



**HAL**  
open science

# Méthodes inverses à régularisation évanescence pour l'identification de conditions aux limites en théorie des plaques minces

Mohamed Aziz Boukraa

► **To cite this version:**

Mohamed Aziz Boukraa. Méthodes inverses à régularisation évanescence pour l'identification de conditions aux limites en théorie des plaques minces. Analyse fonctionnelle [math.FA]. Normandie Université, 2021. Français. NNT : 2021NORMC234 . tel-03526539

**HAL Id: tel-03526539**

**<https://theses.hal.science/tel-03526539v1>**

Submitted on 14 Jan 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Normandie Université

## THÈSE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité MATHÉMATIQUES

Préparée au sein de l'Université de Caen Normandie

**Méthodes inverses à régularisation évanescence pour l'identification de conditions aux limites en théorie des plaques minces**

**Présentée et soutenue par  
MOHAMED AZIZ BOUKRAA**

**Thèse soutenue le 14/12/2021  
devant le jury composé de**

M. FABIEN CAUBET	Maître de conférences HDR, Université de Pau Pays de l'Adour	Rapporteur du jury
MME AMEL BEN ABDA	Professeur des universités, l'Ecole nationale d'ingénieurs de Tunis	Membre du jury
MME LAETITIA CAILLE	Maître de conférences, Université de Poitiers	Membre du jury
MME JULIETTE LEBLOND	Directeur de recherche, INRIA Sophia Antipolis	Membre du jury
M. LIVIU MARIN	Professeur des universités, Université de Bucarest - Roumanie	Membre du jury
M. MEJDI AZAIEZ	Professeur des universités, Université de Bordeaux	Président du jury
M. FRANCK DELVARE	Professeur des universités, Université Caen Normandie	Directeur de thèse

**Thèse dirigée par FRANCK DELVARE, Laboratoire de Mathématiques 'Nicolas Oresme' (Caen)**



UNIVERSITÉ  
CAEN  
NORMANDIE





UNIVERSITÉ DE CAEN

Doctorat en Mathématiques

**Méthodes inverses à régularisation évanescence pour l'identification de conditions aux limites en théorie des plaques minces**

par Mohamed Aziz BOUKRAA

*Résumé*

Dans cette thèse, nous nous intéressons, dans une première partie, à la résolution, par la méthode de régularisation évanescence, du problème de Cauchy associé à l'équation biharmonique. Une attention particulière est consacrée à la mise en œuvre numérique de l'algorithme itératif de résolution en utilisant différentes méthodes numériques telles que la méthode des solutions fondamentales et la méthode des éléments finis et en proposant un nouveau critère d'arrêt de l'algorithme itératif. Après avoir traité le problème avec des conditions aux limites mathématiques, une généralisation de l'étude au problème de Cauchy en théorie des plaques minces, que l'on rencontre en mécanique, est proposée. En effet, la flexion des plaques minces sous les hypothèses de Kirchhoff-Love, est régie par la même équation aux dérivées partielles et du point de vue numérique, des éléments finis de type plaque de Kirchhoff sont combinés avec la technique de régularisation évanescence pour résoudre le problème. Cette approche a, en particulier, permis d'obtenir des reconstructions précises de la solution et de sa dérivée normale sur toute la frontière notamment lors des domaines non réguliers. Ces résultats ont, alors, inspirés l'utilisation des éléments finis de type plaque pour résoudre des problèmes de Cauchy associés à des équations aux dérivées partielles du second ordre. Les résultats obtenus sont très compétitifs par rapport à ceux d'études antérieures. La robustesse vis-à-vis des données très bruitées est également un atout de cette stratégie.

**Mots-clés** : Problèmes inverses, Méthodes à régularisation évanescence, Problèmes de Cauchy, Méthodes des solutions fondamentales, Méthodes des éléments finis, Théorie des plaques minces, Éléments finis de plaque, Identification de conditions aux limites inaccessibles à la mesure à partir de champs.



UNIVERSITÉ DE CAEN

Doctorate in Mathematics

**Méthodes inverses à régularisation évanescence pour l'identification de conditions aux limites en théorie des plaques minces**

by Mohamed Aziz BOUKRAA

*Abstract*

In this thesis, the resolution of the Cauchy problem associated with the biharmonic equation using the fading regularization method is investigated. A particular attention is devoted to the numerical implementation of the iterative algorithm used for the resolution and this by using various numerical methods such as the method of fundamental solutions and the finite element method while proposing a new stopping criterion of the iterative algorithm. Once the mathematical problem, with mathematical boundary conditions, has been treated, the study thus carried out is then generalized to the study of the Cauchy problem in thin plate theory, since in mechanics, the bending of thin plates under Kirchhoff-Love's assumptions, is governed by the same differential equation. From a numerical point of view, plate finite elements based on Kirchhoff theory known as discrete Kirchhoff finite elements are combined with the fading regularization technique to solve the problem. This strategy made it possible to obtain accurate reconstructions of the solution and of its normal derivative on the whole boundary, in particular for non-smooth geometries. The results thus obtained were an inspiration for the use of plate-type finite elements to solve Cauchy problems associated with second order partial differential equations. The obtained results are very competitive with those of previous studies. Robustness against high level noisy data is also an advantage of this strategy.

**Keywords** : Inverse problems, Fading regularization method, Cauchy problems, Method of fundamental solutions , Finite element method, Thin plate theory, Plate finite elements, Identification of boundary conditions inaccessible to measurement from fields.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Méthodes de régularisation évanescence pour le problème de Cauchy associé à l'équation biharmonique</b>	<b>5</b>
1.1	Introduction	6
1.2	Formulation continue de la méthode de régularisation évanescence	8
1.2.1	Choix des espaces fonctionnels	8
1.2.2	Convergence de la formulation continue	10
1.3	Formulation de l'algorithme itératif en dimension finie	11
1.3.1	Formulation d'un problème de Cauchy "discret"	11
1.3.2	Convergence de l'algorithme itératif en dimension finie	12
1.4	Critères d'arrêt de l'algorithme itératif	14
1.4.1	Précédents critères d'arrêt utilisés	14
1.4.2	Proposition d'un nouveau critère d'arrêt	15
1.5	Discrétisation par la méthode des solutions fondamentales	16
1.5.1	Approximation de l'espace des solutions de l'équation biharmonique par la MFS	17
1.5.2	Algorithme itératif discret obtenu avec la MFS	19
1.5.3	Comparaison des critères d'arrêts du point de vue numérique	20
1.5.3.1	Influence du paramètre $c$ sur les critères d'arrêt	21
1.5.3.2	Influence de la portion accessible de la frontière sur les critères d'arrêt	29
1.5.4	Influence des paramètres de la MFS sur la reconstruction de la solution	30
1.5.5	Reconstruction dans le cas d'un domaine carré	32
1.5.6	Conclusion sur la discrétisation par la méthode des solutions fondamentales	33
1.6	Discrétisation par la méthode des éléments finis	34
1.6.1	Méthode de régularisation évanescence pour le problème de Cauchy factorisé	34
1.6.2	Caractérisation des espaces d'approximation	35
1.6.3	L'algorithme de régularisation évanescence discret pour le problème factorisé	38
1.6.4	L'algorithme de régularisation évanescence discret pour le problème biharmonique	39
1.6.5	Résultats numériques	40
1.6.5.1	Domaine de type couronne	40
1.6.5.1.1	Résultats numériques pour le problème factorisé	41



1.6.5.1.2	Résultats numériques pour le problème biharmonique complet . . . . .	48
1.6.5.2	Domaine de type disque . . . . .	51
1.6.5.3	Domaine carré . . . . .	54
1.6.6	Conclusion sur la discrétisation par la méthode des éléments finis	58
1.7	Conclusion générale du chapitre . . . . .	59
<b>2</b>	<b>Le problème de Cauchy en théorie des plaques minces de Kirchhoff</b>	<b>61</b>
2.1	Introduction . . . . .	62
2.2	Rappels sur la théorie des plaques minces de <i>Kirchhoff-Love</i> . . . . .	63
2.2.1	Les hypothèses de <i>Kirchhoff-Love</i> . . . . .	63
2.2.1.1	Champ de déplacement . . . . .	64
2.2.1.2	Champ de déformations . . . . .	65
2.2.1.3	Champ de contraintes . . . . .	65
2.2.1.4	Efforts résultants et moments résultants . . . . .	66
2.2.2	Problème de flexion des plaques minces . . . . .	67
2.2.2.1	Équation d'équilibre d'un solide élastique . . . . .	67
2.2.2.2	Équation d'équilibre d'une plaque sous forme vectorielle	67
2.2.2.3	Équation d'équilibre d'une plaque en flexion . . . . .	68
2.2.2.3.1	Bord encasté . . . . .	69
2.2.2.3.2	Bord simplement posé . . . . .	69
2.2.2.3.3	Bord libre . . . . .	69
2.2.2.4	Formulation variationnelle du problème des plaques minces . . . . .	69
2.2.3	Le problème de Cauchy en théorie de plaques de <i>Kirchhoff-Love</i> .	72
2.3	Mise en œuvre numérique de la méthode des éléments finis de <i>Kirchhoff</i>	74
2.3.1	Formulation des éléments finis de <i>Kirchhoff</i> . . . . .	76
2.3.2	La formulation approchée du problème de Cauchy en théorie des plaques . . . . .	80
2.3.3	L'algorithme itératif discret pour la résolution du problème de Cauchy en théorie des plaques . . . . .	82
2.3.4	Résultats numériques . . . . .	84
2.3.4.1	Cas de la couronne . . . . .	84
2.3.4.2	Cas du disque . . . . .	87
2.3.4.3	Cas du carré . . . . .	89
2.4	Conclusion . . . . .	92
<b>3</b>	<b>Apports des éléments finis de type plaque</b>	<b>95</b>
3.1	Introduction . . . . .	95
3.2	Discrétisation de l'équation de Laplace par des éléments finis de <i>Kirchhoff</i>	98
3.2.1	Formulation variationnelle et espaces d'approximation . . . . .	98
3.2.2	Adaptation d'un élément fini de type plaque pour l'équation de Laplace . . . . .	99
3.3	Application au problème de Cauchy associé à l'équation de Laplace . . .	102
3.3.1	Formulation continue de l'algorithme à régularisation évanescence	102
3.3.2	Formulation discrète de l'algorithme à régularisation évanescence	103
3.3.3	Validation numérique . . . . .	105

3.4	Conclusion . . . . .	110
<b>A</b>	<b>Convergences et propriétés des termes de contrôle</b>	<b>113</b>
A.1	Décroissance de la suite composée des termes de relaxation des données	113
A.2	Décroissance de la suite composée des valeurs optimales de la fonctionnelle $J_c$ à chaque itération . . . . .	114
A.3	Croissance de la suite $S_c^{k+1}$ . . . . .	114
A.4	Propriétés de la suite composée des termes de régularisation . . . . .	115
<b>B</b>	<b>Détails concernant les éléments finis de plaques</b>	<b>117</b>
B.1	Construction des fonctions d'interpolation pour un cas de maillage uniforme . . . . .	117
B.1.1	Discrétisation en utilisant des éléments finis rectangulaires à 4 nœuds (élément fini de Melosh) . . . . .	118
B.1.2	Discrétisation en utilisant des éléments finis triangulaires à 3 nœuds . . . . .	119
B.2	Validation des calculs de la matrice de rigidité et du second membre . .	121
B.2.1	Domaine carré avec maillage uniforme . . . . .	121
B.2.2	Domaine circulaire . . . . .	126
B.3	Fonctions d'interpolation sur l'élément de référence . . . . .	129
<b>C</b>	<b>Résultats antérieurs obtenus avec la méthode de régularisation évanescence</b>	<b>131</b>



# Table des figures

1	Représentation d'une plaque $\Omega$ rectangulaire en flexion. Sa frontière est composée de deux parties, $\Gamma_d$ la partie accessible à la mesure et $\Gamma_i$ la partie inaccessible. . . . .	3
1.1	Schéma d'un domaine $\Omega$ régulier entouré de points sources $\mathbf{y}^j$ séparés par une distance $d$ et $\mathbf{n}$ étant un vecteur unitaire normal à la frontière $\Gamma$ et orienté vers l'extérieur. . . . .	17
1.2	Évolution des termes de contrôle $J_\Gamma$ , $J_{\Gamma_d}$ et $J_c$ et des estimations d'erreur pour des données compatibles en fonction du nombre d'itérations $k$ pour 4 valeurs de $c$ , (a) $c = 10$ , (b) $c = 1$ , (c) $c = 10^{-1}$ et (d) $c = 10^{-2}$ . . . . .	21
1.3	Évolution des quantités $S_e$ , $S_c$ et $S_d$ en fonction du nombre d'itérations $k$ pour des données compatibles (a) et bruitées ( $\delta = 3\%$ ) (b) avec $c = 10$ . . . . .	22
1.4	Évolution des termes de contrôle $J_\Gamma$ , $J_{\Gamma_d}$ et $J_c$ et des estimations d'erreurs en fonction du nombre d'itérations $k$ pour des données compatibles (a) et bruitées ( $\delta = 3\%$ ) (b) avec $c = 10$ . . . . .	22
1.5	Évolution des quantités $J_\Gamma$ , $J_{\Gamma_d}$ , $J_c$ , $S_e$ , $S_c$ et $S_d$ en fonction du nombre d'itérations $k$ pour des données compatibles (a) et bruitées ( $\delta = 3\%$ ) (b) avec $c = 10$ . . . . .	23
1.6	Reconstructions de $u$ (a), $u_n$ (b), $v$ (c) et $v_n$ (d) pour l' <b>Exemple 1</b> pour différentes valeurs de $c = 10, 10^{-1}$ et $10^{-3}$ avec des données compatibles. . . . .	23
1.7	Reconstructions de $u$ (a), $u_n$ (b), $v$ (c) et $v_n$ (d) pour l' <b>Exemple 2</b> pour différentes valeurs de $c = 10, 10^{-1}$ et $10^{-3}$ avec des données compatibles. . . . .	24
1.8	Reconstructions de $u$ (a), $u_n$ (b), $v$ (c) et $v_n$ (d) pour l' <b>Exemple 1</b> avec des données bruitées et différents niveaux de $\delta = 1\%, 3\%$ et $5\%$ et $c = 10^{-3}$ . . . . .	27
1.9	Reconstructions de $u$ (a), $u_n$ (b), $v$ (c) et $v_n$ (d) pour l' <b>Exemple 2</b> avec des données bruitées et différents niveaux de $\delta = 1\%, 3\%$ et $5\%$ et $c = 10^{-3}$ . . . . .	27
1.10	Reconstructions de $u$ (a), $u_n$ (b), $v$ (c) et $v_n$ (d) sur la partie $\Gamma_d$ pour l' <b>Exemple 1</b> avec des données bruitées à $\delta = 10\%$ avec $c = 10^{-3}$ . . . . .	29
1.11	Reconstructions de $u$ (a), $u_n$ (b), $v$ (c) et $v_n$ (d) pour l' <b>Exemple 2</b> avec $c = 10^{-1}$ et des données bruitées $\delta = 3\%$ situées sur deux côtés adjacents. . . . .	32
1.12	Reconstructions de $u$ (a), $u_n$ (b), $v$ (c) et $v_n$ (d) pour l' <b>Exemple 2</b> avec $c = 10^{-1}$ et des données bruitées $\delta = 3\%$ situées sur deux côtés opposés. . . . .	33
1.13	Maillage quadrangulaire (QUA8) d'un domaine de type couronne avec un pas de discrétisation $h = 1/20$ tel que les mesures ne sont accessibles que sur la frontière extérieure $\triangle$ tandis que la frontière intérieure $*$ est inaccessible aux mesures. . . . .	41
1.14	Reconstructions de $u$ (a), $u_n$ (b), $v$ (c), $v_n$ (d) avec l' <b>algorithme factorisé</b> sur le bord intérieur $\Gamma_i$ de la couronne avec des données compatibles et $c = 10^{-6}$ . . . . .	41

1.15	Reconstructions de $u$ (a), $u_n$ (b), $v$ (c), $v_n$ (d) avec <b>l'algorithme factorisé</b> sur le bord extérieur $\Gamma_d$ de la couronne avec des données compatibles et à $c = 10^{-6}$ . . . . .	42
1.16	Évolutions des termes de contrôle et des estimations d'erreur au cours des itérations de <b>l'algorithme factorisé</b> pour chaque sous-problème (a) associé à $v$ et (b) associé à $u$ avec des données compatibles et pour $c = 10^{-5}$ . . . . .	43
1.17	Reconstructions de $u$ (a), $u_n$ (b), $v$ (c), $v_n$ (d) avec <b>l'algorithme factorisé</b> sur le bord intérieur $\Gamma_i$ de la couronne avec des données bruitées à différents niveaux de bruit $\delta = 1\%, 3\%$ et $5\%$ et $c = 10^{-6}$ . . . . .	44
1.18	Reconstructions de $u$ (a), $u_n$ (b), $v$ (c), $v_n$ (d) avec <b>l'algorithme factorisé</b> sur le bord extérieur $\Gamma_d$ de la couronne avec des données bruitées à $\delta = 10\%$ et $c = 1$ . . . . .	45
1.19	Évolutions des termes de contrôle et des estimations d'erreur au cours des itérations de <b>l'algorithme factorisé</b> pour chaque sous-problème (a) associé à $v$ et (b) associé à $u$ avec des données bruitées à $\delta = 1\%$ et $c = 10^{-2}$ . . . . .	46
1.20	Évolution des normes d'erreur $L^2$ par rapport à $h^{-1}$ dans un tracé logarithmique pour des données compatibles. . . . .	47
1.21	Évolution des normes d'erreur $L^2$ par rapport à $h^{-1}$ dans un tracé logarithmique pour des données bruitées avec $\delta = h^2$ . . . . .	47
1.22	Évolution des normes d'erreur $L^2$ par rapport à $h^{-1}$ dans un tracé logarithmique pour des données bruitées avec $\delta = h$ . . . . .	47
1.23	Évolution de $u_{\text{err}}$ (a) et $u'_{\text{err}}$ (b) en fonction de $c$ pour le <b>problème factorisé</b> $\text{---}\ominus\text{---}$ et le <b>problème biharmonique complet</b> $\text{---}\square\text{---}$ avec des données bruitées à $\delta = 3\%$ . . . . .	49
1.24	Évolution des termes de contrôle et des estimations d'erreur au cours des itérations de l'algorithme du <b>problème biharmonique complet</b> pour des données compatibles (a) et bruitées avec $\delta = 1\%$ (b) et $c = 10^{-2}$ . . . . .	49
1.25	Reconstructions de $u$ (a), $u_n$ (b), $v$ (c), $v_n$ (d) avec l'algorithme du <b>problème biharmonique complet</b> sur le bord intérieur $\Gamma_i$ de la couronne avec des données bruitées à $\delta = 1\%, 3\%$ et $5\%$ et $c = 10$ . . . . .	50
1.26	Domaine disque $\Omega$ avec $h = 1/80$ tel que les données sont accessibles sur la moitié gauche du périmètre du disque *. . . . .	52
1.27	Reconstructions de $u$ (a), $u_n$ (b), $v$ (c), $v_n$ (d) avec l'algorithme du <b>problème factorisé</b> sur la frontière du disque $\Omega$ avec des données compatibles et $c = 10^{-6}$ . . . . .	52
1.28	Reconstructions de $u$ (a), $u_n$ (b), $v$ (c), $v_n$ (d) avec l'algorithme du <b>problème factorisé</b> sur la frontière du disque $\Omega$ avec des données bruitées à $\delta = 3\%$ et $c = 10^{-6}$ . . . . .	53
1.29	Reconstructions de $u$ (a), $u_n$ (b), $v$ (c), $v_n$ (d) avec l'algorithme du <b>problème factorisé</b> avec des données compatibles situées sur les côtés $y = 0$ et $x = 1$ et $c = 10^{-4}$ . . . . .	54
1.30	Reconstructions de $u$ (a), $u_n$ (b), $v$ (c), $v_n$ (d) avec l'algorithme du <b>problème factorisé</b> avec des données bruitées ( $\delta = 3\%$ ) et situées sur les côtés $y = 0$ et $x = 1$ et $c = 10^{-3}$ . . . . .	55

1.31	Reconstructions de $u$ (a), $u_{,n}$ (b), $v$ (c), $v_{,n}$ (d) avec l'algorithme du <b>problème factorisé</b> avec des données bruitées ( $\delta = 3\%$ ) et situées sur les côtés $y = 0$ et $y = 1$ et $c = 10^{-3}$ . . . . .	56
1.32	Reconstructions de $u$ (a), $u_{,n}$ (b), $v$ (c), $v_{,n}$ (d) avec l'algorithme du <b>problème biharmonique complet</b> avec des données compatibles situées sur les côtés $y = 0$ et $x = 1$ et $c = 10^{-3}$ . . . . .	57
1.33	Reconstructions de $u$ (a), $u_{,n}$ (b), $v$ (c), $v_{,n}$ (d) avec l'algorithme du <b>problème biharmonique complet</b> avec des données bruitées ( $\delta = 3\%$ ) et situées sur les côtés $y = 0$ et $x = 1$ et $c = 10^{-1}$ . . . . .	57
1.34	Reconstructions de $u$ (a), $u_{,n}$ (b), $v$ (c), $v_{,n}$ (d) avec l'algorithme du <b>problème biharmonique complet</b> avec des données bruitées ( $\delta = 3\%$ ) et situées sur les côtés $y = 0$ et $y = 1$ et $c = 10^{-1}$ . . . . .	58
2.1	Plaque en flexion . . . . .	62
2.2	Représentation du déplacement d'un point A dans le plan $o\vec{x}\vec{y}$ , selon les hypothèses de Kirchhoff-Love . . . . .	64
2.3	Représentation d'un système de coordonnées normale et tangentielle au niveau d'un point A de la frontière. . . . .	71
2.4	Schéma explicatif de l'introduction des éléments finis de Kirchhoff discret. . . . .	76
2.5	Représentation des rotations $\theta_{s_i}$ , $\theta_{s_j}$ et $\theta_{s_k}$ sur une arête $i-j$ . . . . .	77
2.6	Maillage par éléments finis DKQ d'une couronne avec pas $h = 1/30$ tel que : * $\Gamma_d$ (données) et $\Delta \Gamma_i$ (inconnues). . . . .	85
2.7	Reconstructions du déplacement vertical $w$ (a), de la rotation normale $w_{,n}$ (b), du moment $\mathcal{M}_n$ (c) et de l'effort tranchant $\mathcal{V}_n$ (d) sur le contour intérieur de la couronne (données non bruitées) . . . . .	85
2.8	Reconstructions du déplacement vertical $w$ (a), de la rotation normale $w_{,n}$ (b), du moment $\mathcal{M}_n$ (c) et de l'effort tranchant $\mathcal{V}_n$ (d) sur le bord intérieur de la couronne pour plusieurs niveaux de bruit. . . . .	86
2.9	Reconstructions du déplacement vertical $w$ (a), de la rotation normale $w_{,n}$ (b), du moment $\mathcal{M}_n$ (c) et de l'effort tranchant $\mathcal{V}_n$ (d) sur le bord extérieur (support des données bruitées) de la couronne pour des données bruitées $\delta = 5\%$ . . . . .	87
2.10	Maillage par éléments finis DKQ d'un disque avec pas $h = 1/30$ tel que : * $\Gamma_d$ (données) et $\Delta \Gamma_i$ (inconnues). . . . .	88
2.11	Reconstructions du déplacement vertical $w$ (a), de la rotation normale $w_{,n}$ (b), du moment $\mathcal{M}_n$ (c) et de l'effort tranchant $\mathcal{V}_n$ (d) sur le bord intérieur de la couronne (données non bruitées). . . . .	88
2.12	Maillages par éléments finis DKQ de domaines de type carré avec des données (*) situées sur deux côtés adjacents (a) et opposés (b) de la frontière avec un pas $h = 1/40$ . . . . .	89
2.13	Reconstructions du déplacement vertical $w$ (a), de la rotation normale $w_{,n}$ (b), du moment $\mathcal{M}_n$ (c) et de l'effort tranchant $\mathcal{V}_n$ (d) sur le bord d'un carré (données non bruitées situées sur deux cotés adjacents). . . . .	90
2.14	Reconstructions du déplacement vertical $w$ (a), de la rotation normale $w_{,n}$ (b), du moment $\mathcal{M}_n$ (c) et de l'effort tranchant $\mathcal{V}_n$ (d) sur le bord d'un carré (données bruitées $\delta = 3\%$ , situées sur deux cotés adjacents). . . . .	91

2.15	Reconstructions du déplacement vertical $w$ (a), de la rotation normale $w_{,n}$ (b), du moment $\mathcal{M}_n$ (c) et de l'effort tranchant $\mathcal{V}_n$ (d) sur le bord d'un carré (données non bruitées situées sur deux cotés opposés). . . . .	91
2.16	Reconstructions du déplacement vertical $w$ (a), de la rotation normale $w_{,n}$ (b), du moment $\mathcal{M}_n$ (c) et de l'effort tranchant $\mathcal{V}_n$ (d) sur le bord d'un carré (données bruitées $\delta = 3\%$ , situées sur deux cotés opposés). . . . .	92
3.1	Domaine carré $[0, 1] \times [0, 1] \in \mathbb{R}^2$ discrétisé par $40 \times 40$ éléments avec $\ast : \Gamma_d$ et $\triangle : \Gamma_i$ . . . . .	106
3.2	Reconstructions de la solution $U$ (a) et de la dérivée normale $U'$ (b) pour des données compatibles situées sur les côtés $y = 0$ et $x = 1$ du carré. . . . .	107
3.3	Reconstructions de la solution $U$ (a) et de la dérivée normale $U'$ (b) pour des données bruitées de niveau $\delta = 3\%$ situées sur les côtés $y = 0$ et $x = 1$ du carré. . . . .	107
3.4	Reconstructions de la solution $U$ (a) et de la dérivée normale $U'$ (b) pour des données bruitées de niveau $\delta = 5\%$ situées sur les côtés $y = 0$ et $x = 1$ du carré. . . . .	108
3.5	Reconstructions de la solution $U$ (a) et de la dérivée normale $U'$ (b) pour des données bruitées de niveau $\delta = 10\%$ situées sur les côtés $y = 0$ et $x = 1$ du carré. . . . .	108
3.6	Reconstructions sur $\Gamma_d$ de la solution $U$ (a) et de la dérivée normale $U'$ (b) pour des données bruitées de niveau $\delta = 5\%$ . . . . .	109
3.7	Reconstructions de la solution $U$ (a) et de la dérivée normale $U'$ (b) pour des données compatibles situées sur les côtés $y = 0$ et $y = 1$ du carré. . . . .	109
3.8	Reconstructions de la solution $U$ (a) et de la dérivée normale $U'$ (b) pour des données bruitées à plusieurs niveaux $\delta = 3\%, 5\%$ et $10\%$ situées sur les côtés $y = 0$ et $y = 1$ du carré. . . . .	110
B.1	Domaines carrés discrétisés par des éléments finis DKT (a) et DKQ (b) avec un pas $h = 1/20$ . . . . .	121
B.2	Représentations du vecteur $\mathbf{K}d$ et du vecteur du second membre $\mathbf{F}$ pour chaque bloc de lignes associé aux degrés de liberté $w$ (a), $\theta_x$ (b) et $\theta_y$ (c) pour la solution analytique $\frac{1}{3}x^4 - x^2y^2$ et pour les deux maillages DKT et DKQ. . . . .	122
B.3	Représentations du vecteur $\mathbf{K}d$ et du vecteur du second membre $\mathbf{F}$ tracés pour chaque bloc de lignes associé aux degrés de liberté $w$ (a), $\theta_x$ (b) et $\theta_y$ (c) pour la solution analytique $\frac{1}{3}x^4 - x^2y^2$ et pour les deux maillages DKT et DKQ. . . . .	123
B.4	Représentations du vecteur $\mathbf{K}d$ et du vecteur du second membre $\mathbf{F}$ tracés pour chaque bloc de lignes associé aux degrés de liberté $w$ (a), $\theta_x$ (b) et $\theta_y$ (c) pour la solution analytique $\frac{1}{3}x^4 - x^2y^2$ et pour les deux maillages DKT et DKQ. . . . .	124
B.5	Représentations du vecteur $\mathbf{K}d$ et du vecteur du second membre $\mathbf{F}$ tracés pour chaque bloc de lignes associé aux degrés de liberté $w$ (a), $\theta_x$ (b) et $\theta_y$ (c) pour la solution analytique $\frac{1}{3}x^4 - x^2y^2$ et pour les deux maillages DKT et DKQ. . . . .	125

B.6	Domaines circulaire de type disque unité discrétisés par des éléments finis DKT (a) et DKQ (b) avec un pas $h = 1/80$ . . . . .	126
B.7	Représentations du vecteur $\mathbf{K}d$ et du vecteur du second membre $\mathbf{F}$ tracés pour chaque bloc de lignes associé aux degrés de liberté $w$ (a), $\theta_x$ (b) et $\theta_y$ (c) pour la solution analytique $\frac{1}{3}x^4 - x^2y^2$ et pour les deux maillages DKT et DKQ. . . . .	127
B.8	Représentations du vecteur $\mathbf{K}d$ et du vecteur du second membre $\mathbf{F}$ tracés pour chaque bloc de lignes associé aux degrés de liberté $w$ (a), $\theta_x$ (b) et $\theta_y$ (c) pour la solution analytique $\frac{1}{3}x^4 - x^2y^2$ et pour les deux maillages DKT et DKQ. . . . .	128
B.9	Représentations du vecteur $\mathbf{K}d$ et du vecteur du second membre $\mathbf{F}$ tracés pour chaque bloc de lignes associé aux degrés de liberté $w$ (a), $\theta_x$ (b) et $\theta_y$ (c) pour la solution analytique $\frac{1}{3}x^4 - x^2y^2$ et pour les deux maillages DKT et DKQ. . . . .	129
C.1	Reconstruction de $u$ sur la frontière du domaine carré $[0, 1] \times [0, 1]$ par les différentes méthodes de régularisation évanescence, d'ordre zéro, d'ordre un et d'ordre un modifié avec des données compatibles (Figure extraite de [31]). . . . .	132
C.2	Reconstruction de $u_n$ sur la frontière du domaine carré $[0, 1] \times [0, 1]$ par les différentes méthodes de régularisation évanescence, d'ordre zéro, d'ordre un et d'ordre un modifié avec des données compatibles (Figure extraite de [31]). . . . .	132
C.3	Reconstruction de $u$ sur la frontière du domaine carré $[0, 1] \times [0, 1]$ par la méthode de régularisation évanescence d'ordre un modifié avec $u$ bruitée (Figure extraite de [31]). . . . .	133
C.4	Reconstruction de $u_n$ sur la frontière du domaine carré $[0, 1] \times [0, 1]$ par la méthode de régularisation évanescence d'ordre un modifié avec $u$ bruitée (Figure extraite de [31]). . . . .	133
C.5	Reconstruction de $u$ sur la frontière du domaine carré $[0, 1] \times [0, 1]$ par la méthode de régularisation évanescence d'ordre un modifié avec $u_n$ bruitée (Figure extraite de [31]). . . . .	134
C.6	Reconstruction de $u_n$ sur la frontière du domaine carré $[0, 1] \times [0, 1]$ par la méthode de régularisation évanescence d'ordre un modifié avec $u_n$ bruitée (Figure extraite de [31]). . . . .	134





# Liste des tableaux

1.1	Récapitulatif des quatre critères d'arrêt utilisés. . . . .	16
1.2	Évolution des estimations d'erreurs et de l'itération d'arrêt pour chaque critère d'arrêt et pour différentes valeurs de $c$ avec des <u>données compatibles</u> . . . . .	25
1.3	Évolution des estimations d'erreurs et de l'itération d'arrêt pour chaque critère d'arrêt et pour différentes valeurs de $c$ avec des <u>données bruitées</u> ( $\delta = 3\%$ ). . . . .	26
1.4	Évolution des estimations d'erreurs et de l'itération d'arrêt associée au critère $C_{S_c}$ pour l' <b>Exemple 1</b> , pour différents niveaux de bruit $\delta$ et différentes valeurs de $c$ . . . . .	28
1.5	Évolution des estimations d'erreurs et de l'itération d'arrêt pour chaque critère d'arrêt et pour différentes valeurs de $\zeta$ pour des <u>données compatibles</u> avec $c = 10^{-1}$ . . . . .	29
1.6	Évolution des estimations d'erreurs et de l'itération d'arrêt pour chaque critère d'arrêt et pour différentes valeurs de $\zeta$ pour des <u>données bruitées</u> ( $\delta = 3\%$ ) avec $c = 10^{-1}$ . . . . .	30
1.7	Influence de la distance $d$ sur le nombre d'itérations $k$ , pour atteindre la convergence et sur les estimations d'erreur $u_{err}$ , $u'_{err}$ , $v_{err}$ et $v'_{err}$ pour des <u>données bruitées</u> : <b>Exemple 1</b> avec $\delta = 3\%$ telles que $ \Gamma_d  = \frac{1}{2} \Gamma $ , $N = 100$ , $M = 10$ et $c = 10^{-2}$ . . . . .	31
1.8	Influence du nombre des points sources $M$ sur le nombre d'itérations $k$ , pour atteindre la convergence et sur les estimations d'erreur $u_{err}$ , $u'_{err}$ , $v_{err}$ et $v'_{err}$ pour des <u>données bruitées</u> : <b>Exemple 1</b> avec $\delta = 3\%$ , telles que $ \Gamma_d  = \frac{1}{2} \Gamma $ , $N = 100$ , $d = 10$ et $c = 10^{-2}$ . . . . .	31
1.9	Évolutions des estimations d'erreur et des itérations d'arrêt $k_{opt}$ du critère d'arrêt lié au terme $J_\Gamma$ pour différentes valeurs de $c$ avec <u>données compatibles</u> et pour chaque sous-problème du <b>problème factorisé</b> . . . . .	43
1.10	Évolution des estimations d'erreurs et des itérations d'arrêt $k_{opt}$ pour le critère d'arrêt lié au terme $J_{\Gamma_d}$ pour différentes valeurs de $c$ avec des <u>données bruitées</u> à $\delta = 3\%$ et pour chaque sous-problème du <b>problème factorisé</b> . . . . .	45
1.11	Évolution des estimations d'erreur et de l'itération d'arrêt $k_{opt}$ du critère d'arrêt lié au terme $J_\Gamma$ du <b>problème biharmonique complet</b> pour différentes valeurs de $c$ avec des <u>données compatibles</u> . . . . .	48

1.12	Évolution des estimations d'erreur et de l'itération d'arrêt $k_{\text{opt}}$ du critère d'arrêt lié au terme $J_{\Gamma}$ du <b>problème biharmonique complet</b> pour différentes valeurs de $c$ avec des <u>données bruitées</u> à $\delta = 3\%$ . . . . .	48
1.13	Évolution des estimations d'erreur pour le <b>problème factorisé</b> pour différentes valeurs de $c$ avec des données bruitées à $\delta = 3\%$ (sans appliquer de critère d'arrêt). . . . .	51
1.14	Évolution des estimations d'erreur pour le <b>problème biharmonique complet</b> pour différentes valeurs de $c$ avec des données bruitées à $\delta = 3\%$ (sans appliquer de critère d'arrêt). . . . .	51
3.1	Évolution des normes d'erreur et des résidus associés aux contraintes égalités, pour différents niveaux de bruit $\delta = 0\%, 3\%, 5\%, 10\%$ . . . . .	108

# Notations et abréviations

$\Omega$	domaine borné de $\mathbb{R}^2$
$\Gamma$	frontière du domaine
$\Gamma_d$	partie de la frontière où les conditions aux limites sont fournies
$\Gamma_i$	partie de la frontière où les conditions aux limites sont inconnues
$\underline{n}$	vecteur unitaire normal à la frontière orienté vers l'extérieur
$u_{,n}$	dérivée normale de $u$
$H(\Gamma)$	espace de traces compatibles
$H(\Gamma_d)$	espace de données compatibles
$\mathbf{U}$	quadruplet ou couple de traces compatibles
$\mathbf{U}_e$	solution du problème de Cauchy
$\mathbf{U}^k$	élément optimal à l'itération $k$ de l'algorithme à régularisation évanescence
$c$	paramètre de régularisation
$J_c$	fonctionnelle de régularisation évanescence
$J_\Gamma$	terme de régularisation
$J_{\Gamma_d}$	terme de relaxation des données
$C_{J_\Gamma}$	critère d'arrêt lié au terme $J_\Gamma$
$C_{J_c}$	critère d'arrêt lié au terme $J_c$
$C_{sp}$	critère d'arrêt lié au terme $sp$
$C_{S_c}$	critère d'arrêt lié au terme $S_c$
$\mathcal{H}^h(\Gamma)$	espace de caractérisation des solutions en dimension finie
$\mathbf{U}_h$	approximation en dimension finie de $\mathbf{U}$
$\mathbf{U}_h^e$	solution du problème de Cauchy discret
$\mathbf{y}^j$	coordonnées des points sources
$\Phi_d$	données compatibles
$\tilde{\Phi}_d$	données bruitées
$\Phi_{d_h}$	approximation de $\Phi_d$
$d$	distance entre les points sources et la frontière du domaine
$M$	nombre de points sources
$u_{err}^k$	erreur commise sur la solution $u$ à l'itération $k$
$u'_{err,k}$	erreur commise sur la dérivée normale $u_{,n}$ à l'itération $k$
$\mathcal{N}_i$	fonctions d'interpolation de l'espace $L^2(\bar{\Omega})$
QUA8	éléments quadrangulaires à 8 nœuds
$\mathcal{H}_v(\Gamma)$	espace des solutions de l'équation Laplace
$\mathcal{H}_u(\Gamma, v)$	espace des solutions de l'équation de Poisson avec le second membre $v$
$N_\Gamma$	nombre de nœuds sur $\Gamma$
$N_{\Gamma_d}$	nombre de nœuds sur $\Gamma_d$
$u^{an}$	solution analytique
$\delta$	niveau de bruit

$\rho$	nombre pseudo-aléatoire de la distribution uniforme standard dans $[-1, 1]$
$Q_{u_{err}}$	pente associée au tracé logarithmique de la norme d'erreur $u_{err}$
$w$	déplacement vertical de la plaque (la flèche)
$\theta_x$	rotation suivant l'axe $o\vec{y}$
$\theta_y$	rotation suivant l'axe $o\vec{x}$
$\theta_{xh}$	rotation approchée de $\theta_x$
$\theta_{yh}$	rotation approchée de $\theta_y$
$\mathbf{L}$	$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$
$\nabla$	$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}^t$
$D$	module de rigidité à la flexion de la plaque
$E$	module d'élasticité
$\nu$	coefficient de Poisson (= 0.3)
$h$	épaisseur de la plaque ou pas du maillage
$q$	chargement réparti perpendiculairement à la surface de la plaque
$\gamma_{xz}$	cisaillement dans le plan $o\vec{x}\vec{z}$
$\gamma_{yz}$	cisaillement dans le plan $o\vec{y}\vec{z}$
$\gamma_{xy}$	cisaillement dans le plan $o\vec{x}\vec{y}$
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	vecteur représentatif des déformations non nulles
$\underline{\underline{\sigma}}$	vecteur représentatif des contraintes
$\underline{\underline{\underline{\sigma}}}$	tenseur des contraintes
$\underline{\underline{Q}}_x$	effort tranchant suivant l'axe $o\vec{x}$
$\underline{\underline{Q}}_y$	effort tranchant suivant l'axe $o\vec{y}$
$\mathcal{M}_n$	moment de flexion
$\mathcal{V}_n$	effort tranchant
$\mathcal{P}_q$	espace des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $q$
<b>MFS</b>	<b>Method of Fundamental Solutions (Méthode des Solutions Fondamentales)</b>
<b>MEF</b>	<b>Méthode des Éléments Finis</b>
<b>BEM</b>	<b>Boundary Element Method (Méthode des Éléments de Frontière)</b>
<b>PDE</b>	<b>Partial Differential Equations (Équations aux Dérivées Partielles)</b>
<b>K-L</b>	<b>Kirchhoff-Love</b>
<b>DK</b>	<b>Discrete Kirchhoff</b>
<b>DKT</b>	<b>Discrete Kirchhoff Triangle</b>
<b>DKQ</b>	<b>Discrete Kirchhoff Quadrilateral</b>

# Introduction générale

Depuis leur apparition, les équations différentielles décrivent la plupart des phénomènes physiques de notre univers. Elles ont été étudiées et appliquées avec un énorme succès et trouvent aujourd'hui une grande productivité en théorie mathématique et en applications scientifiques. Mais leur puissance ne se limite pas aux phénomènes naturels (physiques, biologiques, chimiques, etc), elles sont aussi fondamentales pour l'étude et la construction des systèmes mécaniques (ingénierie) ainsi que pour l'étude et la prédiction du comportement social de notre monde.

Les équations différentielles sont souvent associées aux problèmes aux limites qui sont définis en imposant des conditions aux limites pour la solution sur (une partie de) la frontière du domaine de définition. Le développement de modèles récents et réalistes présente un défi mathématique de plus en plus important. Au cœur de ce défi mathématique se trouvent des idées fondamentales.

L'une des idées fondamentales de la physique est le principe de causalité. Nous sommes souvent intéressés par le calcul de ce qui devrait être observé pour un modèle particulier, par exemple le calcul de propagation d'ondes ou la prédiction de la population dans le futur, en se basant sur une loi de comportement, des conditions aux limites et/ou initiales données. Cette conceptualisation du raisonnement est une description mathématique fondamentale des phénomènes scientifiques, appelée modélisation d'un problème direct.

Une autre vision de la causalité est la relation inverse, conséquence-cause, c'est-à-dire qu'on tente de déterminer les causes (conditions aux limites et/ou initiales, loi de comportement, équation d'équilibre, etc) à partir des observations expérimentales de ses effets à d'autres endroits ou à d'autres instants. Par exemple, le problème de détermination d'un paramètre physique à partir de champs potentiels, comme des mesures gravimétriques pour interpréter une anomalie dans un modèle géologique. Ce genre de situation est appelé problème inverse.

Les problèmes inverses trouvent souvent application en ingénierie. On les retrouve en contrôle non destructif pour le calcul de la fatigue des structures, où des tests directs sont impossibles, en contrôle thermique pour l'estimation d'un flux de chaleur sur une frontière inconnue à partir de mesures de température prises dans un endroit accessible, en imagerie médicale pour la détection des tumeurs ou des lésions inaccessibles.

Cependant, contrairement aux problèmes directs, ces problèmes souffrent fréquemment d'une irrégularité provenant de la non-satisfaction de certaines propriétés mathématiques fondamentales telles que l'existence (ou le domaine d'existence) et l'unicité de la solution. De plus, la stabilité de celle-ci vis-à-vis des données perturbées n'est pas toujours garantie. La classification de ce type de problèmes a été réalisée par J. Hadamard dans son célèbre livre "*Lectures on Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations*" ([40] 1923), dans lequel il caractérise qu'en l'absence d'au moins une

de ces trois conditions (l'existence, l'unicité de la solution et la dépendance continue des données) le problème devient un problème mal posé (au sens d'Hadamard). C'est à ce stade qu'une signification mathématique a été attribuée aux problèmes inverses.

D'un point de vue mathématique, à titre d'exemple, la relation entre des inconnues  $x$  et des mesures  $b$  peut éventuellement être réduite à la résolution d'un système d'équations linéaires donné par  $Ax = b$ . Lorsque la matrice  $A$  est proche d'être classée comme singulière, ce qui est généralement le cas avec les problèmes inverses, de faibles perturbations telles que des erreurs de mesure sur  $b$  peuvent entraîner un écart important sur la solution  $x$ . La solution est alors dite instable et le problème d'estimation est mal conditionné. Un autre problème se pose lorsque le nombre des inconnues dépasse le nombre de mesures, de sorte que le système est sous-déterminé et qu'il existe une infinité de solutions.

La particularité de ces problèmes réside donc dans la violation d'au moins une des trois conditions d'Hadamard. Cela induit un changement de raisonnement dans la résolution par rapport au raisonnement habituel utilisé pour les problèmes directs. C'est pourquoi des méthodes dites méthodes inverses sont introduites. La plupart d'entre elles reposent sur une reformulation du problème en un problème approché bien posé et/ou sur l'utilisation de techniques de régularisation et de stabilisation, impliquant une fonctionnelle exploitant des données.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à un problème inverse en théorie des plaques minces. En effet, ces structures interviennent dans divers domaines, que ce soit en génie civil, en mécanique ou en aéronautique, il serait alors intéressant de traiter les problèmes inverses qu'elles peuvent rencontrer. On peut imaginer l'exemple d'un problème d'identification de formes optimales de plaques élastiques ayant un bord inconnu ou l'identification d'efforts inaccessibles sur certaines parties du bord. Nous nous focalisons sur le modèle de plaques minces en flexion dont le déplacement vertical, selon les hypothèses de *Kirchhoff-Love* [50, 51], est régi par l'opérateur biharmonique et la résolution de cette équation nécessite la connaissance de conditions aux bords (bords libres, simplement appuyés ou encastés). Ces conditions sont exprimées en fonction du déplacement, de la rotation, de l'effort ou du moment résultants. Cependant, il existe des situations pratiques qui ne permettent pas d'accéder aux conditions aux limites sur une partie de la frontière de la plaque. Cela conduit alors à exprimer le problème sous la forme d'un problème inverse de type Cauchy avec des conditions aux limites qui sont absentes sur une partie de la frontière et surabondantes sur la partie restante. Un problème pour lequel l'existence et l'unicité de la solution pourront être justifiées, mais pour lequel la stabilité de la solution n'est pas garantie.

Dans le premier chapitre, nous proposons d'appliquer une méthode inverse, appelée méthode de régularisation évanescence, à un problème abstrait gouverné par la même équation aux différentielles partielles que le problème des plaques minces. Il s'agit du problème de Cauchy associé à l'équation biharmonique avec des conditions aux limites mathématiques portant sur les traces de la solution  $u$ , de sa dérivée

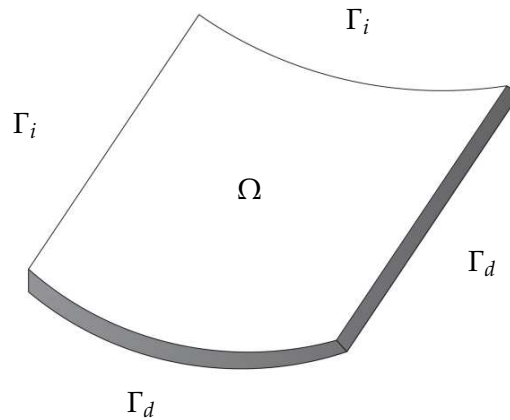


FIGURE 1 – Représentation d’une plaque  $\Omega$  rectangulaire en flexion. Sa frontière est composée de deux parties,  $\Gamma_d$  la partie accessible à la mesure et  $\Gamma_i$  la partie inaccessible.

normale  $u_{,n}$ , de son laplacien  $v$  ainsi que de la dérivée normale du laplacien  $v_{,n}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 u = \Delta v = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = \varphi_d \quad \text{sur } \Gamma_d \\ u_{,n} = \psi_d \quad \text{sur } \Gamma_d \\ v = \mu_d \quad \text{sur } \Gamma_d \\ v_{,n} = \phi_d \quad \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right.$$

Ces conditions aux limites sont en quelque sorte représentatives des conditions aux limites réelles en mécanique (le déplacement, la rotation, les moments et les efforts tranchants). En effet, il est souvent intéressant dans le domaine scientifique de considérer un problème auxiliaire afin de construire un modèle exact et réaliste. Ce chapitre est composé de trois parties. Une partie qui introduit la formulation continue de la méthode de régularisation évanescence au problème de Cauchy associé à l’équation biharmonique et deux parties numériques dans lesquelles la méthode des solutions fondamentales et la méthode des éléments finis sont utilisées pour caractériser les solutions en dimension finie. Différents types de domaines, réguliers et non réguliers, seront aussi traités. Nous proposons également un nouveau critère d’arrêt pour l’algorithme à régularisation évanescence et le comparons à ceux précédemment utilisés.

Dans le deuxième chapitre, nous abordons le problème des plaques minces avec des conditions aux limites mécaniques. Nous proposons, après avoir établi l’équation d’équilibre et les conditions aux limites associées, une nouvelle stratégie de résolution utilisant la technique de régularisation évanescence combinée avec une méthode des éléments finis utilisant des éléments de type plaques de *Kirchhoff*.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à la résolution par la méthode de régularisation évanescence du problème de Cauchy associé à l’équation de Laplace en utilisant un exemple d’élément fini de plaques de *Kirchhoff*. Les résultats de cette nouvelle stratégie dans le cas d’un domaine carré sont ensuite comparés aux résultats proposés au cours des deux premiers chapitres de cette thèse ainsi qu’à ceux de travaux antérieurs.





## Chapitre 1

# Méthodes de régularisation évanescence pour le problème de Cauchy associé à l'équation biharmonique

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>1.2</b>	<b>Formulation continue de la méthode de régularisation évanescence</b>	<b>8</b>
1.2.1	Choix des espaces fonctionnels . . . . .	8
1.2.2	Convergence de la formulation continue . . . . .	10
<b>1.3</b>	<b>Formulation de l'algorithme itératif en dimension finie</b> . . . . .	<b>11</b>
1.3.1	Formulation d'un problème de Cauchy "discret" . . . . .	11
1.3.2	Convergence de l'algorithme itératif en dimension finie . . . . .	12
<b>1.4</b>	<b>Critères d'arrêt de l'algorithme itératif</b> . . . . .	<b>14</b>
1.4.1	Précédents critères d'arrêt utilisés . . . . .	14
1.4.2	Proposition d'un nouveau critère d'arrêt . . . . .	15
<b>1.5</b>	<b>Discrétisation par la méthode des solutions fondamentales</b> . . . . .	<b>16</b>
1.5.1	Approximation de l'espace des solutions de l'équation biharmonique par la MFS . . . . .	17
1.5.2	Algorithme itératif discret obtenu avec la MFS . . . . .	19
1.5.3	Comparaison des critères d'arrêts du point de vue numérique	20
1.5.3.1	Influence du paramètre $c$ sur les critères d'arrêt . . . . .	21
1.5.3.2	Influence de la portion accessible de la frontière sur les critères d'arrêt . . . . .	29
1.5.4	Influence des paramètres de la MFS sur la reconstruction de la solution . . . . .	30
1.5.5	Reconstruction dans le cas d'un domaine carré . . . . .	32
1.5.6	Conclusion sur la discrétisation par la méthode des solutions fondamentales . . . . .	33
<b>1.6</b>	<b>Discrétisation par la méthode des éléments finis</b> . . . . .	<b>34</b>
1.6.1	Méthode de régularisation évanescence pour le problème de Cauchy factorisé . . . . .	34
1.6.2	Caractérisation des espaces d'approximation . . . . .	35

1.6.3	L'algorithme de régularisation évanescence discret pour le problème factorisé . . . . .	38
1.6.4	L'algorithme de régularisation évanescence discret pour le problème biharmonique . . . . .	39
1.6.5	Résultats numériques . . . . .	40
1.6.5.1	Domaine de type couronne . . . . .	40
1.6.5.1.1	Résultats numériques pour le problème factorisé . . . . .	41
1.6.5.1.2	Résultats numériques pour le problème biharmonique complet . . . . .	48
1.6.5.2	Domaine de type disque . . . . .	51
1.6.5.3	Domaine carré . . . . .	54
1.6.6	Conclusion sur la discrétisation par la méthode des éléments finis . . . . .	58
1.7	Conclusion générale du chapitre . . . . .	59

---

## 1.1 Introduction

L'opérateur biharmonique est un modèle mathématique bien connu dans le domaine de la physique et de l'ingénierie. On le retrouve, par exemple, en mécanique des fluides pour l'étude des écoulements de type Stokes, où l'opérateur régit l'écoulement bidimensionnel des fluides visqueux pour de faibles nombres de Reynolds [45], mais aussi en mécanique des solides élastiques en théorie des plaques minces de Kirchhoff [51, 78, 54]. L'équation biharmonique régit alors le déplacement vertical d'une plaque mince en flexion lorsque celle-ci est soumise à un chargement perpendiculaire.

De nombreuses applications pratiques impliquant la réponse de corps élastiques donnent lieu à des problèmes inverses de complétion de données. En effet, l'absence d'information sur une partie de la frontière du domaine conduit à une certaine irrégularité dans l'énoncé du problème. Cela a conduit de nombreux chercheurs à représenter certains problèmes sous la forme de problèmes de Cauchy où les conditions aux limites sont incomplètes. Nous considérons dans ce chapitre l'exemple du problème de Cauchy associé à l'opérateur biharmonique, pour lequel sur une partie de la frontière les conditions aux limites sont surabondantes en prescrivant la solution, la dérivée normale, le laplacien et la dérivée normale du laplacien, alors que sur la partie complémentaire de la frontière aucune condition aux limites n'est disponible :

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \Delta v = 0, & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ u_{,n} = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ v = \mu_d & \text{sur } \Gamma_d \\ v_{,n} = \phi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{cases} \quad (1.1)$$

La particularité de ce problème réside dans la violation des conditions d'Hadamard pour les problèmes bien posés. Nous verrons dans ce chapitre que la condition de stabilité est la condition la plus préoccupante puisque l'unicité peut être démontrée en faisant appel au théorème de Holmgren (1901, [43]). Quant à l'existence, il est possible de supposer des données compatibles (qui coïncident avec les traces et dérivées d'une

solution du problème). L'instabilité de la solution peut alors survenir des petites perturbations des données. Par conséquent, ce problème inverse de type Cauchy ne peut pas être résolu en utilisant les méthodes habituelles utilisées pour la résolution des problèmes directs car il est nécessaire d'utiliser des techniques de régularisation afin d'obtenir une solution stable par rapport aux données.

Résoudre le problème inverse biharmonique de type Cauchy de manière stable est un objectif qui a intéressé de nombreux chercheurs dans le domaine des problèmes inverses. *Cannon et Cecchi* [17] ont résolu numériquement un problème similaire où aucune information n'est donnée sur une portion inaccessible de la frontière en utilisant la méthode des moindres carrés et la méthode de programmation linéaire, tandis que *A.Zeb et al.* [82] et *D.Lesnic et al.* [58] ont résolu le problème inverse biharmonique dans le cas d'écoulements de Stokes qui régissent le mouvement de fluides visqueux à faible vitesse et incompressibles. Il consiste à déterminer des conditions aux limites sous-spécifiées en terme de vitesse normale du fluide en utilisant des mesures additionnelles de pression sur une autre partie de la frontière. *M.A. Atakhodzhaev* [5] a utilisé des mesures intérieures à l'intérieur du domaine pour déterminer des conditions aux limites non spécifiées. L'unicité de la solution a été prouvé, mais aucun résultat numérique n'est montré, cependant le caractère mal posé du problème persiste car la solution n'est pas stable par rapport à de petites perturbations des données d'entrée. *D. Lesnic et al.* [56] ont introduit une méthode numérique stable, pour obtenir cette solution où ils ont utilisé la régularisation de Tikhonov combiné avec la méthode des éléments de frontière (BEM). *Marin et al.* [62] ont traité ce même problème et ont appliqué la méthode des solutions fondamentales (MFS) combinée avec la méthode de régularisation de Tikhonov pour résoudre le système mal conditionné résultant.

Initialement introduite par *A. N. Tikhonov* [77], la technique de régularisation de Tikhonov vise à restituer des propriétés mathématiques aux problèmes mal posés. Cela se fait en générant un problème approché bien posé et en ajoutant un terme de contrôle pondéré par un paramètre de régularisation. Cette méthode a été largement utilisée pour établir la stabilité de divers problèmes de Cauchy inverses elliptiques. Cependant, la solution ainsi obtenue reste dépendante d'un paramètre de régularisation. Parallèlement à la technique de régularisation de Tikhonov, plusieurs autres techniques sont introduites pour résoudre les problèmes inverses liés aux PDE elliptiques. La méthode basée sur la minimisation d'une fonctionnelle énergétique, proposée par *Andrieux et al.* [2, 3], a été utilisée par exemple, pour résoudre des problèmes de Cauchy en champ thermique stationnaire [2, 6] et en élasticité [6, 4]. Elle consiste à séparer le problème de Cauchy mal posé en deux problèmes bien posés puis à minimiser l'écart entre ces deux champs solutions. Néanmoins, elle a dû être combinée avec la technique de Tikhonov pour surmonter l'instabilité par rapport aux données bruitées [70]. Les techniques de contrôle optimal [59] et les méthodes de quasi-réversibilité [11, 55] sont également des exemples de méthodes utilisées pour résoudre les problèmes inverses elliptiques de complétion de données.

Une version itérative de la régularisation de Tikhonov, connue sous le nom de méthode de régularisation évanescence, a été introduite dans [26, 24] pour surmonter la dépendance du paramètre de régularisation tout en résolvant le problème de manière stable. Elle consiste à trouver parmi toutes les solutions de l'équation d'équilibre, celle qui s'approche au mieux des données surabondantes sur la partie accessible de la

frontière. Cette méthode réduit la résolution du problème de Cauchy en une suite de problèmes d'optimisation bien posés. Chaque fonctionnelle à optimiser est composée de deux termes : un terme de relaxation, qui représente l'écart entre l'élément optimal et les données aux limites surabondantes et un terme de régularisation, qui agit sur toute la frontière et contrôle la distance entre le nouvel élément optimal et celui obtenu à l'itération précédente.

L'implémentation numérique de ces techniques de régularisation au problème inverse biharmonique a été principalement réalisée par les méthodes des éléments de frontière (BEM) [82, 58], des éléments finis (FEM) [33] et la méthode des solutions fondamentales (MFS) [62]. L'utilisation de la BEM permet de réduire la résolution du problème dans l'ensemble du domaine à la détermination d'un vecteur inconnu constitué uniquement des conditions aux limites. D'autre part, la MFS permet d'exprimer la solution à l'aide d'une combinaison linéaire de solutions fondamentales de l'opérateur et la résolution se ramène à la détermination des coefficients. Cependant, on constate lors de l'utilisation de la FEM dans [33] le recours à une factorisation du problème de Cauchy en deux problèmes de Cauchy associés respectivement à une équation de Laplace et à une équation de Poisson et ensuite de les résoudre séparément à l'aide de la méthode de régularisation évanescence.

Nous proposons dans ce chapitre d'appliquer la méthode de régularisation évanescence à la résolution du problème inverse biharmonique et d'utiliser la méthode des solutions fondamentales ou la méthode des éléments finis dans la caractérisation des solutions en dimension finie. Une nouvelle alternative de résolution en un seul système est proposée lors de la discrétisation par éléments finis et est comparée à celle utilisée dans [33] où le problème est transformé en une cascade de deux problèmes. De plus, nous proposons un nouveau critère d'arrêt de la méthode de régularisation évanescence que nous comparons aux critères précédemment utilisés [28, 30, 14]. Nous montrons à la suite la stabilité de la solution obtenue vis-à-vis du bruit présent sur les données en reconstruisant les conditions aux limites sur la partie inaccessible de la frontière.

## 1.2 Formulation continue de la méthode de régularisation évanescence

### 1.2.1 Choix des espaces fonctionnels

Dans l'application de la méthode de régularisation évanescence au problème de Cauchy associé à l'équation biharmonique, il est important de bien choisir les espaces fonctionnels dans lesquels la solution sera recherchée pour assurer l'obtention de la convergence de la méthode en dimension infinie. On considère l'espace des solutions du bilaplacien :

$$\mathcal{H}_0^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) \quad / \quad \Delta^2 u = 0\}.$$

C'est un sous-espace fermé de

$$\mathcal{H}^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) \quad / \quad \Delta^2 u \in L^2(\Omega)\}$$

qui est également un espace de Hilbert pour la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^2(\Omega)}$  définie par

$$\|u\|_{\mathcal{H}^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{H^2}^2 + \|\Delta^2 u\|_{L^2}^2.$$

On définit l'espace des opérateurs traces :

$$X(\Gamma) = H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-3/2}(\Gamma)$$

avec le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X(\Gamma)}$  définie pour tout  $\Phi = (\varphi, \psi, \mu, \phi)$  et  $\Phi' = (\varphi', \psi', \mu', \phi')$  dans  $X(\Gamma)$  par :

$$\langle \Phi, \Phi' \rangle_{X(\Gamma)} = \langle \varphi, \varphi' \rangle_{3/2, \Gamma} + \langle \psi, \psi' \rangle_{1/2, \Gamma} + \langle \mu, \mu' \rangle_{-1/2, \Gamma} + \langle \phi, \phi' \rangle_{-3/2, \Gamma},$$

tel que sa norme associée est notée par  $\|\cdot\|_{X(\Gamma)}$ . On peut ainsi définir l'espace  $H(\Gamma)$  des quadruplets de traces compatibles (c'est-à-dire l'espace des traces qui correspondent à une solution du problème) :

$$H(\Gamma) = \{ \Phi = (\varphi, \psi, \mu, \phi) \in X(\Gamma) \text{ tel qu'il existe } u \in \mathcal{H}_0^2(\Omega) \\ \text{et } (u, u_n, v, v_n) = (\varphi, \psi, \mu, \phi) \text{ avec } v = \Delta u \text{ dans } \Omega \}.$$

Il est ainsi immédiat que  $H(\Gamma)$  est un espace de Hilbert comme sous-espace fermé de  $X(\Gamma)$ . Notons par  $\|\cdot\|_{H(\Gamma)}$  la norme induite par celle de l'espace  $X(\Gamma)$  sur l'espace  $H(\Gamma)$ . De plus, on note par  $X(\Gamma_d)$  et  $H(\Gamma_d)$  les restrictions des espaces  $X(\Gamma)$  et  $H(\Gamma)$  respectivement sur la partie du bord  $\Gamma_d$ , ayant comme norme  $\|\cdot\|_{X(\Gamma_d)}$  et  $\|\cdot\|_{H(\Gamma_d)}$ , les normes induites par celles des espaces  $X(\Gamma)$  et  $H(\Gamma)$  sur la partie  $\Gamma_d$  respectivement.

La définition de ces espaces fonctionnels permet de formuler un problème équivalent au problème de Cauchy (1.1) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{U} = (u|_{\Gamma}, u_n|_{\Gamma}, v|_{\Gamma}, v_n|_{\Gamma}) \in H(\Gamma) \\ \mathbf{U} = \Phi_d \text{ sur } \Gamma_d \end{cases} \quad (1.2)$$

avec  $\Phi_d = (\varphi_d, \psi_d, \mu_d, \phi_d)$ . Même si la solution de ce problème existe, elle reste instable par rapport aux petites perturbations dans les données puisque la solution n'en dépend pas continûment. Il est donc nécessaire d'appliquer une technique de régularisation afin de redonner un caractère stable à la solution. Pour cela, nous appliquons la méthode de régularisation évanescence, qui permet de transformer la résolution du problème (1.2) en un algorithme itératif :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{U}^{k+1} \in H(\Gamma) \text{ tel que} \\ J_c^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}) \leq J_c^{k+1}(\mathbf{V}), \quad \forall \mathbf{V} \in H(\Gamma) \\ \text{avec } J_c^{k+1}(\mathbf{V}) = \|\mathbf{V}|_{\Gamma_d} - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 + c\|\mathbf{V} - \mathbf{U}^k\|_{H(\Gamma)}^2 \end{cases} \quad (1.3)$$

où à chaque itération, il existe un unique élément optimal  $\mathbf{U}^{k+1}$  caractérisé par :

$$\langle \mathbf{U}|_{\Gamma_d}^{k+1} - \Phi_d, \mathbf{V}|_{\Gamma_d} \rangle_{\Gamma_d} + c\langle \mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma} = 0 \quad \forall \mathbf{V} \in H(\Gamma). \quad (1.4)$$

Ce résultat est immédiat puisque la fonctionnelle  $J_c^{k+1}$  est continue, convexe et coercive admettant ainsi une solution unique caractérisée par l'équation d'optimalité (1.4).

### 1.2.2 Convergence de la formulation continue

Il est prouvé que la suite composée des éléments optimaux obtenus à chaque itération de l'algorithme (1.3) converge vers la solution compatible du problème de Cauchy (1.2). Ce résultat est inspiré des travaux [28, 26, 33, 14] et détaillé par le théorème suivant :

**Théorème 1.2.1.** *Si  $\Phi_d$  est un quadruplet de données compatibles (i.e. un élément de  $H(\Gamma_d)$ ), associé à la solution compatible  $\mathbf{U}_e$  du problème de Cauchy (1.1), alors la suite  $(\mathbf{U}^k)_{k \in \mathbb{N}}$  définie par l'algorithme itératif (1.3) est telle que :*

$$\mathbf{U}^k \rightarrow \Phi_d \quad \text{dans } H(\Gamma_d) \quad \text{au sens fort} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{U}^k \rightharpoonup \mathbf{U}_e \quad \text{dans } H(\Gamma) \quad \text{au sens faible} \quad (1.6)$$

La preuve de ce théorème est fortement basée sur le lemme suivant :

**Lemme 1.2.2.** *Pour tout entier naturel  $n$ , la suite  $(\mathbf{U}^k)_{k \in \mathbb{N}}$  constituée des éléments optimaux vérifie :*

$$\|\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}_e\|_{H(\Gamma)}^2 + \sum_{k=0}^n \|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k\|_{H(\Gamma)}^2 + \frac{2}{c} \sum_{k=0}^n \|\mathbf{U}^{k+1} - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 = \|\mathbf{U}^0 - \mathbf{U}_e\|_{H(\Gamma)}^2$$

où  $\mathbf{U}_e$  est la solution compatible du problème de Cauchy (1.1).

La preuve du lemme est similaire à celle présentée dans [26]. Pour la convergence au sens fort de la suite  $(\mathbf{U}^k)_{k \in \mathbb{N}}$  vers  $\Phi_d$ , il suffit de considérer le fait que la série  $\sum_{k=0}^n \|\mathbf{U}^{k+1} - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2$  est bornée d'après l'égalité donnée par le lemme 1.2.2. Elle a donc son terme général  $\|\mathbf{U}^k - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2$  qui tend vers 0, concluant ainsi au résultat :

$$\mathbf{U}^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \Phi_d \text{ sur } \Gamma_d.$$

Pour la convergence au sens faible de la suite  $(\mathbf{U}^k)_{k \in \mathbb{N}}$  vers  $\mathbf{U}_e$  dans  $H(\Gamma)$ , on montrera d'abord l'existence d'une sous-suite de  $(\mathbf{U}^k)_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge faiblement vers  $\mathbf{U}_e$ . Comme  $(\|\mathbf{U}^k - \mathbf{U}_e\|_{H(\Gamma)}^2)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite bornée d'après le dernier lemme, la suite  $(\mathbf{U}^k)_{k \in \mathbb{N}}$  est donc également bornée. Elle admet ainsi une sous-suite  $(\mathbf{U}^{n_\mu})_{\mu \in \mathbb{N}}$  faiblement convergente, i.e.

$$\exists \mathbf{U}_L \in H(\Gamma), \quad \mathbf{U}^{n_\mu} \rightharpoonup_{\mu \rightarrow +\infty} \mathbf{U}_L.$$

Or, d'après le premier point du théorème, on a :

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \mathbf{U}^{n_\mu} = \Phi_d \text{ sur } \Gamma_d.$$

Ce qui implique par unicité de la limite sur  $\Gamma_d$  que :

$$\mathbf{U}_{L|\Gamma_d} = \Phi_d.$$

Enfin, le théorème de Holmgren sur l'unicité du prolongement analytique [43] donne :

$$\mathbf{U}_L = \mathbf{U}_e \text{ sur } \Gamma.$$

Il reste maintenant à montrer la convergence faible de toute la suite  $(\mathbf{U}^k)_{k \in \mathbb{N}}$  vers  $\mathbf{U}_e$  sur  $\Gamma$ . Cela est montré par l'absurde. Nous supposons le contraire, i.e.

$$\exists \mathbf{V} \in H(\Gamma), \exists \varepsilon > 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n > N \quad \text{tel que} \quad |\langle \mathbf{U}^n - \mathbf{U}_e, \mathbf{V} \rangle_\Gamma| > \varepsilon.$$

En particulier, il existe une sous-suite  $(\mathbf{U}^{n_p})_{p \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad |\langle \mathbf{U}^{n_p} - \mathbf{U}_e, \mathbf{V} \rangle_\Gamma| \geq \varepsilon. \quad (1.7)$$

D'autre part,  $(\mathbf{U}^{n_p})_{p \in \mathbb{N}}$  est bornée puisqu'elle est extraite de la suite bornée  $(\mathbf{U}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Elle admet donc une sous-suite qui converge faiblement sur  $\Gamma$ . Ainsi, cette limite ne peut être que  $\mathbf{U}_e$  d'après le premier point, ce qui mène à une contradiction avec (1.7) et à la fin de la démonstration du théorème.

Il est à noter qu'il n'y a pas d'équivalent au résultat du prolongement analytique (théorème de Holmgren) en dimension finie. Ce qui pourra soulever des questions sur l'établissement de la convergence de l'algorithme dans le cas discret.

## 1.3 Formulation de l'algorithme itératif en dimension finie

### 1.3.1 Formulation d'un problème de Cauchy "discret"

L'utilisation de méthodes numériques permet de résoudre le problème (1.2) de manière approchée dans un espace d'approximation. Notons  $\mathcal{H}^h(\Gamma)$  cet espace de caractérisation des solutions en dimension finie. De plus, posons  $H_h^{3/2}(\Gamma)$ ,  $H_h^{1/2}(\Gamma)$ ,  $H_h^{-1/2}(\Gamma)$  et  $H_h^{-3/2}(\Gamma)$  respectivement les espaces d'approximation des espaces  $H^{3/2}(\Gamma)$ ,  $H^{1/2}(\Gamma)$ ,  $H^{-1/2}(\Gamma)$  et  $H^{-3/2}(\Gamma)$ . On peut ainsi définir l'espace  $\mathcal{H}^h(\Gamma)$  par :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^h(\Gamma) = \left\{ \Phi_h = (\varphi_h, \psi_h, \mu_h, \phi_h) \in H_h^{3/2}(\Gamma) \times H_h^{1/2}(\Gamma) \times H_h^{-1/2}(\Gamma) \times H_h^{-3/2}(\Gamma) \right. \\ \left. \text{tel qu'il existe } u_h \in \mathcal{H}_{h_0}^2(\Omega) \text{ et } (u_h, u_{h,n}, v_h, v_{h,n}) = (\varphi_h, \psi_h, \mu_h, \phi_h) \right. \\ \left. \text{avec } v_h = \Delta u_h \text{ dans } \Omega \right\}, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{H}_{h_0}^2(\Omega)$  est l'espace d'approximation de l'espace  $\mathcal{H}_0^2(\Omega)$ . Notons de plus  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$  le produit scalaire sur  $\mathcal{H}^h(\Gamma)$  induit par celui de l'espace  $H(\Gamma)$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^h(\Gamma)}$  sa norme associée. Nous donnerons plus tard la forme explicite de ces espaces d'approximation lors de l'utilisation de la méthode des solutions fondamentales ou de la méthode des éléments finis. Nous pouvons alors définir la formulation discrète de l'algorithme (1.3) de la manière suivante :



Soit  $c > 0$  et  $\mathbf{U}_h^0 \in \mathcal{H}^h(\Gamma)$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}_h^{k+1} \in \mathcal{H}^h(\Gamma) \text{ tel que :} \\ J_c^{k+1}(\mathbf{U}_h^{k+1}) \leq J_c^{k+1}(\mathbf{V}_h), \quad \forall \mathbf{V}_h \in \mathcal{H}^h(\Gamma) \\ \text{avec } J_c^{k+1}(\mathbf{V}_h) = \|\mathbf{V}_h|_{\Gamma_d} - \Phi_{d_h}\|_{\mathcal{H}^h(\Gamma_d)}^2 + c\|\mathbf{V}_h - \mathbf{U}_h^k\|_{\mathcal{H}^h(\Gamma)}^2 \text{ pour } \mathbf{V}_h \in \mathcal{H}^h(\Gamma) \end{array} \right. \quad (1.8)$$

où  $\Phi_{d_h}$  est une approximation de la donnée  $\Phi_d$  en dimension finie.

Comme évoqué précédemment, il n'est pas possible d'établir la convergence en dimension finie de manière similaire à la convergence de la formulation continue. En effet, le théorème de Holmgren qui a été utilisé pour établir la convergence de l'algorithme en dimension infinie n'a pas d'équivalent en dimension finie. Il a été instauré dans [28, 26, 33] que cette convergence en dimension finie peut être vue comme les éléments de  $\mathcal{H}^h(\Gamma)$  qui s'accordent au mieux avec les données. Notons  $N$  la dimension de  $\mathcal{H}^h(\Gamma)$  et  $N_d$  le nombre de données. Deux cas possibles peuvent alors se présenter :

- Si  $N_d > N$  : une unique solution au sens des moindres carrés peut être définie.
- Si  $N_d \leq N$  : il y a une infinité de solutions qui sont définies à un élément du noyau de "l'opérateur trace discret" sur  $\Gamma_d$  près :

$$Z_h(\Gamma) = \{\mathbf{U}_h \in \mathcal{H}^h(\Gamma); \quad \mathbf{U}_h|_{\Gamma_d} = 0\},$$

dont on peut définir l'orthogonal de la manière suivante :

$$Z_h^\perp(\Gamma) = \{\mathbf{U}_h \in \mathcal{H}^h(\Gamma); \quad \langle \mathbf{U}_h, \mathbf{V}_h \rangle_\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{V}_h \in Z_h(\Gamma)\}.$$

Le problème de Cauchy discret peut alors s'écrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{U}_h^e \in Z_h^\perp(\Gamma) \text{ tel que} \\ \langle \mathbf{U}_h^e - \Phi_d, \mathbf{V}_h \rangle_{\Gamma_d} = 0, \quad \forall \mathbf{V}_h \in Z_h^\perp(\Gamma) \end{array} \right. \quad (1.9)$$

où  $\mathbf{U}_h^e$  est la solution du problème de Cauchy discret.

### 1.3.2 Convergence de l'algorithme itératif en dimension finie

La convergence de l'algorithme discret (1.8) est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 1.3.1.** *Si  $\mathbf{U}_h^0 = 0$  alors la suite  $(\mathbf{U}_h^k)_{k \in \mathbb{N}}$  constituée des solutions de (1.8) vérifie les propriétés suivantes :*

- $\mathbf{U}_h^k \in Z_h^\perp(\Gamma)$ ,  $\forall k \geq 0$ ,
- la suite  $(\mathbf{U}_h^k)_k$  converge vers la solution  $\mathbf{U}_h^e$  du problème de Cauchy discret (1.9).

La preuve du théorème est très similaire à celle présentée dans [28, 26] pour le problème de Cauchy associé à l'équation de Laplace.

*Démonstration.* L'équation d'optimalité (1.4) caractérisant la solution de l'algorithme itératif à chaque itération donne dans le cas discret :

$$\langle \mathbf{U}_h^{k+1} - \Phi_d, \mathbf{V}_h \rangle_{\Gamma_d} + c \langle \mathbf{U}_h^{k+1} - \mathbf{U}_h^k, \mathbf{V}_h \rangle_\Gamma = 0, \quad \forall \mathbf{V}_h \in \mathcal{H}^h(\Gamma).$$

La décomposition orthogonale de l'espace  $\mathcal{H}^h(\Gamma) = Z_h(\Gamma) \oplus Z_h^\perp(\Gamma)$  permet d'avoir

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_h^k &= \mathbf{z}_h^k + \mathbf{y}_h^k, \quad \forall \mathbf{z}_h^k \in Z_h(\Gamma), \quad \forall \mathbf{y}_h^k \in Z_h^\perp(\Gamma) \text{ et } \forall k \geq 0, \\ \mathbf{V}_h &= \mathbf{z}_h + \mathbf{y}_h, \quad \forall \mathbf{z}_h \in Z_h(\Gamma) \text{ et } \forall \mathbf{y}_h \in Z_h^\perp(\Gamma). \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{z}_h^{k+1} + \mathbf{y}_h^{k+1} - \Phi_d, \mathbf{z}_h + \mathbf{y}_h \rangle_{\Gamma_d} + c \langle \mathbf{z}_h^{k+1} - \mathbf{z}_h^k + \mathbf{y}_h^{k+1} - \mathbf{y}_h^k, \mathbf{z}_h + \mathbf{y}_h \rangle_{\Gamma} = 0, \\ \forall \mathbf{z}_h \in Z_h(\Gamma) \text{ et } \forall \mathbf{y}_h \in Z_h^\perp(\Gamma). \end{aligned}$$

Or,

$$\langle \mathbf{z}_h^{k+1} + \mathbf{y}_h^{k+1} - \Phi_d, \mathbf{z}_h + \mathbf{y}_h \rangle_{\Gamma_d} = \langle \mathbf{y}_h^{k+1} - \Phi_d, \mathbf{y}_h \rangle_{\Gamma_d}, \quad \forall \mathbf{z}_h \in Z_h(\Gamma) \text{ et } \forall \mathbf{y}_h \in Z_h^\perp(\Gamma),$$

car par définition de  $Z_h(\Gamma)$ ,  $\mathbf{z}_h^{k+1}|_{\Gamma_d} = \mathbf{z}_h|_{\Gamma_d} = 0$ .

D'où,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{y}_h^{k+1} - \Phi_d, \mathbf{y}_h \rangle_{\Gamma_d} + c \left( \langle \mathbf{z}_h^{k+1} - \mathbf{z}_h^k, \mathbf{y}_h \rangle_{\Gamma} + \langle \mathbf{y}_h^{k+1} - \mathbf{y}_h^k, \mathbf{z}_h \rangle_{\Gamma} \right) = 0, \\ \forall \mathbf{z}_h \in Z_h(\Gamma) \text{ et } \forall \mathbf{y}_h \in Z_h^\perp(\Gamma). \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\langle \mathbf{y}_h^{k+1} - \Phi_d, \mathbf{y}_h \rangle_{\Gamma_d} + c \langle \mathbf{y}_h^{k+1} - \mathbf{y}_h^k, \mathbf{y}_h \rangle_{\Gamma} = 0, \quad \forall \mathbf{y}_h \in Z_h^\perp(\Gamma)$$

et

$$c \langle \mathbf{z}_h^{k+1} - \mathbf{z}_h^k, \mathbf{z}_h \rangle_{\Gamma} = 0, \quad \forall \mathbf{z}_h \in Z_h(\Gamma).$$

Finalement, on obtient

$$\mathbf{z}_h^{k+1} = \mathbf{z}_h^k, \quad \forall k \geq 0$$

et avec l'initialisation  $\mathbf{U}_h^0 = 0$ , on obtient que

$$\mathbf{z}_h^k = \mathbf{z}_h^0 = 0, \quad \forall k \geq 0$$

et donc  $\mathbf{U}_h^k \in Z_h^\perp(\Gamma)$ ,  $\forall k \geq 0$ .

Concernant le deuxième point du théorème, on utilise, comme dans le cas continu, le fait que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{U}_h^{k+1} - \Phi_d\|_{\mathcal{H}^h(\Gamma_d)}^2 = 0.$$

De plus, si la solution du problème de Cauchy discret vérifie l'hypothèse de compatibilité (i.e.  $\mathbf{U}_h^e = \Phi_{d_h}$  sur  $\Gamma_d$ ), on aura :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{U}_h^{k+1} - \mathbf{U}_h^e\|_{\mathcal{H}^h(\Gamma_d)}^2 = 0.$$

Ensuite, par équivalence des normes en dimension finie, il existe  $\alpha_N > 0$ ,

$$\|\mathbf{U}_h^{k+1} - \mathbf{U}_h^e\|_{\mathcal{H}^h(\Gamma)}^2 \leq \alpha_N \|\mathbf{U}_h^{k+1} - \mathbf{U}_h^e\|_{\mathcal{H}^h(\Gamma_d)}^2.$$

On peut aussi montrer (Cf. [26] ) qu'il existe  $M > 0$  tel que

$$\|\mathbf{U}_h^k - \mathbf{U}_h^e\|_{\mathcal{H}^h(\Gamma)}^2 \leq \left(\frac{c}{c + \alpha_N}\right)^k M, \quad \forall k \geq 0,$$

ce qui montre la contractance de l'algorithme discret et par conséquent sa convergence. □

## 1.4 Critères d'arrêt de l'algorithme itératif

Comme cela a été montré dans la section précédente, la suite des éléments optimaux  $\{\mathbf{U}^k\}_{k \geq 0}$  converge vers la solution exacte du problème de Cauchy lorsque les données sont compatibles. Il nous est donc indispensable de définir un critère d'arrêt du processus itératif puisque nous ne connaissons pas la solution exacte du problème dans la pratique. En outre, l'arrêt de l'algorithme avant convergence peut conduire à un manque de précision dans la reconstruction et donc peut affecter les performances de la régularisation évanescence notamment lorsque plusieurs paramètres sont impliqués. Dans le cas de données bruitées, un arrêt tardif de l'algorithme restaurerait le caractère instable du problème de Cauchy.

### 1.4.1 Précédents critères d'arrêt utilisés

La méthode de régularisation évanescence a utilisé, par le passé, différents termes de contrôle pour quantifier la convergence de l'algorithme. On retrouve dans la thèse de *Delvaire* [28] et dans [24] un critère d'arrêt basé sur le signe du produit scalaire :

$$sp(\mathbf{U}^{k+1}) := \langle \mathbf{U}^{k+1} - \Phi_d, \mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k \rangle_{\Gamma_d} \quad (1.10)$$

pour lequel la condition " $\langle \mathbf{U}^{k+1} - \Phi_d, \mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k \rangle_{\Gamma_d} \leq 0$ " doit être satisfaite afin que  $\mathbf{U}^{k+1}$  soit un élément optimal. Ce résultat provient de l'équation d'optimalité (1.4) en remplaçant  $\mathbf{V}$  par  $\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k \in H(\Gamma)$ .

De plus, il a été établi (Cf. Annexes ?? et A.2) que les deux suites suivantes sont décroissantes :

- Terme de relaxation des données à chaque itération

$$J_{\Gamma_d}^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}) = \|\mathbf{U}_{|\Gamma_d}^{k+1} - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2. \quad (1.11)$$

- Valeur optimale de la fonctionnelle à chaque itération

$$J_c^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}) = \|\mathbf{U}_{|\Gamma_d}^{k+1} - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 + c\|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k\|_{H(\Gamma)}^2. \quad (1.12)$$

Par ailleurs, la suite composée par :

- Terme de régularisation à chaque itération

$$J_{\Gamma}^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}) = c\|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k\|_{H(\Gamma)}^2 \quad (1.13)$$

est une suite bornée qui converge vers 0 (Cf. Annexe A.4) et il semble, dans les résultats numériques obtenus dans des travaux antérieurs [31, 14], que celle-ci est une suite décroissante.

Ainsi, trois critères d'arrêt ont été introduits et sont basés sur la violation des propriétés de décroissance de chaque suite. Le critère lié au terme  $J_c$  a été utilisé dans [14] et il a été réduit ensuite à l'utilisation de celui lié au terme  $J_\Gamma$  car ce dernier n'implique pas de connaissances a priori sur la qualité des données. C'est aussi cette raison pour laquelle le critère lié à  $J_{\Gamma_d}$  n'est pas utilisé.

### 1.4.2 Proposition d'un nouveau critère d'arrêt

Nous proposons ici un nouveau critère basé sur l'égalité présentée dans le lemme (1.2.2), où pour des données compatibles  $\Phi_d$ , on a :

$$\sum_{j=0}^k \|\mathbf{U}^{j+1} - \mathbf{U}^j\|_{H(\Gamma)}^2 + \frac{2}{c} \sum_{j=0}^k \|\mathbf{U}^{j+1} - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 = \|\mathbf{U}_e\|_{H(\Gamma)}^2 - \|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}_e\|_{H(\Gamma)}^2. \quad (1.14)$$

Cependant, lorsque les données sont perturbées (c'est à dire probablement non compatibles), cette égalité n'est plus valable. On introduit les notations suivantes pour chacun des membres de l'égalité (1.14) :

- $S_d^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}) := \sum_{j=0}^k \|\mathbf{U}^{j+1} - \mathbf{U}^j\|_{H(\Gamma)}^2 + \frac{2}{c} \sum_{j=0}^k \|\mathbf{U}^{j+1} - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2$ ,
- $S_e^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}) := \|\mathbf{U}_e\|_{H(\Gamma)}^2 - \|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}_e\|_{H(\Gamma)}^2$ .

Dans le cas de données compatibles, on a

$$S_e^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \|\mathbf{U}_e\|_{H(\Gamma)}^2$$

et

$$S_d^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \|\mathbf{U}_e\|_{H(\Gamma)}^2.$$

De plus, nous savons par expérience que la méthode de régularisation évanescence débruite les données [24, 33, 14]. Ainsi, dans le cas de données bruitées  $\tilde{\Phi}_d$ , nous modifions  $S_d^{k+1}$  et enlevons l'accumulation du bruit filtré par le processus de régularisation et qui intervient dans la somme

$$\sum_{j=0}^k \|\mathbf{U}^{j+1} - \tilde{\Phi}_d\|_{H(\Gamma_d)}^2$$

en l'approximant à l'itération  $(k+1)$  par le terme

$$(k+1) \|\mathbf{U}^{k+1} - \tilde{\Phi}_d\|_{H(\Gamma_d)}^2.$$

Le membre de gauche de l'égalité (1.14) devient alors

$$S_c^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}) := \sum_{j=0}^k \|\mathbf{U}^{j+1} - \mathbf{U}^j\|_{H(\Gamma)}^2 + \frac{2}{c} \left( \sum_{j=0}^k \|\mathbf{U}^{j+1} - \tilde{\Phi}_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 - (k+1) \|\mathbf{U}^{k+1} - \tilde{\Phi}_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 \right). \quad (1.15)$$

La suite  $(S_c^{k+1})_{k \geq 0}$  est croissante aussi bien pour des données bruitées que pour des données compatibles (Cf. Annexe A.3).

*Remarque.* Dans le cas de données compatibles, le terme

$$\sum_{j=0}^k \|\mathbf{U}^{j+1} - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2$$

va générer lors des simulations numériques une accumulation d'erreurs de calcul et d'approximation et qui seront soustraites par le terme

$$(k+1) \|\mathbf{U}^{k+1} - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2.$$

De plus, on peut montrer dans ce même cas que les suites  $(S_c^{k+1})_{k \geq 0}$  et  $(S_e^{k+1})_{k \geq 0}$  sont convergentes et ont la même limite.

**La suite  $S_c^{k+1}$  est croissante quelque soit la nature de la donnée  $\Phi_d$ , nous définissons alors le nouveau critère d'arrêt en basant sur la violation de la propriété " $S_c^k(\mathbf{U}^{k+1})$  augmente".**

Nous récapitulons dans le tableau (1.1) l'ensemble des critères utilisés pour arrêter l'algorithme itératif de la régularisation évanescence.

Nom du critère	Description
$C_{J_\Gamma}$	Violation de la propriété " $J_\Gamma$ diminue".
$C_{J_c}$	Violation de la propriété " $J_c$ diminue".
$C_{sp}$	Violation de la propriété " $sp \leq 0$ ".
$C_{S_c}$	Violation de la propriété " $S_c$ augmente".

TABLE 1.1 – Récapitulatif des quatre critères d'arrêt utilisés.

## 1.5 Discrétisation par la méthode des solutions fondamentales

La méthode des solutions fondamentales (MFS) est connue comme une méthode numérique sans maillage, introduite à l'origine par *Kupradze et Aleksidze* [53], est souvent utilisée pour résoudre à la fois des problèmes aux limites aussi bien directs qu'inverses. Elle est appréciée pour sa facilité de mise en œuvre et son faible coût de calcul. En effet, elle ne nécessite pas une discrétisation élaborée du domaine ni d'intégration

comme celles requises par les méthodes des éléments finis. La MFS génère généralement un système mal conditionné à résoudre même lorsque l'on traite des problèmes directs. Pour cela, il est nécessaire de la combiner à une technique de régularisation. La connaissance d'une solution fondamentale de l'opérateur, le positionnement et le nombre de points sources, dont l'approximation est très dépendante, sont les principaux inconvénients d'une telle méthode.

Dans le cadre du problème inverse biharmonique, La MFS a été déjà utilisée par *L.Marin et al.* [62] et *D.Lesnic et al.* [57] où elle a été combinée avec la méthode de régularisation de Tikhonov.

### 1.5.1 Approximation de l'espace des solutions de l'équation biharmonique par la MFS

L'idée de base de la MFS consiste à écrire l'approximation de la solution continue  $u$  sous la forme d'une combinaison linéaire de solutions fondamentales de l'équation de Laplace  $\mathcal{F}_1$  et de l'équation biharmonique  $\mathcal{F}_2$  :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi} \ln r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mathcal{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{8\pi} r^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ln r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{cases}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \overline{\Omega}, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}, \quad (1.16)$$

avec  $r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ . Ainsi, pour  $M$  points sources, on note  $u_M$  la solution approchée de  $u$  par la MFS. Elle s'écrit sous la forme suivante :

$$u_M(\underline{a}, \underline{b}, \underline{Y}; \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M a_j \mathcal{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}^j) + b_j \mathcal{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}^j), \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega} \quad (1.17)$$

avec  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_M)$ ,  $\underline{b} = (b_1, \dots, b_M)$  et  $\underline{Y}$  un vecteur qui contient les  $M$  points sources  $\mathbf{y}^j \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ . Un exemple de positionnement des points sources en dehors du domaine  $\Omega$  est illustré par la Figure 1.1 dans le cas d'un domaine circulaire. Cette ap-

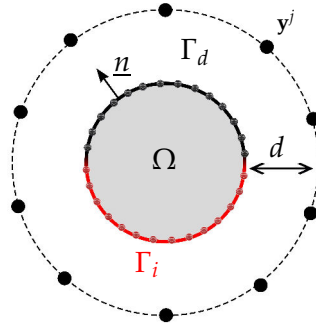


FIGURE 1.1 – Diagramme schématisant d'un domaine  $\Omega$  régulier entouré de points sources  $\mathbf{y}^j$  séparés par une distance  $d$  et  $\underline{n}$  étant un vecteur unitaire normal à la frontière  $\Gamma$  et orienté vers l'extérieur.

proximation nous permet d'avoir une expression analytique des autres conditions aux limites en exploitant la linéarité de la dérivée normale et du laplacien :

$$u'_M(\mathbf{x}) \approx \frac{\partial u_M}{\partial n}(a, b, Y, \underline{n}; \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M a_j \mathcal{F}'_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}^j; \underline{n}) + b_j \mathcal{F}'_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}^j; \underline{n}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (1.18)$$

$$v_M(\mathbf{x}) \approx v_M(a, b, Y; \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M b_j \mathcal{G}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}^j), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (1.19)$$

$$v'_M(\mathbf{x}) \approx \frac{\partial v_M}{\partial n}(a, b, Y, \underline{n}; \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M b_j \mathcal{G}'_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}^j), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (1.20)$$

où

$$\mathcal{F}'_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \underline{n}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})} ((\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \underline{n}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega} \quad (1.21)$$

$$\mathcal{F}'_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \underline{n}) = -\frac{1}{8\pi} (2 \ln r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + 1) ((\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \underline{n}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega} \quad (1.22)$$

$$\mathcal{G}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi} (\ln r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + 1), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega} \quad (1.23)$$

$$\mathcal{G}'_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \underline{n}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})} ((\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \underline{n}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega} \quad (1.24)$$

Les approximations (1.17), (1.18), (1.19) et (1.20) peuvent être écrites sous la forme d'un système algébrique avec  $2M$  inconnues :

$$\mathcal{A} \underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{U}} \quad (1.25)$$

où  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{x}, Y; \underline{n})$  est la matrice qui contient les fonctions données par les formules (1.16), (1.21), (1.22), (1.23) et (1.24),  $\underline{\mathbf{X}}^T = (a_1, \dots, a_M, b_1, \dots, b_M)$  le vecteur des  $2M$  inconnues et  $\underline{\mathbf{U}}^T = (u, u', v, v')$ .

On peut voir à travers ce système algébrique qu'il n'est pas nécessaire de discrétiser tout le domaine afin d'avoir l'approximation de la solution sur le bord. Notons  $\underline{\mathbf{U}}$  le vecteur qui contient les valeurs discrètes de la solution approchée  $\mathbf{U}_h \in \mathcal{H}^h(\Gamma)$ . Si on considère  $N$  points de collocation sur la frontière  $\Gamma$ , on peut écrire ce vecteur sous la forme  $\underline{\mathbf{U}} = (u_1, \dots, u_N, u'_1, \dots, u'_N, v_1, \dots, v_N, v'_1, \dots, v'_N)$ . Et en calculant la matrice  $\mathcal{A}$  en ces points de collocation, on peut exprimer ce vecteur à l'aide du système linéaire suivant :

$$\mathcal{A} \underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{U}} \quad (1.26)$$

où maintenant  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\underline{\mathbf{x}}, Y; \underline{n})$  est calculée aux points de collocation  $\underline{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ . On appelle la matrice  $\mathcal{A}$  la matrice des solutions fondamentales qui est de taille  $4N \times 2M$  et construite de la manière suivante :

Pour  $i \in \overline{1, N}$  :

— et pour  $j \in \overline{1, M}$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{i,j} &= \mathcal{F}_1(\mathbf{x}, Y), \\ \mathcal{A}_{N+i,j} &= \mathcal{F}'_1(\mathbf{x}, Y; \underline{\mathbf{u}}), \\ \mathcal{A}_{2N+i,j} &= 0, \\ \mathcal{A}_{3N+i,j} &= 0.\end{aligned}$$

— et pour  $j \in \overline{M, 2M}$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{i,j} &= \mathcal{F}_2(\mathbf{x}, Y), \\ \mathcal{A}_{N+i,j} &= \mathcal{F}'_2(\mathbf{x}, Y; \underline{\mathbf{u}}), \\ \mathcal{A}_{2N+i,j} &= \mathcal{G}_2(\mathbf{x}, Y; \underline{\mathbf{u}}), \\ \mathcal{A}_{3N+i,j} &= \mathcal{G}'_2(\mathbf{x}, Y; \underline{\mathbf{u}}).\end{aligned}$$

On peut alors définir l'espace  $\mathbb{H}_N(\Gamma)$  des solutions discrètes (par la MFS) du problème de Cauchy par :

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_N(\Gamma) &= \left\{ \underline{\mathbf{U}} = (\underline{\mathbf{U}}, \underline{\mathbf{U}'}, \underline{\mathbf{V}}, \underline{\mathbf{V}'}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \right. \\ &\quad \left. \text{tel qu'il existe } \underline{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^M \text{ vérifiant } \mathcal{A} \underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{U}} \text{ et } \mathcal{A}_{|\Gamma_d} \underline{\mathbf{X}} = \underline{\Phi}_d \right\}.\end{aligned}$$

### 1.5.2 Algorithme itératif discret obtenu avec la MFS

L'algorithme itératif discret (1.8) obtenu par la méthode des solutions fondamentales revient à déterminer une suite de vecteurs  $(\underline{\mathbf{X}}^k)_{k \in \mathbb{N}}$  solutions de problèmes de minimisation, tels que pour  $c > 0$  et  $\underline{\mathbf{X}}^0 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{2M}}$  on a :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{X}}^{k+1} = \min_{\underline{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{2M}} J_c^{k+1}(\underline{\mathbf{X}}) \\ J_c^{k+1}(\underline{\mathbf{X}}) = \|\mathcal{A}_{|\Gamma_d} \underline{\mathbf{X}} - \underline{\Phi}_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 + c \|\mathcal{A} \underline{\mathbf{X}} - \mathcal{A} \underline{\mathbf{X}}^k\|_{H(\Gamma)}^2 \end{cases} \quad (1.27)$$

D'où, minimiser, à l'itération  $k$ , la fonctionnelle  $J_c^{k+1}$  par rapport à  $\underline{\mathbf{X}}$  revient à résoudre le système linéaire suivant :

$$(\mathcal{A}_{|\Gamma_d}^t \mathcal{A}_{|\Gamma_d} + c \mathcal{A}^t \mathcal{A}) \underline{\mathbf{X}}^{k+1} = \mathcal{A}_{|\Gamma_d}^t \underline{\Phi}_d + c \mathcal{A}^t \mathcal{A} \underline{\mathbf{X}}^k.$$

Nous précisons que la matrice  $\mathcal{A}_{|\Gamma_d}$  représente la restriction de  $\mathcal{A}$  calculée aux points de collocation appartenant à la frontière  $\Gamma_d$ .

Nous présentons à la suite des tests numériques obtenus en combinant la méthode de régularisation évanescence avec la méthode des solutions fondamentales (MFS) pour le problème inverse biharmonique avec des données  $\underline{\Phi}_d = (\varphi_d, \psi_d, \mu_d, \phi_d)$  situées uniquement sur une partie de la frontière. Pour cela, nous utilisons deux solutions analytiques :



**Exemple 1**

$$\begin{cases} u^{an}(\mathbf{x}) = x_1^3 + x_2^3, \\ v^{an}(\mathbf{x}) = \Delta u^{an}(\mathbf{x}) = 6(x_1 + x_2), \end{cases} \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2). \quad (1.28)$$

**Exemple 2**

$$\begin{cases} u^{an}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1(\sin x_1 \cosh x_2 - \cos x_1 \sinh x_2), \\ v^{an}(\mathbf{x}) = \Delta u^{an}(\mathbf{x}) = \cosh x_2 \cos x_1 + \sinh x_2 \sin x_1, \end{cases} \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (1.29)$$

On considère dans un premier temps un domaine régulier représenté par le disque unité dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$  centré en  $(0, 0)$ . On note  $\Gamma_d$  la partie du bord où les données sont accessibles, prenons par exemple,  $\Gamma_d = \{\mathbf{x} \in \Gamma \mid 0 \leq \theta(\mathbf{x}) \leq \pi\}$ , où  $\theta(\mathbf{x})$  représente l'angle polaire de  $\mathbf{x}$ . De la même manière, on définit la partie complémentaire de la frontière  $\Gamma_i = \{\mathbf{x} \in \Gamma \mid \pi \leq \theta(\mathbf{x}) \leq 2\pi\}$ .

Les données bruitées sont définies de la manière suivante :

$$\begin{cases} \varphi_d(\mathbf{x}) = u^{an}(\mathbf{x}) + \delta \max(u^{an}(\mathbf{x})).\rho, & \mathbf{x} \in \Gamma_d, \\ \psi_d(\mathbf{x}) = u_{,n}^{an}(\mathbf{x}) + \delta \max(u_{,n}^{an}(\mathbf{x})).\rho, & \mathbf{x} \in \Gamma_d, \\ \mu_d(\mathbf{x}) = v^{an}(\mathbf{x}) + \delta \max(v^{an}(\mathbf{x})).\rho, & \mathbf{x} \in \Gamma_d, \\ \phi_d(\mathbf{x}) = v_{,n}^{an}(\mathbf{x}) + \delta \max(v_{,n}^{an}(\mathbf{x})).\rho, & \mathbf{x} \in \Gamma_d, \end{cases} \quad (1.30)$$

où  $\delta$  est le niveau de bruit en pourcentage ajouté aux données exactes et  $\rho$  est un nombre pseudo-aléatoire dans  $[-1, 1]$ .

Les  $M$  points sources sont uniformément répartis sur un cercle en dehors du domaine  $\Omega$  et on note  $d$  la distance qui les sépare de la frontière  $\Gamma$  (Cf. Figure 1.1). Les points de collocation sur la frontière  $\Gamma$  sont également uniformément repartis.

### 1.5.3 Comparaison des critères d'arrêts du point de vue numérique

Nous présentons dans cette partie quelques tests numériques en faisant varier  $c$ ,  $N$ ,  $N_{\Gamma_d}$  et la proportion de  $\Gamma_d$  pour des données compatibles et des données bruitées. Tout d'abord, un premier test (Figure 1.2) est réalisé mettant en évidence la convergence de l'algorithme pour différentes valeurs de  $c$  et dans un second temps (Figures 1.3, 1.4 et 1.5) pour valider numériquement le nouveau critère d'arrêt proposé. Toutefois, il est nécessaire de calculer les normes d'erreurs commises sur la solution à chaque itération afin d'évaluer cette convergence :

$$u_{err}^k = \frac{\|u^{an} - u^k\|}{\|u^{an}\|}; u_{,n}^k = \frac{\|u_{,n}^{an} - u_{,n}^k\|}{\|u_{,n}^{an}\|}; v_{err}^k = \frac{\|v^{an} - v^k\|}{\|v^{an}\|}; v_{,n}^k = \frac{\|v_{,n}^{an} - v_{,n}^k\|}{\|v_{,n}^{an}\|}.$$

Tous les résultats numériques de cette partie sont obtenus en fixant les paramètres de la MFS à  $M = 10$  et  $d = 10$ . Nous considérons également  $N = 100$  points de collocation sur la frontière et  $N_{\Gamma_d} = 50$  sur la partie support des données.

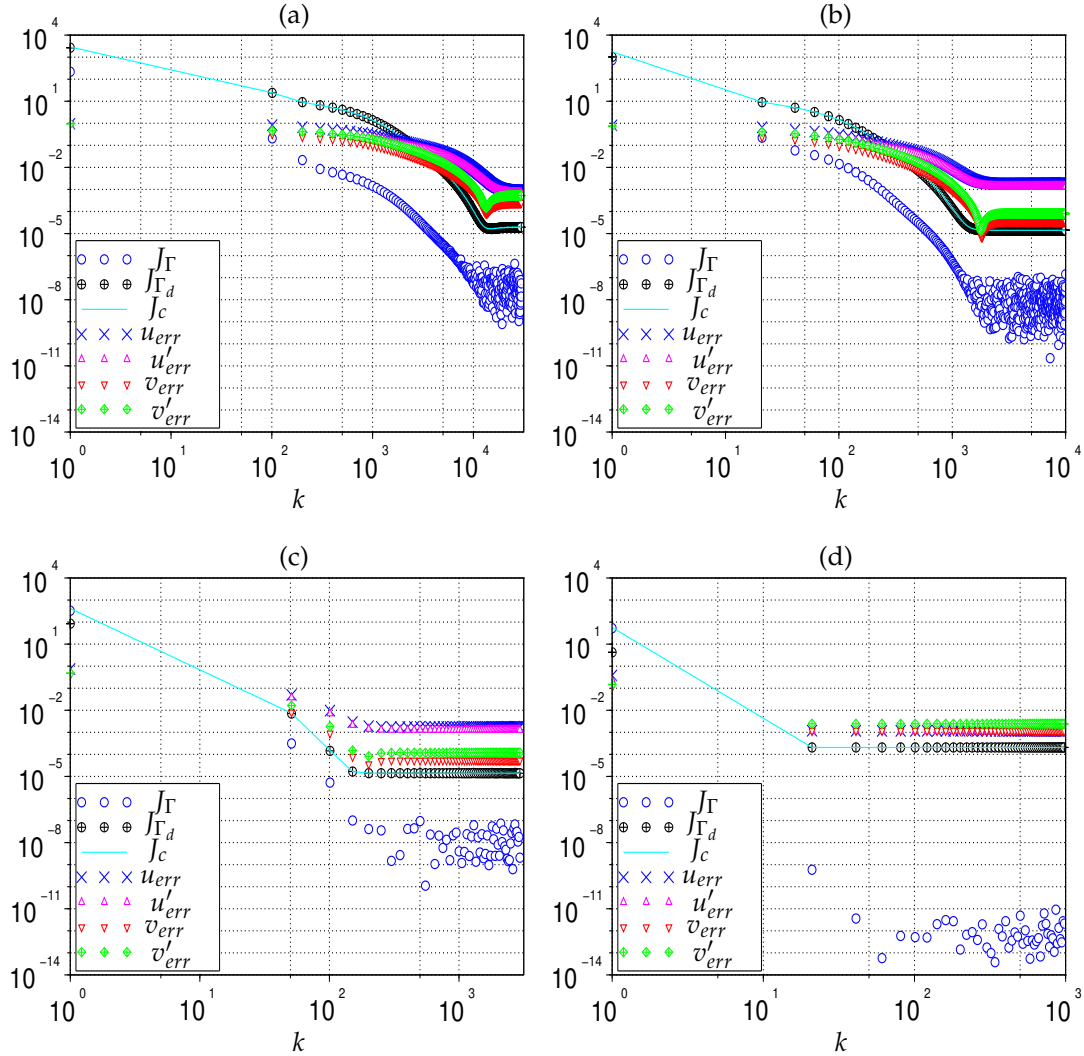
1.5.3.1 Influence du paramètre  $c$  sur les critères d'arrêt

FIGURE 1.2 – Évolution des termes de contrôle  $J_\Gamma$ ,  $J_{\Gamma_d}$  et  $J_c$  et des estimations d'erreur pour des données compatibles en fonction du nombre d'itérations  $k$  pour 4 valeurs de  $c$ , (a)  $c = 10$ , (b)  $c = 1$ , (c)  $c = 10^{-1}$  et (d)  $c = 10^{-2}$ .

On observe sur la Figure 1.2 que tous les termes de contrôle sont décroissants et deviennent constants quasiment à partir de la même itération lorsque les normes d'erreur se stabilisent. Cependant, on remarque que lorsque  $c \geq 1$  certaines reconstructions peuvent être mieux restituées si l'on arrête l'algorithme un peu avant la stabilisation de ces termes de contrôle.

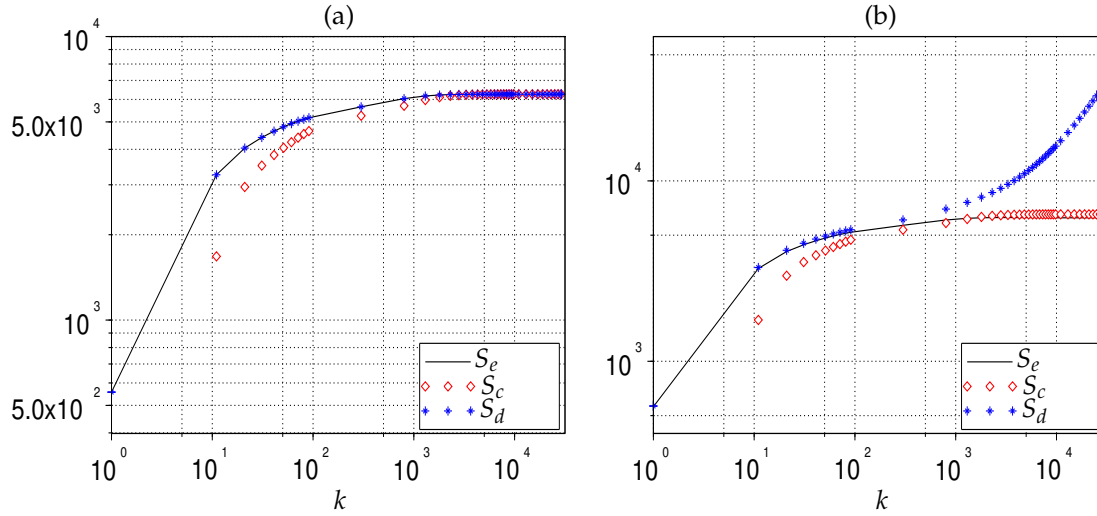


FIGURE 1.3 – Évolution des quantités  $S_e$ ,  $S_c$  et  $S_d$  en fonction du nombre d'itérations  $k$  pour des données compatibles (a) et bruitées ( $\delta = 3\%$ ) (b) avec  $c = 10$ .

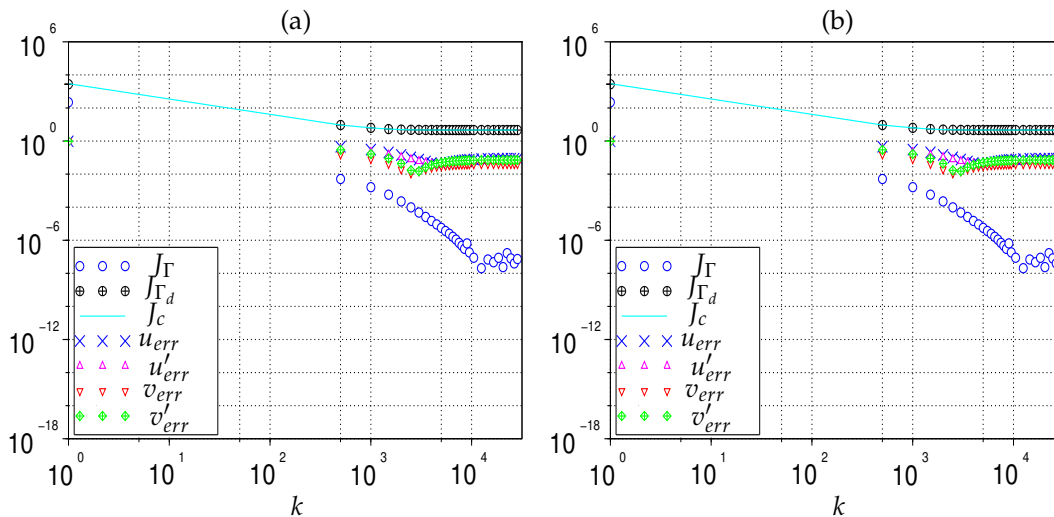


FIGURE 1.4 – Évolution des termes de contrôle  $J_\Gamma$ ,  $J_{\Gamma_d}$  et  $J_c$  et des estimations d'erreurs en fonction du nombre d'itérations  $k$  pour des données compatibles (a) et bruitées ( $\delta = 3\%$ ) (b) avec  $c = 10$ .

La Figure 1.3 met en évidence la validité de l'égalité ( $S_e = S_d$ ) donnée par le lemme (1.2.2) uniquement dans le cas de données compatibles. De plus, nous pouvons voir que notre modification donnée par  $S_c = S_e$  est valable aussi bien pour les données bruitées que pour les données compatibles. L'idée est donc de considérer cette modification de l'égalité pour proposer un nouveau critère d'arrêt valable pour tout type de données. Comme la quantité  $S_c$  est croissante (une somme de quantités positives), l'algorithme peut être arrêté au moment où cette quantité devient stable. Cela peut être comparé avec les autres critères d'arrêt, où (Figures 1.4 et 1.5) tous les termes de contrôle deviennent constants à peu près dans une plage commune d'itérations. Nous ferons dans la section suivante une étude plus complète où nous comparerons ces critères en évaluant les normes d'erreurs prises à l'itération d'arrêt correspondante et ce pour différentes valeurs des paramètres de discrétisation.

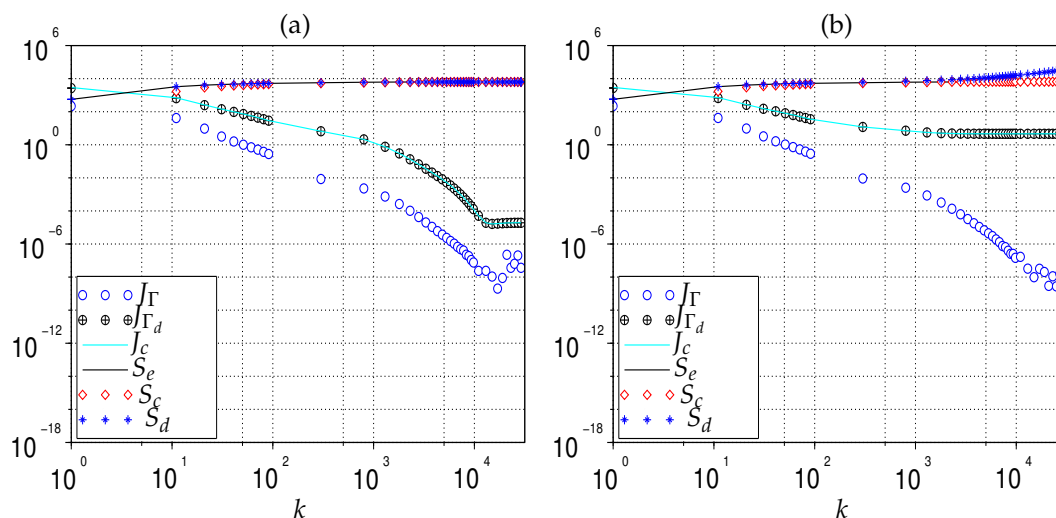


FIGURE 1.5 – Évolution des quantités  $J_\Gamma$ ,  $J_{\Gamma_d}$ ,  $J_c$ ,  $S_e$ ,  $S_c$  et  $S_d$  en fonction du nombre d'itérations  $k$  pour des données compatibles (a) et bruitées ( $\delta = 3\%$ ) (b) avec  $c = 10$ .

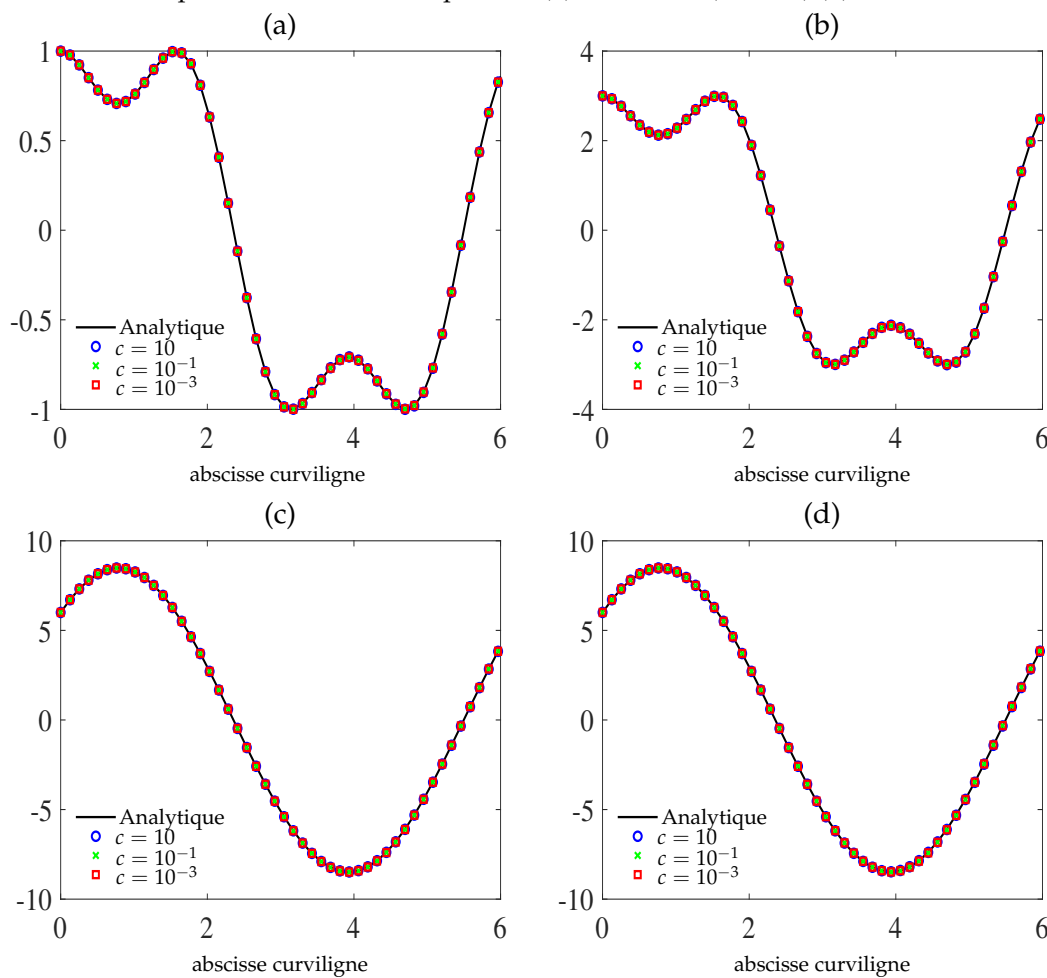


FIGURE 1.6 – Reconstructions de  $u$  (a),  $u_n$  (b),  $v$  (c) et  $v_n$  (d) pour l'Exemple 1 pour différentes valeurs de  $c = 10, 10^{-1}$  et  $10^{-3}$  avec des données compatibles.

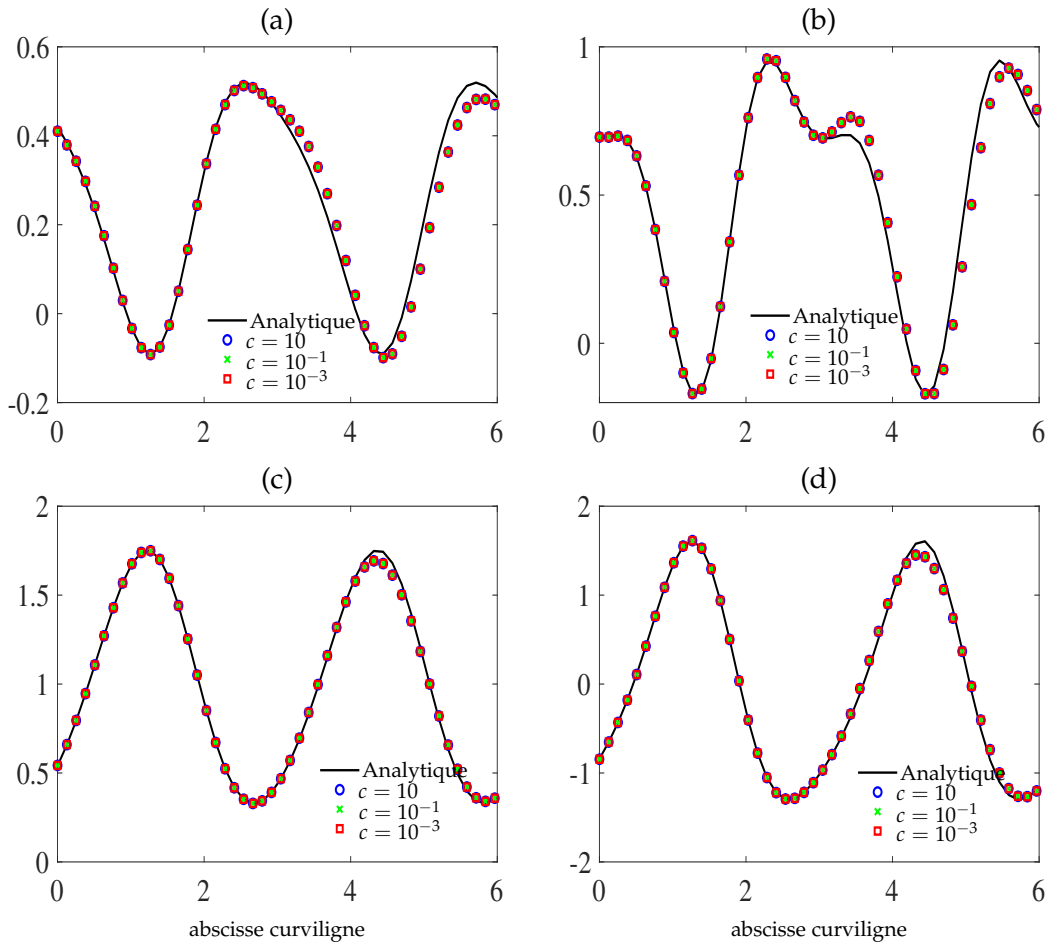


FIGURE 1.7 – Reconstitutions de  $u$  (a),  $u_n$  (b),  $v$  (c) et  $v_n$  (d) pour l'Exemple 2 pour différentes valeurs de  $c = 10, 10^{-1}$  et  $10^{-3}$  avec des données compatibles.

On peut constater sur les Figures 1.6 et 1.7 que la méthode de régularisation évanescente combinée avec la méthode des solutions fondamentales permet de reconstruire la solution  $u$  et les composantes  $u_n, v$  et  $v_n$  sur toute la frontière pour les deux exemples de solutions analytiques et que ces reconstructions sont indépendantes du choix du paramètre  $c$ . Ces reconstructions sont données en appliquant le critère  $C_{J_T}$ .

On constate aussi avec les Tableaux 1.2 et 1.3 que des différences entre les résultats obtenus avec les différents critères se produisent uniquement lorsque le coefficient  $c \geq 10^{-1}$  et cela aussi bien, pour des données compatibles que des données bruitées.

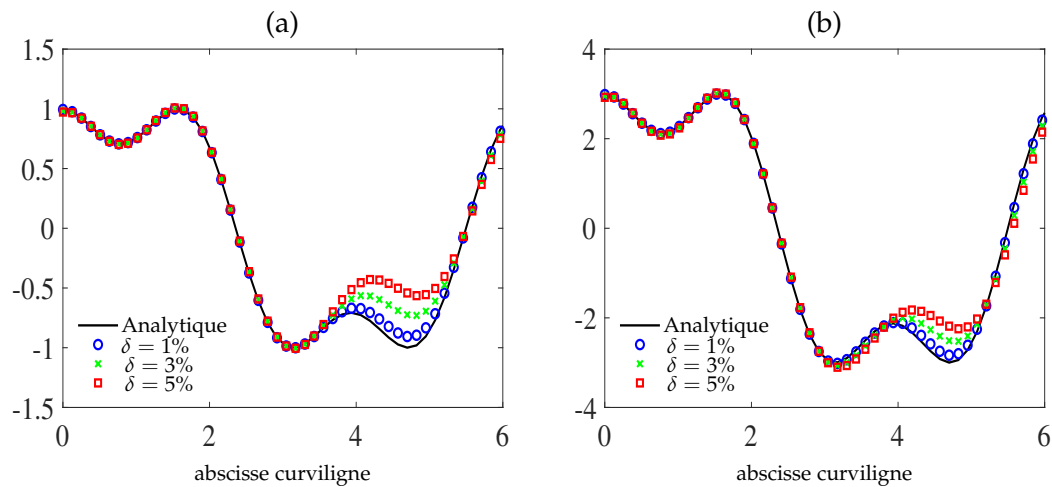
$c$	critère	$k$	$u_{err}(\%)$	$u'_{err}(\%)$	$v_{err}(\%)$	$v'_{err}(\%)$
10	$C_{J_r}$	971	32.76	22.90	10.40	19.72
	$C_{J_c}$	12011	0.58	0.43	$4.16 \times 10^{-2}$	$8.51 \times 10^{-2}$
	$C_{sp}$	12934	0.45	0.33	$2.58 \times 10^{-2}$	$5.24 \times 10^{-2}$
	$C_{S_c}$	12934	0.45	0.33	$2.58 \times 10^{-2}$	$5.24 \times 10^{-2}$
1	$C_{J_r}$	718	2.76	2.05	$3.33 \times 10^{-1}$	$6.85 \times 10^{-1}$
	$C_{J_c}$	1565	0.29	0.21	$4.73 \times 10^{-3}$	$8.10 \times 10^{-3}$
	$C_{sp}$	1565	0.29	0.21	$4.73 \times 10^{-3}$	$8.10 \times 10^{-3}$
	$C_{S_c}$	1565	0.29	0.21	$4.73 \times 10^{-3}$	$8.10 \times 10^{-3}$
$10^{-1}$	$C_{J_r}$	179	0.23	0.17	$9.40 \times 10^{-4}$	$2.05 \times 10^{-3}$
	$C_{J_c}$	187	0.22	0.16	$1.94 \times 10^{-3}$	$4.81 \times 10^{-3}$
	$C_{sp}$	179	0.23	0.17	$9.40 \times 10^{-4}$	$2.05 \times 10^{-3}$
	$C_{S_c}$	187	0.22	0.16	$1.94 \times 10^{-3}$	$4.81 \times 10^{-3}$
$10^{-2}$	$C_{J_r}$	24	0.05	0.07	$5.63 \times 10^{-2}$	$1.23 \times 10^{-1}$
	$C_{J_c}$	18	0.05	0.07	$5.64 \times 10^{-2}$	$1.23 \times 10^{-1}$
	$C_{sp}$	18	0.05	0.07	$5.64 \times 10^{-2}$	$1.23 \times 10^{-1}$
	$C_{S_c}$	18	0.05	0.07	$5.64 \times 10^{-2}$	$1.23 \times 10^{-1}$
$10^{-3}$	$C_{J_r}$	11	0.13	0.12	$1.10 \times 10^{-1}$	$2.32 \times 10^{-1}$
	$C_{J_c}$	10	0.13	0.12	$1.10 \times 10^{-1}$	$2.32 \times 10^{-1}$
	$C_{sp}$	7	0.13	0.12	$1.10 \times 10^{-1}$	$2.32 \times 10^{-1}$
	$C_{S_c}$	10	0.13	0.12	$1.10 \times 10^{-1}$	$2.32 \times 10^{-1}$
$10^{-4}$	$C_{J_r}$	6	0.14	0.12	$1.10 \times 10^{-1}$	$2.30 \times 10^{-1}$
	$C_{J_c}$	5	0.14	0.12	$1.10 \times 10^{-1}$	$2.30 \times 10^{-1}$
	$C_{sp}$	4	0.14	0.12	$1.10 \times 10^{-1}$	$2.30 \times 10^{-1}$
	$C_{S_c}$	4	0.14	0.12	$1.10 \times 10^{-1}$	$2.30 \times 10^{-1}$

TABLE 1.2 – Évolution des estimations d'erreurs et de l'itération d'arrêt pour chaque critère d'arrêt et pour différentes valeurs de  $c$  avec des données compatibles.

Nous remarquons aussi, grâce aux Tableaux 1.2 et 1.3 que le critère  $C_{J_r}$  est moins fiable lorsque le coefficient de régularisation  $c \geq 1$ . En effet, ce critère active trop tôt l'arrêt de l'algorithme. En revanche, les autres critères donnent à peu près les mêmes résultats. De plus, on peut constater que le coefficient  $c$  sert à accélérer la vitesse de convergence de l'algorithme mais qu'il n'est pas forcément intéressant de le choisir trop petit pour ne pas supprimer l'effet de régularisation. Nous remarquons aussi que les reconstructions de  $u$  et  $u_n$  sont toujours moins précises que celles de  $v$  et  $v_n$ .

$c$	critère	$k$	$u_{err}(\%)$	$u'_{err}(\%)$	$v_{err}(\%)$	$v'_{err}(\%)$
10	$C_{Jr}$	683	45.88	30.88	14.65	26.13
	$C_{Jc}$	11799	10.58	7.98	3.21	6.17
	$C_{Sp}$	13010	10.56	8.04	3.24	6.22
	$C_{Sc}$	13010	10.56	8.04	3.24	6.22
1	$C_{Jr}$	804	10.90	7.62	3.02	5.67
	$C_{Jc}$	1756	10.57	8.09	3.24	6.23
	$C_{Sp}$	1756	10.57	8.09	3.24	6.23
	$C_{Sc}$	1794	10.57	8.09	3.24	6.23
$10^{-1}$	$C_{Jr}$	173	10.57	8.10	3.25	6.24
	$C_{Jc}$	210	10.56	8.11	3.25	6.26
	$C_{Sp}$	192	10.56	8.11	3.25	6.25
	$C_{Sc}$	210	10.56	8.11	3.25	6.26
$10^{-2}$	$C_{Jr}$	21	12.99	7.73	1.93	2.32
	$C_{Jc}$	16	13.00	7.73	1.93	2.32
	$C_{Sp}$	15	13.00	7.74	1.93	2.32
	$C_{Sc}$	16	13.00	7.73	1.93	2.32
$10^{-3}$	$C_{Jr}$	10	13.07	7.77	1.83	2.12
	$C_{Jc}$	8	13.07	7.77	1.83	2.12
	$C_{Sp}$	7	13.07	7.77	1.83	2.12
	$C_{Sc}$	8	13.07	7.77	1.83	2.12
$10^{-4}$	$C_{Jr}$	6	13.07	7.77	1.82	2.12
	$C_{Jc}$	5	13.07	7.77	1.82	2.12
	$C_{Sp}$	5	13.07	7.77	1.82	2.12
	$C_{Sc}$	5	13.07	7.77	1.82	2.12

TABLE 1.3 – Évolution des estimations d'erreurs et de l'itération d'arrêt pour chaque critère d'arrêt et pour différentes valeurs de  $c$  avec des données bruitées ( $\delta = 3\%$ ).



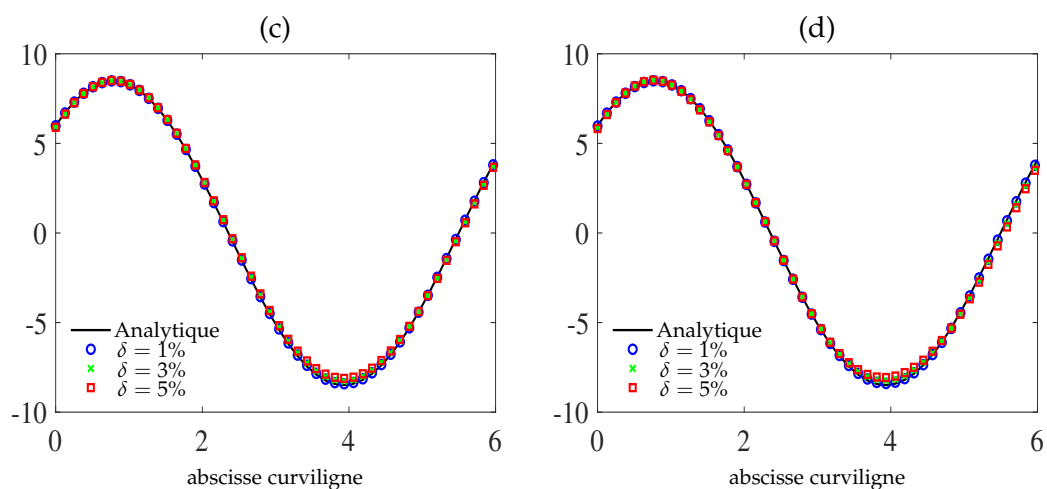


FIGURE 1.8 – Reconstructions de  $u$  (a),  $u_n$  (b),  $v$  (c) et  $v_n$  (d) pour l'Exemple 1 avec des données bruitées et différents niveaux de  $\delta = 1\%$ ,  $3\%$  et  $5\%$  et  $c = 10^{-3}$ .

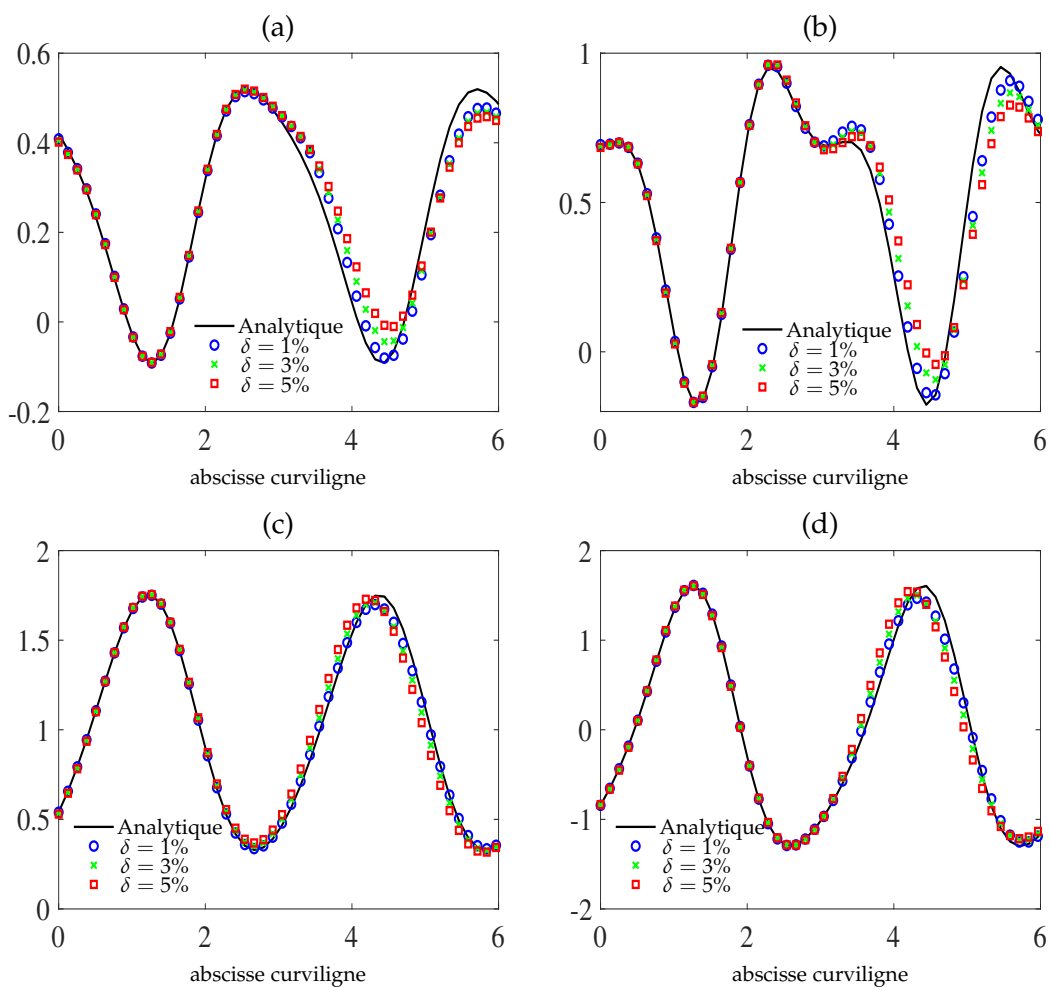


FIGURE 1.9 – Reconstructions de  $u$  (a),  $u_n$  (b),  $v$  (c) et  $v_n$  (d) pour l'Exemple 2 avec des données bruitées et différents niveaux de  $\delta = 1\%$ ,  $3\%$  et  $5\%$  et  $c = 10^{-3}$ .

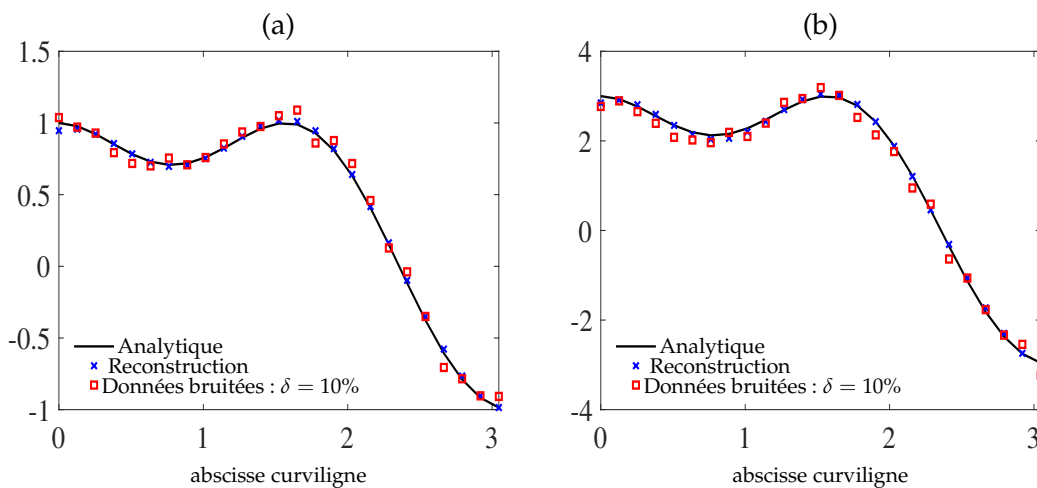


$\delta$	$c$	$k$	$u_{err}(\%)$	$u'_{err}(\%)$	$v_{err}(\%)$	$v'_{err}(\%)$
1%	$10^{-3}$	12	3.53	2.67	1.08	2.08
	$10^{-2}$	46	3.53	2.67	1.08	2.08
	$10^{-1}$	374	3.53	2.67	1.08	2.08
3%	$10^{-3}$	8	13.07	7.77	1.83	2.12
	$10^{-2}$	16	13.00	7.73	1.93	2.32
	$10^{-1}$	212	10.56	8.11	3.25	6.26
5%	$10^{-3}$	10	16.42	13.41	5.37	10.35
	$10^{-2}$	45	16.57	12.10	5.37	10.35
	$10^{-1}$	364	17.47	11.41	5.37	10.35
10%	$10^{-3}$	10	34.94	26.82	10.74	20.70
	$10^{-2}$	43	30.04	22.82	10.74	20.70
	$10^{-1}$	360	32.94	22.82	10.74	20.70

TABLE 1.4 – Évolution des estimations d'erreurs et de l'itération d'arrêt associée au critère  $C_{S_c}$  pour l'Exemple 1, pour différents niveaux de bruit  $\delta$  et différentes valeurs de  $c$ .

Les reconstructions (Figures 1.8 et 1.9) pour les deux exemples de solutions analytiques sont obtenues avec des données bruitées. Nous remarquons également à travers le tableau 1.4 une sorte de stabilité de la solution obtenue par la méthode de régularisation évanescence, où les évolutions d'erreurs sont proportionnelles (linéaires) par rapport au niveau du bruit ajouté.

La Figure 1.10 donne la reconstruction de la solution sur la partie accessible de la frontière  $\Gamma_d$ . Nous constatons que la méthode de régularisation évanescence a réussi à débruiter l'ensemble des données sur cette partie même en présence d'un niveau de bruit élevé  $\delta = 10\%$ .



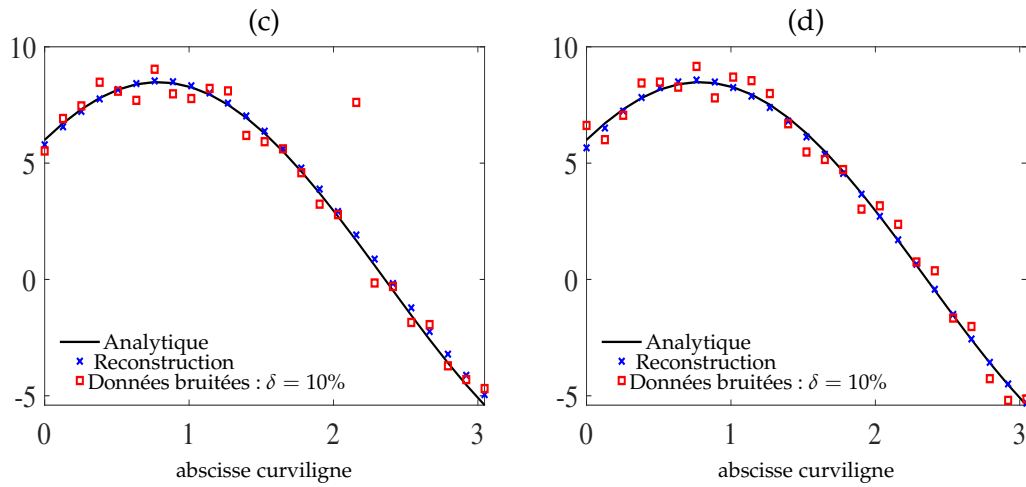


FIGURE 1.10 – Reconstructions de  $u$  (a),  $u_n$  (b),  $v$  (c) et  $v_n$  (d) sur la partie  $\Gamma_d$  pour l'Exemple 1 avec des données bruitées à  $\delta = 10\%$  avec  $c = 10^{-3}$ .

### 1.5.3.2 Influence de la portion accessible de la frontière sur les critères d'arrêt

Un faible nombre de mesures ou une petite partie accessible de la frontière peut exister dans la pratique et donc avoir un critère d'arrêt efficace dans ces cas semble très utile. Nous réalisons à cet effet des tests sur les critères d'arrêt proposés en faisant varier la portion accessible de la frontière pour des données compatibles et des données bruitées. On note  $\zeta$  le coefficient tel que  $|\Gamma_d| = \zeta|\Gamma|$ .

$\zeta$	critère	$k$	$u_{err}(\%)$	$u'_{err}(\%)$	$v_{err}(\%)$	$v'_{err}(\%)$
1/5	$C_{J\Gamma}$	762	42.01	30.18	27.96	46.50
	$C_{Jc}$	21833	14.86	9.77	4.91	9.25
	$C_{sp}$	19850	16.30	10.87	5.65	10.57
	$C_{S_c}$	23168	13.95	9.09	4.48	8.49
2/5	$C_{J\Gamma}$	730	7.95	5.78	1.12	2.21
	$C_{Jc}$	1644	$1.09 \times 10^{-1}$	$9.23 \times 10^{-2}$	$6.67 \times 10^{-2}$	$1.32 \times 10^{-1}$
	$C_{sp}$	1438	$4.02 \times 10^{-1}$	$2.98 \times 10^{-1}$	$1.21 \times 10^{-1}$	$2.40 \times 10^{-1}$
	$C_{S_c}$	1644	$1.09 \times 10^{-1}$	$9.23 \times 10^{-2}$	$6.67 \times 10^{-2}$	$1.32 \times 10^{-1}$
3/5	$C_{J\Gamma}$	63	$5.08 \times 10^{-2}$	$4.22 \times 10^{-2}$	$2.44 \times 10^{-3}$	$6.10 \times 10^{-3}$
	$C_{Jc}$	60	$5.19 \times 10^{-2}$	$4.27 \times 10^{-2}$	$2.41 \times 10^{-3}$	$5.99 \times 10^{-3}$
	$C_{sp}$	56	$5.48 \times 10^{-2}$	$4.41 \times 10^{-2}$	$2.37 \times 10^{-3}$	$5.78 \times 10^{-3}$
	$C_{S_c}$	60	$5.19 \times 10^{-2}$	$4.27 \times 10^{-2}$	$2.41 \times 10^{-3}$	$5.99 \times 10^{-3}$
4/5	$C_{J\Gamma}$	18	$2.37 \times 10^{-2}$	$3.51 \times 10^{-2}$	$3.61 \times 10^{-4}$	$1.17 \times 10^{-3}$
	$C_{Jc}$	16	$2.37 \times 10^{-2}$	$3.51 \times 10^{-2}$	$3.56 \times 10^{-4}$	$1.17 \times 10^{-3}$
	$C_{sp}$	16	$2.37 \times 10^{-2}$	$3.51 \times 10^{-2}$	$3.56 \times 10^{-4}$	$1.17 \times 10^{-3}$
	$C_{S_c}$	16	$2.37 \times 10^{-2}$	$3.51 \times 10^{-2}$	$3.56 \times 10^{-4}$	$1.17 \times 10^{-3}$
1	$C_{J\Gamma}$	9	$1.58 \times 10^{-2}$	$3.17 \times 10^{-2}$	$5.10 \times 10^{-5}$	$1.03 \times 10^{-4}$
	$C_{Jc}$	11	$1.58 \times 10^{-2}$	$3.17 \times 10^{-2}$	$4.97 \times 10^{-5}$	$1.03 \times 10^{-4}$
	$C_{sp}$	8	$1.58 \times 10^{-2}$	$3.17 \times 10^{-2}$	$5.15 \times 10^{-5}$	$1.02 \times 10^{-4}$
	$C_{S_c}$	8	$1.58 \times 10^{-2}$	$3.17 \times 10^{-2}$	$5.15 \times 10^{-5}$	$1.02 \times 10^{-4}$

TABLE 1.5 – Évolution des estimations d'erreurs et de l'itération d'arrêt pour chaque critère d'arrêt et pour différentes valeurs de  $\zeta$  pour des données compatibles avec  $c = 10^{-1}$ .

$\zeta$	critère	$k$	$u_{err}(\%)$	$u'_{err}(\%)$	$v_{err}(\%)$	$v'_{err}(\%)$
1/5	$C_{J_\Gamma}$	743	43.58	34.54	32.17	45.33
	$C_{J_c}$	68767	131.23	141.11	55.79	123.57
	$C_{sp}$	65551	123.02	133.20	53.45	118.54
	$C_{S_c}$	72013	139.63	149.18	58.16	128.66
2/5	$C_{J_\Gamma}$	874	7.96	7.98	8.23	14.58
	$C_{J_c}$	1783	10.99	10.40	9.07	16.21
	$C_{sp}$	1588	10.73	10.22	9.03	16.12
	$C_{S_c}$	1804	11.01	10.42	9.08	16.21
3/5	$C_{J_\Gamma}$	67	4.83	2.14	0.86	0.77
	$C_{J_c}$	58	4.83	2.14	0.86	0.77
	$C_{sp}$	58	4.83	2.14	0.86	0.77
	$C_{S_c}$	58	4.83	2.14	0.86	0.77
4/5	$C_{J_\Gamma}$	18	2.47	1.05	0.36	0.49
	$C_{J_c}$	17	2.47	1.05	0.36	0.49
	$C_{sp}$	17	2.47	1.05	0.36	0.49
	$C_{S_c}$	17	2.47	1.05	0.36	0.49
1	$C_{J_\Gamma}$	11	1.15	0.80	0.30	0.49
	$C_{J_c}$	9	1.15	0.80	0.30	0.49
	$C_{sp}$	7	1.15	0.80	0.30	0.49
	$C_{S_c}$	9	1.15	0.80	0.30	0.49

TABLE 1.6 – Évolution des estimations d'erreurs et de l'itération d'arrêt pour chaque critère d'arrêt et pour différentes valeurs de  $\zeta$  pour des données bruitées ( $\delta = 3\%$ ) avec  $c = 10^{-1}$ .

Nous remarquons que tous les critères d'arrêt donnent quasiment les mêmes résultats de reconstruction à chaque fois que l'on fait varier la taille de la portion accessible de la frontière sauf lorsque cette portion est très petite. On observe dans ce cas et en particulier lorsque les données sont bruitées que le critère  $C_{J_\Gamma}$  serait plus efficace que les autres mais il est toutefois le moins performant dans le cas des données compatibles. De plus, le nouveau critère proposé dans cette étude  $C_{S_c}$  donne des résultats identiques au critère  $C_{J_c}$ .

#### 1.5.4 Influence des paramètres de la MFS sur la reconstruction de la solution

Lorsque l'on utilise la méthode des solutions fondamentales, le positionnement des sources et leur nombre sont des paramètres cruciaux. Nous regardons donc ici l'influence du nombre de sources  $M$  ainsi que l'influence de leur positionnement sur la qualité des reconstructions.

$d$	$k$	$u_{err}(\%)$	$u'_{err}(\%)$	$v_{err}(\%)$	$v'_{err}(\%)$
1.5	717	164.62	154.56	21.83	50.88
2	215	8.81	10.83	3.20	5.53
4	69	9.62	5.86	3.60	7.35
6	45	9.67	6.76	3.43	6.78
8	37	10.09	7.49	3.33	6.48
10	16	13.00	7.73	1.93	2.32
12	28	12.68	7.55	1.88	2.21
14	19	11.68	6.61	1.04	1.14
16	19	11.59	6.55	0.99	0.92
18	19	13.34	9.18	4.58	6.29
20	17	20.28	13.67	10.19	12.28
40	7	251.47	171.31	118.54	100.01
80	4	259.82	176.08	118.57	100.00
100	6	243.65	143.88	118.60	100.00
150	10	163.19	41.75	100.00	100.00

TABLE 1.7 – Influence de la distance  $d$  sur le nombre d'itérations  $k$ , pour atteindre la convergence et sur les estimations d'erreur  $u_{err}$ ,  $u'_{err}$ ,  $v_{err}$  et  $v'_{err}$  pour des données bruitées : **Exemple 1** avec  $\delta = 3\%$  telles que  $|\Gamma_d| = \frac{1}{2}|\Gamma|$ ,  $N = 100$ ,  $M = 10$  et  $c = 10^{-2}$ .

$M$	$k$	$u_{err}(\%)$	$u'_{err}(\%)$	$v_{err}(\%)$	$v'_{err}(\%)$
2	5	97.53	94.78	100.00	99.98
4	8	294.97	166.06	118.33	98.43
8	20	14.82	8.96	2.00	2.49
16	60	8.97	5.54	1.85	2.15
32	80	8.72	5.46	1.87	2.19
64	78	8.79	5.49	1.88	2.21
128	70	8.74	5.46	1.89	2.23
256	30	13.09	7.91	1.87	2.19

TABLE 1.8 – Influence du nombre des points sources  $M$  sur le nombre d'itérations  $k$ , pour atteindre la convergence et sur les estimations d'erreur  $u_{err}$ ,  $u'_{err}$ ,  $v_{err}$  et  $v'_{err}$  pour des données bruitées : **Exemple 1** avec  $\delta = 3\%$ , telles que  $|\Gamma_d| = \frac{1}{2}|\Gamma|$ ,  $N = 100$ ,  $d = 10$  et  $c = 10^{-2}$ .

On peut observer à partir des tableaux 1.7 et 1.8 que le choix des paramètres  $M$  et  $d$  de la MFS est crucial et affecte la précision de la solution. En effet, la distance  $d$  doit être suffisamment grande mais pas trop, pour obtenir une solution précise. Il en va de même pour le nombre de points sources  $M$ , ils doivent être en nombre suffisant pour obtenir une bonne approximation. Notons également que les erreurs numériques sont plus grandes lors de la reconstruction de  $u$  et  $u'$  que dans  $v$  et  $v'$ .

### 1.5.5 Reconstruction dans le cas d'un domaine carré

Nous considérons l'exemple du domaine carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  où les points sources sont situés sur un cercle de centre  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  et de rayon 5. Nous considérons que les données sont disponibles sur deux côtés du carré et nous examinons les deux situations possibles lorsqu'elles sont sur deux côtés adjacents ou sur deux côtés opposés.

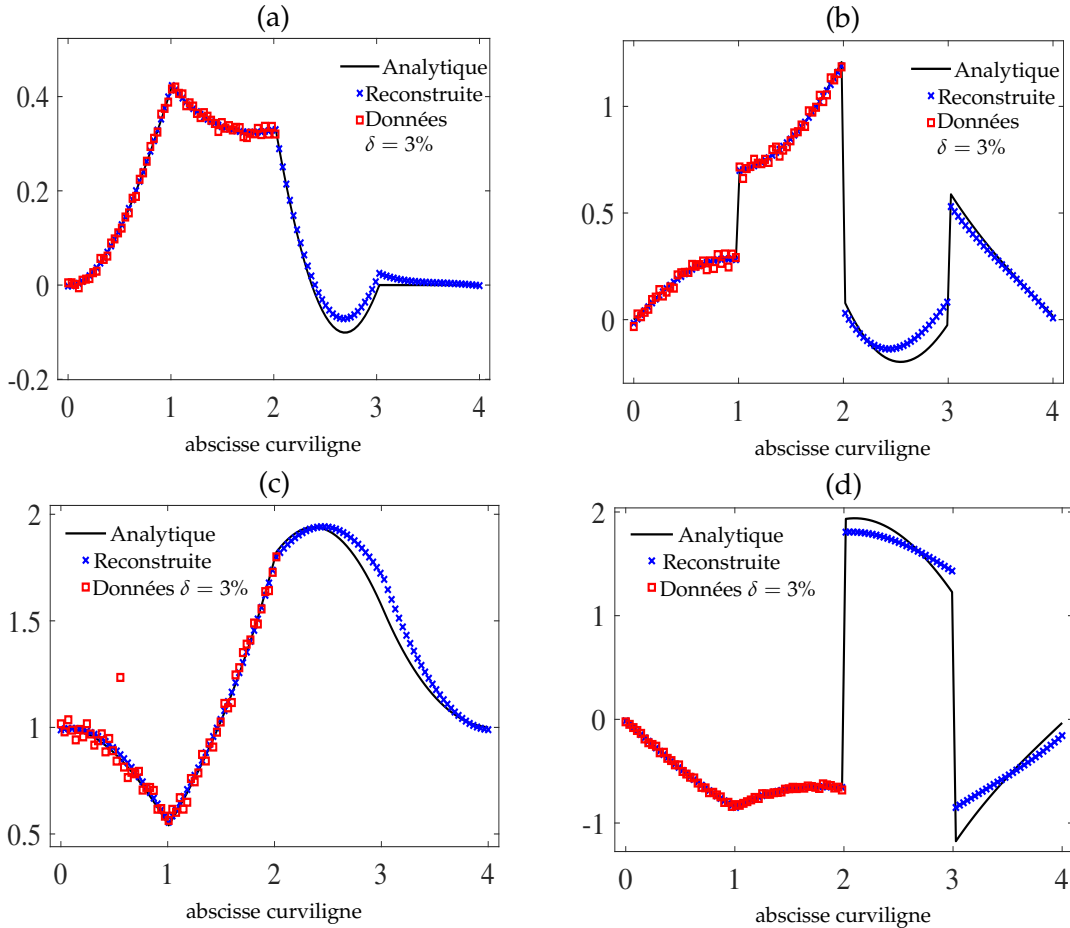


FIGURE 1.11 – Reconstructions de  $u$  (a),  $u_n$  (b),  $v$  (c) et  $v_n$  (d) pour l'Exemple 2 avec  $c = 10^{-1}$  et des données bruitées  $\delta = 3\%$  situées sur deux côtés adjacents.

Les reconstructions dans le cas des données bruitées sont données sur les Figures 1.11 et 1.12 où les données sont situées sur deux côtés adjacents ou sur deux côtés opposés respectivement. Les reconstructions sont clairement meilleures dans le second cas car l'ensemble des coins du domaine appartient à la partie connue  $\Gamma_d$  de la frontière, générant ainsi une facilité de reconstruction de la dérivée normale puisqu'elle est discontinue à ces endroits. Cependant, la reconstruction dans le cas de côtés adjacents n'est pas si mauvaise puisque la reconstruction a conservé l'allure de la courbe de la solution exacte avec un petit décalage mais en faisant bien apparaître la discontinuité des dérivées normales  $u_n$  et  $v_n$  au niveau du coin appartenant à  $\Gamma_i$ .

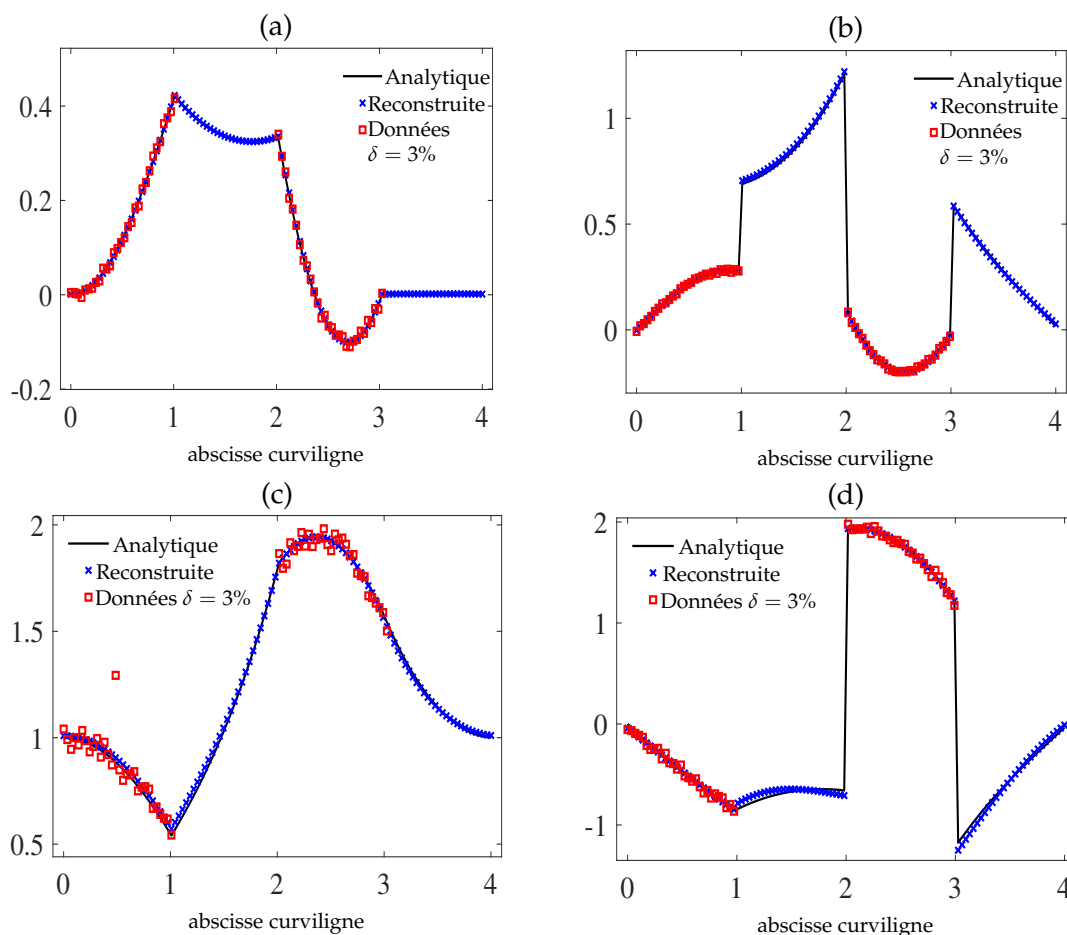


FIGURE 1.12 – Reconstructions de  $u$  (a),  $u_n$  (b),  $v$  (c) et  $v_n$  (d) pour l'Exemple 2 avec  $c = 10^{-1}$  et des données bruitées  $\delta = 3\%$  situées sur deux côtés opposés.

### 1.5.6 Conclusion sur la discrétisation par la méthode des solutions fondamentales

Nous avons réalisé dans cette section l'implémentation numérique de l'algorithme de régularisation évanescence en utilisant la méthode des solutions fondamentales. Nous avons également réalisé une étude comparative numérique permettant la validation du nouveau critère d'arrêt introduit dans ce chapitre. On peut en conclure que presque tous les critères proposés pour arrêter l'algorithme à régularisation évanescence donnent quasiment les mêmes résultats, sauf pour des situations particulières comme un coefficient de régularisation  $c \geq 10^{-1}$  ou un petit nombre de données. Nous avons aussi étudié l'influence des paramètres de la MFS sur la reconstruction des conditions aux limites. Les résultats de reconstruction obtenus sont examinés dans le cas de domaines à frontières lisses où il a été montré que la solution obtenue est stable vis-à-vis du bruit ajouté aux données. Les reconstructions obtenues dans le cas de domaine non régulier de type carré sont relativement bonnes malgré la présence de coins dans la partie inconnue de la frontière et elles ont montré, aussi, une robustesse de la méthode dans le cas de données situées sur deux côtés opposés.

## 1.6 Discrétisation par la méthode des éléments finis

L'implémentation numérique par la méthode des éléments finis des problèmes du 4ème ordre peut générer une certaine difficulté car elle nécessite souvent l'utilisation de fonctions d'interpolations de degrés importants et des éléments finis plus élaborées. Dans le cas du problème de Cauchy associé à l'équation biharmonique, Eyimi [33] a procédé à une factorisation du problème de Cauchy associé à l'équation biharmonique en deux problèmes de Cauchy respectivement associés à l'équation de Laplace et à l'équation de Poisson :

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 & \text{dans } \Omega \\ v = \mu_d, & \text{sur } \Gamma_d \\ v_{,n} = \phi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{cases} \quad (1.31a) \quad \begin{cases} -\Delta u = v & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ u_{,n} = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{cases} \quad (1.31b)$$

Il a ensuite appliqué la régularisation évanescence à chaque problème successivement. Ce procédé permet certes d'approximer et de reconstruire la solution biharmonique, mais peut engendrer des incertitudes que ce soit dans le choix du critère d'arrêt ou dans le choix du paramètre de régularisation, ainsi que sur le temps de calcul vu qu'il y aura deux algorithmes à résoudre, mais aussi par le fait que la solution du premier problème (1.31a) est ensuite injectée en tant que donnée dans le second problème (1.31b). Nous proposons dans cette section une alternative de résolution du problème biharmonique par éléments finis sans passer par la factorisation tout en préservant le même type d'interpolation Lagrangienne  $C^0$ . Cependant, nous utilisons des éléments finis quadratiques  $Q_2$  contrairement aux travaux déjà réalisés par Eyimi. Nous effectuons ensuite une comparaison numérique des deux méthodes après avoir respectivement présenté leurs formulations continues et discrètes.

### 1.6.1 Méthode de régularisation évanescence pour le problème de Cauchy factorisé

Nous présentons ici la formulation continue de la méthode de régularisation évanescence appliquée au problème de Cauchy factorisé (1.31). Nous commençons par définir les espaces fonctionnels associés à chaque sous-problème :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_v(\Gamma) = \{ \mathbf{V} = (\mu, \phi) \in H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-3/2}(\Gamma) \\ | \exists w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \quad w|_\Gamma = \mu, \quad w_{,n} = \phi \}, \end{aligned}$$

et pour tout  $v \in \mathcal{H}_v(\Gamma)$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_u(\Gamma, v) = \{ \mathbf{U} = (\varphi, \psi) \in H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \\ | \exists w \in \mathcal{H}^2(\Omega)(\Omega, v), \quad w|_\Gamma = \varphi, \quad w' = \psi \}, \end{aligned}$$

tels que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^1(\Omega) &= \{ v \in L^2(\Omega) \mid -\Delta v = 0 \text{ on } \Omega \}, \\ \mathcal{H}^2(\Omega)(\Omega, v) &= \{ u \in H^2(\Omega) \mid -\Delta u = v \text{ on } \Omega \}. \end{aligned}$$

Nous pouvons ensuite définir une formulation équivalente des deux sous-problèmes. Pour le problème (1.31a) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{V} = (v, v_n) \in \mathcal{H}_v(\Gamma) \text{ tel que} \\ \mathbf{V} = \Phi_d \text{ sur } \Gamma_d \end{cases} \quad (1.32a)$$

où  $\Phi_d = (\mu_d, \phi_d)$  et pour le problème (1.31b) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{U} = (u, u_n) \in \mathcal{H}_u(\Gamma, v) \text{ tel que} \\ \mathbf{U} = \Psi_d \text{ on } \Gamma_d \end{cases} \quad (1.32b)$$

où  $\Psi_d = (\varphi_d, \psi_d)$ .

Finalement, l'application de la régularisation évanescence permet de définir les deux algorithmes suivants :

Soient  $c_1 > 0$  et  $\mathbf{V}^0 \in \mathcal{H}_v(\Gamma)$ ,

$$\begin{cases} J_{c_1}^{k+1}(\mathbf{V}^{k+1}) \leq J_{c_1}^{k+1}(\mathbf{W}), \quad \forall \mathbf{W} \in \mathcal{H}_v(\Gamma), \quad \forall k \geq 0, \\ \text{où } J_{c_1}^{k+1}(\mathbf{W}) = \|\mathbf{W}|_{\Gamma_d} - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 + c_1 \|\mathbf{W} - \mathbf{V}^k\|_{H(\Gamma)}^2 \end{cases}$$

pour le problème (1.31a), on définit ensuite  $\mathbf{V}_{\text{opt}} \equiv (v_{\text{opt}}, v_{n,\text{opt}}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{V}^{k+1}$ .

Ensuite, Soient  $c_2 > 0$  et  $\mathbf{U}^0 \in \mathcal{H}_u(\Gamma, v_{\text{opt}})$  et

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{U}^{k+1} \in \mathcal{H}_u(\Gamma, v_{\text{opt}}) \text{ tel que} \\ J_{c_2}^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}) \leq J_{c_2}^{k+1}(\mathbf{W}), \quad \forall \mathbf{W} \in \mathcal{H}_u(\Gamma, v_{\text{opt}}), \\ \text{où } J_{c_2}^{k+1}(\mathbf{W}) = \|\mathbf{W}|_{\Gamma_d} - \Psi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 + c_2 \|\mathbf{W} - \mathbf{U}^k\|_{H(\Gamma)}^2 \end{cases}$$

pour le problème (1.31b).

## 1.6.2 Caractérisation des espaces d'approximation

Nous définissons ici les espaces d'approximation des espaces continus définis précédemment. Nous considérons tout d'abord une discrétisation par éléments QUA8 (rectangulaires à 8 nœuds) [73] notée  $\Omega_h$  du domaine  $\Omega$  telle que :

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{Y \in \Omega_h} Y,$$

où  $h$  est le paramètre de discrétisation représentant le pas du maillage (ou le plus grand pas si le maillage n'est pas uniforme). Notons  $V^h(\Omega)$ ,  $V^h(\Gamma)$  et  $W^h(\Gamma)$  les espaces d'approximation des espaces  $H^1(\Omega)$ ,  $H^{1/2}(\Gamma)$  et  $H^{-1/2}(\Gamma)$  respectivement, définis comme suit :

$$\begin{aligned} V^h(\Omega) &= \{w^h \in C^0(\overline{\Omega}), \quad w^h|_Y \in P_k(Y), \quad \forall Y \in \Omega_h\}, \\ V^h(\Gamma) &= V^h(\Omega)|_{\Gamma}, \\ W^h(\Gamma) &= V^h(\Gamma). \end{aligned}$$



La dernière égalité ci-dessus est un choix numérique. Nous avons souvent l'habitude de choisir un espace plus restrictif pour approximer la dérivée normale (d'ordre inférieur que celui la solution) mais nous proposons ici de rechercher les dérivées normales dans les mêmes espaces pour donner moins de contraintes sur l'approximation de ces quantités. En effet, nous verrons plus tard qu'il s'agira de variables indépendantes grâce à l'algorithme de régularisation évanescence et nous ne prendrons que celles qui satisfont l'équation d'équilibre du problème. Pour  $(v^h, v_{,n}^h)$  et  $(u^h, u_{,n}^h) \in V^h(\Gamma) \times W^h(\Gamma)$ , l'approximation de la formulation variationnelle pour chaque problème (1.31a) et (1.31b) s'écrit respectivement :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla v^h \nabla w^h d\Omega - \int_{\Gamma} v_{,n}^h w^h d\sigma = 0, & \forall w^h \in V^h(\Omega). \\ \int_{\Omega} \nabla u^h \nabla w^h d\Omega - \int_{\Gamma} u_{,n}^h w^h d\sigma = \int_{\Omega} v^h w^h d\Omega, & \forall w^h \in V^h(\Omega). \end{cases} \quad (1.34)$$

On peut maintenant définir les espaces approchés suivants correspondant aux solutions de l'équation d'équilibre des deux sous-problèmes (1.35a) et (1.35b) et celui qui correspond au problème biharmonique (1.35c) :

$$\mathcal{H}_v^h(\Gamma) = \left\{ (\vartheta^h, \xi^h) \in V^h(\Gamma) \times W^h(\Gamma) \mid \exists w^h \in V^h(\Omega), \quad w|_{\Gamma} = \vartheta^h, \right. \\ \left. \int_{\Omega} \nabla w^h \nabla v d\Omega - \int_{\Gamma} \xi^h v d\sigma = 0 \quad \forall v \in V^h(\Omega) \right\}, \quad (1.35a)$$

$$\mathcal{H}_u^h(\Gamma, v) = \left\{ (\varphi^h, \psi^h) \in V^h(\Gamma) \times W^h(\Gamma) \mid \exists w^h \in V^h(\Omega), \quad w|_{\Gamma} = \varphi^h, \right. \\ \left. \int_{\Omega} \nabla w^h \nabla v d\Omega - \int_{\Gamma} \psi^h v d\sigma = \int_{\Omega} \psi^h v^h d\Omega, \quad \forall v \in V^h(\Omega) \right\}, \quad (1.35b)$$

$$\mathcal{H}^h(\Gamma) = \left\{ \Phi^h = (\varphi^h, \psi^h, \mu^h, \phi^h) \in V^h(\Gamma) \times W^h(\Gamma) \times V^h(\Gamma) \times W^h(\Gamma) \right. \\ \left. \mid \exists (u^h, v^h) \in V^h(\Omega) \times V^h(\Omega), \quad u|_{\Gamma} = \varphi^h, \quad v|_{\Gamma} = \mu^h, \right. \\ \left. \int_{\Omega} \nabla u^h \nabla w^h d\Omega - \int_{\Gamma} \psi^h w^h d\sigma = \int_{\Omega} v^h w^h d\Omega, \quad \forall w^h \in V^h(\Omega), \right. \\ \left. \int_{\Omega} \nabla v^h \nabla w^h d\Omega - \int_{\Gamma} \phi^h w^h d\sigma = 0 \quad \forall w^h \in V^h(\Omega) \right\}. \quad (1.35c)$$

Soient  $\underline{V}$  et  $\underline{U}$  les deux vecteurs représentant les  $N_{\Gamma}$  valeurs nodales de  $v^h$  et  $u^h$  sur la frontière. De plus, nous notons  $\underline{V}'$  et  $\underline{U}'$  les deux vecteurs composés par les  $N'$  valeurs discrètes de  $v_{,n}^h$  et  $u_{,n}^h$  sur la frontière. En effet, la dérivée normale n'étant pas définie aux nœuds des coins dans le cas de domaines non réguliers, nous choisissons de représenter la valeur de la dérivée normale uniquement sur les arêtes. C'est la raison pour laquelle la taille des vecteurs représentant les dérivées normales pourrait être différente de celle des fonctions. Notons  $N_{\Omega}$  le nombre total des nœuds à l'intérieur du domaine  $\Omega$  et  $\{\mathcal{N}_i\}_{i \in \overline{1, N_{\Omega} + N_{\Gamma}}}$  l'ensemble des fonctions d'interpolation définissant une base de l'espace  $V^h(\Omega)$ , i.e.

$$V^h(\Omega) = \text{vect}\{\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_{N_{\Omega}}, \mathcal{N}_{N_{\Omega}+1}, \dots, \mathcal{N}_{N_{\Omega}+N_{\Gamma}}\}.$$

Le choix de l'espace dans lequel nous souhaitons caractériser les solutions en dimension finie est l'aspect crucial de la méthode des éléments finis. Comme nous avons déjà défini cet espace par les fonctions  $C^0$  par morceaux, l'interpolation de Lagrange est le moyen le plus naturel pour définir de telles fonctions tout en satisfaisant la condition de conformité des éléments. Nous verrons dans les deux chapitres suivants d'autres exemples de fonctions d'interpolation plus compliquées. L'interpolation nous permet d'écrire les équations d'équilibre sous la forme matricielle suivante où nous avons séparé les lignes correspondant aux nœuds frontière de celles correspondant aux nœuds internes au domaine dans les vecteurs solutions :

$$\left\| \begin{array}{l} \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ie} \\ K_{ei} & K_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_i \\ \underline{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -B\underline{V}' \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ie} \\ K_{ei} & K_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_i \\ \underline{U} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{ii} & M_{ie} \\ M_{ei} & M_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_i \\ \underline{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -B\underline{U}' \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (1.36)$$

où  $K$  et  $M$  sont les matrices de rigidité et de masse respectivement dans lesquelles les indices  $i$  et  $e$  représentent les nœuds frontière et les nœuds internes respectivement.

Nous réalisons à la suite une condensation dynamique de Guyan permettant de réduire la taille du système obtenu par la discrétisation par éléments finis en reformulant les matrices de rigidité et de masse et en ne l'exprimant que sur les nœuds de la frontière. Cela donne les équations d'équilibre suivantes :

$$\left\| \begin{array}{l} H\underline{V} = -B\underline{V}', \\ H\underline{U} - D\underline{V} = -B\underline{U}', \end{array} \right. \quad (1.37)$$

où

$$\begin{aligned} H &= -K_{ei}K_{ii}^{-1}K_{ie} + K_{ee}, \\ D &= M_{ee} - M_{ei}K_{ii}^{-1}K_{ie} - K_{ei}K_{ii}^{-1}(M_{ie} - M_{ii}K_{ii}^{-1}K_{ie}), \end{aligned} \quad (1.38)$$

qui sont maintenant de taille  $N_\Gamma \times N'$ . Nous pouvons alors définir les espaces des solutions discrètes pour l'équation de Laplace

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_v^h(\Gamma) &= \{ \underline{V} = (\underline{V}, \underline{V}') \in \mathbb{R}^{N_\Gamma} \times \mathbb{R}^{N'} \\ & \quad | \quad \mathcal{E}(\underline{V}, \underline{V}') \equiv H\underline{V} + B\underline{V}' = 0_{\mathbb{R}^{N_\Gamma}} \} \end{aligned}$$

et pour l'équation de Poisson, pour chaque  $\underline{V} = (\underline{V}, \underline{V}') \in \mathbb{H}_v^h(\Gamma)$

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_u^h(\Gamma, \underline{V}) &= \{ \underline{U} = (\underline{U}, \underline{U}') \in \mathbb{R}^{N_\Gamma} \times \mathbb{R}^{N'} \\ & \quad | \quad \Lambda(\underline{U}, \underline{U}', \underline{V}) \equiv H\underline{U} + B\underline{U}' - D\underline{V} = 0_{\mathbb{R}^{N_\Gamma}} \} \end{aligned}$$

ainsi que pour l'équation biharmonique

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^h(\Gamma) &= \{ \underline{U} = (\underline{U}, \underline{U}', \underline{V}, \underline{V}') \in \mathbb{R}^{N_\Gamma} \times \mathbb{R}^{N'} \times \mathbb{R}^{N_\Gamma} \times \mathbb{R}^{N'} \\ & \quad | \quad \mathcal{E}(\underline{V}, \underline{V}') \equiv H\underline{V} + B\underline{V}' = 0_{\mathbb{R}^{N_\Gamma}}, \\ & \quad \Lambda(\underline{U}, \underline{U}', \underline{V}) \equiv H\underline{U} + B\underline{U}' - D\underline{V} = 0_{\mathbb{R}^{N_\Gamma}} \}. \end{aligned}$$

### 1.6.3 L'algorithme de régularisation évanescence discret pour le problème factorisé

Nous détaillons ici les algorithmes de régularisation évanescence pour le problème factorisé dans leurs formes discrètes obtenues par la méthode des éléments finis. Nous proposons de résoudre les deux algorithmes de manière successive dans le sens que le second algorithme est lancé après que le premier ait atteint la convergence. Cela permet de résoudre le second problème avec un second membre qui correspond à la solution du premier problème.

Soient  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$  et  $\underline{\mathbf{V}}^0 = (0_{\mathbb{R}^{N_\Gamma}}, 0_{\mathbb{R}^{N'}})$ ,  $\underline{\mathbf{U}}^0 = (0_{\mathbb{R}^{N_\Gamma}}, 0_{\mathbb{R}^{N'}})$ , l'algorithme évanescence associé au problème de Cauchy pour l'équation de Laplace s'écrit

$$\begin{cases} \text{Trouver } \underline{\mathbf{V}}^{k+1} = (\underline{\mathbf{V}}^{k+1}, \underline{\mathbf{V}}'^{k+1}) \in \mathbb{R}^{N_\Gamma} \times \mathbb{R}^{N'} \text{ tel que} \\ J_{c_1}^{k+1}(\underline{\mathbf{V}}^{k+1}, \underline{\mathbf{V}}'^{k+1}) \leq J_{c_1}^{k+1}(\underline{\mathbf{W}}, \underline{\mathbf{P}}), \quad \forall (\underline{\mathbf{W}}, \underline{\mathbf{P}}) \in \mathbb{H}_v^h(\Gamma), \end{cases} \quad (1.39a)$$

Notons  $\underline{\mathbf{V}}_{\text{opt}} = (\underline{\mathbf{V}}_{\text{opt}}, \underline{\mathbf{V}}'_{\text{opt}})$  la solution optimale obtenue à la convergence. Elle est introduite dans le second problème associé à l'équation de Poisson suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } \underline{\mathbf{U}}^{k+1} = (\underline{\mathbf{U}}^{k+1}, \underline{\mathbf{U}}'^{k+1}) \in \mathbb{R}^{N_\Gamma} \times \mathbb{R}^{N'} \text{ tel que} \\ J_{c_2}^{k+1}(\underline{\mathbf{U}}^{k+1}, \underline{\mathbf{U}}'^{k+1}) \leq J_{c_2}^{k+1}(\underline{\mathbf{W}}, \underline{\mathbf{P}}), \quad \forall (\underline{\mathbf{W}}, \underline{\mathbf{P}}) \in \mathbb{H}_u^h(\Gamma, \underline{\mathbf{V}}_{\text{opt}}), \end{cases} \quad (1.39b)$$

Ces algorithmes sont des problèmes d'optimisation sous contraintes égalités. Nous utilisons à cet effet la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour résoudre ces problèmes d'optimisation de manière discrète. Soient  $\underline{\lambda}^{k+1}$  et  $\underline{\zeta}^{k+1}$  les deux  $N_\Gamma$  multiplicateurs de Lagrange associés à chaque problème, nous obtenons respectivement :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\underline{\mathbf{V}}^{k+1}, \underline{\mathbf{V}}'^{k+1}, \underline{\lambda}^{k+1}) \in \mathbb{R}^{N_\Gamma} \times \mathbb{R}^{N_\Gamma} \times \mathbb{R}^{N'} \text{ tel que} \\ \nabla J_{c_1}^{k+1}(\underline{\mathbf{V}}^{k+1}, \underline{\mathbf{V}}'^{k+1}) + (\underline{\lambda}^{k+1})^t \nabla \Xi(\underline{\mathbf{V}}^{k+1}, \underline{\mathbf{V}}'^{k+1}) = 0, \\ \Xi(\underline{\mathbf{V}}^{k+1}, \underline{\mathbf{V}}'^{k+1}) = 0_{\mathbb{R}^{N_\Gamma}}, \end{cases} \quad (1.40a)$$

puis

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\underline{\mathbf{U}}^{k+1}, \underline{\mathbf{U}}'^{k+1}, \underline{\zeta}^{k+1}) \in \mathbb{R}^{N_\Gamma} \times \mathbb{R}^{N_\Gamma} \times \mathbb{R}^{N'} \text{ tel que} \\ \nabla J_{c_2}^{k+1}(\underline{\mathbf{U}}^{k+1}, \underline{\mathbf{U}}'^{k+1}) + (\underline{\zeta}^{k+1})^t \nabla \Lambda(\underline{\mathbf{U}}^{k+1}, \underline{\mathbf{U}}'^{k+1}, \underline{\mathbf{V}}_{\text{opt}}) = 0, \\ \Lambda(\underline{\mathbf{U}}^{k+1}, \underline{\mathbf{U}}'^{k+1}, \underline{\mathbf{V}}_{\text{opt}}) = 0_{\mathbb{R}^{N_\Gamma}}. \end{cases} \quad (1.40b)$$

Cela revient à résoudre à chaque itération les systèmes linéaires associés à chaque algorithme :

$$\begin{bmatrix} M_{\Gamma_d} + c_1 M_\Gamma & 0_{\mathbb{R}^{N_\Gamma \times N'}} & H^T \\ 0_{\mathbb{R}^{N' \times N_\Gamma}} & M_{\Gamma_d} + c_1 M_\Gamma & B^T \\ H & B & 0_{\mathbb{R}^{N_\Gamma \times N_\Gamma}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{V}}^{k+1} \\ \underline{\mathbf{V}}'^{k+1} \\ \underline{\lambda}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{\Gamma_d} \underline{\mu}_d + c_1 M_\Gamma \underline{\mathbf{V}}^k \\ M_{\Gamma_d} \underline{\phi}_d + c_1 M_\Gamma \underline{\mathbf{V}}'^k \\ 0_{\mathbb{R}^{N_\Gamma}} \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

et

$$\begin{bmatrix} M_{\Gamma_d} + c_2 M_{\Gamma} & 0_{\mathbb{R}^{N_{\Gamma} \times N'}} & H^T \\ 0_{\mathbb{R}^{N' \times N_{\Gamma}}} & M_{\Gamma_d} + c_2 M_{\Gamma} & B^T \\ H & B & 0_{\mathbb{R}^{N_{\Gamma} \times N_{\Gamma}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}^{k+1} \\ \underline{U}'^{k+1} \\ \underline{\zeta}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{\Gamma_d} \underline{\varphi}_d + c_2 M_{\Gamma} \underline{U}^k \\ M_{\Gamma_d} \underline{\psi}_d + c_2 M_{\Gamma} \underline{U}'^k \\ -D \underline{V}_{\text{opt}} \end{bmatrix}, \quad (1.42)$$

avec  $M_{\Gamma}, M_{\Gamma_d} \in \mathcal{M}_{N_{\Gamma}, N_{\Gamma}}(\mathbb{R})$  tel que pour  $i = \overline{1, N_{\Gamma}}$  on a :

$$(M_{\Gamma})_{ij} = \sum_{j=1}^{N_{\Gamma}} \int_{\Gamma} \mathcal{N}_{j+N_{\Omega}} \mathcal{N}_{i+N_{\Omega}}, \quad (M_{\Gamma_d})_{ij} = \sum_{j=1}^{N_d} \int_{\Gamma_d} \mathcal{N}_{j+N_{\Omega}} \mathcal{N}_{i+N_{\Omega}}.$$

#### 1.6.4 L'algorithme de régularisation évanescence discret pour le problème biharmonique

On peut imaginer une stratégie différente pour modéliser le processus itératif discret de la méthode de régularisation évanescence pour le problème biharmonique en un seul algorithme et en utilisant la même méthode de discrétisation par éléments finis. Il s'agit alors de considérer les deux sous-problèmes du problème factorisé simultanément dans lesquels les contraintes égalités sont prises en compte en même temps.

Soit  $c > 0$  et  $\underline{U}^0 = (0_{\mathbb{R}^{N_{\Gamma}}}, 0_{\mathbb{R}^{N'}}, 0_{\mathbb{R}^{N_{\Gamma}}}, 0_{\mathbb{R}^{N'}})$

$$\begin{cases} \text{Trouver } \underline{U}^{k+1} = (\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}, \underline{V}^{k+1}, \underline{V}'^{k+1}) \in \mathbb{R}^{N_{\Gamma}} \times \mathbb{R}^{N'} \times \mathbb{R}^{N_{\Gamma}} \times \mathbb{R}^{N'} \text{ tel que} \\ J_c^{k+1}(\underline{U}^{k+1}) \leq J_c^{k+1}(\underline{W}, \underline{P}, \underline{S}, \underline{T}), \quad \forall (\underline{W}, \underline{P}, \underline{S}, \underline{T}) \in \mathbb{H}^h(\Gamma), \end{cases} \quad (1.43)$$

La résolution de cet algorithme est similaire à celle du problème factorisé. Il suffit de formuler les contraintes d'égalités à l'aide de l'opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : \mathbb{R}^{N_{\Gamma}} \times \mathbb{R}^{N'} \times \mathbb{R}^{N_{\Gamma}} \times \mathbb{R}^{N'} &\rightarrow \mathbb{R}^{2N_{\Gamma}} \\ (\underline{W}, \underline{P}, \underline{S}, \underline{T}) &\mapsto \begin{bmatrix} H & -D \\ 0_{\mathbb{R}^{N_{\Gamma} \times N_{\Gamma}}} & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{W} \\ \underline{S} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0_{\mathbb{R}^{N_{\Gamma} \times N'}} \\ 0_{\mathbb{R}^{N_{\Gamma} \times N'}} & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P} \\ \underline{T} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.44)$$

ce qui donne

$$\mathcal{E}(\underline{W}, \underline{P}, \underline{S}, \underline{T}) = 0, \quad \forall (\underline{W}, \underline{P}, \underline{S}, \underline{T}) \in \mathbb{H}^h(\Gamma).$$

Ainsi, en introduisant les multiplicateurs de Lagrange  $\underline{\eta}^{k+1} \equiv (\underline{\lambda}^{k+1}, \underline{\xi}^{k+1})^t$ , l'algorithme de la méthode de régularisation évanescence pour le problème biharmonique s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}, \underline{V}^{k+1}, \underline{V}'^{k+1}, \underline{\lambda}^{k+1}) \in \mathbb{R}^{N_{\Gamma}} \times \mathbb{R}^{N'} \times \mathbb{R}^{N_{\Gamma}} \times \mathbb{R}^{N'} \times \mathbb{R}^{N_{\Gamma}} \text{ tel que} \\ \nabla J_c^{k+1}(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}, \underline{V}^{k+1}, \underline{V}'^{k+1}) + (\underline{\eta}^{k+1})^t \nabla \mathcal{E}(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}, \underline{V}^{k+1}, \underline{V}'^{k+1}) = 0, \\ \mathcal{E}(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}, \underline{V}^{k+1}, \underline{V}'^{k+1}) = 0_{\mathbb{R}^{N_{\Gamma}}}. \end{cases} \quad (1.45)$$

Ce qui conduit à la résolution du système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \nabla J_c^{k+1} & \nabla \mathcal{E}^T \\ \nabla \mathcal{E} & 0_{\mathbb{R}^{N_\Gamma \times N_\Gamma}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}^{k+1} \\ \underline{\eta}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^k \\ 0_{\mathbb{R}^{N_\Gamma}} \end{bmatrix},$$

avec

$$\nabla J_c^{k+1} = \begin{bmatrix} M_{\Gamma_d} + cM_\Gamma & 0_{\mathbb{R}^{N_\Gamma \times N'}} & 0_{\mathbb{R}^{N_\Gamma \times N_\Gamma}} & 0_{\mathbb{R}^{N_\Gamma \times N'}} \\ 0_{\mathbb{R}^{N' \times N_\Gamma}} & M_{\Gamma_d} + cM_\Gamma & 0_{\mathbb{R}^{N' \times N_\Gamma}} & 0_{\mathbb{R}^{N' \times N'}} \\ 0_{\mathbb{R}^{N_\Gamma \times N_\Gamma}} & 0_{\mathbb{R}^{N_\Gamma \times N'}} & M_{\Gamma_d} + cM_\Gamma & 0_{\mathbb{R}^{N_\Gamma \times N'}} \\ 0_{\mathbb{R}^{N' \times N_\Gamma}} & 0_{\mathbb{R}^{N' \times N'}} & 0_{\mathbb{R}^{N' \times N_\Gamma}} & M_{\Gamma_d} + cM_\Gamma \end{bmatrix},$$

$$\nabla \mathcal{E} = \begin{bmatrix} H & B & -D & 0_{\mathbb{R}^{N' \times N_\Gamma}} & 0_{\mathbb{R}^{N_\Gamma \times N'}} & 0_{\mathbb{R}^{N_\Gamma \times N'}} \\ 0_{\mathbb{R}^{N_\Gamma \times N_\Gamma}} & 0_{\mathbb{R}^{N_\Gamma \times N'}} & H & B & 0_{\mathbb{R}^{N_\Gamma \times N'}} & 0_{\mathbb{R}^{N_\Gamma \times N'}} \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{F}^k = \begin{bmatrix} M_{\Gamma_d} \underline{\varphi}_d + c M_\Gamma \underline{\mathbf{U}}^k \\ M_{\Gamma_d} \underline{\psi}_d + c M_\Gamma \underline{\mathbf{U}}'^k \\ M_{\Gamma_d} \underline{\mu}_d + c M_\Gamma \underline{\mathbf{V}}^k \\ M_{\Gamma_d} \underline{\phi}_d + c M_\Gamma \underline{\mathbf{V}}'^k \end{bmatrix}.$$

### 1.6.5 Résultats numériques

Nous présentons dans cette section les résultats numériques obtenus avec les deux algorithmes de régularisation évanescence correspondants au problème factorisé et au problème biharmonique implémentés par la méthode des éléments finis dans lesquels les données sont accessibles uniquement sur la portion  $\Gamma_d$  de la frontière. Nous étudions différents exemples de domaines réguliers (couronne et disque) et non réguliers (carré). Nous étudions de plus l'efficacité de chacune des formulations proposées. Nous considérons dans ce cas la solution analytique suivante :

$$\begin{cases} u^{an}(x, y) = \frac{1}{2}x(\sin x \cosh y - \cos x \sinh y), \\ v^{an}(x, y) = \cosh y \cos x + \sinh y \sin x, \end{cases} \quad (x, y) \in \Omega. \quad (1.46)$$

#### 1.6.5.1 Domaine de type couronne

Soit  $\Omega$  un domaine régulier de type couronne (Figure 1.13) avec un rayon extérieur  $R = 1$  et rayon intérieur  $r = \frac{1}{2}$ , i.e.  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$  tel que la frontière extérieure  $\Gamma_d = \{(x, y) \in \Gamma, \sqrt{x^2 + y^2} = 1\}$  est la partie accessible de la frontière, tandis que la frontière intérieure  $\Gamma_i = \{(x, y) \in \Gamma, \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\}$  est la partie inaccessible.

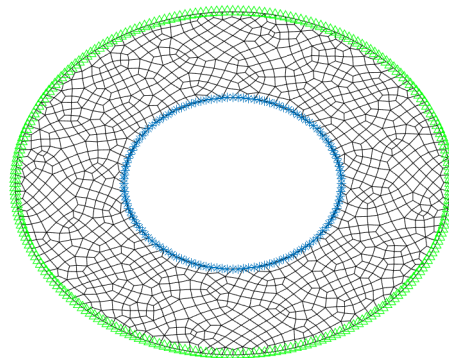


FIGURE 1.13 – Maillage quadrangulaire (QUA8) d'un domaine de type couronne avec un pas de discrétisation  $h = 1/20$  tel que les mesures ne sont accessibles que sur la frontière extérieure  $\triangle$  tandis que la frontière intérieure  $*$  est inaccessible aux mesures.

#### 1.6.5.1.1 Résultats numériques pour le problème factorisé

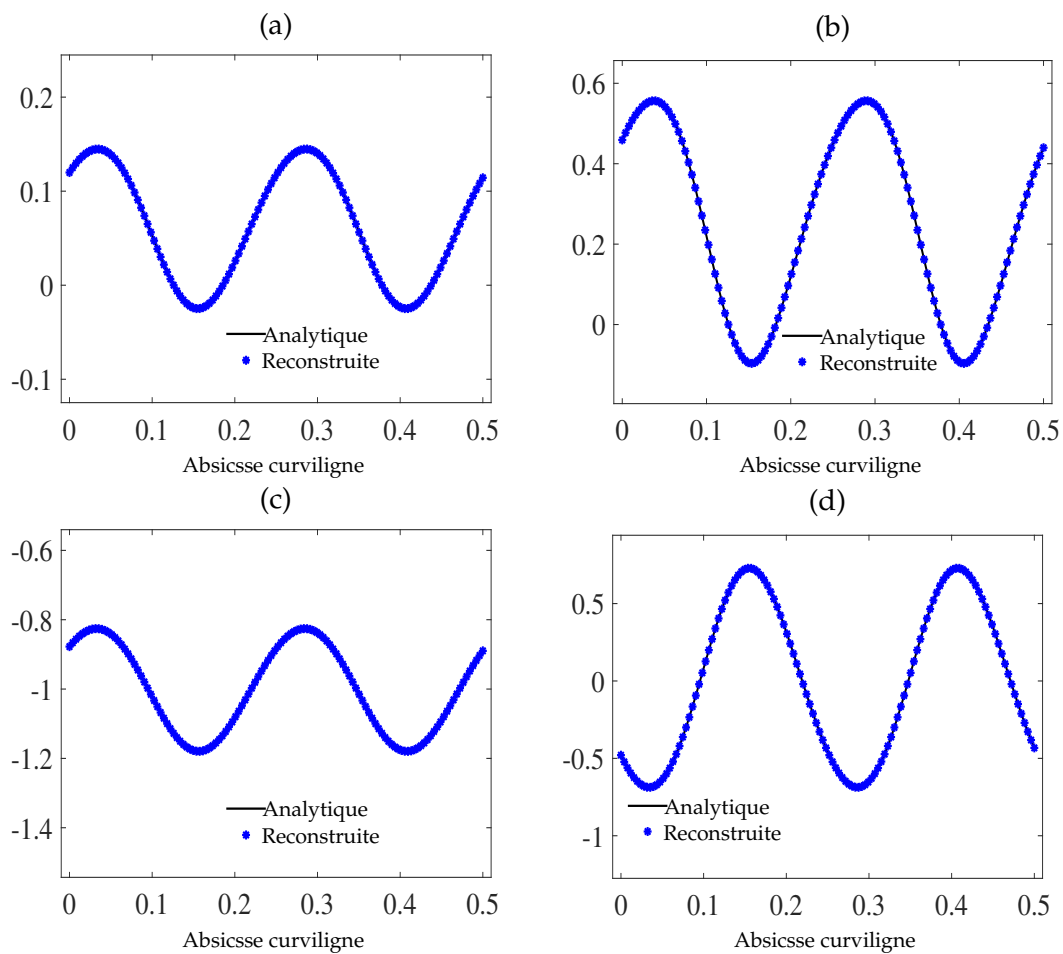


FIGURE 1.14 – Reconstitutions de  $u$  (a),  $u_n$  (b),  $v$  (c),  $v_n$  (d) avec l'algorithme factorisé sur le bord intérieur  $\Gamma_i$  de la couronne avec des données compatibles et  $c = 10^{-6}$ .

L'algorithme de régularisation évanescence associé au problème factorisé avec des données compatibles a été mis en œuvre ici en utilisant la méthode des éléments finis. Il permet de reconstruire parfaitement la solution sur le bord intérieur (Figure 1.14) et sur le bord extérieur (Figure 1.15). Cette reconstruction est réalisée en choisissant  $c = 10^{-6}$ .

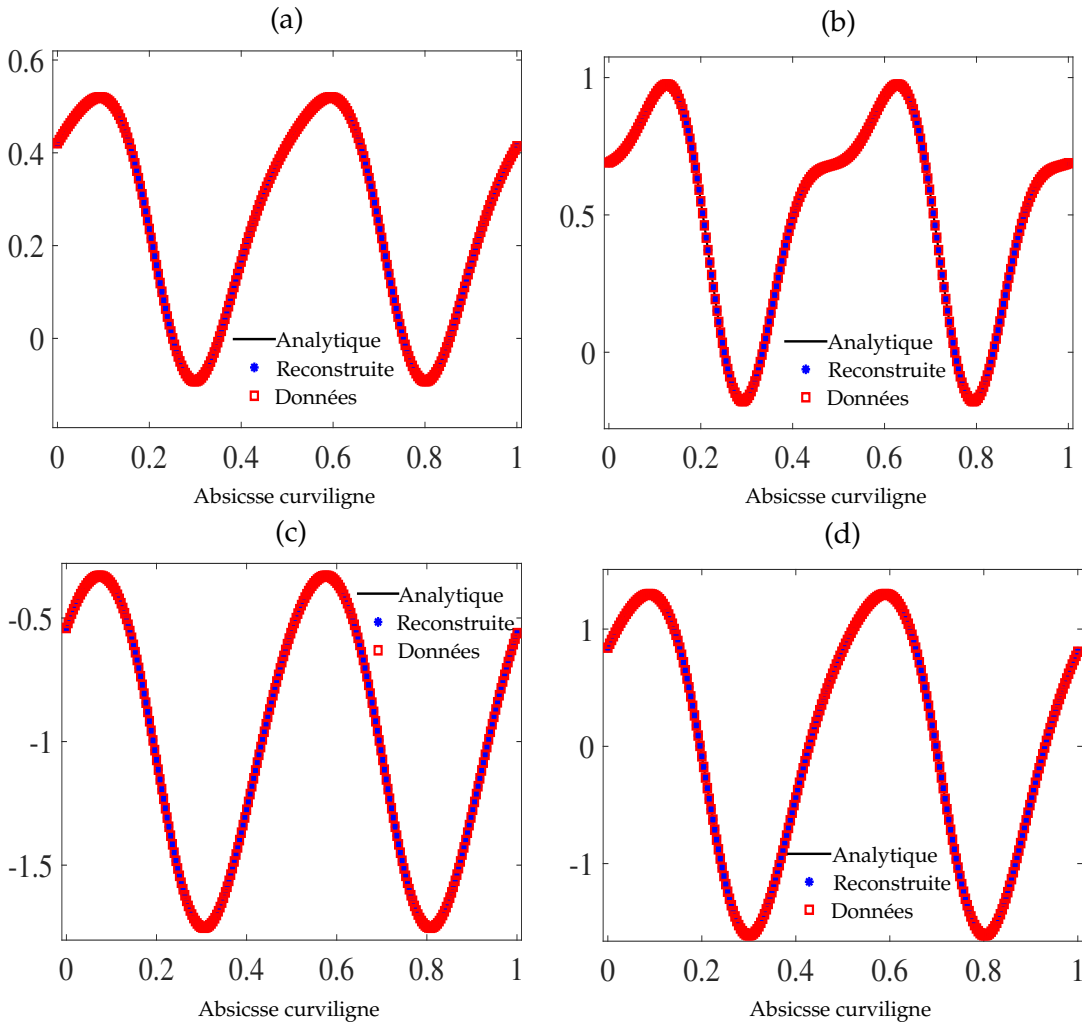


FIGURE 1.15 – Reconstructions de  $u$  (a),  $u_n$  (b),  $v$  (c),  $v_n$  (d) avec l'algorithme factorisé sur le bord extérieur  $\Gamma_d$  de la couronne avec des données compatibles et à  $c = 10^{-6}$ .

La Figure 1.16 donne l'évolution des termes de contrôle au cours des itérations ainsi que celle des erreurs relatives dans le cas de données compatibles. Notez que toutes les estimations d'erreur deviennent constantes en même temps que les termes de contrôle. Cela montre la validité des critères d'arrêt dans la discrétisation par éléments finis. Cependant, il a été trouvé numériquement que le terme  $J_{\Gamma_d}$  est toujours décroissant mais avec une petite variation entre chaque itération. Ainsi, l'application du critère d'arrêt associé  $C_{J_{\Gamma_d}}$  dans le cas de données compatibles demeure inefficace, mais nous pouvons modifier ce dernier de sorte que cette variation entre deux itérations successives doit être supérieure à une certaine valeur fixée  $\varepsilon$ .

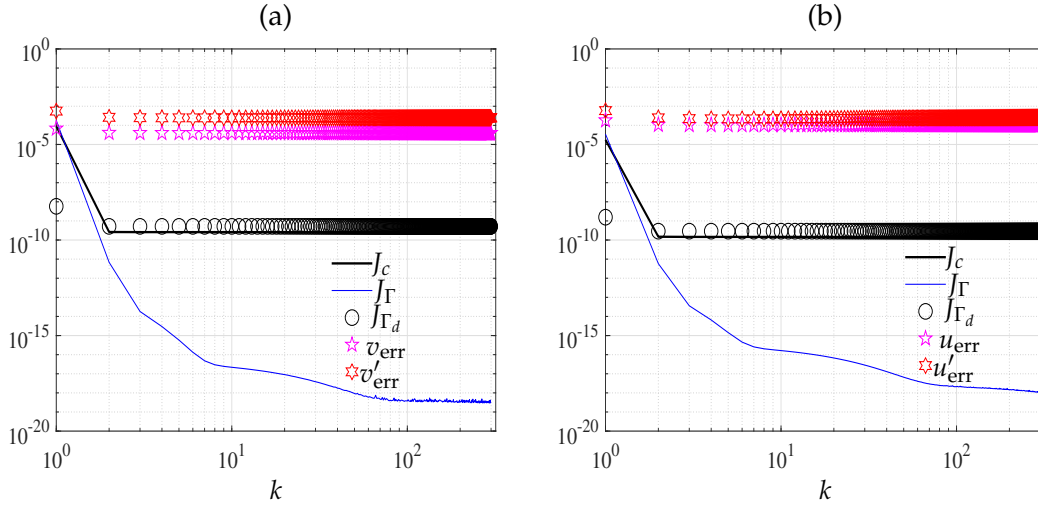


FIGURE 1.16 – Évolutions des termes de contrôle et des estimations d'erreur au cours des itérations de l'**algorithme factorisé** pour chaque sous-problème (a) associé à  $v$  et (b) associé à  $u$  avec des données compatibles et pour  $c = 10^{-5}$ .

$c$	Sous-problème (1.31a)			Sous-problème (1.31b)		
	$k_{\text{opt}}^v$	$v_{\text{err}}$	$v'_{\text{err}}$	$k_{\text{opt}}^u$	$u_{\text{err}}$	$u'_{\text{err}}$
$10^{-4}$	468	$4.00 \times 10^{-5}$	$2.50 \times 10^{-4}$	878	$1.05 \times 10^{-4}$	$2.48 \times 10^{-4}$
$10^{-5}$	46	$4.00 \times 10^{-5}$	$2.50 \times 10^{-4}$	68	$1.05 \times 10^{-4}$	$2.46 \times 10^{-4}$
$10^{-6}$	14	$4.00 \times 10^{-5}$	$2.51 \times 10^{-4}$	115	$1.07 \times 10^{-4}$	$2.98 \times 10^{-4}$
$10^{-7}$	7	$4.00 \times 10^{-5}$	$2.55 \times 10^{-4}$	14	$1.07 \times 10^{-4}$	$3.02 \times 10^{-4}$
$10^{-8}$	4	$4.08 \times 10^{-5}$	$2.34 \times 10^{-3}$	3	$1.11 \times 10^{-4}$	$3.07 \times 10^{-3}$

TABLE 1.9 – Évolutions des estimations d'erreur et des itérations d'arrêt  $k_{\text{opt}}$  du critère d'arrêt lié au terme  $J_{\Gamma}$  pour différentes valeurs de  $c$  avec données compatibles et pour chaque sous-problème du **problème factorisé**.

Le Tableau 1.9 montre que la solution du problème factorisé avec des données compatibles obtenue par l'algorithme de régularisation évanescence est indépendante du choix du paramètre de régularisation. En fait, il agit comme un accélérateur du processus itératif. Cependant il ne doit pas être trop petit pour maintenir l'effet de régularisation.

Ensuite, nous étudions l'influence du bruit sur la reconstruction de la solution. Par conséquent, nous considérons que les données  $(\varphi_d, \psi_d, \mu_d, \phi_d)$  sont perturbées comme suit

$$\begin{cases} \varphi_d(\mathbf{x}) = u^{an}(\mathbf{x}) + \delta \max(u^{an}(\mathbf{x})) \cdot \rho, & \mathbf{x} \in \Gamma_d, \\ \psi_d(\mathbf{x}) = u_{,n}^{an}(\mathbf{x}) + \delta \max(u_{,n}^{an}(\mathbf{x})) \cdot \rho, & \mathbf{x} \in \Gamma_d, \\ \mu_d(\mathbf{x}) = v^{an}(\mathbf{x}) + \delta \max(v^{an}(\mathbf{x})) \cdot \rho, & \mathbf{x} \in \Gamma_d, \\ \phi_d(\mathbf{x}) = v_{,n}^{an}(\mathbf{x}) + \delta \max(v_{,n}^{an}(\mathbf{x})) \cdot \rho, & \mathbf{x} \in \Gamma_d, \end{cases} \quad (1.47)$$

où  $\delta$  est le niveau de bruit en pourcentage ajouté aux données exactes et  $\rho$  est un nombre pseudo-aléatoire de la distribution uniforme standard dans  $[-1, 1]$ .



La Figure 1.17 montre la reconstruction de la solution sur la frontière extérieure pour trois valeurs différentes de niveau de bruit  $\delta = 1\%, 3\%$  et  $5\%$ . On voit que la méthode a réussi à reconstruire la solution dans le cas de données bruitées. Notez aussi que la reconstruction de  $v$  et  $v_n$  est légèrement meilleure que celle de  $u$  et  $u_n$ . De plus, comme on peut le voir sur la Figure 1.18, le bruit sur les données présentes sur la frontière extérieure a été supprimé dans la reconstruction de  $v$  et  $u$ . Cela signifie que la méthode agit comme un filtre sur les données bruitées. Cependant, ce n'est pas le cas pour  $v_n$  et  $u_n$ .

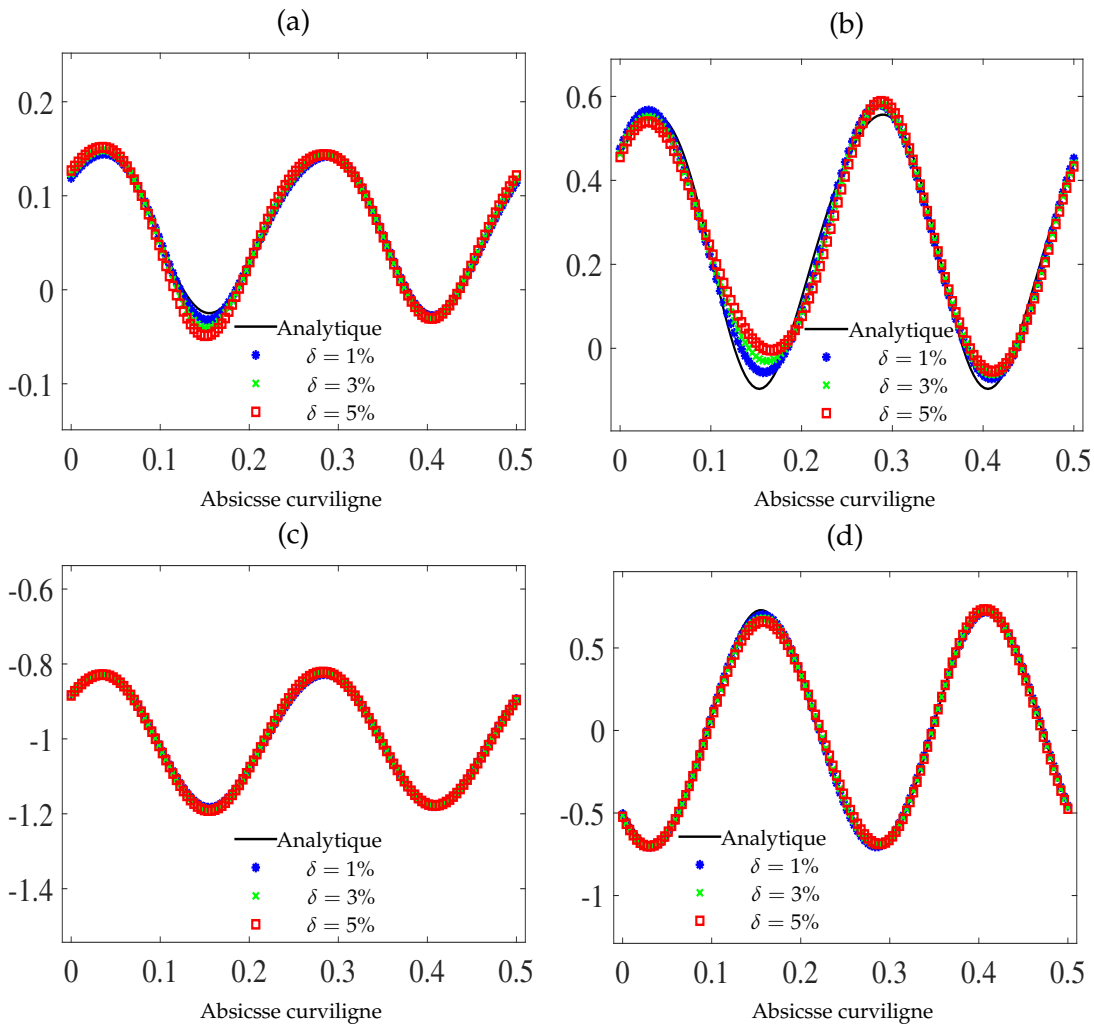


FIGURE 1.17 – Reconstructions de  $u$  (a),  $u_n$  (b),  $v$  (c),  $v_n$  (d) avec l’algorithme factorisé sur le bord intérieur  $\Gamma_i$  de la couronne avec des données bruitées à différents niveaux de bruit  $\delta = 1\%, 3\%$  et  $5\%$  et  $c = 10^{-6}$ .

$c$	Sous-problème (1.31a)			Sous-problème (1.31b)		
	$k_{opt}^v$	$v_{err}$	$v'_{err}$	$k_{opt}^u$	$u_{err}$	$u'_{err}$
10	3513	$2.39 \times 10^{-3}$	$3.41 \times 10^{-2}$	102	$7.69 \times 10^{-2}$	$1.25 \times 10^{-1}$
1	356	$2.40 \times 10^{-3}$	$3.41 \times 10^{-2}$	12	$7.36 \times 10^{-2}$	$1.20 \times 10^{-1}$
$10^{-1}$	40	$2.47 \times 10^{-3}$	$3.45 \times 10^{-2}$	3	$5.25 \times 10^{-2}$	$8.88 \times 10^{-2}$
$10^{-2}$	8	$2.86 \times 10^{-3}$	$3.75 \times 10^{-2}$	2	$1.81 \times 10^{-2}$	$4.24 \times 10^{-2}$
$10^{-3}$	4	$4.11 \times 10^{-3}$	$5.41 \times 10^{-2}$	2	$1.91 \times 10^{-2}$	$6.12 \times 10^{-2}$
$10^{-4}$	3	$6.52 \times 10^{-3}$	$1.00 \times 10^{-1}$	2	$2.75 \times 10^{-2}$	$1.10 \times 10^{-1}$

TABLE 1.10 – Évolution des estimations d'erreurs et des itérations d'arrêt  $k_{opt}$  pour le critère d'arrêt lié au terme  $J_{\Gamma_d}$  pour différentes valeurs de  $c$  avec des données bruitées à  $\delta = 3\%$  et pour chaque sous-problème du **problème factorisé**.

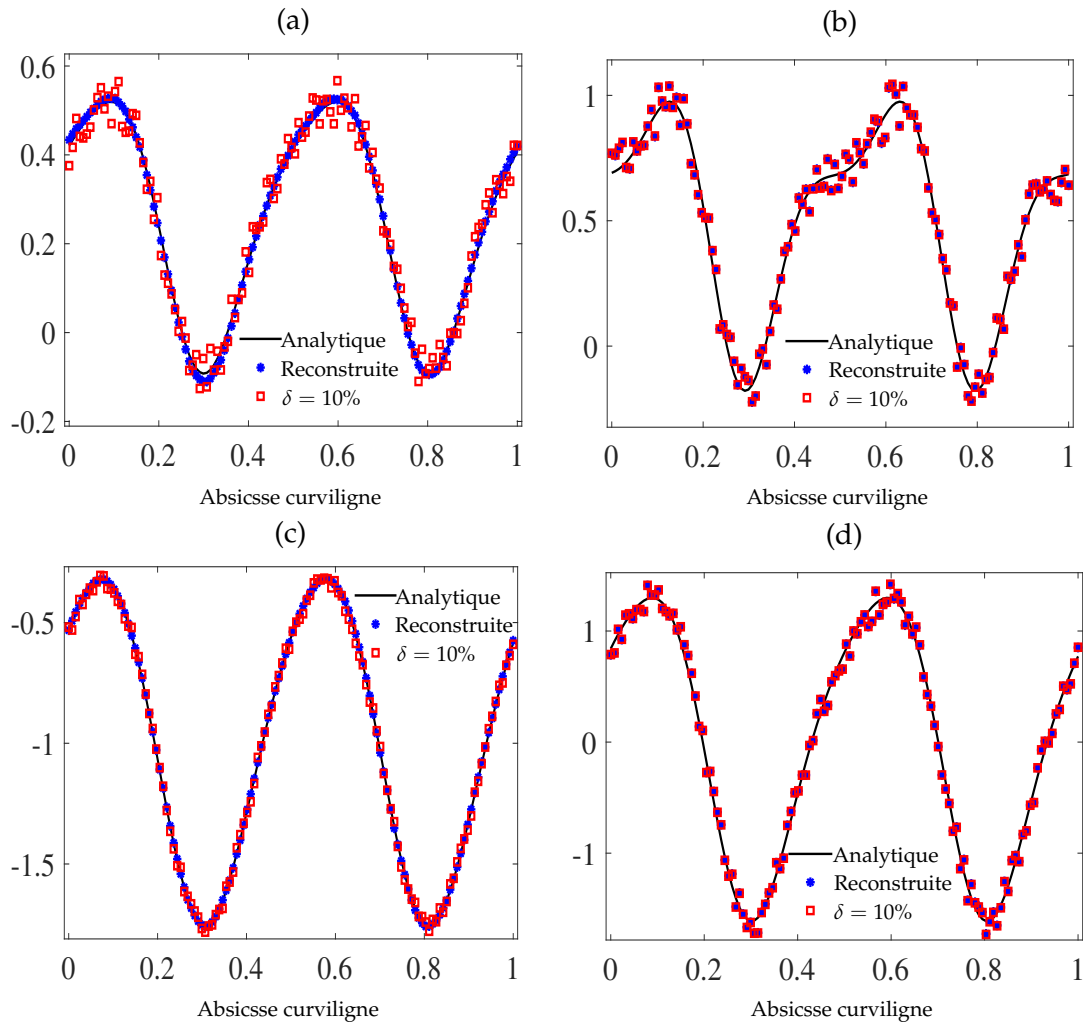


FIGURE 1.18 – Reconstructions de  $u$  (a),  $u_n$  (b),  $v$  (c),  $v_n$  (d) avec l'**algorithme factorisé** sur le bord extérieur  $\Gamma_d$  de la couronne avec des données bruitées à  $\delta = 10\%$  et  $c = 1$ .

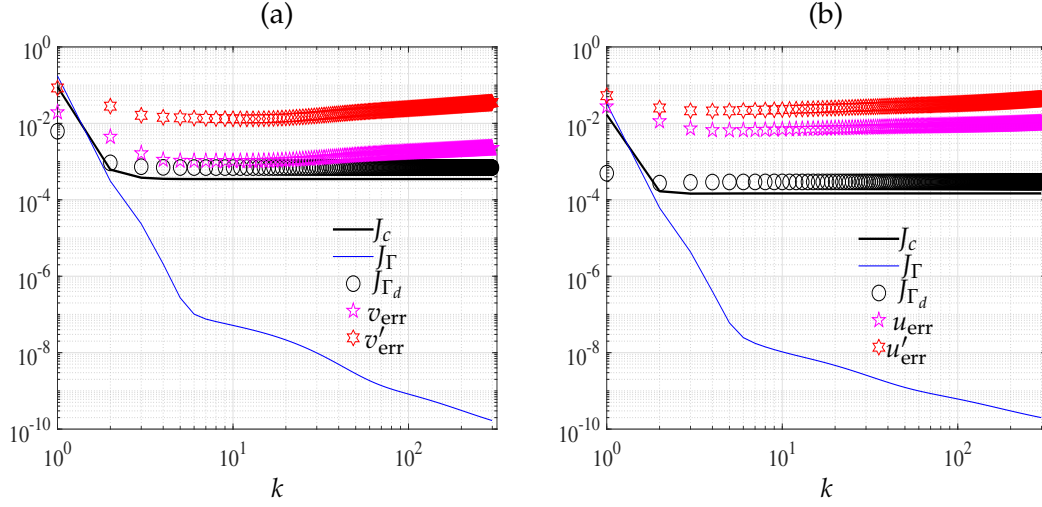


FIGURE 1.19 – Évolutions des termes de contrôle et des estimations d'erreur au cours des itérations de l'algorithme factorisé pour chaque sous-problème (a) associé à  $v$  et (b) associé à  $u$  avec des données bruitées à  $\delta = 1\%$  et  $c = 10^{-2}$ .

Le Tableau 1.10 montre que la reconstruction de la solution lorsque les données sont perturbées est plus efficace lorsqu'on choisit un paramètre de régularisation pas trop petit. De plus, comme on peut le voir sur la Figure 1.19, le critère d'arrêt lié à  $J_{\Gamma_d}$  est plus efficace que celui lié à  $J_\Gamma$ , où dans ce cas le dernier terme continue de diminuer même si le processus de régularisation est terminé.

Les résultats théoriques de l'approximation d'erreur utilisant la méthode des éléments finis QUA8 (ayant des fonctions d'interpolation de degré 2 sur les frontières) sont donnés par [22] :

$$\begin{aligned}
 \|u^{an} - u_h\|_{L^2(\Gamma)} &\leq c h^{\frac{5}{2}} \|u^{an}\|_{H^{5/2}(\Gamma)}, & c &\equiv c(u^{an}) \in \mathbb{R}, \\
 \|u_{,n}^{an} - u'_h\|_{L^2(\Gamma)} &\leq c h^{\frac{3}{2}} \|u_{,n}^{an}\|_{H^{3/2}(\Gamma)}, & c &\equiv c(u_{,n}^{an}) \in \mathbb{R}, \\
 \|u_{an}^\Omega - u_h^\Omega\|_{L^2(\Omega)} &\leq c h^3 \|u_{an}^\Omega\|_{H^3(\Omega)}, & c &\equiv c(u_{an}^\Omega) \in \mathbb{R}, \\
 \|u_{an}^\Omega - u_h^\Omega\|_{H^1(\Omega)} &\leq c h^2 \|u_{an}^\Omega\|_{H^3(\Omega)}, & c &\equiv c(u_{an}^\Omega) \in \mathbb{R}.
 \end{aligned} \tag{1.48}$$

Il serait convenable alors de vérifier numériquement les estimations d'erreur de notre algorithme. Nous avons donc construit une suite de maillages de  $\Omega$ , de pas  $h \rightarrow 0$  et nous avons tracé sur les Figures 1.20, 1.21 et 1.22 les normes  $L^2$  de l'erreur en fonction de  $h^{-1}$  et calculé leurs pentes réceptives  $\rho$ .

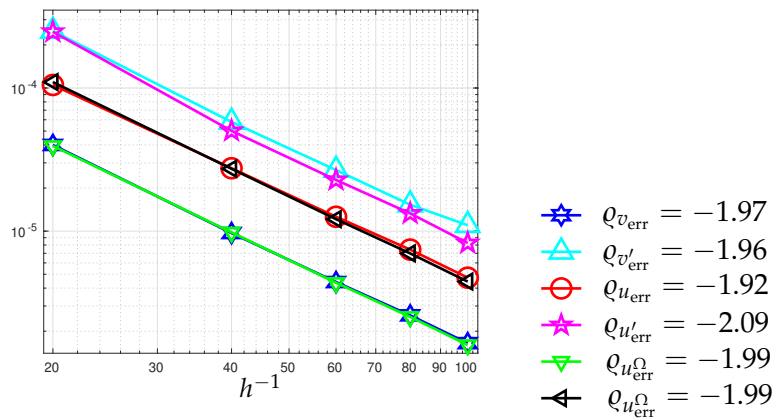


FIGURE 1.20 – Évolution des normes d'erreur  $L^2$  par rapport à  $h^{-1}$  dans un tracé logarithmique pour des données compatibles.

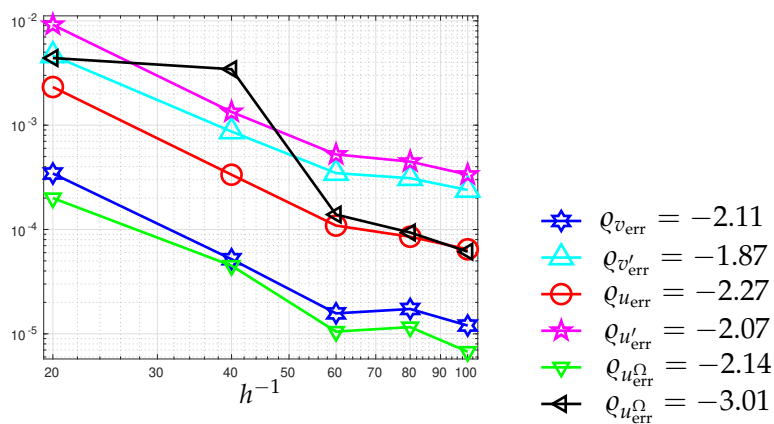


FIGURE 1.21 – Évolution des normes d'erreur  $L^2$  par rapport à  $h^{-1}$  dans un tracé logarithmique pour des données bruitées avec  $\delta = h^2$ .

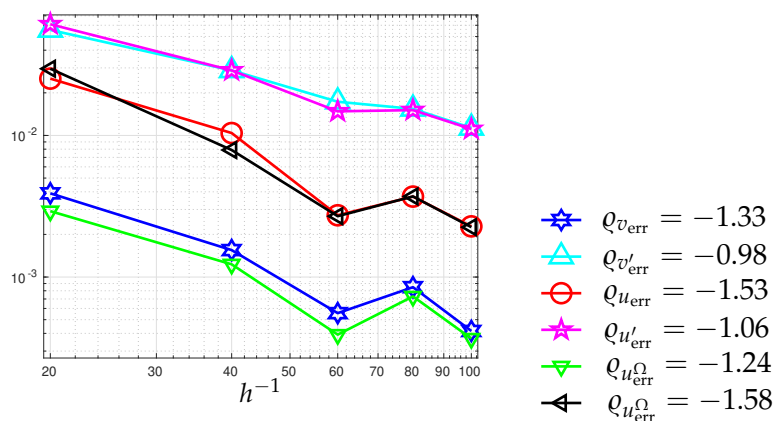


FIGURE 1.22 – Évolution des normes d'erreur  $L^2$  par rapport à  $h^{-1}$  dans un tracé logarithmique pour des données bruitées avec  $\delta = h$ .

Nous remarquons que nous obtenons une décroissance de l'erreur en  $h^2$  pour  $v_{err}$  et  $u_{err}$ , c'est-à-dire dans  $\theta(h^2)$ , ce qui montre que l'approximation par éléments finis est d'ordre 2. Cependant, le désaccord qui se produit sur les résultats numériques de  $v'_{err}$  et  $u'_{err}$  et le résultat théorique correspondant dans (1.48) peut s'expliquer par le fait que  $v'$  et  $u'$  sont reconstruits indépendamment de  $v$  et  $u$  par la méthode de régularisation évanescente. De plus, on remarque que la reconstruction est d'autant plus précise que le raffinement du maillage augmente, donc la méthode inverse est stable par rapport au raffinement du maillage.

1.6.5.1.2 Résultats numériques pour le problème biharmonique complet

$c$	$k_{opt}$	$v_{err}$	$v'_{err}$	$u_{err}$	$u'_{err}$
$10^{-4}$	553	$4.00 \times 10^{-5}$	$2.50 \times 10^{-4}$	$1.05 \times 10^{-4}$	$2.44 \times 10^{-4}$
$10^{-5}$	81	$4.00 \times 10^{-5}$	$2.51 \times 10^{-4}$	$1.05 \times 10^{-4}$	$2.47 \times 10^{-4}$
$10^{-6}$	132	$4.00 \times 10^{-5}$	$2.62 \times 10^{-4}$	$1.07 \times 10^{-4}$	$3.01 \times 10^{-4}$
$10^{-7}$	13	$4.00 \times 10^{-5}$	$2.65 \times 10^{-4}$	$1.07 \times 10^{-4}$	$3.02 \times 10^{-4}$
$10^{-8}$	5	$4.03 \times 10^{-5}$	$9.69 \times 10^{-4}$	$1.10 \times 10^{-4}$	$2.35 \times 10^{-3}$

TABLE 1.11 – Évolution des estimations d'erreur et de l'itération d'arrêt  $k_{opt}$  du critère d'arrêt lié au terme  $J_\Gamma$  du **problème biharmonique complet** pour différentes valeurs de  $c$  avec des données compatibles.

$c$	$k_{opt}$	$v_{err}$	$v'_{err}$	$u_{err}$	$u'_{err}$
100	19999	$2.16 \times 10^{-3}$	$3.28 \times 10^{-2}$	$1.38 \times 10^{-2}$	$3.82 \times 10^{-2}$
10	3300	$2.41 \times 10^{-3}$	$3.42 \times 10^{-2}$	$1.46 \times 10^{-2}$	$4.13 \times 10^{-2}$
1	334	$2.41 \times 10^{-3}$	$3.43 \times 10^{-2}$	$1.47 \times 10^{-2}$	$4.14 \times 10^{-2}$
$10^{-1}$	37	$2.47 \times 10^{-3}$	$3.46 \times 10^{-2}$	$1.49 \times 10^{-2}$	$4.21 \times 10^{-2}$
$10^{-2}$	7	$2.81 \times 10^{-3}$	$3.69 \times 10^{-2}$	$1.62 \times 10^{-2}$	$4.77 \times 10^{-2}$
$10^{-3}$	4	$4.09 \times 10^{-3}$	$5.38 \times 10^{-2}$	$2.22 \times 10^{-2}$	$7.60 \times 10^{-2}$
$10^{-4}$	3	$6.53 \times 10^{-3}$	$1.00 \times 10^{-1}$	$2.98 \times 10^{-2}$	$1.28 \times 10^{-1}$

TABLE 1.12 – Évolution des estimations d'erreur et de l'itération d'arrêt  $k_{opt}$  du critère d'arrêt lié au terme  $J_\Gamma$  du **problème biharmonique complet** pour différentes valeurs de  $c$  avec des données bruitées à  $\delta = 3\%$ .

Les Tableaux 1.11 et 1.12 représentent les évolutions des erreurs commises sur  $v, v_n, u$  et  $u_n$  pour différents choix de paramètres de régularisation  $c$ . En comparaison avec le problème factorisé (Tableaux 1.9 et 1.10), on peut remarquer que l'on obtient presque les mêmes résultats lorsque les données compatibles. Cependant, dans le cas de données bruitées, le problème biharmonique admet de meilleurs résultats pour la reconstruction de  $u$  et  $u_n$  et pour des choix plus larges de  $c$  contrairement au problème factorisé où la reconstruction est très sensible au choix de  $c$ . Cela peut être vu clairement sur

la figure 1.23, où  $u_{\text{err}}$  et  $u'_{\text{err}}$  du problème biharmonique sont relativement constantes pour  $c \geq 10^{-2}$ .

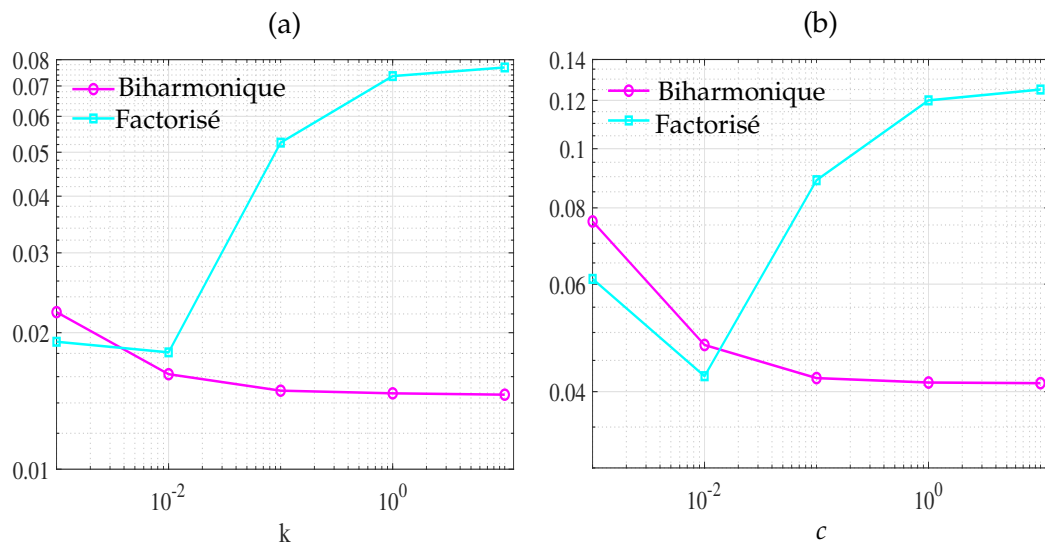


FIGURE 1.23 – Évolution de  $u_{\text{err}}$  (a) et  $u'_{\text{err}}$  (b) en fonction de  $c$  pour le **problème factorisé**  $\text{---}\circ\text{---}$  et le **problème biharmonique complet**  $\text{---}\square\text{---}$  avec des données bruitées à  $\delta = 3\%$ .

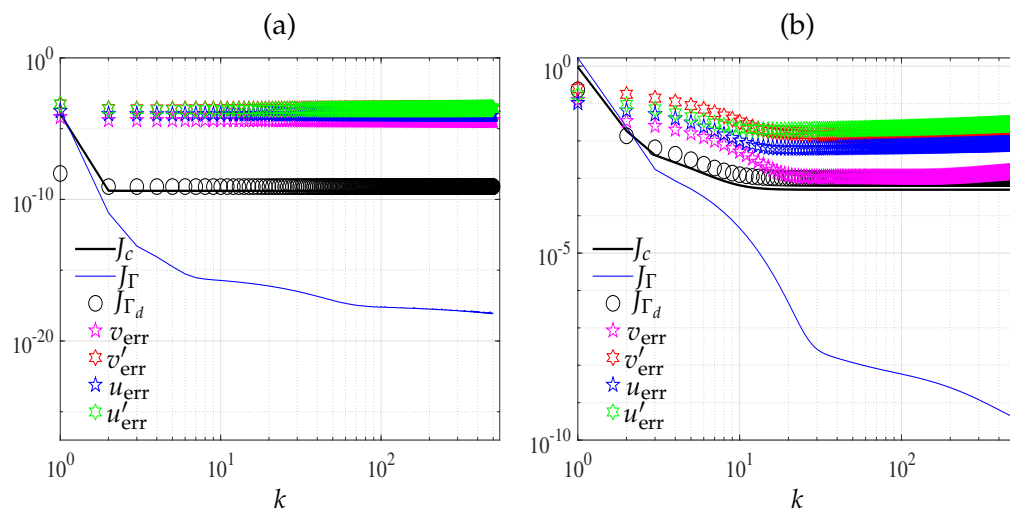


FIGURE 1.24 – Évolution des termes de contrôle et des estimations d'erreur au cours des itérations de l'algorithme du **problème biharmonique complet** pour des données compatibles (a) et bruitées avec  $\delta = 1\%$  (b) et  $c = 10^{-2}$ .

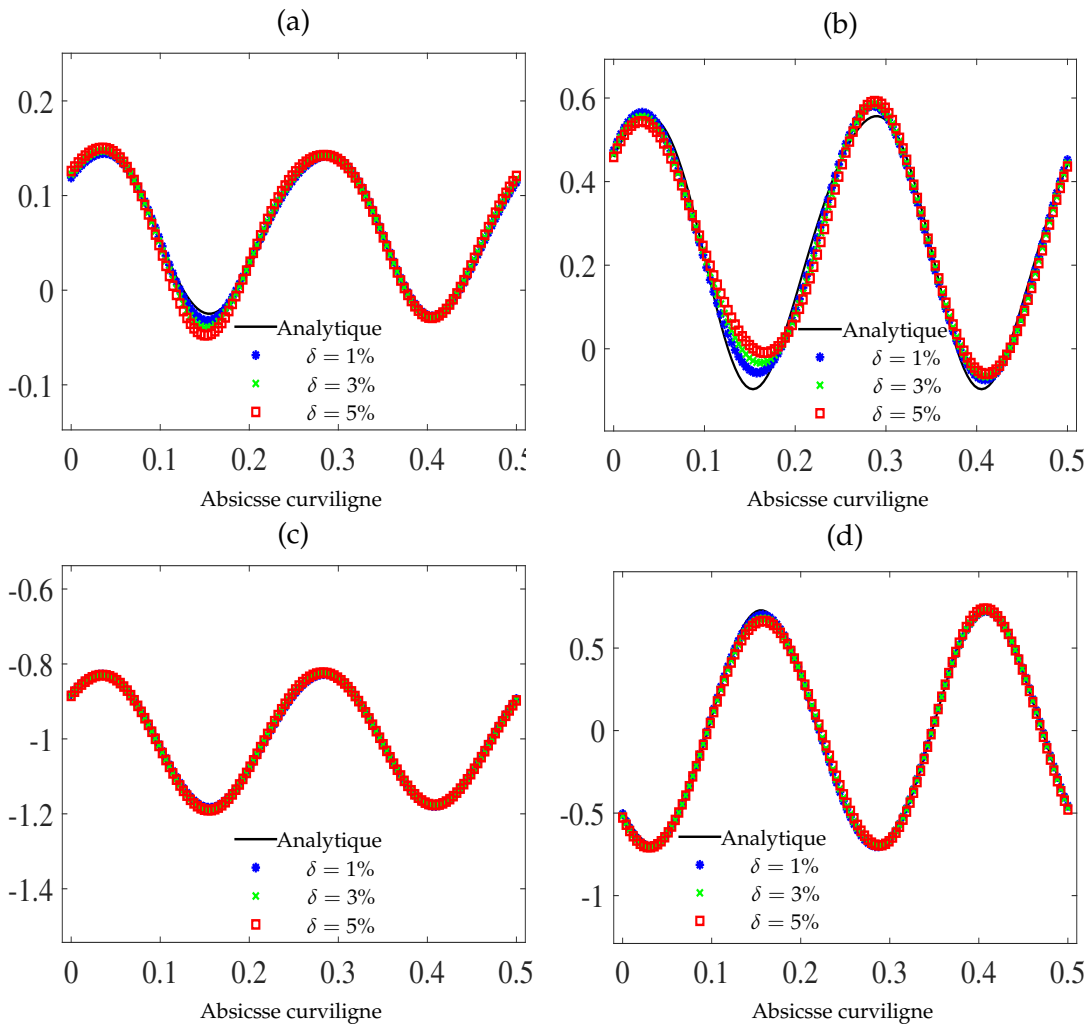


FIGURE 1.25 – Reconstitutions de  $u$  (a),  $u_n$  (b),  $v$  (c),  $v_n$  (d) avec l'algorithme du **problème biharmonique complet** sur le bord intérieur  $\Gamma_i$  de la couronne avec des données bruitées à  $\delta = 1\%$ ,  $3\%$  et  $5\%$  et  $c = 10$ .

La différence des résultats entre les deux algorithmes proposés a conduit à s'interroger sur l'efficacité du critère d'arrêt, notamment pour le problème factorisé. Ceci nous a conduit à rechercher l'itération la plus appropriée en terme de meilleure reconstruction, choisie manuellement sans appliquer de critère d'arrêt (à l'aide des Figures 1.19 et 1.24). Ceci est illustré dans les tableaux suivants.

$c$	$k_{\text{opt}}^v$	$v_{\text{err}}$	$v'_{\text{err}}$	$k_{\text{opt}}^u$	$u_{\text{err}}$	$u'_{\text{err}}$
10	1851	$2.12 \times 10^{-3}$	$3.25 \times 10^{-2}$	15930	$1.44 \times 10^{-2}$	$3.79 \times 10^{-2}$
1	182	$2.12 \times 10^{-3}$	$3.25 \times 10^{-2}$	172	$1.43 \times 10^{-2}$	$3.80 \times 10^{-2}$
$10^{-1}$	20	$2.20 \times 10^{-3}$	$3.27 \times 10^{-2}$	18	$1.45 \times 10^{-2}$	$3.83 \times 10^{-2}$
$10^{-2}$	3	$2.52 \times 10^{-3}$	$3.39 \times 10^{-2}$	4	$1.51 \times 10^{-2}$	$4.07 \times 10^{-2}$
$10^{-3}$	2	$3.30 \times 10^{-3}$	$4.30 \times 10^{-2}$	2	$1.90 \times 10^{-2}$	$6.09 \times 10^{-2}$
$10^{-4}$	2	$5.81 \times 10^{-3}$	$8.55 \times 10^{-2}$	2	$2.74 \times 10^{-2}$	$1.10 \times 10^{-1}$

TABLE 1.13 – Évolution des estimations d'erreur pour le **problème factorisé** pour différentes valeurs de  $c$  avec des données bruitées à  $\delta = 3\%$  (sans appliquer de critère d'arrêt).

$c$	$k_{\text{opt}}$	$v_{\text{err}}$	$v'_{\text{err}}$	$u_{\text{err}}$	$u'_{\text{err}}$
10	1507	$2.28 \times 10^{-3}$	$3.29 \times 10^{-2}$	$1.36 \times 10^{-2}$	$3.69 \times 10^{-2}$
1	149	$2.30 \times 10^{-3}$	$3.29 \times 10^{-2}$	$1.36 \times 10^{-2}$	$3.69 \times 10^{-2}$
$10^{-1}$	140	$2.57 \times 10^{-3}$	$3.36 \times 10^{-2}$	$1.39 \times 10^{-2}$	$3.71 \times 10^{-2}$
$10^{-2}$	4	$2.49 \times 10^{-3}$	$3.40 \times 10^{-2}$	$1.48 \times 10^{-2}$	$4.04 \times 10^{-2}$
$10^{-3}$	1	$3.58 \times 10^{-3}$	$3.76 \times 10^{-2}$	$1.73 \times 10^{-2}$	$4.97 \times 10^{-2}$
$10^{-4}$	1	$4.58 \times 10^{-3}$	$6.35 \times 10^{-1}$	$2.35 \times 10^{-2}$	$8.58 \times 10^{-1}$

TABLE 1.14 – Évolution des estimations d'erreur pour le **problème biharmonique complet** pour différentes valeurs de  $c$  avec des données bruitées à  $\delta = 3\%$  (sans appliquer de critère d'arrêt).

En effet, contrairement au Tableau 1.10 lorsque le critère d'arrêt est appliqué pour le problème factorisé, le Tableau 1.13 montre que la valeur de  $c$  n'affecte pas beaucoup la reconstruction de la solution lorsque les données sont bruitées à condition que  $c \geq 10^{-2}$ . Cependant, on peut remarquer que le problème biharmonique complet donne des résultats légèrement meilleurs pour les reconstructions de  $u$  et  $u'$  même lorsque aucun critère d'arrêt n'est appliqué. Celles de  $v$  et  $v_n$  sont quasiment identiques avec les deux algorithmes.

### 1.6.5.2 Domaine de type disque

Nous considérons maintenant un autre domaine régulier représenté par le disque unité  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$  tel que les données sont situées sur le demi cercle gauche de la frontière  $\Gamma_d = \{(x, y) \in \Gamma, \frac{\pi}{2} \leq \theta(x) \leq \frac{3\pi}{2}\}$  (Figure 1.26). Nous réalisons des simulations numériques avec la même solution analytique que précédemment et pour des données compatibles et bruitées.



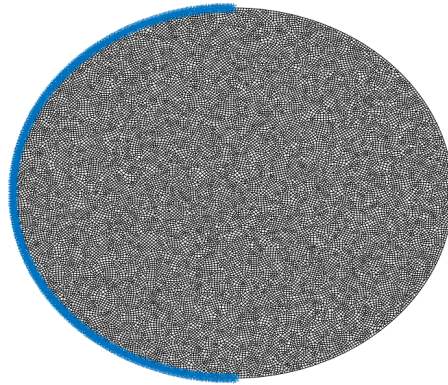


FIGURE 1.26 – Domaine disque  $\Omega$  avec  $h = 1/80$  tel que les données sont accessibles sur la moitié gauche du périmètre du disque \*.

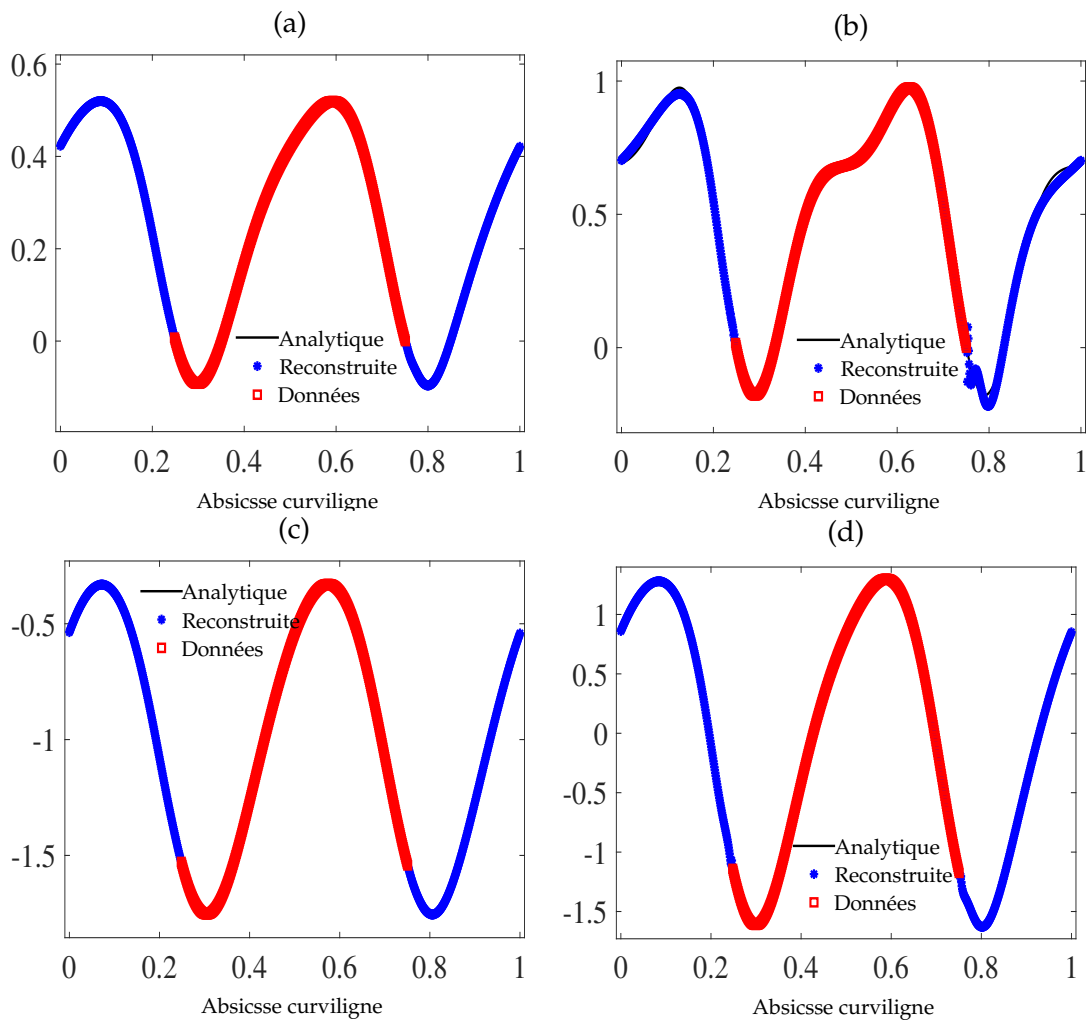


FIGURE 1.27 – Reconstructions de  $u$  (a),  $u_n$  (b),  $v$  (c),  $v_n$  (d) avec l'algorithme du **problème factorisé** sur la frontière du disque  $\Omega$  avec des données compatibles et  $c = 10^{-6}$ .

Les Figures 1.27 et 1.28 donnent un exemple de reconstruction de la solution pour un domaine circulaire obtenue avec l'algorithme du problème factorisé avec des données compatibles et bruitées respectivement, situées sur le demi-cercle gauche de la frontière. La solution a été reconstruite avec succès sur toute la frontière lorsque les données ne sont pas perturbées mais avec un petit écart au niveau des nœuds de transition entre la partie connue  $\Gamma_d$  et la partie inconnue  $\Gamma_i$  de la frontière dans la reconstruction de  $u_n$ . Cet écart par rapport à la solution analytique est plus flagrant lorsque les données sont bruitées. On remarque dans ce cas une difficulté de reconstruction essentiellement dans les dérivées normales  $u_n$  et  $v_n$ . De plus, nous notons que les résultats obtenus (non présentés ici) pour les deux formulations du problème dans le cas du disque donnent les mêmes conclusions que celles données pour un domaine de type couronne.

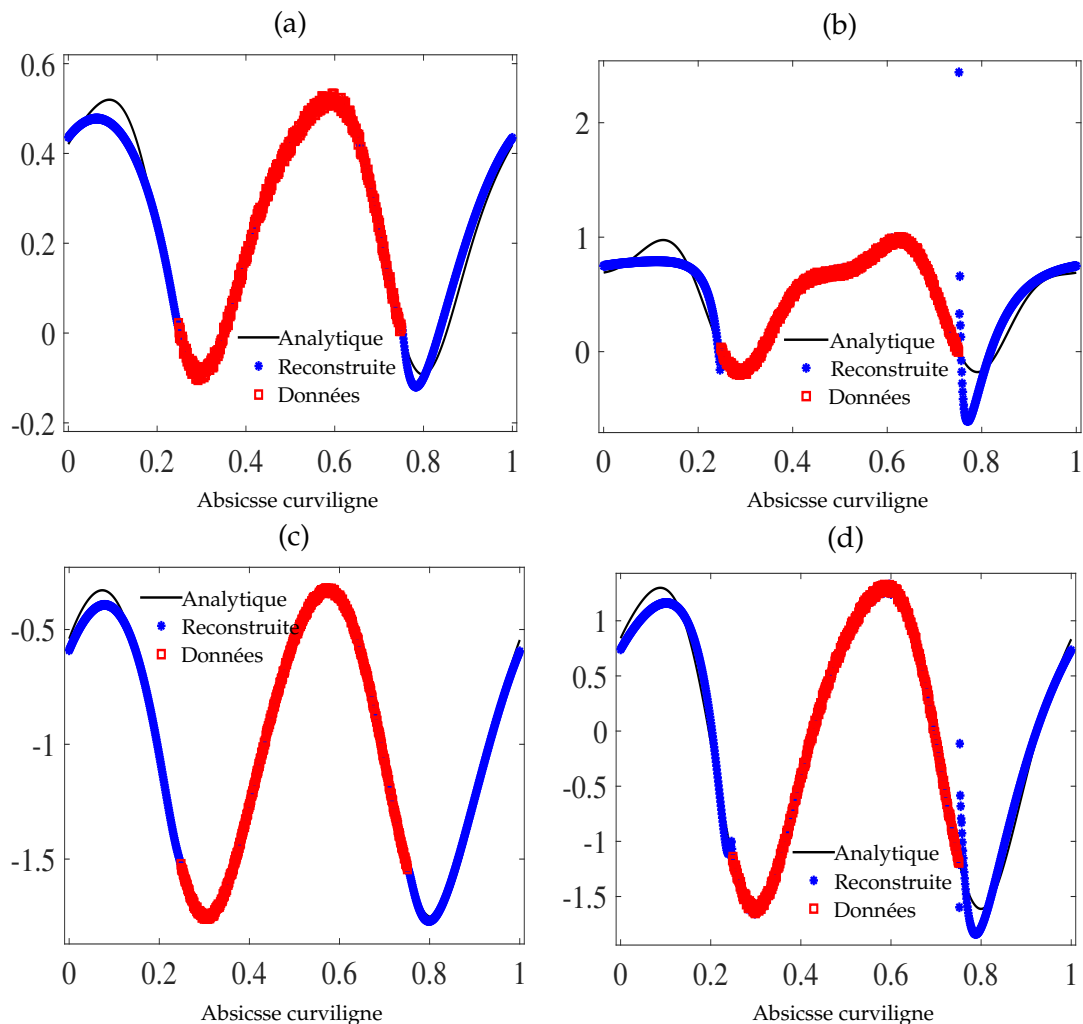


FIGURE 1.28 – Reconstructions de  $u$  (a),  $u_n$  (b),  $v$  (c),  $v_n$  (d) avec l'algorithme du **problème factorisé** sur la frontière du disque  $\Omega$  avec des données bruitées à  $\delta = 3\%$  et  $c = 10^{-6}$ .

### 1.6.5.3 Domaine carré

Nous réalisons ici des simulations numériques en considérant un domaine carré discrétisé par des éléments QUA8 et de même pas de maillage  $h = 1/40$  que celui utilisé au paragraphe 1.5.5 pour la discrétisation par la méthode des solutions fondamentales.

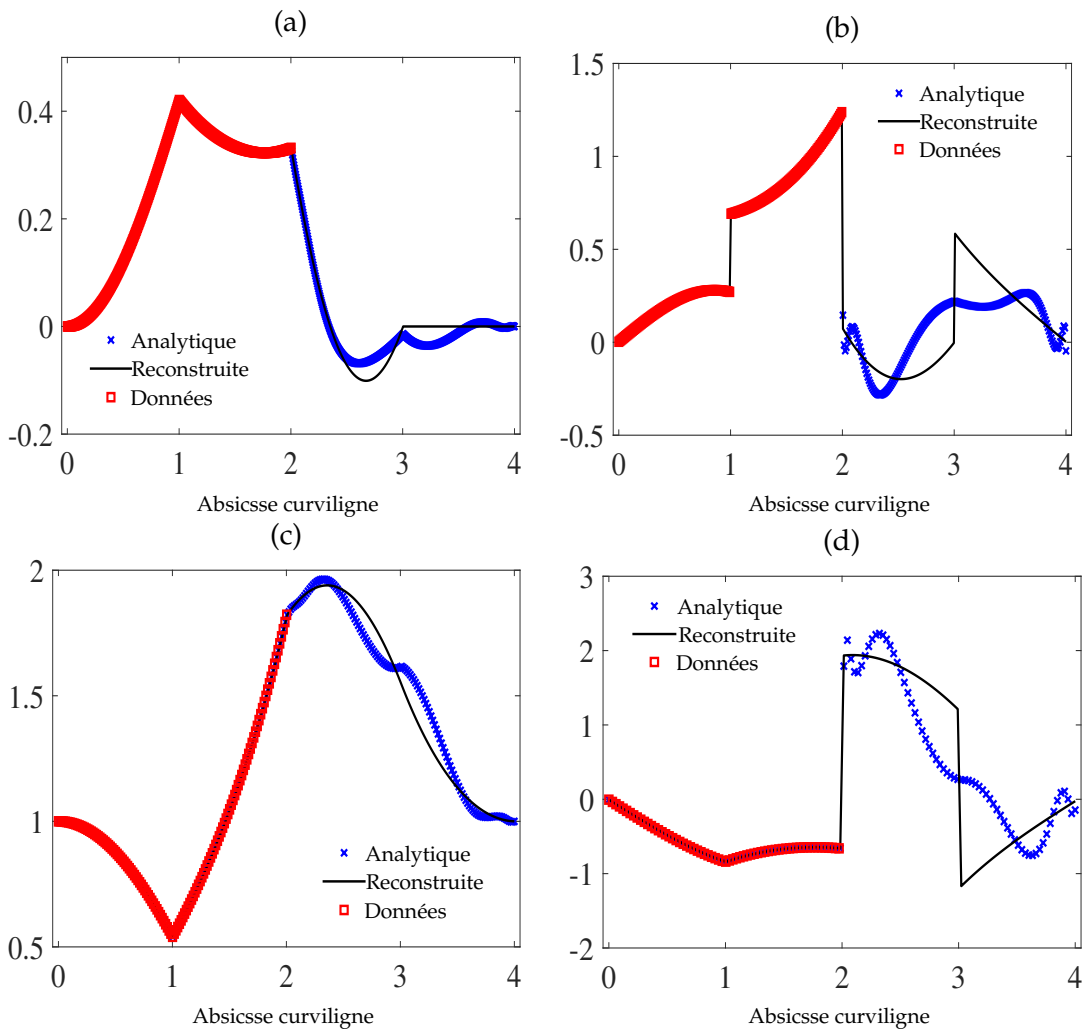


FIGURE 1.29 – Reconstructions de  $u$  (a),  $u_n$  (b),  $v$  (c),  $v_n$  (d) avec l'algorithme du **problème factorisé** avec des données compatibles situées sur les côtés  $y = 0$  et  $x = 1$  et  $c = 10^{-4}$ .

Les Figures 1.29 et 1.30 donnent les reconstructions des conditions aux limites sur la frontière du carré, obtenues par le problème factorisé, dans le cas de données compatibles et bruitées respectivement et situées sur deux côtés adjacents du carré. Nous remarquons une difficulté dans les reconstructions essentiellement dans celles des dérivées normales. Le Figure 1.31 montre les résultats de reconstruction quand les données sont bruitées et situées sur deux côtés opposés. Les résultats obtenus sont bien meilleurs dans ce cas.

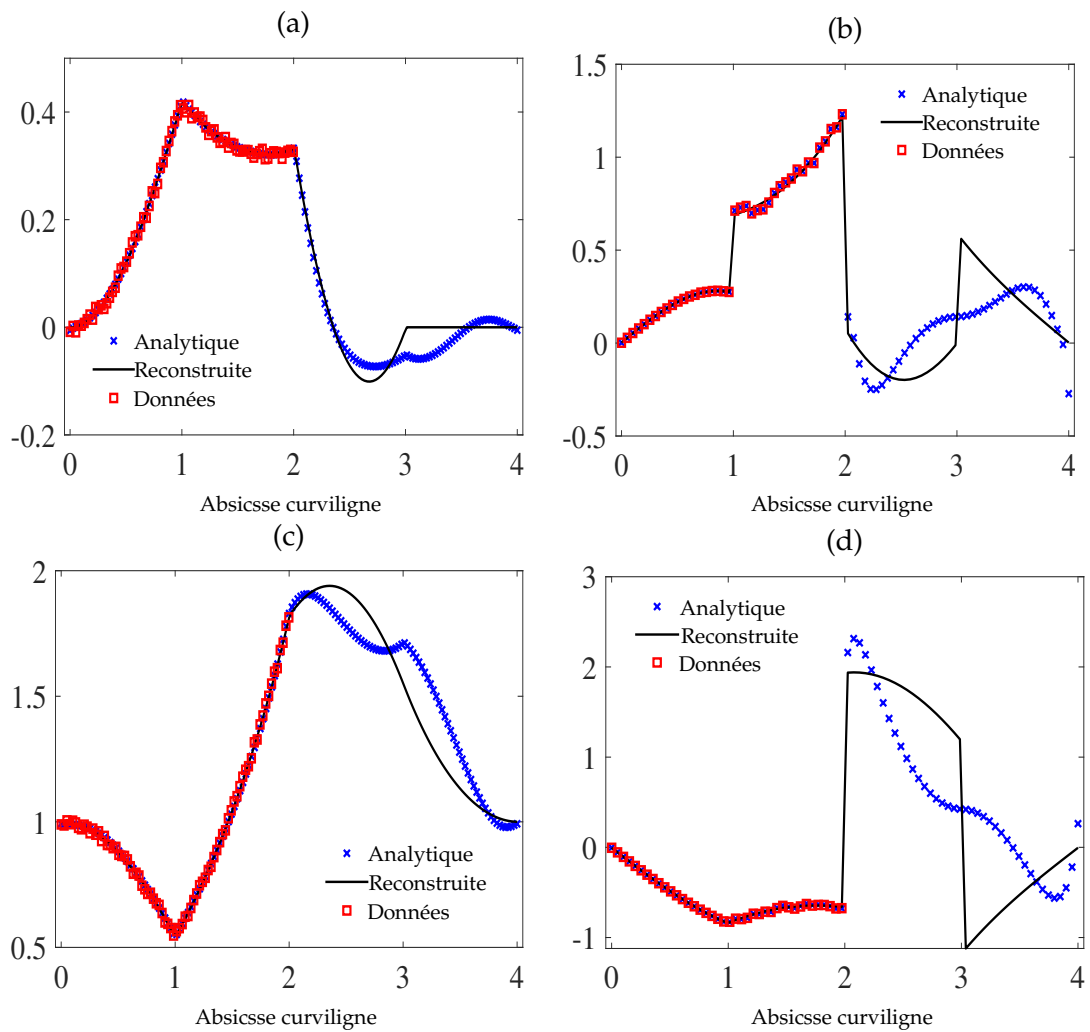


FIGURE 1.30 – Reconstructions de  $u$  (a),  $u_n$  (b),  $v$  (c),  $v_n$  (d) avec l'algorithme du **problème factorisé** avec des données bruitées ( $\delta = 3\%$ ) et situées sur les côtés  $y = 0$  et  $x = 1$  et  $c = 10^{-3}$ .

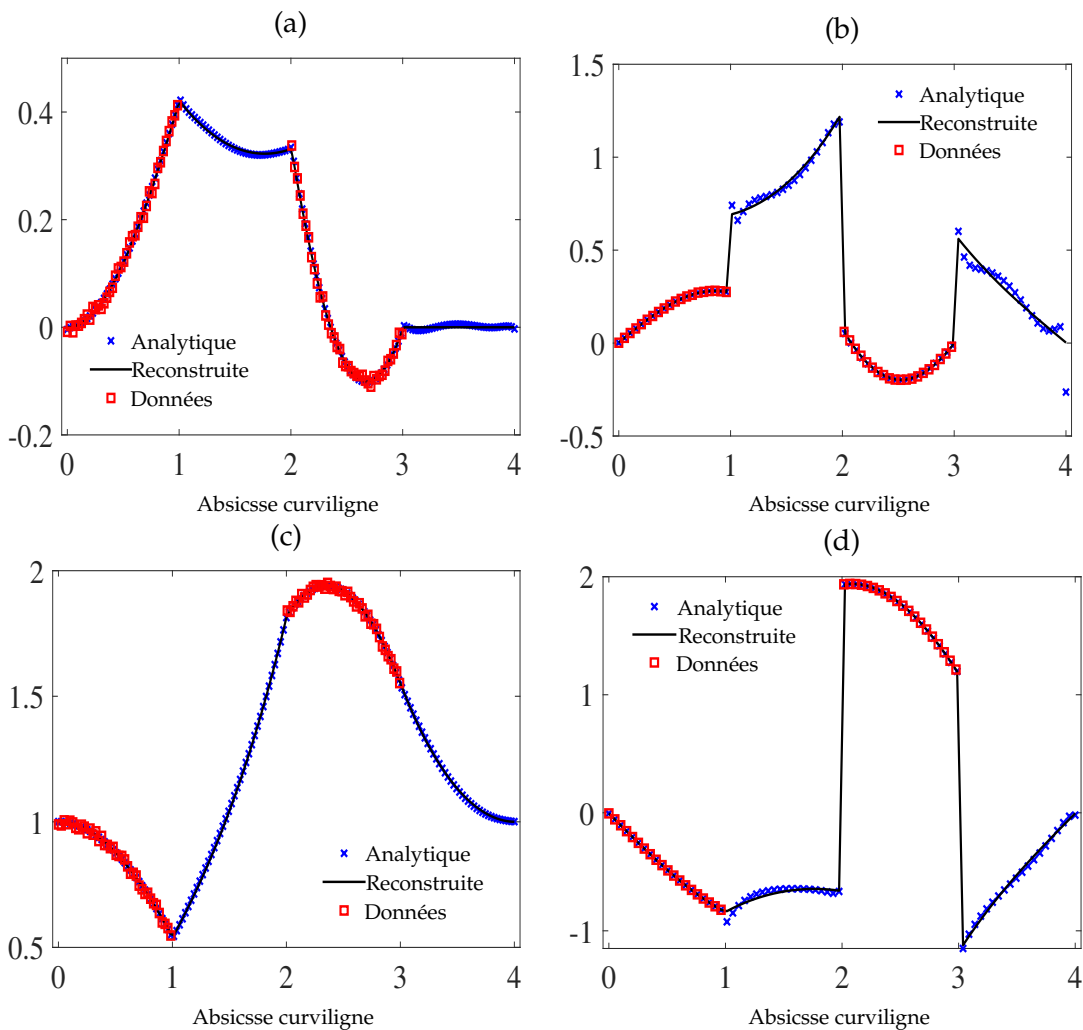
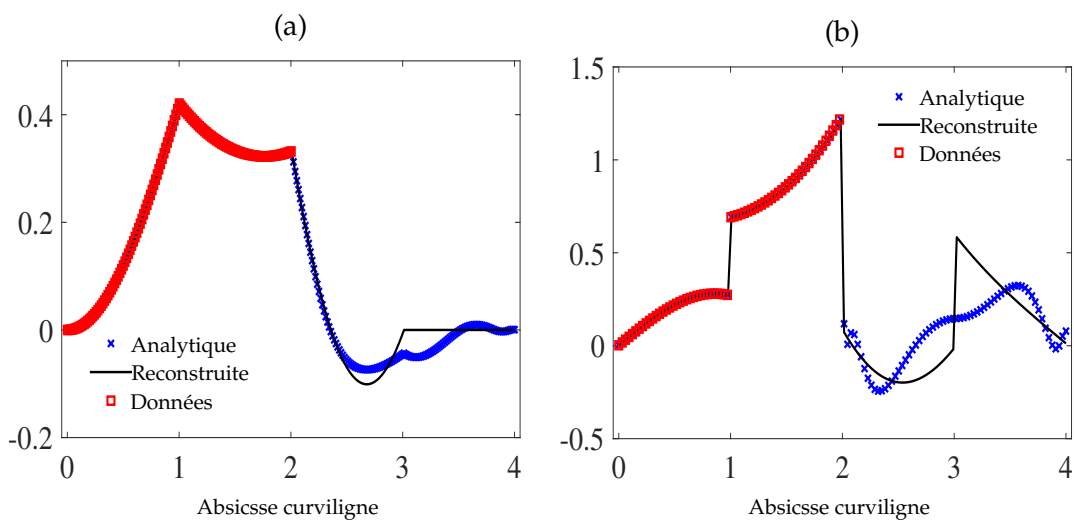


FIGURE 1.31 – Reconstructions de  $u$  (a),  $u_n$  (b),  $v$  (c),  $v_n$  (d) avec l'algorithme du **problème factorisé** avec des données bruitées ( $\delta = 3\%$ ) et situées sur les côtés  $y = 0$  et  $y = 1$  et  $c = 10^{-3}$ .



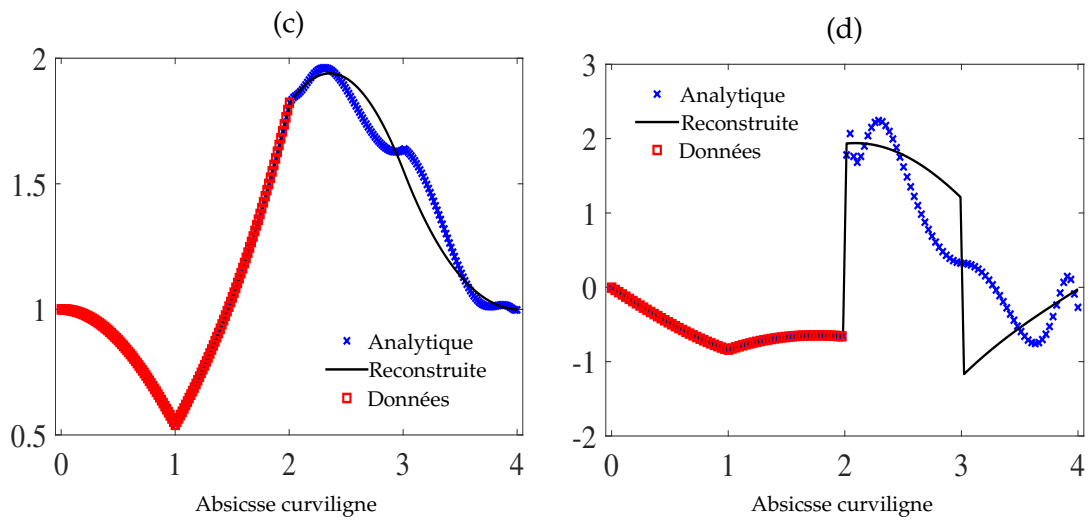


FIGURE 1.32 – Reconstructions de  $u$  (a),  $u_n$  (b),  $v$  (c),  $v_n$  (d) avec l'algorithme du **problème biharmonique complet** avec des données compatibles situées sur les côtés  $y = 0$  et  $x = 1$  et  $c = 10^{-3}$ .

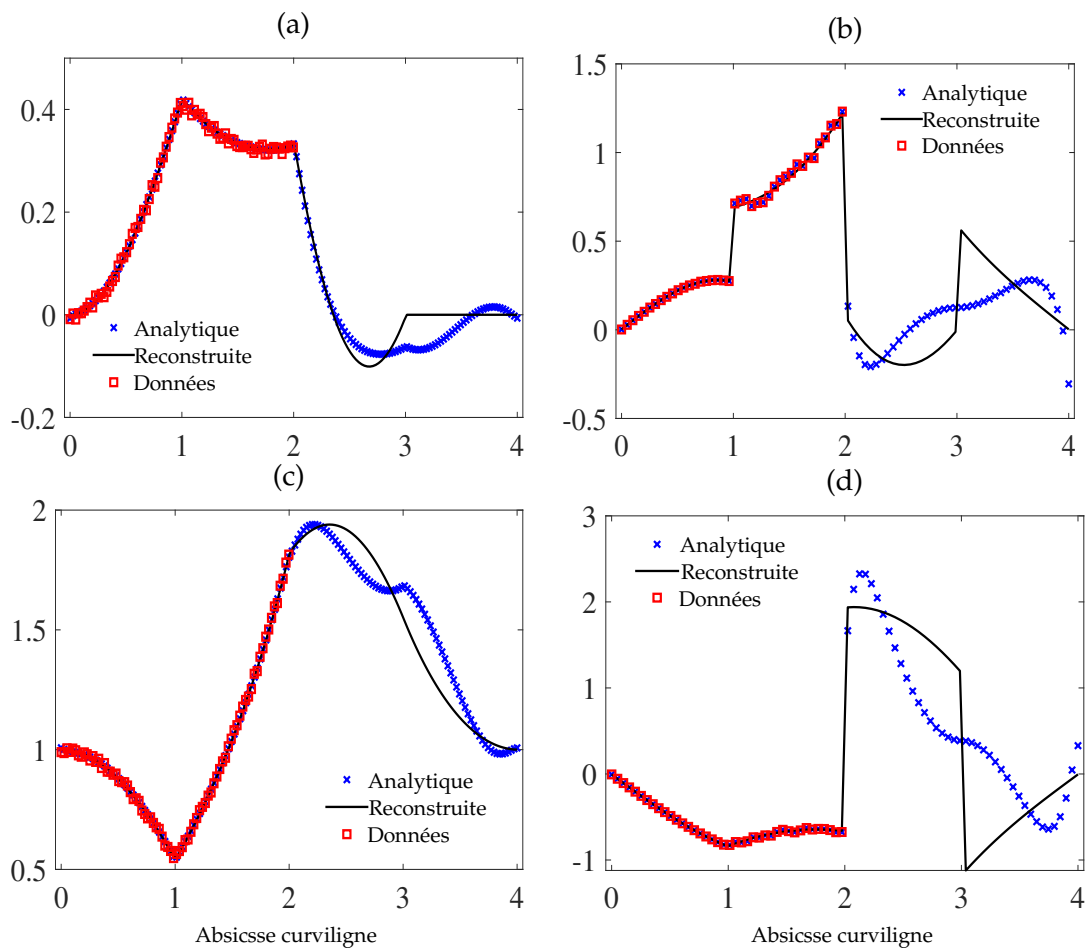


FIGURE 1.33 – Reconstructions de  $u$  (a),  $u_n$  (b),  $v$  (c),  $v_n$  (d) avec l'algorithme du **problème biharmonique complet** avec des données bruitées ( $\delta = 3\%$ ) et situées sur les côtés  $y = 0$  et  $x = 1$  et  $c = 10^{-1}$ .

Nous avons également réalisé les mêmes simulations numériques mais en utilisant le problème biharmonique complet. Les résultats de reconstruction sont donnés par les Figures 1.32 et 1.33 dans le cas de données compatibles et bruitées respectivement et situées sur deux côtés adjacents du carré et par la Figure 1.34 dans le cas de données bruitées et situées sur deux côtés opposés. Les résultats obtenus sont similaires à ceux du problème factorisé. Par ailleurs, on note également les mêmes conclusions obtenues dans la comparaison entre les deux algorithmes que celles données dans le cas de la couronne.

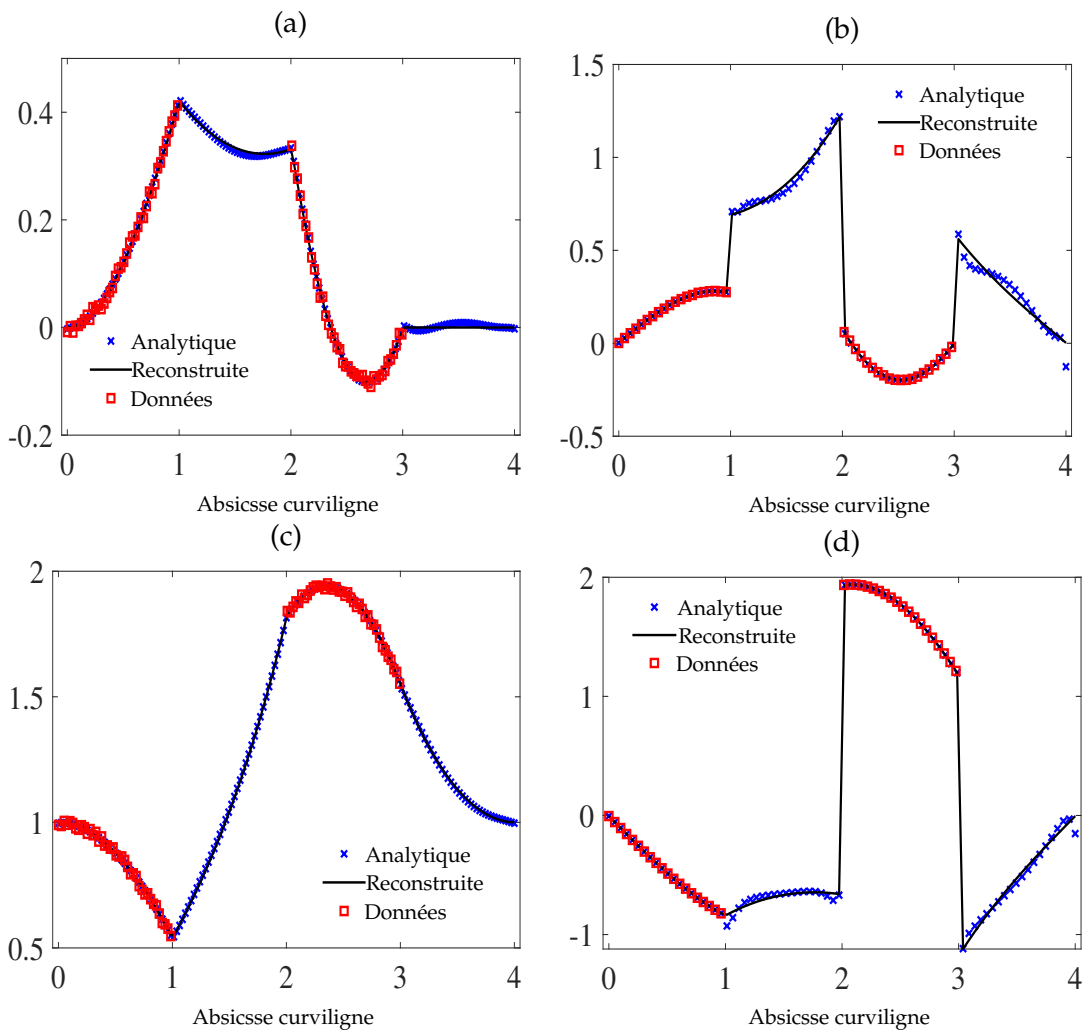


FIGURE 1.34 – Reconstructions de  $u$  (a),  $u_n$  (b),  $v$  (c),  $v_n$  (d) avec l’algorithme du **problème biharmonique complet** avec des données bruitées ( $\delta = 3\%$ ) et situées sur les côtés  $y = 0$  et  $y = 1$  et  $c = 10^{-1}$ .

### 1.6.6 Conclusion sur la discrétisation par la méthode des éléments finis

Dans cette section, nous avons implémenté la méthode de régularisation évanescence en utilisant la méthode des éléments finis pour résoudre le problème de Cauchy associé à l'équation biharmonique. Deux formulations sont introduites. L'une qui

traite l'équation biharmonique dans sa globalité et l'autre qui la factorise en deux problèmes distincts régis par l'équation de Laplace et celle de Poisson. Les deux formulations ont été mises en œuvre en utilisant la méthode des éléments finis sur des domaines réguliers en forme de couronne et de disque et non régulier en forme de carré. Les résultats numériques prouvent l'efficacité de l'algorithme de régularisation ainsi que sa robustesse et sa capacité à débruiter les données. La comparaison entre les deux formulations nous a conduit à admettre que l'algorithme global est plus efficace que l'algorithme factorisé dans le cas de données bruitées et nous obtenons des résultats identiques dans le cas de données compatibles. Cette discrétisation par éléments finis a rencontré une difficulté de reconstruction dans le cas du disque en particulier au niveau des nœuds de transition entre les deux parties de la frontière et une difficulté importante dans le cas du carré. Ceci est dû principalement à la discontinuité de la dérivée normale au niveau des coins du domaine essentiellement lorsque les deux côtés du carré où les données sont accessibles sont adjacents. Cependant lorsque ces deux côtés sont opposés, on retrouve la reconstruction de toutes les conditions aux limites sur toute la frontière.

## 1.7 Conclusion générale du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons utilisé la méthode de régularisation évanescence pour résoudre le problème de Cauchy associé à l'équation biharmonique, où aucune condition aux limites n'est fournie sur une partie de la frontière. Nous avons présenté la formulation continue et discrète de la méthode et nous avons également proposé un nouveau critère d'arrêt de l'algorithme à régularisation évanescence. L'implémentation numérique de cet algorithme a été effectuée en utilisant la méthode des solutions fondamentales et la méthode des éléments finis et plusieurs types de domaine, réguliers et non réguliers, ont été examinés.

Dans la mise en œuvre numérique par la méthode des éléments finis, nous avons montré comment le problème peut être résolu de deux manières différentes. Celle qui utilise une factorisation du problème global en deux sous-problèmes associés respectivement à l'équation de Poisson et à l'équation de Laplace. Et une deuxième manière qui résout directement le problème biharmonique. Une comparaison des deux méthodes a été menée concluant avec une légère préférence pour la résolution complète du problème biharmonique global, en particulier lors de l'application des critères d'arrêt où les résultats sont moins sensibles au choix du coefficient de régularisation  $c$ .

La robustesse de la solution obtenue vis-à-vis des données bruitées a été démontrée lors la mise en œuvre par les deux méthodes numériques. Cependant, il a été constaté que la reconstruction par la MFS est bien meilleure que celle par la MEF et ce pour tous les types de domaine, en particulier pour les domaines de type disque ou carré où la MFS ne rencontre pas de problèmes de raccord entre la partie accessible à la mesure et la partie inconnue, ni de problème dû à la discontinuité des dérivées normales aux niveaux des coins d'un carré.





## Chapitre 2

# Le problème de Cauchy en théorie des plaques minces de *Kirchhoff*

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	62
<b>2.2</b>	<b>Rappels sur la théorie des plaques minces de <i>Kirchhoff-Love</i></b>	63
2.2.1	Les hypothèses de <i>Kirchhoff-Love</i>	63
2.2.1.1	Champ de déplacement	64
2.2.1.2	Champ de déformations	65
2.2.1.3	Champ de contraintes	65
2.2.1.4	Efforts résultants et moments résultants	66
2.2.2	Problème de flexion des plaques minces	67
2.2.2.1	Équation d'équilibre d'un solide élastique	67
2.2.2.2	Équation d'équilibre d'une plaque sous forme vectorielle	67
2.2.2.3	Équation d'équilibre d'une plaque en flexion	68
2.2.2.3.1	Bord encastré	69
2.2.2.3.2	Bord simplement posé	69
2.2.2.3.3	Bord libre	69
2.2.2.4	Formulation variationnelle du problème des plaques minces	69
2.2.3	Le problème de Cauchy en théorie de plaques de <i>Kirchhoff-Love</i>	72
<b>2.3</b>	<b>Mise en œuvre numérique de la méthode des éléments finis de <i>Kirchhoff</i></b>	74
2.3.1	Formulation des éléments finis de <i>Kirchhoff</i>	76
2.3.2	La formulation approchée du problème de Cauchy en théorie des plaques	80
2.3.3	L'algorithme itératif discret pour la résolution du problème de Cauchy en théorie des plaques	82
2.3.4	Résultats numériques	84
2.3.4.1	Cas de la couronne	84
2.3.4.2	Cas du disque	87
2.3.4.3	Cas du carré	89
<b>2.4</b>	<b>Conclusion</b>	92

---

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous souhaitons généraliser nos travaux sur le problème de Cauchy associé à l'équation biharmonique afin de pouvoir les appliquer dans le cas pratique mécanique de la théorie des plaques minces en flexion. Cela nous permettrait, par exemple, de reconstruire les conditions aux limites inaccessibles à la mesure comme les moments ou les efforts tranchants au niveau d'un encastrement. La flexion des plaques minces consiste à considérer le problème modélisant le déplacement transverse du feuillet moyen d'une plaque mince lorsque celle-ci est soumise à un chargement appliqué perpendiculairement à sa surface moyenne.

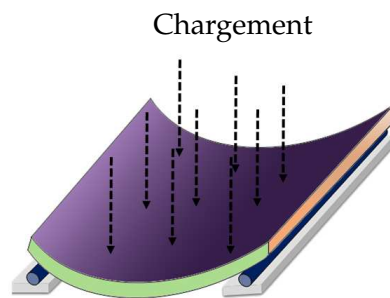


FIGURE 2.1 – Plaque en flexion

La plupart des théories pour les plaques consiste en une généralisation bidimensionnelle des théories valables pour les poutres. Citons par exemple le cas des plaques épaisses de *Reissner-Mindlin* où il s'agit de la généralisation des hypothèses de *Navier* pour les poutres. Concernant le cas des plaques minces de *Kirchhoff-Love*, ce sont celles de *Bernoulli-Euler* qui sont généralisées pour introduire cette théorie. On trouvera les différentes approches permettant d'établir les principales théories de plaques et de coques dans la référence [37].

On se réfère dans ce chapitre à la théorie de *Kirchhoff-Love* [50, 61, 78], où l'étude de la déformée d'une plaque peut être ramener à considérer un problème associé à l'équation biharmonique, tel que la solution est le déplacement transverse. Cette équation est complétée par des conditions aux limites cinématiques (déplacements, rotations) ou statiques (moments et efforts tranchants) sur le bord de la plaque.

Nous nous intéressons ainsi à la résolution de ce problème dans le cas où les conditions aux limites ne sont que partiellement connues. Ce problème inverse a été traité par *Eyimi* dans sa thèse [33], où il a transformé les conditions aux limites mécaniques en des expressions analytiques incluant la trace du déplacement ainsi que ses dérivées normales d'ordre inférieur ou égal à 3. Cette approche permet certes de simplifier la mise en œuvre numérique des conditions aux limites par la méthode des éléments finis, mais peut avoir un coût dans la construction numérique ou dans la détermination de ces nouvelles quantités lorsque les données proviendraient d'expérimentation. Nous proposons dans ce chapitre une nouvelle stratégie pour résoudre ce problème. Nous considérons les conditions aux limites mécaniques telles qu'elles sont données par la théorie des plaques et nous utilisons des éléments finis de type plaque, adapté

à la théorie de *Kirchhoff* [32, 8, 7], qui permettent les approximations du déplacement transverse et des rotations. En effet, la sélection des fonctions d'interpolation est un facteur primordial dans l'amélioration de l'approximation numérique par éléments finis. Contrairement aux interpolations de Lagrange utilisées précédemment, où la régularité des solutions n'est que  $C^0$ , ces nouveaux éléments nécessitent une continuité  $C^1$  des fonctions de forme ou au moins au niveau des nœuds du maillage. C'est un outil qui permet de résoudre directement le problème sans avoir recours à une factorisation pour réduire l'ordre d'interpolation (Cf. Eyimi [33] ou le chapitre précédent). Dans ce chapitre, nous commençons par présenter un rappel sur la théorie des plaques minces. Nous présentons ensuite un problème de Cauchy pour les plaques minces en flexion et sa résolution en utilisant la méthode de régularisation évanescence. Nous introduisons ensuite la discrétisation par éléments finis de type plaque et nous présentons quelques exemples de validation.

## 2.2 Rappels sur la théorie des plaques minces de Kirchhoff-Love

### 2.2.1 Les hypothèses de Kirchhoff-Love

La théorie des plaques minces est basée sur les hypothèses formalisées par *Kirchhoff* en 1850 [50, 51] et en effet son nom est souvent associé à cette théorie, bien qu'une première version ait été présentée par *Sophie Germain* en 1811, puis par *Poisson* en 1828 [68]. Or, il a été montré par *Kirchhoff* que les conditions aux limites du modèle proposé ne sont pas fiables et qu'il n'est généralement pas possible de les satisfaire. Il a ensuite posé la théorie en se basant sur les deux hypothèses cinématiques fondamentales suivantes :

- "Les sections normales au feuillet moyen restent droites après déformation."
- "Les sections normales au feuillet moyen restent normales au feuillet moyen après déformation."

Ces déclarations sont devenues ensuite connues sous le nom des hypothèses de *Kirchhoff-Love* sans que cela soit bien justifié. On trouvera plus de détails sur l'histoire de cette théorie dans les références [61, 67].

Il a été considéré aussi que le plan moyen est initialement plan, c'est à dire qu'il ne présente aucune courbure et qu'il ne subit aucune déformation dans son plan. La faible épaisseur de la plaque conduit à négliger la déformation dans le sens de l'épaisseur, ce qui implique que les contraintes dans ce sens peuvent également être négligées. Ainsi, les hypothèses de *Kirchhoff-Love* ont permis d'exprimer toutes les contraintes non nulles en fonction de la flèche  $w$  (déplacement vertical de la plaque), qui ne dépend que des deux coordonnées dans le plan de la plaque. Cette fonction doit satisfaire une équation aux dérivées partielles linéaire qui, avec les conditions aux limites, définit complètement  $w$ . Par conséquent, la solution de cette équation donne toutes les informations nécessaires au calcul des contraintes en tout point de la plaque.

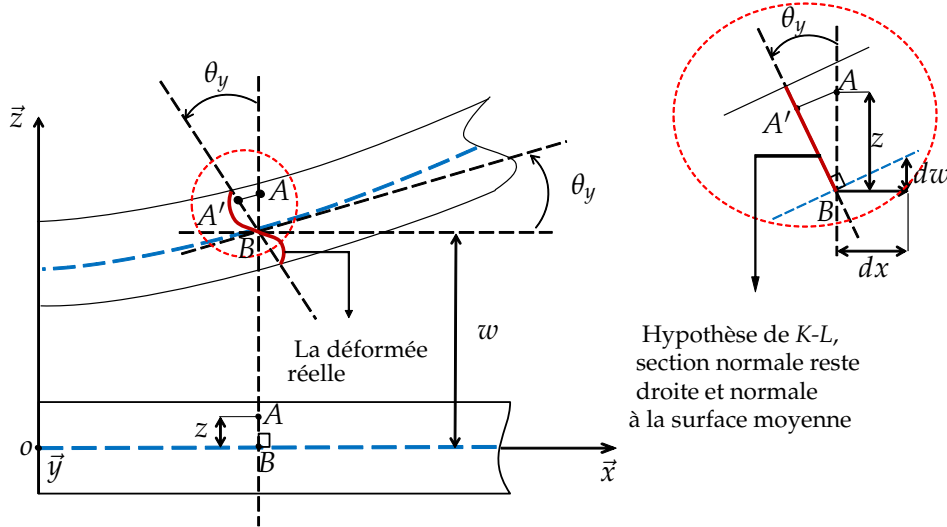


FIGURE 2.2 – Représentation du déplacement d'un point A dans le plan  $o\vec{x}\vec{y}$ , selon les hypothèses de Kirchhoff-Love

### 2.2.1.1 Champ de déplacement

Selon les hypothèses retenues, si un point A est à une distance  $z$  du plan moyen à l'état initial, il restera à cette même distance après déformation de la plaque. Notez que, à l'état déformé, le plan normal au plan moyen contenant le point A subit une rotation. Ainsi, en analysant le détail mis en évidence sur la Figure 2.2, nous avons l'expression de la rotation  $\theta_y$  (respectivement  $\theta_x$ ) suivant l'axe  $o\vec{y}$  (respectivement  $o\vec{x}$ ) :

$$\begin{cases} \theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \\ \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \end{cases} \quad (2.1)$$

Les rotations en flexion des plaques peuvent avoir différentes notations. Cela est souvent lié à l'approche utilisée et notamment à l'utilisation des éléments finis de plaques où ces variables, en plus du déplacement, seront considérées comme des paramètres nodaux sur l'élément. Pour éviter toute ambiguïté, nous utilisons la notation de (2.1) dans la suite de notre étude.

Notons  $u$  et  $v$  les déplacements d'un point  $A(x, y, z)$  de la plaque suivant les axes  $o\vec{x}$  et  $o\vec{y}$  respectivement, en plus de  $w$  qui est celui dans le sens de l'axe  $o\vec{z}$ . Nous pouvons alors exprimer les composantes du champ de déplacement de n'importe quel point de la plaque de la manière suivante :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = -z\theta_y(x, y) \\ v(x, y, z) = -z\theta_x(x, y) \\ w(x, y, z) = w(x, y) \end{cases} \quad (2.2)$$

### 2.2.1.2 Champ de déformations

La théorie classique de l'élasticité pour les petits déplacements et les petites déformations fournit les relations suivantes entre les déformations et les déplacements :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{cases} \quad (2.3)$$

D'après la théorie de *Kirchhoff*, une section normale au plan moyen reste plane après déformation. Cela veut dire que les glissements de cisaillement vertical  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$  sont supposés nuls. Il est aussi déduit que la déformation normale  $\varepsilon_z$  suivant l'axe  $o\vec{z}$  peut être omise (la flèche  $w$  ne dépend que de  $x$  et  $y$  et ne varie pas le long de l'épaisseur de la plaque). D'où

$$\varepsilon_z = 0, \quad \gamma_{xz} = 0, \quad \text{et} \quad \gamma_{yz} = 0. \quad (2.4)$$

Ainsi, les composantes non nulles de déformations peuvent être définies par un vecteur  $\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$  tels que :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (2.5)$$

En introduisant les opérateurs différentiels suivants :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

on peut écrire  $\underline{\varepsilon}$  sous la forme

$$\underline{\varepsilon} = -z \mathbf{L} \nabla w. \quad (2.7)$$

### 2.2.1.3 Champ de contraintes

Dans le cas d'un état de contraintes planes en élasticité linéaire, les composantes non nulles de contraintes peuvent être notés  $\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$  et reliées aux déformations

par la loi de Hooke généralisée :

$$\underline{\sigma} = \mathbf{D}\underline{\varepsilon} \quad (2.8)$$

où  $\mathbf{D}$  est une matrice représentant le comportement mécanique du matériau. Dans le cas d'un matériau isotrope homogène, elle est donnée par :

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

où  $E$  et  $\nu$  représentent respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson du matériau. D'après les relations (2.7) et (2.9), ces contraintes non nulles  $\underline{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}]^t$  peuvent s'écrire en fonction du déplacement :

$$\underline{\sigma} = -z\mathbf{D}\mathbf{L}\nabla w. \quad (2.10)$$

#### 2.2.1.4 Efforts résultants et moments résultants

Les contraintes réparties dans l'épaisseur de la plaque produisent des efforts résultants et des moments résultants agissant sur la plaque. On a ainsi :

- Les efforts résultants de membrane ou efforts normaux

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz. \quad (2.11)$$

- Les efforts résultants de cisaillement ou efforts tranchants

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz. \quad (2.12)$$

- Les moments résultants de flexion et de torsion

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz. \quad (2.13)$$

$M_x$  et  $M_y$  sont appelés les moments de flexion et  $M_{xy}(= M_{yx})$  le moment de torsion.

Dans le cas de la flexion des plaques minces, en substituant la relation (2.10) dans la définition (2.13), nous obtenons les expressions suivantes pour les moments de flexion et de torsion en fonction de la flèche  $w$  :

$$\mathbf{M} = \begin{cases} M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (2.14)$$

avec

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

ou encore

$$\mathbf{M} = \frac{-h^3}{12} \mathbf{DL}\nabla w. \quad (2.15)$$

On peut en déduire ainsi une écriture des contraintes en fonction des moments :

$$\sigma_x = \frac{12M_x z}{h^3}; \quad \sigma_y = \frac{12M_y z}{h^3}; \quad \sigma_{xy} = \frac{12M_{xy} z}{h^3}. \quad (2.16)$$

*Remarque.* Dans le cas de la flexion, les moments  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_{xy}$  sont indépendants de  $z$  et on vérifie que les efforts résultants membranaires  $N_x$ ,  $N_y$  et  $N_{xy}$  sont nuls. De plus, les contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\sigma_{xy}$  sont linéaires dans l'épaisseur.

## 2.2.2 Problème de flexion des plaques minces

### 2.2.2.1 Équation d'équilibre d'un solide élastique

En mécanique des solides, un solide occupant un volume  $\Omega$  est en équilibre si  $\forall M \in \Omega$  :

$$\underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = \vec{0}, \quad (2.17)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}$  représente le tenseur des contraintes donné par  $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$  et  $\underline{f}$  les

forces volumiques appliquées sur le solide. En considérant la notation suivante pour les dérivées partielles :  $\frac{\partial f}{\partial i} = f_{,i}$  et  $\frac{\partial \sigma}{\partial i} = \sigma_{,i}$ , pour  $i = \{x, y, z\}$ , on projette l'équation vectorielle (2.17) dans la base cartésienne et on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} + f_x = 0 \\ \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{yz,z} + f_y = 0, \\ \sigma_{xz,x} + \sigma_{yz,y} + \sigma_{zz,z} + f_z = 0 \end{cases} \quad \forall M \in \Omega. \quad (2.18)$$

### 2.2.2.2 Équation d'équilibre d'une plaque sous forme vectorielle

Dans le cas d'une plaque, on intègre les équations d'équilibre (2.18) dans l'épaisseur et on obtient une relation reliant les efforts résultants :

$$\int_{-h/2}^{h/2} (\underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f}) dz = 0, \quad (2.19)$$

ou encore en projetant dans la base cartésienne :

$$\begin{cases} N_{x,x} + N_{xy,y} + q_x = 0 \\ N_{y,x} + N_{y,y} + q_y = 0 \\ Q_{x,x} + Q_{y,y} + q_z = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$



où  $q_i = \left[ \sigma_{iz} \right]_{-h/2}^{h/2} + \int_{-h/2}^{h/2} f_i dz$  pour  $i = x, y$ .

D'autre part, on peut obtenir de manière similaire les équations d'équilibre reliant les moments résultants en multipliant (2.17) par  $z$  et en intégrant dans l'épaisseur :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \left( \text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{f}} \right) dz = 0. \quad (2.21)$$

En utilisant la définition des moments résultants (2.13) et des efforts tranchants (2.12) et une projection suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ , on obtient les relations suivantes :

$$\begin{cases} M_{x,x} + M_{xy,y} + \mu_x = Q_x \\ M_{yx,x} + M_{y,y} + \mu_y = Q_y \end{cases} \quad (2.22)$$

où  $\mu_i = \left[ z \sigma_{iz} \right]_{-h/2}^{h/2} + \int_{-h/2}^{h/2} z f_i dz$  pour  $i = x, y$ .

### 2.2.2.3 Équation d'équilibre d'une plaque en flexion

Dans le cas d'une plaque en flexion, les efforts résultants membranaires  $N_x$ ,  $N_y$  et  $N_{xy}$  sont nuls ainsi que les chargements volumiques  $f_x$  et  $f_y$  suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ . D'où, les équations de (2.20) se réduisent à l'équation

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} + q_z = 0. \quad (2.23)$$

D'autre part,  $\sigma_{xz} = 0$  et  $\sigma_{yz} = 0$  pour  $z = \pm h/2$ , d'où  $\mu_i = \int_{-h/2}^{h/2} z f_i dz = 0$  pour  $i = x, y$ . En dérivant les équations de (2.22) par rapport  $x$  et  $y$ , on obtient :

$$\begin{cases} M_{x,xx} + M_{xy,yx} = Q_{x,x} \\ M_{yx,xy} + M_{y,yy} = Q_{y,y} \end{cases} \quad (2.24)$$

Finalement, en injectant les équations de (2.24) dans l'équation (2.23), on obtient l'équation d'équilibre de plaque en flexion :

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + q_z = 0, \quad (2.25)$$

ou autrement

$$(\mathbf{L}\nabla)^T \mathbf{M} = -q_z. \quad (2.26)$$

Dans le cas d'une plaque isotrope avec un coefficient de rigidité à flexion  $D$  constant, on obtient une équation associée à l'opérateur biharmonique pour le déplacement  $w$ . En effet, en injectant l'expression de  $\mathbf{M} = D(\mathbf{L}\nabla)w$  dans la dernière équation (2.26), on obtient :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{q_z}{D}, \quad (2.27)$$

i.e.

$$\Delta^2 w = -\frac{q_z}{D}. \quad (2.28)$$

On peut déduire à partir des équations de (2.22), dans le cas de chargement perpendiculaire (tel que  $f_x = 0$  et  $f_y = 0$ ), une relation entre les efforts tranchants  $Q_x$  et  $Q_y$  et le laplacien du déplacement  $w$  :

$$\begin{cases} Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) \\ Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) \end{cases} \quad (2.29)$$

Ces expressions ont été développées par Timoshenko dans son livre [78], où il a également donné les configurations de bords d'une plaque couramment rencontrées dans la pratique ainsi que les conditions aux limites associées. Dans le cas de plaques rectangulaires de cotés parallèles aux axes  $o\vec{x}$  et  $o\vec{y}$  respectivement, trois types de conditions aux limites peuvent se produire. Pour un bord donné ( $x = a$ ), on a :

**2.2.2.3.1 Bord encasté** Le déplacement vertical  $w$  ainsi que la rotation normale  $w_{,n}$  sont nuls.

$$(w)_{x=a} = 0 \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0. \quad (2.30)$$

**2.2.2.3.2 Bord simplement posé** Le déplacement vertical  $w$  est nul le long du bord et une rotation normale peut se produire (mais il n'y a pas de moment) :

$$(w)_{x=a} = 0 \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0, \quad (2.31)$$

ce qui est équivalent à

$$(w)_{x=a} = 0 \quad \text{et} \quad (\Delta w)_{x=a} = 0. \quad (2.32)$$

**2.2.2.3.3 Bord libre** Le déplacement vertical  $w$  est libre et il n'y a pas de moment de flexion ni de torsion ni d'effort tranchant :

$$(M_x)_{x=a} = 0, \quad (M_{xy})_{x=a} = 0 \quad \text{et} \quad (Q_x)_{x=a} = 0. \quad (2.33)$$

Il a été démontré par Kirchhoff [50] que ces trois dernières conditions sont redondantes et que seules deux conditions suffisent pour déterminer le déplacement vertical  $w$  :

$$(M_x)_{x=a} = 0 \quad \text{et} \quad V_x \equiv \left( Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a} = 0. \quad (2.34)$$

#### 2.2.2.4 Formulation variationnelle du problème des plaques minces

Nous établissons ici la formulation variationnelle du problème de plaques, nécessaire à l'obtention des équations en éléments finis. De plus, elle permettra de faire apparaître les conditions aux limites associées au problème de plaques. En effet, la formulation variationnelle peut-être obtenue à travers une multiplication par une

fonction test puis une intégration ou en utilisant le principe des puissances virtuelles (PPV). En appliquant ce dernier, nous supposons qu'une variation infinitésimale  $\delta w$  du déplacement  $w$  est produite. Ainsi, la variation de l'énergie de déformation virtuelle doit être égale au travail produit par les forces extérieures pendant le déplacement virtuel supposé. Pour une plaque en flexion soumise à un chargement  $q$  distribué uniformément sur la surface de la plaque, Il est déduit que :

$$\delta U = \delta V, \quad (2.35)$$

telle que  $\delta U$  désigne l'énergie virtuelle de déformation et est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\Omega} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^t \underline{\underline{\sigma}} d\Omega \\ &= \int_{\Omega_0} \left[ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy}) dz \right] dx dy \\ &= - \int_{\Omega_0} \left( M_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) dx dy, \end{aligned} \quad (2.36)$$

et  $\delta V$  désigne l'énergie potentielle virtuelle :

$$\delta V = \int_{\Omega_0} q(x, y) \delta w dx dy,$$

où  $\Omega_0$  désigne le plan milieu de la plaque.

En effectuant deux intégrations par parties et en utilisant la propriété

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial i} d\Omega = \int_{\Gamma} uv n_i ds - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial i} v d\Omega \quad \text{pour } i = x, y, \quad (2.37)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} M_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial i \partial j} dx dy &= \int_{\Gamma} M_{ij} \frac{\partial w}{\partial j} n_j ds - \int_{\Omega_0} \frac{\partial M_{ij}}{\partial i} \frac{\partial w}{\partial j} dx dy \\ &= \int_{\Gamma} M_i \frac{\partial w}{\partial j} n_j ds - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ij}}{\partial i} w n_i ds + \int_{\Omega_0} \frac{\partial^2 M_{ij}}{\partial j \partial i} w dx dy \end{aligned} \quad (2.38)$$

avec  $i, j = x, y$ , où  $M_{xx} \equiv M_x$  et  $M_{yy} \equiv M_y$ . On pourrait aussi utiliser le théorème de flux-divergence pour montrer ce résultat.

L'intégrale dans l'équation (2.36) devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \left( M_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) dx dy &= \\ &= \int_{\Omega_0} (M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy}) \delta w dx dy \\ &+ \int_{\Gamma} \left[ (M_x n_x + M_{xy} n_y) \frac{\partial \delta w}{\partial x} + (M_{xy} n_x + M_y n_y) \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right] ds \\ &- \int_{\Gamma} [(M_{x,x} + M_{xy,y}) n_x + (M_{y,y} + M_{xy,x}) n_y] \delta w ds \end{aligned} \quad (2.39)$$

L'intégrale du membre de droite de l'égalité donne :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} (M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy}) \delta w \, dx dy &= \int_{\Omega_0} \left( (\mathbf{L}\nabla)^t \mathbf{M} \right) \delta w \, dx dy \\ &= -\frac{h^3}{12} \int_{\Omega_0} ((\mathbf{L}\nabla)w)^t \mathbf{D}((\mathbf{L}\nabla)\delta w) \, dx dy \quad (2.40) \\ &= - \int_{\Omega_0} ((\mathbf{L}\nabla)w)^t \underline{\mathbf{D}}((\mathbf{L}\nabla)\delta w) \, dx dy, \end{aligned}$$

où nous avons exploité la relation  $\mathbf{M} = -\frac{h^3}{12} \mathbf{D}(\mathbf{L}\nabla w)$  tout en notant  $\underline{\mathbf{D}} \equiv \frac{h^3}{12} \mathbf{D}$ .

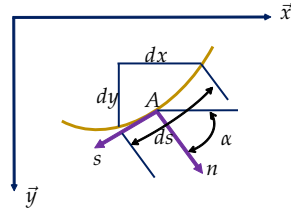
D'autre part, les intégrales aux bords dans l'équation (2.39) produisent les conditions aux limites du système. En rappelant les expressions de l'effort tranchant en fonction des moments :

$$\begin{cases} Q_x = M_{x,x} + M_{xy,y} \\ Q_y = M_{yx,x} + M_{y,y} \end{cases} \quad (2.41)$$

on peut écrire les intégrales aux bords de (2.39) comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left[ (M_x n_x + M_{xy} n_y) \frac{\partial \delta w}{\partial x} + (M_{xy} n_x + M_y n_y) \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right. \\ \left. - (Q_x n_x + Q_y n_y) \delta w \right] ds. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Les bords d'une plaque ne sont pas toujours parallèles à un axe cartésien. L'idée est donc d'exprimer les conditions aux limites d'une plaque par un système de coordonnées normale et tangentielle  $(n, s)$  sur la frontière :



$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= n_x \frac{\partial w}{\partial n} - n_y \frac{\partial w}{\partial s} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= n_y \frac{\partial w}{\partial n} + n_x \frac{\partial w}{\partial s} \end{aligned} \quad (2.43)$$

FIGURE 2.3 – Représentation d'un système de coordonnées normale et tangentielle au niveau d'un point A de la frontière.

L'intégrale (2.42) s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left[ (M_x n_x^2 + 2M_{xy} n_x n_y + M_y n_y^2) \frac{\partial \delta w}{\partial n} \right. \\ \left. + [(M_y - M_x) n_x n_y + M_{xy} (n_x^2 - n_y^2)] \frac{\partial \delta w}{\partial s} - (Q_x n_x + Q_y n_y) \delta w \right] ds \quad (2.44) \\ = \int_{\Gamma} \left[ \mathcal{M}_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} + \mathcal{M}_{ns} \frac{\partial \delta w}{\partial s} - Q_n \delta w \right] ds, \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{M}_n \equiv M_x n_x^2 + 2M_{xy} n_x n_y + M_y n_y^2, \quad (2.45)$$

$$\mathcal{M}_{ns} \equiv (M_y - M_x) n_x n_y + M_{xy} (n_x^2 - n_y^2), \quad (2.46)$$

$$Q_n \equiv Q_x n_x + Q_y n_y. \quad (2.47)$$

En réalisant une intégration par parties, l'intégrale du second membre de (2.44) devient :

$$\int_{\Gamma} \left[ \mathcal{M}_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} + \left( \frac{\partial \mathcal{M}_{ns}}{\partial s} - Q_n \right) \delta w \right] ds - [\mathcal{M}_{ns} \delta w]_{\Gamma}, \quad (2.48)$$

où le terme  $[\mathcal{M}_{ns} \delta w]_{\Gamma}$  s'annule quand les extrémités de la courbe régulière  $\Gamma$  coïncident sinon il vaut  $\sum_i \delta w R_i$ , où  $R_i$  sont des forces concentrées sur les nœuds des coins. Enfin, l'intégrale sur le bord (2.48) devient :

$$\int_{\Gamma} \left[ \mathcal{M}_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} - \underbrace{\left( Q_n - \frac{\partial \mathcal{M}_{ns}}{\partial s} \right)}_{\equiv \mathcal{V}_n} \delta w \right] ds - [\mathcal{M}_{ns} \delta w]_{\Gamma} \quad (2.49)$$

Où  $\mathcal{V}_n$  désigne l'effort tranchant effectif et  $\mathcal{M}_n$  représente un moment de flexion (le moment d'axe porté par la tangente à  $\Gamma$ ).

Finalement, le principe des puissances virtuelles (2.35) donne la formulation variationnelle suivante :

$$\int_{\Omega_0} ((\mathbf{L}\nabla)w)^t \underline{D}((\mathbf{L}\nabla)\delta w) dx dy = \int_{\Omega_0} q(x,y) \delta w dx dy + \int_{\Gamma} \left[ -\mathcal{M}_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} + \mathcal{V}_n \delta w \right] ds + [\mathcal{M}_{ns} \delta w]_{\Gamma}. \quad (2.50)$$

Cette formulation variationnelle conduit à définir les conditions aux limites pour une plaque en flexion sous la théorie de *Kirchhoff-Love*. Elles peuvent porter sur les quantités  $w$ ,  $\frac{\partial w}{\partial n}$  et les efforts  $\mathcal{M}_n$  et  $\mathcal{V}_n$  au niveau du bord, où  $\mathcal{M}_n$  et  $\mathcal{V}_n$  peuvent s'exprimer en fonction de  $w$  sous la forme :

$$\mathcal{M}_n = -D \left[ \Delta w + (1-\nu) \left( 2n_x n_y \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - n_y^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - n_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right], \quad (2.51)$$

$$\mathcal{V}_n = -D \left[ \frac{\partial \Delta w}{\partial n} + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[ n_x n_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + (n_x^2 - n_y^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x y} \right] \right]. \quad (2.52)$$

### 2.2.3 Le problème de Cauchy en théorie de plaques de Kirchhoff-Love

Dans certaines situations pratiques en flexion de plaque, il arrive que nous n'ayons pas accès à des conditions aux limites sur toute la frontière. Compte tenu du développement précédent, cela nous ramène à résoudre un problème inverse de type Cauchy

associé au bilaplacien pour le déplacement  $w$  :

$$\begin{cases} \Delta^2 w = \frac{q}{D} & \text{dans } \Omega_0 \\ w = \varphi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ w_{,n} = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \mathcal{M}_n = \mathcal{M}_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \mathcal{V}_n = \mathcal{V}_d & \text{sur } \Gamma_d \end{cases} \quad (2.53)$$

tel que  $\Gamma_d$  est la partie du bord accessible aux mesures et  $\mathcal{M}_d$  et  $\mathcal{V}_d$  sont le moment de flexion et l'effort tranchant au bord de la plaque.

Afin de résoudre le problème (2.53), il est toujours plus simple de considérer le cas homogène, où le second membre est nul. Une possibilité pour s'y affranchir est d'effectuer un relèvement  $\bar{u} = w - \bar{w}$ , tel que  $\bar{w}$  est une solution particulière de l'équation d'équilibre. On considère par exemple le cas d'une plaque encastree, où le problème à résoudre est :

$$\begin{cases} \Delta^2 \bar{w} = \frac{q}{D} & \text{dans } \Omega_0 \\ \bar{w} = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \bar{w}_{,n} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.54)$$

Le problème (2.54) est bien posé (si  $q$  est connu) et peut être résolu au préalable pour obtenir  $\bar{w}$  partout dans  $\Omega_0$ . Ainsi, le problème (2.53) peut être modifié en :

$$\begin{cases} \Delta^2 \bar{u} = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ \bar{u} = \varphi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \bar{u}_{,n} = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \bar{M}_{nn} = \mathcal{M}_d - \bar{M}_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \bar{V}_n = \mathcal{V}_d - \bar{V}_d & \text{sur } \Gamma_d \end{cases} \quad (2.55)$$

où  $\bar{M}_d$  et  $\bar{V}_d$  sont les restrictions sur  $\Gamma_d$  des moments de flexion et des efforts tranchants obtenus en résolvant (2.54). Ils sont donnés par [33] :

$$\bar{M}_d = D \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial n^2} \quad \text{et} \quad \bar{V}_d = -D \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial n^3} - \frac{\bar{M}_d}{\mathcal{R}}, \quad (2.56)$$

où  $\mathcal{R}$  est le rayon de courbure.

Pour des raisons de simplicité, nous posons  $\mu_d = \mathcal{M}_d - \bar{M}_d$  et  $\phi_d = \mathcal{V}_d - \bar{V}_d$  et nous notons dorénavant  $w$  la solution  $\bar{u}$  du problème (2.55). Nous nous intéressons par la suite à résoudre le problème de Cauchy équivalent suivant :

$$\begin{cases} \Delta^2 w = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ w = \varphi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ w_{,n} = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \mathcal{M}_n = \mu_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \mathcal{V}_n = \phi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{cases} \quad (2.57)$$

C'est un problème semblable à celui étudié au chapitre 1. La différence réside dans les troisième et quatrième conditions aux limites. Toutefois, cela ne change pas les espaces fonctionnels considérés. En effet, comme nous avons pu le voir dans la section

précédente, en particulier pour les équations (2.51) et (2.52),  $\mathcal{M}_n$  et  $\mathcal{V}_n$  sont fonctions des dérivées de  $w$  d'ordre au plus 2 et 3 respectivement. Ainsi, si  $w \in H^2(\Omega)$  alors  $\mathcal{M}_n \in H^{-1/2}(\Gamma)$  et  $\mathcal{V}_n \in H^{-3/2}(\Gamma)$ . En gardant la même notation des espaces fonctionnels qu'au chapitre 1 et en adaptant l'espace des quadruplets compatibles  $H(\Gamma)$  à ce problème de la manière suivante :

$$\mathcal{H}(\Gamma) = \{ \Phi = (\varphi, \psi, \mu, \phi) \in X(\Gamma) \mid \exists w \in \mathcal{H}_0^2(\Omega) \text{ et } (w|_\Gamma, w_n, \mathcal{M}_n, \mathcal{V}_n) = (\varphi, \psi, \mu, \phi) \}, \quad (2.58)$$

on peut écrire une formulation équivalente du problème de Cauchy (2.57) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{W} = (w|_\Gamma, w_n, \mathcal{M}_n, \mathcal{V}_n) \in H(\Gamma) \\ \mathbf{W} = \Phi_d \quad \text{sur } \Gamma_d \end{cases} \quad (2.59)$$

avec  $\Phi_d = (\varphi_d, \psi_d, \mu_d, \phi_d)$ .

Ce problème est mal posé pour les mêmes raisons qu'auparavant. La résolution nécessite l'introduction d'une technique de régularisation. Nous utilisons donc la régularisation évanescence. Ainsi, nous pouvons écrire le problème sous la forme d'un algorithme itératif :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{W}^{k+1} \in H(\Gamma) \text{ tel que} \\ J_c^{k+1}(\mathbf{W}) \leq J_c^{k+1}(\mathbf{W}^{k+1}), \quad \forall \mathbf{V} \in H(\Gamma) \\ \text{avec } J_c^{k+1}(\mathbf{V}) = \|\mathbf{V}|_{\Gamma_d} - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 + c\|\mathbf{V} - \mathbf{W}^k\|_{H(\Gamma)}^2 \end{cases} \quad (2.60)$$

À chaque itération, il existe un unique élément optimal  $\mathbf{W}^{k+1}$  caractérisé par :

$$\langle \mathbf{W}|_{\Gamma_d}^{k+1} - \Phi_d, \mathbf{V}|_{\Gamma_d} \rangle_{H(\Gamma_d)} + c\langle \mathbf{W}^{k+1} - \mathbf{W}^k, \mathbf{V} \rangle_{H(\Gamma)} = 0 \quad \forall \mathbf{V} \in H(\Gamma).$$

La convergence de cet algorithme est assurée par les résultats donnés au chapitre 1.

### 2.3 Mise en œuvre numérique de la méthode des éléments finis de Kirchhoff

Avec l'apparition de la méthode des éléments finis dans les années 1940, le domaine de l'analyse structurelle a connu un développement remarquable, notamment dans l'analyse des plaques et des coques. De nombreux éléments finis ont été introduits et ont contribué à la validation numérique de certaines théories. Les premiers éléments finis de plaques sont apparus au début des années 1960 [1, 38, 39, 21]. Ce sont les premières tentatives permettant d'approximer le champs de déplacement des plaques en flexion sous les hypothèses de *Kirchhoff-Love*. Cependant, les résultats de convergence vers la solution du problème de plaques n'étaient pas très satisfaisants. Les difficultés rencontrées proviennent de la présence des dérivées secondes dans la

formulation, où elle exige la continuité  $C^1$  des fonctions d'interpolation. Cette continuité est assez difficile à réaliser pour plusieurs raisons (voir [83], p122-123). Des éléments finis, appelés "Discrete Kirchhoff" (DK), sont ainsi introduits afin de contourner ce problème. L'idée est d'abord de considérer la théorie des plaques de *Reissner-Mindlin* [69, 64], où le cisaillement transverse existe, qui nécessite seulement la continuité  $C^0$  des fonctions d'interpolation pour le déplacement et une interpolation indépendante des rotations. Et ensuite, d'appliquer les hypothèses de *Kirchhoff-Love* de manière discrète au niveau des bords des éléments et des nœuds, en négligeant le cisaillement, donnant ainsi une relation entre le déplacement transverse et les rotations. Ces éléments sont particulièrement intéressants pour la modélisation de la flexion des plaques minces. On peut citer par exemple les éléments finis DKT (*Discrete Kirchhoff triangle*, 1968 [32], 1980 [8]) et DKQ (*Discrete Kirchhoff quadrilateral*, 1982 [7]).

Ces éléments sont connus pour être des éléments finis « non conformes », à cause du non-respect de la continuité des dérivées partielles entre éléments. En effet, comme une continuité de pente totale est requise sur les interfaces entre les différents éléments, les difficultés mathématiques et de calcul augmentent souvent de manière disproportionnées. Il est cependant relativement simple d'obtenir des fonctions de forme qui, tout en préservant la continuité de la solution, peuvent violer la continuité de pente entre éléments, bien que normalement pas au nœud où cette continuité est imposée. En outre, il a été montré dans les références [1] et [39], qu'il est parfois possible d'obtenir des résultats convergents et très efficaces avec des éléments non conformes. Cette convergence, qui dans de tels cas peut ne pas être monotone, peut dépendre de la configuration du maillage éléments finis, c'est à dire que dans certains exemples, il peut ne pas y avoir de convergence. A cet effet, Irons [46] a proposé un « patch test », qui donne un critère efficace pour la convergence des éléments finis (une condition nécessaire). La déclaration originale a été proposée comme une version d'ingénierie, qui veut un calcul numérique pour vérifier. Cependant, d'un point de vue mathématique, une version purement analytique du patch test a été proposée [75]. Il a été aussi montré [76] que sa satisfaction est une condition nécessaire de convergence et qu'il peut être appliqué pour la vérification des exigences de stabilité, fournissant ainsi également une condition suffisante de convergence. Le patch test est utile pour tester l'ordre de convergence asymptotique et la satisfaction du test donne un guide pour le développement de certaines formes d'éléments incompatibles. On se référera aux références [79, 84, 83] pour plus de détails.

Les éléments finis DK ont passé avec succès le patch test et sont très appréciés pour leur précision d'approximation. Nous présentons dans cette section une formulation unifiée pour les éléments de plaques DKT et DKQ. Nous appliquons ensuite cette méthode pour discrétiser la formulation variationnelle du problème de plaque (2.50) ainsi que les espaces des solutions afin de pouvoir résoudre le problème de Cauchy avec un algorithme de régularisation évanescence en dimension finie.



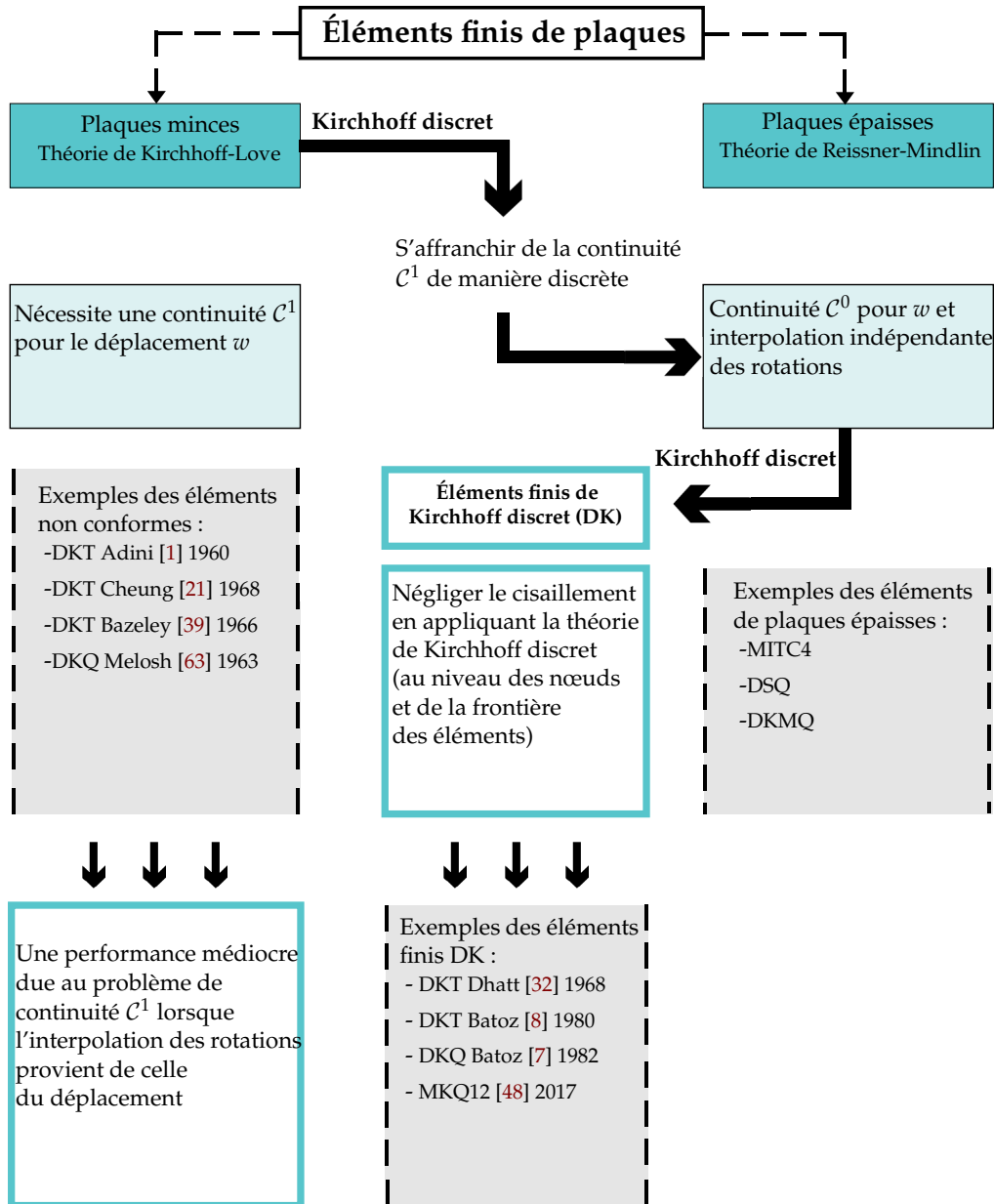


FIGURE 2.4 – Schéma explicatif de l'introduction des éléments finis de Kirchhoff discret.

### 2.3.1 Formulation des éléments finis de Kirchhoff

Nous présentons dans cette section la formulation de la méthode des éléments finis de *Kirchhoff discret* (DK) et nous l'utilisons pour caractériser la solution du problème biharmonique (2.57) en dimension finie. La formulation faible associée peut être établie de la même manière que celle du problème de plaques (2.50), il suffit de poser  $q = 0$ . De plus, nous nous intéressons dans un premier temps au cas d'un domaine  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  de frontière régulière  $\Gamma$ . Ainsi, pour un déplacement  $w \in H^2(\Omega)$ , on écrit la

formulation faible du problème (2.57) sous la forme<sup>1</sup> :

$$a(w, v) = l(v), \forall v \in H^2(\Omega) \quad (2.61)$$

avec

$$\begin{aligned} a(w, v) &= \int_{\Omega} ((\mathbf{L}\nabla)w)^t \underline{\mathbf{D}}((\mathbf{L}\nabla)v) dx dy, \\ l(v) &= \int_{\Gamma} \left[ -\mathcal{M}_n v_{,n} + \mathcal{V}_n v \right] ds. \end{aligned} \quad (2.62)$$

On définit l'espace des quadruplets compatibles  $\mathcal{H}(\Gamma)$  sous la forme suivante :

$$\mathcal{H}(\Gamma) = \left\{ \Phi = (\varphi, \psi, \mu, \phi) \in X(\Gamma) \mid \exists w \in H^2(\Omega), \quad w|_{\Gamma} = \varphi, \quad w_{,n} = \psi \right. \\ \left. \text{et } \int_{\Omega} ((\mathbf{L}\nabla)w)^t \underline{\mathbf{D}}((\mathbf{L}\nabla)v) dx dy = \int_{\Gamma} \left[ -\mu v_{,n} + \phi v \right] ds, \forall v \in H^2(\Omega) \right\} \quad (2.63)$$

Le principe des éléments finis DK consiste à utiliser le schéma des éléments finis de plaque de *Reissner-Mindlin* pour les plaques épaisses (ce sont des éléments à 3 degrés de liberté, représentant le déplacement vertical et les rotations au niveau des nœuds) et ensuite, de négliger la déformation de cisaillement en appliquant la théorie de *Kirchhoff* de manière discrète. Nous présentons ci-dessous ces différentes étapes.

L'interpolation du déplacement et des rotations des éléments de plaque de *Reissner-Mindlin* est obtenue en généralisant l'interpolation des éléments des poutres de *Timoshenko* [78] sur chaque arête de l'élément. Une interpolation cubique du déplacement  $w$  est considérée avec une interpolation quadratique incomplète et indépendante des rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$  le long des arêtes. À cet effet, une nouvelle variable fictive et temporaire  $\Delta\theta_{s_k}$  est introduite au niveau du milieu de l'arête.

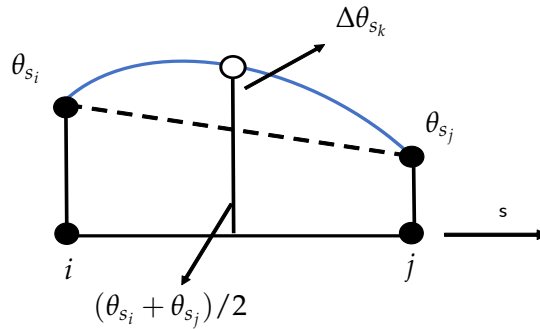


FIGURE 2.5 – Représentation des rotations  $\theta_{s_i}$ ,  $\theta_{s_j}$  et  $\theta_{s_k}$  sur une arête  $i-j$ .

Pour une arête  $i-j$  de longueur  $L_k$ , la rotation tangentielle  $\theta_s$  le long de l'arête s'écrit en fonction de  $s \in [0, L_k]$  :

$$\theta_s = \left(1 - \frac{s}{L_k}\right)\theta_{s_i} + \frac{s}{L_k}\theta_{s_j} + 4\frac{s}{L_k}\left(1 - \frac{s}{L_k}\right)\Delta\theta_{s_k}. \quad (2.64)$$

1. cela est possible en posant  $v = \delta w$  dans (2.50).

De plus, la rotation normale  $\theta_n$  est supposée varier linéairement sur chaque arête :

$$\theta_n = \left(1 - \frac{s}{L_k}\right)\theta_{n_i} + \frac{s}{L_k}\theta_{n_j}. \quad (2.65)$$

La généralisation de ces relations sur toutes les arêtes de l'élément donne les expressions de  $\theta_x$  et  $\theta_y$  :

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \sum_{l \in \mathcal{E}} N_l(r, s) \boldsymbol{\theta}_l + \sum_{k \in \mathcal{E}_m} N_k(r, s) \mathbf{n}_k \Delta \theta_{s_k}, \quad (2.66)$$

où  $\mathbf{n}_k = (n_{x_k}, n_{y_k})$  est le vecteur normal au niveau du milieu de l'arête  $k$  et  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}_m$  représentent respectivement les indices des nœuds des coins et ceux des nœuds milieux de l'élément. Les fonctions  $N_l$  et  $N_k$  sont détaillées dans l'annexe (B.3). Pour les éléments triangulaires, on a  $\mathcal{E} = \{1, 2, 3\}$  et  $\mathcal{E}_m = \{4, 5, 6\}$  et pour les éléments quadrangulaires, on a  $\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4\}$  et  $\mathcal{E}_m = \{5, 6, 7, 8\}$ . Cette expression (2.66) peut encore s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = [N_l][\mathbf{d}] + [N_Q][\Delta \boldsymbol{\theta}_{s_n}], \quad (2.67)$$

où

$$[\mathbf{d}] = [\cdots \quad w_i \quad \theta_{x_i} \quad \theta_{y_i} \quad \cdots i \in \mathcal{E}]^t; \quad [\Delta \boldsymbol{\theta}_{s_n}] = [\cdots \quad \Delta \theta_{s_k} \quad \cdots k \in \mathcal{E}_m]^t; \quad (2.68)$$

$$[N_l] = \begin{bmatrix} \cdots & 0 & N_i & 0 & \cdots i \in \mathcal{E} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [N_Q] = \begin{bmatrix} \cdots & n_{x_k} N_k & \cdots k \in \mathcal{E}_m \\ & n_{y_k} N_k & \end{bmatrix}. \quad (2.69)$$

Ainsi, l'interpolation de la déformation de courbure  $(\mathbf{L}\nabla)w$  s'obtient en dérivant l'expression (2.66) :

$$(\mathbf{L}\nabla)w = \begin{bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{bmatrix} = [B_{b_\beta}][\mathbf{d}] + [B_{b_{\Delta\beta}}][\Delta \boldsymbol{\theta}_{s_n}], \quad (2.70)$$

où

$$[B_{b_\beta}] = \begin{bmatrix} \cdots & 0 & N_{i,x} & 0 \\ & 0 & 0 & N_{i,y} \\ & 0 & N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad \cdots i \in \mathcal{E} \quad (2.71)$$

et

$$[B_{b_{\Delta\beta}}] = \begin{bmatrix} \cdots & n_{x_k} N_{k,x} & \cdots k \in \mathcal{E}_m \\ & n_{y_k} N_{k,y} & \\ & n_{x_k} N_{k,x} + n_{y_k} N_{k,y} & \end{bmatrix}. \quad (2.72)$$

Les éléments finis DK sont ensuite introduits en imposant la contrainte de *Kirchhoff* de manière discrète au niveau des coins et des nœuds milieux. C'est à dire que le cisaillement vertical défini par  $\gamma_s \equiv \beta_s - w_{,s}$  est nul au niveau des nœuds coins et des nœuds milieux, où

$$\beta_{s_i} = e_{s_{ij}} \theta_{s_j}, \quad e_{s_{ij}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

Autrement dit

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \theta_{x_i} - w_{,y_i} \\ \theta_{y_i} + w_{,x_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \forall i \in \mathcal{E}, \\ \Delta\theta_{s_k} + w_{,s_k} = 0, & \forall k \in \mathcal{E}_m. \end{cases} \quad (2.74)$$

Cela permet d'éliminer la rotation introduite au milieu de l'arête. En effet, la relation (2.74) donne une expression de la rotation  $\Delta\theta_{s_k}$  au milieu de l'arête en fonction du déplacement et des rotations produites au niveau des extrémités de l'élément :

$$\Delta\theta_{s_k} = \frac{3}{2L_k}(w_j - w_i) - \frac{3}{4}\mathbf{n}_k^t(\boldsymbol{\theta}_i + \boldsymbol{\theta}_j), \quad (2.75)$$

qu'on peut écrire sous la forme matricielle :

$$[\Delta\boldsymbol{\theta}_{s_n}] = A_{\Delta}\mathbf{d}, \quad (2.76)$$

où  $A_{\Delta}$  est calculée à travers la relation (2.75). De plus, on pourra écrire le champ des rotations en fonction des degrés de liberté :

$$\boldsymbol{\theta} = \sum_{l \in \mathcal{E}} N_l(r, s)\boldsymbol{\theta}_l + \sum_{k \in \mathcal{E}_m} N_k(r, s) \left[ \frac{3}{2L_k}\mathbf{n}_k(w_j - w_i) - \frac{3}{4}\mathbf{n}_k\mathbf{n}_k^t(\boldsymbol{\theta}_i + \boldsymbol{\theta}_j) \right]. \quad (2.77)$$

On obtient finalement l'expression des déformations de courbure (2.70) en fonction des degrés de liberté :

$$(\mathbf{L}\nabla)w = \begin{bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{bmatrix} = [B_{b_{\beta}}][\mathbf{d}] + [B_{b_{\Delta\beta}}][\Delta\boldsymbol{\theta}_{s_n}] = \underline{B}[\mathbf{d}], \quad (2.78)$$

avec  $\underline{B} = [B_{b_{\beta}} + B_{b_{\Delta\beta}}A_{\Delta}]$ . Cette formulation des éléments finis DK est une formulation unifiée pour les éléments triangulaires et quadrangulaires inspirée des références [12, 44, 8, 7].

La discrétisation du second membre de la formulation variationnelle (2.62) nécessite une interpolation du déplacement  $w$  et de sa dérivée normale  $w_{,n}$  en fonction des degrés de liberté sur la frontière et donc sur un élément à une dimension et à deux nœuds. Nous présentons ici une approche inspirée de "Hybrid Stress Model Element (HSM)" [8], où le déplacement  $w$  est supposé varier cubiquement sur l'arête et s'exprime en fonction de ses valeurs nodales et de ses dérivées premières sur chaque nœud :

$$w = H_1(\xi)w_{s_i} + H_2(\xi)w_{s_j} + H_3(\xi)w_{,s_i} + H_4(\xi)w_{,s_j}, \quad (2.79)$$

où

$$\begin{aligned} H_1 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, & H_3 &= 3\xi^2 - 2\xi^3, \\ H_2 &= l_{ij}(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), & H_4 &= l_{ij}(-\xi^2 + \xi^3), \end{aligned} \quad (2.80)$$

et  $l_{ij} = \sqrt{x_{ij}^2 + y_{ij}^2}$ , tels que  $y_{ij} = y_i - y_j$  et  $x_{ij} = x_i - x_j$ . De plus, la dérivée normale  $w_{,n}$  varie linéairement :

$$w_{,n} = (1 - \xi)w_{,n_i} + \xi w_{,n_j}. \quad (2.81)$$

La relation dérivée normale-dérivée curviligne est donnée par la relation suivante où les composantes de la normale extérieure sont introduites :

$$\begin{bmatrix} w_{,s} \\ w_{,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix}, \quad (2.82)$$

tels que

$$c = \cos(\vec{x}, \vec{n}_{ij}) = -y_{ij}/l_{ij} \quad \text{et} \quad s = \sin(\vec{x}, \vec{n}_{ij}) = x_{ij}/l_{ij}. \quad (2.83)$$

Enfin, l'interpolation de  $w$ ,  $w_{,n}$  et de  $w_{,s}$  sur une arête  $i$ - $j$  est donnée par :

$$\begin{bmatrix} w \\ w_{,n} \\ w_{,s} \end{bmatrix} = \mathbf{H}_{ij} \mathbf{d}_{ij}, \quad (2.84)$$

où

$$\mathbf{d}_{ij} = [w_i \quad \theta_{x_i} \quad \theta_{y_i} \quad w_j \quad \theta_{x_j} \quad \theta_{y_j}]^t \quad (2.85)$$

et

$$\mathbf{H}_{ij} = \begin{bmatrix} H_1 & cH_2 & sH_2 & H_3 & cH_4 & sH_4 \\ 0 & s(1-\xi) & -c(1-\xi) & 0 & s\xi & -c\xi \\ \frac{H_{1,\xi}}{l_{ij}} & \frac{cH_{2,\xi}}{l_{ij}} & \frac{sH_{2,\xi}}{l_{ij}} & \frac{H_{3,\xi}}{l_{ij}} & \frac{cH_{4,\xi}}{l_{ij}} & \frac{sH_{4,\xi}}{l_{ij}} \end{bmatrix}. \quad (2.86)$$

Nous avons réalisé des simulations numériques avec des solutions analytiques permettant la validation numérique de ces éléments finis DK (Cf. Annexe B.2). Nous avons ainsi constaté que l'utilisation des éléments finis DK quadrangulaires est beaucoup plus précise que celle des éléments DK triangulaires.

### 2.3.2 La formulation approchée du problème de Cauchy en théorie des plaques

Compte tenu de l'interpolation par éléments finis DK où les 3 degrés de liberté sont le déplacement vertical  $w$  et les rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$ , nous proposons ici une stratégie de régularisation qui agit sur les rotations au lieu de la dérivée normale  $w_{,n}$ , tout en agissant sur la trace  $w|_{\Gamma}$ , le moment de flexion  $\mathcal{M}_n$  et l'effort tranchant  $\mathcal{V}_n$  sur le bord. Cela nous permettra de mieux contrôler la dérivée normale, afin de surmonter les difficultés numériques qu'elle engendre. Nous apportons donc quelques modifications par rapport à la formulation continue, en particulier dans la fonctionnelle de régularisation et les espaces d'approximations.

Soit  $\Omega_h$  un maillage du domaine  $\Omega$  tel que  $h$  est le paramètre de discrétisation :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{e \in \Omega_h} e.$$

Grâce à la méthode des éléments finis DK, la contrainte de la continuité  $\mathcal{C}^1$  de la solution du problème (2.57) peut être omise en l'imposant seulement en des points discrets. Cela est réalisable en utilisant une discrétisation en fonction des valeurs nodales de  $w$  et de ses dérivées partielles  $\theta_x$  et  $\theta_y$ , où une interpolation  $\mathcal{C}^0$  est suffisante. On note  $w_h$

la solution approchée de  $w$  et  $\theta_{x_h}$  et  $\theta_{y_h}$  les rotations approchées de  $\theta_x$  et  $\theta_y$  respectivement. On peut alors définir l'espace d'approximation  $\mathcal{V}_h(\Omega)$  de ces triplets dans le domaine  $\Omega$  par :

$$\mathcal{V}_h(\Omega) = \left\{ \mathbf{w}_h = (w_h, \theta_{x_h}, \theta_{y_h}) \in [H^1(\Omega)]^3 \quad \begin{array}{l} |w_h|_e \in \mathcal{P}_3(e), \forall e \in \Omega_h, \\ |\boldsymbol{\theta}_h|_e \equiv (\theta_{x_h}, \theta_{y_h})|_e \in [\mathcal{P}_2(e)]^2, \forall e \in \Omega_h, \\ (\nabla w_h|_e - \boldsymbol{\theta}_h|_e)|_{\Gamma_{ij}} = 0, \forall \Gamma_{ij} \in e, \forall e \in \Omega_h \end{array} \right\} \quad (2.87)$$

où  $\mathcal{P}_q$  est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $q$ .

Cette stratégie d'approximation va nous permettre de récupérer les dérivées partielles de  $w$  sur l'ensemble du maillage. Ainsi, l'approximation de la dérivée normale s'obtiendra à travers l'approximation du gradient de  $w$ . Pour cela, nous définissons l'espace d'approximation  $\mathcal{H}_h(\Gamma)$  de l'espace  $\mathcal{H}(\Gamma)$  par :

$$\mathcal{H}_h(\Gamma) = \left\{ \Phi_h = (\varphi_h, \psi_{x_h}, \psi_{y_h}, \mu_h, \phi_h) \in X_h(\Gamma) \quad \begin{array}{l} |\exists \mathbf{w}_h = (w_h, \theta_{x_h}, \theta_{y_h}) \in \mathcal{V}_h(\Omega), \\ w_h|_\Gamma = \varphi_h, \quad \theta_{x_h} = \psi_{x_h}, \quad \theta_{y_h} = \psi_{y_h} \text{ avec} \\ \int_\Omega ((\mathbf{L}\nabla)\mathbf{w}_h)^t \underline{\mathcal{D}}((\mathbf{L}\nabla)\mathbf{v}_h) dx dy = \int_\Gamma \left[ -\mu_h \mathbf{v}_{h,n} + \phi_h \mathbf{v}_h \right] ds, \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h(\Omega) \end{array} \right\}, \quad (2.88)$$

tel que

$$X_h(\Gamma) = H_h^{3/2}(\Gamma) \times H_h^{1/2}(\Gamma) \times H_h^{1/2}(\Gamma) \times H_h^{-1/2}(\Gamma) \times H_h^{-3/2}(\Gamma).$$

Cependant, l'espace  $\mathcal{H}(\Gamma_d)$  ne peut pas être approché de la même manière car en pratique on n'est pas capable de décomposer la mesure  $\psi_d$  associée à la dérivée normale  $w_{,n}$  suivant les rotations. Ainsi, nous définissons l'espace d'approximation de l'espace  $\mathcal{H}(\Gamma_d)$  comme suit :

$$\mathcal{H}_h(\Gamma_d) = \left\{ \Phi_h = (\varphi_h, \psi_h, \mu_h, \phi_h) \in X_h(\Gamma_d) \quad \begin{array}{l} |\exists \mathbf{w}_h = (w_h, \theta_{x_h}, \theta_{y_h}) \in \mathcal{V}_h(\Omega), \\ w_h|_{\Gamma_d} = \varphi_h, \quad n_x \theta_{x_h} + n_y \theta_{y_h} = \psi_h \text{ avec} \\ \int_\Omega ((\mathbf{L}\nabla)\mathbf{w}_h)^t \underline{\mathcal{D}}((\mathbf{L}\nabla)\mathbf{v}_h) dx dy = \int_\Gamma \left[ -\mu_h \mathbf{v}_{h,n} + \phi_h \mathbf{v}_h \right] ds, \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h(\Omega) \end{array} \right\}, \quad (2.89)$$

avec

$$X_h(\Gamma_d) = H_h^{3/2}(\Gamma_d) \times H_h^{1/2}(\Gamma_d) \times H_h^{-1/2}(\Gamma_d) \times H_h^{-3/2}(\Gamma_d).$$

Nous pouvons finalement écrire le problème approché sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{w}_h = (\varphi_h, \psi_{x_h}, \psi_{y_h}, \mu_h, \phi_h) \in H_h(\Gamma) \text{ tel que} \\ \mathbf{w}_{d_h} \equiv (\varphi_h, n_x \psi_{x_h} + n_y \psi_{y_h}, \mu_h, \phi_h) = \Phi_{d_h} \text{ sur } \Gamma_d \end{cases} \quad (2.90)$$

avec  $\Phi_{d_h} = (\varphi_{d_h}, \psi_{d_h}, \mu_{d_h}, \phi_{d_h})$  est l'approximation de la donnée  $\Phi_d$  sur  $\Gamma_d$ . Ce problème est toujours un problème mal posé. L'application de la méthode de régularisation évanescence permet d'obtenir l'algorithme itératif sous la forme approchée suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{w}_h^{k+1} = (\varphi_h^{k+1}, \psi_{x_h}^{k+1}, \psi_{y_h}^{k+1}, \mu_h^{k+1}, \phi_h^{k+1}) \in H_h(\Gamma) \text{ tel que} \\ J_c^{k+1}(\mathbf{w}_h^{k+1}) \leq J_c^{k+1}(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in H_h(\Gamma) \\ \text{avec } J_c^{k+1}(\mathbf{v}_h) = \|\mathbf{v}_{d_h}|_{\Gamma_d} - \Phi_{d_h}\|_{H_h(\Gamma_d)}^2 + c\|\mathbf{v}_h - \mathbf{w}_h^k\|_{H_h(\Gamma)}^2 \\ \text{et } \mathbf{v}_{d_h}^{k+1} = (\varphi_h^{k+1}, n_x \psi_{x_h}^{k+1} + n_y \psi_{y_h}^{k+1}, \mu_h^{k+1}, \phi_h^{k+1}) \end{array} \right. \quad (2.91)$$

### 2.3.3 L'algorithme itératif discret pour la résolution du problème de Cauchy en théorie des plaques

On considère que le domaine  $\Omega$  est discrétisé par  $N_\Omega$  nœuds à 3 degrés de liberté par nœuds. La discrétisation par éléments finis DK permet d'écrire pour tout  $w_h \in H_h^1(\Omega)$  :

$$w_h = \mathbf{N}\underline{d}, \quad \text{avec } \underline{d} = [\cdots w_i \theta_{,x_i} \theta_{,y_i} \cdots i = 1, \dots, N_\Omega]^t, \quad (2.92)$$

et  $\mathbf{N}$  est le vecteur des fonctions d'interpolation de dimension  $3N_\Omega$ . De plus, il a été établi dans la section précédente que la déformation de courbure  $(\mathbf{L}\nabla)w_h$  peut être discrétisée en fonction des degrés de liberté à travers l'interpolation des rotations, donnant ainsi la relation suivante :

$$(\mathbf{L}\nabla)w_h = \underline{\mathbf{B}}\underline{d}. \quad (2.93)$$

La forme bilinéaire  $a$  de la formulation variationnelle peut s'écrire :

$$a(w_h, v_h) = \int_\Omega \underline{\mathbf{B}}^t \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{B}} d\Omega \underline{d} \quad (2.94)$$

où on a posé  $v_h = \mathbf{N}$ . De plus, le second membre s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} l(v_h) &= \int_\Gamma \left[ -\mathbf{N}_{,n}^t \underline{\mathcal{M}}_n + \mathbf{N}^t \underline{\mathcal{Y}}_n \right] ds \\ &= \underbrace{\left[ -\int_\Gamma \mathbf{N}_{,n}^t ds \quad \int_\Gamma \mathbf{N}^t ds \right]}_{\equiv \mathbf{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\mathcal{M}}_n \\ \underline{\mathcal{Y}}_n \end{bmatrix}}_{\equiv \underline{b}} \\ &= \mathbf{F} \underline{b} \end{aligned} \quad (2.95)$$

Finalement, la formulation variationnelle peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{K}\underline{d} = \mathbf{F}\underline{b} \quad (2.96)$$

où autrement

$$[\mathbf{K} \quad -\mathbf{F}] \begin{bmatrix} \underline{d} \\ \underline{b} \end{bmatrix} = 0. \quad (2.97)$$

Soit  $N$  le nombre de nœuds situés sur la frontière, nous réalisons une condensation dynamique du système (2.97) de façon à obtenir un système qui n'agit que sur les nœuds de la frontière. Cela permet d'accélérer la mise en œuvre numérique et le temps de calcul. On note par  $\mathbf{H} \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$  et  $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$ , les matrices qui représentent la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  et la matrice  $\mathbf{F}$  respectivement obtenues. Cela permet de définir l'opérateur linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{2N} &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ \underline{\mathbf{V}} &\equiv (\underline{d}, \underline{b}) \mapsto \mathbf{H}\underline{d} + \mathbf{B}\underline{b}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Il faut préciser que pour des raisons de simplicité, nous avons gardé la même notation des vecteurs  $\underline{d}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{\mathcal{M}}_n$  et  $\underline{\mathcal{V}}_n$  après la réduction de taille. Ainsi, avec l'équation (2.97) il est immédiat que

$$\mathcal{E}(\underline{\mathbf{V}}) = 0. \quad (2.99)$$

Finalement, la résolution de l'algorithme itératif en dimension finie revient à résoudre à chaque itération le problème d'optimisation sous contraintes égalités suivant :

Soit  $c > 0$  et  $\underline{\mathbf{V}}^0 = \underline{\mathbf{0}}_{\mathbb{R}^{5N}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{V}}^{k+1} = \min_{\underline{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{5N}} J_c^{k+1}(\underline{\mathbf{V}}) \\ \text{avec } \underline{\mathbf{V}} = (\underline{d}, \underline{\mathcal{M}}_n, \underline{\mathcal{V}}_n) = (\underline{W}, \underline{\theta}_x, \underline{\theta}_y, \underline{\mathcal{M}}_n, \underline{\mathcal{V}}_n) \\ \text{sous les contraintes égalités } \mathcal{E}(\underline{\mathbf{V}}) = 0 \end{array} \right. \quad (2.100)$$

où la fonctionnelle à optimiser est donnée par :

$$\begin{aligned} J_c^{k+1}(\underline{\mathbf{V}}) &= \|\underline{W}|_{\Gamma_d} - \underline{\phi}_d\|_{L^2(\Gamma_d)}^2 + \|\underline{n}_y \underline{\theta}_x + \underline{n}_x \underline{\theta}_y|_{\Gamma_d} - \mu_d\|_{L^2(\Gamma_d)}^2 \\ &+ \|\underline{\mathcal{M}}_n|_{\Gamma_d} - \underline{\mathcal{M}}_d\|_{L^2(\Gamma_d)}^2 + \|\underline{\mathcal{V}}_n|_{\Gamma_d} - \underline{\mathcal{V}}_d\|_{L^2(\Gamma_d)}^2 + c \left( \|\underline{W} - \underline{W}^k\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right. \\ &\left. + \|\underline{\theta}_x - \underline{\theta}_x^k\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|\underline{\theta}_y - \underline{\theta}_y^k\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|\underline{\mathcal{M}}_n - \underline{\mathcal{M}}_n^k\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|\underline{\mathcal{V}}_n - \underline{\mathcal{V}}_n^k\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right). \end{aligned}$$

En introduisant des multiplicateurs de Lagrange  $\underline{\eta}^{k+1}$  pour prendre en compte les contraintes égalités, la résolution du problème (2.100) revient à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \nabla J_c^{k+1} & \nabla \mathcal{E}^T \\ \nabla \mathcal{E} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{V}}^{k+1} \\ \underline{\eta}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}^k \\ \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix}, \quad (2.101)$$

avec

$$\nabla J_c^{k+1} = \begin{bmatrix} M_{\Gamma_d} + cM_{\Gamma} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{n}_y^t \underline{n}_y M_{\Gamma_d} + cM_{\Gamma} & \underline{n}_y^t \underline{n}_x M_{\Gamma_d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{n}_x^t \underline{n}_y M_{\Gamma_d} & \underline{n}_x^t \underline{n}_x M_{\Gamma_d} + cM_{\Gamma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{\Gamma_d} + cC_{\Gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{\Gamma_d} + cC_{\Gamma} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.102)$$

$$\nabla \mathcal{E} = [\mathbf{H} \quad \mathbf{B}] \quad (2.103)$$



et

$$S^k = \begin{bmatrix} M_{\Gamma_d} \underline{\varphi}_d + c M_{\Gamma} \underline{W}^k \\ \underline{n}_y^t M_{\Gamma_d} \underline{\psi}_d + c M_{\Gamma} \underline{\theta}_x^k \\ \underline{n}_x^t M_{\Gamma_d} \underline{\psi}_d + c M_{\Gamma} \underline{\theta}_y^k \\ C_{\Gamma_d} \underline{\mu}_d + c C_{\Gamma} \underline{\mathcal{M}}_n^k \\ C_{\Gamma_d} \underline{\phi}_d + c C_{\Gamma} \underline{\mathcal{V}}_n^k \end{bmatrix}. \quad (2.104)$$

où  $M_{\Gamma}, M_{\Gamma_d} \in \mathcal{M}_{N,N}(\mathbb{R})$  pour  $i = \overline{1, N_{\Gamma}}$  sont telles que :

$$(M_{\Gamma})_{ij} = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma} \mathcal{N}_j \mathcal{N}_i, \quad (M_{\Gamma_d})_{ij} = \sum_{j=1}^{N_d} \int_{\Gamma_d} \mathcal{N}_j \mathcal{N}_i.$$

$$(C_{\Gamma})_{ij} = l_{ij}, \quad (C_{\Gamma_d})_{ij} = l_{ij},$$

où  $N_d$  est le nombre des nœuds situés sur la partie  $\Gamma_d$  de la frontière et  $(\mathcal{N}_j)_{1 \leq j \leq N}$  sont les fonctions d'interpolation construisant une base de l'espace  $L^2(\Gamma)$  tel que :

$$L^2(\Gamma) = \text{vect}(\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_{\Gamma_d}, \mathcal{N}_{\Gamma_d+1}, \dots, \mathcal{N}_N).$$

En effet, pour la résolution numérique, comme ce que l'on peut voir dans la fonctionnelle  $J_c^{k+1}$ , on considère que le vecteur  $\underline{\mathbf{V}}$  est dans  $[L^2(\Gamma)]^5$ . De plus,  $\mathcal{M}_n$  et  $\mathcal{V}_n$  sont constants sur chaque arête lorsque le domaine n'est pas régulier car ils ne sont pas définis au niveau des coins.

### 2.3.4 Résultats numériques

Nous présentons dans cette section des reconstructions numériques obtenues par la discrétisation par éléments finis DKQ de l'algorithme de régularisation évanescence pour le problème de Cauchy en théorie de plaques minces de *Kirchhoff* (2.57). Nous considérons pour la validation numérique, la solution analytique suivante :

$$u_{an}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} x_1 (\sin x_1 \cosh x_2 - \cos x_1 \sinh x_2) \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (2.105)$$

De plus, différents types de domaines réguliers (couronne et disque) et non réguliers (rectangulaire) seront étudiés.

#### 2.3.4.1 Cas de la couronne

Soit  $\Omega$  la couronne  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \frac{1}{2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1\}$  (Figure 2.6) avec un rayon extérieur  $R = 1$  et un rayon intérieur  $r = \frac{1}{2}$ , tel que le bord extérieur  $\Gamma_d = \{(x, y) \in \Gamma, \sqrt{x^2 + y^2} = 1\}$  est la partie accessible de la frontière, tandis que la partie inaccessible est le bord intérieur  $\Gamma_i = \{(x, y) \in \Gamma, \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\}$ .

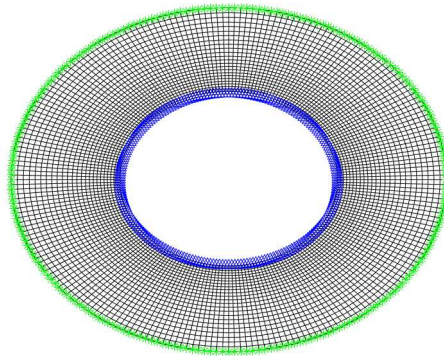


FIGURE 2.6 – Maillage par éléments finis DKQ d'une couronne avec pas  $h = 1/30$  tel que :  
 $*$   $\Gamma_d$ (données) et  $\triangle$   $\Gamma_i$ (inconnues).

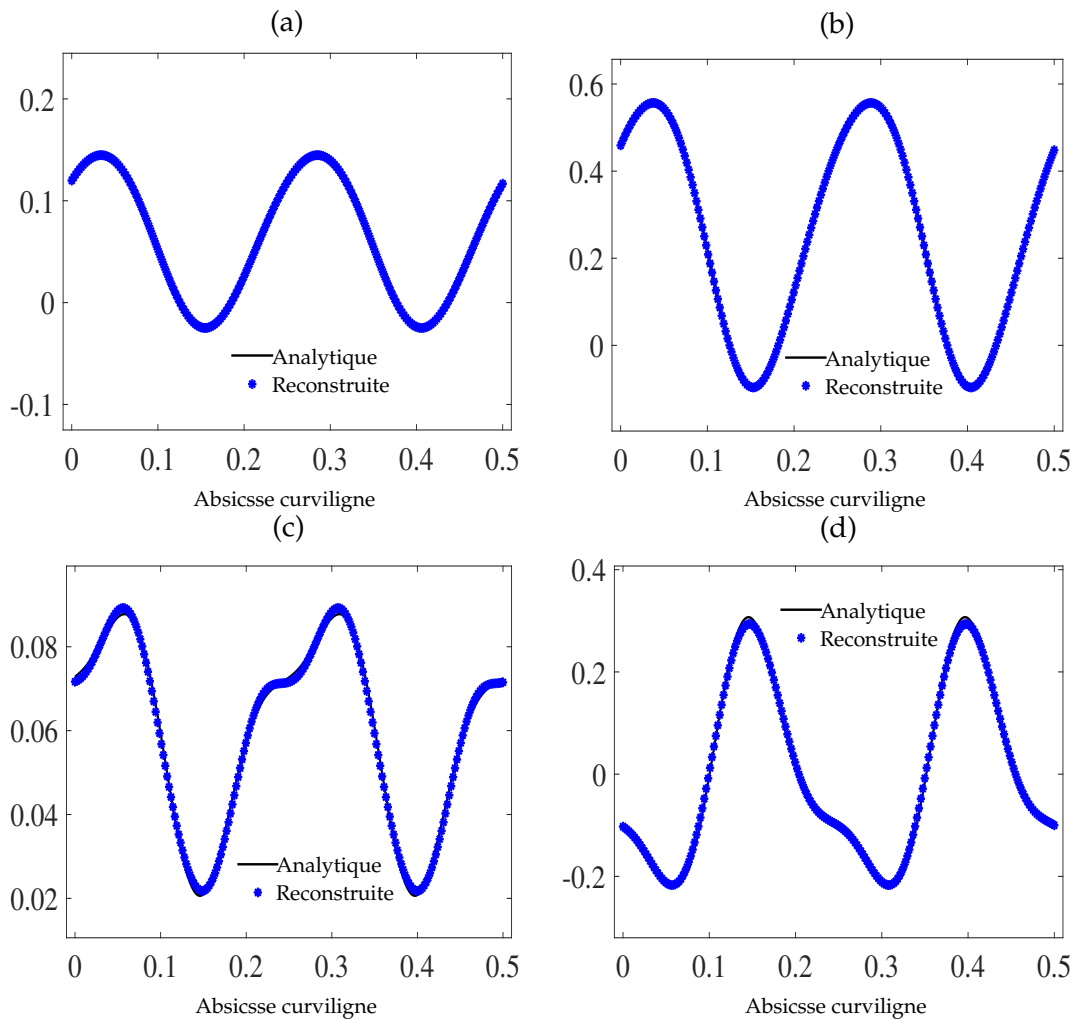


FIGURE 2.7 – Reconstructions du déplacement vertical  $w$  (a), de la rotation normale  $w_n$  (b), du moment  $M_n$  (c) et de l'effort tranchant  $V_n$  (d) sur le contour intérieur de la couronne (données non bruitées)

La Figure 2.7 donne la reconstruction du déplacement vertical  $w$ , solution du problème de Cauchy en théorie de plaques minces de Kirchhoff (2.57), sur le bord intérieur de la couronne ainsi que l'ensemble des conditions aux limites manquantes grâce à la discrétisation par éléments finis DKQ de l'algorithme de régularisation évanescence dans le cas de données compatibles situées sur le bord extérieur. Ce résultat montre que cette stratégie a permis d'avoir une reconstruction précise de ces quantités.

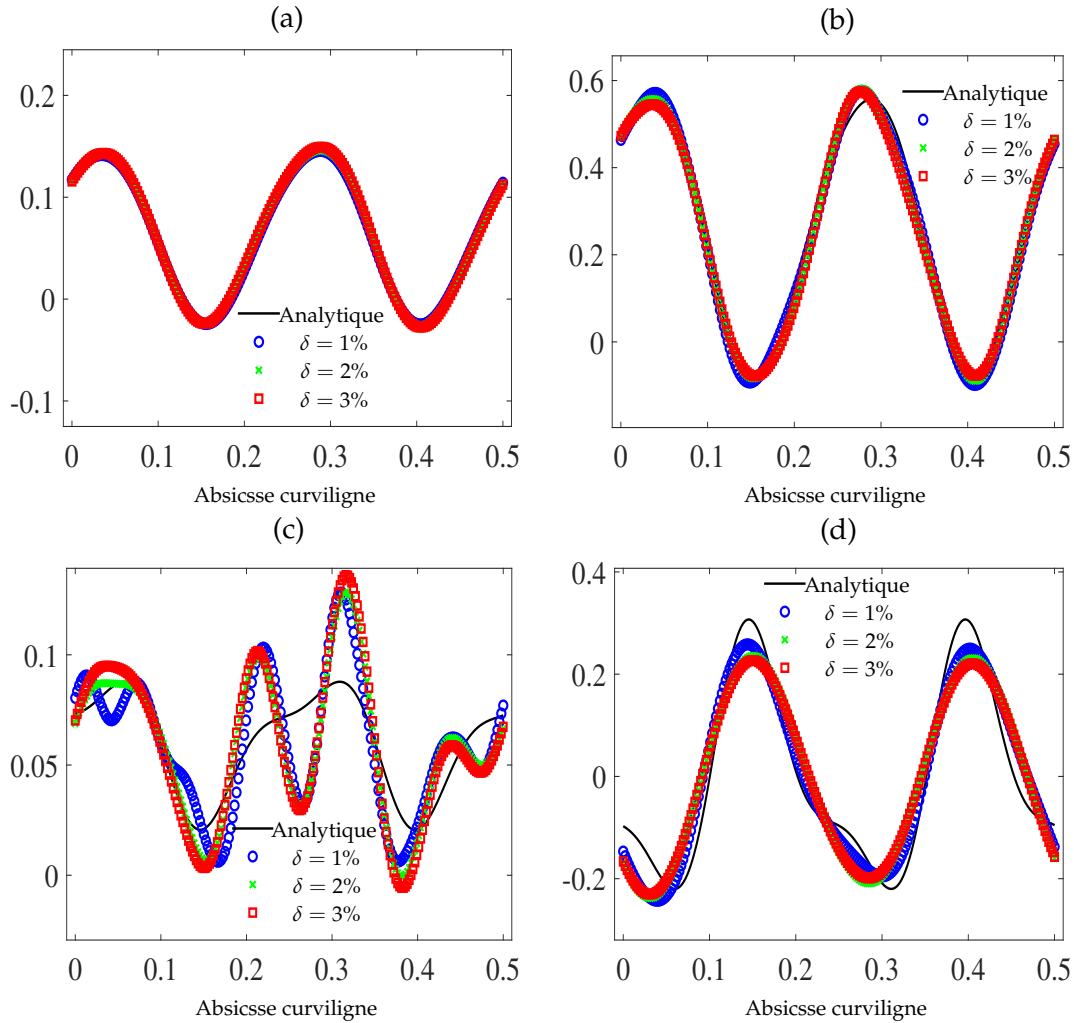


FIGURE 2.8 – Reconstructions du déplacement vertical  $w$  (a), de la rotation normale  $w_n$  (b), du moment  $\mathcal{M}_n$  (c) et de l'effort tranchant  $\mathcal{V}_n$  (d) sur le bord intérieur de la couronne pour plusieurs niveaux de bruit.

La Figure 2.8 donne les reconstructions obtenues pour des données bruitées avec différents niveaux  $\delta$ . Nous pouvons remarquer qu'il y a une stabilité vis-à-vis du bruit ajouté en particulier pour le déplacement vertical et la rotation normale. Cependant, le moment  $\mathcal{M}_n$  et l'effort tranchant  $\mathcal{V}_n$  sont sensibles au bruit. D'autre part, nous pouvons constater (Figure 2.9) que notre stratégie de résolution a réussi à débruiter les données sur le bord extérieur de la couronne.

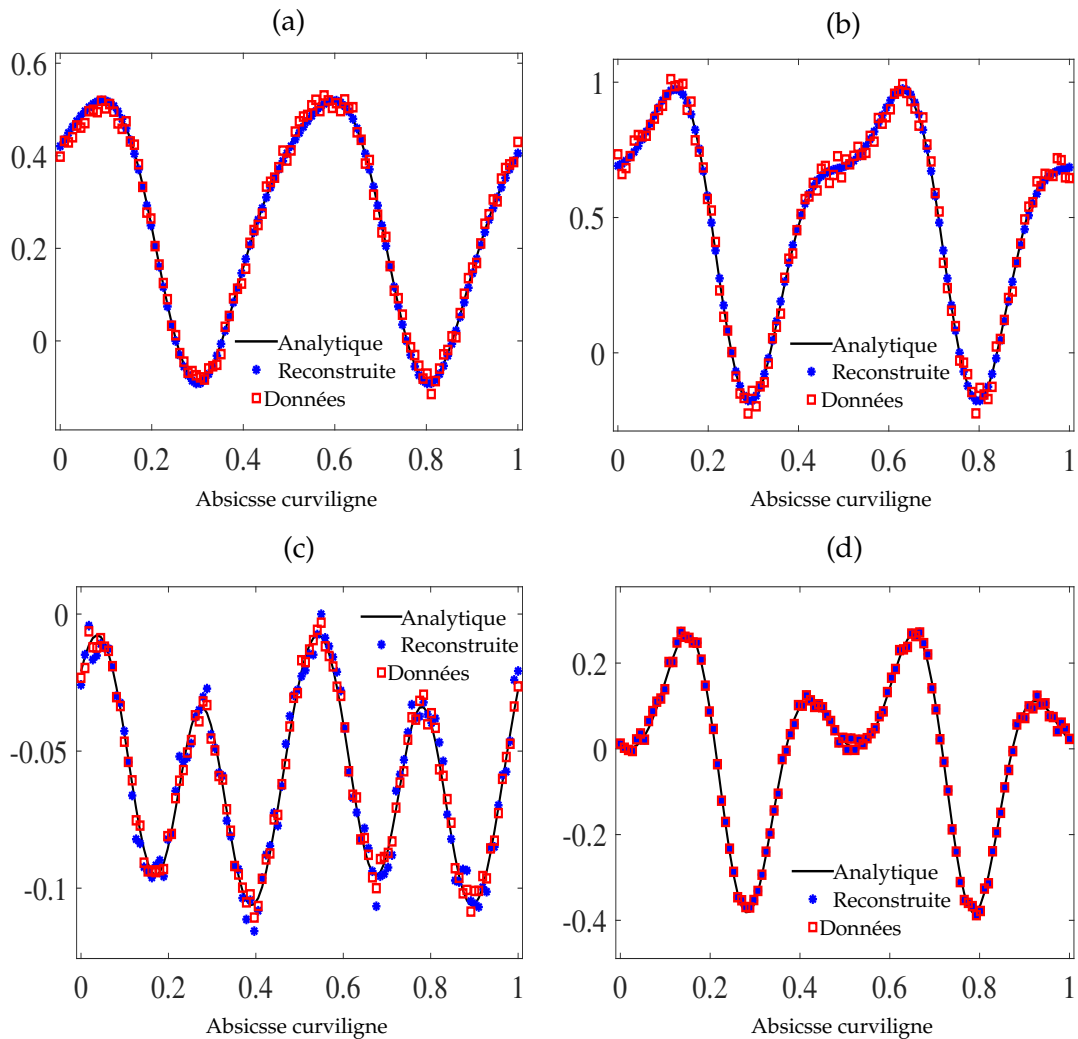


FIGURE 2.9 – Reconstructions du déplacement vertical  $w$  (a), de la rotation normale  $w_n$  (b), du moment  $\mathcal{M}_n$  (c) et de l'effort tranchant  $\mathcal{V}_n$  (d) sur le bord extérieur (support des données bruitées) de la couronne pour des données bruitées  $\delta = 5\%$ .

### 2.3.4.2 Cas du disque

On considère maintenant un autre domaine circulaire représenté par le disque unité tel que la partie accessible à la mesure est le demi-cercle supérieur  $\Gamma_d = \{\mathbf{x} \in \Gamma \mid 0 \leq \theta(\mathbf{x}) \leq \pi\}$ , où  $\theta(\mathbf{x})$  est l'angle polaire de  $\mathbf{x}$  et  $\Gamma_i = \{\mathbf{x} \in \Gamma \mid \pi \leq \theta(\mathbf{x}) \leq 2\pi\}$ . Nous appliquons ensuite l'algorithme de résolution proposé pour pouvoir reconstruire les conditions aux limites sur la partie  $\Gamma_i$ .

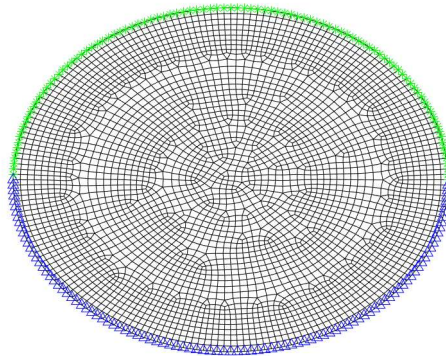


FIGURE 2.10 – Maillage par éléments finis DKQ d'un disque avec pas  $h = 1/30$  tel que :  
 $\ast \Gamma_d$ (données) et  $\triangle \Gamma_i$ (inconnues).

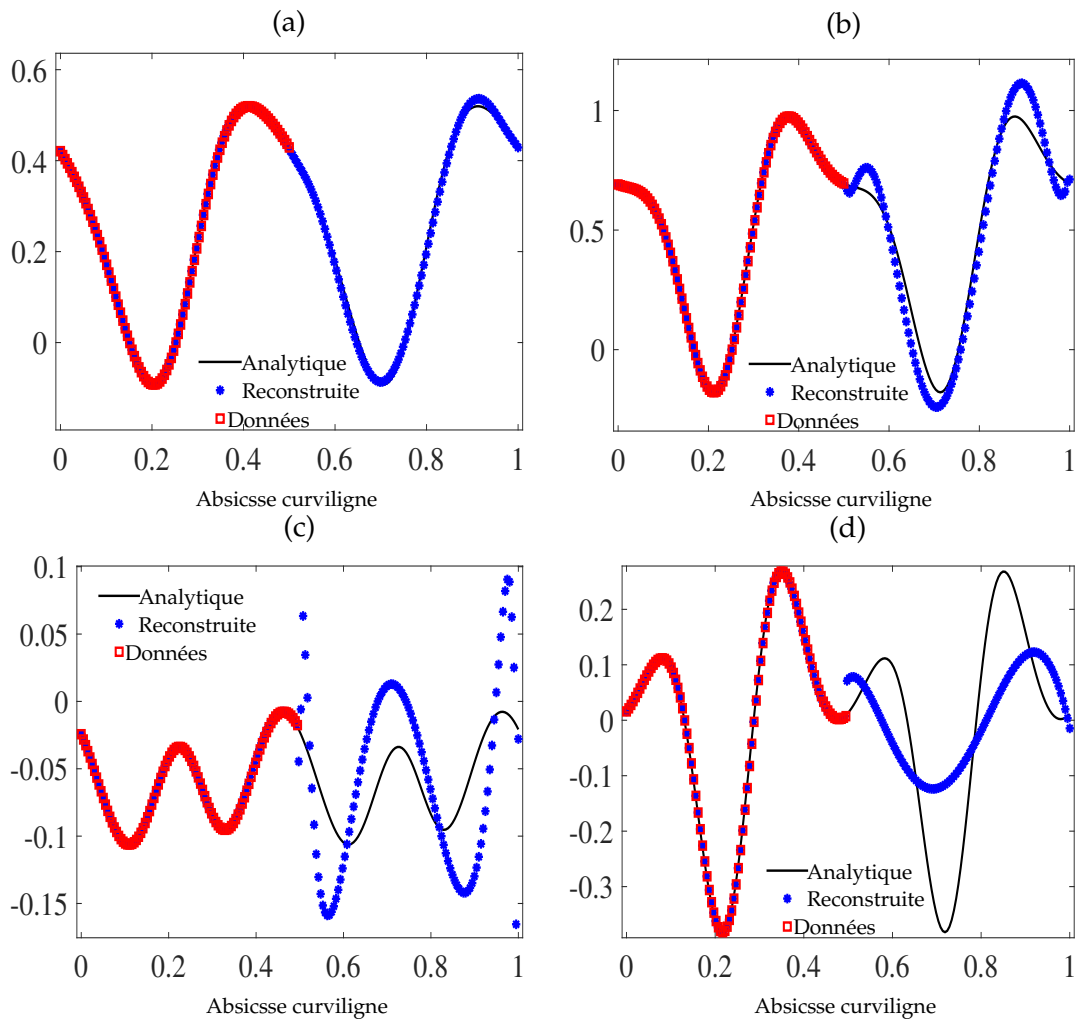


FIGURE 2.11 – Reconstructions du déplacement vertical  $w$  (a), de la rotation normale  $w_n$  (b), du moment  $\mathcal{M}_n$  (c) et de l'effort tranchant  $\mathcal{V}_n$  (d) sur le bord intérieur de la couronne (données non bruitées).

Les reconstructions des conditions aux limites du problème de Cauchy sur le bord du disque (Figure 2.10) sont données par la Figure 2.11. On remarque une certaine difficulté de reconstruction par rapport aux résultats obtenus pour la couronne. En effet, les points de liaison entre la partie  $\Gamma_d$  et  $\Gamma_i$  constituent probablement la raison pour laquelle un écart par rapport à la solution analytique est apparu. Toutefois, les reconstructions du déplacement vertical et de la rotation normale sont toujours plus précises que celles de  $\mathcal{M}_n$  et  $\mathcal{V}_n$ .

### 2.3.4.3 Cas du carré

La reconstruction de la solution sur la frontière de domaines non réguliers constitue un des grands défis des méthodes des éléments finis et en particulier lors de la résolution des problèmes de Cauchy. Nous considérons ici le cas du carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  dans  $\mathbb{R}^2$ , où les données sont situées sur deux côtés de la frontière. Nous avons réalisé des tests pour les deux cas possibles, lorsque ces deux côtés sont adjacents ou lorsqu'ils sont opposés.

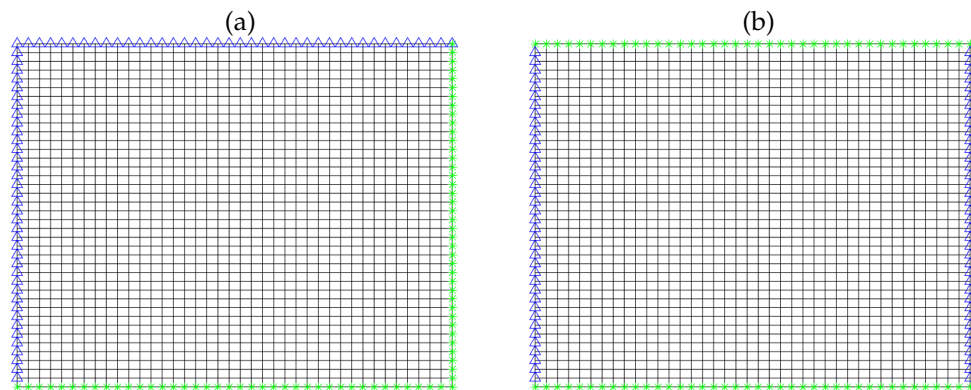


FIGURE 2.12 – Maillages par éléments finis DKQ de domaines de type carré avec des données (\*) situées sur deux côtés adjacents (a) et opposés (b) de la frontière avec un pas  $h = 1/40$ .

Le cas de la reconstruction pour des données situées sur deux côtés adjacents d'un carré est souvent crucial car il reste un coin sur la partie  $\Gamma_i$ . On peut observer que la solution  $w$  et en particulier sa dérivée normale représentée par la rotation normale ont été reconstruites avec des faibles écarts sur la partie inaccessible et ce, aussi bien, pour des données compatibles (Figure 2.13) que bruitées (Figure 2.14). Ceci présente une grande amélioration par rapport à la reconstruction par la méthode des éléments finis avec des éléments  $\mathcal{C}^0$  présentée au chapitre 1. Cependant, les reconstructions du moment  $\mathcal{M}_n$  et de l'effort tranchant  $\mathcal{V}_n$  restent un problème ouvert.

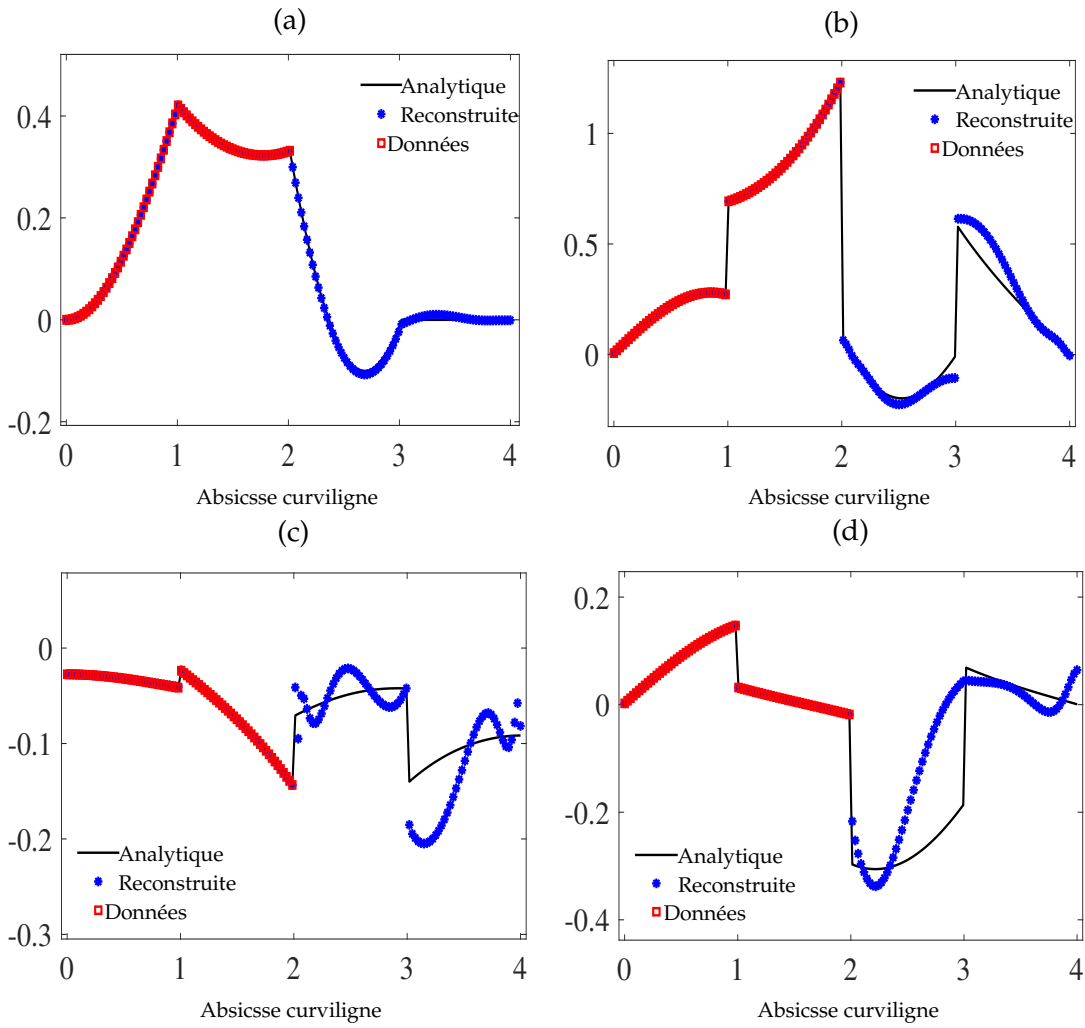
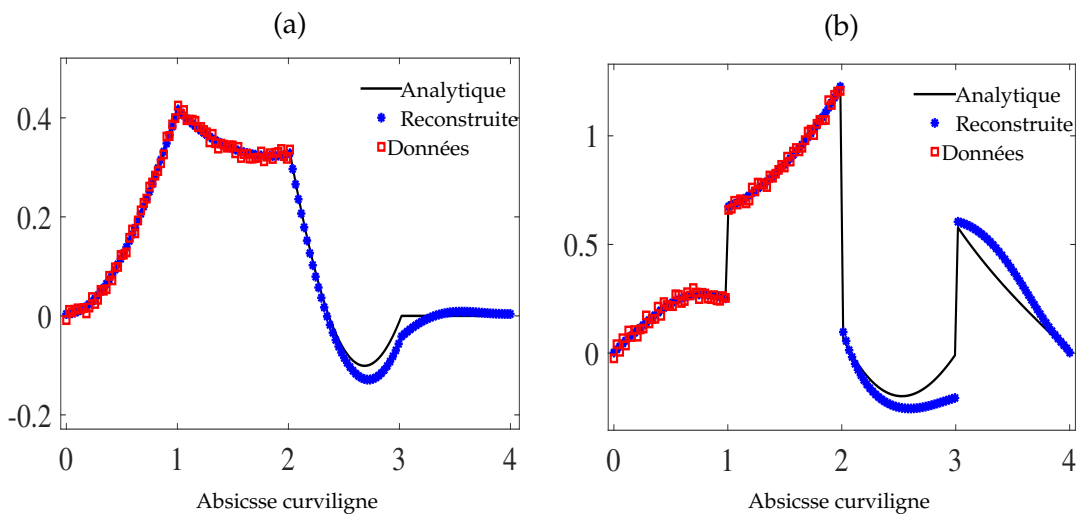


FIGURE 2.13 – Reconstructions du déplacement vertical  $w$  (a), de la rotation normale  $w_n$  (b), du moment  $M_n$  (c) et de l'effort tranchant  $V_n$  (d) sur le bord d'un carré (données non bruitées situées sur deux cotés adjacents).



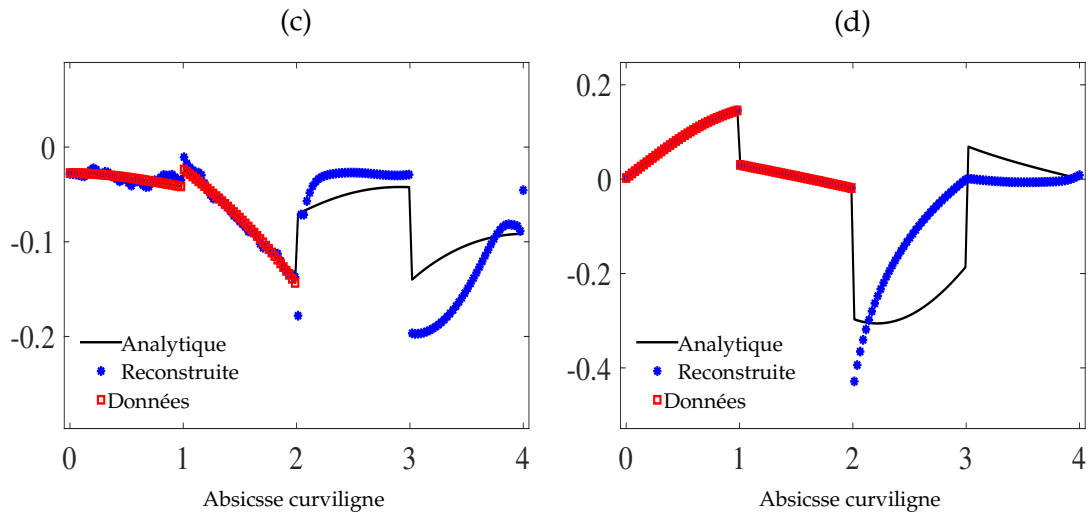


FIGURE 2.14 – Reconstructions du déplacement vertical  $w$  (a), de la rotation normale  $w_n$  (b), du moment  $\mathcal{M}_n$  (c) et de l'effort tranchant  $\mathcal{V}_n$  (d) sur le bord d'un carré (données bruitées  $\delta = 3\%$ , situées sur deux cotés adjacents).

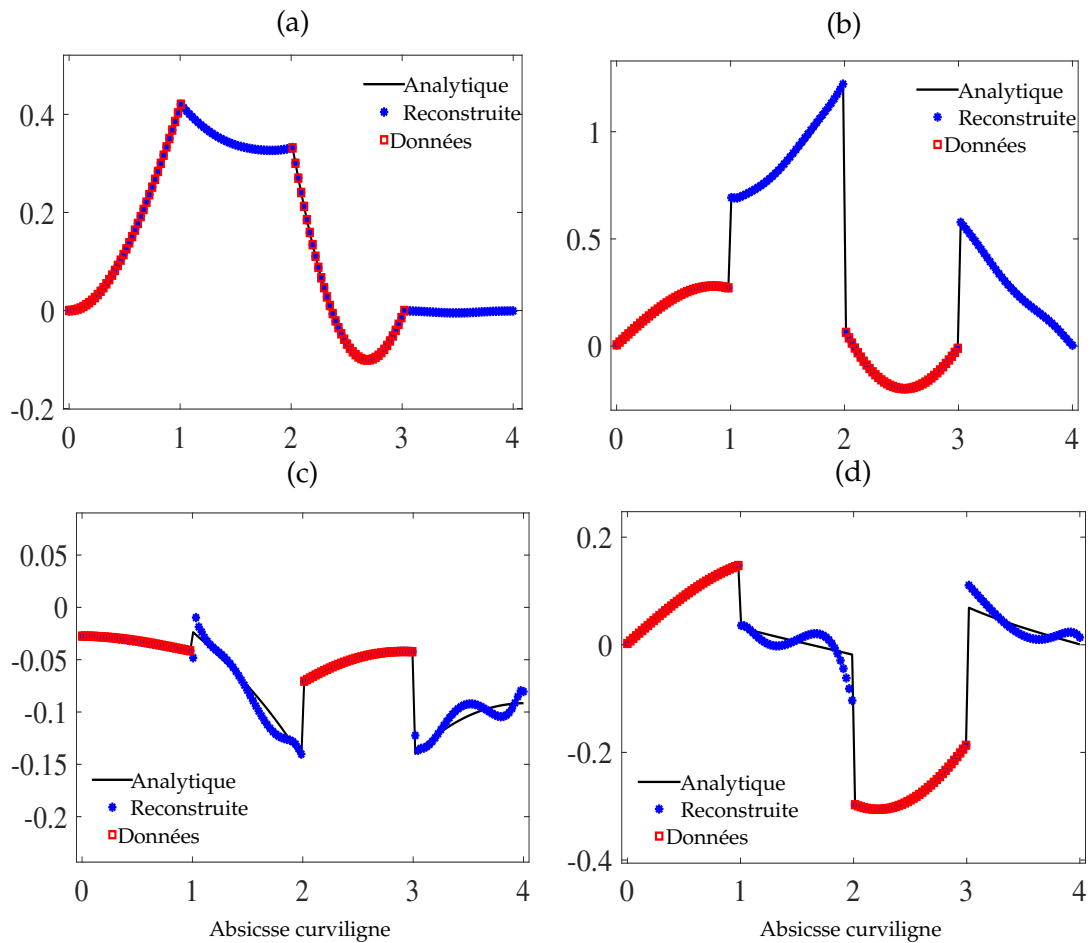


FIGURE 2.15 – Reconstructions du déplacement vertical  $w$  (a), de la rotation normale  $w_n$  (b), du moment  $\mathcal{M}_n$  (c) et de l'effort tranchant  $\mathcal{V}_n$  (d) sur le bord d'un carré (données non bruitées situées sur deux cotés opposés).



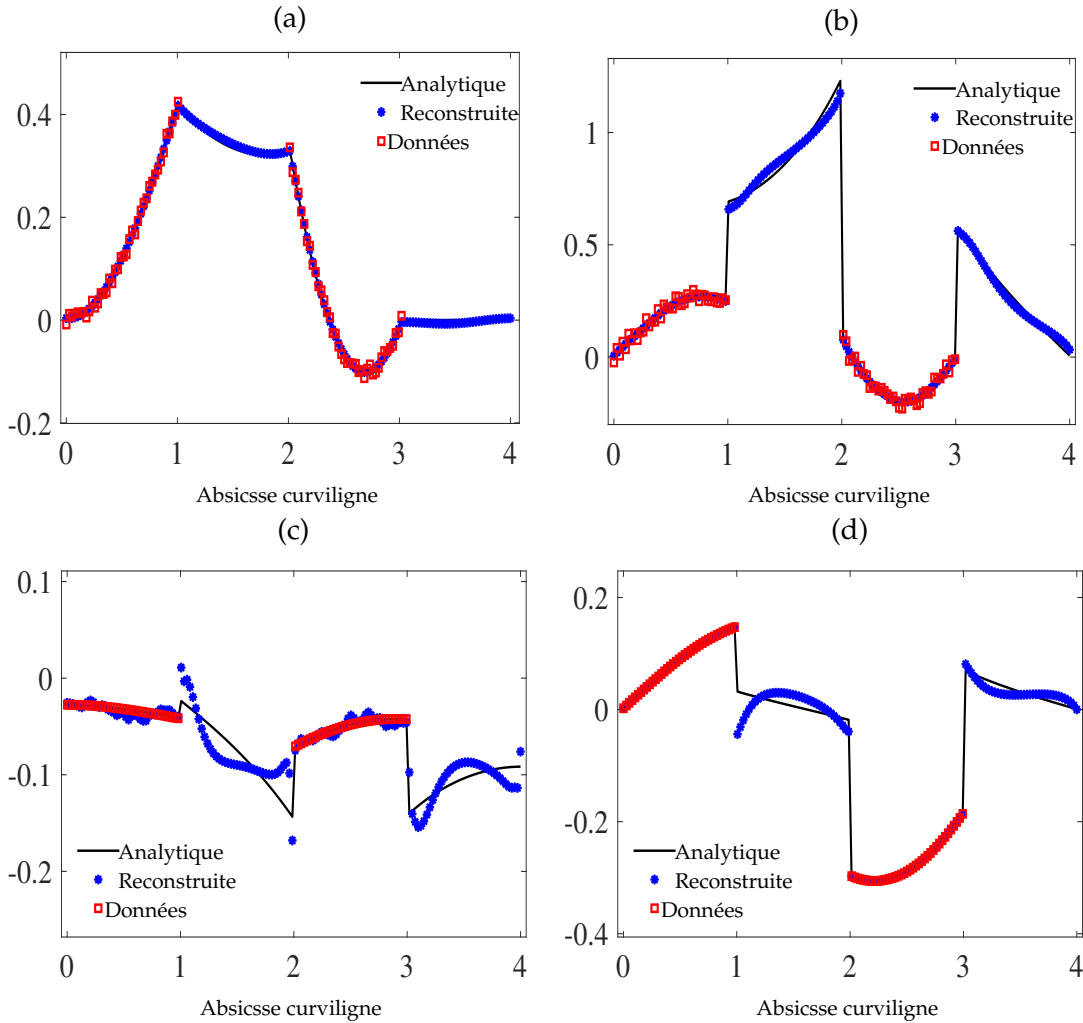


FIGURE 2.16 – Reconstructions du déplacement vertical  $w$  (a), de la rotation normale  $w_n$  (b), du moment  $M_n$  (c) et de l’effort tranchant  $V_n$  (d) sur le bord d’un carré (données bruitées  $\delta = 3\%$ , situées sur deux côtés opposés).

Les Figures 2.15 et 2.16 représentent les reconstructions obtenues lorsque les données sont situées sur deux côtés opposés du carré. Comme prévu les résultats sont bien meilleurs car tous les coins appartiennent à la partie accessible de la frontière. On notera aussi que les reconstructions de  $M_n$  et  $V_n$  se trouvent elles aussi améliorées.

## 2.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre comment certains problèmes de flexion des plaques minces de Kirchhoff peuvent être représentés par un problème de Cauchy pour le bilaplacien avec des conditions aux limites mécaniques. Nous avons ensuite proposé une stratégie de résolution constituée par l’application de la régularisation évanescence combinée à une discrétisation par la méthode des éléments finis en utilisant des éléments DKQ spécifiques aux problèmes de plaques minces. Cet outil nous a permis de discrétiser la solution en utilisant 3 degrés de liberté qui correspondent

---

à sa valeur nodale et à celles de ses deux dérivées partielles. Malgré le caractère non conforme, à cause de la violation de la continuité  $C^1$  entre éléments, ces éléments finis ont permis d'obtenir de bon résultats en particulier lors de la reconstruction du déplacement et de la rotation normale pour des maillages non réguliers. Cependant, les résultats donnés pour la reconstruction du moment  $\mathcal{M}_n$  et l'effort tranchant  $\mathcal{V}_n$  ne sont pas de bonne qualité. De plus, le débruitage des données est maintenant valable pour la dérivée normale, contrairement aux résultats présentés au chapitre 1 où seules les données associées à la fonction ont été débruitées. L'utilisation de tels éléments finis semble très intéressante puisque les résultats obtenus sont prometteurs notamment parce qu'ils permettent de gérer la discontinuité de la dérivée normale au niveau des coins.



## Chapitre 3

# Apports des éléments finis de type plaque pour la résolution d'un problème de Cauchy associé à l'équation de Laplace

### Sommaire

---

<b>3.1 Introduction</b> . . . . .	<b>95</b>
<b>3.2 Discrétisation de l'équation de Laplace par des éléments finis de Kirchhoff</b> . . . . .	<b>98</b>
3.2.1 Formulation variationnelle et espaces d'approximation . . . . .	98
3.2.2 Adaptation d'un élément fini de type plaque pour l'équation de Laplace . . . . .	99
<b>3.3 Application au problème de Cauchy associé à l'équation de Laplace</b>	<b>102</b>
3.3.1 Formulation continue de l'algorithme à régularisation évanescence . . . . .	102
3.3.2 Formulation discrète de l'algorithme à régularisation évanescence . . . . .	103
3.3.3 Validation numérique . . . . .	105
<b>3.4 Conclusion</b> . . . . .	<b>110</b>

---

### 3.1 Introduction

L'utilisation des éléments finis de *Kirchhoff* discret dans l'implémentation numérique de la méthode de régularisation évanescence au chapitre précédent semble un outil intéressant pour gérer le problème de discontinuité de la dérivée normale lorsque le domaine n'a pas une frontière lisse. Cela prouve que les éléments finis non conformes ont permis d'obtenir des résultats d'approximation compétitifs et leurs formulations, à 3 degrés de liberté, permettent d'approximer les dérivées partielles premières du déplacement en tout point du maillage. Ceci nous amène à considérer une nouvelle stratégie d'implémentation de ces éléments pour résoudre des problèmes elliptiques d'ordre 2. Nous proposons à cet effet une adaptation des éléments finis de plaques minces, permettant leurs applications aux problèmes de Cauchy régis par

l'équation de Laplace :

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = \phi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ u_{,n} = \mu_d & \text{sur } \Gamma_d \end{cases} \quad (3.1)$$

Cette équation est bien connue dans de nombreux domaines de la physique. On la retrouve en électrostatique pour le potentiel dans une zone sans charges, en conduction thermique pour la température en mode stationnaire, en mécanique des fluides, en mécanique quantique, en diffusion moléculaire avec la densité de particules, en gravitation pour le potentiel gravitationnel dans une zone vide de masses, en hydrodynamique pour le potentiel de vitesses dans un écoulement bidimensionnel irrotationnel et incompressible, pour décrire les déformations d'une membrane, etc. Comme la plupart des problèmes régis par des équations elliptiques, l'existence et l'unicité de la solution dépendent de la nature des conditions aux limites. Que ce soit de Neumann, de Dirichlet ou de Robin (mixte), il est bien connu qu'un problème est bien posé au sens d'Hadamard [41], à condition qu'elles soient définies sur toute la frontière et n'en avoir qu'une seule à la fois sur chaque partie de la frontière. Des solutions analytiques existent dans des cas simples, mais dans le cas général et principalement dans le cas des problèmes inverses, la résolution de cette équation nécessite le recours à des méthodes numériques.

Comme la diversité de ses champs d'application, cités ci-dessus, les problèmes inverses régis par l'équation de Laplace sont très populaires en physique. L'objectif consiste souvent à identifier le comportement du modèle physique, la détermination des conditions aux limites, l'identification des paramètres, la localisation des efforts ou sources internes, la détection des fissures, etc. Ainsi, plusieurs approches et méthodes de résolution ont été proposées. Les plus célèbres sont la méthode de quasi-réversibilité [55, 52, 11], les méthodes basées sur la minimisation d'une fonctionnelle énergétique [2, 3, 4, 6], les algorithmes de type Stecklov-Poincaré [10], la méthode de Tikhonov [77, 26] et la méthode de régularisation évanescence [24, 23, 30]. On retrouve par ailleurs, d'autres approches qui utilisent des schémas de régularisation similaires et qui sont combinées à des méthodes numériques ou utilisent des modèles analytiques. On cite par exemple la stratégie proposée par *Chein-Shan Liu* dans [60] qui utilise l'équation intégrale de Fredholm du premier type et une régularisation de type Lavrentiev pour résoudre le problème de détection du coefficient de Robin ou de la position des fissures dans un disque.

Un autre modèle dit des frontières immergées (IBM) est appliqué à l'équation de Laplace [81]. La résolution consiste à utiliser une variante de régularisation sans paramètre basée sur la pénalisation de la différence entre le contrôle et l'état sur la frontière. Le plus important de ses défis est l'obtention d'une solution robuste et efficace du problème d'optimisation non linéaire sous contrainte associé à l'IBM et le besoin de pré-conditionneurs pour les systèmes de points-selles qui apparaissent dans les itérations de Newton.

Un problème de complétion de données en détection d'obstacle est étudié par *Caubet et al.* dans [18, 20]. Il consiste à reconstruire des conditions aux limites et/ou à identifier un obstacle ou un vide de conductivité différente qui est contenu dans un domaine. Une stratégie de minimisation de la fonctionnelle de Kohn-Vogelius est proposée avec une régularisation de type Tikhonov. Une étude postérieure [19] propose

une double stratégie de régularisation du même type sans paramètre de régularisation, qui au lieu d'agir sur l'espace des solutions, agit sur l'espace des données. Elle a permis d'obtenir une solution stable avec une bonne reconstruction des données manquantes du problème de Cauchy et un paramètre de régularisation unique qui satisfait le principe de Morozov.

Dans le cadre du problème (3.1), on retrouve les travaux de *Cimetière et al.* [26] ou de *Delvare* [28], où la méthode de régularisation évanescence a été introduite et mise en œuvre par la méthode des éléments finis. Ensuite, *Cimetière et al.* [25] et *Delvare et al.* [29] ont introduit une technique de régularisation évanescence d'ordre un, qui sous des hypothèses de régularité, modifie la fonctionnelle de régularisation pour prendre en compte que les dérivées partielles des fonctions harmoniques sont également harmoniques. Cette dernière méthode a ensuite été modifiée dans [31], où cette fois l'évaluation numérique des dérivées partielles n'est plus nécessaire grâce à l'utilisation de deux formulations faibles qui permettent la liaison entre ces deux grandeurs.

Les difficultés rencontrées lors de la discrétisation des algorithmes itératifs à régularisation évanescence avec les éléments finis de Lagrange à régularité  $C^0$ , résidaient essentiellement dans la reconstruction de la dérivée normale dans le cas de domaine rectangulaire, en particulier lorsque la partie inconnue  $\Gamma_i$  présente une singularité géométrique qui n'est pas située à une extrémité de la partie accessible  $\Gamma_d$  de la frontière. Cela a été constaté au chapitre 1 lors de la résolution du problème de Cauchy associé au bilaplacien en plus des travaux cités auparavant [26, 29, 31]. Nous souhaitons dans ce chapitre améliorer cette approximation en considérant une stratégie de mise en œuvre numérique basée sur une discrétisation par éléments finis à plusieurs degrés de liberté par nœud pour représenter, non seulement la solution elle-même, mais aussi ses dérivées partielles. Une approche qui permet d'imposer une régularité  $C^1$  de la solution au moins au niveau des nœuds et d'utiliser des éléments finis des plaques minces où, sous les hypothèses de *Kirchhoff*, le champ de rotation s'exprime en fonction des dérivées partielles premières du champ du déplacement, i.e.  $\theta_s = \frac{\partial w}{\partial s}$ . Ces éléments finis ont surtout été utilisés pour résoudre des équations elliptiques ou paraboliques du quatrième ordre modélisant un certain nombre de problèmes en mécanique des solides et des fluides. Parmi les applications bien connues dans ce cadre figurent les problèmes de flexion des plaques évoqués au chapitre 2 et les équations de Navier–Stokes incompressibles en termes de fonction de flux ou de vecteur potentiel (Cf. [9]).

Ce genre d'élément fini qui utilise des dérivées partielles comme degrés de liberté semble un outil tout à fait naturel pour assurer une approximation conforme et acceptable de la solution et de sa dérivée normale. Cependant, le fait que les problèmes du second ordre ne nécessitent pas ce type d'approche pour discrétiser le champ de solutions, puisque la continuité  $C^1$  n'est pas obligatoire et est difficile à réaliser, est probablement la raison pour laquelle l'utilisation d'éléments finis de type plaques dans ce contexte a été plutôt négligée jusqu'à présent. On trouvera par ailleurs des méthodes qui utilisent des schémas semblables tels que les éléments d'Hermite à degrés de liberté d'ordre un et deux [35]. L'intérêt était souvent de résoudre des problèmes régis par une équation de type réaction-diffusion [34, 71] ou de Poisson [36] avec des conditions de Dirichlet. Cependant, nous ne trouvons pas de résultats d'approximation des dérivées normales ni d'application en terme de problèmes inverses.

## 3.2 Discrétisation de l'équation de Laplace par des éléments finis de type plaque de Kirchhoff

Comme évoqué précédemment au chapitre 2, il existe deux catégories d'éléments de Kirchhoff. Il y a ceux qui utilisent une interpolation indépendante entre le champ solution principal et ses dérivées partielles et qui les relient ensuite en appliquant la théorie de Kirchhoff discret et ceux qui permettent d'obtenir l'interpolation des dérivées partielles en dérivant l'interpolation de la solution principale. Nous faisons le choix dans ce chapitre d'utiliser la deuxième catégorie d'éléments tels que l'élément MKQ12 [48] ou l'élément de Melosh [63] pour sa facilité d'adaptation à l'équation de Laplace.

### 3.2.1 Formulation variationnelle et espaces d'approximation

Plusieurs approches peuvent être utilisées pour transformer la formulation continue du problème en son analogue discret par éléments finis. Si la formulation physique du problème est connue sous forme d'équation différentielle, alors la méthode la plus courante pour obtenir sa formulation par éléments finis est la méthode de Galerkin. Si le problème physique peut être formulé comme la minimisation d'une fonction, alors la formulation variationnelle est généralement utilisée. Dans le cas de l'équation de Laplace, nous utilisons l'approche variationnelle pour écrire la formulation faible du problème. Pour  $f \in L^2(\Omega)$  et des conditions aux limites appropriées, on a :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma = \int_{\Omega} f v d\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.2)$$

L'application du lemme de Lax-Milgram est généralement utilisée pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible dans un espace de Hilbert. On peut considérer par exemple l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$ . Ceci est vrai quelque soit la nature du domaine, il suffit qu'il soit un ouvert borné [66, 47].

On considère une discrétisation élément fini  $Y_h$  du domaine  $\Omega$  tel que :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{Y \in Y_h} Y,$$

où  $h$  est le pas de la discrétisation (ou le pas le plus grand lorsque la discrétisation n'est pas uniforme). Nous utilisons une interpolation cubique inspirée de [27] (cas de triangle) pour approximer la solution. Dans cette approximation, chaque  $u_h \in Y_h$  appartient également à  $C^1(\bar{\Omega})$  et est un polynôme cubique par morceaux dans chaque élément. Il peut être exprimé comme suit en utilisant ses valeurs aux sommets des éléments et les fonctions de forme correspondantes [49] :

$$u^h = \sum_{i=1}^m \sum_{|\alpha| \leq 1} \mathcal{D}^\alpha u^h(x_i, y_i) \mathcal{N}_i. \quad (3.3)$$

On note ainsi  $V^h(\Omega)$  l'espace d'approximation des solutions faibles de la formulation (3.2) définie par :

$$V^h(\Omega) = \{u^h \in C^1(\bar{\Omega}), \quad u^h|_Y \in \mathcal{P}_3(Y), \quad \forall Y \in Y_h\},$$

où  $\mathcal{P}_3$  est l'espace des expansions polynomiales de degré inférieur ou égal à trois. On note aussi  $V^h(\Gamma)$  la restriction de  $V^h(\Omega)$  à  $\Gamma$ .

### 3.2.2 Adaptation d'un élément fini de type plaque pour l'équation de Laplace

On note  $\underline{\mathbf{U}} = [\underline{\mathbf{d}}_1, \dots, \underline{\mathbf{d}}_N]^t$  le vecteur à  $3N$  degrés de liberté, tel que pour un nœud  $i$ , on a :

$$\underline{\mathbf{d}}_i = \begin{bmatrix} u_i^h \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i^h \\ u_{,y_i}^h \\ -u_{,x_i}^h \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

La discrétisation du champ  $u^h$  (3.3) dans un élément de référence s'écrit sous la forme :

$$u_e^h = \underline{\mathbf{N}}^e \underline{\mathbf{d}}^e, \quad (3.5)$$

avec

$$\underline{\mathbf{d}}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_i \\ \mathbf{d}_j \\ \mathbf{d}_k \\ \mathbf{d}_l \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

et  $\underline{\mathbf{N}}^e$  est le vecteur des 12 composantes représentant les fonctions d'interpolation locales. En notant  $\underline{\mathbf{N}}$  les fonctions d'interpolation sur tout le maillage, on peut écrire la forme discrète de la formulation faible (3.2), dans le cas homogène (i.e.  $f = 0$ ), sous la forme :

$$\underline{\mathbf{K}}\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{F}}\underline{\mathbf{U}} \quad (3.7)$$

avec

$$\underline{\mathbf{K}} = \int_{\Omega} \nabla \underline{\mathbf{N}}^t \nabla \underline{\mathbf{N}} \, d\Omega$$

et

$$\underline{\mathbf{F}} = \left( \int_{\Gamma} \underline{\mathbf{N}}^t \underline{\mathbf{N}}_n \, d\sigma \right).$$

La construction des fonctions d'interpolation est l'étape la plus importante pour établir ce type d'éléments finis. Nous présentons ici deux approches de constructions proposées pour l'élément rectangulaire de *Melosh* [63, 83] et pour l'élément quadrangulaire MKQ12 [48]. Une expansion polynomiale cubique est considérée afin d'assurer la continuité de la solution. Cependant, une discontinuité dans la pente normale est produite. En dépit du caractère non conforme, ces éléments passent le 'Patch-test' et sont toujours convergents. Pour l'élément de *Melosh*, la construction du polynôme d'approximation se fait à l'aide du triangle de Pascal :

constant					1
linéaire			$x$		$y$
quadratique		$x^2$		$xy$	$y^2$
cubique		$x^3$	$x^2y$		$xy^2$
	$x^4$	$x^3y$	$x^2y^2$	$xy^3$	$y^4$



Étant un élément à 4 nœuds et donc à 12 degrés de liberté, le polynôme sera alors incomplet. Pour cela et afin de préserver l'aspect symétrique dans l'approximation, on considère la combinaison suivante :

$$u_e^h = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (3.8)$$

L'idée est de pouvoir construire la solution au travers de ces valeurs nodales ainsi que de celles dérivées partielles d'ordre 1 :

$$\begin{aligned} (u_e^h)_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 x_i^2 + \alpha_5 x_i y_i + \alpha_6 y_i^2 + \alpha_7 x_i^3 + \alpha_8 x_i^2 y_i + \alpha_9 x_i y_i^2 \\ &\quad + \alpha_{10} y_i^3 + \alpha_{11} x_i^3 y_i + \alpha_{12} x_i y_i^3, \\ \left(\frac{\partial u_e^h}{\partial y}\right)_i &= \alpha_3 + \alpha_5 x_i + 2\alpha_6 y_i + \alpha_8 x_i^2 + 2\alpha_9 x_i y_i + 3\alpha_{10} y_i^2 + \alpha_{11} x_i^3 + 3\alpha_{12} x_i y_i^2, \\ -\left(\frac{\partial u_e^h}{\partial x}\right)_i &= -\alpha_2 - 2\alpha_4 x_i - \alpha_5 y_i - 3\alpha_7 x_i^2 - 2\alpha_8 x_i y_i - \alpha_9 y_i^2 - 3\alpha_{11} x_i^2 y_i - \alpha_{12} y_i^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

L'approximation locale de la solution  $u^h$  dans un élément s'écrit sous la forme matricielle :

$$u_e^h = \mathbf{P}\underline{\alpha},$$

avec  $\mathbf{P} = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3]$  et  $\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{bmatrix}$ .

En regroupant les équations de (3.9) pour  $i = 1, \dots, 4$  dans une matrice  $\mathbf{C}$ , on peut écrire le vecteur  $\underline{\mathbf{d}}^e$  de degrés de liberté sous la forme :

$$\underline{\mathbf{d}}^e = \mathbf{C}\underline{\alpha}.$$

En inversant la matrice  $\mathbf{C}$ , on obtient l'expression du vecteur inconnu  $\underline{\alpha}$  :

$$\underline{\alpha} = \mathbf{C}^{-1}\underline{\mathbf{d}}^e. \quad (3.10)$$

D'autre part, la discrétisation nous permet d'écrire :

$$u_e^h = \mathbf{N}^e \underline{\mathbf{d}}^e, \quad (3.11)$$

On note que :

$$u_e^h = \mathbf{P}\underline{\alpha} = \mathbf{P}\mathbf{C}^{-1}\underline{\mathbf{d}}^e = \mathbf{N}^e \underline{\mathbf{d}}^e. \quad (3.12)$$

On obtient alors une expression pour les fonctions d'interpolation locale :

$$\mathbf{N}^e = \mathbf{P}\mathbf{C}^{-1}. \quad (3.13)$$

Cette construction n'est pas compatible avec des éléments non rectangulaires. À cet effet, une adaptation aux éléments quadrangulaires de formes quelconques a été proposée dans [48]. Il consiste à faire intervenir la matrice jacobienne lors de la dérivation et pour le changement de repère et aussi à écrire le champ de déplacement en fonction des modes de déformations dans le repère des coordonnées naturelles  $\zeta$  et  $\eta$  variant

entre  $-1$  et  $1$ .

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P} \rangle = & \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta \quad \frac{1}{2}(\xi^2 - 1) \quad \frac{1}{2}(\eta^2 - 1) \quad \frac{1}{2}\xi(\xi^2 - 1) \\ & \frac{1}{2}\eta(\eta^2 - 1) \quad \frac{1}{4}\xi(3 - \xi^2)(\eta^2 - 1) \quad \frac{1}{4}\eta(3 - \eta^2)(\xi^2 - 1) \\ & \frac{1}{4}\xi\eta(3 - \xi^2)(\eta^2 - 1) \quad \frac{1}{4}\eta\xi(3 - \eta^2)(\xi^2 - 1) \rangle. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Le gradient s'écrit

$$\nabla u^h = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^h}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u^h}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \langle \mathbf{P} \rangle}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \langle \mathbf{P} \rangle}{\partial \eta} \end{bmatrix} \underline{\alpha}, \quad (3.15)$$

ainsi, le champ de déplacement dans l'élément s'écrit sous la forme :

$$u_e^h = \begin{bmatrix} u^h \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^h \\ \frac{\partial u^h}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u^h}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [A] [\mathbf{C}(\xi, \eta)] \underline{\alpha}, \quad (3.16)$$

avec

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & \langle 0 \rangle \\ \langle 0 \rangle & [J]^{-1} \end{bmatrix} \text{ et } [\mathbf{C}(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{P} \rangle \\ \frac{\partial \langle \mathbf{P} \rangle}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \langle \mathbf{P} \rangle}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

D'autre part, le vecteur des degrés de liberté dans un élément du maillage s'exprime par :

$$\underline{\mathbf{d}}^e = [A] \mathbf{C} \underline{\alpha}, \quad \text{avec } \mathbf{C} \equiv [\mathbf{C}(-1, 1)], \quad (3.18)$$

d'où,

$$\underline{\alpha} = \mathbf{C}^{-1} [A]^{-1} \underline{\mathbf{d}}^e. \quad (3.19)$$

Finalement,

$$u_e^h = \underbrace{[A] \mathbf{C}(\xi, \eta) \mathbf{C}^{-1} [A]^{-1}}_{\mathbf{N}^e} \underline{\mathbf{d}}^e \quad (3.20)$$

et

$$\nabla u_e^h = \underbrace{[J]^{-1} \nabla \langle \mathbf{P} \rangle \mathbf{C}^{-1} [A]^{-1}}_{\nabla \mathbf{N}^e} \underline{\mathbf{d}}^e. \quad (3.21)$$

Cette discrétisation permet de construire la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  et la matrice du second membre  $\mathbf{F}$  permettant de résoudre le problème direct régit par l'équation de Laplace. Cependant, des calculs numériques montrent que l'équation linéaire obtenue dans (3.7) n'est pas inversible. En effet, il a été trouvé que la matrice  $\mathbf{K}$  est toujours de rang incomplet. Une manière pour surmonter cette difficulté est de procéder à un tri d'équations afin d'obtenir un système linéaire de rang complet.

### 3.3 Application au problème de Cauchy associé à l'équation de Laplace

#### 3.3.1 Formulation continue de l'algorithme à régularisation évanescente

On considère le problème de Cauchy associé à l'équation de Laplace suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \phi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ u_{,n} = \mu_d & \text{sur } \Gamma_d \end{cases} \quad (3.22)$$

Nous avons bien vu que ce problème est un problème mal posé au sens d'Hadamard [41]. Notre approche de régularisation et de caractérisation des solutions en dimension finie, en particulier la méthode des éléments finis de Lagrange, n'était pas capable de reconstruire la dérivée normale de la solution dans le cas d'un domaine rectangulaire où  $\Gamma_i$  représente deux cotés adjacents. L'idée ici est d'utiliser des éléments finis de type *Kirchhoff*, qui permettent d'avoir les dérivées partielles comme degrés de liberté. Nous aurons alors plus d'informations pour reconstruire la dérivée normale. De plus, étant directement accessible grâce à la discrétisation, nous choisissons dans notre approche de régularisation de contrôler ces 3 degrés de liberté pour optimiser les résultats. Compte tenu de la particularité de la discrétisation, où les dérivées partielles sont au moins continues, nous choisissons de relaxer l'espace de recherche des solutions à :

$$\mathcal{H}_0(\Omega) = \{u \in H^{3/2}(\Omega), \quad \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega\}.$$

On peut alors définir l'espace des fonctions solutions par :

$$\mathbf{H}(\Gamma) = \{ \mathbf{U} = (v, \xi, \eta) \in H^1(\Gamma) \times L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma) \\ | \exists u \in \mathcal{H}_0(\Omega), \quad u|_{\Gamma} = v, \quad u_{,n}|_{\Gamma} = n_x \xi + n_y \eta \},$$

où  $n = (n_x, n_y)$  est la normale extérieure au domaine  $\Omega$ .

L'espace des fonctions solution  $\mathbf{H}(\Gamma)$  muni du produit scalaire induit par  $H^1(\Gamma) \times L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$  et définit par :

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbf{H}(\Gamma)} = \langle u, v \rangle_{H^1(\Gamma)} \times \langle u_{,x}, v_{,x} \rangle_{L^2(\Gamma)} \times \langle u_{,y}, v_{,y} \rangle_{L^2(\Gamma)}, \\ \forall \left( \mathbf{U} = (u, u_{,x}, u_{,y}), \mathbf{V} = (v, v_{,x}, v_{,y}) \right) \in \mathbf{H}(\Gamma) \times \mathbf{H}(\Gamma)$$

et de norme associée  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}$  est un sous-espace fermé de  $H^1(\Gamma) \times L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ . D'où,  $\mathbf{H}(\Gamma)$  est un espace de Hilbert. On peut aussi définir l'espace des paires de données compatibles  $\mathbf{H}(\Gamma_d)$  par :

$$\mathbf{H}(\Gamma_d) = \{ \Phi_d = (\phi_d, \mu_d) \in H^1(\Gamma_d) \times L^2(\Gamma_d) \\ | \exists u \in \mathcal{H}_0(\Omega), \quad u|_{\Gamma_d} = \phi_d, \quad u_{,n}|_{\Gamma_d} = \mu_d \}.$$

Finalement, pour  $\Phi_d = (\phi_d, \mu_d)$  une paire de données compatibles, on pourra écrire une formulation équivalente au problème (3.22) de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{U} = (u, u_{,x}, u_{,y}) \in \mathbf{H}(\Gamma) \text{ tel que} \\ u|_{\Gamma_d} = \phi_d, \quad u_{,n}|_{\Gamma_d} \equiv (n_x u_{,x})|_{\Gamma_d} + (n_y u_{,y})|_{\Gamma_d} = \mu_d. \end{cases} \quad (3.23)$$

Toutes les hypothèses sont satisfaites pour appliquer le théorème de Holmgren afin de montrer l'existence et l'unicité de la solution de ce problème.

On applique ici une technique de résolution à régularisation évanescence similaire à celle utilisée dans les chapitres précédents. La seule différence ici est que le contrôle de la solution  $\mathbf{U} = (u, u_{,x}, u_{,y})$  est appliqué sur les deux dérivées partielles au lieu de la dérivée normale. L'algorithme s'écrit :

Soient  $c > 0$  et  $\mathbf{U}^0 \in \mathbf{H}(\Gamma)$ ,

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{U}^{k+1} = (u^{k+1}, u_{,x}^{k+1}, u_{,y}^{k+1}) \in \mathbf{H}(\Gamma) \text{ tel que} \\ J_c^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}) \leq J_c^{k+1}(\mathbf{V}), \quad \forall \mathbf{V} = (v, v_{,x}, v_{,y}) \in \mathbf{H}(\Gamma), \quad \forall k \geq 0, \\ \text{où } J_c^{k+1}(\mathbf{V}) = \|v|_{\Gamma_d} - \phi_d\|_{H^1(\Gamma_d)}^2 + \|(n_x v_{,x}|_{\Gamma_d} + n_y v_{,y}|_{\Gamma_d}) - \mu_d\|_{L^2(\Gamma_d)}^2 + c\|\mathbf{V} - \mathbf{U}^k\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2 \end{cases} \quad (3.24)$$

où à chaque itération, il existe un unique élément optimal  $\mathbf{U}^{k+1}$  caractérisé par :

$$\langle \mathbf{U}^{k+1} - \Phi_d, \mathbf{V} \rangle_{\mathbf{H}(\Gamma_d)} + c \langle \mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k, \mathbf{V} \rangle_{\mathbf{H}(\Gamma)} = 0, \quad \forall \mathbf{V} \in \mathbf{H}(\Gamma).$$

On peut aussi montrer que cet algorithme est convergent.

### 3.3.2 Formulation discrète de l'algorithme à régularisation évanescence

On considère un domaine rectangulaire  $\Omega$  discrétisé par  $N_\Omega \times N_\Omega$  nœuds tel que chaque nœud possède 3 degrés de liberté comme cela a été montré dans la section précédente (élément finis de type **DKQ**). Notons  $N$  le nombre des nœuds situés sur la frontière  $\Gamma$  et  $\underline{\mathbf{U}} = (\underline{U}, \underline{U}_{,x}, \underline{U}_{,y})^t$  le vecteur à  $3N$  composantes constituées par les valeurs de  $u^h$ ,  $u_{,x}^h$  et  $u_{,y}^h$  aux nœuds de la frontière. La réduction par condensation dynamique du système (3.7) nous permet de définir l'opérateur :

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{E}} : \mathbb{R}^{3N} &\rightarrow \mathbb{R}^{3N} \\ \underline{\mathbf{U}} &\mapsto (\mathbb{H} - \mathbb{B})\underline{\mathbf{U}}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Il s'agit de condenser la matrice  $\mathbf{K}$  et le vecteur  $\mathbf{F}$  uniquement sur les degrés de liberté situés sur la frontière. C'est une technique très utile pour réduire la taille d'un système linéaire afin d'optimiser le temps de résolution numérique. Cependant, il a été remarqué précédemment que ce système et par la suite l'opérateur  $\underline{\mathcal{E}}$  est non inversible. Il existe plusieurs méthodes permettant de résoudre un tel système. On note par exemple la méthode de décomposition en valeurs singulières (SVD) [42], décomposition de Jordan [80], décomposition de Cholesky [13], factorisation LU [65] ou à travers du calcul de la pseudo-inverse de Moore-Penrose [74]. La plupart de ces méthodes ont un caractère régularisant et donc peuvent dissimuler le rôle de notre méthode à

régularisation évanescence. En outre, nous souhaitons résoudre un problème de minimisation sous contraintes égalités :

$$\left\| \begin{array}{l} \min_{\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{3N}} J_c^{k+1}(\mathbf{U}) \\ \text{tel que } (\mathbb{H} - \mathbb{B})\mathbf{U} = 0 \end{array} \right. \quad (3.26)$$

avec

$$\begin{aligned} J_c^{k+1}(\mathbf{V}) &= \|\underline{V}_{|\Gamma_d} - \underline{\phi}_d\|_{L^2(\Gamma_d)}^2 + \|(\underline{n}_x \underline{V}_{,x|\Gamma_d} + \underline{n}_y \underline{V}_{,y|\Gamma_d}) - \underline{\mu}_d\|_{L^2(\Gamma_d)}^2 \\ &\quad + c \left( \|\underline{V} - \underline{U}^k\|_{L^2(\Gamma)} + \|\underline{V}_{,x} - \underline{U}_{,x}^k\|_{L^2(\Gamma)} + \|\underline{V}_{,y} - \underline{U}_{,y}^k\|_{L^2(\Gamma)} \right), \\ \forall \mathbf{V} &= (\underline{V}, \underline{V}_{,x}, \underline{V}_{,y}) \in \mathbb{R}^{3N}. \end{aligned}$$

Or, il est nécessaire de satisfaire les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) où les contraintes doivent être linéairement indépendantes. Nous optons dans notre approche pour décomposer l'opérateur (3.25) de sorte qu'il ait un rang plein et ce en triant les lignes linéairement indépendantes de la matrice  $(\mathbb{H} - \mathbb{B})$ . Soit  $\Gamma_p \subseteq \Gamma$  un ensemble de nœuds de la frontière  $\Gamma$  tel que la restriction des lignes de la matrice  $(\mathbb{H} - \mathbb{B})$  sur les nœuds de  $\Gamma_p$  est de rang plein. En effet, si  $N_p = |\Gamma_p|$  avec  $N_p \leq N$ , on aura :

$$(\mathbb{H} - \mathbb{B})_{|\Gamma_p} \in \mathcal{M}_{N_p \times N}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \text{rank}\left((\mathbb{H} - \mathbb{B})_{|\Gamma_p}\right) = N_p.$$

Cela nous permet de définir l'opérateur linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p : \mathbb{R}^{3N} &\rightarrow \mathbb{R}^{3N_p} \\ \underline{U}_p &\mapsto (\mathbb{H} - \mathbb{B})_{|\Gamma_p} \underline{U}_p \end{aligned} \quad (3.27)$$

de noyau

$$\mathbf{H}_N(\Gamma_p) = \{\underline{U} = (\underline{U}, \underline{U}_{,x}, \underline{U}_{,y}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mid \mathcal{E}_p(\underline{U}) = 0\}.$$

Nous pouvons alors résoudre le problème de minimisation sous contraintes égalités  $\mathcal{E}_p(\underline{U}) = 0$  suivant :

Soient  $c > 0$ ,  $\mathbf{V}^0 \in \mathbb{R}^{3N}$ ,

$$(S_c)_p \left\| \begin{array}{l} \min_{\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{3N}} J_c^{k+1}(\mathbf{V}), \\ \text{tel que } (\mathbb{H} - \mathbb{B})_{|\Gamma_p} \mathbf{V} = 0 \end{array} \right. \quad (3.28)$$

On verra par la suite que si on considère  $\Gamma_p = \Gamma_i$  pour la restriction des contraintes égalités, on aura une bonne approximation de la solution sur la partie inconnue. Cependant, les données ne seront pas débruitées. D'autre part, si on raisonne de la même façon mais cette fois-ci avec  $\Gamma_p = \Gamma_d$ , on aura un bon débruitage des données mais pas de bonne reconstruction de la solution sur  $\Gamma_i$ . Par conséquent, on pourra définir une solution approchée  $\underline{U}$  du problème (3.26) tel que  $\underline{U}_{|\Gamma_i} = \underline{V}_{|\Gamma_i}$  et  $\underline{U}_{|\Gamma_d} = \underline{W}_{|\Gamma_d}$ , où  $\underline{V}$  est une solution du problème  $(S_c)_i$  et  $\underline{W}$  est une solution du problème  $(S_c)_d$ .

Résoudre le problème d'optimisation (3.28) revient à trouver la solution du système d'équations suivant :

$$\Xi_p(\mathbf{V}) = 0, \quad \nabla J_c^{k+1}(\mathbf{V}) + \nabla \Xi_p^T \underline{\lambda}^{k+1} = 0,$$

i.e.

$$\begin{bmatrix} \nabla J_c^{k+1} & \nabla \Xi_p^T \\ \nabla \Xi_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{k+1} \\ \underline{\lambda}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

où

$$\nabla J_c^{k+1} = \begin{bmatrix} M_{\Gamma_d} + cM_\Gamma & 0 & 0 \\ 0 & M_{y_{\Gamma_d}} + cM_\Gamma & M_{xy_{\Gamma_d}} \\ 0 & M_{xy_{\Gamma_d}} & M_{x_{\Gamma_d}} + cM_\Gamma \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

$$\nabla \Xi_p = (\mathbb{H} - \mathbb{B})|_{\Gamma_p} \quad (3.30)$$

et

$$\mathbf{S}^k = \begin{bmatrix} M_{\Gamma_d} \phi_d + cM_\Gamma \underline{U}^k \\ \underline{n}_{y_{\Gamma_d}}^t \underline{\mu}_d + cM_\Gamma \underline{U}_{,y}^k \\ \underline{n}_{x_{\Gamma_d}}^t \underline{\mu}_d + cM_\Gamma \underline{U}_{,x}^k \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

tels que  $\underline{n}_x = (n_{x_1}, \dots, n_{x_{N'}})^t$ ,  $\underline{n}_y = (n_{y_1}, \dots, n_{y_{N'}})^t$  et  $M_{x_{\Gamma_d}}$ ,  $M_{y_{\Gamma_d}}$  et  $M_{xy_{\Gamma_d}}$  sont construites à l'aide des matrices élémentaires suivantes :

$$M_{x_{\Gamma_{d_i}}} = \frac{l}{2} n_{x_i} n_{x_i}^t, \quad M_{y_{\Gamma_{d_i}}} = \frac{l}{2} n_{y_i} n_{y_i}^t, \quad M_{xy_{\Gamma_{d_i}}} = \frac{l}{2} n_{x_i} n_{y_i}^t, \quad (3.32)$$

où  $N'$  est le nombre des arêtes de la frontière et  $l_i$  est la longueur de l'arête  $\Gamma_{d_i}$ . De plus,

$$M_\Gamma = \int_\Gamma \mathcal{N}^t \mathcal{N} ds, \quad M_{\Gamma_d} = \int_{\Gamma_d} \mathcal{N}^t \mathcal{N} ds, \quad (3.33)$$

où  $\mathcal{N}$  est le vecteur qui contient les fonctions d'interpolation construisant une base de l'espace  $L^2(\Gamma)$ .

### 3.3.3 Validation numérique

Nous nous intéressons dans ce chapitre au cas du domaine non régulier et prenons comme exemple le carré  $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$  discrétisé avec des éléments rectangulaires de manière uniforme. Nous proposons dans cette section une validation numérique de la stratégie proposée pour la résolution du problème de Cauchy associé à l'équation de Laplace (3.22). Nous nous focalisons sur le cas crucial où  $\Gamma_d$ , la partie de la frontière où les données sont présentes, est donnée par les côtés  $y = 0$  et  $x = 1$  du carré (Cf. Figure 3.1). Nous représentons les côtés du carré par une abscisse curviligne  $s$  tel que pour le côté  $y = 0$ ,  $s$  varie entre 0 et 1, le côté  $x = 1$ ,  $s$  varie entre 1 et 2, le côté  $y = 1$ ,  $s$  varie entre 2 et 3 et le côté  $x = 0$ ,  $s$  varie entre 3 et 4. Par mesure d'harmonie et afin de pouvoir effectuer des comparaisons avec les études menées dans les chapitres précédents ainsi que celles présentes dans les travaux [26, 29, 31], nous considérons la

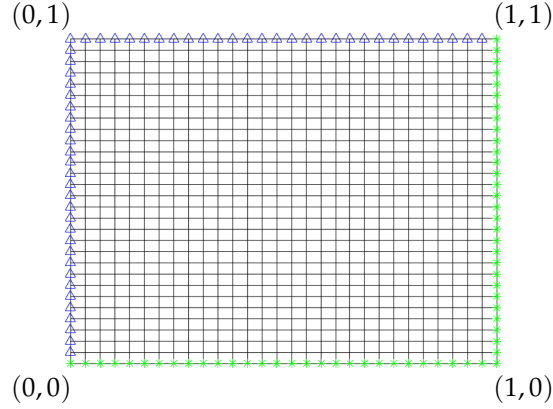


FIGURE 3.1 – Domaine carré  $[0,1] \times [0,1] \in \mathbb{R}^2$  discrétisé par  $40 \times 40$  éléments avec  $*$  :  $\Gamma_d$  et  $\Delta$  :  $\Gamma_i$ .

même solution analytique  $u_{an}$  (3.34) de dérivée normale  $u_{,n}^{an}$  pour lesquelles les données compatibles sont extraites et seront perturbées de la même manière que dans (1.30).

$$u_{an}(\mathbf{x}) = \cosh y \cos x + \sinh y \sin x, \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega. \quad (3.34)$$

Nous présentons à la suite des reconstructions de la solution approchée  $\underline{U}$  et de la dérivée normale  $\underline{U}' = \underline{n}_x \underline{U}_{,x} + \underline{n}_y \underline{U}_{,y}$ , obtenues par la stratégie introduite dans ce chapitre, sur toute la frontière du domaine. On rappelle que chaque reconstruction est obtenue en résolvant l'algorithme (3.28) en considérant à chaque fois la restriction sur  $\Gamma_d$  ou  $\Gamma_i$ . Compte tenu de la décomposition et du tri des équations des contraintes égalités effectués, nous définissons un résidu par la norme  $\|\mathcal{E}(\underline{U})\|$ , où  $\mathcal{E}(\underline{U}) = (\mathbb{H} - \mathbb{B})\underline{U}$ . Cette quantité donne une représentation à quel point la solution numérique obtenue satisfait les contraintes égalités du problème. Cela est ensuite comparé au résidu analytique  $\|\mathcal{E}(\underline{U}_{an})\|$  obtenu en considérant la solution analytique  $\underline{U}_{an} = (u_{an}, u_{,n}^{an})$  associée aux données compatibles. De plus, on définit les normes d'erreur commises sur la solution suivant :

$$u_{err}^k = \frac{\|u_{an} - u^k\|}{\|u_{an}\|}, \quad u_{err}^{k'} = \frac{\|u_{,n}^{an} - u_{,n}^k\|}{\|u_{,n}^{an}\|}.$$

On observe sur la Figure 3.2 que la trace de la solution et de sa dérivée normale sont reconstruites sur toute la frontière du domaine dans le cas de données compatibles. Cette reconstruction est très précise de sorte qu'elle n'implique aucun saut, essentiellement sur la partie inconnue où un coin est présent.

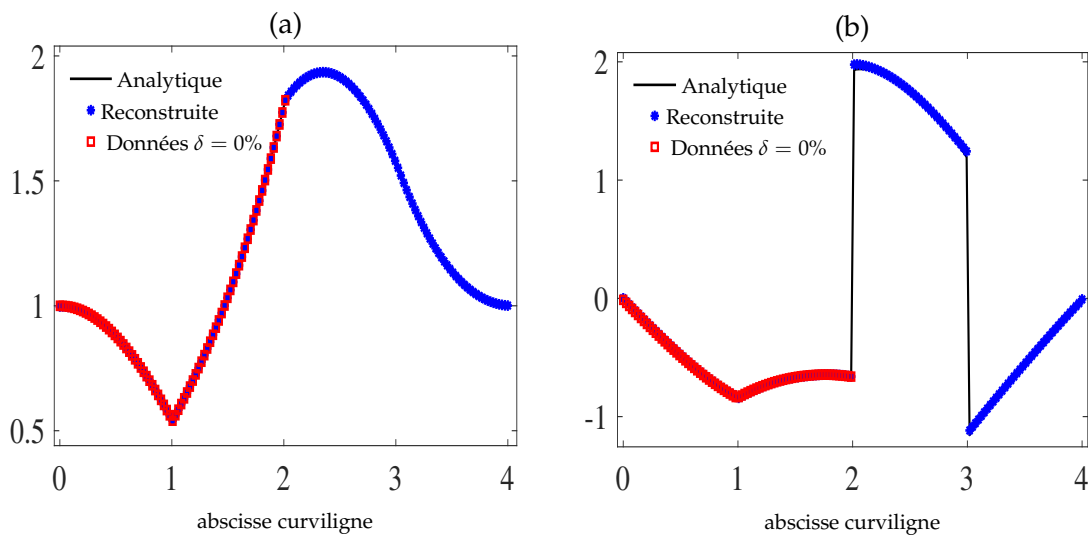


FIGURE 3.2 – Reconstructions de la solution  $\underline{U}$  (a) et de la dérivée normale  $\underline{U}'$  (b) pour des données compatibles situées sur les côtés  $y = 0$  et  $x = 1$  du carré.

Lorsque les données sont perturbées, les Figures 3.3, 3.4 et 3.5 donnent les reconstructions obtenues pour trois niveaux de bruits  $\delta = 3\%$ ,  $5\%$  et  $10\%$  respectivement. De plus, le Tableau 3.1 donne plus de détails sur cette reconstruction en montrant l'évolution des normes d'erreur pour chaque niveau de bruit ajouté. Ce résultat montre la stabilité de la solution obtenue vis-à-vis du bruit ainsi que la robustesse de la stratégie proposée par rapport à des niveaux de bruit élevés. Les valeurs des résidus associés à chaque reconstruction sont également fournies par le Tableau 3.1. En effet, hormis les erreurs d'approximation numérique qui sont de l'ordre de  $10^{-6}$  pour la solution analytique, il est important que la solution obtenue puisse satisfaire au maximum les contraintes égalités afin de valider la stratégie de décomposition et de tri de celles-ci.

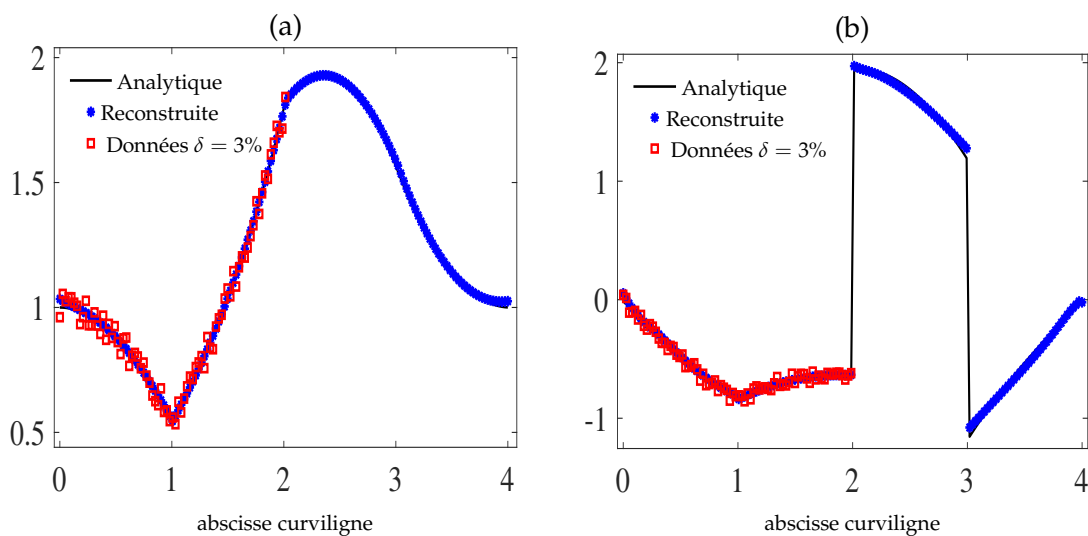


FIGURE 3.3 – Reconstructions de la solution  $\underline{U}$  (a) et de la dérivée normale  $\underline{U}'$  (b) pour des données bruitées de niveau  $\delta = 3\%$  situées sur les côtés  $y = 0$  et  $x = 1$  du carré.



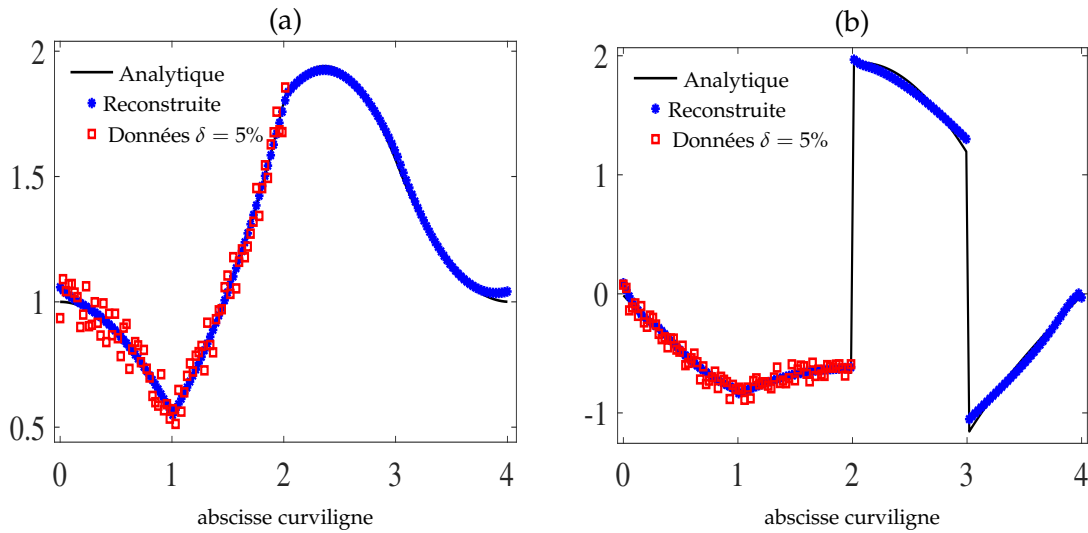


FIGURE 3.4 – Reconstructions de la solution  $\underline{U}$  (a) et de la dérivée normale  $\underline{U}'$  (b) pour des données bruitées de niveau  $\delta = 5\%$  situées sur les côtés  $y = 0$  et  $x = 1$  du carré.

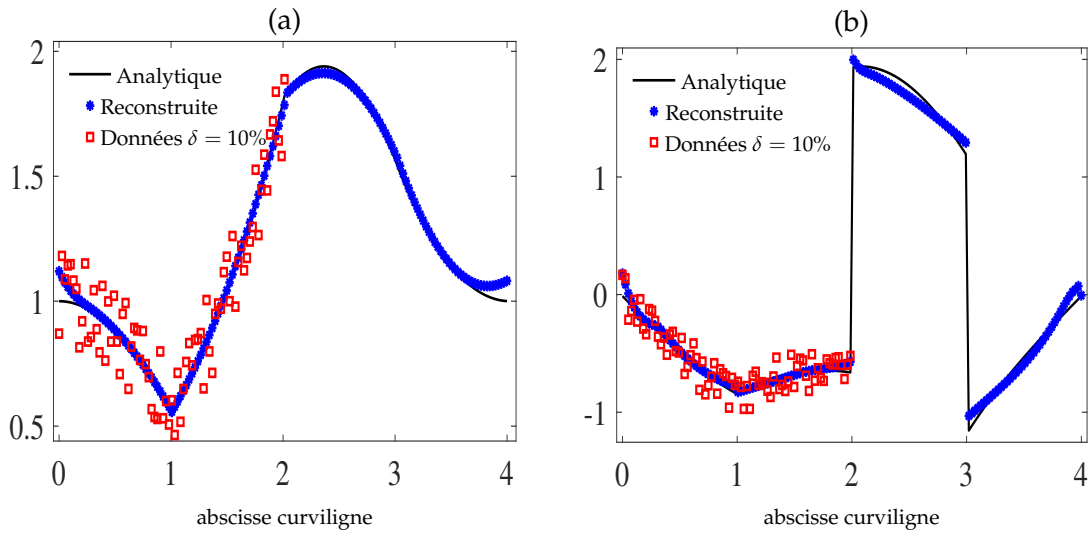


FIGURE 3.5 – Reconstructions de la solution  $\underline{U}$  (a) et de la dérivée normale  $\underline{U}'$  (b) pour des données bruitées de niveau  $\delta = 10\%$  situées sur les côtés  $y = 0$  et  $x = 1$  du carré.

$\delta$	$u_{err}(\%)$	$u'_{err}(\%)$	$\ \mathcal{E}(\underline{U})\ $	$\ \mathcal{E}(\underline{U}_{an})\ $
0%	$2.10 \times 10^{-1}$	1.48	$5.72 \times 10^{-4}$	$2.34 \times 10^{-6}$
3%	$7.08 \times 10^{-1}$	2.55	$1.95 \times 10^{-3}$	$2.34 \times 10^{-6}$
5%	1.12	3.48	$3.18 \times 10^{-3}$	$2.34 \times 10^{-6}$
10%	1.94	5.25	$6.77 \times 10^{-3}$	$2.34 \times 10^{-6}$

TABLE 3.1 – Évolution des normes d'erreur et des résidus associés aux contraintes égalités, pour différents niveaux de bruit  $\delta = 0\%, 3\%, 5\%, 10\%$ .

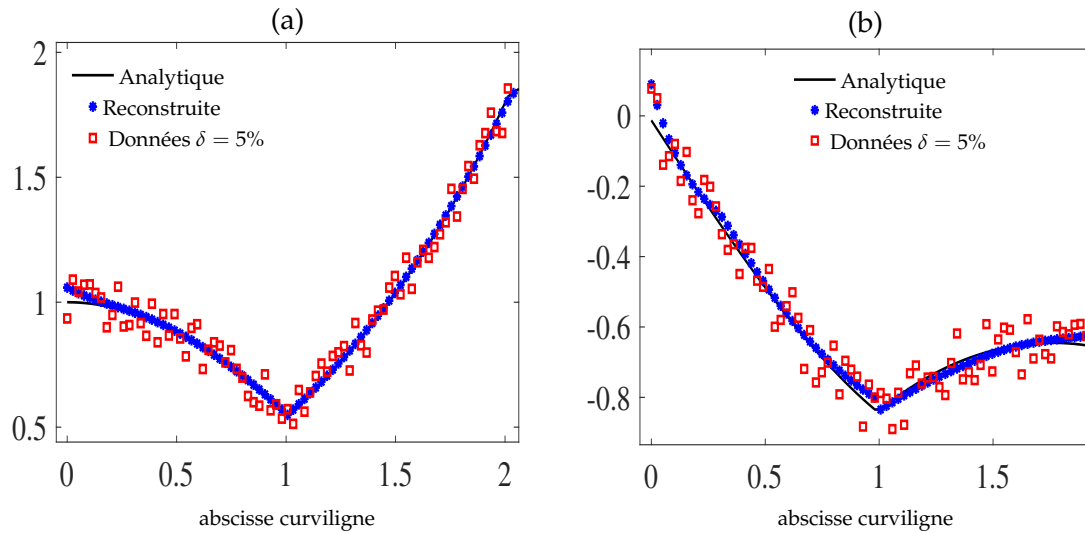


FIGURE 3.6 – Reconstructions sur  $\Gamma_d$  de la solution  $\underline{U}$  (a) et de la dérivée normale  $\underline{U}'$  (b) pour des données bruitées de niveau  $\delta = 5\%$ .

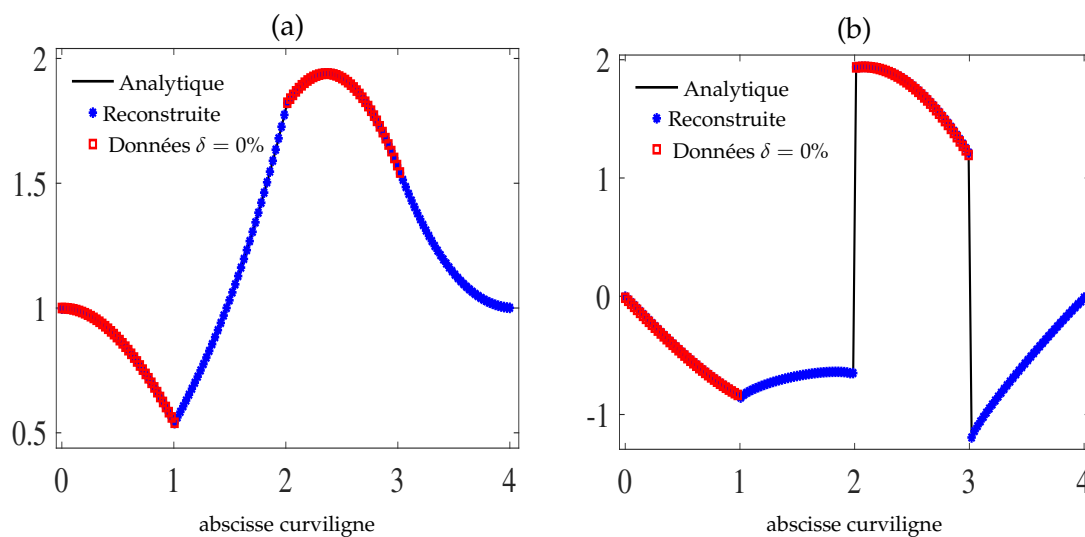


FIGURE 3.7 – Reconstructions de la solution  $\underline{U}$  (a) et de la dérivée normale  $\underline{U}'$  (b) pour des données compatibles situées sur les côtés  $y = 0$  et  $y = 1$  du carré.

La Figure 3.6 montre la capacité de la stratégie de résolution à pouvoir débruiter les données sur la partie accessible de la frontière  $\Gamma_d$ .

Nous avons réalisé également une étude dans le cas des données situées sur deux côtés opposés ( $y = 0$  et  $y = 1$ ). La Figure 3.7 donne la reconstruction de la trace de solution et de sa dérivée normale lorsque les données sont compatibles tandis que la Figure 3.8 donne les reconstructions obtenues en considérant différents niveaux de bruits. Ces résultats permettent aussi de valider la robustesse de la stratégie proposée ainsi que sa compatibilité au cas de données situées sur deux côtés opposés.

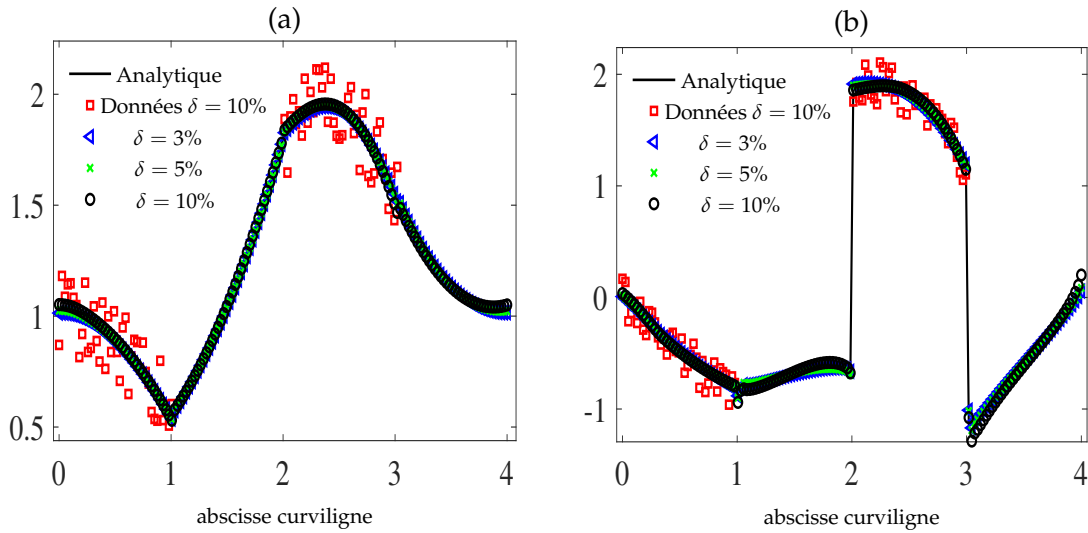


FIGURE 3.8 – Reconstructions de la solution  $\underline{U}$  (a) et de la dérivée normale  $\underline{U}'$  (b) pour des données bruitées à plusieurs niveaux  $\delta = 3\%$ ,  $5\%$  et  $10\%$  situées sur les côtés  $y = 0$  et  $y = 1$  du carré.

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle stratégie de résolution du problème de Cauchy associé à l'équation de Laplace. Elle consiste à utiliser une technique de régularisation évanescente implémentée par une méthode des éléments finis utilisant des éléments de type plaque. L'élément MKQ12, initialement introduit dans [48] pour l'approximation du champ de déplacement de plaques minces de *Kirchhoff* en flexion, a été considéré afin de pouvoir exprimer la solution de l'équation de Laplace en fonction de ses valeurs nodales et de ses dérivées partielles d'ordre un. Cet outil a permis de faire porter la régularisation sur les termes des dérivées partielles au lieu de la dérivée normale dans la fonctionnelle de régularisation évanescente. Ensuite, une difficulté dans la résolution numérique de l'algorithme évanescents, provenant de l'impossibilité de l'inversion du système d'optimisation, a été contournée en envisageant une stratégie de tri des équations représentant les contraintes égalités. Ceci a constitué une alternative aux méthodes d'inversion de systèmes habituellement utilisées dans ce cas particulier (SVD, QR, pseudo-inverse, etc), qui elles-mêmes contiennent un caractère régularisant, afin de ne pas masquer le rôle de notre méthode de régularisation. Les résultats numériques ont montré la validation de cette stratégie. En effet, la reconstruction des conditions aux limites en termes de trace de la solution et de la dérivée normale est désormais obtenue dans le cas de données situées sur deux côtés adjacents d'un domaine rectangulaire mais aussi la stratégie présente une robustesse vis-à-vis de données présentant des niveaux de bruit élevés. Cette situation a été un défi tout au long de cette thèse mais aussi, depuis des années, pour les travaux présentés dans [26, 29, 31] où des exemples de reconstructions sont fournis dans l'annexe C.

## Conclusion générale et perspectives

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés principalement à la résolution du problème de Cauchy associé à l'équation biharmonique en utilisant la méthode de régularisation évanescence. Nous avons particulièrement porté notre intérêt à la mise en œuvre numérique de cette méthode ainsi qu'à la résolution du problème de Cauchy en théorie des plaques minces.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté la formulation continue et discrète de la méthode de régularisation évanescence appliquée au problème de Cauchy avec des conditions aux limites mathématiques qui ne sont prescrites que sur une partie de la frontière. Nous avons ensuite proposé un nouveau critère d'arrêt pour l'algorithme évanescent. La mise en œuvre numérique de cette méthode a été réalisée par la méthode des solutions fondamentales dans un premier temps, puis par la méthode des éléments finis dans un second temps et ce pour différents types de domaines (couronne, disque et carré). Des tests numériques ont prouvé la validité du nouveau critère d'arrêt ainsi que la robustesse de la solution vis-à-vis des données bruitées. La discrétisation par la MEF a permis de factoriser le problème en deux sous-problèmes associés respectivement à l'équation de Laplace et à l'équation de Poisson. Nous avons également proposé une nouvelle stratégie pour cette résolution en résolvant directement le problème biharmonique complet en considérant les deux équations d'équilibre dans un seul système. Des simulations numériques ont été réalisées pour les deux méthodes et ont permis la validation numérique de cette nouvelle stratégie. De plus, elle a permis d'obtenir des résultats légèrement meilleurs lorsque les critères d'arrêt sont appliqués car ils sont, contrairement à la forme factorisée, moins infectés par le choix du paramètre de régularisation. En revanche, les résultats numériques ont montré une indépendance de la solution par rapport au paramètre qui n'intervient que pour accélérer la convergence de l'algorithme à condition qu'il ne soit pas trop petit pour maintenir l'effet régularisant.

Une comparaison des deux méthodes de discrétisation utilisées nous amène à conclure que la MFS est la méthode la moins coûteuse en terme de calcul et qu'elle gère mieux la discontinuité des dérivées normales ou les problèmes de raccord entre la partie connue et la partie inconnue de la frontière, même avec un petit nombre de données.

Au deuxième chapitre, la résolution du problème biharmonique a été généralisée au cas pratique mécanique de la théorie des plaques minces. Une stratégie d'implémentation en utilisant des éléments finis de type plaques de *Kirchhoff* a été proposée pour la résolution de l'algorithme évanescent. Cela a permis de faire porter la régularisation sur les composantes du gradient, en plus de la trace du déplacement, du moment de flexion et de l'effort tranchant. Les résultats numériques ont prouvé la validité de cette méthode d'implémentation et ont montré une amélioration dans la reconstruction de la trace de la fonction et celle de la dérivée normale, en particulier

dans le cas crucial où des points anguleux sont présents sur la partie inconnue de la frontière. Cependant, des problèmes persistent dans la reconstruction du moment de flexion et de l'effort tranchant sur la partie inconnue.

Le troisième chapitre s'inspire de la méthode numérique introduite au deuxième chapitre. Il consiste à généraliser l'utilisation d'un élément fini de type plaque pour résoudre des problèmes du second ordre. Nous avons considéré le cas du problème de Cauchy associé à l'équation de Laplace où la méthode de régularisation évanescence a été combinée avec cette stratégie d'implémentation. Des simulations numériques ont montré une amélioration significative dans la reconstruction de la trace de la fonction et de la dérivée normale dans le cas du carré, lorsque les données sont situées sur deux côtés adjacents. La capacité à débruiter les données avec un niveau de bruit élevé est aussi un avantage de cette stratégie.

En perspectives et dans la continuité des travaux de cette thèse, nous souhaiterions profiter des avantages de la MFS en l'appliquant au problème de Cauchy en théorie des plaques minces étudié au chapitre 2, pour contourner les difficultés régies par les reconstructions du moment de flexion et de l'effort tranchant. En effet, puisqu'il s'agit de grandeurs dont l'expression est connue en fonction du déplacement (Cf. les relations (2.51) et (2.52)), on pourrait les exprimer à l'aide des solutions fondamentales utilisées au chapitre 1. L'utilisation d'autres types d'éléments de plaques comprenant des degrés de liberté d'ordres élevés pourrait être un moyen de mieux reconstruire le moment de flexion et l'effort tranchant.

D'autre part, les améliorations obtenues grâce à la stratégie proposée au chapitre 3, dans le cas du problème de Cauchy associé à l'équation de Laplace, pourraient constituer une opportunité pour améliorer les résultats obtenus lors de la discrétisation par la méthode des éléments finis du problème factorisé introduit au chapitre 1. Par ailleurs, l'alternative de trier les équations des contraintes égalités, utilisée au chapitre 3 pour contourner l'utilisation des méthodes qui elles-mêmes contiennent une régularisation, peut être revisitée afin de gérer toutes les contraintes. Il pourrait être envisageable aussi d'utiliser d'autres méthodes numériques préprogrammées adaptées à l'inversion de systèmes mal conditionnés, mais il est important de bien comprendre comment celles-ci sont implémentées dans les logiciels de calculs numériques.

En s'inspirant des travaux de *Caillé et al.* [16, 15] dans le cadre de problèmes de complétion de données en élasticité linéaire, nous pouvons faire porter le développement utilisé au cours de cette thèse aux problèmes de complétion de données en théorie des plaques minces. On pourra traiter par exemple le problème d'identification du champ de déplacement partiellement connu dans le domaine ou celui de détermination des forces extérieures appliquées à la plaque à travers la connaissance du champ de déplacement sur tout le domaine et/ou des conditions aux limites en tout point de la frontière. L'identification des propriétés mécaniques de la plaque est également un axe de développement possible.

## Annexe A

# Convergences et propriétés des termes de contrôle

### A.1 Décroissance de la suite composée des termes de relaxation des données

Soit  $\mathbf{U}^{k+1} \in H(\Gamma)$  solution de l'algorithme itératif (1.3), on souhaite montrer que la suite  $\left( J_{\Gamma_d}^k(\mathbf{U}^k) \right)_{k \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$J_{\Gamma_d}^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}) = \|\mathbf{U}_{|\Gamma_d}^{k+1} - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 \quad (\text{A.1})$$

est décroissante. En effet, d'après l'algorithme (1.3), on a que :

$$J_c^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}) \leq J_c^{k+1}(\mathbf{V}), \quad \forall \mathbf{V} \in H(\Gamma),$$

en particulier pour  $\mathbf{V} = \mathbf{U}^k \in H(\Gamma)$ , on a

$$J_c^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}) \leq J_c^{k+1}(\mathbf{U}^k),$$

ou encore

$$\|\mathbf{U}_{|\Gamma_d}^{k+1} - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 + c\|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k\|_{H(\Gamma)}^2 \leq \|\mathbf{U}_{|\Gamma_d}^k - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 + c\|\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^k\|_{H(\Gamma)}^2,$$

d'où

$$\|\mathbf{U}_{|\Gamma_d}^{k+1} - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 \leq \|\mathbf{U}_{|\Gamma_d}^k - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 + c\|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k\|_{H(\Gamma)}^2 \leq \|\mathbf{U}_{|\Gamma_d}^k - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2.$$

Finalement, on obtient

$$J_{\Gamma_d}^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}) \leq J_{\Gamma_d}^k(\mathbf{U}^k). \quad (\text{A.2})$$

## A.2 Décroissance de la suite composée des valeurs optimales de la fonctionnelle $J_c$ à chaque itération

La suite  $(J_c^k(\mathbf{U}^k))_{k \in \mathbb{N}}$  définie par les valeurs optimales de la fonctionnelle :

$$J_c^k(\mathbf{U}^k) = \|\mathbf{U}_{|\Gamma_d}^k - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 + c\|\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{k-1}\|_{H(\Gamma)}^2 \quad (\text{A.3})$$

est décroissante. En effet, d'après la section A.1 on a :

$$\|\mathbf{U}_{|\Gamma_d}^{k+1} - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 + c\|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k\|_{H(\Gamma)}^2 \leq \|\mathbf{U}_{|\Gamma_d}^k - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2$$

et en ajoutant le terme positif  $c\|\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{k-1}\|_{H(\Gamma)}^2$  au membre de droite de l'inégalité (A.3), on obtient

$$\|\mathbf{U}_{|\Gamma_d}^{k+1} - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 + c\|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k\|_{H(\Gamma)}^2 \leq \|\mathbf{U}_{|\Gamma_d}^k - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 + c\|\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{k-1}\|_{H(\Gamma)}^2$$

ou encore

$$J_c^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}) \leq J_c^k(\mathbf{U}^k). \quad (\text{A.4})$$

*Remarque.* Il est à noter que les relations (A.2) et (A.4) sont obtenues quelque soit la donnée  $\Phi_d$  et qu'il n'y a aucune hypothèse sur la compatibilité de celle-ci.

## A.3 Croissance de la suite $S_c^{k+1}$

Soit  $\mathbf{U}^{k+1} \in H(\Gamma)$ , afin de montrer que la suite de terme général  $S_c^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1})$  défini par

$$S_c^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}) = \sum_{j=0}^k \|\mathbf{U}^{j+1} - \mathbf{U}^j\|_{H(\Gamma)}^2 + \frac{2}{c} \left( \sum_{j=0}^k \|\mathbf{U}^{j+1} - \tilde{\Phi}_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 - (k+1) \|\mathbf{U}^{k+1} - \tilde{\Phi}_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 \right)$$

est une suite croissante, on calcule

$$\begin{aligned} S_c^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}) - S_c^k(\mathbf{U}^k) &= \sum_{j=0}^k \|\mathbf{U}^{j+1} - \mathbf{U}^j\|_{H(\Gamma)}^2 - \sum_{j=0}^{k-1} \|\mathbf{U}^{j+1} - \mathbf{U}^j\|_{H(\Gamma)}^2 \\ &\quad + \frac{2}{c} \left( \sum_{j=0}^k \|\mathbf{U}^{j+1} - \tilde{\Phi}_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 - (k+1) \|\mathbf{U}^{k+1} - \tilde{\Phi}_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 \right) \\ &\quad - \frac{2}{c} \left( \sum_{j=0}^{k-1} \|\mathbf{U}^{j+1} - \tilde{\Phi}_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 - k \|\mathbf{U}^k - \tilde{\Phi}_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 \right) \\ &= \|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k\|_{H(\Gamma)}^2 + \frac{2}{c} k \underbrace{\left( \|\mathbf{U}^k - \tilde{\Phi}_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 - \|\mathbf{U}^{k+1} - \tilde{\Phi}_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 \right)}_{\text{est positif car } (J_{\Gamma_d}^k(\mathbf{U}^k))_{k \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}}. \end{aligned}$$

D'où

$$S_c^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}) - S_c^k(\mathbf{U}^k) \geq 0,$$

donc la suite  $(S_c^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}))_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante.

*Remarque.* Ce résultat est valable pour des données aussi bien compatibles que bruitées.

Dans le cas de données compatibles, on a d'après le lemme (1.2.2) :

$$S_c^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}) = S_e^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}) - (k+1) \|\mathbf{U}^{k+1} - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 \leq S_e^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}).$$

Or, la suite  $(S_e^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}))_{k \in \mathbb{N}}$  est convergente. D'où  $(S_c^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}))_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante majorée. Elle est donc convergente. De plus, d'après le lemme (1.2.2), le terme  $\|\mathbf{U}^{k+1} - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2$  est un terme général d'une série convergente. Donc, il existe  $M > 0$  tel que

$$\|\mathbf{U}^{k+1} - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 \leq \frac{M}{k^\alpha}, \quad \text{avec } \alpha > 1,$$

d'où

$$(k+1) \|\mathbf{U}^{k+1} - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

Par conséquent, les deux suites  $S_c^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1})$  et  $S_e^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1})$  convergent vers la même limite.

## A.4 Propriétés de la suite composée des termes de régularisation

La suite  $(J_\Gamma^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}))_{k \in \mathbb{N}}$  de terme général composé par les termes de régularisation  $\|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k\|_{H(\Gamma)}^2$  à chaque itération est une suite bornée qui converge vers 0. En effet, il est immédiat de vérifier cela en utilisant le lemme (1.2.2) :

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k\|_{H(\Gamma)}^2 &= \|\mathbf{U}^0 - \mathbf{U}_e\|_{H(\Gamma)}^2 - \|\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}_e\|_{H(\Gamma)}^2 - \frac{2}{c} \sum_{k=0}^n \|\mathbf{U}^{k+1} - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 \\ &\leq \|\mathbf{U}^0 - \mathbf{U}_e\|_{H(\Gamma)}^2, \end{aligned}$$

d'où,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k\|_{H(\Gamma)}^2 \leq \|\mathbf{U}^0 - \mathbf{U}_e\|_{H(\Gamma)}^2$$

et

$$\|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k\|_{H(\Gamma)}^2 \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$





## Annexe B

# Détails concernant les éléments finis de plaques

### B.1 Construction des fonctions d'interpolation pour un cas de maillage uniforme

Un polynôme est défini afin d'approximer le déplacement vertical du plan moyen  $w(x, y)$  ainsi que ses dérivées partielles, lors du calcul par éléments finis.

$$\left\| \begin{aligned} w_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 x_i^2 + \dots \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i &= \alpha_3 + \alpha_5 x_i + \dots \\ -\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i &= -\alpha_2 - \alpha_5 y_i + \dots \end{aligned} \right. \quad (\text{B.1})$$

En fonction du nombre de degrés de liberté par nœud et du nombre de nœuds présents dans l'élément, nous avons besoin d'un nombre suffisant de termes pour définir les polynômes d'approximation de référence. La construction de ces polynômes se fait à l'aide du triangle de Pascal :

constant				1	
linéaire			$x$	$y$	
quadratique		$x^2$	$xy$	$y^2$	
cubique	$x^3$	$x^2y$	$xy^2$	$y^3$	
	$x^4$	$x^3y$	$x^2y^2$	$xy^3$	$y^4$

On peut alors écrire :

$$w = \mathbf{P}\underline{\alpha}$$

avec  $\mathbf{P} = [1, x, y, x^2, y^2, \dots]$  et  $\underline{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots]^t$  un vecteur constitué de constantes. Les éléments de *Kirchhoff* sont des éléments à 3 degrés de liberté par nœud : le déplacement vertical  $w$  et ses dérivées partielles premières dans chaque direction  $(\frac{\partial w}{\partial x})_i = -\theta_{y_i}$

et  $(\frac{\partial w}{\partial y})_i = \theta_{x_i}$ . On note  $\underline{d}_i = \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{bmatrix}$  le vecteur qui contient les degrés de liberté à chaque

nœud  $i$  et  $\underline{d} = \begin{bmatrix} \underline{d}_i \\ \underline{d}_j \\ \underline{d}_k \\ \vdots \end{bmatrix}$  le vecteur des degrés de liberté de l'élément de référence.

On peut alors écrire :

$$\underline{d} = \mathbf{C}\underline{\alpha}.$$

En inversant la matrice  $\mathbf{C}$ , on obtient l'expression du vecteur inconnu  $\underline{\alpha}$  :

$$\underline{\alpha} = \mathbf{C}^{-1}\underline{d}. \quad (\text{B.2})$$

D'autre part, la discrétisation nous permet d'écrire :

$$w = \mathbf{N}\underline{d}, \quad (\text{B.3})$$

où  $\mathbf{N}$  est le vecteur des fonctions d'interpolation de l'élément :

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad \mathbf{N}_3 \quad \dots] \quad \text{et} \quad \mathbf{N}_i = [N_i \quad \overline{N}_i \quad \overline{\overline{N}}_i] \quad \text{pour } i = 1 \text{ à } k, \quad (\text{B.4})$$

où  $N_i$ ,  $\overline{N}_i$  et  $\overline{\overline{N}}_i$  sont les fonctions d'interpolation liées aux degrés de liberté  $w_i$ ,  $\theta_{x_i}$  et  $\theta_{y_i}$  respectivement, et  $k$  est le nombre de nœuds par élément. On note que :

$$w = \mathbf{P}\underline{\alpha} = \mathbf{P}\mathbf{C}^{-1}\underline{d} = \mathbf{N}\underline{d}. \quad (\text{B.5})$$

On obtient alors les fonctions de forme pour chaque élément :

$$\mathbf{N} = \mathbf{P}\mathbf{C}^{-1}. \quad (\text{B.6})$$

### B.1.1 Discrétisation en utilisant des éléments finis rectangulaires à 4 nœuds (élément fini de Melosh)

L'élément fini de Melosh [63] est beaucoup plus simple à implémenter que celui de Batoz [7] présenté au chapitre 2. C'est un élément rectangulaire à 4 nœuds et à 12 degrés de liberté. Un polynôme du troisième degré est utilisé pour approximer le déplacement  $w$  dans l'élément :

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3. \quad (\text{B.7})$$

En appliquant l'opérateur différentiel  $\mathbf{L}\nabla$  (défini au paragraphe 2.2.1.2), on peut écrire :

$$\mathbf{L}\nabla w = \begin{bmatrix} 2\alpha_4 + 6\alpha_7 x + 2\alpha_8 y + 6\alpha_{11} xy \\ 2\alpha_6 + 2\alpha_9 x + 6\alpha_{10} y + 6\alpha_{12} xy \\ 2\alpha_5 + 4\alpha_8 x + 4\alpha_9 y + 6\alpha_{11} x^2 + 6\alpha_{12} y^2 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}\underline{\alpha}, \quad (\text{B.8})$$

où

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix}.$$

D'autre part

$$\mathbf{L}\nabla w = \underbrace{(\mathbf{L}\nabla\mathbf{N})}_{\equiv \underline{B}} \underline{d} = \mathbf{Q} \underline{\alpha} = \mathbf{Q}\mathbf{C}^{-1} \underline{d} \quad (\text{B.9})$$

d'où,

$$\underline{B} = \mathbf{Q}\mathbf{C}^{-1}. \quad (\text{B.10})$$

Enfin, la matrice de rigidité s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{\Omega_0} \underline{B}^t \underline{D} \underline{B} d\Omega_0, \\ \mathbf{K} &= \mathbf{C}^{-T} \left( \int_{\Omega_0} \mathbf{Q}^T \underline{D} \mathbf{Q} d\Omega_0 \right) \mathbf{C}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

et le second membre s'écrit

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega_0} \mathbf{N}^t q(x, y) \, dx dy + \int_{\Gamma} \left[ \mathbf{N}_n^t M_{nn} + \mathbf{N}^t \left( \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} - Q_n \right) \right] ds + \underline{R}. \quad (\text{B.12})$$

### B.1.2 Discrétisation en utilisant des éléments finis triangulaires à 3 nœuds

L'élément triangulaire à 3 nœuds est plus compliqué à gérer, car nous avons 9 degrés de liberté sur l'élément de référence et on a sur cet élément 9 équations avec 9 inconnues, tandis que l'expression cubique complète contient 10 termes. Il faut alors omettre un terme. De plus, un autre problème pourrait se poser avec ce type d'élément fini, surtout lorsque les deux côtés du triangle sont respectivement parallèles aux axes  $x$  et  $y$ . Afin de surmonter cette difficulté, *Zienkiewicz et al.* [83] proposent d'utiliser les coordonnées barycentriques comme fonctions polynomiales.

Nous devons choisir 9 termes polynomiaux pour construire  $\mathbf{P}$  et avoir une approximation qui couvre le plus de solutions possibles. En notant  $L_1, L_2$  et  $L_3$  ces coordonnées, et en posant

$$\mathbf{P} = [L_1, L_2, L_3, L_1L_2, L_2L_3, L_3L_1, L_1^2L_2, L_2^2L_3, L_3^2L_1]$$

qui contient les six termes quadratiques et trois des dix termes cubiques possibles, nous pouvons nous assurer que nous pouvons approximer n'importe quel type de fonction avec une continuité  $\mathbf{C}^1$ .

On note, de la même manière que dans la section précédente, les 9 degrés de liberté  $\underline{d}$  :

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} \underline{d}_i \\ \underline{d}_j \\ \underline{d}_k \end{bmatrix} \quad \text{où } \underline{d}_i = \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_i \\ (\frac{\partial w}{\partial y})_i \\ -(\frac{\partial w}{\partial x})_i \end{bmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

En exprimant de la même manière les 9 degrés de liberté que dans B.1.1 à partir du développement polynomiale  $w = \mathbf{P}\alpha$ , on peut écrire  $\underline{d}$  en fonction de 9 inconnues  $\alpha_i$  sous forme matricielle :

$$\underline{d} = \mathbf{C}\alpha. \quad (\text{B.14})$$

L'expression des  $\mathbf{N}_i$  est détaillée dans [83] et est donnée, avec ce choix de  $\mathbf{P}$ , par :

$$\mathbf{N}_i^T = \begin{bmatrix} 3L_i^2 - 2L_i^3 \\ L_i^2(b_j L_k - b_k L_j) + \frac{1}{2}(b_j - b_k)L_1 L_2 L_3 \\ L_i^2(c_j L_k - c_k L_j) + \frac{1}{2}(c_j - c_k)L_1 L_2 L_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

où

$$\begin{aligned} b_i &= y_j - y_k, \\ c_i &= x_k - x_j \end{aligned}$$

et pour une permutation cyclique des indices  $i, j, k$ . On rappelle que  $\mathbf{L}\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$  et

$$\underline{\mathbf{B}} = \mathbf{L}\nabla\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{1,xx} & \mathbf{N}_{2,xx} & \mathbf{N}_{3,xx} \\ \mathbf{N}_{1,yy} & \mathbf{N}_{2,yy} & \mathbf{N}_{3,yy} \\ 2\mathbf{N}_{1,xy} & 2\mathbf{N}_{2,xy} & 2\mathbf{N}_{3,xy} \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

avec la notation " $_{,xx}$ " qui signifie la dérivée seconde par rapport à  $x$ , etc.

Le calcul de la matrice  $\underline{\mathbf{B}}$  nécessite alors le calcul des dérivées secondes des fonctions de forme. Ceci peut être obtenu en utilisant la transformation suivante des coordonnées barycentriques en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{N}_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{N}_i}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{N}_i}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \mathbf{N}_i}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4\Delta^2} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{N}_i}{\partial L_1^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{N}_i}{\partial L_1 \partial L_2} & \frac{\partial^2 \mathbf{N}_i}{\partial L_1 \partial L_3} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{N}_i}{\partial L_2 \partial L_1} & \frac{\partial^2 \mathbf{N}_i}{\partial L_2^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{N}_i}{\partial L_2 \partial L_3} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{N}_i}{\partial L_3 \partial L_1} & \frac{\partial^2 \mathbf{N}_i}{\partial L_3 \partial L_2} & \frac{\partial^2 \mathbf{N}_i}{\partial L_3^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

où  $\Delta = \frac{1}{2}(b_1 c_2 - b_2 c_1)$ . D'où,

$$\mathbf{L}\nabla w = \mathbf{L}\nabla(\mathbf{P}\alpha) = \mathbf{Q}\alpha = \mathbf{Q}\mathbf{C}^{-1}\underline{d} \quad (\text{B.18})$$

avec  $\mathbf{Q}$  une matrice  $3 \times 9$  qui s'exprime en fonction de  $L_1, L_2$  et  $L_3$ .

D'autres méthodes ont été proposées par [83, 8, 21, 7, 72] pour calculer la matrice de rigidité.

## B.2 Validation des calculs de la matrice de rigidité et du second membre

On considère deux types de domaine, le carré  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  et le disque unité, discrétisés par des éléments finis DKT et DKQ. On souhaite vérifier la validité de l'implémentation de la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  présentée dans la section 2.3.1 pour ces deux types d'éléments, à travers le calcul de  $\mathbf{K}\underline{d}$  où les valeurs de  $\underline{d}$  sont générées à en utilisant des solutions analytiques. Ce calcul est ensuite comparé avec le calcul du vecteur du second membre  $\mathbf{F}$ , construit à l'aide de l'approche présentée dans la section 2.3.1. Ces vecteurs seront tracés en séparant les lignes associées à chaque degré de liberté  $w$ ,  $\theta_x$  et  $\theta_y$ . On rappelle que le calcul de  $\mathbf{F}$  est le même pour les deux approches, parce que la frontière est constituée par le même type d'élément fini (éléments 1-D à 2 nœuds et à 3 degrés de liberté par nœud).

### B.2.1 Domaine carré avec maillage uniforme

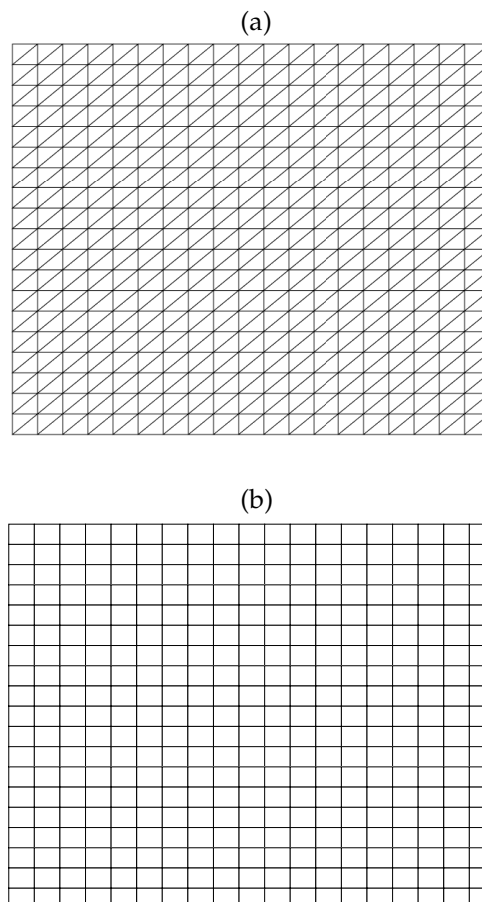


FIGURE B.1 – Domaines carrés discrétisés par des éléments finis DKT (a) et DKQ (b) avec un pas  $h = 1/20$ .

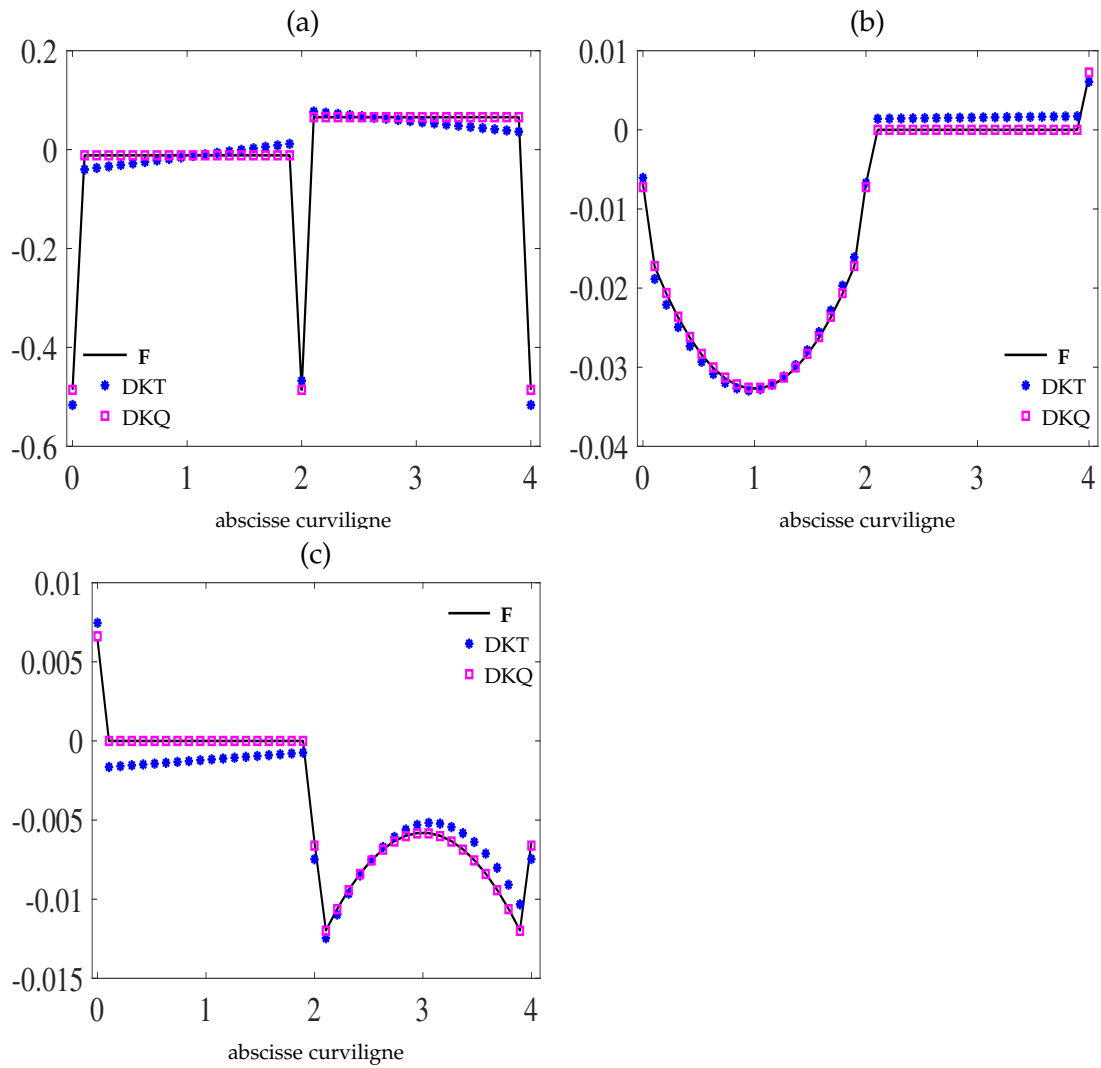


FIGURE B.2 – Représentations du vecteur  $\underline{K}_d$  et du vecteur du second membre  $\underline{F}$  pour chaque bloc de lignes associé aux degrés de liberté  $w$  (a),  $\theta_x$  (b) et  $\theta_y$  (c) pour la solution analytique  $\frac{1}{3}x^4 - x^2y^2$  et pour les deux maillages DKT et DKQ.

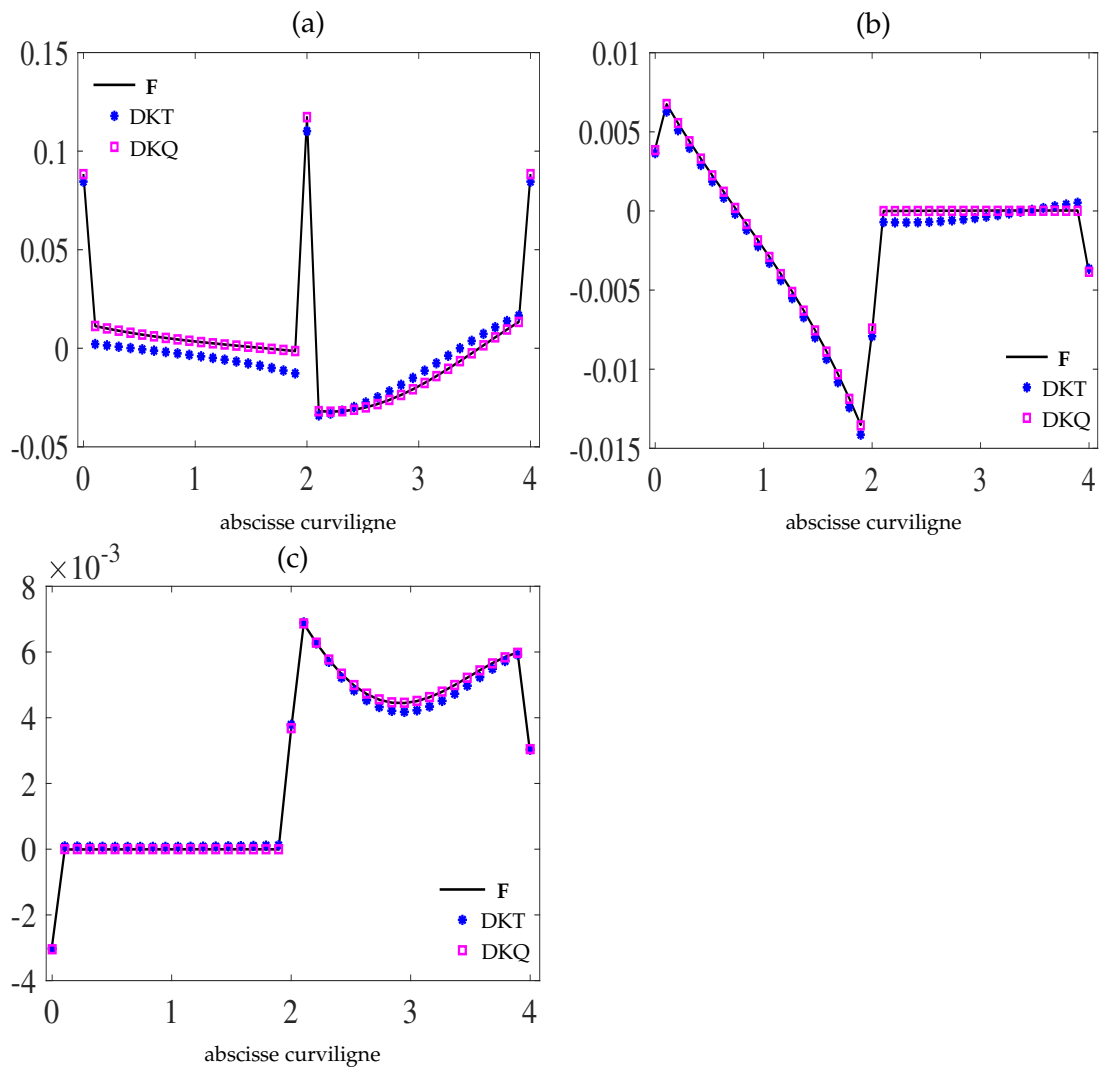


FIGURE B.3 – Représentations du vecteur  $\mathbf{Kd}$  et du vecteur du second membre  $\mathbf{F}$  tracés pour chaque bloc de lignes associé aux degrés de liberté  $w$  (a),  $\theta_x$  (b) et  $\theta_y$  (c) pour la solution analytique  $\frac{1}{2}x(\sin x \cosh y - \cos x \sinh y)$  et pour les deux maillages DKT et DKQ.



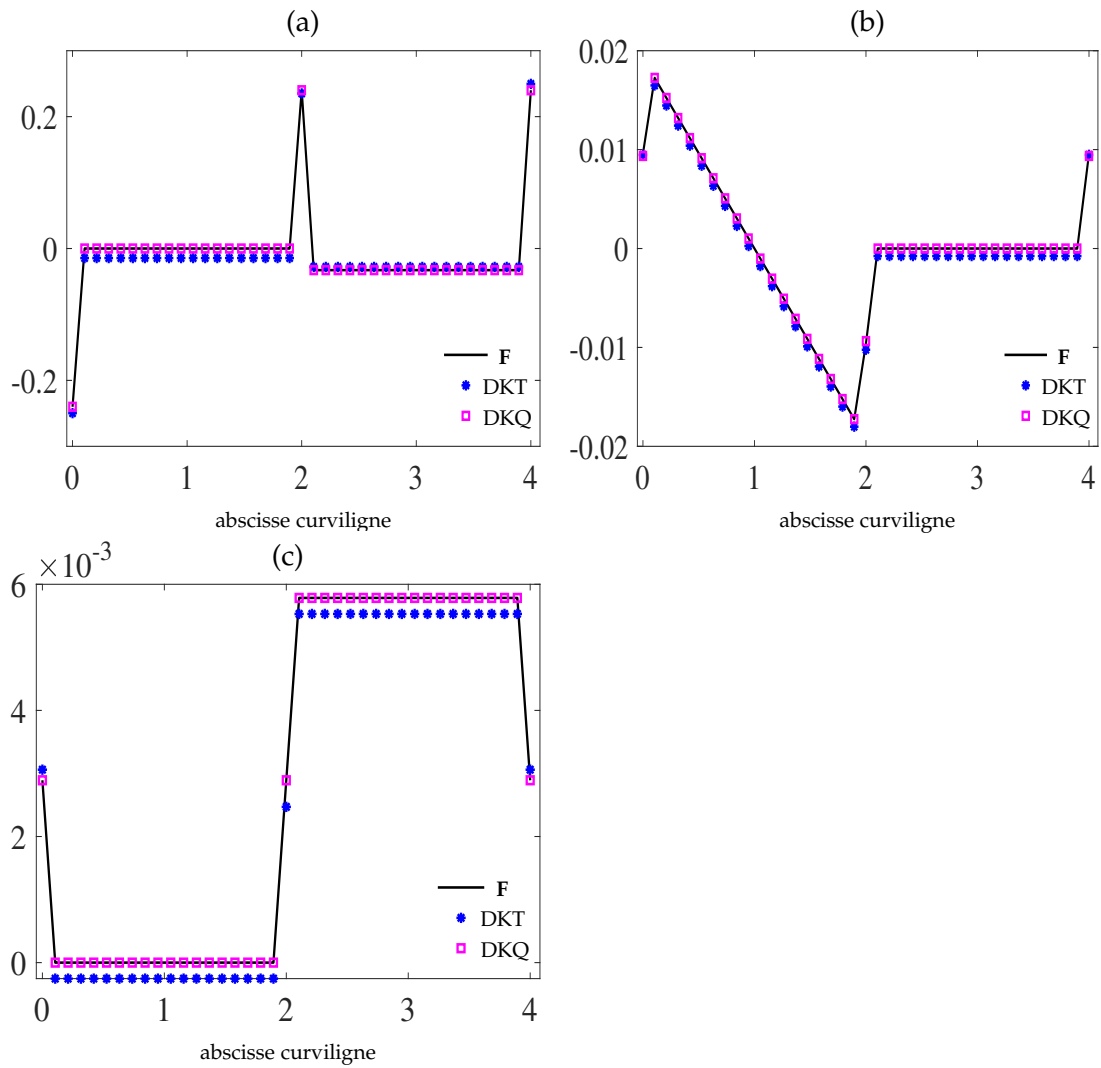


FIGURE B.4 – Représentations du vecteur  $\mathbf{K}\underline{d}$  et du vecteur du second membre  $\mathbf{F}$  tracés pour chaque bloc de lignes associé aux degrés de liberté  $w$  (a),  $\theta_x$  (b) et  $\theta_y$  (c) pour la solution analytique  $x^2y$  et pour les deux maillages DKT et DKQ.

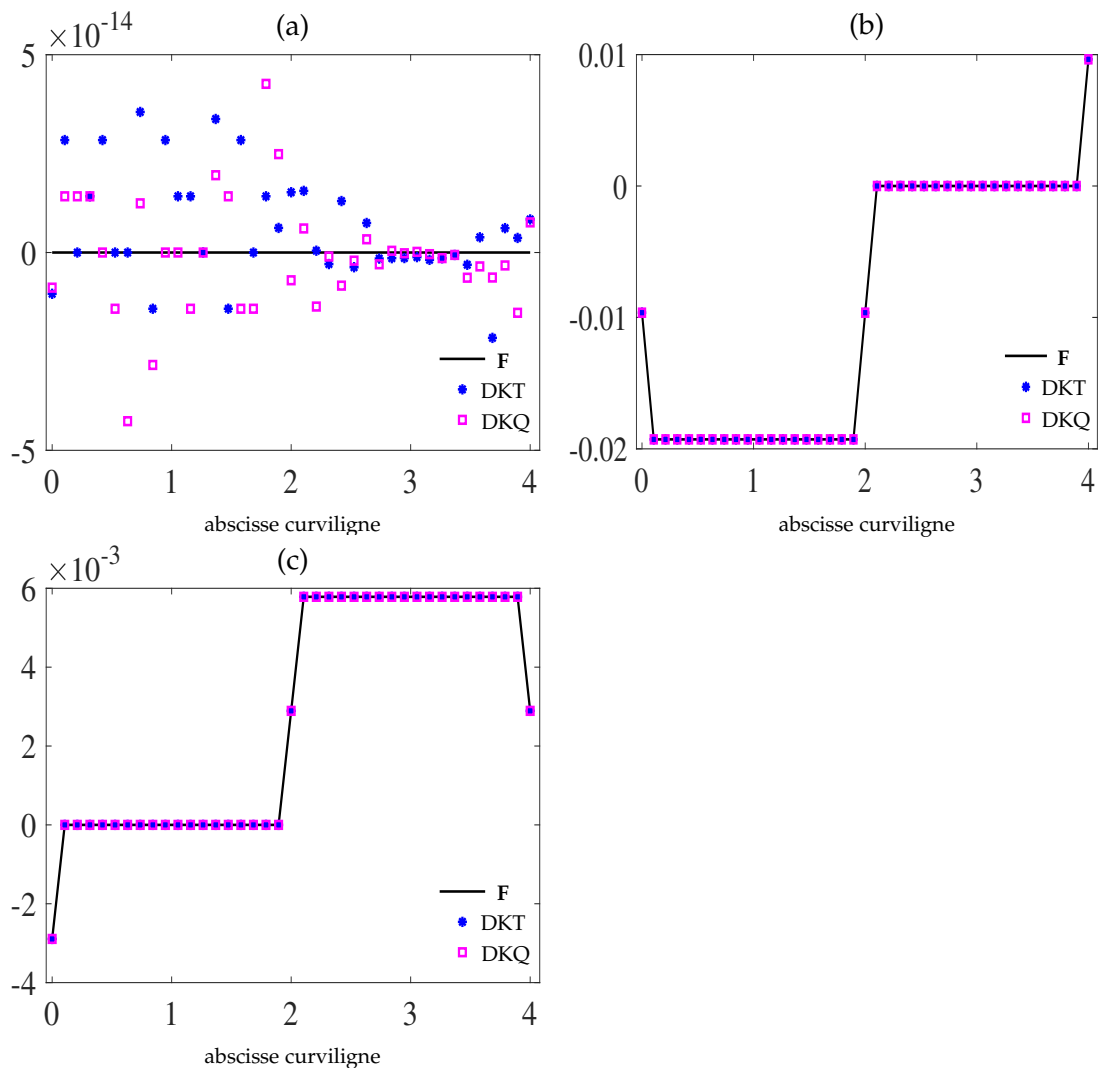


FIGURE B.5 – Représentations du vecteur  $\mathbf{K}\underline{d}$  et du vecteur du second membre  $\mathbf{F}$  tracés pour chaque bloc de lignes associé aux degrés de liberté  $w$  (a),  $\theta_x$  (b) et  $\theta_y$  (c) pour la solution analytique  $x^2$  et pour les deux maillages DKT et DKQ.

Nous remarquons que les calculs de  $\mathbf{K}\underline{d}$  et du vecteur du second membre  $\mathbf{F}$  coïncident avec la discrétisation par des éléments finis DKQ contrairement aux éléments DKT. Cet écart est d'autant plus visible lorsque la solution analytique utilisée est de degré important et implique des termes au second membre tels que  $M_{xy}$ ,  $Q_x$  ou  $Q_y$  non nuls.

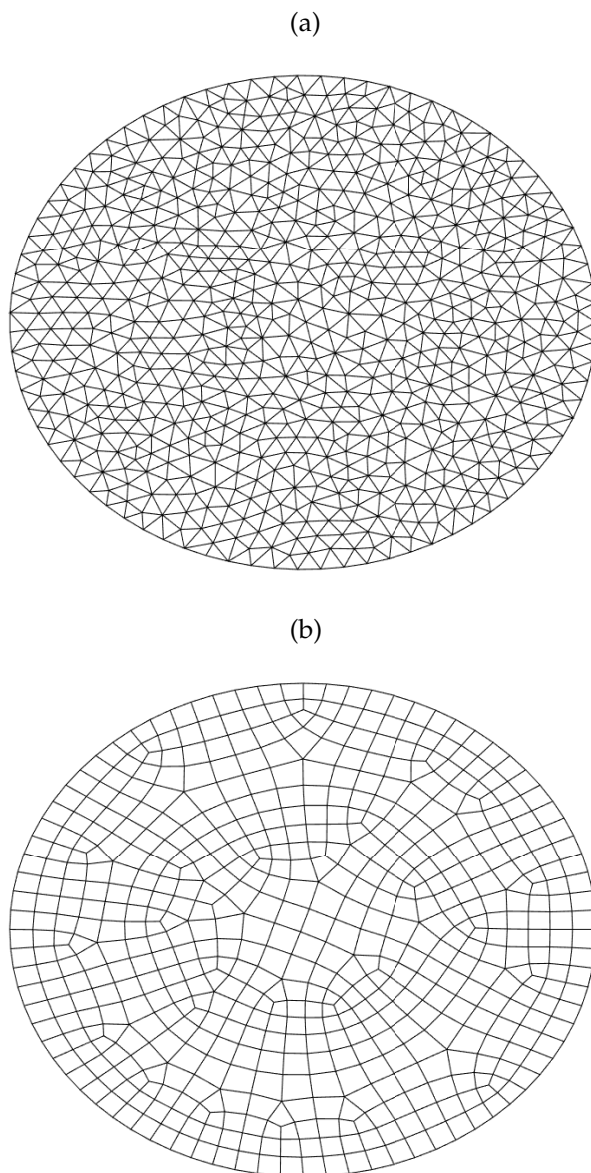
**B.2.2** Domaine circulaire

FIGURE B.6 – Domaines circulaire de type disque unité discrétisés par des éléments finis DKT (a) et DKQ (b) avec un pas  $h = 1/80$ .

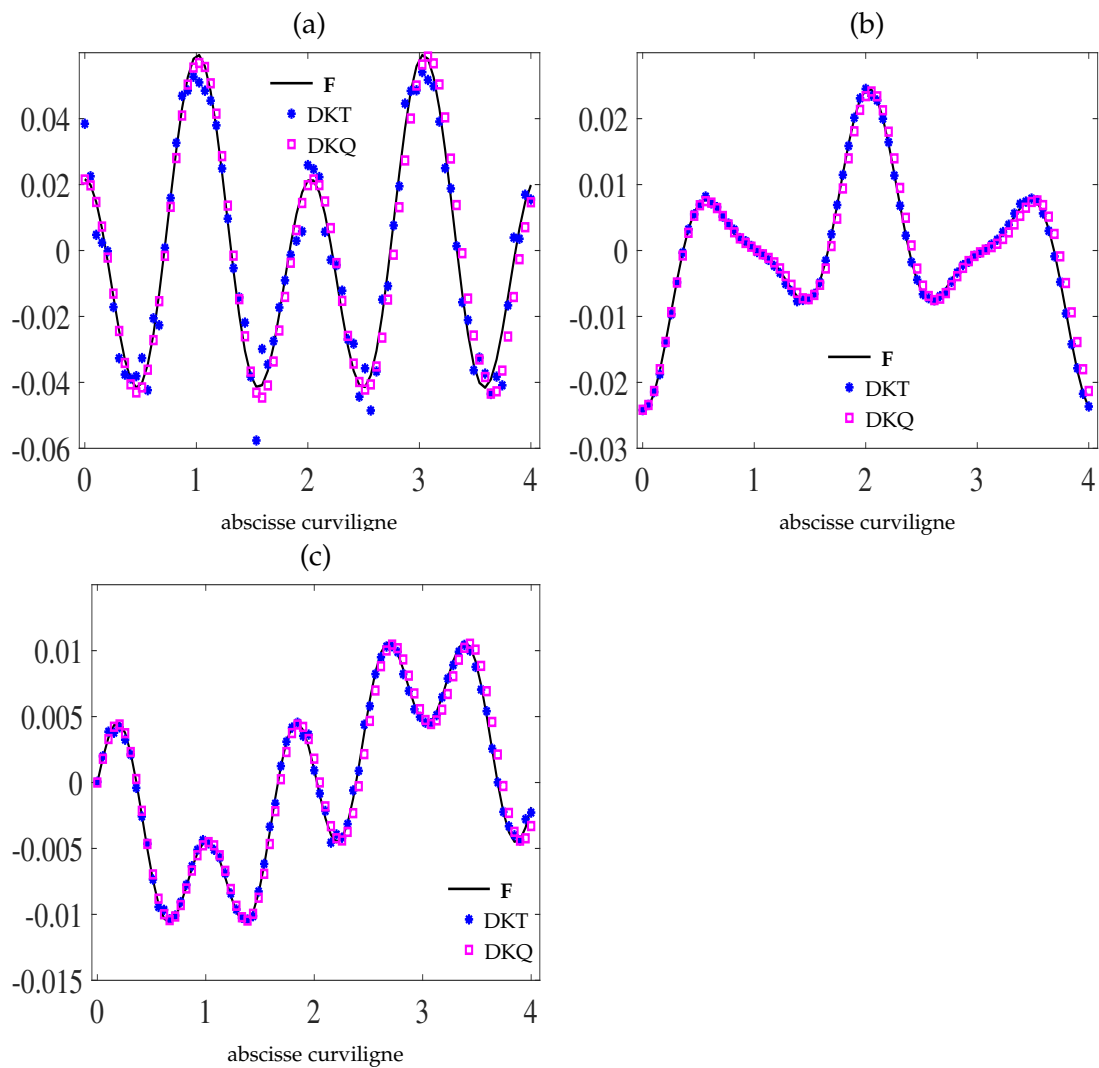


FIGURE B.7 – Représentations du vecteur  $\mathbf{K}\underline{d}$  et du vecteur du second membre  $\mathbf{F}$  tracés pour chaque bloc de lignes associé aux degrés de liberté  $w$  (a),  $\theta_x$  (b) et  $\theta_y$  (c) pour la solution analytique  $\frac{1}{3}x^4 - x^2y^2$  et pour les deux maillages DKT et DKQ.

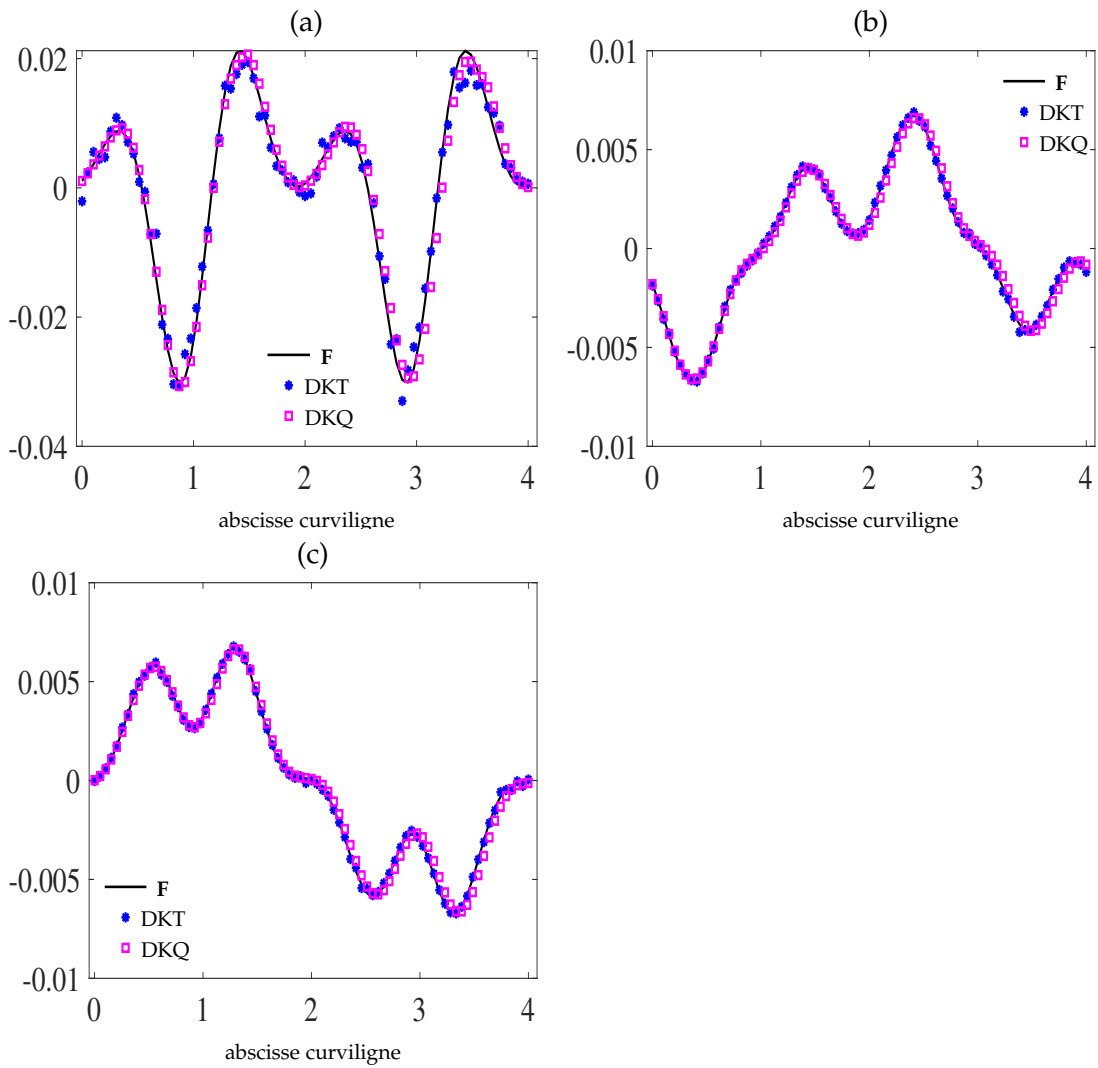


FIGURE B.8 – Représentations du vecteur  $\mathbf{K}\underline{d}$  et du vecteur du second membre  $\mathbf{F}$  tracés pour chaque bloc de lignes associé aux degrés de liberté  $w$  (a),  $\theta_x$  (b) et  $\theta_y$  (c) pour la solution analytique  $\frac{1}{2}x(\sin x \cosh y - \cos x \sinh y)$  et pour les deux maillages DKT et DKQ.

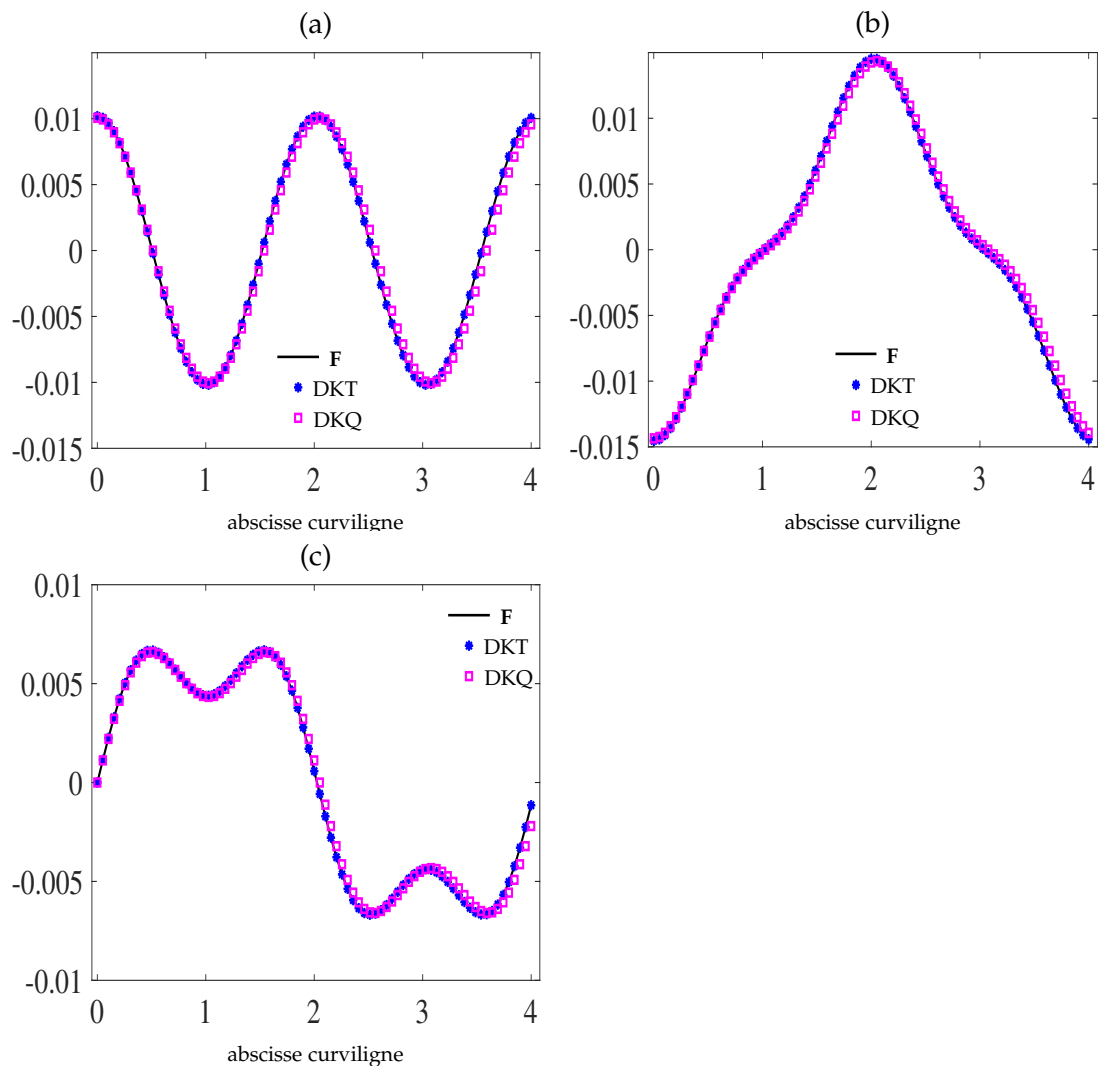


FIGURE B.9 – Représentations du vecteur  $\mathbf{K}\underline{d}$  et du vecteur du second membre  $\mathbf{F}$  tracés pour chaque bloc de lignes associé aux degrés de liberté  $w$  (a),  $\theta_x$  (b) et  $\theta_y$  (c) pour la solution analytique  $x^2$  et pour les deux maillages DKT et DKQ.

Dans le cas du disque, nous remarquons un écart entre les calculs de  $\mathbf{K}\underline{d}$  et du vecteur  $\mathbf{F}$  au niveau des termes liés au degré de liberté  $w$  pour le maillage DKT lorsque la solution analytique utilisée est de degré important et que les éléments DKQ sont plus précis. Toutefois, les calculs obtenus par ces deux éléments sont quasiment identiques que ceux du vecteur  $\mathbf{F}$  au niveau des lignes correspondant aux degrés de liberté  $\theta_x$  et  $\theta_y$ .

### B.3 Fonctions d'interpolation sur l'élément de référence

Les fonctions d'interpolation sur l'élément de référence, utilisées pour construire les éléments DK dans la partie 2.3.1, sont données par :

- pour l'élément triangulaire

$$[N_I] = \begin{bmatrix} 2(1 - \xi - \eta)(\frac{1}{2} - \xi - \eta) \\ \xi(2\xi - 1) \\ \eta(2\eta - 1) \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

$$[N_Q] = \begin{bmatrix} 4\xi(1 - \xi - \eta) \\ 4\xi\eta \\ 4\eta(1 - \xi - \eta) \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

- pour l'élément quadrangulaire

$$[N_I] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

$$[N_Q] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \\ \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2) \\ \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \\ \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2) \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

## Annexe C

# Résultats antérieurs obtenus avec la méthode de régularisation évanescence

La méthode de régularisation évanescence a connu par le passé certaines évolutions pour la résolution du problème de Cauchy associé à l'équation de Laplace. Celles-ci s'inscrivent dans le but d'améliorer la reconstruction de la dérivée normale lorsque la frontière du domaine contient des points anguleux. On retrouve d'abord la méthode d'ordre zéro qui est la version initiale présentée dans (*Delvare 2000* [28], *Cimetière et al. 2001* [26]). Une version, dite d'ordre un, a été introduite par *Delvare et al.* [25, 29]. Elle couple la détermination de la solution  $u$  du problème à celle de deux inconnues auxiliaires  $u_1$  et  $u_2$  qui s'avèrent coïncider avec les deux dérivées partielles de  $u$ , lorsque les données sont compatibles. Le problème d'ordre un fait appel à des données aux limites sur la partie connue de la frontière  $\Gamma_d$  qui doivent être obtenues à partir des seules données du problème initial. L'évaluation de ces informations complémentaires nécessite de dériver tangentiellement la donnée associée à la fonction deux fois et la donnée associée à la dérivée normale une fois. Ensuite, une version dite d'ordre un modifiée est introduite par *Delvare et al.* [31] (notée "new method" sur les Figures C.1 et C.2), qui reprend le principe de la méthode d'ordre un, mais qui ne nécessite pas l'évaluation numérique d'informations complémentaires sur  $\Gamma_d$ . Cette méthode repose sur l'utilisation de formulations faibles qui couplent les deux dérivées partielles d'une fonction harmonique, sans faire intervenir leurs dérivées normales.

Ces différentes versions ont été appliquées au problème de Cauchy associé à l'équation de Laplace :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \phi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ u_{,n} = \mu_d & \text{sur } \Gamma_d \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

et ont traité le cas du domaine carré  $[0, 1] \times [0, 1] \in \mathbb{R}^2$ , tel que la partie accessible de la frontière est donnée par les côtés adjacents  $y = 0$  et  $x = 1$ . Ce qui est identique au problème traité au chapitre 3 de cette thèse. Les reconstructions des conditions aux limites de ce problème de Cauchy par les différentes méthodes citées ci-dessus, sont données par les Figures C.1 C.2 C.3 C.4 C.5 et C.6, où différents types de données compatibles et bruitées ont été utilisées. Cependant, le bruitage a été porté uniquement selon une seule composante, la fonction  $u$  ou sa dérivée normale  $u_{,n}$ , à la fois pour



chaque simulation.

Nous remarquons que seule la méthode de régularisation évanescente d'ordre un modifié a réussi à reconstruire la dérivée normale et qu'elle est relativement stable vis-à-vis des données bruitées à niveau élevé, sachant qu'une seule composante des données a été bruitée. Cependant, elle n'a pas réussi à débruiter les données lorsque la composante associée à la dérivée normale  $u_{,n}$  est bruitée sur la partie  $\Gamma_d$ . Ainsi, en comparaison avec les résultats obtenus au chapitre 3, nous pouvons valider l'apport de notre stratégie proposée dans l'utilisation de la méthode de régularisation évanescente.

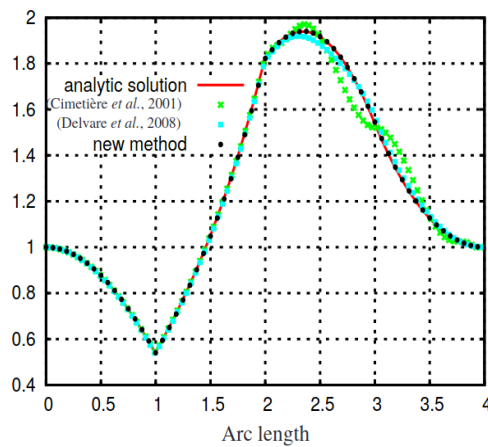


FIGURE C.1 – Reconstruction de  $u$  sur la frontière du domaine carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  par les différentes méthodes de régularisation évanescente, d'ordre zéro, d'ordre un et d'ordre un modifié avec des données compatibles (Figure extraite de [31]).

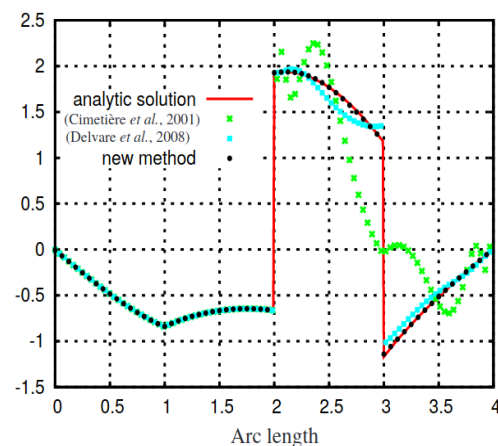


FIGURE C.2 – Reconstruction de  $u_{,n}$  sur la frontière du domaine carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  par les différentes méthodes de régularisation évanescente, d'ordre zéro, d'ordre un et d'ordre un modifié avec des données compatibles (Figure extraite de [31]).

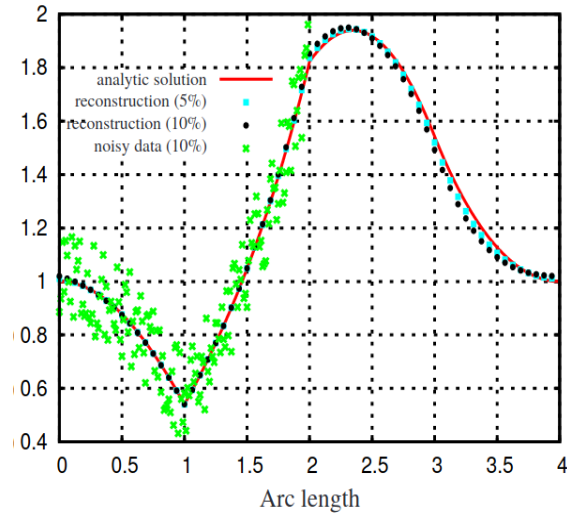


FIGURE C.3 – Reconstruction de  $u$  sur la frontière du domaine carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  par la méthode de régularisation évanescente d'ordre un modifié avec  $u$  bruitée (Figure extraite de [31]).

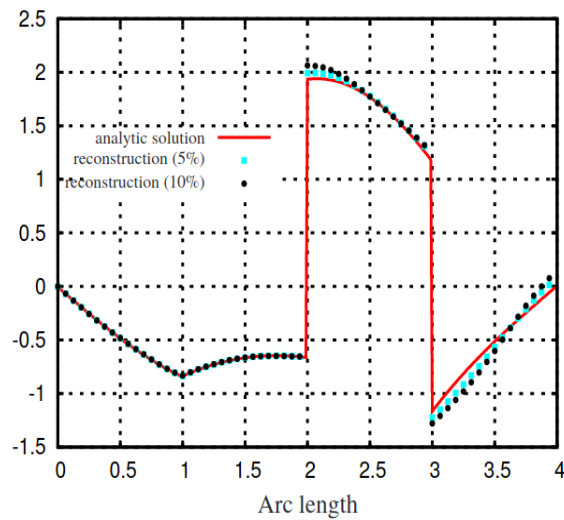


FIGURE C.4 – Reconstruction de  $u_n$  sur la frontière du domaine carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  par la méthode de régularisation évanescente d'ordre un modifié avec  $u$  bruitée (Figure extraite de [31]).

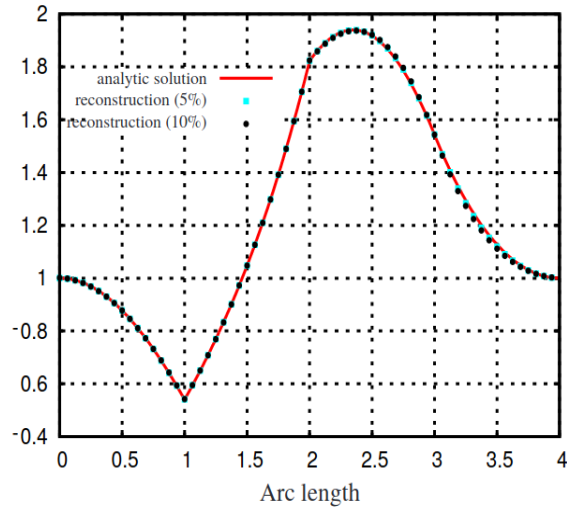


FIGURE C.5 – Reconstruction de  $u$  sur la frontière du domaine carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  par la méthode de régularisation évanescente d'ordre un modifié avec  $u_n$  bruitée (Figure extraite de [31]).

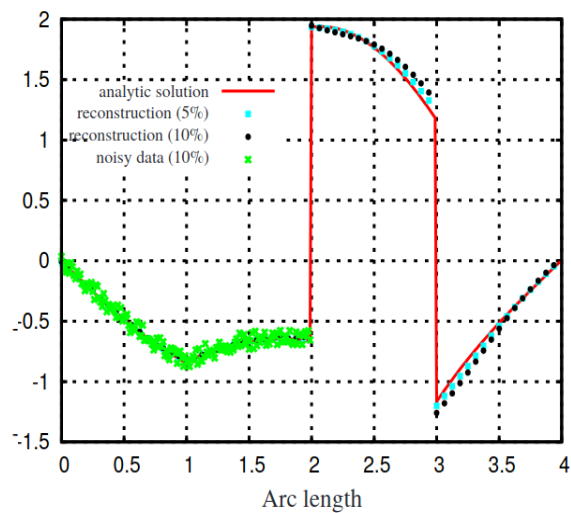


FIGURE C.6 – Reconstruction de  $u_n$  sur la frontière du domaine carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  par la méthode de régularisation évanescente d'ordre un modifié avec  $u_n$  bruitée (Figure extraite de [31]).

# Bibliographie

- [1] A. ADINI et R. W. CLOUGH. Analysis of plate bending by the finite element method. OCLC : 25844714. University of California, 1960.
- [2] S ANDRIEUX, T. N. BARANGER et A. B. ABDA. Solving Cauchy problems by minimizing an energy-like functional. *Inverse Problems* 22.1, 2006, 115–133. DOI : [10.1088/0266-5611/22/1/007](https://doi.org/10.1088/0266-5611/22/1/007).
- [3] S. ANDRIEUX, A. B. ABDA et T. N. BARANGER. Data completion via an energy error functional. *Comptes Rendus Mécanique* 333.2, 2005, 171–177. ISSN : 1631-0721. DOI : [10.1016/j.crme.2004.10.005](https://doi.org/10.1016/j.crme.2004.10.005). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631072104002281>.
- [4] S. ANDRIEUX et T. N. BARANGER. An energy error-based method for the resolution of the Cauchy problem in 3D linear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197.9, 2008, 902–920. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/j.cma.2007.08.022](https://doi.org/10.1016/j.cma.2007.08.022). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782507003416>.
- [5] M. A. ATAKHODZHAEV. Ill-Posed Internal Boundary Value Problems for the Biharmonic Equation. Berlin, Boston : De Gruyter, 2014. ISBN : 978-3-11-036414-9. DOI : [10.1515/9783110944815](https://doi.org/10.1515/9783110944815). URL : <https://www.degruyter.com/view/product/22593>.
- [6] T. BARANGER et S. ANDRIEUX. Constitutive law gap functionals for solving the Cauchy problem for linear elliptic PDE. *Applied Mathematics and Computation* 218.5, 2011, 1970–1989. ISSN : 0096-3003. DOI : [10.1016/j.amc.2011.07.009](https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.07.009). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300311009283>.
- [7] J.-L. BATOZ. An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 18.7, 1982, p. 1077-1089. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.1620180711>. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.1620180711>. URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620180711>.
- [8] J.-L. BATOZ, K.-J. BATHE et L.-W. HO. A study of three-node triangular plate bending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 15.12, 1980, p. 1771-1812. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.1620151205>. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.1620151205>. URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620151205>.

- [9] A. BELEGUNDU. Finite element methods for fluids : O. Pironneau John Wiley & Sons, New York and Masson, Paris, 1989, 205 pp. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 13.3, 1992, p. 311. ISSN : 0142-727X. DOI : [https://doi.org/10.1016/0142-727X\(92\)90046-C](https://doi.org/10.1016/0142-727X(92)90046-C). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0142727X9290046C>.
- [10] F. BEN BELGACEM et H. EL FEKIH. On Cauchy's problem : I. A variational Steklov–Poincaré theory. *Inverse Problems* 21, oct. 2005, p. 1915. DOI : [10.1088/0266-5611/21/6/008](https://doi.org/10.1088/0266-5611/21/6/008).
- [11] L. BOURGEOIS. A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation. *Inverse problems*, 2005. ISSN : 0266-5611.
- [12] B. BRANK, A. IBRAHIMBEGOVI et U. BOHINC. On Discrete-Kirchhoff Plate Finite Elements : Implementation and Discretization Error. *Advanced Structured Materials* 45, jan. 2015. DOI : [10.1007/978-3-319-02535-3\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-319-02535-3_6).
- [13] C. BREZINSKI. La méthode de Cholesky. *Revue d'histoire des mathématiques* 11.2, 2005, p. 205-238. URL : [http://www.numdam.org/item/RHM\\_2005\\_\\_11\\_2\\_205\\_0/](http://www.numdam.org/item/RHM_2005__11_2_205_0/).
- [14] L. CAILLÉ, F. DELVARE, L. MARIN et N. MICHAUX-LEBLOND. Fading regularization MFS algorithm for the Cauchy problem associated with the two-dimensional Helmholtz equation. *International Journal of Solids and Structures* 125, 2017, p. 122-133.
- [15] L. CAILLÉ, J.-L. HANUS, F. DELVARE et N. MICHAUX-LEBLOND. MFS fading regularization method for the identification of boundary conditions from partial elastic displacement field data. *European Journal of Computational Mechanics* 27.5-6, 2018, p. 508-539. DOI : [10.1080/17797179.2018.1560843](https://doi.org/10.1080/17797179.2018.1560843). eprint : <https://doi.org/10.1080/17797179.2018.1560843>. URL : <https://doi.org/10.1080/17797179.2018.1560843>.
- [16] L. CAILLÉ. "Méthodes de régularisation évanescence pour la complétion de données". Thèse de doct. Oct. 2018.
- [17] J. R. CANNON et M. M. CECCHI. Numerical Experiments on the Solution of Some Biharmonic Problems by Mathematical Programming Techniques. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 4.2, 1967, p. 147-154. ISSN : 00361429. URL : <http://www.jstor.org/stable/2949384>.
- [18] F. CAUBET, M. DAMBRINE et H. HARBRECHT. A new method for the data completion problem and application to obstacle detection. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 79.1, 2019. cited By 1, p. 415-435. DOI : [10.1137/18M1186071](https://doi.org/10.1137/18M1186071). URL : <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85063231229&doi=10.1137%2f18M1186071&partnerID=40&md5=dbd797be39ec9aa6ccf982723464f3a3>.
- [19] F. CAUBET et J. DARDÉ. A dual approach to Kohn-Vogelius regularization applied to data completion problem. *Inverse Problems* 36.6, 2020. cited By 1. DOI : [10.1088/1361-6420/ab7868](https://doi.org/10.1088/1361-6420/ab7868). URL : <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85086901724&doi=10.1088%2f1361-6420%2fab7868&partnerID=40&md5=2a50b6bdaa13c4e973b529ae4a333f09>.

- [20] F. CAUBET, J. DARDÉ et M. GODOY. On the data completion problem and the inverse obstacle problem with partial Cauchy data for Laplace's equation. *ESAIM: COCV* 25, 2019, p. 30. DOI : [10.1051/cocv/2017056](https://doi.org/10.1051/cocv/2017056). URL : <https://doi.org/10.1051/cocv/2017056>.
- [21] Y. K. CHEUNG, I. P. KING et O. C. ZIENKIEWICZ. Slab bridges with arbitrary shape and support conditions : A general method of analysis based on finite elements. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 40.1, 1968, p. 9-36. DOI : [10.1680/iicep.1968.32703](https://doi.org/10.1680/iicep.1968.32703). eprint : <https://doi.org/10.1680/iicep.1968.32703>. URL : <https://doi.org/10.1680/iicep.1968.32703>.
- [22] P. CIARLET. Basic error estimates for elliptic problems. T. 2. Handbook of Numerical Analysis. Elsevier, 1991, p. 17-351. DOI : [https://doi.org/10.1016/S1570-8659\(05\)80039-0](https://doi.org/10.1016/S1570-8659(05)80039-0). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1570865905800390>.
- [23] A. CIMETIÈRE, F. DELVARE, M. JAOUA et F. PONS. An inversion method for harmonic functions reconstruction. *International Journal of Thermal Sciences* 41.6, 2002, p. 509-516.
- [24] A. CIMETIÈRE, F. DELVARE et F. PONS. Une méthode inverse à régularisation évanescence. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics* 328.9, 2000, p. 639-644.
- [25] A. CIMETIÈRE, F. DELVARE et F. PONS. Une méthode inverse d'ordre un pour les problèmes de complétion de données. *Comptes rendus mécanique* 333.2, 2005, p. 123-126.
- [26] A CIMETIÈRE, F DELVARE, M JAOUA et F PONS. Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization. *Inverse Problems* 17.3, 2001, 553-570. DOI : [10.1088/0266-5611/17/3/313](https://doi.org/10.1088/0266-5611/17/3/313).
- [27] T. J. L. CLOUGH Ray W. Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plate. *Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio*, 1965, p. 515-545. URL : <http://contrails.iit.edu/reports/8574>.
- [28] F. DELVARE. "Une méthode inverse itérative à effet régularisant évanescence". Thèse de doct. Poitiers, 2000.
- [29] F. DELVARE et A. CIMETIÈRE. A first order method for the Cauchy problem for the Laplace equation using BEM. *Computational Mechanics* 41.6, mar. 2008, 789-796. ISSN : 1432-0924. DOI : [10.1007/s00466-007-0157-y](https://doi.org/10.1007/s00466-007-0157-y). URL : <https://doi.org/10.1007/s00466-007-0157-y>.
- [30] F. DELVARE, A. CIMETIÈRE, J.-L. HANUS et P. BAILLY. An iterative method for the Cauchy problem in linear elasticity with fading regularization effect. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199.49-52, 2010, p. 3336-3344.
- [31] F. DELVARE et A. CIMETIÈRE. A robust data completion method for two dimensional Cauchy problems associated with the Laplace equation. *European Journal of Computational Mechanics* 20.5-6, 2011, p. 309-340. DOI : [10.3166/ejcm.20.309-340](https://doi.org/10.3166/ejcm.20.309-340). eprint : <https://doi.org/10.3166/ejcm.20.309-340>. URL : <https://doi.org/10.3166/ejcm.20.309-340>.

- [32] G. S. DHATT. An efficient triangular shell element. *AIAA Journal* 8.11, 1970, p. 2100-2102. DOI : [10.2514/3.6068](https://doi.org/10.2514/3.6068). eprint : <https://doi.org/10.2514/3.6068>. URL : <https://doi.org/10.2514/3.6068>.
- [33] A. EYIMI. "Sur un problème inverse de type Cauchy en théorie des plaques minces élastiques". Thèse de doct. Université de Poitiers, 2011.
- [34] L. GILEVA, E. KAREPOVA et V. SHAYDUROV. The application of special Hermite finite elements coupled with collocation to the 3D Poisson equation. *AIP Conference Proceedings* 2164.1, 2019, p. 110004. DOI : [10.1063/1.5130849](https://doi.org/10.1063/1.5130849). eprint : <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.5130849>. URL : <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.5130849>.
- [35] L. GILEVA, E. KAREPOVA et V. SHAYDUROV. New Hermite finite elements on rectangles. *AIP Conference Proceedings* 1773, 2016, p. 100005. DOI : [10.1063/1.4964999](https://doi.org/10.1063/1.4964999). eprint : <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.4964999>. URL : <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.4964999>.
- [36] L. GILEVA, E. KAREPOVA et V. SHAYDUROV. "The application of special Hermite finite elements coupled with collocation to the 3D Poisson equation". In : t. 2164. Oct. 2019, p. 110004. DOI : [10.1063/1.5130849](https://doi.org/10.1063/1.5130849).
- [37] P. GOULD. *Analysis of Shells and Plates*. Springer New York, 1989, p. 491. ISBN : 9781461237648.
- [38] B. I. G.P. BAZELEY Y.K. Cheung et O. ZIENKIEWICZ. Triangular elements in plate bending. Conforming and nonconforming solutions. *Proc. 1st Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*. 1965, p. 547-76.
- [39] B. I. G.P. BAZELEY Y.K. Cheung et O. ZIENKIEWICZ. Triangular elements in plate bending. Conforming and nonconforming solutions. *Proc. 1st Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*. 1966, p. 547-76.
- [40] J. HADAMARD. *Lectures on Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations*. Oxford University Press, 1923.
- [41] J. HADAMARD et P. M. MORSE. Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations. *Physics Today* 6.8, 1953, p. 18-18. DOI : [10.1063/1.3061337](https://doi.org/10.1063/1.3061337). URL : <https://doi.org/10.1063/1.3061337>.
- [42] E. R. HENRY et J. HOFRICHTER. Singular value decomposition : Application to analysis of experimental data. In : *Numerical Computer Methods*. T. 210. Methods in Enzymology. ISSN : 0076-6879. Academic Press, 1992, 129-192. DOI : [10.1016/0076-6879\(92\)10010-B](https://doi.org/10.1016/0076-6879(92)10010-B). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/007668799210010B>.
- [43] E. HOLMGREN. Ueber Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen. *Översigt Vetensk. Akad.Handlingar*, 1901. Chap. 58, p. 91-105.
- [44] A. IBRAHIMBEGOVIĆ. Quadrilateral finite elements for analysis of thick and thin plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 110.3, 1993, p. 195-209. ISSN : 0045-7825. DOI : [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(93\)90160-Y](https://doi.org/10.1016/0045-7825(93)90160-Y). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/004578259390160Y>.

- [45] D. B. INGHAM et M. A. KELMANSON. Boundary integral equation analyses of singular, potential, and biharmonic problems. T. 7. Springer Science & Business Media, 2012.
- [46] B. IRONS. Numerical integration applied to finite element methods. *Conf. on Use of Digital Computers in Structural Engineering*, 1965.
- [47] D. JERISON et C. E. KENIG. The Inhomogeneous Dirichlet Problem in Lipschitz Domains. *Journal of Functional Analysis* 130.1, 1995, p. 161-219. ISSN : 0022-1236. DOI : <https://doi.org/10.1006/jfan.1995.1067>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022123685710671>.
- [48] M. KARKON et M. REZAIEE-PAJAND. A quadrilateral plate bending element based on deformation modes. *Applied Mathematical Modelling* 41, 2017, p. 618-629. ISSN : 0307-904X. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.09.007>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X16304772>.
- [49] F KIKUCHI. On a finite element scheme based on the discrete Kirchhoff assumption. *Numer. Math*, 1975, 211–231. DOI : <https://doi.org/10.1007/BF01436593>. URL : <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01436593>.
- [50] G. KIRCHHOFF. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 1850.40, 1850, p. 51-88. DOI : [doi:10.1515/crll.1850.40.51](https://doi.org/10.1515/crll.1850.40.51). URL : <https://doi.org/10.1515/crll.1850.40.51>.
- [51] G. G. KIRCHHOFF et W. W. WIEN. Vorlesungen über mechanik. Leipzig, B. G. Teubner, 1897. URL : <http://archive.org/details/vorlesungenberm04kircoog>.
- [52] M. V. KLIBANOV et F. SANTOSA. A Computational Quasi-Reversibility Method for Cauchy Problems for Laplace's Equation. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 51.6, 1991, p. 1653-1675. DOI : [10.1137/0151085](https://doi.org/10.1137/0151085). eprint : <https://doi.org/10.1137/0151085>. URL : <https://doi.org/10.1137/0151085>.
- [53] V. KUPRADZE et M. ALEKSIDZE. The method of functional equations for the approximate solution of certain boundary value problems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* 4.4, 1964, p. 82-126.
- [54] J. LAGNESE et J.-L. LIONS. Modelling Analysis and Control of Thin Plates. Masson, 1988.
- [55] R. LATTÈS et J.-L. LIONS. Méthode de quasi-reversibilité et applications. Dunod, 1967.
- [56] D. LESNIC, L. ELLIOTT, D. B. INGHAM et A. ZEB. A numerical method for an inverse biharmonic problem. *Inverse Problems in Engineering* 7.5, 1999, p. 409-431. DOI : [10.1080/174159799088027705](https://doi.org/10.1080/174159799088027705). eprint : <https://doi.org/10.1080/174159799088027705>. URL : <https://doi.org/10.1080/174159799088027705>.
- [57] D. LESNIC et A. ZEB. The method of fundamental solutions for an inverse internal boundary value problem for the Biharmonic equation. *International Journal of Computational Methods* 06.04, 2009, p. 557-567. DOI : [10.1142/S0219876209001991](https://doi.org/10.1142/S0219876209001991). eprint : <https://doi.org/10.1142/S0219876209001991>. URL : <https://doi.org/10.1142/S0219876209001991>.



- [58] D. LESNIC, L. ELLIOTT, D. B. INGHAM et A. ZEB. "An inverse problem for slow viscous incompressible flows". In : *The 3rd International Conference on Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice, Port Ludlow, Washington, USA, ASME paper ME06*. URL : <https://www.me.ua.edu/3icipe/FinalPapers/me06.pdf>.
- [59] J. LIONS. Optimal control of systems governed by partial differential equations. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1971. ISBN : 9783540051152.
- [60] C.-S. LIU. Solving the Inverse Problems of Laplace Equation to Determine the Robin Coefficient/Cracks' Position Inside a Disk. *Cmes-computer Modeling in Engineering & Sciences* 40, 2009, p. 1-28.
- [61] A. E. H. LOVE et G. H. DARWIN. XVI. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. (A.)* 179, 1888, p. 491-546. DOI : [10 . 1098 / rsta . 1888 . 0016](https://doi.org/10.1098/rsta.1888.0016). eprint : <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rsta.1888.0016>. URL : <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rsta.1888.0016>.
- [62] L. MARIN et D. LESNIC. The method of fundamental solutions for inverse boundary value problems associated with the two-dimensional biharmonic equation. *Mathematical and Computer Modelling* 42.3-4, 2005, p. 261-278.
- [63] R. MELOSH. Structural Analysis of Solids. *Journal of the Structural Division* 89, 1963, p. 205-248.
- [64] R. D. MINDLIN. Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates. *Journal of Applied Mechanics* 18.1, avr. 1951, p. 31-38. ISSN : 0021-8936. DOI : [10 . 1115 / 1 . 4010217](https://doi.org/10.1115/1.4010217). eprint : [https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article-pdf/18/1/31/6718891/31\\_1.pdf](https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article-pdf/18/1/31/6718891/31_1.pdf). URL : <https://doi.org/10.1115/1.4010217>.
- [65] R. C. MITTAL et A. AL-KURDI. LU-decomposition and numerical structure for solving large sparse nonsymmetric linear systems. *Computers & Mathematics with Applications* 43.1, jan. 2002, 131-155. ISSN : 0898-1221. DOI : [10 . 1016 / S0898 - 1221 \(01\) 00279 - 6](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(01)00279-6). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122101002796>.
- [66] S. NICAISE. Regularity of the solutions of elliptic systems in polyhedral domains. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin* 4, mai 1997. DOI : [10.36045/bbms/1105733256](https://doi.org/10.36045/bbms/1105733256).
- [67] O. OZENDA et E. G. VIRGA. On the Kirchhoff-Love Hypothesis (Revised and Vindicated). *Journal of Elasticity* 143.2, 2021, p. 359-384. ISSN : 1573-2681. DOI : [10 . 1007 / s10659 - 021 - 09819 - 7](https://doi.org/10.1007/s10659-021-09819-7). URL : <https://doi.org/10.1007/s10659-021-09819-7>.
- [68] S. POISSON. Mémoire sur l'équilibre et mouvement des corps élastiques. T. 8. OCLC : 22885091. Paris : L'Académie des sciences, 1828, p. 357-571.

- [69] E. REISSNER. The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates. *Journal of Applied Mechanics* 12.2, mar. 1945, A69-A77. ISSN : 0021-8936. DOI : 10.1115/1.4009435. eprint : [https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article-pdf/12/2/A69/6658371/a69\\\_1.pdf](https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article-pdf/12/2/A69/6658371/a69\_1.pdf). URL : <https://doi.org/10.1115/1.4009435>.
- [70] R. RISCHETTE, T. N. BARANGER et S. ANDRIEUX. Regularization of the noisy Cauchy problem solution approximated by an energy-like method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 95.4, 2013, 271–287. DOI : 10.1002/nme.4501. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.4501>. URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.4501>.
- [71] V. RUAS. Hermite finite elements for second order boundary value problems with sharp gradient discontinuities. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 246, 2013. Fifth International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering (ACOMEN 2011), p. 234-242. ISSN : 0377-0427. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cam.2012.08.027>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042712003494>.
- [72] S. S. SALIBA. “Implementação computacional e análise crítica de elementos finitos de placas”. Thèse de doct. Universidade Federal de Minas Gerais, 2007. URL : <http://hdl.handle.net/1843/LMCA-75XLRB>.
- [73] L. J. SEGERLIND. Applied finite element analysis. T. 316. Wiley New York, 1976.
- [74] N. SHINOZAKI, M. SIBUYA et K. TANABE. Numerical algorithms for the Moore-Penrose inverse of a matrix : direct methods. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 24.1, 1972, p. 193-203.
- [75] G. STRANG et G. J. FIX. An Analysis of the Finite Element Method. *Prentice-Hall*, 1973.
- [76] R. L. TAYLOR, J. C. SIMO, O. C. ZIENKIEWICZ et A. C. H. CHAN. The patch test—a condition for assessing FEM convergence. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 22.1, 1986. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.1620220105>, 39–62. ISSN : 1097-0207. DOI : 10.1002/nme.1620220105. URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620220105>.
- [77] A. TIKHONOV et V. ARSENIN. Solution of ill-posed problems. John Wiley et Sons, Inc, 1977.
- [78] S. TIMOSHENKO, S. TIMOSHENKO et S. WOINOWSKY-KRIEGER. Theory of Plates and Shells. Engineering Mechanics series. McGraw-Hill, 1959. ISBN : 9780070647794. URL : [https://books.google.fr/books?id=gfo\\\_AQAAIAAJ](https://books.google.fr/books?id=gfo\_AQAAIAAJ).
- [79] J. TORRES, A. SAMARTÍN, V. ARROYO et J. D. del VALLE. A C1 finite element family for Kirchhoff plate bending. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 23.11, 1986, p. 2005-2029. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.1620231104>. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.1620231104>. URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620231104>.

- [80] H. W. TURNBULL et A. C. AITKEN. An Introduction to the Theory of Canonical Matrices. *Nature* 130, 1932, p. 867-867.
- [81] J. YAN et J. HICKEN. An inverse problem formulation of the immersed-boundary method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 92.9, 2020. cited By 0, p. 1037-1057. DOI : [10.1002/flid.4816](https://doi.org/10.1002/flid.4816). URL : <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85079119013&doi=10.1002%2ffld.4816&partnerID=40&md5=c935d9de046d1ed033afb9c2a455fc14>.
- [82] A. ZEB, L. ELLIOTT, D. B. INGHAM et D. LESNIC. A comparison of different methods to solve inverse biharmonic boundary value problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 45.12, 1999, p. 1791-1806. DOI : [10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990830\)45:123.0.CO;2-Z](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990830)45:123.0.CO;2-Z).
- [83] O ZIENKIEWICZ et R. TAYLOR. The Finite Element Method, Volume 2 : Solid Mechanics. Jan. 2000, p. 476.
- [84] O. C. ZIENKIEWICZ, R. L. TAYLOR et J. Z. ZHU. The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals. In : *The Finite Element Method : its Basis and Fundamentals*. Seventh Edition. Oxford : Butterworth-Heinemann, 2013. ISBN : 978-1-85617-633-0. DOI : [10.1016/B978-1-85617-633-0.00019-8](https://doi.org/10.1016/B978-1-85617-633-0.00019-8). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9781856176330000198>.