



HAL
open science

Modélisation du rayonnement des guides de forme complexe par une méthode multimodale

Thomas Guennoc

► **To cite this version:**

Thomas Guennoc. Modélisation du rayonnement des guides de forme complexe par une méthode multimodale. Acoustique [physics.class-ph]. Le Mans Université, 2021. Français. NNT : 2021LEMA1026 . tel-03524372

HAL Id: tel-03524372

<https://theses.hal.science/tel-03524372>

Submitted on 13 Jan 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

DE «LE MANS UNIVERSITÉ»

ÉCOLE DOCTORALE N° 602
Sciences pour l'Ingénieur
Spécialité : *Acoustique*

Par

Thomas GUENNOC

**Modélisation du rayonnement des guides de forme complexe par
une méthode multimodale**

Thèse présentée et soutenue à Le Mans Université, le 24 novembre 2021

Unité de recherche : LAUM - UMR CNRS 6613

Thèse N° : 2021LEMA1026

Composition du Jury :

Rapporteurs :	Christophe VERGEZ	Directeur de recherche, LMA (UMR 7031, CNRS)
	Jean-François MERCIER	Directeur de recherche, POEMS (UMR 7231, CNRS-INRIA-ENSTA)
Examineurs :	Thomas HELIE	Directeur de recherche, STMS (UMR 9912, IRCAM-CNRS-UPMC)
	François GAUTIER	Professeur des universités, LAUM (UMR 6613, CNRS)
	Annemie VAN HIRTUM	Directrice de Recherche, LEGI (UMR 5519, CNRS)
Dir. de thèse :	Simon FELIX	Directeur de recherche, LAUM (UMR 6613, CNRS)
Co-dir. de thèse :	Jean-Baptiste DOC	Maître de conférence, LMSSC (CNAM)

A Elise.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord je tiens à remercier Simon Félix et Jean-Baptiste Doc d'avoir assuré l'encadrement de mes travaux de thèse pendant ces trois années. En particulier merci à Simon pour ton écoute, nos conversations constructives ; merci à Jean-Baptiste pour ton enthousiasme et ton suivi régulier. Merci à Jean-François Mercier et Christophe Vergez d'avoir accepté d'être les rapporteurs de mon manuscrit et pour l'intérêt porté à celui-ci. Merci à eux et à Annemie Van Hirtum, Thomas Hélie, François Gautier de me faire l'honneur d'être les membres du jury.

Merci à Mathieu Sécail Géraud, Joël Gilbert et François Gautier pour notre collaboration dans le cadre de l'expérience de Miller, et de m'avoir partagé les données expérimentales qui m'ont guidées lors de cette partie du manuscrit. Merci à Cyril Desjoux de m'avoir aidé à dispenser les cours d'initiation à la programmation. De façon générale j'ai trouvé au LAUM un climat d'entraide accueillant.

Merci par ailleurs à François Gautier et Thomas Hélie pour votre regard encourageant sur mes travaux lors des différents comités de suivi de thèse.

J'adresse également ma reconnaissance à l'Ecole Normale Supérieure de Paris-Saclay, pour m'avoir accordé ce financement de thèse.

Merci à mes amis du Mans. Je suis heureux d'avoir partagé le bureau 81 avec vous, Robin, Théo, Théo, Jean. Merci également à vous, Samuel, Mathieu, Mathieu, Elie, Valentin, Charlotte, Paola, Meryem, Constance. Je ne m'attendais pas à trouver au Mans des collègues aussi intéressants et bienveillants.

Merci à mes amis des quatre coins de la France (voire au delà) qui n'ont jamais cessé de me témoigner leur amitié, malgré la distance et les années. Une pensée pour vous, Romain et Maximilien, dont les appels réguliers ont su me donner le sourire quand j'en avais le plus besoin.

Merci Lorraine, d'avoir cru en moi.

Merci à ma famille, sur laquelle j'ai toujours pu compter.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1 Rayonnement des guides droits	3
1.1 Introduction	3
1.2 Etat de l'art	3
1.2.1 Premières études analytiques et empiriques	3
1.2.2 Méthodes numériques traditionnelles	6
1.2.3 Méthodes semi-analytiques	7
1.3 Modélisation du rayonnement d'un guide droit par la méthode multimodale	9
1.3.1 Propagation au sein d'un guide droit	9
1.3.2 Rayonnement d'un guide dans un guide plus large	12
1.3.3 Propagation au sein d'un guide avec PML	14
1.4 Application à l'expérience de Miller	17
1.4.1 Présentation	17
1.4.2 Modélisation multimodale	20
1.4.3 Résultats	21
1.4.4 Comparaison avec les données expérimentales	23
1.5 Conclusion	25
2 Amélioration de la base modale en trois dimensions	27
2.1 Introduction	28
2.2 Geometrical transformation	30
2.2.1 Coordinate change	30
2.2.2 Modified wave equation and boundary conditions	31
2.3 The multimodal formulation	33
2.3.1 Modal decomposition	33
2.3.2 Discrete wave equation	33
2.3.3 Standard modal basis	34
2.3.4 Improved basis	36

TABLE DES MATIÈRES

2.4	Results	38
2.4.1	Numerical solution and error estimation	38
2.4.2	Axisymmetric waveguide	40
2.4.3	Curved bulged pipe	42
2.4.4	Curved waveguide with constant cross-sectional area	44
2.4.5	Input impedance	46
2.5	Conclusion	48
2.6	Base modale bi-améliorée	49
2.6.1	Principe	49
2.6.2	Construction des modes supplémentaires	49
2.6.3	Conditionnement	52
2.6.4	Résultats	52
2.7	Base transverse polynomiale	55
2.7.1	Contexte	55
2.7.2	Polynômes de Zernike	56
2.7.3	Résultats	58
2.8	Conclusion bis	62
3	Rayonnement des guides de formes complexes	65
3.1	Introduction	65
3.2	Méthode multimodale dans un système de coordonnées curvilignes arbitraire	67
3.2.1	Exemples de systèmes de coordonnées curvilignes	67
3.2.2	Transformation du problème d'onde	69
3.2.3	Formulation multimodale du problème de propagation	73
3.2.4	Raccordement de guides	79
3.2.5	Bilan	82
3.3	Milieu semi-infini entourant le guide rayonnant	83
3.3.1	Contexte	83
3.3.2	Transformation géométrique	84
3.3.3	Problème d'onde	89
3.3.4	Base modale améliorée en guide annulaire	90
3.4	Influence du rayonnement arrière	92
3.4.1	Problématique	92
3.4.2	Validation de la PML de bornes variables	93

3.4.3	Pavillon de trompette	94
3.4.4	Impact de la forme des lèvres sur le rayonnement de la voix	100
3.5	Conclusion	105
4	Optimisation de forme d'un pavillon	107
4.1	Introduction	107
4.2	Paramétrisation de la géométrie d'un pavillon	110
4.2.1	Géométrie étudiée	110
4.2.2	Paramétrisation globale VS locale	111
4.2.3	Courbes de Bézier	112
4.3	Méthode multimodale appliquée à l'optimisation de forme	113
4.3.1	Problème de propagation	113
4.3.2	Ordre du schéma de Magnus	114
4.3.3	Gradient de l'impédance d'entrée	117
4.4	Validation de la méthode par reconstruction d'une perce	120
4.4.1	Contexte et intérêt	120
4.4.2	Obtention de profils de référence	121
4.4.3	Fonction objectif de reconstruction	122
4.4.4	Résultats	123
4.4.5	Bilan et ouverture	127
4.5	Optimisation de la transmission acoustique d'un pavillon	127
4.5.1	Contexte	127
4.5.2	Régularité du profil	128
4.5.3	Condition de rayonnement	131
4.5.4	Performances numériques	134
4.6	Conclusion	135
	Conclusion	137
	Annexes	141
A	Utilisation des modes complexes dans un problème de rayonnement	141
B	Orthogonalité des gradients des modes	144
B.1	Modes Neumann - mode Neumann	144
B.2	Mode supplémentaire - mode Neumann	144
C	Omission d'un indice azimutal lors de l'amélioration de la base	145

TABLE DES MATIÈRES

D	Rôle du mode supplémentaire dans les guides de section constante	146
D.1	Principe	146
D.2	Borne de l'épaisseur de couche limite numérique	147
D.3	Illustration	147
E	Ordre alternatif des fonctions transverses	149
E.1	Bases modales standard et améliorée	149
E.2	Base transverse polynomiale	149
F	Analogie électro-acoustique du problème de raccordement	151
G	Expression du débit dans le système de coordonnées curvilignes	152
H	Comparaison de transformations transverses planes et sphériques	152
I	Transformation géométrique avec courbure, torsion et section quelconque .	154
I.1	Choix d'un paramétrage	154
I.2	Position d'un point	154
I.3	Opérateurs différentiels	156

Bibliographie

159

INTRODUCTION

Un guide d'onde est un système physique, naturel ou construit, dans lequel des ondes se propagent dans une direction privilégiée. Les ondes considérées peuvent être de deux natures : mécaniques ou électromagnétiques. Il est dans cette thèse question des premières, et plus particulièrement des ondes acoustiques.

Le rayonnement acoustique en sortie des guides d'onde peut être recherché ou non. Il est par exemple indésirable dans le cas des réacteurs d'avion, des pots d'échappement, ou des ventilations, pouvant aller jusqu'à représenter un problème de santé publique [123]. En électro-acoustique, on souhaite par contre favoriser le rayonnement [104], aussi est-il fréquent d'ajouter un pavillon en sortie, comme dans les sirènes, mégaphones, ou autres enceintes [132]. En acoustique des instruments à vent, le rayonnement acoustique est également désiré ; mais contrairement aux systèmes électro-acoustiques précédemment évoqués, il est essentiel qu'une partie des ondes soit réfléchiées en sortie du guide, pour que des fréquences de jeu soient définies.

Pour répondre à ces différents enjeux de façon efficace, la forme du guide peut être conçue en s'appuyant sur des modélisations physiques et numériques permettant d'anticiper le comportement du système rayonnant. Les modèles analytiques de rayonnement ne permettent cependant que de traiter que des situations idéalisées [80, 137]. Par ailleurs, les résolutions numériques classiques par éléments finis ne tirent pas profit de l'existence d'une direction de propagation privilégiée et présentent plusieurs complications, notamment liée au maillage de la géométrie [11, 129] (cf. Chap. 1 pour plus de détails sur l'existant).

Depuis presque cinquante ans [3, 125, 118] est ainsi développée une méthode numérique multimodale adaptée aux problèmes de propagation guidée. Cette méthode a déjà été mise en oeuvre avec succès pour modéliser la propagation d'ondes dans des guides de géométries complexes [49, 110] ou le rayonnement de guides simples [47, 72]. Cette thèse vise à permettre d'étendre le champ d'application de la méthode aux rayonnement des

guides de forme complexe, et ainsi de pouvoir fournir des formes de pavillons optimisées dans des conditions de modélisation réalistes.

Les travaux de ce mémoire s'articulent ainsi selon le plan suivant. Dans un premier chapitre nous présentons l'état de l'art sur le rayonnement des guides, puis nous présentons comment modéliser le rayonnement d'un guide droit dans le cadre de la méthode multimodale. Le chapitre 2 comprend en partie un article publié par l'auteur pendant ces travaux de thèse. Il y est question d'étendre à des guides 3D de section et courbure variables une façon d'enrichir la base modale classique, développée dans la littérature pour des guides 2D. On voit notamment que pour un guide 3D, la base modale doit être enrichie séparément pour chaque dépendance orthoradiale du champ. Ensuite, dans un troisième chapitre, nous introduisons les outils permettant de modéliser le rayonnement d'un guide de section variable sans approximation sur la géométrie. Finalement, dans un quatrième chapitre, nous utilisons plusieurs résultats des chapitres précédents pour réaliser des optimisations de forme de pavillon. Notamment l'amélioration de la base modale présentée au chapitre 2 permet de réaliser les optimisations avec un nombre réduit de modes et donc de limiter les temps de calculs. Ces optimisations visent soit à reconstruire la perce d'un instrument à partir de la donnée de son coefficient de réflexion d'entrée, soit à maximiser la transmission, ce qui est typiquement pertinent pour des applications électro-acoustiques comme mentionné plus tôt dans cette introduction.

RAYONNEMENT DES GUIDES DROITS

1.1 Introduction

Le rayonnement d'un guide droit de section circulaire dans un milieu infini ou semi-infini est un problème qui, bien que simple en apparence, est en réalité assez complexe et depuis longtemps étudié, comme nous le présentons en section 1.2. Nous profitons de cette revue bibliographique pour évoquer également les travaux sur le rayonnement des pavillons.

Puis, en section 1.3, nous introduisons les outils nécessaires à la résolution du problème du rayonnement d'un guide cylindrique d'épaisseur finie dans un milieu infini par la méthode multimodale, ces outils servant de bases pour les prochains chapitres. Enfin nous terminons ce chapitre sur une application qui dépasse l'existant en terme de complexité de la situation de rayonnement : l'expérience de Miller. Celle-ci vise à déterminer l'impact des vibrations de paroi dans le rayonnement des instruments à vent, mais nous nous intéressons plus particulièrement aux effets des résonances acoustiques des différents guides.

1.2 Etat de l'art

1.2.1 Premières études analytiques et empiriques

Comme présenté dans l'introduction de ce manuscrit, la caractérisation du rayonnement est un enjeu essentiel dans un grand nombre de systèmes manufacturés et industriels. Pour retracer l'évolution des connaissances sur le sujet, nous prenons ici le parti de nous focaliser dans un premier temps sur une grandeur en particulier : la correction de longueur.

La seule histoire de celle-ci s'avère en effet assez révélatrice de l'avancée des connaissances sur le rayonnement des guides jusqu'au milieu du XX^e siècle.

Avant de préciser ce qu'est la correction de longueur, commençons par considérer un tube droit de longueur ℓ de rayon a ouvert à une de ses extrémités et fermé à l'autre (cf. Fig. 1.1). Également, on considère que le rayon a est petit devant la longueur ℓ de sorte que le rayon a soit petit devant la longueur d'onde associée à la première résonance. La fréquence f de celle-ci est donnée par la formule de Bernoulli [15]

$$f = \frac{4c}{\ell} \quad (1.1)$$

avec c la célérité des ondes sonores (environ 340m.s^{-1} à 15°C). Cette formule repose sur deux hypothèses fortes, que la pression à l'extrémité ouverte du tube est égale à la pression atmosphérique et que le champ dans le tube est uniquement décrit par des ondes planes.

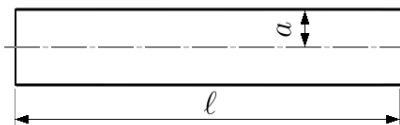


FIGURE 1.1 – Tube de longueur ℓ de rayon a , rayonnant dans l'air environnant par une de ses extrémités.

Dès le XIX^e siècle, facteurs d'instruments et scientifiques cherchent à affiner empiriquement cette formule [27, 33], en introduisant la correction de longueur, qui est la longueur algébrique ℓ_c à rajouter à la longueur du tube dans la formule de Bernoulli (1.1) pour obtenir la fréquence exacte du son rayonné.

Helmholtz [64] ou Strutt (Lord Rayleigh) [115] fournissent ensuite des approximations analytiques de la correction de longueur. Comme le résume Strutt, tous deux parviennent à une approximation similaire $\ell_c \simeq a\pi/4$, bien que leurs approches diffèrent significativement :

It is a remarkable coincidence that Helmholtz also finds the same quantity as an approximate correction to the length of an organ-pipe, although the two methods are entirely different and neither of them rigorous. His consists of an exact solution of the problem for an approximate cylinder, and mine of an approximate solution for a true cylinder; while both indicate on which side the truth must lie.

Dans la première moitié du XX^e siècle, Anderson et Ostenson montrent que la correction de longueur à rajouter à la longueur du tube n'est pas une constante mais une fonction de la fréquence [5]. Quelques décennies plus tard, Levine et Schwinger [80] calculent en s'appuyant sur la méthode de Wiener-Hopf cette évolution fréquentielle de la correction de longueur pour un tube cylindrique d'épaisseur nulle. Lorsque la fréquence tend vers 0, ils obtiennent la limite $\ell_c = 0.6133a$. Nomura et coll. réalisent la même tâche pour un tube avec un baffle infini et obtiennent la limite basse fréquence $\ell_c = 0.8217a$ à l'aide d'intégrales de Weber-Schafheitlin et de polynômes de Jacobi [101] (cf. Fig. 1.2). Norris et Sheng [107] retrouvent les résultats de Nomura et coll. à l'aide d'une méthode de Wiener-Hopf modifiée. A noter que le cas intermédiaire d'un tube d'épaisseur finie est traité par Ando [6], et que des approximations pratiques de ces formules de corrections de longueur sont présentées par Silva et coll [122].

Il est à noter que tous ces travaux analytiques donnant une représentation fréquentielle de la correction de longueur se limitent à des fréquences réduites $ka < 3.8317$, k étant le nombre d'onde relié à la fréquence par $k = 2\pi f/c$. Cette limite en fréquence correspond au seuil à partir duquel des ondes non planes sont propagatives, c'est-à-dire susceptibles de transporter de l'énergie dans le tube.

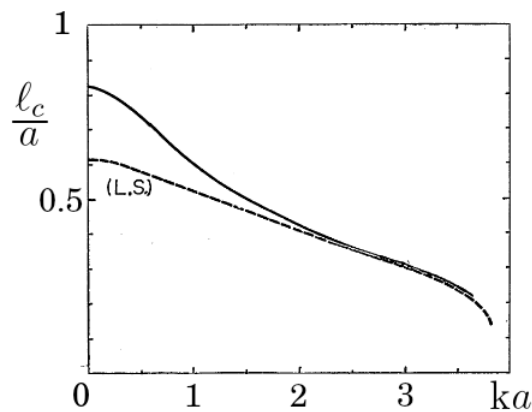


FIGURE 1.2 – Longueur de correction obtenue par Nomura et coll. (en trait plein) pour un tube bafflé, comparativement à celle obtenue par Levine et Schwinger pour un tube d'épaisseur nulle (en pointillé). Source : [101].

Si la correction de longueur permet de calculer plus précisément les fréquences de résonance du guide, elle ne dit cependant rien sur les facteurs de qualité de ces résonances. Pour cette raison, on préfère en acoustique musicale disposer de l'impédance d'entrée de

l'instrument [34, 37, 44], qui est le rapport entre la pression et le débit acoustique à l'entrée du guide. Le calcul de l'impédance d'entrée nécessite lui même la connaissance de l'impédance de rayonnement, c'est-à-dire de l'impédance sur la section de sortie du guide rayonnant. Morse et Ingard expriment en 1968 l'impédance de rayonnement d'une onde plane en sortie d'un guide muni d'un baffle infini [94]. Cinq ans plus tard est publié l'article de Zorumski qui étend ce calcul à l'ensemble des ondes qui constituent le champ de pression dans un guide cylindrique à une fréquence donnée [137]. Les résultats de Zorumski sont ensuite eux-mêmes étendus à des guides de section rectangulaire par Kemp [71], ou sans baffle par Snakowska et coll. [124] à l'aide de la méthode de Wiener-Hopf. On pourra noter la postérité des résultats de Zorumski, largement utilisés depuis leur publication jusqu'à aujourd'hui [38, 70, 77, 110].

A noter qu'une fois connues les impédances au sein du guide, il devient alors possible de déduire de la pression en entrée du guide la pression à sa sortie, et qu'à partir de cette dernière, le champ rayonné peut être calculé à l'aide d'une méthode intégrale [94].

Pour modéliser le rayonnement des guides en hautes fréquences et/ou inclure des éléments de complexité géométrique tels que les variations de la section selon la direction longitudinale, les méthodes analytiques sont insuffisantes et il devient nécessaire de recourir à des méthodes numériques ou semi-analytiques. On opère ici la distinction entre les premières et les secondes, selon qu'elles tirent parti ou non de l'existence d'une direction de propagation privilégiée au sein du guide. Nous présentons les méthodes numériques et semi-analytiques les plus répandues respectivement en sections 1.2.2 et 1.2.3.

1.2.2 Méthodes numériques traditionnelles

La méthode numérique la plus fréquemment utilisée est probablement la méthode des éléments finis, appliquée au rayonnement des guides dès la fin des années 70 [93]. La grande flexibilité de cette méthode la rend encore largement répandue aujourd'hui, pour intégralement modéliser le problème de rayonnement [17, 119] ou en complément d'autres méthodes [40, 73].

Cette méthode présente pourtant un certain nombre d'inconvénients, comme un accès indirect aux impédances et la difficulté de mailler efficacement des géométries complexes de guides, notamment dans des problématiques d'optimisation de forme (cf. Chap. 4).

Une autre méthode numérique dans laquelle seul le bord du domaine est maillé est la méthode des éléments de frontière [74, 121]. Dalmont et coll. comparent cette méthode à des données expérimentales [35] et observent une bonne concordance des résultats.

1.2.3 Méthodes semi-analytiques

Notons qu'historiquement, les méthodes évoquées précédemment en section 1.2.2 n'ont pas été conçues pour résoudre spécifiquement des problèmes de propagation guidée. Cela explique qu'elles ne tirent aucunement parti de l'existence d'une direction de propagation privilégiée, contrairement aux méthodes semi-analytiques présentées ci-après.

Parmi celles-ci on peut compter la méthode de la matrice de transfert, qui consiste à diviser un guide de section variable en tronçons élémentaires (cylindres, cônes) [13, 26], au sein desquels le comportement de l'onde plane est analytiquement connu. Le raccordement de ces tronçons combiné à une approximation de l'impédance de rayonnement permet alors d'approcher le rayonnement du guide. Un inconvénient majeur de cette méthode est son incapacité à prendre en compte les ondes dites évanescentes, qui ne contribuent pas au transport global de l'énergie mais qui sont nécessaires à la bonne description du champ près des zones présentant de brusques hétérogénéités (fortes variations de sections, changement de milieu). Avec la méthode de la matrice de transfert, la description du champ se limite la plupart du temps à celle de l'onde plane.

Tout en conservant un modèle 1D et un découpage du guide en tronçons, Hélie et coll. [62] améliorent la précision de cette méthode en développant une équation des pavillons basée sur un redressement du plan des isobares et en terminant le guide par une condition de rayonnement imitant une portion de sphère pulsante [63]. Chacun des différents tronçons a cette fois-ci un profil qui est une combinaison d'une exponentielle croissante et d'une décroissante.

La méthode multimodale développée dans ce manuscrit est quant à elle capable d'inclure les modes évanescents. Egalement, elle est à l'issue du chapitre 3 en mesure de modéliser la condition de rayonnement en sortie du guide sans approximation sur la forme du front d'onde et sans hypothèse restrictive sur la géométrie du guide d'onde.

A l'origine, la méthode multimodale consiste à découper le guide en tronçons cylindriques que l'on raccorde entre eux en considérant les continuités de la pression et du

débit aux interfaces. Un ensemble de modes est considéré dans chaque tronçon, qui inclue au minimum l'ensemble des modes propagatifs, voire un certain nombre de modes évanescents, selon la précision souhaitée.

Les premiers développements de la méthode remontent au milieu du XX^e siècle [125] et gagnent en popularité dans les années 70, avec les travaux d'Alfredson [3] et de Roure [118]. Pagneux et coll. [110] opèrent une rupture notable dans les années 90 en prenant en compte les variations continues de la section transverse du guide dans la méthode. On revient tout au long de ce manuscrit sur d'autres types d'hétérogénéités géométriques du guide pouvant être considérés dans le cadre de la méthode, comme la courbure [49, 51], ou la torsion [88].

Concernant les différents phénomènes physiques modélisés par la méthode, divers travaux permettent de prendre en compte des couches limites aux parois [25], des écoulements [10, 23, 78] ou des non-linéarités dues à de fortes amplitudes [88]. A noter également que la méthode permet de décrire des impédances de paroi [10, 16, 23, 48, 51, 59].

Dans le cas le plus simple d'un guide aux parois rigides et rempli d'un fluide linéaire et non visqueux, qui est le cas traité dans ce manuscrit, Pagneux et Maurel [112] soulignent que la résolution multimodale du problème de diffusion respecte la conservation de l'énergie et les propriétés fondamentales de réciprocity et d'invariance par renversement temporel.

Revenons au rayonnement des guides. Toujours dans le cadre de la méthode multimodale, les travaux de Roure [118] puis de Pagneux et coll. [110] permettent de modéliser le rayonnement d'un guide axisymétrique de rayon variable, à condition que ce guide soit terminé par un baffle infini. Ils ont pour cela recours à l'impédance de rayonnement de Zorumski [137]. Par ailleurs, Kemp et coll. [72] formulent une condition de rayonnement qui simule le rayonnement d'un guide à l'intérieur d'un autre guide, largement plus grand. Cette façon de procéder ne permet cependant pas d'empêcher totalement les réflexions dans la direction radiale, contrairement aux PMLs (Perfectly Matching Layers) utilisées par Félix et coll. [47] et présentées dans la prochaine section 1.3. A l'aide de ces PMLs et en prenant en compte les pertes aux parois, Doc et coll. parviennent à retrouver numériquement des mesures impédances d'entrée de pavillons de façon précise [36].

1.3 Modélisation du rayonnement d'un guide droit par la méthode multimodale

1.3.1 Propagation au sein d'un guide droit

Nous présentons dans cette section 1.3 la formulation multimodale de Félix et coll. [47] permettant de modéliser le rayonnement d'un guide droit d'épaisseur finie.

Avant de commencer, on précise que dans ce manuscrit, un guide est qualifié de tubulaire si ses sections transverses sont circulaires, et d'annulaire si ses sections transverses sont délimitées par deux cercles concentriques. Ces définitions s'appliquent aussi bien aux guides de sections constantes de ce chapitre qu'aux guides de sections variables des chapitres suivants.

Considérons un repère cylindrique $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ au sein duquel un point est repéré par les coordonnées (x, R, θ) . Soit le guide \mathcal{D} de bord $\partial\mathcal{D}$ de section transverse constante et axisymétrique, centré sur l'axe (O, x) (cf. Fig. 1.3).

Pour un guide \mathcal{D} tubulaire on note a le rayon du guide. Pour un guide \mathcal{D} annulaire on note R_0 et R_1 les rayons intérieurs et extérieurs du guide et $a = R_1 - R_0$ la largeur radiale.

En négligeant les sources de dissipation et de non-linéarité au sein du guide, on obtient que la composante du champ de la pression acoustique p de dépendance temporelle $e^{-j2\pi ft}$ satisfait au sein du guide l'équation de Helmholtz et la condition au bord

$$\left(\Delta + k^2\right) p = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}, \quad (1.2a)$$

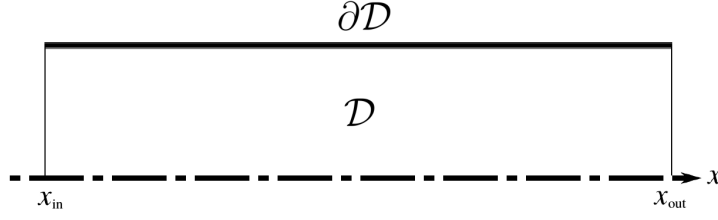
$$\mathbf{e}_r \cdot \nabla p = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}, \quad (1.2b)$$

avec $k = (2\pi f)/c$ le nombre d'onde.

Dans la méthode multimodale, la première étape consiste classiquement à discrétiser le champ de pression sur les solutions φ_n du problème transverse

$$\left(\Delta_\perp + \gamma_n^2\right) \varphi_n = 0 \quad \text{dans } \mathcal{A}, \quad (1.3a)$$

$$\partial_r \varphi_n = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{A}, \quad (1.3b)$$


 FIGURE 1.3 – Guide tubulaire \mathcal{D} de bord $\partial\mathcal{D}$.

où \mathcal{A} désigne la section transverse du guide et $\partial\mathcal{A}$ son bord. γ_n est une valeur propre telle que le problème transverse (1.3) admette une solution, Δ_\perp et ∇_\perp sont les opérateurs laplacien et gradient en coordonnées polaires. Comme présenté dans les prochains chapitres 2 et 3, d'autres bases de fonctions peuvent également être utilisés pour discrétiser le champ de pression.

L'expression discrétisée de la pression est

$$p(x, R, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n(x) \varphi_n(R, \theta), \quad (1.4)$$

avec $p_n(x)$ les amplitudes modales. Pour un guide tubulaire, les modes transverses s'écrivent

$$\varphi_n(R, \theta) = \Lambda_n J_\mu \left(\frac{\gamma_n R}{a} \right) \cos(\mu\theta + \psi_n). \quad (1.5)$$

ψ_n est la phase orthoradiale du mode d'indice n . Le nombre entier μ traduit sa dépendance azimutale (les modes sont ici ordonnés de façon arbitraire). γ_n est un zéro de la dérivée première de la fonction de Bessel J_μ de première espèce et d'ordre μ . La norme Λ_n garantit que $\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle_{\mathcal{A}} = 1$ par rapport au produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{A}} \bar{f} g \, d\mathcal{A}. \quad (1.6)$$

Pour un guide annulaire, les modes sont de la forme

$$\varphi_n(R, \theta) = \Lambda_n \left(J_\mu \left(\frac{\gamma_n R}{a} \right) - \frac{J'_\mu \left(\frac{\gamma_n R_1}{a} \right)}{Y'_\mu \left(\frac{\gamma_n R_1}{a} \right)} Y_\mu \left(\frac{\gamma_n R}{a} \right) \right) \cos(\mu\theta), \quad (1.7)$$

avec Y_μ la fonction de Bessel de seconde espèce d'ordre μ et les nombres γ_n tels que

$$J'_\mu \left(\frac{\gamma_n R_0}{a} \right) Y'_\mu \left(\frac{\gamma_n R_1}{a} \right) - J'_\mu \left(\frac{\gamma_n R_1}{a} \right) Y'_\mu \left(\frac{\gamma_n R_0}{a} \right) = 0. \quad (1.8)$$

Dans les applications présentées dans ce chapitre, le champ est axisymétrique, $\mu = 0$, et on ordonne les modes par valeur croissante de γ_n . Il est cependant bien possible de prendre en compte d'autres indices azimutaux, voire d'autres arrangements des modes.

En substituant à la pression p son expression discrétisée dans l'équation de Helmholtz, on se ramène naturellement à l'équation de propagation modale $p_n'' = -k_n^2 p_n$ où $k_n = (k^2 - (\gamma_n/a)^2)^{1/2}$. Celle-ci s'exprime également de façon matricielle :

$$\mathbf{p}'' = -\mathbf{K}^2 \mathbf{p}, \quad (1.9)$$

avec le vecteur des amplitudes modales $\mathbf{p} = (\dots, p_n, \dots)^\top$ et la matrice diagonale \mathbf{K} telle que $K_{nm} = k_n \delta_{mn}$.

La reformulation (1.9) du problème initial permet d'écrire la décomposition du champ en ondes aller-retour

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^+ + \mathbf{p}^- = e^{j\mathbf{K}(x-x_{in})} \mathbf{p}^+(x_{in}) + e^{j\mathbf{K}(x_{out}-x)} \mathbf{p}^-(x_{out}). \quad (1.10)$$

Les amplitudes $\mathbf{p}^+(x_{in})$ et $\mathbf{p}^-(x_{out})$ des ondes aller et retour sont obtenues à l'aide des conditions aux extrémités. Pagneux et coll. [110] montre que le problème d'onde est bien posé lorsqu'à l'une des deux extrémités est imposée une condition de réflexion, et à l'autre une condition de pression (ou de vitesse). La première étape dans la résolution est la rétropropagation de la condition de réflexion à l'ensemble du guide. Alors seulement peut être propagée la pression (ou la vitesse). Cette seconde étape de propagation de la pression d'entrée à l'ensemble du guide peut d'ailleurs être omise lorsque le seul objectif de la résolution est l'obtention de grandeurs de diffusion (coefficients de réflexion, de transmission, impédances).

Considérons par exemple une pression imposée $\mathbf{p}(x_{in}) = \mathbf{p}_{in}$ à l'entrée du guide, et une matrice de réflexion \mathbf{R}_{out} donnée en sortie du guide telle que $\mathbf{p}^-(x_{out}) = \mathbf{R}_{out} \mathbf{p}^+(x_{out})$, alors, en tout point la matrice réflexion \mathbf{R} telle que $\mathbf{p}^- = \mathbf{R} \mathbf{p}^+$ s'écrit

$$\mathbf{R} = e^{j\mathbf{K}(x_{out}-x)} \mathbf{R}_{out} e^{j\mathbf{K}(x_{out}-x)}, \quad (1.11)$$

à partir de quoi on peut déduire les amplitudes des ondes aller-retour d'entrée et de sortie

$$\mathbf{p}^+(x_{in}) = \left(\mathbf{I} + e^{j\mathbf{K} \ell} \mathbf{R}_{out} e^{j\mathbf{K} \ell} \right)^{-1} \mathbf{p}_{in} \quad \text{et} \quad \mathbf{p}^-(x_{out}) = \mathbf{R}_{out} e^{j\mathbf{K} \ell} \mathbf{p}^+(x_{in}), \quad (1.12)$$

qui nous permette à l'aide de l'équation (1.9) d'exprimer le champ en tout point du guide. Dans les prochaines sections nous voyons comment décomposer la géométrie d'un problème de rayonnement en plusieurs guides au sein desquels la méthode ici présentée peut être appliquée.

1.3.2 Rayonnement d'un guide dans un guide plus large

Ici nous décrivons le rayonnement d'un guide A tubulaire semi-infini à l'intérieur d'un guide infini co-axial. On distingue dans ce dernier la partie tubulaire B en aval de l'extrémité ouverte et la partie annulaire C en amont (cf. Fig. 1.4). Dans la prochaine section 1.3.3, en ajoutant des PMLs sur les parois des guides B et C , nous sommes ainsi en mesure de modéliser le rayonnement d'un guide dans un espace entièrement ouvert.

On indice de A , B ou C , les grandeurs relatives à l'un des trois guides et écrites à l'interface d'abscisse $x = 0$. Dans notre problème de rayonnement dans un milieu borné, les guides B et C semi-infinis sont caractérisés par une condition de réflexion nulle.

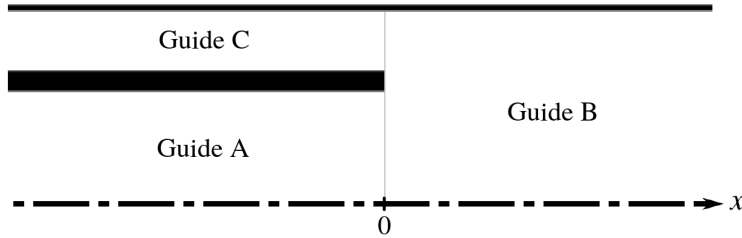


FIGURE 1.4 – Configuration du problème de raccordement modal étudié. Un guide A tubulaire d'épaisseur non nulle rayonne dans deux guides B et C dans lesquels la matrice de réflexion est uniformément nulle.

Concernant le guide A , il nous faut tout d'abord la condition de réflexion à sa sortie. On l'obtient à partir des équations de continuité

$$\forall \mathbf{M} \in \mathcal{A}_A, \quad p_A(\mathbf{M}) = p_B(\mathbf{M}), \quad (1.13)$$

$$\forall \mathbf{M} \in \mathcal{A}_C, \quad p_C(\mathbf{M}) = p_B(\mathbf{M}). \quad (1.14)$$

et

$$\forall \mathbf{M} \in \mathcal{A}_B, \quad \begin{cases} \partial_x p_B(\mathbf{M}) = \partial_x p_A(\mathbf{M}) & \text{si } \mathbf{M} \in \mathcal{A}_A \\ \partial_x p_B(\mathbf{M}) = \partial_x p_C(\mathbf{M}) & \text{si } \mathbf{M} \in \mathcal{A}_C \\ \partial_x p_B(\mathbf{M}) = 0 & \text{si } \mathbf{M} \in \mathcal{A}_B \setminus (\mathcal{A}_A \cup \mathcal{A}_C) \end{cases} \quad (1.15)$$

que l'on projette respectivement sur les bases modales des guides A , C et B afin de se ramener aux expressions modales

$$\mathbf{p}_A = \mathbf{A}_{AB} \mathbf{p}_B, \quad (1.16a)$$

$$\mathbf{p}_C = \mathbf{A}_{CB} \mathbf{p}_B, \quad (1.16b)$$

$$\mathbf{p}'_B = \mathbf{A}_{AB}^\top \mathbf{p}'_A + \mathbf{A}_{CB}^\top \mathbf{p}'_C, \quad (1.16c)$$

où $\mathbf{A}_{AB,mn} = \langle \varphi_{A,n}, \varphi_{B,m} \rangle_{\mathcal{A}_A}$ et $\mathbf{A}_{CB,mn} = \langle \varphi_{C,n}, \varphi_{B,m} \rangle_{\mathcal{A}_C}$ avec $\varphi_{I,n}$ les modes du guide $I = A, B$ ou C . Pagneux et coll. montrent que le problème de raccordement modal (1.16) satisfait la conservation du flux d'énergie de part et d'autre de la discontinuité.

En faisant intervenir la décomposition (1.10) en ondes aller-retour dans les équations (1.16a-1.16c), on se ramène alors à la condition de réflexion décrivant le rayonnement en sortie du guide A

$$\mathbf{R}_A = (j\mathbf{K}_A + \mathbf{Y}_A)^{-1} (j\mathbf{K}_A - \mathbf{Y}_A) \quad (1.17)$$

avec $\mathbf{Y}_A = \left(\mathbf{A}_{AB} (j\mathbf{K}_B - \mathbf{A}_{CB}^\top j\mathbf{K}_C \mathbf{A}_{CB})^{-1} \mathbf{A}_{AB}^\top \right)^{-1}$ l'admittance de rayonnement et \mathbf{K}_I la matrice \mathbf{K} telle que définie en équation (1.9) relative au guide $I = A, B$ ou C . Le problème de diffusion peut finalement être résolu dans le guide A comme présenté en section 1.3.1.

De la pression en entrée du guide A peut être déduite la section en toute section du guide A (cf. Sec. 1.3.1). Si l'on souhaite également connaître la pression dans les guides B et C , on calcule tout d'abord la pression modale en entrée du guide B à partir de la pression de sortie \mathbf{p}_A ,

$$\mathbf{p}_B = (j\mathbf{K}_B - \mathbf{A}_{CB}^\top j\mathbf{K}_C \mathbf{A}_{CB})^{-1} \mathbf{A}_{AB}^\top \mathbf{Y}_A \mathbf{p}_A. \quad (1.18)$$

Puis, on déduit la pression modale en entrée du guide C de celle en entrée du guide B , directement à l'aide de l'équation (1.16b), ce qui nous donne toutes les informations manquantes pour résoudre le problème de propagation dans les guides B et C .

Dans la suite, on souhaite que les guides B et C simulent des espaces qui ne soient plus seulement infinis dans la direction axiale, mais également radiale afin de recréer une condition de rayonnement réaliste pour notre guide. Prendre des guides B et C de rayons extérieurs très larges ne saurait convenir d'un point de vue numérique, car alors l'ensemble des valeurs propres des modes se rapprocherait asymptotiquement d'un ensemble continu [20] et un grand nombre de modes serait nécessaires pour discrétiser convenablement le champ de pression. Pour éviter cela, on a recours aux PMLs évoquées en section 1.2.3. Leur utilisation est développée en prochaine section 1.3.3.

1.3.3 Propagation au sein d'un guide avec PML

Les PMLs ont d'abord été conçues par Bérenger [14] dans le cadre de la modélisation des ondes électro-magnétiques par la méthode des éléments finis en coordonnées cartésiennes. D'autres études ont ensuite été réalisées afin d'étendre leurs applications à différents systèmes de coordonnées [29, 31] et méthodes numériques [30]. En particulier, les PMLs ont récemment été intégrées à la méthode multimodale [47, 81, 114].

Le principe des PMLs consiste à introduire une composante complexe au rayon dans une couche tapissant la paroi extérieure du guide, afin d'empêcher la réflexion des ondes aux parois. On souhaite l'appliquer à chacun des deux guides B ou C de notre situation de raccordement de la section 1.3.2 afin de modéliser un milieu extérieur radialement infini.

On considère pour cela un des deux guides en particulier et on note \hat{R} le rayon qui est complexe dans la PML, et égal au rayon R hors de la PML. On note R_c la borne radiale inférieure de la PML. Un choix possible pour la fonction $R \rightarrow \hat{R}$ que l'on retient ici est

$$\begin{cases} \forall R \in [R_0, R_c[, & \hat{R}(R) = R \\ \forall R \in [R_c, R_1], & \hat{R}(R) = R + (\hat{\alpha} - 1) (R_1 - R_c) \left(\frac{R - R_c}{R_1 - R_c} \right)^{n_e} \end{cases} \quad (1.19)$$

avec $\hat{\alpha}$ une constante complexe caractéristique de l'amortissement. On choisit ici un exposant $n_e = 1$.

On note $\hat{\mathcal{D}} = \{(x, \hat{R}(R), \theta), (x, R, \theta) \in \mathcal{D}\}$ le domaine complexe résultant de la transformation complexe du domaine réel \mathcal{D} , et $\partial\hat{\mathcal{D}}$ son bord. De même on note $\hat{\mathcal{A}}$ la section transverse complexe de bord $\partial\hat{\mathcal{A}}$.

Avec la PML, l'expression du problème d'onde (1.2) demeure similaire, à cela près que l'on utilise cette fois les opérateurs différentiels laplacien et gradient non pas dans le système de coordonnées cylindriques (x, R, θ) , mais dans le système de coordonnées cylindriques (x, \hat{R}, θ) . On les nomme respectivement $\hat{\Delta}$ et $\hat{\nabla}$. Ainsi

$$(\hat{\Delta} + k^2)p = 0 \quad \text{dans } \hat{\mathcal{D}}, \quad (1.20a)$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \hat{\nabla}p = 0 \quad \text{sur } \partial\hat{\mathcal{D}}, \quad (1.20b)$$

Sont alors complexes les modes $\{\hat{\varphi}_n^{\text{ref}}\}$ du problème transverse associé

$$(\hat{\Delta}_\perp + \hat{\gamma}_n^2)\hat{\varphi}_n^{\text{ref}} = 0 \quad \text{dans } \hat{\mathcal{A}}, \quad (1.21a)$$

$$\partial_R \hat{\varphi}_n^{\text{ref}} = 0 \quad \text{sur } \partial\hat{\mathcal{A}}, \quad (1.21b)$$

avec $\hat{\Delta}_\perp$ et $\hat{\nabla}_\perp$ les opérateurs laplacien et gradient dans le système de coordonnées polaires (\hat{R}, θ) , et $\hat{\gamma}_n$ les valeurs propres complexes pour lesquelles le problème transverse (1.21) admet une solution.

De prime abord, il peut sembler pertinent d'utiliser les modes $\{\hat{\varphi}_n^{\text{ref}}\}$ du problème transverse (1.21) pour discrétiser le champ. Or on montre en annexe A que leur utilisation soulève des problèmes d'ordre numérique. Une façon de contourner ces derniers est de construire une base alternative de fonctions transverses découplées, qui soient des combinaisons linéaires de fonctions bien conditionnées. Pour ces dernières, on adopte ici les modes qui correspondraient au guide si celui-ci n'avait pas de PML, c'est-à-dire les solutions φ_n du problème transverse réel (1.3).

Pour construire une telle base, la première étape consiste à écrire le problème de propagation couplé satisfait au sein du guide avec PML par les modes réels φ_n . On l'obtient en projetant sur ces derniers l'équation (1.20), dans laquelle on substitue à la pression p son expression discrétisée (1.4). Le produit scalaire utilisé pour la projection est

$$\langle f, g \rangle_{\hat{\mathcal{A}}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\hat{\mathcal{A}}} \bar{f}g \, d\hat{\mathcal{A}}. \quad (1.22)$$

Le problème de propagation couplé est

$$\mathbf{p}'' = (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} - k^2\mathbf{l})\mathbf{p} \quad (1.23)$$

avec $\mathbf{M}_{nm} = \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle_{\hat{\mathcal{A}}}$ et $\mathbf{N}_{nm} = \langle \hat{\nabla}_\perp \varphi_n, \hat{\nabla}_\perp \varphi_m \rangle_{\hat{\mathcal{A}}}$.

Alors, en considérant une matrice de passage \mathbf{P}_K telle que $\mathbf{P}_K^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{P}_K$ soit diagonale, on remarque à partir de l'équation (1.23) que les composantes du vecteur $(\mathbf{P}_K^{-1}\mathbf{p})$ satisfont une équation de propagation découplée semblable à l'équation (1.9). Les fonctions transverses $\{\hat{\varphi}_n\}$ telles que

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_0 \\ \cdots \\ \hat{\varphi}_n \\ \cdots \end{pmatrix} = \mathbf{P}_K^T \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \cdots \\ \varphi_n \\ \cdots \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

sont ainsi les modes du problème discrétisé (1.23) et présentent ainsi un comportement découplé. Ils permettent de résoudre le problème de propagation (1.20) de la même manière que pour un guide classique (cf. Sec. 1.3.1). Contrairement aux modes complexes $\{\hat{\varphi}_n^{\text{ref}}\}$ du problème transverse continu (1.21), ils ne soulèvent pas de problèmes numériques lors du raccordement. Une fois normalisées, les deux bases de modes complexes $\{\hat{\varphi}_n\}$ et $\{\hat{\varphi}_n^{\text{ref}}\}$ satisfont la même relation de biorthogonalité [75]

$$\langle \bar{\hat{\varphi}}_n, \hat{\varphi}_m \rangle = \delta_{nm}. \quad (1.25)$$

Grace à la base des modes $\hat{\varphi}_n$ du problème discrétisé, Félix et coll. [47] retrouvent par la méthode multimodale un certain nombre de résultats de la littérature, comme l'impédance de rayonnement proposée par Zorumski [137], la correction de longueur proposée par Levine et Schwinger [80] ou le coefficient de réflexion d'Ando [6] (cf. Fig. 1.5).

A ce jour, les paramètres de la PML doivent être choisis de façon empirique. Un exemple de guide droit excité par un piston plan et rayonnant dans un milieu infini est présenté en figure 1.6 pour trois valeurs d'amortissement $\hat{\alpha}$ respectivement satisfaisante, trop petite ou trop grande. Le premier cas est validé par Félix et coll. et permet un amortissement de l'onde dans la direction radiale qui soit suffisamment progressif pour être efficacement décrit par notre base modale, et suffisamment fort pour empêcher toute réflexion. Dans le deuxième cas, l'amortissement n'est pas assez fort et le champ peut se réfléchir sur les parois extérieur du guide avec PML. Dans le troisième cas, l'amortissement est trop grand, si bien qu'il entraîne à l'entrée de la PML des variations de champ trop rapides, pour être décrites fidèlement par notre ensemble de modes, ce qui entraîne une déformation du champ.

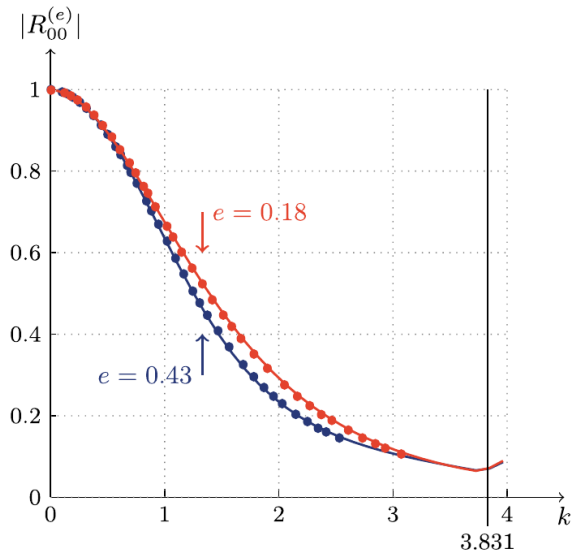


FIGURE 1.5 – Module du coefficient de réflexion du mode plan en sortie du tube rayonnant A pour différentes épaisseurs de paroi, obtenu par la méthode multimodale en trait continu par Félix et coll. ou par Ando [6] en cercles pleins. Source : [47].

Dans la prochaine section 1.4, nous modélisons l'expérience de Miller qui vise à déterminer le rôle des vibrations de paroi. Nous nous focalisons uniquement sur le problème de rayonnement, qui est déjà en soi plus complexe que ce que l'on trouve dans la littérature sur la méthode multimodale.

1.4 Application à l'expérience de Miller

1.4.1 Présentation

Dayton Clarence Miller (1866-1941), un des membres fondateurs de l'Acoustical Society of America, rapporte dans une publication [91] les propos du flûtiste et facteur d'instrument Theobald Boehm, affirmant que la dureté du matériau d'un tube influence fortement son timbre. Miller ajoute que Victor-Charles Mahillon, facteur d'instrument et conservateur du Musée instrumental du Conservatoire Royal de Musique de Bruxelles, réagit vivement à cette affirmation : selon lui, seule les vibrations de la colonne d'air contribuent au son émis. Face aux divergences sur le sujet, Miller décide au début du XX^e siècle de réaliser une expérience visant à mieux cerner le rôle des vibrations de paroi dans le son rayonné par les instrument à vent.

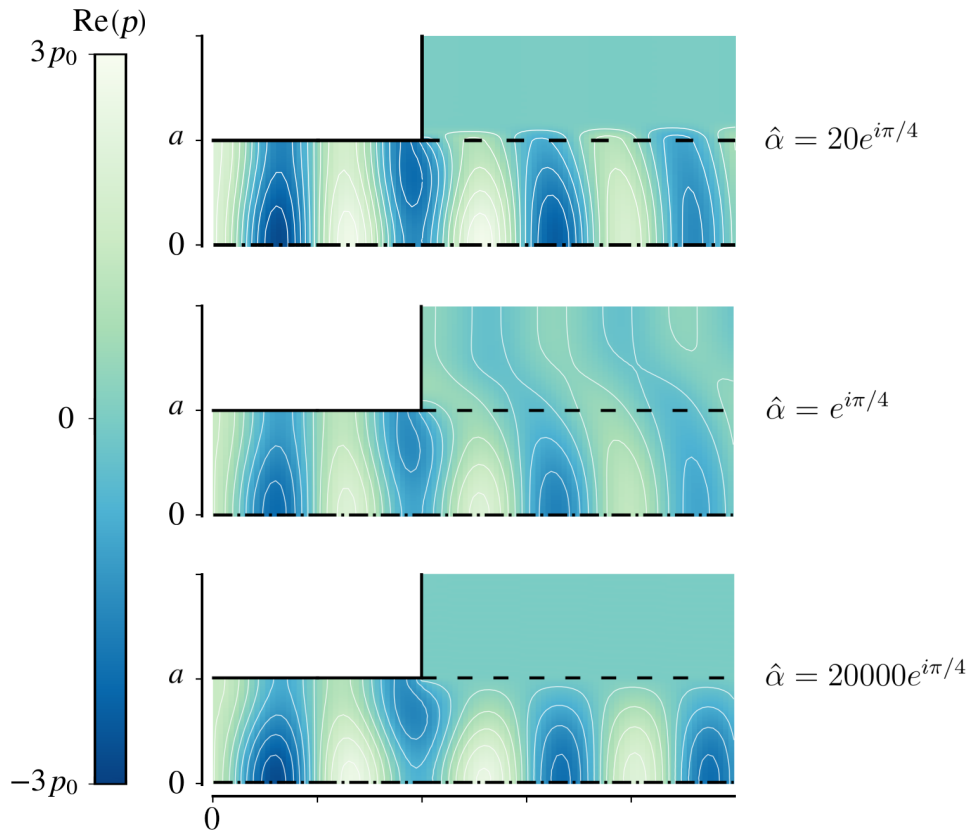


FIGURE 1.6 – Partie réelle du champ de pression pour un guide de rayon a excité par une pression plane rayonnant dans un guide deux fois plus large avec une PML d'épaisseur a . La fréquence est de $k = 5/a$. Trois champs sont représentés, correspondant chacun à une des valeurs d'amortissements $\hat{\alpha} = 20e^{i\pi/4}$, $e^{i\pi/4}$ ou $20000e^{i\pi/4}$. La première situation est validée par Félix et coll. [47]. Dans les deux autres, le coefficient de la PML est respectivement trop faible et trop élevé.

Le protocole peut se résumer ainsi : un tuyaux d'orgue traversant verticalement un réservoir rempli d'eau est excité à son extrémité basse, et rayonne par son extrémité supérieure (cf. Fig. 1.7). Le tuyau est excité en continu par une soufflerie, alors que l'on vide le bassin progressivement et donc qu'une partie décroissante du tuyau est en contact avec l'eau. Miller remarque qu'à certains niveaux d'eau, des accidents audibles surviennent dans le son rayonné. Il conclue alors que l'effet du matériau sur le son émis par l'instrument est bien réel, sans pouvoir donner davantage de précision sur l'impact concret des vibrations de paroi en situation de jeu.

Près d'un siècle plus tard, Nief et coll. [97] écrivent ainsi que le rôle des vibrations de

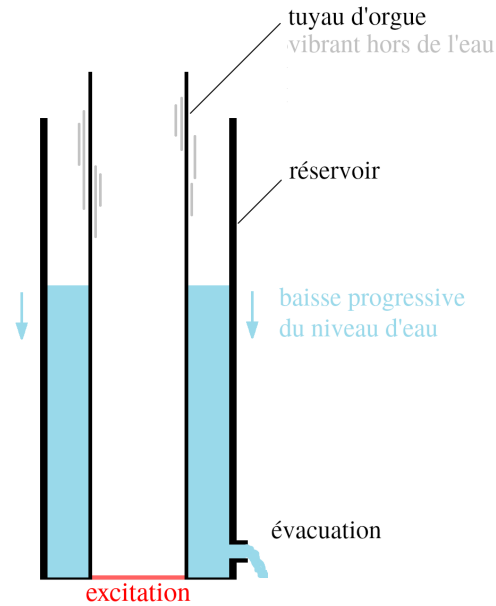


FIGURE 1.7 – Schéma du montage expérimental de Miller.

paroi sur le comportement des instruments à vent prête encore à débat, notamment en raison de la difficulté à quantifier les interactions fluide-structure. Si des zones d'ombre persistent, un certain nombre d'études depuis les travaux de Miller ont malgré tout permis d'affiner les connaissances sur le sujet. Nederveen et Dalmont [96] montrent plus précisément que l'effet des vibrations de paroi d'un tuyau d'orgue est audible quand une fréquence de résonance acoustique coïncide avec une fréquence de résonance mécanique du tuyau. Concernant les instruments munis d'un pavillon, Kausel et coll. [69] soulignent que les vibrations axiales du pavillon en particulier ont un impact de l'ordre du pourcent sur la hauteur des pics de l'impédance d'entrée.

Ces récents travaux allant dans le sens des conclusions de Miller, l'histoire aurait pu s'arrêter là. Mais en parallèle, Selamet et coll. [121] montrent qu'une cavité annulaire autour d'un tube rayonnant génère des pics dans la représentation fréquentielle de la correction de longueur et du coefficient de réflexion. Le doute est alors permis : les accidents observés par Miller pourraient ils être dûs aux résonances acoustiques du réservoir encerclant le tuyaux d'orgue ? Avait-il raison de tirer ses conclusions de son expérience ?

Gautier et coll. [56] ayant reproduit l'expérience au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Mans (CNRS UMR 6613), cette question peut être élucidée en réalisant l'expérience de Miller avec ou sans baffle autour de la cavité. Avant cela, on décide de modéliser le problème physique sans vibration avec la méthode multimodale. Une telle étude vise à

anticiper les résultats expérimentaux.

1.4.2 Modélisation multimodale

L'application de la méthode multimodale passe d'abord par un découpage de la géométrie de l'expérience en guides d'onde (cf. Fig. 1.8). La géométrie est semblable à celle d'un guide tubulaire A rayonnant dans deux milieux longitudinalement semi-infinis tubulaire B et annulaire C munis de PMLs (cf. Sec. 1.3), à cela près que le guide C débouche ici dans deux guides D et E , représentant respectivement le milieu annulaire extérieur longitudinalement semi-infini avec PML et la partie évidée du réservoir, que l'on nomme également cavité dans la suite.

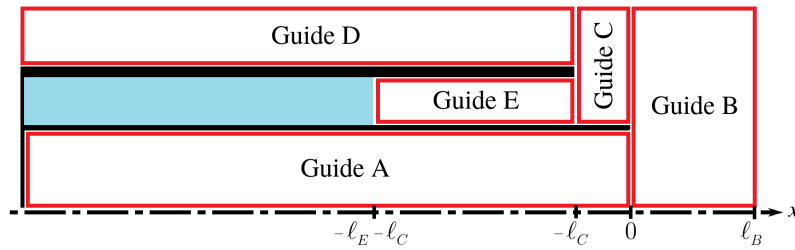


FIGURE 1.8 – Découpage en guides d'onde de la géométrie (tournée dans le sens horaire de 90°). Le problème étant axisymétrique, seule la moitié de la section est représentée.

Les longueurs ℓ_I des guides $I = A, B, C, D, E$ ainsi que les rayons intérieurs $R_{I,0}$ et extérieurs $R_{I,1}$ sont donnés en table 1.4.2. Ces paramètres géométriques correspondent à l'expérience reproduite au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Mans (CNRS UMR 6613), à cela près que le guide rayonnant et le contenant y étant de section rectangulaire, nous prenons pour nos guides des rayons qui préservent les aires des sections transverses. Par ailleurs les guides B, C et D sont munis d'une PML d'épaisseur 36mm, et on considère pour tracer des champs de pression que le tuyau d'orgue A est excité à son entrée par un piston plan.

Aux extrémités non raccordées avec le guide C , les guides D et E sont respectivement terminés par des conditions de réflexion nulle et de réflexion totale (la surface de l'eau est considérée comme une paroi rigide). En indiquant C, D ou E , les grandeurs relatives à l'un des trois guides et écrites à l'interface d'abscisse $x = -\ell_C$, les vecteurs d'amplitudes modales \mathbf{p}_D et \mathbf{p}_E en entrée des guides D et E sont obtenues directement à partir du

I	A	B	C	D	E
ℓ_I	900	180	61,2	838,8	<i>var.</i>
$R_{I,0}$	0	0	41,4	72	41,4
$R_{I,1}$	36	82,8	82,8	82,8	61,2

TABLE 1.1 – Longueur ℓ_I et bornes $R_{I,0}$ et $R_{I,1}$ du rayon en millimètres. La longueur du guide E est variable car dépendante du niveau d'eau dans le réservoir.

vecteur d'amplitude modale \mathbf{p}_C en sortie du guide C , à l'aide des relations

$$\mathbf{p}_D = \mathbf{A}_{DC} \mathbf{p}_C, \quad (1.26)$$

$$\mathbf{p}_E = \mathbf{A}_{EC} \mathbf{p}_C, \quad (1.27)$$

avec $\mathbf{A}_{DC, nm} = \langle \varphi_{D,n}, \varphi_{C,m} \rangle_{A_D}$ et $\mathbf{A}_{EC, nm} = \langle \varphi_{E,n}, \varphi_{C,m} \rangle_{A_E}$. On en déduit que la condition de réflexion en sortie du guide C devient

$$\mathbf{R}_C = (j\mathbf{K}_C + \mathbf{Y}_{DE})^{-1} (j\mathbf{K}_C - \mathbf{Y}_{DE}), \quad (1.28)$$

où $\mathbf{Y}_{DE} = \mathbf{A}_{DC}(j\mathbf{K}_D)\mathbf{A}_{DC}^\top + \mathbf{A}_{EC}(j\mathbf{K}_E)(\mathbf{I} - \mathbf{R}_E)(\mathbf{I} + \mathbf{R}_E)^{-1}\mathbf{A}_{EC}^\top$ et \mathbf{K}_C est la matrice contenant les valeurs propres du problème discrétisé complexe propre au guide C (cf. Sec. 1.3.3).

1.4.3 Résultats

Pour répondre à notre problématique et déterminer si les résonances de la cavité E impactent le rayonnement acoustique du tube central A , on considère tout d'abord le réservoir E plein d'eau ou de façon équivalente, couvert d'un baffle. Cette situation nous sert dans la suite de référence et correspond dans notre modélisation à une profondeur de cavité nulle, $\ell_E = 0$. On trace alors l'évolution fréquentielle de la correction de longueur $\ell_{A,c}$ du guide A . Cette dernière est obtenue à partir de la phase du mode plan en sortie du guide A .

Dans un second temps, on considère une profondeur de cavité ℓ_E quelconque non nulle, et on compare la correction de longueur $\ell_{A,c}$ du guide A avec celle obtenue en situation bafflée, c'est-à-dire pour $\ell_E = 0$ (cf. Fig. 1.9). On observe alors des écarts entre les deux situations de l'ordre de 40%, autour de fréquences qualifiées de pathologiques. Ces dernières sont telles que la longueur d'onde est égale à $4(\ell_E + \ell_{E,c})/(2n + 1)$, $n \in \mathbb{N}$, $\ell_{E,c} = 20\text{mm}$. Dit autrement, le rayonnement change brusquement lorsque la fréquence

est telle que la cavité est profonde d'un nombre impair de quarts d'onde. L'observation du champ de pression confirme ce constat tiré de l'évolution fréquentielle de la correction de longueur (cf. Fig 1.9).

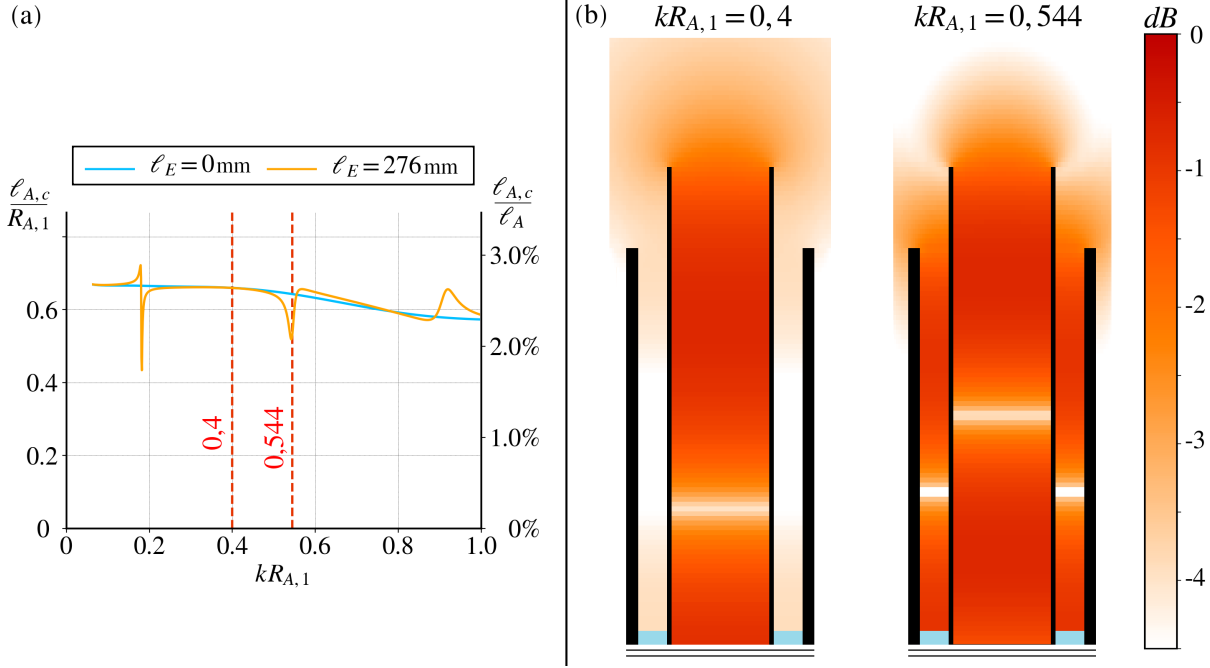


FIGURE 1.9 – (a) Evolution fréquentielle de la correction de longueur du tuyau central A , dans les cas où le réservoir est plein ($\ell_E = 0\text{mm}$, en bleu) ou partiellement vidé ($\ell_E = 276\text{mm}$, en orange). (b) Logarithme du module du champ de pression pour une profondeur de cavité $\ell_E = 276\text{mm}$ et deux fréquences réduites : la première, $kR_{A,1} = 0.4$ n'induit pas de comportement particulier, la seconde, $kR_{A,1} = 0.544$, excite une résonance de la cavité.

Maintenant que des plages de fréquences pathologiques ont été identifiées pour une profondeur de cavité ℓ_E quelconque, on cherche à déterminer les profondeurs de cavité présentant des perturbations acoustiques audibles, c'est-à-dire telles que les fréquences pathologiques correspondent aux fréquences de jeu du tuyau d'orgue. Par souci de simplicité, on considère ici que les fréquences de jeu du tuyau d'orgue sont égales à ses fréquences de résonance. Alors, en adoptant pour le tuyau d'orgue un modèle de tube ouvert-ouvert, on obtient les longueurs d'onde suivantes pour les fréquences de jeu : $2(\ell_A + \ell_{A,c})/(m + 1)$, $m \in \mathbb{N}$, $\ell_{A,c} \simeq 0,6R_{A,1}$. Finalement donc, une fréquence de jeu coïncide avec une fréquence pathologique si la profondeur de cavité ℓ_E vérifie

$$\ell_E = \left(\frac{2n + 1}{2m + 2} (\ell_A + \ell_{A,c}) \right) - \ell_{E,c}. \quad (1.29)$$

Pour $m = 0$ et $n = 0$ notamment, on obtient la profondeur de cavité $\ell_E = 440\text{mm}$. Nous vérifions en prochaine section 1.4.4 si cette profondeur de cavité correspond à un des accidents perçus par Miller.

1.4.4 Comparaison avec les données expérimentales

L'auteur crédite Mathieu Sécail Géraud, Joël Gilbert et François Gautier pour les données expérimentales présentées dans cette section.

Le protocole expérimental est semblable à celui de Miller présenté en section 1.4.1, à cela près que l'on étudie également le cas où la cavité E est bafflée (cf. Fig. 1.10). Le son est enregistré à l'aide d'un microphone enfoncé de 67cm dans le tube rayonnant A . On connaît à tout moment la hauteur d'eau dans la cavité en pesant l'eau évacuée, et l'on déduit de celle-ci la profondeur ℓ_E de la cavité.

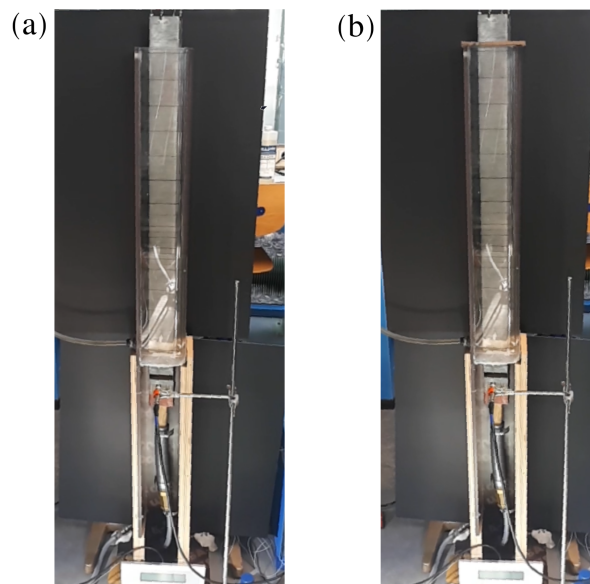


FIGURE 1.10 – Photographies du montage expérimental sans (a) ou avec (b) baffle sur la cavité.

D'entrée de jeu, on entend pour certaines hauteurs d'eau que l'ajout d'un baffle sur le réservoir permet de faire disparaître certains accidents acoustiques. Les vibrations de parois ne sauraient donc expliquer l'ensemble des perturbations comme suggéré par Miller. Pour déterminer plus précisément l'impact du rayonnement sur les perturbations du

champ, on s'intéresse au spectre du son enregistré par le micro en fonction de la profondeur de cavité pour les cas bafflé et non bafflé (cf. figure 1.11). Des différences significatives apparaissent alors clairement entre les deux spectrogrammes, ce qui à nouveau souligne que les résonances acoustiques dans la cavité jouent un rôle dans la production du champ rayonné. En particulier, si l'on s'intéresse aux profondeurs de cavité autour de la valeur $\ell_E = 440\text{mm}$ calculée en section précédente, on observe trois types d'accidents :

- un accident essentiellement vibratoire pour $\ell_E \in [390\text{mm}, 400\text{mm}]$, tel que le spectre est peu changé entre les cas bafflé et non bafflé ;
- un accident vibro-acoustique pour $\ell_E \in [416\text{mm}, 423\text{mm}]$, tel que le spectre présente des perturbations avec baffle, mais que celles-ci soient amplifiées par l'ouverture de la cavité ;
- un accident purement acoustique pour $\ell_E \in [440\text{mm}, 448\text{mm}]$, tel que l'ajout du baffle fasse disparaître la perturbation dans le spectrogramme.

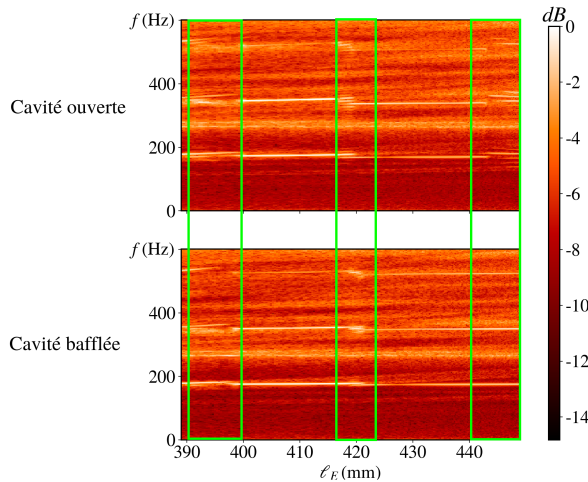


FIGURE 1.11 – Spectres du son enregistré par le microphone plongé dans le guide rayonnant, en fonction de la hauteur d'eau pour les cas bafflé et non bafflé. Sont encadrés les longueurs d'eau $\ell_E \in [390\text{mm}, 400\text{mm}]$, $\ell_E \in [416\text{mm}, 423\text{mm}]$ et $\ell_E \in [440\text{mm}, 448\text{mm}]$, qui correspondent à des accidents que l'on qualifie de vibratoire, vibro-acoustique ou acoustique.

Le propos de Miller reste ainsi toujours valide, mais mérite d'être affiné : une part seulement des accidents acoustiques de son expérience sont dûs exclusivement aux vibrations de paroi. La méthode multimodale quant à elle, a su prédire que les résonances de la cavité sont susceptibles de jouer un rôle significatif dans le rayonnement de la structure dans son ensemble. Bien que la géométrie modélisée soit axisymétrique et que le guide

de l'expérience soit de section rectangulaire, la méthode multimodale fournit une bonne estimation de la hauteur d'eau correspondant à une fréquence de cavité.

1.5 Conclusion

Depuis les premières études précises sur les résonances des colonnes d'air dans les instruments à vent au XIX^e siècle, de nombreux travaux ont permis de cerner le couplage entre les ondes sonores se propageant au sein d'un guide d'onde et rayonnées en sortie. En particulier, différentes méthodes numériques et semi-analytiques ont été employées depuis près de cinquante ans à cette fin. Parmi les méthodes semi-analytiques, se démarque la méthode multimodale, à la fois capable de modéliser avec précision des problèmes de rayonnement sans limite de fréquence et s'appuyant sur l'existence d'une direction de propagation privilégiée dans les guides pour minimiser le nombre de degrés de liberté.

Après un rappel de l'existant concernant le rayonnement d'un guide droit cylindrique d'épaisseur finie, nous avons illustré avec la modélisation de l'expérience de Miller que la méthode multimodale peut s'adapter à des situations plus complexes de rayonnement. Egalemeent, cette simulation nous a permis de prédire des effets acoustiques attribués jusqu'à présent aux vibrations de paroi des tuyaux d'orgues. Nos prédictions concordent avec les données expérimentales de collègues du Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Mans (CNRS UMR 6613).

Si nous nous sommes ici limités à appliquer la méthode à des guides droits, au cours des prochains chapitre 2 et 3, nous abordons respectivement les problèmes de propagation et de rayonnement pour des guides courbes de sections variables.

AMÉLIORATION DE LA BASE MODALE EN TROIS DIMENSIONS

Avant-propos

Ce chapitre se divise en deux parties. Aux notes de bas de page près, la première est intégralement constituée d'un article dénommé « Improved multimodal formulation of the wave propagation in a 3D waveguide with varying cross-section and curvature » publié dans le *Journal of the Acoustical Society of America*. [58]. Il y est question de l'utilisation de modes transverses Dirichlet dans la discrétisation du champ au sein de guides 3D de sections circulaires. Cet article est motivé par des travaux antérieurs qui montrent l'effet bénéfique de telles modes sur la convergence de la solution dans des géométries 2D. Cette amélioration s'explique par le fait que, dans des géométries de sections transverses variables, la normale à la paroi n'est pas incluse dans le plan transverse et donc les modes transverses Neumann classiquement employés ne satisfont plus la condition à la paroi. On voit qu'en 3D, l'amélioration de la base modale standard passe par l'ajout d'une composante Dirichlet sur chaque ordre azimutal.

Dans la seconde partie on s'intéresse à la question suivante : que se passe-t-il si l'on considère plus d'une composante Dirichlet par ordre azimutal ? On commence ainsi par en ajouter une deuxième ; puis l'on s'interroge sur la possibilité de s'affranchir de la dichotomie mode Neumann contre mode Dirichlet, en s'intéressant à une base non modale dans laquelle toutes les fonctions transverses satisfont une condition différente à la paroi.

Première partie : Improved multimodal formulation of the wave propagation in a 3D waveguide with varying cross-section and curvature

2.1 Introduction

The analytic resolution of guided wave problems remains limited to simple cases with strong assumptions on either the geometry of the waveguide or the frequency. For instance, the application of the commonly used Webster's horn equation remains limited to low frequencies despite a number of ancient [41] and modern works [84, 117] aiming at extending its validity. Numerical computation is thus necessary to accurately solve complex guided wave problems. Finite or boundary element methods, for example, come naturally to mind as versatile tools to solve a wide variety of problems, but they do not take advantage of the core aspect of duct wave propagation, which is the possible distinction between the privileged direction for the propagation of the waves and the bounded transverse plane.

In that sense it is more suited to use a multimodal method that turns the multidimensional problem into a set of coupled one-dimensional equations governing the amplitudes of the propagating and evanescent modes in the waveguide. In cylindrical waveguides, the separation of variables makes it possible to exactly and analytically solve the multimodal propagation. Based on this result, the first attempts to develop a multimodal formulation of the wave propagation within inhomogeneous waveguides with hard walls consisted in reducing a geometry of variable cross-section to a series of cylindrical layers, with a small discontinuity at each junction. [3, 118] The set of transverse modes is then calculated locally to discretize the overall solution. Later, Pagneux et al. [110] found a way of avoiding the decomposition in cylindrical layers, by implementing a multimodal method that exactly accounts for the continuous variations of the cross-section shape and area. They kept on using the local transverse eigenmodes because of their practicality - they are analytically known for simple cross-sectional shapes and they recover the exact solution outside the scattering regions - and also because, as they form a complete basis, they asymptotically describe the exact solution. Since then, this *standard formulation* of the multimodal propagation has been widely investigated and applied to a number of

problems. [49, 16, 109, 17, 77]

While studying small-amplitude water waves, Athanassoulis and Belibassakis [9] showed that the non-compliance of the used transverse modes with the actual boundary condition significantly hinders the practical convergence of the method. They tackled this issue by adding a Dirichlet mode in the modal basis, which proved highly efficient as a same level of accuracy could be reached with far less modes. This implies that the Dirichlet mode can lead to significantly reduced computation times. Many papers ensued on this subject, that propose improvements of the method, extend its range of application, or investigate further mathematical aspects related to the use of supplementary modes. [60, 89, 87, 85, 48] All of these papers deals with two-dimensional geometries.

With the present work we aim at extending the range of application of supplementary modes to three-dimensional waveguides with varying circular cross-section and curvature. The propagation in such geometries involves coupling between modes with different azimuthal dependencies, which raises questions about the implementation of supplementary modes. This kind of coupling has already been observed in waveguides of constant radius with curvature [49] or with a non axisymmetric boundary condition at the wall. [16] It is also present in the more recent work of Mc Tavish, [88] that deals with curved waveguides with variable radius and torsion. None of those works included the notion of supplementary mode.

The paper is organized as follows. In Sec. 2.2, we use a coordinate change that transform the complex-shaped waveguide into a cylindrical waveguide with unit radius. This transformation results in modified wave and boundary equations governing the pressure field within the waveguide, to account for the complexity of the original problem. Sec. 2.3 gives the main steps of the multimodal formulation of the wave propagation problem, and both the standard and improved basis of transverse modes are built. Finally we investigate in Sec. 2.4 the accuracy and convergence of the improved formulation through a variety of examples, that involve both axisymmetric and curved geometries with different radiation conditions.

2.2 Geometrical transformation

Consider a three-dimensional waveguide \mathcal{D} having a boundary $\partial\mathcal{D}$ and a central line \mathcal{C} , given in the direct space (X, Y, Z) by $\mathbf{S}_0(X, Y)$, along which we define the curvilinear abscissa x (Fig. 2.1). For the sake of simplicity, \mathbf{S}_0 is set independent of the Z coordinate, which means that we disregard the torsion (see, *e.g.*, McTavish [88] for a multimodal approach that takes it into account, or in elastic waveguides, Treysède [128]). The boundary $\partial\mathcal{A}(x)$ of a cross-section $\mathcal{A}(x)$ is assumed to be of circular shape. Its radius a may depend on the curvilinear abscissa x . Assuming an inviscid homogeneous medium filling the waveguide and an $\exp(-j\omega t)$ time dependence, the pressure field satisfies the wave problem

$$(\Delta + k^2)p = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}, \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{N} \cdot \nabla p = 0 \quad \text{on } \partial\mathcal{D}, \quad (2.1b)$$

with \mathbf{N} the normal to the boundary, $k = \omega/c$ the wavenumber, and c the wave velocity.

2.2.1 Coordinate change

Assume the Frenet–Serret frame $(\mathbf{e}_x, \mathbf{n}, \mathbf{e}_z)$ and a point $\mathbf{M}(X, Y, Z) \in \mathcal{D}$. Using the radial and orthoradial vectors \mathbf{e}_r and \mathbf{e}_θ , we define a change in coordinates $\mathcal{T} : (X, Y, Z) \in \mathcal{D} \rightarrow (x, r, \theta) \in \mathcal{C} \times \mathcal{A}$ such that $\mathbf{S}_0\mathbf{M} = ra\mathbf{e}_r$ and $\theta \equiv (\mathbf{n}, \mathbf{e}_r)$. This turns the original waveguide into a straight waveguide with a cross-section $\mathcal{A} = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ of unit radius. Also the position reads

$$\mathbf{OM} = X\mathbf{e}_X + Y\mathbf{e}_Y + Z\mathbf{e}_Z = \mathbf{OS}_0(x) + ra(x)\mathbf{e}_r(x, \theta). \quad (2.2)$$

Now we aim at transforming the differential operators that are present in the wave problem (2.1). Let κ be the local curvature of \mathbf{S}_0 . We use the Frenet–Serret formulas

$$\frac{d\mathbf{OS}_0}{dx} = \mathbf{e}_x, \quad \frac{d\mathbf{n}}{dx} = -\kappa(x)\mathbf{e}_x, \quad (2.3)$$

to obtain

$$d\mathbf{OM} = (\tau\mathbf{e}_x + ra'\mathbf{e}_r) dx + a\mathbf{e}_r dr + ra\mathbf{e}_\theta d\theta, \quad (2.4)$$

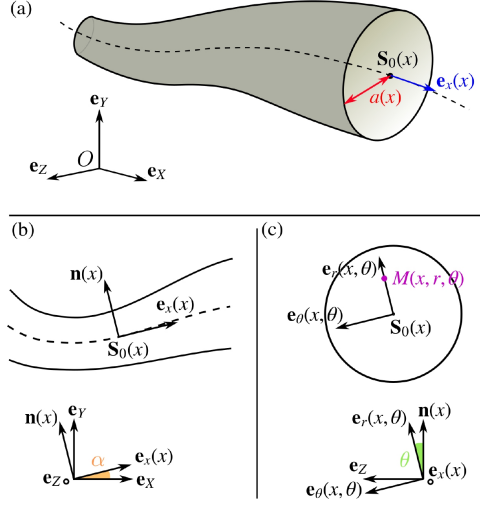


FIGURE 2.1 – (color online) (a) 3D waveguide in the direct space (X, Y, Z) . Bottom : sectional views of the same waveguide in (b) the median plane $(\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y)$ and the transverse plane.

where $\tau = 1 - \kappa ar \cos \theta$. Then, we deduce from equation (2.4) that

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_r \\ \frac{1}{r} \partial_\theta \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \partial_X \\ \partial_Y \\ \partial_Z \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

with

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} \tau & ra' & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mathbf{P} \quad (2.6)$$

the Jacobian of the change in coordinates \mathcal{T} and \mathbf{P} the orthogonal matrix that transforms $(\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z)$ into $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$.

2.2.2 Modified wave equation and boundary conditions

Using the cartesian wave problem (2.1) and the above defined coordinate change, we derive the transformed wave problem [106]

$$\nabla \cdot (\mathbf{H} \nabla p) + hk^2 p = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}, \quad (2.7a)$$

$$[\mathbf{H} \nabla p]_{r=1} \cdot \mathbf{e}_r = 0 \quad \text{on } \partial \mathcal{D}, \quad (2.7b)$$

where

$$\begin{cases} \nabla f = (\partial_x f) \mathbf{e}_x + \nabla_{\perp} f, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_x v_x + \nabla_{\perp} \cdot (v_r, v_{\theta})^{\top}, \end{cases} \quad (2.8)$$

with ∇_{\perp} et $\nabla_{\perp} \cdot$ the usual gradient and divergence operators in the polar plane (r, θ) . The matrix and the scalar coefficient \mathbf{H} and h are easily deduced from the Jacobian matrix \mathbf{J} :

$$h = \frac{1}{\det \mathbf{J}} = \tau a^2, \quad (2.9a)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{J}^{\top} \mathbf{J}}{\det \mathbf{J}} = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} a^2 & -raa' & 0 \\ -raa' & \tau^2 + r^2 a'^2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau^2 \end{pmatrix}. \quad (2.9b)$$

At that point we define

$$q \equiv (\mathbf{H} \nabla p) \cdot \mathbf{e}_x = \frac{a^2}{\tau} \left(\partial_x p - r \frac{a'}{a} \partial_r p \right), \quad (2.10)$$

which can be easily related to the axial acoustic flow, so the wave equation (2.7a) can be written as an evolution equation of the first order along x :

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a'}{a} r \partial_r & \frac{\tau}{a^2} \\ -\tau(\Delta_{\perp} + k^2 a^2) & \frac{a'}{a} \frac{1}{r} \partial_r (r^2 \cdot) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

where $\Delta_{\perp} = \tau^{-1} \nabla_{\perp} \cdot (\tau \nabla_{\perp})$ is the transverse Laplacian operator. Furthermore, the boundary condition (2.7b) can be written as

$$\left[\tau \partial_r p - \frac{a'}{a} q \right]_{r=1} = 0. \quad (2.12)$$

In the following, we apply the multimodal formulation to this 3D wave problem, so that it is transformed into a 1D problem for modal contributions. We discuss in detail how it is possible to improve the convergence of the method by using supplementary modes.

2.3 The multimodal formulation

2.3.1 Modal decomposition

The basis of the multimodal formulation is the series development of the fields, $p(x, r, \theta)$ and $q(x, r, \theta)$, over a set of linearly independent transverse functions $\varphi_n(r, \theta)$, the infinite series of which is able to generate any function $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, in order to ensure convergence :

$$\begin{cases} p(x, r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n(x) \varphi_n(r, \theta), \\ q(x, r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} q_n(x) \varphi_n(r, \theta). \end{cases} \quad (2.13)$$

Once chosen a set of appropriate transverse functions, the information about the fields is then carried by the local amplitudes, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Thus we rewrite our wave problem to make it describe the evolution of these local amplitudes.

2.3.2 Discrete wave equation

In this section we project the wave problem (2.11-2.12) onto each transverse function φ_n . This is done using the scalar product $\langle f, g \rangle = (1/2\pi) \int_{\mathcal{A}} \bar{f} g \, d\mathcal{A}$, with \bar{f} the complex conjugate of f . Combining the resulting system of equations with the boundary condition (2.12) then leads us to a new set of coupled equations governing the variations of the vectors $\mathbf{p} \equiv (p_n)$ and $\mathbf{q} \equiv (q_n)$ along the x axis, that is,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

where

$$\mathbf{M}_1 = a' a^{-1} \mathbf{E}, \quad (2.15a)$$

$$\mathbf{M}_2 = a^{-2} (\mathbf{A} - \kappa a \mathbf{C}), \quad (2.15b)$$

$$\mathbf{M}_3 = -(ka)^2 (\mathbf{A} - \kappa a \mathbf{C}) + (\mathbf{B} - \kappa a \mathbf{D}), \quad (2.15c)$$

$$\mathbf{M}_4 = -\mathbf{M}_1^\dagger, \quad (2.15d)$$

with \dagger the adjoint operator and

$$\mathbf{A}_{nm} = \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle, \quad (2.16a)$$

$$\mathbf{B}_{nm} = \langle \nabla_{\perp} \varphi_n, \nabla_{\perp} \varphi_m \rangle, \quad (2.16b)$$

$$\mathbf{C}_{nm} = \langle \varphi_n, r \cos \theta \varphi_m \rangle, \quad (2.16c)$$

$$\mathbf{D}_{nm} = \langle \nabla_{\perp} \varphi_n, r \cos \theta \nabla_{\perp} \varphi_m \rangle, \quad (2.16d)$$

$$\mathbf{E}_{nm} = \langle \varphi_n, r \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} \rangle. \quad (2.16e)$$

Now that we have removed the dependence in r and θ from the wave equation and before we turn to the practicality of the numerical solution, let us provide some insights into the role of these matrices. \mathbf{A} and \mathbf{B} account for the propagation in the straight parts of the waveguide, as they are the only ones to have an influence when the curvature $\kappa = 0$ and the derivative of the radius $a' = 0$. Conversely, \mathbf{C} and \mathbf{D} only come into play in the curved parts of the waveguide, while \mathbf{E} only affects the propagation in the parts of the waveguide that shows a variable radius. Note that the contributions of the radius variations and of the curvature are completely separated.

2.3.3 Standard modal basis

A natural choice for the transverse functions φ_n is the set of solution of the local transverse eigenproblem [110, 49]

$$\begin{cases} \nabla_{\perp} \cdot (\nabla_{\perp} \varphi_n) + \gamma_n^2 \varphi_n = 0 & \text{in } \mathcal{A}, \\ [\partial_r \varphi_n]_{r=1} = 0 & \text{on } \partial \mathcal{A}, \end{cases} \quad (2.17)$$

that is, the actual modes in the trivial case of a rigid straight waveguide. In our case they are the functions [28, 55]

$$\varphi_n(r, \theta) = \varphi_{\mu, \nu}(r, \theta) = \Lambda_{\mu, \nu} J_{\mu}(\gamma_{\mu, \nu} r) \cos(\mu \theta). \quad (2.18)$$

The eigenvalue $\gamma_{\mu\nu}$ is the $(\nu + 1)^{\text{th}}$ zero of the first derivative J'_{μ} of the μ^{th} order Bessel function of the first kind, and the normalizing factor $\Lambda_{\mu\nu}$ that ensures $\langle \varphi_{\mu\nu}, \varphi_{\mu\nu} \rangle = 1$ is

$$\Lambda_{\mu,\nu} = \sqrt{\frac{2}{1 - \frac{\mu^2}{\gamma_{\mu,\nu}^2}}} \frac{1}{J_{\mu}(\gamma_{\mu,\nu})}. \quad (2.19)$$

The correspondance between the modal index n and the pair of azimuthal and radial indices $(\mu, \nu) \in \mathbb{N}^2$, such that $\varphi_n = \varphi_{\mu,\nu}$, is established using the ascending order of the eigenvalues $\gamma_{\mu\nu}$. This is what is done in numbers of papers dealing with 3D multimodal waveguides with circular cross-section. [49, 16, 21, 88] Examples are presented in Tab. 2.1.

Here we choose to use the symmetric eigenfunctions with respect to the plane of symmetry of the waveguide - the axis is assumed to have no torsion -, but the antisymmetric ones would be written in the same way using $\sin(\mu\theta)$ instead of $\cos(\mu\theta)$. Note that the method would still hold for a problem without any symmetry property, by simply taking into account both the cosine and sine modes, which would then be coupled.

ν	$J'_0(x)$	$J'_1(x)$	$J'_2(x)$	$J'_3(x)$	$J'_4(x)$
0	0	1.8412	3.0542	4.2012	5.3175
1	3.8317	5.3314	6.7061	8.0152	9.2824
2	7.0156	8.5363	9.9695	11.3459	12.6819
3	10.1735	11.7060	13.1704	14.5858	15.9641

TABLE 2.1 – Zeros of the first derivative of the Bessel functions of the first kind and of order μ , giving the eigenvalues associated with the transverse eigenfunctions used in the standard multimodal formulation. The green (resp. red) lines show the modes taken into account when selecting 2 (resp. 5) modes by increasing order of the associated eigenvalue.

From the expression (2.18) of the transverses modes, we derive the following orthogonality relations :¹

$$\mathbf{A}_{nm} = \delta_{nm}, \quad (2.20a)$$

$$\mathbf{B}_{nm} = \gamma_n^2 \delta_{nm}, \quad (2.20b)$$

$$\mathbf{D}_{nm} = 0, \quad \mathbf{C}_{nm} = 0 \quad \text{if} \quad |\mu(n) - \mu(m)| \neq 1, \quad (2.20c)$$

$$\mathbf{E}_{nm} = 0 \quad \text{if} \quad \mu(n) \neq \mu(m). \quad (2.20d)$$

If the waveguide is straight, relations (2.20a) and (2.20b) yield a well known property,

1. Voir l'annexe B pour une preuve de la propriété (2.20b).

that is the modes being uncoupled. The wave equation then reduces to

$$\frac{d^2 p_n}{dx^2} = -k_n^2 p_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.21)$$

where $k_n^2 = k^2 - (\gamma_n/a)^2$, which gives the usual uncoupled right- and left-going waves $\exp(\pm jk_n x)$.

Another point worth mentioning is that, for obvious reasons of symmetry, only the curvature may induce a coupling between modes having different azimuthal orders. This translates in the relations above, notably in Eq. (2.20c). As a result, we later consider each azimuthal separately for the axisymmetric geometries. The azimuthal order μ being fixed in those particular cases, ordering the modes according to the ascending values of the eigenvalues $\gamma_{\mu\nu}$ means the modal index n is equal to the radial index ν .

In the cross-section \mathcal{A} , the infinite set of functions φ_n is a complete basis, thus the series decomposition of the pressure field in the waveguide remains valid even if the pressure does not fulfill the same boundary condition as φ_n , as it is the case when $a' \neq 0$, see Eqs. (2.12) and (2.17). A consequence, however, is the poor convergence of the series, partly because of the non uniform convergence of the pressure derivative. This can be remedied by adding to the usual expansion additional terms, which we expect to help restoring the right boundary condition. [9, 60, 89, 87, 85, 48]

Following these earlier papers, the solutions of (2.17) will be denoted as “Neumann modes,” and N of them will be taken into account to form the “standard basis.” The additional terms will be denoted as “supplementary modes,” and “improved basis” will denote the standard basis completed with the supplementary modes.

2.3.4 Improved basis

The N Neumann modes in the standard basis may have different values of the azimuthal index μ , and we call μ_{\max} the highest value. For each value of $\mu \in [0, \mu_{\max}]$, N_μ modes are taken into account and form what will be called in the following the μ -subset of the basis. Then, $N = \sum_{\mu=0}^{\mu_{\max}} N_\mu$, and

$$p(x, r, \theta) = \sum_{\mu=0}^{\mu_{\max}} \sum_{\nu=0}^{N_\mu-1} p_{\mu,\nu}(x) \varphi_{\mu,\nu}(r, \theta). \quad (2.22)$$

The idea behind the use of supplementary modes is the improvement of the above expansion with a mode whose derivative with respect to r does not vanish on $\partial\mathcal{A}$. Let us choose it as a ‘‘Dirichlet mode,’’ solution of the eigenproblem (2.17) with a Dirichlet instead of a Neumann condition on $\partial\mathcal{A}$:

$$\tilde{\varphi}_\mu(r, \theta) = \frac{\sqrt{2(2 - \delta_{\mu 0})}}{J_{\mu+1}(\tilde{\gamma}_\mu)} J_\mu(\tilde{\gamma}_\mu r) \cos(\mu\theta), \quad (2.23)$$

where $\tilde{\gamma}_\mu$ is the first zero of J_μ . Note that this defines not only one additional function, but one for each value of the azimuthal index μ . This is a consequence of the higher dimension of the studied problem, when compared with two-dimensional waveguides, in which, for each of the two boundaries, only one supplementary mode is built.

To keep the benefits of the orthogonality relations (2.20a-2.20d), the Dirichlet modes (2.23) are not directly used as supplementary modes in the series expansions, but they are first orthogonalized to the $N_\mu - 1$ first Neumann modes of the μ -subset, to define the supplementary mode $\varphi_{\mu,-1}$:

$$\varphi_{\mu,-1} = \Lambda_{\mu,-1} \left(\tilde{\varphi}_\mu - \sum_{\nu=0}^{N_\mu-2} \tilde{a}_{\mu,\nu} \varphi_{\mu,\nu} \right), \quad (2.24)$$

with

$$\tilde{a}_{\mu,\nu} = \langle \varphi_{\mu,\nu}, \tilde{\varphi}_\mu \rangle = \frac{2\tilde{\gamma}_\mu}{\tilde{\gamma}_\mu^2 - \gamma_{\mu,\nu}^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{\tilde{\gamma}_{\mu,\nu}^2}}}. \quad (2.25)$$

The normalizing factor is

$$\Lambda_{\mu,-1} = \left(1 - \sum_{\nu=0}^{N_\mu-2} |\tilde{a}_{\mu,\nu}|^2 \right)^{-1/2}, \quad (2.26)$$

and we define

$$\gamma_{\mu,-1} = \langle \nabla_\perp \varphi_{\mu,-1}, \nabla_\perp \varphi_{\mu,-1} \rangle = \left(\frac{\tilde{\gamma}_\mu^2 - \sum_{\nu=0}^{N_\mu-2} |\tilde{a}_{\mu,\nu}|^2 \gamma_{\mu,\nu}^2}{1 - \sum_{\nu=0}^{N_\mu-2} |\tilde{a}_{\mu,\nu}|^2} \right)^{1/2} \quad (2.27)$$

to remain consistent with property (2.20b).² Then, the “improved” series development of p is

$$p(x, r, \theta) = \sum_{\mu=0}^{\mu_{\max}} \sum_{\nu=-1}^{N_{\mu}-2} p_{\mu,\nu}(x) \varphi_{\mu,\nu}(r, \theta), \quad (2.28)$$

with the same number of degrees of freedom (N) as the standard formulation (2.22), to allow for comparison.

Using the improved modal basis, we expect to achieve a faster convergence of the multimodal method in the variable radius parts of the waveguide, while having no side effect in the straight parts of the waveguide. Indeed, noting that $\forall(\mu, \nu) \in [0, \mu_{\max}] \times [0, N_{\mu} - 2]$, $\gamma_{\mu,\nu} < \gamma_{\mu,-1}$, the supplementary modes are always the most evanescent modes. This, together with the orthogonality, guarantees that the standard behavior is recovered far enough from the scattering regions.

2.4 Results

In this section, we aim at comparing the relative efficiencies of the standard and improved bases. To do this we consider a inhomogeneous waveguide with length L , as measured along its waveguide axis x (Fig. 2.1). We compute the scattering coefficients of the inhomogeneous region, as well as the wavefield inside, to compare the standard and improved formulations, and analyze the convergence.

2.4.1 Numerical solution and error estimation

Either we use the standard or the improved basis, the problem to be solved is Eq. (2.14), with the matrix coefficients as defined by Eqs. (2.15) and (2.16). Besides, the improved basis as been build such that the properties (2.20) of the matrices remain valid. The numerical resolution of this problem has been extensively discussed in previous papers (see, *e.g.*, Refs. [110, 49, 109]), and we briefly recall here the main steps. Prior to the computation of the wavefield, an admittance matrix is defined and solved, that relates the two modal fields governed by Eq. (2.14) : $\mathbf{q}(x) = \mathbf{Y}(x)\mathbf{p}(x)$. This admittance satisfies a Riccati equation, $\mathbf{Y}' = -\mathbf{Y}\mathbf{M}_2\mathbf{Y} + \mathbf{M}_4\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3$, that one solves using a Magnus-Moebius scheme³,

2. Voir l'annexe B pour plus de détails sur le maintien de la propriété (2.20b).

3. Voir les sections 3.2.3.d et 4.3.2 pour davantage de détails sur la mise en oeuvre pratique du schéma de Magnus.

[65, 109] from the output end ($x = L$) to the input end ($x = 0$), given a radiation condition $\mathbf{Y}(L)$. Assuming for example that the inhomogeneous region ends in a semi-infinite waveguide with constant radius $a(L)$ leads to $\mathbf{Y}_{nm}(L) = ja(L)\sqrt{(ka(L))^2 - \gamma_n^2}\delta_{nm}$. This expresses that no wave propagates backwards in this semi-infinite lead. Once the admittance is known, and in particular its value $\mathbf{Y}(0)$ at the input end, then the reflection matrix of the scattering region can be calculated. The pressure field can also be calculated, as the solution of $\mathbf{p}' = (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2\mathbf{Y})\mathbf{p}$. It is solved from the input end, given an initial condition $\mathbf{p}(0)$, to the output end, using again a Magnus-Moebius scheme.

Now let p^N be the wavefield obtained with N transverse functions of either the standard or the improved basis, and p^e the reference solution, obtained in practice with a large number of modes, to approximate the exact solution p^∞ . We then define the error on the wavefield as

$$\varepsilon_p^N = \frac{\|p^N - p^e\|_{\mathcal{D}}}{\|p^e\|_{\mathcal{D}}}. \quad (2.29)$$

with

$$\|f\|_{\mathcal{D}} = \left(\int_{\mathcal{D}} |f(x, r, \theta)|^2 dx r dr d\theta \right)^{1/2}. \quad (2.30)$$

This measure of the convergence and efficiency of the method is complemented by calculating the error on a scattering coefficient, namely \mathbf{R}_{00} at the input end for the reflected mode $(\mu, 0)$ and an incident mode $(\mu, 0)$:

$$\varepsilon_R^N = \frac{|\mathbf{R}_{00}^N - \mathbf{R}_{00}^e|}{|\mathbf{R}_{00}^e|}, \quad (2.31)$$

where \mathbf{R}_{00}^N is the reflection coefficient computed with a truncation order N , and where \mathbf{R}_{00}^e is the reflection coefficient of the reference solution, obtained, as for p^e above, with a large number of modes, to approximate the exact value \mathbf{R}_{00}^∞ . Practically, \mathbf{R}_{00}^N is directly deduced from $\mathbf{Y}(x = 0)$, see, *e.g.*, Ref. [47].

With these definitions in mind, we can now assess both the standard and the improved modal bases.

2.4.2 Axisymmetric waveguide

Our first example is an axisymmetric waveguide - the curvature is uniformly zero - in which, as a consequence, no coupling occurs between solutions having different azimuthal dependences (see Sec. 2.3.3). We can thus consider as separate problems the propagation of each μ -subset of modes. The azimuthal dependence is then known, varying as $\cos(\mu\theta)$, and the problem reduces to a 2D problem in x and r . More specifically, the geometry we used for the numerical computations displays a local increase of the radius from a_0 to $a_{\max} = 2a_0$, following a versine function with period $4a_0$, centered at $x = 2.8a_0$, such that $L = 5.6a_0$ (Fig. 2.2). It ends in a semi-infinite waveguide with radius a_0 .

We investigate the relevance of using supplementary modes in three cases, corresponding to three different azimuthal orders : $\mu = 0, 1$, and 5 . In each situation, the input pressure field decomposes as $p_{\mu,\nu}(x=0) = \delta_{\nu 0}$, and the frequency is such that $ka_0 < \gamma_\mu$, that is, only the first mode, φ_μ , is propagating in the right lead. Fifty modes are taken into account in the reference solution.

Consider first the pressure field in the median plane (Fig. 2.2a). For each basis and for an increasing number of modes taken into account, isobars are plotted against the reference solution. We can see that with only four modes, the isobars of the solution obtained with the improved basis almost overlap those of the reference solution, while it is not the case with the standard formulation. Also, zooming in on the upper boundary shows that the improved basis, although built with no information on the waveguide shape, leads to a much better estimate of the boundary condition than the standard basis, that is doomed to give vertical isobars at the sloped wall.

As stated in earlier papers, [89, 87, 85, 48] the convergence of the wavefield is limited by that of the remaining series, $p^\infty - p^{N_\mu}$, which can itself be deduced from the behaviour of the modal coefficients, $P_n = p_{\mu,n-1}$, $n \geq 1$. When using the standard basis, regardless of the azimuthal order, the amplitude of these coefficients decrease as $1/n^2$, see Fig. 2.2(b). The highest expected convergence rate for the wavefield is thus $1/N_\mu^{3/2}$. Consider now the improved basis. To allow for comparison with the previous results, one should first notice that the supplementary mode $\varphi_{\mu,-1}$ in Eq. (2.24) depends on the truncation. To account for this dependence, we define in Eq. (2.28) the generalized modal coefficients of the improved series as being $P_n = p_{\mu,n-1} - \Lambda_{\mu,-1} a_{0,\mu(n-1)} p_{\mu,-1}$. Their amplitude is shown to decay as $1/n^4$, with then a highest expected convergence rate of $1/N_\mu^{7/2}$ for the wavefield.

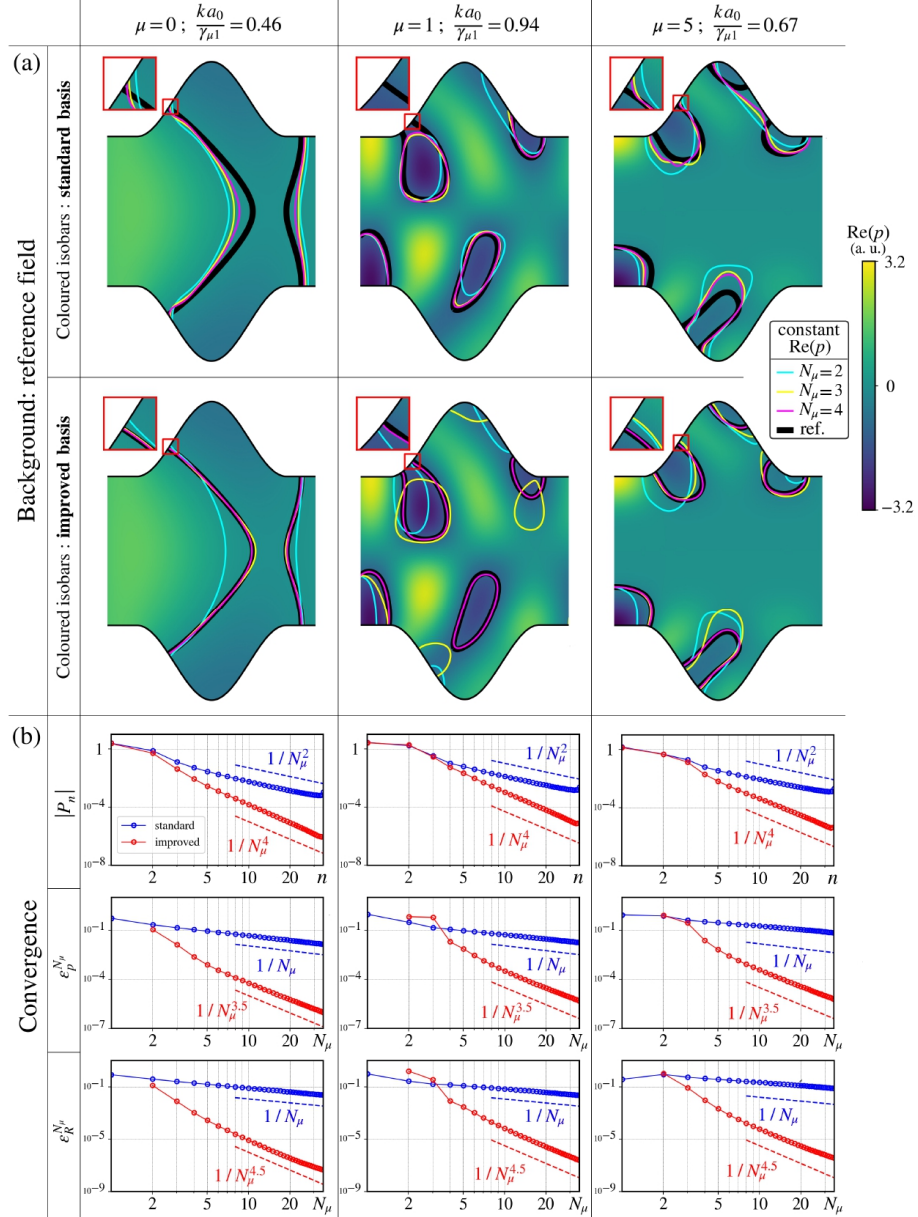


FIGURE 2.2 – (color online) Accuracy and convergence analyses of the standard and improved formulations in an axisymmetric waveguide. (a) Isobars of $\text{Re}[p]$ (superimposed on colormaps of the reference field in the median plane) for the improved and standard bases, computed with different number of modes N_μ . A zoom near the wall shows the accelerated convergence of the boundary condition when using the improved basis. (b) Convergence curves. From top to bottom : modulus of the generalized modal coefficients $|P_n|$, error on the pressure field, $\varepsilon_p^{N_\mu}$, and error on the reflection coefficient $\varepsilon_R^{N_\mu}$.

This increase in the convergence rate, from $1/n^2$ to $1/n^4$, is that already observed in two-dimensional waveguides. [9, 60, 89, 87, 85, 48]

The convergence of the wavefield is also shown in Fig. 2.2(b). As in 2D waveguides, the convergence of the standard formulation is lower than the highest expected convergence rate - the error indeed decreases as $1/N_\mu$ - whereas it follows its highest expected rate in the improved formulation.

The scattering coefficient are, by definition, computed outside the scattering region. Then, the error on the remaining series decreases exponentially, and is thus no longer what limits the convergence rate. Indeed, we observe for the improved formulation that $\varepsilon_R^{N_\mu}$ decreases as $1/N_\mu^{4.5}$.

Thus, adding a *supplementary mode* with a non-zero derivative on the boundary significantly enhances the convergence and efficiency of the multimodal formulation. Whether one computes the wavefield or scattering coefficients, using only 4 modes, among which the supplementary mode, yields a more accurate result than the standard formulation with 35 modes.

The above results and conclusions being true regardless the azimuthal dependence, that is, for each μ -subset, we expect the supplementary modes to also prove valuable in more complex curved geometry.

2.4.3 Curved bulged pipe

When the waveguide axis curvature is no longer zero, modes with different azimuthal orders are coupled. So it is no longer possible to focus on a single azimuthal order μ , and no mode (μ, ν) should a priori be omitted. To answer this, the modes are sorted according to the ascending order of their cut-off frequency, as in the axisymmetric case, except this time all the azimuthal orders are taken into account for the sorting, not just a single one.

The geometry chosen in this second example is similar to the previous one - the radius follows a versine function -, but the axis has now a finite curvature. The following parameters are chosen : $a_{\max} = 1.5a_0$, $L = \pi a_0$, $\kappa = 1/4a_0$, so that the tangent vector to the waveguide axis deviates by an angle $\pi/4$. The frequency is such that $k = 1.5/a_0 = 2.25/a_{\max}$,

and the input field is a plane piston-like condition : $p_{\mu,\nu} = \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0}$.⁴

Figure 2.3 shows the convergence of the errors on the wavefield and on the reflection coefficient R_{00}^N . 96 modes are taken into account in the reference solution. As in the axisymmetric example, the improved basis outperforms the standard formulation : the convergence rate of ε_p^N increases from $1/N^{0.7}$ to $1/N^3$ and, for ε_R^N , the decay rate goes from $1/N^{0.5}$ to $1/N^{3.5}$.

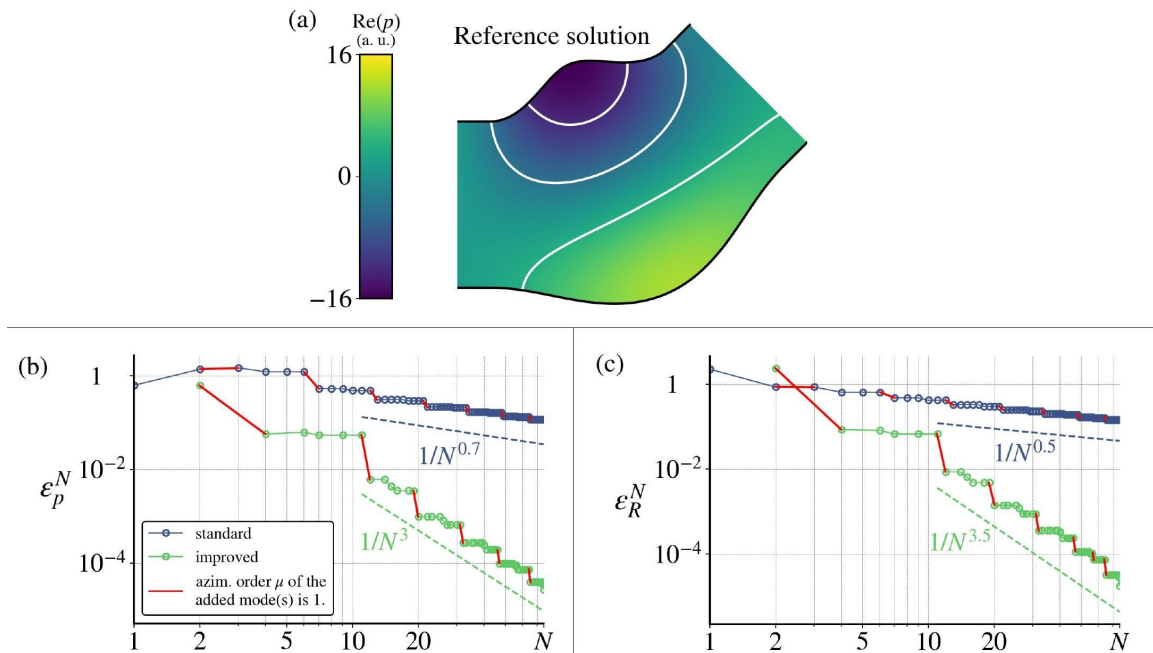


FIGURE 2.3 – (color online) (a) Real part of the reference pressure field, computed with a 96-mode improved basis. (b) Error on the pressure field, ε_p^N , as a function of the truncation order N and computed with the standard (blue) and improved (green) basis. (c) Error on the reflection coefficient, ε_R^N .

In the improved formulation, it was chosen that each μ -subset taken into account be “improved” with a supplementary mode $\varphi_{\mu,-1}$. This is a consequence of our first conclusions in axisymmetric waveguides. Indeed, if several μ -subsets are taken into account simultaneously, of which only some are improved, then the overall convergence will be limited by the convergence of the non improved μ -subsets, namely, $1/N$ (see Fig. 2.2). The present case differs from the former by the curvature-induced coupling between these

4. Voir la section 3.2.3.d pour plus de détails concernant l’algorithme d’intégration numérique utilisé pour un coude de section et de courbure constante.

subsets, but we may expect the same kind of limitations, and this is indeed what we observe (not shown). It is therefore necessary to “improve” each μ -subset to have the benefits of an increased convergence rate.

Note that the progressive introduction of the supplementary modes, as new azimuthal orders are taken into account, explains that, in the improved case (green curves in Fig. 2.3), one goes directly from, *e.g.*, a 4-mode basis to a 6-mode basis.

Now let us have a closer look at the convergence curves. Their staircase overall shape means that the mode unevenly contribute to the solution. In the example shown in Fig. 2.3, it is the modes with azimuthal order $\mu = 1$ that contribute most significantly (see the red segments). The relative weight of the modes in the computed solution naturally depends on the geometry of the waveguide, on the incident or input wave, or on the frequency. Therefore, knowing the optimal ordering of the mode would require an a priori knowledge on the solution, which we are trying to avoid. Sorting the modes by increasing cutoff frequency is the most usual way to answer this question of how to order the modes without a priori knowledge, though this is not the only one possible. Once the basis, standard or improved, has been chosen, other orderings of the modes could possibly improve the efficiency of the method. Namely, orderings that would favor modes of low azimuthal order may result, in our example of Fig. 2.3, in a smaller error, when compared to the “increasing cutoff” ordering. Indeed, because the curvature induced coupling occurs only from a given order μ towards the closest orders $\mu \pm 1$, and because of the source shape (a plane piston), Fig. 2.3 shows that modes with $\mu = 1$ are predominantly contributing to the overall solution. More generally, we expect that, as soon as the incident or input wave is composed of low order modes (and this will be the case for low frequency problems), such an alternative ordering might be of interest. While this is actually an interesting issue that would deserve further investigation, we do not deepen it here, as it does not fundamentally change the benefit of substituting the improved basis for the standard one, which is the core topic of the present work.⁵

2.4.4 Curved waveguide with constant cross-sectional area

In a variable radius waveguide, the supplementary modes have proven to increase the convergence rate because of their ability to approach the exact boundary condition. But

5. Voir l’annexe E.1 pour un exemple d’ordonnement alternatif.

what about a constant cross-section geometry? There, the boundary condition is perfectly satisfied by the standard basis at any truncation, and can only be impaired by the supplementary modes. We may then wonder, how the convergence is affected by supplementary modes, when apparently not needed. Maurel et al. [85] showed in the 2D case that, unexpectedly, the supplementary modes still improve the convergence. Here, we assess this outcome in a 3D bend, where many azimuthal orders, hence many supplementary modes, are used to compute the solution.

The bend we consider is shown in Fig. 2.4 : it turns by an angle π and the axis curvature is $\kappa = 2/3a_0$, such that $L = 3\pi a_0/2$. As in the previous example, a plane-piston like input pressure is imposed at a distance $a_0/2$ upstream from the inlet of the bend, at a frequency such that $ka_0 = 4$. 75 modes are taken into account in the reference solution.

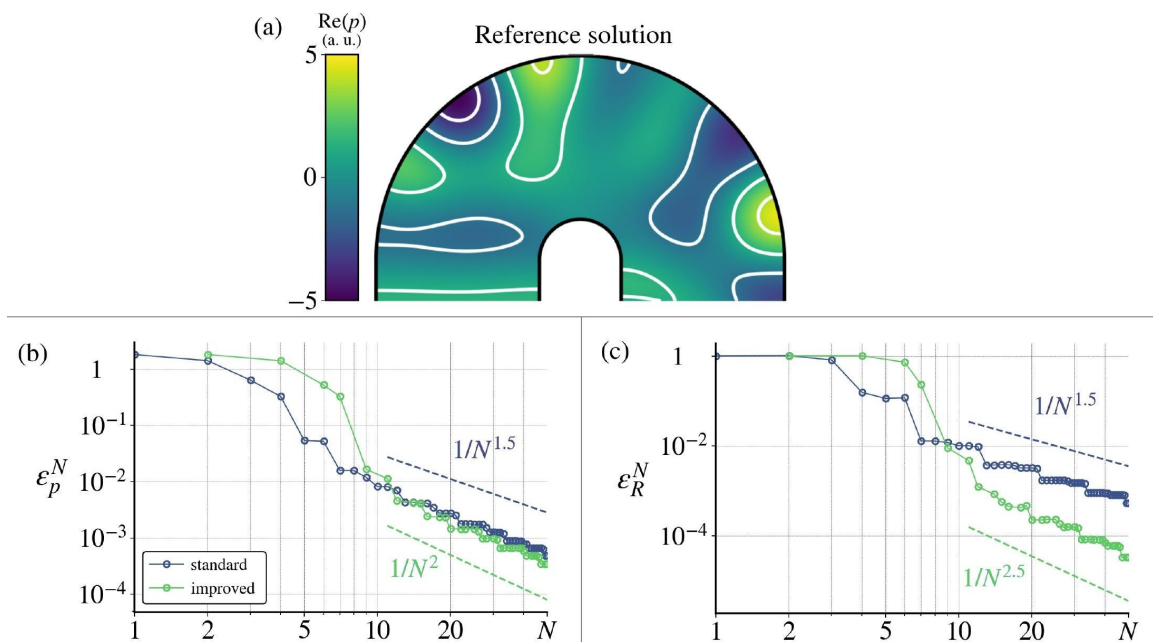


FIGURE 2.4 – (color online) Same as Fig. 2.3 in the case of a bend.

We observe, as in the 2D case, a better convergence when using the supplementary modes, even if the improvement is not as significant. Indeed, compared to the standard basis, the improved basis yields a $1/N^2$ rate for the error on the pressure field ε_p^N instead of a $1/N^{1.5}$ one, and a $1/N^{2.5}$ rate for the error on the reflection coefficient ε_R^N instead of a $1/N^{1.5}$. Note that the convergence rate obtained for the standard formulation, $1/N^{1.5}$ differs from that estimated by Félix and Pagneux, [49] who found $1/N^{2.5}$. Here, we only

consider the asymptotic behaviour to estimate the slope, without the rapidly decreasing “transient” part of the curve, below $N \sim 10$. This explains this difference in the results.⁶

2.4.5 Input impedance

The fourth case of this result section illustrates more practically the use of the improved formulation for the computation of the input impedance of a complex-shaped waveguide. Under the assumption of low frequency, the input impedance of a given waveguide element is the ratio of the mean pressure and the mean axial velocity, or the volume velocity, in the input cross-section. While often accessible to measurement, it allows for a reliable characterization of waveguide elements or resonators, of which the resonance frequencies or the damping characteristics (losses, radiation) can be deduced from the input impedance. It is thus a very common tool when investigating the acoustic properties of wind musical instruments, [34, 44, 37] horn loudspeakers, [77] mufflers, [90] vocal tract, [18] ear canal [105] or absorbing materials. [79]

Numerically, deducing the input impedance from the multimodal computation as described in § 2.4.1 is straightforward and does not need to compute the wavefield in a particular situation with a given source condition. Once the admittance matrix \mathbf{Y} is known at the input of the waveguide ($x = 0$), the term Z_{00} of its inverse $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1}$ gives a good estimate of the input impedance, up to some multiplicative factor. [46] Indeed, noticing that the mean pressure is the first term p_0 in the series (2.13) and that, similarly, the mean axial velocity is $q_0/(jka_0^2\rho c)$, then the input impedance reads $z_{\text{in}} = jka_0^2 z_c p_0/q_0$, with $z_c = \rho c$ the characteristic impedance of the medium with density ρ . Besides, from the definition of the impedance matrix \mathbf{Z} we have $p_0 = Z_{00}q_0 + \sum_{n>0} Z_{0n}q_n$, hence

$$\frac{z_{\text{in}}}{z_c} q_0 = jka_0^2 \left(Z_{00}q_0 + \sum_{n>0} Z_{0n}q_n \right). \quad (2.32)$$

Below the first cut-off frequency, the series in the right-hand side corresponds to evanescent terms that exponentially vanish away from the nonuniform region, thus

$$\frac{z_{\text{in}}}{z_c} \simeq jka_0^2 Z_{00}. \quad (2.33)$$

The geometry we consider is that of a curved horn, see Fig. 2.5(c). A cylindrical segment with radius a_0 and length $\ell = 5a_0/2$ connects to a 4ℓ -length horn-shaped waveguide,

6. Une explication possible du rôle des modes supplémentaire dans les coudes est fournie en annexe D.

whose radius increases from a_0 to $7a_0$ following a cubic function. At the junction with the cylindrical element, the curvature of the horn axis is $0.42/a_0$ and it linearly decreases to reach 0 at a distance 2ℓ from the junction; the axis is then straight to the output end.

To fix the ideas, let us give a_0 a measurable value, namely 2 cm. The whole waveguide has thus a length $L = 5\ell = 25$ cm. For simplicity, we assume a “non-radiating open end,” that is, $\forall(r, \theta) \in [0, 7a_0] \times [0, 2\pi]$, $p(x = L, r, \theta) = 0$, though more realistic and complex radiation conditions can be accounted for in the framework of the multimodal formulation. [110, 4, 114, 47] The sound velocity within the tube is $c = 340$ m.s⁻¹.

Figure 2.5(a) shows the modulus of the reduced input impedance z_{in}/z_c as a function of the frequency. Both the standard and improved formulations are compared with the reference solution, computed with 67 modes in the improved formulation.

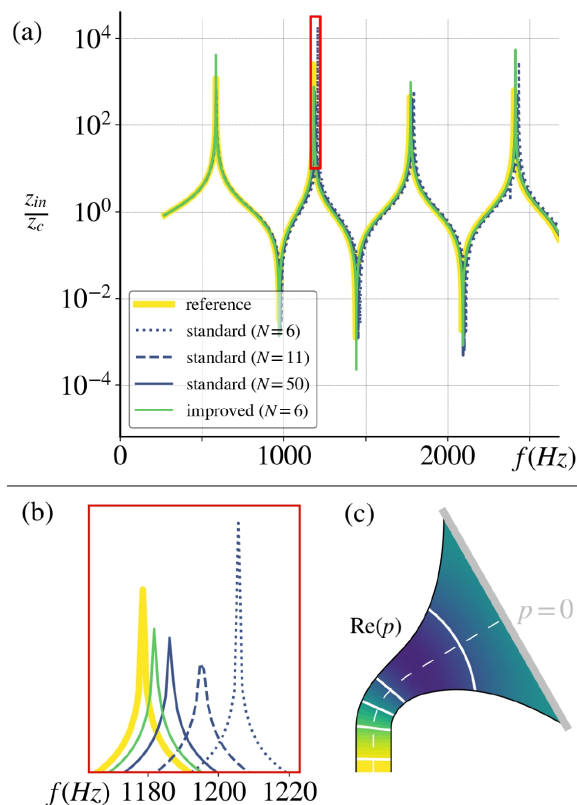


FIGURE 2.5 – (color online) (a) Modulus of the reduced input impedance, Eq. (2.33), as a function of the frequency. (b) Zoom in on the maxima near the second resonance frequency. (c) Real part of the pressure field at the second resonance frequency.

This result shows how it can be taken advantage of the significant enhancement of the

modal method by the use of supplementary modes. Indeed, a computation with a very limited number of modes (here, six) gives a more accurate solution than the standard method with even 50 modes, though the problem is low frequency. A zoom in is made in Fig. 2.5(b) on the second resonance pic : in evaluating the resonance frequency, the 6-mode improved solution is 8 times more accurate than the 6-mode standard solution and twice as accurate as the 50-mode standard solution.

Thus it allows a great reduction of computation time, hence the use of such numerical solution for complex, multiparametric, analyses, or in optimization schemes.

2.5 Conclusion

An improved formulation has been proposed for the multimodal wave propagation within a 3D waveguide with circular cross-section and arbitrary complex geometry, in order to improve the accuracy and convergence of numerical computations.

The results on axisymmetric configurations are consistent with the earlier studies on two-dimensional waveguides and show the same expected convergence rate of both the standard and improved formulation, for the wavefield as for the scattering coefficient.

Though more involved - there is no longer a simple and a priori optimal way of sorting the modes - the case of non-axisymmetric waveguides still benefits from a significant increase in the convergence rate, due to the use of supplementary modes. This only requires that, among the modes that are used, each subset with a given azimuthal dependence be “improved” by a supplementary mode.

Moreover, this study on three-dimensional waveguides confirms, after the earlier works on 2D systems, that the use of supplementary modes is unexpectedly relevant in curved waveguides of constant radius, where one would expect that using Neumann modes alone be appropriate. Thus, while the supplementary modes are designed to improve the boundary condition, they seem to enhance more globally the solution.

Finally, the proposed improved formulation makes the multimodal method a particularly relevant and numerically efficient approach for studying realistic, complex-shaped, 3D waveguides, that opens to a wide range of problems such as multiparametric analyses or shape optimization.

Seconde partie : Au-delà du mode supplémentaire

2.6 Base modale bi-améliorée

2.6.1 Principe

Nous avons vu précédemment que dans un problème axisymétrique, pour un ordre azimutal donné, l'ajout d'un mode supplémentaire dans la base modale classique permet d'améliorer grandement la convergence de la méthode par rapport au nombre de modes utilisés. Également, nous avons vu que les bénéfices pouvaient être étendus aux guides courbes où les ordres azimutaux sont couplés, pourvu que l'on dote chaque ordre azimutal d'un mode supplémentaire.

Une question qui survient naturellement est alors : puisque la convergence est sensiblement améliorée par l'ajout d'une composante non Neumann par ordre azimutal dans la base standard, peut-elle l'être encore en considérant non pas une, mais plusieurs composantes non Neumann par ordre azimutal ? Cette question a été abordée par Hazard et Lunéville [60] dans le cadre de géométries 2D, qui, sous certaines conditions détaillées en section 2.6.4, obtiennent une amélioration de la convergence avec deux modes Dirichlet. Cependant, ces modes Dirichlet ne sont pas orthogonalisés dans [60] et ne permettent donc pas le maintien d'un comportement découplé dans les parties droites du guide.

On développe ainsi en section 2.6.2 un processus d'orthogonalisation original qui permet d'étendre le comportement découplé dans les parties droites à l'utilisation de deux modes supplémentaires, dans le cadre de notre géométrie axisymétrique 3D. Hazard et Lunéville évoquent par ailleurs une dégradation significative du conditionnement de leur base modale lors de l'ajout d'une deuxième composante Dirichlet. Nous voyons donc en section 2.6.3 si notre processus d'orthogonalisation permet de résoudre ou non cette problématique. Enfin, en Sec. 2.6.4, nous présentons une expérience numérique montrant un bénéfice pour le second mode supplémentaire.

2.6.2 Construction des modes supplémentaires

Nous considérons dans le cadre de la base transverse bi-améliorée $N_\mu - 2$ modes Neumann $\varphi_{\mu\nu}$ où $\nu \in [0, N_\mu - 3]$, et nous souhaitons construire deux modes supplémentaires

$\varphi_{\mu,-1}$ et $\varphi_{\mu,-2}$. Pour cela, en plus de la première solution $\tilde{\varphi}_\mu$ du problème transverse droit (2.17) avec condition de Dirichlet à la paroi $\partial\mathcal{A}$, nous considérons la deuxième solution

$$\hat{\varphi}_\mu(r, \theta) = \hat{\Lambda}_\mu J_\mu(\hat{\gamma}_\mu r) \cos(\mu\theta), \quad (2.34)$$

avec $\hat{\gamma}_\mu$ le deuxième zéro de J_μ et $\hat{\Lambda}_\mu$ le coefficient de normalisation. Les deux modes Dirichlet $\tilde{\varphi}_\mu$ et $\hat{\varphi}_\mu$ sont ensuite orthogonalisés pour former

$$\tilde{\varphi}_{\mu,\perp} = \tilde{\Lambda}_{\mu,\perp} \left(\tilde{\varphi}_\mu - \sum_{\nu=0}^{N_\mu-3} \tilde{a}_{\mu,\nu} \varphi_{\mu,\nu} \right), \quad (2.35)$$

$$\hat{\varphi}_{\mu,\perp} = \hat{\Lambda}_{\mu,\perp} \left(\hat{\varphi}_\mu - \sum_{\nu=0}^{N_\mu-3} \hat{a}_{\mu,\nu} \varphi_{\mu,\nu} \right), \quad (2.36)$$

avec les facteurs de normalisation $\tilde{\Lambda}_{\mu,\perp}$ et $\hat{\Lambda}_{\mu,\perp}$. Le coefficient $\hat{a}_{\mu,\nu}$ est défini de la même façon que l'était $\tilde{a}_{\mu,\nu}$ en Sec. 2.3.3,

$$\hat{a}_{\mu,\nu} = \langle \varphi_{\mu,\nu}, \hat{\varphi}_\mu \rangle. \quad (2.37)$$

Ici on ne considère pas directement les modes Dirichlet orthogonalisés comme étant les modes supplémentaires. En effet, en l'état actuel, ils sont certes découplés des modes Neumann dans les parties cylindriques du guide, mais ils sont couplés entre eux. On pose tout d'abord les matrices

$$\mathbf{A}_\perp = \begin{pmatrix} \langle \tilde{\varphi}_{\mu,\perp}, \tilde{\varphi}_{\mu,\perp} \rangle & \langle \tilde{\varphi}_{\mu,\perp}, \hat{\varphi}_{\mu,\perp} \rangle \\ \langle \tilde{\varphi}_{\mu,\perp}, \hat{\varphi}_{\mu,\perp} \rangle & \langle \hat{\varphi}_{\mu,\perp}, \hat{\varphi}_{\mu,\perp} \rangle \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

$$\mathbf{B}_\perp = \begin{pmatrix} \langle \nabla_\perp \tilde{\varphi}_{\mu,\perp}, \nabla_\perp \tilde{\varphi}_{\mu,\perp} \rangle & \langle \nabla_\perp \tilde{\varphi}_{\mu,\perp}, \nabla_\perp \hat{\varphi}_{\mu,\perp} \rangle \\ \langle \nabla_\perp \tilde{\varphi}_{\mu,\perp}, \nabla_\perp \hat{\varphi}_{\mu,\perp} \rangle & \langle \nabla_\perp \hat{\varphi}_{\mu,\perp}, \nabla_\perp \hat{\varphi}_{\mu,\perp} \rangle \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

telles que dans les parties cylindriques du guide de rayon a_0 , les amplitudes $\tilde{p}_{\mu,\perp}$ et $\hat{p}_{\mu,\perp}$ des modes Dirichlet orthogonalisés $\tilde{\varphi}_{\mu,\perp}$ et $\hat{\varphi}_{\mu,\perp}$ satisfassent

$$\frac{d^2}{dx^2} \begin{pmatrix} \tilde{p}_{\mu,\perp} \\ \hat{p}_{\mu,\perp} \end{pmatrix} = (a_0^{-2} \mathbf{A}_\perp^{-1} \mathbf{B}_\perp - k^2 \mathbf{I}) \begin{pmatrix} \tilde{p}_{\mu,\perp} \\ \hat{p}_{\mu,\perp} \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

A l'aide de la matrice de passage

$$\mathbf{P}_\perp = \begin{pmatrix} P_{\perp,0} & P_{\perp,1} \\ P_{\perp,2} & P_{\perp,3} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

telle que $\mathbf{P}_\perp^{-1}(\mathbf{A}_\perp^{-1}\mathbf{B}_\perp)\mathbf{P}_\perp$ soit diagonale, on construit alors les deux modes supplémentaires

$$\varphi_{\mu,-1} = \Lambda_{\mu,-1} \left(P_{\perp,0} \tilde{\varphi}_{\mu,\perp} + P_{\perp,2} \hat{\varphi}_{\mu,\perp} \right), \quad (2.42)$$

$$\varphi_{\mu,-2} = \Lambda_{\mu,-2} \left(P_{\perp,1} \tilde{\varphi}_{\mu,\perp} + P_{\perp,3} \hat{\varphi}_{\mu,\perp} \right), \quad (2.43)$$

normalisés par les coefficients $\Lambda_{\mu,-1}$ et $\Lambda_{\mu,-2}$. Ces deux modes supplémentaires peuvent alors être associés aux $N_\mu - 2$ modes Neumann pour former la base modale bi-améliorée, qui fournit l'expansion modale suivante s'écrive

$$p(x, r, \theta) = \sum_{\mu=0}^{\mu_{\max}} \sum_{\nu=-2}^{N_\mu-3} p_{\mu,\nu}(x) \varphi_{\mu,\nu}(r, \theta). \quad (2.44)$$

La façon dont nous avons construit les deux modes supplémentaires permet ainsi le maintien des propriétés d'orthogonalité (2.20a)-(2.20d). Pour rappel, celles-ci garantissent entre autres un comportement découplé dans les parties cylindriques.

En outre, dans la continuité des observations faites pour un unique mode supplémentaire, on observe que pour un indice azimutal μ , les valeurs propres $\gamma_{\mu,-1}$ et $\gamma_{\mu,-2}$ associées aux modes supplémentaires sont supérieures aux valeurs propres de tous les autres modes Neumann. Ainsi, les deux modes supplémentaires sont les deux modes les plus évanescents dans les parties cylindriques, ce qui préserve le comportement classique suffisamment en amont des zones d'hétérogénéité, dans notre cas de rayon variable ou de courbure non nulle.

Notons que la méthode développée ici pour construire deux modes supplémentaires dans le cadre de géométries 3D avec transformation géométriques pourrait aisément être étendue à la construction d'un nombre arbitraire de modes supplémentaires garantissant un comportement découplé.

2.6.3 Conditionnement

Hazard et Lunéville décrivent que l’ajout d’une seconde composante Dirichlet est susceptible de détériorer le conditionnement de la base de fonctions. Avec notre méthode de construction des modes supplémentaires, notre base modale bi-améliorée est orthonormale : la matrice \mathbf{A} est la matrice identité, son inversion est immédiate, et ne soulève aucun problème de conditionnement.

En revanche, la matrice \mathbf{A}_\perp utilisée pour la construction des deux modes supplémentaires est pleine et doit être inversée. On juge donc ici pertinent d’observer son conditionnement

$$\|\mathbf{A}_\perp\|_2 = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}_\perp \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}, \quad (2.45)$$

afin de vérifier que notre méthode d’orthogonalisation des modes Dirichlet est bien libre de tout problème de conditionnement. On trace en figure 2.6 son évolution en fonction du nombre de modes axisymétriques pris en compte.

On observe alors que le conditionnement $\|\mathbf{A}_\perp\|_2$ augmente fortement avec le nombre de modes de la base bi améliorée, allant jusque 2.10^7 pour 50 modes. Cela traduit un risque accru de rencontrer des instabilités numériques lors de l’inversion de la matrice \mathbf{A}_\perp (un conditionnement parfait correspondrait à $\|\mathbf{A}_\perp\|_2$ petit, au minimum 1).

Que la deuxième composante Dirichlet soit orthogonalisée, comme ici, ou non, comme dans [60], on observe donc qu’elle entraîne une dégradation du conditionnement de la base modale. Qualitativement, on comprend que plus on augmente le nombre de modes Neumann, plus la base bi-améliorée se rapproche d’une famille de fonctions transverses liées. En effet, la famille des modes standards étant une base des fonctions transverses, les modes supplémentaires peuvent s’écrire comme une combinaison d’une infinité de modes Neumann.

Les deux modes supplémentaires de la base bi-améliorée sont représentés en Fig. 2.6.b pour différents nombres de modes Neumann. Dans la prochaine Sec. 2.6.4 où l’on compare la convergence fournie par la base modale bi-améliorée à celles des bases modales standard et améliorée, nous n’observons pas d’impact pratique de cette dégradation du conditionnement.

2.6.4 Résultats

En utilisant toujours le même indicateur ε_p^N sur l’erreur du champ de pression (cf. Eq. (2.29)), on compare pour la géométrie axisymétrique présentée en Sec. 2.4.2 les performances des

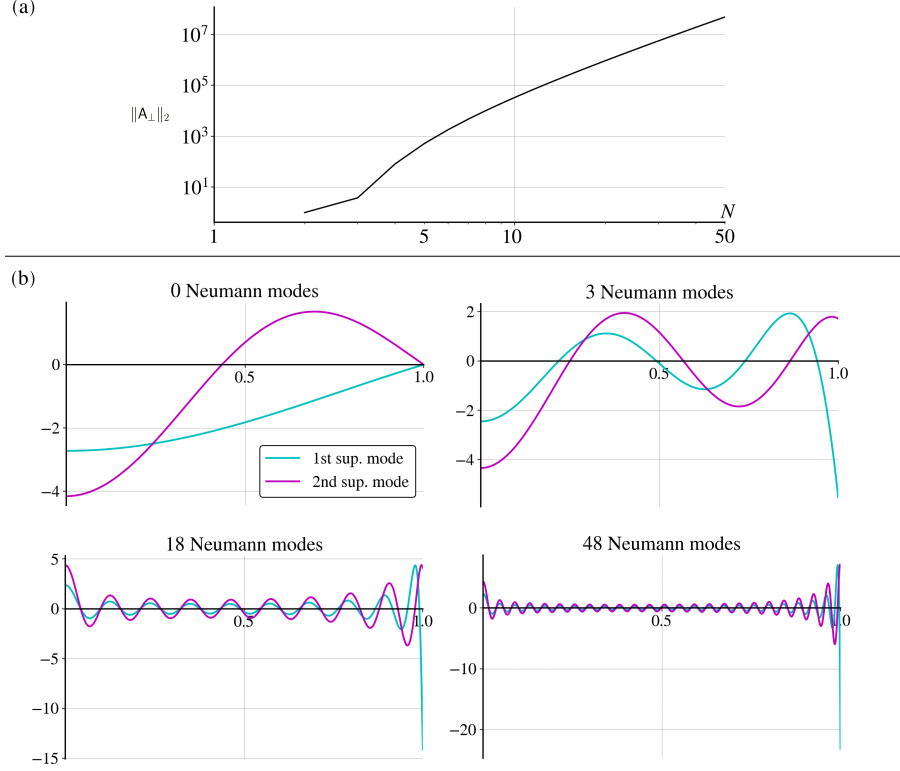


FIGURE 2.6 – (a) Evolution du conditionnement de la matrice $\|A_{\perp}\|_2$ selon le nombre de modes pour le premier indice azimutal $\mu = 0$. (b) Toujours pour $\mu = 0$, représentations des deux modes supplémentaires $p_{\mu,-1}$ et $p_{\mu,-2}$ de la base bi-améliorée pour différents nombres $N - 2$ de modes Neumann $p_{\mu,\nu}$, $\nu \geq 0$.

bases modales standard, améliorées et bi-améliorées. On choisit pour l'expérience numérique une fréquence de $k = 3/a_0$, et l'on se focalise sur un unique indice azimutal $\mu = 0$. On rappelle qu'en section 2.4.2, pour un guide axisymétrique, l'amélioration simple de la base modale fournissait des résultats similaires pour tous les indices azimutaux. Par ailleurs, on signale que l'erreur ε_p^N est calculée par rapport à une solution de référence obtenue avec 96 modes de la base améliorée.

Il apparaît en regardant la décroissance de l'erreur sur le champ de pression (cf. Fig. 2.7.b) que l'ajout d'un second mode supplémentaire est bien bénéfique en terme de minimisation de l'erreur. En effet, si l'on compare les bases modales améliorées et bi-améliorées, on remarque qu'à partir de $N_{\mu} = 5$ modes, l'erreur commence à devenir plus faible pour la base transverse bi-améliorée que pour la base modale améliorée. En particulier, on observe que sur la plage de $N = 10$ à 20 modes, on approche un taux de convergence bi-améliorée de $1/N^{4.5}$, là où la base modale standard converge avec un taux de $1/N$ et la

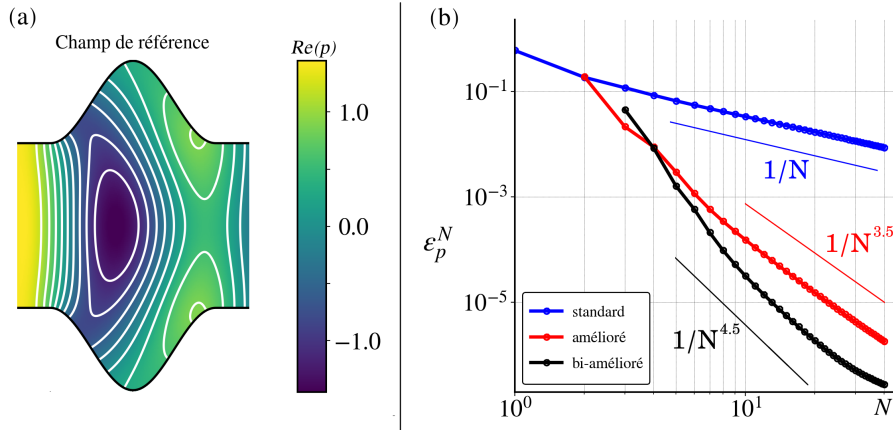


FIGURE 2.7 – (a) Partie réelle du champ de référence calculé avec 96 modes de la base améliorée pour une fréquence $k = 3/a_0$. (b) Décroissance de l’erreur ϵ_p^N sur le champ de pression.

base modale améliorée avec un taux de $1/N^{3.5}$. La convergence de l’erreur avec la base bi-améliorée semble cependant décroître progressivement au-delà de 20 modes, affaissement caractéristique d’une solution de référence imparfaitement précise ne permettant pas de mettre en lumière la réelle diminution de l’erreur en deçà d’un certain seuil. Ce genre de comportement pour des précisions très fines se retrouve également dans la littérature [60, 86].

On peut noter que l’écart de performance entre les bases modales standard et améliorées reste supérieur à celui entre les bases améliorées et bi-améliorées. L’ajout du second mode supplémentaire n’équivaut pas à l’ajout du premier en terme d’incrément de performance. Le fait que le second mode supplémentaire contribue à améliorer la convergence peut s’expliquer qualitativement par la considération suivante.

Dans la base modale améliorée, le mode supplémentaire est le seul mode capable de restaurer la composante Dirichlet à la paroi. Son amplitude est donc fortement contrainte par la condition à la paroi, si bien que celle-ci peut s’éloigner de la valeur qui permettrait le meilleur respect de l’équation de Helmholtz (2.1a) au sein du domaine. L’introduction d’un second mode supplémentaire offre la possibilité de rétablir la condition à la paroi à l’aide d’une pondération des deux modes supplémentaires, qui peut alors être choisie pour respecter au mieux la condition aux limites tout en satisfaisant l’équation de Helmholtz dans le domaine, d’où une erreur plus faible sur la solution.

Notons que, Hazard et Lunéville observent une amélioration pour l’ajout d’une seconde

composante Dirichlet uniquement lorsque le rayon $a(x)$ est de dérivée seconde $a''(x)$ continue. Dans notre cas, la base bi-améliorée fournit une amélioration de la convergence alors que la dérivée seconde $a''(x)$ du rayon présente des discontinuités aux raccordements des parties droites et de la partie centrale, où le rayon varie entre a_0 et $2a_0$ de façon sinusoïdale. A ce jour l'auteur ne dispose ainsi pas d'explication sur ce point. On imagine en effet difficilement que cette différence de résultats soit imputable au passage à la 3D ou à l'orthogonalisation des modes Dirichlet.

Nous n'étudions ici pas de géométries courbes dans lesquelles les indices azimutaux sont couplés ; nous nous attendons pour la base bi-améliorée à des résultats dans la continuité de ceux de la base améliorée, en ajoutant deux modes supplémentaires par indice azimutal. Au vu de l'amélioration procurée par l'ajout d'un second mode supplémentaire sur un ordre azimutal, on peut cependant se demander : dans quelle mesure une convergence encore supérieure peut-elle être atteinte avec davantage de composantes non Neumann ? Egalement, dans ce cas, dans quelle mesure les problèmes de conditionnement deviendraient-ils limitants ? A la connaissance de l'auteur, la littérature ne contient pas de résultats numériques à ce sujet.

Pour augmenter le nombre de composantes non Neumann, une première démarche pourrait être de résoudre le problème pour un nombre toujours croissant de modes supplémentaires. Nous adoptons ici une autre voie, qui consiste à étudier une base transverse polynomiale, donc non modale, dans laquelle chaque fonction transverse satisfait une condition mixte différente à la paroi.

2.7 Base transverse polynomiale

2.7.1 Contexte

A cette heure, la littérature ne contient pas d'exemples d'utilisation de base polynomiale pour discrétiser le problème transverse en toute abscisse d'un guide de section fortement variable, ce que nous développons dans cette section.

Notons cependant que plusieurs travaux font appel à des polynômes pour calculer ponctuellement les modes qui sont utilisés tout le long d'un guide de section transverse

constante [59, 111] ou quasi constante [23]. L'utilisation de polynômes dont le support est l'ensemble de la section transverse permet alors une convergence supérieure à celle pouvant être obtenue avec les fonctions de forme localisées utilisées dans la méthode des éléments finis [133]. Des instabilités numériques sont cependant susceptibles d'apparaître [24, 133].

Par ailleurs, plusieurs études font appel à des polynômes pour décrire le champ de pression à l'interface entre un guide droit et un milieu semi-infini [4, 116]. Rdzanek en particulier, utilise des polynômes de Zernike qui sont, comme nous allons le voir, particulièrement adaptés à la discrétisation d'un champ sur une section circulaire.

2.7.2 Polynômes de Zernike

Les polynômes de Zernike sont les fonctions transverses définies sur le disque unité par

$$\varphi_{\mu,\nu}(r, \theta) = \cos(\mu\theta) \sqrt{\frac{4(\nu+1)}{(1+\delta_{\mu 0})}} \sum_{i=0}^{\frac{\nu-\mu}{2}} \frac{(-1)^i (\nu-i)!}{i! \left(\frac{\nu+\mu}{2}-i\right)! \left(\frac{\nu-\mu}{2}-i\right)!} r^{\nu-2i}, \quad (2.46)$$

où $\mu \in \mathbb{N}$ et ν est un entier tel que

$$\exists i \in \mathbb{N}, \nu = \mu + 2i. \quad (2.47)$$

On les représente en Fig. 2.8. Une dépendance orthoradiale en sinus pourrait également être utilisées; cette discussion rejoint celle menée en section 2.3.3) pour les modes classiques. La discrétisation transverse du champ associée aux polynômes de Zernike s'écrit

$$p(x, r, \theta) = \sum_{\mu \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{\nu = \mu + 2i \\ i \in \mathbb{N}}} p_{\mu,\nu}(x) \varphi_{\mu,\nu}(r, \theta). \quad (2.48)$$

Historiquement développés par Zernike [136] et Nijboer [98] pour décrire la forme des aberrations optiques de lentilles circulaires, les polynômes de Zernike sont depuis utilisés dans divers domaines, notamment en traitement d'image [126], en électro-acoustique [1] ou en propagation guidée [116].

Les polynômes de Zernike présentent un intérêt car, comme le montrent Bhatia et Wolf, il s'agit de l'unique base de polynômes orthonormaux sur le cercle unité, d'ordres

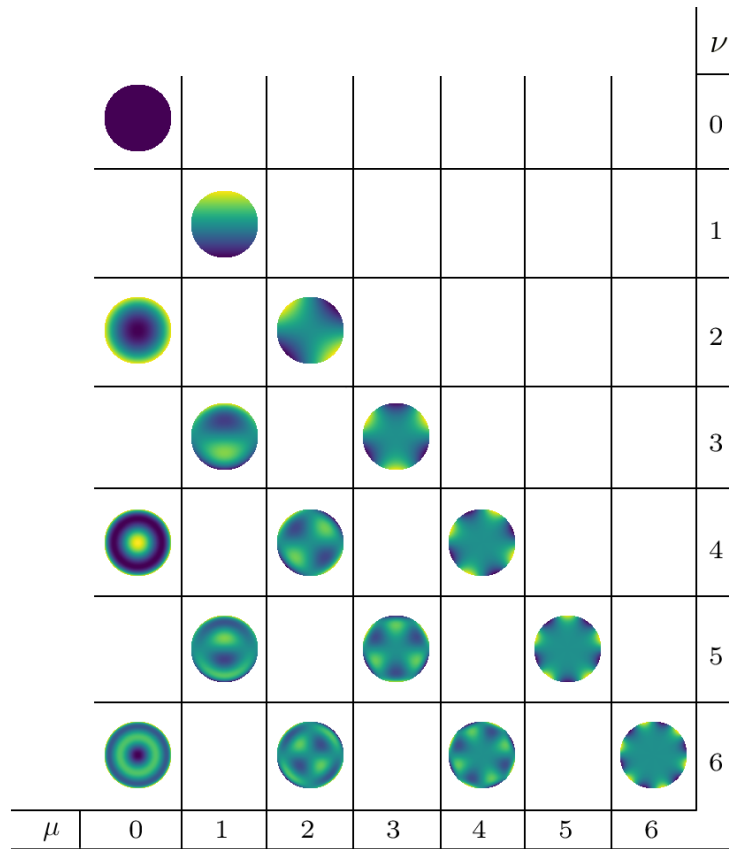


FIGURE 2.8 – Représentation des polynômes de Zernike sur une section transverse circulaire en fonction de l’ordre azimutal μ et de l’ordre polynomial ν . Figure réalisée à partir du code disponible à l’adresse github.com/jacopoantonello/zernike.

croissants sur chaque indice azimutal, et parfaitement réguliers au centre du disque $r = 0$. Dans notre cas, la propriété d’orthogonalité se traduit notamment par le fait que la matrice \mathbf{A} soit l’identité \mathbf{I} , qui n’a donc pas besoin d’être inversée numériquement. Le fait que les ordres soient croissants permet de décrire des variations du champ qui soient de plus en plus rapides lorsque l’on augmente le nombre de fonction transverses, comme avec les bases modales classiques.

A noter, si la propriété d’orthogonalité (2.20a) garantissant une matrice \mathbf{A} diagonale est bien respectée par les polynômes de Zernike, ces derniers ne satisfont pas la propriété d’orthogonalité (2.20b) concernant les gradients des modes. La matrice \mathbf{B} n’est donc pas diagonale, et le problème droit

$$\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{p} = \left(a_0^{-2} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - k^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{p} \quad (2.49)$$

n'est pas découplé. Il ne le devient qu'après diagonalisation de $A^{-1}B$ et utilisation de la matrice de passage pour reconstituer les modes cylindriques à partir de la base polynomiale (cf. Sec. 1.3.3 et Sec. 3.2.3.d). Ce processus, qui peut être vu comme une reconstruction des modes cylindriques à partir des polynômes, est illustré en Fig. 2.9 où l'on montre la reconstruction qui est faite du deuxième mode Neumann à partir de plusieurs nombres de polynômes. Avec quatre polynômes, l'approximation polynomiale du deuxième mode droit est déjà précise. De façon générale, plus l'indice d'un mode est élevé, plus son approximation requiert de polynômes.

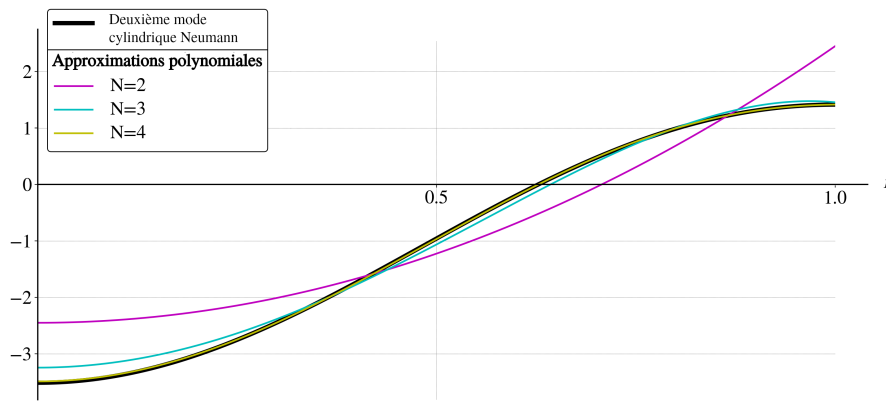


FIGURE 2.9 – Approximation polynomiale du deuxième mode cylindrique Neumann axisymétrique, pour plusieurs nombres de polynômes de Zernike axisymétriques pris en compte.

On observe là un autre avantage des polynômes de Zernike pour notre problème : ils reconstituent efficacement les modes des parties droites, car leurs ordres (cf. Eq. (2.47)) sont les mêmes que ceux des polynômes présents dans le développement en série entière des fonctions de Bessel

$$J_\mu(r) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^i}{i! (\mu + i)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2i + \mu}. \quad (2.50)$$

2.7.3 Résultats

2.7.3.a Guide axisymétrique

Moyenne fréquence Pour commencer l'étude des performances de la base polynomiale, nous considérons le même problème axisymétrique que celui de la section. 2.4.2 pour l'étude de la base modale bi-améliorée. La fréquence de $k = 3/a_0$ est qualifiée de "moyenne" pour décrire le fait qu'un seul mode est propagatif dans les parties du guide

où le rayon est minimal, et que plusieurs (deux) le sont au maximum du rayon.

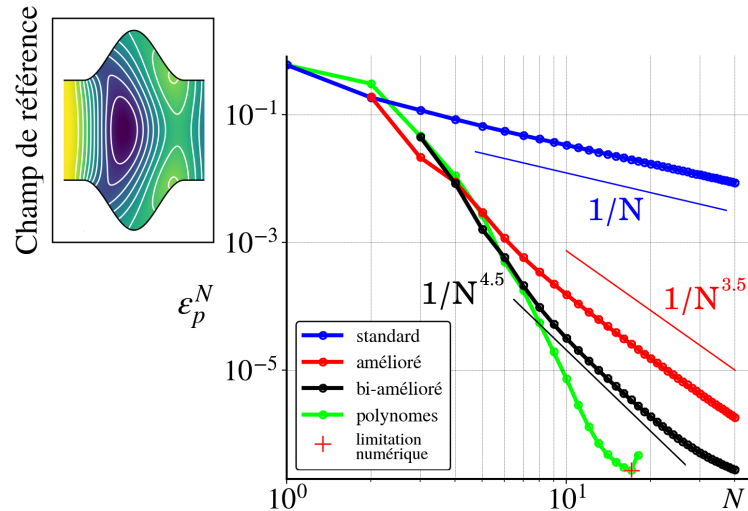


FIGURE 2.10 – Erreur sur le champ de pression en fonction du nombre de fonctions transverses pour la géométrie présentée en Sec. 2.4.2 et une fréquence de $k = 3/a_0$. L'erreur est tracée pour plusieurs bases, à savoir la base modale standard (bleu), la base modale améliorée (rouge), la base modale bi-améliorée (noir) et la base polynomiale (vert).

Pour un bas nombre de modes (ici jusque $N \simeq 5$), on observe en Fig. 2.10 que les bases modales améliorées, modales bi-améliorées et polynomiales fournissent une convergence similaire. Au delà, la base polynomiale fournit la convergence la plus élevée, si bien que pour $N = 12$ polynômes est atteinte une précision sur la pression qui est supérieure à celle obtenue pour 40 modes de la base améliorée et équivalente à celle obtenue pour 22 modes de la base bi-améliorée.

La plage d'utilisation de la base polynomiale est cependant limitée, puisque l'erreur est supérieure pour une solution calculée avec $N = 18$ polynômes qu'avec $N = 17$ polynômes, et que nos algorithmes cessent de fonctionner dès qu'un nombre de polynômes supérieur à $N = 18$ est utilisé. Cela illustre que le conditionnement de la base transverse peut devenir critique à des nombres de modes pourtant raisonnables, lorsque l'on s'affranchit des modes cylindriques Neumann.

Si dans sa plage d'utilisation, la base polynomiale peut ici fournir une bonne approximation de la solution, on soupçonne cependant que dans des applications hautes fréquences, le conditionnement de la base polynomiale devienne un obstacle majeur. En

effet le champ subit de plus fortes variations spatiales et nécessite donc fondamentalement plus de fonctions transverses pour être suffisamment bien décrit.

Très hautes fréquences Dans le but de mettre en valeur le caractère potentiellement limitant du mauvais conditionnement de la base polynomiale, nous augmentons à présent la fréquence d'étude, toujours pour notre géométrie axisymétrique. On considère ainsi une fréquence réduite $ka_0 = 40$, ce qui implique un nombre de modes propagatifs allant de 12 à 25 dans les différentes parties du guide.

On observe alors sur la Fig. 2.11 que la bonne description du champ de pression nécessite à priori au moins 25 modes, c'est-à-dire le nombre maximal de modes propagatifs. C'est en tout cas le seuil à partir duquel les erreurs sur le champ de pression des bases modales standard et améliorée décroissent significativement. Concernant la base polynomiale, celle-ci ne peut atteindre le nombre de fonctions transverses nécessaires à la bonne description du problème, puisqu'à nouveau le conditionnement devient limitant dès $N = 18$ modes.

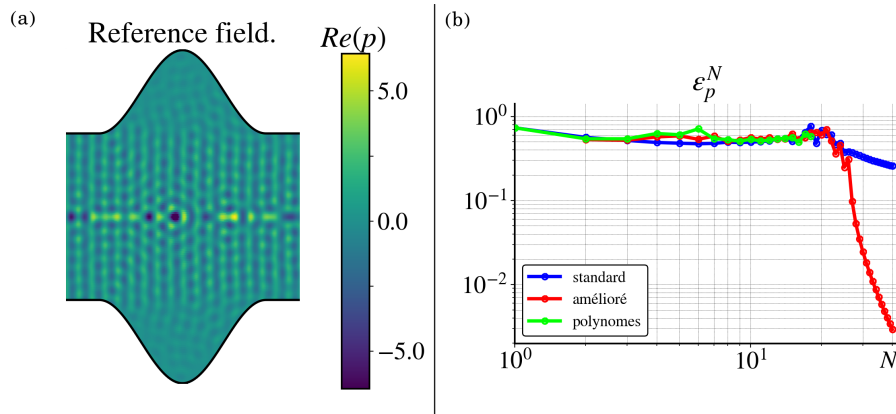


FIGURE 2.11 – (a) Partie réelle du champ de pression pour la géométrie axisymétrique excité par un piston plan oscillant à une fréquence de $ka_0 = 40$. (b) Erreur sur le champ de pression selon le nombre de modes pour la géométrie axisymétrique et une fréquence .

On montre bien que pour des fréquences trop élevées, l'emploi de la base polynomiale est inadaptée et que la résolution du problème nécessite l'emploi d'une base modale. L'utilisation de la base polynomiale est par exemple à proscrire pour modéliser des faisceaux acoustiques [50].

2.7.3.b Guide courbe

Pour une géométrie courbe où les ordres azimutaux sont couplés, on répartit pour rappel notre nombre total de modes sur un nombre fini d'indices azimutaux. Cette différence dans le choix des modes par rapport au cas d'un guide axisymétrique est susceptible d'avoir un impact sur l'apparition du problème de conditionnement. C'est cet impact que nous nous proposons d'explorer ici.

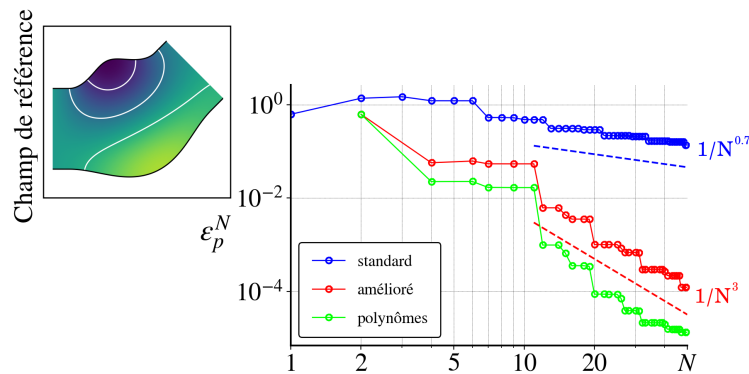


FIGURE 2.12 – Erreur sur le champ de pression dans la géométrie courbe de rayon variable présentée en section 2.4.3 pour les bases modales standard (bleu) et améliorée (rouge) ainsi que pour la base polynomiale (vert).

Pour cela, on revient sur le problème de propagation dans la géométrie courbe de rayon variable présentée en section 2.4.3. Également, pour un nombre total de modes donné, on répartit les polynômes de Zernike sur les différents indices azimutaux en respectant le même nombre de fonctions transverses par ordre azimutal que pour la base améliorée. On trace alors l'évolution de l'erreur sur le champ de pression pour la base polynomiale, comparativement à celles des bases modales standard et améliorée. Les résultats sont présentés en Fig. 2.12.

On constate globalement que les taux de décroissance de l'erreur pour les bases modale améliorée ou polynomiale sont proches. Cela peut sembler surprenant, puisqu'en section 2.7.3.a, dans le cadre d'une géométrie axisymétrique, la base polynomiale fournissait un taux de convergence plus nettement supérieur. Cela peut s'expliquer par le fait que pour un nombre de fonctions transverses donné, l'ordre polynomial le plus élevé est beaucoup plus faible quand les polynômes sont répartis entre différents ordres azimutaux. Ici, on ne dépasse pas 6 polynômes sur un indice azimutal pour $N = 50$ polynômes. Il

se peut que l'on n'ait alors pas atteint le seuil à partir duquel la base polynomiale fournit réellement une convergence plus élevée. Pour rappel, dans l'exemple axisymétrique en moyenne fréquence présenté en section 2.7.3.a, la base polynomiale ne se distinguait significativement de la base modale améliorée qu'à partir de 5 modes axisymétriques sur l'indice azimutal observé. Pour la même raison, le calcul de la solution avec la base polynomiale ne rencontre ici pas de limitation numérique.

A noter, une autre façon d'ordonner les polynômes, par ordre polynomial croissant, est présentée en annexe E.2. Celle-ci fournit une amélioration modérée de la convergence par rapport à l'ordonnement des modes par fréquence de coupure.

2.8 Conclusion bis

Dans cette seconde partie, d'autres bases contenant plus d'un mode non Neumann par indice azimutal ont été investiguées, à savoir une base bi-améliorée contenant deux modes supplémentaires, et une base polynomiale. Toutes les deux fournissent une convergence supérieure à celle de la base modale améliorée.

A la différence des modes Dirichlet introduits par Hazard et Lunéville, les deux modes supplémentaires de la base bi-améliorée présentés dans ce chapitre sont orthogonaux et conservent le comportement découplé. On observe que l'incrément de performance dû à l'ajout d'une seconde composante non Neumann est moins important que l'incrément fourni par l'ajout de la première. Si on observe une dégradation du conditionnement de la base avec le nombre de modes, celui-ci ne porte cependant pas à conséquence dans l'exemple axisymétrique étudié.

La base polynomiale appliquée à la discrétisation d'une géométrie axisymétrique, fournit de son côté une décroissance significativement plus rapide de l'erreur sur le champ de pression que la base modale améliorée. En revanche, des problèmes d'ordre numérique limite fortement le nombre maximum de polynômes pouvant être considérés, si bien qu'il devient impossible de résoudre le problème de propagation pour de très hautes fréquences, telles que de grands nombres de fonctions transverses sont nécessaires. On comprend en étudiant une géométrie courbe que la limitation numérique observée concerne chaque indice azimutal séparément.

Notons que la méthode ayant servi à construire le second mode supplémentaire peut être utilisée pour en construire davantage, tout en garantissant un comportement directement découplé dans les parties droites du guide. La base polynomiale ne restitue pas parfaitement les modes des parties droites mais en fournit de bonnes approximations.

Pour conclure, la base modale améliorée demeure un choix pertinent pour résoudre efficacement le problème de propagation sans limite d'utilisation. Elle sera utilisée dans la suite de ce manuscrit.

RAYONNEMENT DES GUIDES DE FORMES COMPLEXES

3.1 Introduction

Comme évoqué au chapitre 1, Roure [118] pose les fondements de l'application de la méthode multimodale au rayonnement des guides, en modélisant un guide de section variable rayonnant dans un milieu semi-infini. Le rayon du guide étant alors constant par morceaux, Pagneux et coll. reprennent ces travaux en introduisant les variations continues du rayon [110], toujours pour un guide bafflé.

A l'aide de PMLs, Félix et coll. [47] modélisent plus tard le rayonnement d'un tube droit d'épaisseur finie dans un milieu infini. Comme présenté au chapitre 1, la géométrie est alors décomposée en trois guides, nommés A , B et C . Le guide A débouche dans le guide B avec PML et est entouré du guide annulaire C avec PML (cf. Fig. 3.1). Les trois guides sont raccordés à l'aide des continuités de la pression et du débit aux interfaces. Doc et coll. [36] reprennent ces travaux en remplaçant le tube droit par un pavillon. Le problème de propagation dans le pavillon est alors résolu à l'aide des travaux de Pagneux et coll. La partie annulaire avec PML qui entoure le pavillon est cependant droite, afin de pouvoir utiliser une décomposition en ondes aller-retour.

L'enjeu de ce chapitre est de s'affranchir de cette simplification, et de modéliser un guide annulaire C qui épouse la paroi extérieure du guide rayonnant A (cf. Fig. 3.1). Cela implique que le guide C soit de rayon variable, en plus d'être muni d'une PML. Les problèmes de propagation des guides A et B présentés dans les chapitres 1 et 2 étant toujours valides, on souhaite ici :

- trouver un système de coordonnées adapté à la description du guide C , ainsi que la transformation géométrique associée depuis l'espace cartésien de référence ;

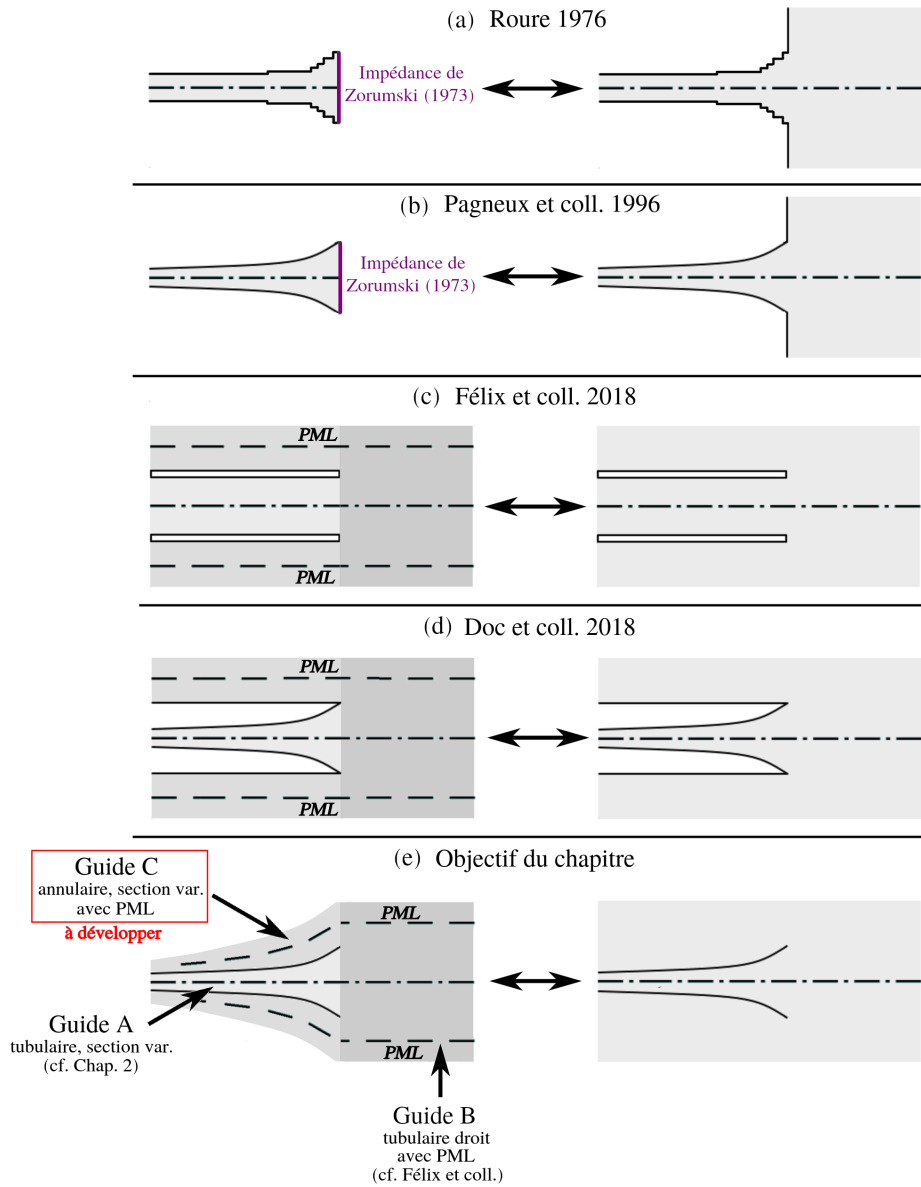


FIGURE 3.1 – Situations de rayonnement successivement décrites par la méthode multimodale. À gauche se trouvent les géométries modélisées, à droite les milieux physiques équivalents. (a) Pavillon de rayon continu par morceaux rayonnant dans un milieu semi-infini. [118] (b) Pavillon rayonnant dans un milieu semi-infini [110]. (c) Tube droit rayonnant dans un espace infini [47]. (d) Pavillon encastré dans un cylindre rayonnant dans un espace infini [36]. (e) Pavillon rayonnant dans un espace infini avec caractéristiques des guides impliqués (objectif de ce chapitre).

- exprimer l'équation de propagation modale dans le guide C ;
- raccorder les guides en sachant que chaque guide dispose d'un système de coordonnées propre.

Pour y parvenir, nous développons d'abord en section 3.2 une formulation de la méthode multimodale généralisée à des transformations géométriques quelconques. Cela nous permet d'écrire une forme générale du problème de raccordement adaptée à nos différents systèmes de coordonnées, et de préparer les outils analytiques pour la section 3.2, où l'on présente plus spécifiquement la transformation géométrique du guide annulaire C de section variable avec PML et le problème d'onde transformé qui en découle. Se posera également en question section 3.2 la question de la construction de la base modale améliorée pour satisfaire la condition au limite sur la paroi inférieure du guide C .

Nous sommes ainsi en mesure de modéliser en section 3.4 le rayonnement de guides de rayon variable sans limitation sur la géométrie extérieure.

3.2 Méthode multimodale dans un système de coordonnées curvilignes arbitraire

3.2.1 Exemples de systèmes de coordonnées curvilignes

Un avantage clé de la méthode multimodale est de limiter le nombre de degrés de libertés nécessaires à la bonne représentation du champ, en tirant profit de l'existence d'une direction de propagation privilégiée au sein du guide d'onde. Plus précisément, on distingue la direction longitudinale, selon un axe du guide, et la·es direction·s transverse·s. Dans la·es direction·s transverse·s le champ est discrétisé sur une base de fonctions adaptées, et les amplitudes transverses associées sont calculées en chaque abscisse longitudinale.

Par essence, cette façon de procéder implique donc d'utiliser un système de coordonnées curvilignes \mathcal{R} ; et par conséquent d'être capable d'exprimer ces coordonnées en fonction d'un autre système de coordonnées plus simple, par exemple un système de coordonnées cartésiennes \mathcal{X} , dans lequel on connaît l'expression des équations de conservation. Naturellement on opère cette distinction si la complexité de la géométrie l'exige, autrement les deux systèmes de coordonnées – curvilignes et élémentaires – sont implicitement

confondus.

Soit $N_D = 2$ ou 3 la dimension de l'espace dans lequel on souhaite modéliser le guide d'onde \mathcal{D} de bord $\partial\mathcal{D}$. Dans la suite on note x la variable permettant de se repérer sur l'axe \mathcal{C} du guide et \mathbf{x}_\perp le vecteur de position transverse rassemblant les $N_\perp = N_D - 1$ coordonnées transverses permettant de se repérer sur les sections transverses \mathcal{A} à abscisse longitudinale x constante. Voir la Fig. 3.2 pour un exemple 2D.

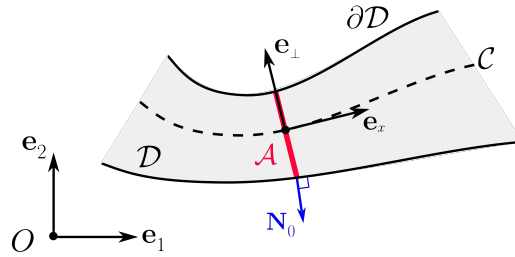


FIGURE 3.2 – Repère cartésien 2D $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et repère curviligne $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_\perp)$ permettant la description d'un guide \mathcal{D} par deux systèmes de coordonnées, respectivement \mathcal{X} et \mathcal{R} . En rouge, une section transverse, en bleu une normale à la paroi.

A noter qu'il est possible de concevoir des transformations telles que les sections transverses \mathcal{A} représentées dans le système cartésien \mathcal{X} ne soient pas droites. Il n'y a à cette heure pas d'exemple d'utilisation de la méthode où des sections non-droites sont employées, mais cela pourrait à priori être avantageux dans le cas d'un pavillon rayonnant, dans le cadre d'une transformation sphérique. Cela permettrait en effet de tirer profit de la forme du champ qui se rapproche d'une onde sphérique [66]. Hélie [63] propose d'ailleurs un moyen d'approcher analytiquement le rayonnement en sortie du pavillon par une portion de sphère pulsante. Dans le cadre précis de la méthode multimodale, on montre cependant les limites d'une telle transformation en annexe H.

Concernant la façon de se repérer au sein d'une section droite, selon le type de section qui est étudié, on utilise dans la littérature une description cartésienne ou polaire. La première possibilité est notamment utilisée pour des guides de section rectangulaire [71, 76, 95] et la seconde pour des guides de section circulaire (cf. Chap. 2).

Par ailleurs, le système de coordonnées curvilignes \mathcal{R} peut être tel que le passage du système de coordonnées initiales \mathcal{X} à ce système entraîne un changement de métrique,

comme lorsque l'on passe d'un guide de section variable à un guide de section constante (cf. Fig. 3.3). C'est le cas dans le chapitre 2, et ça l'est également dans ce chapitre en section 3.3. Un lecteur curieux de mieux connaître l'historique des transformations géométriques permettant de se ramener à un guide de section constante pourra se référer à l'introduction de Nilsson [99], mais ici déjà on peut noter une première contribution sur le sujet qui est celle d'Abrahamsson et Kreiss [2].

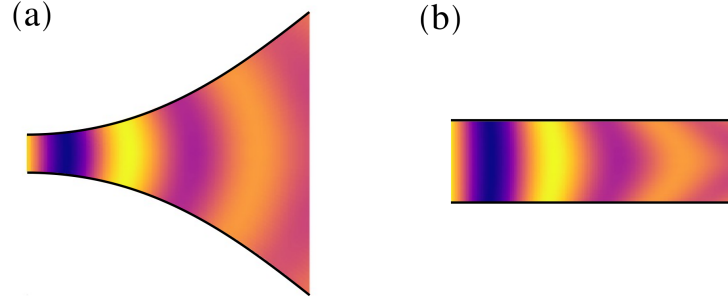


FIGURE 3.3 – Illustration d'une transformation géométrique permettant de se ramener à un guide de section constante. (a) Partie réelle du champ de pression dans un pavillon rempli d'un fluide homogène. (b) Champ correspondant dans le même guide mais dans le système de coordonnées transformé, tel que le guide est de section constante.

Enfin, indépendamment des considérations précédentes, les coordonnées curvilignes utilisées pour décrire la position dans le guide peuvent être complexes, ce qui est le cas pour les guides avec PMLs [36, 47] de façon générale et ce qui sera le cas pour le guide annulaire présenté en section 3.3. Dans la suite de cette section 3.2 on développe la méthode multimodale sans fixer de système de coordonnées curvilignes en particulier.

3.2.2 Transformation du problème d'onde

3.2.2.a Problème d'onde initial

Le guide d'onde est rempli d'un fluide de masse volumique ρ et de compressibilité isentropique χ . Comme dans les chapitres précédents, les sources de dissipation et de non-linéarité au sein du fluide sont négligées et les champs de pression p et de vitesse \mathbf{v} au sein du guide ont une dépendance temporelle traduite par un facteur $e^{-j\omega t}$. En pratique, on préférera à \mathbf{v} la variable $\mathbf{d}_0 = j\omega\rho\mathbf{v}$ qu'on qualifie de débit, bien qu'elle soit rigoureusement homogène à une dérivée temporelle de débit massique.

A l'aide de ces notations, on peut désormais écrire les équations de conservation de la quantité de mouvement et de la masse, respectivement

$$\mathbf{d}_0 = \nabla_0 p \quad \text{dans } \mathcal{D}, \quad (3.1)$$

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{d}_0 + k^2 p = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}. \quad (3.2)$$

$k = w/c$ est le nombre d'onde, avec $c = (\chi\rho)^{-1/2}$ la célérité du son dans le milieu. Les équations (3.1) et (3.2) sont écrites dans le système de N_D coordonnées cartésiennes \mathcal{X} , avec ∇_0 l'opérateur nabla dans le système de coordonnées \mathcal{X} .

Par ailleurs, pour compléter le problème dans le domaine, on écrit la condition aux parois

$$\mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{N}_0 = Y_{\partial\mathcal{D}} p \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}, \quad (3.3)$$

avec $Y_{\partial\mathcal{D}}$ l'admittance de la paroi et \mathbf{N}_0 le vecteur normal à la paroi. L'admittance de paroi a déjà été modélisée à l'aide de la méthode multimodale, mais uniquement pour des guides de section constante [10, 16, 48, 51, 59] ou de géométries faiblement variables [23]. Ici nous qualifions $Y_{\partial\mathcal{D}}$ d'admittance car nous adoptons une analogie électro-mécanique classique (cf. Ann. F).

3.2.2.b Débit

On cherche tout d'abord le débit \mathbf{d} , qui équivaut dans le nouveau système de coordonnées \mathcal{R} au débit \mathbf{d}_0 de l'ancien système de coordonnées cartésiennes \mathcal{X} . On montre (cf. Ann. G) que

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = h \nabla_0 \cdot \mathbf{d}_0 \quad (3.4)$$

avec $h = 1/\det(\mathbf{J})$ et \mathbf{J} le jacobien de la transformation de \mathcal{X} vers \mathcal{R} . De l'équation. (3.4) et de $\nabla \cdot \mathbf{d}_0 = h^{-1} \nabla \cdot (h \mathbf{d}_0)$, on déduit

$$\mathbf{d} + \mathbf{d}_c = h \mathbf{J}^T \mathbf{d}_0,$$

où \mathbf{d}_c est un champ vectoriel de divergence nul. En pratique, si le débit \mathbf{d}_0 est nul, alors \mathbf{d} doit l'être également, d'où $\mathbf{d}_c = 0$ et

$$\mathbf{d} = h \mathbf{J}^T \mathbf{d}_0. \quad (3.5)$$

3.2.2.c Conservation de la quantité de mouvement et de la masse

Grâce à la nouvelle expression (3.5) du débit, on déduit la nouvelle expression de la conservation de la quantité de mouvement (3.1)

$$\mathbf{d} = \mathbf{H}\nabla\mathbf{p} \quad \text{dans } \mathcal{D}, \quad (3.6)$$

avec $\mathbf{H} = h\mathbf{J}^T\mathbf{J}$. Egalement, à l'aide de l'équation. (3.4) reliant les divergences des débits dans les deux systèmes de coordonnées \mathcal{X} et \mathcal{R} , on déduit l'expression de la conservation de la masse

$$\nabla \cdot \mathbf{d} + hk^2p = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}. \quad (3.7)$$

3.2.2.d Synthèse des équations dans le domaine

En résumé, la conservation de la quantité de mouvement (3.6) et de la masse nous fournissent respectivement N_D et 1 équations scalaires ; et le problème porte sur $N_D + 1$ variables qui sont les composantes du débit \mathbf{d} et la pression p . Avec la condition aux parois (3.3) reliant les $N_D + 1$ variables du problème, nous avons ainsi un problème bien posé.

Notre objectif est de nous ramener à un système d'uniquement deux équations portant sur le débit axial et la pression, qui sont les deux grandeurs dont le produit détermine la puissance surfacique dans la direction axiale, comme le débit surfacique d'électrons et le potentiel dans un fil électrique. Pour ce faire, on décompose le vecteur \mathbf{d} et la matrice \mathbf{H} en composantes axiales et transverses.

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} q \\ \mathbf{d}_\perp \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_1 & \mathbf{H}_2^T \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_3 \end{pmatrix}.$$

q et H_1 sont des scalaires, \mathbf{d}_\perp et \mathbf{H}_2 sont des vecteurs colonne de taille $N_\perp \times 1$, et \mathbf{H}_3 est une matrice symétrique de taille $N_\perp \times N_\perp$. A l'aide de cette décomposition, la conservation de la quantité de mouvement (3.6) se réécrit dans la direction axiale

$$q = H_1\partial_x p + \mathbf{H}_2^T\nabla_\perp p \quad \text{dans } \mathcal{D}. \quad (3.8)$$

Par ailleurs, on combine la conservation de la masse (3.7) et la conservation de la quantité de mouvement dans la direction transverse afin de faire disparaître le débit transverse

\mathbf{d}_\perp du problème.

$$\partial_x q + \nabla_\perp \cdot (\mathbf{H}_2 \partial_x p + \mathbf{H}_3 \nabla_\perp p) + hk^2 p = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}. \quad (3.9)$$

Les équations (3.8) et (3.9) portant sur q et p forment le nouveau problème dans le domaine \mathcal{D} . Il nous reste plus qu'à retranscrire la condition à la paroi par rapport au système de coordonnées \mathcal{R} .

3.2.2.e Condition aux parois

On exprime à partir de la condition aux parois (3.3) dans les coordonnées initiales \mathcal{X} la condition aux parois dans le nouveau système de coordonnées \mathcal{R}

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{N} = Y_{\partial\mathcal{D}} p \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}, \quad (3.10)$$

avec $\mathbf{N} = (h\mathbf{J})^{-1}\mathbf{N}_0$. La conservation de la quantité de mouvement (3.6) nous permet de faire disparaître les composantes transverses du débit de la condition aux parois (3.10),

$$qN_x + (\mathbf{H}_2 \partial_x p + \mathbf{H}_3 \nabla_\perp p) \cdot \mathbf{N}_\perp = Y_{\partial\mathcal{D}} p \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}. \quad (3.11)$$

N_x est la composante axiale de \mathbf{N} et \mathbf{N}_\perp le vecteur de ses composantes transverses.

En résumé, nous avons intégralement réécrit les équations dans le domaine et aux parois dans le nouveau système de coordonnées \mathcal{R} , de façon à s'affranchir du débit transverse \mathbf{d}_\perp . Le problème ne porte donc plus que sur le débit axial q et la pression p .

Toujours dans le but de profiter de l'existence d'une direction privilégiée, nous allons passer du problème actuel dans lequel les champs q et p dépendent de N_D coordonnées, à un problème où seule la coordonnée longitudinale x intervient et où les champs q et p sont discrétisés sur un ensemble de fonctions transverses. Alors le problème obtenu pourra être projeté sur un ensemble de fonctions test pour donner l'équation de propagation multimodale.

3.2.3 Formulation multimodale du problème de propagation

3.2.3.a Discrétisation transverse

On exprime les deux variables p et q de façon à les discrétiser dans la direction transverse.

$$p(x, \mathbf{x}_\perp) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n(x) \varphi_n(x, \mathbf{x}_\perp) \quad \text{et} \quad q(x, \mathbf{x}_\perp) = \sum_{n \in \mathbb{N}} q_n(x) \varphi_n(x, \mathbf{x}_\perp), \quad (3.12)$$

où les p_n et q_n sont les amplitudes transverses à une abscisse longitudinale donnée, et où l'ensemble des φ_n forme une base de fonctions continues et dérivables, au moins par morceaux, de \mathcal{D} dans \mathbb{C} . Un choix judicieux mais non nécessaire consiste à choisir la transformation géométrique de façon à ce que les bornes de \mathbf{x}_\perp soient constantes et que les fonctions de discrétisation φ_n soient indépendantes de x , comme au chapitre 2. On définit les vecteurs

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \cdots \\ \varphi_n \\ \cdots \end{pmatrix},$$

afin de réécrire la décomposition transverse (3.12)

$$p = \boldsymbol{\varphi}^\top \mathbf{p}, \quad q = \boldsymbol{\varphi}^\top \mathbf{q}. \quad (3.13)$$

A terme, les vecteurs d'amplitudes transverses \mathbf{p} et \mathbf{q} vont se substituer à la pression p et au débit q en tant qu'inconnues du problème.

3.2.3.b Projection du problème d'onde

Tout d'abord, on définit le problème transverse comme étant la restriction du problème d'onde à une section transverse \mathcal{A} et à son bord $\partial\mathcal{A}$. Pour projeter le problème transverse, il nous faut poser deux produits scalaires : un sur la section \mathcal{A} et un sur le contour $\partial\mathcal{A}$, le premier permettant la projection des équations de conservation dans le domaine et le second permettant la projection de la condition aux parois. On note ainsi

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{A}} \bar{f} g \, d\mathcal{A}, \quad (3.14)$$

$$\langle f, g \rangle_{\partial\mathcal{A}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{A}} \bar{f}g \, d\ell. \quad (3.15)$$

Egalement, il nous faut une base de fonctions $\{\psi_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ continues et dérivables par morceaux de \mathcal{D} dans \mathbb{C} , sur lesquelles projeter notre problème. En pratique, on utilise la même base que celle utilisée pour la discrétisation transverse des champs d'intérêt (cf. 3.2.3.a), mais on pourra être intéressé par l'utilisation d'une base différente dans le cas par exemple des modes complexes présentés au Chap. 1. Ceux-ci satisfont en effet une relation de biorthogonalité [75], qui justifie que les fonctions de projection soient les conjugués des fonctions de discrétisation.

Ecrivons la projection du problème d'onde (3.8), (3.9) et (3.11) sur une fonction transverse ψ_n .

$$\langle \psi_n, q - H_1 \partial_x p - \mathbf{H}_2^\top \nabla_\perp p \rangle_{\mathcal{A}} = \mathbf{0}, \quad (3.16a)$$

$$\langle \psi_n, \partial_x q + \nabla_\perp \cdot (\mathbf{H}_2 \partial_x p + \mathbf{H}_3 \nabla_\perp p) + hk^2 p \rangle_{\mathcal{A}} = \mathbf{0}, \quad (3.16b)$$

$$\langle \psi_n, q N_x + (\mathbf{H}_2 \partial_x p + \mathbf{H}_3 \nabla_\perp p) \cdot \mathbf{N}_\perp - Y_{\partial\mathcal{D}} p \rangle_{\partial\mathcal{A}} = \mathbf{0}. \quad (3.16c)$$

On regroupe ensuite au sein d'une même équation les projections de la conservation de la masse (3.16b) et de la condition aux parois (3.16c), de façon à réécrire le système (3.16)

$$\langle \psi_n, q - H_1 \partial_x p - \mathbf{H}_2^\top \nabla_\perp p \rangle_{\mathcal{A}} = \mathbf{0}, \quad (3.17a)$$

$$\langle \psi_n, \partial_x q + \nabla_\perp \cdot (\mathbf{H}_2 \partial_x p + \mathbf{H}_3 \nabla_\perp p) + hk^2 p \rangle_{\mathcal{A}} = \quad (3.17b)$$

$$\langle \psi_n, q N_x + (\mathbf{H}_2 \partial_x p + \mathbf{H}_3 \nabla_\perp p) \cdot \mathbf{N}_\perp - Y_{\partial\mathcal{D}} p \rangle_{\partial\mathcal{A}}.$$

A noter que le système (3.17) est bien équivalent au système (3.16), bien qu'il comporte une équation de moins. Cela est dû au fait que dans l'équation (3.17b), le terme de gauche est une projection sur la section \mathcal{A} et le terme de droite une projection sur le bord $\partial\mathcal{A}$. Puisque les projections sont égales pour toutes les fonctions transverses φ et que ces dernières forment une base de fonction, on peut déduire que les termes de gauche et de droite de l'équation (3.17b) sont tous les deux nuls, et retrouver les deux équations (3.16b) et (3.16c).

Après intégration par partie du terme $\langle \psi_n, \nabla_\perp \cdot (\mathbf{H}_2 \partial_x p + \mathbf{H}_3 \nabla_\perp p) \rangle_{\mathcal{A}}$ dans l'équation (3.17), on obtient finalement le problème projeté

$$\langle \psi_n, q - H_1 \partial_x p - \mathbf{H}_2^\top \nabla_\perp p \rangle_{\mathcal{A}} = \mathbf{0}, \quad (3.18a)$$

$$\langle \psi_n, \partial_x q + hk^2 p \rangle_{\mathcal{A}} - \langle \nabla_{\perp} \psi_n, \mathbf{H}_2 H_1^{-1} (q - \mathbf{H}_2^{\top} \nabla_{\perp} p) + \mathbf{H}_3 \nabla_{\perp} p \rangle_{\mathcal{A}} = \langle \psi_n, q N_x - Y_{\partial \mathcal{D}} p \rangle_{\partial \mathcal{A}} \quad (3.18b)$$

Remarquons que les conservations de la masse et de la quantité de mouvement et la condition aux parois sont traduites par une formulation faible. Lors de la résolution numérique, lorsque l'on tronque la base de projection, on perd notamment l'implication réciproque (3.17) \implies (3.16); et par conséquent on perd l'implication réciproque avec le problème de départ, constitué des équations de conservation et de la condition aux parois.

Cet éclaircissement que nous apportons ici permet par exemple de justifier qu'un mode Dirichlet parmi des modes Neumann puisse avoir une amplitude non nulle dans un coude de section constante avec condition de Neumann au paroi (cf. Chap. 2). De façon générale, la littérature [48, 85] montre d'ailleurs qu'il est bénéfique de ne pas imposer le respect de la condition aux parois de façon forte via le choix des fonctions de discrétisation. L'exemple du coude de section constante est pour rappel plus longuement discuté en annexe D.

3.2.3.c Equation de propagation modale

En injectant dans le problème projeté (3.18) les expressions discrétisées (3.13) des champs p et q , on obtient un premier aboutissement de notre démarche, l'équation de propagation modale

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_5 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Celle-ci fait intervenir les matrices

$$\mathbf{M}_{1,nm} = - \langle \psi_n, \mathbf{H}_2^{\top} \nabla_{\perp} \varphi_m \rangle_{\mathcal{A}}, \quad (3.20a)$$

$$\mathbf{M}_{2,nm} = \langle \psi_n, \varphi_m \rangle_{\mathcal{A}}, \quad (3.20b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{3,nm} = & -k^2 \langle \psi_n, h \varphi_m \rangle_{\mathcal{A}}, \\ & + \langle \nabla_{\perp} \psi_n, (\mathbf{H}_3 - \mathbf{H}_2 H_1^{-1} \mathbf{H}_2^{\top}) \nabla_{\perp} \varphi_m \rangle_{\mathcal{A}} + \langle \psi_n, Y_{\partial \mathcal{D}} \varphi_m \rangle_{\partial \mathcal{A}}, \end{aligned} \quad (3.20c)$$

$$\mathbf{M}_{4,nm} = \langle \nabla_{\perp} \psi_n, \mathbf{H}_2 H_1^{-1} \varphi_m \rangle_{\mathcal{A}} + \langle \psi_n, N_x \varphi_m \rangle_{\partial \mathcal{A}}, \quad (3.20d)$$

$$\mathbf{M}_{5,nm} = \langle \psi_n, H_1 \varphi_m \rangle_{\mathcal{A}}, \quad (3.20e)$$

$$\mathbf{M}_{6,nm} = \langle \psi_n, \varphi_m \rangle_{\mathcal{A}}. \quad (3.20f)$$

On remarque que $M_2 = M_6$. Dans la suite, ces deux matrices sont également notées A . En pratique (cf. Chap. 1 et Chap. 2), les fonctions de discrétisation et de projection sont choisies orthonormales telles que $A = I$. En posant la matrice

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

telle que

$$U = \begin{pmatrix} M_5^{-1} & 0 \\ 0 & M_6^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

on peut réécrire l'équation de propagation modale

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}' = U \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Nous nous sommes bien ramenés à une équation unidimensionnelle, puisque les vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} et la matrice U ne dépendent que de l'abscisse x pour une fréquence et un guide donnés. Au lieu des amplitudes transverses \mathbf{p} et \mathbf{q} , il est par ailleurs nécessaire de plutôt chercher le vecteur \mathbf{p} (ou \mathbf{q}) et la matrice admittance Y telle que $\mathbf{q} = Y\mathbf{p}$ [110, 118]. L'expression de l'équation de Riccati obtenue en injectant $\mathbf{q} = Y\mathbf{p}$ dans le problème d'onde (3.23) est ici

$$Y' = -YU_1 - YU_2Y + U_3 + U_4Y. \quad (3.24)$$

Dans la suite, nous nous intéressons à la résolution complète du problème de propagation dans un guide avec des conditions aux extrémités du même type que celles vues dans les chapitres précédents, c'est-à-dire terminé en x_{out} par une admittance donnée Y_{out} et excité à son entrée par une pression donnée \mathbf{p}_{in} .

On étudie tout d'abord le cas particulier des guides uniformes, puis le cas général. Cela nous permet notamment de présenter le schéma de Magnus et la méthode utilisée pour résoudre le problème de propagation dans les coudes, tous deux déjà utilisés au chapitre 2. Dans le cadre précis de ce chapitre sont qualifiés d'uniformes les guides pour lesquels la matrice U est constante et $M_1 = M_4 = 0$. Typiquement, cela concerne les guides de section et de courbure constantes emplis d'un milieu homogène et isotrope. Comme nous allons le voir, la résolution est grandement simplifiée dans les guides uniformes puisqu'il est alors possible de discrétiser les champs de pression et de débit axial sur une famille de modes découplés.

3.2.3.d Résolution

Guide uniforme On se place dans le cas où la matrice \mathbf{U} est constante et de la forme

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Alors l'équation de propagation modale (3.23) peut se réécrire

$$\mathbf{p}'' = \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_3 \mathbf{p} = -\mathbf{P}_K \mathbf{K}_x^2 \mathbf{P}_K^{-1} \mathbf{p}. \quad (3.26)$$

avec \mathbf{K}_x une matrice diagonale et \mathbf{P}_K la matrice de passage de la base transverse initiale $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vers la base modale du problème discrétisé $\{\varphi_{K,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$. On note φ_K le vecteur contenant les fonctions de la base modale, relié à φ par l'égalité $\varphi_K = \mathbf{P}_K^T \varphi$. Ces modes obtenus de façon numériques ne sont alors qu'une approximation des modes du guide, voir par exemple l'annexe A pour une approximation des modes d'un guide droit avec PML. Un exemple de base modale numérique $\{\varphi_{K,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ est présenté en figure 3.4, pour le coude abordé dans le chapitre 2.

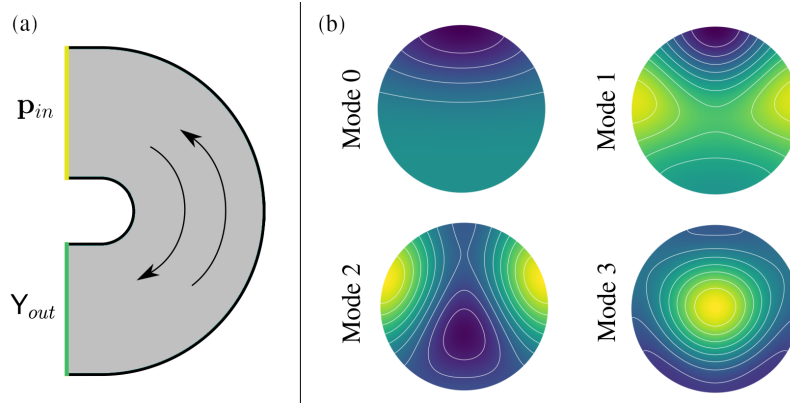


FIGURE 3.4 – (a) Un exemple de guide uniforme : le coude de section circulaire et de courbure constante présenté lors du Chap. 2. Dans un tel guide le champ de pression peut être décomposé en ondes aller-retour. (b) Modes du coude calculés avec 96 modes de la base améliorée présentée au Chap. 2, pour un produit du rayon et du nombre d'onde k égal à 4.

Dans la base modale, le problème de propagation (3.26) peut alors s'écrire de façon découplée

$$\mathbf{p}_K'' = -\mathbf{K}_x^2 \mathbf{p}_K \quad (3.27)$$

où $\mathbf{p}_\kappa = \mathbf{P}_\kappa^{-1} \mathbf{p}$ est le vecteur des amplitudes modales tel que

$$p(x, \mathbf{x}_\perp) = \boldsymbol{\varphi}^\top(x, \mathbf{x}_\perp) \mathbf{p}(x) = \boldsymbol{\varphi}_\kappa^\top(x, \mathbf{x}_\perp) \mathbf{p}_\kappa(x). \quad (3.28)$$

Les amplitudes modales de la pression peuvent ainsi être décomposées en ondes aller-retour dont les amplitudes sont fournies par les conditions d'entrée de sortie. La résolution du problème est finalement similaire à celle présentée dans le cadre d'un guide droit avec PML (cf. Chap. 1).

Guide quelconque On considère à présent un guide dans lequel il n'existe pas de familles de modes se propageant de façon découplée.

La rétropropagation de l'admittance peut s'opérer en intégrant numériquement l'équation de Riccati, à l'aide par exemple d'un schéma de Runge-Kutta. Cette façon de faire peut cependant être propice à l'apparition d'instabilités numériques, aussi Pagneux [109] propose de résoudre le problème à l'aide d'un schéma de Magnus [65, 83], que nous décrivons ici sommairement.

Soit $\{x_i\}_{i \in [0, N_x - 1]}$ une discrétisation de l'intervalle $[x_{in}, x_{out}]$ d'abscisse longitudinale en N_x points. Dans la suite, on indice i toute grandeur relative à l'abscisse x_i . Selon le schéma de Magnus,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}_{i-1} \\ \mathbf{q}_{i-1} \end{pmatrix} = \mathbf{E}_i \begin{pmatrix} \mathbf{p}_i \\ \mathbf{q}_i \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

où $\mathbf{E}_i = e^{\boldsymbol{\Omega}_i}$. Pour un schéma d'ordre 2 par exemple,

$$\boldsymbol{\Omega}_i = (x_{i-1} - x_i) \mathbf{U} \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right). \quad (3.30)$$

Il existe également un schéma de Magnus d'ordre 4, que nous détaillons dans le Chap. 4 où nous nous intéressons aux performances numériques de la méthode. En suivant le schéma de Magnus (3.29), on obtient les équations suivantes pour rétropropager l'admittance et propager la pression, respectivement

$$\mathbf{Y}_{i-1} = (\mathbf{E}_{i,3} + \mathbf{E}_{i,4} \mathbf{Y}_i) (\mathbf{E}_{i,1} + \mathbf{E}_{i,2} \mathbf{Y}_i)^{-1}, \quad (3.31)$$

$$\mathbf{p}_i = (\mathbf{E}_{i,1} + \mathbf{E}_{i,2} \mathbf{Y}_i)^{-1} \mathbf{p}_{i-1}, \quad (3.32)$$

avec $\mathbf{E}_{i,1..4}$ les blocs de la matrice \mathbf{E}_i de dimension $N \times N$, N étant le nombre de modes.

Si les outils développés jusqu'à présent permettent d'exprimer et de résoudre le problème d'onde dans un guide à l'aide la méthode multimodale, ils ne permettent encore pas de modéliser le rayonnement réaliste des guides d'onde complexes. En effet, il faut pour cela être en mesure de raccorder plusieurs guides d'onde, c'est-à-dire de relier leurs champs de pression et de débit axial aux interfaces qui les séparent.

3.2.4 Raccordement de guides

3.2.4.a Définition du problème

Nous avons montré au cours du chapitre 1 comment raccorder un ensemble de guides droits tous décrits par le même système de coordonnées. Cela n'est pas le cas dans la suite (cf. Sec. 3.4) pour notre problème de rayonnement complexe où des guides de sections variables disposent d'un système de coordonnées réduites qui leur est propre. On cherche ainsi dans cette section à permettre le raccordement de n'importe quel type de guide.

A cette fin, on considère le raccordement de deux guides A et C débouchant dans un même guide B (cf. Fig. 3.5). Les guides sont quelconques, 2D ou 3D selon les notations définies précédemment dans cette section 3.2.

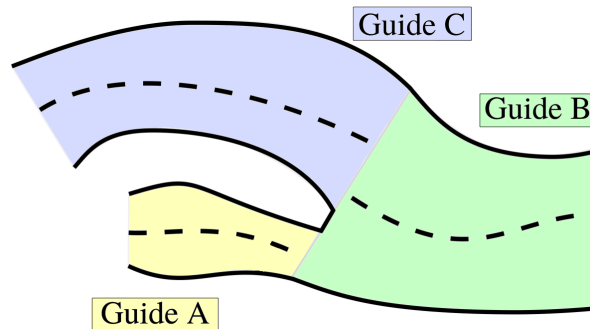


FIGURE 3.5 – Guides A et C débouchant dans un même guide B . Chaque guide peut être muni de son système de coordonnées curvilignes.

Chaque guide est décrit par un système de coordonnées curvilignes propre qui doit respecter la condition suivante : l'interface avec un autre guide doit être une section transverse, c'est-à-dire une section à abscisse longitudinale constante. Les abscisses des interfaces dans le système de coordonnées relatif à chaque guide sont notées x_A , x_B et x_C . De façon générale, dans l'ensemble de cette section 3.2.4, toutes les grandeurs relatives à

un des trois guides A , B ou C et exprimées à l'interface sont indicées par le nom du guide correspondant. Notamment, les sections \mathcal{A}_A et \mathcal{A}_C sont les interfaces des guides A et C avec le guide B , de section à l'interface \mathcal{A}_B .

Dans notre cas, on se limite à des situations où les guides A et C débouchent entièrement dans le guide B , c'est-à-dire où $\mathcal{A}_A \subset \mathcal{A}_B$ et $\mathcal{A}_C \subset \mathcal{A}_B$. Par ailleurs, on impose un débit axial nul sur les portions de \mathcal{A}_B qui ne font partie d'aucune interface, c'est-à-dire

$$\forall \mathbf{M} \in \mathcal{A}_B \setminus (\mathcal{A}_A \cup \mathcal{A}_C), \quad q_B(\mathbf{M}) = 0. \quad (3.33)$$

Afin de relier les champs de pression et de débit axial des différents guides de façon modale, on projette les continuités de pression aux interfaces \mathcal{A}_A et \mathcal{A}_C et la continuité du débit sur la section \mathcal{A}_B . Ce choix est illustré en annexe F à l'aide d'analogies électro-acoustique.

3.2.4.b Continuité de la pression

La continuité de la pression à l'interface des guides A et B et des guides C et B s'écrit

$$\forall \mathbf{M} \in \mathcal{A}_A, \quad p_A(\mathbf{M}) = p_B(\mathbf{M}), \quad (3.34)$$

$$\forall \mathbf{M} \in \mathcal{A}_C, \quad p_C(\mathbf{M}) = p_B(\mathbf{M}). \quad (3.35)$$

On choisit de projeter les continuités des pressions sur les fonctions de projection des guides A et C . En utilisant les décompositions transverses définies en Sec. 3.2.3.a, on obtient

$$\mathbf{A}_A \mathbf{p}_A = \mathbf{A}_{AB} \mathbf{p}_B, \quad (3.36)$$

$$\mathbf{A}_C \mathbf{p}_C = \mathbf{A}_{CB} \mathbf{p}_B, \quad (3.37)$$

où $\mathbf{A}_{IJ, nm} = \langle \psi_{I,n}, \varphi_{J,m} \rangle_{\mathcal{A}_I}$ pour deux guides I et J . D'après cette définition, la matrice \mathbf{A}_{II} est la matrice \mathbf{A} du guide I telle que définie en Sec. 3.2.3.c, on la note donc plus simplement \mathbf{A}_I . Remarquons que $\mathbf{A}_{IJ} = \mathbf{A}_{JI}^\dagger$ si les bases de projection et de discrétisation sont identiques dans chaque guide, ce qui est le cas usuellement.

Un point à noter, à propos du calcul de la matrice \mathbf{A}_{AB} . Les fonctions de projection $\psi_{A,n}$ du guide A admettent en argument la position exprimée dans le système de coordonnées

du guide A , tandis que les fonctions de discrétisation $\varphi_{B,m}$ du guide B admettent en entrée la position exprimée dans le système de coordonnées du guide B . Il faut donc être capable d'exprimer la position de chaque point de l'interface dans les deux systèmes de coordonnées pour calculer l'intégrale de l'expression de la matrice \mathbf{A}_{AB} . La même remarque peut être faite à propos de la matrice \mathbf{A}_{CB} .

Autre remarque, le choix des fonctions de discrétisation et de projection peut impacter le bon conditionnement numérique du raccordement, comme expliqué en annexe A pour les modes complexes d'un guide droit avec PML.

Finalement, on réécrit la continuité de la pression entre les guides A et B et les guides B et C ,

$$\mathbf{p}_A = \mathbf{F}_{AB} \mathbf{p}_B, \quad (3.38)$$

$$\mathbf{p}_C = \mathbf{F}_{CB} \mathbf{p}_B, \quad (3.39)$$

où pour deux guides I et J , $\mathbf{F}_{IJ} = \mathbf{A}_I^{-1} \mathbf{A}_{IJ}$. La matrice \mathbf{A}_I est bien inversible puisque les fonctions de projection et de discrétisation transverse des différents guides forment des bases de l'espace des fonctions transverses, et sont donc des familles libres de fonctions. Si les bases de projection et de discrétisation sont égales et que la base en question est orthornormale, alors $\mathbf{A}_I = \mathbf{I} = \mathbf{A}_I^{-1}$. Egalement, $\mathbf{F}_{IJ} = \mathbf{F}_{JI}^\dagger$.

3.2.4.c Continuité du débit

Comme expliqué en Sec. 3.2.4.a, la projection de la continuité du débit s'effectue sur toute l'interface \mathcal{A}_B , contrairement à la continuité de la pression qui s'effectue sur les surfaces \mathcal{A}_A et \mathcal{A}_C (cf. Sec. 3.2.4.b) On écrit ainsi la continuité du débit

$$\forall \mathbf{M} \in \mathcal{A}_B, \quad \begin{cases} q_B(\mathbf{M}) = q_A(\mathbf{M}) & \text{si } \mathbf{M} \in \mathcal{A}_A \\ q_B(\mathbf{M}) = q_C(\mathbf{M}) & \text{si } \mathbf{M} \in \mathcal{A}_C \\ q_B(\mathbf{M}) = 0 & \text{si } \mathbf{M} \in \mathcal{A}_B \setminus (\mathcal{A}_A \cup \mathcal{A}_C) \end{cases} \quad (3.40)$$

Une fois projetée sur les fonctions de projection du guide B , la continuité du débit (3.40) à l'interface \mathcal{A}_B s'écrit

$$\mathbf{A}_B \mathbf{q}_B = \mathbf{A}_{BA} \mathbf{q}_A + \mathbf{A}_{BC} \mathbf{q}_C, \quad (3.41)$$

que l'on peut ensuite réécrire, à l'aide des notations introduites en Sec. 3.2.4.a,

$$\mathbf{q}_B = \mathbf{F}_{BA} \mathbf{q}_A + \mathbf{F}_{BC} \mathbf{q}_C. \quad (3.42)$$

Grâce à ces expressions modales des continuités des pressions et de la continuité du débit axial, nous sommes en mesure de relier les amplitudes transverses des pressions et des débits axiaux des différents guides aux interfaces. Cela ne suffit cependant pas à résoudre un problème de raccordement en pratique, puisqu'il nous faut pour cela être capable de raccorder les impédances. Par exemple, dans le cas où le guide A rayonne dans les guides B et C , il faut déterminer l'admittance de sortie de A à partir des admittances connues aux interfaces des guides B et C .

3.2.4.d Raccordement des admittances

En injectant l'expression du débit $\mathbf{q} = \mathbf{Y}\mathbf{p}$ dans la continuité du débit (3.42), on obtient

$$\mathbf{Y}_B \mathbf{p}_B = \mathbf{F}_{BA} \mathbf{Y}_A \mathbf{p}_A + \mathbf{F}_{BC} \mathbf{Y}_C \mathbf{p}_C. \quad (3.43)$$

De là, à l'aide de la continuité (3.39) de la pression à l'interface \mathcal{A}_C , on déduit

$$\mathbf{p}_B = (\mathbf{Y}_B - \mathbf{F}_{BC} \mathbf{Y}_C \mathbf{F}_{CB})^{-1} \mathbf{F}_{BA} \mathbf{Y}_A \mathbf{p}_A. \quad (3.44)$$

En multipliant les membres de gauche et de droite de l'Eq. (3.44) par \mathbf{F}_{AB} , et en simplifiant l'équation obtenue par \mathbf{p}_A , on obtient finalement l'expression de l'admittance du guide A à l'interface [47],

$$\mathbf{Y}_A = \left(\mathbf{F}_{AB} (\mathbf{Y}_B - \mathbf{F}_{BC} \mathbf{Y}_C \mathbf{F}_{CB})^{-1} \mathbf{F}_{BA} \right)^{-1}. \quad (3.45)$$

3.2.5 Bilan

Les développements présentés lors de cette Sec. 3.2 permettent d'appliquer la méthode multimodale à un guide quelconque dans un système de coordonnées curviligne adapté à la description du guide, la seule contrainte géométrique étant que le jacobien de la transformation depuis le système de coordonnées initiale soit bien défini en tout point. Un contre-exemple est fourni en Ann. H pour des sections transverses non droites.

Les problèmes acoustiques résolus dans la littérature à l'aide de la méthode multimodale concernent en pratique des guides assez simples, si bien que le problème d'onde

peut directement s'écrire dans le système de coordonnées initiales. Dans ce cas, les calculs présentés dans cette Sec. 3.2 restent valides, il suffit pour les appliquer de considérer que le jacobien J est égal à la matrice identité I . En prochaine section 3.3, nous utilisons une transformation géométrique complexe dans la modélisation d'un guide annulaire de section circulaire variable avec couche absorbante. Ce type de guide est nécessaire pour décrire une géométrie réaliste de rayonnement, comme vu en introduction. Des travaux futurs explorant des géométries plus complexes pourront également s'appuyer sur cette formulation généralisée, ainsi que sur l'annexe I qui présente une transformation curviligne pour un guide de section et d'axe quelconques.

3.3 Milieu semi-infini entourant le guide rayonnant

3.3.1 Contexte

En section 3.2 nous avons montré comment la méthode multimodale permet théoriquement de résoudre un problème d'onde dans un guide quelconque décrit par un système de coordonnées curvilignes \mathcal{R} . Les prérequis nécessaires sont la connaissance d'une base de fonction de discrétisation et du jacobien de la transformation de coordonnées du repère cartésien initial \mathcal{X} vers le système curviligne \mathcal{R} .

Nous détaillons ici l'obtention de ces prérequis pour un guide annulaire de section variable avec PML. Pour rappel, l'enjeu est de pouvoir modéliser de façon géométriquement exacte le milieu C encerclant le guide rayonnant A qui débouche dans le guide B (cf. Fig. 3.6). Le lecteur est invité à se référer aux chapitres 1 et 2 pour l'application de la méthode respectivement dans les guides B et A . Voir la section 3.2.4 de ce chapitre pour le raccordement des guides A , B et C disposant chacun d'un système de coordonnées propre. Nous nous concentrons ici uniquement sur la description du guide C .

Le guide C est ici considéré axisymétrique, ce qui signifie que le guide A ne peut être courbe qu'en amont de la zone où sa paroi est épousée par la paroi interne du guide C (cf. Fig. 3.6). De futurs travaux pourront décrire le rayonnement de parties courbes et tordues, notamment en s'appuyant sur la transformation géométrique décrite en annexe I. Les applications acoustiques évoquées en introduction de cette thèse peuvent cependant déjà être modélisées avec cette hypothèse de partie rayonnante axisymétrique.

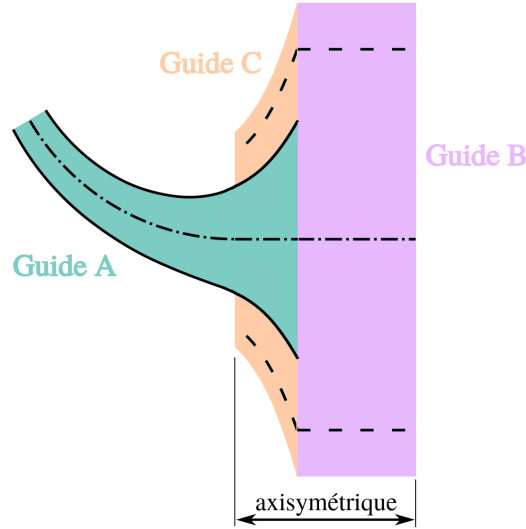


FIGURE 3.6 – Guides de sections circulaires pour la modélisation du rayonnement d’un pavillon A. Les guides B et C modélisant un milieu infini sont chacun munis d’une PML, délimitée par une ligne noire en pointillé.

Dans l’ordre, nous commençons par décrire la transformation géométrique permettant de passer d’un guide de section variable avec PML à un guide de section constante. A l’aide de cette transformation et du problème d’onde général présenté en section 3.2.3.c, nous obtenons le problème d’onde spécifique à notre guide C. La méthode multimodale étant appliquée pour la première fois à un guide annulaire 3D de section variable, nous développons finalement la base améliorée correspondante qui permet un meilleur respect de la condition au limite.

3.3.2 Transformation géométrique

3.3.2.a Position d’un point

Soit un repère cartésien d’origine O de base orthonormée $\mathcal{B}_0 = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, définissant les coordonnées cartésiennes (x, Y, Z) .

Soit \mathcal{D} le domaine spatial d’un guide annulaire axisymétrique d’axe (O, \mathbf{e}_x) compris entre les abscisses d’entrée x_{in} et de sortie x_{out} (cf. Fig. 3.7). Le guide \mathcal{D} est de section variable, si bien que les rayons intérieur R_0 et extérieur R_1 sont fonctions de x . En posant la base orthonormée cylindrique $\mathcal{B}_{\mathcal{D}} = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ avec \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ les vecteurs radiaux et ortho-radiaux, et (x, R, θ) les coordonnées cylindriques traditionnelles, on obtient l’expression

du domaine du guide

$$\mathcal{D} = \{(x, R, \theta), x \in [x_{in}, x_{out}], R \in [R_0(x), R_1(x)], \theta \in [0, 2\pi]\}. \quad (3.46)$$

Considérons à présent que la paroi externe de ce guide est couverte d'une PML, dans laquelle le rayon R subit une transformation complexe pour devenir le rayon complexe \hat{R} . On note

$$\hat{\mathcal{D}} = \{(x, \hat{R}(x, R), \theta), (x, R, \theta) \in \mathcal{D}\} \quad (3.47)$$

le domaine complexe du guide résultant de la transformation (cf. Fig. 3.7). La position d'un point du domaine complexe $\hat{\mathcal{D}}$ s'écrit dans les bases \mathcal{B}_0 et $\mathcal{B}_{\mathcal{D}}$

$$\mathbf{OM} = x \mathbf{e}_x + Y \mathbf{e}_Y + Z \mathbf{e}_Z = x \mathbf{e}_x + \hat{R}(x, R) \mathbf{e}_r(\theta). \quad (3.48)$$

La transformation complexe est semblable à celle présentée au chapitre 1, mais cette fois-ci les bornes du rayon R et la borne inférieure de la PML R_c dépendent de l'abscisse x :

$$\forall x \in [x_{in}, x_{out}], \begin{cases} \forall R \in [R_0(x), R_c(x)[, & \hat{R}(x, R) = R, \\ \forall R \in [R_c(x), R_1(x)], & \hat{R}(x, R) = R + \hat{\alpha} e(x) \left(\frac{R - R_c(x)}{e(x)} \right), \end{cases} \quad (3.49)$$

avec $\hat{\alpha}$ le coefficient d'amortissement de la PML et $e(x) = R_1(x) - R_c(x)$ l'épaisseur de la PML dans la direction radiale.

Techniquement, nous pourrions nous satisfaire de ces expressions (3.48) de la position selon (x, Y, Z) et (x, R, θ) pour définir notre transformation géométrique. Cependant, au lieu de (x, R, θ) , on souhaite se ramener à un système de coordonnées cylindriques (x, r, θ) dans lequel les bornes r_0 et r_1 du rayon r , qualifié dans la suite de «réduit», sont constantes. Cela permet en effet d'effectuer une décomposition transverse à l'aide de fonctions transverses indépendantes de l'abscisse x . En outre, la direction de la normale à la paroi devient purement radiale dans un tel système (x, r, θ) . Le terme du problème d'onde relatif à la composante longitudinale N_x de la normale à la paroi disparaît donc.

On définit à cette fin le guide réduit $\mathcal{D}_r = [x_{in}, x_{out}] \times [r_0, r_1] \times [0, 2\pi]$ (cf. Fig. 3.7) et l'on fait correspondre à chaque point (x, r, θ) du guide réduit \mathcal{D}_r un point $(x, R(x, r), \theta)$ du guide réel D à l'aide d'une fonction $(x, r) \rightarrow R(x, r)$. Par comodité, on choisit $r_0 = 0$,

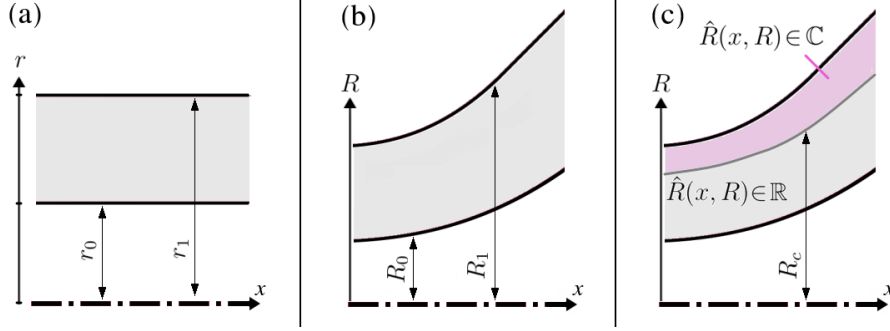


FIGURE 3.7 – (a) Guide réel réduit \mathcal{D}_r . (b) Guide réel \mathcal{D} . (c) Guide complexe avec PML $\hat{\mathcal{D}}$.

$r_1 = 1$ et

$$R(x, r) = R_0(x)(1 - r) + R_1(x)r = R_0(x) + a(x)r, \quad (3.50)$$

où $a(x) = R_1(x) - R_0(x)$ est l'épaisseur du guide dans la direction radiale. Dans l'équation (3.48) décrivant la position d'un point M , on considère le rayon R non plus comme une variable, mais comme une fonction de l'abscisse x et du rayon réduit r . Le rayon complexe $\hat{R}(x, R(x, r))$, fonction de l'abscisse x et du rayon R , devient donc lui aussi dépendant de l'abscisse x et du rayon réduit r . Ainsi, la position d'un point $M \in \hat{\mathcal{D}}$ du domaine complexe s'écrit d'une part selon x, Y et Z et d'autre part selon x, r et θ . On peut donc calculer le jacobien de la transformation $(x, Y, Z) \rightarrow (x, r, \theta)$ pour appliquer la méthode multimodale telle que décrite en Sec. 3.2.

3.3.2.b Opérateurs différentiels

On note $\partial_x \hat{R}$ et $\partial_r \hat{R}$ les dérivées partielles par rapport à l'abscisse x et au rayon réduit r de la fonction $(x, r) \rightarrow \hat{R}(x, R(x, r))$. De l'équation (3.48) on déduit le différentiel de la position dans les bases \mathcal{B}_0 et $\mathcal{B}_{\mathcal{D}}$

$$d\mathbf{OM} = dx\mathbf{e}_x + dY\mathbf{e}_Y + dZ\mathbf{e}_Z \quad (3.51)$$

$$= (\mathbf{e}_x + \partial_x \hat{R} \mathbf{e}_r) dx + \partial_r \hat{R} \mathbf{e}_r dr + \hat{R} \mathbf{e}_\theta d\theta, \quad (3.52)$$

soit de façon matricielle

$$d\mathbf{OM} = \begin{pmatrix} dx \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0} = \Psi \begin{pmatrix} dx \\ dr \\ r d\theta \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_{\mathcal{D}}}, \quad (3.53)$$

où

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \partial_x \hat{R} & \partial_r \hat{R} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{R}/r \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Soit \mathbf{P} la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_{\mathcal{D}}$ à la base \mathcal{B}_0 . Les deux bases étant orthonormales directes, la matrice \mathbf{P} est orthonormale directe, c'est-à-dire que $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ et $\det(\mathbf{P}) = +1$. On ne fournit pas l'expression détaillée de \mathbf{P} car ces deux seules propriétés suffisent à poursuivre notre raisonnement.

De l'équation. (3.53), on déduit que

$$\begin{pmatrix} dx \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \mathbf{P}\Psi \begin{pmatrix} dx \\ dr \\ r d\theta \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

On identifie dans l'Eq. (3.55) $\mathbf{P}\Psi$ à la transposée du jacobien de la transformation géométrique de (x, r, θ) vers (X, Y, Z) . Le jacobien \mathbf{J} de la transformation de (x, Y, Z) vers (x, r, θ) s'écrit ainsi

$$\mathbf{J} = ((\mathbf{P}\Psi)^{-1})^T = \mathbf{P}(\Psi^{-1})^T \quad (3.56)$$

avec

$$\Psi^{-1} = \frac{1}{\det(\Psi)} \begin{pmatrix} \partial_r \hat{R} \hat{R}/r & 0 & 0 \\ -\partial_x \hat{R} \hat{R}/r & \hat{R}/r & 0 \\ 0 & 0 & \partial_r \hat{R} \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

Alors, on déduit le coefficient h et les composantes de la matrice \mathbf{H} symétrique.

$$h = \det(\Psi) = \partial_r \hat{R} \hat{R}/r, \quad (3.58a)$$

$$H_1 = h, \quad (3.58b)$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} -\partial_x \hat{R} \hat{R}/r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.58c)$$

$$\mathbf{H}_3 = h^{-1} \begin{pmatrix} (\hat{R}/r)^2 (1 + (\partial_x \hat{R})^2) & 0 \\ 0 & (\partial_r \hat{R})^2 \end{pmatrix}. \quad (3.58d)$$

3.3.2.c Contraintes géométriques

Pour faciliter le calcul numérique de la matrice \mathbf{U} du problème d'onde (3.23), on souhaite que celle-ci s'exprime comme une somme de produits de facteurs dépendants de x et de matrices dépendant du problème transverse. Pour cela, il faut que le coefficient h et les composantes de la matrice \mathbf{H} puissent s'écrire comme une somme de produits de fonctions de x et de (r, θ) . D'après l'équation (3.58), il suffit que cela soit vérifié pour $\partial_r \hat{R}$, $\partial_x \hat{R}$ et \hat{R}/r . On cherche ici à assurer de cette propriété, et pour cela on commence par réécrire le rayon \hat{R} en fonction de x et de r , à l'aide des équations (3.49) et (3.50).

$$\hat{R}(x, R(x, r)) = a(x)\beta(x, r)r, \quad (3.59)$$

où $\beta(x, r)$ est tel que

$$\begin{cases} \forall r \in [0, r_c(x)], & r\beta(x, r) = r + b(x), \\ \forall r \in [r_c(x), 1], & r\beta(x, r) = r + b(x) + \bar{\alpha} \left(1 - r_c(x)\right) \left(\frac{r - r_c(x)}{1 - r_c(x)}\right)^{n_e}. \end{cases} \quad (3.60)$$

avec $b(x) = R_0(x)/a(x)$, et $r_c(x)$ le rayon réduit correspondant à la limite inférieure de la PML, c'est-à-dire tel que pour toute abscisse x , $R(x, r_c(x)) = R_c(x)$.

Le coefficient $\beta(x, r)$ étant nécessairement dépendant du rayon réduit r , notre objectif est donc de le rendre indépendant de l'abscisse x , en choisissant judicieusement les bornes du guide et de la PML.

Tout d'abord, il faut que $r_c(x)$ soit une constante. Pour cela, on impose que radialement, la largeur $e(x)$ de la PML soit proportionnelle à la largeur $a(x)$ du guide. Ensuite, il faut également que le coefficient $b(x)$ soit constant, ce que l'on obtient en imposant une largeur radiale $a(x)$ proportionnelle au rayon intérieur R_0 .

En résumé, en imposant constants les rapports $R_0(x)/a(x)$ et $R_c(x)/a(x)$, on se ramène à l'expression du rayon complexe $\hat{R} = a(x)\beta(r)r$ où les dépendances en x et en r sont séparées, ce qui permet d'obtenir les expressions

$$\hat{R}/r = a(x)\beta(r), \quad (3.61)$$

$$\partial_x R = a'(x)\beta(r)r, \quad (3.62)$$

$$\partial_r R = a(x)\alpha(r), \quad (3.63)$$

où les dépendances en x et en r sont également séparées, avec $\alpha(r)$ défini par

$$\begin{cases} \forall r \in [0, r_c], & \alpha(r) = 1, \\ \forall r \in [0, r_c], & \alpha(r) = 1 + \bar{\alpha} (n_e - 1) \left(\frac{r-r_c}{1-r_c} \right)^{n_e-1}. \end{cases} \quad (3.64)$$

On peut d'ailleurs réécrire le coefficient h et la matrice H

$$h = a^2 \alpha \beta, \quad (3.65)$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a^2 \alpha \beta & -a a' \beta^2 r & 0 \\ -a a' \beta^2 r & \frac{\beta}{\alpha} ((a' \beta r)^2 + 1) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{\beta} \end{pmatrix}. \quad (3.66)$$

L'épaisseur $e(x)$ de la PML est ainsi variable, ce qui est inhabituel ; mais on confirme en section 3.4.2 qu'elle modélise toujours un milieu homogène radialement infini de façon satisfaisante.

3.3.3 Problème d'onde

Grâce aux développements réalisés en section 3.2.3.c, grâce aux expressions de h et de la matrice \mathbf{H} , et en utilisant une même base transverse $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pour la discrétisation des champs et la projection du problème transverse, on obtient le problème d'onde suivant pour le guide annulaire de section variable avec PML

$$\partial_x \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{A}}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a'/a) \hat{\mathbf{E}} & (1/a)^2 \mathbf{A} \\ -(ka)^2 \hat{\mathbf{A}} + \mathbf{B} & -(a'/a) \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

où

$$\mathbf{A}_{nm} = \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle_{\mathcal{A}}, \quad (3.68a)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{nm} = \langle \varphi_n, \alpha \beta \varphi_m \rangle_{\mathcal{A}}, \quad (3.68b)$$

$$\mathbf{B}_{nm} = \langle \nabla_{\perp} \varphi_n, \begin{pmatrix} \beta/\alpha & 0 \\ 0 & \alpha/\beta \end{pmatrix} \nabla_{\perp} \varphi_m \rangle_{\mathcal{A}}, \quad (3.68c)$$

$$\mathbf{E}_{nm} = \langle \partial_r \varphi_n, \frac{\beta}{\alpha} r \varphi_m \rangle_{\mathcal{A}}, \quad (3.68d)$$

$$\hat{E}_{nm} = \langle \varphi_n, \beta^2 r \partial_r \varphi_m \rangle_{\mathcal{A}}. \quad (3.68e)$$

La section transverse \mathcal{A} est ici simplement le cercle unité. C'est ici que l'on mesure l'intérêt d'avoir choisi des rayons intérieur R_0 et extérieur R_1 respectant des ratios constants (cf. Sec. 3.3.2.c); les matrices du problème d'onde définies en équation. (3.68) seraient sinon dépendantes de l'abscisse x et devraient être calculées en chaque abscisse de l'axe longitudinal discrétisé lors de la résolution numérique.

3.3.4 Base modale améliorée en guide annulaire

La dernière étape avant d'être entièrement capable de résoudre le problème d'onde dans notre guide C annulaire de section variable avec PML est la construction de la base de fonctions transverses utilisées dans le problème d'onde (3.67). On choisit de développer une base modale améliorée, ce qui est absent de la littérature pour un guide annulaire 3D. Cela n'était notamment pas utile précédemment puisque les guides annulaires modélisés dans le cadre de la méthode multimodale étaient droits [36, 47], mais cela le devient pour notre guide annulaire de bords variables.

Pour un tel guide, il est possible de rajouter un mode supplémentaire sur chaque paroi, intérieure et extérieure, contrairement aux guides tubulaires où il n'y a qu'une paroi extérieure. En ce sens, notre guide annulaire peut être rapproché d'un guide 2D [85]; car le guide est alors également délimité par deux parois et un mode supplémentaire peut avoir une composante non Neumann sur l'une ou l'autre paroi.

Nous choisissons ici de ne pas rajouter de mode supplémentaire sur la paroi extérieure. En choisissant bien les paramètres de la PML, le champ de pression est en effet nulle au voisinage de la paroi extérieure (cf. Chap. 1 et Sec. 3.4.2 de ce chapitre). On est donc censé observer aussi bien $p \simeq 0$ que $\partial_r p \simeq 0$, auquel cas il n'y a à priori pas de raison d'ajouter une composante Dirichlet via un mode supplémentaire. Des investigations futures pourraient possiblement mettre en évidence un rôle insoupçonné du mode supplémentaire au niveau de la PML, tout comme les modes supplémentaires ont déjà présenté un intérêt inattendu dans des coudes de section constantes (cf. Chap. 2).

Les modes standards pour un indice azimutal μ donné sont choisis comme étant les modes du guide droit rigide de rayon intérieur b et de rayon extérieur $b + 1$. On respecte ainsi le ratio qui existe entre les rayons intérieurs et extérieurs R_0 et R_1 .

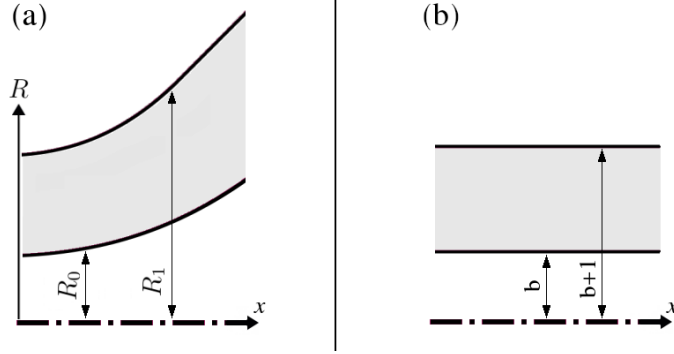


FIGURE 3.8 – (a) Section longitudinale du guide annulaire représenté dans les coordonnées (x, R) . (b) Guide de largeur unité respectant le même rapport rayon extérieur/rayon intérieur, et dont on choisit les modes transverses pour discrétiser et projeter notre problème transverse.

Le mode standard d'indice n est ainsi

$$\varphi_n(r, \theta) = \Lambda_n \left(J_\mu(\gamma_n(b+r)) - \frac{J'_\mu(\gamma_n(b+1))}{Y'_\mu(\gamma_n(b+1))} Y_\mu(\gamma_n(b+r)) \right) \cos(\mu\theta). \quad (3.69)$$

J_μ et Y_μ sont les fonctions de Bessel d'ordre μ de la première et de la seconde espèce. La valeur propre γ_n est la $(n+1)^{\text{e}}$ solution de

$$J'_\mu(\tau b) Y'_\mu(\tau(b+1)) - J'_\mu(\tau(b+1)) Y'_\mu(\tau b) = 0. \quad (3.70)$$

Par ailleurs la norme Λ_n est choisie telle que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \varphi_n(r) \varphi_n(r) (b+r) dr d\theta = 1. \quad (3.71)$$

A présent on s'intéresse au mode supplémentaire, et donc dans un premier temps au mode satisfaisant une condition de Dirichlet sur la paroi inférieure et une condition de Neumann sur la paroi supérieure. Ce mode a une expression rigoureusement semblable à celle des modes Neumann présentés en équation (3.69), à cela près que la valeur propre est cette fois-ci la première solution de

$$J_\mu(\tau b) Y'_\mu(\tau(b+1)) - J'_\mu(\tau(b+1)) Y_\mu(\tau b) = 0. \quad (3.72)$$

Le mode obtenu est orthogonalisé par rapport aux autres modes Neumann-Neumann,

puis normé, afin de donner le mode supplémentaire annulaire de notre base améliorée. La méthode de construction du mode supplémentaire est ainsi similaire à celle employée pour les guides tubulaires, détaillée au Chap. 2. Cependant, cette fois-ci, notre base modale améliorée réelle ne dispose dans l'espace complexe d'aucune propriété d'orthogonalité permettant de simplifier les matrices du problème de propagation (cf. Eq. (3.68)) car le guide comporte une PML.

Nous disposons à présent de tous les éléments permettant de modéliser exactement le milieu encerclant le pavillon. Nous pouvons donc investiguer l'impact du rayonnement à l'arrière du pavillon sans simplifier la géométrie du problème de rayonnement, contrairement aux études antérieures utilisant la méthode multimodale.

3.4 Influence du rayonnement arrière

3.4.1 Problématique

Une question se pose dans le cadre particulier de la méthode multimodale : dans quelle mesure cela est-il une approximation valide de considérer droit le milieu C entourant le guide rayonnant A (cf. Fig. 3.9) ? La littérature ne contient pas d'information sur ce sujet à la connaissance de l'auteur. En effet, soit le rayonnement est modélisé de façon simplifiée par des méthodes ne pouvant pas prendre en compte toute la complexité de la géométrie extérieure [63, 72, 137] ; soit le rayonnement est modélisé à l'aide de méthodes numériques type éléments finis et dans ce cas la géométrie du milieu C est choisie réaliste, il n'y a pas d'intérêt à prendre un guide C droit.

Ce n'est que dans le cadre spécifique de notre méthode multimodale que cette question présente un réel enjeu. En effet, nous pouvons à présent choisir un guide annulaire C droit ou de section variable, en sachant que la deuxième option implique un surcoût numérique. Ce surcoût vient pour rappel du fait que le champ ne puisse alors pas être décomposé en ondes aller-retour (cf. Sec. 3.2.3.d).

Dans cette section 3.4, nous cherchons à apporter une réponse à cette question pour deux guides d'ondes rayonnants A en prenant pour chacun d'eux un guide annulaire C qui soit successivement droit ou de section variable, qu'on qualifie successivement de

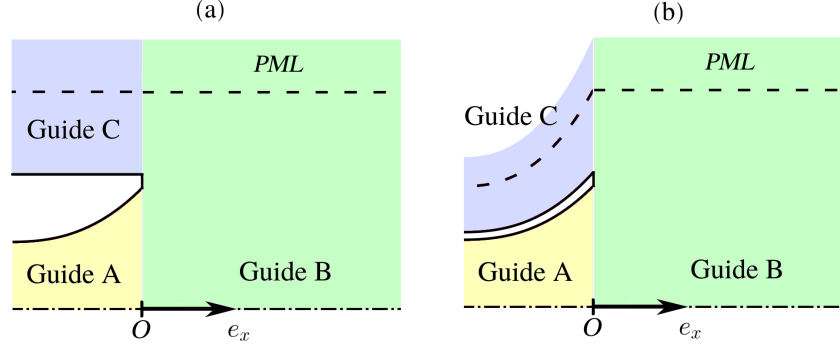


FIGURE 3.9 – Géométries de rayonnement avec un guide annulaire droit, homogène (a), ou de section variable, hétérogène (b).

homogène ou d'hétérogène. Le premier guide étudié en section 3.4.3 est un pavillon pour lequel le guide C de section variable rétrécit vers l'amont de l'interface de rayonnement. Le second guide étudié en section 3.4.4 est une bouche pour laquelle à l'inverse le guide C s'élargit vers l'amont de l'interface de rayonnement.

En amont de ces deux applications, nous commençons par nous assurer de la fiabilité de notre PML de bornes variables, en testant sa capacité à retrouver un résultat de la littérature.

3.4.2 Validation de la PML de bornes variables

Ici, nous souhaitons vérifier que la PML simule bien un milieu homogène radialement infini lorsque ses bornes sont variables, comme elle le fait lorsque ses bornes sont constantes. La méthode multimodale avec PML droite a pour rappel été validée par Félix et coll. [47], qui notamment montrent la capacité de la méthode à retrouver l'impédance de rayonnement proposée par Zorumski pour un guide droit infiniment bafflé. Notre objectif est de faire de même avec une PML de bord variable. Ponctuellement nous considérons donc un guide A infiniment bafflé, avant d'aborder dans les prochaines sections les situations de rayonnement complexes, qui constituent le réel objectif de ce chapitre.

Un guide réel A de rayon constant a_0 débouche ainsi en $x = 0$ dans un guide complexe B avec PML, dont le rayon est $2a_0$ en $x = 0$. La PML est épaisse de a_0 et son coefficient d'amortissement est $\hat{\alpha} = 20\sqrt{2}(1 + 1j)$. 30 modes classiques discrétisent le champ dans le guide A , 60 dans le guide B . Dans un premier cas, le guide B est droit et le problème

modélisé est ainsi rigoureusement similaire à celui de Félix et coll. Dans un second cas, le guide B est de section variable ; son rayon passe linéairement de $2a_0$ à a_0 entre $x = 0$ et $x = 2a_0$. L'épaisseur variable de la PML évolue alors dans les mêmes proportions que le rayon du guide B (cf. Sec. 3.3.2.c). La résolution du problème d'onde dans le guide B repose sur les développements de la section 3.3.3 pour un guide annulaire de section variable avec PML, en considérant simplement un rayon intérieur nul.

Les deux géométries ainsi que les parties réelles du champ de pression associées pour une fréquence réduite $ka_0 = 10$ sont présentées en figure 3.10.(a). On trace en figure 3.10.(b) les coefficients de l'impédance de rayonnement obtenus dans les deux situations, et l'on observe que ceux-ci se superposent. Félix et coll. ayant montré que la première situation est en accord avec les résultats analytiques de Zorumski, la seconde l'est donc aussi. On peut conclure que notre PML de bornes variables permet de modéliser efficacement le problème de diffusion dans un espace radialement infini.

3.4.3 Pavillon de trompette

3.4.3.a Définition du problème

Le guide rayonnant choisi pour étudier dans un premier temps l'impact du rayonnement arrière est une trompette, dont la géométrie est fournie par Jansson et Benade [66] qui la nomment «Trumpet Bell I». Sa longueur est de 688mm, son rayon d'entrée est de 5,6mm et son rayon de sortie R_A est de 74,3mm. Bien que notre méthode permette de modéliser des épaisseurs finies de paroi, nous choisissons ici une épaisseur nulle car celle-ci est très faible devant le rayon de sortie du pavillon.

La trompette est excitée en entrée par un piston plan imposant une pression p_0 . Concernant le milieu environnant le pavillon, le rayon du guide tubulaire B est le double du rayon de sortie du guide rayonnant A . Son contour extérieur est couvert d'une PML de coefficient d'absorption $\bar{\alpha} = 30(1 + j)$ et de largeur $0.4R_A$ (cf. Fig. 3.11.(a)). La géométrie du guide C est telle que les bornes de la PML soit continue à l'interface des guides B et C .

Les guides B et C sont tous les deux terminés par une condition d'admittance traduisant la prolongation par un guide droit infini. La longueur ℓ_B à laquelle on termine le guide B est donc indifférente puisque le guide B est droit. De même, la longueur ℓ_C du

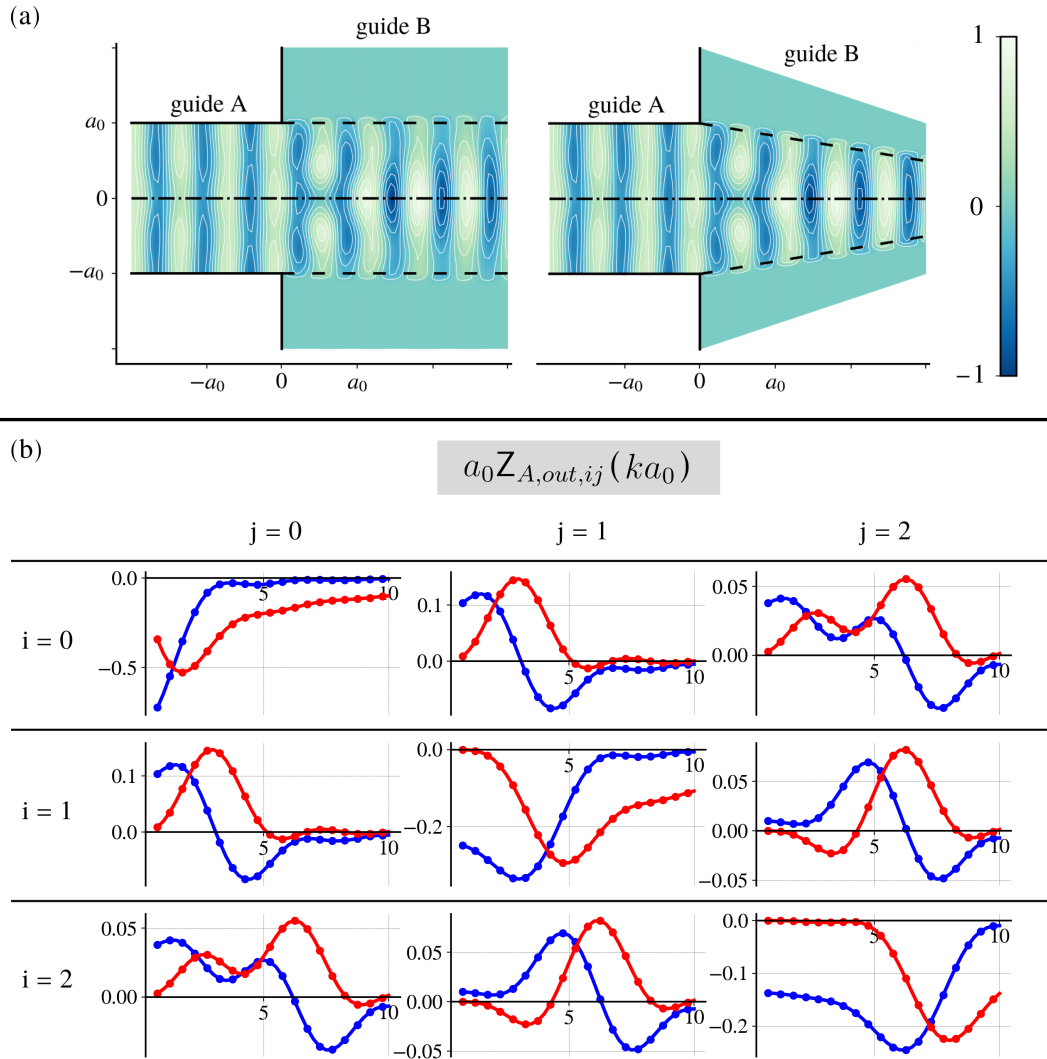


FIGURE 3.10 – (a) Partie réelle du champ de pression pour une fréquence réduite $ka_0 = 10$ et un guide B droit ou de section variable, respectivement à gauche ou à droite. (b) Termes (i, j) de l'impédance de rayonnement normalisée $a_0 Z_{A,out,ij}$ en fonction de la fréquence réduite ka_0 pour un guide B droit (trait continu) ou de section variable (marqueurs ronds). La partie réelle de l'impédance de rayonnement est représentée en bleu, sa partie imaginaire en rouge.

guide C est indifférente lorsque le guide C est considéré homogène. En revanche, quand le guide C est hétérogène, la longueur ℓ_C traduit la longueur sur laquelle le milieu extérieur épouse le contour du pavillon (cf. Fig. 3.11.b). Le cas limite $\ell_C = 0$ est donc équivalent au cas où le guide est homogène, et plus on augmente ℓ_C , plus la situation de rayonnement est réaliste.

Cela dit, pour un maillage régulier de l’axe des abscisses, la longueur ℓ_C influence le nombre de pas longitudinaux et donc d’étapes dans le schéma de Magnus (cf. Sec. 3.2.3.d). Ainsi plus la longueur ℓ_C est grande, plus la résolution numérique est coûteuse.

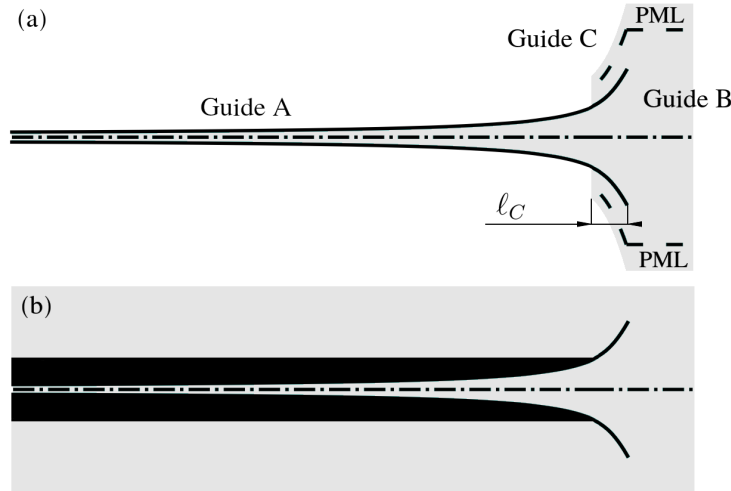


FIGURE 3.11 – (a) Assemblage de guides d’onde avec guide C hétérogène permettant de modéliser le rayonnement de la trompette par la méthode multimodale. (b) Géométrie physique équivalente.

De ces considérations peuvent être tirées deux questions distinctes que nous abordons successivement dans deux sections 3.4.3.b et 3.4.3.c : quelle longueur ℓ_C choisir pour capturer les effets du rayonnement arrière ? dans quelle mesure la modélisation exacte du rayonnement avec guide C hétérogène donne des résultats différents de celle avec guide C homogène ?

3.4.3.b Longueur du guide annulaire

Pour trouver une longueur ℓ_C du guide C hétérogène qui nous permette de comparer les situations «guide C homogène/hétérogène», nous observons les variations de l’admittance de rayonnement $Z_{A,out}$ selon la longueur ℓ_C lorsque le guide est hétérogène. Plus précisément, nous traçons en figure 3.12 la dérivée $\partial_{\ell_C} Z_{A,out,ij}$ des termes (i, j) de l’impédance de rayonnement par rapport à la longueur du guide C , pour des fréquences réduites $kR_A = 1.5, 3$ ou 4.5 . 15 modes sont utilisés dans les guides A et C pour discrétiser le champ, et 30 dans le guide B , valeurs que l’on conserve dans la suite.

De façon naturelle, il apparaît que les variations de ℓ_C ont le plus d’impact sur l’impédance de rayonnement pour les petites valeurs de ℓ_C . Au delà d’une certaine longueur

$\partial_{\ell_C} Z_{A,out,ij} \simeq 0$; autrement dit, augmenter ℓ_C ne raffine plus significativement l'impédance de rayonnement. En prenant $\ell_C = \ell_A/8$ on observe que les dérivées $\partial_{\ell_C} Z_{A,out,ij}$ sont en valeur absolue inférieures voire très inférieures à 4% leur valeur maximale. On conserve cette valeur de ℓ_C dans la suite.

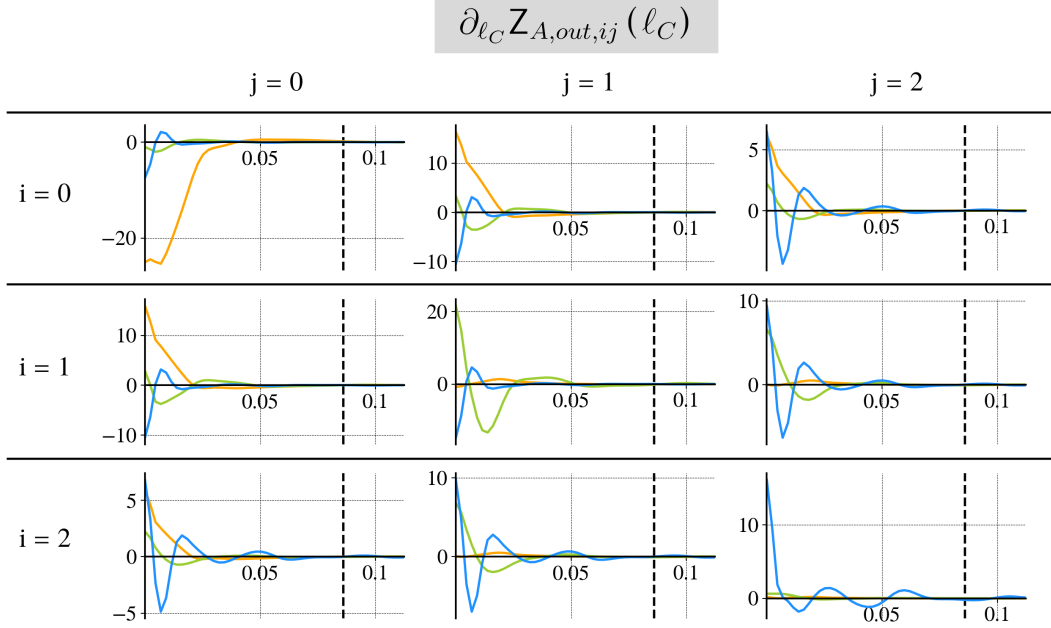


FIGURE 3.12 – Dérivée $\partial_{\ell_C} Z_{A,out,ij}$ des termes (i, j) de l'impédance de rayonnement par rapport à la longueur ℓ_C , en m^{-2} , tracée en fonction de la longueur ℓ_C en m. La dérivée est calculée pour trois fréquences, $kR_A = 1.5, 3$ ou 4.5 , respectivement en orange, vert et bleu. En pointillé : droite d'équation $\ell_C = \ell_A/8$.

Notons que le guide C étant axisymétrique, le fait de le tronquer permet d'introduire de la courbure en amont de la zone de rayonnement. Un exemple est ainsi présenté en figure 3.13 dans lequel on considère que la trompette A est courbe en amont de la portion où son contour est épousé par le guide C . On choisit arbitrairement une courbure de $2/R_A$, l'objectif ici étant simplement d'illustrer le potentiel de la méthode. Voir le chapitre 2 pour plus de détails sur la méthode multimodale améliorée pour un guide courbe.

3.4.3.c Influence de la forme du guide annulaire

Afin de mettre en perspective la prise en compte des variations de section du guide C , nous nous intéressons ici à 3 situations : bafflage infini, guide C homogène ou guide

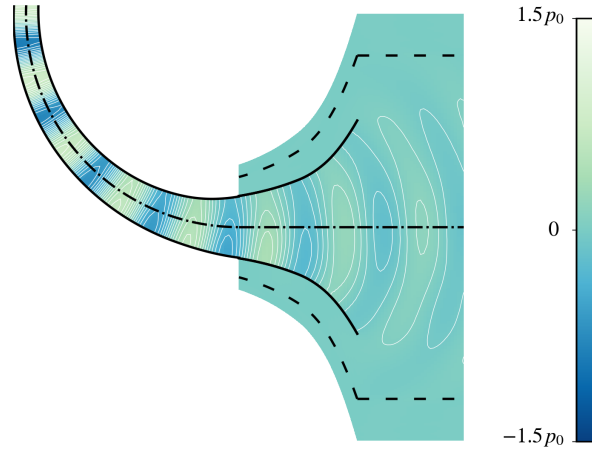


FIGURE 3.13 – Partie réelle du champ de pression pour la géométrie de trompette étudiée avec une courbure de $2/R_A$ en amont de la situation de rayonnement. La fréquence réduite est de $kR_A = 9$.

C hétérogène. Cela nous permet d’avoir une base de comparaison et de reformuler notre problématique en : l’écart sur les grandeurs du rayonnement entre les situations «guide C hétérogène» et «guide C homogène», est-il du même ordre de grandeur que l’écart entre les situations «guide C hétérogène» et «baffle infini»? On s’attend logiquement à ce que cela soit au maximum du même ordre de grandeur, sinon d’un ordre de grandeur inférieur. Les trois situations sont représentées en figure 3.14, ainsi que la partie réelle du champ de pression associé pour une fréquence réduite $kR_A = 2, 38$.

La simple observation des champs de pression ne saurait déterminer l’impact du rayonnement arrière, aussi calcule-t’on la longueur de correction $\ell_{A,c}$ du guide A (cf. Chap. 1) et différents coefficients de réflexion de sortie $R_{A,out,ij}$ dans les différentes situations de rayonnement et pour N_k fréquences réduites espacées entre $kR_A = 0, 5$ et 8 . Le rayon R_A est pour rappel le rayon de sortie du guide A .

Les résultats sont visibles en figure 3.15. Globalement, les différentes grandeurs diffèrent peu entre les situations où le guide C est homogène ou hétérogène, comparativement à la situation où le guide A est muni d’un baffle infini. Les écarts entre les situations «guide C homogène/hétérogène» sont essentiellement visibles en basses fréquences, probablement car en hautes fréquences les ondes sont moins diffractés par l’extrémité du pavillon.

Les variations de la longueur de correction entre les situations où le guide C est homogène ou hétérogène peuvent atteindre en basse fréquence $0.023R_A$ soit une variation

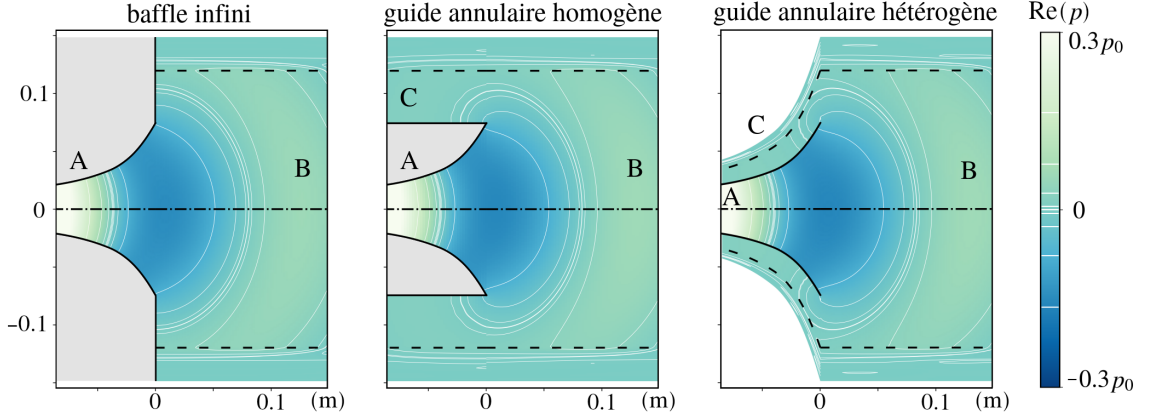


FIGURE 3.14 – Partie réelle du champ de pression en sortie du guide A dans les trois situations de rayonnement abordées (de gauche à droite : baffle infini, guide C homogène, guide C hétérogène) et pour une fréquence réduite de $kR_A = 2,38$.

5%. Pour quantifier l'écart sur le coefficient de réflexion plan, nous introduisons la variable $\varepsilon_{\text{HO/HE}}$ défini comme suit.

$$\varepsilon_{\text{HO/HE}} = \max_{\ell=0..N_k-1} |\mathbf{R}_{A,\text{out},00}^{\text{HO}} - \mathbf{R}_{A,\text{out},00}^{\text{HE}}| (k = k_\ell), \quad (3.73)$$

où HO et HE désignent respectivement les situations où le guide annulaire C est homogène ou hétérogène. De même on définit $\varepsilon_{\text{BI/HE}}$, où BI fait référence à la situation où le guide A est muni d'un baffle infini.

Finalement, on obtient $\varepsilon_{\text{HO/HE}} = 0.05$ et $\varepsilon_{\text{BI/HE}} = 0.20$. Ainsi, pour certaines fréquences, on peut obtenir des écarts entre les situations «guide C homogène/hétérogène» qui soient d'un ordre de grandeur voisin des écarts que l'on peut obtenir entre les situations «guide C hétérogène/bafflé». Pour une situation où la question des performances numériques est critique, on pourra ainsi recommander de garder un guide C homogène, qui constitue une bonne approximation de la situation exacte. Lorsque cela n'est pas le cas l'auteur invite donc à adopter le guide C hétérogène présenté dans ce chapitre.

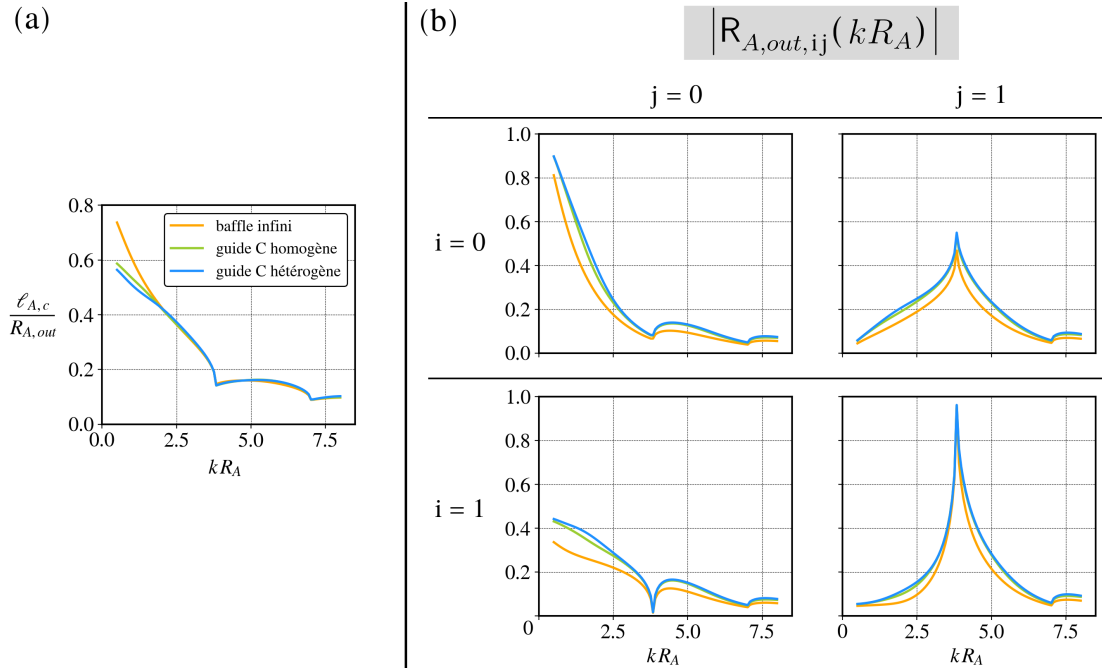


FIGURE 3.15 – (a) Longueur de correction issue de la phase du coefficient de réflexion de sortie $R_{A,out,00}$. Coefficient de réflexion plan en sortie de la trompette, en fonction de la fréquence réduite kR_A .

3.4.4 Impact de la forme des lèvres sur le rayonnement de la voix

3.4.4.a Contexte

Blandin et coll. [17] ainsi que Yoshinaga et coll. [135] développent une modélisation multimodale du conduit vocal avec des sections transverses constantes respectivement elliptiques et rectangulaires, dans laquelle le conduit vocal est terminé par un baffle infini à l'aide d'une méthode intégrale semblable à celle de Zorumski [137]. Une géométrie de lèvres adaptée à la méthode multimodale n'a pas encore été proposée, chose que l'on compte faire dans cette section 3.4.4 en incluant les outils introduits dans ce chapitre. Comme pour le pavillon de la section 3.4.3 se posera la question de la prise en compte des variations de section du guide C entourant le guide rayonnant A .

On peut ici mentionner l'étude d'Arnella et coll. [8], qui déterminent à l'aide d'une modélisation par éléments finis, que la prise en compte des détails du visage autres que les lèvres (nez, menton) n'apporte pas de réel raffinement par rapport à un modèle de tête

sphérique avec lèvres. Il n'est alors pas question d'à quel point la forme des lèvres peut être simplifiée ; notre question reste donc entière.

Nous adoptons une géométrie axisymétrique s'approchant d'une bouche, dont les dimensions sont inspirées de la bouche décrite par Arnela et coll. [7] (cf. Fig. 3.16). Plus particulièrement nous considérons la bouche prononçant un son /A/. Le rayon du guide rayonnant A (le contour intérieur des lèvres) est un polynôme d'ordre 2, de dérivée nulle en $x = -5\text{mm}$, allant de 12mm en $x = -5\text{mm}$ à 15mm en $x = 0\text{mm}$. Le rayon intérieur du guide annulaire C (le contour extérieur des lèvres) est également un polynôme d'ordre 2, de dérivée nulle en $x = 0$, allant de 20mm en $x = -8\text{mm}$ à 15mm en $x = 0$. Comme en section 3.4.3, le rayon du guide tubulaire B est le double du rayon de sortie du guide rayonnant A ; on adopte par ailleurs les mêmes paramètres de PML. Pour afficher nos champs de pression, on considère que le guide A est excité en entrée par un piston plan imposant une pression p_0 .

On rappelle que notre bouche rayonnante, bien qu'axisymétrique, pourrait tout à fait être raccordée à un guide vocal courbe dans le cadre de notre méthode. Vampola et coll. [130] soulignent d'ailleurs l'importance de considérer la courbure du conduit vocal au delà de 3kHz . Des guides de sections elliptiques continument variables pourraient être modélisés par la méthode multimodale dans de futurs travaux (cf. Ann. I). Egalement le flux d'air sortant du conduit vocal, dont l'importance est montrée par Fulcher et coll. [54], pourrait être pris en compte à l'aide des travaux de Auregan et coll. [10]. En revanche, il paraît difficile à court terme que la commissure des lèvres puisse être modélisée par la méthode multimodale.

3.4.4.b Influence de la forme extérieure

Afin d'investiguer le rôle de la forme extérieure des lèvres, on modélise trois situations de rayonnement, avec un baffle infini, un guide annulaire C hétérogène ou C homogène (cf. Fig. 3.16) pour lesquelles on trace ici en figure 3.17 la longueur de correction et le coefficient de réflexion plan en sortie du guide rayonnant A . D'autres termes de la matrice de réflexion ont été observés sans être représentés ici, car ils n'apportent pas d'informations supplémentaires, et présentent également des écarts comparables à ceux observés pour le pavillon.

A nouveau, la longueur de correction et le coefficient de réflexion plan diffèrent peu entre les situations où le guide C est homogène ou hétérogène, mais diffèrent significativement plus entre les situations où le guide C est hétérogène et où le guide A est muni d'un baffle infini. Plus précisément, les erreurs maximales sur le coefficient de réflexion plan en sortie du guide A sont respectivement $\varepsilon_{\text{HO/HE}} = 0.02$ et $\varepsilon_{\text{BI/HE}} = 0.13$.

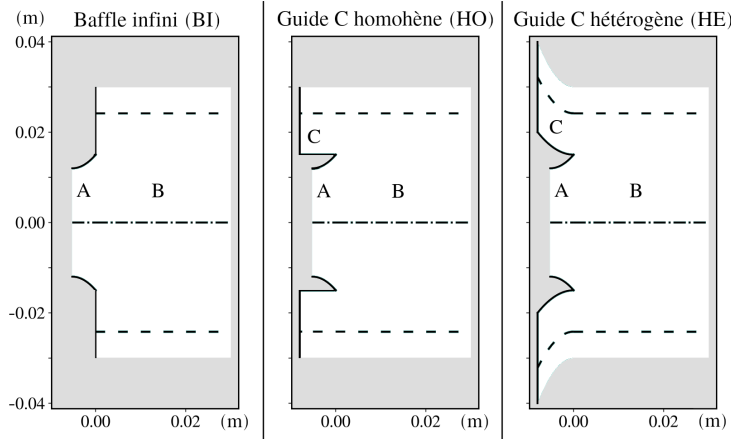


FIGURE 3.16 – Géométries de la bouche rayonnante avec un baffle infini (BI) ou un guide annulaire C homogène (HO) ou hétérogène (HE).

Finalement, pour aller plus loin qu'Arneta et coll. [8] qui concluent sur la non-pertinence de prendre en compte des détails comme le nez ou le menton, on peut également dire que simplifier la forme extérieure exacte des lèvres et la considérer droite peut déjà constituer une approximation raisonnable, l'essentiel étant le décalage du baffle par rapport à la sortie des lèvres. Pour rappel cette simplification permet de diminuer le temps de résolution du problème dans le guide C .

3.4.4.c Comparaison avec l'influence de la forme intérieure

Nous avons précédemment discuté de l'influence de la forme extérieure des lèvres ; à présent nous souhaitons comparer celle-ci à l'influence de la forme intérieure des lèvres, afin de conclure sur les parties de la bouche qui méritent ou non d'être modélisées avec précision. Pour procéder à cette comparaison, on considère les trois configurations suivantes (cf. Fig. 3.18) :

- les lèvres sont droites et le guide annulaire C est hétérogène (D-HE) ;

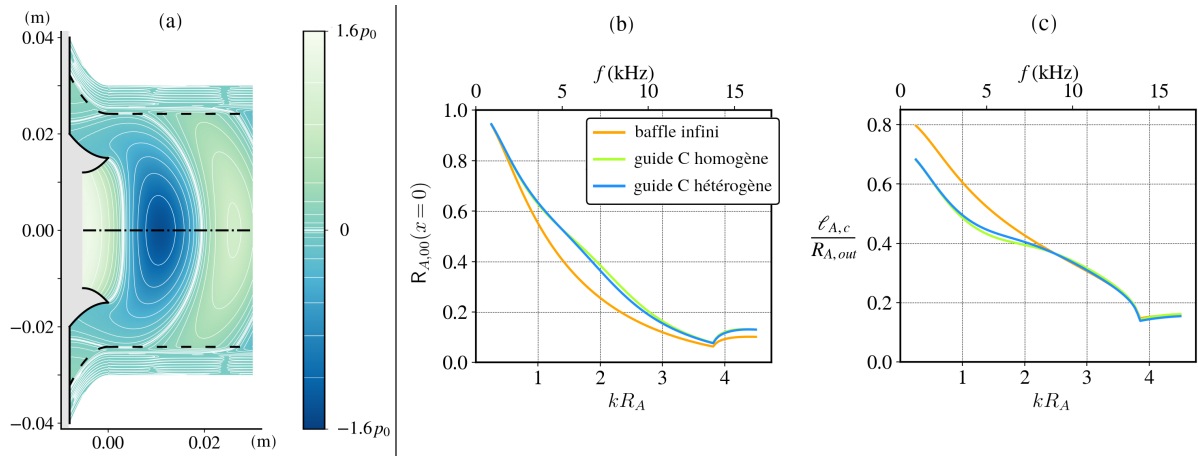


FIGURE 3.17 – (a) Partie réelle du champ de pression pour un guide annulaire C de section variable et pour une fréquence réduite $kR_A = 3,47$. (b) Coefficient de réflexion du mode plan en sortie des lèvres en fonction de la fréquence réduite kR_A . (c) Longueur de correction en sortie des lèvres en fonction de la fréquence réduite kR_A .

- les lèvres sont paraboliques et le guide annulaire C est hétérogène (P-HE) ;
- les lèvres sont paraboliques et le guide annulaire C est homogène (P-HO).

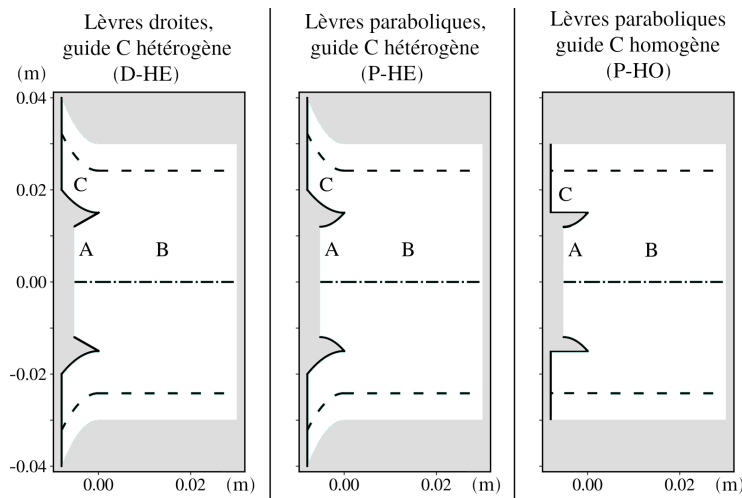


FIGURE 3.18 – Géométrie des différentes situations de rayonnement (D-HE), (P-HE) et (P-HO).

La première configuration est propre à cette section, les deuxième et troisième correspondent aux situations HE et HO de la section 3.4.4.b. Dans le but de saisir l'effet de la forme intérieure de la lèvre sur le coefficient de réflexion, on calcule celui-ci à l'entrée du guide A rayonnant (cf. Fig. 3.19). On voit alors que l'écart entre les courbes des configu-

rations «lèvres paraboliques et guide C homogène/hétérogène» est significativement plus faible que l'écart entre les courbes des configurations «lèvres droites/paraboliques et guide C hétérogène».

En prenant comme situation de référence la configuration «lèvres paraboliques et guide C hétérogène» (P-HE), on définit les erreurs maximales sur le coefficient de réflexion plan en entrée du guide $\varepsilon_{D-HE/P-HE}$ et $\varepsilon_{P-HO/P-HE}$, de la même façon qu'on a défini l'écart sur le coefficient de réflexion plan en sortie du guide A en section précédente (cf. Eq. (3.73)).

Alors, les erreurs maximales pour des lèvres droites (D-HE) ou un guide C homogène (P-HO) sont respectivement $\varepsilon_{D-HE/P-HE} = 0.12$ et $\varepsilon_{P-HO/P-HE} = 0.03$. Cela montre quantitativement, comme on peut l'attendre, que l'intérieur des lèvres joue un rôle nettement plus important que l'extérieur des lèvres dans la résonance du conduit vocal.

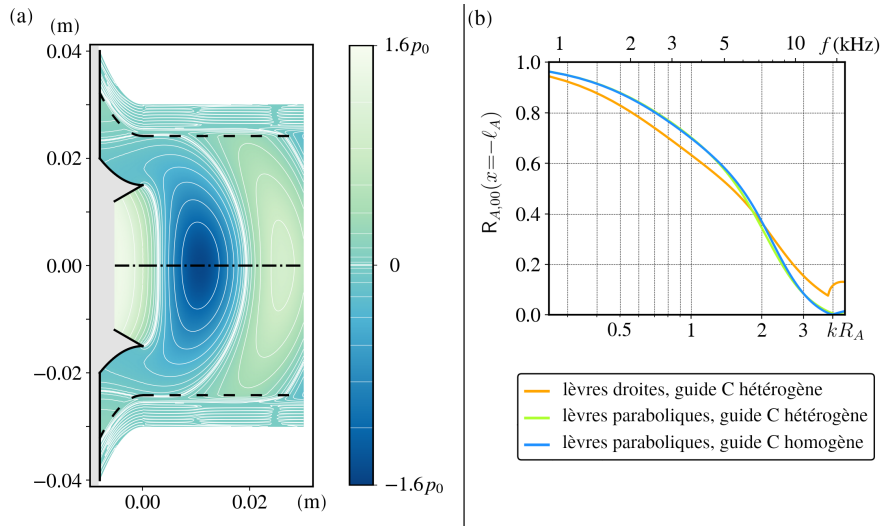


FIGURE 3.19 – (a) Partie réelle du champ de pression pour des lèvres droites et un guide annulaire C de section variable, pour une fréquence réduite $kR_A = 3,47$. (b) Coefficient de réflexion du mode plan en entrée des lèvres.

Pour conclure cette section, si, comme nous l'avons vu en section 3.4.4.b, le contour extérieur des lèvres peut raisonnablement être simplifié, nous voyons ici que le contour intérieur des lèvres doit être décrit de façon précise, ses variations pouvant avoir des conséquences importantes sur le problème de diffusion. D'autres études pourront confirmer ces conclusions pour des sections elliptiques, plus réalistes dans le cas des lèvres.

3.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre nous avons étendu le champ des géométries modélisables par la méthode multimodale dans le cadre d'un problème de rayonnement, en nous affranchissant des simplifications antérieures sur la géométrie de la partie annulaire entourant le guide rayonnant. Pour ce faire nous avons développé une formulation de la méthode multimodale qui s'accorde avec n'importe quel système de coordonnées curvilignes, et donc à plus forte raison avec un système de coordonnées adaptés à la description du guide annulaire de section variable et muni d'une PML. La formulation générale présentée pourra être utilisée pour étendre la méthode à des guides avec courbure et torsion et de section quelconque variable (cf. Ann. I), dans la limite d'un problème acoustique linéaire isentropique.

Pour un pavillon de trompette et une bouche, on observe que la forme de la partie annulaire autour du guide rayonnant impacte faiblement le problème de diffusion en sortie du guide. Plus particulièrement, dans le cas des lèvres, on montre que le contour extérieur joue un rôle négligeable par rapport au contour intérieur sur les réflexions en entrée des lèvres, et que c'est donc ce dernier qui doit être modélisé avec le plus de soin.

Cet étude sur le rayonnement arrière permet notamment de créditer une hypothèse souvent employée [11, 104, 129] et dont nous nous servons dans le chapitre suivant, qui est que la forme d'un pavillon peut être optimisée en considérant fixe la géométrie entourant le guide, celle-ci ayant un impact suffisamment faible. Cette hypothèse permet de réduire considérablement le temps de calcul puisque sans elle, il serait nécessaire de recalculer l'impédance de rayonnement en sortie du pavillon pour chaque variation de sa géométrie.

OPTIMISATION DE FORME D'UN PAVILLON

4.1 Introduction

L'optimisation de forme consiste à rechercher la géométrie d'un système physique permettant de satisfaire au mieux un critère donné. Comme évoqué en introduction de ce manuscrit, en ingénierie audio [11, 104, 129] ou en ingénierie civile [114], cela peut consister à favoriser ou au contraire à inhiber le rayonnement en sortie de guides d'ondes. En acoustique musicale, on peut par exemple chercher à optimiser des fréquences de résonance d'instruments à vent [22, 43, 103].

La géométrie du système physique d'intérêt étant en pratique décrite par un nombre fini de paramètres, la recherche d'une géométrie optimale revient à la recherche des valeurs optimales des paramètres. La satisfaction du critère de l'optimisation est exprimée de façon quantitative à l'aide d'une fonction objectif telle que le jeu de paramètre optimal corresponde à un extremum de la fonction, qui est un maximum (resp. minimum) si la fonction objectif doit être maximisée (resp. minimisée).

La méthode la plus sommaire pour trouver un jeu de paramètres σ optimisé serait de tester toutes les combinaisons de N_v valeurs des N_p paramètres. Pour cent valeurs testées et dix paramètres, cela reviendrait à tester 100^{10} géométries, ce qui n'est évidemment pas concevable. A titre indicatif, dans le cas où l'évaluation d'une géométrie se ferait en 0.1sec, le calcul complet nécessiterait 3000 milliards d'années.

Dans le but de limiter le nombre de tests devant être effectués, différents algorithmes d'optimisation ont vu le jour, visant à trouver un extremum de la fonction objectif en

évaluant celle-ci un nombre limité de fois. Le risque existe cependant de converger vers un jeu de paramètres qui corresponde à un extremum de la fonction objectif qui soit local, et non global ; c'est-à-dire qui soit un extremum dans un sous-ensemble uniquement de l'espace des paramètres (cf. Fig. 4.1). Par ailleurs, le temps de calcul peut demeurer conséquent, de l'ordre de l'heure ou de la journée pour certaines optimisations de pavillon par exemple [38, 104], aussi est-il essentiel de réduire au minimum le temps d'exécution de la fonction objectif et d'utiliser un algorithme d'optimisation adapté au problème traité.

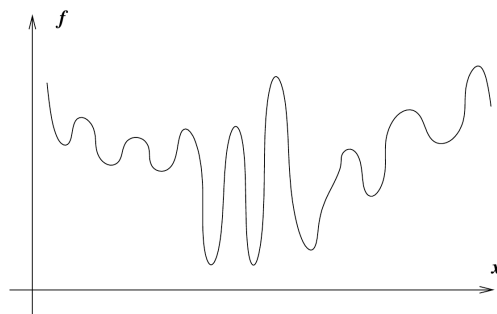


FIGURE 4.1 – Exemple de fonction objectif f d'un paramètre x pour laquelle un algorithme de minimisation est susceptible de fournir un minimum local et non global. Source : [100].

On peut grossièrement distinguer deux catégories d'algorithmes d'optimisation : ceux qui ont recours, ou non, au gradient de la fonction objectif. Les premiers sont également qualifiés d'algorithmes à descente de gradient, et sont utilisés quand le gradient est bien défini et numériquement peu coûteux à obtenir, car il fournit une information essentielle : la direction dans l'espace des paramètres dans laquelle la fonction objectif varie le plus rapidement, et donc dans laquelle on est le plus susceptible de se rapprocher d'un extremum. Pour des algorithmes avec gradient, le problème d'optimisation peut être reformulé ainsi : trouver une solution à l'équation non-linéaire $f(\sigma) = 0$, où f est le gradient de la fonction à minimiser/maximiser. La méthode classiquement utilisée pour résoudre cette équation est la méthode de Newton, avec des variantes, dont la méthode de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) [100] qualifiée de quasi-Newton et utilisée dans la suite de ce chapitre. Cette dernière méthode permet de s'affranchir du calcul de la matrice hessienne (grossièrement, la dérivée seconde de la fonction objectif).

Si les premières optimisations de pavillons acoustiques recourent à des algorithmes sans gradient [21, 57, 68] comme celui de Rosenbrock [21, 68], on observe que l'utilisation d'algorithmes avec gradient tend à se généraliser [11, 38, 43, 61, 120].

Concernant les méthodes utilisées pour résoudre le problème de propagation dans le guide, la méthode des éléments finis prédomine assez largement [11, 57, 104, 120, 129], même si l'on peut noter également l'utilisation de la méthode de la matrice de transfert classique [68] ou modifiée par Hélie et coll. [61] (cf. Chap. 1), ou de la méthode multimodale [21, 38, 39]. La mise en oeuvre de la méthode des éléments finis présente pourtant des difficultés dans le cadre particulier de l'optimisation de pavillons, auxquelles nous ne sommes pas confrontés avec la méthode multimodale, à savoir : la gestion du maillage à chaque évolution du profil de rayon [11, 129], l'augmentation du coût numérique déjà conséquent pour des fréquences élevées [104].

A ce jour, les optimisations avec méthode multimodale considèrent le guide comme un assemblage de cylindres, et ne prennent pas en compte les variations continues du rayon comme cela est permis par les travaux de Pagneux et coll. [110]. Un des objectifs de ce chapitre est ainsi d'inclure les variations continues du rayon, ce qui implique entre autres de calculer une nouvelle expression du gradient adaptée au schéma d'intégration de Magnus alors employé. Naturellement on utilise la base modale améliorée présentée au chapitre 2 pour réduire le nombre de modes et améliorer les performances.

Autre point, les optimisations précédentes utilisant la méthode multimodale considéraient des guides rayonnants terminés par des baffles infinis, sans déterminer si la forme obtenue présente de bonnes performances dans une situation de rayonnement plus réaliste. Grâce aux travaux présentés dans les chapitres précédents, nous pouvons ici nous affranchir de cette limitation et prendre en compte des complexités de milieux entourant le guide qui ne sont usuellement décrites qu'avec la méthode des éléments finis.

Avant de procéder à diverses optimisations de forme de pavillons, nous commençons par présenter le paramétrage adopté pour décrire la géométrie en section 4.2. Il s'agit d'un paramétrage par courbes de Bézier, qui allie régularité du profil et faible nombre de paramètres. Nous détaillons ensuite en section 4.3 les éléments permettant une application de la méthode multimodale à moindre coût à chaque itération de l'optimisation, à savoir l'ordre du schéma de Magnus et le calcul semi-analytique du gradient.

Deux applications sont finalement présentées en section 4.4 et 4.5. Dans la première, on calcule un coefficient de réflexion, qui nous sert de cible, en entrée d'un pavillon de trompette. Puis l'on tente de reconstruire la géométrie de l'instrument à partir de la cible.

Cette première application nous permet de valider notre méthode en utilisant une ou deux courbes de Bézier pour décrire le pavillon. La seconde application vise à maximiser la transmission d'un pavillon comme cela peut être utile dans le domaine audio [120]. On y observe notamment l'impact de la condition de rayonnement sur le résultat de l'optimisation.

4.2 Paramétrisation de la géométrie d'un pavillon

4.2.1 Géométrie étudiée

Soit un guide de section circulaire variable et de longueur ℓ de section variable (cf. Fig. 4.2). On ne considère pas dans ce chapitre la courbure du guide, car celle-ci n'est pas requise pour optimiser la forme du pavillon en lui-même. La courbure n'est pas non plus prise en compte dans la littérature sur le sujet.

A la différence des chapitres précédents, le rayon a n'est pas seulement considéré comme une fonction de l'abscisse $x \in [0, \ell]$, mais également comme une fonction de N_p paramètres géométriques $\{\sigma_n\}_{n \in [0, N_p-1]}$, regroupés au sein d'un vecteur σ , qui définissent le profil du pavillon.

Le paramétrage par des courbes de Bézier que l'on adopte dans la suite maintient une longueur ℓ et des rayons d'entrée et de sortie a_{in} et a_{out} constants (cf. Fig. 4.2). Cette contrainte que l'on satisfait est répandue dans la littérature et peut se traduire ainsi : on optimise les propriétés du guide pour un encombrement donné.

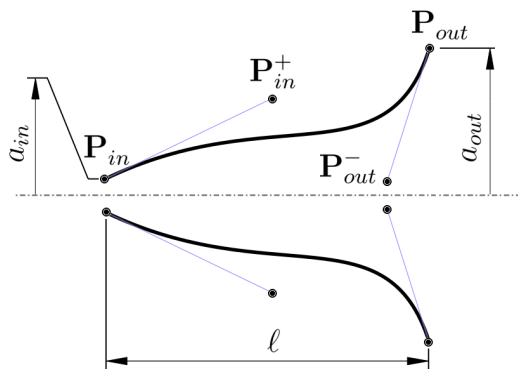


FIGURE 4.2 – Courbe de Bézier cubique définissant un profil de rayon.

4.2.2 Paramétrisation globale VS locale

On peut distinguer deux types de paramétrages, que l'on qualifie ici de locaux ou globaux. Avec les premiers, ce sont les positions de tous les points du bord du maillage qui servent de paramètres. Avec les seconds, des paramètres géométriques définissent analytiquement un profil de rayon.

Les paramétrages locaux comportent naturellement plus de paramètres que les paramétrages globaux. Concernant les premiers par exemple, Udawalpola et Berggren utilisent $N_p = 59$ paramètres [129], Dong et coll. en utilisent $N_p = 126$ [38]. Concernant les seconds, Braden [21] utilise 12 paramètres, Morgans et coll. [92] utilisent deux paramètres, et nous en utilisons dans la suite entre 4 et 9. A ce propos, on peut citer que le paramétrage utilisé par Braden est un assemblage de courbe de Bessel, mais qui est ensuite décomposé en une succession de cylindre pour appliquer la méthode multimodale. Les paramètres de Morgans et coll. sont par ailleurs les abscisses de deux points par lesquels passe une spline.

Pour un algorithme de descente de gradient, il est ainsi plus important de connaître une expression du gradient de la fonction objectif pour un paramétrage local que global, puisqu'un calcul par différences finies du gradient nécessite d'évaluer la fonction objectif un nombre de fois supplémentaires égal au nombre de paramètres N_p , et que ce dernier est plus élevé pour un paramétrage local. Dans la suite, nous utilisons un paramétrage global mais calculons malgré tout le gradient de façon semi-analytique, même si le gain attendu n'est pas aussi conséquent que pour un paramétrage local.

Une remarque concernant les paramétrages locaux : ils sont susceptibles de générer des nombres d'itérations dans l'optimisation supérieurs à ceux pouvant être obtenus avec des paramétrages globaux, et des profils trop irréguliers. Or, la régularité d'un profil de pavillon est une propriété recherchée car elle permet généralement d'éviter que le critère d'optimisation ne soit bien satisfait qu'aux seules fréquences utilisées pour le calcul de la fonction objectif [21, 129].

Pour ces raisons, nous adoptons dans la suite un paramétrage global à l'aide de courbes de Bézier. C'est également le paramétrage que retiennent Wang et coll. [131] après avoir passé en revue les différents paramétrages globaux d'un pavillon. Wang et coll. s'intéressent cela dit à l'amplification d'ondes ultrasonores en sortie d'un transducteur de Langevin, pour lequel à l'inverse d'un pavillon, le rayon rétrécit à l'approche de la sortie du

guide. A la connaissance de l'auteur les courbes de Bézier n'ont pas été utilisées pour décrire des profils de pavillons dans des applications musicales ou audio.

4.2.3 Courbes de Bézier

Il existe différents ordres de courbes de Bézier, mais nous nous restreignons dans la suite aux courbes de Bézier cubiques, qui sont les plus communément utilisées. Elles sont définies à partir d'un point de départ, d'arrivée, et d'un point de contrôle pour chacun d'eux et peuvent présenter jusque deux points d'inflexion (cf. Fig. 4.2) [45].

Dans le cadre de notre profil de pavillon, on note $\mathbf{P}_{in} = (0, a_{in})$ et $\mathbf{P}_{out} = (\ell, a_{out})$ les points d'entrée et de sortie du guide, fixés. Egalement on note \mathbf{P}_{in}^+ et \mathbf{P}_{out}^- les deux points de contrôle qui leur sont respectivement associés, et dont les 2 + 2 coordonnées nous servent de paramètres à optimiser. Enfin, on donne la relation

$$\left(x(t), a(x(t), \boldsymbol{\sigma})\right) = (1-t)^3 \mathbf{P}_{in} + 3t(1-t)^2 \mathbf{P}_{in}^+ + 3t^2(1-t) \mathbf{P}_{out}^- + t^3 \mathbf{P}_{out}, \quad (4.1)$$

avec $t \in [0, 1]$ qui indique la position sur la courbe de Bézier cubique.

Afin d'élargir le champ des possibles, on s'intéresse également dans la suite à des géométries pouvant être générées par le raccordement de deux courbes de Bézier cubiques. Cela inclut les géométries pouvant être décrites par une unique courbe de Bézier, puisque n'importe quelle courbe de Bézier peut être divisée en deux en tout point à l'aide de l'algorithme de Casteljau [19].

Chacune des deux courbes de Bézier cubiques est décrite par une équation similaire à l'équation (4.1), et se termine ou débute au point de raccordement \mathbf{P}_{mid} (cf. Fig. 4.3). Le point de contrôle associé au point \mathbf{P}_{mid} pour la première courbe de Bézier cubique est noté \mathbf{P}_{mid}^- . Celui utilisé pour la deuxième courbe est noté \mathbf{P}_{mid}^+ . A noter que les points \mathbf{P}_{mid}^- , \mathbf{P}_{mid} et \mathbf{P}_{mid}^+ sont choisis alignés pour garantir la continuité de la pente du profil au raccordement.

Au total, on peut optimiser 9 paramètres : les 4 coordonnées des points de contrôle \mathbf{P}_{in}^+ et \mathbf{P}_{out}^- , les 2 coordonnées de \mathbf{P}_{mid} , les 2 normes $\|\mathbf{P}_{mid}^- \mathbf{P}_{mid}\|$ et $\|\mathbf{P}_{mid} \mathbf{P}_{mid}^+\|$, et l'angle que fait le vecteur $\mathbf{P}_{mid}^- \mathbf{P}_{mid}^+$ avec l'horizontale.

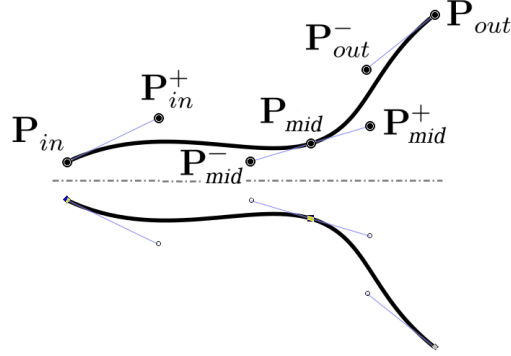


FIGURE 4.3 – Assemblage de deux courbes de Bézier cubiques définissant un profil de rayon.

4.3 Méthode multimodale appliquée à l'optimisation de forme

4.3.1 Problème de propagation

Le lecteur est invité à se référer spécifiquement au chapitre 2 et plus précisément aux équations (2.14) et (2.20) concernant l'obtention du problème de propagation pour un guide de section circulaire variable,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}'(x) = \mathbf{M}(x, \boldsymbol{\sigma}) \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}(x), \quad (4.2)$$

avec \mathbf{p} et \mathbf{q} les vecteurs des amplitudes transverses de la pression et du débit axial, et

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} (\partial_x a/a)\mathbf{E} & a^{-2}\mathbf{I} \\ -(ka)^2\mathbf{I} + \mathbf{B} & -(\partial_x a/a)\mathbf{E}^\dagger \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

où

$$\mathbf{B}_{nm} = \langle \nabla_\perp \varphi_n, \nabla_\perp \varphi_m \rangle, \quad (4.4a)$$

$$\mathbf{E}_{nm} = \langle \varphi_n, r \partial_r \varphi_m \rangle. \quad (4.4b)$$

Un tel problème est pour rappel intégré numériquement à l'aide d'un schéma de Magnus (cf. Sec. 3.2.3.d). Le nombre de modes y déterminant la taille des exponentielles et

inverses de matrices à calculer, il est de première importance de choisir un nombre de modes réduit. On utilise ainsi dans les diverses applications $N = 5$ modes axisymétriques pour discrétiser le problème transverse. Ce faible nombre se justifie d'une part car aux fréquences utilisées l'onde est toujours plane en entrée des différents guides, et d'autre part par l'utilisation de la base améliorée.

Pour rappel au chapitre 2, pour 5 modes et un problème axisymétrique, on obtient des erreurs de l'ordre de 0,1% sur la composante plane du coefficient de réflexion avec la base modale améliorée, précision supérieure à celle obtenue avec 30 modes standards. L'utilisation de 5 modes dans ce chapitre peut être validée à posteriori puisque l'on retrouve en section 4.5 des profils identiques à ceux de la littérature.

Pour chaque exemple présenté dans la suite de ce chapitre, le lecteur est invité à consulter les chapitres 1 et 3 pour l'obtention de l'admittance de rayonnement qui termine le guide. D'autre part, on considère dans chaque application de ce chapitre que le guide à optimiser est excité à son entrée par un piston plan.

4.3.2 Ordre du schéma de Magnus

4.3.2.a Problématique

Comme évoqué au chapitre 2 et détaillé au chapitre 3, l'admittance est rétropropagée le long de l'axe longitudinal discrétisé $\{x_i\}_{i \in [0, N_x - 1]}$ à l'aide d'un schéma de Magnus, N_x étant le nombre de points. Chacune des $N_x - 1$ itération requiert le calcul d'une exponentielle de matrice de taille $N \times N$, aussi souhaite-t-on réduire le nombre N_x de points, toujours par souci d'efficacité numérique. On s'intéresse pour cette raison à l'ordre 4 du schéma de Magnus [82, 109] là où nous n'avons utilisé que l'ordre 2 dans les chapitres 2 et 3; et l'on cherche quel nombre de points suffit à la bonne description du problème pour chacun des ordres 2 et 4.

Les ordres 2 et 4 du schéma de Magnus sont ainsi présentés en section 4.3.2.b, puis l'on définit une densité caractéristique de points en section 4.3.2.c, afin de se ramener à une grandeur indépendante de la géométrie. Enfin, on observe lequel des deux ordres permet d'atteindre une précision donnée sur une admittance avec le minimum de points en section 4.3.2.d.

4.3.2.b Schéma itératif

Pour rappel, la rétropropagation de l'impédance s'écrit à l'aide du schéma de Magnus

$$Y_{i-1} = (E_{i,3} + E_{i,4} Y_i) (E_{i,1} + E_{i,2} Y_i)^{-1}, \quad (4.5)$$

avec $E_{i,1}$, $E_{i,2}$, $E_{i,3}$ et $E_{i,4}$ les blocs respectivement supérieur gauche, supérieur droit, inférieur gauche et inférieur droit de la matrice $E_i = e^{\Omega_i}$. Tout au long de la rétropropagation de l'impédance sont fixés la fréquence k et la géométrie via le jeu de paramètre σ . L'ordre du schéma de Magnus détermine l'expression de la matrice exposant Ω_i :

$$\Omega_i = -\Delta x_i M \left(\sigma, \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right) \quad \text{pour l'ordre 2,} \quad (4.6)$$

$$\Omega_i = -\frac{1}{2} \Delta x_i (M_{i,-} + M_{i,+}) + \frac{\sqrt{3}}{12} \Delta x_i^2 (M_{i,-} M_{i,+} - M_{i,+} M_{i,-}) \quad \text{pour l'ordre 4,} \quad (4.7)$$

avec $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$, $M_{i,-} = M \left(\sigma, x_{i-1} - \frac{\sqrt{3}}{6} \Delta x_i \right)$ et $M_{i,+} = M \left(\sigma, x_{i-1} + \frac{\sqrt{3}}{6} \Delta x_i \right)$. La matrice M est pour rappel la matrice reliant les amplitudes modales à leurs dérivées dans le problème d'onde (4.2).

Le coût numérique de l'évaluation de la matrice M étant négligeable par rapport aux coûts des autres opérations numériques à chaque itération du schéma, on peut dire que les coûts numériques des ordres 2 et 4 du schéma sont environ égaux.

4.3.2.c Densité caractéristique de points

Nous cherchons à partir de maintenant à déterminer un critère permettant de choisir un nombre de points N_x , ni trop élevé, ni trop faible, pour allier précision et performances numériques. En particulier on cherche un critère qui puisse être généralisé à l'ensemble des guides et plages de fréquences étudiées dans ce chapitre. Pour cela il est pertinent de définir une densité D_e qui soit le nombre de points par longueur caractéristique ℓ_e de décroissance du mode le plus évanescent de valeur propre γ_{max} . C'est en effet le mode le plus évanescent qui est à priori susceptible d'entraîner les variations les plus rapides du champ, dont la bonne description est limitante. On reformule ainsi notre problème de départ, qui consiste à présent à rechercher pour une géométrie donnée une densité D_e qui garantisse une précision acceptable. Le résultat sera ensuite étendu aux autres géométries de ce chapitre.

On précise que la longueur ℓ_e caractéristique de la décroissance du mode le plus évanescent est définie par

$$\ell_e = \left(\left(\frac{\gamma_{max}}{a_{min}} \right)^2 - k^2 \right)^{-1/2}. \quad (4.8)$$

Avec nos $N = 5$ modes axisymétriques de la base modale améliorée, le mode le plus évanescent est le mode supplémentaire et $\gamma_{max} \simeq 20,435$. La longueur caractéristique de décroissance de ce mode est évaluée à l'endroit du guide où sa décroissance est la plus rapide et exige donc la densité de points la plus élevée, c'est-à-dire où le rayon est à son minimum a_{min} . En pratique dans ce chapitre, $k^2 \ll (\gamma_{max}/a_{min})^2$ et on utilise simplement $\ell_e \simeq a_{min}/\gamma_{max}$.

4.3.2.d Précision de la méthode en fonction de la densité caractéristique de points

On calcule la composante plane de l'admittance d'entrée de la trompette étudiée en section 3.4.3 pour différentes densités caractéristiques D_e et pour les ordres 2 et 4 du schéma de Magnus. Le pavillon de trompette est terminé par une impédance de rayonnement simulant un encastrement du pavillon dans un cylindre rigide, et est excité par un piston plan oscillant à une fréquence de 8kHz. Sur les courbes des résultats, visibles en figure 4.4(b), il apparaît qu'avec les ordres 2 et 4 on tend vers une même valeur asymptotique de l'admittance d'entrée pour les densités les plus élevées. En revanche, l'ordre 4 permet visiblement d'approcher beaucoup plus vite cette valeur asymptotique que l'ordre 2.

Pour quantifier cela plus précisément, on cherche pour les ordres 2 et 4 l'erreur sur l'admittance d'entrée plane

$$\varepsilon_Y = \frac{|\mathbf{Y}_{in,00}^N - \mathbf{Y}_{in,00}^{ref}|}{|\mathbf{Y}_{in,00}^{ref}|}. \quad (4.9)$$

Celle-ci est calculée par rapport à l'admittance d'entrée plane de référence $\mathbf{Y}_{in,00}^{ref}$ calculée avec un schéma de Magnus d'ordre 4 et à une densité $D_e = 0,4$.

Le tracé de l'erreur ε_Y en fonction de la densité caractéristique D_e souligne alors la convergence accélérée que procure l'ordre 4 du schéma de Magnus par rapport à l'ordre 2 (cf. Fig. 4.4.b). Une densité $D_e = 0.06$ avec un ordre 4 permet par exemple d'obtenir une précision supérieure à celle obtenue avec un ordre 2 et $D_e = 0.20$. Dans la suite on conserve donc un ordre 4 et également on adopte $D_e = 0.12$, ce qui dans cet exemple donne une erreur sur l'admittance de l'ordre de 10^{-5} .

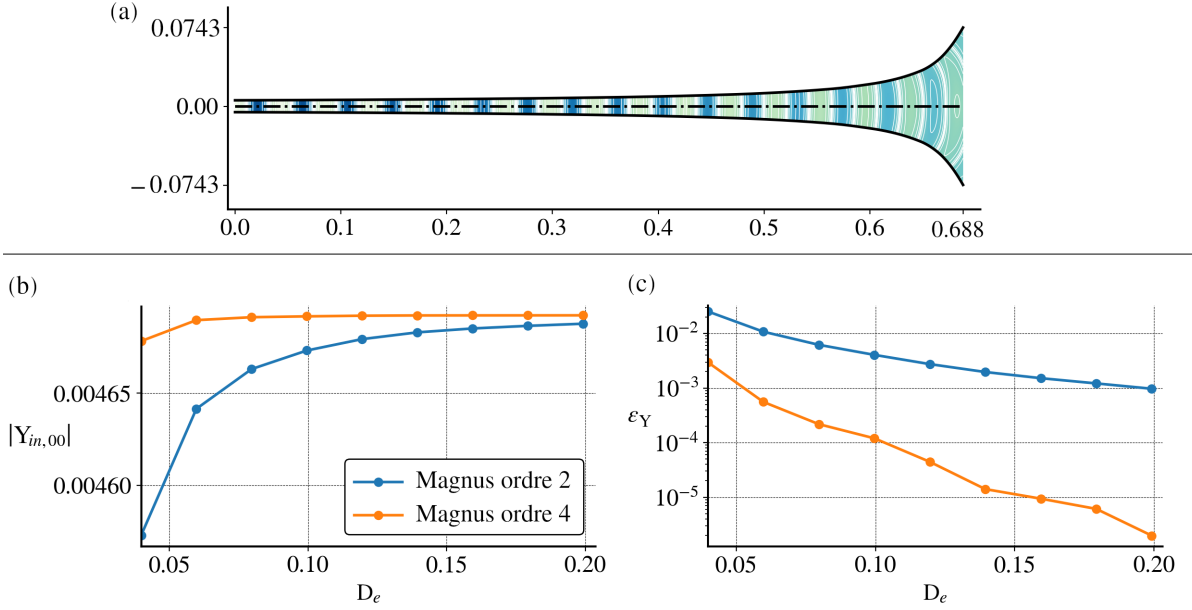


FIGURE 4.4 – (a) Partie de réelle du champ de pression pour la trompette d'étude, excité par un piston plan avec une fréquence de 8kHz. Les dimensions sont en m. (b) Admittance d'entrée plane, en m, en fonction de la densité caractéristique D_e , égale au nombre de points par longueur caractéristique ℓ_e de décroissance du mode le plus évanescent, pour un ordre du schéma de Magnus de 2 (en bleu) ou de 4 (en orange). (c) Erreur sur l'admittance d'entrée plane.

4.3.3 Gradient de l'impédance d'entrée

Comme évoqué en introduction, on souhaite pour son efficacité utiliser un algorithme à descente de gradient, qui requiert donc le calcul du gradient de la fonction objectif par rapport aux paramètres. Les fonctions objectifs utilisées dans la suite faisant toutes appel à l'impédance d'entrée du guide, on souhaite donc connaître le gradient de celle-ci par rapport aux paramètres σ .

S'il est possible de simplement connaître le gradient de l'admittance d'entrée par différences finies, en évaluant la fonction objectif pour des faibles variations successives de chacun des N_p paramètres, il peut cependant être numériquement moins coûteux de le calculer d'une façon analytique ou semi-analytique. En l'occurrence cela l'est avec la méthode des éléments finis [11, 104, 129] et avec la méthode multimodale par raccordement de cylindres [38]. Nous montrons ici que cela l'est également avec notre méthode multimodale utilisant la dérivée du rayon pour des nombres de paramètres $N_p > 4$; et l'on détaille mathématiquement comment obtenir ce gradient $\partial_{\sigma} Y_{in}$ de l'admittance d'entrée

en calculant itérativement les admittances $\partial_{\sigma} Y_i$ pour un indice i décroissant de N_x à 0. Cette rétropropagation se fait simultanément à celle de l'admittance Y_i . Le calcul du gradient de la fonction objectif s'effectue ainsi simultanément à l'évaluation de la fonction objectif.

Pour rétropropager le gradient de l'admittance $\partial_{\sigma} Y$, il faut tout d'abord connaître sa valeur en sortie du guide $i = N_x$. Ici $\partial_{\sigma} Y_{N_x}$ est tout simplement nul puisque peu importe la forme du guide, l'impédance de rayonnement est inchangée. Il en aurait été différemment si l'on avait considéré un rayon de sortie variable, ou un espace annulaire qui épouse le profil du pavillon. En effet dans ces derniers cas une modification du guide aurait entraîné une modification de l'espace dans lequel une partie du son est rayonné et donc de l'impédance de rayonnement.

Ensuite, il nous faut être capable d'obtenir $\partial_{\sigma} Y_{i-1}$ à chaque pas du schéma de Magnus, à partir de l'admittance nouvellement calculée Y_{i-1} , et des grandeurs obtenues au pas précédent i : l'admittance Y_i et son gradient $\partial_{\sigma} Y_i$. Pour cela on différencie l'équation (4.5), ce qui nous donne pour un paramètre σ_j

$$\partial_{\sigma_j} Y_{i-1} = \left((\partial_{\sigma_j} \mathbf{E}_i)_3 + (\partial_{\sigma_j} \mathbf{E}_i)_4 Y_i + \mathbf{E}_{i,4} \partial_{\sigma_j} Y_i \right) \quad (4.10)$$

$$- Y_{i-1} \left((\partial_{\sigma_j} \mathbf{E}_i)_1 + (\partial_{\sigma_j} \mathbf{E}_i)_2 Y_i + \mathbf{E}_{i,2} \partial_{\sigma_j} Y_i \right) \left(\mathbf{E}_{i,1} + \mathbf{E}_{i,2} Y_i \right)^{-1}, \quad (4.11)$$

On remarque dans l'équation (4.10), que la matrice $\partial_{\sigma_j} Y_{i-1}$ au pas $i - 1$ requiert pour être calculée la connaissance de la matrice $\partial_{\sigma_j} \mathbf{E}_i$, dont les blocs supérieurs gauche et droit, et inférieurs gauche et droit sont notés $(\partial_{\sigma_j} \mathbf{E}_i)_1$, $(\partial_{\sigma_j} \mathbf{E}_i)_2$, $(\partial_{\sigma_j} \mathbf{E}_i)_3$ et $(\partial_{\sigma_j} \mathbf{E}_i)_4$. Le calcul du gradient de la matrice $\mathbf{E}_i = e^{\Omega_i}$ représente cependant une difficulté. En effet, l'exponentielle de matrice ne peut être différenciée analytiquement.

La dérivation de la matrice \mathbf{E}_i par rapport à un paramètre de contrôle σ_j peut s'effectuer numériquement, par différences finies par exemple. Pour chacun des N_p paramètres σ_j et chaque itération le long de l'axe longitudinal, le calcul de la matrice $\partial_{\sigma_j} \mathbf{E}_i$ nécessite alors de calculer une nouvelle exponentielle de matrice, pour une valeur faiblement modifiée du paramètre σ_j . $(N_p + 1) \times (N_x - 1)$ exponentielles de matrice doivent ainsi être calculées. Ce nombre est semblable au nombre d'exponentielles de matrices à calculer pour obtenir un gradient de l'admittance d'entrée directement par différences finies, qui nécessiterait $N_p + 1$ évaluations distinctes de la fonction objectif et $(N_x - 1)$ exponentielles de matrice à calculer pour chacune. A ce stade notre méthode de rétropropagation

du gradient de l'admittance ne permet donc pas de réduire le nombre d'exponentielles de matrices à calculer, par rapport à un calcul direct par différences finies de l'admittance d'entrée.

Pour améliorer la rentabilité de notre calcul semi-analytique du gradient, on cherche ainsi une autre façon de dériver la matrice E_i . Celle-ci dépend du vecteur de paramètre σ car ce dernier détermine le rayon a et sa dérivée longitudinale $\partial_x a$ le long de l'axe des abscisses entre x_{i-1} et x_i . Cela détermine ensuite la matrice Ω_i et la matrice E_i . Or, le rayon ne variant que faiblement à l'échelle d'un pas de discrétisation Δx_i , le rayon a peut être approché entre deux abscisses x_{i-1} et x_i par le polynôme d'ordre 3 (cf. Fig. 4.5)

$$\begin{aligned} a(x) \simeq P_{a,i}(x) &= a_{i-1} + (\partial_x a)_{i-1}(x - x_{i-1}) \\ &+ \frac{3(\Delta a_i/\Delta x_i) - (\partial_x a)_i - 2(\partial_x a)_{i-1}}{\Delta x_i}(x - x_{i-1})^2 \\ &+ \frac{-2(\Delta a_i/\Delta x_i) + (\partial_x a)_i + (\partial_x a)_{i-1}}{\Delta x_i^2}(x - x_{i-1})^3 \end{aligned} \quad (4.12a)$$

satisfaisant

$$P_{a,i}(x_{i-1}) = a_{i-1}, \quad (4.13a)$$

$$P_{a,i}(x_i) = a_i, \quad (4.13b)$$

$$\partial_x P_{a,i}(x_{i-1}) = (\partial_x a)_{i-1}, \quad (4.13c)$$

$$\partial_x P_{a,i}(x_i) = (\partial_x a)_i, \quad (4.13d)$$

et de même, la dérivée longitudinale du rayon $\partial_x a$ peut être approchée par $\partial_x P_{a,i}$. Donc,

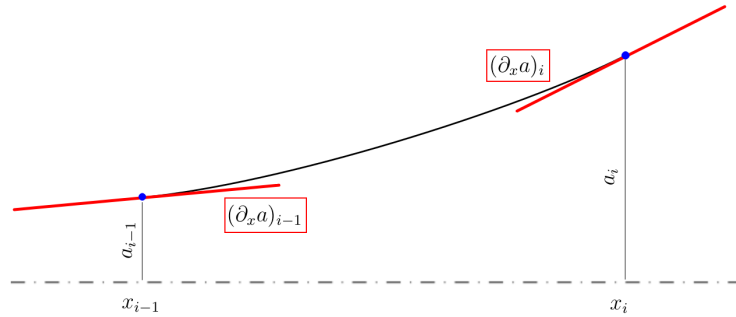


FIGURE 4.5 – Polynôme d'interpolation à partir des rayons et leurs dérivées aux pas d'abscisse x_{i-1} et x_i . Le pas longitudinal est exagérément grand.

les valeurs du rayon et de sa dérivée longitudinale en une abscisse donnée $x \in [x_{i-1}, x_i]$

peuvent n'être déterminés que par les rayons a_{i-1} et a_i et les dérivées longitudinales $(\partial_x a)_{i-1}$ et $(\partial_x a)_i$ aux abscisses discrétisées x_{i-1} et x_i . Dans ce cas, la matrice Ω_i du schéma de Magnus et la matrice \mathbf{E}_i sont alors fonctions de a_{i-1} , a_i , $\partial_x a_{i-1}$, et la dérivée partielle de \mathbf{E}_i par rapport à un paramètre de contrôle σ_j peut s'écrire

$$\partial_{\sigma_j} \mathbf{E}_i = \frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial a_{i-1}} \frac{\partial a_{i-1}}{\partial \sigma_j} + \frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial \sigma_j} + \frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial (\frac{\partial a}{\partial x})_{i-1}} \frac{\partial (\frac{\partial a}{\partial x})_{i-1}}{\partial \sigma_j} + \frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial (\frac{\partial a}{\partial x})_i} \frac{\partial (\frac{\partial a}{\partial x})_i}{\partial \sigma_j}. \quad (4.14)$$

On voit ainsi dans l'Eq. (4.14) l'intérêt de cette étape : ce n'est plus la matrice \mathbf{E}_i elle-même qui est dérivée par rapport au paramètre de contrôle σ_j , mais les rayons et dérivées a_{i-1} , a_i , $\partial_x a_{i-1}$ et $\partial_x a_i$. Or, la dérivation des rayons et dérivées a_{i-1} , a_i , $\partial_x a_{i-1}$ et $\partial_x a_i$ par rapport au paramètre σ_j représente un coût numérique négligeable.

En fin de compte, avec cette approximation polynomiale du rayon entre deux abscisses x_{i-1} et x_i , la matrice \mathbf{E}_i n'est toujours dérivée que par rapport à a_{i-1} , a_i , $\partial_x a_{i-1}$ et $\partial_x a_i$, et ce, indépendamment du nombre de paramètres N_p . Dis autrement, chaque itération le long de l'axe du guide ne requiert le calcul que de quatre exponentielles de matrices supplémentaires, et non de N_p . Pour résumer cette contribution, la rétropropagation du gradient de l'admittance coûte $(4 + 1) \times (N_x - 1)$ exponentielles de matrice, là où le calcul direct du gradient de l'admittance d'entrée par différences finies en coûte $(N_p + 1) \times (N_x - 1)$. Cela constitue donc un gain dès que le nombre N_p de paramètres dépasse 4.

Après vérification sur le gradient de l'admittance d'entrée du pavillon dans la situation décrite en section 4.3.2.d, les deux méthodes (rétropropagation de $\partial_{\sigma} \mathbf{Y}_i$ et différence finies) donnent bien des gradients quasi identiques avec un écart relatif entre les composantes de l'ordre de 0.001%.

4.4 Validation de la méthode par reconstruction d'une perce

4.4.1 Contexte et intérêt

La reconstruction de la perce d'un instrument à partir de données acoustiques constitue une méthode de mesure particulièrement intéressante car non invasive. Ce problème de

reconstruction peut également être considéré comme un outil de validation de méthodes d'optimisation, dans lequel on tente de retrouver un profil que l'on connaît déjà. En minimisant l'écart entre une impédance d'entrée calculée numériquement et des mesures expérimentales d'impédances, Hélie et coll. [61] et Ernoult et Chabassier [42] parviennent à approcher les perces connues d'un trombone et d'une clarinette, avec des erreurs encore non négligeables. Noreland [102] calcule les pics d'impédance d'un pavillon de Bessel à l'aide de l'équation de Webster et retrouve une approximation de ce profil à l'aide d'un modèle 1D par assemblage de cônes.

Parmi les exemples cités précédemment, la grandeur de référence à retrouver par reconstruction (la cible) est obtenue par une méthode autre que celle utilisée pour caractériser le pavillon à chaque itération de l'optimisation. La même méthode peut cependant être utilisée pour le calcul de la cible et des différentes itérations, comme cela apparaît à plusieurs reprises dans la littérature [21, 61, 68]. Colton et Kress [32] qualifient cette démarche de «crime inverse», dénonçant ce qu'ils considèrent être une inversion triviale. Wirgin [134] réagit cependant à ces propos en affirmant que cette inversion présente plusieurs vertus. Notamment, elle peut mettre en lumière la non-unicité du problème inverse et/ou la propension de l'algorithme à converger vers des minima qui soient locaux et non globaux.

Dans notre cas, cette façon de procéder nous permet de valider le bon fonctionnement de nos algorithmes et de notre gradient semi-analytique, et d'évaluer le nombre de courbes de Bézier pertinent pour décrire un pavillon classique. On cherche ainsi à retrouver la forme d'un pavillon à partir de la courbe de son coefficient de réflexion plan en entrée, tous les calculs étant menés avec la méthode multimodale.

4.4.2 Obtention de profils de référence

Les mesures de perce de trompette servant de support à notre étude sont les mêmes que celles utilisées en sections 3.4.3 et 4.3.2.d. En revanche, là où l'on passait des points de mesure à un profil continu à l'aide de splines, on souhaite ici trouver un profil continu de référence pour chacun de nos paramétrages sous forme de courbe-s de Bézier. Ces références nous servent de paramètres cibles dans la reconstruction à partir de données acoustiques en section 4.4.4, qui constitue l'objectif principal de cette section 4.4.

Pour trouver ces paramètres de référence, on procède à la minimisation de l'écart entre

la courbe et les points de mesure, traduit par la fonction objectif

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{n=0}^{N_m} (a(x_n^{\text{mes}}, \boldsymbol{\sigma}) - a_n^{\text{mes}})^2 \quad (4.15)$$

avec N_{mes} le nombre de points de mesure de coordonnées $(x_n^{\text{mes}}, a_n^{\text{mes}})$. On note $\mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{J}/N_{\text{mes}}}$ l'écart type.

Pour un profil décrit par une ou deux courbes de Bézier, on initialise la géométrie avec un pavillon cône. Le résultat de la minimisation est présenté en figure 4.6 et montre que dans les deux cas, les points de mesure sont bien approchés par le profil obtenu. Plus précisément, on obtient un écart type $\mathcal{E} = 73\mu\text{m}$ pour une courbe de Bézier, et $\mathcal{E} = 159\mu\text{m}$ pour un assemblage de deux courbes de Bézier.

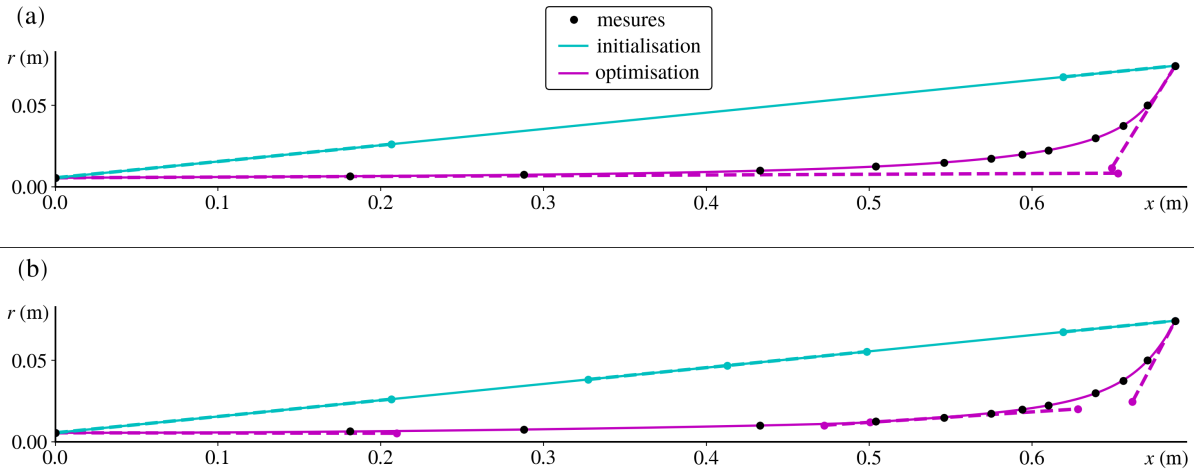


FIGURE 4.6 – (a) Profils de rayons initial et optimisé pour réduire l'écart entre la courbe et les points de mesure. Un paramétrage avec une courbe de Bézier cubique est utilisé. Les mesures sont issues des travaux de Jansson et Benade [66]. (b) Idem que (a), à cela près qu'un assemblage de deux courbes de Bézier cubiques est cette fois-ci utilisé.

4.4.3 Fonction objectif de reconstruction

Pour tester la capacité de notre méthode multimodale à optimiser des pavillons selon des critères acoustiques, on souhaite à présent retrouver les jeux de paramètres de référence précédemment obtenus à partir des seules données des coefficients de réflexion plan en entrée du pavillon, pour un paramétrage par une ou deux courbes de Bézier. Pour parvenir

à cela, la première étape est de définir la fonction objectif à minimiser

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{n=0}^{N_k-1} |\varepsilon_{R,n}(\boldsymbol{\sigma})|^2, \quad (4.16)$$

où

$$\varepsilon_{R,n}(\boldsymbol{\sigma}) = R_{in,00}(k_n^{optim}, \boldsymbol{\sigma}) - R_{in,00}^{ref}(k_n^{optim}). \quad (4.17)$$

La fonction objectif \mathcal{J} permet d'évaluer à quel point le coefficient $R_{in,00}$ du guide défini par les paramètres $\boldsymbol{\sigma}$ s'approche du coefficient de référence $R_{in,00}^{ref}$ en un nombre N_k de fréquences k_n^{optim} . Ces derniers sont choisis de sorte à couvrir une large plage de fréquence où le coefficient de réflexion varie significativement, afin d'éviter que deux profils distincts puissent y avoir des courbes de coefficient de réflexion trop similaires. En l'occurrence on choisit 9 fréquences logarithmiquement espacées entre 500Hz et 8000Hz, soit une fréquence toutes les demi-octaves.

L'expression analytique du gradient de la fonction objectif est

$$\partial_{\sigma_j} \mathcal{J}(\boldsymbol{\sigma}) = 2 \sum_{n=0}^{N_k} \operatorname{Re} \left[\partial_{\sigma_j} \varepsilon_{R,n} \right] \left(\operatorname{Re} [\varepsilon_{R,n}] + \operatorname{Im} [\varepsilon_{R,n}] \tan \left(\arg(\partial_{\sigma_j} \varepsilon_{R,n}) \right) \right). \quad (4.18)$$

La dérivée partielle $\partial_{\sigma_j} R_{in}$ est déduite de $R_{in} = (I + Z_{c,in} Y_{in})^{-1} (I - Z_{c,in} Y_{in})$,

$$\partial_{\sigma_j} R_{in} = -(I + Z_{c,in} Y_{in})^{-1} Z_{c,in} \partial_{\sigma_j} Y_{in} (I + R_{in}), \quad (4.19)$$

où l'on voit apparaître la dérivée partielle de l'admittance d'entrée $\partial_{\sigma_j} Y_{in}$, détaillée en section 4.3.3. L'impédance caractéristique $Z_{c,in}$ à l'entrée du guide n'est pas différenciée car le rayon d'entrée n'est pas impacté par les variations des différents paramètres σ_j .

Nous pouvons à présent procéder à la reconstruction des profils obtenus avec une ou deux courbes de Bézier cubiques, à l'aide d'une descente de gradient s'appuyant sur un gradient obtenu par différences finies ou semi-analytique.

4.4.4 Résultats

4.4.4.a Courbe de Bézier cubique simple

Pour initialiser la reconstruction de perce à l'aide d'une courbe de Bézier cubique ($N_p = 4$ paramètres), on initialise tout d'abord le profil avec le même cône que celui

utilisé lors de la minimisation de l'écart avec les points de mesure (cf. Fig. 4.6). On minimise ensuite la fonction objectif portant sur l'écart de coefficient de réflexion définie en équation (4.16) : une première fois avec un gradient obtenu par différences finies (DF), une seconde avec le gradient semi-analytique développé en section 4.3.3. Les courbes des coefficients de réflexion de l'initialisation et de la référence diffèrent fortement (cf. Fig. 4.7).

Pour les deux méthodes de calcul du gradient, la minimisation converge vers les paramètres de référence en à chaque fois 19 itérations, ce qui confirme à nouveau la validité de notre gradient semi-analytique. Egalement, le fait de converger vers les paramètres de référence, malgré une initialisation sans à priori, laisse penser que la forme de la fonction objectif dans l'espace des paramètres est assez régulière, sans minimum local ou bien suffisamment éloigné de la cible.

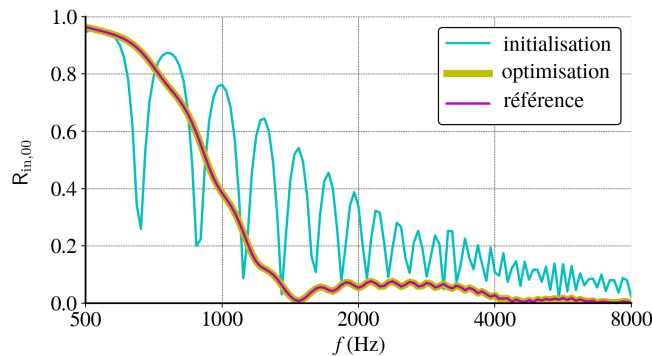


FIGURE 4.7 – Coefficients de réflexion plans en entrée du pavillon pour un paramétrage par une courbe de Bézier.

Par ailleurs, l'optimisation dure autour de 450s avec le gradient DF et autour de 430s avec le gradient semi-analytique. Ce faible écart relatif est en accord avec la prédiction faite en section 4.3.3, selon laquelle le gradient semi-analytique n'améliore significativement les performances de calcul que pour un nombre de paramètres $N_p > 4$. Afin de permettre au lecteur d'interpréter les temps de calcul, on précise que les optimisations sont réalisées sur un ordinateur portable standard.

4.4.4.b Assemblage de deux courbes de Bézier cubiques

A présent on reconstruit à l'aide d'un paramétrage par deux courbes de Bézier et toujours à partir du coefficient de réflexion d'entrée, le profil de référence obtenu en sec-

tion 4.4.2. Ce paramétrage, contrairement au précédent, devrait mettre en lumière l'intérêt du gradient semi-analytique puisque l'on dépasse cette fois-ci le seuil de rentabilité de $N_p = 4$ paramètres.

Pour commencer, on tente de reconstruire le profil de référence avec l'initialisation conique de la section 4.4.2 et les 9 paramètres de la section 4.2.3 décrivant les deux courbes de Bézier. On remarque alors que l'algorithme converge vers un minima local décrivant un profil très éloigné du profil de référence. Ce constat se répétant avec d'autres initialisations, on décide de :

- choisir un jeu de paramètres initial faiblement perturbé par rapport à celui de référence ;
- fixer la valeur d'un des paramètres, à savoir l'abscisse du point de raccordement \mathbf{P}_{mid} des deux courbes de Bézier.

Le paramétrage ne présente ainsi non plus $N_p = 9$ mais 8 paramètres.

Alors seulement, l'optimisation converge vers un jeu de paramètres qui définit un profil de rayon proche de celui de référence (cf. Fig. 4.8). De plus, l'écart entre les coefficients de réflexion des profils optimisé et de référence ne dépasse pas 1% aux fréquences utilisées pour l'optimisation (cf. Fig. 4.9). On observe néanmoins des écarts significatifs sur certains paramètres, par exemple un écart de 26% pour l'abscisse du point de contrôle d'entrée \mathbf{P}_{in}^+ .

Ce jeu de paramètre obtenu par minimisation, bien que donnant une bonne approximation de la perce originale, n'en demeure pas moins un minimum local. La forme de la fonction objectif dans cet espace de paramètres à 8 dimensions semble ainsi être davantage propice à l'obtention de minima locaux que celle de la fonction objectif dans l'espace à 4 dimensions vu précédemment en section 4.4.4.a.

Malgré une bonne initialisation, on observe que l'optimisation converge en 50 itérations, soit en presque trois fois plus d'étapes qu'avec une simple courbe de Bézier. Cela implique une hausse du temps de calcul moyen, d'environ 940s pour une optimisation avec gradient semi-analytique, et de 1700s pour une optimisation avec gradient DF (moyenne pour 4 optimisations). Chose intéressante : le ratio de ces deux temps de calcul est de 0,54, soit presque 5/9. Or cela correspond au ratio du nombre d'exponentielles de matrice par pas longitudinal à calculer, de 5 pour un gradient semi-analytique et de $N_p + 1$ pour

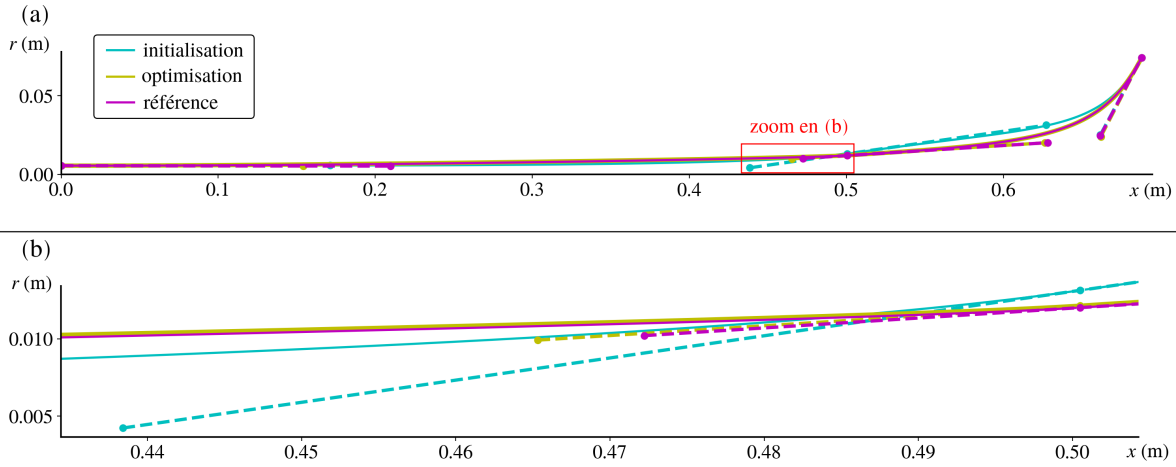


FIGURE 4.8 – (a) Pavillons obtenus à l’aide de deux courbes de Bézier dont le pavillon servant à initialiser la reconstruction (en cyan), résultant de la reconstruction (en jaune) et cible (en magenta). (b) Zoom sur une portion des pavillons : le résultat de l’optimisation et la cible se superposent quasiment, malgré le décalage de certains points de contrôle.

un gradient DF, avec ici $N_p = 8$. Tout semble ainsi se passer comme si l’essentiel du temps de calcul était consacré aux calculs des exponentielles de matrice. Cet exemple confirme en tout cas l’intérêt de l’utilisation du gradient semi-analytique présenté en section 4.3.3 pour des optimisations portant sur plus de 4 paramètres.

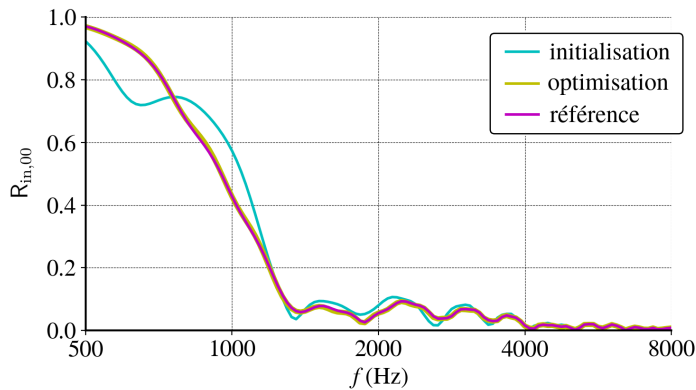


FIGURE 4.9 – Coefficients de réflexion plans en entrée du pavillon pour un paramétrage par deux courbes de Bézier, pour l’initialisation, l’optimisation et la cible.

4.4.5 Bilan et ouverture

Pour le pavillon de trompette choisi, une simple courbe de Bézier suffit à la bonne description du profil. En outre, la prise en compte d'une deuxième courbe de Bézier soulève des problématiques d'ordre numérique, liées au choix de l'initialisation, à l'obtention de minima locaux et à l'allongement du temps de calcul.

Pour une simple courbe de Bézier et $N_p = 4$ paramètres le gradient semi-analytique développé ne présente alors qu'un intérêt limité, puisque son efficacité ne s'exprime réellement que pour des nombres plus élevés de paramètres $N_p > 4$. Son implémentation se révélera peut être plus utile dans des applications futures, où plusieurs courbes de Bézier seront cette fois nécessaires à la bonne description du profil.

A noter que l'on peut ici s'intéresser au nombre de paramètres adéquat ($N_p = 4$ ou 8, 9), indépendamment du nombre de points où le profil est discrétisé. Cela est précisément possible car nous avons adopté un paramétrage global, et non local. Pour un paramétrage local, le nombre de paramètres est dicté par la finesse du maillage, et le débat concerne le choix, plus abstrait, d'un coefficient de régularisation. Nous revenons sur cet avantage de notre paramétrage global dans la prochaine section 4.5.

4.5 Optimisation de la transmission acoustique d'un pavillon

4.5.1 Contexte

Une des fonctions principales du pavillon est de permettre une variation progressive de l'impédance pour limiter les réflexions à l'interface de rayonnement. Pour un pavillon de haut-parleur, les réflexions sont ainsi totalement indésirables. Plusieurs études ont vu le jour pour concevoir des formes de pavillons qui minimisent celles-ci, dont la plupart reposent sur des modélisations par éléments finis [11, 12, 104, 129]. Dong et coll. [38] ont en cette année 2021 abordé ce sujet avec une modélisation multimodale mais qui, comme évoqué en introduction,

- repose sur une description du rayon continue par morceaux qui n'utilise pas les variations continues introduites par Pagneux et coll. [110];

- utilise un paramétrage local dans lequel les paramètres à optimiser sont les rayons en chaque abscisse discrétisée du guide ;
- termine le guide par un baffle infini.

En section 4.5.2 nous commençons par discuter l'intérêt d'utiliser notre paramétrage global par une courbe de Bézier cubique plutôt qu'un paramétrage local. Dans un deuxième temps, en section 4.5.3, nous abordons l'impact de la complexité de la situation de rayonnement sur le profil optimisé. Enfin nous comparons les performances obtenues avec celles de l'existant en section 4.5.4.

4.5.2 Régularité du profil

Pour rappel, la régularité d'un profil de pavillon est une propriété recherchée car permettant d'éviter que le critère d'optimisation ne soit bien satisfait qu'aux seules fréquences utilisées pour le calcul de la fonction objectif. Quand Dong et coll. [38] minimisent les réflexions d'un pavillon en autorisant plus ou moins les irrégularités du profil, ils trouvent que le pavillon le moins régulier présente les réflexions les plus élevées hors de la plage d'optimisation. Leurs travaux vont dans cette section nous servir de fil conducteur, où nous voyons comment ils modifient la fonction objectif pour obtenir des profils réguliers malgré leur paramétrage local, et comparativement comment notre paramétrage global permet de s'affranchir de la méthode de régularisation qu'ils emploient.

Afin de valider que nous sommes en mesure de retrouver leurs profils réguliers, nous implémentons malgré tout leur fonction objectif et adoptons leurs contraintes géométriques, c'est-à-dire une longueur $\ell = 190,5\text{mm}$, un rayon d'entrée de $R_{in} = 12,7\text{mm}$ et un rayon de sortie de $R_{out} = 127\text{mm}$. Egalement nous travaillons avec les mêmes $N_k = 12 + 1$ fréquences d'optimisation logarithmiquement espacées entre $kR_{out} = 4$ et $kR_{out} = 16$.

Pour limiter les irrégularités du profil permises par leur paramétrage local, Dong et coll. [38] recourent, comme d'autres auteurs dans la littérature sur l'optimisation de forme de pavillon [11, 104, 129], à une régularisation de Tikhonov [127]. Cette régularisation consiste à introduire dans la fonction objectif de minimisation un terme de régularisation qui pénalise les fortes valeurs de la dérivée seconde du rayon par rapport à l'abscisse x . Le poids de ce terme de régularisation est déterminé par un coefficient que l'on nomme

ici η . La fonction objectif s'écrit

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{n=0}^{N_k-1} \left| \mathbf{R}_{\text{in},00}(k_n^{\text{optim}}, \boldsymbol{\sigma}) \right|^2 + \eta a_{\text{out}} \left(\frac{N_x}{\ell} \right)^3 \mathbf{a}_{d,2}^\top \mathbf{a}_{d,2}, \quad (4.20)$$

avec $\mathbf{a}_{d,2} = \mathbf{K}_{d,2} \mathbf{a}$ le vecteur de taille $N_x - 2$ comportant la dérivée seconde du rayon obtenue par différence finie. Egalement $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n \in [0, N_x-1]}$ et $\mathbf{K}_{d,2}$ est la matrice de taille $(N_x - 2) \times N_x$

$$\mathbf{K}_{d,2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Le choix du paramètre η est essentiel dans le cas d'un paramétrage local, puisqu'une valeur trop faible entraîne des irrégularités avec les défauts évoqués précédemment, et qu'une valeur trop élevée peut générer un profil si régulier qu'il perd en efficacité. Dans le cas limite où le coefficient η est infini, l'optimum est par exemple un pavillon cône, peu efficace du point de vue de la minimisation des réflexions. Une valeur adaptée du coefficient de régularisation η n'étant pas connue a priori, plusieurs optimisations avec différentes valeurs de η sont alors nécessaires. Cela est coûteux en temps de calcul et nécessite une étape de prétraitement pour déterminer la valeur testée la plus adéquate.

Pour notre paramétrage global par une courbe de Bézier, qui fournit naturellement des profils réguliers, la meilleure valeur de η est a priori simplement $\eta = 0$. Dit autrement, on peut s'affranchir du terme de régularisation et des problématiques qui lui sont associées.

Dans un premier temps nous décrivons le pavillon à l'aide d'une simple courbe de Bézier et 4 paramètres. Nous ne calculons pas de gradient semi-analytique pour la fonction objectif \mathcal{J} , car pour rappel, celui-ci n'améliore significativement les performances numériques que pour un nombre de paramètres $N_p > 4$ (cf. Sec. 4.3.3).

On procède à la minimisation de la fonction objectif \mathcal{J} pour les trois valeurs de η présentées par Dong et coll. [38], $\eta = 10^{-2}$, $\eta = 10^{-4}$ et $\eta = 10^{-6}$. Dans les trois cas nos profils sont réguliers, tandis que ceux de Dong et coll. [38] ne le sont réellement que pour $\eta = 10^{-2}$ et $\eta = 10^{-4}$ (cf. 4.10). Notre paramétrage par une simple courbe de Bézier permet bien de retrouver leurs deux profils réguliers, notamment celui correspondant à $\eta = 10^{-4}$ qui est le profil qu'ils retiennent.

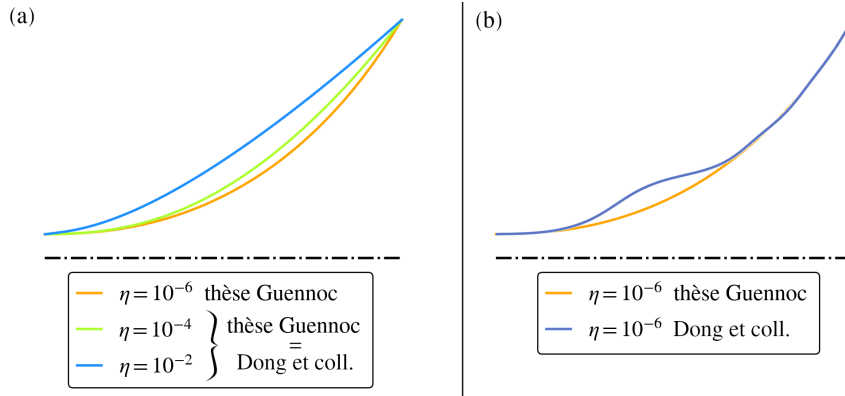


FIGURE 4.10 – (a) Profils obtenus pour différentes valeurs du coefficient de régularisation η et notre paramétrage par une courbe de Bézier. (b) Profils obtenus pour $\eta = 10^{-6}$ pour notre paramétrage et celui de Dong et coll. [38].

Plus l'on baisse le coefficient de régularisation, mieux la fonction objectif est minimisée. On observe cela de façon graphique sur les courbes des coefficients de réflexion en figure 4.11. Cela est cohérent avec le fait que plus l'on baisse le coefficient de régularisation, plus le poids relatif du terme lié à la réflexion dans la fonction objectif \mathcal{J} est important (cf. Eq. (4.20)) et donc plus l'optimisation tend à ne porter que sur la réduction des réflexions. Pour $\eta = 10^{-2}$, $\eta = 10^{-4}$ et $\eta = 10^{-6}$, la valeur finale de la fonction objectif est respectivement $\mathcal{J} = 8, 7 \cdot 10^{-2}$, $\mathcal{J} = 3, 1 \cdot 10^{-3}$ et $\mathcal{J} = 9, 1 \cdot 10^{-4}$.

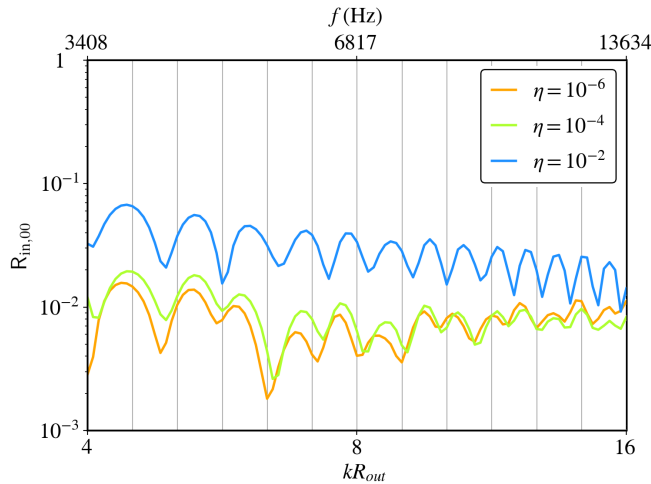


FIGURE 4.11 – Coefficients de réflexion plans en entrée du guide pour les géométries obtenues par minimisation des réflexions. Différentes valeurs du coefficient de régularisation η sont utilisées pour le calcul de la fonction objectif.

Le profil correspondant à $\eta = 10^{-6}$ est à la fois notre meilleur profil et meilleur que le profil retenu par Dong et coll. [38]. Grâce à notre paramétrage global, on semble donc pouvoir obtenir des profils réguliers plus efficaces que les profils réguliers obtenus à partir d'un paramétrage local et d'une régularisation de Tikhonov. En abaissant encore le coefficient de régularisation à $\eta = 0$, on parvient à abaisser encore légèrement la valeur de la fonction objectif à $\mathcal{J} = 8,8 \cdot 10^{-4}$. Le profil obtenu est très proche du profil obtenu pour $\eta = 10^{-6}$.

Ainsi, pour résumer le principal intérêt de notre paramétrage global, il permet de s'affranchir du choix du paramètre de régularisation, qui est numériquement coûteux, empirique, et donc difficilement envisageable par exemple dans le cadre d'un logiciel facile d'utilisation.

A noter que la minimisation de la fonction objectif \mathcal{J} a également été réalisée pour un paramétrage par deux courbes de Bézier. Cela n'a pas permis de minimiser la fonction objectif significativement plus qu'avec une courbe de Bézier, et comme en section 4.4.4.b, l'optimisation nécessitait alors une initialisation plus rigoureuse. On préfère donc retenir ici les résultats d'une simple courbe de Bézier.

4.5.3 Condition de rayonnement

Comme évoqué en introduction de cette section 4.5, les optimisations de pavillons de la littérature qui ont recours à la méthode multimodale terminent le pavillon par un baffle infini [21, 38] à l'aide de l'impédance de rayonnement de Zorumski [137]. Ici nous utilisons les résultats du chapitre 3 pour répondre à la question : un pavillon optimisé avec un baffle infini diffère-t-il significativement d'un pavillon optimisé avec une condition de rayonnement réaliste ?

La condition de rayonnement réaliste que l'on adopte ici est celle d'un encastrement dans un guide annulaire avec couche absorbante, de bord intérieur conique, de longueur ℓ et de rayons d'entrée et de sortie R_{in} et R_{out} (cf. Fig. 4.12). On conserve pour ces trois grandeurs les valeurs de Dong et coll. présentées en dernière section 4.5.2. Cet encastrement conique apparaît déjà dans des optimisations où le problème est résolu par la méthode des éléments finis [11, 104, 129].

On considère réaliste cette condition de rayonnement, même si en pratique elle correspond à une approximation de l'arrière du pavillon lorsque celui-ci n'est pas conique. Au vu des résultats de la section 3.4.3 sur l'impact du rayonnement arrière sur le problème de diffusion en sortie d'un pavillon, cette hypothèse peut être considérée raisonnable. Elle est par ailleurs largement présente dans la littérature [11, 104, 129], pour des optimisations utilisant la méthode des éléments finis. Se passer de cette hypothèse et considérer que la géométrie du milieu extérieur épouse parfaitement celle du pavillon, impliquerait de recalculer l'impédance de rayonnement à chaque itération de l'optimisation et augmenterait considérablement le temps de calcul.

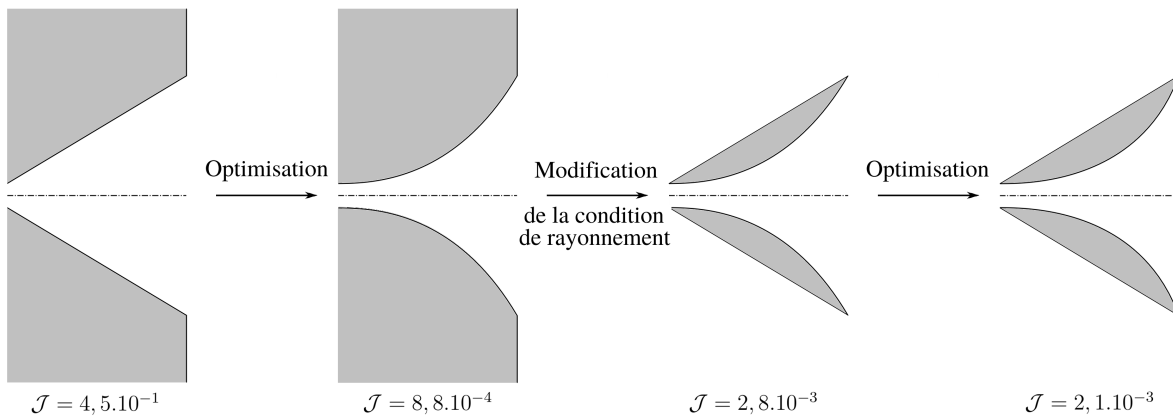


FIGURE 4.12 – Démarche adoptée pour évaluer la pertinence d'une optimisation en milieu bafflé comparativement à une optimisation en milieu réaliste. De gauche à droite, les étapes successives par lesquelles nous passons pour obtenir les différents profils, pour lesquels on calcule la fonction objectif à minimiser \mathcal{J} .

Pour répondre à notre problématique, on considère le dernier guide obtenu en section précédente 4.5.2, résultant d'une optimisation avec un baffle infini. Cette fois-ci, à ce guide est appliquée la condition de rayonnement dite réaliste (cf. Fig. 4.12). On calcule alors les réflexions en entrée du guide de sorte à obtenir la nouvelle valeur de la fonction objectif, $\mathcal{J} = 2,8.10^{-3}$, largement supérieure à sa valeur $\mathcal{J} = 8,8.10^{-4}$ lorsque le guide était en milieu bafflé (cf. Fig. 3.15). Cette augmentation était prévisible, puisque les réflexions ont naturellement tendance à être plus élevée sans baffle.

Parce que cette valeur de la fonction objectif est plus élevée, ne veut pas dire qu'elle ne correspond pas un minimum pour notre problème avec une nouvelle situation de rayonnement. Si elle correspondait à nouveau à un minimum, cela voudrait simplement dire que

la présence d'un baffle n'a pas d'importance sur la forme du profil optimal.

Pour éclaircir ce point et répondre à notre problématique, nous initialisons notre optimisation en milieu de rayonnement réaliste avec ce profil obtenu en milieu de rayonnement bafflé, suite à quoi nous procédons à la minimisation de la fonction objectif. Nous obtenons un nouveau profil (cf. Fig. 4.13.a), sensiblement différent et qui abaisse la valeur de la fonction objectif à $\mathcal{J} = 2,1 \cdot 10^{-3}$, soit une baisse de 25%. Cette baisse ne suffit cependant pas à compenser la hausse introduite par le débafflage : il apparaît qu'une optimisation en situation de rayonnement réaliste ne puisse pas atteindre l'efficacité atteinte par une optimisation en situation bafflée. Formulé différemment, on surestime en considérant un baffle infini l'efficacité pouvant être atteinte par le pavillon. Cela souligne l'intérêt de prendre en compte le rayonnement arrière, comme cela est rendu possible dans le cadre de la méthode multimodale par les outils introduits dans le chapitre 3.

Observons la figure 4.13.a plus en détail. On remarque que la pente du profil en sortie est plus importante pour l'optimisation en situation réaliste que pour celle en situation infiniment bafflée. Les courbes fréquentielles des coefficients de réflexion plans d'entrée sont par ailleurs présentés en figure 4.13.b pour les profils optimisés en situation de rayonnement bafflé et réaliste. On y voit principalement que l'optimisation en milieu réaliste corrige dans les fréquences les plus basses le profil optimisé en situation bafflée.

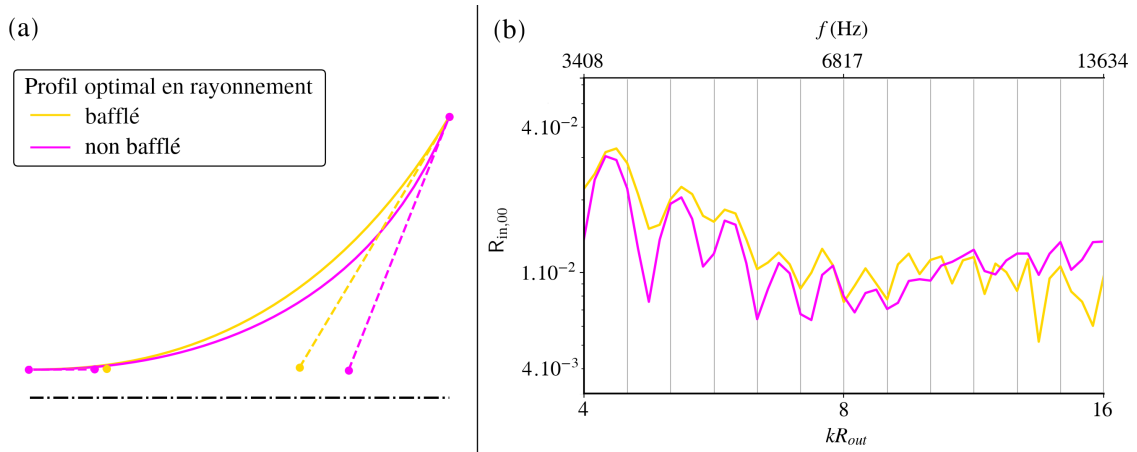


FIGURE 4.13 – (a) Profils optimisés pour une condition de rayonnement infiniment bafflée ou non bafflée. (b) Coefficients de réflexion des deux profils présentés en (a) rayonnants dans un milieu réaliste.

La condition de rayonnement n'est donc pas à négliger lors d'une optimisation de forme puisqu'elle peut significativement influencer la forme du profil optimal. A noter que si les

réflexions ne sont ici que relativement peu impactées, d'autres études pourraient montrer que la condition de rayonnement a des impacts plus d'important sur d'autres grandeurs, comme la directivité du champ rayonné.

On peut noter que cette minimisation a également été effectuée en prenant un profil initial conique. On aboutit alors à un profil légèrement différent et à une valeur finale de fonction objectif de $\mathcal{J} = 2,3 \cdot 10^{-3}$. Il s'agit donc nécessairement d'un minimum local, qui est un peu moins optimal que le minimum obtenu précédemment.

4.5.4 Performances numériques

Concernant les performances numériques, les minimisations du coefficient de réflexion durent dans notre cas entre 2min et 2min30 là où Dong et coll. parlent de temps de calculs se quantifiant en dizaines de minutes, voire en heures. Nos calculs, comme ceux de Dong et coll., sont réalisés sur une machine portable standard en 2021, on peut donc à priori conclure à une réelle amélioration des performances. On ne peut en revanche pas déterminer en l'état si cette amélioration est davantage due à une diminution du nombre d'itérations ou à une diminution du temps de calcul par itération. La première cause pourrait s'expliquer par l'utilisation de notre paramétrage global, la seconde par l'utilisation conjointe des variations continues du rayon et d'un mode supplémentaire lors de la résolution du problème de propagation.

En 2010, Noreland et coll. [104] évoque un temps de calcul de quelques heures sur un ordinateur personnel pour minimiser les réflexions d'un pavillon avec la méthode des éléments finis et un paramétrage local. Nous avons repris leurs conditions de modélisation (contraintes géométriques, fréquences d'optimisation...) afin de reproduire leur étude avec notre méthode multimodale ; le temps de calcul est alors inférieur à 2min. Notre géométrie finale diffère de celle de Noreland et coll. car contrairement à eux nous n'autorisons pas de profil se recourbant vers l'arrière (cf. Sec. 4.14). Cependant nous obtenons un ordre de grandeur similaire pour le module du coefficient de réflexion, de l'ordre de 10^{-2} . En résumé, nous obtenons un profil d'une efficacité comparable en un temps sensiblement plus faible.

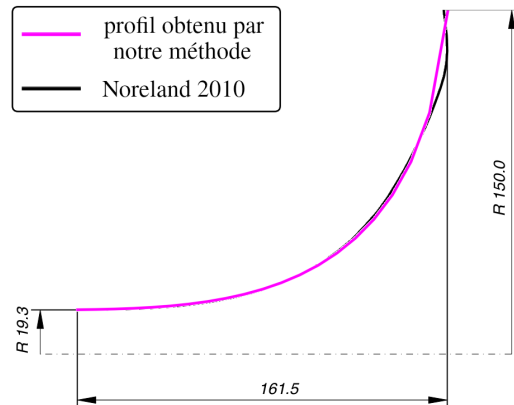


FIGURE 4.14 – Profils optimisés pour une efficacité acoustique optimale, obtenus par Noreland et coll. [104] (en noir), et grâce à notre méthode multimodale (en magenta).

4.6 Conclusion

Ce quatrième chapitre a été l'occasion d'adapter la méthode multimodale avec variations continues du rayon à l'optimisation de pavillons. Ce cadre s'appuie sur un paramétrage du profil à l'aide d'une ou deux courbes de Bézier cubiques, et sur une résolution du problème d'onde au sein du guide grâce à la méthode multimodale améliorée présentée au chapitre 2. Grâce aux outils introduits au chapitre 3, la méthode multimodale est par ailleurs capable de réaliser les optimisations de forme avec un milieu de rayonnement dont la complexité n'est usuellement décrite qu'avec la méthode des éléments finis.

Lors de la première application, on retrouve avec succès le profil d'un guide à partir de son coefficient de réflexion. On y remarque qu'une unique courbe de Bézier cubique suffit à décrire le profil de pavillon de trompette choisi. En adoptant deux courbes de Bézier, on augmente le risque d'obtenir un minimum qui soit local. Ce premier test ne permet pas seulement de tester notre paramétrage, mais également une expression semi-analytique du gradient du coefficient de réflexion d'entrée, qui se révèle n'être numériquement intéressante que pour un nombre de paramètres supérieur à 4.

La seconde étude, visant à minimiser les réflexions en entrée d'un pavillon, montre que nos algorithmes retrouvent les efficacités présentes dans la littérature en un temps considérablement plus faible. On insiste sur l'impact de la condition de rayonnement sur la forme du profil obtenu, aspect auparavant négligé dans les optimisations recourant à la méthode multimodale. Si l'on ne peut affirmer que le paramétrage utilisé soit à l'origine de

la réduction du temps de calcul, on peut en revanche justifier l'intérêt d'un paramétrage global par le fait que les profils générés soient réguliers par construction, et permettent de s'affranchir du terme de régularisation ajouté dans la fonction objectif quand le paramétrage est local.

L'efficacité de notre méthode pourra à l'avenir être testée dans d'autres applications. Notamment, la directivité est une grandeur essentielle dans de nombreuses applications audio [67], et un certain nombre d'optimisations ont été menées afin de la rendre la plus uniforme possible dans des plages angulaires données [38, 92, 129]. En acoustique musicale, on peut par ailleurs être intéressé par l'optimisation des fréquences de résonance d'un instrument à vent [22, 43, 103]. Si dans ce chapitre n'ont été optimisées que des formes de pavillon, l'ensemble d'un instrument à vent, y compris les parties courbes, pourraient faire la cible d'optimisation en s'appuyant sur notre méthode.

CONCLUSION

Les travaux de thèse présentés dans ce mémoire apportent un nombre de contributions concernant la modélisation du rayonnement des guides par la méthode multimodale, parmi lesquelles on peut noter :

- une augmentation du nombre de guides pouvant être raccordés dans le cadre d'un problème de rayonnement, permettant d'apporter un éclairage nouveau sur l'expérience de Miller (cf. Chap. 1) ;
- l'extension de précédents travaux sur l'amélioration de la base modale en 2D à des guides 3D courbes de section variables (cf. Chap. 2) ;
- une augmentation du nombre de fonctions transverses pouvant être employées qui ne satisfont pas une condition de Neumann classique dans la direction radiale – cette augmentation pouvant conduire à une amélioration de la convergence vers la solution exacte mais également à une dégradation du conditionnement de la base transverse ;
- la modélisation géométriquement exacte de l'extérieur du guide rayonnant, là où les travaux précédents permettaient au mieux de considérer le guide comme encastré dans un cylindre rigide (cf. Chap. 3) ;
- l'amélioration de la base transverse pour le guide annulaire avec PML entourant le pavillon (cf. Chap. 3).

En terme d'applications, nous utilisons ces apports pour minimiser dans un quatrième chapitre les réflexions en sortie de plusieurs pavillons. Nos optimisations dépassent ainsi les limitations antérieures de la méthode multimodale (simplification de la géométrie de rayonnement), tout en s'affranchissant de problématiques liées à la méthode des éléments finis, comme la nécessité de remailler la géométrie à chaque itération de l'optimisation.

Les performances numériques de nos optimisations sont également supérieures à celles de l'existant. Plusieurs éléments appliqués ici pour la première fois à l'optimisation de pavillons acoustiques pourraient être la cause de cela : la continuité du rayon (par opposition à un rayon continu par morceaux), l'utilisation de la base améliorée du chapitre 2, le

paramétrage du profil du rayon à l'aide de courbes de Bézier. Un gradient semi-analytique du coefficient de réflexion a par ailleurs été développé pour la méthode multimodale avec rayon continu.

Nous passons à présent en revue les perspectives liées aux différents chapitres.

Le chapitre 1 permet une meilleure compréhension des phénomènes physiques qui interviennent dans l'expérience de Miller visant à cerner l'impact des vibrations de paroi. Les vibrations de parois ne sont en revanche pas incluses dans notre modélisation, qui n'aborde que la partie rayonnement. La prise en compte des vibrations des parois du guide, par exemple par un processus itératif - le problème acoustique "rigide" sert de terme source au problème vibratoire, qui peut à son tour être prise en compte dans le problème acoustique, etc. - pourrait enrichir notre modélisation.

Concernant le deuxième chapitre, ils pourraient être intéressant de développer une procédure, qui, en amont de la résolution d'un problème avec courbure, puisse déterminer pour un nombre de modes standard donnés le nombre de modes supplémentaires adéquat. Egalement la distribution des modes selon les différents indices azimutaux par fréquences de coupure croissantes n'est actuellement pas optimale. Une distribution alternative est présentée en annexe E.1 qui semble fournir de meilleurs résultats, mais ce sujet mériterait de plus amples approfondissements.

Dans le chapitre 3, nous faisons de notre problème de rayonnement l'occasion de développer une formulation générale de la méthode multimodale. Plus précisément, cette formulation permet directement d'obtenir le problème d'onde multimodal sur les amplitudes transverses à partir de la connaissance du jacobien d'une transformation géométrique adaptée. Par «transformation géométrique adaptée», on entend une transformation qui permette de passer d'un système de coordonnées cartésiennes de référence à un système de coordonnées curvilignes décrivant la géométrie du guide en distinguant les directions axiale et transverse-s. A l'aide de l'annexe I donnant le jacobien d'une transformation incluant courbure, torsion, et variations de sections en forme et en taille, on pourrait ainsi déjà obtenir le problème d'onde pour des guides présentant tous ces éléments. Resterait alors l'implémentation et la validation numérique. Les variations de forme des sections transverses en particulier constituerait une contribution, la courbure ayant par ailleurs déjà été introduite par Félix [49] et la torsion par Mc Tavish [88].

Toujours dans la continuité du chapitre 3, on pourra observer l'impact sur la directivité de la prise en compte d'une géométrie de rayonnement exacte. Cela pourrait intervenir en

amont d'une extension du chapitre 4 dans laquelle la directivité des pavillons pourraient également être optimisées, comme c'est le cas dans certaines études [38, 92, 129].

Si les contributions évoquées concernent principalement la complexité des géométries pouvant être modélisées et sur l'amélioration de l'efficacité de la méthode multimodale ; on pourra cependant compléter ces travaux en prenant en compte des éléments physiques supplémentaires, comme des pertes visco-thermiques au paroi [25], des écoulements [10, 23, 78], ou des non-linéarités [88].

Enfin, il est à noter que les codes de calcul ayant permis de réaliser les différentes modélisations de ce manuscrit ont été pensés de façon modulaire. Une classe Python regroupe ainsi les éléments nécessaires à la modélisation d'un guide d'onde ; de sorte que les codes spécifiques à chaque problème ne contiennent principalement que les informations propres à ce problème. Des efforts sont encore à réaliser concernant la documentation du module Python ; mais à terme cela pourrait aboutir à un outil facile d'utilisation pour un acousticien. Un obstacle demeure la paramétrisation empirique des PMLs. Idéalement, un outil permettrait de déterminer automatiquement à partir des données du problème un jeu de paramètres adapté (épaisseur et coefficient d'amortissement) sans nécessiter de connaissance particulière d'un utilisateur.

A Utilisation des modes complexes dans un problème de rayonnement

Nous considérons ici le guide tubulaire B avec couche absorbante défini en sections 1.3.2 et 1.3.3. Les modes de ce guide, c'est-à-dire les solutions du problème transverse continu (1.21), sont les fonctions

$$\hat{\varphi}_n^{ref} = \hat{\Lambda}_n J_\mu \left(\frac{\gamma_n \hat{R}}{\hat{R}_1} \right) \cos(\mu\theta). \quad (\text{Ann.1})$$

Plus précisément nous étudions dans quelle mesure ces modes complexes sont utilisables en pratique, comparativement aux modes complexes $\hat{\varphi}_n$ du problème discrétisé (1.23), obtenus par combinaison linéaire de modes réels (cf. (1.24)). La norme $\hat{\Lambda}_n$ est telle que $\langle \bar{\hat{\varphi}}_n^{ref}, \hat{\varphi}_n^{ref} \rangle_{\hat{A}} = 1$ et $\hat{R}_1 = \hat{R}(R_1)$ est la borne supérieure du rayon complexe.

Notons que cette question se pose dans le cadre du rayonnement de notre guide A dans un espace infini et homogène, précisément car il est alors possible d'exprimer les modes complexes de façon purement analytique. Les modes complexes ont par exemple déjà été employés dans des approches numériques multimodales, mais la complexité de la géométrie [114] ou la stratification du milieu [20] ne rendait pas possible l'écriture analytique des modes complexes. Le milieu 2D considéré par Knockaert et De Zutter est quant à lui suffisamment simple pour permettre l'obtention analytique des modes complexes [75], mais leur problème ne fait intervenir qu'un seul guide et ne nécessite donc pas de raccorder des guides entre eux, ce qui est précisément l'étape qui semble poser problème lorsque les modes complexes sont employés.

Cette étude est motivée par les difficultés rencontrées par Félix, Doc et Boucher lors de l'implémentation des modes complexes lors du problème de rayonnement d'un guide droit décrit au chapitre 1. Plus particulièrement nous allons ici chercher à montrer dans quelle mesure les modes complexes $\hat{\varphi}_n^{ref}$ et $\hat{\varphi}_n$ des problèmes continu et discrétisé diffèrent-ils, et en quoi ces différences peuvent expliquer les difficultés d'implémentation rencontrées.

Pour mener ces analyses nous prenons un guide de rayon $R_1 = 1$ muni d'une couche absorbante de coefficient d'amortissement $\hat{\alpha} = 14(1 + 1j)$ à partir du rayon $R_c = 2/3$.

Tout d'abord, nous nous intéressons aux nombres d'onde transverses, qui sont les valeurs γ_n/\hat{R}_1 pour les modes complexes du problème continu et les éléments \hat{k}_\perp de la diagonale de la matrice $\mathbf{P}_K^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{P}_K$ (cf. Sec. 1.3.3) pour les modes complexes du problème discrétisé. La représentation de ces nombres d'onde transverses dans le plan complexe nous indique que pour un nombre de modes N donné, les valeurs propres des premiers modes complexes $\hat{\varphi}_n^{ref}$ et $\hat{\varphi}_n$ des problèmes continu et discrétisé sont quasiment identiques (cf. Fig. Ann.1). Cela se constate également en approximant les modes complexes par la méthode des éléments finis [114]. Pour $N = 20$, cela concerne approximativement les 4 premiers modes. On observe la même tendance au sujet des modes eux mêmes (cf. Fig. Ann.2).

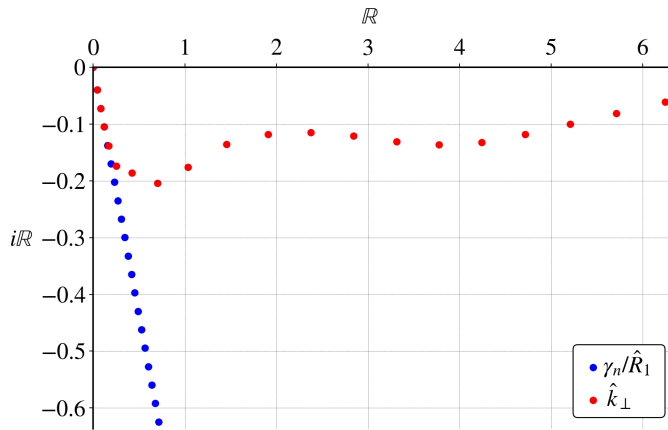


FIGURE Ann.1 – Nombres d'onde transverses des modes complexes analytiques (en bleu) et des modes complexes numériques obtenus par combinaison linéaire des modes réels (en rouge).

Pour des indices de modes plus élevés, on observe à la fois sur les graphes des nombres d'ondes transverses en figure Ann.1 et des modes en figure Ann.2 que les modes complexes $\hat{\varphi}_n^{ref}$ et $\hat{\varphi}_n$ des problèmes continu et discrétisé diffèrent largement. Notamment, les points d'inflexion des courbes des modes complexes du problème continu sont essentiellement concentrés dans la couche absorbante, à l'inverse des points d'inflexion des courbes des modes complexes du problème discrétisé qui sont davantage répartis dans l'ensemble du domaine radial. De cela résulte une allure similaire des modes complexes du problème continu hors de la couche absorbante, ce qui peut à son tour engendrer des matrices au conditionnement problématique dans le problème de raccordement.

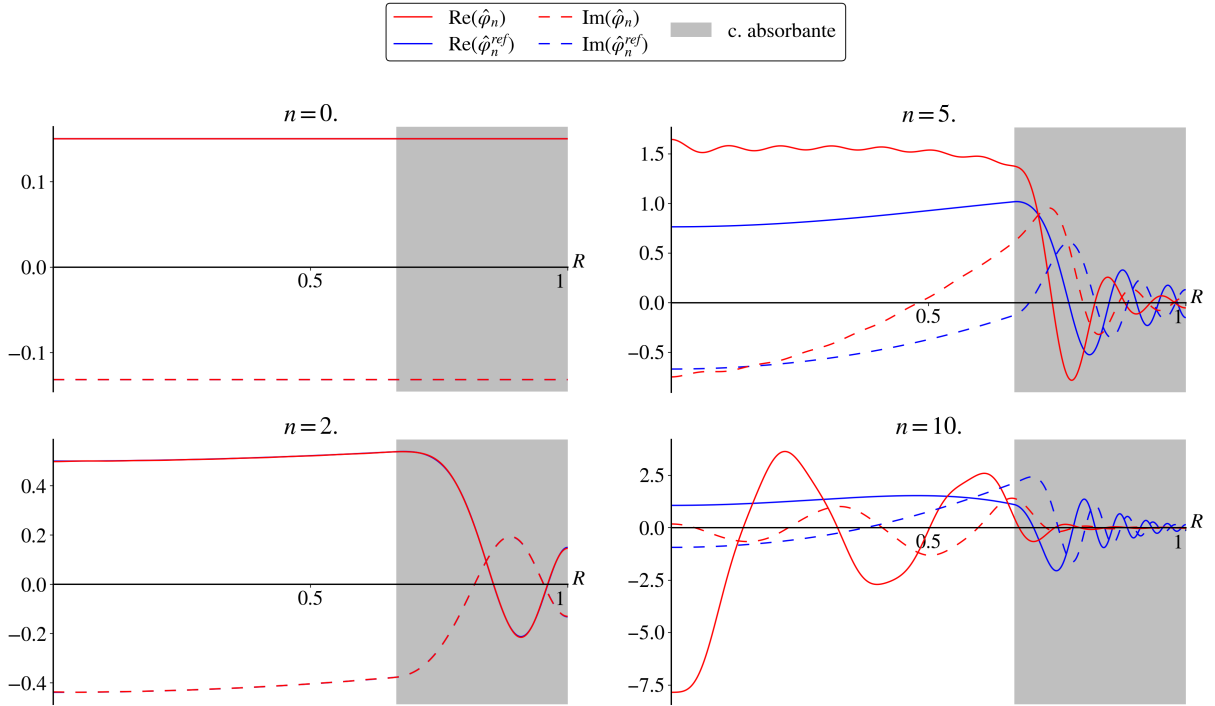


FIGURE Ann.2 – Modes complexes analytiques ($\hat{\varphi}_n^{ref}$, en bleu) et modes complexes numériques obtenus par combinaison linéaire de modes réels ($\hat{\varphi}_n^{ref}$, en rouge) pour différents indice modaux n . Les modes complexes numériques sont obtenus par combinaison de 20 modes réels.

Pour mettre cela en lumière, pour les deux bases de modes complexes, nous évaluons chacun des $N = 20$ modes considérés hors de la couche absorbante en $N_r = 3000$ points linéairement répartis sur l'intervalle $[0, R_c]$, de façon à construire 20 vecteurs de taille N_r . Le rang du système de vecteurs obtenus est alors calculé numériquement. Il est respectivement de 9 et de 20 pour les modes complexes des problèmes continu et discrétisé. Cette expérience nous montre que numériquement les modes complexes du problème discrétisé sont libres mais pas les modes complexes du problème continu, qui ne peuvent donc être utilisés pour discrétiser le problème de raccordement.

Ce résultat semblent se confirmer pour différentes valeurs d'épaisseurs de couche absorbante et de coefficients d'amortissement $\hat{\alpha}$, mais une étude plus approfondie serait nécessaire pour répondre à la question suivante : existe-t-il des paramètres de couche absorbante tels que les modes complexes du problème continu puissent être utilisés dans le cadre de notre problème de rayonnement ?

B Orthogonalité des gradients des modes

B.1 Modes Neumann - mode Neumann

Soit n et m les indices de deux modes Neumann.

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{\perp} \varphi_n, \nabla_{\perp} \varphi_m \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_r \varphi_n \varphi_m \, d\theta - \langle \Delta_{\perp} \varphi_n, \varphi_m \rangle \\ &= 0 + \gamma_n^2 \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle \\ \langle \nabla_{\perp} \varphi_n, \nabla_{\perp} \varphi_m \rangle &= \gamma_n^2 \delta_{nm}\end{aligned}$$

B.2 Mode supplémentaire - mode Neumann

Utilisons tout d'abord l'expression du mode supplémentaire et l'orthogonalité des gradients des modes Neumann pour développer le produit scalaire des gradients du mode Neumann $\varphi_{\mu,\nu}$ et du mode supplémentaire $\varphi_{\mu,-1}$.

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{\perp} \varphi_{\mu,\nu}, \nabla_{\perp} \varphi_{\mu,-1} \rangle &= \Lambda_{\mu,-1} \left(\langle \nabla_{\perp} \varphi_{\mu,\nu}, \nabla_{\perp} \tilde{\varphi}_{\mu} \rangle - \sum_{i=0}^{N_{\mu}-2} \langle \varphi_{\mu,i}, \tilde{\varphi}_{\mu} \rangle \langle \nabla_{\perp} \varphi_{\mu,\nu}, \nabla_{\perp} \varphi_{\mu,i} \rangle \right) \\ &= \Lambda_{\mu,-1} \left(\langle \nabla_{\perp} \varphi_{\mu,\nu}, \nabla_{\perp} \tilde{\varphi}_{\mu} \rangle - \langle \varphi_{\mu,\nu}, \tilde{\varphi}_{\mu} \rangle \gamma_{\mu,\nu}^2 \right) \quad (\text{Ann.2})\end{aligned}$$

A présent, utilisons le fait que le mode Neumann $\varphi_{\mu,\nu}$ soit solution du problème transverse.

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{\perp} \varphi_{\mu,\nu}, \nabla_{\perp} \varphi_{\mu,-1} \rangle &= \Lambda_{\mu,-1} \left(\langle \nabla_{\perp} \varphi_{\mu,\nu}, \nabla_{\perp} \tilde{\varphi}_{\mu} \rangle + \langle \Delta_{\perp} \varphi_{\mu,\nu}, \tilde{\varphi}_{\mu} \rangle \right) \\ &= \Lambda_{\mu,-1} \left(\langle \nabla_{\perp} \varphi_{\mu,\nu}, \nabla_{\perp} \tilde{\varphi}_{\mu} \rangle + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nabla_{\perp} \varphi_{\mu,\nu} \tilde{\varphi}_{\mu} \, d\theta - \langle \nabla_{\perp} \varphi_{\mu,\nu}, \nabla_{\perp} \tilde{\varphi}_{\mu} \rangle \right)\end{aligned}$$

Pour simplifier le terme de bord, on peut utiliser au choix le fait que $\nabla_{\perp} \varphi_{\mu,\nu}$ ou $\tilde{\varphi}_{\mu}$ soit nul au bord.

$$\langle \nabla_{\perp} \varphi_{\mu,\nu}, \nabla_{\perp} \varphi_{\mu,-1} \rangle = 0.$$

C Omission d'un indice azimutal lors de l'amélioration de la base

On cherche ici à savoir si il nécessaire d'ajouter un mode supplémentaire sur tous les ordres azimutaux pour observer les bénéfices de la base améliorée. Ainsi, on représente en Fig. Ann.3 la convergence du coefficient de réflexion en entrée pour la géométrie courbe et de rayon variable présentée en Sec. 2.4.3 et pour une base partiellement améliorée, telle que seuls les indices azimutaux $\mu \neq 2$ sont dotés d'un mode supplémentaire.

On constate que si l'erreur de la base partiellement améliorée est bien inférieure à celle de la base standard, la vitesse de convergence se stabilise cependant autour d'un taux semblable à celui de la base standard. Il est donc bien essentiel pour profiter d'un taux de convergence élevé d'ajouter un mode supplémentaire sur chaque indice azimutal.

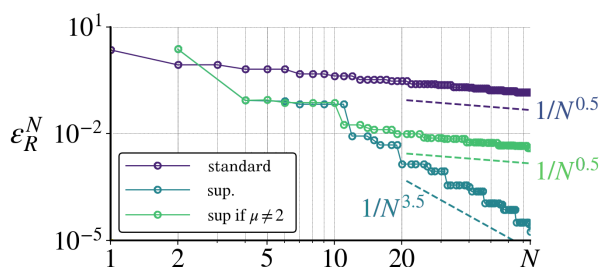


FIGURE Ann.3 – Erreur sur le champ de pression du problème présenté en Sec. 2.4.3, pour une amélioration d'aucun ordre azimutal (bleu foncé), de tous les ordres azimutaux sauf le troisième (vert), de tous les ordres azimutaux (bleu ciel).

D Rôle du mode supplémentaire dans les guides de section constante

D.1 Principe

Nous tentons ici de fournir une explication qualitative quant au rôle des modes supplémentaires dans les guides courbes de section constante. Cette question, bien que soulevée à plusieurs reprises dans la littérature [60, 85] est demeurée à présent sans réponse.

On se place en une abscisse longitudinale x fixe. Commençons par rappeler que la solution p^N calculée avec la base modale standard vérifie nécessairement $\frac{\partial p^N}{\partial r} = 0$ en $r = 1$, puisqu'elle est une combinaison linéaire d'un nombre fini de modes satisfaisant tous une condition de Neumann à la paroi.

Soit e l'épaisseur de couche limite telle que pour un rayon r compris entre $1 - e$ et e , la dérivée radiale de la pression $\frac{\partial p^N}{\partial r}$ normalisée par la norme de la pression $\|p^N\|_\infty$ reste suffisamment petite en valeur absolue, inférieure ou égale à un petit réel positif ϵ .

$$\forall r \in [1 - e, 1], \quad \left| \frac{\partial p^N}{\partial r}(r) \right| \leq \epsilon \|p^N\|_\infty. \quad (\text{Ann.3})$$

Au sein de cette couche limite, les causes pour lesquelles $|\frac{\partial p^N}{\partial r}|$ reste petit sont purement numériques, car aucun des N modes composants le champ de pression ne varie assez vite pour permettre une variation significative de $|\frac{\partial p^N}{\partial r}|$. Potentiellement, les variations de la dérivée radiale de la pression exacte au sein de la couche limite ne peuvent être décrites par nos N modes.

Puisque la dérivée radiale de notre champ de pression numérique $|\frac{\partial p^N}{\partial r}|$ est vouée à être quasi constante dans la couche limite d'épaisseur e , on peut alors souhaiter qu'elle soit égale à la meilleure constante, celle qui approche en moyenne le mieux la dérivée radiale de la pression exacte.

Or avec la base standard, la dérivée radiale $|\frac{\partial p^N}{\partial r}|$ est constante et nécessairement nulle. On comprend alors pourquoi l'ajout d'un mode supplémentaire peut être bénéfique : pour le mode supplémentaire la dérivée radiale au bord est constante et non nulle. La dérivée radiale de notre champ de pression numérique dans la couche limite peut alors s'approcher de la constante décrivant le mieux la dérivée radiale de la pression exacte.

D.2 Borne de l'épaisseur de couche limite numérique

Nous quantifions ici l'épaisseur minimale de couche limite présentée en Ann. D.1. L'essentiel est que cette épaisseur minimale soit bien non nulle.

Le cas où cette couche limite est la plus petite possible est le cas – purement fictif – où le champ p^N est uniquement porté par le mode dont les variations sont les plus rapides. Si les modes sont ordonnés par ordre croissant des valeurs propres par exemple, il s'agit du mode d'indice $N - 1$ de valeur propre γ_{N-1} . Cette situation correspond ainsi à $p^N = p_{N-1}^N \varphi_{N-1}$. Dans ces conditions, en utilisant le développement à l'ordre 1 de la dérivée radiale

$$\frac{\partial p^N}{\partial r}(r) = \frac{\partial p^N}{\partial r}(1) + (r - 1) \frac{\partial^2 p^N}{\partial r^2}(1) = (r - 1) \frac{\partial^2 p^N}{\partial r^2}(1) \text{ quand } r \simeq 1, \quad (\text{Ann.4})$$

on obtient l'expression suivante de la borne inférieure e_{inf} ,

$$e_{inf} = \epsilon \|\varphi_{N-1}\|_\infty \left| \frac{\partial^2 \varphi_{N-1}}{\partial r^2}(1) \right|^{-1}, \quad (\text{Ann.5})$$

qui peut être considérée comme la borne inférieure de la couche limite. Cette borne inférieure non nulle garantit l'existence d'un domaine radial d'épaisseur non nulle au sein duquel la dérivée radiale de la solution numérique est constante, là où celle de la solution exacte est potentiellement variable.

D.3 Illustration

En observant les modes du coude présenté en Sec. 2.4.4, on remarque que certains présentent des lobes que la base standard peut difficilement décrire de façon précise. C'est notamment le cas du quatrième mode de coude, présenté en Fig. Ann.4. Contrairement aux isobares du mode calculé avec vingt modes standards, les isobares du mode calculé avec vingt modes améliorés sont en mesure d'intersecter la paroi de façon non orthogonale.

On imagine que cette flexibilité introduite par la base améliorée permet de mieux approximer les variations spatiales dans la couche limite décrite précédemment en Ann. D.1. Pour s'assurer que le mode de coude soit mieux approximé par la base améliorée, on trace en Fig. Ann.4c l'évolution de l'erreur ε_{K33}^N sur la valeur propre du mode de coude en fonction du nombre de modes standards ou améliorés utilisés, par rapport à une solution de référence calculée avec 96 modes améliorés.

Effectivement, on observe que la décroissance de l'erreur est plus rapide avec la base améliorée, ce qui indique que le mode est mieux approximé.

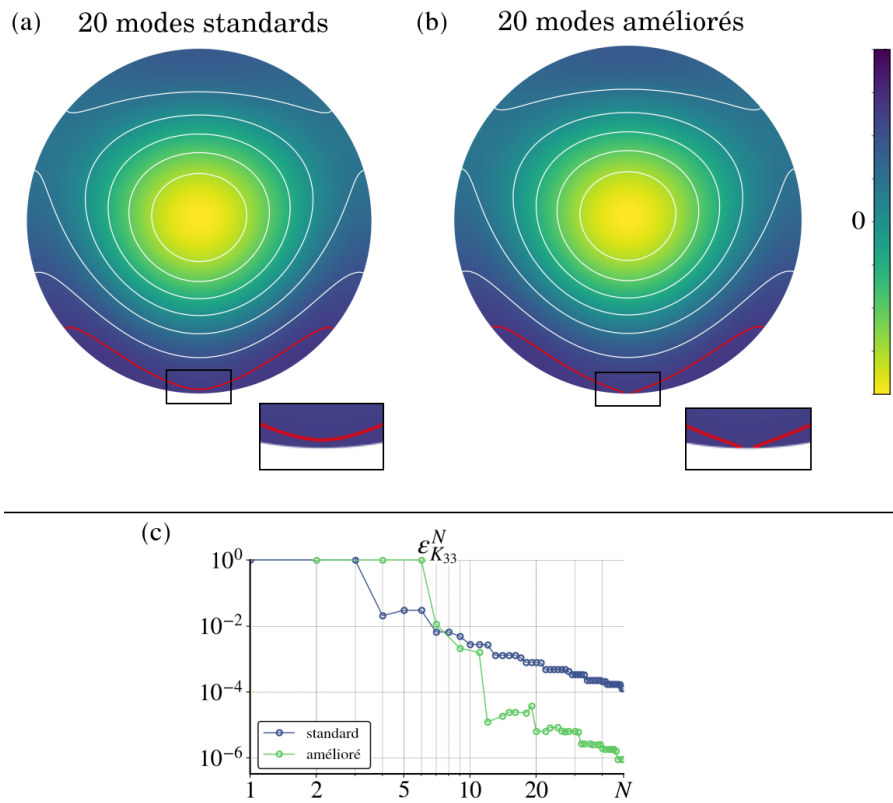


FIGURE Ann.4 – (a) et (b) Quatrième mode du coude étudié en Sec. 2.4.4, calculé avec 20 modes de la base standard [en (a)] et améliorée [en (b)]. En rouge, une isobare critique. (c) Erreur sur la valeur propre du mode coude représenté en (a) et (b).

E Ordre alternatif des fonctions transverses

E.1 Bases modales standard et améliorée

On considère la géométrie courbe de rayon variable présentée en Sec. 2.4.3, et l'on souhaite comparer la stratégie classique d'ordre des modes par fréquences de coupure croissantes avec une stratégie alternative qui favorise davantage les modes de bas indices azimutaux.

On opte pour un classement des modes standards par valeur croissante de $\mu + \nu$. En cas d'égalité entre deux modes, on privilégie le mode d'indice azimutal μ le plus bas. On sélectionne donc les modes (μ, ν) dans l'ordre $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$, etc. Dans la version améliorée de cet ordre alternatif, on ajoute un mode supplémentaire sur chaque indice azimutal pris en compte, comme pour l'ordre par fréquence de coupure croissante.

Les résultats sont présentés en Fig. Ann.5 et montrent que l'ordre alternatif fournit une convergence supérieure à l'ordre par fréquence de coupure croissante, dans les deux cas où l'on ne considère que des modes Neumann, ou des modes Neumann et supplémentaires.

La base améliorée avec ordre par fréquence de coupure présente toujours une convergence nettement supérieure à celle de la base standard avec un arrangement alternatif. Le choix de l'un ou de l'autre reste dans ce cas secondaire face à la nécessité d'améliorer la base.

E.2 Base transverse polynomiale

Dans le cas de la base transverse polynomiale, cet ordonnancement alternatif s'avère en réalité plus légitime que l'ordonnancement par fréquence de coupure croissante hérité des bases modales. En effet, il équivaut fortuitement à un tri des polynômes par ordre croissant.

On compare en Fig. Ann.6 les erreurs sur le champ de pression pour les deux ordonnancements de polynômes. L'erreur décroît plus vite avec le tri par ordre polynomiale que par ordre des fréquences de coupure des modes. En revanche, on observe toujours la même irrégularité dans la décroissance de l'erreur, par marches d'escalier. En particulier, l'erreur chute à nouveau significativement plus lorsque l'on rajoute une fonction transverse sur l'indice azimutal $\mu = 1$. Par ailleurs, la référence à 96 modes améliorés n'est pas suffisamment précise pour évaluer des erreurs sur le champ de pression inférieures à 10^{-5} .

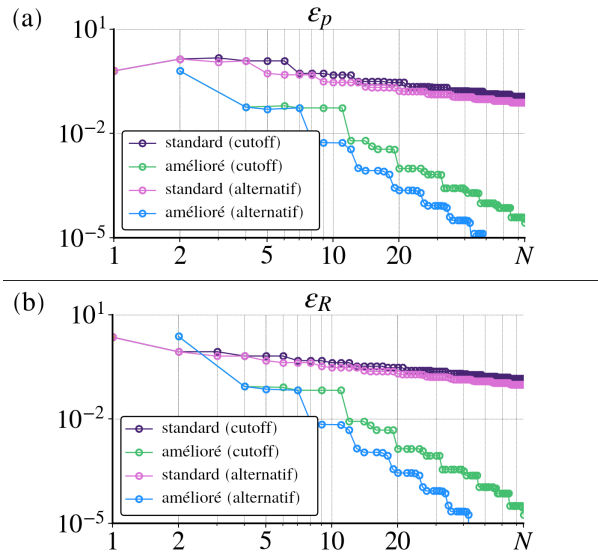


FIGURE Ann.5 – (a) Erreur sur le champ de pression. (b) Erreur sur le coefficient de réflexion. Les résultats concernent le problème présentée en Sec. 2.4.3. Quatre façon de choisir les modes sont présentées : sans mode supplémentaire et par fréquence de coupure croissante (en violet) ou par valeur croissante de $\mu + \nu$ (en rose), ou bien avec modes supplémentaires et par fréquence de coupure croissante (en vert) ou par valeur croissante de $\mu + \nu$ (en bleu ciel)

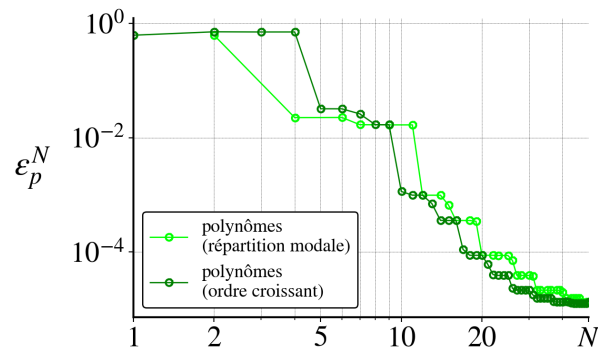


FIGURE Ann.6 – Erreur sur le champ de pression avec la base polynomiale pour deux ordonnancements des polynômes : par fréquences de coupure des modes (vert clair) ou par ordre des polynômes (vert foncé).

F Analogie électro-acoustique du problème de raccordement

Dans cette annexe nous présentons le sens de projeter en particulier les continuités de la pression sur les interfaces \mathcal{A}_A et \mathcal{A}_C et la continuité du débit sur la section \mathcal{A}_B (cf. Sec. 3.2.4).

Ainsi, si l'on considère une analogie électro-acoustique classique $p \leftrightarrow V$ où V est le potentiel électrique, le comportement aux interface des guides correspond à celui d'un noeud électrique (cf. Fig. Ann.7). L'intégration des continuités de pression aux interfaces \mathcal{A}_A et \mathcal{A}_C est alors analogue à l'égalité du potentiel électrique dans les fils, et l'intégration de la continuité du débit acoustique sur la section \mathcal{A}_B s'apparente quant à elle à la loi des noeuds.

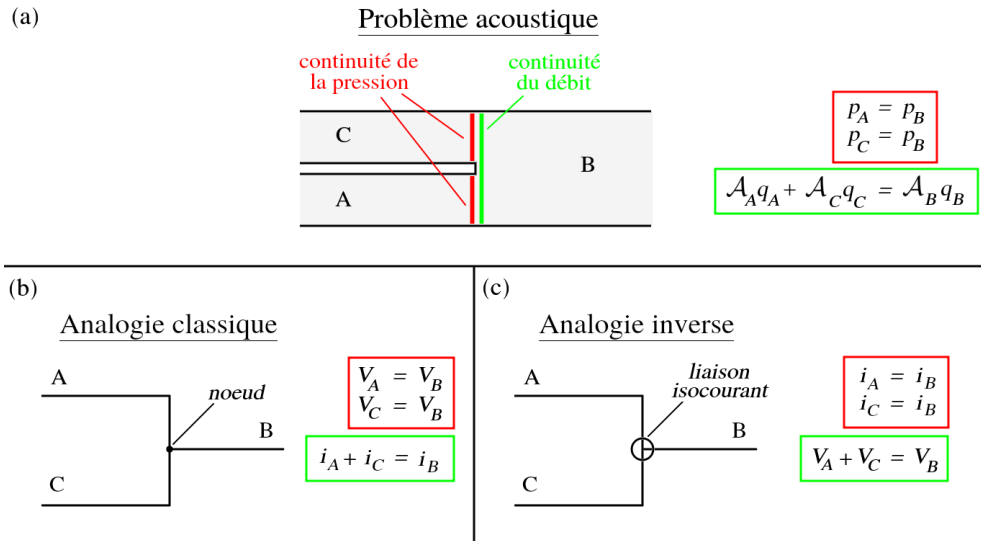


FIGURE Ann.7 – (a) Raccordement des guides A et C au guide B pour un problème acoustique plan. (b) Analogie classique du problème acoustique de raccordement. (c) Analogie inverse du problème acoustique de raccordement. Dans les trois cas (a), (b) et (c), les équations analogues sont entourées de la même couleur (rouge pour analogue à la continuité des pressions, verte pour analogue à la relation entre débits).

A contrario, si on utilise une analogie électro-acoustique inverse $p \leftrightarrow i$ où i est le courant électrique, le comportement aux interface des guides correspond à celui d'une liaison isocourant [53]. L'intégration des continuités de pression aux interfaces \mathcal{A}_A et \mathcal{A}_C sont analogues à l'égalité de l'intensité électrique dans les fils, et l'intégration de

la continuité du débit acoustique sur la section \mathcal{A}_B correspond à la relation entre les potentiels électriques.

Dans la littérature sur les guides d'onde acoustiques, l'analogie utilisée est l'analogie électro-acoustique $p \leftrightarrow V$, comme l'indique la façon dont est employé le terme «admittance» pour relier la pression et le débit. Des arguments sont cependant fournis par Firestone [52] afin d'expliquer pourquoi l'autre analogie devrait être privilégiée. Malgré cela, par unique souci de continuité avec l'existant, nous choisissons une analogie électro-acoustique classique $p \leftrightarrow V$, choix qui se manifeste tout au long de ce manuscrit dans la définition des impédances et admittances.

G Expression du débit dans le système de coordonnées curvilignes

Soit Ω un sous-ensemble de \mathcal{D} de contour $\partial\Omega$ de normale \mathbf{N}_Ω . Que le contour $\partial\Omega$ soit décrit dans le système de coordonnées cartésiennes \mathcal{X} ou curviligne \mathcal{R} , le débit qui le traverse doit être identique,

$$\text{d'où } \int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{N}_\Omega \, d\mathcal{A} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{N}_\Omega \, d\mathcal{A}_0, \quad (\text{Ann.6})$$

$$\text{et donc } \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{q} \, dV = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{q}_0 \, dV_0. \quad (\text{Ann.7})$$

L'égalité (Ann.7) étant valide pour tout contour $\partial\Omega$ et sachant que $h \, dV = dV_0$, on en déduit que

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = h \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_0. \quad (\text{Ann.8})$$

H Comparaison de transformations transverses planes et sphériques

Nous fournissons ici des arguments soulignant l'intérêt d'utiliser des sections transverses droites, au détriment de sections transverses non-droites, par exemple sphériques.

Tout d'abord, le fait de conserver des sections droites garantit une description simple des interfaces entre guides, et permet donc de s'adapter à une vaste gamme de situations

de rayonnement. Si l'on considère un pavillon avec une condition de rayonnement identique à celle de l'expérience de Miller (cf. Chap. 1), on se rend compte que la paramétrisation des interfaces serait plus complexe en prenant des sections non droites.

Par ailleurs, avec une transformation sphérique, la forme des sections transverses en une abscisse est dépendante du rayon et de la dérivée longitudinale du rayon, là où elle est uniquement dépendante du rayon pour une transformation cylindrique. Pour un problème à rayon de sortie fixé, la forme des sections droites peut varier d'un guide à l'autre pour une transformation sphérique, mais pas pour une transformation cylindrique (cf. Fig. Ann.8). La même chose peut donc être dite pour l'impédance de sortie. Pour un problème d'optimisation à rayon de sortie fixé (cf. Chap. 4), il est numériquement avantageux de ne pas devoir recalculer l'impédance de rayonnement pour chaque géométrie testée, et donc d'utiliser une transformation cylindrique.

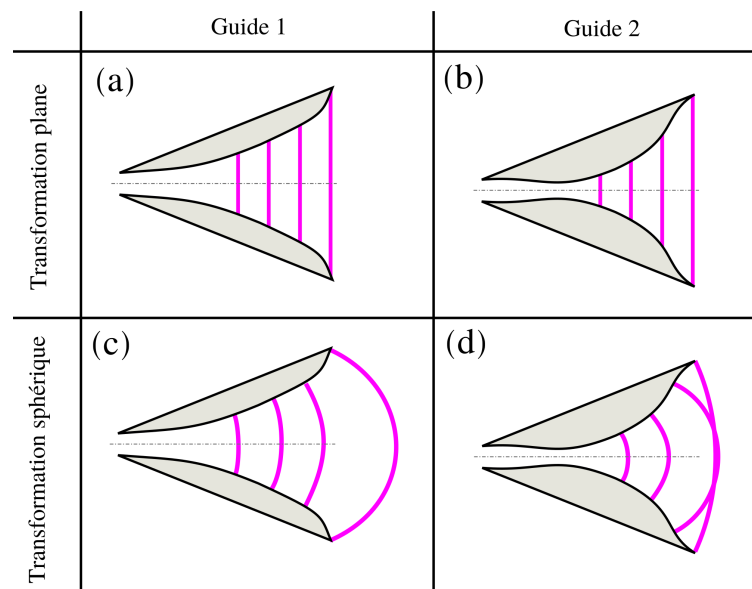


FIGURE Ann.8 – Exemples de pavillons dans un encastrement conique. En rose, les sections transverses, c'est-à-dire les sections à abscisse longitudinale x constante dans le nouveau système de coordonnées transformé. (a) & (b) Les guides avec transformation planes ont une section transverse de sortie et un environnement extérieur identiques. Ils ont donc la même admittance de rayonnement. (c) & (d) Les guides ont des sections transverses de sortie différentes ; leurs matrices admittance de sortie sont donc elles aussi différentes. (d) Le profil de rayon est tel que des sections transverses s'intersectent. Le jacobien de la transformation est mal défini.

Un autre avantage d'une transformation cylindrique : les sections transverses ne s'intersectent pas. Ce n'est pas le cas pour une transformation sphérique, où les sections

transverses sont susceptibles de se croiser si le profil du rayon n'est pas de convexité constante (cf. Fig. Ann.8). Or, si tel est le cas, le jacobien de la transformation est mal défini et le problème ne peut être résolu.

I Transformation géométrique avec courbure, torsion et section quelconque

I.1 Choix d'un paramétrage

Dans la suite de cette annexe I nous fournissons le paramétrage et les outils qui permettent d'appliquer la méthode multimodale comme définie en Sec. 3.2 à un guide d'axe et de section droite quelconques, décrits respectivement par la torsion et la courbure de l'axe et par un système de coordonnées polaires. On impose simplement que l'axe soit de tangente continue et que les sections transverses soient continument variables. Le guide est libre d'être muni d'une couche absorbante ou non.

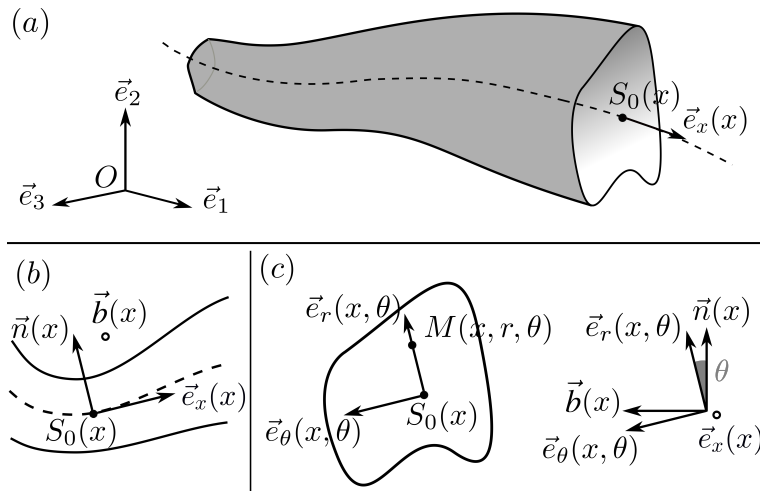


FIGURE Ann.9 – Paramétrisation du guide d'onde de section quelconque, courbe et tordu.

I.2 Position d'un point

Soit \mathcal{D} un guide 3D, réel ou complexe, délimité par sa paroi $\partial\mathcal{D}$ et \mathcal{C} la courbe représentant l'axe du guide.

Soit \mathbf{O} un point de l'espace et $\mathcal{B}_0 = (\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z)$ une base orthonormée directe telle que $[\mathbf{O}, \mathcal{B}_0]$ soit un repère cartésien paramétrant l'espace 3D dans lequel est défini le guide. On définit dans ce repère les trois variables spatiales X, Y , et Z . De même qu'en Sec. 3.2, on note x , l'abscisse curviligne qui permet de repérer les points \mathbf{S}_0 de l'axe \mathcal{C} . En outre, on définit en tout point de \mathcal{C} le repère orthonormal direct de Frénet $(\mathbf{e}_x, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ composé des vecteurs orthonormés tangent, normal et binormal qui satisfont

$$\mathbf{O}\mathbf{S}_0' = \mathbf{e}_x, \quad (\text{Ann.9a})$$

$$\mathbf{n}' = -\kappa \mathbf{e}_x + \xi \mathbf{b}, \quad (\text{Ann.9b})$$

$$\mathbf{b}' = -\xi \mathbf{n}, \quad (\text{Ann.9c})$$

avec κ la courbure et ξ la torsion du guide à l'abscisse longitudinale x considérée. Tous les vecteurs et toutes les variables présentées en équation (Ann.9) sont uniquement des fonctions de x . Une géométrie de guide tubulaire de section et de courbure variable est illustrée en figure Ann.9.

En chaque section $(\mathbf{S}_0, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ de \mathcal{D} , on définit \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ les vecteurs radiaux et orthoradiaux de la base cylindrique $\mathcal{B}_\mathcal{D} = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ de telle sorte que la position de tout point \mathbf{M} de \mathcal{D} puisse s'écrire

$$\mathbf{OM} = X \mathbf{e}_X + Y \mathbf{e}_Y + Z \mathbf{e}_Z = \mathbf{OS}_0(x) + \hat{R} \mathbf{e}_r(\theta), \quad (\text{Ann.10})$$

avec \hat{R} le rayon et θ l'angle entre le vecteur normal \mathbf{n} et le vecteur radial \mathbf{e}_r . On note \hat{R}_0 et \hat{R}_1 les bornes du rayon qui définissent respectivement les contours intérieur et extérieur, et qui peuvent à la fois dépendre de l'abscisse longitudinale x et/ou de l'angle θ , respectivement si le guide est de section variable et/ou non circulaire.

Prenons l'exemple d'un guide de section elliptique d'excentricité e constante et de petit rayon $b_0(x)$ variable. Il définit un domaine dans lequel le rayon \hat{R} peut varier entre la borne inférieure $\hat{R}_0 = 0$ et la borne supérieure $\hat{R}_1 = b_0(x)(1 - e \cos(\theta))^{-1/2}$. Le rayon extérieur \hat{R}_1 dépend donc à la fois de l'abscisse x et de l'angle θ . Dans le Chap. 2, les géométries étudiées de section circulaires variables présentait en comparaison un rayon extérieur fonction de l'abscisse x mais pas de l'angle θ . Pour une étude modale approfondie des guides d'ondes elliptiques, le lecteur pourra consulter les travaux [17, 108, 113].

Afin de se ramener à un système (x, r, θ) dans lequel les bornes du rayon r réduit sont constantes, on considère le rayon \hat{R} dans l'équation (Ann.10) non plus comme une variable, mais comme une fonction $\hat{R}(x, r, \theta)$ de l'abscisse x , de l'angle θ et du rayon réduit r de bornes arbitraires constantes r_0 et r_1 . Dans le cas évoqué précédemment d'un pavillon de section circulaire, cette transformation peut par exemple s'écrire $\hat{R}(x, r, \theta) = \hat{R}_1(x, \theta) r$ avec $r \in [0, 1]$. Un aperçu des courbes à r constant est présenté en Fig. Ann.10.

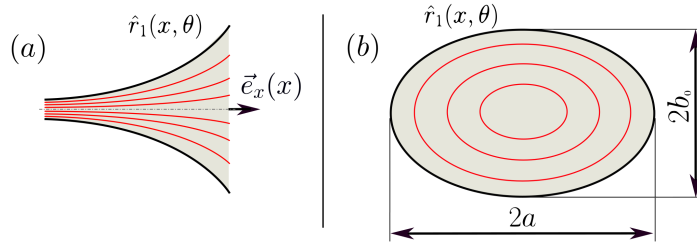


FIGURE Ann.10 – Courbes iso-rayon réduit r (en rouge) pour un pavillon de section elliptique. (a) Plan médian (x, r) . (b) Plan transverse (r, θ) .

Nous souhaitons à présent obtenir le jacobien de la transformation $(X, Y, Z) \rightarrow (x, r, \theta)$ pour appliquer la méthode multimodale telle que définie en Sec. 3.2.

I.3 Opérateurs différentiels

De l'équation (Ann.10) on déduit le différentiel de la position dans les bases \mathcal{B}_0 et \mathcal{B}_D

$$d\mathbf{OM} = \sum_{i=1}^3 dx_i \mathbf{e}_i = \left(\mathbf{e}_x + \hat{R} \partial_x \mathbf{e}_r + \partial_x \hat{R} \mathbf{e}_r \right) dx + \partial_r \hat{R} \mathbf{e}_r dr + \left(\partial_\theta \hat{R} \mathbf{e}_r + \hat{R} \mathbf{e}_\theta \right) d\theta. \quad (\text{Ann.11})$$

On développe l'expression de $\partial_x \mathbf{e}_r$ à l'aide des relations du repère de Frénet (Ann.9), puis l'on réécrit l'équation (Ann.11) de façon matricielle

$$d\mathbf{OM} = \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0} = \Psi \begin{pmatrix} dx \\ dr \\ r d\theta \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_D}, \quad (\text{Ann.12})$$

où $\tau = 1 - \kappa \hat{R} \cos(\theta)$ et

$$\Psi = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ \partial_x \hat{R} & \partial_r \hat{R} & \partial_\theta \hat{R}/r \\ \hat{R}\xi & 0 & \hat{R}/r \end{pmatrix}. \quad (\text{Ann.13})$$

Soit \mathbf{P} la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_{\mathcal{D}}$ à la base \mathcal{B}_0 . De l'équation (Ann.12), on déduit que

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \mathbf{P}\Psi \begin{pmatrix} dx \\ dr \\ r d\theta \end{pmatrix}. \quad (\text{Ann.14})$$

On identifie dans l'équation (Ann.14) $\mathbf{P}\Psi$ à la transposée du jacobien de la transformation géométrique de (x, r, θ) vers (X, Y, Z) . Le jacobien \mathbf{J} de la transformation de (X, Y, Z) vers (x, r, θ) s'écrit ainsi

$$\mathbf{J} = ((\mathbf{P}\Psi)^{-1})^T = \mathbf{P}(\Psi^{-1})^T \quad (\text{Ann.15})$$

avec

$$\Psi^{-1} = \frac{1}{\det(\Psi)} \begin{pmatrix} \partial_r \hat{R} \hat{R}/r & 0 & 0 \\ -\partial_x \hat{R} \hat{R}/r + \hat{R}\xi \partial_\theta \hat{R}/r & \tau \hat{R}/r & -\tau \partial_\theta \hat{R}/r \\ -\hat{R}\xi \partial_r \hat{R} & 0 & \tau \partial_r \hat{R} \end{pmatrix}. \quad (\text{Ann.16})$$

Alors, on déduit le coefficient h et les composantes de la matrice \mathbf{H} symétrique.

$$h = \det(\Psi) = \tau \partial_r \hat{R} \hat{R}/r, \quad (\text{Ann.17a})$$

$$H_1 = h^{-1} (\partial_r \hat{R} \hat{R}/r)^2 \quad (\text{Ann.17b})$$

$$\mathbf{H}_2 = h^{-1} \begin{pmatrix} \partial_r \hat{R} (\hat{R}/r)^2 (\partial_\theta \hat{R} \xi - \partial_x \hat{R}) \\ -\xi (\hat{R} \partial_r \hat{R})^2 / r \end{pmatrix} \quad (\text{Ann.17c})$$

$$\mathbf{H}_3 = h^{-1} \begin{pmatrix} (\hat{R}/r)^2 (\partial_\theta \hat{R} \xi - \partial_x \hat{R})^2 + (\tau \hat{R}/r)^2 + (\tau \partial_\theta \hat{R}/r)^2 & \times \\ \partial_r \hat{R} (\partial_x \hat{R} \xi \hat{R}^2 / r - \partial_\theta \hat{R} (\tau^2 + (r\xi)^2) / r) & (\partial_r \hat{R})^2 (\tau^2 + (r\xi)^2) \end{pmatrix} \quad (\text{Ann.17d})$$

Le problème d'onde peut finalement s'obtenir en injectant les expressions de h et de la matrice \mathbf{H} dans le problème d'onde multimodal présenté en Sec. 3.2.3.c.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. M. AARTS et A. J. E. M. JANSSEN, « Estimating the velocity profile and acoustical quantities of a harmonically vibrating loudspeaker membrane from on-axis pressure data », in : *J. Audio Eng. Soc.* 57.12 (2009), p. 1004-1015.
- [2] L. ABRAHAMSSON et H.-O. KREISS, « Numerical Solution of the Coupled Mode Equations in Duct Acoustics », in : *J. Comput. Phys.* 111.1 (1994), p. 1-14.
- [3] R. J. ALFREDSON, « The propagation of sound in a circular duct of continuously varying cross-sectional area », in : *J. Sound Vib.* 23.4 (1972), p. 433-442.
- [4] N. AMIR, H. MATZNER et S. SHTRIKMAN, « Acoustics of a flanged cylindrical pipe using singular basis functions », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 107.2 (2000), p. 714-724.
- [5] S. H. ANDERSON et F. C. OSTENSON, « Effect of frequency on the end correction of pipes », in : *Phys. Rev.* 31.2 (1928), p. 267-274.
- [6] Y. ANDO, « On the Sound Radiation from Semi-Infinite Circular Pipe of Certain Wall Thickness », in : *Acta Acust. united Ac.* 22.4 (1969), p. 219-225.
- [7] M. ARNELA, S. DABBAGHCHIAN, R. BLANDIN, O. GUASCH, O. ENGWALL, A. VAN HIRTUM et X. PELORSON, « Influence of vocal tract geometry simplifications on the numerical simulation of vowel sounds », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 140.3 (2016), p. 1707-1718.
- [8] M. ARNELA, O. GUASCH et F. ALÍAS, « Effects of head geometry simplifications on acoustic radiation of vowel sounds based on time-domain finite-element », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 134.4 (2013), p. 2946-2954.
- [9] G. A. ATHANASSOULIS et K. A. BELIBASSAKIS, « A consistent coupled-mode theory for the propagation of small-amplitude water waves over variable bathymetry regions », in : *J. Fluid Mech.* 389 (1999), p. 275-301.
- [10] Y. AURÉGAN, M. LEROUX et V. PAGNEUX, « Measurement of Liner Impedance with Flow by an Inverse Method », in : *10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 2004.

-
- [11] E. BÄNGTSSON, D. NORELAND et M. BERGGREN, « Shape optimization of an acoustic horn », in : *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 192.11 (2003), p. 1533-1571.
- [12] R. BARBIERI et N. BARBIERI, « Acoustic horns optimization using finite elements and genetic algorithm », in : *Appl. Acoust.* 74.3 (2013), p. 356-363.
- [13] A. H. BENADE, « Equivalent circuits for conical waveguides », in : *The Journal of the Acoustical Society of America* 83.5 (1988), p. 1764-1769.
- [14] J.-P. BÉRENGER, « A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves », in : *J. Comput. Phys.* 114 (1994), p. 185-200.
- [15] D. BERNOULLI, *Sur le son et sur les tons des tuyaux d'orgues différemment construits*, Mém. Acad. Sci. (Paris), 1764.
- [16] W.P. BI, V. PAGNEUX, D. LAFARGE et Y. AURÉGAN, « Modelling of sound propagation in a non-uniform lined duct using a Multi-Modal Propagation Method », in : *J. Sound Vib.* 289.4-5 (2006), p. 1091-1111.
- [17] R. BLANDIN, M. ARNELA, R. LABOISSIÈRE, X. PELORSON, O. GUASCH, A. VAN HIRTUM et X. LAVAL, « Effect of higher order propagation modes in vocal tract like geometries », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 137.2 (2015), p. 832-843.
- [18] R. BLANDIN, A. VAN HIRTUM, X. PELORSON et LABOISSIÈRE, « Influence of Higher Order Acoustical Propagation Modes on Variable Section Waveguide Directivity : Application to Vowel [A] », in : *Acta Acust. united Ac.* 102 (2016), p. 918-929.
- [19] W. BOEHM et A. MÜLLER, « On de Casteljau's algorithm », in : *Comput. Aided Geom. Des.* 16.7 (1999), p. 587-605.
- [20] A.-S. BONNET-BEN DHIA, B. GOURSAUD, C. HAZARD et A. PRIETO, « A multi-modal method for non-uniform open waveguides », in : *Physics Procedia* 3.1 (2010), International Congress on Ultrasonics, Santiago de Chile, January 2009, p. 497-503.
- [21] A. C. P. BRADEN, « Bore Optimisation and Impedance Modelling of Brass Musical Instruments », thèse de doct., University of Edinburgh, 2006.
- [22] A. C. P. BRADEN, M. NEWTON et D. CAMPBELL, « Trombone bore optimization based on input impedance targets », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 125.4 (2009), p. 2404-2412.

-
- [23] E. J. BRAMBLEY et N. PEAKE, « Sound transmission in strongly curved slowly varying cylindrical ducts with flow », in : *J. Fluid Mech.* 596 (2008), p. 387-412.
- [24] K. S. BREUER et R. M. EVERSON, « On the Errors Incurred Calculating Derivatives Using Chebyshev Polynomials », in : *J. Comput. Phys.* 99.1 (1990), p. 56-67.
- [25] A. M. BRUNEAU, Bruneau M., P. HERZOG et J. KERGOMARD, « Boundary layer attenuation of higher order modes in waveguides », in : *J. Sound Vib.* 119.1 (1987), p. 15-27.
- [26] R. CAUSSÉ, J. KERGOMARD et X. LURTON, « Input impedance of brass musical instruments-Comparison between experiment and numerical models », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 75.1 (1984), p. 241-254.
- [27] A. CAVAILLÉ-COLL, *De la détermination des dimensions des tuyaux par rapport à leur intonation*, rapp. tech., Académie des Sciences, jan. 1860.
- [28] A. CHAIGNE et J. KERGOMARD, « Acoustics of Musical Instruments », in : Springer-Verlag New York, 2016, chap. 3.
- [29] W. C. CHEW, J. M. JIN et E. MICHELSEN, « Complex coordinate stretching as a generalized absorbing condition », in : *Microwave Pot. Technol. Lett.* 15.6 (1997), p. 363-369.
- [30] W. C. CHEW et W. H. WEEDON, « A 3D perfectly matched medium for modified Maxwell's equations », in : *Microwave Pot. Technol. Lett.* 7.13 (1994), p. 599-604.
- [31] F. COLLINO et P. MONK, « The Perfectly Matched Layer in Curvilinear Coordinates », in : *SIAM J. Sci. Comput.* 19.6 (1998), p. 2061-2090.
- [32] D. COLTON et R. KRESS, « Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory », in : Springer, 1992, chap. 5.
- [33] C. DAGUENET et D. J. BLAIKLEY, « Experiments for determining the correction to be added to the length of a cylindrical resonant tube to find the true wave-length and the velocity of sound in small tubes », in : *J. Phys. Theor. Appl.* 9.1 (1880), p. 176-177.
- [34] J.-P. DALMONT, M. CURTIT et A. F. YAHAYA, « On the accuracy of bore reconstruction from input impedance measurements : Application to bassoon crook measurements », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 131.1 (2012), p. 708-714.

-
- [35] J.-P. DALMONT, C. J. NEDERVEEN et N. JOLY, « Radiation impedance of tubes with different flanges : numerical and experimental investigations », in : *J. Sound Vib.* 244.3 (2001), p. 505-534.
- [36] J.-B. DOC et S. FÉLIX, *Modélisation multimodale de guides d'onde complexes appliquée à la facture des instruments à vent*, rapp. tech., CFA, avr. 2018.
- [37] J.-B. DOC, C. VERGEZ, P. GUILLEMAIN et J. KERGMARD, « Sound production on a "coaxial saxophone" », in : *The Journal of the Acoustical Society of America* 140.5 (2016), p. 3917-3924.
- [38] H. DONG, H. GAO, X. FENG et Y. SHEN, « Shape optimization of acoustic horns for improved directivity control and radiation efficiency based on the multimodal method », in : *J. Acoust. Soc. America* 149.3 (2021), p. 1411-1424.
- [39] H. DONG, Y. SHEN et H. GAO, « Shape optimization of acoustic horns using the multimodal method », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 147.4 (2020), EL326-EL332.
- [40] W. DUAN et R. KIRBY, « A hybrid finite element approach to modeling sound radiation from circular and rectangular ducts », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 131.5 (2012), p. 3638-3649.
- [41] E. EISNER, « Complete solutions of the "Webster" horn equation », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 41.4 (1967), p. 1126-1146.
- [42] A. ERNOULT et J. CHABASSIER, « Bore Reconstruction of Woodwind Instruments Using the Full Waveform Inversion », in : *e-Forum Acusticum*, Lyon / Virtual, France, 2020.
- [43] A. ERNOULT, C. VERGEZ, S. MISSOUM, P. GUILLEMAIN et M. JOUSSERAND, « Woodwind instrument design optimization based on impedance characteristics with geometric constraints », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 148.5 (2020), p. 2864-2877.
- [44] P. EVENO, J.-P. DALMONT, R. CAUSSÉ et J. GILBERT, « Wave Propagation and Radiation in a Horn : Comparisons Between Models and Measurements », in : *Acta Acust. united Ac.* 98.1 (2012), p. 158-165.
- [45] I. D. FAUX et M. J. PRATT, *Computational Geometry for Design and Manufacture*, USA : Halsted Press, 1979.
- [46] S. FÉLIX, J.-B. DALMONT et C. J. NEDERVEEN, « Effects of bending portions of the air column on the acoustical resonances of a wind instrument », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 131.5 (2012), p. 4164-4172.

-
- [47] S. FÉLIX, J.-B. DOC et M. A. BOUCHER, « Modeling of the multimodal radiation from an open-ended waveguide », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 143.6 (2018), p. 3520-3528.
- [48] S. FÉLIX, A. MAUREL et J.-F. MERCIER, « Improved multimodal methods for the acoustic propagation in waveguides with finite wall impedance », in : *Wave Motion* 54 (2015), p. 1-10.
- [49] S. FÉLIX et V. PAGNEUX, « Multimodal analysis of acoustic propagation in three-dimensional bends », in : *Wave Motion* 36 (2002), p. 157-168.
- [50] S. FÉLIX et V. PAGNEUX, « Ray-wave correspondence in bent waveguides », in : *Wave Motion* 41.4 (2005), p. 339-355.
- [51] S. FÉLIX et V. PAGNEUX, « Sound attenuation in lined bends », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 116.4 (2004), p. 1921-1931.
- [52] F. A. FIRESTONE, « A new analogy between mechanical and electrical systems », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 249.4 (2018), p. 249-267.
- [53] F. A. FIRESTONE, « Twixt Earth and Sky with Rod and Tube; the Mobility and Classical Impedance Analogies », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 28.6 (1956), p. 1117-1153.
- [54] L. FULCHER, A. LODERMEYER, G. KÄHLER, S. BECKER et S. KNIESBURGES, « Geometry of the Vocal Tract and Properties of Phonation near Threshold : Calculations and Measurements », in : *Appl. Sci.* 9.13 (2019).
- [55] S. L. GARRETT, « Understanding Acoustics, An Experimentalist's View of Acoustics and Vibration », in : Springer, ASA press, 2017, chap. 6.
- [56] F. GAUTIER, G. NIEF, J. GILBERT et J. P. DALMONT, « Vibro-acoustics of organ pipes — Revisiting the Miller experiment », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 131.1 (2012), p. 737-738.
- [57] G. P. GEAVES et David J. HENWOOD, « Horn Optimization Using Numerical Methods », in : *Audio Engineering Society Convention 100*, mai 1996.
- [58] T. GUENOC, J.-B. DOC et S. FÉLIX, « Improved multimodal formulation of the wave propagation in a 3D waveguide with varying cross-section and curvature », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 149.1 (2021), p. 476-486.

-
- [59] W. GUO, Liu J., W. BI, D. YANG, Y. AURÉGAN et V. PAGNEUX, *Spatial transient behavior in waveguides with lossy impedance boundary conditions*, 2020, arXiv : 2010.03646 [physics.class-ph].
- [60] C. HAZARD et E. LUNÉVILLE, « An improved multimodal approach for non-uniform acoustic waveguides », in : *IMA J. Appl. Math.* 73.4 (2008), p. 668-690.
- [61] T. HÉLIE, G. GANDOLFI et T. HEZARD, *Estimation paramétrique de la perce d'un instrument à vent à partir de la mesure de son impédance d'entrée*, rapp. tech., CFA, avr. 2014.
- [62] T. HÉLIE, T. HÉZARD, R. MIGNOT et D. MATIGNON, « One-Dimensional Acoustic Models of Horns and Comparison with Measurements », in : *Acta Acust. united Ac.* 99.6 (2013), p. 960-974.
- [63] T. HÉLIE et X. RODET, « Radiation of a Pulsating Portion of a Sphere : Application to Horn Radiation », in : *Acta Acust. united Ac.* 89.4 (2003), p. 565-577.
- [64] H. HELMHOLTZ, « Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden », in : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 57 (1860), p. 1-72.
- [65] A. ISERLES, A. MATHISEN et S.P. NORSETT, « On the implementation of the method of Magnus series for linear differential equations », in : *BIT* 39 (1999), p. 281-304.
- [66] E. V. JANSSON et A. H. BENADE, « On Plane and Spherical Waves in Horns with Non-Uniform Flare II. Prediction and Measurements of Resonance Frequencies and Radiation Losses », in : *Acta Acust. united Ac.* 31.4 (1974), p. 185-202.
- [67] T. F. JOHANSEN, « On the directivity of horn loudspeakers », in : *J. Audio. Eng. Soc.* 42.12 (1994), p. 1008-1019.
- [68] W. KAUSEL, « Optimization of Brasswind Instruments and its Application in Bore Reconstruction », in : *J. New Music Res.* 30.1 (2001), p. 69-82.
- [69] W. KAUSEL, V. CHATZIOANNOU, T. R. MOORE, B. R. GORMAN et M. ROKNI, « Axial vibrations of brass wind instrument bells and their acoustical influence : Theory and simulations », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 137.6 (2015), p. 3149-3162.
- [70] J. A. KEMP, « Theoretical and experimental study of wave propagation in brass musical instruments », thèse de doct., University of Edinburgh, 2002.

-
- [71] J. A. KEMP, D. M. CAMPBELL et N. AMIR, « Multimodal radiation impedance of a rectangular duct terminated in an infinite baffle », in : *Acta Acust. united Ac.* 87.1 (2001), p. 11-15.
- [72] J. A. KEMP, A. LOPEZ-CARROMERO et M CAMPBELL, *Pressure fields in the vicinity of brass musical instrument bells measured using a two dimensional grid array and comparison with multimodal models*, rapp. tech., ICSV, juil. 2017.
- [73] J. KERGOMARD, A. LEFEBVRE et G. P. SCAVONE, « Matching of Fundamental Modes at a Junction of a Cylinder and a Truncated Cone; Application to the Calculation of Some Radiation Impedances », in : *Acta Acust. united Ac.* 101.6 (2015), p. 1189-1198.
- [74] S. M. KIRKUP, A. THOMPSON, B. KOLBREK et J. YAZDANI, « Simulation of the acoustic field of a horn loudspeaker by the boundary element-Rayleigh integral method », in : *J. Comput. Acoust.* 21.1 (2013), p. 1250020.
- [75] L. KNOCKAERT et D. DE ZUTTER, « On the completeness of eigenmodes in a parallel plate waveguide with a perfectly matched layer termination », in : *IEEE Trans. Antennas Propag.* 50.11 (2002), p. 1650-1653.
- [76] B. KOLBREK, « Modal sound propagation in curved horns of rectangular cross-section », thèse de doct., Norwegian University of Science et Technology, 2013.
- [77] B. KOLBREK et U. PETER SVENSSON, « Using Mode Matching Methods and Edge Diffraction in Horn Loudspeaker Simulation », in : *Acta Acust. united Ac.* 101 (2015), p. 760-774.
- [78] G. KOOIJMAN, P. TESTUD, Y. AURÉGAN et A. HIRSCHBERG, « Multimodal method for scattering of sound at a sudden area expansion in a duct with subsonic flow », in : *J. Sound Vib.* 310.4 (2008), p. 902-922.
- [79] J. C. LE ROUX, J.-P. DALMONT et B. GAZENGEL, « A new impedance tube for large frequency band measurement of absorbing materials », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 123.5 (2008), p. 3119.
- [80] H. LEVINE et J. SCHWINGER, « On the Radiation of Sound from an Unflanged Circular Pipe », in : *Phys. Rev.* 73 (1948), p. 383-406.
- [81] X. LU, Z. CAO, M. C. van BEURDEN, Y. JIAO, Q. WU et T. KOONEN, « A Mode-Matching Method for Three-Dimensional Waveguides With PMLs Combined With Energy Conservation », in : *J. Lightwave Technol.* 36.23 (2018), p. 5573-5579.

-
- [82] Y. Y. LU, « A fourth-order Magnus scheme for Helmholtz equation », in : *J. Comput. Appl. Math.* 173.2 (2005), p. 247-258.
- [83] W. MAGNUS, « On the exponential solution of differential equations for a linear operator », in : *Comm. Pure Appl. Math.* 7.4 (1954), p. 649-673.
- [84] P. A. MARTIN, « On Webster's horn equation and on some generalizations », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 116.3 (2004), p. 1381-1388.
- [85] A. MAUREL, J.-F. MERCIER et S. FÉLIX, « Propagation in waveguides with varying cross section and curvature : A new light on the role of supplementary modes in multi-modal methods », in : *Proc. R. Soc. A* 470.2166 (2014), p. 20140008.
- [86] A. MAUREL, J.-F. MERCIER et S. FÉLIX, « Wave propagation through penetrable scatterers in a waveguide and through a penetrable grating », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 135.1 (2013), p. 165-174.
- [87] A. MAUREL, J.-F. MERCIER et V. PAGNEUX, « Improved multimodal admittance method in varying cross section waveguides », in : *Proc. R. Soc. A* 470.2164 (2014), p. 20130448.
- [88] J. P. MC TAVISH, « Nonlinear acoustics in a general waveguide », thèse de doct., University of Cambridge, 2018.
- [89] J.-F. MERCIER et A. MAUREL, « Acoustic propagation in non-uniform waveguides : revisiting Webster equation using evanescent boundary modes », in : *Proc. R. Soc. A* 469 (2013), p. 20130186.
- [90] R. N. MILES, « Analysis of Mufflers and Ducts », in : *Physical Approach to Engineering Acoustics*, Springer, 2020, p. 83-98.
- [91] D. C. MILLER, « The Influence of the Material of Wind-Instruments on the Tone Quality », in : *Science* 29.735 (1909), p. 161-171.
- [92] R. C. MORGANS, A. C. ZANDER, C. H. HANSEN et D. J. MURPHY, « EGO shape optimization of horn-loaded loudspeakers », in : *Optim. Eng.* 9 (2008), p. 361-374.
- [93] S. MORITA, N. KYONO, S. SAKAI, T. YAMABUCHI et Y. KAGAWA, « Acoustic radiation of a horn loudspeaker by the finite element method : a consideration of the acoustic characteristic of horns », in : *J. Audio Eng. Soc.* (1979).
- [94] P. M. MORSE et K. U. INGARD, « Theoretical Acoustics », in : Princeton University Press, 1968.

-
- [95] K. MOTOKI, P. BADIN, X. PELORSON et H. MATSUZAKI, *A modal parametric method for computing acoustic characteristics of three-dimensional vocal tract models*, rapp. tech., Proceedings of the 5th Seminar on Speech Production, mai 2000.
- [96] C.J. NEDERVEEN et J.-P. DALMONT, « Pitch and level changes in organ pipes due to wall resonances », in : *J. Sound Vib.* 271.1 (2004), p. 227-239.
- [97] G. NIEF, F. GAUTIER, J.-P. DALMONT et J. GILBERT, « Influence of wall vibrations on the behavior of a simplified wind instrument », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 124.2 (2008), p. 1320-1331.
- [98] B. R. A. NIJBOER, « The diffraction theory of optical aberrations : Part II : Diffraction pattern in the presence of small aberrations », in : *Physica* 13.10 (1947), p. 605-620.
- [99] B. NILSSON, « Acoustic transmission in curved ducts with varying cross-sections », in : *Proc. R. Soc. Lond. A.* 458 (2002), p. 1555-1574.
- [100] J. NOCEDAL et S. J. WRIGHT, « Numerical Optimization », in : Springer, 2006, chap. 2.
- [101] Y. NOMURA, I. YAMAMURA et S. INAWASHIRO, « On the Acoustic Radiation from a Flanged Circular Pipe », in : *J. Phys. Soc. Japan* 15.3 (1960), p. 510-517.
- [102] D. NORELAND, *A gradient based optimisation algorithm for the design of brass-wind instruments*, 2003.
- [103] D. NORELAND, J. KERGOMARD, F. LALOË, C. VERGEZ, P. GUILLEMAIN et A. GUILLOTEAU, « The Logical Clarinet : Numerical Optimization of the Geometry of Woodwind Instruments », in : *Acta Acust. united Ac.* 99.4 (2013), p. 615-628.
- [104] D. NORELAND, R. UDAWALPOLA, P. SEOANE, E. WADBRO et M. BERGGREN, *An efficient loudspeaker horn designed by numerical optimization : an experimental study*, rapp. tech., Department of Computing Science, 2010.
- [105] K. R. NØRGAARD, E. FERNANDEZ-GRANDE et S. LAUGESSEN, « Compensating for evanescent modes and estimating characteristic impedance in waveguide acoustic impedance measurements », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 142.6 (2017), p. 3497-3509.
- [106] A. N. NORRIS, « Acoustic cloaking theory », in : *Proc. R. Soc. A.* 464.2097 (2008), p. 2411-2434.

-
- [107] A. N. NORRIS et I. C. SHENG, « Acoustic radiation from a circular pipe with an infinite flange », in : *J. Sound Vib.* 135.1 (1989), p. 85-93.
- [108] J. M. G. S. OLIVEIRA et P. J. S. GIL, *Propagation of sound in ducts with elliptical cross-section and lined walls*, rapp. tech., Internoise, juin 2010.
- [109] V. PAGNEUX, « Multimodal admittance method in waveguides and singularity behavior at high frequencies », in : *J. Comput. Appl. Math.* 234.6 (2010), p. 1834-1841.
- [110] V. PAGNEUX, N. AMIR et J. KERGOMARD, « A study of wave propagation in varying cross-section waveguides by modal decomposition. Part 1. Theory and validation », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 100.4 (1996), p. 2034-2048.
- [111] V. PAGNEUX et A. MAUREL, « Lamb wave propagation in elastic waveguides with variable thickness », in : *Proc. R. Soc. A* 462.2068 (2006), p. 1315-1339.
- [112] V. PAGNEUX et A. MAUREL, « Scattering matrix properties with evanescent modes for waveguides in fluids and solids », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 116.4 (2004), p. 1913-1920.
- [113] N. PEAKE et A. J. COOPER, « Acoustic propagation in ducts with slowly varying elliptic cross-section », in : *J. Sound Vib.* 243.3 (2001), p. 381-401.
- [114] A. PELAT, S. FÉLIX et V. PAGNEUX, « A coupled modal-finite element method for the wave propagation modeling in irregular open waveguides », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 129.3 (2011), p. 1240-1249.
- [115] J. W. S. Baron RAYLEIGH, *The Theory of Sound*, t. 2, Macmillan et Company, London, 1877.
- [116] W. P. RDZANEK, « Sound scattering and transmission through a circular cylindrical aperture revisited using the radial polynomials », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 143.3 (2018), p. 1259-1282.
- [117] S. W. RIENSTRA, « Webster's horn equation revisited », in : *SIAM J. Appl. Math.* 65.6 (2005), p. 1981-2004.
- [118] A. ROURE, « Propagation guidée, étude des discontinuités », thèse de doct., Université Aix-Marseille, 1976.

-
- [119] P. RUCZ, J. ANGSTER et A. MIKLOS, *Finite element simulation of radiation impedances with application for musical instrument design*, rapp. tech., ISMA, sept. 2019.
- [120] S. SCHMIDT, E. WADBRO et M. BERGGREN, « Large-Scale Three-Dimensional Acoustic Horn Optimization », in : *SIAM J. Sci. Comput.* 38.6 (2016), B917-B940.
- [121] A. SELAMET et Z. L. JI, « Wave reflections from duct terminations », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 109.4 (2001), p. 1304-1311.
- [122] F. SILVA, P. GUILLEMAIN, J. KERGOMARD, B. MALLARONI et A. N. NORRIS, « Approximation formulae for the acoustic radiation impedance of a cylindrical pipe », in : *J. Sound Vib.* 322 (2009), p. 255-263.
- [123] D. SINGH, N. KUMARI et P. SHARMA, « A Review of Adverse Effects of Road Traffic Noise on Human Health », in : *Fluct. Noise Lett.* 17.01 (2018), p. 1830001.
- [124] A. SNAKOWSKA, J. JURKIEWICZ et Ł. GORAZD, « A hybrid method for determination of the acoustic impedance of an unflanged cylindrical duct for multimode wave », in : *J. Sound Vib.* 396 (2017), p. 325-339.
- [125] A. F. STEVENSON, « Exact and approximate equations for wave propagation in acoustic horns », in : *J. Appl. Phys.* 22.12 (1951), p. 1461-1463.
- [126] M. R. TEAGUE, « Image analysis via the general theory of moments », in : *J. Opt. Soc. Am.* 70.8 (1980), p. 920-930.
- [127] A. N. TIKHONOV et V. Y. ARSEININ, « Solutions to ill-posed problem », in : Winston-Wiley New York, 1977.
- [128] F. TREYSSÈDE, « Mode propagation in curved waveguides and scattering by inhomogeneities : application to the elastodynamics of helical structures », in : *The Journal of the Acoustical Society of America* 129.4 (2011), p. 1857-1868.
- [129] R. UDAWALPOLA et M. BERGGREN, « Optimization of an acoustic horn with respect to efficiency and directivity », in : *Int. J. Numer. Meth. Engng* 73.11 (2008), p. 1571-1606.
- [130] T. VAMPOLA, J. HORÁČEK et J. G. ŠVEC, « FE Modeling of Human Vocal Tract Acoustics. Part I : Production of Czech Vowels », in : *Acta Acust. united Ac.* 94.3 (2008), p. 433-447.

-
- [131] D.-A. WANG, W.-Y. CHUANG, K. HSU et H.-T. PHAM, « Design of a Bézier-profile horn for high displacement amplification », in : *Ultrasonics* 51.2 (2011), p. 148-156.
- [132] B. WEBB et J. BAIRD, « Advances in Line Array Technology for Live Sound », in : *Audio Engineering Society Conference : UK 18th Conference : Live Sound*, avr. 2003.
- [133] J. A. WEIDEMAN et S. C. REDDY, « A MATLAB differentiation matrix suite », in : *ACM Trans. Math. Softw.* 26.4 (2000), p. 465-519.
- [134] A. WIRGIN, « The inverse Crime », in : *Math. Phys.* (2004).
- [135] T. YOSHINAGA, A. VAN HIRTUM et S. WADA, « Multimodal modeling and validation of simplified vocal tract acoustics for sibilant /s/ », in : *J. Sound Vib.* 411 (2017), p. 247-259.
- [136] F. ZERNIKE, « Diffraction theory of the knife-edge test and its improved form, the phase-contrast method », in : *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 94 (1934), p. 377-384.
- [137] W. E. ZORUMSKI, « Generalized radiation impedances and reflection coefficients of circular and annular ducts », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 54 (1973), p. 1667-1673.

Titre : Modélisation du rayonnement des guides d'onde de forme complexe par une méthode multimodale

Mot clés : rayonnement, pavillon, méthode multimodale, matrice impédance, optimisation, acoustique musicale

Résumé : Pour de nombreux instruments à vent ou dispositifs audio, la qualité du système dépend fortement de la forme du pavillon, qui peut plus ou moins favoriser le rayonnement acoustique. La conception de ces systèmes peut aujourd'hui s'appuyer sur diverses méthodes de simulation numérique afin de s'affranchir d'essais empiriques coûteux et susceptibles d'aboutir à des géométries sous-optimales. Cependant, les méthodes numériques classiquement utilisées sont peu propices à l'analyse physique et/ou recourent à des simplifications du problème de rayonnement. Un des objectifs de cette thèse est

ainsi d'étendre le champ d'application d'une méthode multimodale au rayonnement réalistes des guides de formes complexes, cette méthode-ci présentant l'avantage de tirer au mieux parti de l'existence d'une direction de propagation privilégiée au sein du guide. Egalement diverses problématiques numériques sont abordées, comme la construction d'une base modale 3D permettant de mieux satisfaire la condition aux parois. L'aboutissement de ces travaux de thèse est l'application des algorithmes développés à l'optimisation de forme de pavillons.

Title: Modeling the radiation of a complex-shaped waveguide using a multimodal method

Keywords: radiation, horn, multimodal method, impedance matrix, optimization, musical acoustics

Abstract: For a number of applications in musical acoustics or audio engineering, the quality of the system highly depends on the shape of the horn, which has a large impact on the radiation. Fortunately, today horn design benefits from numerical methods and no longer relies exclusively on expensive empirical methods that may lead to suboptimal geometries. However, those numerical methods are either impractical when physical insights are needed, or rely on strong assumptions on the radiation problem. This thesis aims

at extending the applicability of a multimodal method to the radiation of complex-shaped waveguide. The chosen method benefits from the existence of a main direction of propagation, and hence is especially suited for the study of waveguides. Many numerical aspects are also addressed, including an improvement of the 3D modal basis that helps satisfying the boundary condition. In a final chapter we are able to effectively optimize horn geometries using our improved multimodal method.