



HAL
open science

Contributions à la modélisation et simulation multi-échelle de problèmes en lien avec la Fabrication Additive par Fusion laser sur lit de poudre

Romain Ruysen

► **To cite this version:**

Romain Ruysen. Contributions à la modélisation et simulation multi-échelle de problèmes en lien avec la Fabrication Additive par Fusion laser sur lit de poudre. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université Paris-Saclay, 2021. Français. NNT : 2021UPAST011 . tel-03527126

HAL Id: tel-03527126

<https://theses.hal.science/tel-03527126v1>

Submitted on 15 Jan 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Contributions à la modélisation et simulation multi-échelle de problèmes en lien avec la Fabrication Additive par Fusion laser sur lit de poudre

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay

École doctorale n° 579, Sciences Mécaniques et
Énergétiques, Matériaux et Géosciences (SMEMAG)
Spécialité de doctorat: Génie Mécanique
Unité de recherche: Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, CNRS,
Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux, 91190,
Gif-sur-Yvette, France
Réfèrent: CentraleSupélec

**Thèse présentée et soutenue à Paris-Saclay,
le 15 Janvier 2021, par**

Romain RUYSSSEN

Composition du jury:

Aziz Hamdouni Professeur, Université de La Rochelle (Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur pour l'Environnement)	Président
David Dureisseix Professeur, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures)	Rapporteur & examinateur
Hamid Zahrouni Professeur, Université de Lorraine (Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux)	Rapporteur & examinateur
Ludovic Chamoïn Professeur, Ecole Normale Supérieure Paris-Saclay (Lab- oratoire de Mécanique et Technologie)	Examinateur
Slaheddine Frikha Ingénieur de recherche, ESI-Group	Examinateur
Hachmi Ben Dhia Professeur, Ecole CentraleSupélec (Laboratoire de Mé- canique des Sols, Structures et Matériaux)	Directeur de thèse

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Hachmi Ben Dhia, pour m'avoir donné l'opportunité de travailler sur ce sujet, pour sa grande disponibilité, pédagogie et générosité. J'ai pu, à son contact, apprendre énormément.

Ensuite je souhaite remercier les membres de mon jury, en commençant par Aziz Hamdouni pour avoir accepté d'en être le président, David Dureisseix et Hamid Zahrouni pour avoir accepté de rapporter ces travaux et finalement Ludovic Chamoin et Slaheddine Frikha pour toutes leurs questions et remarques pertinentes.

Ces travaux ont été menés au laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux de l'École CentraleSupélec, je tiens donc à remercier chacun de ses membres, pour leur accueil, conseils et bienveillance.

Mes remerciements vont aussi à mes compagnons de galère Paul-Baptiste Rubio et Guillaume Rousseau qui m'ont aidé à supporter ces années parisiennes avec beaucoup de rigolades. Merci aussi aux doctorants que j'ai pu rencontrer au cours de cette thèse, pour leur aide et pour l'ensemble des moments passés ensemble : Lúcio De Abreu Corrêa, Luciano de Carvalho Paludo, Raphaël Cettour, Ahmed Sridi, Khalil Abben, Alfonso Panunzio, Filippo Gatti, Hélène Moustacas, Michael Darche, Martin Colvez, Michail Korres, Sara Touhami et la liste est encore longue...

Je remercie particulièrement Christina pour son support et dévouement quotidien, en particulier durant ces derniers mois difficiles.

Enfin, un grand merci à mes parents et mon frère, pour m'avoir soutenu et encouragé pendant toutes ces années.

Table des matières

Introduction	10
1 Modélisations du procédé de Fusion Laser sur Lit de Poudre (FLLP) et simulations numériques	21
1.1 Introduction	23
1.2 Etat de l'art de la simulation macroscopique du procédé de Selective Laser Melting (SLM)	24
1.2.1 Aperçu des physiques impliquées et de leur couplage	24
1.2.2 Dérivation d'un modèle thermique macroscopique « représentatif » de la Fabrication Additive (FA)	26
1.3 Aperçu bibliographique de méthodes d'approximation numériques pour la FA	36
1.3.1 Méthodes numériques pour la problématique thermique macroscopique	36
1.3.2 Méthodes Itératives Globales-Locales Non-Invasives (IGLNI)	41
1.3.3 Méthodes de réduction de modèle	42
1.4 Le cadre Arlequin	44
1.4.1 Généralités et différentes applications du cadre Arlequin	44
1.4.2 Formulation du problème dans le cadre Arlequin	45
1.5 Conclusion	46
2 Une nouvelle stratégie multi-échelle	49
2.1 Introduction	51
2.2 Développement du modèle macroscopique additif	51
2.2.1 Modélisation de l'aspect additif	52
2.2.2 Formulation du problème thermique additif avec changement de phase sur $\Omega_N \times I_N$	53
2.2.3 Formulation du problème thermique additif dans le cadre Arlequin	58
2.3 Schéma de résolution numérique	61
2.3.1 Discrétisation spatiale du problème	61
2.3.2 Algorithme de résolution	61
2.3.3 Une stratégie multi-échelle pour le procédé FLLP	67
2.4 Résultats numériques de simulation	73
2.4.1 Illustration de la stratégie	73
2.4.2 Comparaison avec une méthode issue de la bibliographie	75
2.4.3 Vers la réduction de modèle	78
2.5 Conclusions	83

3 Méth. de Décomp. de Dom. compatible avec recouvrement	85
3.1 Introduction	87
3.2 Présentation des problèmes tests	87
3.2.1 Problème thermique stationnaire	87
3.2.2 Problème thermique instationnaire	89
3.2.3 Caractéristiques mathématiques du problème thermique instationnaire	89
3.2.4 Troisième problème modèle : mécanique	91
3.3 Form. des prob. par des méth. de Décomp. de Dom., avec et sans recouvrement	93
3.3.1 Formulations hybrides duales des trois problèmes décomposés en deux sous-domaines (sans recouvrement)	93
3.3.2 Formulation Arlequin des trois problèmes décomposés en deux sous-domaines (avec recouvrement)	97
3.3.3 Analyse de la stabilité de la formulation Arlequin du problème (\mathcal{P}_{ti})	100
3.4 Résolution par la Méthode FETI	101
3.5 Résultats et comparaisons numériques	104
3.6 Méthode de couplage volumique « compatible »	113
3.6.1 Principe et première mise en œuvre de la méthode de couplage : première approche « compatible »	113
3.6.2 Expérimentation numérique sur l'homogénéité de l'opérateur de couplage H^1	127
3.6.3 Extension au cas de maillages quelconques	128
3.7 Conclusion	132
4 Stratégie GL volumique non-invasive	133
4.1 Introduction	135
4.2 Bref aperçu des méthodes précurseurs aux méthodes IGLNI	135
4.2.1 Méthodes de Schwarz	135
4.2.2 Méthode Itérative Globale-Locale de Whitcomb	139
4.3 Méthodes GL itératives et non-invasives : couplage volumique	141
4.3.1 Rappel du principe des méthodes IGLNI	141
4.3.2 Extension au raccord volumique	145
4.4 Tests et résultats numériques	147
4.5 Conclusion	154
5 Investigations sur l'utilisation de la réduction de modèle	155
5.1 Introduction	157
5.2 Introduction de la méthode Proper Generalized Decomposition (PGD) et première application	158
5.2.1 Principes de la PGD (pour un problème de Poisson)	158
5.2.2 Idée d'amélioration	162
5.2.3 Approximation et test numérique	164
5.3 Application au procédé SLM	171
5.3.1 Problème thermique avec une source immobile	173
5.3.2 Source thermique en mouvement	181
5.3.3 Introduction locale de la méthode PGD	187
5.4 Conclusion	198
Conclusions et perspectives	200

A Annexes	203
A.1 Annexes : Chapitre 3	204
A.1.1 Algorithmes de Gradient Conjugué (GC)	204
A.1.2 Annexe : Méthode de Décomposition de Domaine compatible avec recouvrement	208
A.1.3 Annexe : Expérimentation numérique	214
A.2 Annexes : Chapitre 5	215
A.2.1 Algèbre tensorielle	215
A.2.2 Inversion du complément de Schur spatio-temporel	215
Bibliographie	219

Nomenclature

Notations Mathématiques

Ω ensemble ouvert de \mathbb{R}^d avec $d = 1, 2$ ou 3 .

$\partial\Omega$ frontière du domaine Ω

$\complement\Omega$ Complémentaire de l'ensemble Ω dans \mathbb{R}^d

$E|_{\Omega}$ restriction des fonctions de l'espace fonctionnel E au domaine Ω

$\mathcal{C}^k(\Omega)$ espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω (k entier ≥ 0)

E' dual topologique de l'espace E

$L^p(\Omega; E)$ espace de Lebesgue de norme p , sur Ω , à valeur dans E

$H^m(\Omega; E)$ espace de Sobolev d'ordre m , de norme 2, sur Ω , à valeur dans E

$L^p(\Omega)$ espace $L^p(\Omega; \mathbb{R})$

$H^m(\Omega)$ espace $H^m(\Omega; \mathbb{R})$

$(\cdot, \cdot)_E$ produit scalaire naturel sur l'espace E

$(\cdot, \cdot)_{m,\Omega}$ produit scalaire sur l'espace $H^m(\Omega)$

$\|\cdot\|_E$ norme associée au produit scalaire $(\cdot, \cdot)_E$

$\|\cdot\|_{m,\Omega}$ norme associée au produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{m,\Omega}$

\cdot produit tensoriel simple contracté

$:$ produit tensoriel doublement contracté

\otimes produit tensoriel extérieur

\mathcal{I} Matrice identité

A^{-1} Inverse de la matrice A

A^\dagger Pseudo-inverse de la matrice A

A^T Transposé de la matrice A

$M_{I,J}(\mathbb{R})$ Matrice réelle de taille $I \times J$

$M_I(\mathbb{R})$ Matrice réelle carrée de taille $I \times I$

Quantités Physiques

k Conductivité thermique

c_p	Capacité thermique à pression constante
d	Coefficient de diffusion
E_c	Energie cinétique macroscopique du système considéré
H	Enthalpie
E	Energie du système considéré
E_p	Energie potentielle du système considéré
Q	Chaleur ou transfert thermique
ϕ	Flux de chaleur
ρ	Masse volumique
S	Système thermodynamique considéré
W	Travail des forces extérieures au système considéré
T	Champ de température

Introduction

La maîtrise de la Fabrication Additive (FA) de structures ou objets solides représente un enjeu majeur dans le domaine de la production industrielle. En effet, la FA ouvre, par sa nature « haute couture », des perspectives inédites à nos capacités d'imagination de réalisation d'objets aux propriétés originales. De ce fait, la FA est vécue comme une nouvelle révolution industrielle¹. Cependant, de nombreux progrès sont encore nécessaires pour atteindre cette maîtrise.

Contexte

Le procédé de FA voit naissance avec le principe de Stéréolithographie, une technique dite de prototypage rapide, permettant de fabriquer des objets solides à partir d'un modèle numérique par superposition de tranches fines de matière. Sa première application fut le procédé de Photo-polymérisation et le nom de StereoLithography Apparatus (SLA) lui a été donné. D'après [1], la paternité du SLA revient à Jean Claude André, Olivier De Witte et Alain Le Méhauté, trois français, qui ont déposé un brevet en Juillet 1984, quasi-concomitamment à Chuck W. Hull, un américain, qui déposa un brevet sur le même procédé en Août 1984. Depuis, un grand nombre de procédés dérivés ont vu le jour. Ils sont généralement classés en fonction du principe physique d'addition de matière. Nous en comptons aujourd'hui au moins sept catégories (voir [1] et les références citées pour plus de détails). C'est en regroupant cet ensemble de procédés sous leur principe commun d'ajout de matière qu'est né le terme FA et dont la définition est, d'après la norme ISO 52900, la suivante :

Définition: Fabrication Additive

Procédé consistant à assembler des matériaux pour fabriquer des pièces à partir de données de modèles en 3D, en général couche après couche, à l'inverse des méthodes de fabrication soustractive (usinage, ...) et bien différemment de la fabrication par mise en forme (emboutissage, laminage, ...).

Par ce principe d'additivité de matière, la FA jouit d'une liberté inégalée dans le processus de construction de la pièce, lui permettant de générer des formes extrêmement complexes avec, en fonction du procédé, plus ou moins de précision. Ainsi, elle a rendu possible la fabrication concrète de pièces conçues par des méthodes de l'Optimisation Topologique [2], voir par exemple la Figure 1. Ceci explique l'engouement qu'elle a suscité surtout dans les domaines du transport (Ferroviaire, Aéronautique, Nautique ...).



FIGURE 1 – Deux pièce exposées par le fabricant de machine *Concept Laser* au Salon du Bourget 2015.

Un graphique qui montre l'engouement mondial que suscite la FA est celui de l'évolution de son marché au cours du temps, (cf. Figure 2). Celui-ci, d'après les estimations de la société de conseil SmarTech Analysis, serait de 2020 à 2027 multiplié par trois.

1. <https://www.economist.com/special-report/2012/04/21/a-third-industrial-revolution/>

2. <https://www.smartechanalysis.com/reports/2019-additive-manufacturing-market-outlook/>

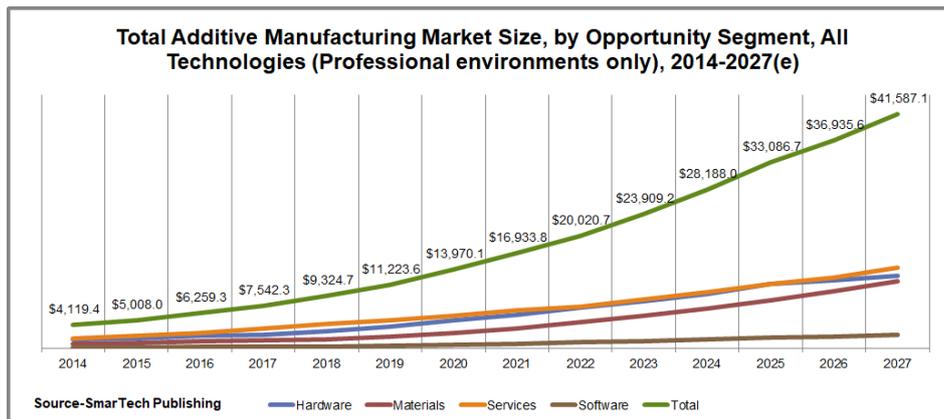


FIGURE 2 – Evolution du marché de la Fabrication Additive d’après l’étude de 2019² de la société de conseil SmarTech Analysis.

C’est dans le secteur industriel qui construit des pièces métalliques où la FA se voit porter un intérêt grandissant comme le montre l’évolution quasi-exponentielle du nombre de machines FA vendues au cours des dernières années (voir la Figure 3).

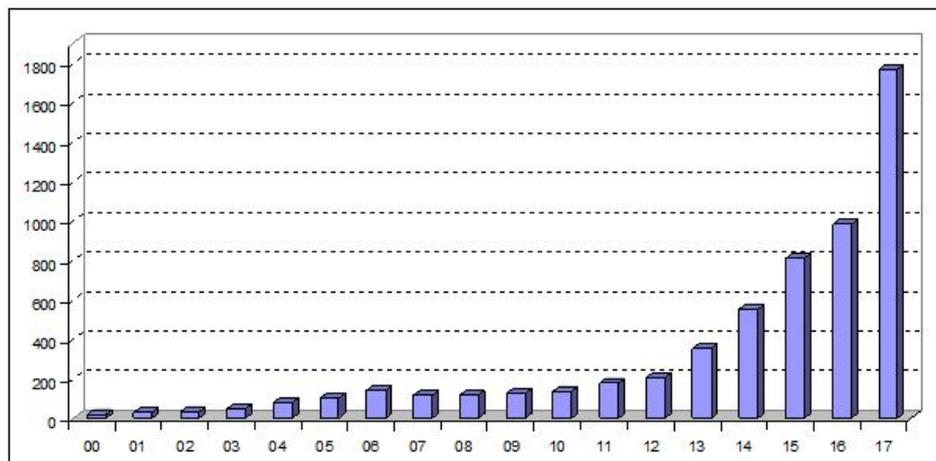


FIGURE 3 – Evolution du nombre de vente de machine de FA pour les métaux au cours des dernières années d’après le rapport de 2018³ de la société de conseil Wohlers Associates.

Principe général

Le principe général de la FA se divise globalement en cinq étapes comme le montre la Figure 4. A partir d’un modèle CAO, un maillage de la pièce est créé, généralement sous format STL. Ce maillage est utilisé pour définir l’ensemble des paramètres du processus de fabrication. La meilleure orientation de la pièce est choisie, son nombre de couche et leur épaisseur, les trajectoire de la source de chaleur, les supports... Une fois la pièce créée, elle est achevée dans une étape de finition.

Pour préciser, les procédés pour pièces métalliques usent de deux modalités différentes :

- la FA Directe où la matière, sous forme de billes, est injectée dans la buse qui laisse passer la

3. <http://wohlersassociates.com/2018report.htm>

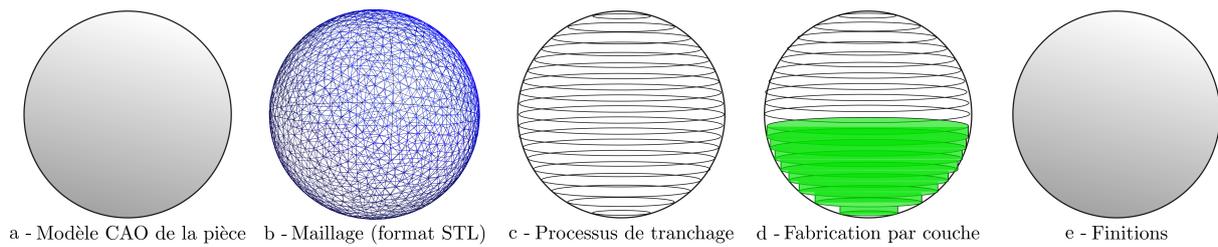


FIGURE 4 – Principe général de la FA d'après [1].

source de chaleur (laser ou faisceau d'électrons). Nous trouvons dans cette catégorie le procédé de Fusion Laser par Projection de Poudre (FLPP) (Direct Laser Deposition, en anglais) ;

- la FA par Sélection où la matière toujours sous forme de billes, est étalée par couche et la source de chaleur fait fondre les zones nécessaires à la formation de la pièce, avec les procédés de Fusion Laser sur Lit de Poudre (FLPP) (Selective Laser Melting (SLM), en anglais) utilisant des lasers et Fusion par faisceau d'électrons (Electron Beam Melting (EBM), en anglais). Nous renvoyons à [3] pour plus de détail sur la FA métallique.

Deux procédés classiques

Dans la construction des pièces (cf. Figure 4 d) les procédés de type Sélection jouissent d'une capacité de précision plus importante que les procédés de Projection. De fait plus les caractéristiques géométriques indiquées dans le Tableau 1 sont petites plus la pièce fabriquée est de meilleure qualité.

Caractéristiques	procédé de SLM	procédé de Fusion Laser par Projection de Poudre (FLPP)
Épaisseur de couche	60 – 150 μm	100 – 800 μm
Largeur de cordon/dépôt	$\sim 100 \mu m$	0.6 – 2.4 mm
Diamètre du laser	$\sim 70 \mu m$	$\sim 1.5 mm$

TABLE 1 – Comparaison des grandeurs caractéristiques des procédés de SLM et de FLPP.

A ce titre le procédé de FLPP permet d'atteindre une précision de l'ordre du millimètre alors que celle du procédé SLM, peut-être proche de la cinquantaine de micromètres. C'est la raison pour laquelle ce dernier est le procédé le plus utilisé actuellement [1], notamment chez les industriels, et aussi **la raison pour laquelle nous avons choisi de nous y intéresser dans cette thèse**. Donnons en ici une description.

Description fonctionnelle du procédé SLM

Le procédé SLM consiste à faire fondre progressivement de fines couches de poudre métallique en utilisant une source de chaleur intense, induite par un laser, en suivant trois étapes principales décrites dans ce qui suit (voir également la Figure 5).

- Une fine couche de poudre est déposée par un rouleau ou un racloir sur le plateau de fabrication.
- Cette couche est fondue par un laser mobile, suivant une trajectoire prédéfinie. Ce laser induisant une forte source de chaleur, transforme localement et progressivement la poudre en phase liquide passant, si nous considérons un alliage, par une phase pâteuse (*mushy*, en anglais) qui, par refroidissement se transforme en phase solide.
- Le piston du plateau de fabrication s'abaisse de l'épaisseur d'une couche pendant que celui de la réserve de poudre s'élève de cette épaisseur.

Ces trois étapes sont réitérées jusqu'à l'obtention de la pièce désirée.

Avant que ce procédé soit mis en œuvre pour l'élaboration d'une pièce, des paramètres physiques doivent être fixés :

- des paramètres machines tels que l'épaisseur de couche, méthode de d'étalement de la poudre, vitesse, diamètre et puissance du laser, température de préchauffage,
- des paramètres matériau avec le choix de l'alliage utilisé, morphologie, taille et densité des particules et enfin
- une stratégie de création avec le positionnement de la pièce, nombre et trajectoires des lasers (ce qui va avoir des effets sur le cyclage thermique de la matière et ainsi sur ses caractéristiques mécaniques (microstructure, contraintes résiduelles)).

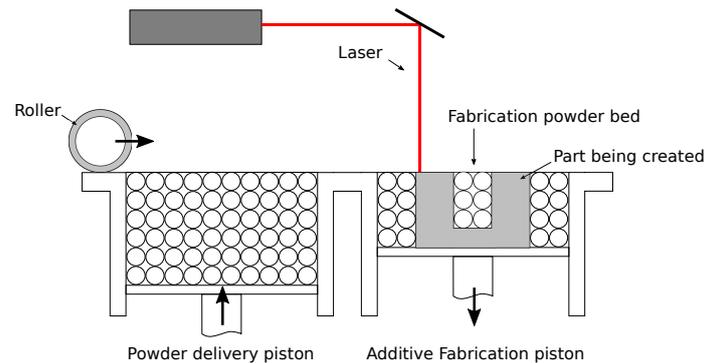


FIGURE 5 – Procédé de Fusion Laser sur Lit de Poudre (FLLP).

Le réglage de ces nombreux paramètres physiques n'est pas sans difficultés et un certain nombre de défauts de fabrication peuvent apparaître.

Défauts de fabrication par SLM

Plusieurs études ont fait apparaître différents défauts qui peuvent apparaître dans les pièces-fabriquées Additivement (-FA) par SLM. Dans [4] ces défauts sont classés en trois catégories :

- *Défaut de Porosité :*

De taille autour de $100 \mu\text{m}$ et de forme sphérique comme le montre la Figure 6, des porosités peuvent se former par piégeage de gaz présent dans la poudre ou formé, évaporation de certains constituants, mauvais écoulement du bain liquide entre deux couches, etc...



FIGURE 6 – Photo de porosités sphériques présentes dans une pièce formée par SLM [5].

- *Défaut de Fissuration :*

D'après [3], il existe différents mécanismes (dépendants du matériau employé), d'initiation de fissure dans les pièces-FA. Pendant le procédé la vitesse de refroidissement thermique peut atteindre les 10^8 K/s. Cela induit des gradients thermiques intenses. La dilatation thermique combinés avec de fortes contraintes résiduelles et la présence de porosité peuvent initier des fissures dans la pièce en cours de fabrication.

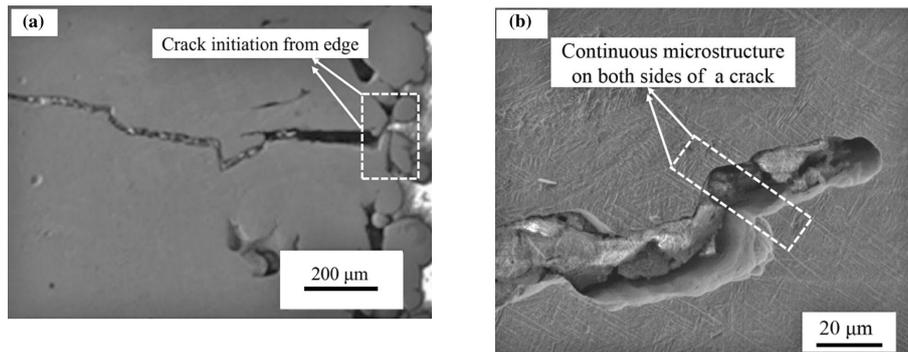


FIGURE 7 – Photo de fissures dans une pièce formée par SLM [5].

- *Manque de fusion (Lack of Fusion (LOF)) :*

Ils peuvent induire deux types de défaut, soit un mauvais "collage" entre deux couches à cause d'un métal pas suffisamment fondu lors de l'étape de refroidissement (cf. Figure 8) voir même la présence de poudre non-fondue.

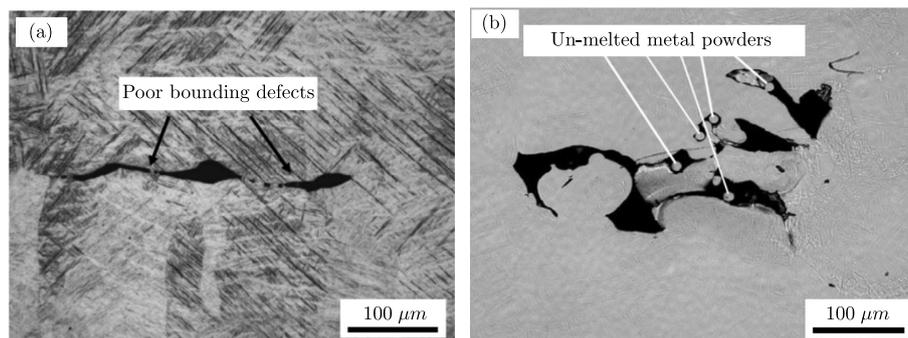


FIGURE 8 – Photo de défaut dus à des manques de fusion dans une pièce formée par SLM [5].

Ces défauts d'inter-couche peuvent graduellement se propager et former d'autres problèmes d'inter-couches dans la pièce-FA. Ce manque de lien entre les couches peut aller jusqu'au délaminage, c'est à dire à la décohésion partielle de deux couches superposées. La Figure 9 montre un exemple.



FIGURE 9 – Photo du phénomène de délaminage pour une pièce.

D'autres types de défauts existent (voir par exemple [6] pour un descriptif détaillé).

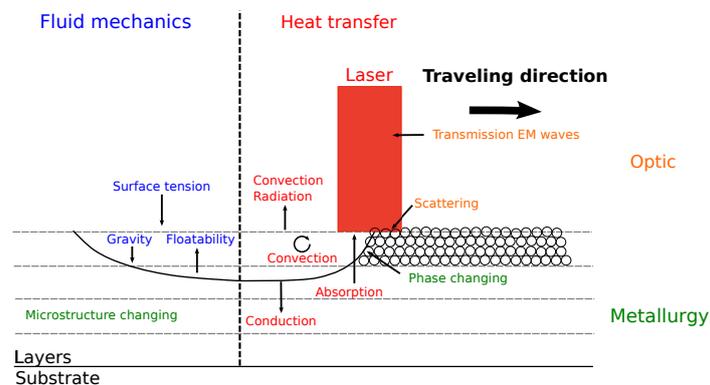


FIGURE 10 – Illustration non-exhaustive des différents phénomènes physiques mis en jeu.

Fusion de la poudre et effets annexes

Lorsque le laser frappe de manière très localisée les particules métalliques, des interactions de type électromagnétiques apparaissent entre ses rayons et les particules. Ces interactions sont de natures diverses avec des phénomènes d'absorption, de dispersion ou de transmission des rayons (voir la Figure 11).

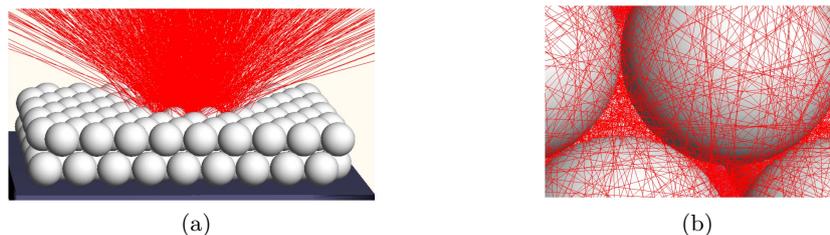


FIGURE 11 – Réflexion des rayons du laser sur un lit de particules métalliques d'après [7].

Absorbant une partie de l'énergie portée par les rayons laser, les particules de poudre s'échauffent et fondent par changement de phase pour former un bain liquide. Plusieurs phénomènes contribuent à la formation du bain liquide : i) les particules se rapprochent par le phénomène de coalescence dû aux effets des tensions de surface présentes en leur sein. cf. Figure 12. ii) Le métal fluide se met en mouvement sous le phénomène de convection induit par de forts gradients thermiques (cf. la Figure 13).

D'autres phénomènes influencent la forme du bain comme les mécanismes de tension de surface, d'évaporation, l'effet Marangoni... Cet ensemble de phénomènes rend les écoulements au sein du bain liquide très turbulents. Or la stabilité de celui-ci est une condition nécessaire à l'obtention de pièces de qualité minimale,

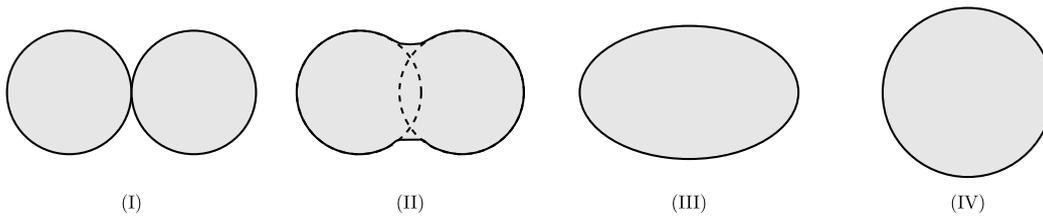


FIGURE 12 – Illustration du phénomène de coalescence entre deux particules de métal liquide.

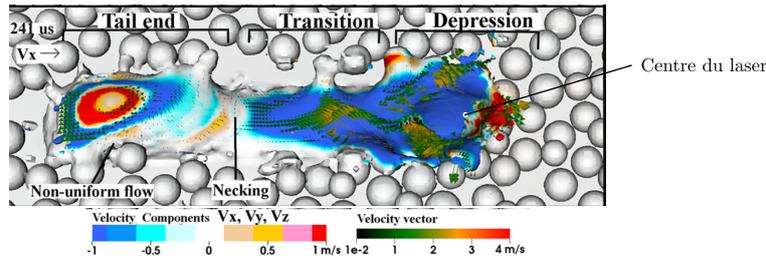


FIGURE 13 – Simulation des écoulements dans le bain liquide d'après [8].

i.e., sans trou ou porosité (cf. [3]).

Derrière ces phénomènes physiques, d'autres paramètres influent, comme la disposition des billes de la dernière couche étalée qui dépend de la stratégie et du matériel employé (rouleau, racloir...) mais également de la disposition des particules des couches précédentes ainsi que de la forme de la pièce en cours de construction.

Phase de solidification

Lorsque le laser s'éloigne, la queue du bain liquide se solidifie, ajoutant ainsi un incrément de matière solide à la pièce-FA. En solidifiant, la microstructure du matériau se forme en fonction des alliages utilisés, des gradients thermiques présents et de la vitesse de refroidissement.

Cyclage thermique et cohésion inter-couche

Lorsque que le laser repasse à proximité des zones densifiées pour balayer la couche de poudre suivante, un nouveau cyclage thermique est induit sur des couches déjà additionnée et peut liquéfier et modifier la microstructure.

Interaction laser/matière

En fonction de la puissance du laser et de sa vitesse, le métal fondu peut aussi s'évaporer, formant un nuage métallique qui interagit avec les rayons du laser, diminuant ainsi l'énergie apportée aux particules de poudre par ce dernier. L'écoulement de ce nuage peut aussi avoir une influence sur les écoulements dans le bain liquide et donc sur les caractéristiques des matériaux solides formés.

Autres complexités du problème de pièce-FA

A la liste de toutes les difficultés mentionnées précédemment, nous pouvons ajouter d'autres formes de complexité du problème des pièces-FA par SLM. Mentionnons ici que ces problèmes sont **multi-physiques** (voir la Figure 10), **multi-échelles**, localement non-linéaires et irréguliers, pouvant présenter des discontinuités matière fortes et faibles ainsi que des changements permanents du domaine géométrique (par additions successives d'incrément de matière), des chargements localisés à fort gradient.

Intérêt et nécessité de la simulation numérique

Face à cette réalité, on ne peut clairement pas se contenter du seul recours à des pré-campagnes expérimentales pour concevoir des pièces-FA compliquées exploitant le potentiel du procédé de FA ; campagnes par ailleurs chronophages, coûteuses et parfois suivies de traitements (éventuellement thermiques) d'amélioration des propriétés de la pièce. De ces faits, un intérêt croissant s'est manifesté pour les contributions de la modélisation et simulation numérique de la fabrication de ces pièces, non pas pour remplacer, mais pour épauler et diminuer les pré-campagnes expérimentales, tout en apportant des éclairages nouveaux sur les phénomènes thermiques, métallurgiques et mécaniques (entre autres) dont la pièce-FA est le siège. À l'évidence les méthodes utilisées pour la simulation de tels procédés doivent être capables d'affronter les difficultés mentionnées plus haut.

En consultant la bibliographie, nous constatons qu'il existe un ensemble très grand de travaux de modélisation et de résolution numérique pour le procédé FLLP. Leurs domaines de modélisation tout comme le nombre de phénomènes physiques qu'elles mettent en jeu restent toutefois restreints par la précision souhaitée et par les limites actuelles des capacités des calculateurs. Ainsi les simulations sont généralement classées en fonction des méthodes numériques employées, notamment de ou des échelles d'analyse (voir les articles d'analyse bibliographique [9, 10]), échelles qui peuvent être (cf. Figure 14) **microscopique**, **mésoscopique** ou **macroscopique** :

- À l'échelle **Microscopique**, les simulations numériques se focalisent sur l'évolution de la microstructure lors du procédé avec la modélisation de la croissance des grains, de leurs formes et orientations. Ces simulations se limitent à des domaines de calcul de taille similaire à l'épaisseur d'une couche. Les méthodes numériques les plus utilisées se basent sur les méthodes des champs de phase (Phase Field Method), voir par exemple [11, 12].
- À l'échelle **Mésoscopique**, les simulations numériques cherchent à considérer chacun des grains de la poudre métallique individuellement afin d'étudier la formation du bain liquide, sa thermohydrodynamie, sa taille, sa stabilité et sa durée de vie. Ces simulations utilisent la Méthode Lattice Boltzmann (voir [13, 14]) ou la méthode des Volumes Finis couplée avec la Méthode du Volume de Fluide (voir par exemple [15, 16]) ou bien encore la Méthode Level Set (LSM) (voir par exemple [17]). Elles sont généralement limitées à des domaines de dimensions de l'ordre d'une passe de laser.

L'analyse mono-échelle à ces deux échelles de modélisation sont très utiles mais trop coûteuse en temps de calcul pour être adaptées à la simulation à l'échelle de la pièce.

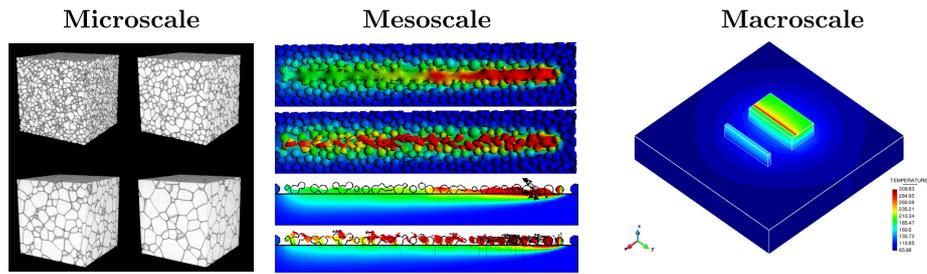


FIGURE 14 – Catégorisation des simulations numériques suivant leur échelle.

Dans le but de simuler la fabrication totale de la pièce-FA, des modèles **Macroscopiques** ont été développés dans le cadre de la théorie des milieux continus. Nous en donnerons un aperçu au Chapitre 1 de cette thèse.

Cahier des charges de nos travaux

Partant de ces constats et conscient de la quasi-impossibilité de traiter l'ensemble des difficultés dont nous venons de donner un aperçu les travaux de thèse, réalisés dans le cadre d'un Contrat Doctoral d'Excellence de l'Université Paris-Saclay et restitué dans ce document sont des contributions au développement de méthodologies numériques aptes à aider, de la manière la plus efficace possible, à la conception des pièces fabriquées additivement par le Procédé SLM ayant donc en toile de fond :

- (\mathcal{C}_1) - Les caractéristiques du problème thermique induit par le procédé SLM que nous rappelons ici : multi-physique, multi-échelle, localement non linéaire et irrégulier, changement permanent du domaine géométrique (portant le problème à résoudre par additions successives d'incrément matière), très fortes localisations des chargements induits par les lasers.
- (\mathcal{C}_2) - La compatibilité ou la coopération de nos méthodes avec les codes existants traitant de certains des phénomènes mentionnés.
- (\mathcal{C}_3) - L'enjeu majeur de la réduction des coûts des simulations du problème par les méthodes proposées.
- (\mathcal{C}_4) - Un bon degré de contrôle de la fiabilité de ces méthodes.
- (\mathcal{C}_5) - Retombées pour des problèmes de l'ingénieur autre que celui de la FA.

Bien entendu, les méthodes développées peuvent également être utilisées pour d'autres problèmes de l'ingénieur.

Ce travail est ainsi une première pierre à cet édifice. Nous nous y sommes intéressé pour l'essentiel à la modélisation et la simulation numérique de l'une des premières briques de ce projet, à savoir l'évolution thermique au sein de la pièce fabriquée additivement à l'échelle macroscopique, en essayant de fournir un cadre apportant une précision et des temps de calcul optimisés, permettant, par la suite de faciliter la descente à des échelles plus fines d'analyse comme l'illustre la Figure 15.

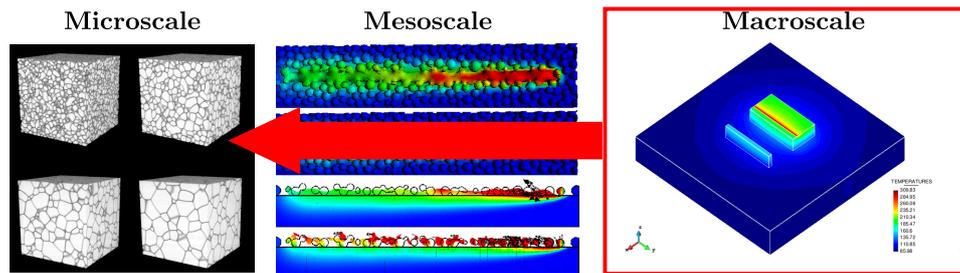


FIGURE 15 – Du macroscopique aux échelles plus fines.

Le manuscrit comporte cinq chapitres :

- Le Chapitre 1 aborde les différents domaines physiques jouant un rôle prépondérant dans la description macroscopique du scénario subi par la pièce-FA lors de sa fabrication ainsi que leurs différents couplages. Il précise les hypothèses permettant de découpler et d'isoler la modélisation thermique et dresse un bref aperçu de la diversité des modèles thermiques macroscopiques et méthodes numériques considérés dans la littérature. Puis, il réalise un tour d'horizon, non exhaustif, des méthodes numériques sur lesquelles ces travaux se basent pour répondre aux différents critères du Cahier Des Charges (CDC). Sa dernière partie motive l'utilisation du cadre multi-modèles et multi-échelles Arlequin comme base pour développer un cadre de modélisation du procédé SLM puis, décrit son principe ainsi que les différents ingrédients qui le composent.
- Le Chapitre 2 élabore une méthodologie multi-échelle basée sur le cadre Arlequin afin de traiter efficacement les difficultés liées à la simulation du problème thermique macroscopique transitoire.
- Le Chapitre 3 compare les vitesses de convergence du solveur Finite Element Tearing and Interconnecting (FETI) appliqué aux problèmes décomposée en sous-domaines avec des raccords de type surfacique ou volumique. Il propose ensuite une méthode de couplage compatible permettant de s'affranchir des « difficultés » liées à la mise en place du cadre Arlequin, tout en réduisant d'avantage le nombre d'itération de ce solveur.
- Le Chapitre 4 propose une extension des méthodes Itératives Globales-Locales Non-Invasives (IGLNI) au cas d'un couplage volumique de type Arlequin rendant possible la coopération et la communication entre des codes industriels ou de recherches, utilisant des méthodes numériques et simulant des physiques dont seul un raccord en volume est possible.
- Finalement le Chapitre 5 explore la possibilité, pour la problématique thermique de la simulation du procédé SLM, d'utiliser localement, dans le cadre Arlequin, une méthode de réduction de modèle : la méthode PGD, permettant de réduire les coûts numériques.

Chapitre 1

*Modélisations du procédé de FLLP et simulations numériques :
Aperçu général - Bref état de l'art et focus sur le problème
thermique*

1.1	Introduction	
1.2	Etat de l'art de la simulation macroscopique du procédé de SLM	
1.2.1	Aperçu des physiques impliquées et de leur couplage	
1.2.2	Dérivation d'un modèle thermique macroscopique « représentatif » de la FA	
1.3	Aperçu bibliographique de méthodes d'approximation numériques pour la FA	
1.3.1	Méthodes numériques pour la problématique thermique macroscopique	
1.3.2	Méthodes Itératives Globales-Locales Non-Invasives (IGLNI)	
1.3.3	Méthodes de réduction de modèle	
1.4	Le cadre Arlequin	
1.4.1	Généralités et différentes applications du cadre Arlequin	
1.4.2	Formulation du problème dans le cadre Arlequin	
1.5	Conclusion	

1.1 Introduction

La modélisation physique à l'échelle macroscopique de la construction d'une pièce-FA par procédé de SLM repose sur le cadre de la mécanique des milieux continus. A cette échelle plusieurs domaines de la physique ont une importance prépondérante pour la description du scénario vécu par la pièce : la thermique, la mécanique et la métallurgie. Les autres tels que l'électromagnétisme, la mécanique des fluides... sont négligés. Sous un ensemble d'hypothèses, que nous détaillons par la suite dans ce chapitre, la modélisation de la problématique thermique peut-être totalement découplée des deux autres physiques et devient ainsi la porte d'entrée à la modélisation du procédé SLM.

Celle-ci nécessite la représentation physique de plusieurs phénomènes ou interactions. Il faut en effet décrire

- l'interaction du laser avec la matière et la quantité de chaleur qu'il apporte,
- les interactions entre la matière dense et le milieu granulaire composé des particules de poudre,
- l'interaction de la matière dense et de la poudre avec l'atmosphère de la chambre de la machine de FA,
- la diffusion de la chaleur dans la matière dense et granulaire avec plusieurs finesses possibles comme, par exemple, la prise en compte de la dépendance des paramètres thermiques du matériaux en fonction de la température, la prise en compte de phénomène de changement de phase tel que le passage de la phase solide à la phase liquide,
- l'évolution des différents domaines au cours du procédé avec par exemple le passage de la poudre à l'état dense, ajoutant ainsi à la pièce en construction un incrément matière, ou l'ajout de nouvelles couches de poudre par la machine FA...

Quand bien même nous nous focalisons sur une description thermique macroscopique du procédé SLM celle-ci apporte, à la simulation numérique, par son aspect **multi-échelle**, son lot de difficultés. En effet, le flux de chaleur du laser étant très intense et localisé, de forts gradients thermiques sont présents dans la zone proche du laser, nécessitant un raffinement important des discrétisations numériques. Le phénomène non linéaire de changement de phase prend place localement derrière le laser et demande un traitement numérique particulier. De plus cette zone critique suivant le laser, elle demande d'adapter les discrétisations numériques tout au long de ses mouvements. Ainsi cette modélisation nécessite un cadre numérique flexible permettant de résoudre ces difficultés.

Dans ce chapitre, nous commençons à la Section 1.2 par un état de l'art des simulations numériques à l'échelle macroscopique des procédés de FA avec une focalisation sur le procédé SLM. Nous détaillons à la Sous-Section 1.2.1 les physiques prépondérantes à cette échelle ainsi que leurs différents couplages. A la Sous-Section 1.2.2, nous détaillons les hypothèses généralement faites à cette échelle permettant le découplage de la physique thermique des autres. Nous poursuivons sur bref aperçu des différents modèles utilisés pour représenter les différents phénomènes et interactions thermiques et dressons une liste non-exhaustive des réalisations numériques trouvables dans la littérature. Dans la section suivante (Section 1.3), nous réalisons un tour d'horizon des méthodes numériques permettant de répondre aux différents critères de notre CDC. Dans une première sous-section (Sous-Section 1.3.1) nous évoquons quelques méthodes numériques pouvant répondre aux difficultés de la modélisation thermique macroscopique, constituant le critère (\mathcal{C}_1) de notre CDC, mais pas seulement. Gardant en tête les objectifs plus généraux du projet dans lequel cette thèse s'inscrit, nous évoquons également des méthodes pouvant être utiles à la simulation d'autres difficultés que thermiques. Ensuite à la Sous-Section 1.3.2 nous abordons des méthodes permettant de répondre au critère de compatibilité et coopération entre des codes existants : (\mathcal{C}_2), du CDC, avec notamment les Méthodes Itératives Globales-Locales Non-Invasives (IGLNI). A la troisième sous-section (Sous-Section 1.3.3) nous évoquons, en lien avec le critère (\mathcal{C}_3), les Méthodes de Réduction de modèle (ROM) permettant de réduire les coûts computationnels de simulation tout conservant une précision contrôlée des solutions obtenues. Nous motivons ensuite notre choix du cadre multi-modèles et multi-échelles **Arlequin** et, à la Section 1.4, nous commençons par détailler les différents travaux menés avec le cadre Arlequin jusqu'à aujourd'hui (Sous-Section 1.4.1) ainsi que les

différents ingrédients à définir pour sa mise en place. Finalement, à la Sous-Section 1.4.2, nous donnons l'écriture d'un problème thermique instationnaire et linéaire dans ce cadre.

1.2 Etat de l'art de la simulation macroscopique du procédé de SLM

Nous commençons par détailler les différents domaines physiques importants pour la description du scénario subi par la pièce-FA ainsi que leurs couplages.

1.2.1 Aperçu des physiques impliquées et de leur couplage

Comme nous l'avons évoqué dans l'introduction de cette thèse, la modélisation du procédé SLM et plus généralement de la FA, nécessite l'utilisation de plusieurs domaines de la Physique afin de décrire les différents phénomènes présents et leurs interactions. Les approches numériques à l'échelle **Macroscopique** ont été développées dans le but de simuler en moyenne le comportement complet des pièces-FA. Les modèles utilisés intègrent de manière simplifiée des phénomènes physiques réduits tout en restant précis. Le choix des physiques à prendre en compte se base sur de nombreux travaux réalisés dans le contexte de la simulation des procédés de soudage. Comme détaillé dans les ouvrages [18] pour le soudage et [19] pour la FA, à l'échelle macroscopique, trois domaines physiques sont les plus importants à modéliser pour décrire le processus de fabrication, ceux sont la **Thermique**, la **Mécanique** et la **Métallurgie**. Les couplages possibles entre ces trois physiques et leurs intensités sont fondamentaux pour la modélisation et donc important pour la simulation de la FA. Ces couplages sont représentés par la Figure 1.1 et explicités au Tableau 1.1.

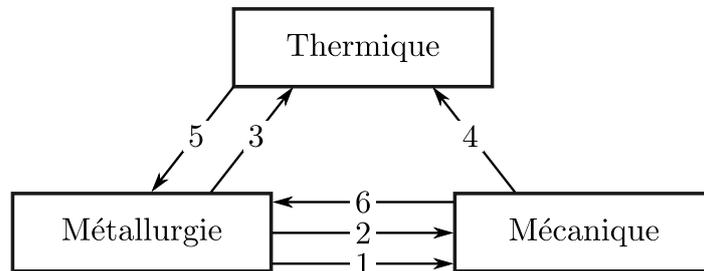


FIGURE 1.1 – Différents couplages entre l'évolution de la thermique, microstructure et des déformations pour la modélisation macroscopique du procédé de soudage, d'après [18].

Numéro du couplage		Phénomène de couplage
1	a	La dilatation thermique dépend de la microstructure.
	b	Le volume change avec le changement de phase.
2	a	Le comportement plastique du matériau dépend de la microstructure.
	b	Le comportement élastique du matériau dépend de la microstructure.
3	a	La conductivité et la capacité thermique dépendent de la microstructure du matériau.
	b	La chaleur latente de changement de phase.
4	a	Les déformations modifient les conditions aux limites thermiques.
	b	La chaleur due à la dissipation plastique (taux de déformation plastique).
	c	La chaleur due au taux de déformation thermique.
	d	La chaleur due au taux de déformation élastique.
5		L'évolution de la microstructure dépend du champ de température.
6		L'évolution de la microstructure dépend du champ des déformations.

TABLE 1.1 – Les différents phénomènes responsables du couplage entre les physiques d'après [18].

Pour la modélisation thermique, il ressort de [18, 19] que les couplages avec la mécanique peuvent être raisonnablement atténués. En effet, les chaleurs induites par les taux de déformations thermiques et élastiques (cf. 1.1 couplages 4c et 4d) ainsi que celle générées par les dissipations plastiques (cf. 1.1 couplage 4b) sont négligeables en soudage ou FA par rapport à la quantité de chaleur apportée par la source laser [18, 20]. Il ne reste à ce niveau que le couplage 4a entre la mécanique et la thermique. A l'échelle macroscopique, les auteurs de l'ouvrage [19] indiquent que l'hypothèse des petites déformations n'est parfois pas envisageable, en effet les mêmes auteurs dans [21] présentent un exemple de simulation où les déformations sont importantes et modifient les conditions aux limites du problème thermique. Il est nécessaire de mettre à jour la géométrie ainsi que les conditions aux limites lors de l'analyse thermique. Comme détaillé dans [18] différents schémas de couplage entre la thermique et mécanique peuvent alors être envisagés. La dilatation thermique étant considérée comme le phénomène moteur, les approches les plus utilisées sont de type décalées (staggered approach), où le champ de température au temps t^{n+1} est déterminé en utilisant la géométrie au temps t^n ; la géométrie étant alors mise à jour après l'analyse mécanique en utilisant le champ thermique connu au temps t^{n+1} . Il est également possible de commencer par l'analyse mécanique, d'itérer entre les deux jusqu'à obtenir une convergence ou même de résoudre les deux physiques simultanément mais cette dernière approche conduit à des systèmes d'équations non-linéaires, couplés et de très grandes tailles. L'influence de l'état micro-structurel du solide sur la thermique (couplage 3) n'est pas directement prise en compte mais à travers l'utilisation de lois empiriques donnant la variation des paramètres thermiques (masse volumique, capacité thermique et conductivité) avec la température.

Pour la modélisation mécanique, une première hypothèse faite est de négliger les effets d'inertie et ainsi de se placer dans un cadre quasi-statique. D'après les auteurs de [22] peu de comparaisons entre une approche quasi-statique et dynamique existent. Ces auteurs en ont alors réalisée une en terme de distorsion pour la fabrication d'une pièce en Ti-6Al-4V par procédé de Dépôt sous énergie concentrée (DEC)¹ et concluent quant à la validité de l'approche quasi-statique. Comme il est détaillé dans [18], le comportement du matériau, par son changement de microstructure, dépend de l'évolution du champ thermique et des déformations. La modélisation du comportement du matériau nécessite donc de considérer l'évolution de la microstructure et de définir en fonction des différentes phases micro-structurelles une loi de comportement adaptée. Il est aussi possible de ne pas prendre en compte l'influence de la microstructure sur la mécanique et définir uniquement des lois de comportement différentes dans les phases solide/mushy/solide. Ensuite, la dilatation (couplage 1), qui est la somme des dilations dues à l'évolution thermique et au changement de phase, induit les déformations. En général, les analyses ne prennent en considération que la source thermique des dilatations. Il existe différentes approches pour inclure l'effet de la microstructure, voir [18].

Finalement, pour la modélisation de l'évolution de la microstructure, l'effet des déformations n'est généralement pas prise en compte, ainsi la thermique devient la seule source d'évolution de la microstructure. La microstructure peut alors être calculée de manière isolée une fois l'analyse thermique faite et alimenter selon les objectifs, l'analyse mécanique, sans oublier les changements de phase amenant de fait à une problématique multi-physique.

De ce survole des hypothèses de modélisation à l'échelle macroscopique, nous en déduisons deux points essentiels :

- la FA a besoin d'analyse très localisée et mouvante pouvant éventuellement capter finement les changements de phase et leurs conséquences sur la construction d'éléments de matière additionnés (épitaxie) ainsi que sur l'apparition des défauts mentionnés en amont (porosité, piégeage de poudre...).
- les phénomènes thermiques influencent les phénomènes de changement de phase et peuvent-être

1. Le procédé appelé DEC (ou Direct Energy Deposition (DED) en anglais) crée des pièces en fusionnant directement des matériaux et en les déposant sur la pièce, couche par couche.

adapté mais peuvent être traité avec l'hypothèse 1 suivante ;

Hypothèse 1 (H1). *Les phénomènes de nature mécanique n'influencent pas sur ceux de nature thermique, se traduisant par ce qu'on nomme un couplage faible entre la thermique et la mécanique.*

Ainsi, la porte d'entrée à une modélisation et simulation du procédé FLLP est le calcul de l'évolution du champ de température.

Dans cette thèse nous nous sommes focalisés sur cet aspect.

Nous donnons dans la sous-section suivante la formulation locale du problème thermo-mécanique, les hypothèses associées ainsi que les différents modèles utilisés pour décrire les interactions et phénomènes généralement considérés dans la littérature, à cette échelle.

1.2.2 Dérivation d'un modèle thermique macroscopique « représentatif » de la FA

Nous considérons un solide \mathcal{S} , occupant la fermeture d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^d avec $d = 1, 2$ ou 3 , borné et régulier dont la frontière est notée $\partial\Omega$ (cf. Figure 1.2). Nous étudions sa réponse mécanique et thermique sur l'intervalle de temps $I =]0, T]$ (avec $T > 0$) connaissant son état initial à l'instant $t = 0$. Pour la modélisation mécanique, nous le supposons soumis à une densité volumique d'effort f_v , encastré sur une partie de sa frontière notée Γ_u de mesure non nulle, soumis à une densité surfacique d'effort f_s sur le reste de sa frontière, non nulle une partie notée Γ_f . Pour l'aspect thermique, \mathcal{S} est soumis à une source de chaleur volumique intense et localisée s dont le support est noté $\omega_s \subset \Omega$, modélisant le flux de chaleur du laser et à une densité surfacique de flux de chaleur q_s (dont une signification physique possible sera donnée plus tard) sur la frontière $\partial\Omega$. Nous notons $\mathbf{u}(x, t)$ le champ des déplacements et $\mathbf{v}(x, t) = \frac{d}{dt}\mathbf{u}(x, t)$ le champ des vitesses.

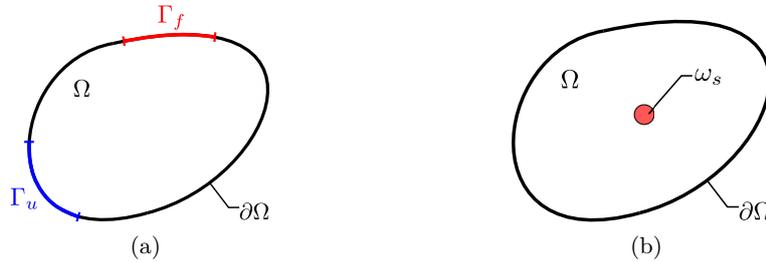


FIGURE 1.2 – Exemple d'un problème thermo-mécanique générique pour la FA avec en (a) les éléments mécanique et en (b) thermique.

Comme détaillé dans plusieurs ouvrages (par exemple les ouvrages [23, 24]), la combinaison de la Conservation de la Masse, du Principe de Puissances Virtuelles avec le Premier Principe de la Thermodynamique nous permet d'établir l'équation suivante :

$$\rho \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla H \right) + \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} = \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p\mathbf{v}) \right] + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + s, \quad \text{dans } \Omega \times I \quad (1.1)$$

avec ρ la masse volumique, H l'enthalpie, ∇ le vecteur nabla, $\boldsymbol{\phi}$ le vecteur densité de flux thermique, p le champ de pression, $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes et $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ le tenseur taux de déformation.

Comme nous l'avons évoqué, à l'échelle macroscopique, les chaleurs dues aux déformations sont négligées de sorte que $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = 0$. L'écoulement dans le bain liquide, i.e. la phase fluide n'est pas pris en compte, comme détaillé dans [24], le champ de pression reste constant. En injectant la loi de diffusion de la chaleur, supposé la loi de Fourier donnée par :

La densité de flux de chaleur ϕ est proportionnelle au gradient de la température

$$\phi = -k\nabla T \quad (1.2)$$

avec k la conductivité thermique du matériau, l'équation (1.1) prend la forme simplifiée suivante :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \cdot (k\nabla T) = s, \quad \text{dans } \Omega \times I \quad (1.3)$$

En fonction de la nature du matériau choisi pour construire la pièce, l'enthalpie prend différentes expressions :

- (a) Dans le cas d'un alliage, le changement de phase se produit sur une plage de température $[T_s, T_l]$ avec T_s la température du solidus et T_l la température du liquidus.

$$H(T) = \begin{cases} \int_{T_{ref}}^T \rho c_s(T) dT & \text{pour } T \leq T_s \\ \int_{T_{ref}}^{T_s} \rho c_s(T) dT + \int_{T_s}^T \rho \frac{\partial L}{\partial T} dT & \text{pour } T_s < T \leq T_l \\ \int_{T_{ref}}^{T_s} \rho c_s(T) dT + \rho L + \int_{T_l}^T \rho c_l dT & \text{pour } T > T_l \end{cases} \quad (1.4)$$

- (b) Dans le cas d'un corps pur, le changement de phase étant isotherme à la température T_m , nous avons :

$$H(T) = \begin{cases} \int_{T_{ref}}^T \rho c_s(T) dT & \text{pour } T \leq T_m \\ \int_{T_{ref}}^{T_m} \rho c_s(T) dT + \rho L + \int_{T_m}^T \rho c_l dT & \text{pour } T > T_m \end{cases} \quad (1.5)$$

avec L la chaleur latente de changement de phase solide/liquide et liquide/solide. Ces expressions sont illustrées à la Figure 1.3. Le phénomène d'évaporation est quasiment systématiquement négligé à l'échelle macroscopique. Ainsi la chaleur latente de changement de phase liquide/gaz et gaz/liquide est ignorée dans ces expressions.

Numériquement, de nombreuses méthodes de résolution de problème thermique avec changement de phase ont été développées (cf. [25] [26] et les références mentionnées). Elles sont classées en deux catégories :

- celles dites de traque de front (Front tracking) ces méthodes ne sont utilisables que pour les problèmes avec des changements de phase isothermes. La condition de changement de phase est ré-écrite comme condition de transmission entre les deux phases, appelée condition de Stefan. En notant Γ l'interface de changement de phase, entre le domaine Ω_L , occupé par la phase liquide et le domaines Ω_S , occupé par la phase solide. Cette condition s'écrit :

$$T_S = T_L = T_m \quad \text{sur } \Gamma \quad (1.6)$$

$$k_L \nabla T_L - k_S \nabla T_S = \rho_S L \mathbf{v} \quad \text{sur } \Gamma \quad (1.7)$$

avec T_S et T_L les champs thermiques dans les phases solide et liquide, k_S et k_L les conductivité des phases solide et liquide, ρ_S la masse volumique de la phase solide et \mathbf{v} la vitesse de l'interface. Le front Γ est suivi continuellement comme une frontière nette solide/liquide. Des équations différentes peuvent être utilisées dans ces deux domaines. La chaleur latente utilisée dans le changement de phase est traitée explicitement comme une condition de bord interne entre les deux phases. Le changement de taille et de forme des domaines nécessite des techniques de maillages adaptatifs

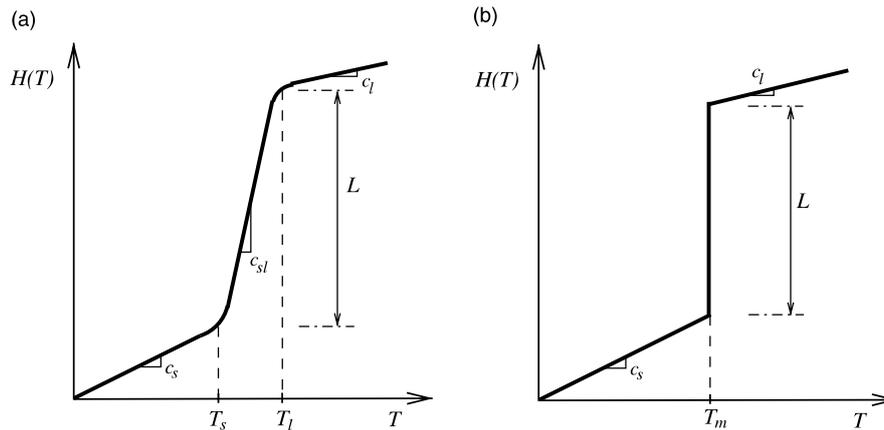


FIGURE 1.3 – Courbe liant l’enthalpie à la température : (a) changement de phase sur une plage de température, (b) changement de phase isotherme [32].

[27], ou des descriptions du type Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) [28], ou bien des méthodes d’enrichissement telle Méthode des Eléments Finis Etendus (XFEM) [29], voir par exemple l’article faisant une revue bibliographique des méthodes de traque de front : [30].

- celles dites à grille fixe (Fixed grid) ces méthodes ne suivent pas explicitement le front de changement de phase. Celui-ci est reconstruit a posteriori une fois le champ de température calculé. Ces méthodes sont également appelées à domaine unique car les mêmes équations doivent être appliquées aux deux phases. Elles sont simples à mettre en place car elles ne nécessitent que quelques changements des méthodes thermiques déjà utilisées et implémentées dans les codes industriels. Les différentes variantes diffèrent sur le traitement de la chaleur latente. Une première méthode et la plus répandue, fait apparaître une capacité thermique c_a dite apparente, en écrivant la dérivée temporelle de l’enthalpie sous la forme :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dT} \frac{\partial T}{\partial t} = c_a \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.8)$$

l’équation (1.3) prend alors la forme classique de l’équation de la chaleur, faisant seulement apparaître le champ de température. Une autre variante, appelée Méthode de la Chaleur Latente Latent Heat Source Method (LHSM) que nous détaillons au Chapitre 2 fait apparaître une source de chaleur fictive voir [31]. D’autres variantes conservent dans la formulation du problème l’enthalpie voir par exemple les articles [32, 33]. Pour plus de détail sur les méthodes Fixed Grid voir les articles [31, 34] faisant une revue bibliographique.

Avec cette modélisation, le comportement thermique du matériau considéré est décrit par trois coefficients qui sont sa masse volumique, sa capacité thermique à pression constante et sa conductivité. Toutes ces quantités dépendent de la température suivant des lois mesurées expérimentalement dont la Figure 1.4 donne les allures pour l’alliage de titane : Ti-6Al-4V, couramment utilisé et dont la composition chimique est donnée dans le Tableau 1.2.

Elément	Aluminium	Vanadium	Carbone	Fer	Oxygène	Nitrogène	Titanium
Présence en %	5.5 à 6.75	3.5 à 4.5	Max. 0.10	Max. 0.30	Max. 0.02	Max. 0.05	Réf.

TABLE 1.2 – La composition chimique de l’alliage de titane Ti-6Al-4V.

Pour que les simulations thermiques soient précises il faut que cette dépendance soit prise en compte. Cependant l’équation de la chaleur devient alors nonlinéaire et plus coûteuse à résoudre. Ainsi dans la littérature ces paramètres sont parfois considérés comme constants au moins par phase (solide et liquide).

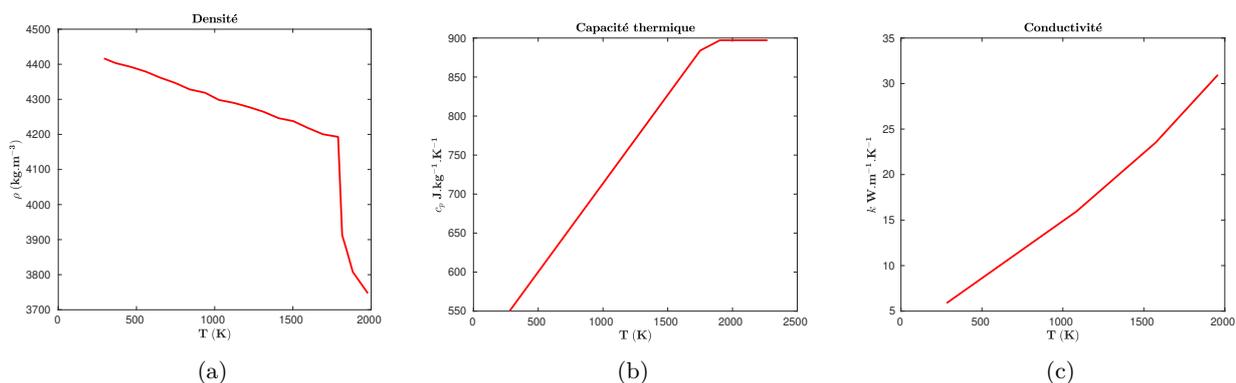


FIGURE 1.4 – Variations de la masse volumique en (a), capacité thermique à pression constante en (b) et la conductivité en fonction de la température de l'alliage Ti-6Al-4V.

Les courbes représentées à la Figure 1.4 sont valables pour la matière dense. Signalons qu'à l'échelle macroscopique les particules de poudre n'étant pas considérées individuellement des modèles homogénéisés ont été développés afin de prendre en compte la dépendance des paramètres thermiques de la poudre par rapport à sa température et à sa porosité. Plusieurs sont utilisés dans la littérature comme [35], révisé plus tard par [36], article dans lequel quatre autres modèles sont exposés. Un modèle plus récent et couramment utilisé en FA est celui de [37]. La donnée qui manque généralement est l'évolution de la porosité en fonction de la fonte de la poudre. Elle est étudiée dans des simulations à l'échelle mésoscopique comme dans [38]. Certaines simulation à l'échelle macroscopique tentent de rendre compte du phénomène de densification comme par exemple dans [39] [40] où la porosité est supposée évoluer linéairement d'une température de frittage jusqu'à la température de changement de phase liquide.

Dans la plupart des simulations, ce n'est pas pris en compte. Une hypothèse simplificatrice importante est faite : la matière sensée passer de forme de poudre à celui liquide puis se solidifier pour s'ajouter à la pièce, est directement activée sous forme dense. Ce qui fait que finalement la poudre reste toujours sous forme de poudre et que le domaine occupé par la pièce-FA ne contient toujours que de la matière dense, sans porosité.

Un autre élément présent est l'air ou le gaz environnant la pièce lors de sa création. L'atmosphère de la chambre de fabrication est normalement contrôlée afin de conserver la composition chimique de l'alliage utilisé et qu'aucun élément polluant ne contamine la pièce.

En fonction de la précision souhaitée plusieurs définitions du domaine de calcul sont possibles. Pour les illustrer, nous considérons le cas de la construction d'une Tour Eiffel miniaturisée en $2D$ comme le montre la Figure 1.5.

Certaines stratégies vont prendre en compte l'ensemble de la chambre de fabrication, cf. Figure 1.6a, comme par exemple dans [41], mais dans la plupart des autres simulations, l'atmosphère est exclue du domaine de modélisation et ainsi seulement la poudre, la matière dense et le support, cf. Figure 1.6b, sont considérés. Le domaine global évolue alors avec l'avancement de la construction de la pièce.

Le bac de poudre pouvant avoir de grandes dimensions par rapport à la pièce fabriquée et l'échauffement dû au laser étant très localisé, certaines stratégies tentent de réduire le domaine de calcul en soustrayant des zones contenant de la poudre, éloignée de zone thermiquement affectée par les mouvements du laser. Pour se faire, [42] propose d'introduire une condition au limite équivalente entre le domaine de calcul et les zones soustraites. Ceci est illustré à la Figure 1.7, où la dernière couche en cours de balayage par le laser est visible en vue de dessus. Les auteurs définissent une longueur, notée S_p , caractérisant la distance à laquelle la poudre ne va pas subir de variation thermique et rester à la température ambiante ou de

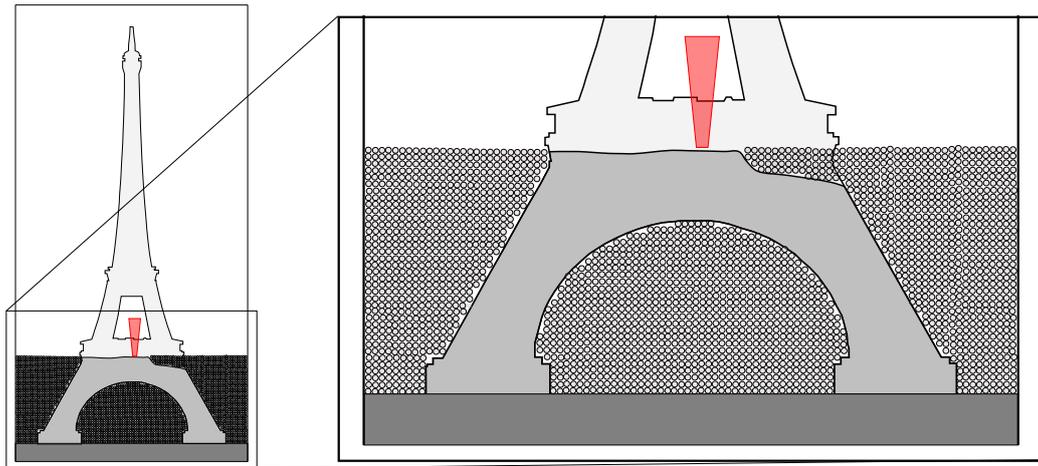


FIGURE 1.5 – Exemple de fabrication de la Tour Eiffel par le procédé de FLLP.

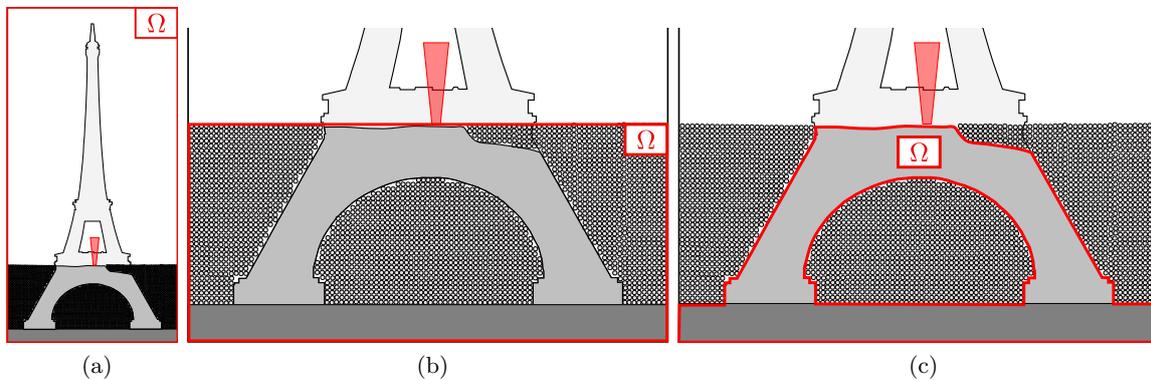


FIGURE 1.6 – Domaine de calcul contenant toute la chambre de fabrication en (a), uniquement la partie occupée par du métal en (b) et uniquement la matière dense en (c).

préchauffage. La condition au limite équivalente est alors donnée par l'équation 1.9.

$$\phi \cdot \mathbf{n} = \frac{k^p}{S_p} (T - T_p) \quad (1.9)$$

où \mathbf{n} est la normale sortante du domaine Ω ; la poudre étant à l'extérieur du domaine.

Le domaine de calcul peut alors entièrement exclure la poudre comme à la Figure 1.6c.

De toute évidence, ces méthodes de soustraction appauvrissent la qualité de la solution mais peuvent néanmoins être utiles en fonction des objectifs de simulation (rapide étude paramétrique...).

Maintenant que nous venons de détailler les différentes définitions possibles du domaine de calcul il reste à voir comment le faire évoluer au cours de la simulation. A nouveau, plusieurs stratégies existent, allant d'une évolution microscopique du domaine à quelques passes du laser, prenant plus ou moins de poudre en compte, jusqu'à l'ajout direct de plusieurs couches instantanément, voir à titre d'illustration la Figure 1.8, (cette possibilité s'explique par l'hypothèse de simulation importante évoquée plus haut qui ne prend pas en compte le passage poudre-matière dense). Le choix de la stratégie d'évolution du domaine n'est pas sans lien avec le modèle d'apport de chaleur choisi, simulant le passage du laser.

Un point essentiel de la modélisation est celui de l'apport de chaleur. Plusieurs possibilités existent en fonction du domaine de calcul, de la stratégie d'addition de matière, la finesse de la discrétisation temporelle et de la précision recherchée. Un premier point à analyser est dans qu'elle zone le laser frappe

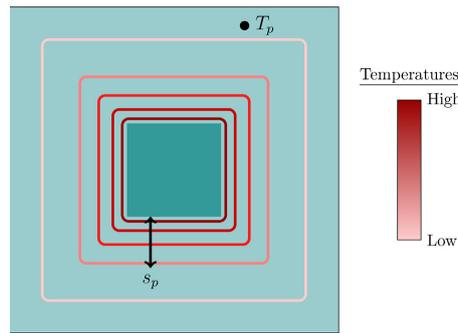


FIGURE 1.7 – Schéma de définition de la zone non affectée thermiquement d'après [42].

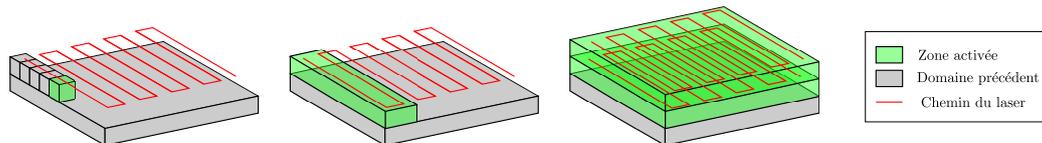


FIGURE 1.8 – Exemples d'évolutions du domaine de modélisation.

la matière. D'après [43], en fonction de la vitesse du laser, deux hypothèses peuvent être formulées sur la "communication" entre le laser et la matière. Comme le montre la Figure 1.9a, dans le cas du procédé de FLLP où les vitesses sont moindres, le laser frappe le bain liquide et donc de la matière dense alors que dans le cas du procédé de FLPP où les vitesses sont supérieures, le laser frappe directement la poudre, nécessitant alors de prendre aussi en compte les phénomènes de réflexion, absorption déjà évoqués plus tôt.

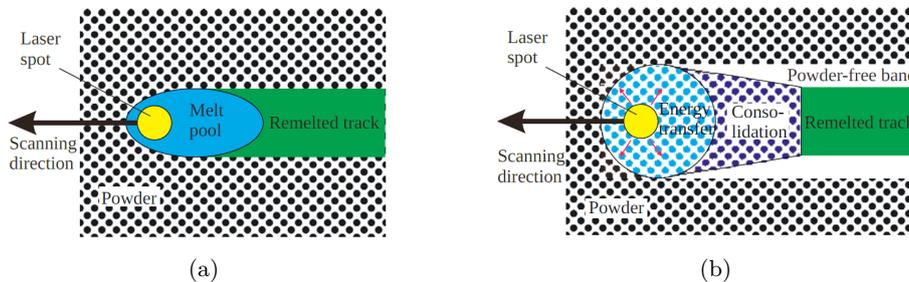
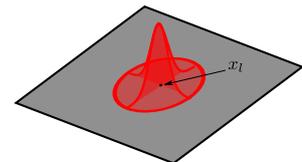


FIGURE 1.9 – Schéma montrant le point d'impact du laser dans le cas du procédé de FLLP en (a) et du procédé de FLPP en (b) d'après [43].

Dans notre cas, comme nous nous sommes intéressés au procédé de FLLP, nous avons supposé que le laser frappe uniquement la matière dense du bain liquide, la profondeur d'absorption dans le cas de la matière dense est très faible. Le modèle pour le laser le plus utilisé voir (par exemple [44, 45, 46, 47, 48] parmi d'autres) définit l'apport de chaleur comme une densité surfacique f_l de forme Gaussienne :

$$f_l(x) = \frac{2\eta P_l}{\pi r_l^2} \exp\left(-2\frac{\|x - x_l\|^2}{r_l^2}\right) \quad (1.10)$$



où P_l , r_l et x_l sont la puissance, le rayon et le centre de la zone d'impact du laser respectivement et η le coefficient d'absorption. Un autre modèle développé dans le contexte du soudage est le modèle de Goldak [49] qui lui est volumique, cherche à prendre en compte des effets dus au bain liquide et à sa géométrie. Il est donné par l'équation (1.11). D'autres modèles cherchent à prendre en compte une profondeur de

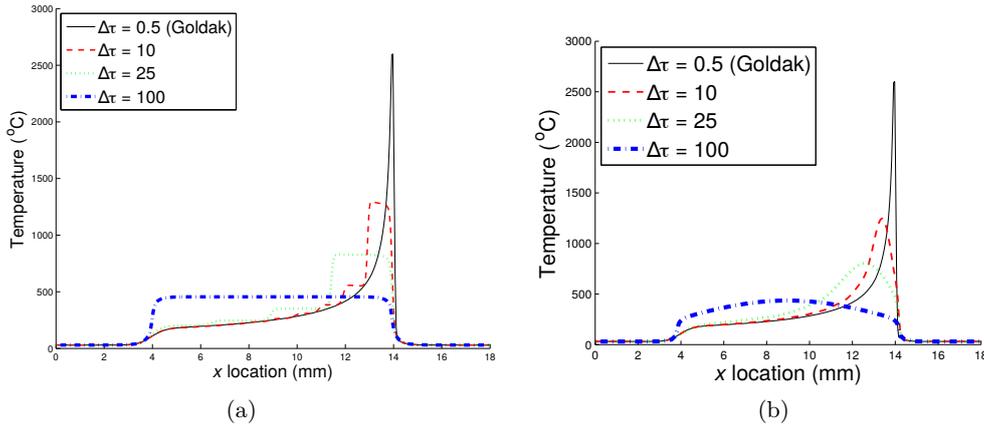


FIGURE 1.10 – Courbe de température pour la simulation d’une passe d’un laser comparant la source moyennée en temps et l’elliptique allongée avec le modèle de Goldak, d’après [52].

pénétration des rayons laser dans la poudre (cf. [50] dans le cadre du procédé Electron Beam Melting (EBM)).

$$g_l(x, y, z) = \frac{6\sqrt{3}\eta P_l}{abc\pi\sqrt{\pi}} \exp\left(-3\frac{x^2}{a^2} - 3\frac{y^2}{b^2} - 3\frac{(z + v_l t)^2}{a^2}\right) \quad (1.11)$$

Plus le modèle du laser sera fin, plus les discrétisations découlant des méthodes numériques employées devront être fines à son voisinage. En effet, les auteurs [51] dans le cas de la simulation du forgeage laser ont étudié l’influence du pas de temps et de la discrétisation au voisinage du laser et donnent un certain nombre de recommandations. Les auteurs recommandent, par exemple, d’avoir des pas de temps qui donnent une translation du laser inférieure à son rayon. Partant de ce constat et afin de diminuer les temps de simulation, des modèles de source volumique équivalente ont été développés. Ils tentent de représenter sur un pas de temps l’apport de chaleur effectué par le laser dans la zone balayée. Par exemple les auteurs de [52] proposent de moyenner la distribution de puissance de Goldak sur un pas de temps Δt :

$$\bar{g}_l(x, y, z) = \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} g_l dt = \frac{3\eta P}{\Delta t v_s ab\pi} \exp\left(-3\frac{x^2}{a^2} - 3\frac{y^2}{b^2}\right) \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{3}(z + v_l t)}{c}\right)\right]_{t=t_0}^{t_0+\Delta t} \quad (1.12)$$

sauf que cette source de chaleur conduit à des profils thermiques presque discontinus (voir la Figure 1.10a) et avec des zones à gradient nul. Ainsi, ils proposent de ”lisser” ces profils grâce à un profil elliptique allongé

$$\tilde{g}_l(x, y, z) = \frac{6\sqrt{3}\eta P}{ab\tilde{c}\pi\sqrt{\pi}} \exp\left(-3\frac{x^2}{a^2} - 3\frac{y^2}{b^2} - 3\frac{(z + v_l(t_0 + \frac{1}{2}\Delta t))^2}{\tilde{c}^2}\right), \quad (1.13)$$

avec :

$$\tilde{c} = \frac{v_l \Delta t}{2} \sqrt{\frac{3}{\log(2)}}, \quad (1.14)$$

et qui donne des profils thermiques plus proches du modèle fin (voir la Figure 1.10b)

Une autre méthode volumique simple est donnée dans [42] voir Figure 1.11. Si le terme source de chaleur s représentant l’apport du laser sur l’intervalle spatial $[x_d, x_{d+1}]$ de sa trajectoire prédéfinie se

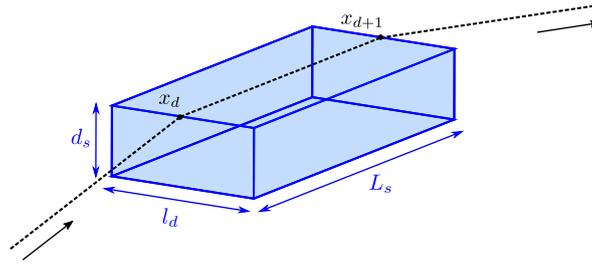


FIGURE 1.11 – Volume affecté thermiquement (HAV).

caractérisé par le volume affecté thermiquement (HAV) défini par les termes : $L_s = \|x_{d+1} - x_d\| = V_l \times \tau_d$ la distance entre les deux points, d_s l'épaisseur de la couche et l_d le diamètre du laser. On recherche alors les éléments de la discrétisation internes à la zone HAV pour définir le volume de la source :

$$V_s = \sum_{e \in \text{HAZ}} V_e, \quad (1.15)$$

où V_e est le volume de l'élément e . La source de chaleur est alors donnée par :

$$s = \frac{\eta P}{V_s}. \quad (1.16)$$

Avec η le coefficient d'absorption du laser, P la puissance du laser.

Certes, ces méthodes sont capables de respecter la quantité d'énergie thermique apportée par le laser mais elles modifient conséquemment l'allure du champ thermique dans la zone proche du laser et font passer à coté des maximums de température qui sont essentiels pour les modèles d'évolution de la microstructure par exemple (voir aussi [53, 9]). Ces stratégies de réduction de modèles ont été étendues à plusieurs passes du laser avec des profils différents en fonction des motifs de lasage, par exemple sinusoïdaux comme à la Figure 1.12) jusqu'à même plusieurs couches [54].

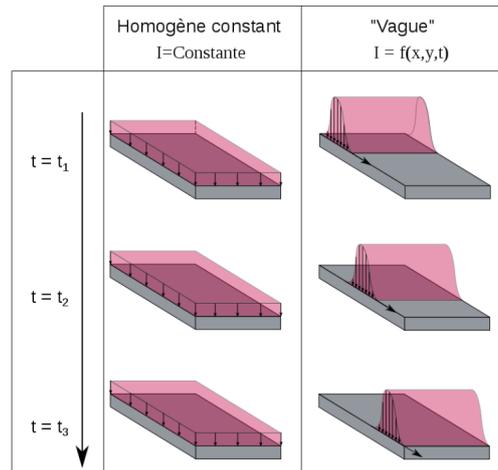


FIGURE 1.12 – Exemple de source surfacique modélisation le trajet du laser sur plusieurs passes d'après [54].

Comme nous venons de l'évoquer, le domaine de calcul évolue au cours du procédé. Un simple calcul nous montre que, sans utiliser des techniques de remaillage et si l'on souhaite suivre l'évolution de la matière à l'échelle du procédé (i.e. on exclut les stratégies d'activation de plusieurs couches simultanément), la finesse des incréments de matière même, maillés grossièrement, conduit vite à un nombre

de degré de liberté très important. Pour avoir un ordre d'idée, imaginons un cas simple 2D, d'une pièce carrée comme présentée à la Figure 1.13, de dimensions $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$, construite couche par couche, avec des couches d'épaisseur $50\ \mu\text{m}$, avec des incréments de matière de longueur $50\ \mu\text{m}$.

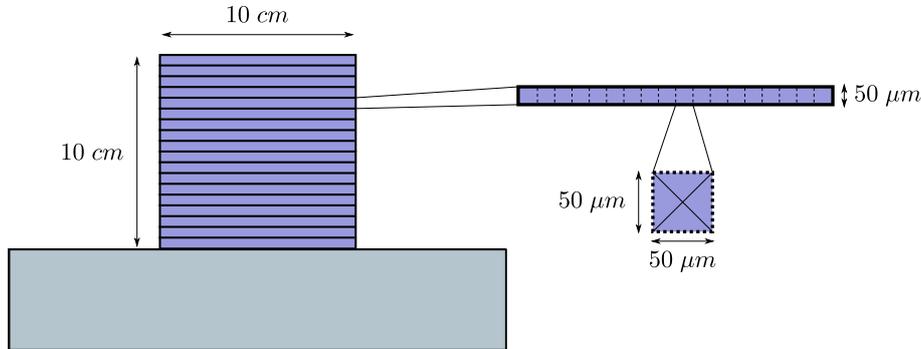


FIGURE 1.13 – Exemple d'un maillage simple mais inadapté au moins à la problématique thermique.

Le nombre de couches pour former la pièce est de $\frac{10 \times 10^{-2}\text{ m}}{50 \times 10^{-6}\text{ m}} = 2000$ couches chacune décomposées en $\frac{10 \times 10^2\text{ m}}{50 \times 10^{-6}\text{ m}} = 2000$ incréments de matières maillés en quatre éléments. Le mur est finalement maillé de $2000 \times 2000 \times 4 = 16^6$ éléments ce qui correspond 8×10^6 nœuds. Avec cette approche la simulation de pièce de dimensions réalistes et 3D dépassera rapidement les capacités des calculateurs pour une discrétisation des couches qui est, pour les raisons que nous avons évoquées, trop grossière pour les couches proches du laser et trop fine pour celles au contraire éloignées. Les approches monolithiques sont donc inopérantes.

D'après [55], dans le cas des procédés de EBM, deux techniques pour faire évoluer le maillage mais qui sont aussi adaptables au cas du procédé de FLLP sont proposées. La première appelée la Méthode des Eléments Silencieux (The Quiet Element Method (QEM) en anglais) et la seconde la Méthode des Eléments Inactifs (The Inactive Element Method (IEM) en anglais). Dans leur papier, ils comparent les deux méthodes, donnent leurs avantages et inconvénients que nous rappelons ici brièvement :

- Quiet Element Method (QEM) : le maillage global de la pièce est considéré tout au long des simulations. Afin de donner un comportement proche du vide aux zones normalement inoccupées par de la matière, des paramètres matériaux (conductivité, module de Young ...) très faibles leurs sont affectés. Cette approche a l'avantage de faciliter la gestion du maillage mais augmente significativement les coûts de simulation. En effet les différentes équations sont résolues sur toute la pièce et sur tout le domaine temporel. Aussi le choix des valeurs des paramètres simulant le vide n'est pas simple, pour être le plus précis possible celles-ci doivent être le plus proche de zéro mais plus elles tendent vers zéro, plus le conditionnement du système discret est affecté et plus il sera cher à inverser.
- Inactive Element Method (IEM) de même que l'approche précédente, tout le maillage de la pièce est considéré mais les éléments où la matière n'est pas présente sont considérés inactifs et ne sont pas pris en compte lors de la construction du système discret. Une difficulté de cette méthode réside dans la définition de l'état des éléments lors de leur activation. De plus cette étape introduit généralement de l'énergie fictive (voir [55] pour plus de détails).

D'autres méthodes existent comme la Méthode Level Set (LSM), introduite par S. Osher et J. A. Sethian dans [56]. Celle-ci permet de suivre facilement l'évolution d'une interface. Elle consiste à définir, sur tout le domaine, une fonction distance signée par rapport à l'interface, mise à jour, connaissant sa vitesse, au moyen de la résolution d'une équation de transport. Elle est utilisée dans [41] où deux fonctions sont utilisées pour dissocier le domaine contenant la matière dense (ainsi que le support de fabrication) de celui contenant de la poudre et du dernier contenant le gaz.

Nous donnons finalement un récapitulatif non-exhaustif des différentes études réalisées. Elles sont pour la grande majorité basées sur la Méthode de Eléments Finis (MEF) et inspirées des techniques

précédemment développées pour le soudage, par les grandes similitudes des deux procédés. L'un des premiers modèles fut proposé par [57] et [58] pour le procédé de FLPP et de FLLP et plus particulièrement pour des pièces composées de plusieurs matériaux. Ils ont considéré le problème thermo-mécanique 3D prenant en compte la porosité de la poudre ainsi que la dépendance par rapport à la température des paramètres thermiques du matériau et donnant la capacité à la matière dense de se déformer plastiquement. La porosité de la poudre est supposée être constante jusqu'à ce qu'elle passe à la phase liquide où elle est directement imposée nulle. Dans [59] un modèle thermique est développé pour le procédé de FLPP utilisant du titane, prenant en compte aussi la dépendance thermique des paramètres matériaux ainsi que le phénomène de changement de phase. [60] propose une approche numérique basée sur les modèles précédemment développés par [61] et [59] pour déterminer l'évolution thermique pendant la dépose de plusieurs couches du procédé de FLLP appliqué à des alliages de Titane. Un autre modèle thermique est aussi présenté dans [40], tentant de prendre en compte la transition de la poudre à la phase solide dense ainsi que les phénomènes de contraction et de perte de la matière. Dans [62] un modèle thermique 3D pour la fabrication de pièce en AlSi10Mg par FLLP est utilisé afin d'étudier l'effet de la puissance et de la vitesse du laser. De plus des observations de microstructure d'échantillons réalisés par FLLP ont été réalisées afin de vérifier la pertinence du modèle physique comme les dimensions du bain liquide ont un impact direct sur la microstructure finale. [63] propose un modèle continu macroscopique homogénéisé pour le FLLP, prenant en compte les phases liquide et solidifiée et considérant que la phase solide dense n'a aucune porosité résiduelle. Aussi les paramètres matériaux sont pris dépendant de la température ainsi que de la phase et le phénomène de changement de phase est pris en compte grâce à la méthode de capacité apparente, détaillée précédemment. Ils ont également considéré un comportement mécanique de type élasto-plastique pour le matériau. Dans [64] le pur problème thermique est adressé dans le cas du procédé de EBM pour une pièce en Ti-6Al-4V, la MEF est utilisé comme discrétisation spatiale et une méthode de Runge-Kutta implicite pour discrétisation temporelle. Le changement de phase est pris à nouveau en compte par une méthode de capacité thermique équivalente. Ils étudient également la durée de vie, profondeur et longueur du bain liquide pour différentes puissances, vitesses de faisceau, des comparaisons avec des résultats expérimentaux sont également réalisées. Une approche numérique de modélisation du procédé de FLPP, pour le matériau polypropylène, est proposée par [65]. Un modèle 3D thermique est développé afin de déterminer l'évolution du champ thermique et l'extension de la zone de frittage dans le lit de poudre prenant en compte le changement de phase lors de plusieurs passes du laser. Les transitions de phase poudre-liquide, liquide-solide et solide-liquide sont modélisées. Finalement un modèle 3D thermomécanique est couplé pour prédire la distorsion de la pièce après la phase de refroidissement.

Nous avons présenté jusqu'ici les différents choix de modélisation macroscopique possibles et trouvables dans la littérature pour simuler le scénario thermique d'une pièce-FA. Plus c'est choix tendent vers la précision plus l'aspect multi-échelle de la modélisation sera important. Par exemple, plus la description du flux du laser sera fine, i.e. éloignée des modèles de source équivalente, plus les gradients thermiques seront intenses et localisés dans une zone critique sous le laser. De même si le phénomène changement de phase solide/liquide est considéré, il prendra place dans une zone aussi localisée derrière le laser... En récapitulant les différentes difficultés de la simulation thermique du procédé FLLP, nous dressons la liste des caractéristiques que doit présenter la méthode numérique à employer. Elle doit notamment pouvoir permettre :

- le raffinement de la précision dans une zone localisée sous le laser,
- de « délocaliser » ce raffinement à un coût limité, i.e. être capable de suivre le laser dans son mouvement,
- de traiter des non-linéarités localisées,
- de gérer des changements permanent du domaine géométrique pour représenter l'addition de matière,
- de traiter les problématiques mécanique et métallurgique à l'échelle macroscopique,
- de raffiner en modèle afin d'ouvrir la voie au couplage entre des modèles macroscopique, mésoscopique

et microscopique,

A la Section suivante, nous détaillons un ensemble de méthodes numériques en lien, dans une première sous-section, avec les difficultés de la modélisation thermique macroscopique que nous venons d'évoquer.

De plus, comme nous l'avons vu au chapitre 1 introductif, un grand nombre de travaux ont été menés dans le contexte de la simulation de la FA, chacun abordant une échelle précise de simulation et développant des méthodes numériques et des codes adaptés aux problématiques propres de l'échelle considérée. Il nous semble essentiel que le cadre de modélisation que nous voulons développer puisse permettre une compatibilité et la coopération avec des codes existants et traitant d'autres phénomènes en lien avec la modélisation du procédé SLM. Les méthodes Itératives Globales-Locales Non-Invasives (IGLNI) semblent être des outils adaptés pour faire communiquer cette diversité de codes et méthodes numériques. Nous les évoquons donc dans la seconde sous-section de la section suivante.

Un des buts de la simulation numérique, déjà évoqué en introduction, est d'épauler les pré-campagnes expérimentales nécessaires à la conception et à la définition de la stratégie de réalisation des pièces. Le procédé de SLM comportant un nombre important de paramètres à régler (en lien avec sa grande capacité de réalisation), les études paramétriques à réaliser sont très larges et deviennent chronophages et coûteuses. Il est donc primordiale que les simulations numériques aient un coût le plus réduit possible tout en gardant une précision optimale, permettant ainsi de balayer rapidement les plages de différents paramètres du procédé. Il nous semble que les Méthodes de Réduction de modèle (ROM) sont, pour cet objectif, un outil pertinent. Nous les abordons à la dernière sous-section de la section suivante.

1.3 Aperçu bibliographique de méthodes d'approximation numériques pour la FA

Dans cette sous-section, nous dressons un état de l'art non exhaustif de méthodes numériques utiles pour résoudre certaines des difficultés de simulation thermique macroscopique du procédé à maîtriser mais également pour d'autres problématiques.

1.3.1 Méthodes numériques pour la problématique thermique macroscopique

Dans le but de détailler le principe des quelques méthodes que nous avons considérées, nous reprenons le problème thermique défini à la Sous-Section 1.2.2 dont l'illustration est donnée à la Figure 1.2b. Nous le simplifions en ne considérant pas le phénomène de changement de phase ni la dépendance des paramètres thermiques du matériau par rapport à la température. Les paramètres thermiques du matériau $(\rho, c_p, k) \in (L^\infty(\Omega))^3$ sont donc constants. Nous supposons aussi que le solide est soumis, sur toute sa frontière $\partial\Omega$, à une condition de Dirichlet homogène. Sa formulation locale est donnée par

Formulation 1.1: Formulation locale-forte du problème thermique instationnaire

Soit $T(0)$ donné, $\forall t \in I$, trouver $T(t)$ le champ thermique dans Ω à l'instant t , vérifiant le problème parabolique de valeur initiale suivant :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}(t) - k \Delta T(t) = s(t), \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{Conservation de l'énergie}) \quad (1.17a)$$

$$T(t) = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (\text{Condition de Robin}) \quad (1.17b)$$

$$T(0) = T_0, \quad \text{dans } \Omega. \quad (\text{Condition initiale}) \quad (1.17c)$$

La plupart des méthodes que nous allons détailler dans la suite reposent sur la formulation discrète de type éléments finis des problèmes physiques. Nous donnons donc rapidement pour ce problème sa

1.3. APERÇU BIBLIOGRAPHIQUE DE MÉTHODES D'APPROXIMATION NUMÉRIQUES POUR LA FA37

formulation faible. Elle s'écrit :

Formulation 1.2: Formulation faible primale du problème thermique instationnaire

Soit $T(0) = T_0$ donné, $\forall t \in I$, trouver $T(t) \in V$ tel que,

$$\frac{d}{dt} m_0(T(t), T^*) + a_0(T(t), T^*) = l_0(T^*), \quad \forall T^* \in V, \quad (1.18)$$

où pour donner sens à cette formulation, $V = H^1(\Omega)$ et les différents opérateurs sont définis par :

$$m_0(T(t), T^*) = \int_{\Omega} \rho c_p T(t) T^* d\Omega, \quad (1.19a)$$

$$a_0(T(t), T^*) = \int_{\Omega} k (\nabla T(t) \cdot \nabla T^*) d\Omega \quad (1.19b)$$

$$l_0(T^*) = \int_{\Omega} s(t) T^* d\Omega, \quad (1.19c)$$

Nous discrétisons ensuite spatialement le champ T à l'aide de la MEF. Ainsi, l'espace éléments finis V^h approximant l'espace V est introduit, défini comme :

$$V^h = \left\{ T^* \in C^0(\bar{\Omega}) \mid \forall K \in \mathcal{T}_{\Omega}, T^*|_K \in \mathbb{P}_1(K) \right\}, \quad (1.20)$$

construits à l'aide d'une triangulation \mathcal{T}_{Ω} illustrée à la Figure 1.14 et avec $\mathbb{P}_1(K)$ l'espace des polynômes de degré 1.

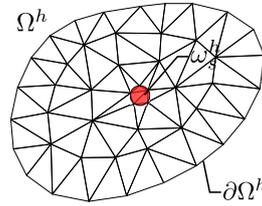


FIGURE 1.14 – Exemple d'un maillage pour le problème thermique générique considéré.

Le champ de thermique T est alors approché par le champ T^h donné par

$$T^h(t, x) = \sum_{n=1}^N T^{h,n}(t) \psi^n(x) \quad (1.21)$$

où $\psi^n(x)$ sont les fonctions de formes. La formulation du problème semi-discrétisé en espace devient alors

Formulation 1.3: Formulation faible primale du problème thermique instationnaire semi-discrétisé en espace

Soit $T^h(0) = T_0 \in H$ donné, $\forall t \in I$, trouver $T^h(t) \in V^h$ tel que,

$$\frac{d}{dt} m_0(T^h(t), T^*) + a_0(T^h(t), T^*) = l_0(T^*), \quad \forall T^* \in V^h, \quad (1.22)$$

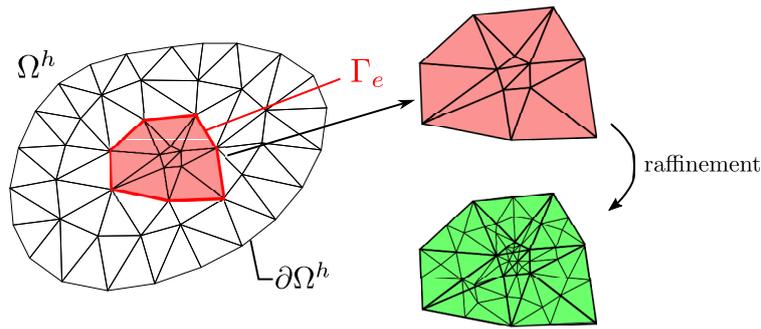


FIGURE 1.15 – Exemple d'un raffinement par la S-méthode.

Méthodes d'adaptation de maillage

Afin d'améliorer la précision des simulations numériques et de capter des phénomènes locaux, des méthodes d'adaptation et de raffinement des maillages ont été développées. Trois approches différentes existent :

- i) Les méthodes en p , où le maillage est fixe mais l'ordre des éléments finis est augmenté dans la zone critique.
- ii) Les méthodes en r , où l'ordre des éléments finis du maillage est fixé mais la localisation des noeuds sont modifiées afin de raffiner la discrétisation dans la zone critique.
- ii) Les méthodes en h , où l'ordre des éléments finis du maillage est fixé mais le nombre et la taille des éléments sont augmentés dans la zone critique et au contraire diminués dans les zones « paisibles », où la discrétisation demande moins de finesse.

La combinaison de ces différentes méthodes sont possibles. Dans le contexte de la simulation du soudage, la nécessité d'une précision localisée au niveau du laser se trouvait déjà. Les méthodes d'adaptation de maillage ont déjà été utilisées avec différents estimateurs d'erreur directionnel permettant d'identifier la zone critique et la finesse de la discrétisation nécessaire. Cependant cette façon de procéder n'est pas optimale en terme de nombre de degrés de liberté générés (voir par exemple [66, 67, 68, 69], parmi d'autres).

Dans le cas de la FA, des travaux améliorent la précision de la simulation du problème thermique en raffinant localement autour du laser les maillages mais sans introduire d'estimateur d'erreur, voir par exemple [64] ou [70]. Dans ce dernier afin de limiter le coût de détermination des éléments environnants à la zone d'impact du laser, une technique appelée Fully Threaded Tree (FTT) qui consiste à, au préalable, construire des groupes d'éléments est utilisée. Cependant ces méthodes ne permettent pas de raffiner en modèle et ne sont utiles que si nous restons dans le cadre de modélisation des milieux continus.

Les méthodes de superposition

La S-méthode La S-méthode proposée par Fish [71] est une méthode d'enrichissement qui superpose au maillage éléments finis global, dans le voisinage de (ou des) zone(s) d'intérêt Ω_e , un espace d'enrichissement V_e^h , construit sur un maillage éléments finis. Ce maillage local est sensiblement plus fin que le maillage global et peut contenir éventuellement des altérations que ne contient pas ce dernier, voir la Figure 1.15. La solution T_s^h du nouveau problème est alors recherchée sous la forme

$$T_s^h = \begin{cases} T^h & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_e \\ T^h + T_e^h & \text{dans } \Omega_e \end{cases} \quad (1.23)$$

en ajoutant une condition homogène sur le champ d'enrichissement $T_e^h = 0$ sur Γ_e afin d'assurer la continuité du champ T_s^h . La principale problématique liée à cette méthode est celle de l'indépendance linéaire des deux espaces V^h et V_e^h .

La Méthode de Partition de l'Unité (PUM) La Méthode de Partition de l'Unité (PUM) introduite par [72] propose un cadre mathématique permettant la construction d'espaces d'approximation globaux et conformes à partir d'espaces d'approximation locaux. Soit $\mathcal{T} = \{\Omega_i\}_{i \in I}$ un ensemble d'ouverts, réalisant un recouvrement de Ω et sur chacun de ses sous domaines est défini un espace local V_i possédant les propriétés adaptées au problème. L'espace global d'approximation V_g est alors construit en sommant les espaces locaux en les pondérant par des fonctions ψ_i

$$V_g = \sum_i \psi_i V_i, \tag{1.24}$$

tel que l'ensemble des $\{\psi_i\}_{i \in I}$ est constitué de fonctions continues formant une partition de l'unité de Ω associée à la partition \mathcal{T} et vérifiant

$$\text{supp}(\psi_i) \subset \overline{\Omega}_i, \forall i \in I, \tag{1.25}$$

$$\sum_{i \in I} \psi_i = 1 \text{ dans } \Omega. \tag{1.26}$$

Un élément de V_g peut alors s'écrire sous la forme

$$T(t, x) = \sum_{i \in I} \psi_i(x) T_i(t, x), \text{ avec } T_i \in V_i^h. \tag{1.27}$$

C'est sur ce cadre que repose la Méthode des Eléments Finis Généralisés (GFEM) ainsi que la Méthode des Eléments Finis Etendus (XFEM), dont les principes sont développés dans la partie suivante.

La Méthode des Eléments Finis Généralisés (GFEM) La Méthode des Eléments Finis Généralisés (GFEM), proposée dans [73], consiste, en se basant sur le cadre de la Méthode de Partition de l'Unité (PUM), à créer un espace d'approximation global en utilisant un maillage éléments finis et l'espace élément finis associé pour définir les sous-domaines Ω_i et les fonctions de pondération ψ_i . Nous construisons en chaque nœud \mathcal{N}_i du maillage la fonction de pondération ψ_i , égale à la fonction "chapeau" éléments finis de ce nœud, ainsi que le sous-domaine Ω_i associé, égal au support de cette fonction. Nous notons que l'on est bien dans le cadre de la PUM, voir la Figure 1.16.

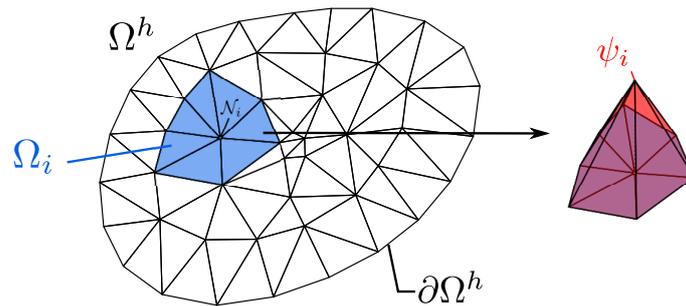


FIGURE 1.16 – Définition du patch Ω_i associé au nœud \mathcal{N}_i et de la fonction "chapeau" ψ_i .

En particulier, les fonctions ψ_i forment bien une partition de l'unité. Il s'agit alors de construire les espaces d'approximation locaux V_i associés à chaque nœud. Ces espaces sont générés à partir d'un ensemble composé de la fonction constante unité et de fonctions reproduisant une connaissance a priori du comportement de la solution dans le sous-domaine considéré, nous avons alors $V_i = \{\phi_j^i\}_{j \in J_i}$. Nous pouvons ainsi améliorer localement l'approximation de la solution par rapport à une approche éléments finis standard en captant par exemple les singularités au voisinage des angles du domaine d'étude par l'introduction

locale autour de ces coins de développements asymptotiques connus pour de telles singularités. La forme du champ inconnu devient alors

$$T^h(t, x) = \sum_{i \in I} \psi_i(x) \sum_{j \in J_i} a_j^i(t) \phi_j^i(x), \quad (1.28)$$

où les a_j^i sont les inconnues du problème. Nous notons que cette approche peut être vue comme une généralisation de la méthode des éléments finis car dans le cas où tous les espaces locaux se réduisent à l'espace des fonctions constantes sur leur sous-domaine (c'est à dire qu'aucun enrichissement n'est fait), nous retombons sur un espace éléments finis classique et le champ inconnu prend la forme tout aussi classique

$$T^h(t, x) = \sum_{i \in I} \psi_i(x) a_j^i(t). \quad (1.29)$$

Dans le cas où de l'enrichissement est introduit, la non-indépendance linéaire des espaces pondérés $\psi_i V_i$ n'est plus garantie. Comme remède, les auteurs proposent de recourir à des techniques de factorisation incomplète ou de pénalisation. Une autre limitation de cette approche concerne l'intégration numérique des formulations variationnelles. Les fonctions spéciales ajoutées peuvent en effet être très complexes et nécessiter un effort conséquent pour leur intégration lors de la construction du problème discrétisé. Le gain en temps de calcul obtenu sur les problèmes de maillage et de remaillage est donc en partie compensé par le coût de l'intégration numérique.

La Méthode des Eléments Finis Etendus (XFEM) La Méthode des Eléments Finis Etendus (XFEM) ou eXtended Finite Element Method, introduite par [74] se base également sur le cadre offert par la PUM pour introduire des discontinuités dans un modèle éléments finis sans avoir à modifier le maillage. Ces discontinuités sont de deux types :

- une discontinuité du champ de déplacement (température, champ primal) modélise la présence d'une fissure traversant le maillage, ou
- une discontinuité des dérivées normales du champ de déplacement (flux thermique, champ dual) rend compte des sauts de déformation (changement de phase) localisés aux interfaces entre les différentes phases mécanique d'un matériau hétérogène.

La méthode des éléments finis étendus (XFEM pour eXtended Finite Element Method) a vu le jour avec comme objectif premier de permettre la propagation de fissures modélisées par un saut de déplacement dans un modèle éléments finis sans en altérer le maillage. Un tel saut de déplacement est introduit en enrichissant l'espace élément finis standard (continu) par une fonction qui saute le long de la fissure. La fissure est représentée par une surface orientée, noté Γ . La fonction d'enrichissement ϕ^Γ est définie de la manière suivante :

$$\phi^\Gamma(x) = H(\text{sign}(n(\tilde{x}) \cdot (x - \tilde{x}))) \quad (1.30)$$

où \tilde{x} est le point le plus proche de x sur Γ et H est une fonction Heaviside :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (1.31)$$

La fermeture de la fissure au niveau de sa pointe est prise en compte par un second enrichissement de l'espace d'approximation à l'aide d'un ensemble de fonctions F_j décrivant le champ de déplacement autour de la pointe de la fissure. Ces fonctions peuvent ainsi traduire une connaissance a priori du champ de déplacement au voisinage de la pointe de la fissure. En pointe de fissure, nous ajoutons alors des fonctions analytiques d'une fissure en milieu infini I^b . Sur tous les éléments coupés par la fissure, nous enrichissons par la fonction de Heaviside construite à partir du level-set qui permet de rendre compte de la discontinuité I^r . Dans le cas d'une interface entre matériaux différents, les dérivées normales du

déplacement étant discontinues, nous enrichissons tous les éléments coupés par la fonction distance I^v , voir la Figure 1.17.

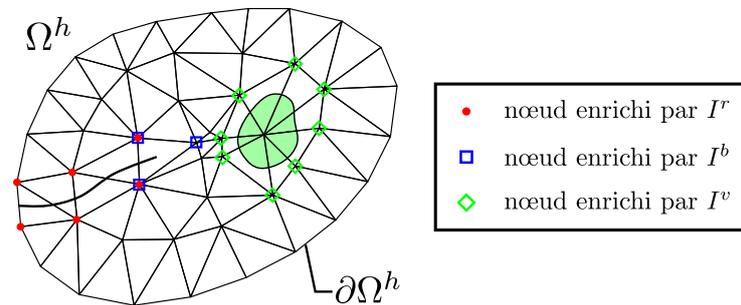


FIGURE 1.17 – Noeuds enrichis à proximité d’une fissure et d’une interface entre différents matériaux.

Pour la problématique de la simulation de la FA cette méthode peut, par exemple, servir pour suivre l’évolution d’une fissure dans la pièce en construction ou bien, si le matériaux utilisé est pur, suivre le front isotherme de changement de phase.

Méthodes de Décomposition de Domaine

Les Méthodes de Décomposition de Domaine (MDD) consistent à partitionner le domaine Ω sur lequel le problème est posé en un ensemble de sous-domaines $\{\Omega_i\}_{i=1}^N$ et à définir, à l’interface de ces sous-domaines, des conditions de raccord permettant de définir un nouveau problème équivalent à l’initial. Elles permettent ainsi de réduire le système matriciel du problème initial en un ensemble de sous-systèmes de taille plus petite et de les résoudre en parallèle. Plusieurs variantes existent, elles sont généralement classées en fonction du type de partition et de raccord qu’elles considère.

Méthode sans recouvrement La décomposition du domaine Ω est constitué d’un ensemble de domaines deux à deux disjoints. Deux types de raccords sont généralement considéré :

- Méthode Primale : dans cette méthode, la continuité des champs primaux à l’interface étant imposée fortement, elle fait directement apparaître dans sa formulation le champ primal d’interface inconnu. Pour résoudre le système matriciel découlant de sa discrétisation, la méthode Balancing Domain Decomposition (BDD) introduite par J. Mandel dans [75], consiste à condenser le système sur champ d’interface et à utiliser un algorithme de type GC. Elle partage un certain nombre des principes de la méthode Finite Element Tearing and Interconnecting (FETI) dont nous détaillons plus en détail le principe au Chapitre 3.
- Méthode Duale : dans cette méthode, la continuité des champs duaux étant imposée de manière forte, elle fait directement apparaître dans sa formulation le champ dual d’interface inconnu. Nous appuyant sur ces méthodes dans nos travaux, nous détaillons leur principe au Chapitre 3.

Méthode avec recouvrement La méthode historique de décomposition de domaine avec recouvrement est celle introduite par Schwarz [76], nous en détaillons le principe au Chapitre 5.

Un autre point important, au vu de la très grande complexité que représente la simulation de la FA, il nous semble nécessaire que le cadre que nous souhaitons développer permette la communication et la coopération de différents codes déjà existants.

1.3.2 Méthodes Itératives Globales-Locales Non-Invasives (IGLNI)

La MEF repose sur un ensemble de concepts théoriques nés dans les années 40-50 et ce n’est cependant que dans les années 60, avec le développement du calcul numérique sur ordinateur qu’elle connut

véritablement son essor. Dans le milieu industriel, une part importante des codes numériques ont commencé à être développés aux décennies suivantes. Leur taille et complexité augmentant au fil du temps, leur structuration ne permet pas toujours, aujourd’hui, une implémentation simple des nouvelles méthodes numériques développées dans le milieu de la recherche. Ainsi, depuis une décennie, dans le contexte des problèmes multi-échelles et des méthodes Globales-Locales, des méthodes itératives dites **non-invasives** (ou **non-intrusives**) ont vu le jour. Leur objectif est de rendre possible l’utilisation de méthodes multi-échelles classiques de réanalyse telle qu’introduite, en premier, dans les travaux, chronologiquement, de Mote [77], de Noor [78] et de Whitcomb (voir [79, 80, 81]) tout en préservant les structures des codes commerciaux. En effet, comme nous allons le voir, un avantage de ces méthodes est la possibilité d’utiliser pour le problème global des codes commerciaux généralistes et au contraire pour le problème local des codes de type recherche, plus avancés mais très spécialisés. La communication entre les deux codes se limitant à l’échange de la trace des champs primaux et duaux (de déplacements et des contraintes) à certaines interfaces que nous détaillerons ensuite, les fonctionnalités et les entrées sorties standards des codes commerciaux suffisent et aucune intervention d’implémentation importante n’est nécessaire. C’est la raison pour laquelle cet ensemble de méthode est communément qualifié de **non-invasives**. D’après [82], elles ont été proposées par O. Allix et mises en œuvre pour la première fois dans [83, 84] afin de traiter localement le phénomène de plastification. Elles sont également développées dans d’autres cadres d’application comme celui des matériaux composites avec un couplage 2D/3D [85], de la propagation de fissure [86], de la prise en compte locale d’incertitudes [87] ou encore l’adaptation locale de maillage [88]. Nous nous sommes donc, dans la suite de nos travaux et afin de répondre aux points (C_2) de notre CDC, intéressés aux méthodes de résolution de problème Global-Local de type non-invasive. Celles-ci empruntent, dans leur principe, l’idée fondatrice qui donna naissance, historiquement, aux méthodes de Schwarz. Nous détaillons donc, brièvement, au Chapitre 5 le principe des méthodes de Schwarz [76], de la méthode itérative proposée par Whitcomb [79] puis finalement, de manière plus développée, des méthodes IGLNI telle que développées par O. Allix [83] sur lesquelles les réalisations de ce chapitre se basent.

Au vu de la complexité et des coûts computationnels importants, engendrés par la simulation de la FA, un cadre permettant l’utilisation des Méthodes de Réduction de modèle (ROM) nous semble nécessaire.

1.3.3 Méthodes de réduction de modèle

Dans le but de résoudre des problèmes d’une complexité toujours plus importante, dont la résolution dépasse souvent les capacités des calculateurs actuels, quand bien même celles-ci ne cessent de croître, un certain nombre de méthodes dites Méthodes de Réduction de modèle (ROM) ont été développées depuis une quinzaine d’années. Cet ensemble de méthodes, contrairement à ce que leur nom pourrait laisser supposer, ne vise pas à simplifier la nature physique du problème considéré ; elles ont pour principe commun de rechercher, par l’emploi de techniques mathématiques spécifiques, une solution proche de la solution « haute fidélité » du problème, en minimisant son temps de calcul.

Un grand nombre de méthodes forme cet ensemble, elles sont, dans la littérature, généralement décomposées en deux groupes (voir, par exemple, les ouvrages [89, 90]), les méthodes dites

- i) *a posteriori*, qui construisent le modèle réduit à partir d’un ensemble de solutions du problème considéré, balayant au mieux les intervalles de définition des paramètres du problème et chacune des solutions étant obtenues à paramètres fixés. La qualité des modèles réduits va fortement dépendre de cet ensemble de solutions. Entrent dans cette catégorie les méthodes de type Proper Orthogonal Decomposition (POD) (premier développement dans [91], méthode en lien avec celle de la Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) [92] et de la décomposition de Karhunen-Loève [93]) et la méthode Reduced Basis (RB) ([94]).
- ii) *a priori* : qui construisent le modèle réduit sans données pré-calculées et à partir d’une forme fixée de recherche de la solution. La méthode PGD est la méthode la plus emblématique de cette catégorie, nous détaillons son principe dans la suite.

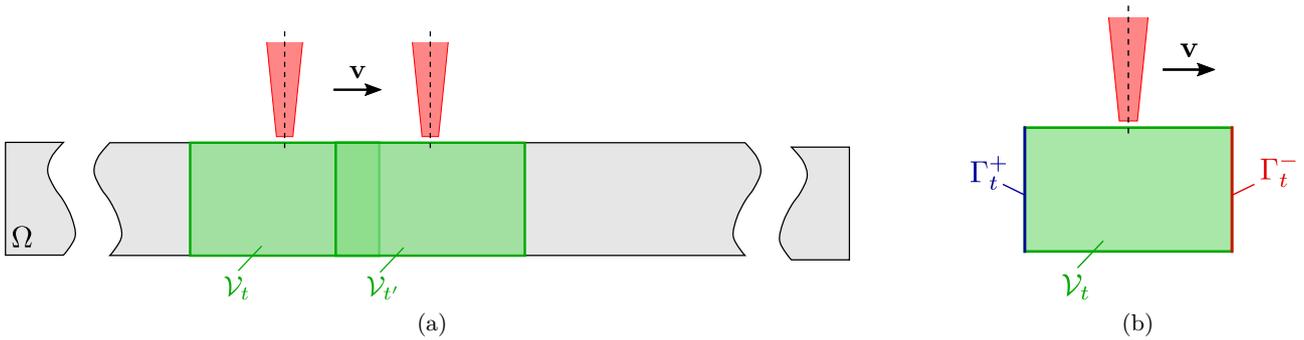


FIGURE 1.18 – Evolution du domaine \mathcal{V}_t suivant la source thermique en (a) et définition de ces frontières en (b).

Ces méthodes ont été appliquées dans de nombreux domaines (voir les ouvrages [89, 90]) et ont montré leur efficacité.

La méthode PGD est encore assez récente, les premiers articles l'introduisant ont été publiés en 2006 [95, 96]. Beaucoup de travaux ont été menés par la suite utilisant cette approche, voir par exemple les articles [97, 98, 99]. Nous l'avons appliquée dans la suite de nos travaux, au Chapitre 5 dans lequel nous détaillons son principe et motivons son choix.

Dans le contexte du soudage, d'autres méthodes de réduction de modèle ont été utilisées. C'est le cas par exemple dans l'article [5] où, se basant sur une formulation particulière du problème thermique, les auteurs construisent un modèle réduit efficace grâce à la méthode d'hyper-réduction. Ce chapitre s'approchant de ces développements, nous en détaillons les différentes composantes.

La première est l'écriture du problème thermique dans le repère mouvant de la source de chaleur développée par [100]. Les auteurs considèrent le balayage d'une plaque par une source thermique, le matériau étant supposé linéaire homogène et isotrope, le problème ne présente pas d'invariance matérielles lorsque la source bouge. Celle-ci est supposée constante et avoir un mouvement rectiligne et uniforme. Les auteurs définissent ensuite un domaine \mathcal{V}_t , comme le montre la Figure 1.18a, suivant la source et dans lequel (comme nous avons pu le voir numériquement au Chapitre 2), ils supposent l'établissement rapide d'un régime thermique stationnaire. Ainsi, en ayant choisi le domaine \mathcal{V}_t suffisamment grand pour pouvoir supposer la matière extérieure non affectée thermiquement, ils résolvent uniquement l'équation de la chaleur linéaire et stationnaire. Ils imposent de plus, sur les frontières Γ_t^+ et Γ_t^- , illustrées à la Figure 1.18b, où le flux de matière n'est pas nul ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \neq 0$ avec \mathbf{n} la normale sortante et \mathbf{v} le vecteur vitesse de la source) une condition de flux thermique nul.

Les auteurs de [5], utilisent une première simulation éléments finis afin de déterminer la taille du volume de contrôle autour de la source. Une fois le régime stationnaire établi, ils utilisent un critère sur la variation temporelle du champ thermique ($\dot{T} \geq 0.1 C^\circ \times s^{-1}$) pour déterminer sa taille ainsi que les températures sur les frontières Γ_t^+ et Γ_t^- qui serviront ensuite au calcul de la solution stationnaire.

La seconde composante de leurs travaux est la construction d'un modèle réduit par l'utilisation de la méthode d'Hyper-Réduction (HR) introduite par [101]. La mise en place de cette méthode commence par la construction d'un modèle réduit de type Proper Orthogonal Decomposition (POD). Les auteurs démontrent d'ailleurs, numériquement, le gain que procure l'application de la méthode POD dans le repère mouvant, où 1 mode seulement contient 99% de l'énergie, par rapport à une application sur le domaine entier où plus de 140 modes sont nécessaires pour retrouver 99% de l'énergie de la solution éléments finis. Cependant, comme ils l'indiquent, quand bien même la solution d'un problème mécanique est recherchée dans un espace de dimension inférieure (le nombre de modes POD sélectionnés), la résolution et surtout le calcul du système à résoudre avec l'intégration des différents termes sur l'ensemble du domaine peut

encore être cher, surtout lorsque des lois de comportement complexes, faisant intervenir de nombreuses variables internes sont utilisées. L'idée de la méthode HR pour diminuer ce coût, est d'introduire un domaine d'intégration réduit (RID). Les éléments sélectionnés pour former le RID sont ceux où les transformations les plus significatives apparaissent, ils sont déterminés à l'aide d'une procédure itérative détaillée dans [101]. Dans [5], les auteurs choisissent comme critère les valeurs maximales des gradients thermiques dans la direction de translation de la source thermique, i.e. \mathbf{v} , de chacun des modes POD sélectionnés.

Une fois le modèle hyper-réduit construit, ils l'utilisent pour résoudre l'équation de la chaleur statique dans le domaine mouvant et obtiennent des réductions de coût de calcul très significatifs, un rapport de temps de calcul de 10^7 entre la résolution hyper-réduite et la solution de référence éléments finis. Notons que la construction de la première base réduite nécessite la résolution du problème instationnaire sur plusieurs pas de temps (suffisant pour atteindre la stationnarité). Observons que la qualité du modèle réduit dépend fortement de la sélection des bons *snapshots*.

Plus récemment, d'autres travaux ont introduit un cadre multi-échelle afin de capter finement, lors de la résolution numérique de l'équation de la chaleur linéaire et instationnaire, les gradients thermiques intenses et locaux, générés par une source de chaleur mobile, cf. [102]. Les auteurs introduisent un patch local, suivant la source de chaleur dans son mouvement, superposé et couplé à un domaine global. Le couplage est réalisé surfaciquement par la méthode du multiplicateur de Lagrange. Les maillages des domaines locaux et globaux n'étant pas nécessairement compatibles des tests et calculs d'intersections sont nécessaires pour s'assurer de la précision des calculs d'intégration des différents termes de la formulation variationnelle. Comme nous le détaillerons plus au Chapitre 5, les auteurs modifient la formulation du problème dans le patch afin de se débarrasser des étapes de projections des champs thermiques entre les deux domaines, nécessaires à cause de l'aspect incrémentale en temps de la stratégie de résolution. Grâce à cette modification, ils construisent un modèle réduit, sur la base de la méthode POD. Dans [103], les mêmes auteurs réutilisent ce cadre pour l'étendre au cas de l'équation de la chaleur nonlinéaire et construisent grâce à la méthode d'HR un modèle réduit.

L'ensemble des différents points que nous venons de mentionner nous ont permis de définir le CDC que nous avons détaillé en introduction. Au regard des différents critères ($\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_5$), le cadre multi-modèles et multi-échelles Arlequin nous semble être la base idéale pour développer des stratégies de simulation numériques permettant d'y répondre. Ce choix est motivé par, premièrement, les avantages que procure la nature volumique de son couplage comme : i) une grande flexibilité permettant de coupler des sous-domaines partiellement ou totalement recouvrants avec des discrétisations incompatibles, ii) la possibilité de réaliser de véritables couplages multi-échelles, iii) de bonnes performances des solveurs utilisés pour la résolution des systèmes matricielles mixtes en découlant,... et, deuxièmement, par l'ensemble des travaux déjà réalisés jusqu'à ce jour dont la section suivante propose un tour d'horizon non-exhaustif. Aussi, les réalisations faites dans les chapitres suivants nous rassureront et nous conforteront dans ce choix.

Dans la section suivante nous récapitulons les différents travaux effectués avec le cadre Arlequin, puis nous détaillons la définition des différents ingrédients et enfin développons l'écriture d'un problème thermique instationnaire linéaire dans ce cadre.

1.4 Le cadre Arlequin

1.4.1 Généralités et différentes applications du cadre Arlequin

Le cadre Arlequin a été développé par H. Ben Dhia au laboratoire MSSMat [104, 105]. Il a déjà permis de coupler des modèles de natures et complexités diverses. Les premiers travaux d'analyse mathématique [106] et de mise en œuvre numérique [107] ont été réalisés dans le cadre de la thèse de G. Rateau [108]. Le cadre a notamment été utilisé en mécanique pour coupler un modèle poutre avec un modèle plaque $2D$ ou d'inclure un modèle fissuré à un modèle sain. Ensuite le domaine d'application du cadre Arlequin

s'est élargi avec par exemple son application au domaine du contact, où il est utilisé pour zoomer sur les zones de contact et aller vers la prise en compte de phénomènes microscopiques [109, 110, 111, 112]. Il est aussi développé pour la modélisation des matériaux composites [113, 114, 115, 116], pour le couplage d'un modèle 3D et coque [117], pour coupler des modèles discrets et continus ou atomistiques et continus [118, 119, 120, 121, 122, 123], granulaires et continus [124], déterministes et stochastiques [125], ou encore réduits [126, 127]. La propagation de fissure et de l'endommagement avec premièrement la thèse de O. Jammond [128] où de la méthode XFEM est utilisée [129] et l'incompressibilité prise en compte. Ensuite ces travaux ont été étendus à la dynamique dans le cadre de la thèse de K. Abben [130]. En dynamique, le cadre avait déjà été utilisé pour simuler la propagation d'ondes hautes fréquences dans un domaine à deux échelles spatiales [131]. L'utilisation multi-patch du cadre ainsi que la résolution parallèle des systèmes numériques en découlant ont été étudiées dans le cadre de la thèse de N. Elkhodja [132].

Les différents domaines introduits pouvant se recouvrir totalement ou partiellement, le cadre Arlequin possède une grande flexibilité. De plus, contrairement aux autres méthodes, le cadre Arlequin raccorde les modèles non pas de manière surfacique mais en volume. Cette caractéristique, comme nous allons le voir plus tard, apporte l'avantage d'avoir des termes dans les systèmes d'équation plus homogènes et donc des systèmes matriciels mieux conditionnés. Dans les zones de coexistences, le modèle global est obtenu par partition des différents modèles avec l'introduction de coefficients de pondération. La construction du cadre Arlequin nécessite donc en tout trois ingrédients :

- une décomposition du domaine global en sous-domaines avec recouvrement,
- une répartition des énergies de chaque modèle par l'introduction de coefficients de pondération,
- définir des opérateurs de couplages dans des zones de collage entre chacun des modèles.

Nous développons dans la sous-section suivante la formulation du problème thermique dans ce cadre en détaillant l'ensemble des ingrédients nécessaires à son établissement.

1.4.2 Formulation du problème dans le cadre Arlequin

Pour développer l'écriture du problème thermique dans le cadre Arlequin le domaine Ω est décomposé en deux domaines ouverts Ω_g et Ω_l (voir Figure 1.19) qui forment une partition du domaine $\Omega : \Omega = \Omega_g \cup \Omega_l$, où Ω_g et Ω_l dénotent les domaines globaux et locaux avec un recouvrement $\Omega_r = \Omega_g \cap \Omega_l$ de mesure non nulle. Les champs de température globaux et locaux, à l'instant t , sont notés $T_g(t)$ et $T_l(t)$, respectivement. La source locale de chaleur est supposée totalement incluse dans Ω_l . Ensuite Ω_r est décomposé en deux sous-domaines sans recouvrement : Ω_c la zone de "collage" de mesure non nulle et Ω_f une zone libre.

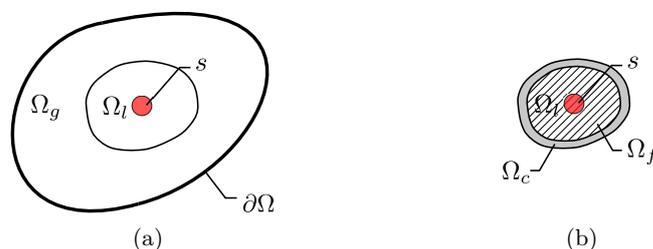


FIGURE 1.19 – Exemple de partition du domaine dans le cadre Arlequin pour le problème thermique.

Ainsi, les deux modèles thermiques définis sur Ω_g et Ω_l coexistent dans la zone de superposition (ici Ω_l entièrement). Afin respecter la physique du problème et ne pas sommer plusieurs fois la même énergie thermique celle-ci est distribuée entre les deux modèles. Pour cela une partition de l'unité est introduite à l'aide de deux coefficients : α_i , $i = g, l$, définis sur Ω et vérifiant :

$$\alpha_g + \alpha_l = 1, \quad \text{in } \Omega, \quad (1.32a)$$

$$\alpha_g = 0, \quad \text{in } \Omega \cap (\Omega_l \setminus \Omega_c), \quad (1.32b)$$

$$\alpha_l = 0, \quad \text{in } \Omega \setminus \Omega_l. \quad (1.32c)$$

Aussi comme détaillé dans [133], nous imposons aux coefficients de partition d'unité de vérifier la propriété que

$$\text{pour } i = g, l, \exists \alpha_0 > 0; \alpha_i \geq \alpha_0, \text{ dans } \Omega_f. \quad (1.33)$$

Les deux modèles sont ensuite couplés au moyen d'un multiplicateur de Lagrange, permettant d'imposer l'égalité faible de $T_g(t)$ et $T_l(t)$ dans Ω_c . Nous pouvons finalement écrire la formulation Arlequin faible mixte du problème thermique :

Formulation 1.4: Formulation Arlequin faible mixte du problème thermique instationnaire

Soit $T_g(0) = T_0 \in H$ dans Ω_g , $T_l(0) = T_0$ dans Ω_l donnés, $\forall t \in I$, trouver $(T_g(t), T_l(t), \lambda(t)) \in V_g \times V_l \times M$ tel que :

$$\frac{d}{dt} m_g(T_g(t), T_g^*; \alpha_g) + a_g(T_g(t), T_g^*; \alpha_g) + c(\lambda(t), T_g^*) = 0, \quad \forall T_g^* \in V_g, \quad (1.34a)$$

$$\frac{d}{dt} m_l(T_l(t), T_l^*; \alpha_l) + a_l(T_l(t), T_l^*; \alpha_l) - c(\lambda(t), T_l^*) = l_l(T_l^*), \quad \forall T_l^* \in V_l, \quad (1.34b)$$

$$c(\mu, T_g(t) - T_l(t)) = 0, \quad \forall \mu \in M, \quad (1.34c)$$

où les différents opérateurs sont donnés par :

$$m_i(T_i(t), T_i^*; \alpha_i) = \int_{\Omega_i} \alpha_i \rho c_p T_i(t) T_i^* d\Omega, \quad i = g, l, \quad (1.35a)$$

$$a_l(T_l(t), T_l^*; \alpha_l) = \int_{\Omega_l} \alpha_l k (\nabla T_l(t) \cdot \nabla T_l^*) d\Omega, \quad (1.35b)$$

$$a_g(T_g(t), T_g^*; \alpha_g) = \int_{\Omega_g} \alpha_g k (\nabla T_g(t) \cdot \nabla T_g^*) d\Omega + \int_{\partial\Omega_g} k \frac{r_1}{r_2} T_g(t) T_g^* d\Sigma, \quad (1.35c)$$

$$l_l(T_l^*) = \int_{\Omega_l} s(t) T_l^* d\Omega, \quad (1.35d)$$

$$c(\lambda(t), T) = \int_{\Omega_c} \kappa \left(\frac{1}{e^2} \lambda(t) T + \nabla \lambda(t) \cdot \nabla T \right) d\Omega, \quad (1.35e)$$

avec $V_i = H^1(\Omega_i)$ pour $i = g, l$, $M = H^1(\Omega_c)$ et $c(., .)$, l'opérateur de couplage qui, dans ce contexte, est choisi comme un produit scalaire de type énergétique avec e , une longueur caractéristique et κ un coefficient homogène à une conductivité. Avec cette configuration, le multiplicateur de Lagrange est homogène à un champ thermique ce qui conduit à des systèmes Arlequin discrets plus homogènes et donc plus facilement inversibles comme nous le verrons dans le Chapitre 3.

1.5 Conclusion

Au regard des critères que nous nous sommes fixés ($\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_5$), nous avons choisi comme base de développement d'un cadre de modélisation de la fabrication de pièce-FA par procédé SLM, le cadre

multi-modèles et multi-échelles Arlequin. Les chapitres qui suivent développent, dans ce contexte, des adaptations du cadre Arlequin permettant de répondre à certains de ces critères.

En effet, le Chapitre 2 propose une méthodologie multi-échelle, basée sur le cadre Arlequin, afin de traiter efficacement la simulation du problème thermique transitoire macroscopique et visant ainsi les critères $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4)$

Le Chapitre 3 compare les vitesses de convergence du solveur Finite Element Tearing and Interconnecting (FETI) appliqué aux systèmes numériques discrets issus de la discrétisation de type éléments finis de problèmes écrits sous forme décomposée en deux sous-domaines avec des raccords de type surfacique ou volumique. Il y est également développée une méthode de couplage « compatible ». Les critères visés par ces développements sont, par ordre d'importance, (\mathcal{C}_3) et (\mathcal{C}_2) .

Le Chapitre 4, propose une extension des méthodes IGLNI dans le but de valider le critère (\mathcal{C}_2) .

Finalement, le Chapitre 5, visant le critère (\mathcal{C}_3) , explore la possibilité, pour la problématique thermique macroscopique de la simulation du procédé SLM, d'utiliser localement une méthode de réduction de modèle.

Chapitre 2

Une nouvelle stratégie multi-échelle pour le problème thermique du procédé de FLLP

2.1	Introduction	
2.2	Développement du modèle macroscopique additif	
2.2.1	Modélisation de l'aspect additif	
2.2.2	Formulation du problème thermique additif avec changement de phase sur $\Omega_N \times I_N$	
2.2.3	Formulation du problème thermique additif dans le cadre Arlequin . .	
2.3	Schéma de résolution numérique	
2.3.1	Discretisation spatiale du problème	
2.3.2	Algorithme de résolution	
2.3.3	Une stratégie multi-échelle pour le procédé FLLP	
2.4	Résultats numériques de simulation	
2.4.1	Illustration de la stratégie	
2.4.2	Comparaison avec une méthode issue de la bibliographie	
2.4.3	Vers la réduction de modèle	
2.5	Conclusions	

2.1 Introduction

Ce chapitre est dédié au développement d'une stratégie originale, basée sur le cadre multi-modèle Arlequin qui soit à la fois performante et précise, pour la résolution du problème thermique multi-échelle et additif issu de la modélisation du procédé SLM.

Nous commençons par détailler le modèle thermique, entrant dans le cadre des modélisations macroscopiques détaillées au chapitre précédent. Nous donnons ensuite une écriture mathématique fine relativement à ce qui existe à notre connaissance dans la littérature, de l'aspect évolutif du domaine de calcul au cours du procédé en gardant une certaine flexibilité, nous permettant de rentrer dans le cadre des différentes stratégies évoquées au chapitre précédent.

Nous développons ensuite une formulation de ce problème dans le cadre Arlequin avec l'introduction d'un patch dans la zone sous le laser, c'est à dire là où le problème est plus complexe. Cette décomposition permet d'introduire les discrétisations fines en espace nécessaires à la captation précise des forts gradients thermiques et de localiser le traitement du phénomène non-linéaire de changement de phase. Aussi la flexibilité du cadre Arlequin facilite, par le mouvement du (ou des) patch au suivi de ces zones de complexité, pour accompagner les trajectoires de lasage. Nous formulons également des recommandations permettant de s'assurer de la pertinence de cette nouvelle écriture.

Après avoir exposé l'écriture du problème dans le cadre Arlequin avec un seul patch, la simulation d'un problème thermique simplifié mais proche de la modélisation du procédé de SLM, nous permet d'identifier deux échelles. Nous généralisons alors l'écriture à deux patches, un premier dit Patch-Micro, placé directement sous le laser et un Patch-Meso, plus étalé derrière le laser. Nous détaillons également comment la translation de ces patches au cours du mouvement du laser nous permet de simuler l'addition de matière. Ensuite nous détaillons les différents algorithmes que nous avons mis en place pour simuler l'évolution du domaine et traiter les différentes non-linéarités du problème. Nous présentons les résultats obtenus par simulation de la fabrication d'un mur en alliage de titane Ti-6Al-4V ainsi que du lasage de deux couches d'aluminium.

La fin du chapitre est consacrée à l'analyse des champs thermiques obtenus par la simulation. Cette analyse nous a inférer l'intérêt de l'utilisation de méthodes de réduction de modèles. Ce point fera l'objet du Chapitre 5.

Ce chapitre est composé de trois sections. La première, Section 2.2, est consacrée à une modélisation macroscopique du problème thermique. Nous commençons, à la Sous-Section 2.2.1 par développer l'écriture mathématique de l'aspect évolutif du domaine de calcul au cours du procédé. Ensuite La Sous-Section 2.2.2 précise l'ensemble des hypothèses faites et donne la formulation forte ainsi que faible du problème mono-modèle. La Sous-Section 2.2.3 est réservée à l'écriture bi-modèle de ce problème dans le cadre Arlequin avec l'introduction d'un Patch couvrant la zone critique. Plusieurs préconisations sont données afin de s'assurer du bon fonctionnement du cadre. La Section 2.3 développe les schémas de résolution numérique utilisés. La Sous-Section 2.3.1 donne la forme discrétisée en espace de la formulation Arlequin du problème et la Sous-Section 2.3.2 les différents algorithmes considérés pour sa résolution. La dernière sous-section, Sous-Section 2.3.3, développe la stratégie de simulation du procédé FLLP se basant sur une extension multi-patch de la formulation Arlequin bi-modèle du problème thermique. Finalement la Section 2.4 expose les résultats obtenus par application de cette stratégie pour, à la Sous-Section 2.4.1, la construction d'un mur en alliage de titane Ti-6Al-4V, à la Sous-Section 2.4.2, le lasage de deux couches d'aluminium nous permettant de nous comparer à la littérature. La Sous-Section 2.4.3 présente l'analyse des champs thermiques obtenus. La Section 2.5 termine ce chapitre par quelques conclusions.

2.2 Développement du modèle macroscopique additif

Nous développons premièrement l'écriture mathématique de l'aspect évolutif du domaine de calcul au cours du procédé.

2.2.1 Modélisation de l'aspect additif

Comme nous l'avons déjà évoqué, le point caractéristique majeur du procédé de FLLP et plus généralement de la FA, est la construction progressive de la pièce désirée (le métal se transforme de l'état de poudre à solide continu, en passant par une phase fluide) au moyen de variations thermiques subies, générant des transformations de phase locales et résultant en un petit incrément matière, jusqu'à obtenir la forme finale de la pièce. Bien qu'important, surtout si l'on cherche ensuite à raffiner la modélisation, ce point est généralement traité grossièrement dans la littérature (voir par exemple [42]). Pour mimer le plus soigneusement possible - sans toutefois introduire une complexification excessive du problème à résoudre - par une représentation moins grossière de l'évolution du domaine occupé par la pièce en construction au cours du temps, nous considérons une collection de domaine Ω^N , $0 \leq N \leq N_f$ (N_f faisant référence au dernier incrément matière solide) tel que $\Omega^N \subsetneq \Omega^{N+1}$, pour chaque $0 \leq N \leq N_f - 1$. Chaque Ω^N est inclus dans \mathbb{R}^d (avec ici $d = 2$ ou 3) et supposé borné et suffisamment régulier. Plus précisément, la procédure de génération des domaines se déroule selon les étapes suivantes :

- Initialisation : le premier domaine spatial de calcul est noté Ω^0 . Il s'agit du domaine dont la fermeture est occupée par le support de fabrication du bac principal de la machine. Un incrément matière $\delta\Omega^0$ est ensuite ajouté à Ω^0 , à l'instant t_a^0 , formant un nouveau domaine noté Ω^1 . A ce dernier, nous imposons une température initiale $T_0^1 = T_r$ (température ambiante ou celle de préchauffage de la poudre). L'incrément matière est ensuite balayé par le laser pendant une courte période de temps $\tau_a^1 (= t_a^1 - t_a^0)$. Ce temps est pris égal au temps que met le laser pour balayer cet incrément, il est donc conditionné par la vitesse du laser. Nous calculons alors l'évolution du champ thermique $T^1(x, t)$, pour tout $x \in \Omega_1$ et $t \in I_1 =]t_a^0 = 0, t_a^1 = \tau_a^1]$ (intervalle de temps), en résolvant le problème instationnaire de la chaleur que nous détaillerons dans la suite.
- Itération courante : le domaine Ω^{N-1} (avec $N > 1$) étant formé et son champ thermique T^{N-1} étant connu, un nouvel incrément matière $\delta\Omega^{N-1}$ lui est ajouté à l'instant t_a^N , formant un domaine augmenté Ω^N . Nous résolvons sur Ω^N le problème thermique instationnaire pour obtenir le champ $T^N(x, t)$ avec $x \in \Omega^N$ et $t \in I_N =]t_a^{N-1}, t_a^N]$ (avec $t_a^N = t_a^{N-1} + \tau_a^N$, assumant explicitement que $\tau_a^N > 0$) en prenant un champ thermique initial dans Ω^N égal à :

$$\forall x \in \Omega^N \quad T^N(x, t_a^{N-1}) = \begin{cases} T^{N-1}(x, t_a^{N-1}) & \text{si } x \in \Omega^{N-1} \\ T_r & \text{si } x \in \delta\Omega^{N-1} \end{cases} \quad (2.1)$$

avec T_r la température ambiante.

- Ces itérations sont poursuivies jusqu'à atteindre la forme finale de la pièce.

Précisons ici qu'un temps de refroidissement, correspondant, entre autres, au temps d'étalement d'une nouvelle couche lorsque le balayage de la précédente couche est réalisé, est pris en compte dans la définition de certaines périodes τ_a^k . Signalons ici que pendant ces incréments de temps, une fois l'incrément matière balayé, la source de chaleur laser est coupée mais nous continuons la simulation thermique (refroidissement) sur le domaine Ω_N pendant ce temps.

Nous avons donc plusieurs périodes qui apparaissent. Un exemple de séquences temporelles est donné à la Figure 2.1. Nous notons τ_l^M le temps pris par le balayage de la couche M , τ_c^M le temps de refroidissement, τ_a^N la période de temps entre les incréments de matière $\delta\Omega^N$ et $\delta\Omega^{N+1}$ et finalement τ_d le pas de temps du problème de diffusion lorsqu'une discrétisation temporelle est introduite (nous pouvons imaginer faire varier ce dernier en fonction du domaine considéré).

A partir de cette écriture du processus d'addition de matière, pour résoudre le problème thermique du procédé de FLLP, nous devons résoudre une séquence de problèmes thermiques instationnaires que nous notons (\mathcal{P}_N) , définis sur Ω^N , pour $N = 1, \dots, N_f - 1$, pour tout $t \in I_N (=]t_a^{N-1}, t_a^N])$ dont le modèle physique est présenté au paragraphe suivant.

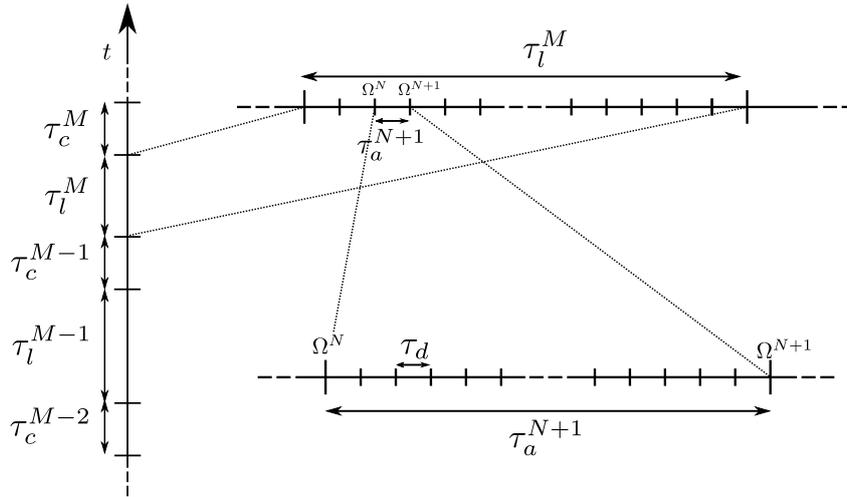


FIGURE 2.1 – Exemple de séquence temporelle pour la construction d’une pièce par FLLP.

Ces derniers peuvent présenter des formes particulières afin de construire la pièce désirée, surtout ceux formant les surfaces de la pièce. Cependant, dans les étapes de réalisation d’un pièce-FA, nous avons mentionné dans l’introduction que, à partir de la CAO de la pièce, une voxélisation, i.e. un découpage de la pièce en couche est réalisé, afin de définir les étapes que la machine FA doit suivre. Nous pouvons imaginer que l’utilisation de ces données faciliterait grandement la définition des formes des incréments matière, cf. Figure 2.2.

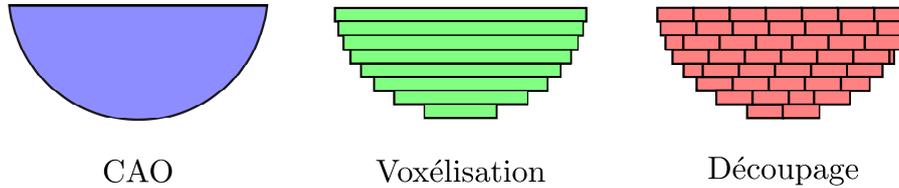


FIGURE 2.2 – Exemple de définition des incréments matière à partir de la voxélisation de la CAO de la pièce.

Observons qu’avec la modélisation d’ajout de matière adoptée nous maîtrisons le choix de la taille des incréments matières et ainsi s’étendre au cas des approches par couche entière.

2.2.2 Formulation du problème thermique additif avec changement de phase sur $\Omega_N \times I_N$

Dans cette sous-section, nous allons donner une formulation forte puis faible de l’équation de la chaleur, avec prise en compte du phénomène de changement de phase.

Formulation forte

Le modèle physique que nous adoptons est basé sur celui développé par [134]. Pour développer l’écriture mathématique du problème thermique (\mathcal{P}_N), nous considérons que le procédé a atteint un niveau de fabrication où la matière dense occupe la fermeture du domaine Ω^N durant l’intervalle de temps associé $I_N =]t_a^{N-1}, t_a^N]$. Sa frontière $\partial\Omega^N$ est partitionnée en trois parties afin de prendre en compte les différents échanges thermiques avec le milieu environnant ; à savoir, $\Gamma_i^N(t)$ pour la partie de la frontière soumise au flux du laser, Γ_p^N pour sa partie en contact avec la poudre non-lasée (celle-ci n’évolue pas sur l’intervalle

I_N car Ω_N est fixé) et $\Gamma_{cr}^N(t)$ pour la partie en interaction avec l'air ou l'atmosphère de la chambre de la machine de la FA. Le même exemple de la Tour Eiffel (miniaturisée) au temps t est illustré par la Figure 2.3a. Précisons que ces frontières évoluent avec l'avancement du laser. La Figure 2.3b illustre ces trois frontières à trois instants de l'intervalle I_N notés $t_{i-1} < t_i < t_{i+1}$.

Dans la suite, afin d'alléger les notations et sauf risque d'ambiguïté, nous omettons de faire référence à l'exposant N (faisant référence au domaine Ω^N durant l'intervalle de temps I_N). Par ailleurs dans les écritures du problème nous ferons comme si $I_N =]t_a^{N-1}, t_a^N]$ vaut $I =]0, \tau_a]$ (réinitialisation).

La formulation locale du problème thermique (\mathcal{P}_N), maintenant noté (\mathcal{P}) avec ces allègements, s'écrit alors :

Formulation 2.1: Formulation locale-forte du problème thermique instationnaire (\mathcal{P})

Etant donnés $T(0)$ et $\mathcal{F}_l(0)$, les champs thermique et de fraction volumique de liquide initiaux définis sur Ω , trouver pour tout instant $t \in I$, le champ thermique $T(t)$, le champ de flux thermique $\phi(t)$ ainsi que le champ de fraction volumique de liquide $\mathcal{F}_l(t)$ vérifiant le problème aux limites parabolique à valeur initiale suivant :

$$c_{vol}(T(t), \mathcal{F}_l(t)) \frac{\partial T(t)}{\partial t} + \nabla \cdot \phi(t) = Q(T(t), \mathcal{F}_l(t)) \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{Conservation de l'énergie}) \quad (2.2a)$$

$$\phi(t) = -k(T(t), \mathcal{F}_l(t)) \nabla T(t) \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{Loi de Fourier}) \quad (2.2b)$$

$$\mathcal{F}_l(t) = F(T(t)), \quad F \text{ étant donnée} \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{Loi de changement de phase}) \quad (2.2c)$$

$$\phi(t) \cdot \mathbf{n} = -f_l \quad \text{sur } \Gamma_l(t) \quad (\text{Flux de chaleur du laser}) \quad (2.2d)$$

$$\phi(t) \cdot \mathbf{n} = \frac{k_p}{S_p} (T(t) - T_{amb}) \quad \text{sur } \Gamma_p \quad (\text{Conduction équivalente}) \quad (2.2e)$$

$$\phi(t) \cdot \mathbf{n} = \gamma (T_\infty - T(t)) + \sigma \epsilon (T(t)^4 - T_\infty^4) \quad \text{sur } \Gamma_{cr}(t) \quad (\text{Convection et Rayonnement}) \quad (2.2f)$$

$$T(0) = T_0, \text{ et } \mathcal{F}_l(0) = g_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{Conditions initiales}) \quad (2.2g)$$

où les symboles gras sont des champs ou opérateur vectoriels, $\nabla \cdot$ est l'opérateur gradient et \mathbf{n} le vecteur unitaire normal et sortant à la surface $\partial\Omega$.

Afin de prendre en compte le phénomène de changement de phase, un champ noté \mathcal{F}_l décrivant la fraction volumique locale de liquide est introduit. Dans ce système l'équation (2.2a) exprime, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la conservation d'énergie sur un Volume Élémentaire Représentatif (VER) pour lequel nous avons ajouté les trois hypothèses simplificatrices fortes suivantes :

Hypothèse 2 (H2). *Aucune porosité ; le VER est constitué soit de phase liquide \mathcal{F}_l soit de phase solide \mathcal{F}_s .*

Hypothèse 3 (H3). *Aucun mouvement de convection dans la phase fluide.*

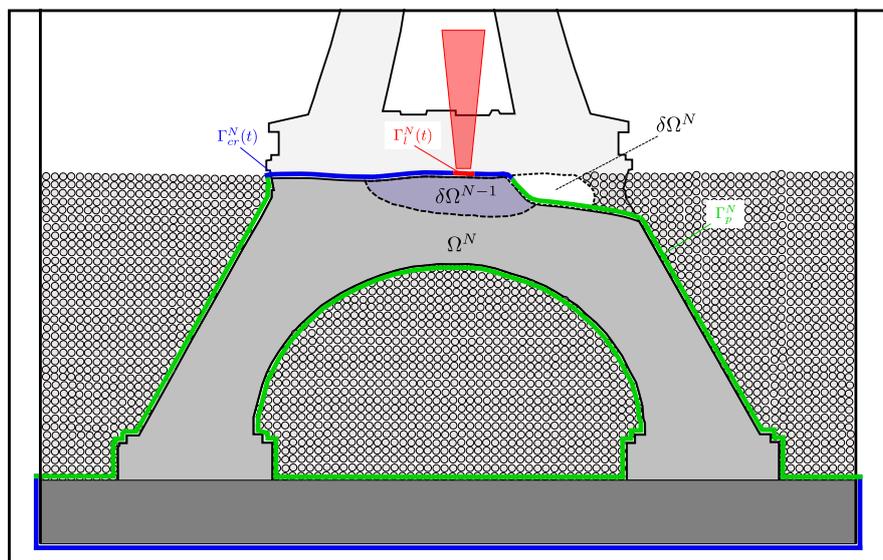
Hypothèse 4 (H4). *Aucune transition liquide/vapeur n'est présente.*

Ainsi, c_{vol} dénote la capacité thermique de mélange et s'exprime par

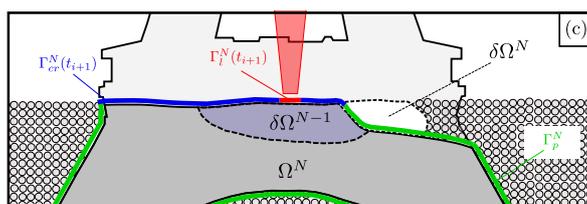
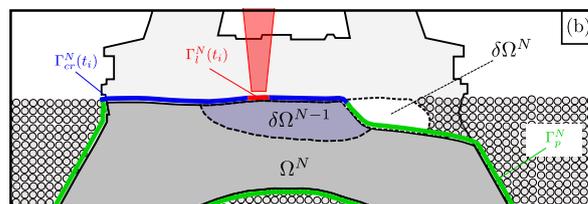
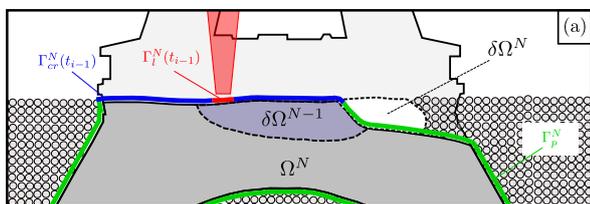
$$c_{vol}(T(t), \mathcal{F}_l(t)) = (1 - \mathcal{F}_l(t)) \rho_s(T(t)) c_s(T(t)) + \mathcal{F}_l(t) \rho_l(T(t)) c_l(T(t)), \quad (2.3)$$

où ρ_s , c_s et ρ_l , c_l sont respectivement les masses volumiques et les capacités thermiques des phases solides et liquides. Rappelons que

$$0 \leq \mathcal{F}_s, \mathcal{F}_l \leq 1. \quad (2.4)$$



(a)



(b)

FIGURE 2.3 – Illustration en (a) des frontières du modèle thermique posé sur un domaine Ω^N , simulant la fabrication de la tour Eiffel et évolution en (b) de celles-ci aux instants t_{i-1} , t_i , t_{i+1} appartenant à l'intervalle I_N .

Le second membre de l'équation (2.2a) est défini par :

$$Q(T(t), \mathcal{F}_l(t)) = -\delta H(T(t)) \frac{\partial \mathcal{F}_l(t)}{\partial t}. \quad (2.5)$$

Il exprime l'effet de la chaleur latente de changement de phase, le terme $\delta H(T(t))$ est donné par :

$$\delta H(T(t)) = \int_{T_0}^{T(t)} (\rho_l(\theta)c_l(\theta) - \rho_s(\theta)c_s(\theta)) d\theta + \rho_l L, \quad (2.6)$$

avec L la chaleur latente de changement de phase pour la transition liquide/solide. La température T_0 est une température de référence à laquelle les valeurs des différents paramètres matériaux sont connues. Dans la loi de Fourier exprimée à l'équation (2.2b) le coefficient k est la conductivité de mélange s'exprimant comme :

$$k(T(t), \mathcal{F}_l(t)) = (1 - \mathcal{F}_l(t))k_s(T(t)) + \mathcal{F}_l(t)k_l(T(t)), \quad (2.7)$$

où k_s et k_l sont les conductivités des phases solide et liquide respectivement, supposées isotropes. Nous faisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 5 (H5). *Tous les paramètres thermiques des matériaux, i.e. ρ_s , ρ_l , c_s , c_l , k_s , k_l sont positifs et bornés.*

L'équation (2.2c) exprime la loi non-linéaire de changement de phase, notée F , liant la fraction volumique de liquide à la température. Celle-ci dépend des phénomènes qui prennent place lors de la fonte et de la solidification.

Une loi empirique pour la solidification est donnée dans l'article [134]. Elle est illustrée par la Figure 2.4, où T_S et T_L sont les températures de solidus et de liquidus, respectivement.

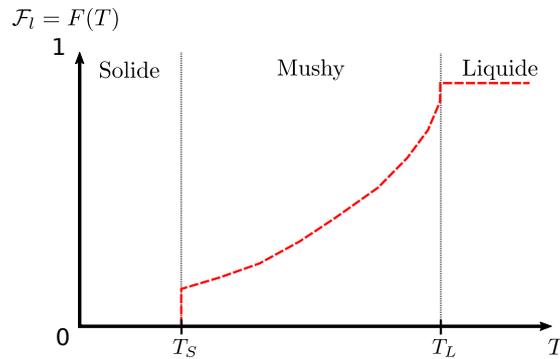


FIGURE 2.4 – Exemple d'une loi liant fraction volumique de liquide à la température provenant de [134] lors de la solidification.

Cette relation n'est pas toujours accessible pour un matériau donné que ce soit de la transition solide-liquide ou l'inverse. Il est cependant possible de définir une loi régularisée comme par exemple une loi linéaire illustrée à la Figure 2.5a. Comme dans [135], nous avons considéré, pour l'alliage de Titane, un polynôme d'Hermite cubique dont une représentation est donnée à la Figure 2.5 et l'expression analytique par :

$$\mathcal{F}_l(T) = \begin{cases} 0, & \text{si } T < T_S, \\ a(T - T_S)^3 + b(T - T_S)^2 + c(T - T_S) + d, & \text{si } T_S \leq T \leq T_L, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Les équations (2.2d), (2.2e) et (2.2f) expriment les différentes conditions limites. Pour le modèle du laser nous nous sommes placés dans le même cadre d'hypothèses détaillé au Chapitre 1 avec un modèle surfacique de type gaussien. Aussi nous avons choisi d'exclure entièrement la poudre du domaine de calcul

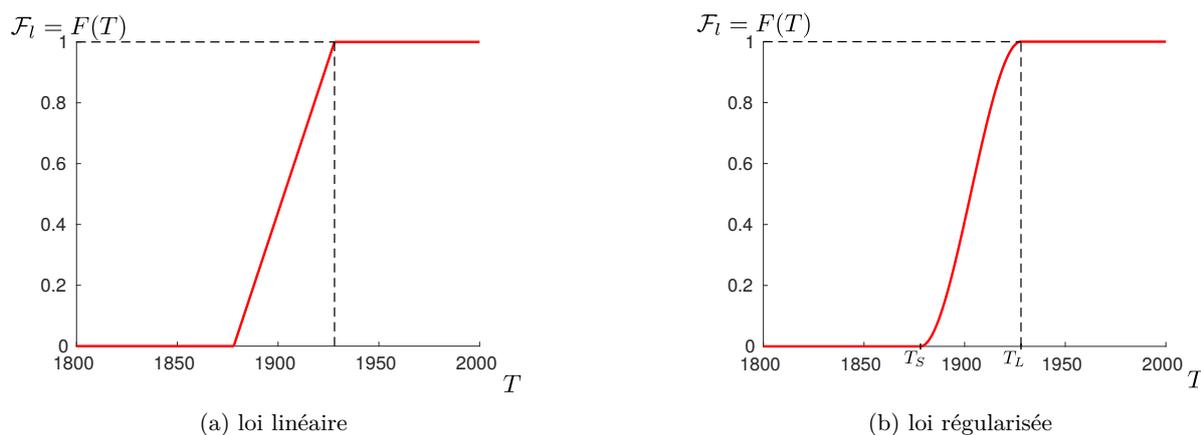


FIGURE 2.5 – Lois liant fraction volumique de liquide à la température pour l'alliage de titane.

en introduisant la même condition équivalente de conduction avec la poudre définie par [42]. Ainsi seule la matière dense est considérée. Finalement, les échanges thermiques entre la matière solide et liquide avec l'atmosphère de la chambre sont modélisés par une condition de convection-rayonnement donnée par l'équation (2.2f) où γ est le coefficient de convection thermique, σ la constante de Stefan-Boltzmann, ϵ l'émissivité et T_∞ la température à l'infini prise égale à celle ambiante, notée T_{amb} .

Même simplifié, le problème reste suffisamment complexe pour que sa résolution analytique soit possible. L'approximation numérique constitue alors un outil essentiel. Pour l'approximation en espace; la MEF est incontournable. De type Ritz-Galerkin, cette méthode ne s'applique pas à la formulation forte du problème, mais celle faible. Nous détaillons donc dans la sous-section suivante la formulation faible en espace du problème.

Formulation faible en espace

Classiquement, en injectant l'équation (2.2b) dans l'équation (2.2a), en multipliant par une fonction test T^* , en intégrant sur Ω et en utilisant la formule de Green, nous obtenons la formulation faible en espace du système (2.2), à chaque pas de temps $t \in I$:

Formulation 2.2: Formulation faible du problème thermique instationnaire (\mathcal{P})

Pour T_0 et \mathcal{F}_0 donnés (comme détaillé à la sous-section 2.2.1), pour tout $t \in I$, trouver $T(t) \in V$ et $\mathcal{F}_l(t) \in L^\infty(\Omega)$ tels que, $\forall T^* \in V$,

$$\mathcal{A}(T(t), \mathcal{F}_l(t), T^*) = \mathcal{G}(T^*) \quad (2.9a)$$

$$\mathcal{F}_l(t) = F(T(t)), \quad F \text{ étant donnée,} \quad (2.9b)$$

où V , l'espace de recherche du champ thermique est naturellement pris comme $H^1(\Omega)$. Les formes \mathcal{A} et \mathcal{G} sont définies par :

$$\mathcal{A}(T(t), \mathcal{F}_l(t), T^*) = a(T(t), \mathcal{F}_l(t), T^*) + b(T(t), \mathcal{F}_l(t), T^*) - r(T(t), T^*) + q(T(t), \mathcal{F}_l(t), T^*), \quad (2.10a)$$

$$\mathcal{G}(T^*) = l(T^*), \quad (2.10b)$$

où les différentes formes sont définies par :

$$a(T(t), \mathcal{F}_l(t), T^*) = \int_{\Omega} c_{vol}(T(t), \mathcal{F}_l(t)) \frac{\partial T}{\partial t}(t) T^* d\Omega \quad (2.11a)$$

$$b(T(t), \mathcal{F}_l(t), T^*) = \int_{\Omega} k(T(t), \mathcal{F}_l(t)) (\nabla T(t) \cdot \nabla T^*) d\Omega \quad (2.11b)$$

$$l(T^*) = \int_{\Gamma_l(t)} f_l T^* d\Sigma \quad (2.11c)$$

$$r(T(t), T^*) = \int_{\Gamma_c} \frac{k_p}{S_p} (T(t) - T_{ext}) T^* d\Sigma \quad (2.11d)$$

$$+ \int_{\Gamma_{cr}(t)} \left[\gamma (T_{\infty} - T(t)) + \sigma \epsilon \left((T(t))^4 - T_{\infty}^4 \right) \right] T^* d\Sigma$$

$$q(T(t), \mathcal{F}_l(t), T^*) = \int_{\Omega} \delta H(T(t)) \frac{\partial \mathcal{F}_l(t)}{\partial t} T^* d\Omega \quad (2.11e)$$

Ce problème a trois sources de non-linéarités. La première est liée au phénomène de changement de phase, la seconde au terme de rayonnement et la troisième à la dépendance thermique des paramètres matériaux $(\rho_s, \rho_l, c_s, c_l, k_s, k_l)$. Par ailleurs, comme nous pouvons le pressentir les gradients thermiques intenses étant très localisés tout comme le phénomène de changement de phase, les demandes numériques pour les modéliser correctement le seront également. Si la résolution de ce problème est envisagée de manière monolithique, les temps de calcul, pour les raisons que nous avons évoquées au Chapitre 1, seront trop importants. Des méthodes multi-modèles et multi-échelles sont nécessaires. Comme motivé au Chapitre 1 nous choisissons le cadre Arlequin. Nous donnons maintenant la formulation du problème thermique pour le procédé FLLP.

2.2.3 Formulation du problème thermique additif dans le cadre Arlequin

Dans cette sous-section nous commençons par donner la formulation faible mixte du problème thermique additif dans le cadre Arlequin avec l'introduction d'un patch recouvrant la zone critique sous le laser. Nous donnons ensuite des recommandations afin d'assurer le bon fonctionnement de ce cadre.

Nous repartons donc du problème thermique présenté à la sous-section 2.2.2. Pour définir les différents ingrédients du cadre Arlequin, le domaine Ω est partitionné en deux sous domaines, ouverts, Ω_G et Ω_L (voir la Figure 2.6) avec recouvrement, noté Ω_o . Les deux modèles indépendants coexistent dans Ω_o décomposée en deux domaines disjoints, Ω_c une zone de couplage et son complémentaire Ω_f , une zone libre (sans couplage), cf. Figure 2.6. Afin de coupler les deux modèles, nous introduisons un champ λ défini dans Ω_c de type multiplicateur de Lagrange volumique permettant d'imposer, au sens faible, l'égalité entre les champs du domaine global et local.

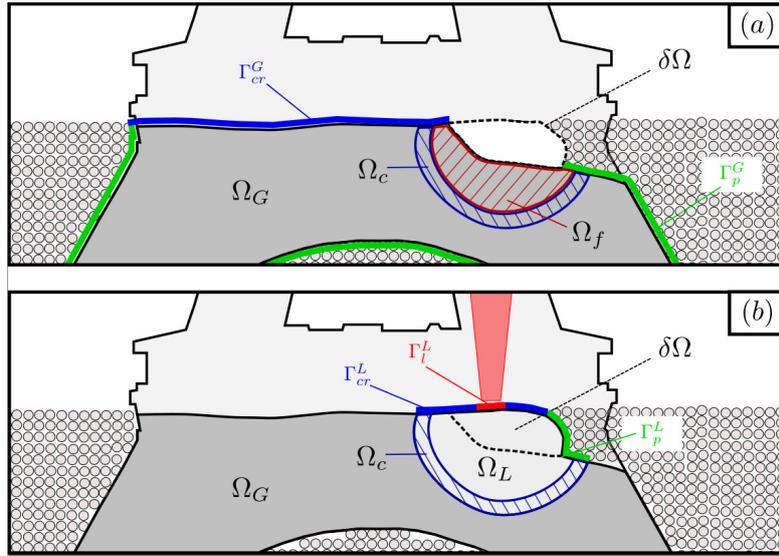


FIGURE 2.6 – Problème thermique écrit dans le cadre Arlequin avec en (a) une illustration du domaine global en gris foncé et en (b) une illustration du domaine local en gris clair.

Afin de respecter la physique du problème et de ne pas considérer plusieurs fois la même énergie, dans Ω_o , celle-ci est distribuée entre les deux modèles. Pour ce faire une partition de l'unité est réalisée au travers de deux coefficients : α_i , $i = G, L$, définis sur Ω , satisfaisant :

$$\alpha_G, \alpha_L \geq 0, \alpha_G + \alpha_L = 1 \text{ dans } \Omega, \alpha_G = 0 \text{ dans } \Omega \cap (\Omega_L \setminus \Omega_c) \text{ et } \alpha_L = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \Omega_L \quad (2.12)$$

La formulation générique du problème dans le cadre Arlequin, notée (\mathcal{P}_A) , donne finalement :

Formulation 2.3: Formulation mixte du problème thermique dans le cadre Arlequin
(\mathcal{P}_A)

Soit $T_G(0), T_L(0)$ donnés, pour tout $t \in I$, trouver $(T_G, T_L, \mathcal{F}_l, \lambda) \in V_G \times V_L \times L^\infty(\Omega_L) \times M$ tels que :

$$\mathcal{A}_G(T_G(t), T_G^*; \alpha_G) + \mathcal{B}(\lambda(t), T_G^*) = 0, \quad \forall T_G^* \in V_G \quad (2.13a)$$

$$\mathcal{A}_L(T_L(t), \mathcal{F}_l(t), T_L^*; \alpha_L) - \mathcal{B}(\lambda, T_L^*) = \mathcal{G}_L(T_L^*), \quad \forall T_L^* \in V_L \quad (2.13b)$$

$$\mathcal{B}(\mu, T_G(t) - T_L(t)) = 0, \quad \forall \mu \in M \quad (2.13c)$$

$$\mathcal{F}_l(t) = F(T_L(t)), F \text{ étant donnée.} \quad (2.13d)$$

où, afin de simplifier le problème, sans perte de généralité, nous supposons que la frontière Γ_l est entièrement incluse dans $\partial\Omega_f \cap \partial\Omega$ (donc hors de la zone de couplage). Les espaces sont définis comme $V_G = H^1(\Omega_G)$, $V_L = H^1(\Omega_L)$, et les formes \mathcal{A}_i ($i = G, L$) et \mathcal{G}_L sont données par

$$\mathcal{A}_G(T_G(t), T_G^*; \alpha_G) = a_G(T_G(t), T_G^*; \alpha_G) + b_G(T_G(t), T_G^*; \alpha_G) - r_G(T_G(t), T_G^*; \alpha_G), \quad (2.14a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_L(T_L(t), \mathcal{F}_l(t), T_L^*; \alpha_L) &= a_L(T_L(t), \mathcal{F}_l(t), T_L^*; \alpha_L) + b_L(T_L(t), \mathcal{F}_l(t), T_L^*; \alpha_L) \\ &\quad - r_L(T_L(t), T_L^*; \alpha_L) + q_L(T_L(t), \mathcal{F}_l(t), T_L^*; \alpha_L) \end{aligned} \quad (2.14b)$$

$$\mathcal{G}_L(T_L^*) = l_L(T_L^*) \quad (2.14c)$$

et les différentes formes pondérées sont définies par

$$a_G(T_G(t), T_G^*; \alpha_G) = \int_{\Omega_G} \alpha_G c_s(T_G(t)) \frac{\partial T_G}{\partial t}(t) T_G^* d\Omega \quad (2.15a)$$

$$a_L(T_L(t), \mathcal{F}_l(t), T_L^*; \alpha_L) = \int_{\Omega_L} \alpha_L c_{vol}(T_L(t), \mathcal{F}_l(t)) \frac{\partial T_L}{\partial t}(t) T_L^* d\Omega \quad (2.15b)$$

$$b_G(T_G(t), T_G^*; \alpha_G) = \int_{\Omega_G} \alpha_G k(T_G(t)) (\nabla T_G(t) \cdot \nabla T_G^*) d\Omega \quad (2.15c)$$

$$b_L(T_L(t), \mathcal{F}_l(t), T_L^*; \alpha_L) = \int_{\Omega_L} \alpha_L k(T_L(t), \mathcal{F}_l(t)) (\nabla T_L(t) \cdot \nabla T_L^*) d\Omega \quad (2.15d)$$

$$l_L(T_L^*) = \int_{\Gamma_L(t)} f_l T_L^* d\Sigma \quad (2.15e)$$

$$\begin{aligned} r_i(T_i(t), T_i^*; \alpha_i) &= \int_{\Gamma_c \cap \partial\Omega_i} \alpha_i \frac{k_p}{S_p} (T_i(t) - T_{ext}) T_i^* d\Sigma \\ &+ \int_{\Gamma_{cr}(t) \cap \partial\Omega_i} \alpha_i \left[\gamma (T_\infty - T_i(t)) + \sigma \epsilon \left((T_i(t))^4 - T_\infty^4 \right) \right] T_i^* d\Sigma \end{aligned} \quad i = G, L \quad (2.15f)$$

$$q_L(T_L(t), \mathcal{F}_l(t), T_L^*) = \int_{\Omega_L} \alpha_L \delta H(T_L(t)) \frac{\partial \mathcal{F}_l}{\partial t}(t) T_L^* d\Omega \quad (2.15g)$$

Finalement, \mathcal{B} , l'opérateur de couplage qui, à nouveau, est choisi comme un produit scalaire énergétique :

$$\mathcal{B}(\lambda, T) = \int_{\Omega_c} \kappa \left(\frac{1}{e^2} \lambda T + \nabla \lambda \cdot \nabla T \right) d\Omega \quad (2.16)$$

avec e , une longueur caractéristique et κ un coefficient homogène à une conductivité.

Il est important de suivre un certain nombre de préconisations nécessaires au bon fonctionnement du cadre pour une problématique donnée. Pour que cette formulation Arlequin du problème thermique soit pertinente, il est nécessaire que :

- Le domaine local ait une taille suffisamment grande pour contenir toute la zone de changement de phase ainsi que toute la phase liquide, i.e. le bain liquide et les zones de transition solide/liquide et liquide/solide.
- Aucun phénomène de changement de phase ne prenne place dans la zone de couplage, i.e. les matériaux des domaines Ω_G et Ω_L doivent rester en phase solide dans Ω_c . Ainsi la condition d'égalité faible entre les deux champs thermiques a bien un sens.
- Tout l'incrément matière $\delta\Omega^N$ augmentant le domaine Ω^N qui est sensé fondre soit entièrement inclus dans le nouveau domaine local, cf. Figure 2.7. En effet, en lien avec la stratégie d'addition de matière que nous avons détaillée à la sous-section 2.2.1, ceci est nécessaire pour respecter le dernier point mentionné.
- Le nouveau domaine local, au moment de son introduction, par exemple à l'instant t_a^N de passage entre les domaines Ω^N et Ω^{N+1} , ait un recouvrement volumique non vide avec le domaine local précédent, cf. Figure 2.7. Nous avons donc, pour $N = 1, \dots, N_f - 1$,

$$\Omega^N = \Omega_G^N \cup \Omega_L^N, \text{ avec } \Omega_G^N = \Omega^{N-1} \text{ et } \delta\Omega^{N-1} \subset \Omega_L^N. \quad (2.17)$$

Ceci permet de bien reproduire l'apport de chaleur du laser et de s'approcher d'un balayage continu.

Remarque 2.1. *Ainsi, le choix de la taille du domaine local doit se faire sur la base d'observations expérimentales ou des tests numériques. Autrement l'utilisation de méthode adaptative peut-être envisagée, voir par exemple les travaux publiés dans [121]. Nous choisissons le domaine global, pour la simulation thermique du domaine Ω^{N+1} , égal au domaine précédent, i.e. Ω^N .*

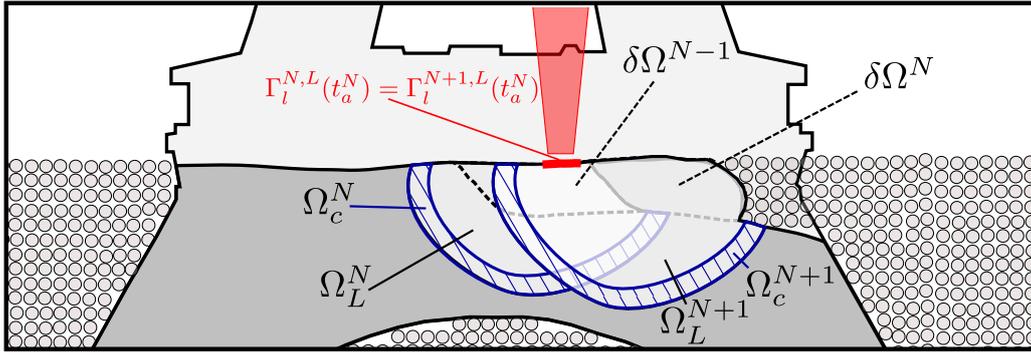


FIGURE 2.7 – Exemple de deux domaines locaux successifs, à l’instant t_a^N de passage entre les domaines Ω^N et Ω^{N+1} , permettant la définition d’une trajectoire continue du laser.

Dans la section suivante, nous détaillons la discrétisation de la Formulation 2.3 ainsi que l’approche numérique que nous avons adoptée pour résoudre le problème thermique.

2.3 Schéma de résolution numérique

La forme discrétisée de la formulation Arlequin bi-modèle du problème thermique est développée.

2.3.1 Discrétisation spatiale du problème

Les champs thermiques (T_G, T_L) et le multiplicateur de Lagrange volumique Arlequin λ sont discrétisés spatialement au moyen de la MEF aboutissant à un système fini non-linéaire. Nous introduisons les espaces éléments finis $V_i^{h_i}$ ($i = G, L$) et M^{h_λ} approximant les espaces V_i ($i = G, L$) et M . Pour l’espace médiateur M , nous choisissons le multiplicateur de Lagrange dans l’espace local : $M^{h_\lambda} = V_L^{h_L}|_{\Omega_c}$ avec Ω_c la zone de couplage entre Ω_G/Ω_L . La formulation semi-discrétisée du problème en espace, notée (\mathcal{P}_A^h) , donne :

Formulation 2.4: Formulation Arlequin mixte semi-discrétisée en espace du problème thermique (\mathcal{P}_A^h)

Soit $T_G^{h_G}(0)$, $T_L^{h_L}(0)$ et $\mathcal{F}_l(0)$ alors, pour tout $t \in I$, trouver $(T_G^{h_G}(t), T_L^{h_L}(t), \mathcal{F}_l(t), \lambda^{h_\lambda}(t)) \in V_G^{h_G} \times V_L^{h_L} \times L^\infty(\Omega_L) \times M^{h_\lambda}$ tels que :

$$\mathcal{A}_G(T_G^{h_G}(t), T_G^{h_G}(t), T_G^{h_G*}; \alpha_G) + \mathcal{B}(\lambda^{h_\lambda}(t), T_G^{h_G*}) = 0 \quad \forall T_G^{h_G*} \in V_G^{h_G} \quad (2.18a)$$

$$\mathcal{A}_L(T_L^{h_L}(t), \mathcal{F}_l(t), T_L^{h_L*}; \alpha_L) - \mathcal{B}(\lambda^{h_\lambda}(t), T_L^{h_L*}) = \mathcal{G}_L(T_L^{h_L*}) \quad \forall T_L^{h_L*} \in V_L^{h_L} \quad (2.18b)$$

$$\mathcal{B}(\mu^{h_\lambda}, T_G^{h_G}(t) - T_L^{h_L}(t)) = 0 \quad \forall \mu^{h_\lambda} \in M^{h_\lambda} \quad (2.18c)$$

$$\mathcal{F}_l(t) = F(T_L^{h_L}(t)), \quad F \text{ étant donnée.} \quad (2.18d)$$

Ce problème discret est infini en temps et non-linéaire. L’algorithme numérique pour résoudre les non-linéarités ainsi que la discrétisation temporelle sont développés dans la sous-section suivante.

2.3.2 Algorithme de résolution

Comme nous l’avons déjà mentionné, le problème thermique instationnaire a trois sources de non-linéarité que nous traitons par différents moyens. Premièrement, pour traiter la condition limite de rayonnement, nous introduisons classiquement (voir par exemple [136]) un nouveau coefficient :

$$k_{rad}(T) = \sigma\epsilon \left(T^3 + T^2 T_\infty - T T_\infty^2 - T_\infty^3 \right) \quad (2.19)$$

Ensuite, nous discrétisons l'intervalle de temps I en une collection d'instants : $t_0 (= 0), t_1, \dots, t_{j-1}, \dots, t_j, \dots, t_J (= \tau_a)$ avec un pas de temps constant $\delta t = \tau_d$. Pour numériquement éluder les non-linéarités dues aux propriétés matérielles et au terme en degré 3 du terme de rayonnement, nous les évaluons avec le champ thermique précédent, au pas de temps t_{j-1} .

Le problème totalement discrétisé, noté $(\mathcal{P}^{h,d})$, s'écrit alors :

Formulation 2.5: Formulation Arlequin mixte discrétisée en espace et temps du problème thermique $(\mathcal{P}^{h,d})$

Soit $T_G^{h_G,0}, T_L^{h_L,0}$ et \mathcal{F}_l^0 donnés, pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$, trouver $(T_G^{h_G,j}, T_L^{h_L,j}, \mathcal{F}_l^j, \lambda^{h_\lambda,j}) \in V_G^{h_G} \times V_L^{h_L} \times L^\infty(\Omega_L) \times M^{h_\lambda}$ tels que :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_G^d(T_G^{h_G,j}, T_G^{h_G,j-1}, T_G^{h_G*}; \alpha_G) + \mathcal{B}(\lambda^{h_\lambda,j}, T_G^{h_G*}) = \\ \mathcal{G}_G^d(T_G^{h_G,j-1}, T_G^{h_G*}; \alpha_G) \end{aligned} \quad \forall T_G^{h_G*} \in V_G^{h_G} \quad (2.20a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_L^d(T_L^{h_L,j}, T_L^{h_L,j-1}, \mathcal{F}_l^j, T_L^{h_L*}; \alpha_L) - \mathcal{B}(\lambda^{h_\lambda,j}, T_L^{h_L*}) = \\ \mathcal{G}_L^d(T_L^{h_L,j-1}, \mathcal{F}_l^{j-1}, T_L^{h_L*}; \alpha_L) \end{aligned} \quad \forall T_L^{h_L*} \in V_L^{h_L} \quad (2.20b)$$

$$\mathcal{B}(\mu^{h_\lambda}, T_G^{h_G,j} - T_L^{h_L,j}) = 0 \quad \forall \mu^{h_\lambda} \in M^{h_\lambda} \quad (2.20c)$$

$$\mathcal{F}_l^j = F(T_L^{h_L,j}), \quad F \text{ étant donnée.} \quad (2.20d)$$

dont les différentes formes $\mathcal{A}_i^d, \mathcal{G}_i^d$ avec $i = G, L$, sont définies par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_G^d(T_G^{h_G,j}, T_G^{h_G,j-1}, T_G^{h_G*}; \alpha_G) = \frac{1}{\delta t} a_G^d(T_G^{h_G,j}, T_G^{h_G,j-1}, T_G^{h_G*}; \alpha_G) \\ + b_G^d(T_G^{h_G,j}, T_G^{h_G,j-1}, T_G^{h_G*}; \alpha_G) \\ - r_G^d(T_G^{h_G,j}, T_G^{h_G,j-1}, T_G^{h_G*}; \alpha_G) \end{aligned} \quad (2.21a)$$

$$\mathcal{G}_G^d(T_G^{h_G,j-1}, T_G^{h_G*}; \alpha_G) = \frac{1}{\delta t} a_G^d(T_G^{h_G,j-1}, T_G^{h_G,j-1}, T_G^{h_G*}; \alpha_G) + \bar{r}_G^d(T_G^{h_G,j-1}, T_G^{h_G*}; \alpha_G) \quad (2.21b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_L^d(T_L^{h_L,j}, T_L^{h_L,j-1}, \mathcal{F}_l^j, T_L^{h_L*}; \alpha_L) = \frac{1}{\delta t} a_L^d(T_L^{h_L,j}, T_L^{h_L,j-1}, \mathcal{F}_l^j, T_L^{h_L*}; \alpha_L) \\ + b_L^d(T_L^{h_L,j}, T_L^{h_L,j-1}, \mathcal{F}_l^j, T_L^{h_L*}; \alpha_L) \\ - r_L^d(T_L^{h_L,j}, T_L^{h_L,j-1}, T_L^{h_L*}; \alpha_L) \end{aligned} \quad (2.21c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_L^d(T_L^{h_L,j-1}, \mathcal{F}_l^j, T_L^{h_L*}; \alpha_L) = \frac{1}{\delta t} a_L^d(T_L^{h_L,j-1}, T_L^{h_L,j-1}, \mathcal{F}_l^j(t), T_L^{h_L*}; \alpha_L) \\ + \bar{r}_L^d(T_L^{h_L,j-1}, T_L^{h_L*}; \alpha_L) \\ - q_L^d(T_L^{h_L,j-1}, \mathcal{F}_l^j, \mathcal{F}_l^{j-1}, T_L^{h_L*}; \alpha_L) + l_l(T_L^{h_L*}) \end{aligned} \quad (2.21d)$$

avec les différentes formes données par :

$$a_G^d(T_G, T_G^{h_G, j-1}, T_G^{h_G^*}; \alpha_G) = \int_{\Omega_G} \alpha_G c_s(T_G^{h_G, j-1}) T_G T_G^{h_G^*} d\Omega \quad (2.22a)$$

$$a_L^d(T_L, T_L^{h_L, j-1}, \mathcal{F}_l^j, T_L^{h_L^*}; \alpha_L) = \int_{\Omega_L} \alpha_L c_{vol}(T_L^{h_L, j-1}, \mathcal{F}_l^j) T_L T_L^{h_L^*} d\Omega \quad (2.22b)$$

$$b_G^d(T_G^{h_G, j}, T_G^{h_G, j-1}, T_G^{h_G^*}; \alpha_G) = \int_{\Omega_G} \alpha_G k_s(T_G^{h_G, j-1}) \left(\nabla T_G^{h_G, j} \cdot \nabla T_G^{h_G^*} \right) d\Omega \quad (2.22c)$$

$$b_L^d(T_L^{h_L, j}, T_L^{h_L, j-1}, \mathcal{F}_l^j, T_L^{h_L^*}; \alpha_L) = \int_{\Omega_L} \alpha_L k(T_L^{h_L, j-1}, \mathcal{F}_l^j) \left(\nabla T_L^{h_L, j} \cdot \nabla T_L^{h_L^*} \right) d\Omega \quad (2.22d)$$

$$r_i^d(T_i^{h_i, j}, T_i^{h_i, j-1}, T_i^{h_i^*}; \alpha_i) = \int_{\Gamma_c \cap \partial\Omega_i} \alpha_i \frac{k_p}{S_p} T_i^{h_i, j} T_i^{h_i^*} dS \\ + \int_{\Gamma_{cr}} \alpha_i \left(k_{rad}(T_i^{h_i, j-1}) - \gamma \right) T_\infty T_i^{h_i^*} dS \quad i = G, L \quad (2.22e)$$

$$\bar{r}_i^d(T_i^{h_i, j-1}, T_i^{h_i^*}; \alpha_i) = - \int_{\Gamma_c \cap \partial\Omega_i} \alpha_i \frac{k_p}{S_p} T_{ext} T_i^{h_i^*} dS \\ - \int_{\Gamma_{cr}} \alpha_i \left(k_{rad}(T_i^{h_i, j-1}) - \gamma \right) T_\infty T_i^{h_i^*} dS \quad i = G, L \quad (2.22f)$$

$$l_L^d(T_L^{h_L^*}) = \int_{\Gamma_l} f_l T_L^{h_L^*} dS \quad (2.22g)$$

$$q_L^d(T_L^{h_L, j-1}, \mathcal{F}_l^j, \mathcal{F}_l^{j-1}, T_L^{h_L^*}; \alpha_L) = \int_{\Omega_L} \alpha_L \delta H(T_L^{h_L, j-1}) \left(\frac{\mathcal{F}_l^j - \mathcal{F}_l^{j-1}}{\delta t} \right) T_L^{h_L^*} d\Omega \quad (2.22h)$$

Le problème totalement discrétisé ($\mathcal{P}^{h,d}$) est équivalent à la résolution d'une suite de J sous-problèmes, notées $(\mathcal{P}^{h,d})^j$ consistant chacun à, connaissant les champs thermiques $T_G^{h_G, j-1}$, $T_L^{h_L, j-1}$ et \mathcal{F}_l^{j-1} , trouver les champs $(T_G^{h_G, j}, T_L^{h_L, j}, \lambda^{h_\lambda, j}, \mathcal{F}_l^j) \in V_G^{h_g} \times V_L^{h_l} \times M^{h_\lambda} \times L^\infty(\Omega_L)$ vérifiant le système d'équation (2.20). Ainsi, la résolution du problème non-linéaire discrétisé en espace et temps ($\mathcal{P}_N^{h,d}$) nécessite une boucle sur l'ensemble des instants discrets. C'est ce qui est détaillé par l'Algorithme 1.

Algorithm 1 Algorithme Temporel

Initialisation: Les champs de température et de fraction volumique de liquide initiaux $(T_G^{N,h}, T_L^{N,h}, \mathcal{F}_l^N)$ à l'instant t_a^{N-1} des domaines globaux et locaux du cadre Arlequin pour un domaine Ω^N donné.
 Poser $T_G^{N,h_G,0} = T_G^{N,h_G}(t_a^{N-1})$, $T_L^{N,h_L,0} = T_L^{N,h_L}(t_a^{N-1})$ et $\mathcal{F}_l^{N,0} = \mathcal{F}_l^N(t_a^{N-1})$.
for $j = 1, \dots, J$ **faire**
 résolution du problème $(\mathcal{P}^{h,d})^j$ connaissant les champs thermiques $T_G^{h_G, j-1}$, $T_L^{h_L, j-1}$ et \mathcal{F}_l^{j-1} .
fin for

Remarque 2.2. Le pas de temps $\delta t = \tau_d$ peut-être différent pour chaque problème \mathcal{P}_N . De plus lorsque le problème \mathcal{P}_N inclut la phase de refroidissement correspondant à l'étalement de la couche suivante, le pas de temps peut progressivement s'augmenter.

Une dernière non-linéarité demeure due au phénomène de changement de phase. Pour la traiter nous utilisons un algorithme de type point fixe sur la fraction volumique de liquide. Il consiste à imposer une valeur au champ de fraction volumique de liquide au temps t_j (par exemple la valeur du champ au temps t_{j-1}), ceci permettant alors de calculer le second membre de changement de phase dans l'équation (2.22h) ainsi que les paramètres matériaux dépendants de \mathcal{F}_l^j . Ainsi, en notant k l'indice de l'itération du point fixe et étant donné $\mathcal{F}_l^{j,k}$, le problème $(\mathcal{P}^{h,d})^j$, maintenant noté $(\mathcal{P}^{h,d})^{j,k}$, devient linéaire et son inversion donne les champs thermiques globaux et locaux correspondants (ainsi que le multiplicateur de Lagrange).

Le champ thermique local ainsi obtenu n'est pas nécessairement consistant avec le champ de fraction volumique de liquide $\mathcal{F}_l^{j,k}$ au sens de la relation 2.20d. Nous calculons alors un nouveau champ de fraction volumique de liquide $\mathcal{F}_l^{j,k+1}$, de la façon suivante :

$$\mathcal{F}_l^{j,k+1} = F(T_L^{h_L,j,k}). \quad (2.23)$$

Ce processus est continué jusqu'à ce qu'une norme L^2 de l'incrément de champ thermique local, définie par (2.24), atteigne un critère d'arrêt ϵ_{tot} .

$$\epsilon_{T_i} = \frac{\|T_L^{h_L,j,k} - T_L^{h_L,j,k-1}\|_{L^2(\Omega_L)}}{\|T_L^{h_L,j,k-1}\|_{L^2(\Omega_L)}} \quad (2.24)$$

A ce point, le champ de fraction volumique de liquide $\mathcal{F}_l^{j,k}$ est défini en un nombre infini de points. Pour que le problème soit soluble, nous utilisons une méthode de collocation, consistant à approximer ce champ, défini sur le domaine $\Omega_L^{h_L}$, en une collection finie de n_{pl} points dans $\Omega_L^{h_L}$ telle que les termes intégraux du problème non-linéaire soient évalués précisément voir même exactement. Le champ de fraction volumique de liquide n'évolue alors plus dans l'espace $L^\infty(\Omega_L)$ mais dans $[0, 1]^{n_{pl}}$. Le problème $(\mathcal{P}^{h,d})^{j,k}$ prend finalement la forme suivante :

Formulation 2.6: Formulation du problème $(\mathcal{P}^{h,d})^{j,k}$

Les champs $T_G^{h_G,j-1}$, $T_L^{h_L,j-1}$, $\mathcal{F}_l^{j,k}$ et \mathcal{F}_l^{j-1} étant donnés, trouver $(T_G^{h_G,j,k}, T_L^{h_L,j,k}, \lambda^{h_\lambda,j,k}) \in V_G^{h_G} \times V_L^{h_L} \times M^h$ tels que :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_G^d(T_G^{h_G,j,k}, T_G^{h_G,j-1}, T_G^{h_G*}; \alpha_G) + \mathcal{B}(\lambda^{h_\lambda,j,k}, T_G^{h_G*}) = & \quad \forall T_G^{h_G*} \in V_G^{h_G} \quad (2.25a) \\ \mathcal{G}_G^d(T_G^{h_G,j-1}, T_G^{h_G*}; \alpha_G) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_L^d(T_L^{h_L,j,k}, T_L^{h_L,j-1}, \mathcal{F}_l^{j,k}, T_L^{h_L*}; \alpha_L) - \mathcal{B}(\lambda^{h_\lambda,j,k}, T_L^{h_L*}) = & \quad \forall T_L^{h_L*} \in V_L^{h_L} \quad (2.25b) \\ \mathcal{G}_L^d(T_L^{h_L,j-1}, \mathcal{F}_l^{j-1}, T_L^{h_L*}; \alpha_L) & \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}(\mu^{h_\lambda}, T_G^{h_G,j,k} - T_L^{h_L,j,k}) = 0 \quad \forall \mu^{h_\lambda} \in M^{h_\lambda}. \quad (2.25c)$$

A partir de l'introduction des triangulations $\mathcal{T}_{\Omega_G}^{h_G}$ et $\mathcal{T}_{\Omega_L}^{h_L}$, nous construisons les espaces discrets $V_G^{h_G}$ et $V_L^{h_L}$ tels que :

$$V_i^{h_i} = \left\{ T_i^{h_i*} \in C^0(\bar{\Omega}_i) \mid T_i^{h_i*}|_K \in \mathbb{P}_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_{\Omega_i}^{h_i} \right\}, \text{ pour } i = G, L. \quad (2.26)$$

avec $\mathbb{P}_1(K)$ l'espace des polynômes de degré 1 sur l'élément K . Les champs thermiques discrets $(T_G^{h_G,j,k}, T_L^{h_L,j,k})$ et le multiplicateur de Lagrange $\lambda^{h_\lambda,j,k}$ sont recherchés sous les formes données par l'équation (2.27).

$$T_i^{h_i,j,k}(x, y) = \sum_{n=1}^{N_i} T_i^{h_i,j,k,n} \psi_i^n(x, y) \text{ pour } i = G, L; \quad \lambda^{h_\lambda,j,k}(x, y) = \sum_{n=1}^{N_\lambda} \lambda^{h_\lambda,j,k,n} \psi_L^{\mathcal{E}(n)}(x, y) \quad (2.27)$$

où $\psi_i^n(x)$ sont les fonctions de formes du domaine Ω_i et \mathcal{E} la liste des indices des fonctions de forme de Ω_L dont le support a une intersection non vide avec la zone de couplage Ω_c . Pour chacun des champs inconnus nous rassemblons l'ensemble des inconnues nodales dans un vecteur. Les champs inconnus s'écrivent alors :

$$T_i^{h_i,j,k}(x, y) = \mathbf{N}_i^{h_i} \mathbf{T}_i^{h_i,j,k}, \text{ pour } i = G, L \text{ et } \lambda^{h_\lambda,j,k}(x, y) = \mathbf{N}_\lambda^{h_\lambda} \boldsymbol{\lambda}^{h_\lambda,j,k}, \quad (2.28)$$

avec les vecteurs $\mathbf{T}_i^{h_i,j,k} \in M_{N_i,1}(\mathbb{R})$ définis tels que $(\mathbf{T}_i^{h_i,j,k})_{m,1} = T_i^{h_i,j,k,m}$ et $\mathbf{N}_i^{h_i} \in M_{1,N_i}(\mathbb{R})$ tels que $(\mathbf{N}_i^{h_i})_{1,n} = \psi_i^n(x, y)$ pour $i = G, L$, et pour le multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}^{h_i,j,k} \in M_{N_\lambda,1}(\mathbb{R})$ avec $(\boldsymbol{\lambda}^{h_i,j,k})_{m,1} = \lambda^{h_\lambda,j,k,m}$ et $\mathbf{N}_\lambda^{h_\lambda} \in M_{1,N_\lambda}(\mathbb{R})$ tel que $(\mathbf{N}_\lambda^{h_\lambda})_{1,n} = \psi_L^{\mathcal{E}(n)}(x, y)$.

Nous avons défini ensuite sur chaque élément K de la triangulation du domaine local $\mathcal{T}_{\Omega_L}^{h_L}$ les points de définition de la fraction volumique de liquide \mathcal{F}_l à partir de la méthode de quadrature de Gauss. Les variations du champ thermique, d'après le choix des éléments finis, étant linéaires, nous connaissons le degré des variations polynomiales du champ de fraction volumique de liquide puisque nous l'avons approximée par un polynôme cubique d'Hermite. Nous pouvons donc connaître, d'après les abaques, le nombre et la position points Gauss nécessaires pour intégrer exactement les termes intégraux où le champ de fraction volumique intervient. Ce champ dépend maintenant de la discrétisation ainsi que du pas de temps. Nous notons alors le champ de fraction volumique sous la forme $\mathcal{F}_l^j \in M_{n_{pl},1}$ (le nombre de points de Gauss peut dépendre du pas de temps et même de l'itération du point fixe).

Le problème linéaire $(\mathcal{P}^{h,d})^{j,k}$ prend, de manière équivalente, la forme matricielle suivante :

Formulation 2.7: Forme matricielle du problème $(\mathcal{P}^{h,d})^{j,k}$

Les champs $\mathbf{T}_G^{h_G,j-1}$, $\mathbf{T}_L^{h_L,j-1}$, $\mathcal{F}_l^{j,k}$ et \mathcal{F}_l^{j-1} étant donnés, trouver $(\mathbf{T}_G^{h_G,j,k}, \mathbf{T}_L^{h_L,j,k}, \boldsymbol{\lambda}^{h_i,j,k}) \in M_{N_G,1}(\mathbb{R}) \times M_{N_L,1}(\mathbb{R}) \times M_{N_\lambda,1}(\mathbb{R})$ tels que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_G^{h_G,j} & 0 & \mathbf{B}_G^{h_G,h_\lambda T} \\ 0 & \mathbf{A}_L^{h_L,j,k} & -\mathbf{B}_L^{h_L,h_\lambda T} \\ \mathbf{B}_G^{h_G,h_\lambda} & -\mathbf{B}_L^{h_L,h_\lambda} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_G^{h_G,j,k} \\ \mathbf{T}_L^{h_L,j,k} \\ \boldsymbol{\lambda}^{h_\lambda,j,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_G^{h_G,j} \\ \mathbf{G}_L^{h_L,j,k} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

avec les matrices $\mathbf{A}_G^{h_G,j} \in M_{N_G}(\mathbb{R})$, $\mathbf{A}_L^{h_L,j,k} \in M_{N_L}(\mathbb{R})$, $\mathbf{G}_G^{h_G,j} \in M_{N_G,1}(\mathbb{R})$, $\mathbf{G}_L^{h_L,j,k} \in M_{N_L,1}(\mathbb{R})$, $\mathbf{B}_G^{h_G,h_\lambda} \in M_{N_\lambda,N_G}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{B}_L^{h_L,h_\lambda} \in M_{N_\lambda,N_L}(\mathbb{R})$, données par :

$$(\mathbf{A}_G^{h_G,j})_{m,n} = \mathcal{A}_G^d(\psi_G^n, T_G^{h_G,j-1}, \psi_G^m; \alpha_G) \quad (\mathbf{A}_L^{h_L,j,k})_{m,n} = \mathcal{A}_L^d(\psi_L^n, T_L^{h_L,j-1}, \mathcal{F}_l^{j,k}, \psi_L^m; \alpha_L) \quad (2.30a)$$

$$(\mathbf{G}_G^{h_G,j})_{m,1} = \mathcal{G}_G^d(T_G^{h_G,j-1}, \psi_G^m; \alpha_G) \quad (\mathbf{G}_L^{h_L,j,k})_{m,1} = \mathcal{G}_L^d(T_L^{h_L,j-1}, \mathcal{F}_l^{j-1}, \psi_G^m; \alpha_L) \quad (2.30b)$$

$$(\mathbf{B}_G^{h_G,h_\lambda})_{m,n} = \mathcal{B}(\psi_L^{\mathcal{E}(m)}, \psi_G^n) \quad (\mathbf{B}_L^{h_L,h_\lambda})_{m,n} = \mathcal{B}(\psi_L^{\mathcal{E}(m)}, \psi_L^n) \quad (2.30c)$$

L'algorithme de résolution du problème non-linéaire $(\mathcal{P}^{h,d})^j$ apparaissant dans la boucle de l'Algorithme 1 est récapitulé à l'Algorithme 2 suivant :

Algorithm 2 Algorithme de Point Fixe sur la fraction volumique de liquide

Initialisation: les champs au pas de temps précédent $(T_G^{h_G,j-1}, T_L^{h_L,j-1}, \mathcal{F}_l^{j-1})$ du domaine Ω^N .

calcul des matrices qui ne changent pas au cours des itérations : $\{\mathbf{A}_G^{h_G,j}, \mathbf{G}_G^{h_G,j}, \mathbf{B}_G^{h_G,h_\lambda}, \mathbf{B}_L^{h_L,h_\lambda}\}$, et initialisation de la variable d'itération $k = 0$ ainsi que du champ de fraction volumique de liquide $\mathcal{F}_l^{j,0} = \mathcal{F}_l^{j-1}$.

résolution du problème $(\mathcal{P}^{h,d})^{j,0}$

incrémementation $k = k + 1$

tant que $\epsilon_{T_l} > \epsilon_{tol}$ défini par l'équation (2.24) **faire**

correction de la fraction volumique de liquide (2.23) : $\mathcal{F}_l^{j,k}$

calcul de la matrice de rigidité local et du second membre $\{\mathbf{A}_L^{h_L,j,k}, \mathbf{G}_L^{h_L,j,k}\}$

résolution du problème $(\mathcal{P}^{h,d})^{j,k}$

calcul du critère de convergence ϵ_{T_l} défini par l'équation (2.24)

si $\epsilon_{T_l} \leq \epsilon$, l'algorithme est arrêté autrement k est incrémenté : $k = k + 1$

fin tant que

Remarque 2.3. *En choisissant un espace médiateur qui vérifie bien la condition Inf-Sup, nous pouvons d'après les développements réalisés dans [106, 133] nous assurer de l'inversibilité du système matriciel (2.29).*

Pour résoudre le système matriciel (2.29), en reprenant le principe de la méthode d'inversion de Gauss par blocs et en éliminant les champs primaux $T_G^{h_G,j,k}$ et $T_L^{h_L,j,k}$, nous pouvons écrire un système d'équation condensé sur la zone de couplage en écrivant :

$$\mathbf{T}_G^{h_G,j,k} = \mathbf{A}_G^{h_G,j-1} \left(\mathbf{G}_G^{h_G,j} - \mathbf{B}_G^{h_G,h_\lambda T} \boldsymbol{\lambda}^{h_\lambda,j,k} \right) \quad (2.31a)$$

$$\mathbf{T}_L^{h_L,j,k} = \mathbf{A}_L^{h_L,j,k-1} \left(\mathbf{G}_L^{h_L,j,k} + \mathbf{B}_L^{h_L,h_\lambda T} \boldsymbol{\lambda}^{h_\lambda,j,k} \right) \quad (2.31b)$$

nous aboutissons alors au système suivant, portant sur le champ dual :

$$\mathbf{S}_d \boldsymbol{\lambda}^{h_\lambda,j,k} = \mathbf{B}_d \quad (2.32)$$

avec :

$$\mathbf{S}_d = \mathbf{B}_G^{h_G,h_\lambda} \mathbf{A}_G^{h_G,j-1} \mathbf{B}_G^{h_G,h_\lambda T} + \mathbf{B}_L^{h_L,h_\lambda} \mathbf{A}_L^{h_L,j,k-1} \mathbf{B}_L^{h_L,h_\lambda T} \quad (2.33a)$$

$$\mathbf{B}_d = \mathbf{B}_G^{h_G,h_\lambda} \mathbf{A}_G^{h_G,j-1} \mathbf{G}_G^{h_G,j} + \mathbf{B}_L^{h_L,h_\lambda} \mathbf{A}_L^{h_L,j,k-1} \mathbf{G}_L^{h_L,j,k}. \quad (2.33b)$$

Pour résoudre ce système nous utilisons un algorithme de Gradient Conjugué Préconditionné (GCP). Comme nous le détaillons dans la suite au Chapitre 3, la nature volumique du couplage du cadre Arlequin permet de construire facilement des préconditionneurs efficaces à partir de l'opérateur de couplage. Ensuite, nous calculons les champs thermiques $(\mathbf{T}_G^{h_G,j,k}, \mathbf{T}_L^{h_L,j,k})$ grâce aux équations (2.31a) et (2.31b). Numériquement, nous construisons les décompositions Lower-Upper (LU) des matrices de rigidité $\mathbf{A}_G^{h_G,j}$ et $\mathbf{A}_L^{h_L,j,k}$ pour l'inversions de ces deux dernières équations.

Remarque 2.4. *Puisque le champ de fraction volumique de liquide est toujours déterminé à partir du champ thermique de l'étape de l'algorithme de point fixe précédente, la phase des éléments du domaine $\Omega_L^{h_L}$ est connue, i.e. totalement liquide, solide ou « mushy ». Ainsi il est possible d'adapter le nombre de points de Gauss en fonction de l'état des éléments.*

Maintenant que nous avons présenté notre stratégie de résolution multi-échelles numérique, développée pour un patch Arlequin, nous pouvons aisément généraliser son écriture au cas de plusieurs patch Arlequin. Dans le paragraphe suivant, nous présentons comment nous utilisons le cadre Arlequin pour mieux modéliser le procédé FLLP.

2.3.3 Une stratégie multi-échelle pour le procédé FLLP

Comme nous l'avons vu lors des différents développements précédents, la criticité de la zone sous le laser nécessite un traitement spécifique localisé et donc l'utilisation d'un cadre multi-échelle. Nous avons alors développé l'écriture du problème thermique additif, simulant la génération d'une pièce par le procédé SLM, dans le cadre Arlequin comprenant un patch, ou domaine local, et un substrat, ou domaine global, évoluant au cours du procédé.

Chronologiquement, avant de prendre en compte le phénomène de changement de phase dans notre modèle, nous avons développé une stratégie basée sur l'utilisation d'un seul patch, appelé 'Patch-Micro' à l'échelle microscopique, comme le montre la Figure 2.8 où celui-ci apparaît en bleu foncé. Ce patch nous servait à prendre en compte finement le flux thermique du laser, capter les gradients thermiques intenses et localisés dans la zone sous le laser et à suivre le laser lors de son balayage. Dans ce contexte, pour simuler les mouvements du laser ainsi que la matière dense balayée, nous faisons bouger le Patch-Micro et activions successivement des "briques" de domaine, apparaissant en orange à la Figure 2.8, afin de ne pas remailler le domaine entier à chaque pas de temps.

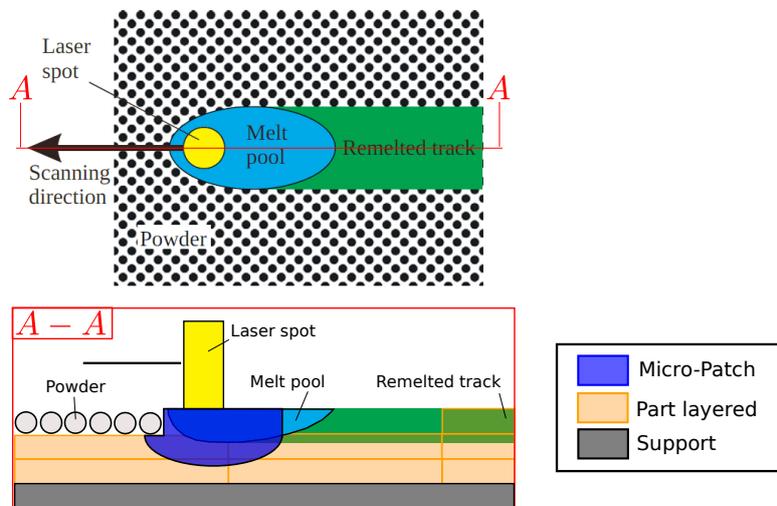


FIGURE 2.8 – Première stratégie avec un seul Patch-Micro.

Cependant, cette stratégie était contraignante dans son aspect implémentation numérique. En effet, si la taille du Patch-Micro n'était pas suffisante pour contenir la zone derrière le laser où les gradients thermiques restent intenses, la nécessité d'une discrétisation fine à cet endroit était transférée aux briques. Or afin de limiter la complexité des étapes de génération des maillages, nous avons imposé aux briques une discrétisation fixe. De plus la forme des briques, i.e. leur longueur et largeur puisque nous n'avons considéré que des briques de forme rectangulaire, est contrainte par l'épaisseur de la couche de particule métallique ainsi par la taille du Patch-Micro. En effet lorsque le Patch-Micro se déplaçant arrive à la fin de la dernière brique activée, il est nécessaire d'activer la prochaine mais sans que celle-ci soit trop grande pour ne pas « dépasser » le patch, ceci est illustré par la Figure 2.9. Par ces différents aspects, les briques présentent des discrétisations très fines qui ne sont plus nécessaires lorsque le Patch-Micro s'éloigne et que les forts gradients thermiques décroissent dans la couche balayée.

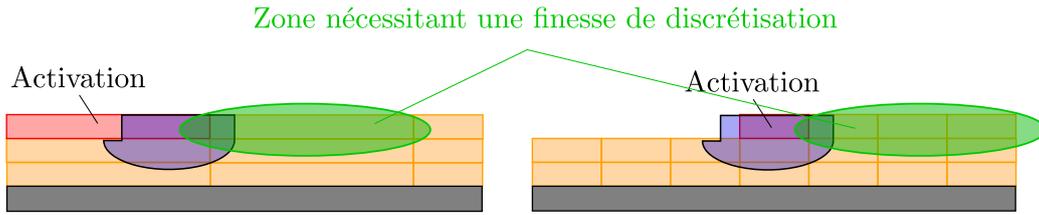


FIGURE 2.9 – A gauche les briques sont trop grandes et dépassent le Patch-Micro lors de leur activation, à droite leur taille est bonne.

A partir de ce constat, il nous est paru nécessaire d'allonger le Patch-Micro, permettant ainsi d'augmenter la taille des briques et de grossir leur discrétisation. De plus, dans le but ensuite de prendre en compte le phénomène de changement de phase et d'estimer la taille du bain liquide nous avons lancé une simulation simplifiée du modèle thermique avec changement de phase précédemment développé. Nous avons alors considéré un rectangle en $2D$ fixe, soumis au même flux laser et conditions limites déjà mentionnés, illustré à la Figure 2.10.

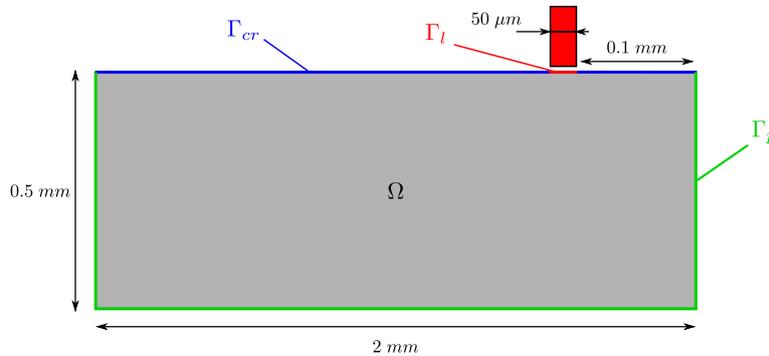


FIGURE 2.10 – Un problème simplifié pour identifier les différentes échelles.

Les frontières n'évoluent pas et le mouvement du laser est simulé, par l'ajout dans l'équation de conservation de l'énergie (2.2a), d'un terme de convection : $c_{vol}(T(t), \mathcal{F}_l(t))\mathbf{v} \cdot \nabla T$, où \mathbf{v} est l'opposé du vecteur vitesse du laser. Les différentes valeurs des paramètres de simulation sont récapitulées dans le Tableau 2.1 et le maillage utilisé est illustré par la Figure 2.11.

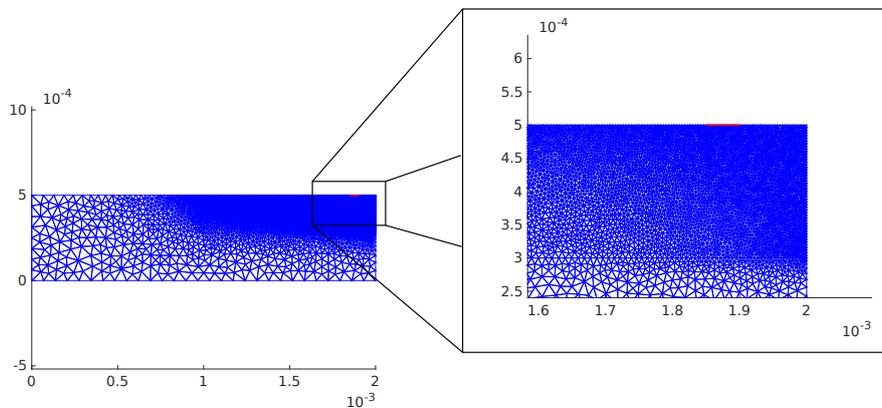


FIGURE 2.11 – Maillage utilisé pour le problème de convection.

Aux Figures 2.12 et 2.13, nous présentons le champ thermique à l'instant $t = 4 \times 10^{-3}$ s, correspondant

à une translation de 0.8 mm du laser. Nous pouvons observer que le bain liquide présente une longueur de $300 \mu\text{m}$ et une profondeur de $50 \mu\text{m}$. De plus, les forts gradients thermiques sont concentrés dans une zone de longueur $85 \mu\text{m}$ et de profondeur $25 \mu\text{m}$, où la température s'étale de 3000 K à pratiquement 6000 K (normalement à ces températures l'alliage Ti6Al4V passe de la phase liquide à gazeuse étant donné que sa température d'évaporation est $T_e = 3533 \text{ K}$ [137], comme nous l'avons déjà précisé nous ne considérons pas ce phénomène dans cette thèse).

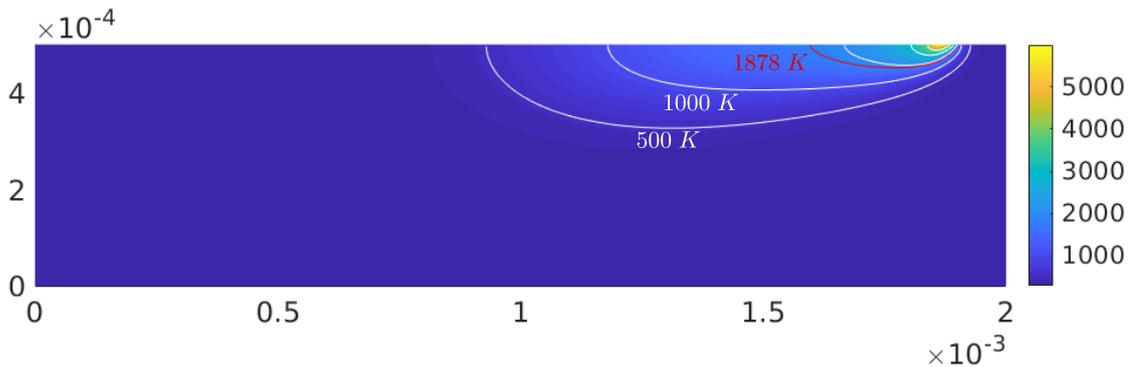


FIGURE 2.12 – Champ thermique à l'instant $4 \times 10^{-3} \text{ s}$.

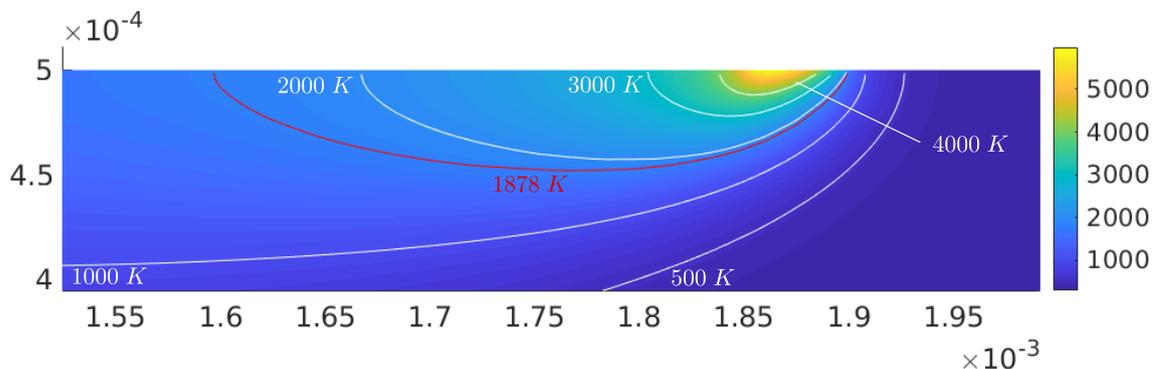


FIGURE 2.13 – Zoom sur le champ thermique sous le laser à l'instant $4 \times 10^{-3} \text{ s}$.

Il est alors plus utile d'introduire, non pas un mais deux patches comme le montre schématiquement la Figure 2.14, respectant les différentes recommandations que nous avons énoncées dans la sous-section 2.2.3. Le premier, appelé Patch-Micro à l'échelle microscopique (coloré en bleu foncé) nécessaire pour représenter finement les gradients intenses sous le laser. Un second, appelé Patch-Meso à l'échelle mésoscopique (coloré en rouge), localisant le traitement du changement de phase ce qui présente l'avantage de réduire la taille des champs inconnus et donc de diminuer le coût de calcul. Il permet aussi de garder une finesse de discrétisation suffisante derrière le laser, le temps que la chaleur diffuse dans le reste de la pièce, permettant ainsi une accommodation progressive de la finesse des maillages et de grossir la discrétisation des briques à une échelle macroscopique (ceci en lien avec les remarques que nous avons faites pour la stratégie avec un seul Patch-Micro). Les maillages utilisés pour les simulations dans la suite sont illustrés aux Figures 2.15 et 2.16 par dessus le champ thermique.

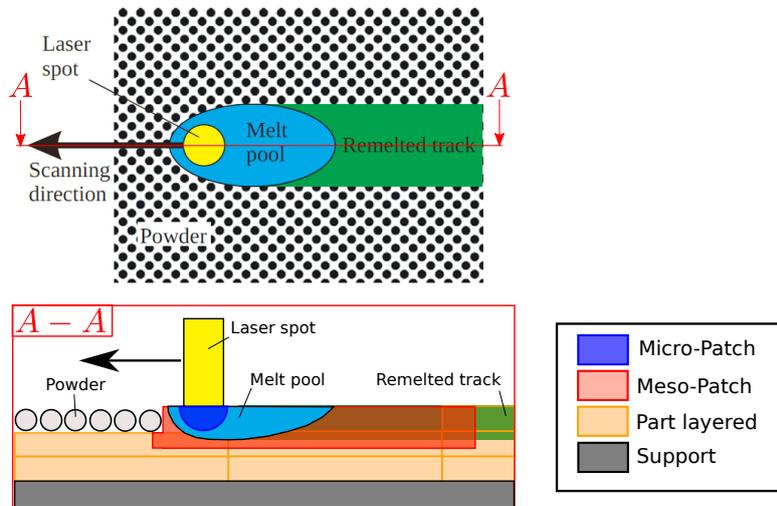


FIGURE 2.14 – Les différents patches de cadre Arlequin sous le laser.

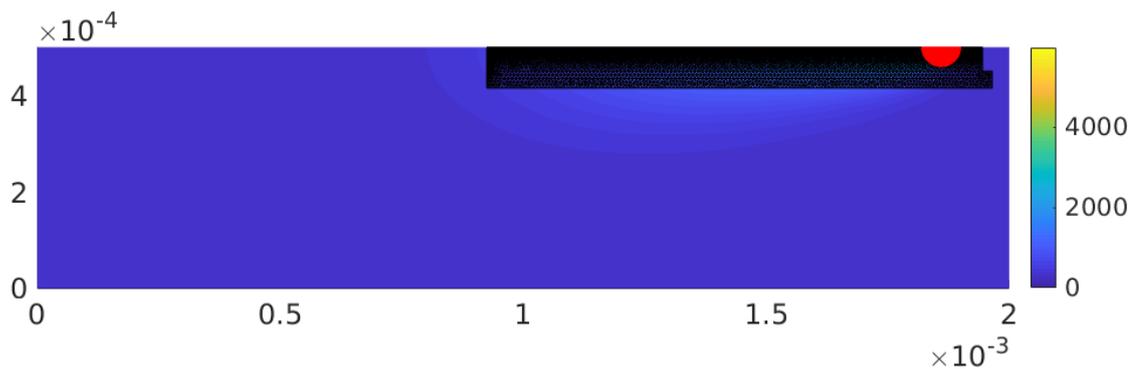


FIGURE 2.15 – Patches-Micro et Meso utilisés pour les simulations suivantes.

Dans ce contexte, nous adoptons le même principe que celui de la stratégie avec un seul patch : pour simuler le mouvement du laser ainsi que l'ajout de la matière balayée, nous translatons les Patch-Micro et -Meso et activons successivement les briques afin d'éviter une étape de remaillage à chaque pas de temps. Comme déjà évoqué, pour générer le domaine à l'échelle macroscopique, deux méthodes existent : la QEM et l'IEM. Nous avons choisi, par l'activation successive des briques, de nous placer dans le cadre de la seconde, par les avantages précédemment évoqués qu'elle apporte. De plus, le désavantage d'introduction d'énergie artificielle lors de l'activation des éléments, est limité ici qu'aux très petits éléments des deux patches lors de l'étape de projection du champ thermique développée à la sous-section 2.2.1.

Au début du lasage d'une nouvelle zone de la couche de poudre par le laser, la matière se densifie sous forme liquide dans une toute petite zone sous le laser. Nous avons donc, lors des premières étapes de simulation, introduit un Patch-Meso réduit, comme l'illustre la Figure 2.17 en (a). Le Patch-Micro a, quant-à lui, toujours sa taille complète. Les deux patches sont ensuite, comme nous l'avons déjà évoqué, translatés pour suivre le laser. Nous augmentons alors progressivement la taille du Patch-Meso, cf. Figure 2.17 (b) et (c) jusqu'à atteindre sa taille préfixée, cf. Figure 2.17 (c). Nous activons à ce moment la brique dessous, cf. Figure (c). Nous continuons de translater les deux patches jusqu'à atteindre soit la fin de la

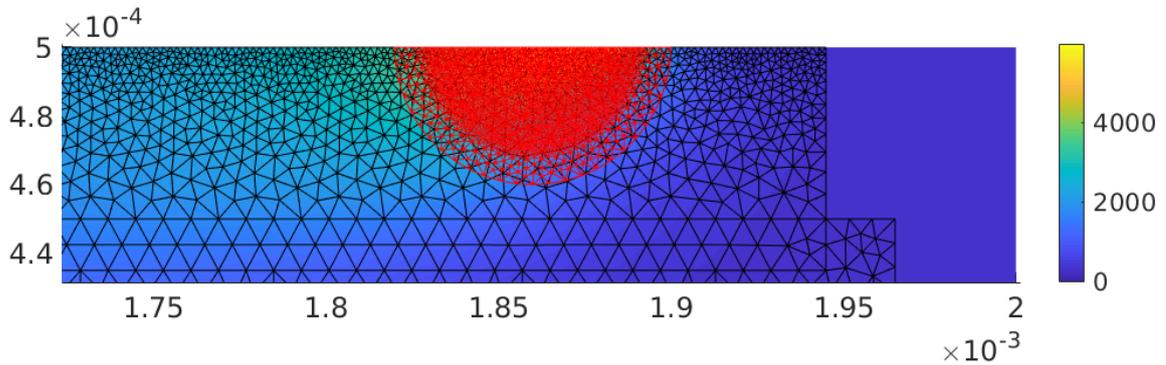


FIGURE 2.16 – Zoom sur les Patches-Micro et Meso utilisés.

comme le montre la Figure 2.17 (e), auquel cas nous activons alors la dernière brique qui aura la forme adaptée (simplement de longueur adaptée), soit la fin de la dernière brique activée, auquel cas nous activons une nouvelle brique et ainsi de suite jusqu'à atteindre la fin de la passe. Nous remarquons qu'il est possible, en suivant ce processus, de réaliser des passes de longueur inférieure à la taille préfixée du Patch-Meso. Il est à noter que lorsque les patches se translatent la zone de couplage entre le Patch-Meso et le domaine global évolue, elle est indiquée en vert sur la Figure 2.17 aux différentes étapes.

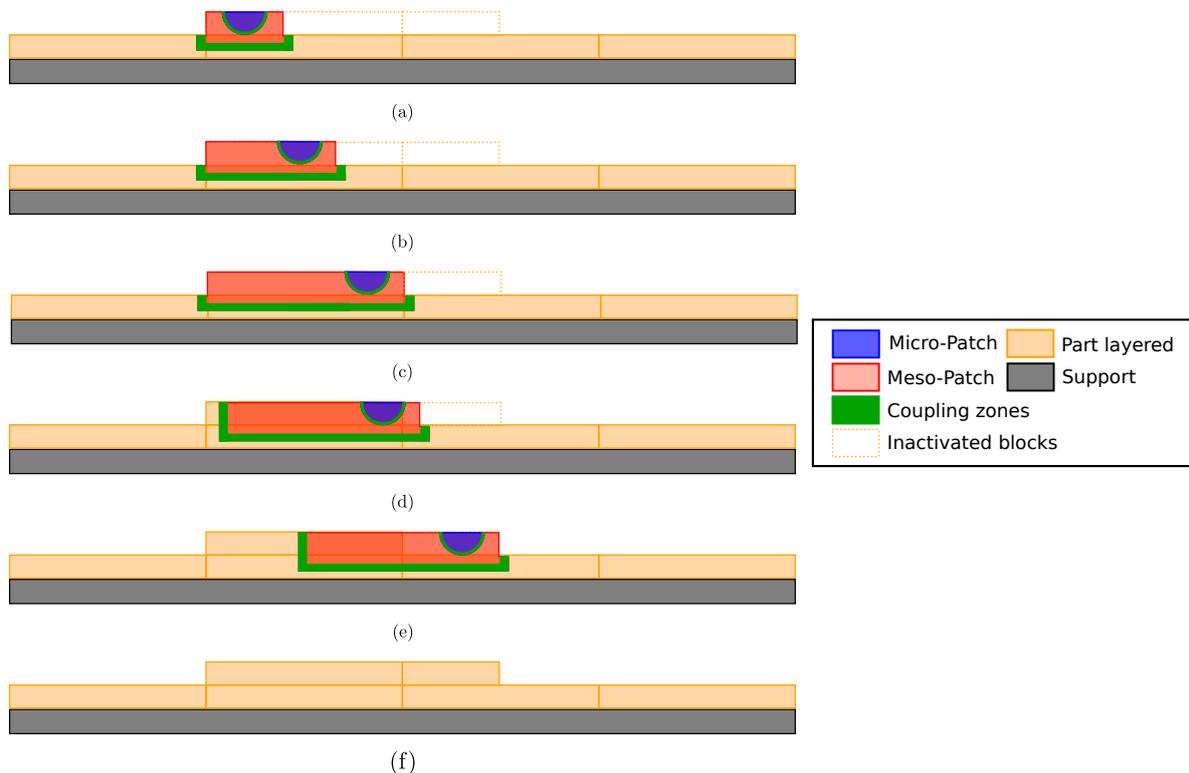


FIGURE 2.17 – Différentes étapes de la stratégie pour générer une passe du laser.

La surface de la couche de poudre que doit balayer le laser est divisée en plusieurs passes qui ne sont pas nécessairement connectées. Avec la stratégie que nous venons de développer, il est tout à fait possible, une fois la passe finie d'en commencer une nouvelle plus loin, en suivant le même processus, comme le

montre la Figure 2.18

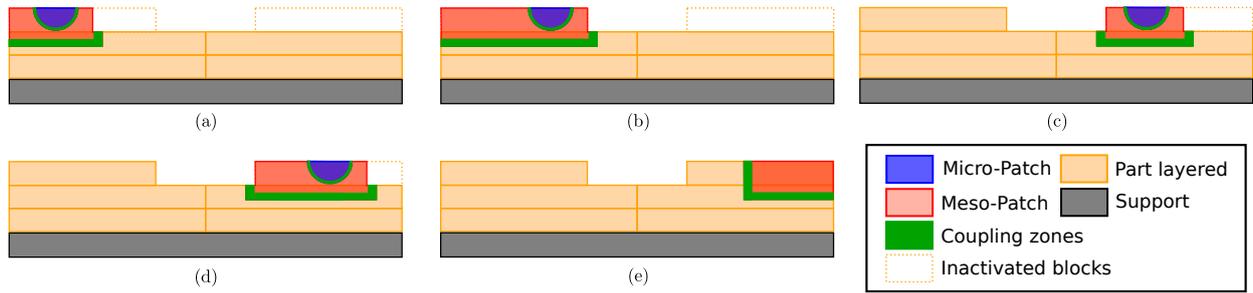


FIGURE 2.18 – Exemple d'évolution des patches pour simuler deux passes discontinues du laser.

Un cas particulier est celui des couches en porte-à-faux qui peut-être simulé en modifiant la forme du Patch-Meso, cf. Figure 2.19.

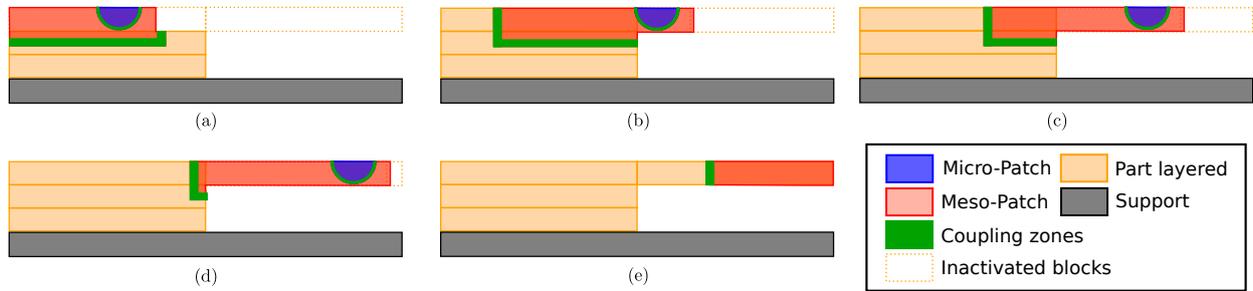


FIGURE 2.19 – Exemple d'évolution des patches pour simuler le balayage d'une couche en porte-à-faux.

Remarque 2.5. Dans la stratégie que nous venons de détailler, les deux patches bougent simultanément à chaque pas de temps. Ceci revient à ne considérer qu'un pas de temps pour les problèmes thermiques écrits sur chaque domaine Ω^N . Une autre possibilité est de choisir une séquence de translations différentes pour chacun des deux patches comme le montre la Figure 2.20.

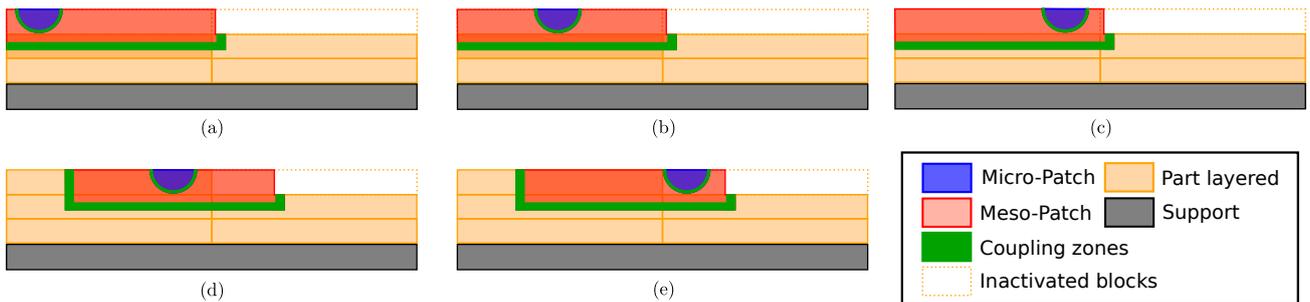


FIGURE 2.20 – Exemple d'une stratégie avec des séquences de translation des patches différentes.

Par exemple, les Figures 2.20 (a), (b) et (c) représentent trois pas de temps consécutifs pour le problème thermique écrit sur le domaine Ω^N et les Figures 2.20 (d) et (e) sur le domaine Ω^{N+1} . Nous pouvons ainsi recoller avec les différentes stratégies d'évolution du domaine décrites au Chapitre 1.

Un point important à clarifier est la génération de la première couche, en effet, l'interface avec le support n'est pas nécessairement modélisée sous une hypothèse de continuité si par exemple le contact thermique est imparfait ou que le milieu n'est pas continu. En effet deux corps en contact ne conduisent pas la chaleur comme un milieu continu mais un saut de conductivité peut s'observer à cause de cavités et

de faibles zones de contact (pratiquement ponctuelles) à l'échelle microscopique (voir par exemple [21]). Dans ce cas, nous ne couplons pas le Patch-Méso dans le cadre Arlequin avec le support mais continuons à utiliser la même stratégie pour générer la première couche, comme l'illustre la Figure 2.21.

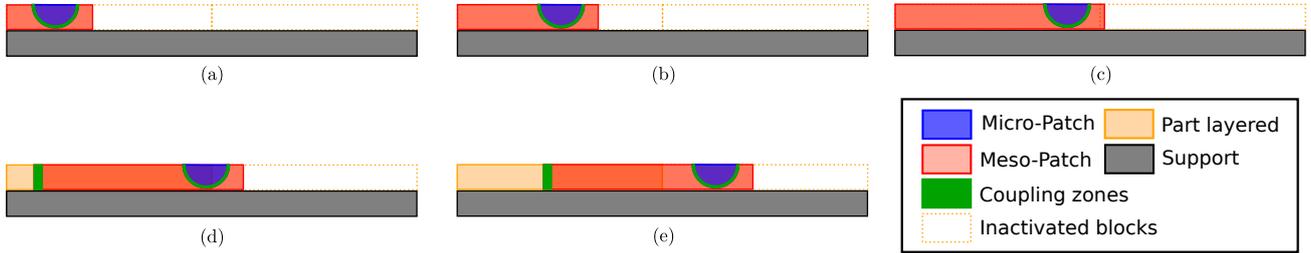


FIGURE 2.21 – Différentes étapes de la stratégie de génération de la première couche.

Pour résumer, nous avons finalement trois cas à distinguer, le premier noté (\mathcal{P}_1), est composé du Patch-Micro noté Ω_μ , du Patch-Méso incomplet Ω_m ainsi que du support Ω_s . Ce cas correspond aux Figures 2.21 (a), (b) et (c). Comme déjà évoqué, le couplage entre Ω_m et Ω_s n'est pas réalisé dans le cadre Arlequin mais par une méthode de pénalisation. Un second cas (\mathcal{P}_2), dans lequel le domaine composé de la pièce n'est pas vide Ω_p , au moins un élément d'addition est activé et le couplage entre le Patch-Méso et ce domaine est alors effectif. Finalement un dernier cas (\mathcal{P}_3), un couplage Arlequin est utilisé entre les trois domaines Ω_μ , Ω_m et Ω_p , et une méthode de pénalisation entre Ω_p et Ω_s . Les liens pour les trois cas sont résumés à la Figure 2.22.

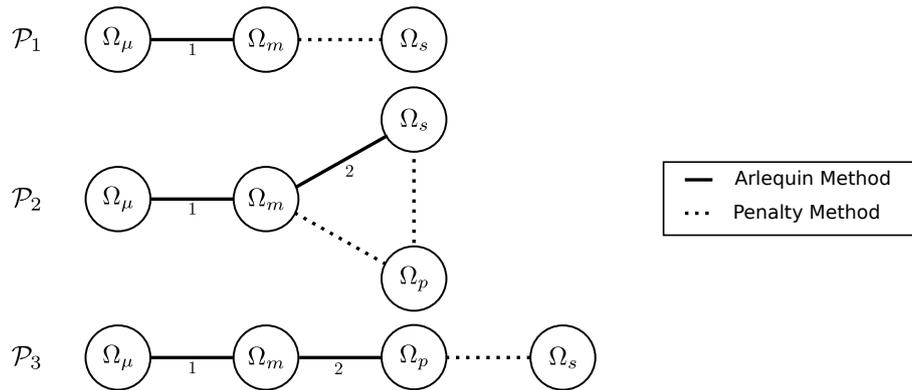


FIGURE 2.22 – Détail des liens pour les trois cas généraux.

Maintenant que nous avons décrit notre stratégie de simulation basée sur le cadre Arlequin, nous l'appliquons à différents problèmes que nous détaillons dans la suite.

2.4 Résultats numériques de simulation

Dans la suite, nous présentons le potentiel de notre stratégie dans le cas d'un exemple $2D$. Ensuite, pour le valider, nous comparons les résultats de notre stratégie à ceux d'une autre méthode dans un cas très simple. Et finalement, nous montrons la possibilité d'utilisation des méthodes de réduction de modèle dans le cas des simulations à l'échelle macroscopique.

2.4.1 Illustration de la stratégie

Nous considérons l'exemple d'un mur en $2D$ de hauteur 2 mm et de largeur 2 mm . Le matériau que nous avons utilisé est l'alliage de Ti-6AL-4V dont les propriétés sont regroupées dans le Tableau 2.1.

Propriétés Physiques	Ti-6AL-4V		
Température du Solidus (K)	1878	Conductivité thermique de la poudre ($W.m^{-1}.K^{-1}$)	0.20
Température du Liquidus (K)	1928	Taille moyenne de la zone affectée thermiquement (mm)	40
Densité de la phase solide ($kg.m^{-3}$)	4300	Emissivité	0.2
Densité du fluide ($kg.m^{-3}$)	4000	Constante de Stefan-Boltzmann ($W.m^{-2}.K^{-4}$)	5.67×10^{-8}
Chaleur spécifique du solide ($J.kg^{-1}.K^{-1}$)	610	Coefficient d'absorption (%)	45
Chaleur spécifique du liquide ($J.kg^{-1}.K^{-1}$)	700	Paramètre loi \mathcal{F}_l : a	-1.6×10^{-5}
Conductivité thermique du solide ($W.m^{-1}.K^{-1}$)	30	b	1.2×10^{-3}
Conductivité thermique du liquide ($W.m^{-1}.K^{-1}$)	21	c	0
Chaleur latente de la transition solide-liquide ($J.kg^{-1}$)	365×10^3	d	0
Convection ($W.m^{-2}.K^{-1}$)	20		

TABLE 2.1 – Propriétés de l'alliage Ti-6AL-4V d'après [47] et [42].

Nous générons des couches d'épaisseur $50 \mu m$, scannée par un laser à la vitesse de $20 cm.s^{-1}$, avec une puissance de $30 W$ et un diamètre de $50 \mu m$. Nous avons considéré un pas de temps $\delta t = 10^{-5}$ (s).

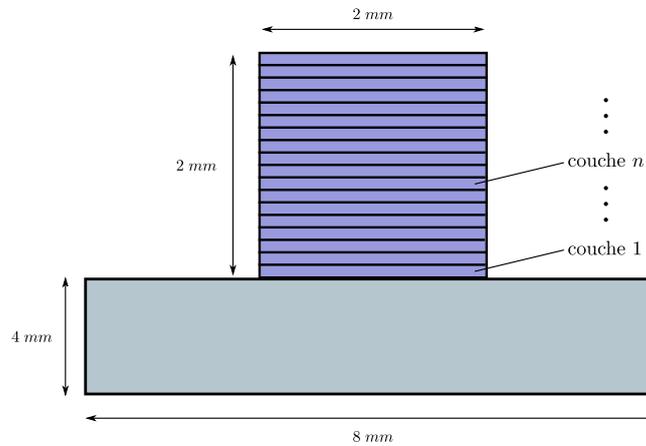


FIGURE 2.23 – Schéma du problème 2D.

Dans cette simulation des éléments finis linéaires triangulaires sont utilisés. D'après des résultats disponibles dans la littérature ([138]), les gradients thermiques sont essentiellement concentrés dans la couche en cours de fabrication. Lorsque le laser s'éloigne et balaye les couches suivantes, les gradients de celle-ci décroissent très rapidement. Un maillage fin n'est donc plus utile, nous décomposons alors le domaine Ω_M en différentes échelles comme le montre la Figure 2.24 avec l'apparition de deux échelles macroscopiques Layer 1 et Layer 2. L'égalité des champs thermiques entre ces différentes échelles est à nouveau imposée par pénalisation. Entre chaque génération d'une nouvelle couche, plusieurs secondes s'écoulent, correspondant au temps d'étalement de la poudre. Durant cette période, le laser étant éteint, une homogénéisation de la température dans toute la pièce s'effectue.

Premièrement, nous présentons un exemple de génération de maillage, la Figure 2.25 montre les deux patches en rouge et bleu où le changement de phase est supposé apparaître. Les étapes 1,2 et 3 concernent la création de la première couche, les étapes 4 et 5 la seconde couche, les étapes 6 et 7 la cinquième et finalement l'étape 8 la sixième.

Grâce aux simulations, nous sommes capable de suivre l'évolution du champ thermique et des gradients lors du procédé. Comme illustration nous présentons à la Figure 2.26 l'évolution de la température en différents points au centre de chaque couche montrés à la Figure 2.27. De plus à la Figure 2.27 nous pouvons voir le maillage final de la simulation avec l'apparition du domaine macroscopique. Plusieurs zooms des courbes de températures sont montrés aux Figures 2.28, 2.29, 2.30 et 2.31.

Remarque 2.6. Une observation intéressante est que la valeur maximale du champ thermique de la première couche est plus important que celle des autres. Ceci est du au fait que le Patch-Méso lors de

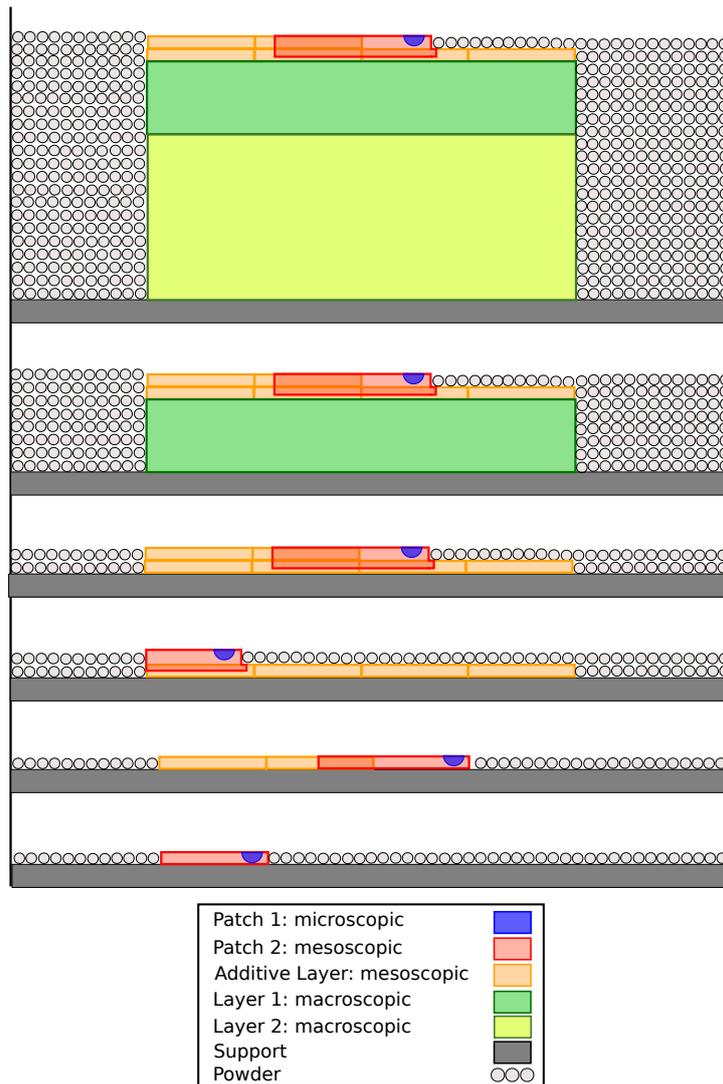


FIGURE 2.24 – Schéma de la stratégie de modélisation dans le cadre Arlequin.

la génération de la première couche n'a pas une taille suffisante afin de contenir tout le bain liquide. En réalité le support devrait fondre mais ceci n'est pas pris en compte dans notre modèle amenant à un excès d'énergie.

2.4.2 Comparaison avec une méthode issue de la bibliographie

Afin de valider notre stratégie, nous comparons nos résultats avec ceux de [138]. Dans cet article, ils développent un modèle 2D basé sur la méthode des différences finies qu'ils calibrent avec des simulations en 3D et compare avec des simulation éléments finis 3D développées et validées dans l'article [62]. Nous avons alors simulé la génération de deux couches composées cette fois-ci d'aluminium, les différents paramètres de la simulation sont regroupés dans le Tableau 2.2.

Dans le Tableau 2.3 nous comparons les résultats de notre modèle avec les deux autres comme il est fait dans l'article [138], pour la seconde couche.

Comme nous pouvons le constater à la lecture du Tableau 2.3, les dimensions du bain liquide avec notre modèle sont légèrement plus importantes que dans les deux autres modèles tout comme la température maximale. Ceci peut s'expliquer par le fait que, dans [138] des tests numériques sont réalisés afin d'ajuster

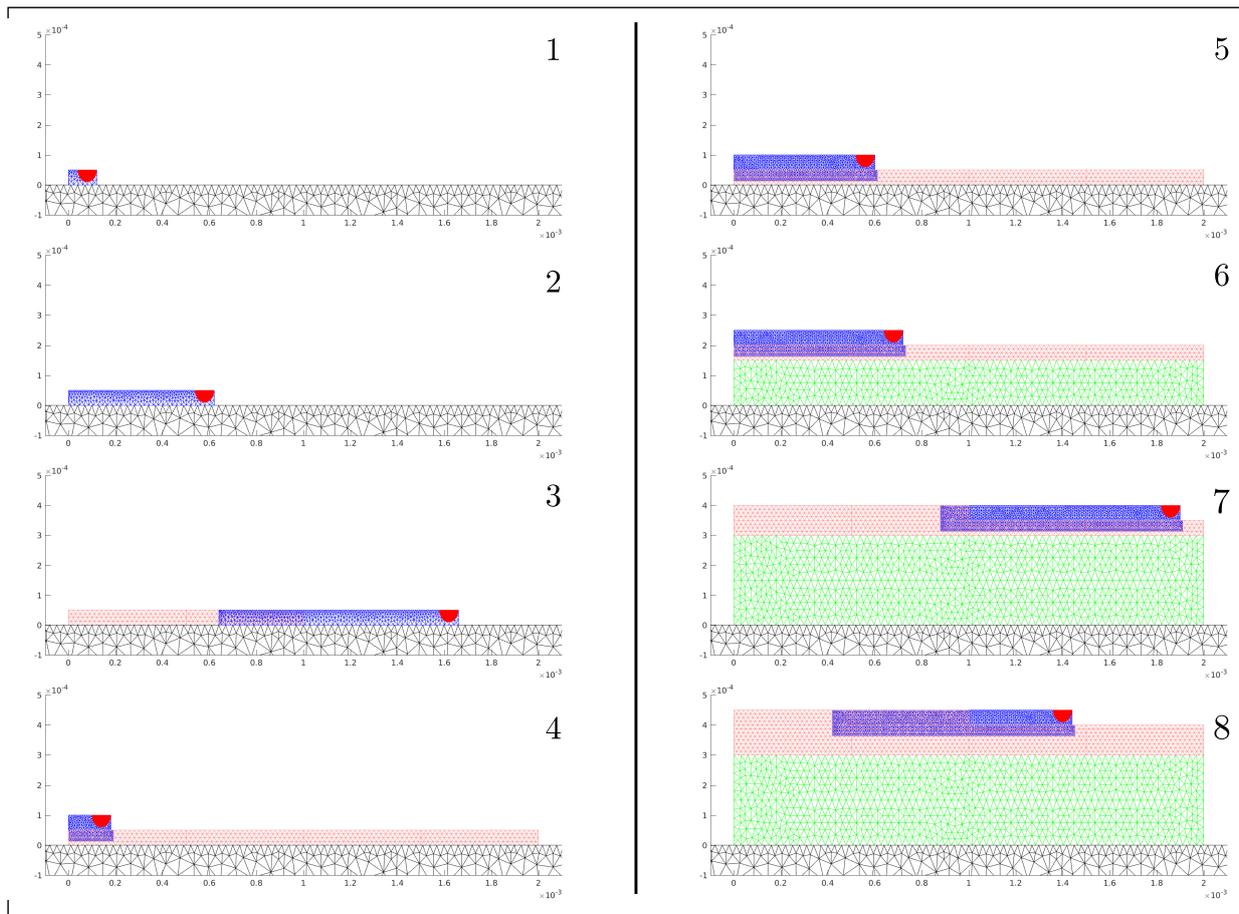


FIGURE 2.25 – Exemple d'évolution du maillage.

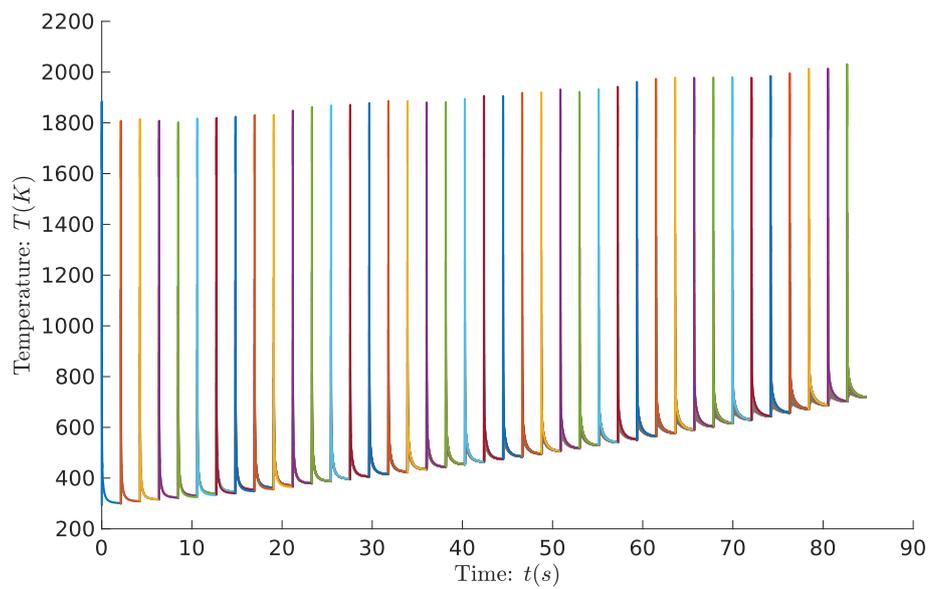


FIGURE 2.26 – Températures des points centraux des couches.

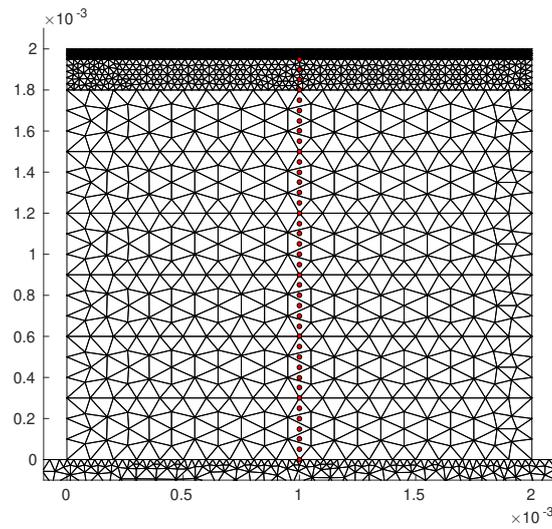


FIGURE 2.27 – Positions des points centraux.

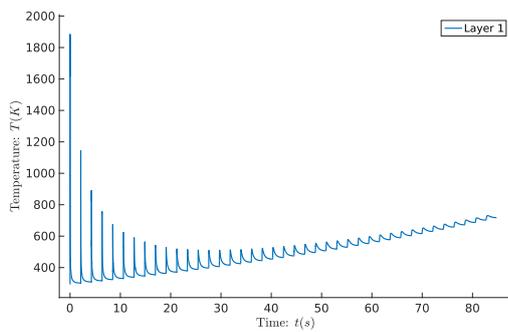


FIGURE 2.28 – Température du point central de la première couche.

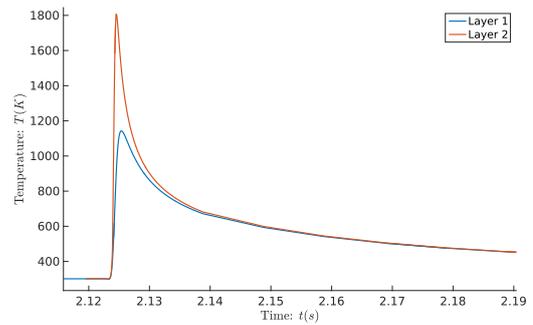


FIGURE 2.29 – Températures des deux premières couches.

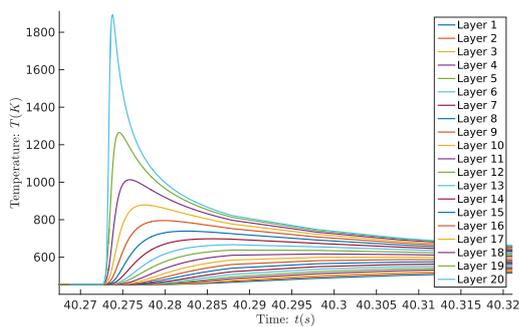


FIGURE 2.30 – Température des vingt premières couches.

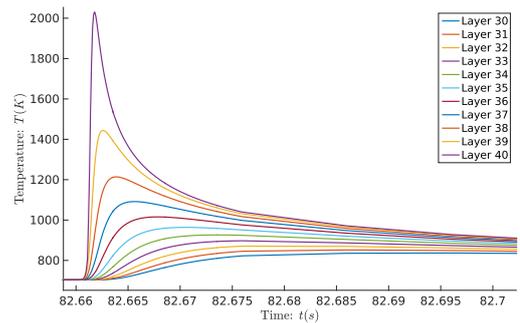


FIGURE 2.31 – Températures des dix dernières couches.

et réduire l'apport énergétique du laser dans le cas du modèle $2D$ et d'obtenir ainsi des résultats similaires à l'étude $3D$ de [62]. Dans notre cas, le flux du laser est plus important et c'est la raison pour laquelle nous obtenons cette légère surestimation dans nos résultats. Cette approche en différence finie peut se justifier pour le cas de la construction de mur mince par procédé FLLP. Mais notre méthode peut répondre à des

objectifs plus généraux. Ainsi seulement la tendance de notre solution est ici comparée.

De plus, les auteurs ont comparé leur champ thermique au point central de la première couche à l'étude 3D [62]. Nous avons donc à nouveau comparé nos résultats comme le montre la Figure 2.32.

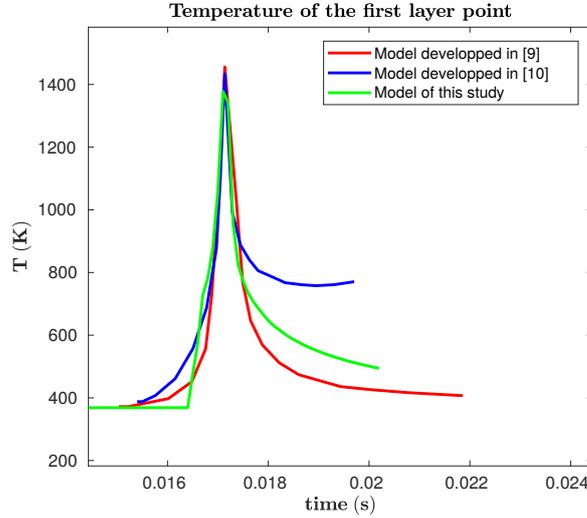


FIGURE 2.32 – Comparaison du champ thermique de la première couche.

Nous observons une bonne correspondance de nos résultats avec ceux des deux études. Aussi, nous pouvons observer un saut de 393.15 K à 750 K . Celui-ci est dû à notre stratégie d'évolution du domaine, en effet, le point central de la première couche ne voit sa température augmenter que lorsque les patches l'atteignent. Ceci a l'effet de négliger la conduction devant le laser et de garder cette partie à la température ambiante. Afin de mesurer l'influence de cette caractéristique de notre stratégie ainsi que des autres choix de modélisation, dans la partie suivante nous réalisons plusieurs simulations revenant sur ces choix et comparons les champs thermiques obtenus.

2.4.3 Vers la réduction de modèle

Après plusieurs campagnes d'expérimentation numérique, nous pouvons observer que le champ thermique dans les deux patches converge toujours vers une solution stationnaire. Afin d'illustrer cet effet nous pouvons calculer pour chaque couche de l'exemple présenté au chapitre 2.4.1, un estimateur d'évolution entre deux instants consécutifs comme défini par l'équation (2.34) :

Paramètres			
Dimension de la pièce (direction x)	4 mm	Dimension de la pièce (direction z)	2 mm
Épaisseur de la couche	1 mm	Vitesse de balayage	$4\text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$

TABLE 2.2 – Paramètres du test numérique.

Type de résultats/Modèle	[62]	[138]	Notre modèle
Dimension du bain liquide (direction x)	$103.8\ \mu\text{m}$	$88\ \mu\text{m}$	$131.3\ \mu\text{m}$
Dimension du bain liquide (direction z)	$50.2\ \mu\text{m}$	$53\ \mu\text{m}$	$57.3\ \mu\text{m}$
Température maximale	1527 K	1385 K	1615 K

TABLE 2.3 – Comparaison de nos résultats.

$$\epsilon_{evolution}^i = \frac{\|T^{i+1} - T^i\|_{L^2}}{\|T^i\|_{L^2}} \quad i = 1, \dots, N_l \quad (2.34)$$

avec N_l le nombre d'itérations pour générer la couche. Les valeurs de cet estimateur sont présentées aux Figures 2.33 et 2.34 pour les couches 2, 10, 20, 30 et 40 (le mur était constitué de 40 couches).

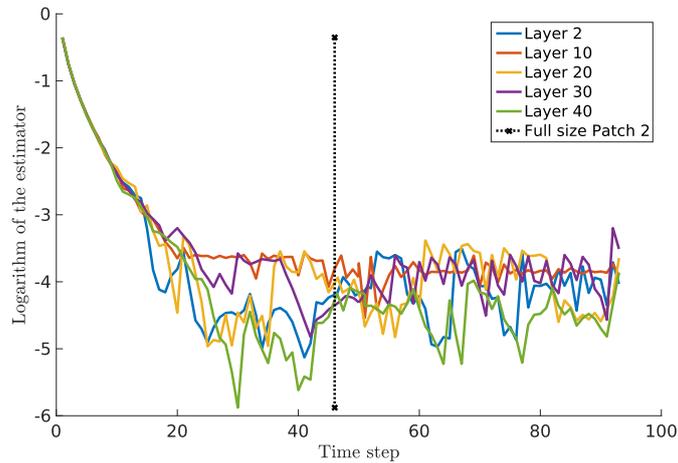


FIGURE 2.33 – Evolution relative de la température dans le Patch-Micro (donnée par l'équation (2.34)) pour certaines couches.

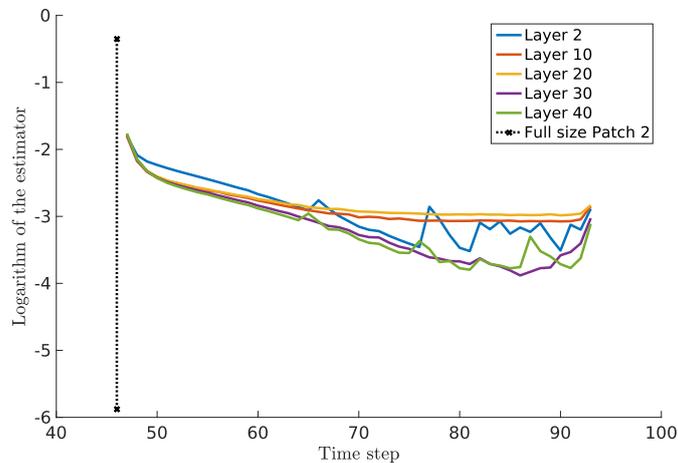


FIGURE 2.34 – Evolution relative de la température du Patch-Méso (donnée par l'équation (2.34)) pour certaines couches.

Afin de réaliser une analyse plus fine et de s'assurer de la stationnarité de la solution, une Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) est réalisée sur l'ensemble des champs thermiques d'une couche. Cela consiste à factoriser la matrice dont chaque ligne est l'évolution thermique d'un nœud du patch considéré au cours du temps, dans la forme classique $U\Sigma V^T$ avec U et V deux matrices unitaires et Σ une matrice diagonale rectangulaire composée uniquement de nombres réels positifs sur sa diagonale. Cette écriture est équivalente à décomposer les champs thermiques des patches de la manière suivante :

$$T_i(x_j, t_k) = \sum_{l=1}^{N_{sv,i}} [\Sigma_i]_{ll} [U_i]_{j,l} [V_i]_{k,l} \quad (i = \mu, m) \quad (2.35)$$

où $N_{sv,i}$ est le nombre de valeur singulière non nulle du domaine Ω_i ($i = \mu, m$). Nous représentons ces modes à la Figure 2.35 pour le Patch-Micro et à la Figure 2.36 pour le Patch-Méso lors de la génération de la vingtième couche, qui dans un souci de clarté, nous avons ré-écrit sous la forme donnée par l'équation suivante :

$$T_i(x_j, t_k) = \sum_{l=1}^{N_{sv,i}} [X_i]_{j,l} [\Theta_i]_{k,l} \quad (i = \mu, m) \quad (2.36)$$

où

$$[X_i]_{j,l} = [\Sigma_i]_{ll} [V_i]_{N_{t,i},l} [U_i]_{j,l} \quad (2.37a)$$

$$[\Theta_i]_{k,l} = \frac{[V_i]_{k,l}}{[V_i]_{N_{t,i},l}} \quad (2.37b)$$

et avec $N_{t,i}$ le nombre total de pas de temps pour le balayage de la couche considérée. Les valeurs singulières sont également regroupées dans le Tableau 2.4.

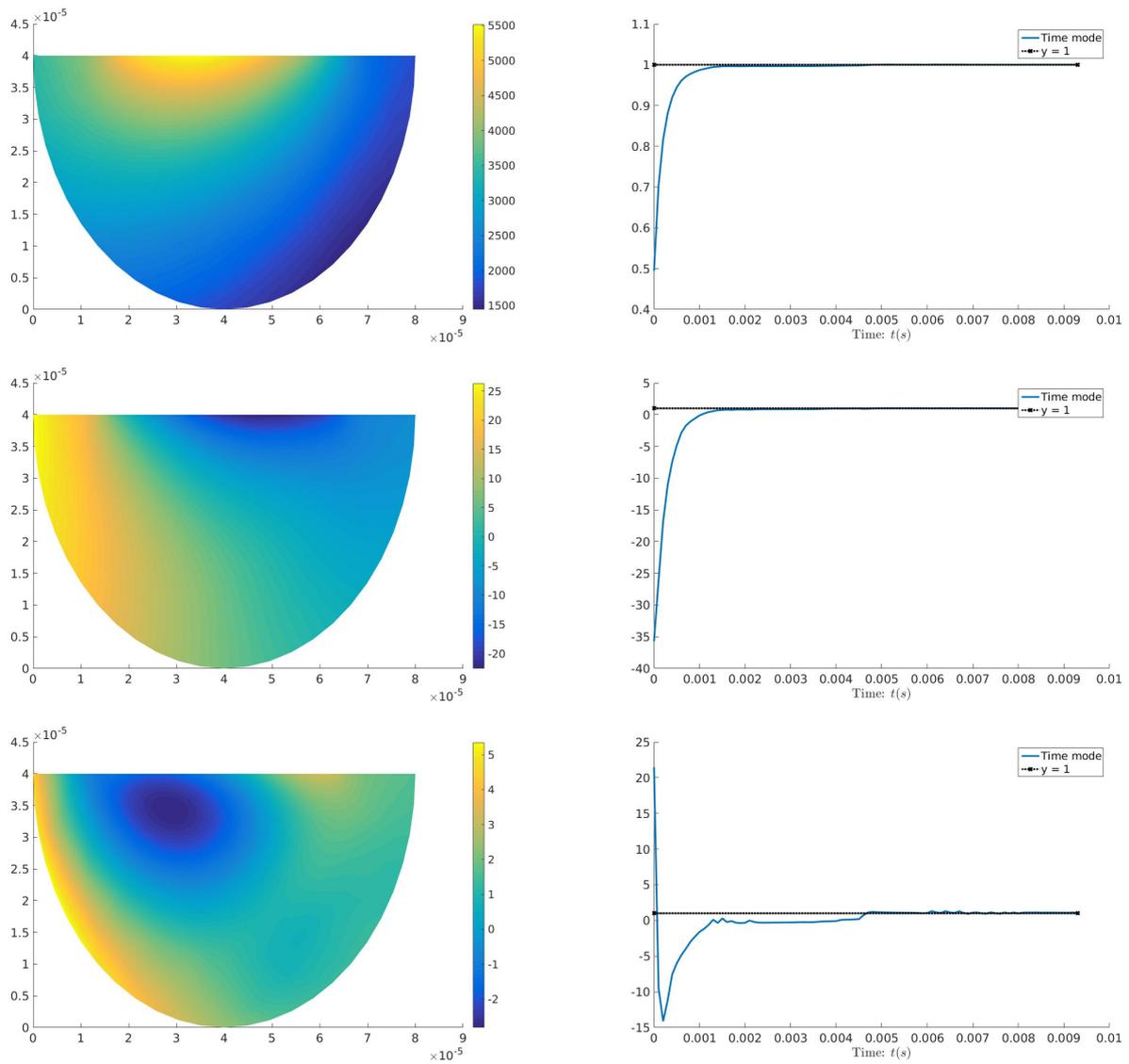
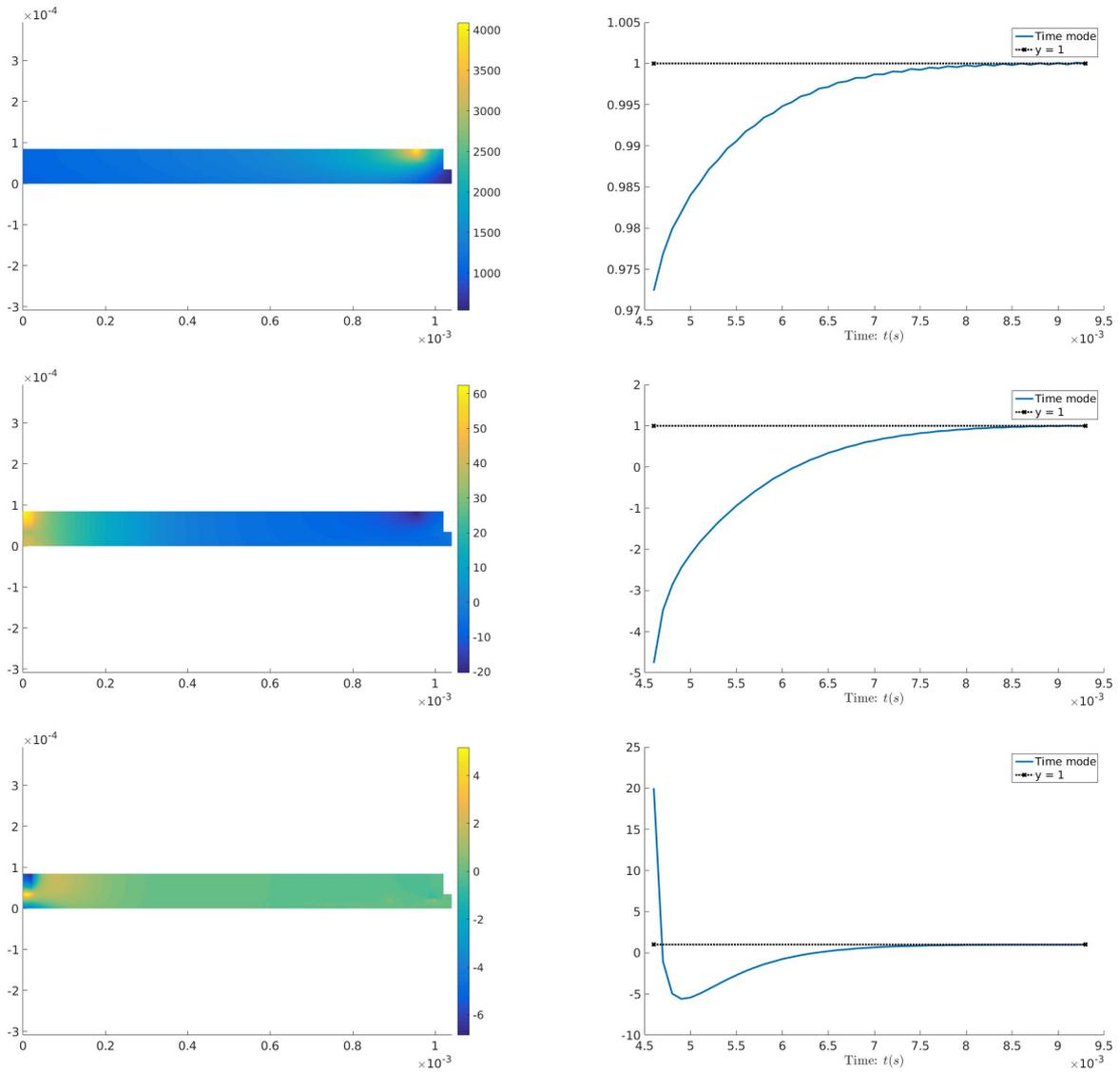


FIGURE 2.35 – Les trois premiers couples de modes pour le Patch-Micro, X_i à gauche et Θ_i à droite.

FIGURE 2.36 – Les trois premiers couples de modes pour le Patch-Mésos, X_i à gauche et Θ_i à droite.

	Patch-Micro	Patch-Mésos
Mode 1	1.5147×10^6	4.2573×10^5
Mode 2	2.3647×10^4	5.9972×10^3
Mode 3	2.4228×10^3	925.7105
Mode 4	804.6193	297.4616

TABLE 2.4 – Les valeurs singulières des deux patches pour les différents couples de modes.

Grâce à ces résultats, en observant les valeurs singulières, nous pouvons voir que toute l'« énergie » est concentrée dans le premier couple de modes pour le Patch-Micro et -Mésos. De plus, le premier mode temporel de chaque patch converge rapidement vers 1. Pour ces raisons l'implémentation de méthodes de Réduction de Modèles semble constituer un moyen prometteur pour réduire les coûts de calcul. Ainsi la méthode POD qui est une stratégie de Réduction de Modèles *a posteriori*, consistant à regrouper un ensemble de snapshots durant une phase d'apprentissage et ensuite de le factoriser au moyen d'une SVD,

peut-être implémentée dans le Patch-Micro et -Mésos, comme il est fait dans [102]. La phase d'entraînement pourrait être réalisée lors de la génération des premières couches afin de capter les modes importants de la solution, utilisables ensuite pour la résolution thermique des couches suivantes. Une approche plus directe pourrait consister à imposer directement la solution thermique dans les patches lorsque leur mode stationnaire est atteint permettant ainsi de réduire encore plus les coûts mais certainement avec une perte de précision. D'autres méthodes de Réduction de Modèle peuvent s'envisager comme la méthode PGD, son utilisation sera l'objet d'un prochain chapitre.

2.5 Conclusions

Ce chapitre a été consacré au développement d'une stratégie numérique basée sur le cadre Arlequin afin de traiter efficacement le problème thermique macroscopique issu de la modélisation de la fabrication d'une pièce-FA par procédé SLM. Elle consiste en l'introduction, dans la zone critique sous et dans le sillage du laser, de deux patches, un Patch-Micro et un Patch-Mésos permettant de :

- prendre en compte finement l'évolution permanente du domaine par ajout d'incrément de matière de plus avec un contrôle total,
- modéliser finement le flux de chaleur apporté par le laser,
- capter finement les gradients thermiques intenses et localisés sous le laser,
- localiser le traitement numérique de la non-linéarité due au phénomène de changement de phase (modélisé ici grâce à la LHSM).

Cette méthodologie répond ainsi au critère (\mathcal{C}_1) du CDC. De plus, les dimensions des patches qu'elle introduit étant adaptées aux zones nécessitant la finesse particulière qu'ils apportent (« sur-mesure »), elle permet ainsi de limiter les coûts numériques au minimum nécessaire et répond ainsi au critère (\mathcal{C}_3). Elle semble également directement adaptable à d'autres problématiques que celle de la FA (par exemple celle du soudage), elle valide donc aussi le critère (\mathcal{C}_5).

Elle a été implémentée et validée sur des cas test de problèmes en deux dimensions, plus précisément, la fabrication d'un mur en alliage de titane Ti-6Al-4V ainsi que le balayage de deux couches d'aluminium. L'analyse des champs thermiques que nous avons obtenus a montré que les températures dans les patches tendent au cours de balayage d'une couche de poudre vers des régimes stables et stationnaires. Cette observation nous a inféré l'intérêt de l'utilisation de méthodes de réduction de modèles, ce qui sera l'objet du Chapitre 5.

Ces premiers développements ouvrent un certain nombre de perspectives comme :

- L'utilisation des méthodes d'adaptation, comme développé dans [121], pour déterminer avec précision les tailles nécessaires des patches et ainsi ne plus les choisir *a priori* sur la base d'expérimentations numériques.
- Explorer l'adaptation de cette stratégie à la modélisation des autres physiques à l'échelle macroscopique que sont la mécanique et la métallurgie.
- L'incorporation de modèle plus fin que macroscopique dans les Patch-Mésos et -Micro, permettant de prendre en compte un physique plus fine : écoulement dans le bain liquide, passage de l'état granulaire à liquide...

Ces travaux ont fait l'objet de plusieurs communications dans des congrès dont [139, 140, 141].

Chapitre **3**

Méthode de Décomposition de Domaine compatible avec recouvrement

3.1	Introduction	
3.2	Présentation des problèmes tests	
3.2.1	Problème thermique stationnaire	
3.2.2	Problème thermique instationnaire	
3.2.3	Caractéristiques mathématiques du problème thermique instationnaire	
3.2.4	Troisième problème modèle : mécanique	
3.3	Form. des prob. par des méth. de Décomp. de Dom., avec et sans recouvrement	
3.3.1	Formulations hybrides duales des trois problèmes décomposés en deux sous-domaines (sans recouvrement)	
3.3.2	Formulation Arlequin des trois problèmes décomposés en deux sous-domaines (avec recouvrement)	
3.3.3	Analyse de la stabilité de la formulation Arlequin du problème (\mathcal{P}_{ti})	
3.4	Résolution par la Méthode FETI	
3.5	Résultats et comparaisons numériques	
3.6	Méthode de couplage volumique « compatible »	
3.6.1	Principe et première mise en œuvre de la méthode de couplage : première approche « compatible »	
3.6.2	Expérimentation numérique sur l'homogénéité de l'opérateur de couplage H^1	
3.6.3	Extension au cas de maillages quelconques	
3.7	Conclusion	

3.1 Introduction

Dans la thèse de N. Elkhodja [142] encadrée par F. X. Roux et H. Ben Dhia et celle de J. Touzeau [143] encadrée par V. Chiaruttini, F. Feyel et H. Ben Dhia, le solveur FETI, méthode phare des Méthodes de Décomposition de Domaine (MDD), avec couplages surfaciques de domaines [144], a été adapté à la résolution de problèmes mécaniques statiques multi-modèles, écrits dans le cadre Arlequin, donc avec couplage volumique. Des préconditionneurs efficaces dont la mise en œuvre est simple, ont été proposés et testés. Toutefois les performances des deux approches n'ont pas été comparées entre elles.

Dans ce chapitre, mus par nos objectifs \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 qui correspondent à la diminution des coûts de simulation d'une part et la coopération avec des codes industriels d'autre part, nous reprenons le fil de ces développements et comparons les performances du solveur FETI dans les cas de raccords surfaciques et volumiques, incompatibles et compatibles ; compatibilité que nous créons ici.

Cette comparaison est réalisée sur la base de trois problèmes en lien avec ceux de la modélisation du procédé SLM. Il s'agit d'un problème de diffusion de la chaleur linéaire et stationnaire et d'un autre instationnaire ; le troisième étant un problème de mécanique 2D avec localisation et singularité. Nous accorderons plus d'attention sur le problème thermique transitoire de part sa proximité avec la FA en faisant des rappels théoriques qui éclairent la stabilité de sa solution ainsi que sa résolution numérique pratique.

Ce chapitre comporte une première Section 3.2 dans laquelle les écritures fortes, faibles puis discrètes des trois problèmes évoqués sont développées. Dans la Section 3.3, nous reprenons ces trois problèmes et en donnons une écriture faible continue puis discrète, décomposée en deux sous-domaines avec un raccord dual surfacique classique et un raccord dual volumique dans le cadre Arlequin. Le principe de la méthode FETI et son adaptation au cas du couplage volumique Arlequin sont rappelés à la Section 3.4. Les résultats obtenus et les comparaisons des cas tests incompatibles sont présentées à la Section 3.5. Une méthode de couplage volumique compatible est développée dans le cadre Arlequin avec plusieurs variantes et, à nouveau, les performances de cette méthode sont comparées au couplage surfacique à la dernière section. Des conclusions sont données à la fin du chapitre.

3.2 Présentation des problèmes tests

Pour comparer le couplage surfacique au couplage volumique, nous avons choisi un échantillon représentatif de problèmes thermo-mécaniques, en lien avec notre préoccupation applicative de simulation du procédé de SLM.

3.2.1 Problème thermique stationnaire

Nous cherchons le champ de température θ , d'équilibre, induit par la diffusion thermique d'une source de chaleur supposée localisée f_{las} , dans un solide \mathcal{S} occupant la fermeture d'un domaine ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, borné, régulier, dont une illustration est donnée à la Figure 3.1. Le support de la source est noté $\omega_{las} \subset \Omega$, de forme circulaire de rayon r . Pour la problématique de la FA, comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, une zone localisée critique est la zone d'impact du laser, où la matière sous forme de particules solides absorbe la chaleur. La conduction de la chaleur se fait donc, avant que la matière fonde et forme le bain liquide, dans un milieu granulaire. Pour mimer grossièrement le comportement de ce milieu compliqué, nous avons introduit dans un milieu continu, cf. Figure 3.1 des défauts géométriques sous forme de deux couronnes de trous de rayon r_t , centrées par rapport à la source et de côté $2 \times d_1$ et $2 \times d_2$.

Le solide est supposé avoir une conductivité homogène et isotrope, que nous notons k . Une température T_{amb} constante est imposée sur sa frontière notée $\partial\Omega$. La formulation forte de ce problème thermique stationnaire (\mathcal{P}_{ts}), est donnée par le système d'équations (3.1).

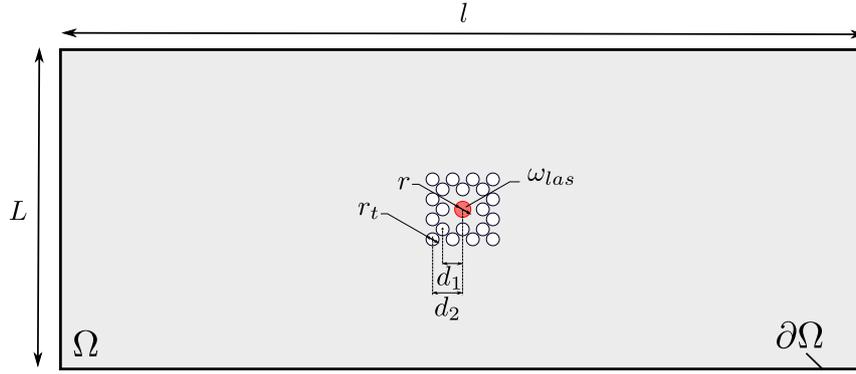


FIGURE 3.1 – Illustration du problème thermique stationnaire.

Formulation 3.1: Formulation locale du problème (\mathcal{P}_{ts})

Trouver les champs θ et ϕ tels que :

$$\nabla \cdot \phi = f_{las} \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.1a)$$

$$\phi = -k \nabla \theta \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.1b)$$

$$\theta = T_{amb} \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (3.1c)$$

Avec ∇ l'opérateur nabla et ϕ le flux thermique. La température T_{amb} étant supposée constante sur $\partial\Omega$, en introduisant

$$T^r = T_{amb} \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.2)$$

et en posant $T = \theta - T^r$ dans Ω . Nous recherchons maintenant le champ T tel que $T = \theta - T^r$, le problème se reformule alors sous la forme plus simple qui suit :

Formulation 3.2: Formulation primale locale du problème (\mathcal{P}_{ts})

Trouver le champ T tel que :

$$-k \Delta T = f_{las} \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.3a)$$

$$T = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (3.3b)$$

Afin de résoudre numériquement ce problème, nous suivons une approche variationnelle. La formulation faible primale du problème (\mathcal{P}_{ts}) est classiquement donnée par (3.4).

Formulation 3.3: Formulation variationnelle primale du problème (\mathcal{P}_{ts})

Trouver $T \in \mathcal{V}_0$ tel que $\forall T^* \in \mathcal{V}_0$:

$$a_0^{th}(T, T^*) = l_0^{th}(T^*) \quad (3.4)$$

avec, en supposant $f_{las} \in L^2(\Omega)$:

$$a_0^{th}(T, T^*) = \int_{\Omega} k \nabla T \cdot \nabla T^* \, d\Omega \quad \text{et} \quad l_0^{th}(T^*) = \int_{\Omega} f_{las} T^* \, d\Omega, \quad (3.5)$$

et l'espace de recherche de la solution \mathcal{V}_0 étant l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$.

Nous savons que moyennant des hypothèses de régularité classiques sur les données (Ω suffisamment régulier, $k \in L^\infty(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$) le problème (\mathcal{P}_{ts}) admet une solution unique et stable.

3.2.2 Problème thermique instationnaire

Nous considérons à présent le problème thermique instationnaire, nous reprenons le formalisme du problème (\mathcal{P}_{ts}) et étudions la diffusion de la chaleur sur un intervalle de temps $I =]0, \tau]$. Le solide \mathcal{S} est supposé avoir une capacité thermique c_p et une masse volumique ρ homogènes (et toujours la même conductivité k homogène et isotrope). Sa température est maintenue égale à T_{amb} constante sur sa frontière notée $\partial\Omega$ et nous supposons son champ thermique initial T_0 homogène et égal à T_{amb} dans Ω . Les paramètres matériaux sont supposés vérifier les propriétés de régularité et positivité suivantes

$$(\rho, c_p, k) \in (L^\infty(\Omega))^3, \text{ et } (\rho, c_p, k) > 0 \text{ dans } \Omega, \quad (3.6)$$

et la source $f_{las} \in C^1(\bar{I}; L^2(\Omega))$. La formulation forte de ce problème thermique instationnaire noté par la suite (\mathcal{P}_{ti}), est donnée par le système d'équation (3.7) qui suit

Formulation 3.4: Formulation locale du problème (\mathcal{P}_{ti})

Trouver le champ θ tel que :

$$\rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \phi = f_{las} \quad \text{dans } I \times \Omega, \quad (3.7a)$$

$$\phi = -k \nabla \theta \quad \text{dans } I \times \Omega \quad (3.7b)$$

$$\theta = T_{amb} \quad \text{sur } I \times \partial\Omega, \quad (3.7c)$$

$$\theta(0, x) = T_0 \quad \text{pour } x \in \Omega. \quad (3.7d)$$

Comme dans le cas stationnaire, en introduisant

$$T^r = T_{amb} \quad \text{dans } I \times \Omega, \quad (3.8)$$

nous vérifions facilement qu'en posant $T = \theta - T^r$, le problème se reformule comme suit

Formulation 3.5: Formulation locale primale relevée (\mathcal{P}_{ti})

Trouver le champ T tel que :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - k \Delta T = f_{las} \quad \text{dans } I \times \Omega, \quad (3.9a)$$

$$T = 0 \quad \text{sur } I \times \partial\Omega, \quad (3.9b)$$

$$T(0, x) = 0 \quad \text{pour } x \in \Omega. \quad (3.9c)$$

Ce problème étant proche de la problématique de simulation de la FA, nous donnons dans la sous-section suivante quelques propriétés mathématiques de sa solution.

3.2.3 Caractéristiques mathématiques du problème thermique instationnaire

Nous savons d'après la Théorie Spectrale présentée dans l'ouvrage [145], que le problème (3.9) admet, sous forme faible, une solution et qu'elle est unique. Nous donnons donc sa formulation faible primale :

Formulation 3.6: Formulation faible primale du problème thermique instationnaire

Soit $T(0) = 0$ donné, $\forall t \in I$, trouver $T(t) \in \mathcal{V}_0$ tel que,

$$\frac{d}{dt} m_0^{th}(T(t), T^*) + a_0^{th}(T(t), T^*) = l_0^{th}(T^*), \quad \forall T^* \in \mathcal{V}_0, \quad (3.10)$$

avec :

$$m_0^{th}(T, T^*) = \int_{\Omega} \rho c_p T T^* d\Omega \quad (3.11)$$

D'après [145] (Théorème 6.2-1 et Remarque 6.2-2 qui affaiblit la V -ellipticité), sous un certain nombre d'hypothèses, classiquement vérifiables pour ce problème, il existe une suite croissante de valeurs propres $-\lambda < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots$ et une base de Hilbert orthonormale de vecteurs propres (Λ_i) telles que :

$$\forall T^* \in V, a_0^{th}(\Lambda_i, T^*) = \lambda_i (\Lambda_i, T^*)_{0,\Omega} \quad (3.12)$$

(où nous rappelons que $(\cdot, \cdot)_{0,\Omega}$ est le produit scalaire de l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$) et la solution du problème (3.10) existe, est unique et prend la forme analytique suivante :

$$T(t) = \sum_{i \geq 1} \left\{ m_0^{th}(T_0, \Lambda_i) e^{-\lambda_i t} + \int_0^t (f_{las}(\gamma), \Lambda_i)_{0,\Omega} e^{-\lambda_i(t-\gamma)} d\gamma \right\} \Lambda_i. \quad (3.13)$$

L'observation de cette forme analytique montre la décroissance exponentielle en temps de l'influence de la condition initiale ainsi que de l'effet de la source de chaleur sur le champ thermique global. De plus, par la petite taille du support de la source de chaleur, l'effet de celle-ci est très localisé. Numériquement cela conduit à un besoin local de précision afin de capturer finement les gradients thermiques très raides et donc à un raffinement des discrétisations. De plus, si Ω est un domaine borné régulier de classe C^∞ alors, pour $\epsilon > 0$, T est de classe C^∞ en x et t dans $Q = \bar{\Omega} \times [\epsilon, \tau]$, c'est que qu'on appelle généralement l'effet régularisant de l'opérateur parabolique de la chaleur.

Remarque 3.1. *Dans la pratique, l'obtention des modes spatiaux Λ_i après l'introduction d'une discrétisation en espace est coûteuse numériquement. Ces méthodes ne sont donc généralement pas utilisées. De plus comme nous l'avons vu au Chapitre 2, pour notre problématique, la géométrie du domaine de calcul évolue continuellement au cours du temps rendant l'adaptation de ces méthodes complexe.*

Nous introduisons une discrétisation de type différences finies pour l'intervalle temporel I avec une collection de $J + 1$ instants : $t_0 (= 0)$, $t_1, \dots, t_{j-1}, \dots, t_j, \dots, t_J (= \tau)$ et avec un pas de temps δt constant. Nous approximons ensuite la dérivée temporelle par un schéma de type Euler implicite. A nouveau, nous suivons une approche variationnelle et la formulation faible du problème (\mathcal{P}_{t_i}) est alors donnée par (3.14).

Formulation 3.7: Formulation variationnelle du problème (\mathcal{P}_{t_s})

Etant donné le champ initial T^0 , trouver $\forall j \in \{1, \dots, J\}$, $T^j \in \mathcal{V}_0$ tel que $\forall T^* \in \mathcal{V}_0$:

$$\frac{1}{\delta t} m_0^{th}(T^j, T^*) + a_0^{th}(T^j, T^*) = l_0^{th}(T^*) + \frac{1}{\delta t} m_0^{th}(T^{j-1}, T^*), \quad (3.14)$$

Une autre propriété intéressante vérifiée par le champ thermique solution de l'équation de la chaleur est le Principe du Maximum. Nous l'énonçons dans le cas de la Formulation 3.9 locale-forte du problème thermique en nous basant sur les articles [146, 147, 148] ainsi que livre référencé [149]. Le problème est posé sur le domaine $Q_T = I \times \Omega$ avec l'intervalle temporel $I =]0, T[$ et nous introduisons les domaines

$Q_{\bar{t}_1} =]0, t_1] \times \Omega$ et $S_{\bar{t}_1} =]0, t_1] \times \partial\Omega$ avec $t_1 \in \bar{I}$. La forme continue du Principe du Maximum s'énonce ainsi :

Théorème 3.1: Principe du Maximum Continu (PMC)

Si $T(t, x)$ est la solution classique du problème thermique donné sous la Formulation 2.1, alors pour tout instant $t_1 \in \bar{I}$, nous avons l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \min \left\{ 0, \min_{\Omega} T_0 \right\} + t_1 \min \left\{ 0, \min_{Q_{\bar{t}_1}} f_{las} \right\} \\ \leq T(x, t_1) \leq \max \left\{ 0, \max_{\Omega} T_0 \right\} + t_1 \max \left\{ 0, \max_{Q_{\bar{t}_1}} f_{las} \right\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Comme mentionné dans l'article [150], en fonction des tailles des discrétisations (maillage spatial et temporel), quand bien même un schéma d'Euler implicite en temps est choisi, il est possible de voir apparaître des instabilités, sur les premiers pas de temps, ceci se traduit par des champs thermiques non-physiques qui violent le PMC. Deux causes sont à l'origine de ces phénomènes :

- un champ thermique initial non compatible avec les conditions limites de type Dirichlet,
- un flux thermique, i.e. une condition de Neumann, intense.

Le second point est caractéristique de la modélisation de la simulation du procédé de FA. Dans [146, 147, 148], les auteurs développent des critères basés sur les caractéristiques géométriques des maillages utilisés pour la discrétisation du problème parabolique afin de s'assurer que le Principe du Maximum est bien vérifié. Ces critères ne sont pas forcément faciles à mettre en place en pratique. Dans [150], les auteurs cite un certain nombre d'articles ayant mis en évidence une relation empirique entre les pas des discrétisations temporelle et spatiale que nous redonnons ici :

$$\Delta t_{ts} = \alpha \frac{\rho c_p}{k} \Delta x^2 \quad (3.16)$$

avec α une constante proche de 1. Pour nos simulations, comme celles présentées au Chapitre 2, ayant choisi un schéma d'Euler implicite et introduit des discrétisations très fines sous le laser, nous n'avons jamais, même avec des pas de temps très faibles proches de 10^{-4} (s), observé ces phénomènes. En effet, une application numérique avec les paramètres matériaux de l'alliage de Ti6Al4V donnés aux Chapitre 2 donne :

$$(\Delta x)^2 = \frac{k}{\rho c_p} \Delta t \approx 5 \times 10^{-10} (m^2) \rightarrow \Delta x \approx 2.2 \times 10^{-5} (m) \quad (3.17)$$

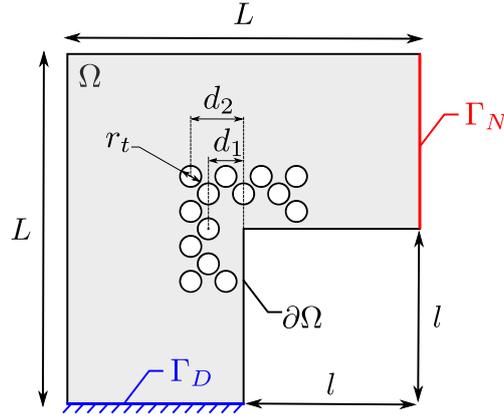
Ce qui correspond à un minimum de deux éléments dans l'épaisseur de la couche de poudre (épaisseur proche de $50 \mu m$), condition largement vérifiée par les discrétisations que nous avons considérées.

Nous avons finalement considéré un troisième problème détaillé dans le paragraphe qui suit.

3.2.4 Troisième problème modèle : mécanique

Le problème mécanique que nous avons considéré est celui d'un solide \mathcal{S} , illustré par la Figure 3.2, troué, occupant la fermeture d'un domaine ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, borné, régulier, encastré sur une partie de sa frontière Γ_D (représentée en bleu) et soumis à une densité surfacique d'effort \mathbf{f}_s sur la partie complémentaire de sa frontière, \mathbf{f}_s étant nulle hors de Γ_N (représentée en rouge).

Le solide est supposé avoir un comportement élastique linéaire, isotrope de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν . La formulation forte du problème ($\mathcal{P}_{méca}$) est donnée par (3.18).

FIGURE 3.2 – Illustration du domaine Ω .**Formulation 3.8: Formulation locale du problème ($\mathcal{P}_{\text{méca}}$)**

Trouver les champs $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma})$ tels que :

$$\nabla \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.18a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R} \boldsymbol{\epsilon} \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.18b)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.18c)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_D, \quad (3.18d)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{f}_s \quad \text{sur } \Gamma_N. \quad (3.18e)$$

Aussi les modules R_{ijkl} , pour i, j, k, l variant de 1 à 2, du tenseur d'élasticité \mathbf{R} sont supposés satisfaire les hypothèses classiques de régularité, symétrie et coercivité suivante :

$$R_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \quad R_{ijkl} = R_{jikl} = R_{klij} \quad (3.19a)$$

$$\exists R_{\min} > 0; \quad \forall \boldsymbol{\epsilon} \in M_2(\mathbb{R}), \text{ symétrique, } R_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \geq R_{\min} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \text{ dans } \Omega \quad (3.19b)$$

Une fois de plus nous suivons une approche variationnelle. La formulation faible du problème ($\mathcal{P}_{\text{méca}}$) posée sur le champ des déplacement \mathbf{u} est alors donnée par (3.20).

Formulation 3.9: Formulation variationnelle du problème ($\mathcal{P}_{\text{méca}}$)

Trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_0$ tel que $\forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{V}_0$:

$$a_0^{me}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = l_0^{me}(\mathbf{u}^*), \quad (3.20)$$

avec :

$$a_0^{me}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = \int_{\Omega} \mathbf{R} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*) \, d\Omega \quad \text{et} \quad l_0^{me}(\mathbf{u}^*) = \int_{\Gamma_N} \mathbf{f}_s \cdot \mathbf{u}^* \, d\Gamma, \quad (3.21)$$

l'espace de recherche de la solution \mathcal{V}_0 étant défini par

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ \mathbf{v} \in \left(H^1(\Omega) \right)^2 \mid \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_D \right\} \quad (3.22)$$

et $\mathbf{f}_s \in (L^2(\Gamma_N))^2$ la densité surfacique d'effort, verticale : $\mathbf{f}_s = (0, f_s)^T$.

Nous savons également que ce problème est bien posé sous les mêmes hypothèses de régularité du problème (\mathcal{P}_{ts}).

3.3 Formulation des problèmes par des méthodes de Décomposition de Domaine, avec et sans recouvrement

Mus par l'intérêt de traiter des problèmes avec localisations par des méthodes de couplage de modèle afin de diminuer les coûts, nous proposons d'utiliser des méthodes de décomposition de domaine duales avec un couplage surfacique classique et un couplage volumique de type Arlequin. Dans le but d'obtenir toujours les meilleures performances numériques, nous comparons les vitesses de résolution des systèmes discrets issus des couplages hybrides duaux surfacique et volumique. Pour cela, nous écrivons ces trois problèmes en utilisant une partition en sous-domaines (ici deux pour l'illustration). Dans un premier temps, la partition du domaine Ω est réalisée sans recouvrement et nous adoptons une approche hybride duale pour écrire les conditions de transfert à l'interface des deux sous-domaines. Dans un second temps, nous introduisons une partition toujours en deux sous-domaines, mais avec recouvrement et rappelons l'écriture du problème dans le cadre Arlequin. Dans un dernier temps nous appliquons la méthode FETI pour résoudre les systèmes matriciels mixtes que nous obtenons après discrétisation par la MEF et comparons les différentes vitesses de convergence entre les couplages surfacique et volumique.

3.3.1 Formulations hybrides duales des trois problèmes décomposés en deux sous-domaines (sans recouvrement)

Nous commençons par présenter en détail la formulation duale du problème (\mathcal{P}_{ts}), pour cela, nous décomposons le domaine Ω , en deux sous-domaines notés Ω_g pour le sous-domaine global et Ω_l pour le sous-domaine local (cf. Figure 3.3), avec une interface notée Γ telle que $\partial\Omega_{g,int} = \partial\Omega_{l,ext} = \Gamma$. Nous supposons pour simplifier, sans toucher à la généralité, que $\partial\Omega_{g,ext} = \partial\Omega$ et que le support de la source de chaleur est entièrement inclus dans le domaine local, i.e. $\omega_{las} \subset \Omega_l$ ainsi que les perturbations géométriques (trous).

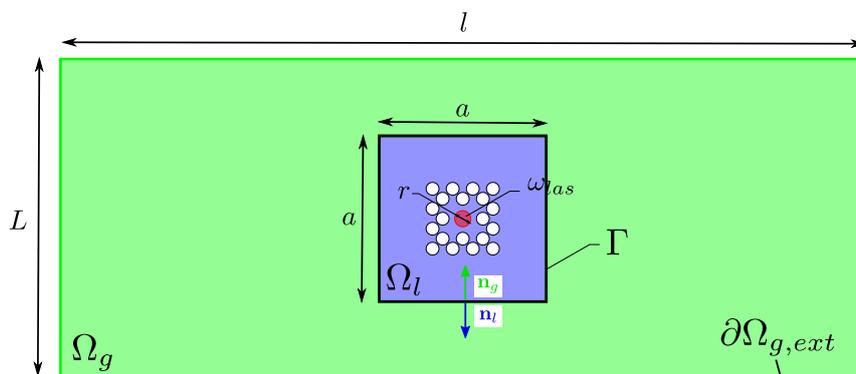


FIGURE 3.3 – Illustration du problème thermique stationnaire décomposé en deux sous-domaines sans recouvrement.

L'écriture forte du problème (\mathcal{P}_{ts}) décomposé sur les deux sous-domaines est donnée classiquement par :

Formulation 3.10: Formulation locale décomposée en deux sous-domaines du problème
(\mathcal{P}_{ts})

Trouver les champs (T_g, ϕ_g) et (T_l, ϕ_l) tels que :

$$\nabla \cdot \phi_g = 0 \quad \text{dans } \Omega_g, \quad (\text{Equilibre thermique dans } \Omega_g) \quad (3.23a)$$

$$\phi_g = -k \nabla T_g \quad \text{dans } \Omega_g, \quad (\text{Loi de Fourier dans } \Omega_g) \quad (3.23b)$$

$$T_g = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_{g,ext}, \quad (\text{Condition de Dirichlet}) \quad (3.23c)$$

$$\nabla \cdot \phi_l = f_{las} \quad \text{dans } \Omega_l, \quad (\text{Equilibre thermique dans } \Omega_l) \quad (3.23d)$$

$$\phi_l = -k \nabla T_l \quad \text{dans } \Omega_l, \quad (\text{Loi de Fourier dans } \Omega_l) \quad (3.23e)$$

$$T_g = T_l \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.23f)$$

$$\phi_g \cdot \mathbf{n}_g = -\phi_l \cdot \mathbf{n}_l \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.23g)$$

avec \mathbf{n}_l les vecteurs normaux unitaires extérieurs des domaines Ω_g et Ω_l (cf. Figure 3.3). Les deux dernières équations étant les conditions de transmission entre les deux sous-domaines avec l'équation (3.23f) exprimant la continuité des champs de température et l'équation (3.23g) l'équilibre des flux thermiques. De la même façon que précédemment, nous établissons la formulation faible de ce problème afin de mettre en place ensuite la MEF. Celle-ci est donnée classiquement par :

Formulation 3.11: Formulation variationnelle du problème (\mathcal{P}_{ts}) décomposé : approche
duale

Trouver $(T_g, T_l, \lambda) \in \mathcal{V}_0^g \times \mathcal{V}^l \times \mathcal{M}'_s$ tels que :

$$a_g^{th}(T_g, T_g^*) + \langle \lambda, T_g^* \rangle_\Gamma = 0 \quad \forall T_g^* \in \mathcal{V}_0^g \quad (3.24)$$

$$a_l^{th}(T_l, T_l^*) - \langle \lambda, T_l^* \rangle_\Gamma = l_l^{th}(T^*) \quad \forall T_l^* \in \mathcal{V}^l \quad (3.25)$$

$$\langle \mu, T_g - T_l \rangle_\Gamma = 0 \quad \forall \mu \in \mathcal{M}'_s \quad (3.26)$$

après avoir imposé l'égalité forte des densités de flux de chaleur à l'interface.

Les espaces sont définis comme : $\mathcal{V}_0^g = H_0^1(\Omega_g)$, $\mathcal{V}^l = H^1(\Omega_l)$ et l'espace médiateur $\mathcal{M}'_s = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ avec $\langle \mu, T \rangle_\Gamma, \forall T \in \mathcal{M}_s = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ le crochet de dualité associé. Les différentes formes sont données par :

$$a_g^{th}(T_g, T_g^*) = \int_{\Omega_g} k \nabla T_g \cdot \nabla T_g^* \, d\Omega, \quad a_l^{th}(T_l, T_l^*) = \int_{\Omega_l} k \nabla T_l \cdot \nabla T_l^* \, d\Omega \quad (3.27a)$$

$$l_l^{th}(T_l^*) = \int_{\Omega_l} f_{las} T_l^* \, d\Omega. \quad (3.27b)$$

le crochet de dualité est remplacé par l'opérateur de couplage suivant :

$$b^{th}(\mu, T) = \int_\Gamma \mu T^* \, d\Sigma, \quad \forall (\mu, T) \in \mathcal{M}_s^2 \quad (3.28)$$

L'analyse mathématique de ce type de problème a fait l'objet de nombreux travaux [151, 152].

Pour construire les problèmes approchés, nous considérons les triangularisations $\mathcal{T}_{\Omega_g}^{hg}$ et $\mathcal{T}_{\Omega_l}^{hl}$ des domaines Ω_g et Ω_l . Nous construisons $\mathcal{V}_0^{g,hg}$ et $\mathcal{V}^{l,hl}$ les sous-espaces EF \mathcal{V}_0^g et \mathcal{V}^l de dimension N_g et N_l . Ainsi les champs approchés T_g^{hg} et T_l^{hl} prennent les formes discrètes suivantes :

$$T_g^{h_g}(x, y) = \sum_{n=1}^{N_g} T_g^{h_g, n} \psi_g^n(x, y) \text{ et } T_l^{h_l}(x, y) = \sum_{n=1}^{N_l} T_l^{h_l, n} \psi_l^n(x, y) \quad (3.29)$$

L'espace d'approximation du multiplicateur de Lagrange sera par la suite, soit pris comme la restriction de l'espace grossier \mathcal{V}_0^{g, h_g} à l'interface $\Gamma : \mathcal{M}_s^{h_\lambda} = \mathcal{V}_0^{g, h_g}|_\Gamma$, soit à celle de l'espace : $\mathcal{M}_s^{h_\lambda} = \mathcal{V}^{l, h_l}|_\Gamma$. Nous noterons N_λ le nombre de degrés de liberté du multiplicateur de Lagrange. La forme discrète du problème est finalement donnée par (3.30).

Formulation 3.12: Formulation discrète du problème (\mathcal{P}_{ts}) décomposé

Trouver les champs $(T_g^{h_g}, T_l^{h_l}, \lambda^{h_\lambda}) \in \mathcal{V}_0^{g, h_g} \times \mathcal{V}^{l, h_l} \times \mathcal{M}_s^{h_\lambda}$ tels que :

$$a_g^{th}(T_g^{h_g}, T_g^{h_g, *}) + b^{th}(\lambda^{h_\lambda}, T_g^{h_g, *}) = 0 \quad \forall T_g^{h_g, *} \in \mathcal{V}_0^{g, h_g} \quad (3.30)$$

$$a_l^{th}(T_l^{h_l}, T_l^{h_l, *}) - b^{th}(\lambda^{h_\lambda}, T_l^{h_l, *}) = l_l^{th}(T_l^{h_l, *}) \quad \forall T_l^{h_l, *} \in \mathcal{V}^{l, h_l} \quad (3.31)$$

$$b^{th}(\mu^{h_\lambda}, T_g^{h_g} - T_l^{h_l}) = 0 \quad \forall \mu^{h_\lambda} \in \mathcal{M}_s^{h_\lambda} \quad (3.32)$$

Nous définissons les espaces EF \mathcal{V}_0^{g, h_g} et \mathcal{V}^{l, h_l} comme :

$$\mathcal{V}_0^{g, h_g} = \left\{ T_g^{h_g, *} \in C^0(\overline{\Omega_g}) \mid T_g^{h_g, *} \Big|_K \in \mathbb{P}_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_{\Omega_g}^{h_g}, \text{ et } T_g^{h_g, *} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}, \quad (3.33a)$$

$$\mathcal{V}^{l, h_l} = \left\{ T_l^{h_l, *} \in C^0(\overline{\Omega_l}) \mid T_l^{h_l, *} \Big|_K \in \mathbb{P}_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_{\Omega_l}^{h_l} \right\}, \quad (3.33b)$$

et la formulation (3.30) est alors équivalente au problème matriciel suivant (en omettant la référence à h_g et h_l pour alléger l'écriture)

Formulation 3.13: Forme matricielle du problème (\mathcal{P}_{ts}) décomposé

Trouver les champs $(\mathbf{T}_g^{ts}, \mathbf{T}_l^{ts}, \boldsymbol{\lambda}^{ts}) \in M_{N_g, 1}(\mathbb{R}) \times M_{N_l, 1}(\mathbb{R}) \times M_{N_\lambda, 1}(\mathbb{R})$ tels que :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_g^{ts} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_g^{th T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_l^{ts} & -\mathbf{B}_l^{th T} \\ \mathbf{B}_g^{th} & -\mathbf{B}_l^{th} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_g^{ts} \\ \mathbf{T}_l^{ts} \\ \boldsymbol{\lambda}^{ts} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_l^{ts} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

où les vecteurs et matrices $\mathbf{T}_i^{ts} \in M_{N_i, 1}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{\lambda}^{ts} \in M_{N_\lambda, 1}(\mathbb{R})$, $\mathbf{K}_i^{ts} \in M_{N_i}(\mathbb{R})$, $\mathbf{B}_i \in M_{N_\lambda, N_i}(\mathbb{R})$ pour $i = g, l$ et $\mathbf{F}_l^{ts} \in M_{N_l, 1}(\mathbb{R})$ sont donnés par :

$$\left(\mathbf{T}_i^{ts} \right)_m = T_i^{h_i, m} \text{ pour } m = 1, \dots, N_i \text{ et pour } i = g, l \quad (3.35a)$$

$$\left(\boldsymbol{\lambda}^{ts} \right)_m = \lambda^{h_\lambda, m} \text{ pour } m = 1, \dots, N_\lambda \quad (3.35b)$$

$$\left(\mathbf{K}_i^{ts} \right)_{m, n} = a_0^{th}(\psi_i^n, \psi_i^m) \text{ pour } m = 1, \dots, N_i, n = 1, \dots, N_i, \text{ et pour } i = g, l \quad (3.35c)$$

$$\left(\mathbf{F}_l^{ts} \right)_m = l_l^{th}(\psi_l^m) \text{ pour } m = 1, \dots, N_l. \quad (3.35d)$$

$$\left(\mathbf{B}_i \right)_{m, n} = b^{th}(\psi_\lambda^n, \psi_i^m) \text{ pour } m = 1, \dots, N_\lambda \text{ et } n = 1, \dots, N_i \text{ et pour } i = g, l, \quad (3.35e)$$

Pour le problème (\mathcal{P}_{ti}), nous introduisons en plus d'utiliser la même discrétisation spatiale que pour le problème (\mathcal{P}_{ts}), la même discrétisation de type différences finies pour l'intervalle temporel I que celle introduite pour la formulation (3.14) et approximons la dérivée temporelle à nouveau par un schéma de type Euler implicite. Nous pouvons alors établir de la même façon que pour le problème (\mathcal{P}_{ti}) la formulation matricielle suivante :

Formulation 3.14: Forme matricielle du problème (\mathcal{P}_{ti}) décomposé

Etant donnés les champs initiaux $(\mathbf{T}_g^{ti,0}, \mathbf{T}_l^{ti,0}) \in M_{N_g,1}(\mathbb{R}) \times M_{N_l,1}(\mathbb{R})$, trouver $\forall j \in \{1, \dots, J\}$, les champs $(\mathbf{T}_g^{ti,j}, \mathbf{T}_l^{ti,j}, \boldsymbol{\lambda}^{ti,j}) \in M_{N_g,1}(\mathbb{R}) \times M_{N_l,1}(\mathbb{R}) \times M_{N_\lambda,1}(\mathbb{R})$ tel que :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_g^{ti} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_g^{thT} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_l^{ti} & -\mathbf{B}_l^{thT} \\ \mathbf{B}_g^{th} & -\mathbf{B}_l^{th} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_g^{ti,j} \\ \mathbf{T}_l^{ti,j} \\ \boldsymbol{\lambda}^{ti,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_g^{ti,j} \\ \mathbf{F}_l^{ti,j} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

où les vecteurs et matrices $\mathbf{T}_i^{ti,j} \in M_{N_i,1}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{\lambda}^{ti,j} \in M_{N_\lambda,1}(\mathbb{R})$, $\mathbf{K}_i^{ti} \in M_{N_i}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{F}_i^{ti,j} \in M_{N_i,1}(\mathbb{R})$ pour $i = g, l$ sont donnés, $\forall j \in \{1, \dots, J\}$, par :

$$\mathbf{K}_i^{ti} = \frac{1}{\delta t} \mathbf{M}_i^{ti} + \mathbf{A}_i^{ti}, \quad \mathbf{F}_g^{ti,j} = \frac{1}{\delta t} \mathbf{M}_g^{ti} \mathbf{T}_g^{ti,j-1}, \quad \mathbf{F}_l^{ti,j} = \frac{1}{\delta t} \mathbf{M}_l^{ti} \mathbf{T}_l^{ti,j-1} + \mathbf{L}_l^{ti} \text{ pour } i = g, l \quad (3.37)$$

et

$$\left(\mathbf{T}_i^{ti,j} \right)_m = T_g^{hg,j,m} \text{ pour } m = 1, \dots, N_i \text{ et pour } i = g, l \quad (3.38a)$$

$$\left(\boldsymbol{\lambda}^{ti,j} \right)_m = \lambda^{h\lambda,j,m} \text{ pour } m = 1, \dots, N_\lambda \quad (3.38b)$$

$$\left(\mathbf{M}_i^{ti} \right)_{m,n} = m_0^{th}(\psi_i^n, \psi_i^m) \text{ pour } m = 1, \dots, N_i, n = 1, \dots, N_i, \text{ et pour } i = g, l \quad (3.38c)$$

$$\left(\mathbf{A}_i^{ti} \right)_{m,n} = a_0^{th}(\psi_i^n, \psi_i^m) \text{ pour } m = 1, \dots, N_i, n = 1, \dots, N_i, \text{ et pour } i = g, l \quad (3.38d)$$

$$\left(\mathbf{L}_l^{ti} \right)_m = l_0^{th}(\psi_l^m) \text{ pour } m = 1, \dots, N_l. \quad (3.38e)$$

Nous supposons aussi que les champs \mathbf{T}_g^0 et \mathbf{T}_l^0 sont égaux sur la frontière Γ .

La forme matricielle du problème ($\mathcal{P}_{méca}$) s'obtenant de manière analogue à celle du problème (\mathcal{P}_{ts}), nous la donnons sans détail. La décomposition de domaine utilisée pour ce problème est illustrée par la Figure 3.4.

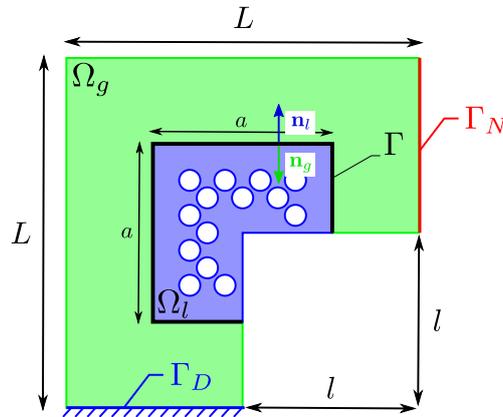


FIGURE 3.4 – Illustration du problème mécanique décomposé en deux sous-domaines sans recouvrement.

Celle du problème ($\mathcal{P}_{méca}$) étant donnée par :

Formulation 3.15: Forme matricielle du problème ($\mathcal{P}_{\text{méca}}$) décomposé

Trouver les champs $(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_l, \boldsymbol{\lambda}^{\text{méca}}) \in M_{2 \times N_g, 1}(\mathbb{R}) \times M_{2 \times N_l, 1}(\mathbb{R}) \times M_{2 \times N_\lambda, 1}(\mathbb{R})$ tel que :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_g^{\text{méca}} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_g^{\text{méca}T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_l^{\text{méca}} & -\mathbf{B}_l^{\text{méca}T} \\ \mathbf{B}_g^{\text{méca}} & -\mathbf{B}_l^{\text{méca}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_g \\ \mathbf{u}_l \\ \boldsymbol{\lambda}^{\text{méca}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_g^{\text{méca}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

pour laquelle nous précisons l'opérateur de couplage :

$$b^{\text{me}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}) = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u} \, d\Sigma \quad (3.40)$$

Maintenant que nous avons développé les formulations des trois problèmes dont les domaines ont été décomposés en deux sous-domaines sans recouvrement, nous allons, de la même manière, détailler celles pour une décomposition avec recouvrement, dans le cadre Arlequin.

3.3.2 Formulation Arlequin des trois problèmes décomposés en deux sous-domaines (avec recouvrement)

Nous commençons par présenter en détail la formulation duale du problème (\mathcal{P}_{ts}), pour cela, nous introduisons une partition du domaine Ω toujours en deux sous-domaines Ω_g et Ω_l mais cette fois-ci avec recouvrement (cf. Figure 3.5). Nous notons cette zone $\Omega_c = \Omega_g \cap \Omega_l$ apparaissant en orange, d'épaisseur $e > 0$, telle que $\partial\Omega_{g,int} = \partial\Omega_{c,int}$ et $\partial\Omega_{l,ext} = \partial\Omega_{c,ext}$. Nous faisons les mêmes hypothèses sur le support de la source de chaleur et les trous que pour le cas sans recouvrement en précisant que nous les supposons inclus dans la zone $\Omega_l \setminus \Omega_c$ (en dehors donc de la zone de couplage Ω_c), cf. Figure 3.5.

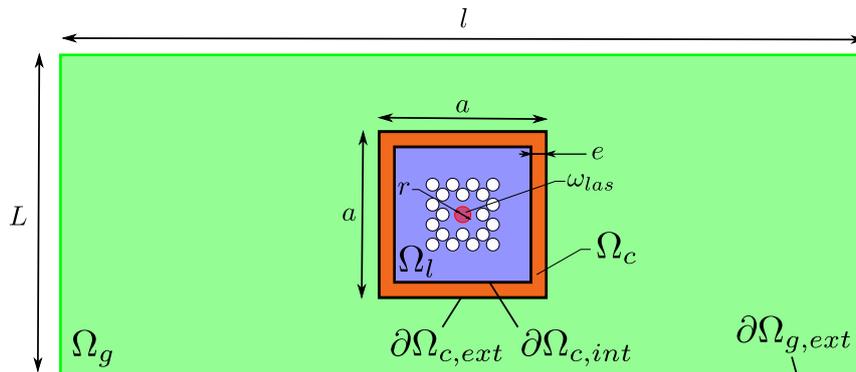


FIGURE 3.5 – Illustration du problème thermique stationnaire décomposé en deux sous-domaines avec recouvrement.

Nous ne détaillons pas l'obtention de la formulation variationnelle du problème (\mathcal{P}_{ts}) dans le cadre Arlequin car ceci a déjà été fait au Chapitre 2 et la donnons directement :

Formulation 3.16: Formulation variationnelle du problème (\mathcal{P}_{ts}) décomposé dans le cadre Arlequin

Trouver les champs $(T_g, T_l, \lambda) \in \mathcal{V}_0^g \times \mathcal{V}^l \times \mathcal{M}_v$ tels que :

$$a_g^{th}(T_g, T_g) + c^{th}(\lambda, T_g^*) = 0 \quad \forall T_g^* \in \mathcal{V}_0^g, \quad (3.41a)$$

$$a_l^{th}(T_l, T_l^*) - c^{th}(\lambda, T_l^*) = l_l^{th}(T_l^*) \quad \forall T_l^* \in \mathcal{V}^l, \quad (3.41b)$$

$$c^{th}(\mu, T_g - T_l) = 0 \quad \forall \mu \in \mathcal{M}. \quad (3.41c)$$

où les opérateurs pondérés sont donnés par :

$$a_g^{th}(T_g, T_g^*) = \int_{\Omega_g} \alpha_g k \nabla T_g \cdot \nabla T_g^* \, d\Omega, \quad a_l^{th}(T_l, T_l^*) = \int_{\Omega_l} \alpha_l k \nabla T_l \cdot \nabla T_l^* \, d\Omega, \quad \text{et } l_l^{th}(T_l^*) = \int_{\Omega_l} \alpha_l f_{las} T_l^* \, d\Omega, \quad (3.42)$$

et où l'opérateur de couplage volumique, thermiquement homogénéisé est donné par :

$$c^{th}(\mu, T) = \kappa_v^1 \int_{\Omega_c} \mu T \, d\Omega + \kappa_v^2 \int_{\Omega_c} \nabla \mu \cdot \nabla T \, d\Omega, \quad \forall (\mu, T) \in \mathcal{M}_v^2 \quad (3.43)$$

avec $\kappa_v^1 = \frac{k}{e^2}$ et $\kappa_v^2 = k$.

Les paramètres de partition de l'unité sont pris tels que :

$$\alpha_g + \alpha_l = 1, \text{ dans } \Omega, \quad \alpha_g = 0, \text{ dans } \Omega \cap (\Omega_l \setminus \Omega_c), \text{ et } \alpha_l = 0, \text{ dans } \Omega \setminus \Omega_l. \quad (3.44)$$

Nous introduisons à nouveau deux triangularisations $\mathcal{T}_{\Omega_g}^{hg}$ et $\mathcal{T}_{\Omega_l}^{hl}$ et construisons de la même façon les espaces d'approximation EF $\mathcal{V}_0^{g,hg}$, $\mathcal{V}^{l,hl}$ et $\mathcal{M}_v^{h\lambda}$. La formulation discrétisée du problème écrit dans le cadre Arlequin :

Formulation 3.17: Formulation variationnelle du problème (\mathcal{P}_{ts}) décomposé dans le cadre Arlequin

Trouver les champs $(T_g^{hg}, T_l^{hl}, \lambda^{h\lambda}) \in \mathcal{V}_0^{g,hg} \times \mathcal{V}^{l,hl} \times \mathcal{M}_v^{h\lambda}$ tels que :

$$a_g^{th}(T_g^{hg}, T_g^{hg,*}) + c^{th}(\lambda^{h\lambda}, T_g^{hg,*}) = 0 \quad \forall T_g^{hg,*} \in \mathcal{V}_0^{g,hg}, \quad (3.45a)$$

$$a_l^{th}(T_l^{hl}, T_l^{hl,*}) - c^{th}(\lambda^{h\lambda}, T_l^{hl,*}) = l_l^{th}(T_l^{hl,*}) \quad \forall T_l^{hl,*} \in \mathcal{V}^{l,hl}, \quad (3.45b)$$

$$c^{th}(\mu^{h\lambda}, T_g^{hg} - T_l^{hl}) = 0 \quad \forall \mu^{h\lambda} \in \mathcal{M}_v^{h\lambda}. \quad (3.45c)$$

Signalons ici que, sous les mêmes hypothèses que celles utilisées en mécanique statique (cf. [106, 133]), nous pouvons, sans la moindre difficulté, suivre la même démarche et nous assurer que les problèmes Arlequin continus et surtout discrets sont bien posés (en nous fondant sur la théorie de Brezzi [153]) pour les problèmes (\mathcal{P}_{ts}) et $(\mathcal{P}_{méca})$.

La formulation (3.45) est équivalente à la forme matricielle suivante :

Formulation 3.18: Formulation discrète du problème (\mathcal{P}_{ts}) dans le cadre Arlequin

Trouver les champs $(\mathbf{T}_g^{ts}, \mathbf{T}_l^{ts}, \boldsymbol{\lambda}^{ts}) \in M_{N_g,1}(\mathbb{R}) \times M_{N_l,1}(\mathbb{R}) \times M_{N_\lambda,1}(\mathbb{R})$ tels que :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_g^{ts} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_g^{thT} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_l^{ts} & -\mathbf{C}_l^{thT} \\ \mathbf{C}_g^{th} & -\mathbf{C}_l^{th} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_g^{ts} \\ \mathbf{T}_l^{ts} \\ \boldsymbol{\lambda}^{ts} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_l^{ts} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Les formes matricielles des deux autres problèmes (\mathcal{P}_{ti}) et $(\mathcal{P}_{méca})$ s'établissant de la même manière, nous les donnons directement. A nouveau, pour le problème (\mathcal{P}_{ti}) nous avons utilisé la même décomposition qu'introduite pour le problème (\mathcal{P}_{ts}) , celle pour le problème $(\mathcal{P}_{méca})$ est illustrée par la Figure 3.6.

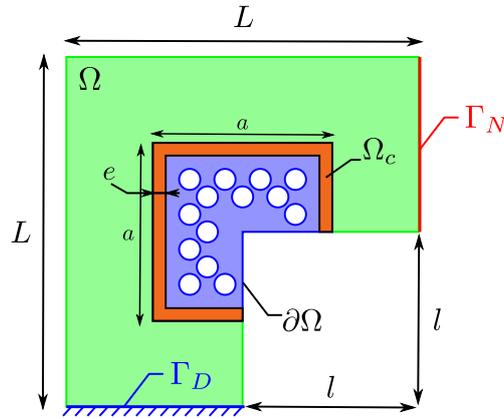


FIGURE 3.6 – Illustration du problème mécanique décomposé en deux sous-domaines avec recouvrement.

Formulation 3.19: Forme matricielle du problème (\mathcal{P}_{ti}) décomposé

Etant donnés les champs initiaux $(\mathbf{T}_g^{ti,0}, \mathbf{T}_l^{ti,0}) \in M_{N_g,1}(\mathbb{R}) \times M_{N_l,1}(\mathbb{R})$, trouver $\forall j \in \{1, \dots, J\}$, les champs $(\mathbf{T}_g^{ti,j}, \mathbf{T}_l^{ti,j}, \boldsymbol{\lambda}^{ti,j}) \in M_{N_g,1}(\mathbb{R}) \times M_{N_l,1}(\mathbb{R}) \times M_{N_\lambda,1}(\mathbb{R})$ tel que :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_g^{ti} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_g^{thT} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_l^{ti} & -\mathbf{C}_l^{thT} \\ \mathbf{C}_g^{th} & -\mathbf{C}_l^{th} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_g^{ti,j} \\ \mathbf{T}_l^{ti,j} \\ \boldsymbol{\lambda}^{ti,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_g^{ti,j} \\ \mathbf{F}_l^{ti,j} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Où nous supposons que les champs $\mathbf{T}_g^{ti,0}$ et $\mathbf{T}_l^{ti,0}$ sont égaux dans la zone de couplage. Celle du problème $(\mathcal{P}_{méca})$ étant donnée par :

Formulation 3.20: Forme matricielle du problème $(\mathcal{P}_{méca})$ décomposé

Trouver les champs $(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_l, \boldsymbol{\lambda}^{méca}) \in M_{2 \times N_g,1}(\mathbb{R}) \times M_{2 \times N_l,1}(\mathbb{R}) \times M_{2 \times N_\lambda,1}(\mathbb{R})$ tel que :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_g^{méca} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_g^{mécaT} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_l^{méca} & -\mathbf{C}_l^{mécaT} \\ \mathbf{C}_g^{méca} & -\mathbf{C}_l^{méca} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_g \\ \mathbf{u}_l \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_g^{méca} \\ \mathbf{F}_l^{méca} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

pour laquelle nous précisons l'opérateur de couplage :

$$c^{\text{me}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}) = \kappa_v^1 \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega + \kappa_v^2 \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\mu}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \, d\Omega, \quad \forall (\boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}) \in \mathcal{M}_v^2 \quad (3.49)$$

avec $\kappa_v^1 = \frac{E}{e^2}$ et $\kappa_v^2 = E$.

L'ensemble de ces systèmes matriciels sont de nature mixte et une méthode efficace d'inversion de ce type de système est celle de Schur que nous détaillons dans la section suivante. Avant cela, nous nous sommes, comme pour la formulation mono-modèle du problème thermique instationnaire (\mathcal{P}_{ti}), intéressé particulièrement à la stabilité de sa formulation dans le cadre Arlequin.

3.3.3 Analyse de la stabilité de la formulation Arlequin du problème (\mathcal{P}_{ti})

Nous avons vu que la formulation faible mono-modèle du problème (\mathcal{P}_{ti}) admet une solution et qu'elle est unique, nous la notons T_{mono} . Pour démontrer la stabilité de sa formulation dans le cadre Arlequin, nous commençons par donner sa formulation Arlequin primale :

Formulation 3.21: Formulation Arlequin faible primale du problème thermique instationnaire

Soit $T_g(0) = T_0$ dans Ω_g , $T_l(0) = T_0$ dans Ω_l donnés, $\forall t \in I$, trouver $\mathbf{T}(t) \in \mathbf{V}_c$ tel que :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}(\mathbf{T}, \mathbf{T}^*; \boldsymbol{\alpha}) + \mathcal{A}(\mathbf{T}, \mathbf{T}^*; \boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{L}(\mathbf{T}^*) \quad \forall \mathbf{T}^* \in \mathbf{V}_c \quad (3.50)$$

avec l'espace \mathbf{V}_c défini comme :

$$\mathbf{V}_c = \left\{ \mathbf{T}^* = (T_g^*, T_l^*) \in \mathcal{V}_0^g \times \mathcal{V}^l \mid T_g^* = T_l^* \text{ dans } \Omega_c \right\} \quad (3.51)$$

le champ $\mathbf{T} = (T_g, T_l) \in \mathbf{V}_c$, et $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_g, \alpha_l)$. Les différents opérateurs sont donnés par :

$$\mathcal{M}(\mathbf{T}, \mathbf{T}^*; \boldsymbol{\alpha}) = m_g^{\text{th}}(T_g(t), T_g^*; \alpha_g) + m_l^{\text{th}}(T_l(t), T_l^*; \alpha_l) \quad (3.52a)$$

$$\mathcal{A}(\mathbf{T}, \mathbf{T}^*; \boldsymbol{\alpha}) = a_g^{\text{th}}(T_g(t), T_g^*; \alpha_g) + a_l^{\text{th}}(T_l(t), T_l^*; \alpha_l) \quad (3.52b)$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{T}^*) = l_l^{\text{th}}(T_l^*) \quad (3.52c)$$

Nous posons $T_g = T_{\text{mono}}$ sur Ω_g et $T_l = T_{\text{mono}}$ sur Ω_l et notons $\mathbf{T}_{\text{arl}} = (T_g, T_l)$. Nous avons bien $\mathbf{T}_{\text{arl}} \in \mathbf{V}_c$. En injectant \mathbf{T}_{arl} dans l'équation (3.50) et d'après les définitions des différents opérateurs et les propriétés des champs de partition de l'unité, nous vérifions que \mathbf{T}_{arl} est bien solution du problème Arlequin primal. Nous avons donc bien l'existence d'une solution du problème écrit sous sa formulation Arlequin primale. Nous voulons maintenant démontrer qu'elle est unique. Pour cela nous procédons par l'absurde. Soit $\mathbf{T}_{\text{arl}}^1$ et $\mathbf{T}_{\text{arl}}^2$ deux champs solutions du problème (3.50). En injectant ces deux champs dans l'équation (3.50), en faisant la différence de ces deux équations et en prenant comme champ test $\mathbf{T}_{\text{arl}}^d = \mathbf{T}_{\text{arl}}^1 - \mathbf{T}_{\text{arl}}^2$ nous obtenons l'égalité suivante :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}(\mathbf{T}_{\text{arl}}^d, \mathbf{T}_{\text{arl}}^d; \boldsymbol{\alpha}) + \mathcal{A}(\mathbf{T}_{\text{arl}}^d, \mathbf{T}_{\text{arl}}^d; \boldsymbol{\alpha}) = 0 \quad (3.53)$$

Nous avons alors

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}(\mathbf{T}_{\text{arl}}^d, \mathbf{T}_{\text{arl}}^d; \boldsymbol{\alpha}) \leq 0 \text{ et } \mathcal{M}(\mathbf{T}_{\text{arl}}^d(x, 0), \mathbf{T}_{\text{arl}}^d(x, 0); \boldsymbol{\alpha}) = 0 \quad (3.54)$$

nous avons donc la norme $L^2(\Omega)$ du champ $\mathbf{T}_{\text{arl}}^d$ définie par l'opérateur \mathcal{M} qui décroît en temps et est initialement nulle. Sa norme $L^2(\Omega)$ est donc nulle pour tout $t \in I$, nous avons donc

$$\mathbf{T}_{ar_l}^d(t) = 0, \forall t \in I \text{ au sens de } L^2(\Omega) \quad (3.55)$$

d'où l'unicité. La formulation Arlequin primale est donc stable. En pratique il n'est pas simple de construire un espace d'approximation de \mathbf{V}_c . Nous avons donc recours à la méthode du multiplicateur de Lagrange.

3.4 Résolution par la Méthode FETI

La méthode de résolution que nous avons considérée est la méthode FETI. Nous détaillons sa mise en place pour le système discret Arlequin du problème (\mathcal{P}_{ts}).

La première étape est l'écriture du problème condensé sur le multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$. Cette opération reprend le principe de la méthode d'inversion de Gauss par blocs : éliminer les champs primaux T_q et T_l en fonction de $\boldsymbol{\lambda}$ pour aboutir à un problème condensé sur le seul champ $\boldsymbol{\lambda}$. Cependant dans le cas du domaine local, un mouvement de « corps rigide thermique » rend la matrice de rigidité \mathbf{K}_l singulière. Nous introduisons alors la pseudo-inverse \mathbf{K}_l^\dagger de cette matrice.

$$\mathbf{T}_g = -\mathbf{K}_g^{-1} \mathbf{C}_g^T \boldsymbol{\lambda} \quad (3.56)$$

$$\mathbf{T}_f = \mathbf{K}_l^\dagger (\mathbf{F}_l + \mathbf{C}_l^T \boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{R}_l \boldsymbol{\alpha} \quad (3.57)$$

où \mathbf{R}_l représente les modes de corps rigide de \mathbf{K}_l (dans le cas thermique se limite au seuls mode constant $\mathbf{R}_l = \mathbf{c}$) et $\boldsymbol{\alpha}$ un vecteur de dimension le nombre de mode rigide (ici simplement un réel). Et en injectant ces expressions dans l'équation portant sur le multiplicateur de Lagrange nous obtenons :

$$\mathbf{S}_d \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{L}_d \quad (3.58)$$

avec :

$$\mathbf{S}_d = \mathbf{C}_g \mathbf{K}_g^{-1} \mathbf{C}_g^T + \mathbf{C}_l \mathbf{K}_l^\dagger \mathbf{C}_l^T \quad \text{Complément de Schur dual} \quad (3.59)$$

$$\mathbf{L}_d = -\mathbf{C}_l \mathbf{K}_l^\dagger \mathbf{F}_l - \mathbf{R}_l \boldsymbol{\alpha} \quad (3.60)$$

Le vecteur $\boldsymbol{\alpha}$ étant une inconnue du problème, le système condensé est sous-déterminé. Cependant, si nous étudions les conditions d'existence d'une solution pour l'équation de conservation de l'énergie portant sur le domaine local, nous pouvons établir une équation supplémentaire. En effet, la matrice \mathbf{K}_l étant symétrique réelle, l'équation :

$$\mathbf{K}_l \mathbf{T}_l = \mathbf{F}_l + \mathbf{C}_l^T \boldsymbol{\lambda} \quad (3.61)$$

admet au moins une solution si et seulement si le second membre $\mathbf{F}_l + \mathbf{C}_l^T \boldsymbol{\lambda}$ n'admet aucune composante dans le noyau de \mathbf{K}_l . Ce qui se traduit par l'équation suivante :

$$\mathbf{R}_l^T (\mathbf{F}_l + \mathbf{C}_l^T \boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad (3.62)$$

qui n'est autre qu'une condition d'orthogonalité. Nous aboutissons finalement au système suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_d & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_d \\ -\mathbf{R}_l^T \mathbf{F}_l \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

où, dans le but d'alléger les notations, $\mathbf{G} = \mathbf{C}_l \mathbf{R}_l$.

La seconde étape est la résolution de ce système. Pour des raisons étayées dans [144], nous utilisons la même stratégie de résolution itérative le GC (qui est un solveur de type Krylov) dont nous rappelons le

principe général en annexe. Dans le cas du problème considéré ici, il est nécessaire de légèrement modifier celui-ci afin que la contrainte $\mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{R}_l^T \mathbf{F}_l$ soit vérifiée à chaque itération (celle-ci s'interprétant comme le fait que le chargement global i.e. $\boldsymbol{\lambda}$ et \mathbf{F}_l ne doit pas « exciter » le mode thermique rigide du patch). Cela est réalisé en projetant les directions de recherche sur le noyau de \mathbf{G} . Pour l'étape d'initialisation nous définissons la direction de recherche $\boldsymbol{\lambda}_0$ par l'équation suivante :

$$\boldsymbol{\lambda}_0 = \mathbf{G} \left(\mathbf{G}^T \mathbf{G} \right)^{-1} \mathbf{R}_l^T \mathbf{F}_l \quad (3.64)$$

Ensuite, afin de s'assurer que la contrainte est bien vérifiée à chaque itération, un opérateur de projection orthogonale \mathbf{P} est défini afin de supprimer des itérés $\boldsymbol{\lambda}_k$ les composantes qui ne satisfont pas la contrainte $\mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{R}_l^T \mathbf{F}_l$. En d'autres termes, à chacune des itérations k , $\boldsymbol{\lambda}_k$ est mis à jour en adjoignant à $\boldsymbol{\lambda}_0$ une composante $\mathbf{P} \bar{\boldsymbol{\lambda}}_k$ vérifiant $\mathbf{G}^T \mathbf{P} \bar{\boldsymbol{\lambda}}_k = 0$ tel que :

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \boldsymbol{\lambda}_0 + \mathbf{P} \bar{\boldsymbol{\lambda}}_k \quad (3.65)$$

Le projecteur est défini algébriquement par :

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{G} \left(\mathbf{G}^T \mathbf{G} \right)^{-1} \mathbf{G}^T \quad (3.66)$$

l'algorithme de Gradient Conjugué Projeté est alors donné en annexe par l'Algorithme 7.

La convergence de l'algorithme est mesurée par la norme du résidu relativisée par la norme du second membre, ce qui donne pour l'itération k la formule suivante :

$$\epsilon = \frac{\|\mathbf{r}_k\|_2}{\|\mathbf{L}_d\|_2} \quad (3.67)$$

avec le résidu défini par $\mathbf{r}_k = \mathbf{L}_d - \mathbf{S}_d \boldsymbol{\lambda}_k$.

La performance de l'algorithme du GC, i.e. son nombre d'itérations N , est proportionnel à la racine carré du conditionnement du complément de Schur dual (voir [154]), noté $K(\mathbf{S}_d)$:

$$N \sim \sqrt{K(\mathbf{S}_d)}. \quad (3.68)$$

Plus $K(\mathbf{S}_d)$ sera proche de 1 plus l'algorithme du GC convergera vite, nous cherchons donc à préconditionner le complément de Schur. Pour cela nous écrivons un nouveau système :

$$\mathbf{M}_{pc} \mathbf{S}_d = \mathbf{M}_{pc} \mathbf{L}_d \quad (3.69)$$

avec \mathbf{M}_{pc} un préconditionneur efficace (le préconditionneur optimal étant évidemment l'inverse de \mathbf{S}_d). Les algorithmes du GC Préconditionné et du GC Projeté Préconditionné sont donnés en annexe. A chaque itération un nouveau système de la forme : $\mathbf{M}_{pc}^{-1} \mathbf{z} = \mathbf{r}$ est à résoudre. Toujours dans une optique de performance, il est indispensable que cette résolution soit facile et rapide. Ici, l'inconnue duale étant restreinte à la zone de couplage, ces systèmes seront de taille réduite par rapport au système global.

Le complément de Schur dual faisant apparaître l'inverse de la matrice de rigidité du domaine global, celle-ci n'est pas calculée explicitement. En effet, nous réalisons *a priori* une décomposition de type **Cholesky** que nous conservons en mémoire. La pseudo-inverse de la matrice de rigidité du domaine local n'est pas explicitement calculée, nous suivons exactement la même procédure que décrite dans l'article [144] pour résoudre le système singulier du type $\mathbf{K}_l \mathbf{u}_l = \mathbf{F}_l$.

Il est à noter que pour le problème (\mathcal{P}_{ti}) décomposé en deux sous-domaines, avec ou sans recouvrement, la matrice de rigidité locale n'est plus singulière (car définie positive), ainsi elle est inversible et nous pouvons directement écrire le problème condensé sans introduire de pseudo-inverse.

$$\mathbf{T}_g = \mathbf{K}_g^{-1} (\mathbf{F}_g - \mathbf{C}_g^T \boldsymbol{\lambda}) \quad (3.70)$$

$$\mathbf{T}_l = \mathbf{K}_l^{-1} (\mathbf{F}_l + \mathbf{C}_l^T \boldsymbol{\lambda}) \quad (3.71)$$

En injectant ces expressions dans l'équation de raccord des deux modèles nous obtenons :

$$\mathbf{S}_d \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{L}_d \quad (3.72)$$

avec :

$$\mathbf{S}_d = \mathbf{C}_g \mathbf{K}_g^{-1} \mathbf{C}_g^T + \mathbf{C}_l \mathbf{K}_l^{-1} \mathbf{C}_l^T \quad (3.73)$$

$$\mathbf{L}_d = \mathbf{C}_g \mathbf{K}_g^{-1} \mathbf{F}_g - \mathbf{C}_l \mathbf{K}_l^{-1} \mathbf{F}_l \quad (3.74)$$

Nous pouvons donc directement appliquer l'algorithme du GC sur le système condensé.

En fonction de la nature du couplage, différents préconditionneurs ont été envisagés que nous détaillons dans la suite.

Détails des préconditionneurs

Afin d'accélérer les vitesses de convergence du GC, nous préconditionnons le système condensé. Un préconditionneur efficace est un opérateur d'interface approximant au mieux l'inverse du complément de Schur dual \mathbf{S}_d . Dans [144], ils partent de l'écriture du complément de Schur dual sous la forme :

$$\mathbf{S}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^\dagger & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{C}_2^T \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Nous cherchons donc la matrice \mathbf{P}_d^{-1} la plus proche possible de la matrice inverse du complément de Schur dual, les auteurs proposent alors :

$$\mathbf{P}_d^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{C}_2^T \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Les préconditionneurs de cette forme sont dits préconditionneurs optimaux, ils approchent au mieux l'opérateur d'interface à l'aide de calculs locaux mais induisent des coûts de calcul conséquents.

Pour le cadre Arlequin, les opérateurs optimaux sont difficilement utilisables. Dans l'article [155] ainsi que dans la thèse de Nadia Elkhodja [132], des préconditionneurs efficaces et simples de mise en oeuvre ont été développés. L'inverse de l'opérateur de couplage, par sa nature volumique, donne un bon préconditionneur. Dans l'article [156], il est proposé d'utiliser un préconditionneur du type Jacobi : $\tilde{\mathbf{M}}_{pc} = [\text{diag}(\mathbf{C})]^{-1}$. Celui-ci, par sa forme, est évidemment simple à inverser mais a tout de même un impact important sur la vitesse de convergence de l'algorithme GC et devient même moins intéressant au regard du temps de calcul global. Nous ne le considérons donc pas dans la suite.

Mesure de convergence

Nous avons, pour les simulations suivantes, choisi un critère d'arrêt portant sur la norme relative du résidu projeté ou la norme relative du résidu préconditionné et projeté pour le cas de l'algorithme du gradient conjugué projeté préconditionné :

$$\epsilon_r^k = \left\| \mathbf{P} \mathbf{r}^k \right\| \leq \epsilon \|\mathbf{L}_d\| \quad (3.77)$$

avec ϵ la précision fixé et \mathbf{L}_d défini plus haut.

Numériquement la conjugaison entre les directions de descente a tendance à se perdre au fur et à mesure des itérations. Il convient alors d'utiliser une orthogonalisation complète des directions de descente ce qui conduit à l'algorithme du GC réorthogonalisé 10 (introduit dans [157]) ainsi que l'algorithme GC réorthogonalisé préconditionné 11, tout deux mis également en annexe.

Consacrons-nous à la partie la plus utile (pour son intérêt pratique), à savoir la comparaison des performances des deux méthodes, se différenciant par le non-recouvrement et le recouvrement des deux sous-domaines et par le couplage surfacique pour la première et volumique-énergétique pour la seconde. Dans la sous-section suivante nous présentons les résultats de convergence obtenus pour les trois problèmes décomposés avec les deux méthodes et avec les différentes variantes de l'algorithme de GC que nous avons détaillées.

3.5 Résultats et comparaisons numériques

Pour les problèmes thermiques, nous avons déjà introduit la géométrie du domaine à la Figure 3.1 ainsi que les géométries des sous-domaines à la Figure 3.3 pour le cas de la décomposition sans recouvrement et à la Figure 3.5 pour le cas avec recouvrement. De même pour le problème mécanique avec la Figure 3.2 pour la géométrie du domaine et la Figure 3.4 pour les géométries des sous-domaines sans recouvrement et la Figure 3.6 avec recouvrement. L'ensemble des valeurs numériques prises pour les paramètres géométriques introduits sur ces différentes figures ainsi que les valeurs des paramètres physiques introduits lors de l'écriture des formulations des trois problèmes sont récapitulés dans le Tableau 3.1. Les maillages employés pour les problèmes thermiques sont illustrés par les Figures 3.7 et 3.8 ; ceux pour le problème mécanique par la Figure 3.9. Pour le problème thermique instationnaire nous n'avons considéré qu'un seul pas de temps : plusieurs simulations nous ont montré que le nombre d'itérations du GC pour atteindre la convergence ne changeait pas significativement en fonction de l'instant considéré.

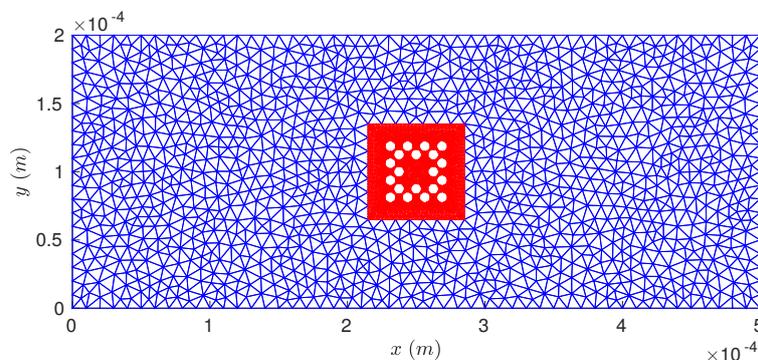


FIGURE 3.7 – Maillage du domaine Ω_g en bleu et Ω_l pour les problèmes (\mathcal{P}_{ti}) et (\mathcal{P}_{ts}) sans recouvrement.

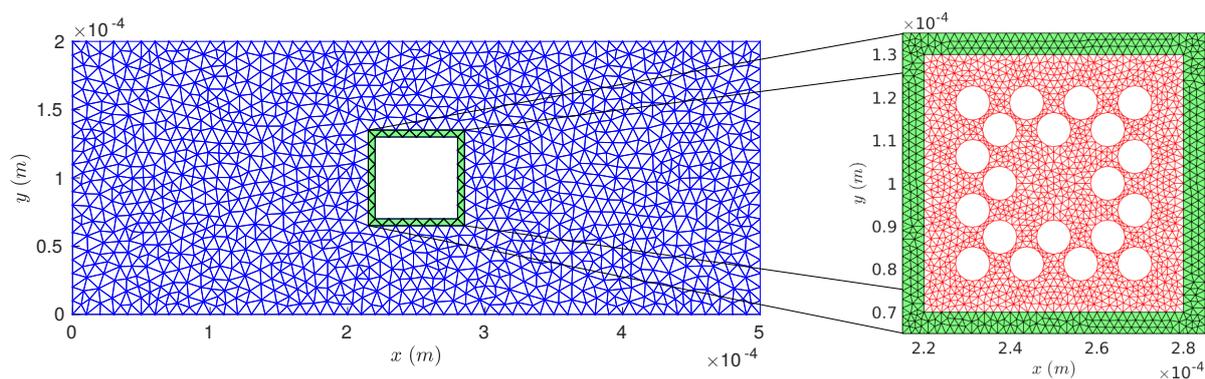


FIGURE 3.8 – Maillages du domaine Ω_g et Ω_l pour les problèmes (\mathcal{P}_{ti}) et (\mathcal{P}_{ts}) avec une zone de recouvrement colorée en vert.

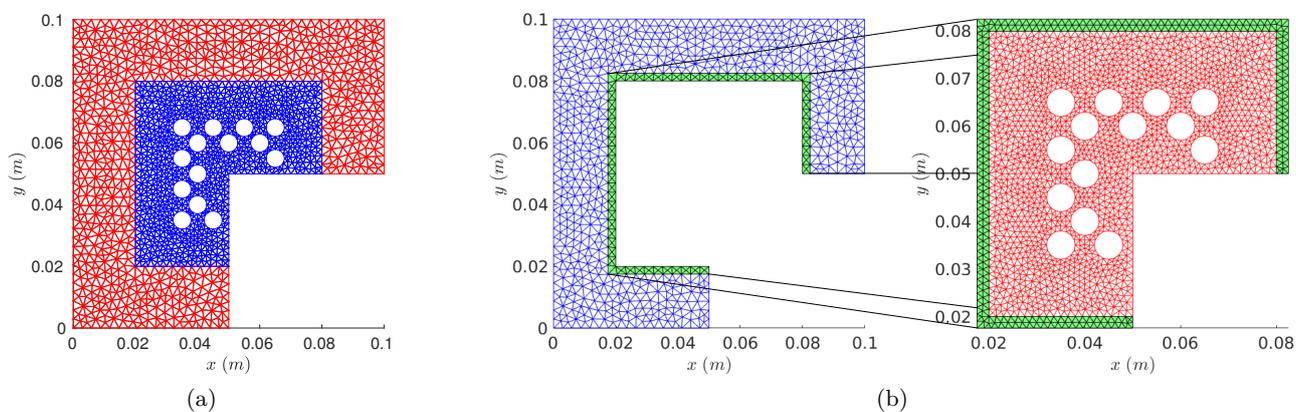
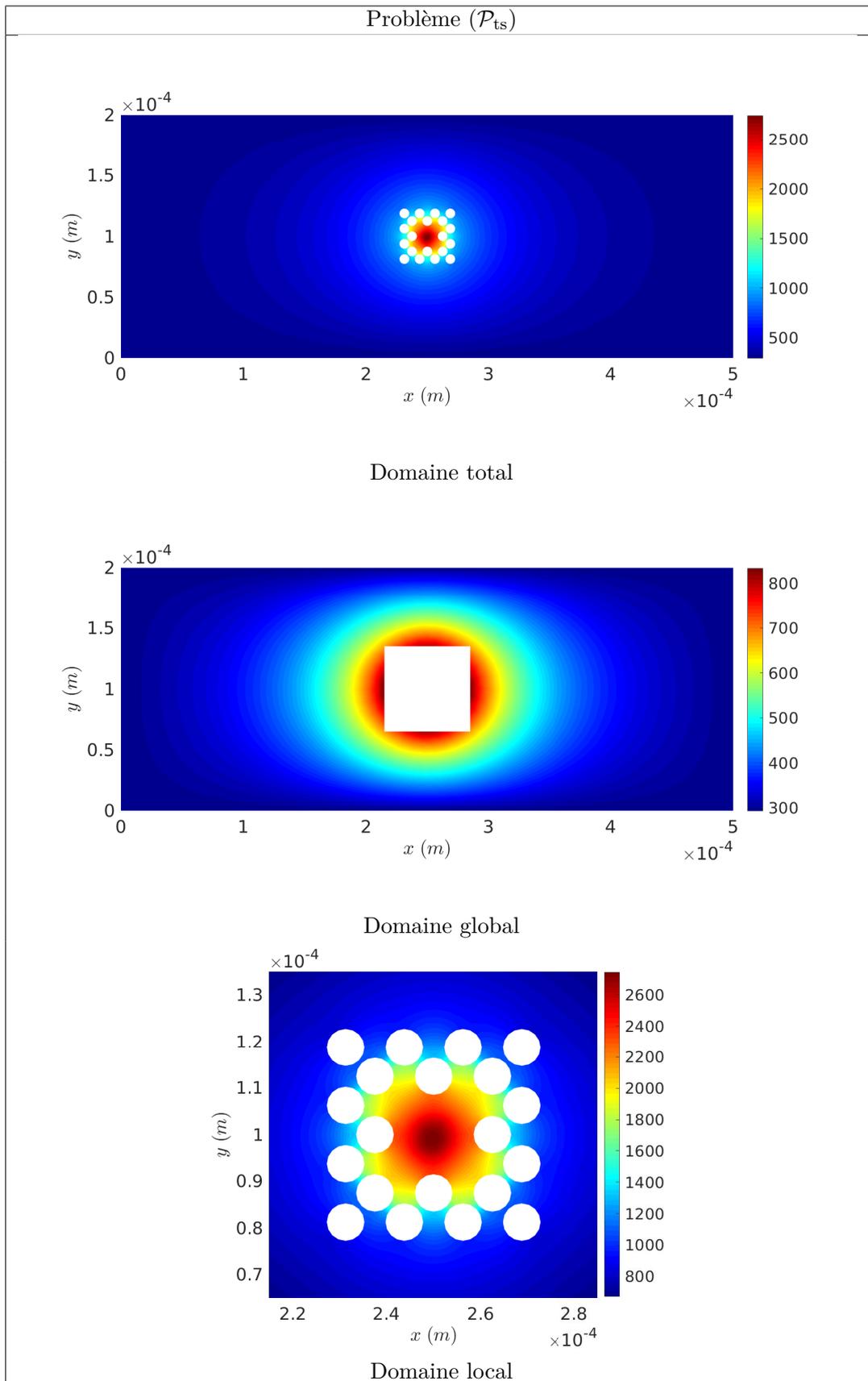


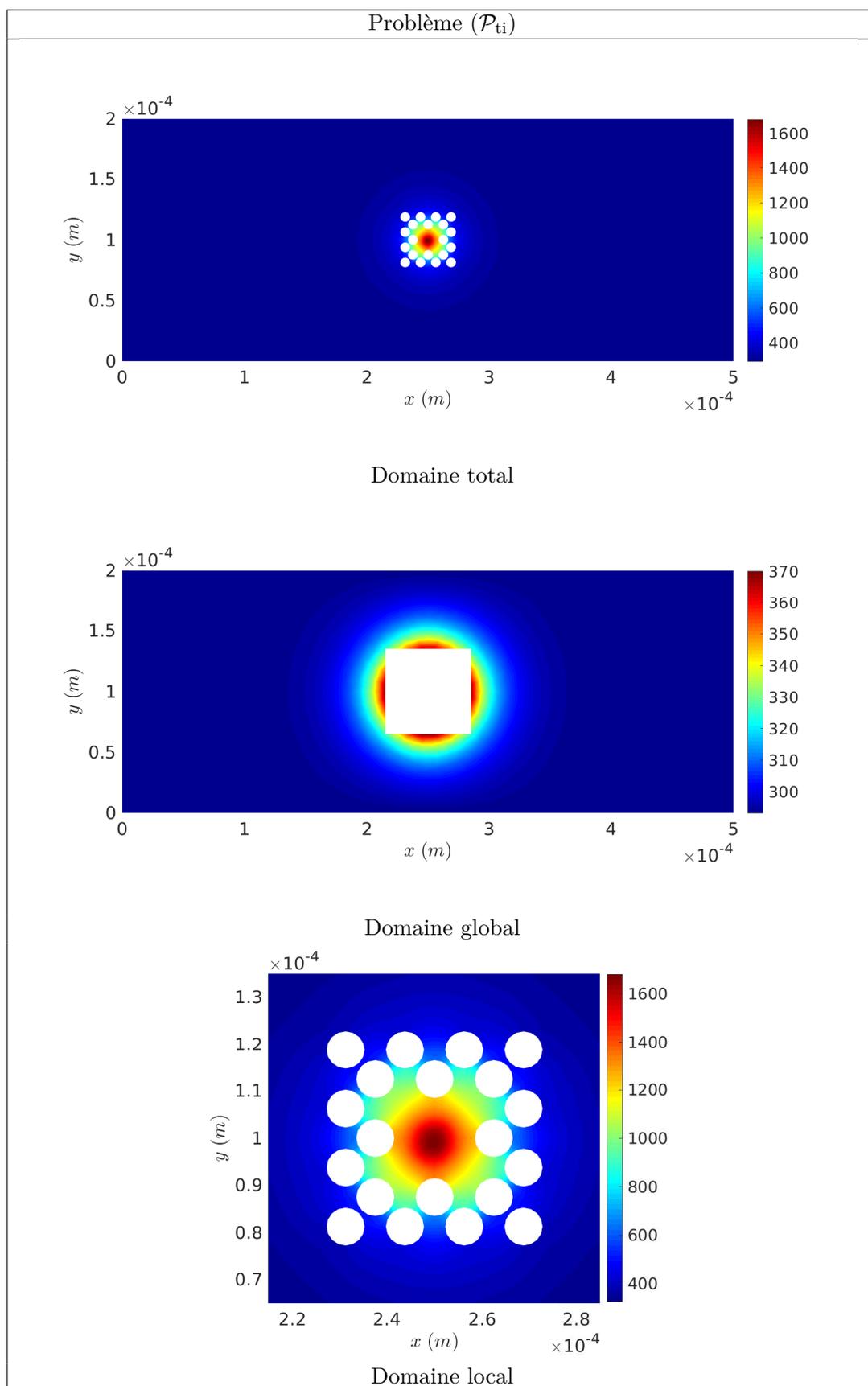
FIGURE 3.9 – Maillages sans recouvrement en (a) et avec recouvrement en (b) pour le problème $(\mathcal{P}_{méca})$.

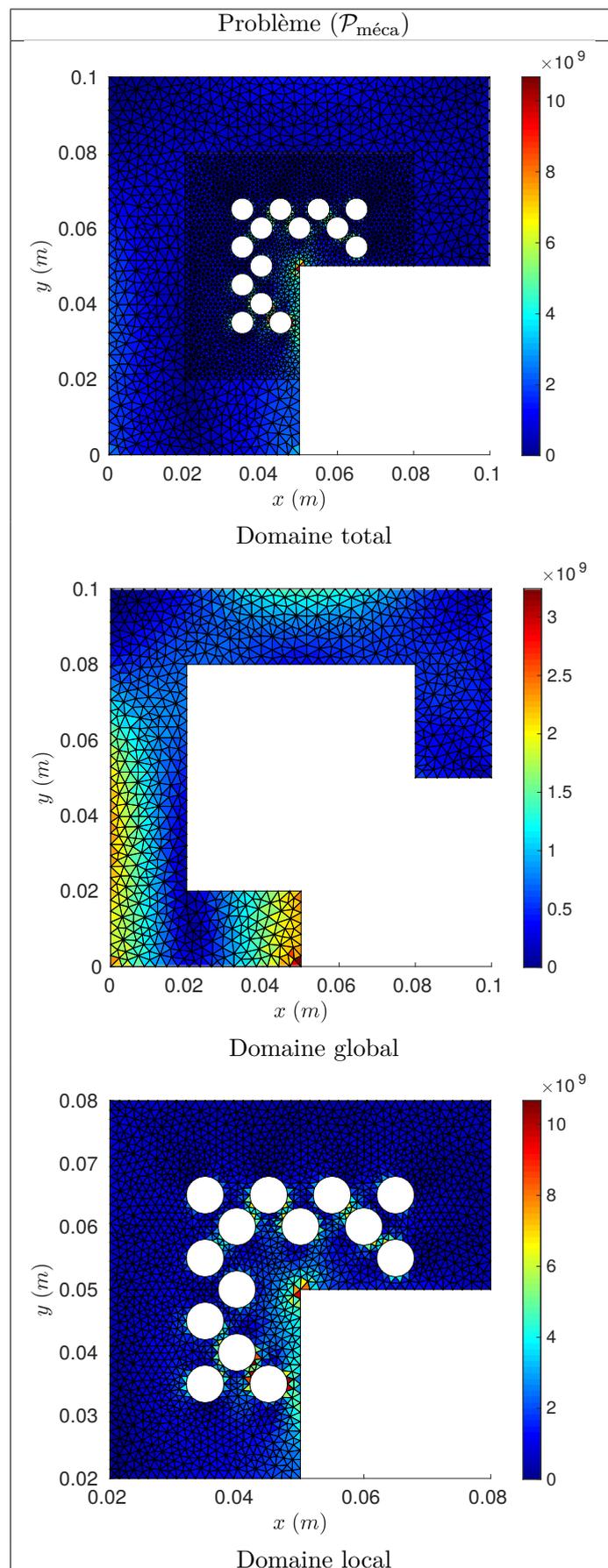
Paramètres des problèmes (\mathcal{P}_{ts}) et (\mathcal{P}_{ti})					
Géométriques	Symboles	Valeurs	Physiques	Symboles	Valeurs
Longueur du domaine	$L (m)$	500×10^{-3}	Masse volumique	$\rho (\frac{kg}{m^3})$	4300
Largeur du domaine	$l (m)$	200×10^{-3}	Capacité thermique	$c_p (\frac{J}{kg \cdot K})$	700
Rayon de la source	$r (m)$	5×10^{-3}	Conductivité	$k (\frac{W}{m \cdot K})$	14
Largeur de la zone d'intérêt	$a (m)$	50×10^{-3}	Source volumique	$f (\frac{W}{m^3})$	10^{14}
Rayon des trous	$r_t (m)$	4×10^{-3}			
Première rangée de trou	$d_1 (m)$	6.25×10^{-3}			
Seconde rangée de trou	$d_2 (m)$	18.75×10^{-3}			
Epaisseur zone de couplage	$e (m)$	5×10^{-3}			
Paramètres du problème ($\mathcal{P}_{méca}$)					
Géométriques	Symboles	Valeurs	Physiques	Symboles	Valeurs
Longueur du domaine	$L (m)$	100×10^{-3}	Module de Young	$E (GPa)$	114
Largeur du domaine	$l (m)$	100×10^{-3}	Coefficient de Poisson	$\nu (1)$	0.34
Largeur de la zone d'intérêt	$a (m)$	60×10^{-3}	Densité surfacique d'effort	$f_s (N \cdot m^{-1})$	-2×10^8
Rayon des trous	$r_t (m)$	3×10^{-3}			
Première rangée de trou	$d_1 (m)$	5×10^{-3}			
Seconde rangée de trou	$d_2 (m)$	15×10^{-3}			
Epaisseur zone de couplage	$e (m)$	2.5×10^{-3}			

TABLE 3.1 – Ensemble des paramètres des trois problèmes modèles considérés.

A titre d'illustration, les allures des solutions des trois problèmes dans le cas du couplage surfacique sont présentées par les figures suivantes.

TABLE 3.2 – Champs thermique obtenu avec un couplage surfacique pour le problème (\mathcal{P}_{ts}).

TABLE 3.3 – Champs thermique obtenu avec un couplage surfacique pour le problème (\mathcal{P}_{ti}).

TABLE 3.4 – Contraintes de Von-Mises obtenues avec une couplage surfacique pour le problème ($\mathcal{P}_{\text{méca}}$).

Nous avons ensuite rassemblé les résultats de convergence dans les tableaux 3.5 et 3.6.

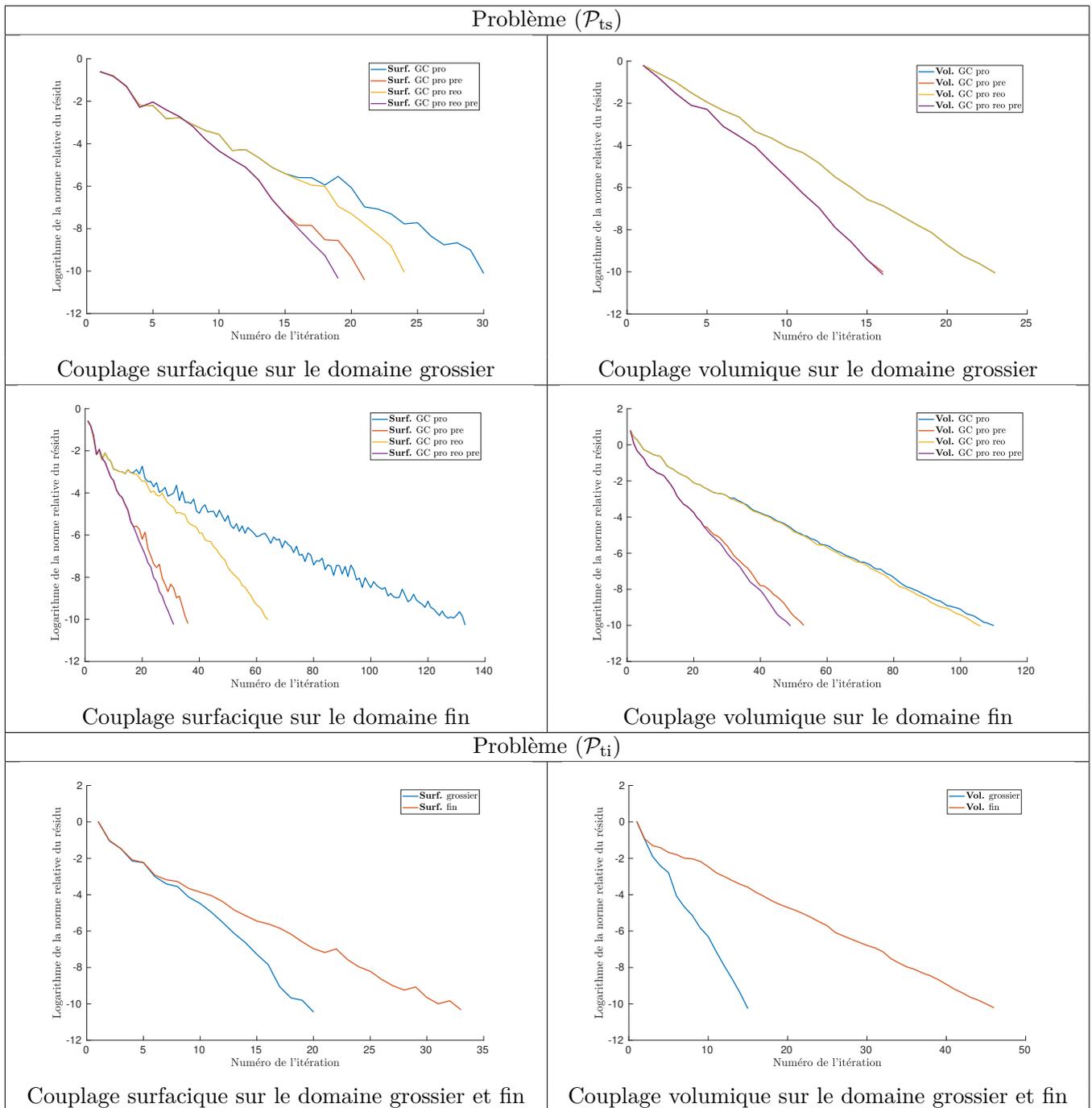


TABLE 3.5 – Ensemble des courbes de convergences de la méthode FETI pour le problème thermique stationnaire et du Gradient Conjugué Préconditionné (GCP) pour le problème thermique instationnaire.

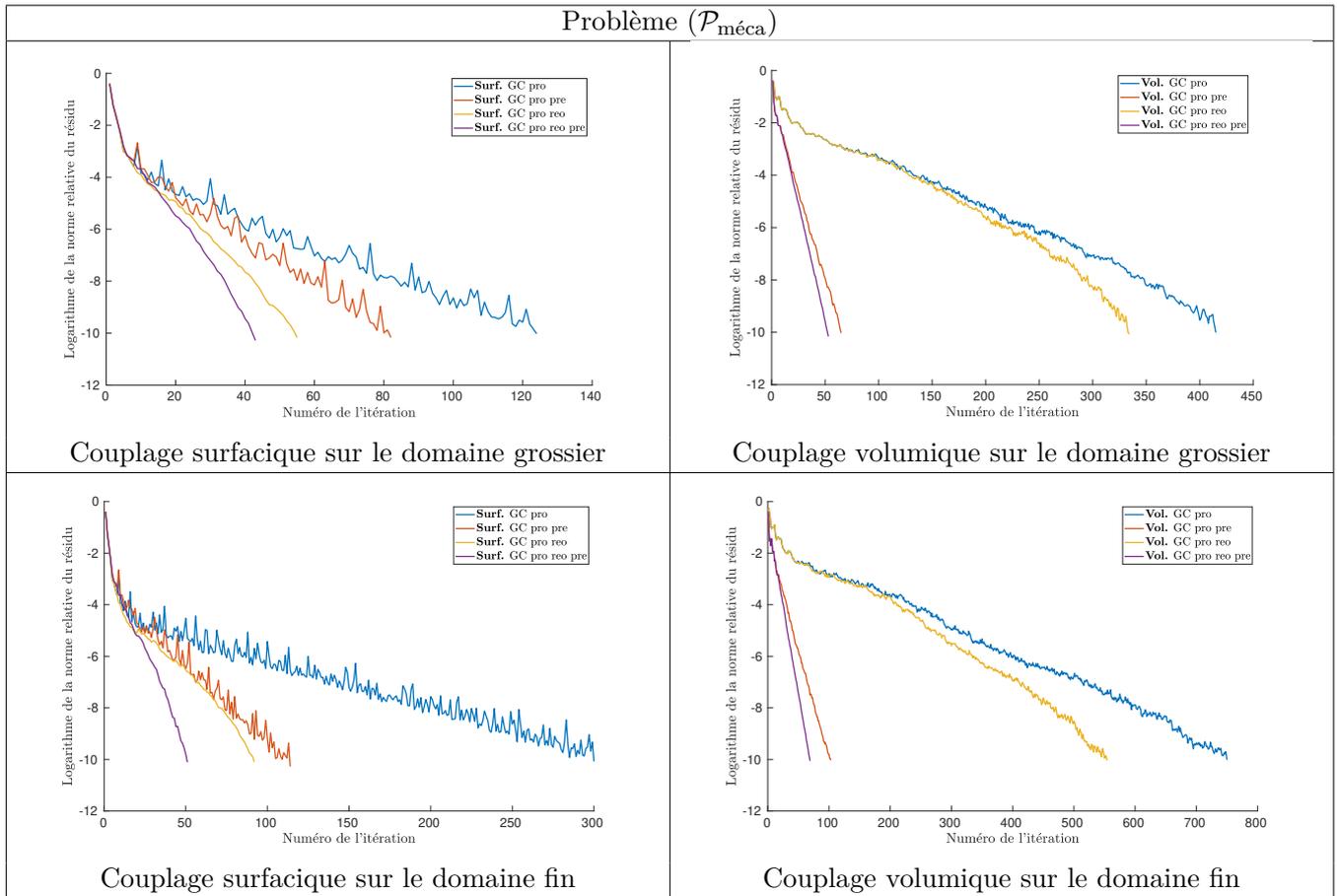


TABLE 3.6 – Ensemble des courbes de convergences de la méthode FETI pour le problème de mécanique.

Afin d'interpréter plus facilement l'ensemble des résultats, nous les avons regroupés, en fonction des différents cas, dans le tableau 3.7.

	Maillage de couplage	Sans Recouvrement (SR)	Avec Recouvrement (AR)	Nb. de ddl (SR/AR)
(\mathcal{P}_{ti})	global	20	15	28 \ 52
	fin	33	46	52 \ 529
(\mathcal{P}_{ts})	global	19	16	28 \ 52
	fin	31	49	52 \ 529
$(\mathcal{P}_{\text{méca}})$	global	43	53	122 \ 376
	fin	51	69	182 \ 774

TABLE 3.7 – Tableau récapitulatif du nombre d'itérations du (GCP) projeté réorthogonalisé en fonction du maillage choisi pour le couplage et de la méthode Sans Recouvrement (SR) ou Avec Recouvrement (AR), en fonction du nombre d'inconnues.

Nous avons également calculé le rapport pour chacun des cas entre le nombre de degrés de liberté et le nombre d'itérations du GC et regroupé les résultats dans le tableau 3.8.

	Maillage de couplage	Sans Recouvrement (SR)	Avec Recouvrement (AR)
(\mathcal{P}_{ti})	global	0.72	0.30
	fin	0.63	0.09
(\mathcal{P}_{ts})	global	0.68	0.31
	fin	0.60	0.09
$(\mathcal{P}_{méca})$	global	0.35	0.14
	fin	0.28	0.09

TABLE 3.8 – Tableau récapitulatif du rapport entre le nombre d’itérations du (GCP) projeté réorthogonalisé et du nombre d’inconnues.

Nous remarquons que le rapport entre le nombre de degrés de liberté du multiplicateur de Lagrange et le nombre d’itérations de l’algorithme du GCP est bien plus faible dans le cas du couplage volumique. Ceci est principalement dû au fait que dans le cas volumique l’opérateur de couplage peut être identifié par le théorème de Riesz-Fréchet au produit scalaire H^1 , donnant ainsi au multiplicateur de Lagrange la dimension du champ primal, i.e. thermique ou de déplacement, selon la nature du problème physique traité et aux termes de couplage du système matriciel une meilleure homogénéité avec les matrices de rigidité des sous domaines.

Un couplage de nature volumique nous semble indispensable pour l’objectif ambitieux que nous avons détaillé au Chapitre 1, de maîtriser la simulation du procédé SLM et dont ces travaux de thèse sont une première contribution. Afin de profiter de l’avantage apporté par la nature volumique du couplage et optimiser les coûts numériques, nous avons développé une méthode de couplage volumique dite « compatible » que nous détaillons dans la partie suivante.

3.6 Méthode de couplage volumique « compatible »

Dans un soucis de clarté, nous nous plaçons pour détailler la méthode dans un cas plus simple que les problèmes précédemment considérés.

3.6.1 Principe et première mise en œuvre de la méthode de couplage : première approche « compatible »

Afin d’illustrer le principe de la méthode de couplage « non-intrusive » que nous avons développée, nous considérons un solide \mathcal{S} , occupant la fermeture d’un domaine Ω_m de \mathbb{R}^2 supposé borné, régulier et comportant des singularités physiques. Nous supposons que le domaine Ω_m a été maillé sans tenir compte de la finesse requise pour capter les criticités engendrées par la présence des ces singularités. Ici, un exemple de maillage quadrangulaire structuré est considéré afin de ce placer, dans un premier temps, dans un cadre simple, cf. Figure 3.10.

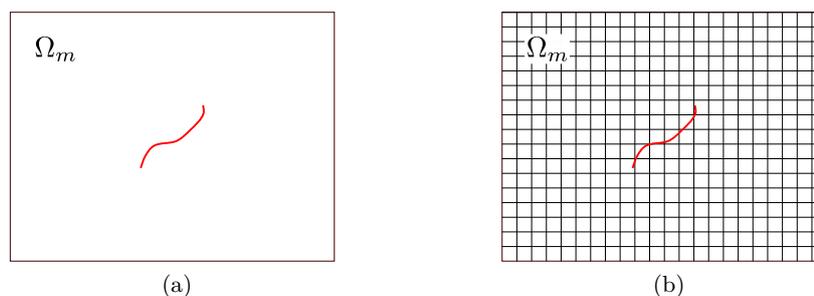


FIGURE 3.10 – Exemple d’un problème mécanique avec (a) une singularité et (b) sa discrétisation.

Nous définissons un contour de contrôle Γ_c autour de cette singularité à partir de considérations physiques sur l'étendue de son influence, cf. Figure 3.11a. Par ce fait, nous limitons les dimensions de la zone où une complexification des modèles physiques est nécessaire et ainsi limitons les coûts des traitements numériques qui en découlent. Nous isolons ensuite les éléments entièrement contenus et ceux intersectés par ce contour. Nous obtenons le domaine Ω_i et la couronne d'éléments l'entourant Ω_b (cf. Figure 3.10b).

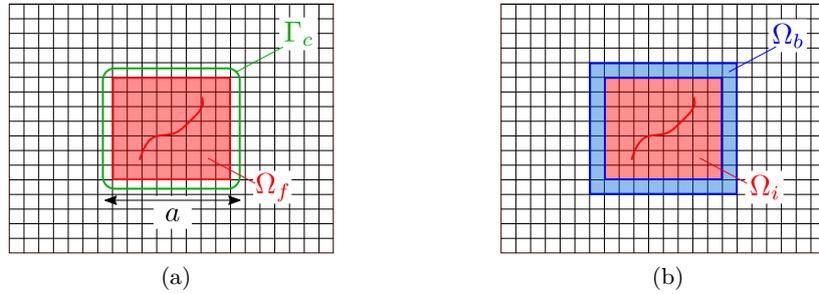


FIGURE 3.11 – Définition de la zone interne (a) et de la couronne (b).

Puis nous retravaillons la discrétisation de Ω_m en isolant les nœuds internes à Ω_i et en supprimant les éléments associés (cf. Figure 3.12a). Nous obtenons finalement, une nouvelle discrétisation du domaine Ω_m , les éléments de la couronne Ω_b et la géométrie de la zone interne Ω_i (cf. Figure 3.12b).

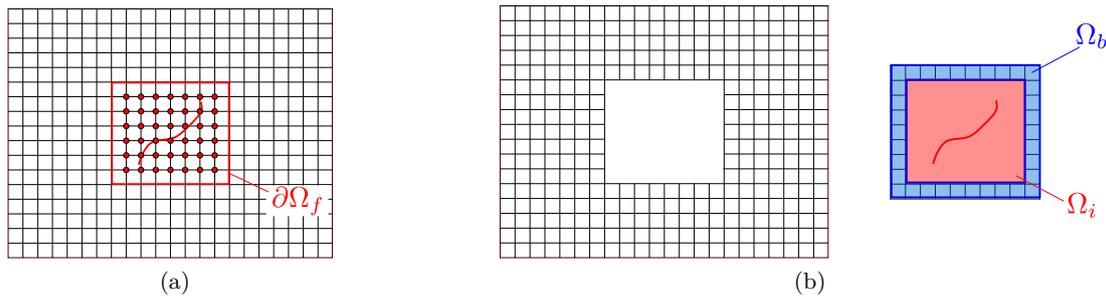


FIGURE 3.12 – Suppression des nœuds internes et discrétisation du domaine Ω_m et de la couronne Ω_g .

Pour réaliser les couplages volumiques et définir les différents ingrédients du cadre Arlequin, nous raffinons le maillage de la couronne. Pour le domaine Ω_i nous pouvons imaginer une discrétisation aussi fine que nécessaire tant qu'elle reste compatible avec celle de la couronne au niveau de sa bordure $\partial\Omega_i$. Nous avons par exemple simplement divisé en quatre chacun des éléments quadrangulaires de la couronne comme le montre la Figure 3.13.

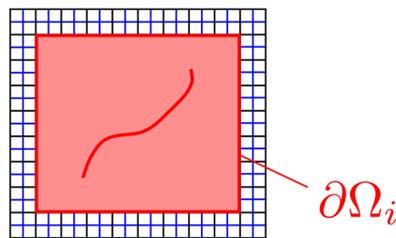


FIGURE 3.13 – Raffinement de la couronne Ω_b .

Remarque 3.2. Le contour Γ_c que nous avons considéré pour le cas du domaine fissuré n'est pas de forme optimale. Nous lui avons donné des dimensions trop importantes et une forme plus réaliste des domaines construits est illustrée par la Figure 3.14.

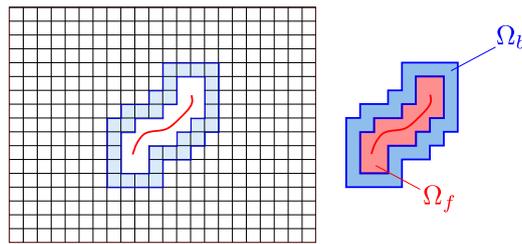
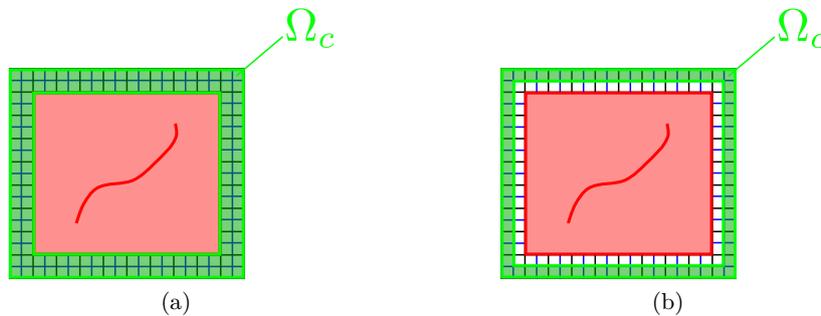


FIGURE 3.14 – Formes plus réalistes des domaines qui pourraient être construits.

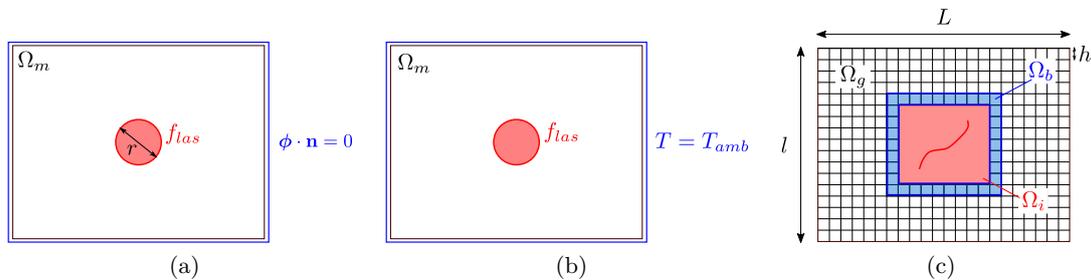
Ensuite, en partant de ces nouvelles discrétisations, nous avons développé deux méthodes de couplage :

- i) une méthode dite **Volumique (V.)** où l'on considère toute la couronne Ω_b comme zone de couplage,
- ii) une méthode dite **Partiellement-Volumique (PV.)** où l'on restreint la zone de couplage aux seuls éléments formant la bordure externe de la couronne Ω_b (cf. Figure 3.15).

FIGURE 3.15 – Zone de couplage de la méthode **V.** (a) et **PV.** (b).

Ces méthodes de couplage permettent de s'affranchir des « difficultés » qu'engendre la mise en place du cadre Arlequin entre deux maillages non-compatibles (problématique d'intégration numérique pour le calcul des opérateurs de couplage et des matrices pondérées par la partition d'unité). Les procédures de traitement de maillages incompatibles dans le cadre Arlequin ont été largement développées dans [108, 107].

Pour comparer ces deux méthodes avec celle de couplage surfacique, nous avons reconsidéré les problèmes thermiques (\mathcal{P}_{ts}) et (\mathcal{P}_{ti}) posés sur le domaine Ω illustré par la Figure 3.16, afin de pouvoir définir un maillage quadrangulaire structuré, dont le paramètre de maille est noté h . Nous suivons la même procédure que décrite précédemment pour décomposer le problème en deux sous-domaines avec et sans recouvrement. L'ensemble des paramètres fixes du problème est donné dans le Tableau 3.9.

FIGURE 3.16 – Problème (\mathcal{P}_{ts}) et (\mathcal{P}_{ti}) posé sur un domaine non percé et exemple d'une discrétisation quadrangulaire structurée.

Géométriques	Symboles	Valeurs	Physiques	Symboles	Valeurs
Longueur du domaine	$L (m)$	500×10^{-3}	Masse volumique	$\rho (\frac{kg}{m^3})$	4300
Largeur du domaine	$l (m)$	200×10^{-3}	Capacité thermique	$c_p (\frac{J}{kg \cdot K})$	700
Rayon de la source	$r (m)$	0.1×10^{-3}	Conductivité	$k (\frac{W}{m \cdot K})$	14
Largeur de la zone d'intérêt	$a (m)$	0.9×10^{-4}	Source volumique	$f (\frac{W}{m^3})$	10^{14}

TABLE 3.9 – Ensemble des paramètres du problème

Pour toutes les simulations que nous avons réalisées, dans un but de simplicité, nous avons considéré des champs de partition d'unité tels que $\alpha_g = \alpha_l = \frac{1}{2}$ dans la zone de couplage. Pour le problème instationnaire la période d'étude a été fixée à $\tau = 20 \times 10^{-4} s$ et la discrétisation temporelle a été faite avec un pas de temps δt de $10^{-4} s$.

Un élément important qui influence le conditionnement du système matriciel et que nous n'avons pas encore abordé est le type d'opérateur de couplage que nous choisissons. Plusieurs choix sont envisageables. Dans le cas des schémas \mathbf{V} . et \mathbf{PV} ., nous avons utilisé le même opérateur de couplage que précédemment, mais nous avons joué sur les paramètres d'homogénéisation. Nous rappelons sa forme générale avec l'équation (3.79). De même pour l'opérateur de couplage surfacique, nous avons ajouté un paramètre d'homogénéisation comme le montre l'équation (3.78). Les différentes valeurs des paramètres que nous avons implémentées et qui interviennent dans ces formules sont données dans le tableau 3.10.

$$b(\lambda, T) = \int_{\Gamma_c} \kappa_s(\lambda T) dS \quad (3.78)$$

$$c(\lambda, T) = \int_{\Omega_c} \kappa_v^1(\lambda T) + \kappa_v^2(\nabla \lambda \cdot \nabla T) d\Omega \quad (3.79)$$

n°	Nom du couplage	κ_s	κ_v^1	κ_v^2
1	L^2	1	1	0
2	H^1	$\frac{k}{e_s}$	$\frac{k}{e_v^2}$	k
3	Opérateur de la chaleur	$\frac{\rho c_p e_s}{\delta t}$	$\frac{\rho c_p}{\delta t}$	k

TABLE 3.10 – Différents paramètres des opérateurs de couplage

Dans ce tableau, les paramètres e_s et e_v sont homogènes à des longueurs, dans toutes les simulations suivantes nous les avons pris égaux à l'épaisseur de la zone de couplage « volumique » (i.e. h puisque nous considérons une zone de couplage épaisse d'un élément macro). De plus pour chacun des cas, l'espace médiateur peut être assimilé à la restriction soit de l'espace du substrat soit de l'espace du patch à la zone de couplage. En fonction de ce choix nous ajouterons l'abréviation *macro* ou *micro* aux champs solutions.

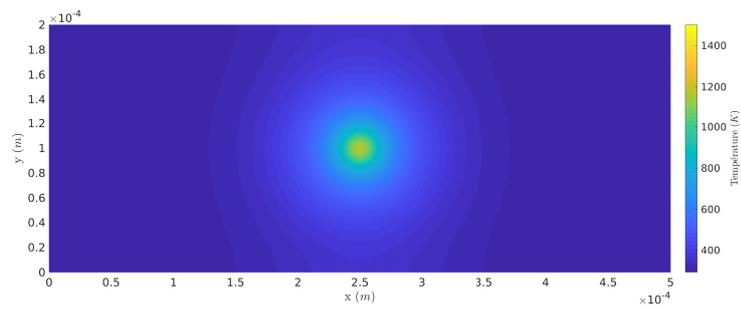
L'ensemble des résultats pour tous ces cas est donné dans la partie qui suit.

Nom du maillage	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6
Valeur de h exacte (m)	$\frac{L}{50}$	$\frac{L}{64}$	$\frac{L}{84}$	$\frac{L}{126}$	$\frac{L}{168}$	$\frac{L}{250}$
Valeur approximée de h 10^{-6} (m)	10	7.812	5.952	3.968	2.976	2

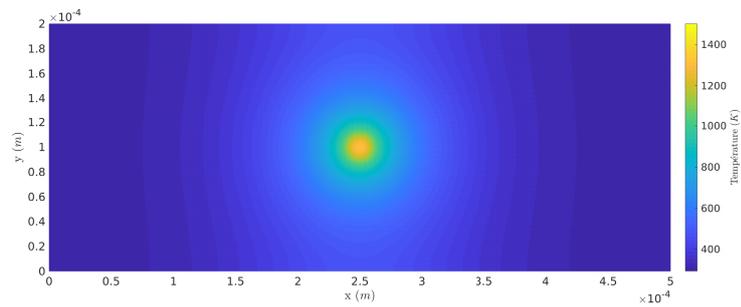
TABLE 3.11 – Différentes tailles de maillages considérées.

Résultats

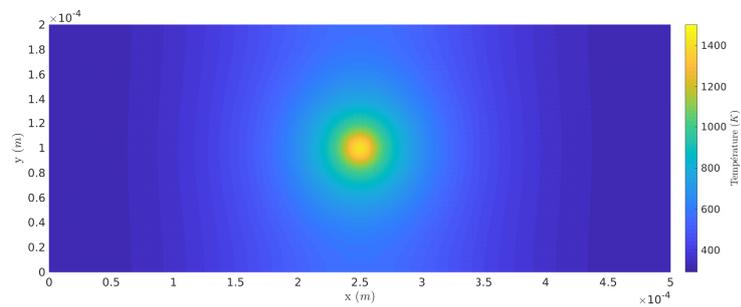
Nous avons lancé des simulations avec différentes tailles de maillage dont les valeurs sont regroupées dans le tableau suivant 3.11. Afin de donner une illustration de la solution du problème physique nous montrons la répartition spatiale des champs thermiques au cours du temps aux figures 3.17.



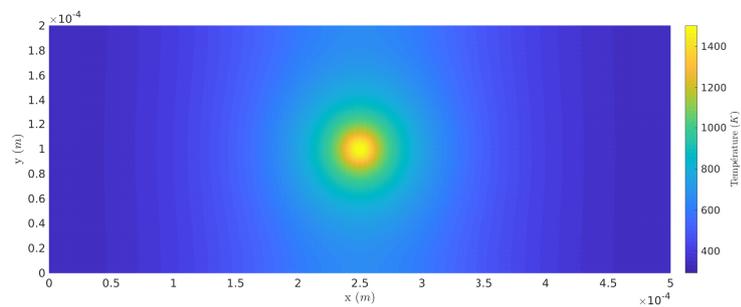
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 3.17 – Evolution du champ de température dans le patch et le substrat au cours du temps aux instant 1 en (a), 2 en (b), 3 en (c) et 4 en (d) pour le couplage \mathbf{V} . et le multiplicateur de Lagrange pris dans l'espace fin.

Pour apprécier l'efficacité des différentes méthodes de couplage que nous proposons, il est important dans un premier temps, d'analyser l'allure de la solution dans la zone de couplage. Pour le maillage h_4 et l'opérateur de couplage H^1 nous présentons une coupe du champ solution en fonction de la méthode et de l'espace de couplage aux Figures 3.18 et 3.19.

Nous remarquons que pour le couplage **V.**, nous obtenons des allures bien connues du couplage Arlequin avec, lorsque l'espace grossier est choisi comme espace médiateur, une solution fine qui va osciller autour de la solution grossière dans la zone Ω_c . Et au contraire lorsque l'espace fin est choisi comme espace médiateur, la solution fine suit parfaitement la solution grossière (on retrouve le phénomène de « verrouillage »). Pour la méthode **PV.**, la zone de couplage étant restreinte à une couche d'élément fin, que le multiplicateur de Lagrange soit pris dans l'espace fin ou grossier n'a apparemment pas d'influence. Dans les deux cas nous retrouvons la même allure avec l'élément fin parfaitement collé à l'élément grossier. Cependant nous observons que ce couplage semble perturber un peu les solutions dans les zones proches de la zone de couplage. Pour la méthode **S.**, le couplage est bien réalisé.

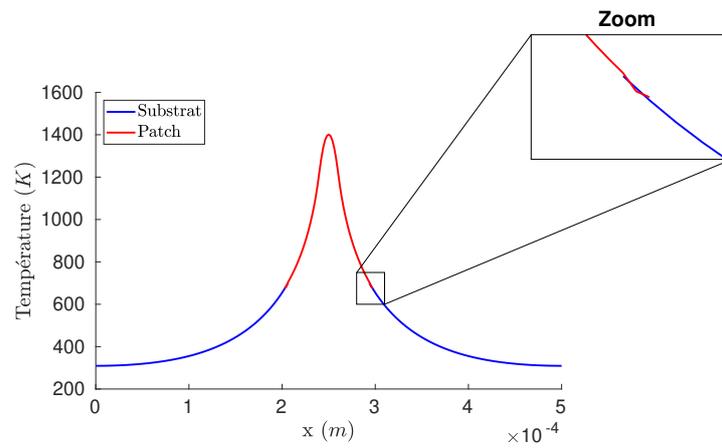
Maintenant, nous allons juger la vitesse de résolution du problème. A titre indicatif, nous donnons dans le tableau suivant le nombre de degrés de liberté du multiplicateur de Lagrange en fonction de la méthode de couplage et de l'espace médiateur choisi :

Maillages		h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6
V.	micro	216	264	360	552	744	1080
	macro	72	88	120	184	248	360
PV.	micro	152	184	248	376	504	728
	macro	72	88	120	184	248	360
S.	micro	80	96	128	192	256	368
	macro	40	48	64	96	128	184

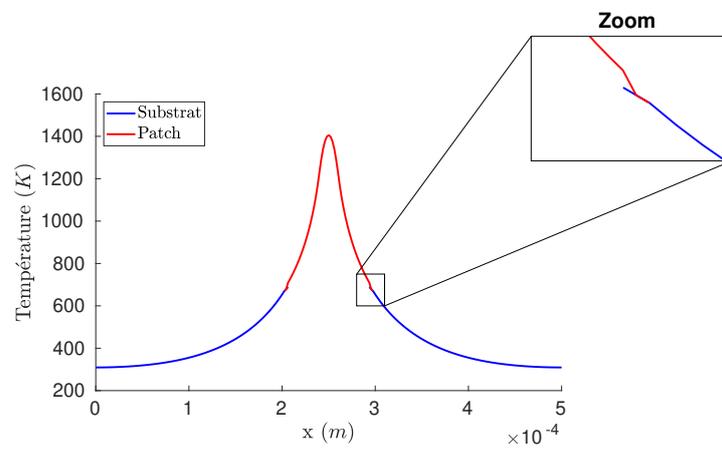
TABLE 3.12 – Différentes tailles de maillages considérées et le nombre de degré de liberté qui en découle.

Nous commençons par le problème (\mathcal{P}_{ti}) . L'évolution de la norme relative du résidu en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme GC et GCP pour le cas h_4 et au pas de temps 15 du problème (\mathcal{P}_{ti}) est donné au Tableau 3.13.

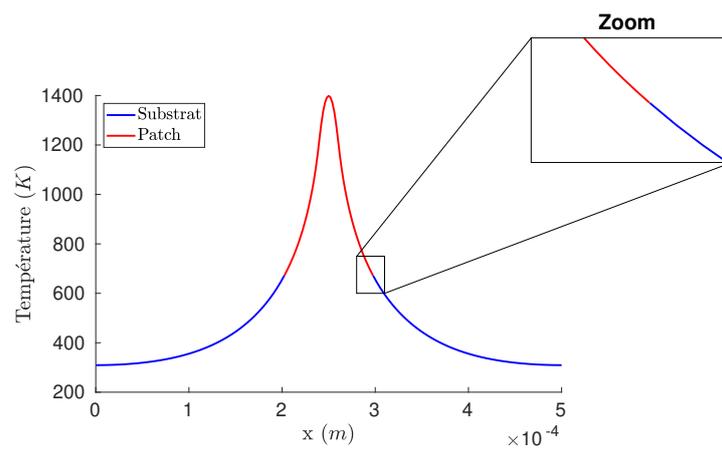
Nous retrouvons bien dans le cas de l'opérateur L^2 , que les vitesses de convergence pour les solutions Arlequin sont moindres. En effet, non seulement nous ne tirons pas, dans ce cas, avantage du couplage volumique, tout en augmentant la taille des systèmes à résoudre par rapport au cas surfacique, mais comme observé dans [133], ce couplage L^2 -volumique n'a pas de sens en continu. Et en discret, il est juste sensé approcher l'opérateur de couplage Arlequin dual (avec λ dans le dual de $H^1(\Omega_c)$). Nous écartons donc ce type d'opérateur de couplage dans la suite. Lorsque nous utilisons l'opérateur de couplage classique H^1 nous voyons que les performances du GC Préconditionné ou non Préconditionné sont, pour les méthodes de couplage **V.** et **PV.** dans le cas macro ou micro, meilleures que pour les deux couplages **S.** (macro et micro). Aussi nous observons que la vitesse de résolution du GC non preconditionné pour les méthodes de couplage **V.** et **PV.** macro est plus rapide que celle du GC Préconditionné pour les deux couplages **S.**. Cependant, contrairement à notre intuition de rendre le plus possible l'opérateur de couplage Homogène à l'opérateur de la chaleur, le dernier graphique montre des résultats bien moins concluant. Nous avons



(a)

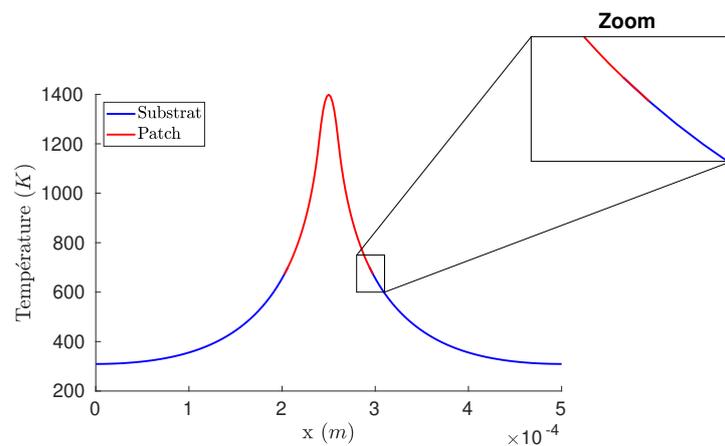


(b)

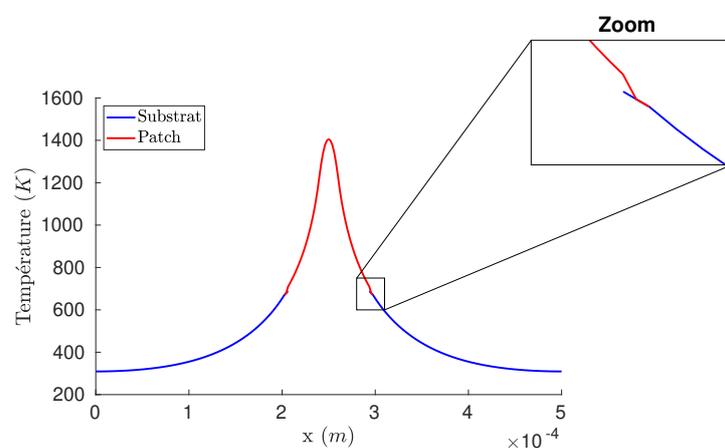


(c)

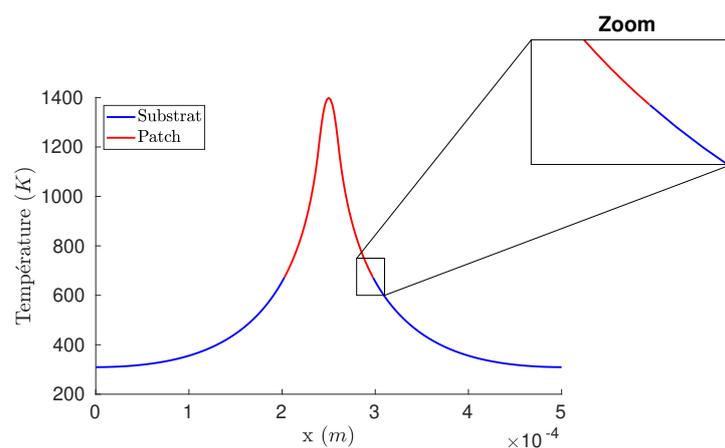
FIGURE 3.18 – Coupe du champ de température et zoom sur la zone de couplage avec le multiplicateur de Lagrange pris dans l'espace grossier. En (a) méthode \mathbf{V} ., (b) \mathbf{PV} . et (c) \mathbf{S} ..



(a)

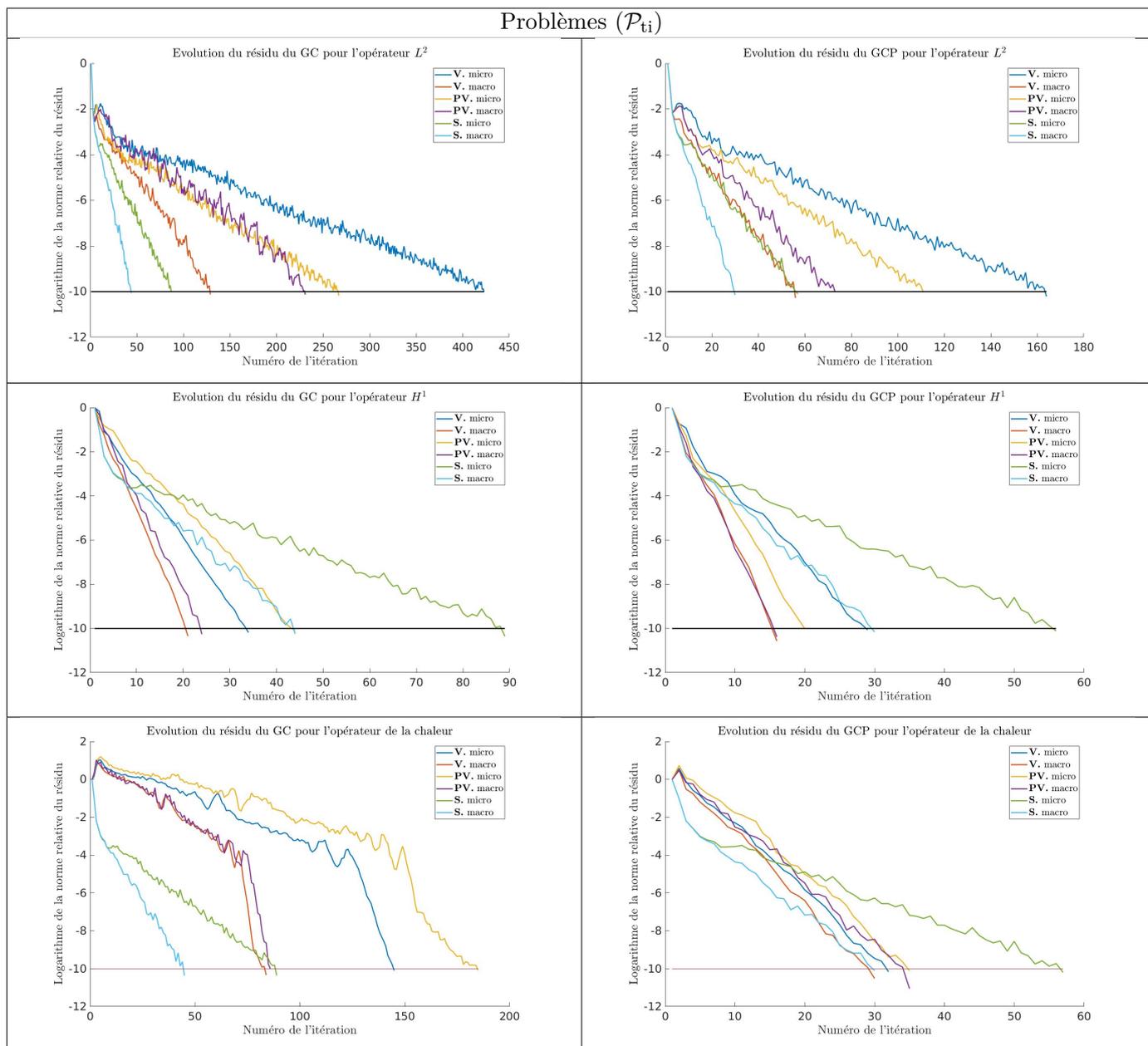


(b)



(c)

FIGURE 3.19 – Coupe du champ de température et zoom sur la zone de couplage avec le multiplicateur de Lagrange pris dans l'espace fin. En (a) méthode **V.**, (b) **PV.** et (c) **S.**.

TABLE 3.13 – Ensemble des courbes de convergence de l'algorithme de GC et GCP pour le problème (\mathcal{P}_{ti}).

alors réalisé, dans la sous-section 3.6.2, une expérimentation numérique en jouant sur les valeurs des paramètres d'homogénéisation de l'opérateur de couplage énergétique.

Dans le graphique suivant nous récapitulons les nombres d'itérations nécessaires pour obtenir une norme relative du résidu inférieure à 10^{-10} en fonction du paramètre de taille des maillages. Et ce, en présentant les résultats obtenus de la même manière que fait ci-dessus : couplage L^2 et GC, couplage L^2 et GCP puis couplage H^1 et couplage thermique.

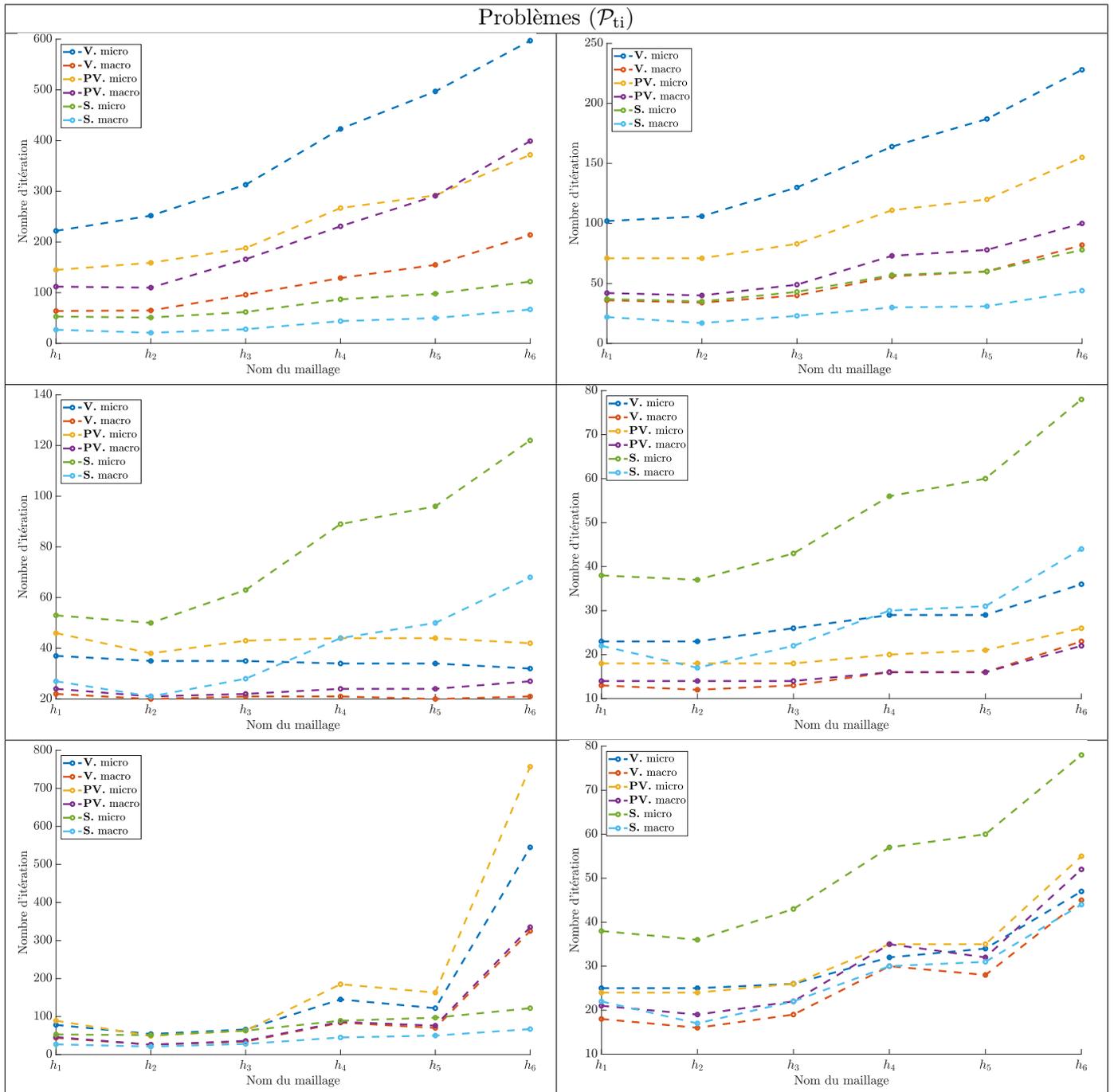


TABLE 3.14 – Nombre d'itération de l'algorithme de GC et GCP pour le problème (\mathcal{P}_{ti}) en fonction de la taille du maillage.

Le détail des valeurs est donné dans le Tableau A.1 en annexe. Nous trouvons, dans le cas L^2 , une allure semblable pour toutes les méthodes de couplage. Dans le cas de l'opérateur de la chaleur nous avons l'impression d'une augmentation très importante dans les cas **V.** et **PV.** lorsque la taille du maillage diminue. Cependant dans le cas de l'opérateur H^1 , nous notons une faible influence du paramètre h sur le nombre d'itération.

Dans le cas préconditionné nous retrouvons les mêmes allures que le cas non preconditionné avec cependant une nette amélioration dans le cas de l'opérateur de la chaleur pour les méthodes de couplage **V.** et **PV.** qui deviennent alors presque aussi rapide que la méthode **S.**

Maintenant, nous allons présenter les résultats du problème (\mathcal{P}_{ts}) . L'évolution de la norme relative du résidu en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme du GC Projeté et du GC Projeté Préconditionné pour le cas h_4 du problème (\mathcal{P}_{ts}) est donné au Tableau 3.15. Evidemment dans pour ce problème l'opérateur de couplage de type opérateur de la chaleur perd de son sens, nous avons tout de même mis les résultats obtenus avec, à titre informatif.

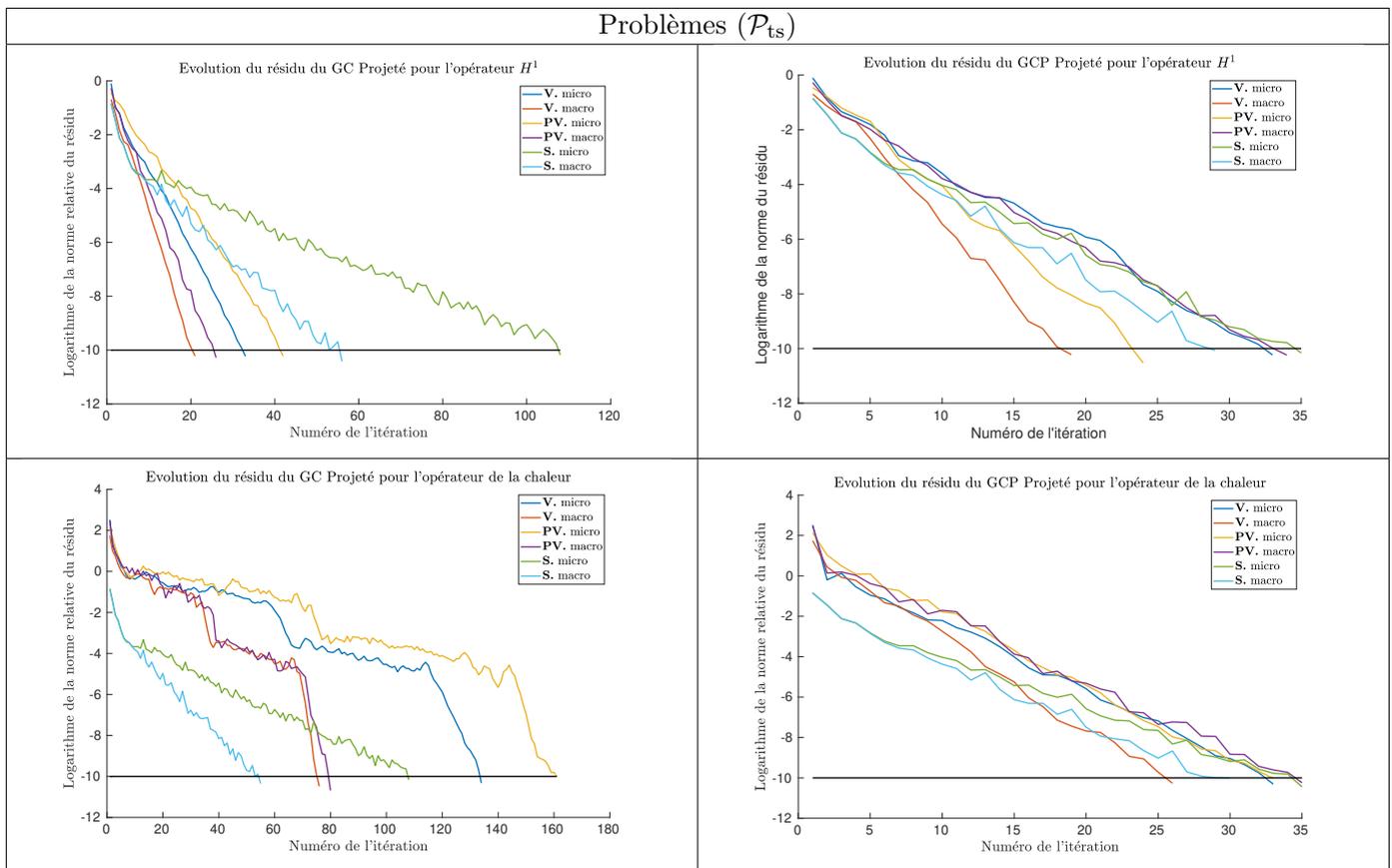


TABLE 3.15 – Ensemble des courbes de convergence de l'algorithme de GC Projeté et GC Projeté et Préconditionné pour le problème (\mathcal{P}_{ts}) .

Nous exposons l'évolution du nombre d'itérations de l'algorithme GC Projeté et GC Projeté et Préconditionné en fonction de la taille du maillage.

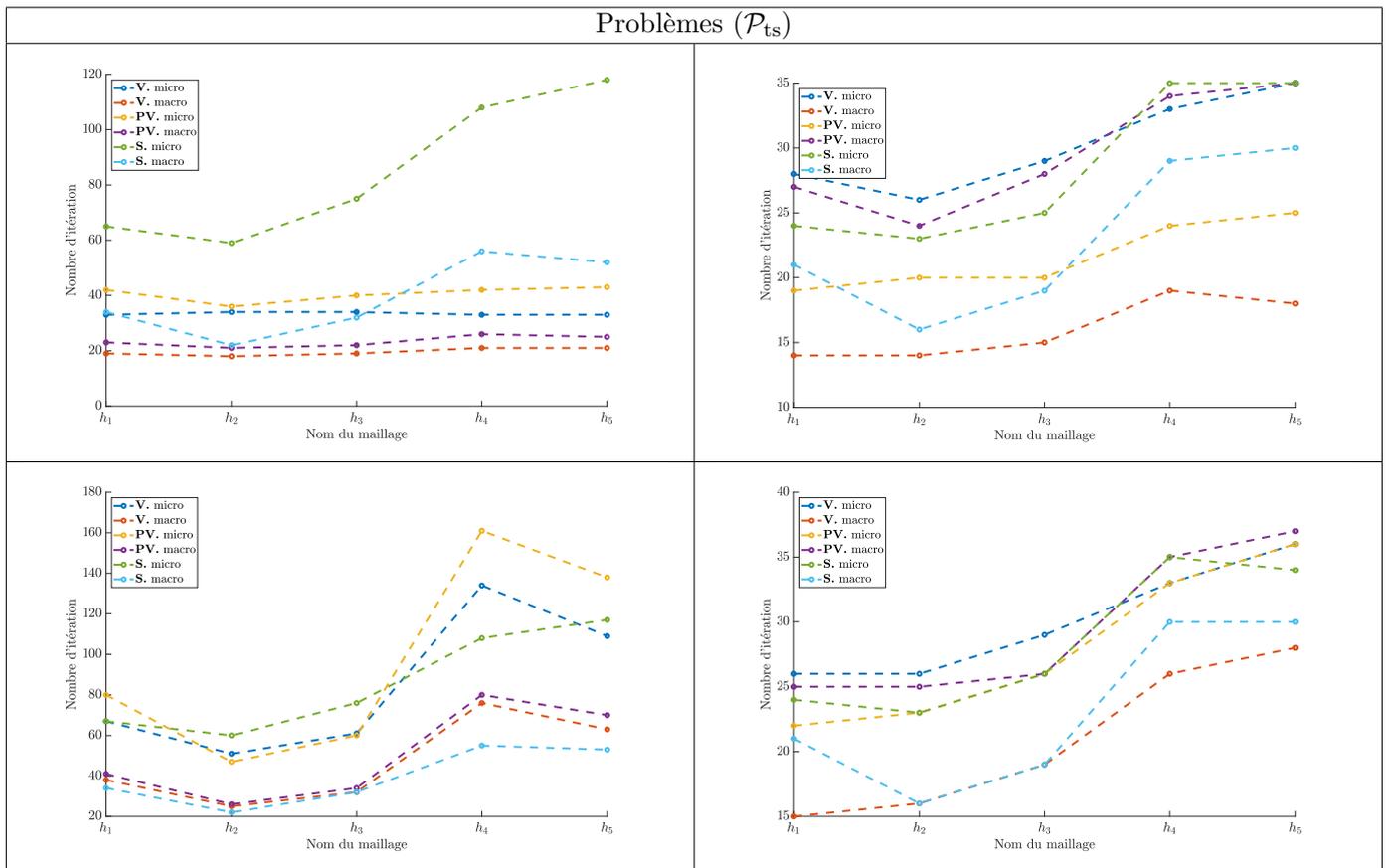


TABLE 3.16 – Nombre d’itérations de l’algorithme de GC Projeté et GC Projeté et Préconditionné pour le problème (\mathcal{P}_{ts}) en fonction de la taille du maillage.

Voici l’évolution de la norme relative du résidu en fonction du nombre d’itérations de l’algorithme du GC Projeté Réorthogonalisé et du GC Projeté Réorthogonalisé Préconditionné pour le cas h_4 du problème (\mathcal{P}_{ts}) est donné au Tableau 3.15.

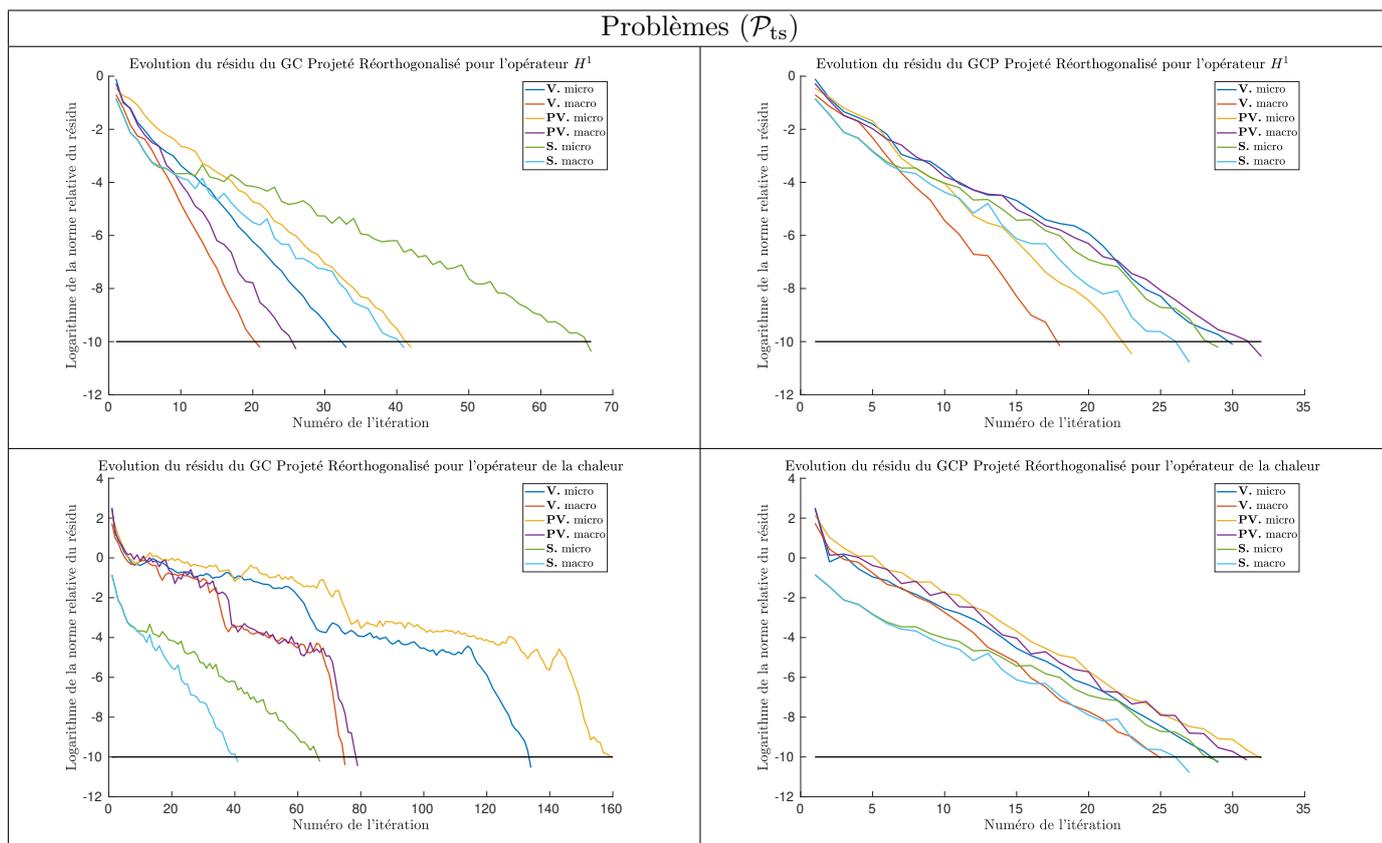


TABLE 3.17 – Ensemble des courbes de convergence de l'algorithme de GC Projeté Réorthogonalisé et GC Projeté Réorthogonalisé et Préconditionné pour le problème (\mathcal{P}_{ts}).

Nous exposons l'évolution du nombre d'itérations de l'algorithme GC Projeté Réorthogonalisé et GC Projeté Réorthogonalisé et Préconditionné en fonction de la taille du maillage.

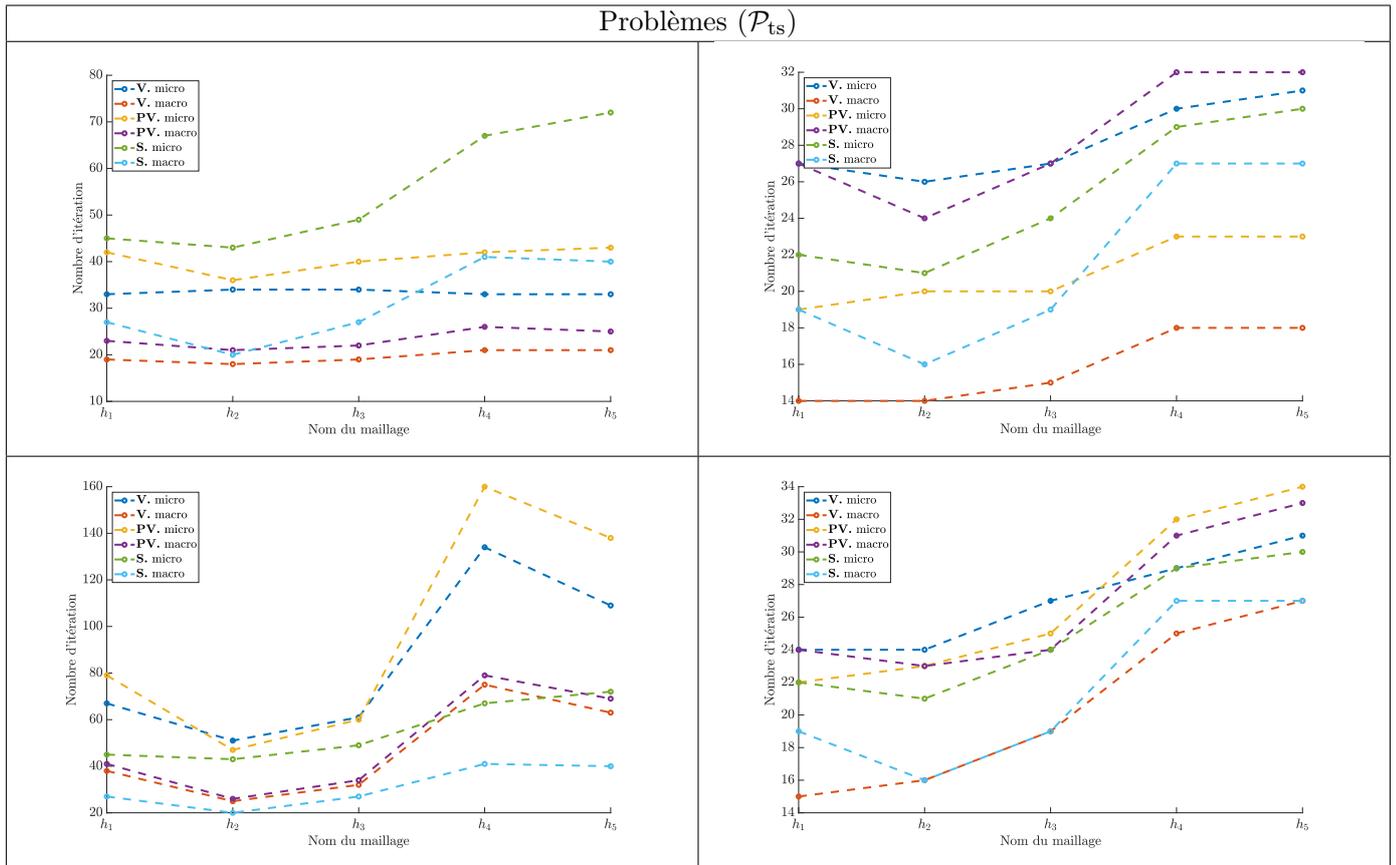


TABLE 3.18 – Nombre d’itération de l’algorithme de GC Projeté Réorthogonalisé et GCP Projeté Réorthogonalisé et Préconditionné pour le problème (\mathcal{P}_{ts}) en fonction de la taille du maillage.

Nous observons que l’utilisation de l’opérateur de couplage classique H^1 donne à nouveau les meilleurs résultats de convergence. Nous retrouvons que les couplages **V. macro** et **PV. micro** donnent toujours des vitesses de convergence plus rapides que le couplage surfacique mais avec une différence moins prononcée. Le couplage **V. macro** converge aussi plus vite sans préconditionnement que le couplage surfacique avec préconditionnement. Les couplages **V. micro** et **PV. macro** donnent des vitesses équivalentes au couplage **S. micro**. Nous remarquons également que le préconditionnement n’améliore que très légèrement la convergence pour la méthode de couplage **V. micro** et même dégrade celle de la méthode de couplage **PV. macro**. Finalement la Réorthogonalisation améliore bien la convergence de l’algorithme GC Projeté surtout lorsque celui-ci est Préconditionné.

Comme nous l’avons indiqué précédemment, l’observation des résultats de convergence pour l’opérateur de couplage homogénéisé de type opérateur de la chaleur, nous amène à réaliser une expérimentation numérique sur les paramètres d’homogénéisation que nous exposons dans la sous-section qui suit.

3.6.2 Expérimentation numérique sur l’homogénéité de l’opérateur de couplage H^1

Nous reprenons le problème thermique instationnaire (\mathcal{P}_{ti}) avec les mêmes discrétisations (temporelles et spatiales) introduites précédemment ainsi que les mêmes paramètres matériaux, dans le cas d’un couplage classique Arlequin incompatible. Pour plus de clarté nous avons simplement multiplié l’équation de la chaleur par $\frac{1}{\rho c_p}$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - d\Delta T = \frac{1}{\rho c_p} f_{las} \quad \text{dans } I \times \Omega \quad (3.80)$$

avec $d = \frac{k}{\rho c_p}$ le coefficient de diffusion. L'opérateur de couplage énergétique classique prend alors la forme suivante :

$$c(\lambda, T) = \int_{\Omega_c} \frac{d}{e_v^2} (\lambda T) + d (\nabla \lambda \cdot \nabla T) d\Omega \quad (3.81)$$

Nous avons alors introduit deux paramètres γ_m et γ_r devant les parties masses et rigidité de l'opérateur de couplage.

$$c(\lambda, T) = \int_{\Omega_c} \gamma_m \frac{d}{e_v^2} (\lambda T) + \gamma_r d (\nabla \lambda \cdot \nabla T) d\Omega \quad (3.82)$$

qui ont tous les deux le même domaine discret de définition $\{10^i \mid i \in \llbracket -5, 5 \rrbracket\}$. Nous avons lancé la résolution du problème avec l'algorithme de GCP en parcourant entièrement leurs domaines de définition, nous avons mis une limite de 300 sur le nombre d'itérations de l'algorithme et un critère de convergence de 10^{-10} comme précédemment. Nous avons alors obtenu les résultats suivants :

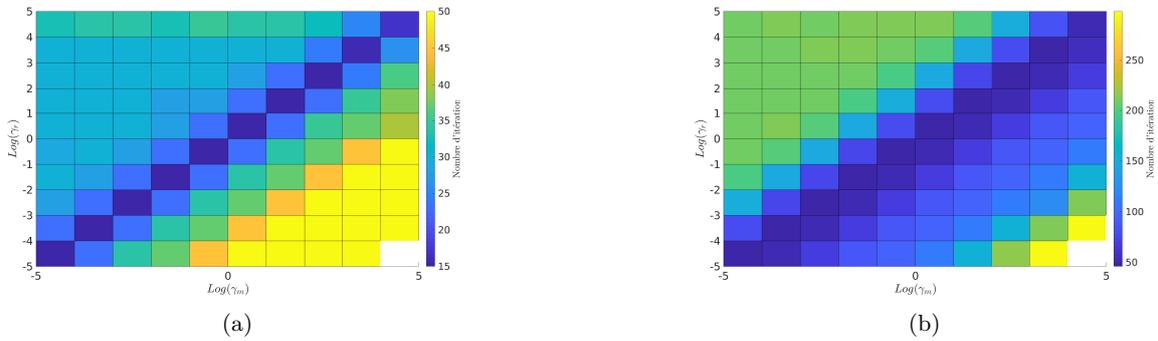


FIGURE 3.20 – Nombre d'itérations de l'algorithme de GCP lorsque l'espace grossier est choisi comme espace médiateur en (a) et l'espace fin en (b) en fonction des valeurs des paramètres γ_m et γ_r .

Les zones blanches sur ces figures correspondent aux cas où l'algorithme de GCP a dépassé la limite d'itération. Aussi pour le cas du choix de l'espace grossier comme espace médiateur nous avons limité la coloration à la valeur maximale de 50 itérations, d'où la zone jaune en bas à droite. Les valeurs dans cette zone sont en réalité proches de 200 itérations. Nous retrouvons bien le fait que, lorsque γ_m prend des valeurs très importantes par rapport à γ_r , l'opérateur de couplage est alors proche du produit scalaire L^2 dont nous avons déjà évoqué la non pertinence. Nous observons que le choix des valeurs habituelles pour les paramètres γ_m et γ_r sont déjà les valeurs optimales. Pour le cas considéré l'homogénéisation se rapprochant de l'opérateur de la chaleur correspond à une valeur du paramètre $\gamma_m = \frac{e_v^2}{\delta t \times d} \approx 5 \times 10^{-2}$ et une valeur unitaire pour $\gamma_r = 1$. Nous observons que ces valeurs pour les paramètres donnent des nombres d'itérations plus importants, nous retrouvons ainsi les mêmes tendances que précédemment. Le détail des valeurs est donné en annexe.

Nous proposons dans la suite un exemple de mise en oeuvre de cette méthode de couplage « compatible » au cas de maillages non structurés.

3.6.3 Extension au cas de maillages quelconques

La méthode de définition du domaine local et de son maillage peuvent s'étendre à des domaines dont le maillage n'est pas structuré comme dans le cas précédemment considéré.

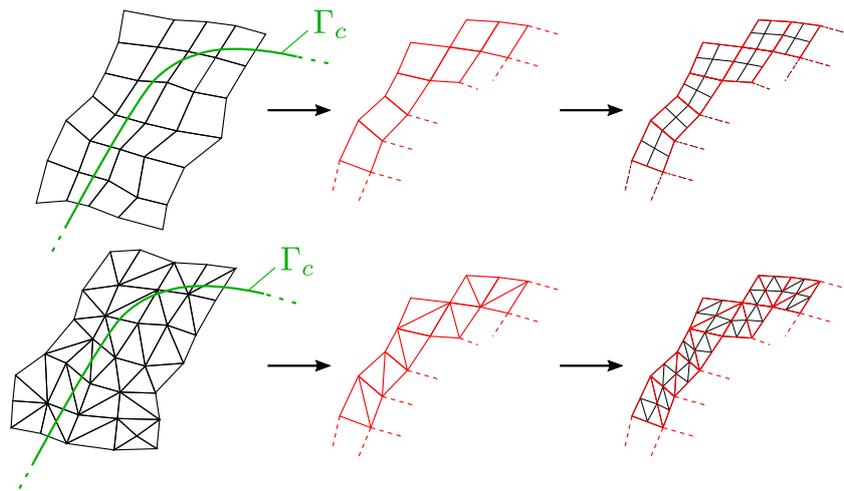


FIGURE 3.21 – Schéma d’un raffinement possible pour des éléments quadrangulaires ou triangulaires compatibles avec les éléments de la couronne.

Et à nouveau nous pouvons imaginer les deux zones de couplage comme donné précédemment :

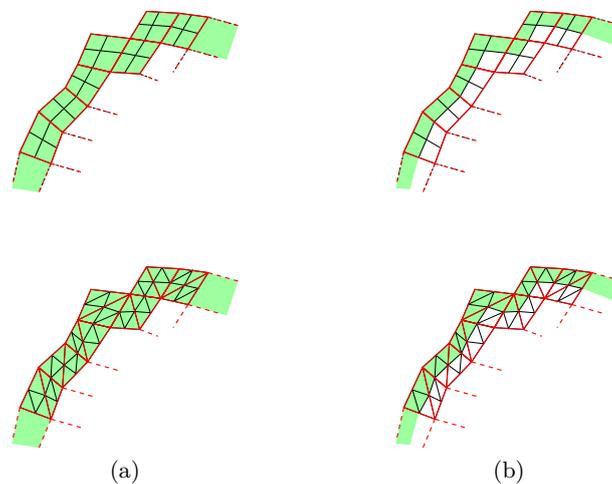


FIGURE 3.22 – Zone de couplage appelée **Volumique (V.)** en (a) et pseudo-volumique (**PV.**) en (b).

Nous avons appliqué cette méthode de construction à un maillage quadrangulaire et triangulaire du domaine utilisé au problème ($\mathcal{P}_{\text{méca}}$), tous deux non structurés. Nous commençons par détecter et sortir une ceinture d’éléments du maillage global comme le montre la Figure 3.23.

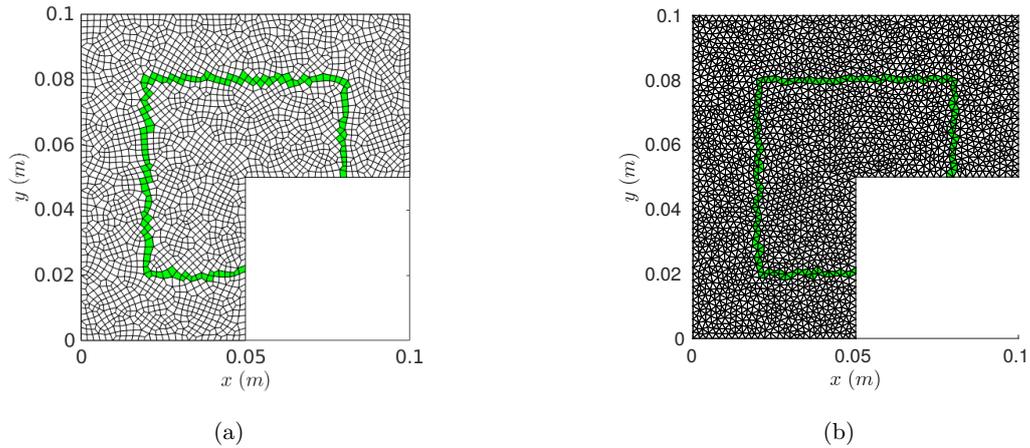


FIGURE 3.23 – Exemple de ceintures d’éléments construites pour un maillage quadrangulaire ou triangulaire du domaine global.

Une fois ces ceintures d’éléments sorties du code industriel, nous avons implémenté des procédures automatiques d’écriture des fichiers d’entrée d’un mailleur externe, ici le logiciel **GMSH** [158]. Les fichiers d’entrée sont les fichiers définissant la géométrie à mailler (d’extension *.geo*), nous reprenons les ceintures d’éléments pour définir la géométrie, ce qui nous permet de nous assurer que le maillage construit sera compatible avec le maillage global. Nous pouvons voir une illustration des géométries à la Figure 3.24

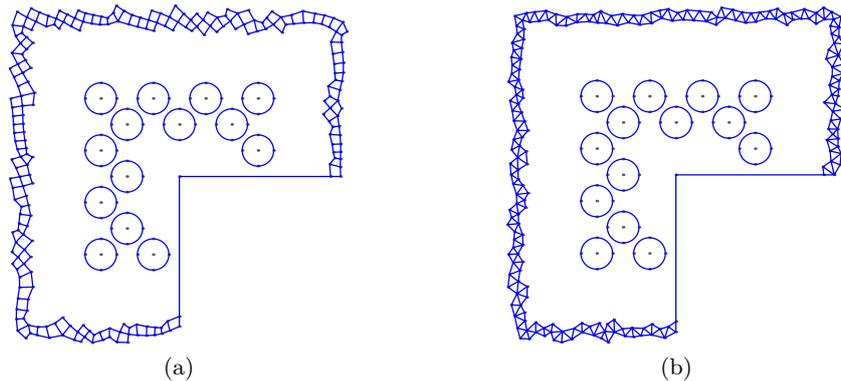


FIGURE 3.24 – Exemple de géométrie construite à partir de la ceinture d’éléments du maillage global.

Finalement nous obtenons les maillages suivants :

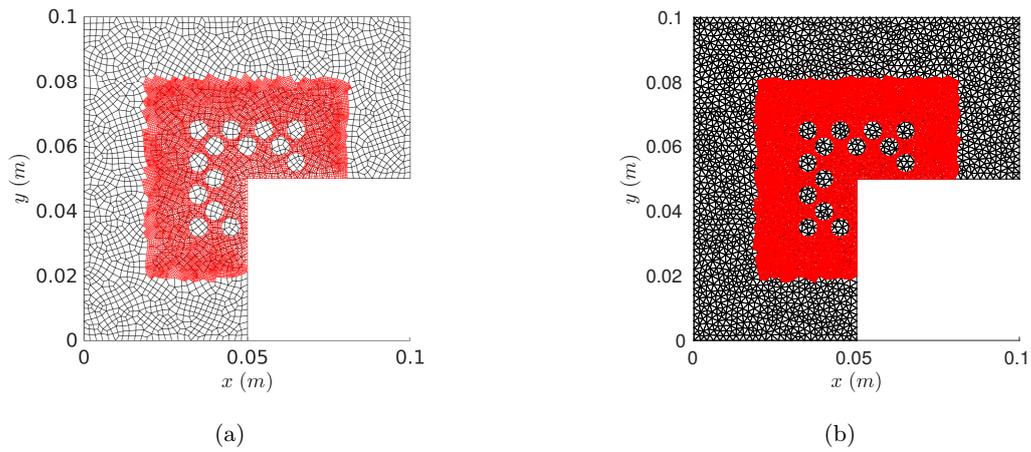


FIGURE 3.25 – Exemple de construction de maillage pour le domaine local à partir d'un maillage quadrangulaire ou triangulaire pour le domaine global.

Ainsi l'extension de la méthode de couplage « compatible » au cas de maillage non-structuré ne présente pas de difficulté limitante.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons dans un premier temps développé l'écriture de trois problèmes sous formes décomposées en deux sous-domaines. Le premier étant un problème de diffusion de la chaleur linéaire et stationnaire, le second instationnaire et le troisième, un problème de mécanique $2D$ avec localisation et singularité. Nous avons considéré des raccords duaux de deux types : surfacique classique et volumique dans le cadre Arlequin. Nous avons ensuite rappelé le principe de la méthode FETI et son adaptation au cas du couplage volumique Arlequin. Les résultats que nous avons obtenus montrent numériquement, que l'écriture d'un couplage volumique, dans le cadre Arlequin, entre deux sous-domaines améliore globalement la vitesse de convergence des méthodes de résolution du type FETI. Ceci s'expliquant par le meilleur conditionnement des systèmes matriciels, découlant de la nature volumique des opérateurs de couplage. Nous avons dans un second temps proposé et implémenté une méthode de couplage volumique dite « compatible » permettant de s'affranchir des difficultés qu'engendre la mise en place du cadre Arlequin entre deux maillages non-compatibles (problématique d'intégration numérique pour le calcul des opérateurs de couplage et des matrices pondérées par la partition d'unité). Nous avons alors, à nouveau, comparé les vitesses de résolution de ce nouveau raccord avec les raccords surfaciques et obtenu les mêmes tendances. Ainsi, pour la simulation du procédé SLM, le couplage volumique même si nous restons à une échelle de modélisation macroscopique, basée sur le cadre de la Mécanique des Milieux Continus, apporte une flexibilité n'engendrant pas de coûts numériques plus importants que le couplage surfacique. Et même, comme nous l'avons vu avec la méthode FETI, des vitesses de convergence plus rapides lorsqu'une zone de couplage restreinte à une bande d'éléments macroscopiques est définie. Aussi nous avons pu observer que ces performances étaient meilleures lorsque le multiplicateur de Lagrange était choisi dans l'espace de discrétisation du domaine global (ou macroscopique). Ceci est particulièrement intéressant car, lorsque des modèles de natures différentes, comme par exemple un modèle mécanique $3D$ et un avec une cinématique de type coque [159, 108], le choix de l'espace le moins riche, i.e. celui de la cinématique coque, comme espace médiateur est nécessaire pour assurer une précision optimale de la modélisation.

Un certain nombre de questions reste en suspens et mériteraient des développements supplémentaires, comme :

- voir l'influence sur les vitesses de convergence de la différence de pas de discrétisation entre le domain local et global. En effet pour les applications de la méthode de couplage compatible, nous sommes restés avec un rapport $\frac{1}{2}$ entre les deux pas de discrétisation ($h_g = h$ et $h_l = \frac{h}{2}$).
- implémenter un exemple plus complexe avec une géométrie pour la zone de couplage moins structurée (voir la Remarque 3.2).

Profitant de la facilité de mise en œuvre du cadre Arlequin, notamment pour le calcul des opérateurs de couplage, que procure la définition d'un domaine local compatible dans la zone de couplage avec le domaine global, nous avons exploré dans le chapitre suivant la possibilité d'adapter les méthodes Globales-Locales non-invasives au cas d'un couplage volumique de type Arlequin.

Chapitre 4

*Stratégie Itérative Globale/Locale Volumique Non-Invasive -
Comparaison avec l'existant*

4.1	Introduction	
4.2	Bref aperçu des méthodes précurseurs aux méthodes IGLNI	
4.2.1	Méthodes de Schwarz	
4.2.2	Méthode Itérative Globale-Locale de Whitcomb	
4.3	Méthodes GL itératives et non-invasives : couplage volumique	
4.3.1	Rappel du principe des méthodes IGLNI	
4.3.2	Extension au raccord volumique	
4.4	Tests et résultats numériques	
4.5	Conclusion	

4.1 Introduction

Au Chapitre 1, nous avons vu que de nombreux travaux de modélisation ont été menés concernant la simulation du procédé SLM, tous à une échelle bien particulière (**microscopique**, **mésoscopique** et **macroscopique**). Ainsi les méthodes numériques et codes développés sont performants pour les échelles de modélisation qu'ils considèrent. Un moyen d'espérer réaliser la simulation des complexités du problème de la FA d'une pièce-FA, donc prenant en compte la diversité des physiques et des échelles, est d'être capable de faire coopérer ces développements en combinant additivement les potentialités des différentes approches. Les méthodes Itératives Globales-Locales qualifiées aujourd'hui de « Non-Invasives », telles que celle initiée par Whitcomb [79] et développée de manière plus robuste par O. Allix et ses collaborateurs [83] ([82] et les références mentionnées) depuis une dizaine d'années, semblent être un outil intéressant, permettant de réaliser cette communication de manière coopérative, tout en limitant les efforts de programmation et en conservant les structures des codes déjà existants.

Ces méthodes reposent sur une stratégie particulière de décomposition de domaine avec des couplages surfaciques. Cependant, pour des problématiques telle celle de la FA, ce type de couplage ne peut répondre aux couplages inter-échelles nécessaires, notamment en dynamique. Le couplage volumique devient indispensable dans ces cas là (voir par exemple pour le couplage atomistique/continu [160, 142, 120, 121, 122, 123], ou pour un couplage en régime dynamique [161, 162]).

Partant de ce constat et de la facilité de mise en œuvre qu'apportent les méthodes de couplage « non-invasif », nous avons exploré le couplage volumique « non-invasif/collaboratif » tout en examinant les cas compatible et incompatible en maillage, dans la philosophie du cadre Arlequin.

Nous commençons ce chapitre par rappeler, brièvement, à la Section 4.2, les méthodes précurseurs aux méthodes IGLNI. Celles-ci empruntent, dans leur principe, l'idée fondatrice de Schwarz [76]. Nous rappelons donc brièvement à la Sous-Section 4.2.1 les éléments constituant les méthodes de Schwarz. Puis à la Sous-Section 4.2.2, nous détaillons la méthode IGLNI proposée par Whitcomb [79]. A la Section 4.3, nous nous intéressons à l'adaptation au cas d'un couplage volumique dans le cadre Arlequin des méthodes IGLNI. Nous commençons par rappeler en détail leur principe en considérant un couplage de type surfacique à la Sous-Section 4.3.1 puis, à la Sous-Section 4.3.2, nous détaillons comment nous les avons étendues au cas d'un couplage de type volumique. A la Section 4.4, nous présentons les résultats que nous avons obtenus pour la résolution des trois problèmes que nous avons introduits au Chapitre 3, ainsi que celui de la concentration de contrainte d'une plaque percée infinie en traction dont nous connaissons la solution analytique. Nous comparons les vitesses de convergence obtenues pour les deux types de raccord. La dernière section sera consacrée à quelques conclusions et perspectives.

4.2 Bref aperçu des méthodes précurseurs aux méthodes Itératives Globales-Locales Non-Invasives (IGLNI)

4.2.1 Méthodes de Schwarz

Historiquement d'après [163], les méthodes de Schwarz sont nées lorsque H.A Schwarz, dans le but d'étendre les démonstrations d'existence de fonctions harmoniques pour des problèmes de Dirichlet posés sur des domaines aux formes complexes, proposa un algorithme dit alterné. Considérant un domaine composite, séparable en deux sous domaines avec recouvrement (l'exemple classique étant donné par la Figure 4.1) dont nous connaissons explicitement les solutions par leurs décompositions en série de Fourier. Ensuite un grand nombre de variantes, basées sur ce principe ont vu le jour. Pour les détailler, nous reprenons le problème (\mathcal{P}_{ts}) posé sur le domaine composite Ω , union des domaines Ω_1 et Ω_2 se recouvrant ($\text{mes}(\Omega_1 \cup \Omega_2) \neq 0$), représentés à la Figure 4.1. Nous notons Ω_r la zone de recouvrement, Γ_1 et Γ_2 les parties de frontières de Ω_1 et Ω_2 délimitant la zone de recouvrement et Γ_1^c et Γ_2^c leurs complémentaires.

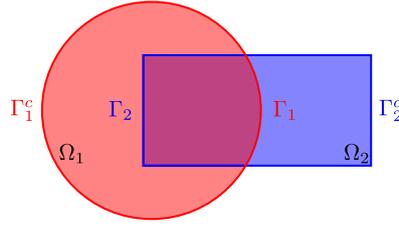


FIGURE 4.1 – Schéma de la décomposition de domaine.

Le premier algorithme est celui appelé Méthode de Schwarz Alternée, il consiste à construire une suite (T_1^n, T_2^n) pour $n \geq 0$ en résolvant alternativement le problème (\mathcal{P}_{ts}) sur les domaines Ω_1 et Ω_2 agrémenté d'une condition sur les frontières Γ_1 et respectivement Γ_2 , définie à partir de l'itération précédente. L'algorithme s'écrit mathématiquement ainsi :

$$\begin{aligned} -k\Delta T_1^{n+1} &= f_{las} \quad \text{dans } \Omega_1, & -k\Delta T_2^{n+1} &= f_{las} \quad \text{dans } \Omega_2, \\ T_1^{n+1} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^c, & T_2^{n+1} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_2^c, \\ T_1^{n+1} &= T_2^n \quad \text{sur } \Gamma_1, & T_2^{n+1} &= T_1^{n+1} \quad \text{sur } \Gamma_2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

L'algorithme est initialisé en imposant $T_2^0 = 0$ sur Γ_1 . La condition de transmission entre les deux domaines est de type Dirichlet non-homogène. Dans la pratique nous pouvons la traiter exactement de la même manière qu'exposé dans la partie précédente en introduisant un champ thermique de relèvement égal sur la frontière à la température imposée.

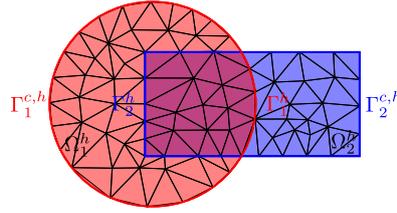
Un désavantage de cette méthode est que la résolution sur un domaine Ω_i nécessite d'attendre la résolution du second problème. P.L. Lions proposa alors dans [164] un algorithme appelé Méthode de Schwarz Parallèle, permettant de paralléliser la résolution des deux sous problèmes. L'algorithme repose sur l'idée de résoudre à chaque itération les deux problèmes en utilisant comme condition limite les champs de l'itération précédente. L'algorithme construit ainsi une nouvelle suite (T_1^n, T_2^n) pour $n \geq 0$ et prend alors la forme suivante

$$\begin{aligned} -k\Delta T_1^{n+1} &= f_{las} \quad \text{dans } \Omega_1, & -k\Delta T_2^{n+1} &= f_{las} \quad \text{dans } \Omega_2, \\ T_1^{n+1} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^c, & T_2^{n+1} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_2^c, \\ T_1^{n+1} &= T_2^n \quad \text{sur } \Gamma_1, & \tilde{T}_2^{n+1} &= T_1^n \quad \text{sur } \Gamma_2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

L'algorithme nécessite donc l'initialisation des deux champs, réalisée en imposant $T_1^0 = 0$ sur Γ_1 $T_2^0 = 0$ sur Γ_2 .

La mise en place de ces méthodes, dans le contexte de la simulation numérique, repose évidemment sur une discrétisation du problème (T_1^l, T_2^l) . Nous reprenons donc la forme discrétisée introduite précédemment de ce problème. Nous supposons que la triangulation \mathcal{T}_Ω facilite la définition de la sous structuration de Ω en deux sous domaines Ω_1 et Ω_2 . Nous prenons ainsi \mathcal{T}_Ω compatible avec les deux frontières Γ_1 et Γ_2 comme le montre la Figure 4.2. Nous introduisons les matrices de restriction \mathbf{R}_i des noeuds internes de Ω vers ceux de Ω_i , nous avons ainsi les matrices de prolongement \mathbf{R}_i^T pour $i = 1, 2$. La matrice de rigidité \mathbf{K}_i du domaine Ω_i s'exprime ainsi :

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{R}_i \mathbf{K} \mathbf{R}_i^T. \quad (4.3)$$

FIGURE 4.2 – Schéma de discrétisation compatible du domaine Ω avec les frontières internes.

Les champs thermiques discrets sont notés $\mathbf{T}_1^{n+1} \in M_{N_1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{T}_2^{n+1} \in M_{N_2,1}(\mathbb{R})$ où N_1 et N_2 sont les nombres de noeuds des deux domaines. Afin de traiter la condition de transmission, nous introduisons les matrices de restriction \mathbf{R}_i^{in} des noeuds du domaine Ω_i vers ses noeuds internes et procédons à un relèvement. Nous ré-écrivons alors les champs thermiques sous les formes suivantes :

$$\mathbf{T}_1^{n+1} = \mathbf{R}_1^{inT} \boldsymbol{\theta}_1^{n+1} + \mathbf{T}_1^{r,n+1} \text{ et } \mathbf{T}_2^{n+1} = \mathbf{R}_2^{inT} \boldsymbol{\theta}_2^{n+1} + \mathbf{T}_2^{r,n+1} \quad (4.4)$$

avec $\boldsymbol{\theta}_i^{n+1} \in M_{N_i^{in},1}(\mathbb{R})$ avec N_i^{in} le nombre de noeuds internes de Ω_i . Nous définissons alors les champs de relèvement comme :

$$\mathbf{T}_1^{r,n+1} = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_2^{inT} \boldsymbol{\theta}_2^n \text{ et } \mathbf{T}_2^{r,n+1} = \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_1^{inT} \boldsymbol{\theta}_1^n \quad (4.5)$$

En développant et restreignant les systèmes matriciel des deux domaines sur le noeuds internes, nous obtenons le système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_1 & 0 \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 & \tilde{\mathbf{A}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 \\ \boldsymbol{\theta}_2 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\mathbf{B}}_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 \\ \boldsymbol{\theta}_2 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_1 \\ \tilde{\mathbf{F}}_2 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{A}}_i = \mathbf{R}_i^{in} \mathbf{K}_i \mathbf{R}_i^{inT} \text{ pour } i = 1, 2; \tilde{\mathbf{B}}_1 = \mathbf{R}_1^{in} \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_2^{inT} \text{ et } \tilde{\mathbf{B}}_2 = \mathbf{R}_2^{in} \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_1^{inT}. \quad (4.7)$$

Avec cette écriture, la méthode de Schwarz Alternée peut s'interpréter comme l'algorithme de Gauss-Seidel par bloc appliqué au système, dit augmenté, suivant :

$$\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_1 & \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 & \tilde{\mathbf{A}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 \\ \boldsymbol{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_1 \\ \tilde{\mathbf{F}}_2 \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{F}} \quad (4.8)$$

De la même façon, l'algorithme de Schwarz Parallèle prend la forme suivante

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{A}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 \\ \boldsymbol{\theta}_2 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\mathbf{B}}_1 \\ -\tilde{\mathbf{B}}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 \\ \boldsymbol{\theta}_2 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_1 \\ \tilde{\mathbf{F}}_2 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

qui s'interprète comme l'algorithme de Jacobi par bloc appliqué au système augmenté (4.8). Aussi, nous pouvons ré-écrire l'itération (4.9) sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 \\ \boldsymbol{\theta}_2 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 \\ \boldsymbol{\theta}_2 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{A}}_2^{-1} \end{pmatrix} \left(\tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 \\ \boldsymbol{\theta}_2 \end{pmatrix}^n \right) \quad (4.10)$$

Nous pouvons alors interpréter l'algorithme de Schwarz Parallèle comme une méthode itérative de résolution du système augmenté et préconditionné.

Comme il est expliqué dans [163], quand bien même la matrice de rigidité \mathbf{K} du système matriciel associé au problème mono-domaine est symétrique, rien n'indique *a priori* que la matrice de rigidité du système augmenté soit symétrique. La méthode du GC n'est alors plus applicable mais d'autres méthodes

de type Krylov ont été développées pour les problèmes non symétriques (par exemple GMRES) plus performantes que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel par bloc. D'autres algorithmes de résolution ont été développés afin de rétablir la symétrie.

La première que nous exposons est la méthode de Schwarz Additif. Elle consiste, en s'inspirant de l'interprétation faite de l'algorithme de Schwarz Parallèle comme une méthode itérative, à préconditionner le système matriciel du problème mono-domaine :

$$\mathbf{M}_{AS}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{T} = \mathbf{M}_{AS}^{-1} \mathbf{F} \quad (4.11)$$

avec le préconditionneur inspiré de la méthode de Schwarz Parallèle :

$$\mathbf{M}_{AS}^{-1} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_i^{inT} \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{R}_i^{inT} \mathbf{R}_i \quad (4.12)$$

Puisque la matrice \mathbf{K} est symétrique, le préconditionneur de Schwarz Additif \mathbf{M}_{AS}^{-1} l'est aussi et l'algorithme de gradient conjugué peut-être appliqué. Cependant, comme le démontre [163] la convergence de la méthode n'est pas assurée.

La Méthode de Schwarz Multiplicative est la version séquentielle de la méthode de Schwarz Additive, ses itérations prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{T}^n + \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_1^{inT} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{R}_1^{inT} \mathbf{R}_1 (\mathbf{F} - \mathbf{K} \mathbf{T}^n) \\ \mathbf{T}^{n+1} &= \mathbf{T}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_2^{inT} \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{R}_2^{inT} \mathbf{R}_2 (\mathbf{F} - \mathbf{K} \mathbf{T}^{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (4.13)$$

La convergence de cette méthode peut être démontrée comme l'indique [163]. Cependant, comme nous l'avons vu, le système préconditionné associé étant non symétrique, puisqu'il correspond à une méthode de Gauss-Seidel par blocs, il ne peut être résolu par la méthode de GC.

Une version améliorée de l'approche Schwarz Additif est la méthode de Schwarz Additive Restreinte introduite par [165]. Son principe est d'introduire des matrices de restriction \mathbf{R}_i^0 , construisant à partir de la décomposition avec recouvrement, une décomposition sans recouvrement. Les itérations prennent alors la forme suivante :

$$\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{T}^n + \sum_{i=1}^2 \mathbf{R}_i^0{}^T \mathbf{R}_i^{inT} \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{R}_i^{inT} \mathbf{R}_i (\mathbf{F} - \mathbf{K} \mathbf{T}^n) \quad (4.14)$$

Cette modification a l'avantage de rendre l'algorithme convergent et d'améliorer sa performance. Cependant elle fait perdre la symétrie du préconditionneur.

Ces méthodes de Schwarz classiques nécessitent, pour converger, une zone de recouvrement entre les domaines de mesure non nulle. Afin d'étendre leur utilisation au cas de décomposition de domaine sans recouvrement, P.L Lions proposa dans [166] d'utiliser, non plus des conditions de transmission de type Dirichlet, mais des conditions de type Robin. Cette modification, en plus d'ouvrir le cadre d'application des méthodes aux décompositions sans recouvrement, permet d'améliorer nettement les facteurs de convergence et ce même avec recouvrement. Ce changement de condition limite ouvre un nouveau cadre appelé Méthode de Schwarz Optimisée (voir [167]). Les conditions limites, dans le cas de la méthode de Schwarz alternée, passent de l'écriture

$$T_1^{n+1} = T_2^n \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad T_2^{n+1} = T_1^{n+1} \quad \text{sur } \Gamma_2. \quad (4.15)$$

à celle-ci

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} + \mathcal{S}_1\right)(T_1^{n+1}) = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} + \mathcal{S}_1\right)(T_2^n) \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} + \mathcal{S}_2\right)(T_2^{n+1}) = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} + \mathcal{S}_2\right)(T_1^{n+1}) \quad \text{sur } \Gamma_2. \quad (4.16)$$

avec \mathcal{S}_i , $i = 1, 2$ des opérateurs linéaires définis sur l'interface Γ_i . Le choix des opérateurs se porte sur ceux qui apportent le meilleur taux de convergence.

Ces méthodes de Schwarz ont été adaptées au contexte de la simulation de problèmes mécaniques multi-échelles, présentant donc localement une difficulté, traitée par la Méthode de Zoom Structural (MZS), i.e. l'introduction d'un domaine local plus fin que le domaine global (cf. [168][169]). D'autres travaux ont été menés sur les MZS développant des outils performants de transferts d'information entre les maillages incompatibles des domaines local et global (cf. [170]). Ces méthodes de transfert de champ ont premièrement été développées dans un contexte plus général que les MZS dans [171]. Comme les auteurs l'indiquent, ces méthodes se prêtent particulièrement bien aux transferts de champs pour des analyses multi-physiques où des maillages différents, d'une même structure, sont utilisés pour les différentes physiques. Ceci est, comme nous l'avons vu au Chapitre 1, le cas des simulations thermo-mécaniques macroscopique du procédé SLM, ces méthodes semblent donc adéquates à cette problématique.

Historiquement, dans le contexte de la ré-analyse de problème mécanique de type Globales-Locales, une première méthode itérative fut proposée par Whitcomb dans [79] dont nous rappelons brièvement le principe dans la sous-section suivante.

4.2.2 Méthode Itérative Globale-Locale de Whitcomb

Pour illustrer le principe de sa méthode, Whitcomb considère le problème d'une plaque trouée, occupant la fermeture d'un domaine noté Ω , illustrée à la Figure 4.3. Celle-ci consiste à définir une zone contenant le trou, notée Ω_l et la remplacer par un autre domaine, plus simple, nécessitant une discrétisation éléments finis moins fine, noté Ω_g^2 . Le complémentaire de ces deux domaines est noté Ω_g^1 . En reprenant le formalisme et les hypothèses de l'article [79], Le problème de mécanique linéaire, réel, s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\left(K_g^1 + K_l\right) \delta^r = F \quad \text{avec } \delta^r = \begin{pmatrix} \delta_g^{1,r} \\ \delta_l \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

et où la matrice de rigidité est décomposée en deux termes, le premier étant la contribution du domaine Ω_g^1 et le second du domaine Ω_l . De même, le problème simplifié prend la forme matricielle suivante :

$$\left(K_g^1 + K_g^2\right) \delta^s = F \quad \text{avec } \delta^s = \begin{pmatrix} \delta_g^{1,s} \\ \delta_g^2 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

L'algorithme que l'auteur propose est le suivant :

- i) Résoudre le problème simple, nous obtenons alors δ^s .
- ii) Résoudre le problème local, portant sur le domaine Ω_l en imposant le déplacement obtenu à l'étape i) comme condition limite. Nous obtenons alors le vecteur δ_l
- iii) Calculer le résidu ψ défini comme

$$\psi = \left(K_g^1 + K_l\right) \delta - F \quad \text{avec } \delta = \begin{pmatrix} \delta_g^{1,s} \\ \delta_l \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

- iv) Vérifier la convergence en calculant la norme du résidu. Si celle-ci n'est pas atteinte nous continuons les itérations.

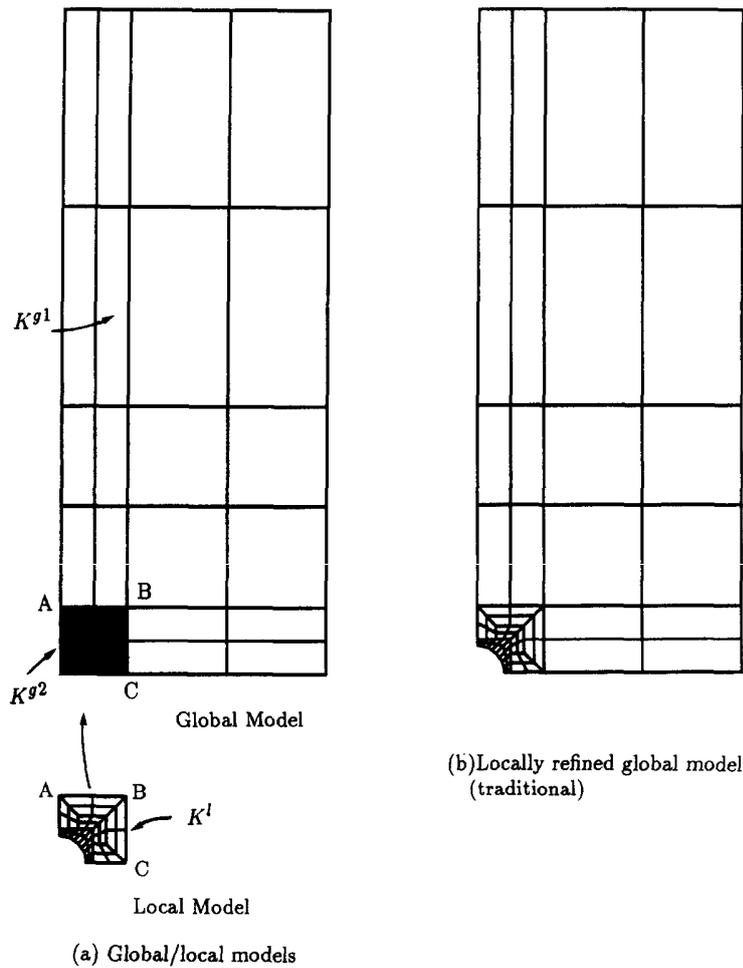


FIGURE 4.3 – Problème mécanique considéré par Whitcomb pour illustrer sa méthode dans [79] (figure prise dans le papier d'origine).

- v) Calculer une correction de déplacement avec l'équation suivante (qui nous semble manquer de précision)

$$\Delta\delta = - \left(K_g^1 + K_g^2 \right)^{-1} \psi. \quad (4.20)$$

- vi) Recommencer à partir de l'étape ii).

Cette méthode converge vers de bons résultats d'après les exemples donnés par l'auteur dans les articles [79, 80, 81]. Telle que présentée, elle considère qu'il y a une compatibilité de maillages à l'interface Γ entre les trois domaines Ω_g^1, Ω_g^2 et Ω_l . Par ailleurs la correction au cours des itérations se fait sur le champ des déplacements.

Les méthodes Itératives Globales-Locales, plus récentes, sont plus claires et procèdent par ajustement d'une densité surfacique d'effort. C'est précisément à cette méthode que sera consacrée la première partie de la Section 4.3. La seconde partie est consacrée à l'extension de cette approche au cas du couplage énergétique-volumique du cadre Arlequin.

4.3 Méthodes Itératives Globales-Locales et Non-Invasives (IGLNI) - Extension au couplage volumique

Nous commençons d'abord par détailler le principe des méthodes Globales-Locales dans leur cadre classique de couplage surfacique puis nous proposons une extension au couplage volumique.

4.3.1 Rappel du principe des méthodes IGLNI

Afin de présenter le principe des méthodes IGLNI, nous considérons un solide occupant la fermeture d'un domaine noté Ω et schématisé à la Figure 4.4a. Nous supposons que le solide présente une (ou des) criticité locale qui peut-être une altération, une singularité ou un chargement localisé..., (une fissure est considérée ici pour l'illustration). Les méthodes IGLNI, à l'instar de la méthode proposée par Whitcomb, consistent à remplacer la (ou les) zone dite **locale** Ω_l dont le domaine complémentaire, **global**, sera noté Ω_g , comportant une difficulté physique, par un modèle simplifié, de simplicité comparable à celle du sous-domaine global (cf. Figure 4.4b). Nous qualifions cette nouvelle zone d'**auxiliaire** Ω_a (cf. Figure 4.4c). L'union composée du complémentaire de la zone locale et de ce domaine auxiliaire forme le domaine simplifié Ω^s , cf. Figure 4.4d. La zone locale est extraite et conservée, un traitement numérique particulier sera réalisé en fonction de sa nature.

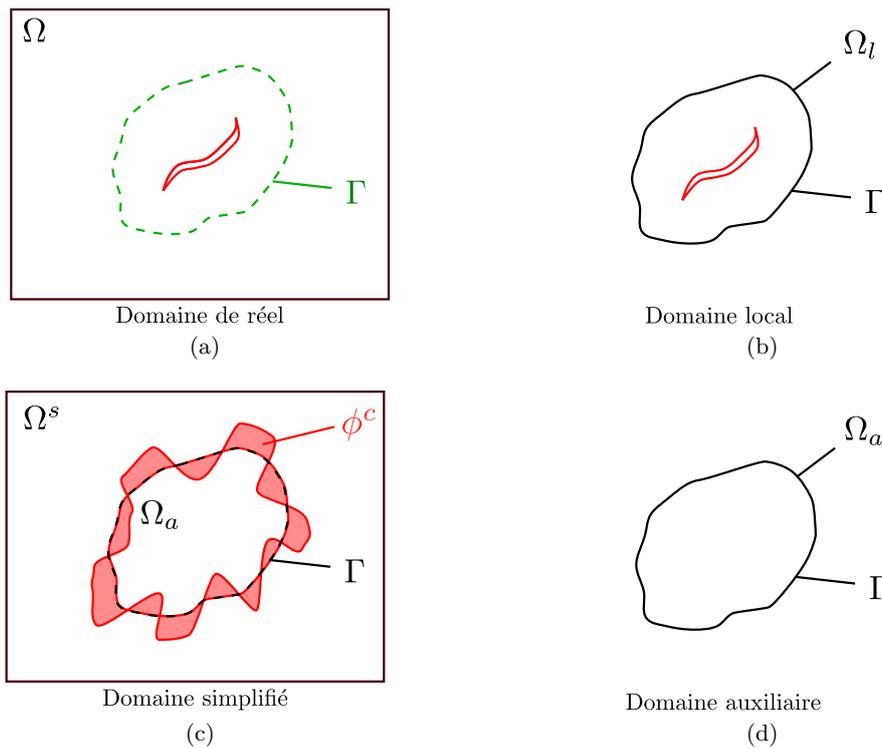


FIGURE 4.4 – Exemple générique de décomposition de domaine pour une résolution du type global/local.

Afin d'illustrer la démarche de définition et de résolution des méthodes IGLNI, nous reprenons le problème (\mathcal{P}_{ts}) pour lequel nous pouvons imaginer vouloir supprimer du problème implémenté dans un code commercial, la source de chaleur intense localisée ainsi que les trous. Nous commençons par décomposer l'écriture locale du problème de référence sur les sous-domaines Ω_g et Ω_l . Nous supposons la source de chaleur ainsi que les trous entièrement inclus dans le domaine Ω_l lui-même entièrement inclus dans Ω de sorte que $\partial\Omega = \partial\Omega^s = (\partial\Omega_g \setminus \Gamma)$ et $\Gamma = \partial\Omega_l = \partial\Omega_a$. Nous rappelons la formulation locale du problème (\mathcal{P}_{ts}) décomposé en deux sous-domaines.

Formulation 4.1: Formulation locale décomposée en deux sous-domaines du problème
(\mathcal{P}_{ts})

Trouver les champs T_c et T_l tels que :

$$-k\Delta T_g = 0 \quad \text{dans } \Omega_g, \quad (4.21a)$$

$$-k\Delta T_l = f_{las} \quad \text{dans } \Omega_l, \quad (4.21b)$$

$$T_g = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_g \setminus \Gamma, \quad (4.21c)$$

$$T_g = T_l \quad \text{sur } \Gamma \quad (4.21d)$$

$$\phi_g \cdot \mathbf{n} = \phi_l \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma \quad (4.21e)$$

avec \mathbf{n} le vecteur normal unitaire sortante du domaine Ω_l .

L'idée ensuite est d'introduire dans le problème simplifié, une densité surfacique de flux thermique définie sur la frontière Γ , notée ϕ_c , permettant de tenir compte de l'effet de la criticité locale dans la modélisation simplifiée. Cette densité surfacique d'effort de correction étant *a priori* inconnue et ne pouvant/souhaitant résoudre directement le problème réel, un algorithme itératif de résolution a alors été proposé. Il consiste à initialiser la densité surfacique de flux thermique $\phi_c^0 = 0$, puis à construire une suite $(T_g^{s,l}, T_a^l, T_l^l)$ pour $l \geq 0$ avec les étapes suivantes :

$$\text{Problème simplifié} \quad \begin{cases} -k\Delta T_g^{s,l+1} = 0 & \text{dans } \Omega_g, \\ -k\Delta T_a^{l+1} = 0 & \text{dans } \Omega_a, \\ T_g^{s,l+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_g \setminus \Gamma, \\ T_g^{s,l+1} = T_a^{l+1} & \text{sur } \Gamma \\ \phi_g^{s,l+1} \cdot \mathbf{n} = \phi_a^{l+1} \cdot \mathbf{n} + \phi_c^l & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.22a)$$

$$\text{Problème local} \quad \begin{cases} -k\Delta T_l^{l+1} = f_{las} & \text{dans } \Omega_l, \\ T_l^{l+1} = T_c^{s,l+1} & \text{sur } \Gamma, \\ \phi_l^{s,l+1} \cdot \mathbf{n} = \phi_g^{s,l+1} \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.22b)$$

$$\text{mise à jour} \quad \phi_c^{l+1} = \phi_l^{l+1} \cdot \mathbf{n} - \phi_a^{l+1} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma \quad (4.22c)$$

Classiquement, la convergence de l'algorithme Global-Local est mesurée au moyen d'une norme relative du résidu d'équilibre, définie ainsi :

$$\eta_{\text{rés}}^{l+1} = \frac{\|\phi_c^{l+1} - \phi_c^l\|_{0,\Gamma}}{\|\phi_c^{l+1}\|_{0,\Gamma}} \quad (4.23)$$

Un autre indicateur qui nous semble pertinent, dans le cadre d'utilisation des méthodes IGLNI comme méthode de ré-analyse locale, est la mesure des variations d'une quantité d'intérêt locale. Ainsi nous avons considéré les variations de la norme du champ primal du domaine local dans une zone d'intérêt, notée Ω_i . Cet indicateur est calculé, par exemple, pour les problèmes thermiques, de la manière suivante :

$$\eta_{QT}^{l+1} = \frac{\|T_l|_{\Omega_i}{}^{l+1} - T_l|_{\Omega_i}{}^l\|_{0,\Omega_i}}{\|T_l|_{\Omega_i}{}^{l+1}\|_{0,\Omega_i}} \quad (4.24)$$

Cette approche se justifie en mécanique statique par le Principe de Saint-Venant (formulé par Adhémar Barré, comte de Saint-Venant [172]) qui énonce que les contraintes et déformations dans une région d'un

solide en équilibre et suffisamment éloignée des points d'application d'efforts extérieurs ne dépendent que de la résultante de ces efforts. Ainsi si la zone de mesure de la quantité d'intérêt est assez éloignée de l'interface de raccord ou de la zone de couplage, il n'est pas utile de pousser l'algorithme de résolution jusqu'à atteindre un critère de convergence élevé sur le résidu d'équilibre, i.e. le champ de correction ϕ_c , il suffit de capter sa résultante.

Afin de mettre en place numériquement cette stratégie, nous discrétisons les problèmes et commençons premièrement par le problème (4.21). La continuité des déplacements à l'interface Γ est, comme aux parties précédentes, imposée à l'aide de la méthode du multiplicateur de Lagrange. Nous avons donc pour le problème simplifié :

Formulation 4.2: Formulation variationnelle du problème (\mathcal{P}_{ts}) simplifié sur deux sous-domaines

Pour une densité surfacique de flux donnée ϕ_c , trouver les champs $(T_g^s, T_a, \lambda^s) \in \mathcal{V}_0^g \times \mathcal{V}^a \times \mathcal{M}_s$ tels que :

$$a_g(T_g^s, T_g^*) + b_\Gamma(\lambda^s, T_g^{s,*}) = l_g(T_c^{s,*}) - b_\Gamma(\phi_c, T_g^{s,*}) \quad \forall T_g^{s,*} \in \mathcal{V}_0^g, \quad (4.25a)$$

$$a_a(T_a, T_a^*) - b_\Gamma(\lambda^s, T_a^*) = l_a(T_a^*) \quad \forall T_a^* \in \mathcal{V}^a, \quad (4.25b)$$

$$b_\Gamma(\mu, T_g - T_a) = 0 \quad \forall \mu \in \mathcal{M}_s. \quad (4.25c)$$

avec l'opérateur de couplage b_Γ donné par :

$$b_\Gamma(\lambda, T) = \int_\Gamma \lambda T d\Gamma \quad (4.26)$$

Nous introduisons pour les différents domaines une triangulation \mathcal{T}_{Ω_g} , \mathcal{T}_{Ω_l} et \mathcal{T}_{Ω_a} et construisons les mêmes espaces d'approximation éléments finis qu'au chapitre précédent. Au chapitre précédent, nous avons observé que les vitesses de convergence du solveur FETI pour le cas d'un couplage surfacique et volumique étaient les meilleures lorsque l'espace de définition du multiplicateur de Lagrange était choisi comme la restriction de l'espace grossier à l'interface Γ . Nous avons donc défini $\mathcal{M}_s = \mathcal{V}_0^g|_\Gamma$. Par ce choix, l'espace facilitant le plus la mise en place des méthodes IGLNI pour la définition de la densité surfacique d'effort ϕ_c est également la restriction de l'espace grossier à l'interface Γ . Nous avons donc recherché ϕ_c dans l'espace \mathcal{M}_s . Nous donnons maintenant directement la forme matricielle du problème simplifié :

Formulation 4.3: Formulation discrète du problème (\mathcal{P}_{ts}) simplifié et décomposé en deux sous-domaines

Pour une densité surfacique de flux de chaleur discrète donnée $\phi_c \in M_{N_{\lambda_g},1}(\mathbb{R})$, trouver les champs $(\mathbf{T}_g^s, \mathbf{T}_a, \boldsymbol{\lambda}_g^s) \in M_{N_g,1}(\mathbb{R}) \times M_{N_l,1}(\mathbb{R}) \times M_{N_{\lambda_g},1}(\mathbb{R})$ tels que :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_g & \mathbf{0} & \mathbf{B}_g^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_a & -\mathbf{B}_{ag}^T \\ \mathbf{B}_g & -\mathbf{B}_{ag} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_g^s \\ \mathbf{T}_a \\ \boldsymbol{\lambda}_g^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{B}_g^T \phi_c \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

L'algorithme de résolution, après avoir initialisé $\phi_c^0 = \mathbf{0}_{N_\lambda}$ (où $\mathbf{0}_{N_\lambda}$ est le vecteur nul de dimension N_λ), prend alors la forme suivante

$$\text{Problème simplifié} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{K}_g & \mathbf{0} & \mathbf{B}_g^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_a & -\mathbf{B}_{ag}^T \\ \mathbf{B}_g & -\mathbf{B}_{ag} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_g^{s,l+1} \\ \mathbf{T}_a^{l+1} \\ \lambda_g^{s,l+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{B}_g^T \phi_c^l \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.28a)$$

$$\text{Problème local} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{K}_l & -\mathbf{B}_l^T \\ -\mathbf{B}_l & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_l^{l+1} \\ \lambda_l^{l+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_l \\ -\mathbf{B}_{lg} \mathbf{T}_g^{s,l+1} \end{pmatrix} \quad (4.28b)$$

$$\text{mise à jour} \quad \phi_c^{l+1} = \lambda_l^{l+1} - \lambda_g^{s,l+1} \quad (4.28c)$$

Les écritures que nous avons développées jusqu'à présent suppose que le domaine local Ω_l a une frontière extérieure compatible avec celle du domaine global Ω_g . Afin de s'affranchir de cette nécessité qui peut ne pas être remplie lorsque, par exemple, le code industriel ne permet pas de définir un contour et de générer un maillage compatible avec ce contour (Γ dans nos exemples), les auteurs de l'article [82] propose une approche de couplage Global-Local non-conforme. Celle-ci consiste à déterminer, à partir de la frontière extérieure Γ_l du domaine local, les éléments du domaine global simplifié entièrement inclus dans la zone entourée par Γ_l . Un exemple est illustré à la Figure 4.5, où la frontière extérieure rectangulaire du domaine local apparaît en rouge et les éléments internes du domaine global en vert, sur la partie zoomée.

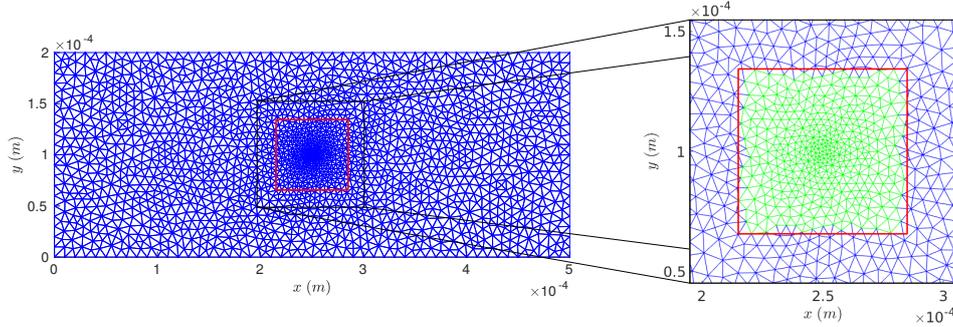


FIGURE 4.5 – Maillages utilisés pour le couplage volumique incompatible des méthodes non-invasives.

L'ensemble de ces éléments internes définit le domaine auxiliaire Ω_a avec sa frontière externe notée Γ_a . La densité surfacique de correction ϕ_c est alors définie sur cette interface. L'algorithme itératif de résolution reste globalement le même, nous le donnons ci-dessous dans le cas du problème (\mathcal{P}_{ts}) .

$$\text{Problème simplifié} \quad \begin{cases} a_g(T_g^{l+1}, T_g^*) + b_{\Gamma_a}(\lambda_g^{s,l+1}, T_g^*) = -b_{\Gamma_a}(\phi_c^l, T_g^*) & \forall T_g^* \in \mathcal{V}_0^g, \\ a_a(T_a^{l+1}, T_a^*) - b_{\Gamma_a}(\lambda_g^{s,l+1}, T_a^*) = 0 & \forall T_a^* \in \mathcal{V}^a, \\ b_{\Gamma_a}(\mu, T_g^{l+1} - T_a^{l+1}) = 0 & \forall \mu \in \mathcal{M}_s \end{cases} \quad (4.29a)$$

$$\text{Problème local} \quad \begin{cases} a_l(T_l^{l+1}, T_l^*) - b_{\Gamma_l}(\lambda_l^{l+1}, T_l^*) = l_l(T_l^*) & \forall T_l^* \in \mathcal{V}^l, \\ -b_{\Gamma_l}(\mu, T_l^{l+1}) = -b_{\Gamma_l}(\mu, T_g^{l+1}) & \forall \mu \in \mathcal{M}_s \end{cases} \quad (4.29b)$$

$$\text{transfert du champ dual} \quad \lambda_l^{l+1} \rightarrow \tilde{\lambda}_g^{s,l+1} \quad (4.29c)$$

$$\text{mise à jour} \quad \phi_c^{l+1} = \tilde{\lambda}_g^{s,l+1} - \lambda_g^{s,l+1} \quad (4.29d)$$

Il est à noter qu'une étape de transfert du multiplicateur de Lagrange défini sur la frontière Γ_l , permettant d'imposer le déplacement global au domaine local, vers la frontière Γ_a est nécessaire. Le calcul du multiplicateur de Lagrange transféré est donné par l'équation (4.30). Nous rappelons que nous n'avons considéré dans le modèle du problème simplifié aucune source thermique.

$$b_{\Gamma_a}(\tilde{\lambda}_g^{s,l+1}, T_g^*) = \int_{\Omega_a} \phi_l^{l+1}(T_l^{l+1}) \cdot \nabla T_g^* \, d\Omega, \quad \forall T_g^* \in \mathcal{V}_0^g. \quad (4.30)$$

Nous pouvons remarquer que, la densité volumique de flux de chaleur ϕ_l^{n+1} étant définie sur le maillage du domaine local, l'intégrale pour être calculée proprement, nécessite des tests et calculs d'intersections entre les mailles locales et globales ou des transferts de champs. Ces difficultés sont de même nature que celles rencontrées pour le calcul exact des termes de l'opérateur de couplage du cadre Arlequin dans le cas de maillages incompatibles.

Pour les deux variantes des méthodes IGLNI, le problème simplifié étant implémenté dans le code industriel, il n'est pas toujours possible de le résoudre sous sa forme décomposée en deux sous-domaines. Une possibilité est alors d'ajouter en parallèle de la résolution du problème fin dans l'algorithme itératif, la résolution d'un problème auxiliaire, où nous imposons le déplacement global sur l'interface Γ (ou Γ_a dans le cas de la méthode IGLNI non-conforme) du domaine Ω_a avec le même modèle que celui introduit pour le problème simplifié. Ce problème auxiliaire s'écrit alors, dans le cas des méthodes IGLNI et conformes :

Formulation 4.4: Formulation variationnelle du problème auxiliaire

Un champ thermique global étant donné T_g , trouver les champs $(T_a, \lambda^s) \in \mathcal{V}_0^a \times \mathcal{M}_s$ tels que :

$$a_a(T_a, T_a^*) - b_\Gamma(\lambda^s, T_a^*) = 0 \quad \forall T_a^* \in \mathcal{V}^a, \quad (4.31a)$$

$$-b_\Gamma(\mu, T_a) = -b_\Gamma(\mu, T_g) \quad \forall \mu \in \mathcal{M}_s. \quad (4.31b)$$

L'algorithme de résolution est donc un peu modifié et nous le donnons directement avec les systèmes sous forme matricielle de chaque problème :

$$\text{Problème simplifié} \quad \mathbf{K}\mathbf{T}^{l+1} = -\mathbf{B}^T \phi^l \text{ et } \mathbf{T}_g^{l+1} = \mathbf{R}_g \mathbf{T}^{l+1} \quad (4.32a)$$

$$\text{Problème local} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{K}_l & -\mathbf{B}_l^T \\ -\mathbf{B}_l & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_l^{l+1} \\ \lambda_l^{l+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_l \\ -\mathbf{B}_{lg} \mathbf{T}_g^{l+1} \end{pmatrix} \quad (4.32b)$$

$$\text{Problème auxiliaire} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{K}_a & -\mathbf{B}_{ag}^T \\ -\mathbf{B}_a & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_a^{l+1} \\ \lambda_g^{s,l+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_{ag} \mathbf{T}_g^{l+1} \end{pmatrix} \quad (4.32c)$$

$$\text{mise à jour} \quad \phi_c^{l+1} = \lambda_l^{l+1} - \lambda_g^{s,l+1} \quad (4.32d)$$

avec \mathbf{K} la matrice de rigidité du domaine Ω_s , \mathbf{B} la matrice de couplage de l'interface Γ au domaine Ω_s et \mathbf{R}_g la matrice de restriction du domaine Ω_s sur le Ω_g . Nous avons pour l'ensemble de nos applications utilisé la seconde écriture des méthodes non-invasives, i.e. le problème global résolu en mono-domaine.

Maintenant que nous avons détaillé le principe des méthodes IGLNI, développées historiquement avec un couplage surfacique, nous proposons, dans la partie suivante, leur extension au cas d'un raccord de type volumique.

4.3.2 Extension au raccord volumique

Nous proposons d'utiliser un raccord volumique, dans la philosophie du cadre Arlequin, en lieu et place des raccords surfaciques. Pour illustrer, nous reprenons le problème avec la fissure. Nous décomposons le domaine Ω en deux sous-domaines, un local Ω_l et un global Ω_g se recouvrant dans un domaine Ω_c d'épaisseur non nulle, cf. Figure 4.6a. De même nous extrayons le domaine local Ω_l , cf. Figure 4.6b et le remplaçons par un domaine auxiliaire Ω_a , cf. Figure 4.6c. L'union du domaine global Ω_g et du domaine auxiliaire forme le domaine simplifié Ω^s , cf. Figure 4.4d.

Nous introduisons cette fois-ci dans le problème simplifié une densité volumique d'efforts définie dans la zone Ω_c , notée encore ϕ_c . Nous ré-utilisons les ingrédients du cadre Arlequin ainsi que les formes pondérées définies au chapitre précédent. Cependant, pour la résolution du problème local, étant le seul

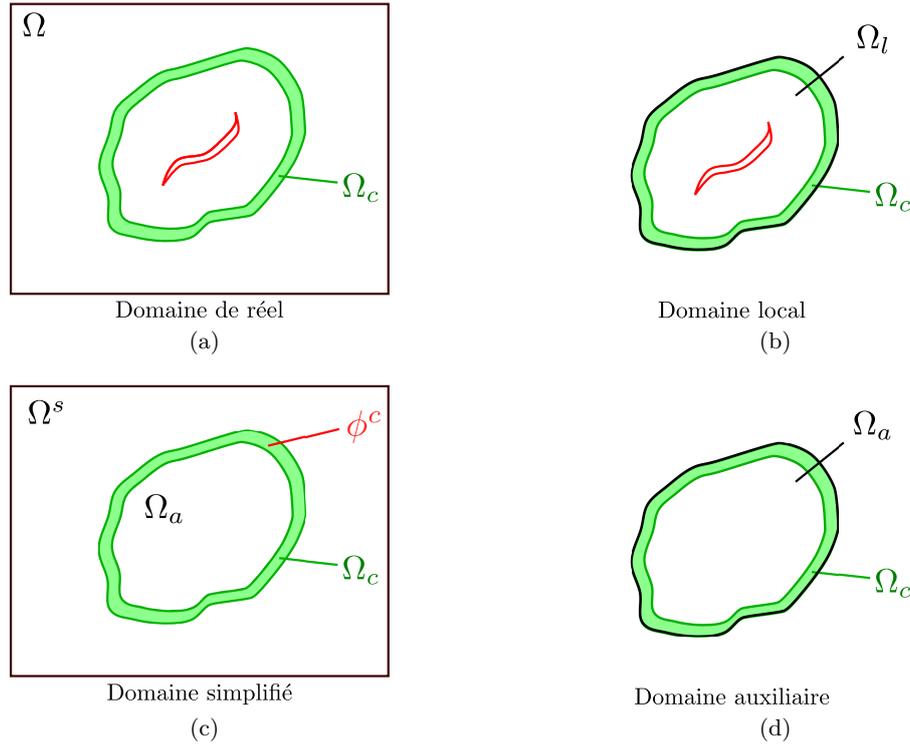


FIGURE 4.6 – Exemple générique de décomposition de domaine pour une résolution du type global/local avec un raccord de type volumique.

domaine présent, il n'est pas nécessaire d'introduire de partition d'unité. L'algorithme de résolution est exactement le même que dans le cas de raccord surfacique, nous le redonnons donc directement ici

$$\text{Problème simplifié} \quad \begin{cases} a_g(T_g^{l+1}, T_g^*) + c(\lambda_g^{s,l+1}, T_g^*) = -c(\phi_c^l, T_g^*) & \forall T_g^* \in \mathcal{V}_0^g, \\ a_a(T_a^{l+1}, T_a^*) - c(\lambda_g^{s,l+1}, T_a^*) = 0 & \forall T_a^* \in \mathcal{V}^a, \\ c(\mu, T_g^{l+1} - T_a^{l+1}) = 0 & \forall \mu \in \mathcal{M}_v \end{cases} \quad (4.33a)$$

$$\text{Problème local} \quad \begin{cases} a_l(T_l^{l+1}, T_l^*) - c(\lambda_l^{l+1}, T_l^*) = l_l(T_l^*) & \forall T_l^* \in \mathcal{V}^l, \\ -c(\mu, T_l^{l+1}) = -c(\mu, T_g^{l+1}) & \forall \mu \in \mathcal{M}_v \end{cases} \quad (4.33b)$$

$$\text{mise à jour} \quad \phi_c^{l+1} = \lambda_l^{l+1} - \lambda_g^{s,l+1} \quad (4.33c)$$

avec $c(.,.)$ l'opérateur de couplage volumique défini aux chapitres précédents. Nous rappelons que, comme détaillé au Chapitre 3, avec cet opérateur de couplage, la densité volumique ϕ_c est homogène à un champ de déplacement. De même que pour le raccord de type surfacique nous avons choisi, pour l'espace de définition du multiplicateur de Lagrange ainsi que pour la densité volumique ϕ_c , la restriction de l'espace grossier à la zone de couplage : $\mathcal{M}_v = \mathcal{V}_0^g|_{\Omega_c}$. Pour mesurer la convergence de l'algorithme nous avons considéré l'indicateur suivant :

$$\eta_{\text{rés}}^{l+1} = \frac{\|\phi_c^{l+1} - \phi_c^l\|_{0,\Omega_c}}{\|\phi_c^{l+1}\|_{0,\Omega_c}} \quad (4.34)$$

ainsi que le même indicateur que pour le couplage surfacique portant sur une quantité d'intérêt.

Avec cette écriture il est nécessaire, pour le problème simplifié, de définir un champ de partition d'unité comme dans la définition classique du cadre Arlequin. De même que pour un couplage surfacique, il est

possible de résoudre le problème simplifié sous une écriture mono-domaine et d'ajouter, en parallèle de la résolution du problème local, la résolution du problème auxiliaire. Ainsi, il n'est plus nécessaire de définir de champ de partition de l'unité pour le problème simplifié (et pour les autres) et le code commercial doit simplement pouvoir gérer une densité volumique d'effort définie dans la zone de couplage Ω_c .

L'algorithme Global-Local itératif que nous avons présenté en nous basant sur le problème (\mathcal{P}_{ts}) est directement adaptable aux problèmes (\mathcal{P}_{ti}) et ($\mathcal{P}_{méca}$). Nous donnons donc, dans la sous-section suivante, directement les résultats de convergence que nous avons obtenus et comparons les performances du couplage surfacique et volumique.

4.4 Tests et résultats numériques

Dans toutes les simulations présentées nous avons considéré un maillage compatible entre le domaine complémentaire et auxiliaire à l'interface Γ . Les maillages pour les problèmes thermiques (\mathcal{P}_{ts}) et (\mathcal{P}_{ti}) sont illustrés par la Figure 4.7 et pour le problème mécanique ($\mathcal{P}_{méca}$) par la Figure 4.8. Sur la Figure 4.8 (c), nous pouvons voir figurer les éléments du domaine global, en vert, formant la zone de couplage et en bleu la zone d'intérêt sur laquelle est calculé le critère de convergence.

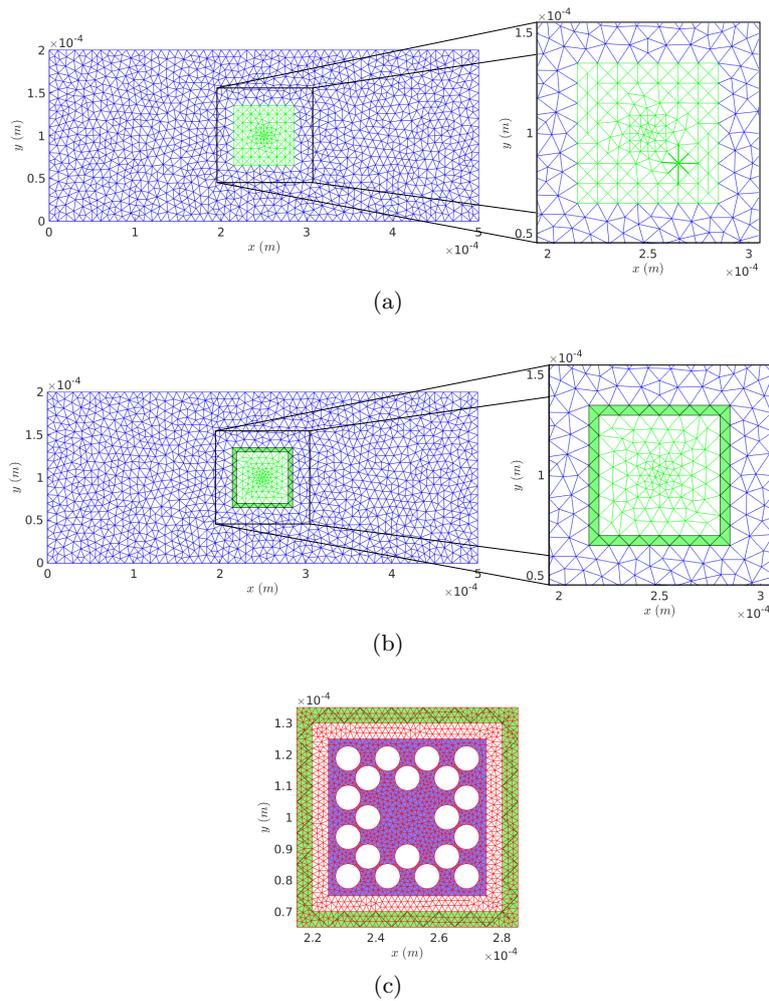


FIGURE 4.7 – En (a) figure le maillage du domaine global pour le couplage surfacique, en (b) pour le couplage volumique avec en vert les éléments de la zone de couplage. En (c) est illustré le maillage du domaine local où figure en bleu la zone d'intérêt ainsi que les éléments de la zone de couplage en vert.

De même, les maillages utilisés pour le problème de mécanique ($\mathcal{P}_{\text{méca}}$) sont présentés à la Figure 4.8.

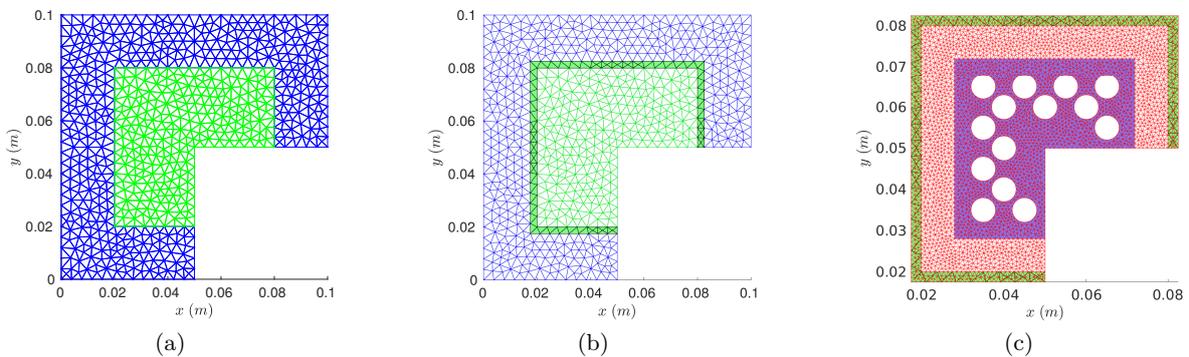


FIGURE 4.8 – En (a) le maillage du domaine global est illustré pour la cas du couplage surfacique, en (b) dans le cas du couplage volumique avec en vert la zone de couplage. En (c) est illustré le maillage du domaine local où apparaissent en vert les éléments grossiers de la zone de couplage et en bleu la zone d'intérêt.

Nous avons obtenu les courbes de convergence de l'algorithme Global-Local itératif suivantes :

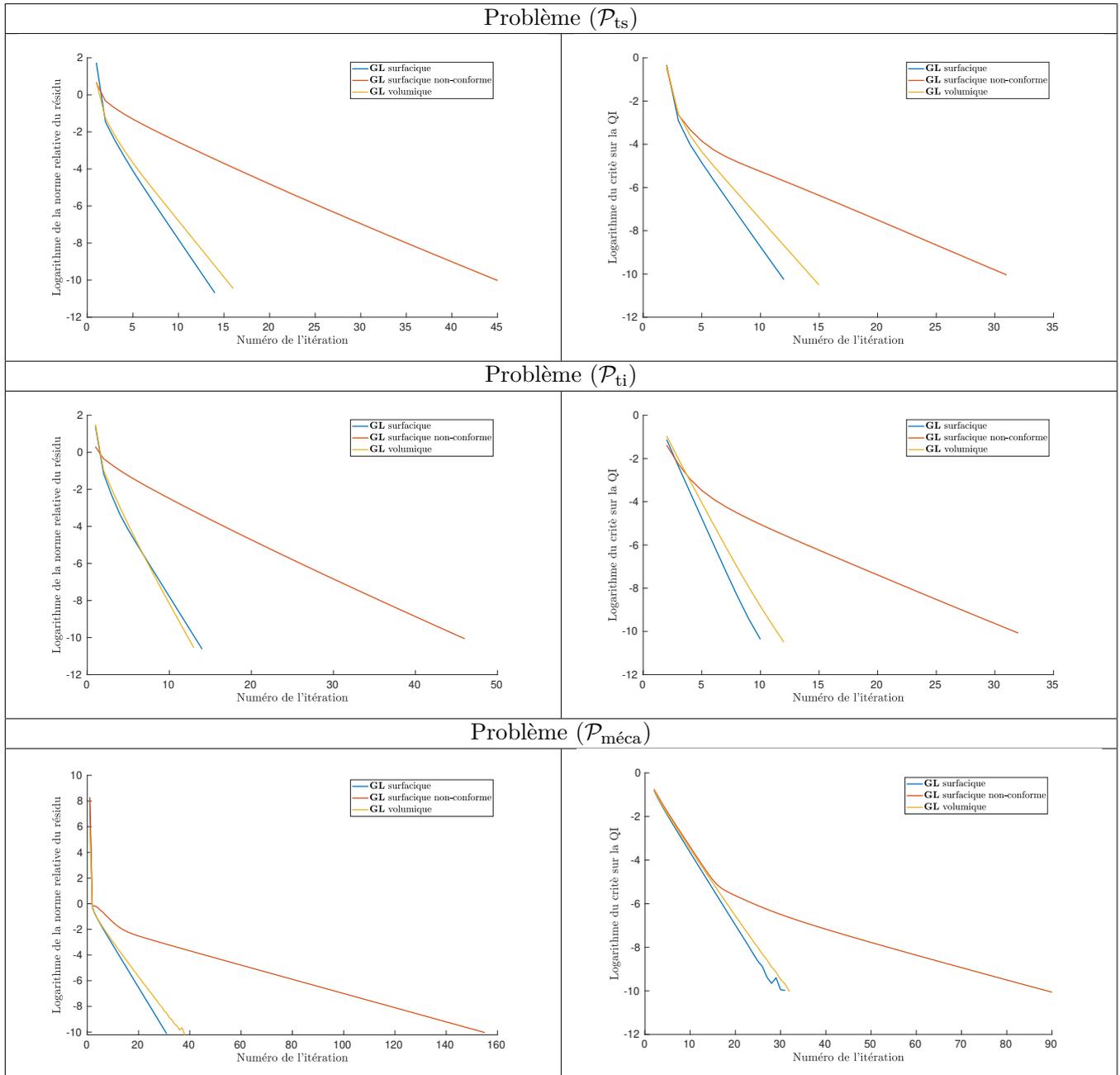


TABLE 4.1 – Ensemble des courbes de convergence de la méthode IGLNI pour les trois problèmes avec l'indicateur portant, à gauche, sur le résidu d'équilibre et à droite sur la quantité d'intérêt.

Nous pouvons voir que les tendances des courbes de convergence dans le cas de l'indicateur portant sur le résidu d'équilibre sont très proches pour les approches Globales-Locales surfacique et volumique et par contre bien moins rapide pour l'approche surfacique non-conforme. Aussi nous pouvons voir que l'indicateur portant sur la quantité d'intérêt donne une convergence plus rapide avec la même consigne de 10^{-10} comme le montre le Tableau 4.2. Une valeur de 10^{-10} pour le critère défini comme la norme L^2 du champ primal dans la zone d'intérêt est très forte. En considérant une valeur moins importante, par exemple 10^{-6} , nous obtenons pour ces trois méthodes un nombre d'itérations proche de la dizaine ce qui

reste très raisonnable.

	Problème (\mathcal{P}_{ts})			Problème (\mathcal{P}_{ti})			Problème ($\mathcal{P}_{méca}$)		
	$\eta_{rés}$ 10^{-10}	η_{QI} 10^{-10}	η_{QI} 10^{-6}	$\eta_{rés}$ 10^{-10}	η_{QI} 10^{-10}	η_{QI} 10^{-6}	$\eta_{rés}$ 10^{-10}	η_{QI} 10^{-10}	η_{QI} 10^{-6}
S.	14	10	7	14	12	7	31	31	18
S. N.C.	46	32	14	45	31	14	155	90	24
V.	13	12	7	16	15	8	38	32	19

TABLE 4.2 – Différentes tailles de maillages considérées et le nombre de degrés de liberté qui en découle.

Dans le but d'améliorer les algorithmes Globaux-Locaux non-invasifs et d'obtenir toujours les meilleures vitesses de convergence, les auteurs de [82], font le lien entre ces méthodes et la méthode de Schwarz Optimisée, permettant ainsi de profiter du large cadre de leur analyse théorique. Ils récapitulent plusieurs variantes de l'algorithme introduites dans la littérature avec, premièrement, une ré-écriture de l'algorithme sous la forme d'un algorithme de Point Fixe et l'emploi de technique de relaxation statique et dynamique. Des méthodes de Newton, Quasi-Newton ou de Gradient Conjugué (GC) peuvent également être appliquées à l'opérateur donnant l'incrément de l'algorithme de Point Fixe. Ces méthodes n'ont pas été considérées ici. Cependant nous pouvons toujours conclure que les méthodes IGLNI utilisant un couplage surfacique et volumique ont des tendances de convergence proches. De plus, à chaque itération de l'algorithme Global-Local non-invasif, la résolution du problème local et, s'il est nécessaire, du problème auxiliaire ou, s'il est écrit sous forme mixte, du problème global, peut se faire par la méthode FETI comme détaillée au Chapitre 3. Comme nous l'avons montré numériquement, avec l'emploi des méthodes « non-intrusives », le couplage volumique présente des vitesses de convergence meilleures.

En plus de ces trois problèmes, nous avons également considéré le problème d'une plaque de dimension infinie, percée et soumise à des efforts de traction, comme le montre la Figure 4.9. La forme analytique de la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ sur le bord du trou est connue (voir [173]) et est donnée par :

$$\sigma_{\theta\theta} = f_s (1 - 2 \cos(\theta)) \quad (4.35)$$

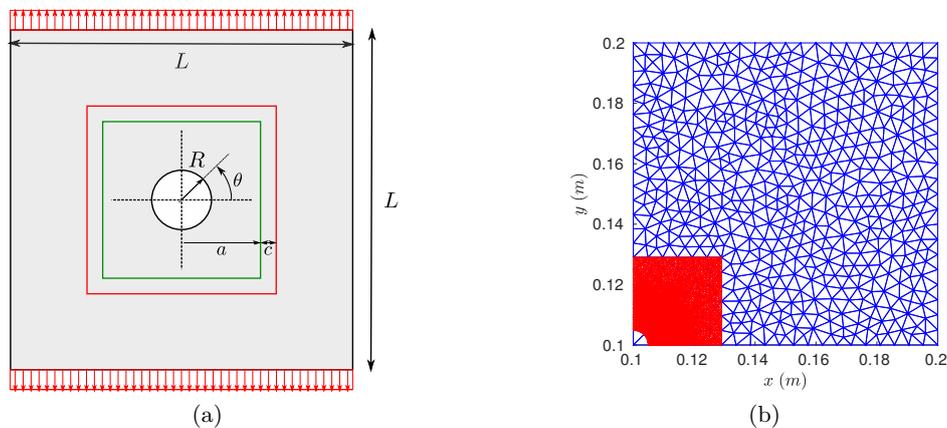


FIGURE 4.9 – Géométrie implémentée pour représenter la plaque infinie percée et maillages utilisés.

Afin d'approximer ce problème posé sur un domaine de taille infinie, nous avons considéré une géométrie dont les dimensions, ainsi que les paramètres physiques sont récapitulés dans le Tableau 4.3. Aussi, pour des raisons de symétrie, nous n'avons considéré qu'un quart de la géométrie.

Géométriques	Symboles	Valeurs	Physiques	Symboles	Valeurs
Longueur du domaine	$L (m)$	200×10^{-3}	Module de Young	$E (GPa)$	114
Rayon du trou	$R (m)$	5×10^{-3}	Coefficient de Poisson	$\nu (1)$	0.34
Longueur zone locale	$a (m)$	25×10^{-3}	Densité surfacique d'effort	$f_s (N \cdot m)$	2×10^8
Epaisseur zone de couplage	$c (m)$	4×10^{-3}			

TABLE 4.3 – Ensemble des paramètres du problème

Nous affichons les contraintes de Von Mises obtenues à convergence dans les différents domaines.

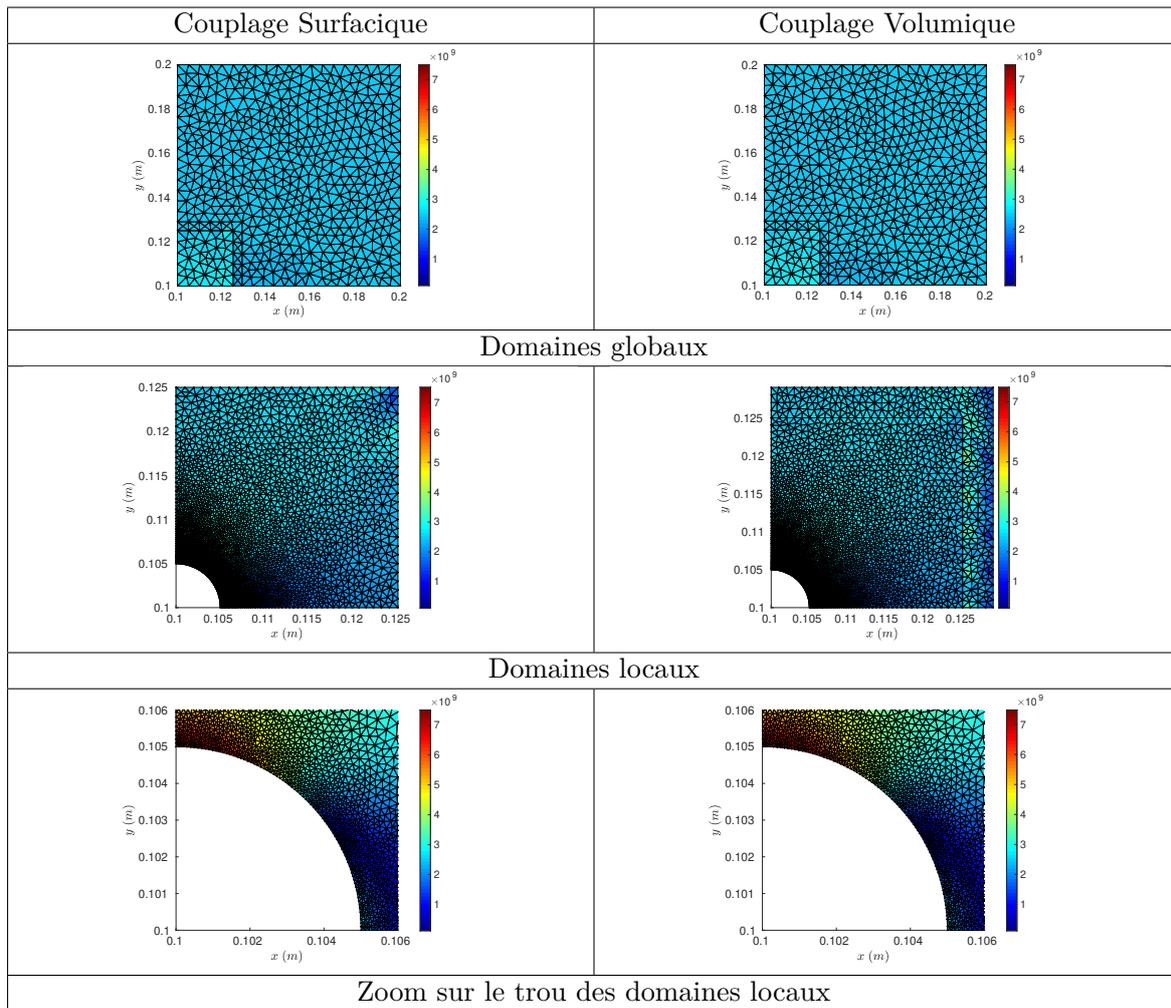


TABLE 4.4 – Contraintes de Von Mises dans les différents domaines.

Nous avons obtenu les courbes de convergence suivantes en considérant la norme du résidu d'équilibre.

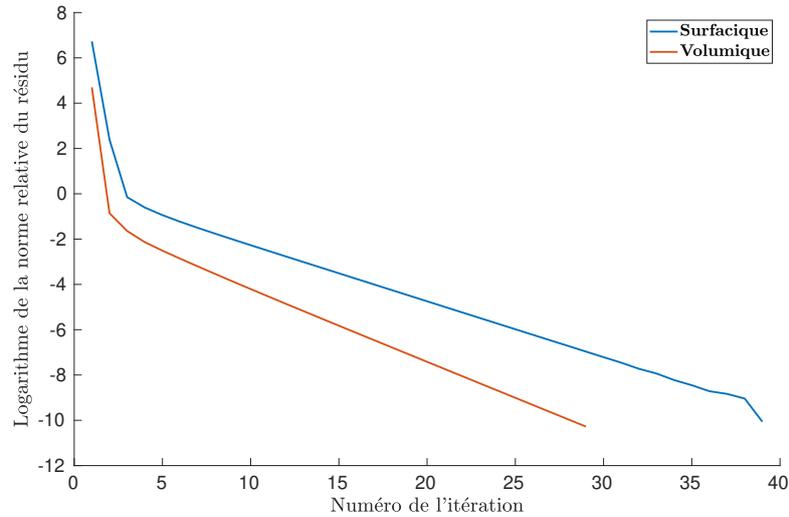
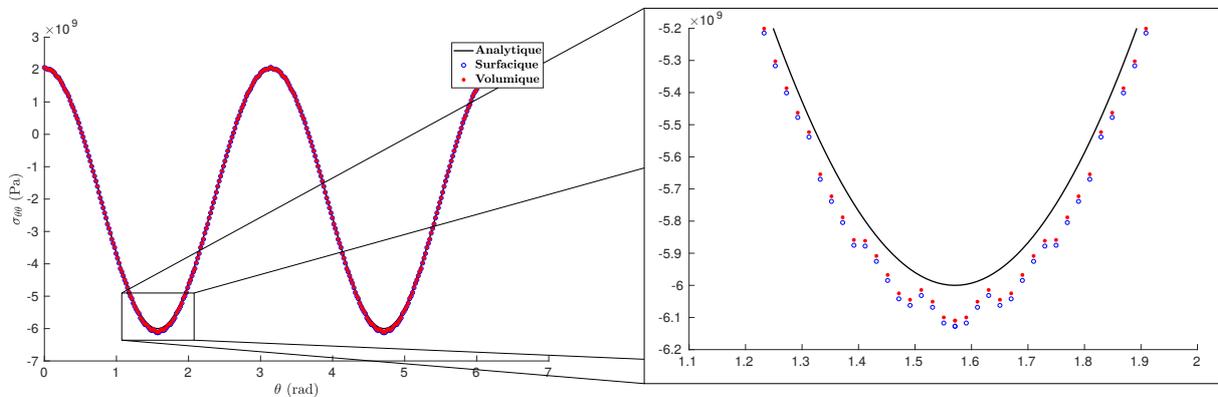


FIGURE 4.10 – Comparaison des courbes de convergence par rapport à la norme du résidu.

Nous observons que le couplage volumique, à la différence des problèmes précédents, présente une vitesse de convergence meilleure que le couplage surfacique. Nous avons comparé la composante des contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ obtenue par rapport à la forme analytique connue en les traçant sur la Figure 4.11.

FIGURE 4.11 – Comparaison de la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ obtenue numériquement avec la formule analytique théorique.

Comme nous l'avons suggéré dans la partie précédente, utiliser la norme du résidu d'équilibre pour analyser la convergence, dans le cadre d'une ré-analyse locale d'un problème multi-échelle n'est pas forcément la solution la plus pertinente. En effet comme nous le montre la Figure suivante, l'erreur commise par rapport à la solution analytique converge bien plus vite. Cette erreur est calculée comme la norme relative L^2 de la différence entre la courbe de variation de la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ sur le bord du trou obtenue par interpolation linéaire des valeurs aux noeuds et la solution analytique.

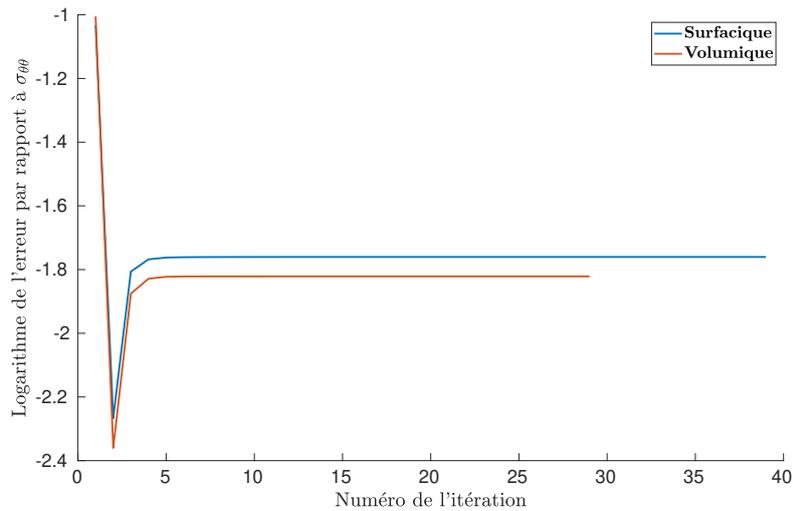


FIGURE 4.12 – Evolution de l’erreur par rapport à la formule analytique au cours des itérations de l’algorithme.

Nous remarquons que finalement 4 itérations nous suffisent pour converger vers l’erreur due à la discrétisation, ce qui se justifie bien par le principe de Saint-Venant. Nous remarquons que le couplage volumique semble donner une meilleure précision que le couplage surfacique.

4.5 Conclusion

Nous avons, dans ce chapitre, proposé une extension des méthodes IGLNI au cas d’un couplage de type énergétique-volumique Arlequin. Nous avons pu la mettre en place numériquement sur les trois problèmes (\mathcal{P}_{ts}), (\mathcal{P}_{ti}) et ($\mathcal{P}_{méca}$) introduits au Chapitre 3 ainsi que pour le problème d’une plaque percée infinie en traction. Les résultats que nous avons obtenus témoignent de la faisabilité et de la pertinence de cette nouvelle approche. En effet, les tendances de convergence de l’algorithme IGLNI pour un couplage surfacique ou volumique sont proches. De plus si le couplage « compatible », développé au Chapitre 3 est utilisé, comme à chaque étape de l’algorithme Global-Local des problèmes discrets mixtes sont à résoudre, nous pouvons imaginer un coût numérique final plus faible pour le cas volumique que surfacique.

Cette nouvelle approche permet, combinant de manière adéquat les méthodes IGLNI dans le cadre Arlequin, pour la mise en coopération et communication de différents codes, de profiter de la flexibilité du couplage volumique et de sa capacité à coupler des modèles réellement multi-échelles. Elle permet ainsi de répondre au critère (\mathcal{C}_2) ainsi que (\mathcal{C}_3) de notre CDC.

Il reste cependant un certain nombre d’analyses à réaliser :

- i) Tester les méthodes de type accélération mentionnées plus haut et détaillées par les auteurs de l’article [82].
- ii) Réaliser un couplage avec un code industriel.
- iii) Réaliser des maquettes de faisabilité pour des couplages réellement multi-échelles (milieu granulaire/continuum, analyse de criticité de défauts, etc...).
- iv) Prospector les conditions de convergence afin de mieux préciser leur spectre d’application.

Chapitre 5

Investigations sur l'utilisation de la réduction de modèle

- 5.1 Introduction
- 5.2 Introduction de la méthode PGD et première application
 - 5.2.1 Principes de la PGD (pour un problème de Poisson)
 - 5.2.2 Idée d'amélioration
 - 5.2.3 Approximation et test numérique
- 5.3 Application au procédé SLM
 - 5.3.1 Problème thermique avec une source immobile
 - 5.3.2 Source thermique en mouvement
 - 5.3.3 Introduction locale de la méthode PGD
- 5.4 Conclusion

Conclusions et perspectives **200**

- A.1 Annexes : Chapitre 3
 - A.1.1 Algorithmes de GC
 - A.1.2 Annexe : Méthode de Décomposition de Domaine compatible avec recouvrement
 - A.1.3 Annexe : Expérimentation numérique
- A.2 Annexes : Chapitre 5
 - A.2.1 Algèbre tensorielle
 - A.2.2 Inversion du complément de Schur spatio-temporel

5.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de proposer une méthode numérique permettant d'introduire aux échelles fines (i.e. dans les Micro- et Meso-Patches) de la stratégie de simulation du procédé FLLP développée au Chapitre 2, une méthode de réduction. Cet objectif est motivé par deux raisons principales en lien avec notre préoccupation (\mathcal{C}_3) de réduction des coûts numériques :

- l'observation des résultats numériques obtenus avec l'utilisation de notre stratégie. Comme nous l'avons déjà évoqué, la solution thermique autour des patches atteint un régime stationnaire et celle dans les patches présente presque toujours les mêmes motifs.
- la réduction importante et prometteuse des coûts de calcul que l'on peut espérer par la mise en œuvre de solveur de type POD ou PGD dans le cadre Arlequin.

Même si l'utilisation de la POD mérite investigations, nous avons retenu l'exploration de la PGD dans ces travaux de thèse :

L'utilisation locale de la PGD dans le patch mouvant Arlequin, apporte des avantages numériques importants :

- Par rapport à une approche de ROM de type POD, aucune phase de calcul d'un ensemble de solutions balayant les paramètres considérés n'est nécessaire.
- La géométrie du domaine et les conditions limites sur lequel est posé le problème PGD ne varie qu'à la marge. Les modes PGD construits, pour la problématique thermique abordée ici à l'échelle macroscopique, au début de la simulation sont utilisables quasiment tout au long de la simulation de la pièce (moyennant ajustements très localisés).

L'utilisation de la méthode PGD dans le cadre Arlequin a déjà été réalisée dans la littérature. En effet, dans [126], par exemple, pour le problème de Poisson, le cadre Arlequin est utilisé pour décomposer un domaine non tensorisable comme le montre la Figure 5.1, où un domaine Ω est décomposé en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 , et deux applications sont définies pour rendre les deux domaines tensorisables. Les trois champs solutions du problème écrit dans le cadre Arlequin, sont recherchés sous forme séparée en espace (décomposition en x et y).

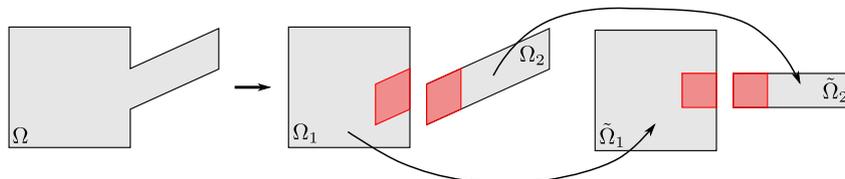


FIGURE 5.1 – Utilisation du cadre Arlequin pour décomposer un domaine et le rendre tensorisable.

Dans l'article [127] un problème mécanique linéaire comportant un détail géométrique localisé est ré-écrit dans le cadre Arlequin afin de coupler deux modèles PGD. La construction des deux modèles réduits est réalisée à l'aide de la méthode Large Time INcrement (LATIN) (cf. [174][175]), qui permet de traiter de manière itérative la résolution de chacun des problèmes. Dans tous ces développements, utilisant la méthode PGD et le cadre Arlequin, chacun des champs est approché par une forme tensorisée.

Ici, dans la Section 5.2 nous formulons l'écriture faible d'un problème de Poisson et l'utilisons pour illustrer le principe de la méthode PGD à la Sous-Section 5.2.1 et proposons une piste d'amélioration à la Sous-Section 5.2.2. Nous réalisons une application numérique de la méthode PGD ainsi que de l'amélioration proposée, au problème de Poisson, en deux dimensions et comparons les résultats obtenus. Dans la seconde section (Section 5.3), nous développons par étape, une stratégie permettant de localiser, pour le problème thermique macroscopique, l'utilisation de la méthode PGD, dans le cadre Arlequin. Nous commençons par considérer un problème thermique instationnaire et linéaire, proche du problème détaillé au Chapitre 2, mais avec une source immobile et introduisons un domaine local, sous le laser couplé à un

domaine global dans le cadre Arlequin. Nous introduisons ensuite l'algorithme de Gradient appliqué au multiplicateur de Lagrange, ingrédient principal de notre stratégie nous permettant de coupler :

- un modèle Global et Local discrets en temps (Sous-Sous-Section 5.3.1), dont nous réalisons une première application numérique à la Sous-Sous-Section 5.3.1,
- un modèle Global discret en temps et un problème Local continu en temps (Sous-Sous-Section 5.3.1), avec une réalisation numérique à la Sous-Sous-Section 5.3.1.

Puis à la Sous-Section 5.3.2, nous reprenons le même problème thermique instationnaire écrit dans le cadre Arlequin mais avec une source mobile que le patch local suit. Avec la même stratégie, nous couplons à nouveau un modèle Global discret en temps et un problème Local continu en temps et réalisons une application numérique à la Sous-Sous-Section 5.3.2. Dans une dernière sous-section (Sous-Section 5.3.3), nous développons notre stratégie permettant de construire une représentation séparée en espace et en temps pour la solution thermique du domaine local grâce à la méthode PGD. Nous l'appliquons ensuite au même problème thermique instationnaire avec source mobile considéré précédemment à la Sous-Sous-Section 5.3.3. Puis, dans le but de diminuer les coûts numériques, nous proposons une variante à cette stratégie et l'appliquons à la Sous-Sous-Section 5.3.3. Nous comparons tous les résultats obtenus lors des applications numériques à une solution classique éléments finis mono-modèle. La Section 5.4 termine ce chapitre par quelques conclusions.

5.2 Introduction de la méthode PGD et première application

La PGD propose une méthode d'approximation particulière de solution de problèmes variationnels ([95, 96, 97]).

5.2.1 Principes de la PGD (pour un problème de Poisson)

Pour rappeler le fonctionnement de la méthode PGD, nous considérons le problème de Poisson posé sur un domaine ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, avec

$$\Omega = \mathcal{I}^x \times \mathcal{I}^y, \quad (5.1)$$

où $\mathcal{I}^x =]0, L[$ et $\mathcal{I}^y =]0, l[$, avec L et l des constantes finies. Ce domaine est illustré par la Figure 5.2.

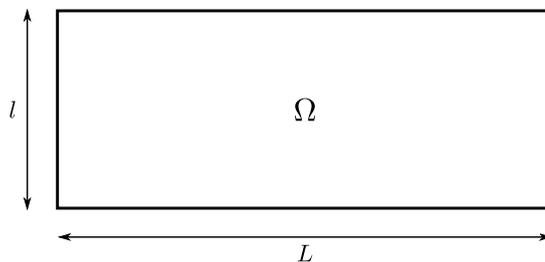


FIGURE 5.2 – Illustration du domaine Ω .

La Formulation forte du problème est donnée par (5.2).

Formulation 5.1: Formulation locale du problème de Poisson

Trouver le champ u tel que :

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (5.2a)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (5.2b)$$

avec f le terme source. Sa formulation faible est donnée par (5.3).

Formulation 5.2: Formulation variationnelle du problème de Poisson

Trouver $u \in V$ tel que $\forall v \in V$:

$$a_0(u, v) = l_0(v), \quad (5.3)$$

avec :

$$a_0(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega \quad \text{et} \quad l_0(v) = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad (5.4)$$

et l'espace de recherche de la solution V_0 étant l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ dont nous notons $(\cdot, \cdot)_{1,\Omega}$ le produit scalaire et $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ la norme associée et $f \in L^2(\Omega)$. La solution de ce problème (que nous savons unique) est aussi celle du problème de minimisation suivant (la forme $a_0(\cdot, \cdot)$ étant symétrique) :

Problème 5.1: Formulation sous forme de minimisation du problème de Poisson

$$u = \arg \min_{v \in V_0} \mathcal{J}_0(v), \quad (5.5)$$

où la forme \mathcal{J}_0 est donnée par :

$$\mathcal{J}_0(v) = \frac{1}{2} a_0(v, v) - l_0(v), \quad \forall v \in V_0. \quad (5.6)$$

Suivant la démarche utilisée dans [176, 177] et renvoyant aux références mentionnées dans ces articles, nous cherchons à construire une forme séparée, notée u^{N_u} , approchant la solution du problème (5.5)-(5.6), définie sur le domaine Ω et de la forme

$$u^{N_u}(x, y) = \sum_{n=1}^{N_u} r_n(x) \otimes s_n(y) \quad \forall (x, y) \text{ dans } \Omega. \quad (5.7)$$

où $N_u \in \mathbb{N}^*$ est fini et inconnu. Les fonctions mono-dimensionnelles $r_n(x)$ et $s_n(y)$ sont appelées modes et leur produit : $R_n(x, y) = r_n(x) s_n(y)$ est appelé le n -ième radical. Ces modes sont recherchés dans les espaces de Hilbert V_0^x et V_0^y respectivement définis comme

$$V_0^x = H_0^1(\mathcal{I}^x) \quad \text{et} \quad V_0^y = H_0^1(\mathcal{I}^y), \quad (5.8)$$

Les radicaux vivent dans la variété suivante

$$\mathcal{S}_1^\Omega = \{R = r \otimes s \mid r \in V_0^x \text{ et } s \in V_0^y\} \quad (5.9)$$

En généralisant la définition de \mathcal{S}_1^Ω , nous introduisons la variété \mathcal{S}_N^Ω avec $N \in \mathbb{N}^*$, définie comme suit :

$$\mathcal{S}_N^\Omega = \left\{ v = \left(\sum_{n=1}^N r_n \otimes s_n \right) \mid r_n \otimes s_n \in \mathcal{S}_1^\Omega \text{ pour } n = 1, \dots, N \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad (5.10)$$

Le champ $u^N(x, y)$ vit donc dans la variété \mathcal{S}_N^Ω . Comme N reste un entier fini inconnu et que si $r \in V_0^x$ et $s \in V_0^y$ alors $r \otimes s \in V_0$, nous avons $u^N \in V_0$.

Signalons ici un résultat mathématique important concernant l'approche PGD, à savoir que cette approche fait sens par le fait que l'espace $\mathcal{S}_\infty^\Omega$ est dense dans l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ (l'espace des fonctions \mathcal{C}^∞ , à supports compacts dans Ω) lequel est dense dans l'espace V_0 (voir l'ouvrage de L. Schwarz [178], Théorème III page 108).

Afin de simplifier les développements dans la suite, nous supposons que la densité volumique d'effort peut s'écrire sous forme séparée de sorte que :

$$f = f^x \otimes f^y. \quad (5.11)$$

Nous introduisons maintenant les formes bilinéaires qui nous seront utiles par la suite, $m^x(.,.)$, $m^y(.,.)$, $a^x(.,.)$ et $a^y(.,.)$ de sorte que

$$\forall (r \otimes s, r' \otimes s') \in \mathcal{S}_1^\Omega \times \mathcal{S}_1^\Omega, a(r \otimes s, r' \otimes s') = a^x(r, r')m^y(s, s') + m^x(r, r')a^y(s, s') \quad (5.12)$$

avec

$$m^x(r, r') = \int_{\mathcal{I}^x} r r' dx, \quad a^x(r, r') = \int_{\mathcal{I}^x} \frac{dr}{dx} \frac{dr'}{dx} dx, \quad (5.13)$$

$$m^y(s, s') = \int_{\mathcal{I}^y} s s' dy, \quad a^y(s, s') = \int_{\mathcal{I}^y} \frac{ds}{dy} \frac{ds'}{dy} dy. \quad (5.14)$$

• Maintenant, une question fondamentale pour cette approche se pose : Comment construire cette approximation ?

Plusieurs algorithmes de construction ont été proposés dans la littérature (voir [176] et les références mentionnées). Pour notre application nous nous sommes basés sur les algorithmes de type glouton, défini dans [179] par :

Définition 5.1: d'après [179] page 387

« On dit qu'un algorithme pour minimiser un critère est **glouton**, s'il construit une solution admissible en se ramenant à une suite de décisions, que l'on prend à chaque fois au mieux en fonction d'un critère local, en ne remettant jamais en question les décisions précédentes. »

Ici le principe est :

- i) initialisation : $u^0(x, y) = 0$
- ii) pour $N \in \mathbb{N}^*$, supposant connu le champ $u^{N-1}(x, y) = \sum_{n=1}^{N-1} R_n(x, y)$, déterminer un radical $R_N(x, y) = r_N(x)s_N(y)$ solution du problème suivant :

$$(r_N, s_N) = \underset{(r, s) \in V_0^x \times V_0^y}{\operatorname{arg\,min}} \mathcal{E}_N(r \otimes s), \quad (5.15)$$

avec la fonctionnelle \mathcal{E}_N , qui pour une représentation séparée de rang $N - 1$ donnée et notée u^{N-1} , est définie comme :

$$\mathcal{E}_N(r \otimes s) = \mathcal{J}(u^{N-1} + r \otimes s) \quad \forall r \in V_0^x \text{ et } s \in V_0^y, \quad (5.16)$$

iii) test d'arrêt : nous calculons la quantité suivante

$$\epsilon_{glouton} = \frac{\|r_N s_N\|_{V_0}}{\|u^N\|_{V_0}}, \quad (5.17)$$

si le critère $\epsilon_{glouton} \leq \text{Tol}$ n'est pas respecté, nous reprenons à l'étape ii) en incrémentant l'indice, sinon nous considérons la convergence atteinte et donc $N_u = N$.

Pour résoudre le problème de minimisation de l'étape ii), nous écrivons la condition de stationnarité d'Euler-Lagrange :

La (ou les) solutions $(r_N, s_N) \in V_0^x \times V_0^y$ de 5.15, vérifie la condition suivante :

$$a(u^{N-1} + r_N \otimes s_N, r_N \otimes s + r \otimes s_N) = \int_{\Omega} f(r_N \otimes s + r \otimes s_N) d\Omega, \forall r \in V_0^x, s \in V_0^y. \quad (5.18)$$

qui est équivalente aux deux équations variationnelles suivantes :

$$\begin{aligned} -m^y(s_N, s_N) a^x(r_N, r) - a^y(s_N, s_N) m^x(r_N, r) &= \int_{\mathcal{I}^y} f^y s_N dy \int_{\mathcal{I}^x} f^x r dx \\ + \sum_{n=1}^{N-1} (m^y(s_n, s_N) a^x(r_n, r) + a^y(s_n, s_N) m^x(r_n, r)), & \quad \forall r \in V_0^x \end{aligned} \quad (5.19a)$$

$$\begin{aligned} -a^x(r_N, r_N) m^y(s_N, s) - m^x(r_N, r_N) a^y(s_N, s) &= \int_{\mathcal{I}^x} f^x r_N dx \int_{\mathcal{I}^y} f^y s dy \\ + \sum_{n=1}^{N-1} (a^x(r_n, r_N) m^y(s_n, s) + m^x(r_n, r_N) a^y(s_n, s)), & \quad \forall s \in V_0^y \end{aligned} \quad (5.19b)$$

Remarque 5.1. Une solution qui satisfait la condition (5.18) est dite, dans la littérature, vérifier le critère « d'orthogonalité de Galerkin » (c'est sous cette forme que, dans les premiers papiers [95, 96], le problème de recherche du radical R_N fût formulé. Cette formulation est la plus utilisée dans la pratique).

Afin d'améliorer la convergence de l'approche gloutonne les auteurs [176] proposent qu'à chaque fois qu'un nouveau radical est obtenu, une étape de recherche d'une solution optimale du problème sur l'espace vectoriel engendré par l'ensemble des radicaux déjà calculés peut-être ajoutée. Si nous supposons déterminés les N premiers radicaux, cette étape revient à rechercher $(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$ tels que :

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \arg \min_{(\beta_1, \dots, \beta_N) \in \mathbb{R}^N} \mathcal{J} \left(\sum_{n=1}^N \beta_n r_n \otimes s_n \right). \quad (5.20)$$

puis à poser $r_n = \alpha_n r_n$, pour $n = 1, \dots, N$. Les auteurs nomment cette étape : *étape d'orthogonalisation*.

Les auteurs de [177] ont montré que la fonctionnelle \mathcal{E}_N admet bien au moins un minimum et ont établi un théorème assurant la convergence de la méthode PGD pour ce problème, moyennant des hypothèses. Pour les raisons évoquées dans cet article, déterminer un minimum local et non global vérifiant la décroissance de l'énergie ($\mathcal{E}(u_{2,n-1} + r_n \otimes s_n) < \mathcal{E}(u_{2,n-1})$) suffit pour s'assurer de la convergence, sous réserve de certaines hypothèses directement vérifiées en discret.

Les nouveaux radicaux que nous recherchons étant sous forme de produit de modes inconnus, les équations d'Euler-Lagrange (5.18) à résoudre forment un système non linéaire. Celui-ci est généralement résolu de manière itérative grâce à un algorithme de Point Fixe à Directions Alternées (ADFP). En notant p la variable d'itération, il consiste à, supposant une valeur du champ s_N donnée : s_N^{p-1} , résoudre l'équation 5.19a qui devient linéaire en utilisant la valeur s_N^{p-1} et ainsi obtenir une valeur du champ r_N : r_N^p . Ce

champ est ensuite utilisé pour linéarise l'équation 5.19b et obtenir, après résolution, une nouvelle valeur s_N^p . Ce processus est continué jusqu'à ce que la quantité suivante

$$\epsilon_{ADFP} = \frac{\|r_N^p \otimes s_N^p - r_N^{p-1} \otimes s_N^{p-1}\|_{V_0}}{\|r_N^p \otimes s_N^p\|_{V_0}} \quad (5.21)$$

vérifie le critère de convergence : $\epsilon_{ADFP} \leq \text{Tol}_{ADFP}$.

Dans le but d'améliorer la convergence de la méthode PGD, nous proposons dans la sous-section suivante une variante des algorithmes de construction de la forme séparée.

5.2.2 Idée d'amélioration

Nous étudions dans cette sous-section l'effet que l'ajout, lors du calcul d'un nouveau radical, d'un ou de plusieurs paramètres multipliant chaque radicaux déjà calculés, a sur la convergence des algorithmes de construction. Supposant les $N - 1$ premiers radicaux calculés, nous proposons de rechercher la forme séparée de rang N sous la forme, dite multi-paramétriques, suivante :

$$u^N(x, y) = \sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n r_n(x) \otimes s_n(y) + r_N(x) \otimes s_N(y) \quad (5.22)$$

avec les paramètres $\alpha_n \in \mathbb{R}$ pour $n = 1, \dots, N - 1$ inconnus. Le problème de minimisation est alors légèrement modifié :

$$(r_N, s_N) \times (\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}) = \arg \min_{\substack{(r,s) \in V_0^x \times V_0^y \\ (\beta_1, \dots, \beta_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}}} \mathcal{E} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \beta_n (r_n \otimes s_n) + r \otimes s \right), \quad (5.23)$$

et la différenciation de l'équation (5.23) donne la condition d'optimalité nécessaire mais insuffisante pour être une solution de l'équation (5.23), suivante :

Les solutions de l'équation (5.23) sont telles que :

$$a_0 \left(\sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n (r_n \otimes s_n) + r_N \otimes s_N, r \otimes s_N + r_N \otimes s \right) = l_0(r \otimes s_N + r_N \otimes s) \quad \forall (r, s) \in V_0^x \times V_0^y \quad (5.24a)$$

$$a_0 \left(\sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n (r_n \otimes s_n) + r_N \otimes s_N, v \right) = l_0(v) \quad \forall v \in \text{vect}(r_1 \otimes s_1, \dots, r_{N-1} \otimes s_{N-1}) \quad (5.24b)$$

qui est équivalente au système d'équation suivant :

$$\begin{aligned}
& -m^y(s_N, s_N) a^x(r_N, r) - a^y(s_N, s_N) m^y(r_N, r) = \int_{\Omega_y} f^y s_N dy \int_{\Omega_x} f^x r dx \\
& - \sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n (m^y(s_n, s_N) a^x(r_n, r) + a^y(s_n, s_N) m^x(r_n, r)). \quad \forall r \in V_0^x \quad (5.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -m^x(r_N, r_N) a^y(s_N, s) - a^x(r_N, r_N) m^y(s_N, s) = \int_{\Omega_x} f^x r_N dx \int_{\Omega_y} f^y s dy \\
& - \sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n (m^x(r_n, r_N) a^y(s_n, s) + a^x(r_n, r_N) m^y(s_n, s)). \quad \forall s \in V_0^y \quad (5.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n (a^x(r_n, r) m^y(s_n, s) + m^x(r_n, r) a^y(s_n, s)) = \int_{\Omega_x} f^x r dx \int_{\Omega_y} f^y s dy \\
& + a^x(r_N, r) m^y(s_N, s) + m^x(r_N, r) a^y(s_N, s) \quad \forall r \otimes s \in \text{vect}(r_1 \otimes s_1, \dots, r_{N-1} \otimes s_{N-1}) \quad (5.27)
\end{aligned}$$

Les équations d'Euler-Lagrange étant non-linéaires, nous adaptons, à nouveau, pour les résoudre l'algorithme d'ADFP. Nous n'alternons plus seulement entre r_N et s_N mais entre r_N , s_N et $\{\beta_1, \dots, \beta_{N-1}\}$. Lorsque les modes sont imposés, nous utilisons l'équation (5.27) pour mettre à jour les coefficients. Le critère de convergence utilisé est le suivant :

$$\mathbf{e}_{ADFP} = \frac{\|r_N^p \otimes s_N^p - r_N^{p-1} \otimes s_N^{p-1}\|_{V_0}}{\|r_N^p \otimes s_N^p\|_{V_0}} \leq \text{Tol}_{ADFP} \quad (5.28)$$

Aussi, lorsque le nombre de mode devient important, l'équation 5.27 aboutit à un système matriciel plein, possiblement mal conditionné et à résoudre à chaque itération de l'algorithme ADFP ce qui peut engendrer des coûts numériques importants. Nous avons alors considéré une forme plus simple, considérant un seul paramètre en facteur de l'ensemble des modes déjà calculés. Ainsi, supposant les $N - 1$ premiers radicaux calculés, nous proposons de rechercher la forme séparée de rang N sous la forme, dite mono-paramétrique, suivante :

$$u^N(x, y) = \alpha_N \sum_{n=1}^{N-1} r_n(x) \otimes s_n(y) + r_N(x) \otimes s_N(y) \quad (5.29)$$

avec le paramètre $\alpha_N \in \mathbb{R}$ inconnu. Le problème de minimisation alors devient alors plus simple :

$$(r_N, s_N) \times \alpha_N = \underset{\substack{(r,s) \in V_0^x \times V_0^y \\ \alpha_N \in \mathbb{R}}}{\arg \min} \mathcal{E}(\alpha_N(r_n \otimes s_n) + r \otimes s), \quad (5.30)$$

La condition de stationnarité d'Euler-Lagrange devient alors :

Les solutions de l'équation (5.23) sont-elles que :

$$a_0(\alpha_N \sum_{n=1}^{N-1} r_n \otimes s_n + r_N \otimes s_N, r \otimes s_N + r_N \otimes s) = l_0(r \otimes s_N + r_N \otimes s) \quad \forall (r, s) \in V_0^x \times V_0^y \quad (5.31a)$$

$$a_0(\alpha_N \sum_{n=1}^{N-1} r_n \otimes s_n + r_N \otimes s_N, \sum_{n=1}^{N-1} r_n \otimes s_n) = l_0(\sum_{n=1}^{N-1} r_n \otimes s_n) \quad (5.31b)$$

qui est équivalente au système d'équation suivant :

$$\begin{aligned}
& -m^y(s_N, s_N) a^x(r_N, r) - a^y(s_N, s_N) m^y(r_N, r) = \int_{\Omega_y} f^y s_N dy \int_{\Omega_x} f^x r dx \\
& -\alpha_N \sum_{n=1}^{N-1} (m^y(s_n, s_N) a^x(r_n, r) + a^y(s_n, s_N) m^x(r_n, r)). \quad \forall r \in V_0^x \quad (5.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -m^x(r_N, r_N) a^y(s_N, s) - a^x(r_N, r_N) m^y(s_N, s) = \int_{\Omega_x} f^x r_N dx \int_{\Omega_y} f^y s dy \\
& -\alpha_N \sum_{n=1}^{N-1} (m^x(r_n, r_N) a^y(s_n, s) + a^x(r_n, r_N) m^y(s_n, s)). \quad \forall s \in V_0^y \quad (5.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha_N \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-1} (a^x(r_n, r_m) m^y(s_n, s_m) + m^x(r_n, r_m) a^y(s_n, s_m)) = \int_{\Omega_x} f^x r_m dx \int_{\Omega_y} f^y s_m dy \\
& + a^x(r_N, r_m) m^y(s_N, s_m) + m^x(r_N, r_m) a^y(s_N, s_m) \quad (5.34)
\end{aligned}$$

et pour résoudre ce système nous utilisons à nouveau l'algorithme ADFP avec le même critère de convergence.

Nous présentons dans la sous-section suivante les résultats obtenus avec ces différents algorithmes pour la résolution du problème de Poisson.

5.2.3 Approximation et test numérique

Une première illustration numérique de la méthode PGD appliquée au problème de Poisson, posé sur le domaine Ω (cf. Figure 5.2) est donnée. Nous considérons une densité volumique $f(x, y) = f^x(x)f^y(y)$ dont les modes ont la forme analytique suivante :

$$f^x(x) = f_0 \left(\frac{|2x - L|}{L} - 1 \right) \text{ et } f^y(y) = f_0 \left(\frac{|2y - l|}{l} - 1 \right). \quad (5.35)$$

avec f_0 une constante. L'ensemble des valeurs numériques prises pour chacun des paramètres introduits est donné par le Tableau 5.3. A partir des discrétisations $\mathcal{S}_{\mathcal{I}^x}$ et $\mathcal{S}_{\mathcal{I}^y}$ des domaines \mathcal{I}^x et \mathcal{I}^y , nous construisons les deux espaces V_0^{x, h_x} et V_0^{y, h_y} , approximant les espaces V_0^x et V_0^y , tels que :

$$\mathcal{V}_0^{x, h_x} = \left\{ v \in C^0(\overline{\mathcal{I}^x}) \mid v|_K \in \mathbb{P}_1(K), \forall K \in \mathcal{S}_{\mathcal{I}^x}, \text{ et } v = 0 \text{ en } 0 \text{ et } L \right\}, \quad (5.36)$$

$$\mathcal{V}_0^{y, h_y} = \left\{ v \in C^0(\overline{\mathcal{I}^y}) \mid v|_K \in \mathbb{P}_1(K), \forall K \in \mathcal{S}_{\mathcal{I}^y}, \text{ et } v = 0 \text{ en } 0 \text{ et } l \right\}. \quad (5.37)$$

Nous notons $N^x \in \mathbb{N}^*$ et $N^y \in \mathbb{N}^*$ les nombres de degré de liberté associés à chacun des espaces. Ainsi l'espace d'approximation du champ u s'obtient par le produit tensoriel des espaces V_0^{x, h_x} et V_0^{y, h_y} : $V_0^{\otimes, h_x, h_y} = V_0^{x, h_x} \otimes V_0^{y, h_y}$ et nous pourrions rechercher ce champ directement sous la forme :

$$u^{h_x, h_y}(x, y) = \sum_{i=1}^{N^x} \sum_{j=1}^{N^y} u_{i,j}^{h_x, h_y} \phi_x^i(x) \otimes \phi_y^j(y), \quad (5.38)$$

avec ϕ_x^i et ϕ_y^j les fonctions de forme des espaces V_0^{x, h_x} et V_0^{y, h_y} associées aux noeuds i et j . Notre but étant de mettre en place la Méthode PGD, nous allons construire une représentation séparée : u^{N_ϵ, h_x, h_y} de la forme :

$$u^{N_\epsilon, h_x, h_y}(x, y) = \sum_{n=1}^{N_\epsilon} \left[\left(\sum_{i=1}^{N^x} r_n^{h_x, i} \phi_x^i(x) \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{N^y} s_n^{h_y, j} \phi_y^j(y) \right) \right], \quad (5.39)$$

et que nous écrirons sous la forme vectorielle suivante :

$$\mathbf{u}^{N_\epsilon} = \sum_{n=1}^{N_\epsilon} \mathbf{r}_n \mathbf{s}_n^T, \quad (5.40)$$

avec la matrice $\mathbf{u}^{N_\epsilon} \in \mathbb{R}^{N^y \times N^x}$ et les vecteurs $\mathbf{r}_n \in \mathbb{R}^{N^y}$ et $\mathbf{s}_n \in \mathbb{R}^{N^x}$ pour $n \in \{1, \dots, N_\epsilon\}$. Nous détaillons maintenant la forme discrète des problèmes résolus en fonction du critère choisi pour la détermination des modes.

Lorsque les modes $(\mathbf{r}_N, \mathbf{s}_N)$ sont déterminés comme solution du problème de minimisation (5.15), la fonctionnelle \mathcal{E}_N prend la forme suivante :

$$\mathcal{E}_N(\mathbf{r}_N, \mathbf{s}_N) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{K}_x \mathbf{r}_N \mathbf{s}_N^T \mathbf{M}_y + \mathbf{M}_x \mathbf{r}_N \mathbf{s}_N^T \mathbf{K}_y \right] : \mathbf{r}_N \mathbf{s}_N^T - \mathbf{F}_{N-1} : \mathbf{r}_N \mathbf{s}_N^T \quad (5.41)$$

et avec $\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_{n-1} + \mathbf{K}_x \mathbf{r}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{M}_y + \mathbf{M}_x \mathbf{r}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{K}_y$, pour $n \in \{1, \dots, N-1\}$ et $\mathbf{F}_0 = \mathbf{M}_x \mathbf{F} \mathbf{M}_y$. Les matrices \mathbf{M}_x , \mathbf{M}_y , \mathbf{K}_x , \mathbf{K}_y et \mathbf{F} appartenant toutes à $\mathbb{R}^{N^y \times N^x}$ sont données par :

$$\left[\mathbf{M}_x \right]_{i,j} = m^x(\phi_x^j, \phi_x^i), \quad \left[\mathbf{M}_y \right]_{i,j} = m^y(\phi_y^j, \phi_y^i), \quad \left[\mathbf{K}_x \right]_{i,j} = a_2^x(\phi_x^j, \phi_x^i), \quad (5.42a)$$

$$\left[\mathbf{K}_y \right]_{i,j} = a_2^y(\phi_y^j, \phi_y^i), \quad \left[\mathbf{F} \right]_{i,j} = f^{h,i,j} \quad (5.42b)$$

Pour le cas de la nouvelle forme que nous avons introduite, la fonctionnelle à minimiser est la suivante :

$$\tilde{\mathcal{E}}_N(\mathbf{r}_N, \mathbf{s}_N, \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{K}_x \mathbf{r}_N \mathbf{s}_N^T \mathbf{M}_y + \mathbf{M}_x \mathbf{r}_N \mathbf{s}_N^T \mathbf{K}_y \right] : \mathbf{r}_N \mathbf{s}_N^T - \tilde{\mathbf{F}}_{N-1} : \mathbf{r}_N \mathbf{s}_N^T \quad (5.43)$$

avec $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \dots, \beta_{N-1}]^T$ et avec $\tilde{\mathbf{F}}_n = \tilde{\mathbf{F}}_{n-1} + \beta_n \left(\mathbf{K}_x \mathbf{r}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{M}_y + \mathbf{M}_x \mathbf{r}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{K}_y \right)$ pour $n \in \{1, \dots, N-1\}$ et $\mathbf{F}_0 = \mathbf{M}_x \mathbf{F} \mathbf{M}_y$.

Afin de résoudre ce problème de minimisation, nous avons utilisé l'algorithme ADFP ainsi que la méthode détaillée dans [177]. Celle-ci consiste à déterminer un minimum local de l'énergie \mathcal{E}_N . Pour cela, nous avons directement utilisé la bibliothèque du logiciel *Matlab* appelée `fminunc` (cf. [180]) en choisissant un algorithme de type Quasi-Newton et en utilisant comme critère de convergence l'indicateur ϵ_{QN} (voir la notice [181]) défini comme :

$$\epsilon_{\text{QN}} = \frac{\max_i |(\nabla \mathcal{E}_n)_i|}{\|\nabla \mathcal{E}_n\|_\infty} \quad (5.44)$$

dont nous avons fixé la limite à 10^{-8} . Pour le champ d'initialisation, nous avons suivi la procédure proposée dans l'article [177], permettant de s'assurer de la décroissance énergétique. Nous avons utilisée cette même bibliothèque pour les variantes multi-paramétriques et mono-paramétrique que nous avons proposées.

Nous avons également recherché les modes satisfaisant les conditions d'Euler-Lagrange (5.18), les équations (5.19a) et (5.19b) prennent les formes matricielles suivantes :

$$\left[(\mathbf{M}_y \mathbf{s}_N : \mathbf{s}_N) \mathbf{K}_x + (\mathbf{K}_y \mathbf{s}_N : \mathbf{s}_N) \mathbf{K}_x \right] \mathbf{r}_N = (\mathbf{F}_{N-1})^T \mathbf{s}_N \quad (5.45a)$$

$$\left[(\mathbf{K}_x \mathbf{r}_N : \mathbf{r}_N) \mathbf{K}_y + (\mathbf{M}_x \mathbf{r}_N : \mathbf{r}_N) \mathbf{M}_y \right] \mathbf{s}_N = (\mathbf{F}_{N-1})^T \mathbf{r}_N \quad (5.45b)$$

De même, pour la nouvelle forme que nous avons introduite, le système prend la forme suivante :

$$[(\mathbf{M}_y \mathbf{s}_N : \mathbf{s}_N) \mathbf{K}_x + (\mathbf{K}_y \mathbf{s}_N : \mathbf{s}_N) \mathbf{K}_x] \mathbf{r}_N = \left(\tilde{\mathbf{F}}_{N-1} \right)^T \mathbf{s}_N \quad (5.46a)$$

$$[(\mathbf{K}_x \mathbf{r}_N : \mathbf{r}_N) \mathbf{K}_y + (\mathbf{M}_x \mathbf{r}_N : \mathbf{r}_N) \mathbf{M}_y] \mathbf{s}_N = \left(\tilde{\mathbf{F}}_{N-1} \right)^T \mathbf{r}_N \quad (5.46b)$$

Nous avons alors obtenu les modes suivant en fonction des différentes variantes.

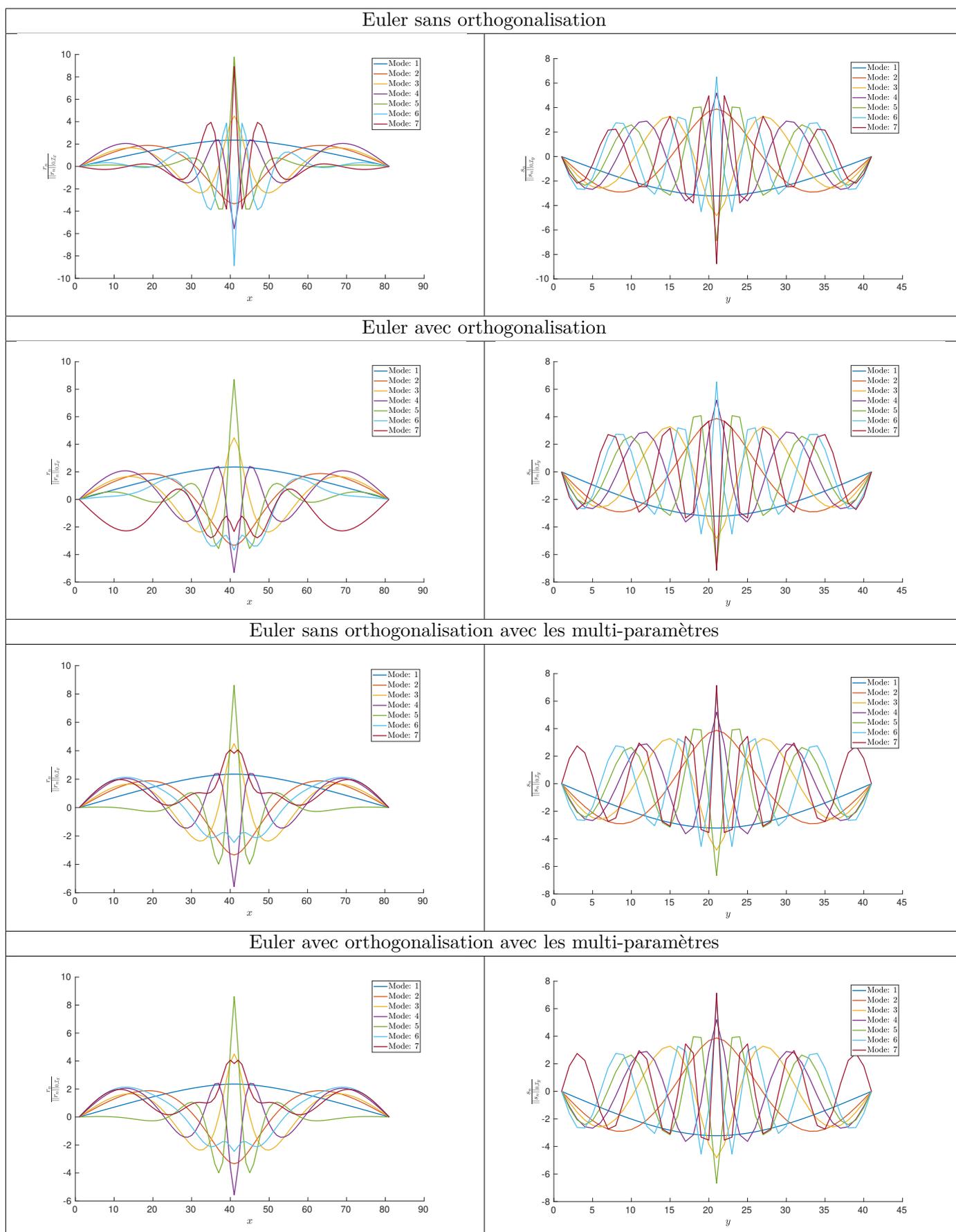


TABLE 5.1 – Modes PGD en x et y , relativisés par leur norme L^2 et obtenus par la résolution des conditions de stationnarité d’Euler-Lagrange.

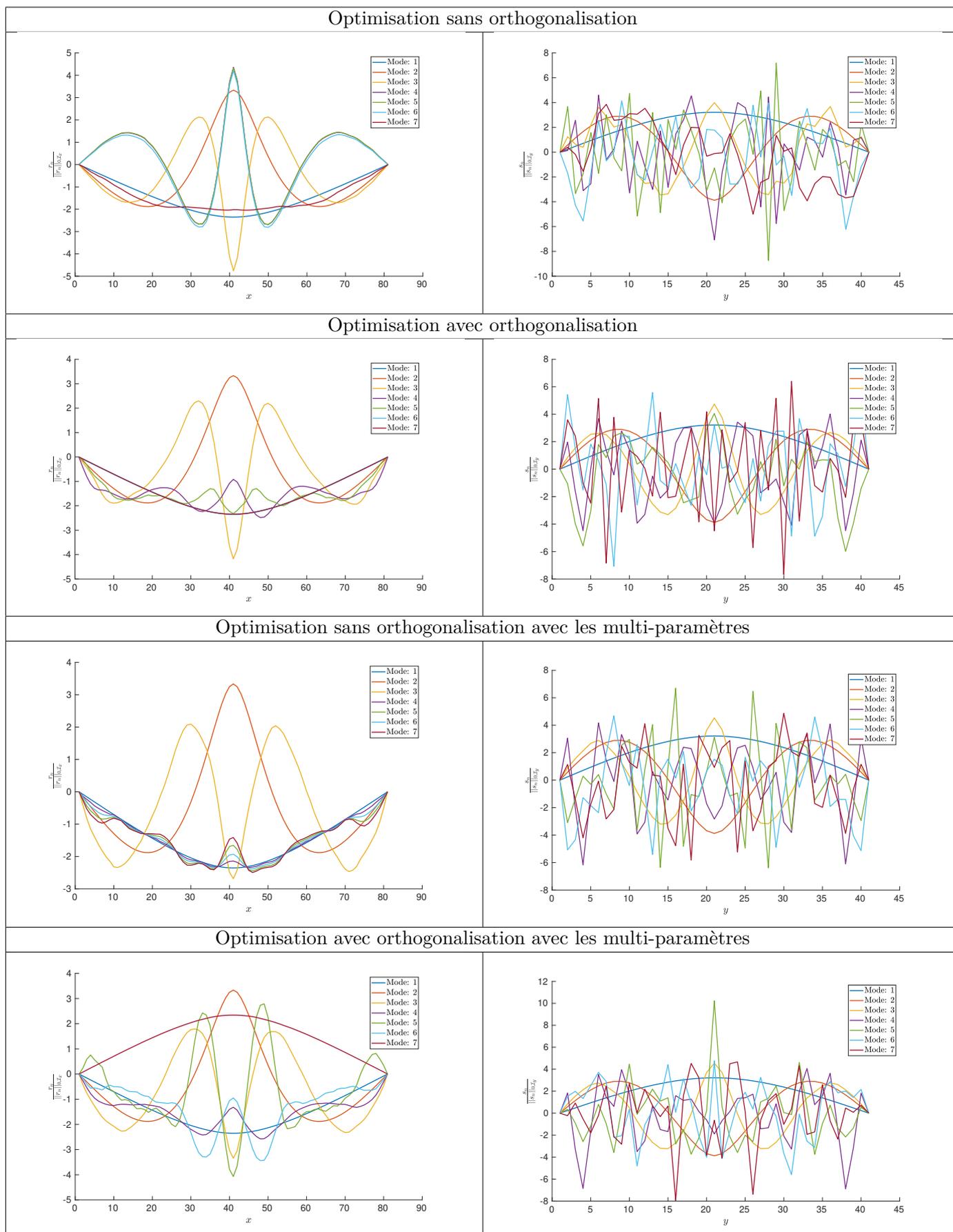
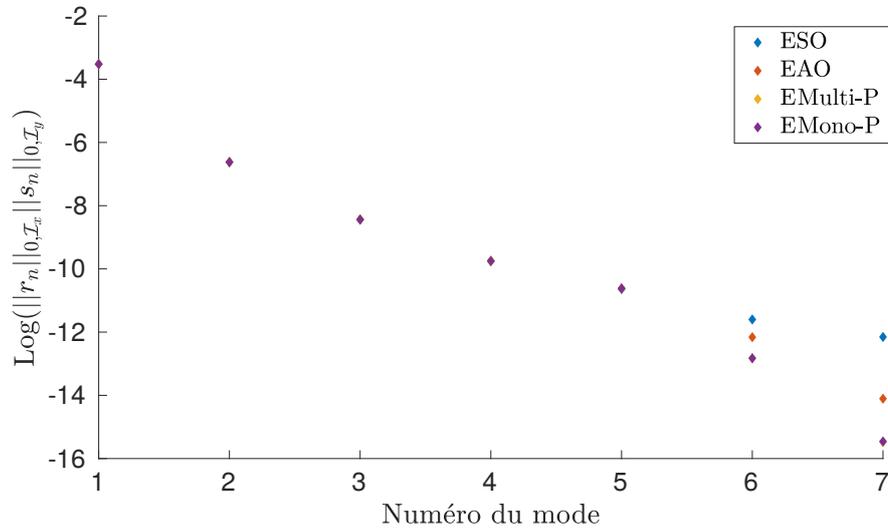
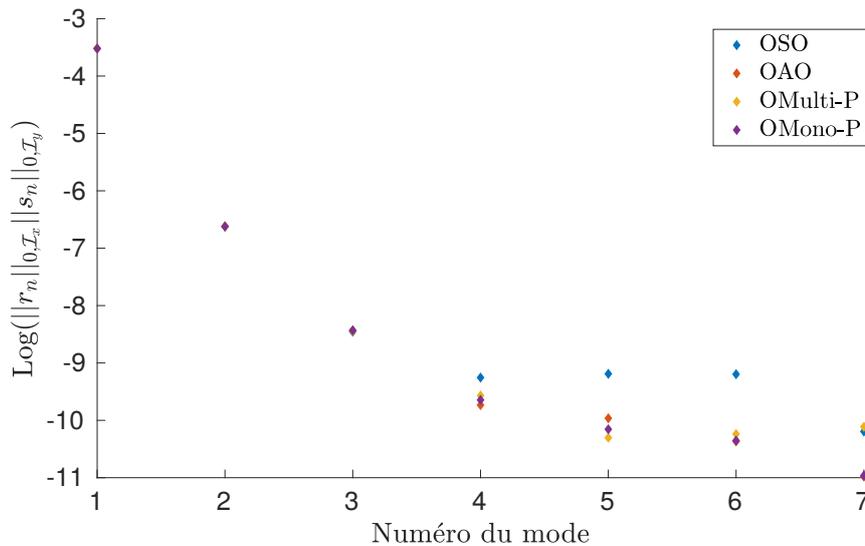


TABLE 5.2 – Modes PGD en x et y , relativisés par leur norme L^2 et obtenus par minimisation de l'énergie.

Nous complétons ces graphiques par l'évolution du logarithme de la norme des modes $\|r_n s_n\|_{0,\Omega}$.



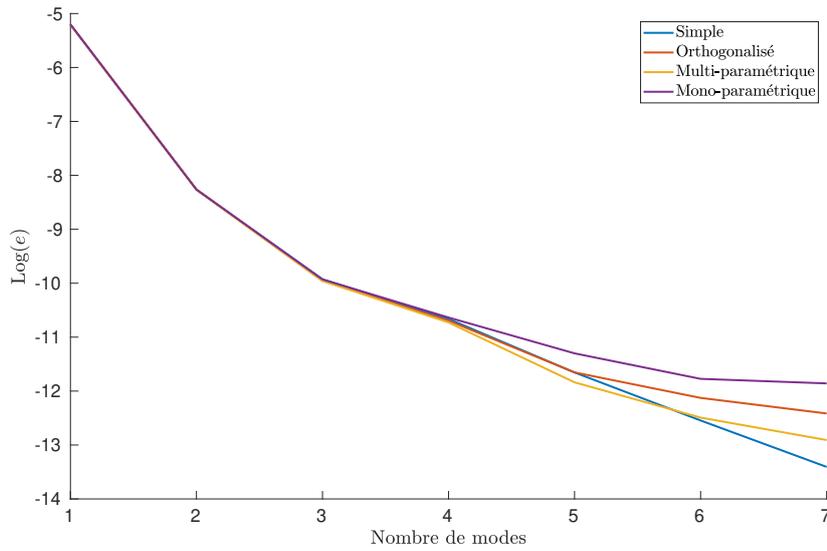
(a) Résolution de type Euler



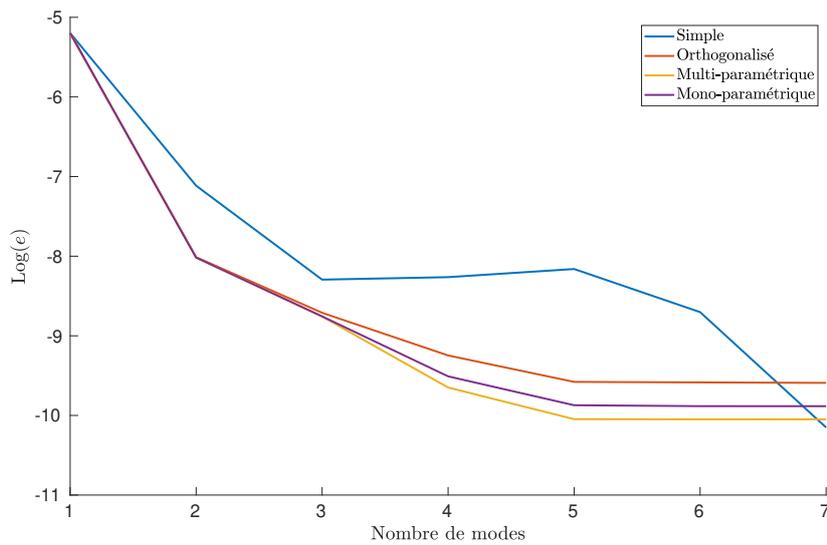
(b) Résolution de type Optimisation

FIGURE 5.3 – Evolution du logarithme de la norme des modes obtenus avec les abréviations suivantes pour les modes obtenus par résolution des conditions de stationnarité d'Euler-Lagrange **ESO** sans étape d'orthogonalisation : **EAO** avec étape d'orthogonalisation, **EMulti-P** avec la forme multi-paramétrique et **EMono-P** avec la forme mono-paramétrique et pour les modes obtenus par procédure de minimisation : **OSO** sans étape d'orthogonalisation, **OAO** avec étape d'orthogonalisation, **OMulti-P** avec la forme multi-paramétrique et **OMono-P** avec la forme mono-paramétrique.

Nous également comparé, en fonction du nombre de mode, l'évolution des erreurs relatives par rapport à une solution éléments finis classique en fonction du nombre de mode suivantes.



(a) Résolution de type Euler



(b) Résolution de type Optimisation

FIGURE 5.4 – Evolution de l'erreur relative par rapport à une solution éléments finis en fonction du nombre de membre.

Nous observons que :

- Quelque soit le critère d'obtention des radicaux, à partir du quatrième leur norme est proche de 10^{-10} ou même inférieure. Ils ont donc peu d'influence sur la solution globale.
- Après le calcul de trois radicaux avec le critère de type Euler-Lagrange, l'erreur commise par rapport à la solution éléments finis classique est proche également de 10^{-10} . Le critère de type Optimisation donne des résultats légèrement moins bons, il faut calculer un radical de plus pour atteindre une erreur de 10^{-10} .
- L'algorithme purement glouton, sans orthogonalisation ou ajout de paramètres, couplé avec le critère de type Optimisation semble être le moins efficace, il faut calculer 7 radicaux pour atteindre

une erreur de 10^{-10} .

- Dans le cas de la résolution de type Euler, l'orthogonalisation ou l'idée d'ajouter un paramètre sur les radicaux précédents n'a pas un impact important sur la norme de l'erreur commise par les quatre premiers radicaux.
- Dans le cas de la résolution de type optimisation, l'ajout des paramètres améliore l'erreur à partir du troisième radical et même par rapport à la résolution comportant une étape d'orthogonalisation. Cet avantage est cependant perdu lorsqu'à nouveau nous approchons d'une erreur relative de 10^{-10} .

A la lumière de ces résultats, nous ne pouvons véritablement conclure sur l'efficacité de l'ajout des paramètres supplémentaires.

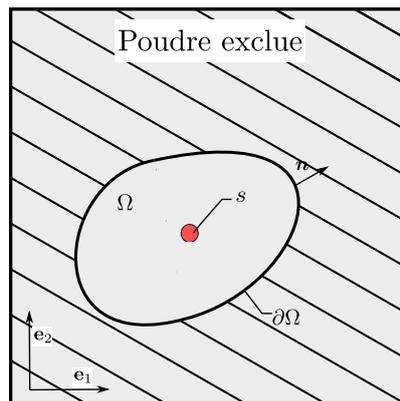
Symboles	L	l	f_0
Valeurs	0.4	0.2	1

TABLE 5.3 – Paramètres géométriques du problème de Poisson.

Maintenant que nous avons détaillé le principe de la méthode PGD pour un problème de Poisson mono-modèle et proposé une variante, nous voulons dans la section suivante, investiguer la possibilité d'introduire dans un patch suivant le laser, la méthode PGD afin de construire une représentation séparée fidèle de la solution thermique des patches.

5.3 Application au procédé SLM

Afin de nous rapprocher des modèles et simulations réalisées dans [102, 182], nous restons dans un cadre en $2D$ mais nous focalisons sur le balayage d'un domaine « continu » représentant une seule couche de poudre et la modélisons (en « vue de dessus ») comme le montre la Figure 5.5. Ainsi dans la suite nous basons sur la Formulation 1.2 écrite au Chapitre 1 du problème thermique linéaire dit simplifié, posé sur le domaine Ω et avec la condition aux limites de Robin (comme détaillée au Chapitre 1), excluant une partie de la poudre du domaine de calcul.



Bac principal de la machine de FA

FIGURE 5.5 – Vue de dessus du bac principal dont la dernière couche de poudre est balayée par le laser.

Nous commençons par rappeler la formulation faible du problème dans le cadre Arlequin comprenant un seul patch sous le laser. Le domaine Ω est décomposé en deux sous-domaines, un domaine global Ω_g et un local Ω_l (cf. Figure 5.6).

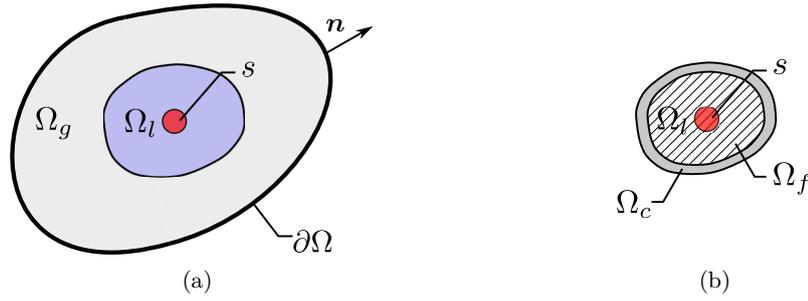


FIGURE 5.6 – Exemple d'une partition de domaine Arlequin pour le problème thermique plan.

Formulation 5.3: Formulation Arlequin faible mixte du problème thermique instationnaire

Soit $T_g(0) = T_0 \in H$ dans Ω_g , $T_l(0) = T_0$ dans Ω_l donnés, $\forall t \in I$, trouver $(T_g(t), T_l(t), \lambda(t)) \in V_g \times V_l \times M$ tel que :

$$\frac{d}{dt} m_g(T_g(t), T_g^*; \alpha_g) + a_g(T_g(t), T_g^*; \alpha_g) + c(\lambda(t), T_g^*) = 0, \quad \forall T_g^* \in V_g, \quad (5.47a)$$

$$\frac{d}{dt} m_l(T_l(t), T_l^*; \alpha_l) + a_l(T_l(t), T_l^*; \alpha_l) - c(\lambda(t), T_l^*) = l_l(T_l^*), \quad \forall T_l^* \in V_l, \quad (5.47b)$$

$$c(\mu, T_g(t) - T_l(t)) = 0, \quad \forall \mu \in M, \quad (5.47c)$$

Avec g l'indice se rapportant au domaine global et l au local et où les différents opérateurs sont donnés par :

$$m_i(T_i(t), T_i^*; \alpha_i) = \int_{\Omega_i} \alpha_i \rho c_p T_i(t) T_i^* d\Omega, \quad i = g, l, \quad (5.48a)$$

$$a_l(T_l(t), T_l^*; \alpha_l) = \int_{\Omega_l} \alpha_l k (\nabla T_l(t) \cdot \nabla T_l^*) d\Omega, \quad (5.48b)$$

$$a_g(T_g(t), T_g^*; \alpha_g) = \int_{\Omega_g} \alpha_g k (\nabla T_g(t) \cdot \nabla T_g^*) d\Omega + \int_{\partial\Omega_g} \frac{k_p}{S_p} (T_g(t) - T_{ext}) T_g^* d\Sigma, \quad (5.48c)$$

$$l_l(T_l^*) = \int_{\Omega_l} s(t) T_l^* d\Omega, \quad (5.48d)$$

$$c(\lambda(t), T) = \int_{\Omega_c} \kappa \left(\frac{1}{e^2} \lambda(t) T + \nabla \lambda(t) \cdot \nabla T \right) d\Omega, \quad (5.48e)$$

avec $H = L^2(\Omega)$, $V_i = H^1(\Omega_i)$ pour $i = g, l$, $M = H^1(\Omega_c)$ et $c(\cdot, \cdot)$, l'opérateur de couplage qui est le même que précédemment. Sans perte de généralité et pour simplifier, dans les développements numériques suivants, nous avons considéré une condition d'adiabaticité sur la frontière $\partial\Omega_g$, simplifiant ainsi la définition de la forme a_g à :

$$a_g(T_g(t), T_g^*; \alpha_g) = \int_{\Omega_g} \alpha_g k (\nabla T_g(t) \cdot \nabla T_g^*) d\Omega. \quad (5.49)$$

Pour décrire la stratégie que nous avons développée afin de localiser l'utilisation de la méthode PGD dans le patch, nous procédons par étape, passant du plus simple au plus compliqué. De manière plus précise nous résolvons des problèmes thermiques instationnaires et linéaires avec :

- Une source immobile, une formulation faible en espace et un schéma de type différences finies en temps pour les domaines global et local.

- Une source immobile, une formulation faible en espace et un schéma de type différences finies en temps pour le domaine global, d'un coté, une formulation faible en espace et en temps pour le domaine local, de l'autre.
- Une source mobile, une formulation faible en espace et un schéma de type différences finies en temps pour le domaine global, d'un coté, une formulation faible en espace et en temps pour le domaine local, de l'autre.
- Une source mobile, une formulation faible en espace et un schéma de type différences finies en temps pour le domaine global, d'un coté, une formulation de type PGD décomposée en espace et en temps pour le domaine local, de l'autre.

5.3.1 Problème thermique avec une source immobile

Pour résoudre numériquement le problème thermique écrit dans le cadre Arlequin nous commençons par introduire un schéma de type différences finies, une discrétisation spatiale de type éléments finis et un algorithme de type gradient appliqué à la variable duale.

Stratégie numérique de résolution

Comme au Chapitre 2, nous introduisons une partition de l'intervalle $I =]0, \tau]$ telle que : $t_0 (= 0) < t_1 < \dots < t_j < \dots < t_J (= \tau)$, avec un pas de temps $\delta t > 0$ constant ($t_{j+1} - t_j = \delta t$ pour $j = 0, \dots, J-1$). Nous notons à l'instant t_j T_g^j , T_l^j et λ^j les approximations des champs T_g , T_l et λ . Nous utilisons pour approcher la dérivée temporelle des champs thermiques un schéma de type Euler implicite. Le problème discret en temps donne donc :

Etant donnés $T_g^0 = T_0$ dans Ω_g , $T_l^0 = T_0$ dans Ω_l , $\forall j \in \{1, \dots, J\}$ trouver $(T_g^j, T_l^j, \lambda^j) \in V_g \times V_l \times M$ tels que :

$$\mathcal{K}_g(T_g^j, T_g^*; \alpha_g) + c(\lambda^j, T_g^*) = \frac{1}{\delta t} m_g(T_g^{j-1}, T_g^*; \alpha_g), \quad \forall T_g^* \in V_g, \quad (5.50a)$$

$$\mathcal{K}_l(T_l^j, T_l^*; \alpha_l) - c(\lambda^j, T_l^*) = l_l(T_l^*) + \frac{1}{\delta t} m_l(T_l^{j-1}, T_l^*; \alpha_l), \quad \forall T_l^* \in V_l, \quad (5.50b)$$

$$c(\mu, T_g^j - T_l^j) = 0, \quad \forall \mu \in M. \quad (5.50c)$$

avec :

$$\mathcal{K}_g(T_g^j, T_g^*; \alpha_g) = \frac{1}{\delta t} m_g(T_g^j, T_g^*; \alpha_g) + a_g(T_g^j, T_g^*; \alpha_g) \quad (5.51a)$$

$$\mathcal{K}_l(T_l^j, T_l^*; \alpha_l) = \frac{1}{\delta t} m_l(T_l^j, T_l^*; \alpha_l) + a_l(T_l^j, T_l^*; \alpha_l) \quad (5.51b)$$

Nous avons donc une collection de problèmes indexés sur le pas de temps considéré, tous bien posés d'après la théorie de Brezzi et équivalents à un problème de point-selle du Lagrangien suivant, défini sur l'espace $\mathbf{V} = V_g \times V_l \times M$:

$$\mathcal{L}^j(T_g^*, T_l^*, \mu) = \mathcal{J}_g^j(T_g^*) + \mathcal{J}_l^j(T_l^*) - c(\mu, T_g^* - T_l^*), \quad (5.52)$$

où les énergies dont le problème local et global dérivent, sont définies à chaque pas de temps par :

$$\mathcal{J}_g^j(T_g^*) = \frac{1}{2} \mathcal{K}_g(T_g^*, T_g^*; \alpha_g) + \frac{1}{\delta t} m_g(T_g^{j-1}, T_g^*; \alpha_g), \quad (5.53a)$$

$$\mathcal{J}_l^j(T_l^*) = \frac{1}{2} \mathcal{K}_l(T_l^*, T_l^*; \alpha_l) - l_l(T_l^*) + \frac{1}{\delta t} m_l(T_l^{j-1}, T_l^*; \alpha_l). \quad (5.53b)$$

Le problème (5.50) est équivalent à trouver

$$\left(T_g^j, T_l^j, \lambda^j\right) = \arg \inf_{(T_g^*, T_l^*) \in V_g \times V_l} \sup_{\mu \in M} \mathcal{L}^j(T_g^*, T_l^*, \mu), \quad (5.54)$$

et l'équation d'Euler-Lagrange exprimant la stationnarité du Lagrangien :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_g^*}(T_g^j, T_l^j, \lambda^j), T_g^* \right\rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} = 0, \quad \forall T_g \in V_g, \quad (5.55a)$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_l^*}(T_g^j, T_l^j, \lambda^j), T_l^* \right\rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} = 0, \quad \forall T_l \in V_l, \quad (5.55b)$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(T_g^j, T_l^j, \lambda^j), \mu \right\rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} = 0, \quad \forall \mu \in M. \quad (5.55c)$$

qui redonne les équations (5.50a), (5.50b) et (5.50c).

Nous appliquons un algorithme de type gradient au champ dual (multiplicateur de Lagrange) qui prend la forme suivante à l'itération $p + 1$:

$$\lambda^{j,p+1} = \lambda^{j,p} + \beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(T_g^{j,p}, T_l^{j,p}, \lambda^{j,p}) \quad (5.56)$$

avec le gradient du Lagrangien par rapport à μ est donné par :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(T_g^j, T_l^j, \lambda^j), \mu \right\rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} = c(\mu, T_g^j - T_l^j), \quad \forall \mu \in M. \quad (5.57)$$

et où $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ est le pas de l'algorithme du gradient sur μ et le critère de convergence étant, à l'itération $p + 1$:

$$\epsilon_\lambda = \sum_{j=1}^J \epsilon_\lambda^{j,p+1} \quad \text{avec} \quad \epsilon_\lambda^{j,p+1} = \frac{\|\lambda^{j,p+1} - \lambda^{j,p}\|_M}{\|\lambda^{j,p}\|_M} \quad (5.58)$$

Cet algorithme permet à chaque itération p le découplage de la résolution de problème global et local et ainsi permettra l'introduction future de la réduction de modèle local. L'algorithme est récapitulé ici :

Algorithm 3 Algorithme de résolution

Initialisation: $\lambda^{j,0} = 0$ pour $j = 1, \dots, J$ et β .

Sortie: $(T_g^j, T_l^j, \lambda^j)$ for $j = 1, \dots, J$.

tant que $\epsilon_\lambda > \text{tolerance}$ **faire**

$\forall j = 1, \dots, J$, étant donné $\lambda^{j,p}$ résoudre (5.50a) et (5.50b) : $(T_g^{j,p}, T_l^{j,p})$.

Mise à jour de λ^j avec l'équation (5.56), $\forall j \in \{1, \dots, J\}$.

Vérification de la convergence : $\epsilon_\lambda \leq \text{Tol}_\lambda$, si elle n'est pas atteinte nous incrémentons $p = p + 1$.

fin tant que

L'algorithme commence par imposer un multiplicateur de Lagrange nul, nous obtenons alors la solution libre de chaque domaine. Pour tous les exemples suivants, la tolérance est imposé comme $\text{Tol}_\lambda = 10^{-10}$.

Afin de résoudre numériquement le problème, les champs thermiques (T_g, T_l) et le multiplicateur de Lagrange λ sont discrétisés spatialement au moyen de la MEF. Pour se faire les espaces éléments finis

$V_i^{h_i}$ ($i = g, l$) et M^h approximant les espaces V_i ($i = g, l$) et M , construits à partir des triangulations $\mathcal{T}_{\Omega_g}^{h_g}$ et $\mathcal{T}_{\Omega_l}^{h_l}$, sont introduits tels que :

$$V_i^{h_i} = \left\{ T_i^{h_i,*} \in C^0(\bar{\Omega}_i) \mid T_i^{h_i,*}|_K \in \mathbb{P}_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_{\Omega_i}^{h_i} \right\}, \quad \text{pour } i = g, l. \quad (5.59)$$

où $\mathbb{P}_1(K)$ est l'ensemble des polynômes de degré 1 définis sur l'élément K . A nouveau le multiplicateur de Lagrange peut-être considéré soit dans l'espace local ou global : $M^{h_\lambda} = V_l^{h_l}|_{\Omega_c}$ ou $M^{h_\lambda} = V_g^{h_g}|_{\Omega_c}$. Ensuite, à chaque pas de temps, les champs thermiques discrets $(T_g^{h_g,j}, T_l^{h_l,j})$ et le multiplicateur de Lagrange $\lambda^{h_\lambda,j}$ approximant $(T_g^j, T_l^j, \lambda^j)$ sont recherchés sous la forme donnée par l'équation (5.60).

$$T_i^{h_g,j}(x) = \sum_{n=1}^{N_i} T_i^{h_i,j,n} \psi_i^n(x) \quad \text{for } i = l, g; \quad \lambda^{h_\lambda,j}(x) = \sum_{n=1}^{N_\lambda} \lambda^{h_\lambda,j,n} \psi_\lambda^n(x) \quad \text{for } j = 1, \dots, J \quad (5.60)$$

où $\psi_i^n(x)$ étant les fonctions de formes.

Dans la suite, pour simplifier les notations, l'indice h relatif à la discrétisation spatiale est omis. A chaque pas de temps, les formes discrètes des équations (5.50a), (5.50b) et (5.56) sont :

$$\mathbf{K}_{g,x} \mathbf{T}_g^{j,p} + \mathbf{C}_{g,x}^T \boldsymbol{\lambda}^{j,p} = \frac{1}{\delta t} \mathbf{M}_{g,x} \mathbf{T}_g^{j-1,p} \quad (5.61a)$$

$$\mathbf{K}_{l,x} \mathbf{T}_l^{j,p} - \mathbf{C}_{l,x}^T \boldsymbol{\lambda}^{j,p} = \frac{1}{\delta t} \mathbf{M}_{l,x} \mathbf{T}_l^{j-1,p} + \mathbf{l}_l \quad (5.61b)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{j,p+1} = \boldsymbol{\lambda}^{j,p} - \beta \left(\mathbf{C}_{g,x} \mathbf{T}_g^{j,p} - \mathbf{C}_{l,x} \mathbf{T}_l^{j,p} \right) \quad (5.61c)$$

avec :

$$\mathbf{K}_{i,x} = \frac{1}{\delta t} \mathbf{M}_{i,x} + \mathbf{A}_{i,x} \quad \text{for } i = g, l \quad (5.62)$$

où les vecteurs et matrices $\mathbf{T}_i^j \in M_{N_i,1}(\mathbb{R})$, $\mathbf{M}_{i,x}$ et $\mathbf{A}_{i,x} \in M_{N_i}(\mathbb{R})$, $\mathbf{C}_{i,x} \in M_{N_\lambda, N_i}(\mathbb{R})$ pour $i = l, g$ et $\mathbf{l}_l \in M_{N_l,1}(\mathbb{R})$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{T}_i^j \right]_\gamma &= T_i^{j,\gamma}, & \left[\mathbf{M}_{i,x} \right]_{\gamma\delta} &= m_i(\psi_i^\gamma, \psi_i^\delta; \alpha_i), & \left[\mathbf{A}_{i,x} \right]_{\gamma\delta} &= a_i(\psi_i^\gamma, \psi_i^\delta; \alpha_i) \\ \left[\mathbf{C}_{i,x} \right]_{\gamma\delta} &= c(\psi_\lambda^\gamma, \psi_i^\delta), & \left[\mathbf{l}_l \right]_\gamma &= l_l(\psi_i^\gamma) \end{aligned} \quad (5.63)$$

Pour les implémentations réalisées, nous n'utilisons pas exactement l'équation (5.56), en effet, connaissant les défauts de convergence de l'algorithme de gradient, nous avons préconditionné l'équation (5.61c). Nous avons alors considéré différents préconditionneurs définis par :

$$\mathbf{P}_1 = (\mathbf{S}_{d,x})^{-1}, \quad \mathbf{P}_2 = (\mathbf{C}_{\lambda,x})^{-1}, \quad \mathbf{P}_3 = (\text{diag}(\mathbf{C}_{\lambda,x}))^{-1}. \quad (5.64)$$

où $\mathbf{S}_{d,x}$ est le complément de Schur dual donné par :

$$\mathbf{S}_{d,x} = \mathbf{C}_{g,x} \mathbf{K}_{g,x}^{-1} \mathbf{C}_{g,x}^T + \mathbf{C}_{l,x} \mathbf{K}_{l,x}^{-1} \mathbf{C}_{l,x}^T \quad (5.65)$$

comme nous l'avons vu au Chapitre 3 les matrices $\mathbf{K}_{i,x}$ sont non-singulières. La matrice $\mathbf{C}_{\lambda,x}$ est définie par :

$$\left[\mathbf{C}_{\lambda,x} \right]_{\gamma\delta} = c(\psi_\omega^{\mathcal{E}(\gamma)}, \psi_\omega^{\mathcal{E}(\delta)}) \quad (5.66)$$

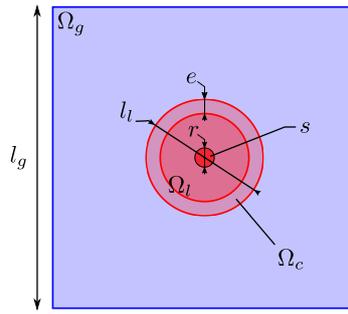


FIGURE 5.7 – Un premier problème simple.

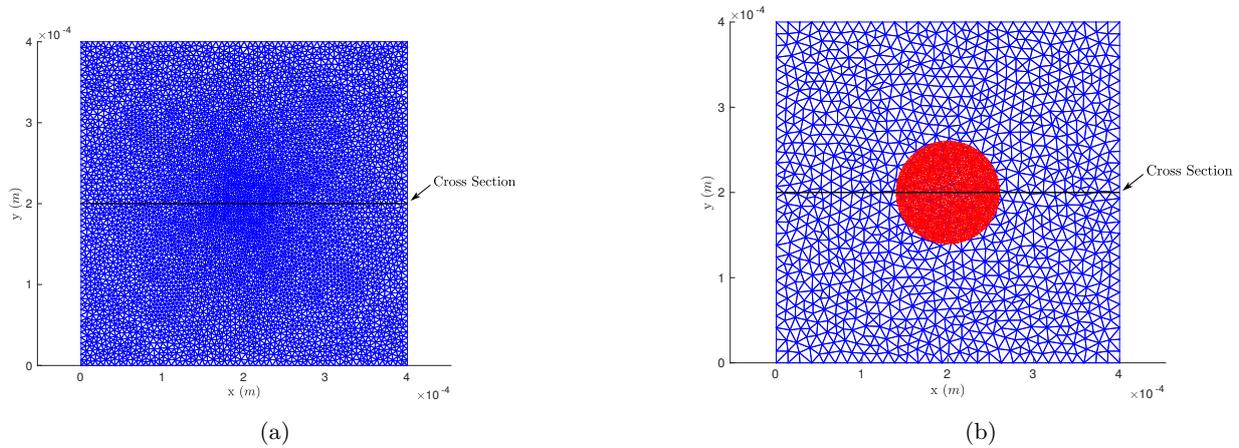


FIGURE 5.8 – Le maillage du mono-modèle en (a) et les maillages du problème Arlequin en (b).

Application numérique

Nous considérons un domaine global de forme rectangulaire et un domaine local de forme circulaire, (cf. Figure 5.7). Les paramètres géométriques et physiques du problème sont rassemblés dans le Tableau 5.4. Les maillages utilisés pour la simulation d'un problème fin mono-modèle servant de solution de référence et du problème Arlequin sont illustrés par la Figure 5.8b. L'évolution des champs thermiques dans la section du domaine est donnée à la Figure 5.9 et le taux de convergence de l'algorithme est présenté à la Figure 5.10.

Nous observons qu'avec l'utilisation du préconditionneur \mathbf{P}_1 l'Algorithme 3 converge en dix itérations et que les champs thermiques coïncident bien avec celui de la solution de référence. Lorsque les autres préconditionneurs sont utilisés, l'Algorithme 3 a plus de mal à converger et nécessite plus de cents itérations. Nous choisirons donc toujours dans la suite le préconditionneur \mathbf{P}_1 .

Géométrique	Symboles	Valeurs	Physique	Symboles	Valeurs
Largeur domaine global	l_g (m)	400×10^{-3}	Densité	ρ (kg/m^3)	4300
Diamètre domaine local	l_l (m)	100×10^{-3}	Capacité thermique	c_p ($J/kg \cdot K$)	500
Rayon support source	r (m)	0.1×10^{-3}	Conductivité	k ($W/m \cdot K$)	20
Epaisseur zone de couplage	e (m)	5×10^{-3}	Source volumique chaleur	f (W/m^3)	10^{14}
			Période	τ (s)	10^{-3}
			Pas de temps	δt (s)	10^{-4}

TABLE 5.4 – Paramètres géométriques et physiques du problème.

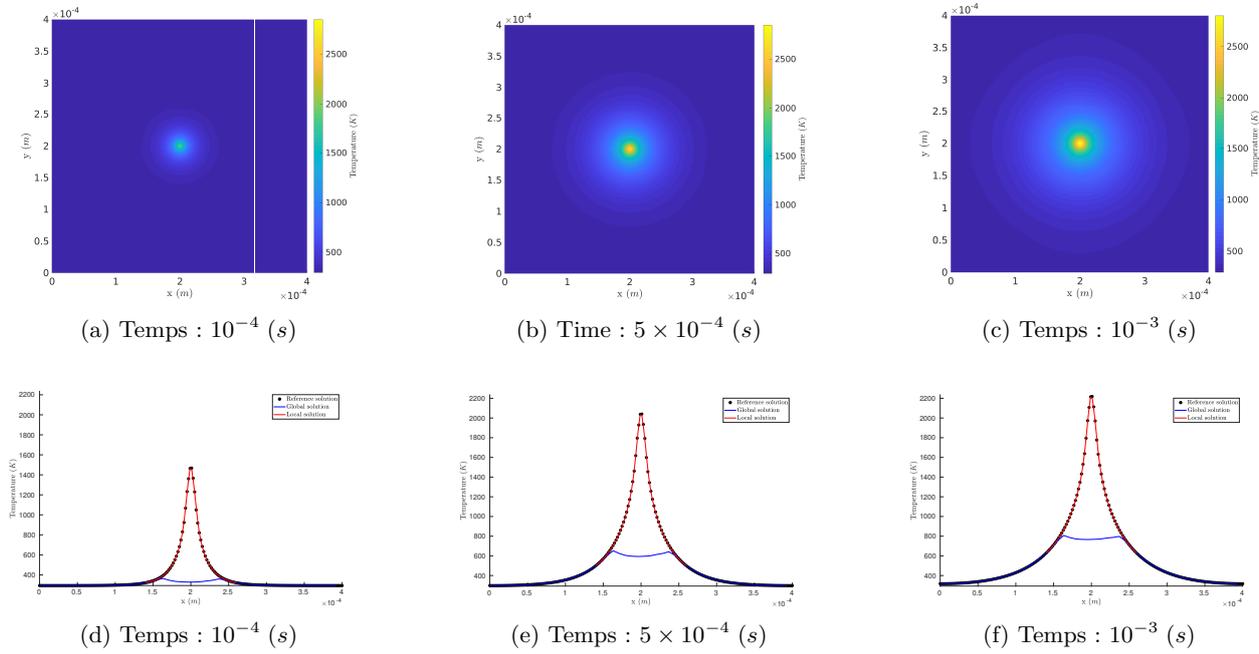


FIGURE 5.9 – Evolution du champ thermique en (a), (b) et (c) et dans la section en (d), (e) et (f).

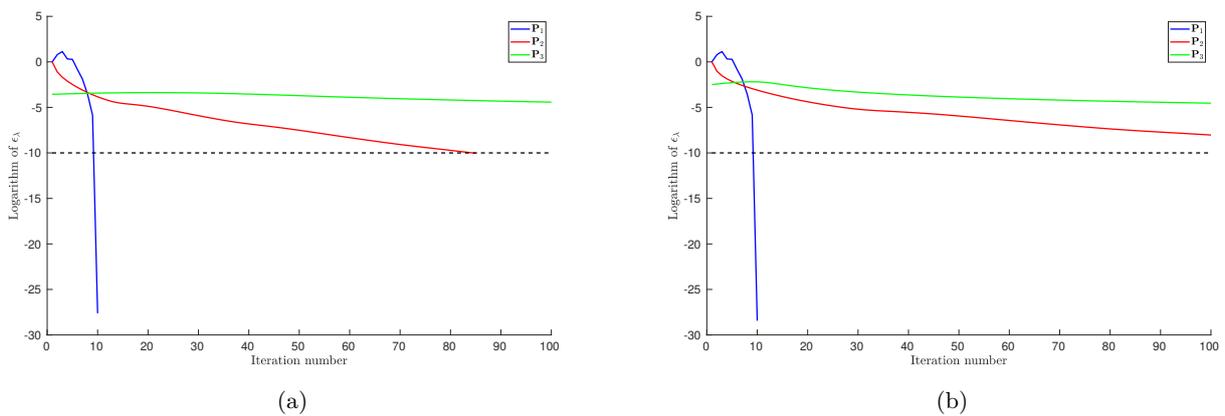


FIGURE 5.10 – Convergence du premier exemple avec en (a) $\omega = l$ et en (b) $\omega = g$.

Couplage d'un modèle discret et d'un modèle continu en temps

Cette partie a pour objectif le couplage d'un problème thermique global discret en temps et d'un problème thermique local continu en temps. Dans un premier temps, nous reprenons le problème thermique mono-modèle illustré à la Figure 5.5 et donnons sa formulation faible en espace-temps comme réalisé dans [183]. Nous introduisons l'espace fonctionnel :

$$L^2(I; V) = \left\{ T^* : I \rightarrow V; \int_I \|T^*(t)\|_{1,\Omega}^2 dt < \infty \right\} \quad (5.67)$$

Nous introduisons également l'espace $L = L^2(I)$ et notons $(\cdot, \cdot)_{0,I}$ son produit scalaire, nous identifions l'espace $L^2(I; V)$ à l'espace produit tensoriel $W = V \otimes L$. La formulation faible du problème thermique devient alors :

Etant donné $T_0 \in L^2(\Omega)$, trouver $T \in W$ tel que, $\frac{\partial T}{\partial t}(t) \in L^2(I; V')$ et pour tout $T^* \in W$

$$\mathcal{H}(T, T^*) = \mathcal{G}(T^*) \quad \forall T^* \in W \quad (5.68)$$

où les différents opérateurs sont définis par :

$$\mathcal{H}(T, T^*) = \int_I \left[m \left(\frac{\partial T}{\partial t}(t), T^*(t) \right) + a(T(t), T^*(t)) \right] dt + m(T(0^+), T^*(0^+)) \quad (5.69a)$$

$$\mathcal{G}(T^*) = \int_I l(T^*(t)) dt + m(T_0, T^*(0^+)) \quad (5.69b)$$

Sans perte de généralité, nous conservons le schéma d'Euler implicite comme utilisé précédemment pour le domaine global, sur la collection J_g d'instantants : $t_0 (= 0)$, $t_1, \dots, t_j, \dots, t_{J_g} (= \tau)$, celui-ci peut-être vu comme une collection de problème spatiaux couplés définis à chaque temps discrets t_j . Pour coupler ce modèle à un modèle continu, l'idée principale (inspirée de ce qui est réalisé dans [118] où un modèle continu en espace est couplé avec un modèle atomistique discret) est d'imposer au champs thermiques T_g et T_l d'être égaux en terme d'une certaine « norme », dans la zone de recouvrement spatio-temporelle définie comme $I \times \Omega_c$. La première étape est de convertir la collection de champs discrets en temps $\{T_g^j\}_1^{J_g}$ en un champ continu en temps pour qu'il puisse être comparé à T_l . Pour ce faire, quand bien même d'autres schémas d'interpolation peuvent être envisagés, nous avons considéré exclusivement un opérateur d'interpolation linéaire $\Pi : V_g \otimes M_{J_g,1}(\mathbb{R}) \rightarrow V_l \otimes L$. L'opérateur de couplage spatio-temporel s'écrit alors :

$$C(\lambda, T) = \int_I c(\lambda(t), T(t)) dt \quad (5.70)$$

où λ le multiplicateur de Lagrange est recherché dans l'espace médiateur $M = H^1(\Omega_c) \otimes L$. Le problème couplé dans le cadre Arlequin est finalement donné par :

Etant donné $T_g^0 = T_0 \in L^2(\Omega)$ dans Ω_g , trouver $(\{T_g^j\}_1^{J_g}, T_l, \lambda) \in (V_g \otimes M_{J_g,1}(\mathbb{R})) \times W_l \times M$ tels que :

pour $j = 1, \dots, J_g$:

$$\frac{1}{\delta t} m_g(T_g^j, T_g^*; \alpha_g) + a_g(T_g^j, T_g^*; \alpha_g) + c(\lambda(t_j), T_g^*) = \frac{1}{\delta t} m_g(T_g^{j-1}, T_g^*; \alpha_g) \quad \forall T_g^* \in V_g \quad (5.71a)$$

et

$$\mathcal{H}_l(T_l, T_l^*; \alpha_l) - C(\lambda, T_l^*) = \mathcal{G}_l(T_l^*) \quad \forall T_l^* \in W_l \quad (5.71b)$$

$$C(\mu, \Pi \{T_g^j\}_1^{J_g} - T_l) = 0 \quad \forall \mu \in M \quad (5.71c)$$

avec l'espace $W_l = V_l \otimes L$ et dont les nouveaux opérateurs sont donnés par :

$$\mathcal{H}_l(T_l, T_l^*; \alpha_g) = \int_I \left[m_l \left(\frac{\partial T_l}{\partial t}(t), T_l^*(t); \alpha_l \right) + a_l(T_l(t), T_l^*(t); \alpha_l) \right] dt + m_l(T_l(0^+), T_l^*(0^+)) \quad (5.72a)$$

$$\mathcal{G}_l(T_l^*) = \int_I l_l(T_l^*(t)) dt + m_l(T_0, T_l^*(0^+)) \quad (5.72b)$$

Par cette écriture, l'algorithme introduit plus tôt perd sa possible analogie avec l'algorithme de gradient. Nous l'utilisons tout de même dans la suite.

Application numérique

Nous reprenons le même problème (Figure 5.7) que précédemment ainsi que les mêmes discrétisations spatiales. Les espaces V_i ($i = g, l$) sont approximés par les mêmes sous espaces $V_i^{h_i}$ ($i = g, l$), construits précédemment. A partir d'un maillage temporel pour le problème local défini comme :

$$\mathcal{T}_I^{k_l} = \{I_j = [t_{j-1}, t_j] \mid j = 1, \dots, J_l - 1\} \quad (5.73)$$

Nous construisons l'espace standard des fonctions affines par morceau noté L^{J_l} :

$$L^{k_l} = \left\{ \theta \in \mathcal{C}^0(\bar{I}) ; \forall K \in \mathcal{T}_I, \theta|_K \in P_K \right\} \quad (5.74)$$

Le champ thermique local est alors recherché dans l'espace éléments finis $W^{h_l, k_l} = V_l^{h_l} \otimes L^{k_l}$ sous la forme :

$$T_l^{h_l, k_l}(x, t) = \sum_{j=1}^{J_l} \sum_{n=1}^{N_l} T_l^{j, n} \phi_l^j(t) \psi_l^n(x) \quad (5.75)$$

$\phi_l^n(t)$ étant les fonctions de forme temporelles.

Pour le sous-espace éléments finis de l'espace médiateur, à nouveau, deux choix sont possibles :

- modèle global comme espace médiateur : un maillage temporel $\mathcal{T}_I^{k_g}$ est construit, dont chaque nœud coïncide avec les points du schéma différences finies utilisé pour le modèle global, cf. Figure 5.11. Ensuite, l'espace standard des fonctions affines par morceaux défini sur $\mathcal{T}_I^{k_g}$ est noté L^{k_g} . Finalement, nous avons $M^{h_\lambda, k_\lambda} = V_g^{h_g}|_{\Omega_c} \otimes L^{k_g}$.
- modèle local comme espace médiateur : ici le multiplicateur de Lagrange évolue dans l'espace fonctionnel local, nous avons donc $M^{h_\lambda, k_\lambda} = V_l^{h_l}|_{\Omega_c} \otimes L^{k_l}$.

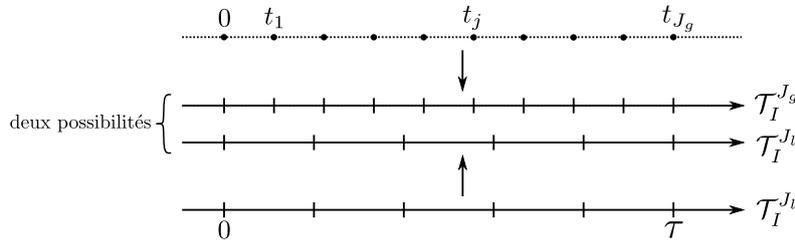


FIGURE 5.11 – Deux constructions possibles pour le maillage spatio-temporel de l'espace médiateur.

Le multiplicateur de Lagrange est alors recherché sous la forme suivante :

$$\lambda(x, t) = \sum_{j=1}^{J_\lambda} \sum_{n=1}^{N_\lambda} \lambda^{j, n} \phi^j(t) \psi_\lambda^{\mathcal{E}(n)}(x) \quad (5.76)$$

Dans la suite seulement des maillages temporels compatibles entre le modèle local et global sont utilisés (i.e. $J_l = J_g = J_\lambda = J$). Le problème totalement discrétisé, à l'itération p de l'algorithme de résolution, s'écrit :

$$\mathbf{K}_{g,x} \mathbf{T}_g^{j,p} + \mathbf{C}_{g,x}^T \boldsymbol{\lambda}^{j,p} = \frac{1}{\delta t} \mathbf{M}_{g,x} \mathbf{T}_g^{j-1,p} \quad \text{for } j = 1, \dots, J \quad (5.77a)$$

$$\mathbf{H}_l \text{Vect}(\mathbf{T}_l^p) - \mathbf{C}_l^T \text{Vect}(\boldsymbol{\lambda}^p) = \mathbf{G}_l \quad (5.77b)$$

où les différentes matrices sont définies par :

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{B}_t \otimes \mathbf{M}_{i,x} + \mathbf{M}_t \otimes \mathbf{A}_{i,x} \text{ pour } i = g, l; \quad \mathbf{G}_l = \mathbf{M}_t \otimes \mathbf{l}_l \text{ et } \mathbf{C}_l = \mathbf{M}_t \otimes \mathbf{C}_{i,x} \text{ pour } i = g, l. \quad (5.78)$$

$\mathbf{T}_l \in M_{N_l, J}(\mathbb{R})$ et $\boldsymbol{\lambda} \in M_{N_\lambda, J}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{\lambda}^j \in M_{N_\lambda, 1}(\mathbb{R})$ (pour $j = 1, \dots, J$), \mathbf{M}_t et $\mathbf{B}_t \in M_J(\mathbb{R})$, $\mathbf{H}_l \in M_{(J \times N_l)}(\mathbb{R})$, $\mathbf{G}_l \in M_{(J \times N_l), 1}(\mathbb{R})$, et $\mathbf{C}_l \in M_{(J \times N_l), (J \times N_\lambda)}(\mathbb{R})$, $\mathbf{C}_g \in M_{(J \times N_g), (J \times N_\lambda)}(\mathbb{R})$ donnés par :

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}_l]_{\gamma, \delta} &= T_l^{\gamma, \delta}, \quad [\boldsymbol{\lambda}]_{\gamma, \delta} = \lambda^{\gamma, \delta}, \quad [\boldsymbol{\lambda}^j]_{\gamma} = \lambda^{\gamma, j} \\ [\mathbf{B}_t]_{\gamma, \delta} &= \langle \phi^\gamma, (\phi^\delta)' \rangle_{L^2(I)}, \quad [\mathbf{M}_t]_{\gamma, \delta} = \langle \phi^\gamma, \phi^\delta \rangle_{L^2(I)} \end{aligned} \quad (5.79)$$

et l'opérateur $\text{Vect}(\cdot)$ est défini dans l'Annexe A.2.1. L'équation de mise à jour du multiplicateur de Lagrange discret dépendant du choix de l'espace médiateur est donné par :

$$\boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\lambda}^p = -\mathbf{P} \left(\mathbf{C}_g \text{Vect} \left(\Pi \left\{ \mathbf{T}_g^{j,p} \right\} \right) - \mathbf{C}_l \text{Vect} \left(\mathbf{T}_l^{j,p} \right) \right) \quad (5.80)$$

et le multiplicateur de Lagrange est mis à jour de la manière suivante : $\boldsymbol{\lambda}^{p+1} = \boldsymbol{\lambda}^p + \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\lambda}^p$. Pour accélérer la convergence, nous utilisons le même préconditionneur :

$$\mathbf{P} = (\mathbf{S}_d)^{-1} = \left(\mathbf{C}_g \mathbf{H}_g^{-1} \mathbf{C}_g^T + \mathbf{C}_l \mathbf{H}_l^{-1} \mathbf{C}_l^T \right)^{-1} \quad (5.81)$$

avec \mathbf{H}_g Pour la construction et l'inversion du complément de Schur ainsi que des matrices de rigidité local et global voir l'Annexe A.2.2.

L'évolution du champ thermique total ainsi que dans la section du domaine est donné aux Figures 5.12 et le taux de convergence de l'algorithme à la Figure 5.13.

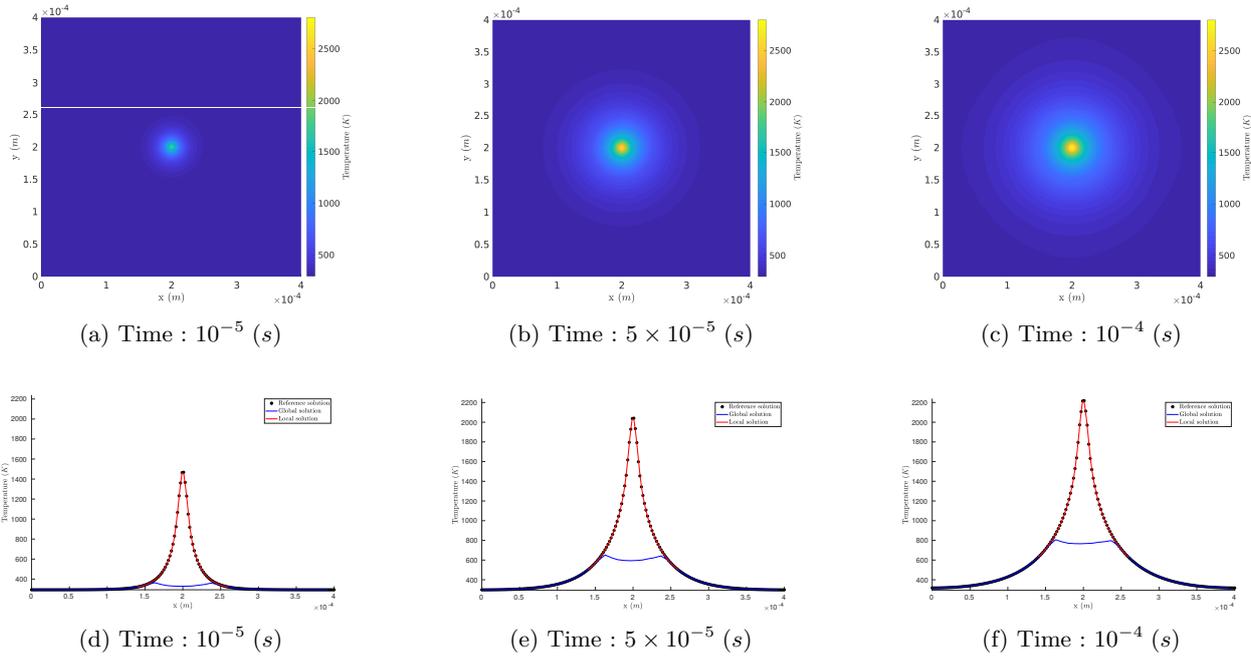


FIGURE 5.12 – Champ thermique total en (a), (b) et (c) et dans la section du domaine en (d), (e) et (f).

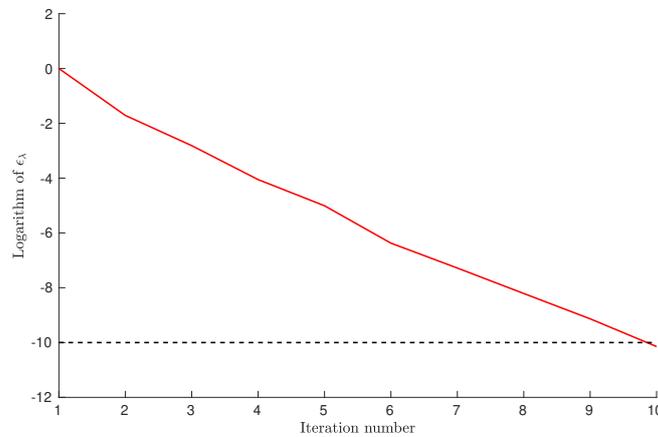


FIGURE 5.13 – Convergence de l'algorithme pour le second exemple.

A nouveau, nous observons que l'Algorithme 3 converge en peu d'itérations (dix) et les champs thermiques global et local coïncident bien avec la solution de référence.

Maintenant que le couplage d'un modèle continu et discret en temps a été détaillé dans le cas d'une source statique, nous étendons cette méthodologie au cas où la source de chaleur est en mouvement, suivie par le domaine local.

5.3.2 Source thermique en mouvement

Afin de nous rapprocher un peu plus de la simulation du balayage par le laser d'une couche de poudre, nous considérons maintenant une source thermique mouvante. Comme pour la stratégie développée au

Chapitre 2, nous imposons au domaine local de suivre la source thermique de sorte que celle-ci soit immobile dans le repère de ce dernier. Comme nous l'avons vu au Chapitre 2, lorsque un schéma de type différence finie est utilisée et que le domaine local bouge, des étapes de projection des champs thermiques entre les domaines sont nécessaires. Par exemple, entre les instants t_j et t_{j+1} , le champ thermique global sous le patch local à l'instant t_j n'a pas de sens physique à cause de la partition d'unité. Le champ thermique local à l'instant t_j doit donc être projeté sur le domaine global. Ainsi le champ thermique global sous le laser prend bien un sens physique pour le calcul de la prochaine étape temporelle t_{j+1} . Aussi, le champ thermique du domaine local qui vient d'être déplacé de sa position à t_j à celle à t_{j+1} doit aussi être défini. Le champ thermique global est alors projeté sur le domaine local.

Une possibilité pour ne pas à avoir à réaliser cette dernière projection, comme proposé dans [102], est de ré-écrire la conservation de la chaleur dans le domaine local en lui donnant une vitesse matérielle : $\mathbf{v}_l(t) = v_l^1(t)\mathbf{e}_1 + v_l^2(t)\mathbf{e}_2$. La vitesse matérielle du domaine local est supposée définir un mouvement rectiligne uniforme entre chaque pas de temps. Pour analyser cette approche, deux stratégies pour le domaine local sont considérées :

- Stratégie \mathcal{C}_1 où le même schéma d'Euler implicite avec la même discrétisation temporelle que le domaine global est considérée. Ainsi, la formulation du problème Arlequin mixte adaptée de celle présentée dans la première partie donne :

Etant donné $T_g^0 = T_0 \in L^2(\Omega)$ dans Ω_g , $T_l^0 = T_0$ dans Ω_l , $\forall j \in \{1, \dots, J\}$ trouver $(T_g^j, T_l^j, \lambda^j) \in V_g \times V_l \times M$ tels que :

$$\frac{1}{\delta t} m_g(T_g^j, T_g^*; \alpha_g) + a_g(T_g^j, T_g^*; \alpha_g) + c(t_j; \lambda^j, T_g^*) = \frac{1}{\delta t} m_g(T_g^{j-1}, T_g^*; \alpha_g) \quad \forall T_g^* \in V_g \quad (5.82a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} m_l(T_l^j, T_l^*; \alpha_l) + b_l(T_l^j, T_l^*; \mathbf{v}_l(t_j); \alpha_l) + a_l(T_l^j, T_l^*; \alpha_l) - c(t_j; \lambda^j, T_l^*) \\ = l_l(T_l^*) + \frac{1}{\delta t} m_l(T_l^{j-1}, T_l^*; \alpha_l) \quad \forall T_l^* \in V_l \end{aligned} \quad (5.82b)$$

$$c(t_j; \mu, T_g^j - T_l^j) = 0 \quad \forall \mu \in M \quad (5.82c)$$

où :

$$b_l(T_l, T_l^*; \mathbf{v}_l(t_j); \alpha_l) = \int_{\Omega_l} \alpha_l \rho c_p (\mathbf{v}_l(t_j) \cdot \nabla T_l) T_l^* d\Omega \quad (5.83)$$

Aussi, la zone de couplage évoluant avec le temps : $\Omega_c(t)$ l'opérateur de couplage aussi :

$$c(t; \lambda, T) = \int_{\Omega_c(t)} \kappa \left(\frac{1}{e^2} \lambda T + \nabla \lambda \cdot \nabla T \right) d\Omega \quad (5.84)$$

- Stratégie \mathcal{C}_2 , ayant pour but de faciliter la future introduction de la méthode PGD, où une formulation faible en espace et en temps pour le domaine local est utilisée. Alors la formulation Arlequin mixte du problème donne :

Etant donné $T_g^0 = T_0 \in L^2(\Omega)$ dans Ω_g , trouver $(\{T_g^j\}_1^{J_g}, T_l, \lambda) \in (V_g \otimes M_{J_g,1}(\mathbb{R})) \times W_l \times M$ tels que :

Pour $j = 1, \dots, J_g$:

$$\frac{1}{\delta t} m_g(T_g^j, T_g^*; \alpha_g) + a_g(T_g^j, T_g^*; \alpha_g) + c(t; \lambda(t_j), T_g^*) = \frac{1}{\delta t} m_g(T_g^{j-1}, T_g^*; \alpha_g) \quad \forall T_g^* \in V_g \quad (5.85a)$$

et

$$\mathcal{H}_l(T_l, T_l^*; \mathbf{v}_l; \alpha_l) - C(\lambda, T_l^*) = \mathcal{G}_l(T_l^*) \quad \forall T_l^* \in W_l \quad (5.85b)$$

$$C(\mu, \Pi \{T_g^j\}_1^{J_g} - T_l) = 0 \quad \forall \mu \in M \quad (5.85c)$$

où les nouveaux opérateurs sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_l(T_l, T_l^*; \mathbf{v}_l; \alpha_g) = \int_I \left[m_l \left(\frac{\partial T_l}{\partial t}(t), T_l^*(t); \alpha_l \right) + a_l(T_l(t), T_l^*(t); \alpha_l) + b_l(T_l(t), T_l(t)^*; \mathbf{v}_l(t); \alpha_l) \right] dt \\ + m_l(T_l(0^+), T_l^*(0^+)) \end{aligned} \quad (5.86)$$

Les approches \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont comparées dans le paragraphe suivant.

Application numérique

Le même domaine adiabatique et carré est considéré mais cette fois-ci avec une source de chaleur intense et mobile. Les mêmes domaines local et global illustrés par la Figure 5.14 sont utilisés. Les paramètres géométriques et physiques nouveaux ou changés sont récapitulés dans le Tableau 5.6.

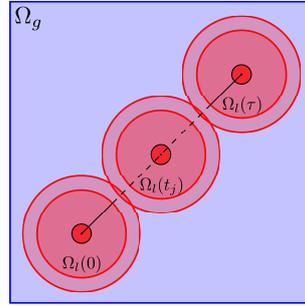


FIGURE 5.14 – Un premier exemple simple.

Premièrement, pour comparer la stratégie \mathcal{C}_1 avec un problème fin mono-modèle, le même sous-espace V_g^{hg} pour le domaine global et un maillage plus fin pour le domaine local basés sur la triangulation présentée par la Figure 5.16b sont utilisés. Pour le sous-espace éléments finis de l'espace médiateur deux choix encore peuvent-être envisagés. Dans le premier cas, à chaque pas de temps, la forme matricielle des équations (5.82a), (5.82b) et (5.56) donne :

$$\mathbf{K}_{g,x}^j \mathbf{T}_g^{j,p} + \left(\mathbf{C}_{g,x}^j \right)^T \boldsymbol{\lambda}^{j,p} = \frac{1}{\delta t} \mathbf{M}_{g,x}^j \mathbf{T}_g^{j-1,p} \quad (5.87a)$$

$$\mathbf{K}_{l,x}^j \mathbf{T}_l^{j,p} - \left(\mathbf{C}_{l,x}^j \right)^T \boldsymbol{\lambda}^{j,p} = \frac{1}{\delta t} \mathbf{M}_{l,x} \mathbf{T}_l^{j-1,p} + \mathbf{l} \quad (5.87b)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{j,p+1} = \boldsymbol{\lambda}^{j,p} - \beta \left(\mathbf{C}_{g,x}^j \mathbf{T}_g^{j,p} - \mathbf{C}_{l,x}^j \mathbf{T}_l^{j,p} \right) \quad (5.87c)$$

avec :

$$\mathbf{K}_{g,x}^j = \frac{1}{\delta t} \mathbf{M}_{g,x}^j + \mathbf{A}_{g,x}^j ; \mathbf{K}_{l,x}^j = \frac{1}{\delta t} \mathbf{M}_{l,x} + \mathbf{B}_{l,x}^j + \mathbf{A}_{l,x} \quad (5.88)$$

où $\mathbf{M}_{g,x}^j$, $\mathbf{A}_{l,x}^j$ sont dans $M_{N_g}(\mathbb{R})$; $\mathbf{B}_{l,x}^j$ dans $M_{N_l}(\mathbb{R})$; et $\mathbf{C}_{i,x}^j \in M_{N_\lambda^j, N_i}(\mathbb{R})$ pour $j = 1, \dots, J$ avec N_λ^j . Ces opérateurs sont plus précisément donnés par :

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{M}_{g,x}^j \right]_{\gamma\delta} &= m_g(\psi_g^\gamma, \psi_g^\delta; \alpha_g(t_j)), & \left[\mathbf{A}_{g,x}^j \right]_{\gamma\delta} &= a_g(\psi_g^\gamma, \psi_g^\delta; \alpha_g(t_j)) & \left[\mathbf{B}_{l,x}^j \right]_{\gamma\delta} &= b_l(v_l(t_j); \psi_l^\gamma, \psi_l^\delta; \alpha_l) \\ \left[\mathbf{C}_{g,x}^j \right]_{\gamma\delta} &= c(\psi_\omega^{\mathcal{E}^j(\gamma)}, \psi_i^\delta) \end{aligned} \quad (5.89)$$

Le maillage du problème mono-modèle fin utilisé comme référence et l'évolution des maillages du problème Arlequin sont illustrés à la Figure 5.15. L'évolution du champ thermique total et dans la section du domaine sont présentés aux Figures 5.17 et la convergence de l'algorithme de résolution à la Figure 5.16a. Les paramètres temporels de la solution sont changés et donnés dans le Tableau 5.5.

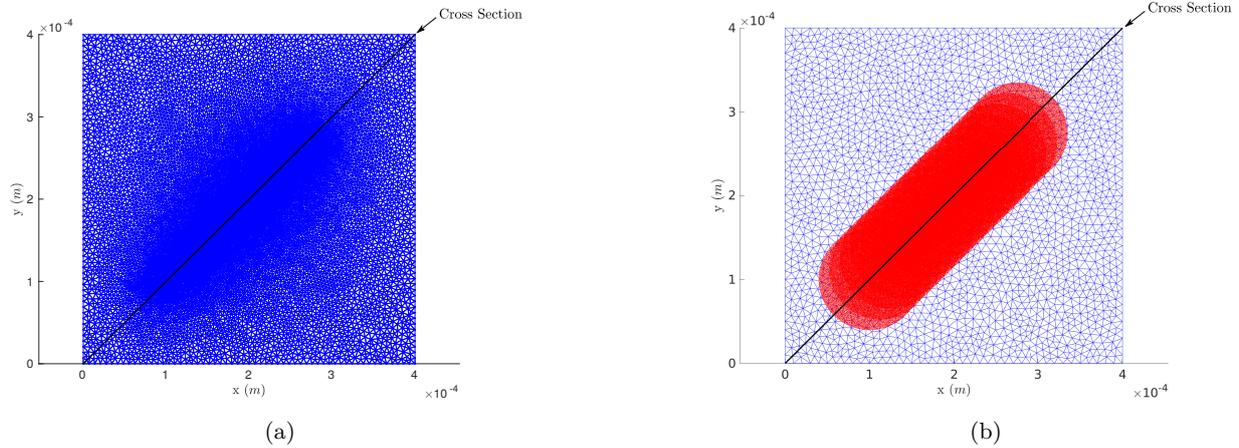


FIGURE 5.15 – Le maillage du problème mono-modèle en (a) et les maillages problème Arlequin en (b).

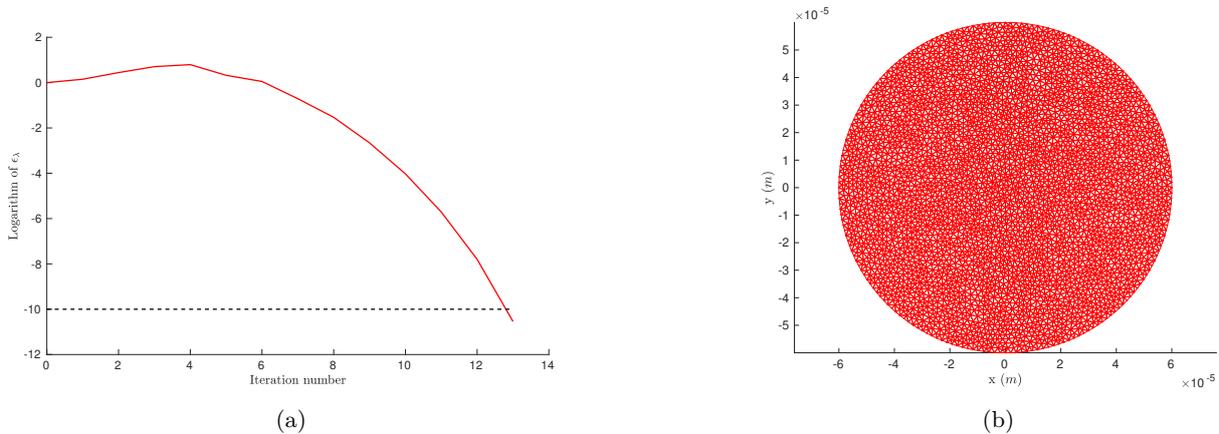


FIGURE 5.16 – Convergence de l'algorithme de résolution et maillage du domaine local.

Numérique	Symboles	Valeurs
Période	τ (s)	10^{-3}
Pas de temps	δt (s)	0.5×10^{-4}

TABLE 5.5 – Paramètres numériques du problème.

A nouveau, nous observons que l'Algorithme 3 converge en peu d'itérations, 13 cette fois-ci. Une nette différence entre les champs thermiques peut-être notée, celle-ci vient de la formulation Eulérienne du domaine local. Cette formulation modélise plus précisément le mouvement de la source de chaleur entre deux pas de temps. En effet, dans le cas du problème de référence la source de chaleur est statique à sa position au temps t_{j+1} pendant δt pour simuler son mouvement de sa position à t_j à celle à t_{j+1} . Ceci à pour effet d'augmenter le phénomène de diffusion devant le laser ce qui explique la valeur maximale

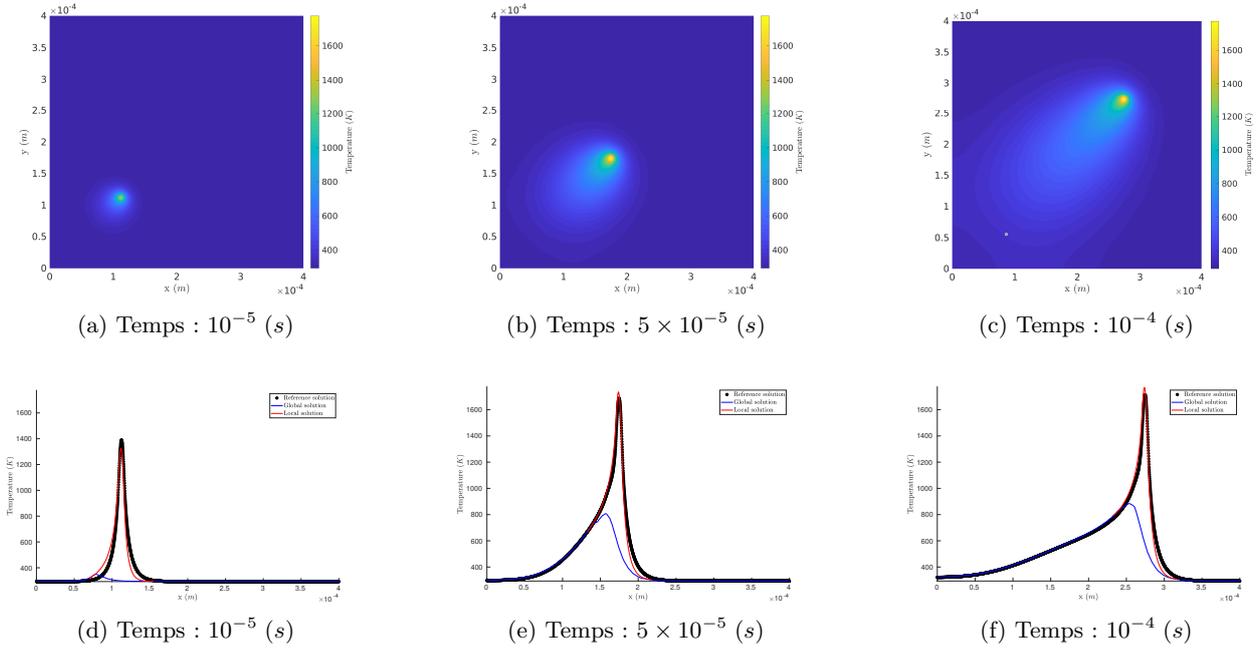


FIGURE 5.17 – Evolution de la solution thermique en (a), (b) et (c) et dans la section en (d), (e) et (f).

de la température inférieure. Comme nous l'avons mentionné au Chapitre 1, d'autres modèles de source existent pour modéliser plus finement le mouvement d'un laser de type Gaussien entre deux pas de temps, avec un schéma temporel de type différence finie (cf. [49]).

Géométrique	Symboles	Valeurs	Physique	Symboles	Valeurs
Position initiale	(X_i, Y_i) (m)	$(1, 1) \times 10^{-4}$	Vitesse	(v_l^1, v_l^2) (m/s)	$(0.25, 0.25)$
Position finale	(X_f, Y_f) (m)	$(2.75, 2.75) \times 10^{-4}$			

TABLE 5.6 – Paramètres géométriques et physiques du second problème.

Pour la seconde stratégie \mathcal{C}_2 , le même espace d'approximation W^{h_l, k_l} est considéré. Pour la question du choix de l'espace médiateur M et de son espace d'approximation, une remarque doit être faite. Comme précédemment, deux choix peuvent-être considérés, cependant, si ce choix se porte sur le modèle global certaines difficultés apparaissent. En effet le maillage spatial de la zone de couplage défini comme l'ensemble des fonctions de forme globales dont le support a une intersection non nulle avec la zone de couplage mouvante dépendant du temps. La construction d'un maillage spatio-temporel structuré devient alors impossible. Il faut dans ce cas calculer des intersections entre les maillages spatio-temporels local et de couplage. Ce choix est donc écarté dans la suite.

La forme discrète de l'équation (5.85b) donne :

$$\mathbf{H}_l \mathbf{T}_l^p - \mathbf{C}_l^T \boldsymbol{\lambda}^p = \mathbf{G}_l \quad (5.90)$$

où :

$$\mathbf{H}_l = \mathbf{B}_t \otimes \mathbf{M}_{l,x} + \mathbf{M}_t \otimes \mathbf{A}_{l,x} + \mathbf{M}_t \circ \left\{ \mathbf{B}_{l,x}^j \right\}_1^J ; \quad \mathbf{C}_g = \mathbf{M}_t \circ \left\{ \mathbf{C}_{g,x}^j \right\}_1^J \quad (5.91)$$

avec le symbole \circ définissant la construction matricielle suivante :

$$\mathbf{A} \circ \{\mathbf{B}^j\}_1^J = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(1,1)\mathbf{B}^1 & \cdots & \mathbf{A}(1,j)\mathbf{B}^j & \cdots & \mathbf{A}(1,J)\mathbf{B}^J \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}(j,1)\mathbf{B}^1 & \cdots & \mathbf{A}(j,j)\mathbf{B}^j & \cdots & \mathbf{A}(j,J)\mathbf{B}^J \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}(J,1)\mathbf{B}^1 & \cdots & \mathbf{A}(J,j)\mathbf{B}^j & \cdots & \mathbf{A}(J,J)\mathbf{B}^J \end{bmatrix} \quad (5.92)$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, pour accélérer la convergence de l'algorithme de gradient le préconditionneur \mathbf{P} défini par (5.81) est utilisé avec une différence dans la matrice de rigidité spatio-temporelle globale :

$$\mathbf{H}_g = \mathbf{B}_t \circ \{\mathbf{M}_{g,x}^1, \cdots, \mathbf{M}_{g,x}^J\} + \mathbf{M}_t \circ \{\mathbf{A}_{g,x}^1, \cdots, \mathbf{A}_{g,x}^J\} \quad (5.93)$$

La Figure 5.18 montrent les maillages qui ont été utilisés pour comparer la première stratégie du premier problème Arlequin avec une formulation discrète en temps et une formulation faible en espace-temps pour le domaine local.

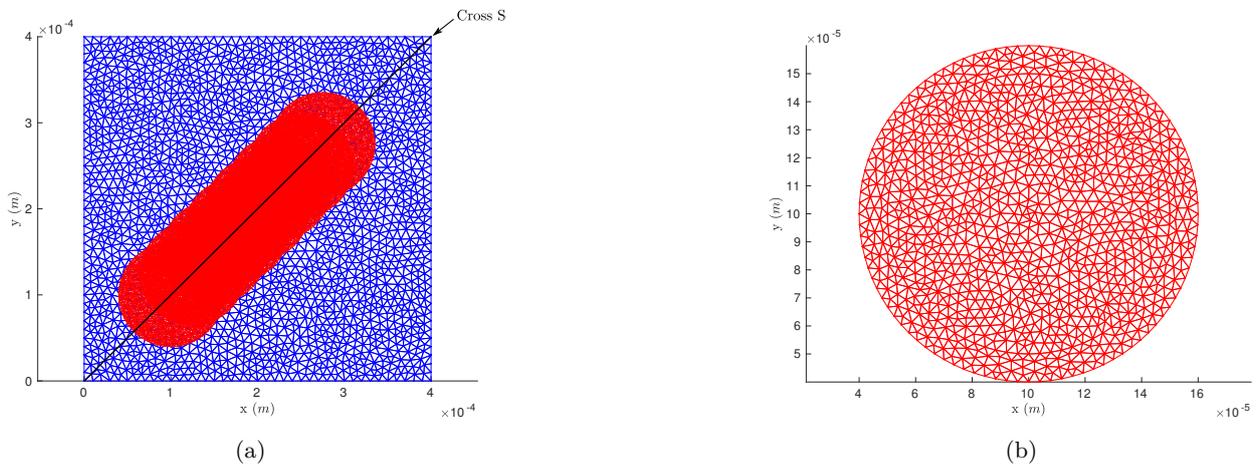


FIGURE 5.18 – Un exemple de maillages.

Le taux de convergence de l'Algorithme 3 est donné à la Figure 5.20. Nous observons que les deux stratégies convergent rapidement et que les champs thermiques sont très proches.

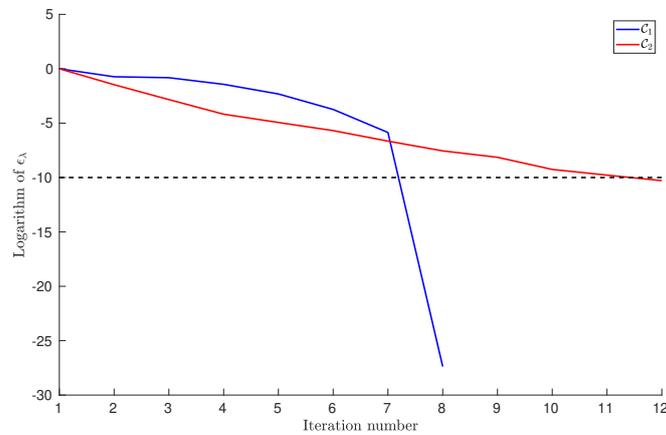


FIGURE 5.20 – Convergence pour le second exemple.

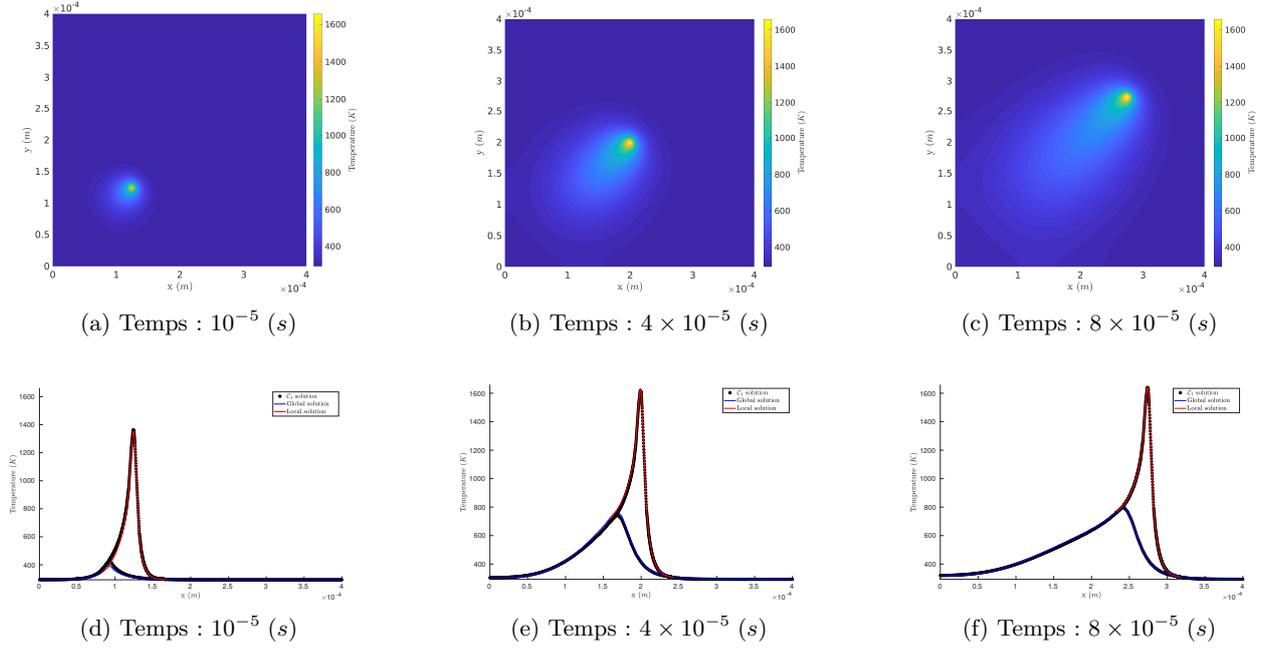


FIGURE 5.19 – Evolution du champ thermique en (a), (b) et (c) et dans la coupe en (d), (e) and (f).

Maintenant que nous avons introduit tous les ingrédients nécessaires, nous mettons en place dans le domaine local la méthode PGD.

5.3.3 Introduction locale de la méthode PGD

Pour décrire la mise en place de la méthode PGD, nous supposons l'étape de résolution du domaine local de l'Algorithme 3 atteinte. La formulation variationnelle en espace-temps sur le domaine local est rappelée :

Etant donné $T_l^0 = T_0 \in L^2(\Omega)$ dans Ω_l et $\lambda \in M$, trouver $T_l \in W_l$ tels que :

$$\mathcal{H}_l(T_l, T_l^*; \alpha_l) - C(\lambda, T_l^*) = \mathcal{G}_l(T_l^*) \quad \forall T_l^* \in W_l \quad (5.94)$$

Nous cherchons à construire, à l'aide de la méthode PGD, une représentation séparée du champ thermique $T_l(x, t)$ sous la forme suivante

$$T_l^N(x, t) = \sum_{n=1}^N \theta_n(t) \otimes X_n(x) \quad (5.95)$$

où nous définissons le produit tensoriel comme :

$$\forall (\theta, X) \in U \times V_l, \quad \theta \otimes X \in W_l^t : (x, t) \mapsto \theta(t)X(x) \quad (5.96)$$

avec les nouveaux espace définis comme :

- l'espace de Hilbert, $U = H^1(I)$.
- l'espace produit tensoriel, $W_l^t = V_l \otimes U$.

Pour détailler l'algorithmie utilisée, nous donnons plusieurs définitions. Comme introduit à la Section 5.2, nous notons \mathcal{S}_1 l'ensemble des tenseurs de rang 1 pour le produit tensoriel (5.96) :

$$\mathcal{S}_1 = \{\theta \otimes X \mid \theta \in U \text{ and } X \in V_l\} \quad (5.97)$$

et nous introduisons aussi $\mathcal{S}_N \subset V_\otimes$, pour $n \geq 2$:

$$\mathcal{S}_N = \left\{ u \in V_\otimes \mid u = \sum_{n=1}^N u^n, u^n \in \mathcal{S}_1 \text{ pour } 1 \leq n \leq N \right\} \quad (5.98)$$

La définition formelle de l'espace de Hilbert produit tensoriel est la suivante :

$$V_\otimes = \overline{\text{Span}(\mathcal{S}_1)}^{\|\cdot\|_\otimes} \quad (5.99)$$

La construction de la solution est réalisée en utilisant la même procédure qu'introduite à la Section 5.2, i.e. une procédure gloutonne, décrite par l'Algorithme 4, dont les différentes étapes sont détaillées brièvement dans la suite. Nous supposons calculée la forme séparée de rang $N-1$ du champ thermique local $T_l^{N-1} \in \mathcal{S}_{N-1}$ et nous cherchons à calculer un nouveau radical $(\theta, X) \in \mathcal{S}_1$. L'équation de la chaleur étant de nature parabolique, d'autres critères pour déterminer les radicaux que ceux mentionnés pour l'équation de Poisson existent (Orthogonalité de Galerkin, minimisation du résidu... voir [183]). L'algorithme que nous avons choisi pour notre application est basé sur l'orthogonalité de Galerkin, il est de même nature que celui que nous nommons de type Euler à la Section 5.2 pour le problème de Poisson. Nous introduisons alors la fonction suivante :

Définition 5.2

Soit $\mathcal{F}_N : T_l^{N-1} \in \mathcal{S}_{N-1} \mapsto \theta \otimes X \in \mathcal{S}_1$ une fonction telle que :

$$\mathcal{H}_l(T_l^{N-1} + \theta X, \theta X^* + \theta^* X; \alpha_l) - C(\lambda, \theta X^* + \theta^* X) = \mathcal{G}_l(\theta X^* + \theta^* X) \quad \forall \theta^* \in U, \forall X^* \in V_l \quad (5.100)$$

L'équation (5.100) est nonlinéaire par rapport aux modes θ et X , une stratégie de type ADFP récapitulée par l'Algorithme 5 est utilisée pour la linéariser et la résoudre.

Algorithm 4 Algorithme glouton

Initialisation: $T_g^0 = 0$ et $N = 1$.

Sortie: T_g^N

tant que $\epsilon_{\text{greedy}} > \text{Tol}_{\text{greedy}}$ **faire**

Calcul $(\theta, X) = \mathcal{F}_N(T_l^{N-1})$.

Mise à jour : $T_l^N = T_l^{N-1} + \theta \otimes X$.

Calcul de l'indicateur ϵ_{greedy} et vérification de la convergence, si la limite n'est pas satisfaite nous incrémentons $N = N + 1$.

fin tant que

Le critère utilisé pour la convergence de l'algorithme glouton est basé sur une stagnation relative :

$$\epsilon_{\text{greedy}} = \frac{\|\theta \otimes X\|_{W_l}}{\|T_l^N\|_{W_l}}. \quad (5.101)$$

Nous prenons une valeur limite $\text{Tol}_{\text{greedy}} = 10^{-8}$ pour les simulations qui suivront. Dans un but de clarté pour la présentation de l'algorithme ADFP, deux fonctions sont introduites comme il est fait dans [183] :

Définition 5.3

Soit \mathcal{F}_N^t et \mathcal{F}_N^x les deux fonctions suivantes :

— $\mathcal{F}_N^x : \theta \in L \mapsto X \in V_l$ telle que :

$$\mathcal{H}_l(T_l^{N-1} + \theta X, \theta X^*; \alpha_l) - C(\lambda, \theta X^*) = \mathcal{G}(\theta X^*), \quad \forall X^* \in V_l. \quad (5.102)$$

— $\mathcal{F}_N^t : X \in V_l \mapsto \theta \in U$ telle que :

$$\mathcal{H}_l(T_l^{N-1} + \theta X, X\theta^*; \alpha_l) - C(\lambda, X\theta^*) = \mathcal{G}(X\theta^*), \quad \forall \theta^* \in U. \quad (5.103)$$

Algorithm 5 Algorithme de Point Fixe à Directions Alternés

Initialisation: $\theta^0 \in L$ et $p = 1$.

Sortie: $\theta^p \otimes X^p \in \mathcal{S}_1$

tant que $\epsilon_{\text{ADFP}} > \text{Tol}_{\text{ADFP}}$ **faire**

Calculer $X^p = \mathcal{F}_N^x(\theta^{p-1})$.

Calculer $\theta^p = \mathcal{F}_N^t(X^p)$.

Calcul de l'indicateur ϵ_{ADFP} et vérification de la convergence, si la limite n'est pas atteinte nous incrémentons $p = p + 1$.

fin tant que

A nouveau le critère de convergence est basé sur une stagnation relative défini par :

$$\epsilon_{\text{ADFP}} = \frac{\|\theta^p \otimes X^p - \theta^{p-1} \otimes X^{p-1}\|_{W_l}}{\|\theta^p \otimes X^p\|_{W_l}}. \quad (5.104)$$

La valeur limite à atteindre sera fixée à $\text{Tol}_{\text{ADFP}} = 10^{-10}$ pour les simulations qui suivront.

Comme nous l'avons justifié précédemment, uniquement le modèle local est choisi comme espace médiateur, ainsi le multiplicateur de Lagrange est recherché dans l'espace produit tensoriel : $U \otimes V_l|_{\Omega_c}$. L'équation de mise à jour du multiplicateur de Lagrange change partiellement avec l'introduction de l'opérateur Π pour convertir T_g un champ discret en temps en un champ continu.

$$\delta\lambda^p = \lambda^{p+1} - \lambda^p = P \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(\Pi T_g, T_l, \lambda) \quad \text{on } I \times \Omega_c \quad (5.105)$$

avec P le préconditionneur.

Nous reprenons maintenant le problème thermique avec source mobile de la Sous-Section 5.3.2 le discrétisons et construisons une représentation séparée du champ thermique local.

Application numérique

Nous considérons à nouveau le problème (Figure 5.14) précédent, avec exactement les mêmes discrétisations temporelles et spatiales. Nous supposons que le terme source peut s'écrire sous la forme séparée :

$$f(x, t) = \sum_{m=1}^{N_f} \theta_f^m(t) X_f^m(x) \quad (5.106)$$

Pour cette application nous avons choisi une source gaussienne comme introduite au Chapitre 1 dont seule la position du centre varie au cours du temps. Le patch suivant la source, celle si est constante dans le

repère local du patch et peut donc se décomposer en un seul couple de mode. L'opérateur de convection b est décomposé en deux sous-opérateurs :

$$b_l^i(T_l, T_l^*; v_l^i; \alpha_l) = \int_{\Omega_l} \alpha_l (v_l^i \mathbf{e}_i \cdot \nabla T_l) T_l^* d\Omega \quad \text{for } i = 1, 2 \quad (5.107)$$

La forme discrétisée des équations (5.102), (5.103) est donnée par :

$$\mathbf{F}^x X = \mathbf{G}_x^M \quad (5.108a)$$

$$\mathbf{F}^t \theta = \mathbf{G}_t^M \quad (5.108b)$$

où les matrices sont données par :

$$\mathbf{F}^x = a_t \cdot \mathbf{M}_{l,x} + b_t \cdot \mathbf{A}_{l,x} + c_t^1 \cdot \mathbf{B}_{l,x}^1 + c_t^2 \cdot \mathbf{B}_{l,x}^2 \quad (5.109a)$$

$$\mathbf{F}^t = a_x \cdot \mathbf{B}_t + b_x \cdot \mathbf{M}_t + c_x^1 \cdot \mathbf{V}_t^1 + c_x^2 \cdot \mathbf{V}_t^2 \quad (5.109b)$$

avec les coefficients :

$$a_t = \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}, \theta \right)_{0,I} ; b_t = (\theta, \theta)_{0,I} ; c_t^i = (v_l^i \theta, \theta)_{0,I} \quad \text{for } i = 1, 2 \quad (5.110a)$$

$$a_x = m_l(X, X; \alpha_l) ; b_x = a_l(X, X; \alpha_l) ; c_x^i = b_l^i(X, X; \alpha_l) \quad \text{for } i = 1, 2 \quad (5.110b)$$

et les matrices :

$$[\mathbf{B}_{l,x}^i]_{\gamma\delta} = b_l^i(\psi_l^\gamma, \psi_l^\delta; \alpha_l) \quad \text{for } i = 1, 2 \quad (5.111a)$$

$$[\mathbf{B}_t]_{\gamma\delta} = \left(\frac{\partial \phi^\gamma}{\partial t}, \phi^\delta \right)_{0,I} ; [\mathbf{M}_t]_{\gamma\delta} = (\phi^\gamma, \phi^\delta)_{0,I} ; [\mathbf{V}_t^i]_{\gamma\delta} = (v_l^i \phi^\gamma, \phi^\delta)_{0,I} \quad \text{for } i = 1, 2 \quad (5.111b)$$

où ϕ sont les fonctions de forme du maillage temporel.

Une précision est à faire sur la gestion du multiplicateur de Lagrange, nous rappelons que nous l'avons choisi dans l'espace local et que son vecteur associé $\boldsymbol{\lambda} \in M_{N_\lambda, J}(\mathbb{R})$. Nous supposons être arrivé à l'étape de l'Algorithme 3 où celui-ci est connu et où nous cherchons à déterminer les deux champs thermiques. Pour ne pas avoir à assembler pour chaque terme de l'opérateur de couplage des matrices de tailles importantes nous réalisons sur $\boldsymbol{\lambda}$ une SVD et obtenons $N_\sigma = \min(N_\lambda, J)$ couples de modes $(\{\boldsymbol{\theta}_\lambda^n, \mathbf{X}_\lambda^n\}_1^{N_\sigma})$ et ne conservons que ceux dont la valeur singulière σ^n vérifie le critère suivant :

$$\frac{\sigma^n}{\max(\{\sigma^m\}_1^{N_\sigma})} \geq \epsilon_\sigma \quad (5.112)$$

avec la valeur limite prise égale à $\epsilon_\sigma = 10^{-5}$. Nous conservons N_λ^σ couples de modes et obtenons une représentation séparée du multiplicateur de Lagrange sous la forme :

$$\boldsymbol{\lambda} = \sum_{n=1}^{N_\lambda^\sigma} \sigma^n \boldsymbol{\theta}_\lambda^n \otimes \mathbf{X}_\lambda^n \quad (5.113)$$

où $\boldsymbol{\theta}_\lambda^m \in M_J(\mathbb{R})$ et $\mathbf{X}_\lambda^m \in M_{N_\lambda}(\mathbb{R})$. La forme discrétisée du terme de couplage devient pour l'équation (5.102) :

$$\sum_{n=1}^{N_\lambda^\sigma} \left(\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{M}_t \boldsymbol{\theta}_\lambda^n \right) \mathbf{C}_l^T \mathbf{X}_\lambda^n \quad (5.114)$$

et pour l'équation (5.103) :

$$\sum_{n=1}^{N_\lambda^\sigma} \left(\mathbf{X}^T \mathbf{C}_l^T \mathbf{X}_\lambda^n \right) \mathbf{M}_t \boldsymbol{\theta}_\lambda^n \quad (5.115)$$

Remarque 5.2. La zone de couplage étant un domaine de taille restreinte, la dimension N_λ est normalement très inférieure à N_l , la SVD appliquée, à chaque itération de l'Algorithme 3, à la matrice $\boldsymbol{\lambda} \in M_{N_\lambda, J}(\mathbb{R})$ ne représente pas un coût computationnel élevé.

L'équation discrète de mise à jour du multiplicateur de Lagrange (5.105) donne :

$$\delta \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{C}_g^{sp} \text{Vect}(\mathbf{I} \mathbf{T}_g) - \mathbf{C}_l^{sp} \text{Vect}(\mathbf{T}_l) \quad (5.116)$$

Finalement, les seconds membres sont donnés par :

$$\mathbf{G}_x^M = \sum_{m=1}^{M_\lambda} \left(\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{M}_t \boldsymbol{\theta}_\lambda^m \right) \mathbf{C}_l^T \mathbf{X}_\lambda^m + \sum_{m=1}^{M_f} \left(\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{M}_t \boldsymbol{\theta}_f^m \right) \mathbf{M}_{l,x} \mathbf{X}_f^m \quad (5.117a)$$

$$\mathbf{G}_t^M = \sum_{m=1}^{M_\lambda} \left(\mathbf{X}^T \mathbf{C}_l^T \mathbf{X}_\lambda^m \right) \mathbf{M}_t \boldsymbol{\theta}_\lambda^m + \sum_{m=1}^{M_f} \left(\mathbf{X}^T \mathbf{M}_{l,x} \mathbf{X}_f^m \right) \mathbf{M}_t \boldsymbol{\theta}_f^m \quad (5.117b)$$

Nous avons alors obtenu les résultats suivants :

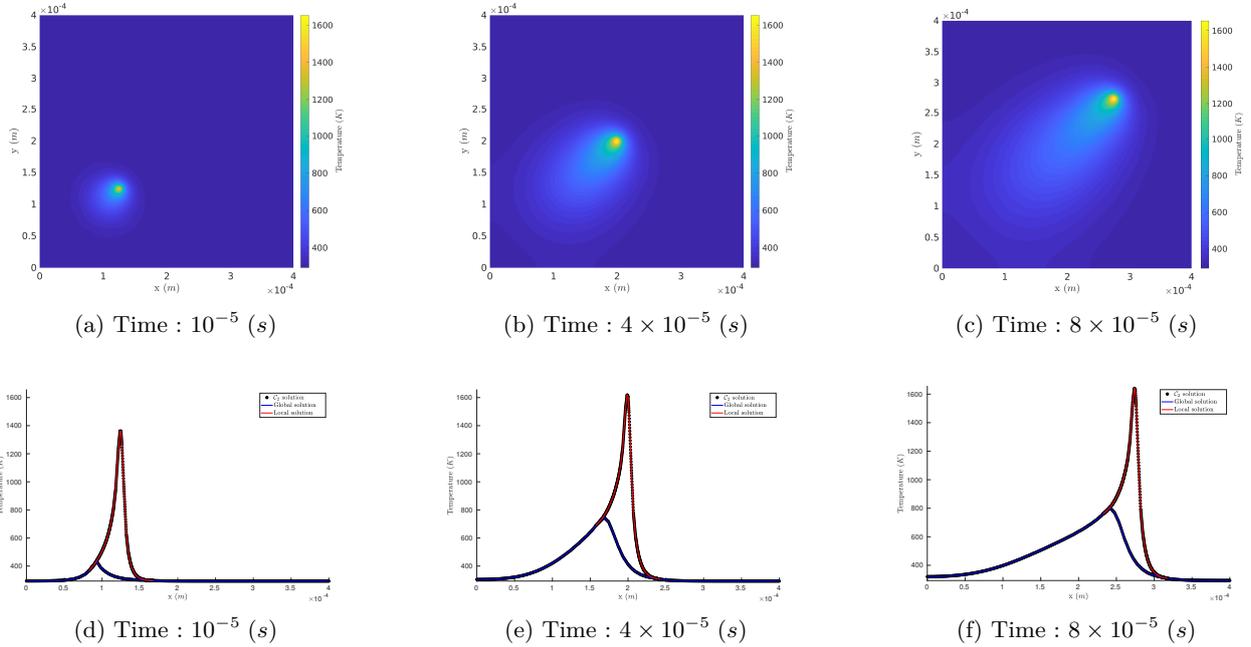


FIGURE 5.21 – Evolution du champ thermique total en (a), (b) et (c) et dans la section en (d), (e) et (f).

Comme le montrent l'ensemble de Figures 5.21, la solution PGD colle parfaitement à la solution obtenue à la sous-section précédente, où un modèle continu en temps pour le domaine local était couplé à un modèle discret en temps pour le domaine global.

Nous avons obtenu les modes spatiaux suivants :

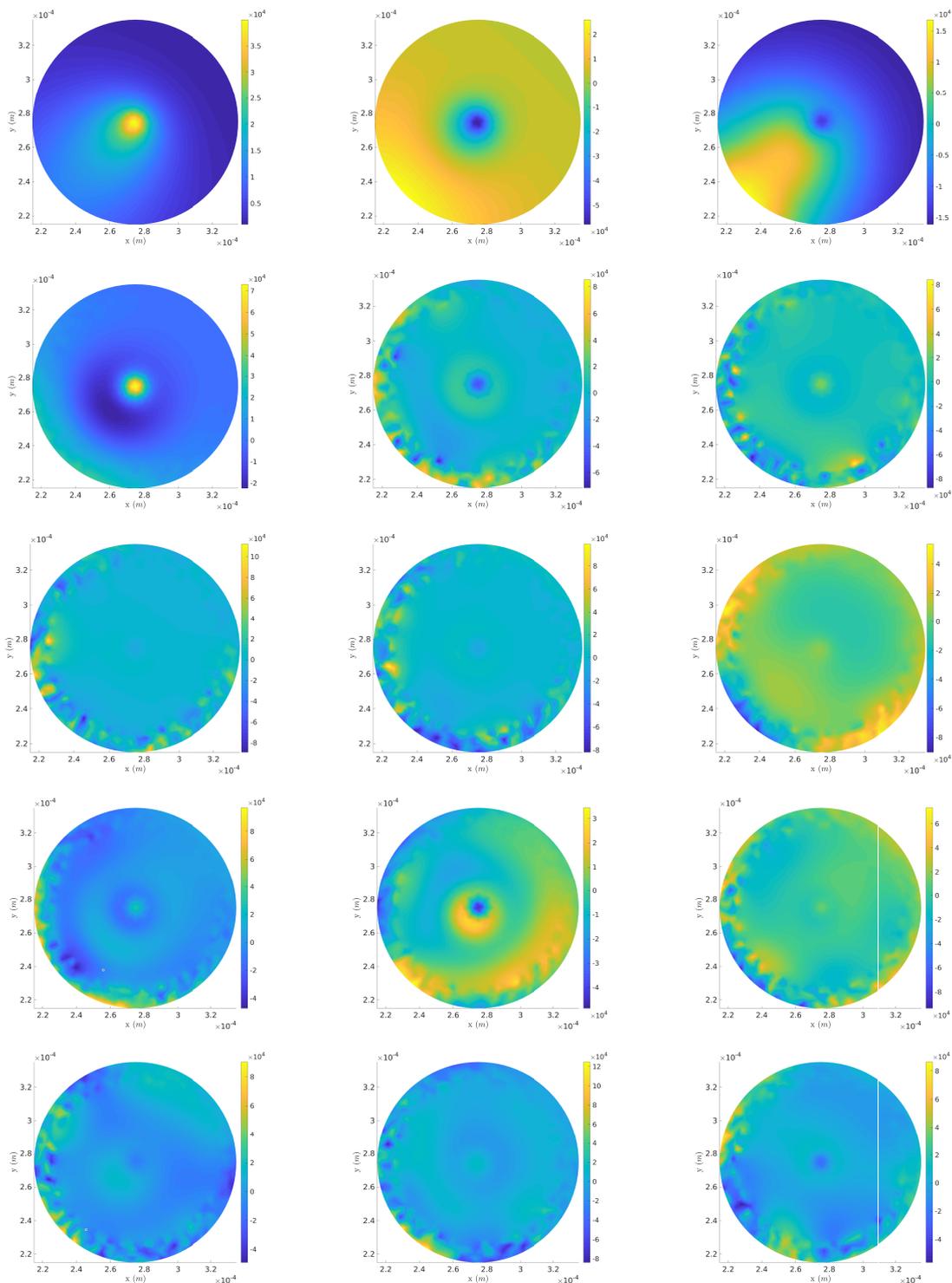


FIGURE 5.22 – Les 15 premiers modes spatiaux.

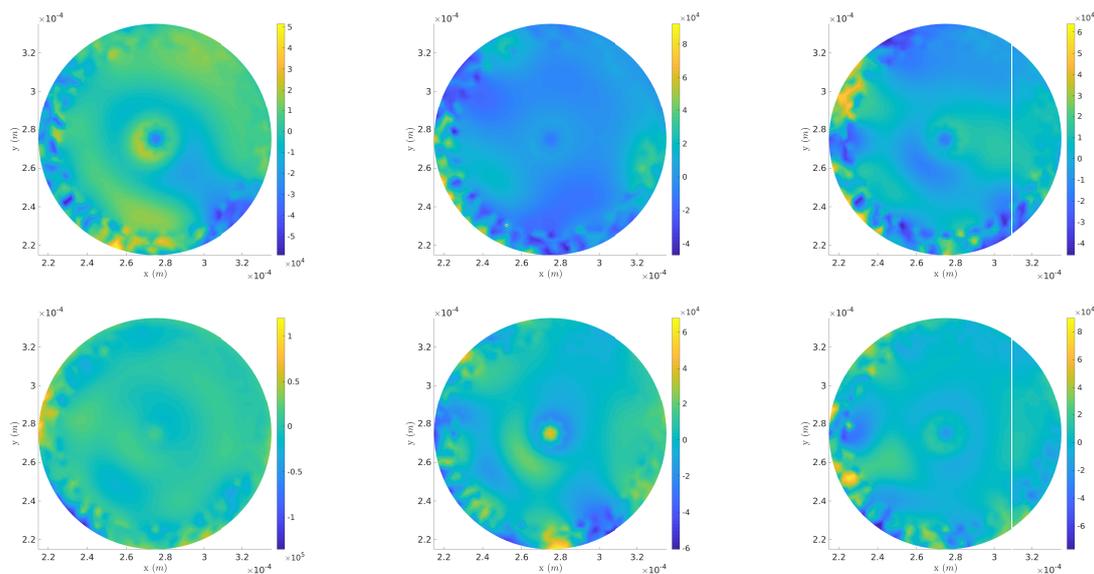


FIGURE 5.23 – Les 6 derniers modes spatiaux.

Dans ces Figures les modes ont été relativisés par leurs normes $\|X_n\|_{0,\Omega}$

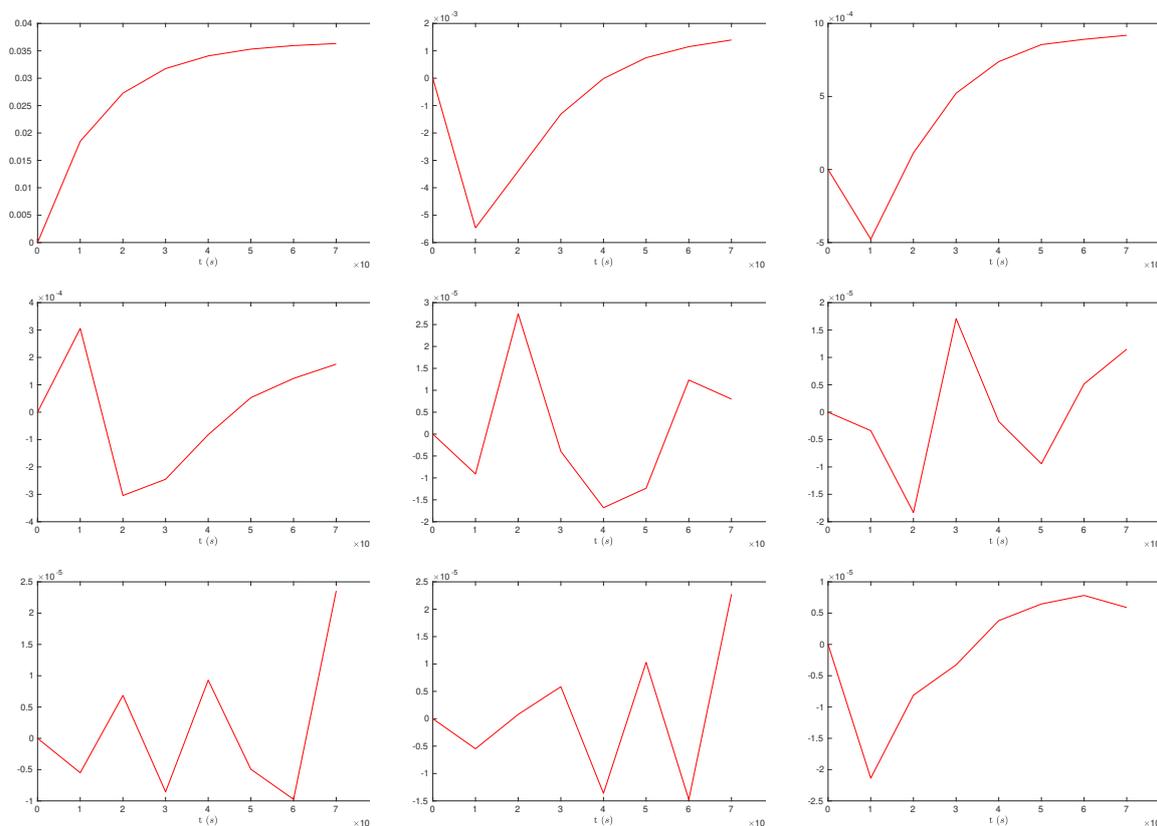


FIGURE 5.24 – Les 9 premier modes temporels.

Les modes temporels, multiplié par la norme du mode spatial correspondant $\|X_n\|_{0,\Omega}$, sont présentés par la Figure 5.24.

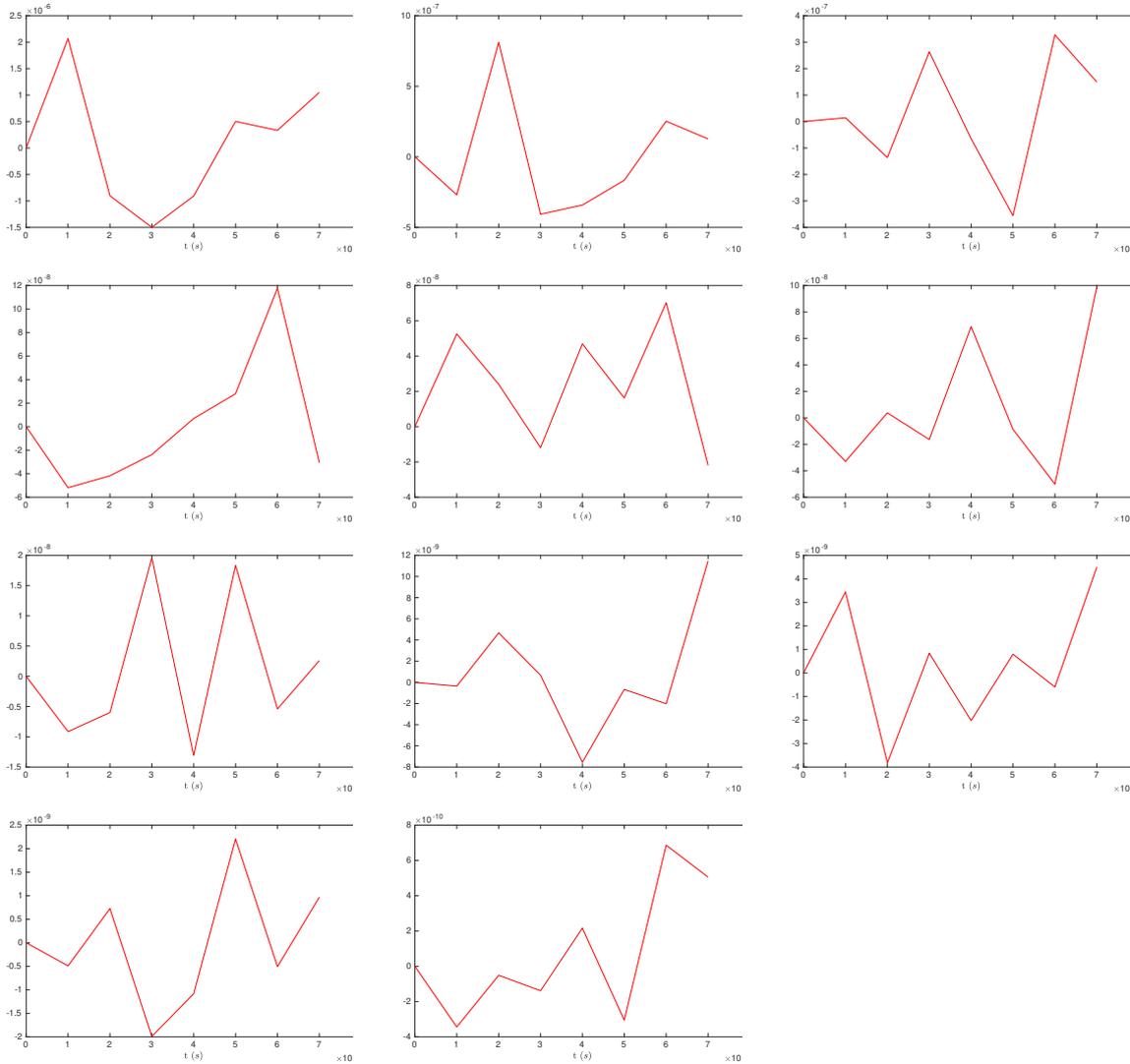


FIGURE 5.25 – Les 12 derniers modes temporels.

Nous observons qu'à partir du cinquième couple de modes, les modes spatiaux concentrent leurs variations dans la zone de couplage. L'évolution du résidu est donné par la Figure 5.26. Nous observons que 24 itérations sont nécessaire pour atteindre le critère de convergence que nous nous sommes fixé. Cette valeur est deux fois plus importante que lorsque nous recherchons la solution sous forme éléments finis classique. Ceci signifie que la solution obtenue par PGD perturbe l'algorithme de gradient.

Nous avons également regardé l'évolution de l'erreur relative de la solution PGD en fonction du nombre de modes par rapport à la solution de la stratégie \mathcal{C}_2 . Celle-ci est donnée par la Figure 5.27.

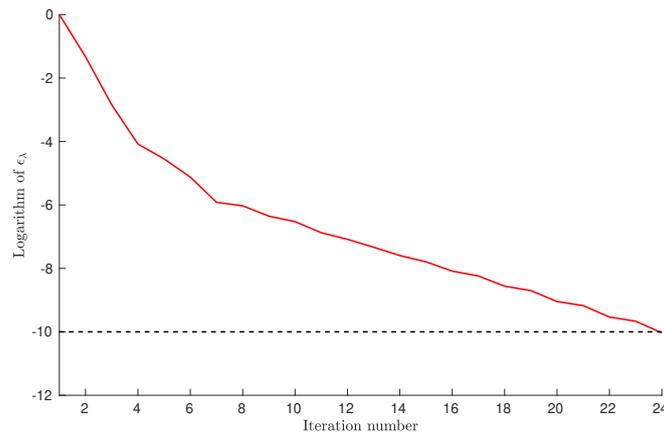
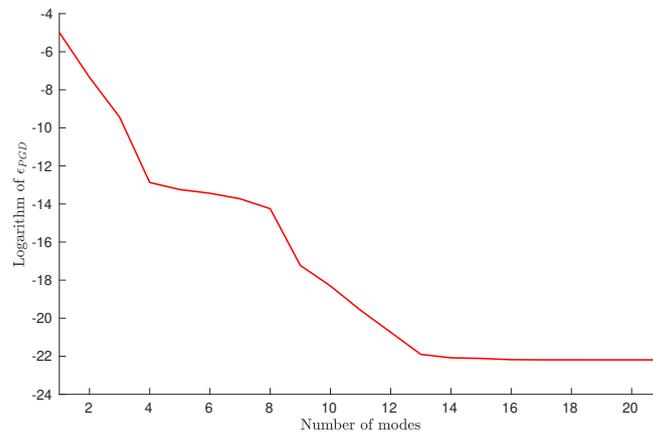


FIGURE 5.26 – Convergence du second exemple réduit.

FIGURE 5.27 – Erreur relative par rapport à la solution \mathcal{C}_2 en fonction du nombre de mode.

Nous observons qu'en 5 modes nous avons déjà une erreur relative de 10^{-10} avec la solution \mathcal{C}_2 . Ceci montre la difficulté du choix de la tolérance sur l'algorithme glouton $\text{Tol}_{\text{glouton}}$, la valeur de 10^{-8} est de toute évidence trop importante.

Dans la stratégie que nous venons de proposer, à chaque itération de la l'algorithme de gradient, une nouvelle solution sous forme *PGD* est recherchée. Afin de diminuer les coûts numériques, nous explorons la possibilité de conserver à chaque itération les modes PGD précédemment calculés.

Une nouvelle stratégie

Puisque le multiplicateur de Lagrange a une influence sur la solution du problème mais ne change pas sa nature. Une idée pour toujours diminuer le coût computationnel est de conserver et réutiliser les premiers modes PGD calculés. Nous avons donc une collection de couple de modes $\{(\theta_n, X_n)\}_{n=1}^{N_p}$ qui évolue au cours des itérations de l'algorithme de gradient. Ainsi, la résolution de l'équation 5.94, supposant l'étape p de l'algorithme du gradient atteinte, devient :

- i) Recherche la solution de l'équation 5.94 sur l'ensemble Vect $\{(\theta_1 \otimes X_1), \dots, (\theta_{N_p} \otimes X_{N_p})\} : T_l^{N_p}(x, t)$.
Initialisation de l'indice $q = 1$ et des nouveaux modes $(\theta_0, X_0) = (0, 0)$.
- ii) Détermination d'un nouveau couple de modes : $(\theta_{N_p+q}, X_{N_p+q})$ avec l'algorithme ADFP.

iii) Calcule de l'indicateur :

$$\epsilon_{\text{greedy}} = \frac{\|\theta_{N_p+q} \otimes X_{N_p+q}\|_{W_l}}{\|T_l^{N_p} + \sum_{r=1}^q \theta_{N_p+r} \otimes X_{N_p+r}\|_{W_l}} \quad (5.118)$$

et vérification du critère de convergence : $\epsilon_{\text{greedy}} \leq \text{Tol}_{ADFP}$. Si elle n'est pas atteinte, nous reprenons à l'étape ii) après incrémentation de l'indice q , sinon nous ajoutons les couples de modes calculés à la collection.

Nous avons alors obtenu les résultats suivants :

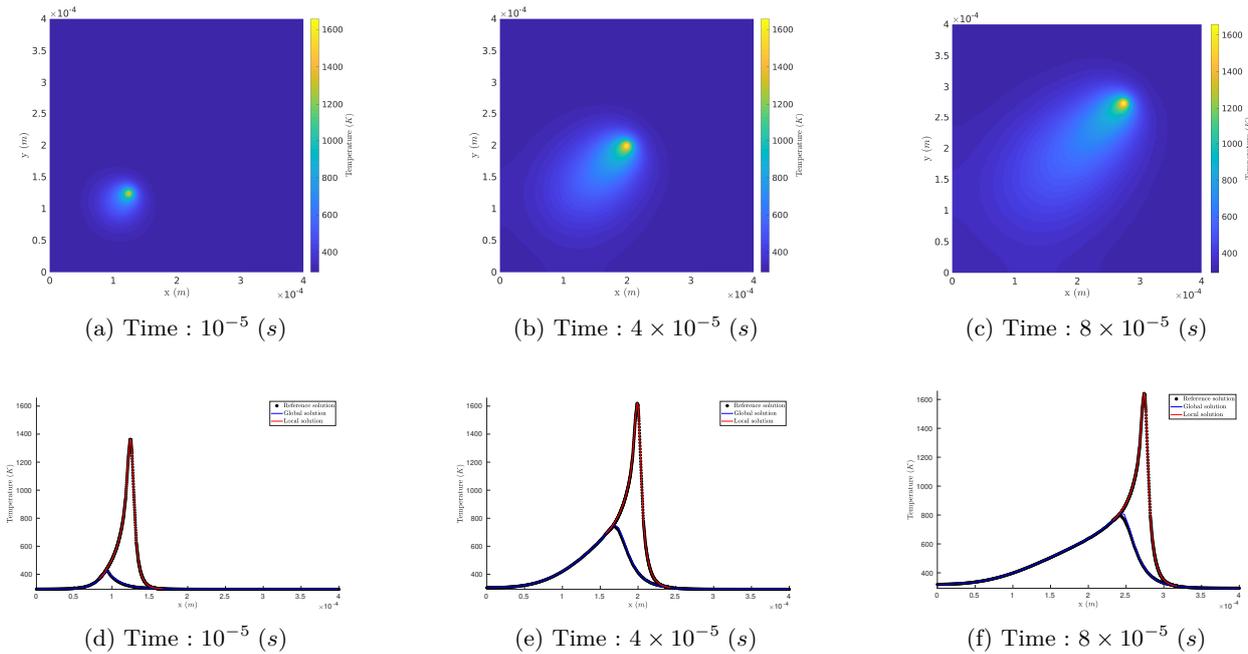


FIGURE 5.28 – Evolution du champ thermique total en (a), (b) et (c) et dans la section dans (d), (e) et (f).

Il semble que nous convergions bien vers la même solution que précédemment. L'évolution du résidu est illustré par la Figure 5.29. Nous observons que la vitesse de convergence de l'algorithme de gradient n'est pas modifiée (une itération supplémentaire).

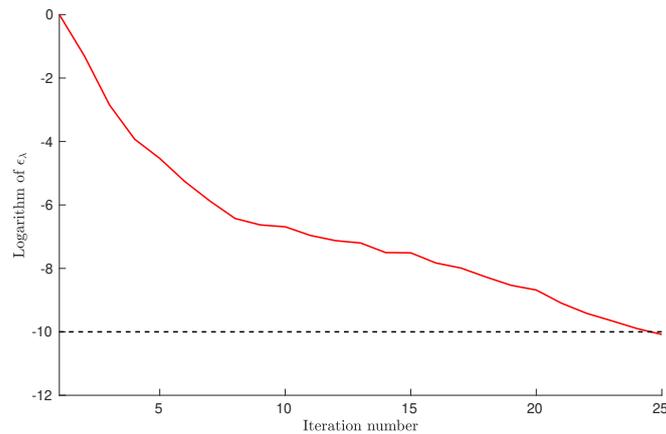


FIGURE 5.29 – Convergence du second exemple réduit.

Afin d'analyser l'apport de cette variante, nous avons tracé l'évolution du nombre total de modes PGD en fonction du numéro de l'itération de l'algorithme de gradient.

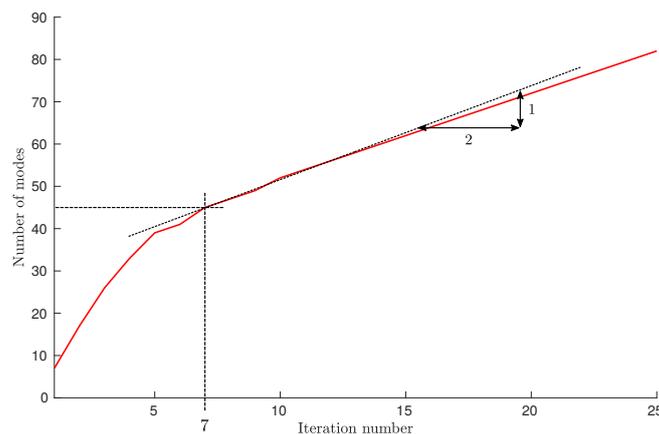


FIGURE 5.30 – Nombre de modes en fonction des itérations.

Nous observons qu'après la septième itération de l'algorithme du gradient, nous ne calculons qu'en moyenne deux modes PGD supplémentaires, réduisant ainsi le coût de chaque itérations. Cependant nous obtenons un nombre très importants de modes à convergence : 85. Ceci signifie que lorsque nous rechercherons une solution dans l'espace engendré par cette famille de mode, nous aurons des systèmes matriciels pleins et de tailles plus importantes qu'avec la première stratégie où quatre fois moins de modes étaient conservés.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, après avoir rappelé les principes généraux de la méthode de réduction de modèle PGD en nous appuyant sur un problème de Poisson, nous avons commencé par proposer deux variantes à cette méthode consistant en, lors de la recherche d'un nouveau radical, en l'ajout d'un ou de plusieurs paramètres en facteurs des radicaux calculés précédemment. Les résultats que nous avons obtenus pour le cas simple du problème de poisson en $2D$ ne montre pas un réel apport sur la vitesse de convergence de la méthode PGD.

Dans une seconde partie, nous avons détaillée une stratégie numérique permettant de localiser l'utilisation de la méthode PGD dans le domaine local suivant la source mobile de chaleur. Nous avons pu montrer numériquement, sur la base d'un problème thermique linéaire instationnaire avec une source immobile puis mobile, la faisabilité de notre méthode.

Ces travaux ouvrent plusieurs perspectives à court et long termes :

- L'implémentation de maillage incompatibles en temps pour les domaines global et local.
- La possibilité d'utiliser un autre algorithme que l'algorithme de gradient sur le multiplicateur de Lagrange, comme par exemple le gradient conjugué.
- La stratégie numérique à mettre en place, réutilisant les modes que nous avons calculé pour simuler le reste des trajectoires du laser et la possibilité de compléter la collection de mode au cour de la simulation.
- La capacité à aborder des physiques plus complexes avec la méthode PGD.
- L'apport de l'utilisation de la méthode PGD par rapport à la méthode POD pour cette problématique.

Conclusions et perspectives

Les travaux réalisés dans cette thèse s'inscrivent dans le cadre d'un projet visant au développement de méthodologies numériques permettant d'aider, le plus efficacement possible, à la conception de pièces-FA par le procédé SLM.

Etant une première pierre à cet édifice, ils se sont concentrés sur la description macroscopique du scénario thermique subi par la pièce lors de sa fabrication, physique qui, sous des hypothèses usuellement faites à cette échelle, peut-être découplée des autres. Leur but a été de développer un cadre de modélisation répondant à cinq objectifs, établis après l'analyse des difficultés de modélisation et simulation du procédé. Nous les rappelons ici :

- (\mathcal{C}_1) - Prendre en compte les caractéristiques du problème thermique induit par le procédé SLM que nous rappelons ici : multi-physique, multi-échelle, localement non linéaire et irrégulier, changement permanent du domaine géométrique (portant le problème à résoudre par additions successives d'incrément matière), très fortes localisations des chargements induits par les lasers.
- (\mathcal{C}_2) - Permettre la compatibilité ou la coopération de nos méthodes avec les codes existants traitant de certains des phénomènes mentionnés.
- (\mathcal{C}_3) - Répondre à l'enjeu majeur de la réduction des coûts des simulations du problème par les méthodes proposées.
- (\mathcal{C}_4) - Permettre un bon degré de contrôle de la fiabilité de ces méthodes.
- (\mathcal{C}_5) - Donner des retombées pour des problèmes de l'ingénieur autre que celui de la FA.

Ils ont été développés suivant quatre étapes (donnant la composition des chapitres du document) :

Une première étape a été de développer une stratégie, permettant d'adresser les difficultés caractéristiques du problème thermique macroscopique et ainsi répondre au premier critère (\mathcal{C}_1). Au vu de la nature fortement multi-échelles de ces difficultés, nous avons motivé l'utilisation du cadre multi-modèles et multi-échelles Arlequin comme base. La stratégie que nous avons proposée consiste en l'introduction, dans la zone critique sous et dans le sillage du laser, de deux patchs, un Patch-Micro et un Patch-Méso permettant de :

- prendre en compte finement l'évolution permanente du domaine par ajout d'incrément de matière de plus avec un contrôle total,
- modéliser finement le flux de chaleur apporté par le laser,
- capter finement les gradients thermiques intenses et localisés sous le laser,
- localiser le traitement numérique de la non-linéarité due au phénomène de changement de phase.

De plus, cette stratégie répond à d'autres points du cahier des charges. En effet, les dimensions des patchs qu'elle introduit étant adaptées aux zones nécessitant la finesse particulière qu'ils apportent (« sur-mesure »), elle permet de limiter les coûts numériques au minimum nécessaire et répond ainsi au critère (\mathcal{C}_3). Elle semble également directement adaptable à d'autres problématiques que celle de la FA (par exemple celle du soudage), elle valide donc aussi le critère (\mathcal{C}_5).

Une seconde étape a été d'étudier l'influence du choix d'un raccord en volume, par rapport à un surfacique, sur les performances du solveur FETI que nous avons choisi pour résoudre les systèmes matriciels mixtes, découlant de la discrétisation du problème thermique écrit dans le cadre de notre stratégie. Ainsi nous avons comparé, sur la base de trois problèmes en lien avec ceux rencontrés lors de la modélisation du procédé SLM, les performances d'un couplage volumique et surfacique. Les résultats que nous avons obtenus montrent numériquement, que l'écriture d'un couplage volumique, dans le cadre Arlequin, entre deux sous-domaines améliore globalement la vitesse de convergence des méthodes de résolution du type FETI. Ceci s'expliquant par le meilleur conditionnement des systèmes matriciels, découlant de la nature volumique des opérateurs de couplage. Dans le but de réduire toujours plus les coûts numériques, nous avons proposé et implémenté une méthode de couplage volumique dite « compatible » permettant de s'affranchir des difficultés qu'engendre la mise en place du cadre Arlequin entre deux maillages non-compatibles (problématique d'intégration numérique pour le calcul des opérateurs de couplage et des matrices pondérées par la partition d'unité) et restreindre la zone de couplage à une ceinture d'éléments

macroscopiques. Nous avons alors, à nouveau, comparé les vitesses de résolution de ce nouveau raccord avec les raccords surfaciques et des vitesses de convergence plus rapides pour le couplage volumique. Ainsi, pour la simulation du procédé SLM, le couplage volumique, même si nous restons à une échelle de modélisation macroscopique basée sur le cadre de la Mécanique des Milieux Continus, apporte une flexibilité n'engendrant pas de coûts numériques plus importants que le couplage surfacique. Ce chapitre a permis de s'assurer que notre stratégie répond au mieux au critère (\mathcal{C}_3).

Une troisième étape a consisté à développer une extension des méthodes Itératives Globales-Locales Non-Invasives (IGLNI) au cas d'un couplage de type énergétique-volumique Arlequin afin de répondre au critère (\mathcal{C}_2). Les résultats numériques que nous avons obtenus témoignent de la faisabilité et de la pertinence de cette nouvelle approche. En effet, les tendances de convergence de l'algorithme IGLNI pour un couplage surfacique ou volumique sont proches. De plus si le couplage « compatible », développé au Chapitre 3 est utilisé, comme à chaque étape de l'algorithme Global-Local des problèmes discrets mixtes sont à résoudre, nous pouvons imaginer un coût numérique finale plus faible pour le cas volumique que surfacique et répondre ainsi au critère (\mathcal{C}_3).

Cette nouvelle approche permet, combinant de manière adéquat les méthodes IGLNI dans le cadre Arlequin, pour la mise en coopération et communication de différents codes, de profiter de la flexibilité du couplage volumique et de sa capacité à coupler des modèles réellement multi-échelles.

Une dernière étape s'est intéressée, dans l'optique du critère (\mathcal{C}_3), à l'introduction des méthodes de réduction de modèle, localement dans le cadre Arlequin. Elle a premièrement consisté à proposer deux variantes de la méthodes Proper Generalized Decomposition (PGD) dont les applications numériques n'ont pas démontré un avantage particulier apporté par celles-ci. Ensuite, dans le but de capter les motifs récurrents du champ thermique des domaines locaux, présents sous le laser, nous avons détaillé une stratégie permettant la construction d'une représentation séparée par la méthode PGD des ces champs. Nous avons pu montrer numériquement la faisabilité de cette stratégie.

De nombreuses perspectives demeurent pour ces travaux :

- Mettre en place la stratégie thermique développée au Chapitre 2, pour la simulation de pièces aux formes plus complexes et en trois dimensions.
- Combiner la stratégie thermique et le couplage « compatible » développé au Chapitre 3.
- Etendre la stratégie de construction d'un modèle réduit du champ thermique dans le cadre Arlequin afin de réutiliser les modes et simuler le balayage de couche à l'échelle réelle.
- Utiliser les méthodes IGLNI avec le couplage volumique pour réaliser un véritable couplage multi-échelle.
- Adapter la stratégie de simulation thermique macroscopique à la mécanique et métallurgie.
- Introduire des modèles mésoscopiques et même microscopiques dans les patches de la stratégie thermique et prendre ainsi en compte d'autres phénomènes physiques.

Annexes

A.1 Annexes : Chapitre 3

A.1.1 Algorithmes de GC

Gradient Conjugué

Nous considérons le problème générique suivant :

$$\mathbf{S}_d \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{L}_d \quad (\text{A.1})$$

avec la matrice \mathbf{S}_d , carrée, symétrique définie et positive.

L'algorithme de GC consiste à rechercher $\boldsymbol{\lambda}$ de manière itérative sous la forme : $\boldsymbol{\lambda}_{k+1} = \boldsymbol{\lambda}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$. Le paramètre α_k est choisi à chaque itération de manière à minimiser la norme du vecteur $\boldsymbol{\lambda}_k - \boldsymbol{\lambda}$ pour une direction de descente donnée \mathbf{p}_k . La nouvelle direction de descente \mathbf{p}_k est quant à elle recherchée dans le plan formé par les deux directions orthogonales $\mathbf{r}_k = \mathbf{L}_d - \mathbf{S}_d \boldsymbol{\lambda}_k$ et \mathbf{p}_{k-1} : $\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_k + \beta_k \mathbf{p}_{k-1}$. Le paramètre β_k est déterminé de façon à ce que le facteur de réduction de l'erreur soit le plus grand. Les différentes étapes de l'algorithme sont données dans l'algorithme 6.

Algorithm 6 Algorithme du Gradient Conjugué

Initialisation:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_0, \\ \mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0 = \mathbf{L}_d - \mathbf{S}_d \boldsymbol{\lambda}_0, \end{aligned}$$

Sortie: $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{L}_d$

tant que $\epsilon \geq \text{critère}$ **faire**

$$\alpha_k = \frac{\|\mathbf{r}_k\|^2}{(\mathbf{S}_d \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_k)},$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{k+1} = \boldsymbol{\lambda}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k,$$

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{S}_d \mathbf{p}_k,$$

$$\beta_{k+1} = \frac{\|\mathbf{r}_{k+1}\|^2}{\|\mathbf{r}_k\|^2},$$

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} + \beta_{k+1} \mathbf{p}_k$$

fin tant que

La convergence de l'algorithme est mesurée par la norme du résidu relativisée par la norme du second membre, ce qui donne pour l'itération k la formule suivante :

$$\epsilon = \frac{\|\mathbf{r}_k\|_2}{\|\mathbf{L}_d\|_2} \quad (\text{A.2})$$

Gradient Conjugué Projeté

Algorithm 7 Algorithme du Gradient Conjugué Projeté

Initialisation:

$$\lambda_0 = \mathbf{G} \left(\mathbf{G}^T \mathbf{G} \right)^{-1} \mathbf{R}_f^T \mathbf{F}_l,$$

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{L}_d - \mathbf{S}_d \lambda_0,$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{P} \mathbf{r}_0$$

Sortie: $\lambda = \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{L}_d$

tant que $\epsilon = \|\mathbf{P} \mathbf{r}_{k+1}\| \geq \text{critère faire}$

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{P} \mathbf{r}_k, \mathbf{p}_k)}{(\mathbf{S}_d \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_k)},$$

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \alpha_k \mathbf{p}_k,$$

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{S}_d \mathbf{p}_k,$$

$$\beta_{k+1} = \frac{(\mathbf{P} \mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{S}_d \mathbf{p}_k)}{(\mathbf{S}_d \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_k)},$$

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{P} \mathbf{r}_{k+1} + \beta_{k+1} \mathbf{p}_k$$

fin tant que

Gradient Conjugué Préconditionné

Comme détaillé dans [154] même si \mathbf{M}_{pc} est symétrique, la matrice $\mathbf{M}_{pc} \mathbf{S}_d$ ne l'est pas forcément et nous ne pouvons plus utiliser directement l'algorithme de GC. Si la matrice \mathbf{M}_{pc} est symétrique, définie et positive elle admet alors une racine carré $\mathbf{M}_{pc}^{\frac{1}{2}}$ symétrique et définie positive telle que $\left(\mathbf{M}_{pc}^{\frac{1}{2}} \right)^2 = \mathbf{M}_{pc}$ et inversible (définie et carrée). Par l'égalité :

$$\mathbf{M}_{pc}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{M}_{pc} \mathbf{S}_d) \mathbf{M}_{pc}^{\frac{1}{2}} \mathbf{M}_{pc}^{-\frac{1}{2}} \lambda = \left(\mathbf{M}_{pc}^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}_d \mathbf{M}_{pc}^{\frac{1}{2}} \right) \mathbf{M}_{pc}^{-\frac{1}{2}} \lambda \quad (\text{A.3})$$

La matrice $\mathbf{M}_{pc} \mathbf{S}_d$ est donc semblable à la matrice symétrique, définie positive $\tilde{\mathbf{S}}_d = \mathbf{M}_{pc}^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}_d \mathbf{M}_{pc}^{\frac{1}{2}}$, nous considérons donc le système suivant :

$$\tilde{\mathbf{S}}_d \mathbf{M}_{pc}^{-\frac{1}{2}} \lambda = \mathbf{M}_{pc}^{\frac{1}{2}} \mathbf{L}_d \quad (\text{A.4})$$

Nous appliquons l'algorithme 6 au système (A.4), l'algorithme (GC) est alors légèrement modifié (voir 8).

Algorithm 8 Algorithme du Gradient Conjugué Préconditionné**Initialisation:**

$$\begin{aligned} & \lambda_0, \\ & \mathbf{r}_0 = \mathbf{L}_d - \mathbf{S}_d \lambda_0, \\ & \mathbf{M}_{pc}^{-1} \mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0, \\ & \mathbf{z}_0 = \mathbf{p}_0 \end{aligned}$$

Sortie: $\lambda = \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{L}_d$ **tant que** $\epsilon = \|\mathbf{r}_{k+1}\| \geq \text{critère faire}$

$$\begin{aligned} & \alpha_k = \frac{(\mathbf{r}_k, \mathbf{z}_k)}{(\mathbf{S}_d \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_k)}, \\ & \lambda_{k+1} = \lambda_k + \alpha_k \mathbf{p}_k, \\ & \mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{S}_d \mathbf{p}_k, \\ & \mathbf{M}_{pc}^{-1} \mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1}, \\ & \beta_{k+1} = \frac{(\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{z}_{k+1})}{(\mathbf{r}_k, \mathbf{z}_k)}, \\ & \mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1} + \beta_{k+1} \mathbf{p}_k \end{aligned}$$

fin tant que

Nous remarquons qu'à chaque itération un nouveau système de la forme : $M_{pc}^{-1} z = r$ est à résoudre et toujours dans une optique de performance, il est indispensable que cette résolution soit facile et rapide. Ici, l'inconnue duale étant restreinte à la zone de couplage, ces systèmes seront de taille réduite par rapport au système global.

Gradient Conjugué Projeté Préconditionné**Algorithm 9** Algorithme du Gradient Conjugué Projeté Préconditionné**Initialisation:**

$$\begin{aligned} & \lambda_0 = \mathbf{G} \left(\mathbf{G}^T \mathbf{G} \right)^{-1} \mathbf{R}_1^T \mathbf{F}_l, \\ & \mathbf{r}_0 = \mathbf{L}_d - \mathbf{S}_d \lambda_0, \\ & \mathbf{z}_0 = \mathbf{P} \mathbf{r}_0, \\ & \mathbf{p}_0 = \mathbf{P} \mathbf{P}_d^{-1} \mathbf{z}_0 \end{aligned}$$

Sortie: $\lambda = \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{L}_d$ **tant que** $\epsilon_r = \|\mathbf{P} \mathbf{r}_{k+1}\| \geq \epsilon \|\mathbf{L}_d\|$ **faire**

$$\begin{aligned} & \alpha_k = \frac{(\mathbf{p}_k, \mathbf{z}_k)}{(\mathbf{S}_d \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_k)}, \\ & \lambda_{k+1} = \lambda_k + \alpha_k \mathbf{p}_k, \\ & \mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{S}_d \mathbf{p}_k, \\ & \mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{P} \mathbf{r}_{k+1}, \\ & \beta_{k+1} = \frac{(\mathbf{P} \mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{S}_d \mathbf{p}_k)}{(\mathbf{S}_d \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_k)}, \\ & \mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{P} \mathbf{P}_d^{-1} \mathbf{z}_{k+1} + \beta_{k+1} \mathbf{p}_k \end{aligned}$$

fin tant que

Gradient Conjugué Projeté Réorthogonalisé

Algorithm 10 Algorithme du Gradient Conjugué Projeté Réorthogonalisé

Initialisation:

$$\lambda_0 = \mathbf{G} \left(\mathbf{G}^T \mathbf{G} \right)^{-1} \mathbf{R}_1^T \mathbf{F}_l,$$

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{L}_d - \mathbf{S}_d \lambda_0,$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{Pr}_0$$

Sortie: $\lambda = \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{L}_d$ **tant que** $\epsilon_r = \|\mathbf{Pr}_{k+1}\| \geq \epsilon \|\mathbf{L}_d\|$ **faire**

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{Pr}_k, \mathbf{p}_k)}{(\mathbf{S}_d \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_k)},$$

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \alpha_k \mathbf{p}_k,$$

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{S}_d \mathbf{p}_k,$$

for $0 \leq i \leq k$ **faire**

$$\beta_i = \frac{(\mathbf{Pr}_{k+1}, \mathbf{S}_d \mathbf{p}_i)}{(\mathbf{S}_d \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_i)},$$

fin for

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{Pr}_{k+1} + \sum_i^k \beta_i \mathbf{p}_i$$

fin tant que

Gradient Conjugué Projeté Réorthogonalisé Préconditionné

Algorithm 11 Algorithme du Gradient Conjugué Projeté Réorthogonalisé Préconditionné

Initialisation:

$$\lambda_0 = \mathbf{G} \left(\mathbf{G}^T \mathbf{G} \right)^{-1} \mathbf{R}_1^T \mathbf{F}_l,$$

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{L}_d - \mathbf{S}_d \lambda_0,$$

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{Pr}_0,$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{PP}_d^{-1} \mathbf{z}_0$$

Sortie: $\lambda = \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{L}_d$ **tant que** $\epsilon_r = \|\mathbf{Pr}_{k+1}\| \geq \epsilon \|\mathbf{L}_d\|$ **faire**

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{p}_k, \mathbf{z}_k)}{(\mathbf{S}_d \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_k)},$$

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \alpha_k \mathbf{p}_k,$$

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{S}_d \mathbf{p}_k,$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{Pr}_{k+1},$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{PP}_d^{-1} \mathbf{z}_{k+1},$$

for $0 \leq i \leq k$ **faire**

$$\beta_i = \frac{(\mathbf{y}_{k+1}, \mathbf{S}_d \mathbf{p}_i)}{(\mathbf{S}_d \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_i)},$$

fin for

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{y}_{k+1} + \sum_i^k \beta_i \mathbf{p}_i$$

fin tant que

A.1.2 Annexe : Méthode de Décomposition de Domaine compatible avec recouvrement

Gradient Conjugué (GC) : Problème (\mathcal{P}_{ti})

Opérateur de couplage L^2							
Méthode \ Maillage		h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6
V.	micro	222	252	313	423	497	597
	macro	64	65	96	129	155	214
PV.	micro	145	159	188	267	292	372
	macro	112	110	166	231	291	399
S.	micro	53	51	62	87	98	122
	macro	27	21	28	44	50	67
Opérateur de couplage H^1							
V.	micro	37	35	35	34	34	32
	macro	22	20	21	21	20	21
PV.	micro	46	38	43	44	44	42
	macro	24	21	22	24	24	27
S.	micro	53	50	63	89	96	122
	macro	27	21	28	44	50	68
Opérateur de couplage de la chaleur							
V.	micro	78	54	66	145	122	547
	macro	44	26	34	84	70	325
PV.	micro	89	49	63	185	163	757
	macro	46	26	36	86	76	335
S.	micro	53	51	63	89	97	122
	macro	27	21	28	45	50	67

TABLE A.1 – Tableau récapitulatif du nombre d’itération du GC pour chaque méthode en fonction de la taille du maillage.

GCP : Problème (\mathcal{P}_{ti})

Opérateur de couplage L^2							
Méthode \ Maillage		h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6
V.	micro	102	106	130	164	187	228
	macro	36	34	40	56	60	82
PV.	micro	71	71	83	111	120	155
	macro	42	40	49	73	78	100
S.	micro	37	35	43	57	60	78
	macro	22	17	23	30	31	44
Opérateur de couplage H^1							
V.	micro	23	23	26	29	29	36
	macro	13	12	13	16	16	23
PV.	micro	18	18	18	20	21	26
	macro	14	14	14	16	16	22
S.	micro	38	37	43	56	60	78
	macro	22	17	22	30	31	44
Opérateur de couplage de la chaleur							
V.	micro	25	25	26	32	34	47
	macro	18	16	19	30	28	45
PV.	micro	24	24	26	35	35	55
	macro	21	19	22	35	32	52
S.	micro	38	36	43	57	60	78
	macro	22	17	22	30	31	44

TABLE A.2 – Tableau récapitulatif du nombre d'itération du GCP pour chaque méthode en fonction de la taille du maillage.

GC Projeté : Problème (\mathcal{P}_{ts})

Opérateur de couplage L^2						
Méthode \ Maillage		h_1	h_2	h_3	h_4	h_5
V.	micro	305	335	420	568	680
	macro	82	77	110	158	199
PV.	micro	189	206	243	350	381
	macro	157	138	214	300	392
S.	micro	65	60	76	109	118
	macro	34	22	32	55	51
Opérateur de couplage H^1						
V.	micro	33	34	34	33	33
	macro	19	18	19	21	21
PV.	micro	42	36	40	42	43
	macro	23	21	22	26	25
S.	micro	65	59	75	108	118
	macro	34	22	32	56	52
Opérateur de couplage de la chaleur						
V.	micro	67	51	61	134	109
	macro	38	25	32	76	63
PV.	micro	80	47	60	161	138
	macro	41	26	34	80	70
S.	micro	67	60	76	108	117
	macro	34	22	32	55	53

TABLE A.3 – Tableau récapitulatif du nombre d'itération du (GC) projeté pour chaque méthode en fonction de la taille du maillage.

GC Projeté Préconditionné : Problème (\mathcal{P}_{ts})

Opérateur de couplage L^2						
Méthode \ Maillage		h_1	h_2	h_3	h_4	h_5
V.	micro	128	129	168	210	235
	macro	42	39	49	65	73
PV.	micro	82	86	102	138	150
	macro	77	80	94	149	155
S.	micro	24	23	26	35	34
	macro	21	16	19	29	30
Opérateur de couplage H^1						
V.	micro	28	26	29	33	35
	macro	14	14	15	19	18
PV.	micro	19	20	20	24	25
	macro	27	24	28	34	35
S.	micro	24	23	25	35	35
	macro	21	16	19	29	30
Opérateur de couplage de la chaleur						
V.	micro	26	26	29	33	36
	macro	15	16	19	26	28
PV.	micro	22	23	26	33	36
	macro	25	25	26	35	37
S.	micro	24	23	26	35	34
	macro	21	16	19	30	30

TABLE A.4 – Tableau récapitulatif du nombre d'itération du (GCP) projeté pour chaque méthode en fonction de la taille du maillage.

GC Projeté Réorthogonalisé : Problème (\mathcal{P}_{ts})

Opérateur de couplage L^2						
Méthode \ Maillage		h_1	h_2	h_3	h_4	h_5
V.	micro	98	106	121	158	181
	macro	44	45	59	77	92
PV.	micro	74	81	95	124	140
	macro	54	59	78	104	128
S.	micro	45	43	49	67	72
	macro	27	20	27	41	40
Opérateur de couplage H^1						
V.	micro	33	34	34	33	33
	macro	19	18	19	21	21
PV.	micro	42	36	40	42	43
	macro	23	21	22	26	25
S.	micro	45	43	49	67	72
	macro	27	20	27	41	40
Opérateur de couplage de la chaleur						
V.	micro	67	51	61	134	109
	macro	38	25	32	75	63
PV.	micro	79	47	60	160	138
	macro	41	26	34	79	69
S.	micro	45	43	49	67	72
	macro	27	20	27	41	40

TABLE A.5 – Tableau récapitulatif du nombre d'itération du (GC) projeté réorthogonalisé pour chaque méthode en fonction de la taille du maillage.

GC Projeté Réorthogonalisé Préconditionné : Problème (\mathcal{P}_{ts})

Opérateur de couplage L^2						
Méthode \ Maillage		h_1	h_2	h_3	h_4	h_5
V.	micro	67	67	79	97	108
	macro	32	32	36	47	51
PV.	micro	52	52	60	76	84
	macro	47	50	58	77	80
S.	micro	22	21	24	29	30
	macro	19	16	19	27	27
Opérateur de couplage H^1						
V.	micro	27	26	27	30	31
	macro	14	14	15	18	18
PV.	micro	19	20	20	23	23
	macro	27	24	27	32	32
S.	micro	22	21	24	29	30
	macro	19	16	19	27	27
Opérateur de couplage de la chaleur						
V.	micro	24	24	27	29	31
	macro	15	16	19	25	27
PV.	micro	22	23	25	32	34
	macro	24	23	24	31	33
S.	micro	22	21	24	29	30
	macro	19	16	19	27	27

TABLE A.6 – Tableau récapitulatif du nombre d’itération du (GCP) projeté réorthogonalisé pour chaque méthode en fonction de la taille du maillage.

A.1.3 Annexe : Expérimentation numérique

Choix de l'espace grossier

$\gamma_m \setminus \gamma_r$	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5
10^{-5}	15	23	34	37	45	54	62	96	245	299	299
10^{-4}	23	15	23	34	37	45	52	62	95	299	299
10^{-3}	28	23	15	23	34	37	45	52	61	94	227
10^{-2}	30	28	23	15	23	34	37	45	53	62	95
10^{-1}	29	30	28	23	15	23	34	37	45	54	62
1	30	30	30	28	23	15	23	35	37	40	54
10^1	30	30	30	28	28	23	15	23	35	38	39
10^2	30	30	30	30	30	28	23	15	24	36	38
10^3	30	30	30	30	30	30	30	24	16	26	37
10^4	33	34	34	33	35	34	34	32	25	17	28
10^5	36	36	36	36	36	36	36	36	36	29	19

TABLE A.7 – Tableau récapitulatif du nombre d'itérations du GCP en fonction des valeurs des paramètres γ_m et γ_r . En vert les valeurs minimales et en rouge celles qui ont dépassé la limite d'itération

Choix de l'espace fin

$\gamma_m \setminus \gamma_r$	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5
10^{-5}	46	50	66	86	96	110	153	218	299	299	299
10^{-4}	78	46	51	66	86	96	110	153	215	299	299
10^{-3}	150	77	46	50	66	86	96	110	122	215	299
10^{-2}	197	146	77	46	51	66	86	95	110	153	218
10^{-1}	209	200	147	77	46	51	66	86	96	110	152
1	211	214	202	148	78	46	51	66	86	95	109
10^1	209	211	209	199	150	78	46	51	66	86	95
10^2	211	211	210	211	197	148	77	46	53	68	87
10^3	208	209	212	215	210	203	148	79	48	56	72
10^4	208	212	209	215	214	214	202	152	82	52	62
10^5	224	224	221	227	222	225	220	215	160	92	56

TABLE A.8 – Tableau récapitulatif du nombre d'itérations du GCP en fonction des valeurs des paramètres γ_m et γ_r .**A.2 Annexes : Chapitre 5****A.2.1 Algèbre tensorielle**

Comme introduit dans [184], soit $\text{Vect}(\mathbf{T})$ l'opérateur de « vectorisation » d'une telle matrice, i.e., ses colonnes sont collectées l'une après l'autre en un vecteur colonne $\text{Vect}(\mathbf{T})$ de longueur $N \times J$. Nous introduisons également l'opération « arrayzation » qui est l'opération inverse de la « vectorisation ». Maintenant, si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ et $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{J \times J}$ sont des matrices, nous avons :

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \text{Vect}(\mathbf{T}) = \text{Vect}(\mathbf{BTA}^T) \quad (\text{A.5})$$

et aussi si A et B sont non-singulières, nous pouvons écrire :

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}) \quad (\text{A.6})$$

finalement :

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD}) \quad (\text{A.7})$$

A.2.2 Inversion du complément de Schur spatio-temporel

Le complément de Schur spatio-temporel est la somme de matrices dont la forme peut s'écrire comme :

$$\mathbf{M}^{sp} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_t(1,1)\mathbf{M}_x^1 & \cdots & \mathbf{M}_t(1,j)\mathbf{M}_x^j & \cdots & \mathbf{M}_t(1,J)\mathbf{M}_x^J \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{M}_t(j,1)\mathbf{M}_x^1 & \cdots & \mathbf{M}_t(j,j)\mathbf{M}_x^j & \cdots & \mathbf{M}_t(j,J)\mathbf{M}_x^J \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{M}_t(J,1)\mathbf{M}_x^1 & \cdots & \mathbf{M}_t(J,j)\mathbf{M}_x^j & \cdots & \mathbf{M}_t(J,J)\mathbf{M}_x^J \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

La matrice \mathbf{M}_t est la matrice de masse qui sur un maillage temporel est tridiagonale. Un approche classique et très efficace est l'algorithme de Thomas, voir [185]. Pour calculer le produit de son inverse avec une autre matrice ou un vecteur, nous construisons sa décomposition \mathbf{LU} . Donc nous commençons avec la forme tridiagonale de \mathbf{M}^{sp} et nous changeons le nom de chaque blocs :

$$\mathbf{M}^{sp} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^1 & \mathbf{C}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{B}^2 & \mathbf{A}^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{C}^{J-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{B}^J & \mathbf{A}^J \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Chaque matrices \mathbf{M}_x^j sont de dimension $N \times N$ avec $N \gg J$. Les matrices \mathbf{L} et \mathbf{U} de la matrice \mathbf{LU} sont données par :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mathbf{L}^2 & \mathbb{I} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{L}^J & \mathbb{I} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^1 & \mathbf{C}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{U}^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \mathbf{C}^{J-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathbf{U}^J \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

avec $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ la matrice identité.

Algorithm 12 Algorithme de construction de la décomposition \mathbf{LU}

Initialisation: \mathbf{M}^{sp}

Sortie: $\mathbf{LU} = \mathbf{M}^{sp}$.

$\mathbf{U}^1 = \mathbf{A}^1$

for j de 2 à J **faire**

$\mathbf{L}^j = (\mathbf{U}^{j-1})^{-1} \mathbf{B}^j$ and $\mathbf{U}^j = \mathbf{A}^j - \mathbf{L}^j \mathbf{C}^{j-1}$

fin for

Le calcul de la solution du système suivant $\mathbf{M}^{sp} \mathbf{X} = \mathbf{F}$, avec \mathbf{X} et $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{(N \times J) \times (N \times J)}$ devenant la résolution des deux sous-système bi-diagonaux :

$$\mathbf{L} \mathbf{Y} = \mathbf{F} \quad \text{and} \quad \mathbf{U} \mathbf{X} = \mathbf{Y} \quad (\text{A.11})$$

avec $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{(N \times J) \times (N \times J)}$. Nous utilisons le même indexage des blocs pour X , Y et F . Ils sont résolus par l'algorithme suivant :

Algorithm 13 Algorithme de Thomas

Initialisation: \mathbf{L} et \mathbf{U}

Sortie: $\mathbf{X} = (\mathbf{M}^{sp})^{-1} \mathbf{F}$.

- Résolution du premier système :

$$\mathbf{Y}_{1,\delta} = \mathbf{F}_{1,\delta} \text{ for } \delta = 1 \dots J$$

for j de 2 à J **faire**

$$\mathbf{Y}_{j,\delta} = \mathbf{F}_{j,\delta} - (\mathbf{L}^j)^{-1} \mathbf{Y}_{j-1,\delta} \text{ pour } \delta = 1 \dots J$$

fin for

- Résolution du second système :

$$\mathbf{X}_{J,\delta} = \mathbf{Y}_{J,\delta} \text{ pour } \delta = 1 \dots J$$

for j de $J - 1$ à 1 **faire**

$$\mathbf{X}_{j,\delta} = (\mathbf{U}^j)^{-1} (\mathbf{Y}_{j,\delta} - (\mathbf{C}^j)^{-1} \mathbf{X}_{j+1,\delta}) \text{ pour } \delta = 1 \dots J$$

fin for

Bibliographie

- [1] Claude Barlier and Alain Bernard. *Fabrication additive*. Dunod, 2015.
- [2] Grégoire Allaire and Marc Schoenauer. *Conception optimale de structures*, volume 58. Springer, 2007.
- [3] W. J. Sames, F. A. List, S. Pannala, R. R. Dehoff, and S. S. Babu. The metallurgy and processing science of metal additive manufacturing. *International Materials Reviews*, 61(5) :315–360, 2016.
- [4] Bi Zhang, Yongtao Li, and Qian Bai. Defect formation mechanisms in selective laser melting : A review. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 30(3) :515–527, May 2017.
- [5] Yancheng Zhang, Alain Combescure, and Anthony Gravouil. Efficient hyper-reduced-order model (hrom) for thermal analysis in the moving frame. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 111(2) :176–200, 2017.
- [6] Di Wang, Yongqiang Yang, Ziheng Yi, and Xubin Su. Research on the fabricating quality optimization of the overhanging surface in slm process. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 65(9) :1471–1484, Apr 2013.
- [7] C. D. Boley, S. A. Khairallah, and A. M. Rubenchik. Calculation of laser absorption by metal powders in additive manufacturing. *Appl. Opt.*, 54(9) :2477–2482, Mar 2015.
- [8] Saad A. Khairallah, Andrew T. Anderson, Alexander Rubenchik, and Wayne E. King. Laser powder-bed fusion additive manufacturing : Physics of complex melt flow and formation mechanisms of pores, spatter, and denudation zones. *Acta Materialia*, 108 :36 – 45, 2016.
- [9] Matthias Markl and Carolin Körner. Multiscale modeling of powder bed-based additive manufacturing. *Annual Review of Materials Research*, 46(1) :93–123, 2016.
- [10] Christoph Meier, Ryan W. Penny, Yu Zou, Jonathan S. Gibbs, and A. John Hart. Thermophysical Phenomena in Metal Additive Manufacturing by Selective Laser Melting : Fundamentals, Modeling, Simulation and Experimentation. sep 2017.
- [11] C.E. Krills and L.-Q. Chen. Computer simulation of 3-d grain growth using a phase-field model. *Acta Materialia*, 50(12) :3059 – 3075, 2002.
- [12] M.R. Dorr, J.-L. Fattebert, M.E. Wickett, J.F. Belak, and P.E.A. Turchi. A numerical algorithm for the solution of a phase-field model of polycrystalline materials. *Journal of Computational Physics*, 229(3) :626 – 641, 2010.
- [13] Carolin Körner, Elham Attar, and Peter Heinl. Mesoscopic simulation of selective beam melting processes. *Journal of Materials Processing Technology*, 211(6) :978 – 987, 2011.
- [14] Regina Ammer, Matthias Markl, Ulric Ljungblad, Carolin Körner, and Ulrich Råde. Simulating fast electron beam melting with a parallel thermal free surface lattice boltzmann method. *Computers & Mathematics with Applications*, 67(2) :318 – 330, 2014. Mesoscopic Methods for Engineering and Science (Proceedings of ICMMES-2012, Taipei, Taiwan, 23-27 July 2012).

- [15] Saad A. Khairallah and Andy Anderson. Mesoscopic simulation model of selective laser melting of stainless steel powder. *Journal of Materials Processing Technology*, 214(11) :2627 – 2636, 2014.
- [16] Saad A. Khairallah, Andrew T. Anderson, Alexander Rubenchik, and Wayne E. King. Laser powder-bed fusion additive manufacturing : Physics of complex melt flow and formation mechanisms of pores, spatter, and denudation zones. *Acta Materialia*, 108 :36 – 45, 2016.
- [17] Yancheng Zhang, Qiang Chen, Gildas Guillemot, Charles-André Gandin, and Michel Bellet. Numerical modelling of fluid and solid thermomechanics in additive manufacturing by powder-bed fusion : Continuum and level set formulation applied to track- and part-scale simulations. *Comptes Rendus Mécanique*, 346(11) :1055 – 1071, 2018. Computational methods in welding and additive manufacturing Simulation numérique des procédés de soudage et fabrication additive.
- [18] Lars-Erik Lindgren. Finite element modeling and simulation of welding part 1 : Increased complexity. *Journal of Thermal Stresses*, 24(2) :141–192, 2001.
- [19] Michael Gouge, Pan Michaleris, Erik Denlinger, and Jeff Irwin. Chapter 2 - the finite element method for the thermo-mechanical modeling of additive manufacturing processes. In Michael Gouge and Pan Michaleris, editors, *Thermo-Mechanical Modeling of Additive Manufacturing*, pages 19 – 38. Butterworth-Heinemann, 2018.
- [20] Michele Chiumenti, Miguel Cervera, Alessandro Salmi, Carlos Agelet de Saracibar, Narges Dialami, and Kazumi Matsui. Finite element modeling of multi-pass welding and shaped metal deposition processes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(37) :2343 – 2359, 2010.
- [21] Michael Gouge. Chapter 4 - conduction losses due to part fixturing during laser cladding. In Michael Gouge and Pan Michaleris, editors, *Thermo-Mechanical Modeling of Additive Manufacturing*, pages 61 – 79. Butterworth-Heinemann, 2018.
- [22] Qingcheng Yang, Pu Zhang, Lin Cheng, Zheng Min, Minking Chyu, and Albert C. To. Finite element modeling and validation of thermomechanical behavior of ti-6al-4v in directed energy deposition additive manufacturing. *Additive Manufacturing*, 12 :169 – 177, 2016. Special Issue on Modeling & Simulation for Additive Manufacturing.
- [23] Jean Lemaitre, Jean-Louis Chaboche, Ahmed Benallal, and Rodrigue Desmorat. *Mécanique des matériaux solides*, volume 2. Dunod Paris, 1985.
- [24] Michel Rappaz, Michel Bellet, and Michel Deville. *Numerical modeling in materials science and engineering*, volume 32. Springer Science & Business Media, 2010.
- [25] V.R Voller. An overview of numerical methods for phase change problems. *Advances in Numerical Heat Transfer*, 1 :341 – 375, 1996.
- [26] Sergio R. Idelsohn, Mario A. Storti, and Luis A. Crivelli. Numerical methods in phase-change problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 1(1) :49–74, Mar 1994.
- [27] R. H. Nochetto, A. Schmidt, and C. Verdi. A posteriori error estimation and adaptivity for degenerate parabolic problems. *Mathematics of Computation*, 69(229) :1–24, 2000.
- [28] Somnath Ghosh and Suresh Moorthy. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element model for heat transfer analysis of solidification processes. *Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals*, 23(3) :327–350, 1993.
- [29] Jack Chessa, Patrick Smolinski, and Ted Belytschko. The extended finite element method (xfem) for solidification problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(8) :1959–1977, 2002.
- [30] Lubomír Klimeš, Tomáš Mauder, Pavel Charvát, and Josef Štětina. An accuracy analysis of the front tracking method and interface capturing methods for the solution of heat transfer problems with phase changes. *Journal of Physics : Conference Series*, 745(3) :032136, 2016.

- [31] V. R. Voller, C. R. Swaminathan, and B. G. Thomas. Fixed grid techniques for phase change problems : A review. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30(4) :875–898, 1990.
- [32] B. Nedjar. An enthalpy-based finite element method for nonlinear heat problems involving phase change. *Computers and Structures*, 80(1) :9 – 21, 2002.
- [33] E. Feulvarch and J.-M. Bergheau. An implicit fixed-grid method for the finite-element analysis of heat transfer involving phase changes. *Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals*, 51(6) :585–610, 2007.
- [34] Yvan Dutil, Daniel R. Rousse, Nizar Ben Salah, Stéphane Lassue, and Laurent Zalewski. A review on phase-change materials : Mathematical modeling and simulations. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 15(1) :112 – 130, 2011.
- [35] Sakae Yagi and Daizo Kunii. Studies on effective thermal conductivities in packed beds. *AIChE Journal*, 3(3) :373–381, 1957.
- [36] Samuel S Xue and Joel W Barlow. Models for the prediction of the thermal. In *1991 International Solid Freeform Fabrication Symposium*, 1991.
- [37] SAMUEL SUMIN SIH and JOEL W. BARLOW. The prediction of the emissivity and thermal conductivity of powder beds. *Particulate Science and Technology*, 22(4) :427–440, 2004.
- [38] Mujian Xia, Dongdong Gu, Guanqun Yu, Donghua Dai, Hongyu Chen, and Qimin Shi. Porosity evolution and its thermodynamic mechanism of randomly packed powder-bed during selective laser melting of inconel 718 alloy. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 116 :96 – 106, 2017.
- [39] Jie Yin, Haihong Zhu, Linda Ke, Wenjuan Lei, Cheng Dai, and Duluo Zuo. Simulation of temperature distribution in single metallic powder layer for laser micro-sintering. *Computational Materials Science*, 53(1) :333 – 339, 2012.
- [40] Loong-Ee Loh, Chee-Kai Chua, Wai-Yee Yeong, Jie Song, Mahta Mapar, Swee-Leong Sing, Zhong-Hong Liu, and Dan-Qing Zhang. Numerical investigation and an effective modelling on the selective laser melting (slm) process with aluminium alloy 6061. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 80 :288 – 300, 2015.
- [41] Yancheng Zhang, Gildas Guillemot, Marc Bernacki, and Michel Bellet. Macroscopic thermal finite element modeling of additive metal manufacturing by selective laser melting process. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 331 :514 – 535, 2018.
- [42] Michele Chiumenti, Eric Neiva, Emilio Salsi, Miguel Cervera, Santiago Badia, Joan Moya, Zhuoer Chen, Caroline Lee, and Christopher Davies. Numerical modelling and experimental validation in selective laser melting. *Additive Manufacturing*, 18 :171 – 185, 2017.
- [43] A.V. Gusarov and I. Smurov. Modeling the interaction of laser radiation with powder bed at selective laser melting. *Physics Procedia*, 5(Part B) :381 – 394, 2010. Laser Assisted Net Shape Engineering 6, Proceedings of the LANE 2010, Part 2.
- [44] Masoud Alimardani, Ehsan Toyserkani, and Jan P. Huissoon. A 3d dynamic numerical approach for temperature and thermal stress distributions in multilayer laser solid freeform fabrication process. *Optics and Lasers in Engineering*, 45(12) :1115 – 1130, 2007.
- [45] L. Han, K. M. Phatak, and F. W. Liou. Modeling of laser cladding with powder injection. *Metalurgical and Materials Transactions B*, 35(6) :1139–1150, Dec 2004.
- [46] Amal Masmoudi, Rodolphe Bolot, and Christian Coddet. Investigation of the laser–powder–atmosphere interaction zone during the selective laser melting process. *Journal of Materials Processing Technology*, 225 :122 – 132, 2015.

- [47] R Rai, J W Elmer, T A Palmer, and T DebRoy. Heat transfer and fluid flow during keyhole mode laser welding of tantalum, ti-6al-4v, 304l stainless steel and vanadium. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 40(18) :5753, 2007.
- [48] Qiang Chen, Gildas Guillemot, Charles-André Gandin, and Michel Bellet. Three-dimensional finite element thermomechanical modeling of additive manufacturing by selective laser melting for ceramic materials. *Additive Manufacturing*, 16 :124 – 137, 2017.
- [49] John Goldak, Aditya Chakravarti, and Malcolm Bibby. A new finite element model for welding heat sources. *Metallurgical transactions B*, 15(2) :299–305, 1984.
- [50] Michael F Zäh and S Lutzmann. Modelling and simulation of electron beam melting. *Production Engineering*, 4(1) :15–23, 2010.
- [51] L Zhang, E.W Reutzler, and P Michaleris. Finite element modeling discretization requirements for the laser forming process. *International Journal of Mechanical Sciences*, 46(4) :623 – 637, 2004.
- [52] *A Line Heat Input Model for Additive Manufacturing*, volume Volume 1 : Processing of *International Manufacturing Science and Engineering Conference*, 06 2015. V001T02A019.
- [53] S. S. Al-Bermani, M. L. Blackmore, W. Zhang, and I. Todd. The origin of microstructural diversity, texture, and mechanical properties in electron beam melted ti-6al-4v. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 41(13) :3422–3434, Dec 2010.
- [54] Guillaume Marion. *Modélisation de procédés de fabrication additive de pièces aéronautiques et spatiales en TA6V par projection et fusion sélective d’un lit de poudre par laser : Approche thermique, métallurgique et mécanique*. PhD thesis, Mines ParisTech, PSL Research University, Centre des Matériaux, CNRS UMR7633, 2016.
- [55] Panagiotis Michaleris. Modeling metal deposition in heat transfer analyses of additive manufacturing processes. *Finite Elements in Analysis and Design*, 86 :51 – 60, 2014.
- [56] Stanley Osher and James A Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79(1) :12 – 49, 1988.
- [57] K Dai and L Shaw. Thermal and stress modeling of multi-material laser processing. *Acta Materialia*, 49(20) :4171 – 4181, 2001.
- [58] K Dai and L Shaw. Thermal and mechanical finite element modeling of laser forming from metal and ceramic powders. *Acta Materialia*, 52(1) :69 – 80, 2004.
- [59] S. Kolossov, E. Boillat, R. Glardon, P. Fischer, and M. Locher. 3d fe simulation for temperature evolution in the selective laser sintering process. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 44(2) :117 – 123, 2004.
- [60] I A Roberts, C J Wang, R Esterlein, M Stanford, and D J Mynors. A three-dimensional finite element analysis of the temperature field during laser melting of metal powders in additive layer manufacturing. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 49(12-13) :916–923, 2009.
- [61] Gabriel Bugada Miguel Cervera and Guillermo Lombera. Numerical prediction of temperature and density distributions in selective laser sintering processes. *Rapid Prototyping Journal*, 5(1) :21–26, 1999.
- [62] Yali Li and Dongdong Gu. Parametric analysis of thermal behavior during selective laser melting additive manufacturing of aluminum alloy powder. *Materials and Design*, 63 :856 – 867, 2014.
- [63] N. E. Hodge, R. M. Ferencz, and J. M. Solberg. Implementation of a thermomechanical model for the simulation of selective laser melting. *Computational Mechanics*, 54(1) :33–51, Jul 2014.
- [64] Daniel Riedlbauer, Thorsten Scharowsky, Robert F. Singer, Paul Steinmann, Carolin Körner, and Julia Mergheim. Macroscopic simulation and experimental measurement of melt pool characteristics in selective electron beam melting of ti-6al-4v. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 88(5) :1309–1317, Feb 2017.

- [65] Mario Ganci, Wei Zhu, Gianluca Buffa, Livan Fratini, Song Bo, and Chunze Yan. A macroscale fem-based approach for selective laser sintering of thermoplastics. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 91(9) :3169–3180, Aug 2017.
- [66] L.-E. Lindgren, H.-A. Häggblad, J.M.J. McDill, and A.S. Oddy. Automatic remeshing for three-dimensional finite element simulation of welding. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 147(3) :401 – 409, 1997.
- [67] H Runnemalm and S Hyun. Three-dimensional welding analysis using an adaptive mesh scheme. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189(2) :515 – 523, 2000.
- [68] Makhlof Hamide and Michel Bellet. Adaptive anisotropic mesh technique for coupled problems : application to welding simulation. In *Materials Processing And Design : Modeling, Simulation and Applications ; NUMIFORM '07*, volume 908, pages Pages 1561–1566, Porto, Portugal, June 2007. American Institute of Physics.
- [69] Makhlof Hamide, Elisabeth Massoni, and Michel Bellet. Adaptive mesh technique for thermal-metallurgical numerical simulation of arc welding processes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73(5) :Pages 624–641, January 2008.
- [70] Wei Duan, Ya-jun Yin, and Jian-xin Zhou. Temperature field simulations during selective laser melting process based on fully threaded tree. *China Foundry*, 14(5) :405–411, Sep 2017.
- [71] J. Fish. The s-version of the finite element method. *Computers & Structures*, 43(3) :539 – 547, 1992.
- [72] J.M. Melenk and I. Babuška. The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1) :289 – 314, 1996.
- [73] T. Strouboulis, I. Babuška, and K. Copps. The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181(1) :43 – 69, 2000.
- [74] Nicolas Moës, John Dolbow, and Ted Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1) :131–150, 1999.
- [75] Jan Mandel. Balancing domain decomposition. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9(3) :233–241, 1993.
- [76] Hermann Amandus Schwarz. *Ueber einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren*. Zürcher u. Furrer, 1870.
- [77] C. D. Mote Jr. Global-local finite element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3(4) :565–574, 1971.
- [78] Ahmed K. Noor. Global-local methodologies and their application to nonlinear analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2(4) :333 – 346, 1986.
- [79] J.D. Whitcomb. Iterative global/local finite element analysis. *Computers & Structures*, 40(4) :1027 – 1031, 1991.
- [80] John D. Whitcomb and Kyeongsik Woo. Application of iterative global/local finite-element analysis. part 1 : Linear analysis. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9(9) :745–756, 1993.
- [81] John D. Whitcomb and Kyeongsik Woo. Application of iterative global/local finite-element analysis. part 2 : Geometrically non-linear analysis. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9(9) :757–766, 1993.
- [82] Pierre Gosselet, Maxime Blanchard, Olivier Allix, and Guillaume Guguin. Non-invasive global–local coupling as a schwarz domain decomposition method : acceleration and generalization. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 5(1) :4, 2018.
- [83] Lionel Gendre, Olivier Allix, Pierre Gosselet, and François Comte. Non-intrusive and exact global/-local techniques for structural problems with local plasticity. *Computational Mechanics*, 44(2) :233–245, Jul 2009.

- [84] L. Gendre, O. Allix, and P. Gosselet. A two-scale approximation of the schur complement and its use for non-intrusive coupling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 87(9) :889–905, 2011.
- [85] Guillaume Guguin, Olivier Allix, Pierre Gosselet, and Stéphane Guinard. Nonintrusive coupling of 3d and 2d laminated composite models based on finite element 3d recovery. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 98(5) :324–343, 2014.
- [86] Jean-Charles Passieux, Julien Réthoré, Anthony Gravouil, and Marie-Christine Baietto. Local/global non-intrusive crack propagation simulation using a multigrid x-fem solver. *Computational Mechanics*, 52(6) :1381–1393, Dec 2013.
- [87] Nouy, Anthony and Pled, Florent. A multiscale method for semi-linear elliptic equations with localized uncertainties and non-linearities. *ESAIM : M2AN*, 52(5) :1763–1802, 2018.
- [88] M. Duval, A. Lozinski, J.C. Passieux, and M. Salaün. Residual error based adaptive mesh refinement with the non-intrusive patch algorithm. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 329 :118 – 143, 2018.
- [89] Peter Benner, Serkan Gugercin, and Karen Willcox. A survey of projection-based model reduction methods for parametric dynamical systems. *SIAM Review*, 57(4) :483–531, 2015.
- [90] Francisco Chinesta, Antonio Huerta, Gianluigi Rozza, and Karen Willcox. Model order reduction. In *Encyclopedia of Computational Mechanics*, 2015.
- [91] J.L. Lumley. The structure of inhomogeneous turbulent flows. *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*, 1967.
- [92] Carl Eckart and Gale Young. The approximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika*, 1(3) :211–218, Sep 1936.
- [93] Michel Loeve. Elementary probability theory. In *Probability theory i*, pages 1–52. Springer, 1977.
- [94] Yvon Maday and Einar M. Rønquist. A reduced-basis element method. *Comptes Rendus Mathématique*, 335(2) :195 – 200, 2002.
- [95] A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, and R. Keunings. A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 139(3) :153 – 176, 2006.
- [96] A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, and R. Keunings. A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modelling of complex fluids : Part ii : Transient simulation using space-time separated representations. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 144(2) :98 – 121, 2007.
- [97] Pierre Ladevèze and Anthony Nouy. On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28) :3061 – 3087, 2003. Multiscale Computational Mechanics for Materials and Structures.
- [98] P. Ladevèze, J.-C. Passieux, and D. Néron. The latin multiscale computational method and the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(21) :1287 – 1296, 2010. Multiscale Models and Mathematical Aspects in Solid and Fluid Mechanics.
- [99] David Néron and Pierre Ladevèze. Proper generalized decomposition for multiscale and multiphysics problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4) :351–372, Dec 2010.
- [100] D. Balagangadhar, G.A. Dorai, D.A. Tortorelli, and University of Illinois at Urbana-Champaign. A displacement-based reference frame formulation for steady-state thermo-elasto-plastic material processes. *International Journal of Solids and Structures*, 36(16) :2397 – 2416, 1999.
- [101] D. Ryckelynck. Hyper-reduction of mechanical models involving internal variables. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(1) :75–89, 2009.

- [102] Alejandro Cosimo, Alberto Cardona, and Sergio Idelsohn. Global–local rom for the solution of parabolic problems with highly concentrated moving sources. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 326 :739 – 756, 2017.
- [103] Alejandro Cosimo, Alberto Cardona, and Sergio Idelsohn. Global-local hrom for non-linear thermal problems with irreversible changes of material states. *Comptes Rendus Mécanique*, 346(7) :539 – 555, 2018. Model reduction, data-based and advanced discretization in computational mechanics / Réduction de modèles, données et techniques de discrétisation avancées en mécanique numérique.
- [104] Hachmi Ben Dhia. Multiscale mechanical problems : the arlequin method. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Series IIB Mechanics Physics Astronomy*, 326(12) :899–904, 1998.
- [105] Hachmi Ben Dhia. Numerical modelling of multiscale problems : the arlequin method. In *ECCM '99 : European Conference in Computational Mechanics*, Muenchen, 1999.
- [106] Hachmi Ben Dhia and Guillaume Rateau. Analyse mathématique de la méthode arlequin mixte. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 332(7) :649 – 654, 2001.
- [107] Hashmi Ben Dhia and Guillaume Rateau. The arlequin method as a flexible engineering design tool. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(11) :1442–1462, 2005.
- [108] Guillaume Rateau. *Méthode Arlequin pour les problèmes mécaniques multi-échelles : Applications à des problèmes de jonction et de fissuration de structures élancées*. PhD thesis, Châtenay-Malabry, Ecole centrale de Paris, 2003.
- [109] Hachmi Ben Dhia and Malek Zarroug. Contact in the arlequin framework. In *Contact Mechanics*, pages 403–410. Springer, 2002.
- [110] Hachmi Ben Dhia and Mohamed Torkhani. Modeling and computation of fretting wear of structures under sharp contact. *International journal for numerical methods in engineering*, 85(1) :61–83, 2011.
- [111] Hachmi Ben Dhia and Shuimiao Du. A model-adaptivity method for the solution of lennard-jones based adhesive contact problems. *Computational Mechanics*, 62(6) :1543–1562, 2018.
- [112] Shuimiao Du and Hachmi Ben Dhia. An asymptotic numerical method to solve compliant lennard-jones-based contact problems involving adhesive instabilities. *Computational Mechanics*, 63(6) :1261–1281, 2019.
- [113] Heng Hu. *Modélisation multi-échelle des structures sandwich*. PhD thesis, Université Paul Verlaine-Metz, 2006.
- [114] Heng Hu, Salim Belouettar, Michel Potier-Ferry, et al. Multi-scale modelling of sandwich structures using the arlequin method part i : Linear modelling. *Finite Elements in Analysis and Design*, 45(1) :37–51, 2008.
- [115] Heng Hu, Salim Belouettar, Michel Potier-Ferry, Ahmed Makradi, et al. Multi-scale nonlinear modelling of sandwich structures using the arlequin method. *Composite structures*, 92(2) :515–522, 2010.
- [116] QZ He, H Hu, S Belouettar, G Guinta, K Yu, Y Liu, F Biscani, E Carrera, and M Potier-Ferry. Multi-scale modelling of sandwich structures using hierarchical kinematics. *Composite structures*, 93(9) :2375–2383, 2011.
- [117] Kékéli Kpogan, Hamid Zahrouni, Michel Potier-Ferry, and H Ben Dhia. Buckling of rolled thin sheets under residual stresses by anm and arlequin method. *International Journal of Material Forming*, 10(3) :389–404, 2017.
- [118] Paul T Bauman, Hachmi Ben Dhia, Nadia Elkhodja, J Tinsley Oden, and Serge Prudhomme. On the application of the arlequin method to the coupling of particle and continuum models. *Computational mechanics*, 42(4) :511–530, 2008.
- [119] Paul T Bauman, J Tinsley Oden, and Serge Prudhomme. Adaptive multiscale modeling of polymeric materials with arlequin coupling and goals algorithms. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 198(5-8) :799–818, 2009.

- [120] S Prudhomme, H Ben Dhia, PT Bauman, N Elkhodja, and J Tinsley Oden. Computational analysis of modeling error for the coupling of particle and continuum models by the arlequin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(41-42) :3399–3409, 2008.
- [121] Serge Prudhomme, Ludovic Chamoin, Hachmi Ben Dhia, and Paul T Bauman. An adaptive strategy for the control of modeling error in two-dimensional atomic-to-continuum coupling simulations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 198(21-26) :1887–1901, 2009.
- [122] S. Pfaller, M. Rahimi, G. Possart, P. Steinmann, F. Müller-Plathe, and M.C. Böhm. An arlequin-based method to couple molecular dynamics and finite element simulations of amorphous polymers and nanocomposites. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 260 :109 – 129, 2013.
- [123] Sebastian Pfaller, Andreas Kergaßner, and Paul Steinmann. Optimisation of the capriccio method to couple particle- and continuum-based simulations of polymers. *Multiscale Science and Engineering*, 1(4) :318–333, Oct 2019.
- [124] Christian Wellmann and Peter Wriggers. A two-scale model of granular materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 205 :46–58, 2012.
- [125] R. Cottereau, D. Clouteau, H. Ben Dhia, and C. Zaccardi. A stochastic-deterministic coupling method for continuum mechanics. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 200(47-48) :3280–3288, 2011.
- [126] S. Mohamed Nazeer, Felipe Bordeu, Adrien Leygue, and Francisco Chinesta. Arlequin based pgd domain decomposition. *Computational Mechanics*, 54(5) :1175–1190, Nov 2014.
- [127] David Néron, Hachmi Ben Dhia, and Régis Cottereau. A decoupled strategy to solve reduced-order multimodel problems in the pgd and arlequin frameworks. *Computational Mechanics*, 57(4) :509–521, Apr 2016.
- [128] Olivier Jamond. *Propagation numérique de zones critiques dans un pneumatique par approches multi-modèles*. PhD thesis, Châtenay-Malabry, Ecole centrale de Paris, 2011.
- [129] Hachmi Ben Dhia and Olivier Jamond. On the use of xfem within the arlequin framework for the simulation of crack propagation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 199(21-22) :1403–1414, 2010.
- [130] Khalil Abben. *Nouvelles frontières pour le cadre Arlequin en élastodynamique HF localisées-Application à la propagation des fissures*. PhD thesis, Paris Saclay, 2019.
- [131] Hachmi Ben Dhia and Chokri Zammali. Level-sets and arlequin framework for dynamic contact problems. *Revue Européenne des Elements*, 13(5-7) :403–414, 2004.
- [132] Nadia Elkhodja. *Approches de structures complexes dans des cadres adaptés de la méthode Arlequin*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris, 2010.
- [133] Hachmi Ben Dhia. Further insights by theoretical investigations of the multiscale arlequin method. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 6(3) :215–232, 2008.
- [134] V. R. Voller, C. R. Swaminathan, and B. G. Thomas. Fixed grid techniques for phase change problems : A review. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30(4) :875–898, 1990.
- [135] Youssef Belhamadia, Abdoulaye S. Kane, and André Fortin. A mixed finite element formulation for solving phase change problems with convection. 2012.
- [136] Michele Chiumenti, Xin Lin, Miguel Cervera, Wei Lei, Yuxiang Zheng, and Weidong Huang. Numerical simulation and experimental calibration of additive manufacturing by blown powder technology. part i : thermal analysis. *Rapid Prototyping Journal*, 23(2) :448–463, 2017.
- [137] Zhiqiang Fan and Frank Liou. Numerical modeling of the additive manufacturing (am) processes of titanium alloy. In A.K.M. Nurul Amin, editor, *Titanium Alloys*, chapter 1. IntechOpen, Rijeka, 2012.

- [138] Panagis Foteinopoulos, Alexios Papacharalampopoulos, and Panagiotis Stavropoulos. On thermal modeling of additive manufacturing processes. *CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology*, 20 :66 – 83, 2018.
- [139] Romain Ruysen, Andrea Barbarulo, and Hachmi Ben Dhia. Modélisation du procédé de fabrication additive : Fusion laser sur lit de poudre. In *7ième Congrès International Conception et Modélisation des Systèmes Mécaniques CMSM'2017*, Hammamet, Tunisia, March 2017. Mechanics, Modelling and Manufacturing Laboratory (LA2MP) National School of Engineers of Sfax, Tunisia (ENIS) & Engineering Mechanical Laboratory (LGM) National School of Engineers of Monastir, Tunisia (ENIM).
- [140] Romain Ruysen, Andrea Barbarulo, and Hachmi Ben Dhia. Contribution à la modélisation du procédé de Fabrication Additive : Fusion laser sur lit de poudre. In *13e colloque national en calcul des structures*, Giens, Var, France, May 2017. Université Paris-Saclay.
- [141] R. Ruysen, A. Barbarulo, and H. B. Dhia. Simulation multi-échelle de la problématique thermique avec changement de phase du procédé de fabrication additive slmp. 2019.
- [142] Nadia Elkhodja, Hachmi Ben Dhia, and François-Xavier Roux. Modélisation de structures multi-défauts dans le cadre arlequin et approches par sous-domaines. In *8e Colloque national en calcul des structures*, 2007.
- [143] Josselyn Touzeau. *Approche numérique multiéchelle/multimodèle de la dégradation des matériaux composites*. PhD thesis, 2012.
- [144] Charbel Farhat and Francois-Xavier Roux. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(6) :1205–1227, 1991.
- [145] Pierre-Arnaud Raviart, Jean-Marie Thomas, Philippe G Ciarlet, and Jacques Louis Lions. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, volume 2. Dunod Paris, 1998.
- [146] I. Faragó, R. Horváth, and S. Korotov. Discrete maximum principle for linear parabolic problems solved on hybrid meshes. *Applied Numerical Mathematics*, 53(2) :249 – 264, 2005. Tenth Seminar on Numerical Solution of Differential and Differential-Algebraic Equations (NUMDIFF-10).
- [147] István Faragó and Róbert Horváth. Discrete maximum principle and adequate discretizations of linear parabolic problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 28(6) :2313–2336, 2006.
- [148] István Faragó, Róbert Horváth, and Sergey Korotov. Discrete maximum principles for fe solutions of nonstationary diffusion-reaction problems with mixed boundary conditions. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 27(3) :702–720, 2011.
- [149] Olga Aleksandrovna Ladyzhenskaja, Vsevolod Alekseevich Solonnikov, and Nina N Ural'tseva. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, volume 23. American Mathematical Soc., 1968.
- [150] Fachinotti Víctor D. and Bellet Michel. Linear tetrahedral finite elements for thermal shock problems. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 16(5) :590–601, Jan 2006.
- [151] C. Bernardi. A new nonconforming approach to domain decomposition : The mortar element method. 1994.
- [152] Faker Ben Belgacem. The mortar finite element method with lagrange multipliers. *Numerische Mathematik*, 84(2) :173–197, 1999.
- [153] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 8(R2) :129–151, 1974.
- [154] Patrick Lascaux and Raymond Théodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*. Masson Paris, 1986.

- [155] Hachmi Ben Dhia, Nadia Elkhodja, and François-Xavier Roux. Multimodeling of multi-alterated structures in the arlequin framework. *European Journal of Computational Mechanics*, 17(5-7) :969–980, 2008.
- [156] Thiago Milanetto Schlittler and Régis Cottureau. Fully scalable implementation of a volume coupling scheme for the modeling of multiscale materials. *Computational Mechanics*, 60(5) :827–844, Nov 2017.
- [157] François-Xavier Roux. Acceleration of the outer conjugate gradient by reorthogonalization for a domain decomposition method for structural analysis problems. In *ICS*, 1989.
- [158] Christophe Geuzaine and J-F Remacle. Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. In *Proceedings of the Second Workshop on Grid Generation for Numerical Computations, Tetrahedron II*, 2007.
- [159] H Ben Dhia, C Durand, and G Rateau. Partition 3d/coque par la méthode arlequin. In *Actes du 6eme Colloque National en Calcul de Structures-Giens*, volume 3, pages 307–314, 2003.
- [160] S.P. Xiao and T. Belytschko. A bridging domain method for coupling continua with molecular dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(17) :1645 – 1669, 2004. Multiple Scale Methods for Nanoscale Mechanics and Materials.
- [161] Hachmi Ben Dhia and Chokri Zammali. Level-sets and arlequin framework for dynamic contact problems. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 13(5-7) :403–414, 2004.
- [162] Hachmi Ben Dhia and Khalil Abben. A REDUCED-WEAK COUPLING FOR MULTI-SCALE DYNAMIC PROBLEMS. In *ECCOMAS MSF 2015 : 2nd International Conference on Multi-scale Computational Methods for Solids and Fluids*, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina, June 2015.
- [163] Martin J. GANDER and Laurence HALPERN. Méthodes de décomposition de domaines notions de base. *Techniques de l'ingénieur Analyse numérique des équations différentielles et aux dérivées partielles*, base documentaire : 42620210.(ref. article : af1375), 2012. fre.
- [164] Pierre-Louis Lions. On the schwarz alternating method. i. In *First international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations*, pages 1–42. Paris, France, 1988.
- [165] Xiao-Chuan Cai and Marcus Sarkis. A restricted additive schwarz preconditioner for general sparse linear systems. *Siam journal on scientific computing*, 21(2) :792–797, 1999.
- [166] Pierre-Louis Lions. On the schwarz alternating method. iii : a variant for nonoverlapping subdomains. In *Third international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations*, volume 6, pages 202–223. SIAM Philadelphia, PA, 1990.
- [167] Martin J Gander. Optimized schwarz methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 44(2) :699–731, 2006.
- [168] Frédéric Hecht, Alexei Lozinski, and Olivier Pironneau. Numerical zoom and the schwarz algorithm. In Michel Bercovier, Martin J. Gander, Ralf Kornhuber, and Olof Widlund, editors, *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVIII*, pages 63–73, Berlin, Heidelberg, 2009. Springer Berlin Heidelberg.
- [169] Alexei Lozinski and Olivier Pironneau. Numerical zoom for advection diffusion problems with localized multiscales. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 27(1) :197–207, 2011.
- [170] Loic Daridon, David Dureisseix, Sylvain Garcia, and Stéphane Pagano. Changement d'échelles et zoom structural. 2011.
- [171] David Dureisseix and Henri Bavestrello. Information transfer between incompatible finite element meshes : Application to coupled thermo-viscoelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(44) :6523 – 6541, 2006.
- [172] M de Saint-Venant. *Mémoire sur la torsion des prismes : avec des considérations sur leur flexion ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général : et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément*. Imprimerie nationale, 1856.

- [173] Nikolai Muskhelishvili. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*.
- [174] Pierre Ladevèze and David Dureisseix. Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro en mécanique des structures. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série IIb, Mécanique, physique, astronomie*, 327(12) :1237–1244, 1999.
- [175] P. Ladevèze, O. Loiseau, and D. Dureisseix. A micro–macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(1-2) :121–138, 2001.
- [176] C. Le Bris, T. Lelièvre, and Y. Maday. Results and questions on a nonlinear approximation approach for solving high-dimensional partial differential equations. *Constructive Approximation*, 30(3) :621, Oct 2009.
- [177] Eric Cancès, Virginie Ehrlacher, and Tony Lelièvre. Convergence of a greedy algorithm for high-dimensional convex nonlinear problems. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 21(12) :2433–2467, 2011.
- [178] Laurent Schwartz. *Théorie des distributions*, volume 2. Hermann Paris, 1966.
- [179] Grégoire Allaire. *Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Editions Ecole Polytechnique, 2005.
- [180] Notice fonction : `fminunc`, logiciel *Matlab*. <https://www.mathworks.com/help/optim/ug/fminunc.html>.
- [181] Notice critère de convergence, logiciel *Matlab*. <https://www.mathworks.com/help/optim/ug/first-order-optimality-measure.html>.
- [182] B. Favoretto, C.A. de Hillerin, O. Bettinotti, V. Oancea, and A. Barbarulo. Reduced order modeling via pgd for highly transient thermal evolutions in additive manufacturing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 349 :405 – 430, 2019.
- [183] Anthony Nouy. A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(23) :1603 – 1626, 2010.
- [184] Roman Andreev. Space-time discretization of the heat equation. *Numerical Algorithms*, 67(4) :713–731, Dec 2014.
- [185] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, and Fausto Saleri. *Numerical mathematics*, volume 37. Springer Science & Business Media, 2010.

Titre: Contributions à la modélisation et simulation multi-échelle de problèmes en lien avec la Fabrication Additive par Fusion laser sur lit de poudre

Mots clés: Modélisation numérique, Fabrication additive, Fusion Laser sur Lit de Poudre, Procédés à géométries évolutives, Multi-échelles, Cadre Arlequin

Résumé: Les travaux réalisés dans cette thèse s'inscrivent dans le cadre d'un projet visant au développement de méthodologies numériques permettant d'aider à la conception de pièces fabriquées par le procédé de Fusion Laser sur Lit de Poudre. Ils se concentrent sur la description macroscopique du scénario thermique subi par la pièce lors de sa fabrication et visent premièrement à développer un cadre de modélisation, basé sur le cadre multi-modèle et multi-échelle Arlequin, permettant, i) de surmonter les complexités du problème, notamment: les intenses gradients thermiques localisés sous le laser, le phénomène non-linéaire de changement de phase, les changements permanents du domaine géométrique..., ii) de raffiner potentiellement la modélisation en descendant vers les échelles mésoscopique et microscopique. Dans le soucis de réduire les coûts

numériques, une méthode de couplage dite « compatible », permettant de s'affranchir des « difficultés » liées à la mise en place du cadre Arlequin montre par des comparaisons avec des raccords de type surfacique, une vitesse de convergence supérieure. Aussi la descente de la modélisation vers les échelles fines étant complexe, elle ne peut que passer par une additivité des forces numériques. Une extension des méthodes Itérative Globales-Locales Non-Invasives au cas d'un couplage volumique est proposée, ouvrant la coopération entre différents codes, performants pour des physiques et échelles particulières. Une dernière partie de ces travaux explore l'utilisation locale de la méthode Proper Generalized Decomposition, afin de réduire d'avantage les coûts numériques. La majeure partie de ces travaux est généralisable à des problématiques autre que celle de la Fabrication Additive.

Title: Contributions to the multi-scale modeling and simulation of problems related to Additive Manufacturing by Selective Laser Melting

Keywords: Numerical modelling, Additive Manufacturing, Selective Laser Melting, Processes with evolutionary geometries, Multiscale, Arlequin framework

Abstract: The works carried out in this thesis is part of a project aiming at developing numerical methodologies to assist in the design of parts manufactured using the Selective Laser Melting (SLM) process. They focus on the macroscopic description of the thermal scenario undergone by the part during its manufacture and aim firstly at developing a modelling framework, based on the Arlequin framework, which will allow, i) to overcome the complexities of the problem, in particular: the intense thermal gradients located under the laser, the non-linear phase change phenomenon, the permanent geometrical domain evolutions..., ii) to potentially refine the modelling by going down to the mesoscopic and microscopic scales. In order to reduce numerical costs, a coupling method called "com-

patible", which allows to overcome the "difficulties" linked to the Arlequin framework implementation, demonstrates, through comparisons with surface type couplings, a higher speed of convergence. Also, the descent of the modelling towards fine scales being very complex, it can only be achieved through a numerical forces addition. An extension of the Iterative Global-Local Non-Invasive Methods to the case of a volume coupling is proposed, opening a cooperation between different codes, efficient for particular physics and scales. A last part of this work explores the possibility of using locally the Proper Generalized Decomposition method in order to further reduce numerical costs. Most of the work carried out can be generalised to issues other than Additive Manufacturing.