb{Z} -module, we denote by $\mathfrak{M}_u = (E_u, \mathcal{J}_u)$, with $E_u = [n]$ and

$$\mathcal{J}_u = \{I \subseteq E \mid u_I \text{ is free}\},$$

the matroid representing the family u .

Here is the definition of Kirchhoff and Symanzik polynomials of a matroid.

DEFINITION 4.2. The Kirchhoff polynomial (of order 0) of the matroid \mathfrak{M} with variables x_1, \dots, x_n is defined by

$$\text{Kir}_0(\mathfrak{M}; x) = \sum_{I \in \mathcal{B}(\mathfrak{M})} x^I.$$

The Symanzik polynomial (of order 0) of the matroid \mathfrak{M} with variables x_1, \dots, x_n is defined by

$$\text{Sym}_0(\mathfrak{M}; x) = \sum_{I \in \mathcal{B}(\widehat{\mathfrak{M}})} x^I. \quad \diamond$$

This definition is natural because of the following claim, whose proof is straightforward.

CLAIM 4.3. Let u be a family of n elements in \mathbb{Z}^p . Then

$$\begin{aligned} \text{Kir}_0(u; x) &= \text{Kir}_0(\mathfrak{M}_u; x), \\ \text{Sym}_0(u; x) &= \text{Sym}_0(\mathfrak{M}_u; x). \end{aligned}$$

The analogous for matroids of the duality Theorem 2.13 is given by the following claim, which is a direct corollary of Claim 4.3 and of Theorem 2.13 for $k = 0$.

CLAIM 4.4. Let q be a positive integer and v be a family of n vectors in \mathbb{Z}^q such that v^\top spans $\ker(U)$, then $\mathfrak{M}_u = \widehat{\mathfrak{M}}_v$.

Next proposition shows that parameters of Symanzik polynomials correspond to a so-called quotient of the matroid.

If w is a family of elements of $\langle u \rangle$, then $\mathfrak{M}_{u \star w}$ is an extension of \mathfrak{M}_u , i.e., we have \mathfrak{M}_u equals $\mathfrak{M}_{u \star w} \setminus [n]$.

PROPOSITION 4.5. Let w consist of independent elements of $\langle u \rangle$. Then

$$\text{Sym}_0(u; w; x) = \text{Sym}_0(\mathfrak{M}_{u \star w} \setminus [n + 1 \dots n + l]; x).$$

PROOF. Looking at Definition 2.17, the left-hand side is the sum of x^{I^c} over all $I \subseteq [n]$ of size $r - l$ such that $u_I \star w$ is an independent family. But such sets I exactly correspond to the bases of the matroid $\mathfrak{M}_{u \star w} \setminus [n + 1 \dots n + l]$. Thus, Definition 4.2 ends the proof. \square

REMARK 4.6. In particular, if $I \subseteq [n]$ is of size $r - l$, then x^{I^c} appears with a nonzero coefficient in $\text{Sym}_k(u; w; x)$ only if I is in \mathcal{J}_u . Therefore, if $\text{Sym}_k(u; w; x) = \|\tilde{v}^\top\|_{k,x}^k$ for some family \tilde{v} , then $\det(\tilde{V}_{I^c}) \neq 0$ implies that $I \in (\mathcal{J}_u)_{r-l}$. This implication is an equivalence in the case $l = 0$. \diamond

In the next subsection, we generalize the definitions to higher orders.

4.3. Grassman-Plücker functions. In this subsection we introduce the main tool to work with orders higher than 0. We will work with hyperfields, which are similar to fields except that the operation of addition is multivalued. We will quickly reproduce the axioms from [BB16] below and refer for more information and examples to the literature (see, e.g., [BB16, BL21]). However, if the reader prefers, it is possible to think of \mathbb{F} as a field (in this case, $\langle \ni 0 \rangle$ have to be replaced by $\langle = 0 \rangle$).

In a hyperfield \mathbb{F} , the addition is a *hyperoperation*, i.e., a map $\boxplus : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{F}) \setminus \{\emptyset\}$. If $A, B \subseteq \mathbb{F}$, we define

$$A \boxplus B := \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} a \boxplus b.$$

We require \boxplus to be associative: $(a \boxplus b) \boxplus c = a \boxplus (b \boxplus c)$ for every $a, b, c \in \mathbb{F}$.

A *commutative hypergroup* is a tuple $(G, \boxplus, 0)$, where \boxplus is a commutative and associative hyperoperation on G such that:

- $0 \boxplus x = \{x\}$ for every $x \in G$,
- for every $x \in G$, there is a unique element $-x \in G$ such that $0 \in x \boxplus -x$,
- $x \in y \boxplus z$ if and only if $z \in x \boxplus -y$.

A *hyperfield* is a tuple $(\mathbb{F}, \cdot, \boxplus, 1, 0)$ with $0 \neq 1$ such that:

- $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ is a commutative group,
- $(\mathbb{F}, \boxplus, 0)$ is a commutative hypergroup,
- $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ for every $x \in \mathbb{F}$,
- $a \cdot (x \boxplus y) = (a \cdot x) \boxplus (a \cdot y)$ for all $a, x, y \in \mathbb{F}$.

Let n be a positive integer and $E := [n]$ be a finite set. A Grassman-Plücker function over \mathbb{F} of rank r is a function $\varphi : E^r \rightarrow \mathbb{F}$ such that

- φ is not identically zero,
 - (alternating) for any $I = (i_1, \dots, i_r) \in E^r$ and for any two different indices ℓ, m ,
- $$\varphi(i_1, \dots, i_\ell, \dots, i_m, \dots, i_r) = -\varphi(i_1, \dots, i_m, \dots, i_\ell, \dots, i_r),$$
- and $\varphi(i_1, \dots, i_\ell, \dots, i_m, \dots, i_r) = 0$ if $i_\ell = i_m$,
- (Grassman-Plücker relations) for any $I = (i_1, \dots, i_r), J = (j_1, \dots, j_r) \in E^r$ and any $\ell \in [r]$,

$$\bigoplus_{m=1}^r \varphi(i_1, \dots, i_{m-1}, j_\ell, i_{m+1}, \dots, i_r) \varphi(j_1, \dots, j_{\ell-1}, i_m, j_{\ell+1}, \dots, j_r) \boxplus -\varphi(I) \varphi(J) \ni 0.$$

Recall that, if $I = \{i_1, \dots, i_\ell\} \subseteq E$ with $i_1 < \dots < i_\ell$, then we also denote by I the ℓ -tuple $(i_1, \dots, i_\ell) \in E^\ell$. We this convention, a Grassman-Plücker function φ of rank r induces a function on the subsets of E of size r . Moreover, since φ is alternating, φ is characterized by its value on the subsets of E of size r .

Let φ be a Grassman-Plücker function over \mathbb{F} of rank r . Then one can verify that the set

$$\{I \subseteq E \mid |I| = r \text{ and } \varphi(I) \neq 0\}$$

is the set of bases of some matroid over the ground set E . We call this matroid the *underlying matroid of φ* and denote it by \mathfrak{M}_φ .

For example, if $u = (u_1, \dots, u_n)$ is a family of elements of \mathbb{Z}^p of rank r , we define

$$\begin{aligned} \varphi_u : E^r &\rightarrow \mathbb{R}, \\ I &\mapsto \det(V_I), \end{aligned}$$

where V is defined as in Equation (2.1). Then φ_u is a Grassman-Plücker function and its underlying matroid is \mathfrak{M}_u , as defined in the previous subsection.

Here is the main definition of this section.

DEFINITION 4.7. Let \mathbb{F} be a hyperfield and let φ be a Grassman-Plücker function over \mathbb{F} . Let \mathfrak{M} be its underlying matroid. Then we define

$$\begin{aligned} \text{Kir}_k(\varphi; x) &:= \sum_{I \in \mathcal{B}(\mathfrak{M})} \varphi(I)^k x^I, \\ \text{Sym}_k(\varphi; x) &:= \sum_{I \in \mathcal{B}(\mathfrak{M})} \varphi(I)^k x^{I^c}. \end{aligned} \quad \diamond$$

Note that this definition is compatible with Section 2, i.e.,

$$\text{Kir}_k(\varphi_u; x) = \text{Kir}_k(u; x) \quad \text{and} \quad \text{Sym}_k(\varphi_u; x) = \text{Sym}_k(u; x).$$

REMARK 4.8. In order to take into account complex matroids (i.e., matroids over the phase hyperfield, cf. [AD12, BB16]), one may want to consider an involution $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$. In this case, φ must be replaced by $\bar{\varphi}$ in the definition of the Symanzik polynomials. \diamond

REMARK 4.9. One has to be careful with polynomials with coefficients in a hyperfield. Several definitions are possible (cf. [BL18, Appendix A]). However, in this article, every polynomials over hyperfields will be of the form

$$P(x) = \sum_{I \subseteq E} p_I x^I$$

with coefficients p_I in \mathbb{F} (and not a subset of \mathbb{F} nor a sum of elements in \mathbb{F}). In particular, if $P(x) = \sum_I p_I x^I$ and $Q(x) = \sum_I q_I x^I$, we will only add P and Q if, for any I , $p_I = 0$ or $q_I = 0$. In the same way, we will only multiply P and Q if for any I and J such that $p_I \neq 0$ and $q_J \neq 0$, their intersection $I \cap J$ is empty. \diamond

We now explain how to extend deletion, contraction and duality. Let φ be a Grassman-Plücker function of rank r over \mathbb{F} and let \mathfrak{M} be its underlying matroid. For any subset $I \subseteq E$, we choose a basis $B_{\varphi/I} \in \mathcal{B}(\mathfrak{M}|I)$, and a basis $B_{\varphi \setminus I} \in \mathcal{B}(\mathfrak{M}/I^c)$.

Following [BB16], we define $\varphi \setminus I : (E \setminus I)^{\text{rk}(\mathfrak{M} \setminus I)} \rightarrow \mathbb{F}$ by

$$(\varphi \setminus I)(J) = \varphi(J \star B_{\varphi \setminus I}).$$

We also define the restriction: $\varphi|I := \varphi \setminus I^c$. Similarly, we define $\varphi/I : (E \setminus I)^{\text{rk}(\mathfrak{M}/I)} \rightarrow \mathbb{F}$ by

$$(\varphi/I)(J) = \varphi(J \star B_{\varphi/I}).$$

If $I' \subseteq E$ is disjoint from I , we set

$$(\varphi/I' \setminus I)(J) = \varphi(J \star B_{\varphi/I'} \star B_{\varphi \setminus I}).$$

We define $\widehat{\varphi} : E^{n - \text{rk}(\mathfrak{M})} \rightarrow \mathbb{F}$ to be the unique Grassman-Plücker function such that, for any subset J of E of size $n - \text{rk}(\mathfrak{M})$,

$$\widehat{\varphi}(J) = \sigma(J \star J^c) \varphi(J^c),$$

where $\sigma(J \star J^c)$ denotes the signature of the permutation $J \star J^c$. Moreover, we choose

$$B_{\widehat{\varphi} \setminus I} := I \setminus B_{\varphi/I} \quad \text{and} \quad B_{\widehat{\varphi}/I} := I \setminus B_{\varphi \setminus I}.$$

As stated in [BB16], the four new functions are Grassman-Plücker functions, and the underlying matroids are respectively $\mathfrak{M} \setminus I$, \mathfrak{M}/I , $\mathfrak{M}/I' \setminus I$ and $\widehat{\mathfrak{M}}$. Moreover, the functions are independent of the chosen bases up to a nonzero factor (up to a sign for $\widehat{\varphi}$). We also keep the usual rules $\widehat{\widehat{\varphi}} = (-1)^{r(n-r)} \varphi$ and $\widehat{\varphi/I} = \pm \widehat{\varphi} \setminus I$. Article [BB16] refers to another article, [AD12], for the proofs. The latter proves the results in the special case of complex matroids. For the sake of completeness, we provide a proof in full generality.

PROOF. Many points are easy to check. We will only check the Grassman-Plücker relations, the independency up to a factor, and the formula $\widehat{\varphi/I} = \pm \widehat{\varphi} \setminus I$.

First, we prove the Grassman-Plücker relations for the contraction or the deletion of one element. For some cases, for example the case of the contraction of a loop, there is nothing to prove. Otherwise, for any $e \in E$, $I = (i_1, \dots, i_{r-1}) \in E^{r-1}$, $J = (j_1, \dots, j_{r-1}) \in E^{r-1}$ and $\ell \in [r - 1]$,

$$\begin{aligned} & \bigoplus_{m=1}^{r-1} \varphi(i_1, \dots, i_{m-1}, j_\ell, i_{m+1}, \dots, i_{r-1}, e) \varphi(j_1, \dots, j_{\ell-1}, i_m, j_{\ell+1}, \dots, j_{r-1}, e) \\ & \boxplus \varphi(i_1, \dots, i_{r-1}, j_\ell) \varphi(j_1, \dots, j_{\ell-1}, e, j_{\ell+1}, \dots, j_{r-1}, e) \boxplus -\varphi(I \star (e)) \varphi(J \star (e)) \ni 0. \end{aligned}$$

Since

$$\varphi(j_1, \dots, j_{\ell-1}, e, j_{\ell+1}, \dots, j_{r-1}, e) = 0,$$

we get the Grassman-Plücker relation for $\varphi \setminus \{e\}$ and for $\varphi / \{e\}$. The Grassman-Plücker relations for a general $\varphi \setminus I$ follow easily by induction using that

$$\begin{aligned} \varphi \setminus I &= \varphi \setminus B_{\varphi \setminus I} \\ &= (\dots ((\varphi \setminus \{b_s\}) \setminus \{b_{s-1}\}) \dots) \setminus \{b_1\}, \end{aligned}$$

where $B_{\varphi \setminus I} = (b_1, \dots, b_s)$. A similar argument works for φ / I and $\varphi / I \setminus I$.

For the independency, let us first do a simple case. Let $e, e' \in E$ be two parallel elements and let $J, J' \subseteq E$ of size $r - 1$. Applying the Grassman-Plücker function to $J \star (e)$ and $J' \star (e')$ for $\ell = r$, most of the terms will be zero because

$$\varphi(\dots, e', \dots, e) = 0.$$

Then, we will get

$$(4.4) \quad \varphi(J \star (e')) \varphi(J' \star (e)) = \varphi(J \star (e)) \varphi(J' \star (e')).$$

Let $I \subseteq E$. Let $J, J' \subseteq I$ of size $\text{rk}(I)$ and $K, K' \subseteq I^c$ of size $r - \text{rk}(I)$. Let us prove that

$$(4.5) \quad \varphi(J \star K) \varphi(J' \star K') = \varphi(J' \star K) \varphi(J \star K').$$

First, by (4.3), $\varphi(J \star K)$ is nonzero if and only if $J \in \mathcal{B}(\mathfrak{M}|I)$ and $K \in \mathcal{B}(\mathfrak{M}/I)$. Thus, either $J, J' \in \mathcal{B}(\mathfrak{M}|I)$ and $K, K' \in \mathcal{B}(\mathfrak{M}/I)$, and then both members of (4.5) are nonzero, or both members are zero, and then (4.5) is verified. In the first case, assume that $J \neq J'$. By the basis exchange property, one can find $e \in J$ and $e' \in J'$ such that $e \neq e'$ and $J_1 := J - e + e'$ is a basis of $\mathfrak{M}|I$. In $\mathfrak{M}|I / (J - e) = \mathfrak{M} / (J - e) | I$, elements e and e' are parallel. Thus, they are parallel in $\mathfrak{M} / (J - e)$. Hence, using Formula (4.4) for $\varphi / (J - e)$, we get

$$(\varphi / (J - e))(K \star (e)) (\varphi / (J - e))(K' \star (e')) = (\varphi / (J - e))(K' \star (e)) (\varphi / (J - e))(K \star (e')).$$

Being careful with signs, we deduce

$$\begin{aligned} \varphi(K \star J) \varphi(K' \star J_1) &= \varphi(K' \star J) \varphi(K \star J_1), \text{ thus} \\ \frac{\varphi(K \star J)}{\varphi(K' \star J)} &= \frac{\varphi(K \star J_1)}{\varphi(K' \star J_1)}. \end{aligned}$$

Using $|J' \setminus J|$ times the basis exchange property, we get

$$\frac{\varphi(K \star J)}{\varphi(K' \star J)} = \frac{\varphi(K \star J')}{\varphi(K' \star J')},$$

which completes the proof of (4.5). As a direct consequence, we get the independency up to a factor of φ / I and $\varphi | I$.

It remains to prove that, if $J \subseteq I^c$ is of size $\text{rk}(\widehat{\varphi} \setminus I)$, then

$$(\widehat{\varphi / I})(J) = \pm (\widehat{\varphi} \setminus I)(J).$$

Then, recalling that we chose $B_{\widehat{\varphi}|I} = I \setminus B_{\varphi|I}$, we get

$$\begin{aligned} (\widehat{\varphi}|I)(J) &= \widehat{\varphi}(J \star B_{\widehat{\varphi}|I}) \\ &= \pm \varphi((I^c \setminus J) \star B_{\varphi|I}) \\ &= \pm (\varphi/I)(I^c \setminus J) \\ &= \pm (\widehat{\varphi/I})(J). \end{aligned}$$

□

We now explain how to generalize Symanzik polynomials with parameters. Let φ' be a Grassman-Plücker function on some set $E \cup W$ with W a finite set disjoint from E . Assume that W is independent in $\mathfrak{M}_{\varphi'}$. Suppose that $\varphi = \varphi' \setminus W$ and notice that there is only one way to define $\varphi' \setminus W$. We call $\varphi' \setminus W$ the *quotient of φ by W* . It is uniquely defined. Then we define

$$\text{Sym}_k(\varphi; W; x) := \text{Sym}_k(\varphi' \setminus W; x).$$

Once more, this extends Definition 2.17.

4.4. Deletion-contraction formula. Thanks to the definitions of last subsections, we can state the generalization of the deletion-contraction formula (cf. Equation (1.4) in the introduction). From those definitions, the following result is immediate.

PROPOSITION 4.10 (Deletion-contraction formula). *Let $e \in E$. We set*

$$N_1(e) := \begin{cases} 0 & \text{if } e \text{ is a loop in } \mathfrak{M}, \\ x_e & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \text{and} \quad N_2(e) := \begin{cases} 0 & \text{if } e \text{ is free in } \mathfrak{M}, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then,

$$\text{Kir}_k(\varphi; x) = N_1(e)\text{Kir}_k(\varphi \setminus \{e\}; x_{E-e}) + N_2(e)\text{Kir}_k(\varphi \setminus \{e\}; x_{E-e}).$$

Moreover, setting

$$\widehat{N}_1(e) := \begin{cases} 0 & \text{if } e \text{ is a loop in } \mathfrak{M}, \\ 1 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \text{and} \quad \widehat{N}_2(e) := \begin{cases} 0 & \text{if } e \text{ is free in } \mathfrak{M}, \\ x_e & \text{otherwise,} \end{cases}$$

we have

$$\text{Sym}_k(\varphi; x) = \widehat{N}_1(e)\text{Sym}_k(\varphi \setminus \{e\}; x_{E-e}) + \widehat{N}_2(e)\text{Sym}_k(\varphi \setminus \{e\}; x_{E-e}).$$

The notations of the previous proposition follows those of [DFM18]. This article describes Universal Tutte characters which unify objects behaving like Tutte polynomials. By the following proposition, we show that the polynomials Kir_k and Sym_k belong to this big family. In particular, we have the following formulæ.

PROPOSITION 4.11. *Let $I \subseteq E$. We extend N_1 and N_2 by*

$$N_1(\varphi|I) = \begin{cases} 0 & \text{if } \mathfrak{M}|I \text{ is not the free matroid,} \\ \prod_{i \in I} x_i & \text{otherwise,} \end{cases} \quad N_2(\varphi/I) = \begin{cases} 0 & \text{if } \text{rk}(I) > 0, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then,

$$\text{Kir}_k(\varphi; x) = \sum_{I \subseteq E} N_1(\varphi|I) \tau(\varphi|I/I) N_2(\varphi/I),$$

where, denoting by \emptyset the 0-tuple,

$$\tau(\varphi|I/I) := (\varphi|I/I)(\emptyset)^k.$$

Moreover,

$$\widehat{N}_1(\varphi|I) = \begin{cases} 0 & \text{if } \mathfrak{M}|I \text{ is not the free matroid,} \\ 1 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \widehat{N}_2(\varphi/I) = \begin{cases} 0 & \text{if } \text{rk}(I) > 0, \\ \prod_{i \in I^c} x_i & \text{otherwise,} \end{cases}$$

we have

$$\text{Sym}_k(\varphi; x) = \sum_{I \subseteq E} \widehat{N}_1(\varphi|I) \tau(\varphi|I/I) \widehat{N}_2(\varphi/I).$$

One might have noticed that \widehat{N}_2 in Proposition 4.11 is not an extension of \widehat{N}_2 in Proposition 4.10. Actually, $\widehat{N}_2(e)$ must be understood as $\widehat{N}_2(\varphi/\{e\}^c)$ (cf. [DFM18]).

To understand why this last proposition holds, notice that a term of the right-hand side sum is zero if I is not a basis of \mathfrak{M} . If I is a basis, then, for the Kirchhoff polynomial for instance, we have

$$N_1(\varphi|I) \tau(\varphi|I/I) N_2(\varphi/I) = \prod_{i \in I} x_i \cdot (\varphi|I/I)(\emptyset)^k.$$

Since I is a basis, $B_{\varphi|I} = \emptyset$ and $B_{\varphi/I} = I$. Thus,

$$\varphi|I/I(\emptyset) = \varphi(I).$$

REMARK 4.12. Following this idea, one might define the Tutte polynomial of φ by

$$\sum_{I \subseteq E} (x-1)^{\text{rk}(E) - \text{rk}(I)} (y-1)^{|I| - \text{rk}(I)} \varphi|I/I(\emptyset)^k.$$

Unfortunately, this formula strongly depends on the bases of $B_{\varphi|I}$ and $B_{\varphi/I}$ (unless for terms where I is a basis). \diamond

4.5. Partial factorization. Let us conclude this section by a generalization of the useful formula of partial factorization (cf. Equation (1.5) in the introduction).

Let

$$P(x) = \sum_J p_J x^J$$

be a multivariate polynomial. Let I be a subset of $[n]$. We define the set of the degrees of the monomials of P with respect to the variables x_I as

$$\text{degs}_{x_I}(P(x)) := \{|J \cap I| \mid p_J \neq 0\}.$$

Here is the generalization of the formula.

PROPOSITION 4.13. *Let $I \subseteq E$. Then*

$$\text{Kir}_k(\varphi; x) = \frac{1}{\varphi|I/I(\emptyset)^k} \text{Kir}_k(\varphi|I; x_I) \text{Kir}_k(\varphi/I; x_{I^c}) + R_{\varphi, I}(x)$$

for some polynomial $R_{\varphi, I}(x)$ verifying

$$\begin{aligned} \max \text{degs}_{x_I}(R_{\varphi, I}(x)) &< \deg(\text{Kir}_k(\varphi|I; x_I)) = \text{rk}(I), \\ \min \text{degs}_{x_{I^c}}(R_{\varphi, I}(x)) &> \deg(\text{Kir}_k(\varphi/I; x_{I^c})) = \text{rk}(\mathfrak{M}/I). \end{aligned}$$

Similarly,

$$\text{Sym}_k(\varphi; x) = \frac{1}{\varphi|I/I(\emptyset)^k} \text{Sym}_k(\varphi|I; x_I) \text{Sym}_k(\varphi/I; x_{I^c}) + \widehat{R}_{\varphi, I}(x),$$

for some polynomial $\widehat{R}_{\varphi, I}(x)$ verifying

$$\begin{aligned} \min \text{degs}_{x_I}(\widehat{R}_{\varphi, I}(x)) &> \deg(\text{Sym}_k(\varphi|I; x_I)), \\ \max \text{degs}_{x_{I^c}}(\widehat{R}_{\varphi, I}(x)) &< \deg(\text{Sym}_k(\varphi/I; x_{I^c})). \end{aligned}$$

PROOF. We have

$$\text{Kir}_k(\varphi; x) = \sum_{B \in \mathcal{B}(\mathfrak{M})} \varphi(B)^k x_I^{B \cap I} x_{I^c}^{B \cap I^c}.$$

If $B \in \mathcal{B}(\mathfrak{M})$, then, by (4.1), $|B \cap I^c|$ is minimal if and only if $|B \cap I|$ is maximal if and only if $B \cap I$ is a basis of $\mathfrak{M}|I$. By (4.2), we can cut the sum in two parts in the following way:

$$\text{Kir}_k(\varphi; x) = \sum_{B' \in \mathcal{B}(\mathfrak{M}|I)} \sum_{B'' \in \mathcal{B}(\mathfrak{M}/I)} \varphi(B' \star B'')^k x_I^{B'} x_{I^c}^{B''} + R_{\varphi, I}(x),$$

where

$$R_{\varphi, I}(x) := \sum_{\substack{B \in \mathcal{B}(\mathfrak{M}) \\ |B \cap I| < \text{rk}(I)}} \varphi(B)^k x^B.$$

The sum is of degree $\text{rk}(I)$ in x_I and $\text{rk}(\mathfrak{M}/I)$ in x_{I^c} . Moreover, the degree of each term of $R_{\varphi, I}(x)$ is less than $\text{rk}(I)$ in x_I and greater than $\text{rk}(\mathfrak{M}/I)$ in x_{I^c} .

We also have

$$\text{Kir}_k(\varphi|I; x_I) \text{Kir}_k(\varphi/I; x_{I^c}) = \sum_{B' \in \mathcal{B}(\mathfrak{M}|I)} (\varphi|I)(B')^k x_I^{B'} \sum_{B'' \in \mathcal{B}(\mathfrak{M}/I)} (\varphi/I)(B'')^k x_{I^c}^{B''}.$$

Hence, it remains to prove that if $B' \in \mathcal{B}(\mathfrak{M}|I)$ and if $B'' \in \mathcal{B}(\mathfrak{M}/I)$, then

$$(\varphi|I)(B') (\varphi/I)(B'') = \pm (\varphi|I/I)(\emptyset) \varphi(B' \star B'').$$

This is equivalent to

$$\varphi(B' \star B_{\varphi|I}) \varphi(B'' \star B_{\varphi/I}) = \pm \varphi(B_{\varphi/I} \star B_{\varphi|I}) \varphi(B' \star B'').$$

But this is just a consequence of (4.5). The proof for Symanzik polynomials is similar. \square

5. Exchange graph for matroids

This section could seem out of context: we will not talk about Symanzik polynomials. However, we need Corollary 5.14 below in the next section. Theorem 5.13 and its corollaries are interesting combinatorial results about connected components of what we call the exchange graph of a matroid. These results generalize Theorem 2.13 of [Ami19] to the matroids, and they go further in the study of the exchange graph.

Notations and reminders about matroids can be found in Section 4.1. In this section, we fix a matroid $\mathfrak{M} = (E, \mathfrak{I})$. We set $r := \text{rk}(\mathfrak{M})$. If $I \subseteq E$, $\text{fr}(I)$ will denote the set of elements independent from I , i.e., the complement of $\text{cl}(I)$ in E .

We are interested in finding the different connected components of some interesting subgraphs of the exchange graph of a matroid we define right below.

DEFINITION 5.1. The *exchange graph* $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ associated to \mathfrak{M} is the graph with vertex set $\mathcal{V} := \mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$ and edge set \mathcal{E} such that two vertices (I_1, I_2) and (I'_1, I'_2) are adjacent if there exists $i \in E$ such that either, $I'_1 = I_1 + i$ and $I'_2 = I_2 - i$, or, $I'_1 = I_1 - i$ and $I'_2 = I_2 + i$. \diamond

We fix $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ the exchange graph of \mathfrak{M} . If \mathcal{U} is a subset of \mathcal{V} , then $\mathcal{G}[\mathcal{U}]$ denotes the induced subgraph of \mathcal{G} with vertex set \mathcal{U} , i.e., the subgraph of \mathcal{G} of vertex set \mathcal{U} and edge set all the edges connecting pairs of vertices in \mathcal{U} . If $p, q \in [0 \dots r]$, then we set $\mathcal{V}_{p,q} := \mathfrak{I}_p \times \mathfrak{I}_q$. Moreover, if $p \neq 0$ and $q \neq r$, we define the bipartite graph $\mathcal{G}_{p,q} := \mathcal{G}[\mathcal{V}_{p,q} \sqcup \mathcal{V}_{p-1,q+1}]$.

REMARK 5.2. If $p \in [1 \dots r]$ and $q \in [0 \dots r-1]$, then we have a natural graph isomorphism:

$$\begin{aligned} \Phi_{p,q} : \quad & \mathcal{G}_{p,q} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_{q+1,p-1}, \\ & (I_1, I_2) \in \mathcal{V}_{p,q} \sqcup \mathcal{V}_{p-1,q+1} \longmapsto (I_2, I_1) \in \mathcal{V}_{q,p} \sqcup \mathcal{V}_{q+1,p-1}. \end{aligned} \quad \diamond$$

There are two important invariants in connected components of \mathcal{G} . They correspond to Definitions 5.3 and 5.6 below.

DEFINITION 5.3. If I, J are two non necessarily disjoint sets, we write $I \uplus J$ for the multiset containing elements of I and, disjointly, elements of J (such that elements in $I \cap J$ appear in $I \uplus J$ with multiplicity 2). \diamond

Abusing notation, if (U, V) and (I, J) are two ordered pairs of sets, then we write $(U, V) \subseteq (I, J)$ if $U \subseteq I$ and $V \subseteq J$. That defines a partial order on ordered pairs of sets.

DEFINITION 5.4. If $(I, J) \in \mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$ is an ordered pair of independent sets and if (U, V) is another one, we say that (U, V) is a *codependent pair of (I, J)* if $(U, V) \subseteq (I, J)$ and $\text{cl}(U) = \text{cl}(V)$. \diamond

CLAIM 5.5. Let $(I, J) \in \mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$ be an ordered pair of independent sets. Let $(U, V), (U', V') \in \mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$ be two codependent pairs of (I, J) . Then $(U \cup U', V \cup V')$ is a codependent pair of (I, J) .

PROOF. Clearly $(U \cup U', V \cup V') \subseteq (I, J)$. And,

$$\text{cl}(U \cup U') = \text{cl}(\text{cl}(U) \cup \text{cl}(U')) = \text{cl}(\text{cl}(V) \cup \text{cl}(V')) = \text{cl}(V \cup V'). \quad \square$$

Thanks to the previous claim, and noticing that (\emptyset, \emptyset) is always a codependent pair, one can state the following definition.

DEFINITION 5.6. If $(I, J) \in \mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$ is an ordered pair of independent sets, we call *maximal codependent pair (or MCP)* of I and J , denoted by $\text{MCP}(I, J)$, the unique maximal codependent pair of (I, J) for the inclusion. \diamond

PROPOSITION 5.7. If $(I, J) \in \mathcal{V}$, then $I \uplus J$ and $\text{MCP}(I, J)$ are invariant in the connected component of (I, J) in \mathcal{G} , i.e., if (I', J') is any element of the connected component of (I, J) , then

$$I \uplus J = I' \uplus J' \text{ and } \text{MCP}(I, J) = \text{MCP}(I', J').$$

PROOF. Let (I, J) and (J', I') be two neighbors in \mathcal{V} such that there exists $i \in E$ such that $I' = J + i$, and $I = J' + i$. One has

$$I \uplus J = (J' + i) \uplus J = J' \uplus (J + i) = J' \uplus I'.$$

Moreover, if $(U, V) := \text{MCP}(I, J)$, since $i \in \text{fr}(J)$, $i \notin \text{cl}(V)$, and so $i \notin U$. Thus, $\text{MCP}(I, J) = \text{MCP}(I - i, J) = \text{MCP}(J', J)$. Using the same argument on (J', I') , one obtains the equality $\text{MCP}(I, J) = \text{MCP}(J', I')$. The end of the proof is now straightforward. \square

Let us fix $p \in [1 \dots r]$ and $q \in [0 \dots r - 1]$. The nice result is that the two invariants of Proposition 5.7 form a complete set of invariants (see Corollary 5.15). This is also true for $\mathcal{G}_{p,q}$ if we ignore isolated vertices. That is why we first study which vertices are isolated.

PROPOSITION 5.8. Let (I, J) be a vertex of \mathcal{G} . Then:

- (1) (I, J) is an isolated vertex of \mathcal{G} if and only if $\text{cl}(I) = \text{cl}(J)$, i.e., $\text{MCP}(I, J) = (I, J)$;
- (2) if $(I, J) \in \mathcal{G}_{p,q}$, then (I, J) is an isolated vertex of $\mathcal{G}_{p,q}$ if and only if one of the two following cases happens.
 - either $(I, J) \in \mathcal{V}_{p,q}$ and $I \subseteq \text{cl}(J)$,
 - or $(I, J) \in \mathcal{V}_{p-1,q+1}$ and $J \subseteq \text{cl}(I)$;
- (3) if $p = q + 1$, $\mathcal{G}_{p,q}$ has no isolated vertex.

PROOF. Let $(I, J) \in \mathcal{V}_{p,q}$. The neighborhood of (I, J) in $\mathcal{G}_{p,q}$ consists of all vertices of the form $(I - i, J + i)$ for $i \in I \cap \text{fr}(J)$. Thus, Point (2) is clear. Then, (I, J) is isolated in \mathcal{G} if and only if it is isolated in $\mathcal{G}_{p,q}$ and in $\mathcal{G}_{p+1,q-1}$ (if $p \neq r$ and $q \neq 0$). By Point (2), this is equivalent to $I \subseteq \text{cl}(J)$ and $J \subseteq \text{cl}(I)$, i.e., to $\text{cl}(I) = \text{cl}(J)$ (notice that the second inclusion is trivial if $p = r$ or $q = 0$). Finally, if $p > q$, $\text{rk}(I) > \text{rk}(J)$, thus I cannot be a subset of $\text{cl}(J)$. Thus, if $p = q + 1$, we can get Point (3) from Point (2). \square

Let us introduce another definition below. Actually, it is equivalent to Definition 5.6.

DEFINITION 5.9. Let $(I, J) \in \mathcal{V}_{p,q}$ and let \mathcal{W} be the connected component of (I, J) in $\mathcal{G}_{p,q}$. Then we define the *ordered pair of fixed elements of (I, J)* by

$$\text{PFE}(I, J) := \left(\bigcap_{(U,V) \in \mathcal{W}} U, \bigcap_{(U,V) \in \mathcal{W}} V \right). \quad \diamond$$

PROPOSITION 5.10. *If (I, J) is a non-isolated vertex of $\mathcal{G}_{p,q}$, then*

$$\text{MCP}(I, J) = \text{PFE}(I, J).$$

We need the following lemma which is a direct consequence of Proposition 1.1.6 of [Oxl11].

LEMMA 5.11. *If $U \in \mathfrak{J}$ and $i \in \text{cl}(U)$, then $\{C \subseteq U \mid i \in \text{cl}(C)\}$ admits a least element for the inclusion.*

PROOF OF THE PROPOSITION. Let $(P_1, P_2) := \text{PFE}(I, J)$. Denote by \mathcal{W} the set of vertices in the connected component of (I, J) in $\mathcal{G}_{p,q}$ and by $\mathcal{W}_{p,q}$, resp. by $\mathcal{W}_{p-1,q+1}$, the intersection $\mathcal{W} \cap \mathcal{V}_{p,q}$, resp. $\mathcal{W} \cap \mathcal{V}_{p-1,q+1}$. By Proposition 5.7, it is clear that $\text{MCP}(I, J) \subseteq \text{PFE}(I, J)$.

In order to prove the other inclusion, we introduce the two following sets

$$Q_1 := \bigcap_{(J_1, I_1) \in \mathcal{W}_{p-1,q+1}} \text{cl}(J_1), \quad Q_2 := \bigcap_{(I_2, J_2) \in \mathcal{W}_{p,q}} \text{cl}(J_2).$$

Clearly,

$$(5.1) \quad P_1 \subseteq Q_1 \text{ and } P_2 \subseteq Q_2.$$

The interesting property of these sets is that

$$(5.2) \quad Q_1 = Q_2.$$

In order to prove this, it is enough to show that any element of E which is not in Q_2 , is not in Q_1 either. Let i be an element of E which is not in Q_2 . There exists $(I_2, J_2) \in \mathcal{W}_{p,q}$ such that $i \notin \text{cl}(J_2)$. If $i \notin \text{cl}(I_2)$, then $i \notin \text{cl}(J_1)$ for any neighbor (J_1, I_1) of (I_2, J_2) , and so $i \notin Q_1$. Otherwise, assume $i \in \text{cl}(I_2)$. By Lemma 5.11, there exists a least element for the inclusion $C \subseteq I_2$ such that $i \in \text{cl}(C)$. Since $i \notin \text{cl}(J_2)$, we have $C \not\subseteq \text{cl}(J_2)$. Let $j \in C \cap \text{fr}(J_2)$. One obtains that $(I_2 - j, J_2 + j) \in \mathcal{W}_{p-1,q+1}$, and that $i \notin \text{cl}(I_2 - j)$ since $C \not\subseteq I_2 - j$. Thus, $i \notin Q_1$.

The third result is

$$(5.3) \quad Q_2 \subseteq \text{cl}(P_2).$$

To see this, let $i \in Q_2$. Let (J_1, I_1) be a neighbor of (I, J) . One has $i \in \text{cl}(J)$, and so $i \in \text{cl}(I_1)$ (since $J \subseteq I_1$). Thus, by Lemma 5.11, one can choose C , resp. C_1 , minimal for the inclusion in J , resp. I_1 , such that i is in the closure of C , resp. C_1 . By minimality, $C = C_1$. Hence, by connectivity, for all $(U, V) \in \mathcal{W}$, $C \subseteq V$. Thus, we have $C \subseteq P_2$, and so $i \in \text{cl}(P_2)$.

We now have all the needed intermediate results. Equations (5.1), (5.2) and (5.3) imply that $P_1 \subseteq Q_1 = Q_2 \subseteq \text{cl}(P_2)$, and so $\text{cl}(P_1) \subseteq \text{cl}(P_2)$. Using a symmetric argument, we obtain that $\text{cl}(P_2) \subseteq \text{cl}(P_1)$ and so $\text{cl}(P_1) = \text{cl}(P_2)$. Thus, (P_1, P_2) is a dependent ordered pair of (I, J) . In particular, $(P_1, P_2) = \text{PFE}(I, J) \subseteq \text{MCP}(I, J)$. \square

In what follow, we will use the following lemma, which is easy to prove.

LEMMA 5.12. *Let $U, U' \in \mathfrak{J}$ be such that $|U| = |U'|$ and $\text{fr}(U) \neq \text{fr}(U')$. Then, $U \cap \text{fr}(U')$ and $U' \cap \text{fr}(U)$ are nonempty.*

We can now state the main theorem of this section.

THEOREM 5.13. *Let (I, J) and (I', J') be two non-isolated vertices of $\mathcal{G}_{p,q}$. Then (I, J) and (I', J') are in the same connected component of $\mathcal{G}_{p,q}$ if and only if*

$$I \uplus J = I' \uplus J' \quad \text{and} \quad \text{MCP}(I, J) = \text{MCP}(I', J').$$

PROOF. The forward direction is given by Proposition 5.7.

Let (I_0, J_0) and (I'_0, J'_0) be two non-isolated vertices of $\mathcal{G}_{p,q}$ such that $I_0 \uplus J_0 = I'_0 \uplus J'_0$ and $\text{MCP}(I_0, J_0) = \text{MCP}(I'_0, J'_0)$. Denote by \mathcal{W} , resp. \mathcal{W}' , the set of vertices in the connected component of (I_0, J_0) , resp. of (I'_0, J'_0) , in $\mathcal{G}_{p,q}$. Define $\mathcal{W}_{p,q} := \mathcal{W} \cap \mathcal{V}_{p,q}$, and define similarly $\mathcal{W}_{p-1,q+1}, \mathcal{W}'_{p,q}, \mathcal{W}'_{p-1,q+1}$. Since both vertices are assumed to be non-isolated, the four previous sets are nonempty. If (I, J) and (I', J') are two elements of $\mathcal{V}_{p,q}$, we set

$$d((I, J), (I', J')) := |I \setminus I'| = p - |I \cap I'|.$$

Now, set $(I, J) \in \mathcal{W}_{p,q}$ and $(I', J') \in \mathcal{W}'_{p,q}$ such that $d((I, J), (I', J'))$ is minimal. Set $d := d((I, J), (I', J'))$. We must show that $d = 0$.

For the sake of a contradiction, assume that $d \neq 0$. Set $(P_1, P_2) := \text{PFE}(I, J)$ and $(P'_1, P'_2) := \text{PFE}(I', J')$. Assume for now the following equation.

$$(5.4) \quad \forall (\tilde{I}, \tilde{J}) \in \mathcal{W}_{p,q}, J \setminus J' \subseteq \tilde{J}.$$

First, if $(\tilde{J}, \tilde{I}) \in \mathcal{W}_{p-1,q+1}$, one can find a neighbor $(\tilde{I}_1, \tilde{J}_1) \in \mathcal{W}_{p,q}$ of (\tilde{J}, \tilde{I}) . We have $J \setminus J' \subseteq \tilde{J}_1 \subseteq \tilde{I}$. Thus, one can replace $\mathcal{W}_{p,q}$ by \mathcal{W} in (5.4), i.e.,

$$J \setminus J' \subseteq P_2.$$

Secondly, since $d \neq 0$, $J \neq J'$. Hence

$$J \setminus J' \neq \emptyset.$$

Thirdly, $P'_2 \subseteq J'$. Thus

$$(J \setminus J') \cap P'_2 = \emptyset.$$

Finally, the three last equations implies that $P_2 \neq P'_2$. Therefore $\text{PFE}(I, J) \neq \text{PFE}(I', J')$. By Proposition 5.10, $\text{MCP}(I, J) \neq \text{MCP}(I', J')$. Applying Proposition 5.7, $\text{MCP}(I_0, J_0) \neq \text{MCP}(I'_0, J'_0)$. This contradicts our assumption.

It remains to prove Equation (5.4). We note first that

$$(5.5) \quad I \cap J = I' \cap J'.$$

This can be easily deduced from $I \uplus J = I' \uplus J'$.

Next, we have

$$(5.6) \quad \text{fr}(J) = \text{fr}(J').$$

To see this, suppose for the sake of a contradiction that this equation is false. By Lemma 5.12, there exists an $i \in J \cap \text{fr}(J')$. One can see that $i \in I'$, because $i \in (I \cup J) \setminus J'$. Moreover, let $j \in \text{fr}(I' - i) \cap I$, which exists because $\text{rk}(I' - i) < \text{rk}(I)$. Similarly, $j \in J' + i$. One obtains that $(I' - i + j, J' + i - j) \in \mathcal{W}'_{p,q}$ and $(I' - i + j) \cap I = (I' \cap I) + j$, because $j \in I$ and $i \notin I$ (otherwise one would have $i \in I \cap J$, and so $i \in I' \cap J'$ by (5.5); but $i \in \text{fr}(J')$). The last equality contradicts minimality of d .

Now set $i \in \text{fr}(J) \cap I$, which exists by Proposition 5.8, (2). One has directly by (5.6) that $i \in \text{fr}(J')$, and so $i \in I \cap I'$. Then we prove that

$$(5.7) \quad \text{fr}(I - i) = \text{fr}(I' - i).$$

Otherwise, by Lemma 5.12, one could set $j \in (I' - i) \cap \text{fr}(I - i)$ and $j' \in (I - i) \cap \text{fr}(I' - i)$. But $(I - i + j, J + i - j) \in \mathcal{W}_{p,q}$ and $(I' - i + j', J' + i - j') \in \mathcal{W}'_{p,q}$. Moreover $(I - i + j) \cap (I' - i + j') = (I \cap I') - i + j + j'$. Once more, that contradicts minimality of d .

If (J_1, I_1) is a neighbor of (I, J) , and if (I_2, J_2) is a neighbor of (J_1, I_1) , then there exists an $i \in \text{fr}(J)$ such that $I_1 = J + i$, and there exists a $j \in \text{fr}(J_1) = \text{fr}(I - i)$ such that $I_2 = I - i + j$. By (5.6), $i \in \text{fr}(J')$, and, by (5.7), $j \in \text{fr}(I' - i)$. Setting $(I'_2, J'_2) := (I' - i + j, J' + i - j)$, one obtains that $(I'_2, J'_2) \in \mathcal{W}'_{p,q}$. First observe that

$$(5.8) \quad J_2 \setminus J'_2 = (J + i - j) \setminus (J' + i - j) = J \setminus J',$$

$$(5.9) \quad I_2 \setminus I'_2 = (I - i + j) \setminus (I' - i + j) = I \setminus I'.$$

Hence, $d((I_2, J_2), (I'_2, J'_2)) = d$ is minimal. We infer that this two vertices also verifies Equations (5.5), (5.6) and (5.7).

Now let $(\tilde{I}, \tilde{J}) \in \mathcal{W}_{p,q}$. Since (I_2, J_2) has been arbitrarily chosen among neighbors of neighbors of (I, J) , one can in the same way choose a path in \mathcal{W} :

$$((I, J), (J_1, I_1), (I_2, J_2), (J_3, I_3), \dots, (I_n, J_n) = (\tilde{I}, \tilde{J})).$$

To this path corresponds a path in \mathcal{W}' :

$$((I', J'), (J'_1, I'_1), (I'_2, J'_2), (J'_3, I'_3), \dots, (I'_n, J'_n)).$$

Set $(\tilde{I}', \tilde{J}') := (I'_n, J'_n)$. Equations (5.5), (5.6), (5.7), (5.8) and (5.9) propagate along the paths. In particular, $\tilde{J} \setminus \tilde{J}' = J \setminus J'$. Hence,

$$J \setminus J' \subseteq \tilde{J}.$$

We conclude that (5.4) is true, which prove the theorem. □

This first corollary will be useful in Section 6.

COROLLARY 5.14. *Let $(I, J), (I', J')$ be two arbitrary vertices of $\mathcal{G}_{r,r-1}$. Then (I, J) and (I', J') are in the same connected component of $\mathcal{G}_{r,r-1}$ if and only if*

$$I \uplus J = I' \uplus J' \quad \text{and} \quad \text{MCP}(I, J) = \text{MCP}(I', J').$$

PROOF. It suffices to combine Theorem 5.13 with Point (3) of Proposition 5.8. □

The second corollary extends Theorem 5.13 to the case of the whole exchange graph.

COROLLARY 5.15. *Let $(I, J), (I', J')$ be two arbitrary vertices of \mathcal{G} . Then (I, J) and (I', J') are in the same connected component of \mathcal{G} if and only if*

$$I \uplus J = I' \uplus J' \quad \text{and} \quad \text{MCP}(I, J) = \text{MCP}(I', J').$$

PROOF. The forward direction is given by Proposition 5.7. For the other direction, let (I, J) and (I', J') be two vertices of \mathcal{G} such that $I \uplus J = I' \uplus J'$ and $\text{MCP}(I, J) = \text{MCP}(I', J')$. Let

$$p := \left\lfloor \frac{|I| + |J|}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{|I'| + |J'|}{2} \right\rfloor,$$

$$q := \left\lfloor \frac{|I| + |J|}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{|I'| + |J'|}{2} \right\rfloor.$$

Note that $p - q$ is either zero or one. If $|J| > |I|$, then $J \cap \text{fr}(I)$ is nonempty. Let j be an element of this set. Then $(I + j, J - j)$ is adjacent to (I, J) . Iterating this process, it is clear that, if $|J| > |I|$, the connected component of (I, J) contains a vertex of $\mathcal{G}_{p,q}$. Actually, this is still true if $|J| \leq |I|$ putting elements of I in J and stopping at the right time. Let (\tilde{I}, \tilde{J}) , resp. (\tilde{I}', \tilde{J}') , be an element of $\mathcal{G}_{p,q}$ in the connected component of (I, J) , resp. of (I', J') . We have $\tilde{I} \uplus \tilde{J} = \tilde{I}' \uplus \tilde{J}'$ and $\text{MCP}(\tilde{I}, \tilde{J}) = \text{MCP}(\tilde{I}', \tilde{J}')$. Thus, (\tilde{I}, \tilde{J}) and (\tilde{I}', \tilde{J}') are connected in $\mathcal{G}_{p,q}$, thus in \mathcal{G} , provided they are not isolated in $\mathcal{G}_{p,q}$. There are two possibilities.

If $p = q + 1$, then they cannot be isolated by Proposition 5.8 (3). Otherwise, $p = q$. In this case, suppose, for example, that (\tilde{I}, \tilde{J}) is isolated in $\mathcal{G}_{p,q}$. Then, by Proposition 5.8 (2), $\tilde{I} \subseteq \text{cl}(\tilde{J})$. But, since $|\tilde{J}| = |\tilde{I}|$, $\text{cl}(\tilde{J}) = \text{cl}(\tilde{I})$, thus $\text{MCP}(\tilde{I}, \tilde{J}) = (\tilde{I}, \tilde{J})$, and so $\text{MCP}(\tilde{I}', \tilde{J}') = (\tilde{I}, \tilde{J})$. Looking at cardinalities, this last equality implies that $(\tilde{I}, \tilde{J}) = (\tilde{I}', \tilde{J}')$.

In every case, (\tilde{I}, \tilde{J}) and (\tilde{I}', \tilde{J}') are in the same connected component, so are (I, J) and (I', J') . □

REMARK 5.16. Let $I \subseteq E$ be a subset of size $l \geq r$. We call I a *coindependent of rank l* if I^c is an independent of the dual of \mathfrak{M} . Let \mathcal{J} be the set containing all the independents and all the coindependents. One can extend \mathcal{G} setting $\mathcal{V} := \mathcal{J} \times \mathcal{J}$ and defining the edges in a similar way to Definition 5.1. Then Conjecture 1.8. of [Bla08] is equivalent to the conjectural extension of Corollary 5.14 to $\mathcal{G}_{r,r}$. This conjecture is a part of the White’s conjecture about toric ideals of matroids. \diamond

Now we arrive to the last section of this paper which generalizes Theorem 1.1 of [Ami19].

6. Variation of Symanzik rational fractions

In this section, if $Y, Z \in \mathfrak{C}_n^k(\mathbb{R})$ are any two hypercubic matrices of order k and of size n , we set, for $k + 1$ families $u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}$ of size p in \mathbb{R}^n ,

$$(\mathbf{u}_{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{(k)})_{k,y} := \det(Y \cdot_1 U_{(1)} \cdots \cdot_k U_{(k)}), \quad \|\mathbf{u}\|_{k,y} := \sqrt[k]{(\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u})_{k,y}},$$

where, in this section, $(u, \dots, u)_{k,y}$ will always be nonnegative. Moreover, we use the same definition replacing Y by $Y + Z$ and y by $y + z$. In the rest of the section, we will omit k from this notation. In particular, $\|\cdot\|_y := \|\cdot\|_{k,y}$.

Let n, p be two positive integers, let u be a family of size n of elements of \mathbb{R}^p , and let r be its rank. We set $\mathfrak{M} := \mathfrak{M}_u$ the matroid associated to u . Let v be such that v^\top is a basis of $\ker(U)$. Let $\beta \in \langle u \rangle$ be any nonzero vector, $\alpha \in \mathbb{R}^n$ be such that $U\alpha = \beta$ and $w := (v^\top \star (\alpha))^\top$. Moreover, we set Δ a simplicial complex of dimension $d > 0$ with n facets and $p(d - 1)$ -dimensional faces.

In this last section, we state a nice property of Symanzik rational fractions defined in Definition 2.22. One can roughly states it as « a bounding deformation of the metric of a simplicial complex only implies a uniformly bounded variation of the Symanzik rational fraction with one parameter », where uniformly means that the bound does not depend on the chosen metric.

We can extend Propositions 2.16 and 2.19 to get

$$\widetilde{\text{Sym}}_k(u; (\beta); y) = \frac{\|\mathbf{w}^\top\|_y^k}{\|\mathbf{v}^\top\|_y^k}.$$

If U is the d -th incidence matrix of the simplicial complex Δ of dimension d , we have seen that it is natural to assign the volume of the i -th facet of Δ to y_i , for each $i \in [n]$. That is why we will deform the metric of Δ by slightly perturbing y .

Let k be any even positive integer. Let \mathcal{U} be some space and $Z : \mathcal{U} \rightarrow \mathfrak{C}_n^k(\mathbb{R})$ be a bounded map (i.e., each entry is bounded). Let $y_1, \dots, y_n : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$ be n functions and let

$$\begin{aligned} Y : \mathcal{U} &\longrightarrow \mathfrak{C}_n^k(\mathbb{R}), \\ t &\longmapsto \text{diag}^k(y_1(t), \dots, y_n(t)). \end{aligned}$$

Suppose that $(\mathbf{v}, \dots, \mathbf{v})_{y(t)+z(t)}$ is positive for all $t \in \mathcal{U}$. This is always true for sufficiently large y_1, \dots, y_n .

If ϕ and ψ are two functions from \mathcal{U} to \mathbb{R} , then the notation $\phi = \mathcal{O}_y(\psi)$ means that there exist two positive constants c and C such that, for all $t \in \mathcal{U}$, $y_1(t), \dots, y_n(t) \geq C$ implies that $|\phi(t)| \leq c|\psi(t)|$. Similarly, the notation $\phi = o_y(\psi)$ means that, for all positive real ε , there exists a positive real C_ε such that, for all $t \in \mathcal{U}$, $y_1(t), \dots, y_n(t) \geq C_\varepsilon$ implies that $|\phi(t)| \leq \varepsilon|\psi(t)|$.

THEOREM 6.1. *With the above notations, we have*

$$\frac{\|\mathbf{w}^\top\|_y^k}{\|\mathbf{v}^\top\|_y^k} - \frac{\|\mathbf{w}^\top\|_{y+z}^k}{\|\mathbf{v}^\top\|_{y+z}^k} = \mathcal{O}_y(1).$$

Much of the rest of this section is devoted to the proof of this theorem. The proof essentially follows that of Theorem 1.1 in [Ami19]. Here are the main steps of the proof. First we find an equivalent statement where the left-hand member is the difference of two polynomials (Claim 6.2, and beyond). Then we partially develop the polynomials in order to treat each term separately. Next, we introduce a graph \mathfrak{G} similar to the exchange graph \mathcal{G} of Section 5. Each term corresponds to a vertex of \mathfrak{G} . Claim 6.4 states some properties of the terms which can be seen on the graph. For instance, if (the vertices corresponding to) two terms are linked, then the difference between them are negligible (more exactly, one has to multiply one of the term by an explicit constant for this to be true). Thus, if a term is negligible, all terms in its connected components are negligible. For other terms, the idea is to use Section 5 to associate bijectively each such term with another term in its connected component that compensates the first one (Claim 6.6). Before that, Claim 6.5 explicits the link between \mathfrak{G} and \mathcal{G} .

Let us set the following functions

$$f_1 := \|\mathbf{v}^\top\|_y^k, \quad f_2 := \|\mathbf{w}^\top\|_y^k, \quad g_1 := \|\mathbf{v}^\top\|_{y+z}^k, \quad g_2 := \|\mathbf{w}^\top\|_{y+z}^k.$$

Let e be the canonical basis of \mathbb{R}^n . Decomposing along the standard orthonormal basis, we obtain

$$\begin{aligned} g_1 &= \|\mathbf{v}^\top\|_{y+z}^k \\ &= \sum_{\substack{K_1, \dots, K_k \subseteq [n] \\ |K_1| = \dots = |K_k| = n-r}} (\mathbf{v}^\top, \mathbf{e}_{K_1}) \cdots (\mathbf{v}^\top, \mathbf{e}_{K_k}) (\mathbf{e}_{K_1}, \dots, \mathbf{e}_{K_k})_{y+z}. \end{aligned}$$

Remind Remark 4.6 about a condition for $\det(V_K)$ and $\det(W_L)$ to be nonzero. The previous formula can be rewritten in the form

$$(6.1) \quad g_1 = \sum_{I_1, \dots, I_k \in \mathfrak{J}_r} \det(V_{I_1^c}) \cdots \det(V_{I_k^c}) (\mathbf{e}_{I_1^c}, \dots, \mathbf{e}_{I_k^c})_{y+z}.$$

In the same way,

$$\begin{aligned} g_2 &= \sum_{J_1, \dots, J_k \in \mathfrak{J}_{r-1}} \det(W_{J_1^c}) \cdots \det(W_{J_k^c}) (\mathbf{e}_{J_1^c}, \dots, \mathbf{e}_{J_k^c})_{y+z}, \\ f_1 &= \sum_{I \in \mathfrak{J}_r} \det(V_{I^c})^k y^{I^c}, \\ f_2 &= \sum_{J \in \mathfrak{J}_{r-1}} \det(W_{J^c})^k y^{J^c}. \end{aligned}$$

Notice that f_1 is a homogeneous polynomial of $\mathbb{R}[y]$ of degree $n - r$ and that all its coefficients are positive. Moreover all coefficients of g_1 and g_2 as polynomials of $\mathbb{R}[y]$ are bounded.

If I is a subset of $[n]$ and if $h \in \mathbb{R}[y]$, let us denote by $[y^I]h$ the coefficient of the monomial y^I in h . For example, if $I \in \mathfrak{J}_r$, the monomial y^{I^c} of g_1 is only present in the term where all I_i s are equal to I . Thus

$$[y^{I^c}]g_1 = [y^{I^c}] \left(\det(V_{I^c})^k \|\mathbf{e}_{I^c}\|_{y+z}^k \right) = \det(V_{I^c})^k.$$

We deduce that these coefficients are constant, and that for all $I \in \mathfrak{J}$,

$$(6.2) \quad [y^{I^c}]g_1 = [y^{I^c}]f_1.$$

The statements of the theorem is that $f_2/f_1 - g_2/g_1 = \mathcal{O}_y(1)$. Let us simplify this statement thanks to the following claim.

CLAIM 6.2. *We have $g_1 - f_1 = o_y(f_1)$.*

PROOF OF THE CLAIM. By (6.2), $g_1 - f_1$ is a polynomial of degree at most $n - r - 1$. Moreover, its coefficients are bounded functions. Let $K \subseteq [n]$ be an arbitrary subset such that $[y^K](g_1 - f_1)$ is nonzero. Then, $|K| < n - r$. Since f_1 is homogeneous of degree $n - r$, $[y^K](g_1 - f_1) = [y^K]g_1$. From (6.1) we infer that $K \subseteq I_1^c \cap \dots \cap I_k^c$ for some sets $I_1, \dots, I_k \in \mathfrak{I}_r$. Thus, $K \not\subseteq I_1^c$. It happens that $[y^{I_1^c}]f_1 = \det(V_{I_1^c})^k$ is a positive integer. Since $[y^K](g_1 - f_1)$ is bounded,

$$([y^K](g_1 - f_1))y^K = o_y(y^{I_1^c}).$$

Since all coefficients of f_1 are positive, we can sum all terms of $(g_1 - f_1)$, and then conclude the proof. \square

Multiplying $f_2/f_1 - g_2/g_1$ by f_1g_1 , and using the claim, it remains to show that

$$g_1f_2 - f_1g_2 = \mathcal{O}_y(f_1^2).$$

Notice that the monomials with nonzero coefficients in f_1^2 are exactly the monomials of the form $y^{I^c}y^{I'^c}$ where $(I, I') \in \mathfrak{I}_r \times \mathfrak{I}_r$.

Let us rewrite

$$g_1(t)f_2(t) = \sum_{I_1, \dots, I_k \in \mathfrak{I}_r} \sum_{J \in \mathfrak{I}_{r-1}} s(I_1, \dots, I_k, J)h(I_1, \dots, I_k, J; t),$$

where

$$h(I_1, \dots, I_k, J; t) := (\mathbf{e}_{I_1^c}, \dots, \mathbf{e}_{I_k^c})_{y+zy^{J^c}}$$

is a polynomial whose coefficients are functions, and

$$s(I_1, \dots, I_k, J) = \det(V_{I_1^c}) \cdots \det(V_{I_k^c}) \det(W_{J^c})^k$$

is a real number. Similarly,

$$f_1(t)g_2(t) = \sum_{J_1, \dots, J_k \in \mathfrak{I}_{r-1}} \sum_{I \in \mathfrak{I}_r} s(J_1, \dots, J_k, I)h(J_1, \dots, J_k, I; t),$$

where

$$h(J_1, \dots, J_k, I; t) := (\mathbf{e}_{J_1^c}, \dots, \mathbf{e}_{J_k^c})_{y+zy^{I^c}},$$

$$s(J_1, \dots, J_k, I) := \det(W_{J_1^c}) \cdots \det(W_{J_k^c}) \det(V_{I^c})^k.$$

We will not develop the polynomials further.

It is clear that

$$\begin{aligned} h(K_1, \dots, K_k, L; t) &= \mathcal{O}_y(y^{K_1^c \cap \dots \cap K_n^c} y^{L^c}) \\ &= \mathcal{O}_y(y^{(K_1 \cup \dots \cup K_n)^c} y^{L^c}). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Let us define a new graph which is slightly similar to the exchange graph $\mathcal{G}_{r,r-1}$ of \mathfrak{M} . Let $\mathfrak{G} = (\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$ be a bipartite graph with vertex set $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_{r-1,r} \sqcup \mathfrak{V}_{r,r-1}$ and edge set \mathfrak{E} where

$$\mathfrak{V}_{r-1,r} := (\mathfrak{I}_{r-1})^k \times \mathfrak{I}_r,$$

$$\mathfrak{V}_{r,r-1} := (\mathfrak{I}_r)^k \times \mathfrak{I}_{r-1},$$

and where two vertices $(J_1, \dots, J_k, I) \in \mathfrak{V}_{r-1,r}$ and $(I_1, \dots, I_k, J) \in \mathfrak{V}_{r,r-1}$ are connected by an edge if and only if there exists $i \in \text{fr}(J_1) \cap \dots \cap \text{fr}(J_k) \cap I$ such that $I = J + i$ and $I_l = J_l + i$, for all $l \in [k]$.

One can now see h and s as some functions on \mathfrak{G} . Moreover

$$g_1(t)f_2(t) = \sum_{\mathbf{a} \in \mathfrak{V}_{r,r-1}} s(\mathbf{a})h(\mathbf{a}; t),$$

$$g_2(t)f_1(t) = \sum_{\mathbf{a} \in \mathfrak{V}_{r-1,r}} s(\mathbf{a})h(\mathbf{a}; t).$$

Thus, each vertex of \mathfrak{G} corresponds to a part of the difference between both polynomials.

Let ε be define as in Lemma 2.15. Let $\mathbf{a} = (I_1, \dots, I_k, J) \in \mathfrak{V}_{r,r-1}$ and $\mathbf{b} = (J_1, \dots, J_k, I)$ be two adjacent vertices of \mathfrak{G} . Let $i \in [n]$ be such that $I = J + i$. We define

$$\eta_{\mathbf{a},\mathbf{b}} := \eta_{\mathbf{b},\mathbf{a}} := \varepsilon(I_1^c \star i) \cdots \varepsilon(I_k^c \star i),$$

where we omitted the brackets around i .

DEFINITION 6.3. A vertex (J_1, \dots, J_k, I) in $\mathfrak{V}_{r-1,r}$ is said *ordinary* if $\text{fr}(J_1) = \cdots = \text{fr}(J_k)$. A vertex (I_1, \dots, I_k, J) in $\mathfrak{V}_{r,r-1}$ is said *ordinary* if $I_1 \cap \text{fr}(J) = \cdots = I_k \cap \text{fr}(J)$. A vertex of \mathfrak{V} which is not ordinary is called *special*. \diamond

CLAIM 6.4. *Here are some properties of h and s .*

- (1) *If \mathbf{a} and \mathbf{b} are two adjacent vertices of \mathfrak{G} , then $h(\mathbf{a}; t) - \eta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}h(\mathbf{b}; t) = \mathcal{O}_y(f_1^2)$.*
- (2) *If \mathbf{a} is a special vertex of \mathfrak{V} , then $h(\mathbf{a}; t) = \mathcal{O}_y(f_1^2)$.*
- (3) *Let $\mathbf{b} := (J_1, \dots, J_k, I) \in \mathfrak{V}_{r-1,r}$ be an ordinary vertex and let $\mathbf{a} := (I_1, \dots, I_k, J) \in \mathfrak{V}_{r,r-1}$ be one of its neighbors. If $\det(W_{J_\ell^c}) \neq 0$ then, for all $\ell \in [k]$,*

$$\frac{\det(V_{I_\ell^c})}{\det(V_{I_1^c})} = \frac{\varepsilon(I_\ell^c \star i) \det(W_{J_\ell^c})}{\varepsilon(I_1^c \star i) \det(W_{J_1^c})},$$

where i verifies $I = J + i$.

- (4) *With the notations of the third point, if $s(\mathbf{a})$ and $s(\mathbf{b})$ are nonzero, then*

$$\frac{s(\mathbf{a})}{\det(V_{I_1^c})^k \det(W_{J^c})^k} = \eta_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \frac{s(\mathbf{b})}{\det(W_{J_1^c})^k \det(V_{I^c})^k}.$$

PROOF. (1) Let $\mathbf{a} = (J_1, \dots, J_k, I) \in \mathfrak{V}_{k-1,k}$ and $\mathbf{b} = (I_1, \dots, I_k, J)$ be two adjacent vertices. Let $i \in [n]$ be such that $I = J + i$. Let us extract y_i from $h(\mathbf{a}; t)$ and from $h(\mathbf{b}; t)$. One has

$$\begin{aligned} h(I_1, \dots, I_k, J; t) &= (\mathbf{e}_{I_1^c}, \dots, \mathbf{e}_{I_k^c})_{y+z} y^{J^c} \\ &= \left((\mathbf{e}_{I_1^c}, \dots, \mathbf{e}_{I_k^c})_{y+z} y^{I^c} \right) y_i, \end{aligned}$$

and, using the Laplace cofactor expansion along the column of the determinant which contains y_i ,

$$\begin{aligned} h(J_1, \dots, J_k, I; t) &= (\mathbf{e}_{J_1^c}, \dots, \mathbf{e}_{J_k^c})_{y+z} y^{I^c} \\ &= \varepsilon(I_1^c \star i) \cdots \varepsilon(I_k^c \star i) (\mathbf{e}_{I_1^c} \wedge e_i, \dots, \mathbf{e}_{I_k^c} \wedge e_i)_{y+z} y^{I^c} \\ &= \left(\eta_{\mathbf{a},\mathbf{b}} (\mathbf{e}_{I_1^c}, \dots, \mathbf{e}_{I_k^c})_{y+z} y_i + \mathcal{O}_y(y^{I_1^c \cap \cdots \cap I_k^c}) \right) y^{I^c}. \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned} h(\mathbf{a}; t) - \eta_{\mathbf{a},\mathbf{b}} h(\mathbf{b}; t) &= \mathcal{O}_y(y^{I_1^c \cap \cdots \cap I_k^c} y^{I^c}) \\ &= \mathcal{O}_y(y^{I_1^c} y^{I^c}). \end{aligned}$$

The monomial $y^{I_1^c} y^{I^c}$ is present in f_1^2 with a positive coefficient. Thus,

$$h(\mathbf{a}; t) - \eta_{\mathbf{a},\mathbf{b}} h(\mathbf{b}; t) = \mathcal{O}_y(f_1^2).$$

- (2) Since there are two kinds of special vertices, we will make two cases.

Let $\mathbf{a} = (J_1, \dots, J_k, I)$ be a special vertex of $\mathfrak{V}_{r-1,r}$. Assume, without loss of generality, that $\text{fr}(J_1) \neq \text{fr}(J_2)$. We have seen in Equation (6.3) that

$$h(\mathbf{a}; t) = \mathcal{O}_y(y^{(J_1 \cup \cdots \cup J_k)^c} y^{I^c}).$$

By Lemma 5.12, $\text{fr}(J_1) \neq \text{fr}(J_2)$ implies that there exists $j \in J_1 \cap \text{fr}(J_2)$. Since $\text{rk}(J_2) = r - 1$, the set $I' := J_2 + j$ is in \mathfrak{J}_r . But $I' \subseteq J_1 \cup \dots \cup J_k$, and so

$$y^{(J_1 \cup \dots \cup J_k)^c} = \mathcal{O}_y(y^{I'^c}).$$

Then,

$$h(\mathbf{a}; t) = \mathcal{O}_y(y^{I'^c} y^{I^c}) = \mathcal{O}_y(f_1^2).$$

In the same way, if $\mathbf{a} = (I_1, \dots, I_k, J)$ is a special vertex of $\mathfrak{V}_{r,r-1}$, we have

$$h(\mathbf{a}; t) = \mathcal{O}_y(y^{(I_1 \cup \dots \cup I_k)^c} y^{J^c}).$$

Assume, without loss of generality, that there exists an element i in $(I_1 \cap \text{fr}(J)) \setminus (I_2 \cap \text{fr}(J))$. One has

$$i \notin (I_1 \cup \dots \cup I_k)^c, \quad (I_1 \cup \dots \cup I_k)^c \subseteq I_2^c, \quad i \in I_2^c.$$

This implies $(I_1 \cup \dots \cup I_k)^c + i \subseteq I_2^c$. Moreover, the set $I := J + i$ is in \mathfrak{J}_r . One obtains

$$\begin{aligned} y^{(I_1 \cup \dots \cup I_k)^c} y^{J^c} &= y^{(I_1 \cup \dots \cup I_k)^c + i} y^{J^c - i} \\ &= \mathcal{O}_y(y^{I_2^c} y^{I^c}). \end{aligned}$$

Finally,

$$h(\mathbf{a}; t) = \mathcal{O}_y(f_1^2).$$

- (3) Let $\tilde{w} := w \star ((0, \dots, 0, -1))$ and \tilde{u} such that \tilde{u}^\top is a basis of $\langle (u \star (\beta))^\top \rangle$. Notice that $\tilde{U} \tilde{W}^\top = 0$. The statement is equivalent to

$$\frac{\det(\tilde{W}_{I_\ell^c + (n+1)})}{\det(\tilde{W}_{I_1^c + (n+1)})} = \frac{\varepsilon(I_\ell^c \star i) \det(\tilde{W}_{J_\ell^c})}{\varepsilon(I_1^c \star i) \det(\tilde{W}_{J_1^c})}.$$

The families \tilde{u} and \tilde{w} verify the conditions of Lemma 2.15. Applying the lemma, last equation is equivalent to

$$(6.4) \quad \frac{\varepsilon((I_\ell^c + (n+1)) \star I_\ell) \det(\tilde{U}_{I_\ell})}{\varepsilon((I_1^c + (n+1)) \star I_1) \det(\tilde{U}_{I_1})} = \frac{\varepsilon(I_\ell^c \star i) \varepsilon(J_\ell^c \star (J_\ell + (n+1))) \det(\tilde{U}_{J_\ell + (n+1)})}{\varepsilon(I_1^c \star i) \varepsilon(J_1^c \star (J_1 + (n+1))) \det(\tilde{U}_{J_1 + (n+1)})}.$$

We can make some simplifications. For example,

$$\varepsilon((I_\ell^c + (n+1)) \star I_\ell) = (-1)^{|I_\ell|} \varepsilon(I_\ell^c \star I_\ell \star (n+1)) = (-1)^{|I_\ell|} \varepsilon(I_\ell^c \star I_\ell).$$

After simplification, we get

$$\frac{\varepsilon(I_\ell^c \star I_\ell) \varepsilon(J_\ell \star i) \det(\tilde{U}_{J_\ell} \star \tilde{U}_i)}{\varepsilon(I_1^c \star I_1) \varepsilon(J_1 \star i) \det(\tilde{U}_{J_1} \star \tilde{U}_i)} = \frac{\varepsilon(I_\ell^c \star i \star J_\ell) \det(\tilde{U}_{J_\ell + (n+1)})}{\varepsilon(J_1^c \star i \star J_1) \det(\tilde{U}_{J_1 + (n+1)})}.$$

As \mathbf{b} is ordinary, $\text{cl}(J_\ell) = \text{cl}(J_1)$. Thus there exists $P \in \mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$ such that $U_{J_\ell} = U_{J_1} P$. Hence, setting

$$\tilde{P} = \left(\begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} P \\ \hline 0 \dots 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array} \end{array} \right),$$

one obtains $\tilde{U}_{J_\ell} \star \tilde{U}_i = (\tilde{U}_{J_1} \star \tilde{U}_i) \tilde{P}$ and $\tilde{U}_{J_\ell + (n+1)} = \tilde{U}_{J_1 + (n+1)} \tilde{P}$. So, both ratios equal $\det(P)$ up to a sign.

We now compute the sign of the numerators:

$$\begin{aligned} \varepsilon(I_\ell^c \star I_\ell) \varepsilon(J_\ell \star i) \varepsilon(I_\ell^c \star i \star J_\ell) &= \varepsilon(I_\ell^c \star i \star J_\ell) \varepsilon(i \star J_\ell) \varepsilon(J_\ell \star i) \varepsilon(I_\ell^c \star i \star J_\ell) \\ &= (-1)^{r-1}. \end{aligned}$$

The signs of the numerators and the denominators simplify, which concludes the proof.

- (4) Since $s(\mathbf{a})$ and $s(\mathbf{b})$ are nonzero, $\det(W_{J^c})$ and $\det(W_{J^c_\ell})$ are nonzero too. Thus we can apply Point (3) for all $\ell \in [k]$. Multiplying left-hand members and right-hand members, we get the equality of Point (4). \square

Let $\text{CC}(\mathfrak{G})$ be the set of connected components of \mathfrak{G} . If $\mathfrak{H} = (\mathfrak{Y}', \mathfrak{E}')$ \in $\text{CC}(\mathfrak{G})$, we set

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y}'_{r-1,r} &:= \mathfrak{Y}' \cap \mathfrak{Y}_{r-1,r} \text{ and} \\ \mathfrak{Y}'_{r,r-1} &:= \mathfrak{Y}' \cap \mathfrak{Y}_{r,r-1}. \end{aligned}$$

Moreover, we denote by $\text{OCC}(\mathfrak{G})$ the set of *ordinary connected components* of \mathfrak{G} that only contain ordinary vertices. Let $\text{SCC}(\mathfrak{G}) := \text{CC}(\mathfrak{G}) \setminus \text{OCC}(\mathfrak{G})$ be the set of *special connected components* of \mathfrak{G} .

The equation we wanted to show, namely,

$$g_1 f_2 - g_2 f_1 = \mathcal{O}_y(f_1^2),$$

is equivalent to

$$\sum_{(\mathfrak{Y}', \mathfrak{E}') \in \text{CC}(\mathfrak{G})} \left(\sum_{\mathbf{a} \in \mathfrak{Y}'_{r,r-1}} s(\mathbf{a})h(\mathbf{a}; t) - \sum_{\mathbf{a} \in \mathfrak{Y}'_{r-1,r}} s(\mathbf{a})h(\mathbf{a}; t) \right) = \mathcal{O}_y(f_1^2).$$

In the above sum, we can remove the special connected components because of Points (2) and (1) of Claim 6.4. Thus, it remains to show

$$\sum_{(\mathfrak{Y}', \mathfrak{E}') \in \text{OCC}(\mathfrak{G})} \left(\sum_{\mathbf{a} \in \mathfrak{Y}'_{r,r-1}} s(\mathbf{a})h(\mathbf{a}; t) - \sum_{\mathbf{a} \in \mathfrak{Y}'_{r-1,r}} s(\mathbf{a})h(\mathbf{a}; t) \right) = \mathcal{O}_y(f_1^2).$$

Actually, we will prove that, for all $\mathfrak{H} = (\mathfrak{Y}', \mathfrak{E}') \in \text{OCC}(\mathfrak{G})$,

$$(6.5) \quad \sum_{\mathbf{a} \in \mathfrak{Y}'_{r,r-1}} s(\mathbf{a})h(\mathbf{a}; t) - \sum_{\mathbf{a} \in \mathfrak{Y}'_{r-1,r}} s(\mathbf{a})h(\mathbf{a}; t) = \mathcal{O}_y(f_1^2).$$

We now see that any ordinary connected component of \mathfrak{G} is naturally isomorphic to a connected component of (a subgraph of) the exchange graph of \mathfrak{M} . This will allow us to applied the results of Section 5. More precisely, for each $\mathbf{a} \in \mathfrak{Y}'_{r,r-1}$, we will find $\mathbf{b} \in \mathfrak{Y}'_{r-1,r}$ in the same connected component such that

$$s(\mathbf{a})h(\mathbf{a}; t) - s(\mathbf{b})h(\mathbf{b}; t) = \mathcal{O}_y(f_1^2).$$

Fix a connected component $\mathfrak{H} = (\mathfrak{Y}', \mathfrak{E}')$ in $\text{OCC}(\mathfrak{G})$. Let $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ be the exchange graph of \mathfrak{M} , as defined in Section 5. We define the following projection:

$$\begin{aligned} \pi : \quad \mathfrak{Y} &\rightarrow \mathcal{V}_{r,r-1} \sqcup \mathcal{V}_{r-1,r}, \\ (K_1, \dots, K_k, L) &\mapsto (K_1, L). \end{aligned}$$

Let $\mathcal{H} := \mathcal{G}[\pi(\mathfrak{Y}')]$ be the induced subgraph of \mathcal{G} with vertex set the image of \mathfrak{Y}' by π . Let \mathcal{V}' be its vertex set and \mathcal{E}' be its edge set. We have the following claim.

CLAIM 6.5. \mathcal{H} is a connected component of $\mathcal{G}_{r,r-1}$, and the map π induces an isomorphism of graphs between \mathfrak{H} and \mathcal{H} .

PROOF. First we prove that π is injective on \mathfrak{H} . Notice that, as for \mathcal{G} , for every $l \in [k]$, $K_l \uplus L$ is invariant in the connected components of \mathfrak{G} , i.e., if $\mathbf{a} = (K_1, \dots, K_k, L)$ and $\mathbf{b} = (K'_1, \dots, K'_k, L')$ are two vertices in \mathfrak{H} , then $K_l \uplus L = K'_l \uplus L'$ for all $l \in [k]$. Thus, if we know \mathbf{a} , we can retrieves \mathbf{b} only knowing L' . But L' is encoded in $\pi(\mathbf{b})$. That concludes the injectivity. Thus π induces a bijection between \mathfrak{Y}' and \mathcal{V}' .

Next, we prove that π induces a natural bijection between \mathfrak{E}' and edges of $\mathcal{G}_{r,r-1}$ which are incident to a vertex of \mathcal{H} . Let $\mathfrak{e} \in \mathfrak{E}'$ and let \mathfrak{a} and \mathfrak{b} be its two endpoints. Using the definitions, it is clear that $\pi(\mathfrak{a})$ and $\pi(\mathfrak{b})$ are linked.

Reciprocally, let e be an edge of $\mathcal{G}_{r,r-1}$ which is incident to a vertex a of \mathcal{V}' . Let $\mathfrak{a} \in \mathfrak{V}'$ such that $\pi(\mathfrak{a}) = a$. Let b be the other endpoint of e . We want to show that there exists \mathfrak{b} in \mathfrak{V} such that $\pi(\mathfrak{b}) = b$ and that \mathfrak{a} and \mathfrak{b} are connected by an edge. There are two cases.

- If $\mathfrak{a} = (J_1, \dots, J_k, I) \in \mathfrak{V}_{r-1,r}$, then $a = (J_1, I)$. There exists $i \in \text{fr}(J_1)$ such that $b = (J_1 + i, I - i)$. Since \mathfrak{a} is an ordinary vertex, $i \in \text{fr}(J_1)$ implies that $i \in \text{fr}(J_l)$ for all $l \in [k]$. Thus, $\mathfrak{b} := (J_1 + i, \dots, J_r + i, I - i)$ is a neighbor of \mathfrak{a} such that $\pi(\mathfrak{b}) = b$.
- If $\mathfrak{a} = (I_1, \dots, I_k, J) \in \mathfrak{V}_{r,r-1}$, then $a = (I_1, J)$. There exists $i \in \text{fr}(J) \cap I_1$ such that $b = (I_1 - i, J + i)$. Since \mathfrak{a} is a special vertex, $i \in \text{fr}(J) \cap I_l$ for all $l \in [k]$. Finally, $\mathfrak{b} := (I_1 - i, \dots, I_k - i, J + i)$ is a neighbor of \mathfrak{a} in \mathfrak{H} , and $\pi(\mathfrak{b}) = b$.

We have proved that π induces a natural bijection between vertices of \mathfrak{H} and vertices of \mathcal{V}' , and between edges of \mathfrak{H} and edges of $\mathcal{G}_{r,r-1}$ which are incident to a vertex of \mathcal{H} . Thus, the claim is true. \square

Let us denote by $\pi' : \mathfrak{H} \rightarrow \mathcal{H}$ the isomorphism induced by π .

We now study a second bijection. The well-definiteness will be justified in Claim 6.6 below. Set

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{V}'_{r,r-1} &\rightarrow \mathcal{V}'_{r-1,r}, \\ (I, J) &\mapsto (A \sqcup (J \setminus B), B \sqcup (I \setminus A)), \end{aligned}$$

where (A, B) is the MCP of any vertex of \mathcal{H} . This map induces a map on \mathfrak{H} :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : \mathfrak{V}'_{r,r-1} &\rightarrow \mathfrak{V}'_{r-1,r}, \\ \mathfrak{a} &\mapsto \pi'^{-1} \circ \Phi \circ \pi'(\mathfrak{a}). \end{aligned}$$

CLAIM 6.6. Φ and $\tilde{\Phi}$ have the following properties.

- (1) Φ and $\tilde{\Phi}$ are well-defined, and both are bijections.
- (2) If $\mathfrak{a} \in \mathfrak{V}'_{r,r-1}$, then $s(\mathfrak{a})h(\mathfrak{a}; t) - s(\tilde{\Phi}(\mathfrak{a}))h(\tilde{\Phi}(\mathfrak{a}); t) = \mathcal{O}_y(f_1^2)$.

PROOF. We prove the two points independently.

- (1) It is enough to show the first point for Φ . Let $(I, J) \in \mathcal{V}'_{r,r-1}$. Let $(A, B) := \text{MCP}(I, J)$. Let $(J', I') := (A \sqcup (J \setminus B), B \sqcup (I \setminus A))$. We want to apply Corollary 5.14 in order to show that $(J', I') \in \mathcal{V}'$. In the definition of (J', I') , the unions are disjoint. Indeed, if $i \in A \cap J$, resp. $i \in B \cap I$, then $(\{i\}, \{i\})$ is a codependent pair of (I, J) , and so $i \in B$, resp. $i \in A$. Thus

$$(A \sqcup (J \setminus B)) \uplus (B \sqcup (I \setminus A)) = I \uplus J.$$

Set $(A', B') := \text{MCP}(J', I')$. Clearly $(A, B) \subseteq (A', B')$. Moreover

$$\begin{aligned} \text{cl}(A') &= \text{cl}(A \sqcup (A' \setminus A)) \\ &= \text{cl}(\text{cl}(A) \sqcup (A' \setminus A)) \\ &= \text{cl}(\text{cl}(B) \sqcup (A' \setminus A)) \\ &= \text{cl}(B \sqcup (A' \setminus A)). \end{aligned}$$

Similarly,

$$\text{cl}(B') = \text{cl}(A \sqcup (B' \setminus B)).$$

But $B \sqcup (A' \setminus A) \subseteq B \sqcup (J' \setminus A) = J$ and $A \sqcup (B' \setminus B) \subseteq I$. Since

$$\text{cl}(A \sqcup (B' \setminus B)) = \text{cl}(B') = \text{cl}(A') = \text{cl}(B \sqcup (A' \setminus A)),$$

$(A \sqcup (B' \setminus B), B \sqcup (A' \setminus A))$ is a codependent pair of (I, J) . Thus, it is included in (A, B) , and so $A' \setminus A$ and $B' \setminus B$ are empty. Finally,

$$I \uplus J = J' \uplus I' \text{ and } \text{MCP}(I, J) = \text{MCP}(J', I').$$

We can apply Corollary 5.14, and we obtain $(J', I') \in \mathcal{V}'_{r-1,r}$. Thus, Φ is well-defined.

One can easily retrieve (I, J) from (J', I') by $(I, J) := (A \cup (I' \setminus B), B \cup (J' \setminus A))$. Thus, Φ is a bijection. So is $\tilde{\Phi}$.

- (2) Let $\mathbf{a} = (I, I_2, \dots, I_k, J) \in \mathfrak{V}_{r,r-1}$ be a vertex and let $\mathbf{b} = (J', J_2, \dots, J_k, I') \in \mathfrak{V}_{r-1,r}$ be the image of \mathbf{a} by $\tilde{\Phi}$. Let $(\mathbf{a} = \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m = \mathbf{b})$ be a path from \mathbf{a} to \mathbf{b} . Point (1) of Claim 6.4 used m times show that

$$h(\mathbf{a}; t) - \eta_{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1} \cdots \eta_{\mathbf{a}_{m-1}, \mathbf{a}_m} h(\mathbf{b}; t) = \mathcal{O}_y(f_1^2).$$

It remains to prove that

$$(6.6) \quad s(\mathbf{a}) = \eta_{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1} \cdots \eta_{\mathbf{a}_{m-1}, \mathbf{a}_m} s(\mathbf{b}).$$

We can assume without loss of generality that $s(\mathbf{a}_0), \dots, s(\mathbf{a}_m)$ are nonzero. Indeed, this is true for all β belonging to a dense subset of $\langle u \rangle$. Moreover, both members of Equation (6.6) are continuous in β .

Point (4) of Claim 6.4 used m times show that

$$\frac{s(\mathbf{a})}{\det(V_{I^c})^k \det(W_{J^c})^k} = \eta_{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1} \cdots \eta_{\mathbf{a}_{m-1}, \mathbf{a}_m} \frac{s(\mathbf{b})}{\det(W_{J'^c})^k \det(V_{I'^c})^k}.$$

It remains to show that $\det(V_{I^c})^k \det(W_{J^c})^k = \det(V_{I'^c})^k \det(W_{J'^c})^k$, i.e., that

$$\left| \frac{\det(V_{I^c})}{\det(V_{I^c})} \right| = \left| \frac{\det(W_{J^c})}{\det(W_{J^c})} \right|.$$

The proof will be very similar to the proof of (3) in Claim 6.4. We use the same notations. It is enough to show that the analogous of Equation (6.4) holds. Since we do not care about signs, this analogous is

$$(6.7) \quad \left| \frac{\det(\tilde{U}_{I'})}{\det(\tilde{U}_I)} \right| = \left| \frac{\det(\tilde{U}_{J+(n+1)})}{\det(\tilde{U}_{J'+(n+1)})} \right|.$$

Set $(A, B) := \text{MCP}(I, J)$. From $\text{cl}(A) = \text{cl}(B)$ we deduce that there exists a (unique) matrix $\tilde{P} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, of the form

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix},$$

such that $\tilde{U}_B \star \tilde{U}_{J \setminus B} \star \tilde{U}_{\{n+1\}} = (\tilde{U}_A \star \tilde{U}_{J \setminus B} \star \tilde{U}_{\{n+1\}}) \tilde{P}$. Therefore, the second ratio of (6.7) equals $|\det(P)|$. Moreover, $\tilde{U}_B \star \tilde{U}_{I \setminus A} = (\tilde{U}_A \star \tilde{U}_{I \setminus A}) \tilde{P}$. Thus, the first ratio also equals $|\det(P)|$. Finally, Equation (6.6) is true, which concludes the proof. \square

We recall that we wanted to show Equation (6.5), which is:

$$\sum_{\mathbf{a} \in \mathfrak{V}'_{r,r-1}} s(\mathbf{a}) h(\mathbf{a}; t) - \sum_{\mathbf{a} \in \mathfrak{V}'_{r-1,r}} s(\mathbf{a}) h(\mathbf{a}; t) = \mathcal{O}_y(f_1^2).$$

By Claim 6.6, this equation is equivalent to

$$\sum_{\mathbf{a} \in \mathfrak{V}'_{r,r-1}} s(\mathbf{a}) h(\mathbf{a}; t) - s(\tilde{\Phi}(\mathbf{a})) h(\tilde{\Phi}(\mathbf{a}); t) = \mathcal{O}_y(f_1^2),$$

which is true by the second point of the claim. Finally,

$$g_1 f_2 - f_1 g_2 = \mathcal{O}_y(f_1^2),$$

which concludes the proof of the theorem. □

One can easily obtain from Theorem 6.1 the following corollary.

COROLLARY 6.7. *Let l be a positive integer, u' be a family of l vectors in $\langle u \rangle$ and v' be such that $Uv'_i = u'_i$, for every $i \in [l]$. Let Z and Y be two functions as in Theorem 6.1. Then*

$$\frac{\|\mathbf{v}^\top \wedge \mathbf{v}'\|_y^k}{\|\mathbf{v}^\top\|_y^k} - \frac{\|\mathbf{v}^\top \wedge \mathbf{v}'\|_{y+z}^k}{\|\mathbf{v}^\top\|_{y+z}^k} = \mathcal{O}_y(\max_{i \in [n]}(y_i^{l-1})).$$

PROOF. If u' is not free, then both ratios equal zero. Otherwise, one can apply Theorem 6.1 to well-chosen families, and obtain

$$\begin{aligned} \frac{\|\mathbf{v}^\top \wedge \mathbf{v}'\|_{y+z}^k}{\|\mathbf{v}^\top\|_{y+z}^k} &= \frac{\|\mathbf{v}^\top \wedge \mathbf{v}'\|_{y+z}^k}{\|\mathbf{v}^\top \wedge \mathbf{v}'_{[l-1]}\|_{y+z}^k} \frac{\|\mathbf{v}^\top \wedge \mathbf{v}'_{[l-1]}\|_{y+z}^k}{\|\mathbf{v}^\top \wedge \mathbf{v}'_{[l-2]}\|_{y+z}^k} \cdots \frac{\|\mathbf{v}^\top \wedge \mathbf{v}'_{[1]}\|_{y+z}^k}{\|\mathbf{v}^\top\|_{y+z}^k} \\ &= \left(\frac{\|\mathbf{v}^\top \wedge \mathbf{v}'\|_y^k}{\|\mathbf{v}^\top \wedge \mathbf{v}'_{[l-1]}\|_y^k} + \mathcal{O}_y(1) \right) \cdots \left(\frac{\|\mathbf{v}^\top \wedge \mathbf{v}'_{[1]}\|_y^k}{\|\mathbf{v}^\top\|_y^k} + \mathcal{O}_y(1) \right). \end{aligned}$$

In last member, every ratio is a Symanzik rational fraction. Let us prove that all Symanzik rational fraction always are a $\mathcal{O}_y(\max_{i \in [n]}(y_i))$. Indeed, all coefficients are positive, and if $\lambda_K y^K$ is a monomial of the numerator, then $K^c \in \mathfrak{J}_{r-1}$. Therefore, there exists $I \in \mathfrak{J}_r(\mathfrak{M})$ containing K^c . Then, y^{I^c} appears in the denominator with a positive coefficient. And, $y^K/y^{I^c} = \mathcal{O}_y(\max_{i \in [n]}(y_i))$. Finally, the product equals

$$\frac{\|\mathbf{v}^\top \wedge \mathbf{v}'\|_y^k}{\|\mathbf{v}^\top\|_y^k} + \mathcal{O}_y(\max_{i \in [n]}(y_i^{l-1})). \quad \square$$

As the following example shows, one cannot expect a better asymptotic for Corollary 6.7.

EXAMPLE 6.8. We set

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V^\top = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

And Z will be constant equal to

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Thus,

$$\|\mathbf{v}^\top \wedge \mathbf{v}'\|_y^k = y_1 y_2 y_3 y_4, \quad \|\mathbf{v}^\top\|_y^k = y_1, \quad \|\mathbf{v}^\top \wedge \mathbf{v}'\|_{y+z}^k = y_1 y_2 y_3 (y_4 - 1), \quad \|\mathbf{v}^\top\|_{y+z}^k = y_1.$$

Finally,

$$\frac{\|\mathbf{v}^\top \wedge \mathbf{v}'\|_y^k}{\|\mathbf{v}^\top\|_y^k} - \frac{\|\mathbf{v}^\top \wedge \mathbf{v}'\|_{y+z}^k}{\|\mathbf{v}^\top\|_{y+z}^k} = \frac{y_1 y_2 y_3 y_4}{y_1} - \frac{y_1 y_2 y_3 (y_4 - 1)}{y_1} = y_2 y_3. \quad \diamond$$

Bibliography

- [AB14] Karim Alexander Adiprasito and Anders Björner, *Filtered geometric lattices and Lefschetz section theorems over the tropical semiring*, arXiv preprint arXiv:1401.7301 (2014).
- [AB15] Omid Amini and Matthew Baker, *Linear series on metrized complexes of algebraic curves*, *Mathematische Annalen* **362** (2015), no. 1-2, 55–106.
- [AB56] Maurice Auslander and David Buchsbaum, *Homological dimension in Noetherian rings*, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **42** (1956), no. 1, 36–38.
- [AB57] Maurice Auslander and David Buchsbaum, *Homological dimension in local rings*, *Transactions of the American Mathematical Society* **85** (1957), no. 2, 390–405.
- [ABBF16] Omid Amini, Spencer Bloch, José Burgos Gil, and Javier Fresán, *Feynman amplitudes and limits of heights*, *Izvestiya: Mathematics* **80** (2016), no. 5, 813–848.
- [ABKS14] Yang An, Matthew Baker, Greg Kuperberg, and Farbod Shokrieh, *Canonical representatives for divisor classes on tropical curves and the matrix-tree theorem*, *Forum of Mathematics, Sigma* **2** (2014).
- [ACP15] Dan Abramovich, Lucia Caporaso, and Sam Payne, *The tropicalization of the moduli space of curves*, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **48** (2015), no. 4, 765–809.
- [AD12] Laura Anderson and Emanuele Delucchi, *Foundations for a theory of complex matroids*, *Discrete & Computational Geometry* **48** (2012), no. 4, 807–846.
- [ADH20] Federico Ardila, Graham Denham, and June Huh, *Lagrangian geometry of matroids*, arXiv preprint arXiv:2004.13116 (2020).
- [Adi18] Karim Adiprasito, *Combinatorial Lefschetz theorems beyond positivity*, arXiv preprint arXiv:1812.10454 (2018).
- [AGH13] Remi Avohou, Joseph Ben Geloun, and Mahouton Hounkonnou, *Extending Tutte and Bollobás-Riordan polynomials to rank 3 weakly-colored stranded graphs*, arXiv preprint arXiv:1301.1987 (2013).
- [AHK18] Karim Adiprasito, June Huh, and Eric Katz, *Hodge theory for combinatorial geometries*, *Annals of Mathematics* **188** (2018), no. 2, 381–452.
- [AK06] Federico Ardila and Caroline Klivans, *The Bergman complex of a matroid and phylogenetic trees*, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **96** (2006), no. 1, 38–49.
- [AKMW02] Dan Abramovich, Kalle Karu, Kenji Matsuki, and Jarosław Włodarczyk, *Torification and factorization of birational maps*, *Journal of the American Mathematical Society* **15** (2002), no. 3, 531–572.
- [Aks19] Edvard Aksnes, *Tropical Poincaré duality spaces*, Master’s Thesis, 2019. University of Oslo.
- [Aks21] Edvard Aksnes, *Tropical Poincaré duality spaces*, in preparation (2021).
- [ALOGV19] Nima Anari, Kuikui Liu, Shayan Oveis Gharan, and Cynthia Vinzant, *Log-concave polynomials II: High-dimensional walks and an FPRAS for counting bases of a matroid*, *Proceedings of the 51st Annual ACM SIGACT symposium on theory of computing*, 2019.
- [Ami14] Omid Amini, *Equidistribution of Weierstrass points on curves over non-Archimedean fields*, preprint (2014), revised version 2021.
- [Ami16] Omid Amini, *The combinatorial Chow ring of products of graphs*, preprint (2016), revised version 2021.
- [Ami19] Omid Amini, *The exchange graph and variations of the ratio of the two Symanzik polynomials*, *Annales de l’Institut Henri Poincaré D* **6** (2019), no. 2, 155–197.
- [AMR99] Dan Abramovich, Kenji Matsuki, and Suliman Rashid, *A note on the factorization theorem of toric birational maps after Morelli and its toroidal extension*, *Tohoku Mathematical Journal, Second Series* **51** (1999), no. 4, 489–537.

- [AMS⁺10] Avner Ash, David Mumford, Peter Scholze, Michael Rapoport, and Yung-sheng Tai, *Smooth compactifications of locally symmetric varieties*, Cambridge University Press, 2010.
- [AN20] Omid Amini and Noema Nicolussi, *Moduli of hybrid curves and variations of canonical measures*, arXiv preprint arXiv:2007.07130 (2020).
- [AP20a] Omid Amini and Matthieu Piquerez, *Geometry of tropical varieties and extended polyhedral complexes*, in preparation (2020).
- [AP20b] Omid Amini and Matthieu Piquerez, *Hodge theory for tropical varieties*, arXiv preprint arXiv:2007.07826 (2020), current version of the preprint available at <http://omid.amini.perso.math.cnrs.fr/Publications/AP-THT.pdf>.
- [AP20c] Omid Amini and Matthieu Piquerez, *Tropical Clemens-Schmid sequence and existence of tropical cycles with a given cohomology class*, arXiv preprint arXiv:2012.13142 (2020).
- [AP21] Omid Amini and Matthieu Piquerez, *Homology of tropical fans*, arXiv preprint arXiv:2105.01504 (2021).
- [AR10] Lars Allermann and Johannes Rau, *First steps in tropical intersection theory*, Mathematische zeitschrift **264** (2010), no. 3, 633–670.
- [Ard18] Federico Ardila, *The geometry of matroids*, Notices of the AMS **65** (2018), no. 8.
- [Arn20] Charles Arnal, *Patchworking, tropical homology, and Betti numbers of real algebraic hypersurfaces*, Ph.D. Thesis, 2020.
- [ARS19] Charles Arnal, Arthur Renaudineau, and Kristin Shaw, *Lefschetz section theorems for tropical hypersurfaces*, arXiv preprint arXiv:1907.06420 (2019).
- [AT19] Dan Abramovich and Michael Temkin, *Functorial factorization of birational maps for qg schemes in characteristic 0*, Algebra & Number Theory **13** (2019), no. 2, 379–424.
- [Avo16] Remi Cocou Avohou, *Polynomial invariants for arbitrary rank D weakly-colored stranded graphs*, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications **12** (2016), no. 30.
- [AY20] Karim Adiprasito and Geva Yashfe, *The partition complex: an invitation to combinatorial commutative algebra*, arXiv preprint arXiv:2008.01044 (2020).
- [Bab14] Farhad Babaee, *Complex tropical currents, extremality, and approximations*, arXiv preprint arXiv:1403.7456 (2014).
- [Bak18] Matthew Baker, *Hodge theory in combinatorics*, Bulletin of the American Mathematical Society **55** (2018), no. 1, 57–80.
- [BB03] Prakash Belkale and Patrick Brosnan, *Matroids, motives, and a conjecture of Kontsevich*, Duke Mathematical Journal **116** (2003), no. 1, 147–188.
- [BB16] Matthew Baker and Nathan Bowler, *Matroids over hyperfields*, arXiv preprint arXiv:1601.01204 (2016), available at [arXiv:1601.01204](https://arxiv.org/abs/1601.01204).
- [BB19] Matthew Baker and Nathan Bowler, *Matroids over partial hyperstructures*, Advances in Mathematics **343** (2019).
- [BBFK02] Gottfried Barthel, Jean-Paul Brasselet, Karl-Heinz Fieseler, and Ludger Kaup, *Combinatorial intersection cohomology for fans*, Tohoku Mathematical Journal, Second Series **54** (2002), no. 1, 1–41.
- [BBL07] Julius Borcea, Petter Brändén, and Thomas Liggett, *Negative dependence and the geometry of polynomials*, Journal of the American Mathematical Society **22** (2007), 521–567.
- [BC17] Joseph Ben Geloun and Francesco Caravelli, *On an ordering-dependent generalization of the Tutte polynomial*, Journal of Statistical Physics **168** (2017), no. 5, 1105–1124.
- [BDP90] Emili Bifet, Corrado De Concini, and Claudio Procesi, *Cohomology of regular embeddings*, Advances in mathematics **82** (1990), no. 1, 1–34.
- [Beg42] Edward Begle, *Locally connected spaces and generalized manifolds*, American Journal of Mathematics **64** (1942), no. 1, 553–574.
- [BEK06] Spencer Bloch, Hélène Esnault, and Dirk Kreimer, *On motives associated to graph polynomials*, Communications in Mathematical Physics **267** (2006), no. 1, 181–225.
- [Ber09] Vladimir Berkovich, *A non-Archimedean interpretation of the weight zero subspaces of limit mixed Hodge structures*, Algebra, arithmetic, and geometry, 2009, pp. 49–67.
- [Ber71] George M Bergman, *The logarithmic limit-set of an algebraic variety*, Transactions of the American Mathematical Society **157** (1971), 459–469.

- [Ber90] Vladimir Berkovich, *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1990.
- [Ber93] Vladimir Berkovich, *Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces*, Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques **78** (1993), no. 1, 5–161.
- [BES19] Spencer Backman, Christopher Eur, and Connor Simpson, *Simplicial generation of Chow rings of matroids*, arXiv preprint arXiv:1905.07114 (2019).
- [BEST21] Andrew Berget, Christopher Eur, Hunter Spink, and Dennis Tseng, *Tautological classes of matroids*, arXiv preprint arXiv:2103.08021 (2021).
- [BFJ15] Sébastien Boucksom, Charles Favre, and Mattias Jonsson, *Solution to a non-Archimedean Monge-Ampère equation*, Journal of the American Mathematical Society **28** (2015), no. 3, 617–667.
- [BFMW07] John Bryant, Steven Ferry, Washington Mio, and Shmuel Weinberger, *Desingularizing homology manifolds*, Geometry & Topology **11** (2007), no. 3, 1289–1314.
- [BFMW96] John Bryant, Steven Ferry, Washington Mio, and Shmuel Weinberger, *Topology of homology manifolds*, Annals of Mathematics **143** (1996), no. 3, 435–467.
- [BGHdJ18] José Ignacio Burgos Gil, David Holmes, and Robin de Jong, *Singularities of the biextension metric for families of Abelian varieties*, Forum of Mathematics, Sigma **6** (2018). Publisher: Cambridge University Press.
- [BGJK20] José Burgos Gil, Walter Gubler, Philipp Jell, and Klaus Künnemann, *A comparison of positivity in complex and tropical toric geometry*, arXiv preprint arXiv:2003.08644 (2020).
- [BGS95a] Spencer Bloch, Henri Gillet, and Christophe Soulé, *Algebraic cycles on degenerate fibers*, Arithmetic geometry (Cortona, 1994), 45–69, Sympos. Math., XXXVII, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1995).
- [BGS95b] Spencer Bloch, Henri Gillet, and Christophe Soulé, *Non-archimedean Arakelov theory*, Journal of Algebraic Geometry **4** (1995), no. 4, 427–486.
- [BH17] Farhad Babaee and June Huh, *A tropical approach to a generalized Hodge conjecture for positive currents*, Duke Mathematical Journal **166** (2017), no. 14, 2749–2813.
- [BH19] Petter Brädén and June Huh, *Lorentzian polynomials*, arXiv preprint arXiv:1902.03719 (2019).
- [BHM⁺20a] Tom Braden, June Huh, Jacob Matherne, Nicholas Proudfoot, and Botong Wang, *A semi-small decomposition of the Chow ring of a matroid*, arXiv preprint arXiv:2002.03341 (2020).
- [BHM⁺20b] Tom Braden, June Huh, Jacob Matherne, Nicholas Proudfoot, and Botong Wang, *Singular Hodge theory for combinatorial geometries*, arXiv preprint arXiv:2010.06088 (2020).
- [BIMS15] Erwan Brugallé, Ilia Itenberg, Grigory Mikhalkin, and Kristin Shaw, *Brief introduction to tropical geometry*, Proceedings of the Gökova Geometry-Topology Conference, 2015, pp. 1–75.
- [BJ16] Matthew Baker and David Jensen, *Degeneration of linear series from the tropical point of view and applications*, Nonarchimedean and tropical geometry, 2016, pp. 365–433.
- [BJ17] Sébastien Boucksom and Mattias Jonsson, *Tropical and non-archimedean limits of degenerating families of volume forms*, Journal de l'École Polytechnique-Mathématiques **4** (2017), 87–139.
- [BK16] Olivier Bernardi and Caroline Klivans, *Directed rooted forests in higher dimension*, The Electronic Journal of Combinatorics **23(4)** (2016), no. #P4.35.
- [BL18] Matthew Baker and Oliver Lorscheid, *The moduli space of matroids*, arXiv preprint arXiv:1809.03542 (2018).
- [BL21] Matthew Baker and Oliver Lorscheid, *Descartes' rule of signs, Newton polygons, and polynomials over hyperfields*, Journal of Algebra **569** (2021), 416–441.
- [BL81] Louis Billera and Carl Lee, *A proof of the sufficiency of McMullen's conditions for f -vectors of simplicial convex polytopes*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **31** (1981), no. 3, 237–255.
- [Bla08] Jonah Blasiak, *The toric ideal of a graphic matroid is generated by quadrics*, Combinatorica **28** (2008), no. 3, 283–297.
- [BN07] Matthew Baker and Serguei Norine, *Riemann–Roch and Abel–Jacobi theory on a finite graph*, Advances in Mathematics **215** (2007), no. 2, 766–788.
- [Bor57] Armand Borel, *The Poincaré duality in generalized manifolds*, Michigan Mathematical Journal **4** (1957), no. 3, 227–239.
- [Bou19] Sébastien Boucksom, *Variational and non-archimedean aspects of the Yau–Tian–Donaldson conjecture*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (ICM 2018), 2019, pp. 591–617.

- [BR02] Béla Bollobás and Oliver Riordan, *A polynomial of graphs on surfaces*, *Mathematische Annalen* **323** (2002), 81–96.
- [Brä07] Petter Brändén, *Polynomials with the half-plane property and matroid theory*, *Advances in Mathematics* **216** (2007), 302–320.
- [Bri96] Michel Brion, *Piecewise polynomial functions, convex polytopes and enumerative geometry*, *Banach Center Publications* **36** (1996), no. 1, 25–44.
- [Bro15] Francis Brown, *Feynman amplitudes and cosmic Galois group*, arXiv preprint arXiv:1512.06409 (2015).
- [BS11] José Ignacio Burgos Gil and Martín Sombra, *When do the recession cones of a polyhedral complex form a fan?*, *Discrete & Computational Geometry* **46** (2011), no. 4, 789–798.
- [BS12] Francis Brown and Oliver Schnetz, *A $K3$ in ϕ^4* , *Duke Mathematical Journal* **161** (2012), no. 10, 1817–1862.
- [BS15] Erwan Brugallé and Kristin Shaw, *Obstructions to approximating tropical curves in surfaces via intersection theory*, *Canadian Journal of Mathematics* **67** (June 2015), no. 3, 527–572. Publisher: Cambridge University Press.
- [BW10] Christian Bogner and Stefan Weinzierl, *Feynman graph polynomials*, *International Journal of Modern Physics A* **25** (2010), no. 13, 2585–2618.
- [BY11] Francis Brown and Karen Yeats, *Spanning forest polynomials and the transcendental weight of Feynman graphs*, *Communications in Mathematical Physics* **301** (2011), 357–382.
- [Čec33] Eduard Čech, *Théorie générale des variétés et de leurs théorèmes de dualité*, *Annals of Mathematics* (1933), 621–730.
- [Car19] Dustin Cartwright, *Tropical complexes*, *Manuscripta mathematica* (2019), 1–35.
- [Cay49] Arthur Cayley, *On the theory of determinants*, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* **VIII** (1849), 75–88.
- [CCK12] Michael Catanzaro, Vladimir Chernyak, and John Klein, *Kirchhoff’s theorems in higher dimensions and Reidemeister torsion*, *Homology, Homotopy and Applications* **17** (2012).
- [CD17] Filippo Callegaro and Emanuele Delucchi, *The integer cohomology algebra of toric arrangements*, *Advances in Mathematics* **313** (2017), 746–802.
- [CDD⁺20] Filippo Callegaro, Michele D’Adderio, Emanuele Delucchi, Luca Migliorini, and Roberto Pagaria, *Orlik-Solomon type presentations for the cohomology algebra of toric arrangements*, *Transactions of the American Mathematical Society* **373** (2020), no. 3, 1909–1940.
- [CDPR12a] Filip Cools, Jan Draisma, Sam Payne, and Elina Robeva, *A tropical proof of the Brill–Noether theorem*, *Advances in Mathematics* **230** (2012), no. 2, 759–776.
- [CDPR12b] Filip Cools, Jan Draisma, Sam Payne, and Elina Robeva, *A tropical proof of the Brill–Noether theorem*, *Advances in Mathematics* **230** (2012), no. 2, 759–776.
- [Cha18] Antoine Chambert-Loir, *Relations de Hodge-Riemann et combinatoire des matroïdes (d’après K. Adiprasito, J. Huh et E. Katz)*, *Séminaire Bourbaki* (2018), 70e.
- [CLD12] Antoine Chambert-Loir and Antoine Ducros, *Formes différentielles réelles et courants sur les espaces de Berkovich*, arXiv preprint arXiv:1204.6277 (2012).
- [Cle69] Hebert Clemens, *Picard-Lefschetz theorem for families of nonsingular algebraic varieties acquiring ordinary singularities*, *Transactions of the American Mathematical Society* **136** (1969), 93–108.
- [Cle77] Hebert Clemens, *Degeneration of Kähler manifolds*, *Duke Mathematical Journal* **44** (1977), no. 2, 215–290.
- [Cop16] Marc Coppens, *Clifford’s theorem for graphs*, *Advances in Geometry* **16** (2016), no. 3, 389–400.
- [COSW04] Young-Bin Choe, James Oxley, Alan Sokal, and David Wagner, *Homogeneous multivariate polynomials with the half-plane property*, *Advances in Applied Mathematics* **32** (2004), no. 1-2, 88–187.
- [Cur14] Justin Curry, *Sheaves, cosheaves and applications*, Ph.D. Thesis, 2014.
- [CV10] Lucia Caporaso and Filippo Viviani, *Torelli theorem for graphs and tropical curves*, *Duke Mathematical Journal* **153** (2010), no. 1, 129–171.
- [Dan78] Vladimir Ivanovich Danilov, *The geometry of toric varieties*, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* **33** (1978), no. 2, 85–134.
- [dCM05] Mark Andrea de Cataldo and Luca Migliorini, *The Hodge theory of algebraic maps*, *Annales scientifiques de l’école normale supérieure*, 2005, pp. 693–750.

- [DD15] Giacomo D’Antonio and Emanuele Delucchi, *Minimality of toric arrangements*, Journal of the European Mathematical Society **17** (2015), no. 3, 483–521.
- [Del71a] Pierre Deligne, *Théorie de Hodge : II*, Publications Mathématiques de l’IHÉS **40** (1971), 5–57.
- [Del71b] Pierre Deligne, *Théorie de Hodge I*, Actes du congrès international des mathématiciens, Nice 1970 (Gauthier-Villars 1971), 1971, pp. 425–430.
- [Del74] Pierre Deligne, *Théorie de Hodge : III*, Publications Mathématiques de l’IHÉS **44** (1974), 5–77.
- [Del97] Pierre Deligne, *Local behavior of Hodge structures at infinity*, AMS/IP Studies in advanced mathematics **1** (1997), 683–699.
- [Dem70] Michel Demazure, *Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona*, Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure **3** (1970), no. 4, 507–588.
- [DFM18] Clément Dupont, Alex Fink, and Luca Moci, *Universal Tutte characters via combinatorial coalgebras*, Algebraic Combinatorics **1** (2018), no. 5, 603–651.
- [DFN15] Antoine Ducros, Charles Favre, and Johannes Nicaise (eds.), *Berkovich spaces and applications*, Lecture Notes in Mathematics, Springer International Publishing, 2015.
- [DG18] Corrado De Concini and Giovanni Gaiffi, *Projective wonderful models for toric arrangements*, Advances in Mathematics **327** (2018), 390–409.
- [DG19] Corrado De Concini and Giovanni Gaiffi, *Cohomology rings of compactifications of toric arrangements*, Algebraic & Geometric Topology **19** (2019), no. 1, 503–532.
- [DKM09] Art Duval, Caroline Klivans, and Jeremy Martin, *Simplicial matrix-tree theorems*, Transactions of the American Mathematical Society **361** (2009), no. 11, 6073–6114.
- [DM11] Michele D’Adderio and Luca Moci, *Arithmetic matroids, Tutte polynomial, and toric arrangements*, Advances in Mathematics **232** (2011).
- [DP95] Corrado De Concini and Claudio Procesi, *Wonderful models of subspace arrangements*, Selecta Mathematica **1** (1995), no. 3, 459–494.
- [DR21] Jeshu Dastidar and Dustin Ross, *Matroid psi classes*, arXiv preprint arXiv:2102.08425 (2021).
- [DRS10] Jesús De Loera, Jörg Rambau, and Francisco Santos, *Triangulations: Structures for algorithms and applications*, Springer, 2010.
- [DS18] Graham Denham and Alexander Suciuciu, *Local systems on complements of arrangements of smooth, complex algebraic hypersurfaces*, Forum of Mathematics, Sigma **6** (2018).
- [dSK11] Sergio da Silva and Kalle Karu, *On Oda’s strong factorization conjecture*, Tohoku Mathematical Journal **63** (2011), no. 2.
- [Dur81] Alan Durfee, *A naive guide to mixed Hodge theory (complex analysis of singularities)*, RIMS Kôkyûroku **415** (1981), 48–63.
- [EG09] Steven Evans and Alex Gottlieb, *Hyperdeterminantal point processes*, Metrika **69** (2009), 85–99.
- [EKL06] Manfred Einsiedler, Mikhail Kapranov, and Douglas Lind, *Non-archimedean amoebas and tropical varieties*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal) **601** (2006).
- [Eur20] Christopher Eur, *Divisors on matroids and their volumes*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **169** (2020), 105–135.
- [EW14] Ben Elias and Geordie Williamson, *The Hodge theory of Soergel bimodules*, Annals of Mathematics **180** (2014), no. 3, 1089–1136.
- [FGP14] Tyler Foster, Philipp Gross, and Sam Payne, *Limits of tropicalizations*, Israel Journal of Mathematics **201** (2014), 835–846.
- [Fin13] Alex Fink, *Tropical cycles and Chow polytopes*, Beiträge zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry **54** (2013), no. 1, 13–40.
- [FJP20] Gavril Farkas, David Jensen, and Sam Payne, *The Kodaira dimensions of \overline{M}_{22} and \overline{M}_{23}* , arXiv preprint arXiv:2005.00622 (2020).
- [FK10] Balin Fleming and Kalle Karu, *Hard Lefschetz theorem for simple polytopes*, Journal of Algebraic Combinatorics **32** (2010), no. 2, 227–239.
- [FL78] Jon Folkman and Jim Lawrence, *Oriented matroids*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **25** (1978), 199–236.
- [FM92] Tomás Feder and Milena Mihail, *Balanced matroids*, Proceedings of the twenty-fourth annual acm symposium on theory of computing, 1992, pp. 26–38.
- [FM94] William Fulton and Robert MacPherson, *A compactification of configuration spaces*, Annals of Mathematics **139** (1994), no. 1, 183–225.

- [FMSS95] William Fulton, Robert MacPherson, Frank Sottile, and Bernd Sturmfels, *Intersection theory on spherical varieties*, Journal of algebraic geometry **4** (1995), no. 1, 181–194.
- [Fra06] Matthias Franz, *The integral cohomology of toric manifolds*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics **252** (2006), no. 1, 53–62.
- [FS97] William Fulton and Bernd Sturmfels, *Intersection theory on toric varieties*, Topology **36** (1997), no. 2, 335–353.
- [Ful93] William Fulton, *Introduction to toric varieties*, Princeton University Press, 1993.
- [FY04] Eva Maria Feichtner and Sergey Yuzvinsky, *Chow rings of toric varieties defined by atomic lattices*, Inventiones mathematicae **155** (2004), no. 3, 515–536.
- [GGW06] Jim Geelen, Bert Gerards, and Geoff Whittle, *Towards a structure theory for matrices and matroids*, International Congress of Mathematicians, 2006, pp. 827–842.
- [GK08] Andreas Gathmann and Michael Kerber, *A Riemann–Roch theorem in tropical geometry*, Mathematische Zeitschrift **259** (2008), no. 1, 217–230.
- [GK17] Walter Gubler and Klaus Künnemann, *A tropical approach to nonarchimedean Arakelov geometry*, Algebra & Number Theory **11** (2017), no. 1, 77–180.
- [GKM09] Andreas Gathmann, Michael Kerber, and Hannah Markwig, *Tropical fans and the moduli spaces of tropical curves*, Compositio Mathematica **145** (2009), no. 1, 173–195.
- [GKZ94] Israel Gelfand, Mikhail Kapranov, and Andrei Zelvinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.
- [GM12] Angela Gibney and Diane Maclagan, *Lower and upper bounds for nef cones*, International Mathematics Research Notices **2012** (2012), no. 14, 3224–3255.
- [GM92] Israel Gelfand and Robert MacPherson, *A combinatorial formula for the Pontrjagin classes*, Bulletin of the American Mathematical Society **26** (1992), no. 2, 304–309.
- [GN90] Francisco Guillén and Vicente Navarro Aznar, *Sur le théorème local des cycles invariants*, Duke Math. J **61** (1990), no. 1, 133–155.
- [GR07] Razvan Gurau and Vincent Rivasseau, *Parametric representation of noncommutative field theory*, Communications in Mathematical Physics **272** (2007), 811–835.
- [GR13] Emeric Gioan and Jorge Ramirez Alfonsín, *Éléments de théorie des matroïdes et matroïdes orientés*, Informatique mathématique - une photographie en 2013, 2013, pp. 47–95.
- [Gro18] Andreas Gross, *Intersection theory on tropicalizations of toroidal embeddings*, Proceedings of the London Mathematical Society **116** (2018), no. 6, 1365–1405.
- [Gro81] Michael Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps* (with an appendix by Jacques Tits), Publications Mathématiques de l’IHÉS **53** (1981), 53–78.
- [Gro83] Mikhael Gromov, *Filling Riemannian manifolds*, Journal of Differential Geometry **18** (1983), no. 1, 1–147.
- [GRW16] Walter Gubler, Joseph Rabinoff, and Annette Werner, *Skeletons and tropicalizations*, Advances in Mathematics **294** (2016), 150–215.
- [GRW17] Walter Gubler, Joseph Rabinoff, and Annette Werner, *Tropical skeletons*, Annales de l’Institut Fourier **67** (2017), no. 5, 1905–1961.
- [GS06] Mark Gross and Bernd Siebert, *Mirror symmetry via logarithmic degeneration data I*, Journal of Differential Geometry **72** (2006), no. 2, 169–338.
- [GS10] Mark Gross and Bernd Siebert, *Mirror symmetry via logarithmic degeneration data, II*, Journal of Algebraic Geometry **19** (2010), no. 4, 679–780.
- [GS11] Mark Gross and Bernd Siebert, *From real affine geometry to complex geometry*, Annals of mathematics (2011), 1301–1428.
- [GS19a] Andreas Gross and Farbod Shokrieh, *Cycles, cocycles, and duality on tropical manifolds*, arXiv preprint arXiv:1910.04805 (2019).
- [GS19b] Andreas Gross and Farbod Shokrieh, *A sheaf-theoretic approach to tropical homology*, arXiv preprint arXiv:1906.09245 (2019).
- [GS19c] Andreas Gross and Farbod Shokrieh, *Tautological cycles on tropical Jacobians*, arXiv preprint arXiv:1910.07165 (2019).
- [GV85] Ira Gessel and Gérard Viennot, *Binomial determinants, paths, and hook length formulae*, Advances in mathematics **58** (1985), no. 3, 300–321.

- [Hac08] Paul Hacking, *The homology of tropical varieties*, *Collectanea mathematica* **59** (2008), no. 3, 263–273.
- [Ham14] Simon Hampe, *Algorithmic aspects of tropical intersection theory*, Ph.D. Thesis, 2014.
- [Hat02] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [Hut] Michael Hutchings, *Introduction to spectral sequences*, 13.
- [IKMZ19] Ilia Itenberg, Ludmil Katzarkov, Grigory Mikhalkin, and Ilia Zharkov, *Tropical homology*, *Mathematische Annalen* **374** (2019), no. 1-2, 963–1006.
- [IMS09] Ilia Itenberg, Grigory Mikhalkin, and Eugenii Shustin, *Tropical algebraic geometry*, 2nd ed., Oberwolfach Seminars, Birkhäuser Basel, 2009.
- [Jel16a] Philipp Jell, *A Poincaré lemma for real-valued differential forms on Berkovich spaces*, *Mathematische Zeitschrift* **282** (2016), no. 3-4, 1149–1167.
- [Jel16b] Philipp Jell, *Real-valued differential forms on Berkovich analytic spaces and their cohomology*, Ph.D. Thesis, 2016.
- [Jel18] Philipp Jell, *Constructing smooth and fully faithful tropicalizations for Mumford curves*, arXiv preprint arXiv:1805.11594 (2018).
- [Jel19] Philipp Jell, *Tropical cohomology with integral coefficients for analytic spaces*, arXiv preprint arXiv:1909.12633 (2019).
- [Jos01] Roy Joshua, *Algebraic K-theory and higher Chow groups of linear varieties* **130** (2001), no. 1, 37–60.
- [JP16] David Jensen and Sam Payne, *Tropical independence II: The maximal rank conjecture for quadrics*, *Algebra & Number Theory* **10** (2016), no. 8, 1601–1640.
- [JRS18] Philipp Jell, Johannes Rau, and Kristin Shaw, *Lefschetz (1, 1)-theorem in tropical geometry*, *Épjournal de Géométrie Algébrique* **2** (2018).
- [JSS19] Philipp Jell, Kristin Shaw, and Jascha Smacka, *Superforms, tropical cohomology, and Poincaré duality*, *Advances in Geometry* **19** (2019), no. 1, 101–130.
- [Jur80] Jerzy Jurkiewicz, *Chow ring of projective nonsingular torus embedding*, *Colloquium Mathematicum* **2** (1980), no. 43, 261–270.
- [Kaj08] Takeshi Kajiwara, *Tropical toric geometry*, *Contemporary Mathematics* **460** (2008), 197–208.
- [Kal15] Nikita Kalinin, *A guide to tropical modifications*, arXiv preprint arXiv:1509.03443 (2015).
- [Kal83] Gil Kalai, *Enumeration of Q-acyclic simplicial complexes*, *Israel Journal of mathematics* **45** (1983), no. 4, 337–351.
- [Kar04] Kalle Karu, *Hard Lefschetz theorem for nonrational polytopes*, *Inventiones mathematicae* **157** (2004), no. 2, 419–447.
- [Kat12] Eric Katz, *Tropical intersection theory from toric varieties*, *Collectanea mathematica* **63** (2012), no. 1, 29–44.
- [Kee92] Sean Keel, *Intersection theory of moduli space of stable n-pointed curves of genus zero*, *Transactions of the American Mathematical Society* (1992), 545–574.
- [Kee93] Sean Keel, *Intersection theory of linear embeddings*, *Transactions of the American Mathematical Society* (1993), 195–212.
- [Kir47] Gustav Kirchhoff, *Über die auflosung der gleichungen auf welche man sie der untersuchung der linearen verteilung galvanischer strome gefuhrt wird*, *Annalen der Physik* **148** (1847), no. 12, 497–508.
- [KKMS06] George Kempf, Finn Knudsen, David Mumford, and Bernard Saint-Donat, *Toroidal embeddings 1*, Vol. 339, Springer, 2006.
- [Kla04] Daniel Klain, *The Minkowski problem for polytopes*, *Advances in Mathematics* **185** (2004), no. 2, 270–288.
- [KM09] Michael Kerber and Hannah Markwig, *Intersecting psi-classes on tropical $\mathcal{M}_{0,n}$* , *International Mathematics Research Notices* **2009** (2009), no. 2, 221–240.
- [KMT18] Thomas Krajewski, Iain Moffatt, and Adrian Tanasa, *Hopf algebras and Tutte polynomials*, *Advances in Applied Mathematics* **95** (2018), 271–330.
- [KRTW10] Thomas Krajewski, Vincent Rivasseau, Adrian Tanasa, and Zhituo Wang, *Topological graph polynomials and quantum field theory, part I: Heat kernel theories*, *Journal of Noncommutative Geometry* **4** (2010), 29–82.

- [KRV11] Thomas Krajewski, Vincent Rivasseau, and Fabien Vignes-Tourneret, *Topological graph polynomial and quantum field theory part II: Mehler kernel theories*, *Annales Henri Poincaré* **12** (2011), no. 3, 483.
- [KRZ16] Eric Katz, Joseph Rabinoff, and David Zureick-Brown, *Uniform bounds for the number of rational points on curves of small Mordell–Weil rank*, *Duke Mathematical Journal* **165** (2016), no. 16, 3189–3240.
- [KS00] Motoko Kotani and Toshikazu Sunada, *Jacobian tori associated with a finite graph and its abelian covering graphs*, *Advances in Applied Mathematics* **24** (2000), no. 2, 89–110.
- [KS06] Maxim Kontsevich and Yan Soibelman, *Affine structures and non-archimedean analytic spaces*, *The unity of mathematics*, 2006, pp. 321–385.
- [KS90] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, *Sheaves on manifolds*, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, vol. 292, Springer-Verlag, 1990.
- [KT02] Maxim Kontsevich and Yuri Tschinkel, *Non-archimedean Kähler geometry* (2002).
- [Kun86] Joseph Kung, *A source book in matroid theory*, Springer, 1986.
- [Laf03] Laurent Lafforgue, *Chirurgie des grassmanniennes*, American Mathematical Soc., 2003.
- [Lag12] Aron Lagerberg, *Super currents and tropical geometry*, *Mathematische Zeitschrift* **270** (2012), no. 3-4, 1011–1050.
- [Lee96] Carl Lee, *P.L.-spheres, convex polytopes, and stress*, *Discrete & Computational Geometry* **15** (1996), 389–421.
- [Lef33] Solomon Lefschetz, *On generalized manifolds*, *American Journal of Mathematics* **55** (1933), no. 1, 469–504.
- [Li09] Li Li, *Wonderful compactification of an arrangement of subvarieties*, *The Michigan Mathematical Journal* **58** (2009), no. 2, 535–563.
- [Li20] Yang Li, *Metric SYZ conjecture and non-archimedean geometry*, arXiv preprint arXiv:2007.01384 (2020).
- [Lin73] Bernt Lindström, *On the vector representations of induced matroids*, *Bulletin of the London Mathematical Society* **5** (1973), no. 1, 85–90.
- [Liu19] Yifeng Liu, *Monodromy map for tropical Dolbeault cohomology*, *Algebraic Geometry* **6** (2019), no. 4, 384–409.
- [Liu20] Yifeng Liu, *Tropical cycle classes for non-archimedean spaces and weight decomposition of de Rham cohomology sheaves*, *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure (4)* **53** (2020), no. 2, 291–352.
- [LM14] Michał Lasoń and Mateusz Michałek, *On the toric ideal of a matroid*, *Advances in Mathematics* **259** (2014), 1–12.
- [Lor15] Oliver Lorscheid, *Scheme theoretic tropicalization*, arXiv preprint arXiv:1508.07949 (2015).
- [Lor19] Oliver Lorscheid, *Tropical geometry over the tropical hyperfield*, arXiv preprint arXiv:1907.01037 (2019).
- [LRS20] Lucía López de Medrano, Felipe Rincón, and Kristin Shaw, *Chern–Schwartz–MacPherson cycles of matroids*, *Proceedings of the London Mathematical Society* **120** (2020), no. 1, 1–27.
- [Lyo03] Russell Lyons, *Determinantal probability measures*, *Publications mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques* **98** (2003), 167–212.
- [Lyo09] Russell Lyons, *Random complexes and ℓ^2 -betty numbers*, *Journal of Topology and Analysis* **01** (2009), no. 2, 153–175.
- [Mac91] Robert D MacPherson, *Combinatorial differential manifolds*, *Topological methods in modern mathematics*, Proc. of a symposium in honor of John Milnor’s sixtieth birthday, SUNY Stony Brook, 1991, pp. 203–221.
- [McC00] John McCleary, *A user’s guide to spectral sequences*, 2nd ed., *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, Cambridge University Press, 2000.
- [McD11] Chris McDaniel, *The strong Lefschetz property for coinvariant rings of finite reflection groups*, *Journal of Algebra* **331** (2011), no. 1, 68–95.
- [McM71] Peter McMullen, *The numbers of faces of simplicial polytopes*, *Israel Journal of Mathematics* **9** (1971), no. 4, 559–570.
- [McM93] Peter McMullen, *On simple polytopes*, *Inventiones mathematicae* **113** (1993), no. 1, 419–444.

- [McM96] Peter McMullen, *Weights on polytopes*, Discrete & Computational Geometry **15** (1996), no. 4, 363–388.
- [Mik04a] Grigory Mikhalkin, *Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry*, Different faces of geometry, 2004, pp. 257–300.
- [Mik04b] Grigory Mikhalkin, *Decomposition into pairs-of-pants for complex algebraic hypersurfaces*, Topology **43** (2004), 1035–1065.
- [Mik06] Grigory Mikhalkin, *Tropical geometry and its applications*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (ICM 2006), 2006, pp. 827–852.
- [Mik07] Grigory Mikhalkin, *Moduli spaces of rational tropical curves*, Proceedings of Gökova Geometry-Topology Conference 2006, 2007, pp. 39–51.
- [Mik20a] Ryota Mikami, *A tropical analog of the Hodge conjecture for smooth algebraic varieties over trivially valued fields*, arXiv preprint arXiv:2009.04690 (2020).
- [Mik20b] Ryota Mikami, *Tropical analogs of Milnor K -groups and tropicalizations of Zariski-Riemann spaces*, arXiv preprint arXiv:2009.04677 (2020).
- [Mio00] Washington Mio, *Homology manifolds*, Surveys on surgery theory **1** (2000), 323–343.
- [MMT18] Ralph McKenzie, George McNulty, and Walter Taylor, *Algebras, lattices, varieties I*, Vol. 383, American Mathematical Soc., 2018.
- [Mnë88] Nicolai Mnëv, *The universality theorems on the classification problem of configuration varieties and convex polytopes varieties*, Topology and geometry–rohlin seminar, 1988, pp. 527–543.
- [Mor96] Robert Morelli, *The birational geometry of toric varieties*, Journal of Algebraic Geometry **5** (1996), no. 4, 751–782.
- [MP67] Leon Mirsky and Hazel Perfect, *Applications of the notion of independence to problems of combinatorial analysis*, Journal of Combinatorial Theory **2** (1967), no. 3, 327–357.
- [MR09] Grigory Mikhalkin and Johannes Rau, *Tropical geometry*, MPI for Mathematics, 2009.
- [MR18] Grigory Mikhalkin and Johannes Rau, *Tropical geometry*, To appear, 2018.
- [MS15] Diane Maclagan and Bernd Sturmfels, *Introduction to tropical geometry*, Vol. 161, American Mathematical Soc., 2015.
- [MZ08] Grigory Mikhalkin and Ilia Zharkov, *Tropical curves, their Jacobians and theta functions*, Curves and abelian varieties **465** (2008), 203–230.
- [MZ14] Grigory Mikhalkin and Ilia Zharkov, *Tropical eigenwave and intermediate Jacobians*, Homological mirror symmetry and tropical geometry, 2014, pp. 309–349.
- [Nel18] Peter Nelson, *Almost all matroids are non-representable*, Bull. London Math. Soc. **50** (2018), 245–248.
- [Oda88] Tadao Oda, *Convex bodies and algebraic geometry*, Vol. 15, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [OP13] Brian Osserman and Sam Payne, *Lifting tropical intersections*, Documenta Mathematica (2013), 121–175.
- [OR11] Brian Osserman and Joseph Rabinoff, *Lifting non-proper tropical intersections*, Tropical and non-Archimedean geometry **605** (2011), 15–44.
- [Ori07] Daniele Oriti, *Quantum gravity as a quantum field theory of simplicial geometry*, Quantum gravity: Mathematical models and experimental bounds, 2007.
- [OT13] Peter Orlik and Hiroaki Terao, *Arrangements of hyperplanes*, Vol. 300, Springer Science & Business Media, 2013.
- [Oxl06] James Oxley, *Matroid theory*, Vol. 3, Oxford University Press, USA, 2006.
- [Oxl11] James Oxley, *Matroid theory*, Oxford University Press, New York, 2011.
- [Pay06] Sam Payne, *Equivariant Chow cohomology of toric varieties*, Mathematical research letters **13** (2006), no. 1, 29–42.
- [Pay09] Sam Payne, *Analytification is the limit of all tropicalizations*, Mathematical Research Letters **16** (2009), no. 3, 543–556.
- [Pet17] Dan Petersen, *A spectral sequence for stratified spaces and configuration spaces of points*, Geometry & Topology **21** (2017), no. 4, 2527–2555.
- [Piq19a] Matthieu Piquerez, *A generalization of symanzik polynomials*, 2019.

- [Piq19b] Matthieu Piquerez, *A multidimensional generalization of Symanzik polynomials*, arXiv preprint arXiv:1901.09797 (2019).
- [PR04] Mikael Passare and Hans Rullgård, *Amoebas, Monge-Ampère measures, and triangulations of the Newton polytope*, *Duke Mathematical Journal* **121** (2004).
- [Reg61] Tullio Regge, *General relativity without coordinates*, *Il Nuovo Cimento* **19** (1961), 558–571.
- [RGST05] Jürgen Richter-Gebert, Bernd Sturmfels, and Thorsten Theobald, *First steps in tropical geometry*, *Contemporary Mathematics*, 2005, pp. 289–317.
- [Rud10] Helge Ruddat, *Log Hodge groups on a toric Calabi-Yau degeneration*, *Mirror Symmetry and Tropical Geometry*, *Contemporary Mathematics* **527** (2010), 113–164.
- [Rud20] Helge Ruddat, *A homology theory for tropical cycles on integral affine manifolds and a perfect pairing*, arXiv preprint arXiv:2002.12290 (2020).
- [Rul01] Hans Rullgård, *Polynomial amoebas and convexity*, 2001, pp. 49.
- [Sai88] Morihiko Saito, *Modules de Hodge polarisables*, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences* **24** (1988), no. 6, 849–995.
- [Sch03] Alexander Schrijver, *Combinatorial optimization: polyhedra and efficiency*, Vol. 24, Springer, 2003.
- [Sch73] Wilfried Schmid, *Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping*, *Inventiones mathematicae* **22** (1973), no. 3-4, 211–319.
- [Ser55] Jean-Pierre Serre, *Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethériens*, *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Number Theory*, 1955, pp. 175–189.
- [Ser97] Jean-Pierre Serre, *Algèbre locale, multiplicités : cours au Collège de France, 1957-1958*, Vol. 11, Springer Science & Business Media, 1997.
- [Sha11] Kristin Shaw, *Tropical intersection theory and surfaces*, Ph.D. Thesis, 2011.
- [Sha13a] Kristin Shaw, *Tropical (1,1)-homology for floor decomposed surfaces*, *Algebraic and combinatorial aspects of tropical geometry*, 2013, pp. 529–550.
- [Sha13b] Kristin Shaw, *A tropical intersection product in matroidal fans*, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **27** (2013), no. 1, 459–491.
- [Sha15] Kristin Shaw, *Tropical surfaces*, arXiv preprint arXiv:1506.07407 (2015).
- [Sha93] Boris Zalmanovich Shapiro, *The mixed Hodge structure of the complement to an arbitrary arrangement of affine complex hyperplanes is pure*, *Proceedings of the American Mathematical Society* **117** (1993), no. 4, 931–933.
- [She85] Allan Shepard, *A cellular description of the derived category of a stratified space*, Ph.D. Thesis, 1985.
- [Sma17] Jascha Smacka, *Differential forms on tropical spaces*, Ph.D. Thesis, 2017.
- [Sok05] Alan Sokal, *The multivariate Tutte polynomial (alias Potts model) for graphs and matroids*, *Surveys in combinatorics 2005*, 2005, pp. 173–226.
- [SP08] Joseph Steenbrink and Chris Peters, *Mixed hodge structures*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, vol. 52, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [Spe05] David Speyer, *Tropical geometry*, Ph.D. Thesis, 2005.
- [Spe08] David E Speyer, *Tropical linear spaces*, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **22** (2008), no. 4, 1527–1558.
- [SS03] David Speyer and Bernd Sturmfels, *The tropical Grassmannian*, *Advances in Geometry* **4** (2003), no. 3.
- [SS14] Alexander Scott and Alan Sokal, *Complete monotonicity for inverse powers of some combinatorially defined polynomials*, *Acta Mathematica* **213** (2014), no. 2, 323–392.
- [SS20] Claude Sabbah and Christian Schnell, *The MHM Project*, <http://www.cmls.polytechnique.fr/perso/sabbah/MHMProject/mhm.html>, 2020.
- [ST08] Bernd Sturmfels and Jenia Tevelev, *Elimination theory for tropical varieties*, *Mathematical research letters* **15** (2008), no. 2, 543–562.
- [Sta80] Richard Stanley, *The number of faces of a simplicial convex polytope*, *Advances in Mathematics* **35** (1980), no. 3, 236–238.
- [Ste76] Joseph Steenbrink, *Limits of Hodge structures*, *Inventiones mathematicae* **31** (1976), no. 3, 229–257.
- [Stu02] Bernd Sturmfels, *Solving systems of polynomial equations*, American Mathematical Soc., 2002.

- [SYZ96] Andrew Strominger, Shing-Tung Yau, and Eric Zaslow, *Mirror symmetry is T-duality*, Nuclear Physics B **479** (1996), no. 1, 243–259.
- [Tev07] Jenia Tevelev, *Compactifications of subvarieties of tori*, American Journal of Mathematics **129** (2007), no. 4, 1087–1104.
- [Thu07] Amaury Thuillier, *Géométrie toroïdale et géométrie analytique non Archimédienne. Application au type d'homotopie de certains schémas formels*, Manuscripta Math. **123** (2007), no. 4, 381–451.
- [Tot14] Burt Totaro, *Chow groups, Chow cohomology, and linear varieties*, Forum of Mathematics, Sigma **2** (2014).
- [Tut65] William Thomas Tutte, *Lectures on matroids*, J. Research of the National Bureau of Standards (B) **69** (1965), 1–47.
- [van37] Bartel Leendert van der Waerden, *Moderne algebra*, 2nd. ed., Springer, Berlin, 1937.
- [Vir01] Oleg Viro, *Dequantization of real algebraic geometry on logarithmic paper*, European congress of mathematics, 2001, pp. 135–146.
- [Vir06] Oleg Viro, *Patchworking real algebraic varieties*, arXiv preprint arXiv:0611382 (2006).
- [Vir80] Oleg Viro, *Curves of degree 7, curves of degree 8 and the Ragsdale conjecture.*, Doklady Akademii Nauk SSSR **254** (1980), no. 6, 1306–1310.
- [Wei02] Shmuel Weinberger, *Homology manifolds*, Handbook of geometric topology (2002), 1085–1102.
- [Wel10] Dominic Welsh, *Matroid theory*, Courier Corporation, 2010.
- [Whi35] Hassler Whitney, *On the abstract properties of linear dependence*, American Journal of Mathematics **57** (1935), no. 3, 509–533.
- [Whi80] Neil White, *A unique exchange property for bases*, Linear Algebra and its Applications **31** (1980), 81–91.
- [Wil65] Raymond Louis Wilder, *Topology of manifolds*, Vol. 32, American Mathematical Soc., 1965.
- [Wil73] Robin Wilson, *An introduction to matroid theory*, The American Mathematical Monthly **80** (1973), no. 5, 500–525.
- [Wil92] Ruth Williams, *Discrete quantum gravity: the Regge calculus approach*, International Journal of Modern Physics B **06** (1992), 2097–2108.
- [Wło97] Jarosław Włodarczyk, *Decomposition of birational toric maps in blow-ups and blow-downs*, Transactions of the American Mathematical Society (1997), 373–411.
- [Yu17] Josephine Yu, *Algebraic matroids and set-theoretic realizability of tropical varieties*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **147** (2017), 41–45.
- [Yu18] Tony Yue Yu, *Gromov compactness in non-archimedean analytic geometry*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal) **2018** (2018), no. 741, 179–210.
- [Zha00] Ilia Zharkov, *Torus fibrations of Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties*, Duke Mathematical Journal - DUKE MATH J **101** (2000).
- [Zha13] Ilia Zharkov, *The Orlik-Solomon algebra and the Bergman fan of a matroid*, Journal of Gökova Geometry Topology **7** (2013), 25–31.
- [Zha20] Ilia Zharkov, *Tropical Abelian varieties, Weil classes and the Hodge conjecture*, arXiv preprint arXiv:2002.02347 (2020).
- [Zha93] Shou-Wu Zhang, *Admissible pairing on a curve*, Inventiones mathematicae **112** (1993), no. 1, 171–193.
- [Zha95] Shou-Wu Zhang, *Positive line bundles on arithmetic varieties*, Journal of the American Mathematical Society **8** (1995), no. 1, 187–221.

Titre : Théorie de Hodge tropicale et applications

Mots clés : Géométrie tropicale, Théorie de Hodge combinatoire, Théorie de Hodge asymptotique, Dégénérescences de variétés algébriques, Conjecture de Hodge, Polynômes de Symanzik

Résumé : Dans cette thèse, nous démontrons que la cohomologie tropicale d'une variété tropicale projective lisse vérifie plusieurs propriétés de symétries appelées propriétés kählériennes. Ces propriétés sont la dualité de Poincaré, le théorème de Lefschetz difficile, les relations de Hodge-Riemann et la conjecture monodromie-poids. Nous proposons de plus quelques applications.

Dans le cas local, nous construisons une vaste famille d'éventails, dits tropicalement épluchables, dont les compactifications canoniques vérifient les propriétés kählériennes. Nous montrons aussi que la cohomologie tropicale calcule leurs anneaux de Chow et certains quotients des anneaux de Stanley-Reisner particulièrement importants en combinatoire.

Pour le cas global, la preuve du théorème principal mentionné ci-dessus fait entre autre apparaître des théorèmes d'existence de bonnes triangulations et des versions particulières d'analogues tropicaux de la suite spectrale de Deligne, de la suite spectrale de Steenbrink et de l'opérateur de monodromie aussi appelé opérateur eigenwave.

Comme application, nous généralisons le travail de De Concini-Procesi et Feichtner-Yuzvinsky concernant les compactifications magnifiques aux cas des éventails de Bergman généralisés.

Par ailleurs, nous montrons une conjecture de Hodge tropicale pour les variétés tropicales projectives lisses admettant une triangulation rationnelle : les classes de Hodge sont exactement les classes de degré (p,p) dans le noyau de la monodromie.

Finalement, nous généralisons les polynômes de Symanzik en dimensions supérieures. En dimension un, ces polynômes apparaissent en physique, en combinatoire et plus récemment en théorie de Hodge asymptotique. Ils possèdent de nombreuses propriétés qui restent valides pour notre généralisation. Ce travail est une première étape pour comprendre l'asymptotique de certaines données associées à une dégénérescence de variétés complexes en dimension quelconque. Par ailleurs, nous fournissons une description complète du graphe d'échange des indépendants d'un matroïde quelconque.

Title : Tropical Hodge theory and applications

Keywords : Tropical geometry, Combinatorial Hodge theory, Asymptotic Hodge theory, Degenerations of algebraic varieties, Hodge conjecture, Symanzik polynomials

Abstract : In this thesis, we prove that the tropical cohomology of a smooth projective tropical variety verifies several symmetry properties: namely, tropical analogs of the Kähler package composed of the Poincaré duality, the hard Lefschetz theorem, the Hodge-Riemann bilinear relations and the monodromy-weight conjecture. We also give some applications.

In the local case, we construct a wide family of fans, called tropically shellable fans, whose canonical compactifications verify the Kähler package. We show that the tropical cohomology computes their Chow rings and some quotients of the Stanley-Reisner rings of simplicial complexes which are of particular interest in combinatorics.

In the global case, the proof of the main theorem mentioned above uses interesting objects as the existence of some good triangulations and specific versions of tropical analogs of the Deligne spectral sequence, the Steenbrink spectral sequence and the monodromy operator also known as the tropical eigenwave operator.

As an application of our results, we get a generalization of the work of De Concini-Procesi and Feichtner-Yuzvinsky about wonderful compactifications to the case of toric compactifications induced by unimodular subfans of Bergman fans.

In another direction, we prove a tropical Hodge conjecture for smooth projective varieties admitting a rational triangulation: the tropical Hodge classes coincide with the kernel of the monodromy restricted to parts of bidegree (p,p) .

Finally, we provide a generalization of Symanzik polynomials in higher dimensions. In dimension one, these polynomials appear in combinatorics, in physics and recently in asymptotic Hodge theory. They have many known properties that are still valid in our generalization. This is a first step to understand the asymptotic of some data on degenerating families of complex varieties in any dimension. We also provide a complete description of the exchange graph of independent sets of any matroid.