



Étude des interactions des ondes de montagne piégées avec la couche limite

Clément Soufflet

► To cite this version:

Clément Soufflet. Étude des interactions des ondes de montagne piégées avec la couche limite. Océan, Atmosphère. Sorbonne Université, 2020. Français. NNT : 2020SORUS395 . tel-03543965

HAL Id: tel-03543965

<https://theses.hal.science/tel-03543965>

Submitted on 26 Jan 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT
DE SORBONNE UNIVERSITÉ

Spécialité : Dynamique de l'atmosphère

École doctorale n°129 : Sciences de l'Environnement d'Île-de-France

réalisée au

Laboratoire de Météorologie Dynamique

sous la direction de François Lott

présentée par

Clément SOUFFLET

pour obtenir le grade de :

DOCTEUR DE SORBONNE UNIVERSITÉ

Sujet de la thèse :

**Étude des interactions des ondes de montagne piégées
avec la couche limite**

Soutenance prévue le 23 novembre 2020

devant le jury composé de :

Mme Pascale Bouruet-Aubertot	Professeur	Examineur
Mme Marie Lothon	Chargée de recherche	Rapporteur
M. Aymeric Spiga	Maître de conférence	Examineur
M. Anton Beljaars	Professeur	Examineur
M. Christophe Millet	Ingénieur de recherche	Rapporteur
M. François Lott	Directeur de recherche	Directeur

*« Tous les hommes pensent que le bonheur se trouve au sommet de la montagne alors
qu'il réside dans la façon de la gravir »*

Confucius

Remerciements

Je remercie évidemment François, sans qui cette aventure parmi les montagnes en deux dimensions n'aurait pu avoir lieu. J'ai apprécié ces trois années de travail à ses côtés sur un sujet aussi intéressant que singulier. Sa rigueur scientifique tout comme sa patience m'ont aidé à mener à bien ces travaux.

Merci aussi à Bruno Deremble pour ses conseils avisés ainsi qu'à Fabio d'Andrea, Caroline Muller et Sabrina Speich pour leur bonne humeur, leur disponibilité et les nombreuses discussions, scientifiques ou non, partagées ensemble. Je remercie également Lionel Guez et Guillaume Lapeyre pour leur bienveillance et leurs conseils techniques très utiles. Je voudrais remercier Hector Teitelbaum qui m'a accueilli dans son bureau durant mon stage de M2 avec qui j'ai pu partager de nombreuses discussions aussi bien scientifiques que politiques.

J'ai, durant ces trois ans, fait de précieuses rencontres qui ont largement contribué à rendre cette expérience exceptionnelle. Merci Florentin, Alexis et Paolo pour les (trop ?) nombreuses pauses café, les débats existentiels sur le sport national français et les nombreuses bières partagées, parfois jusqu'au petit matin (le Pousse au Crime s'en souvient encore !). Je remercie bien sûr profondément mes nombreux co-bureau, Rémi Laxenaire qui m'a montré comment vivre ma vinaigrette durant mon passage au 3ème étage, Léa Olivier d'avoir apporté un peu du Sud dans le bureau au sens propre comme au sens figuré, Émilien Jolly sans qui les pauses café n'auraient pas été aussi caloriques et philosophiques, Hanin Binder pour sa bonne humeur constante, son soutien et nos discussions passionnantes sur les expressions de la langue française et enfin Benjamin Fildier pour sa curiosité infinie, ses bons conseils et les nombreuses séances d'escalade partagées ensemble.

Je remercie aussi notamment Jacopo Riboldi et David Flack pour avoir animé les nombreuses *Weather Discussion* chaque semaine, Sara Shamekh, Silvia Bucci pour les capucinos, Xavier Perrot, Aglae Jezequel, Alessandra Giannini et Micheline Rialet pour sa bonne humeur et son efficacité !

Pour terminer, je voudrais profondément remercier mes amis et ma famille pour le soutien constant qu'ils m'ont apporté tout au long de ma thèse.

Résumé

Ces travaux de thèse ont pour objectifs d’approfondir les connaissances théoriques concernant les interactions entre les écoulements forcés par les montagnes et la couche limite. Ils sont réalisés dans un cadre théorique et validés à l’aide de modèles non linéaires. On montre que, dans le cas linéaire, lorsque le vent incident près de la surface est faible, les ondes piégées ne sont plus induites par un confinement à bas niveau mais sont analogues à des instabilités de Kelvin-Helmholtz. Elles sont alors conditionnées par la stabilité dynamique de l’écoulement près de la surface et favorisées pour des valeurs du nombre de Richardson $J < 0.25$. Pour des reliefs plus élevés, la dynamique non linéaire modifie la stabilité de l’écoulement en aval et les ondes piégées sont inhibées pour des écoulements initialement instables près du sol. A l’inverse pour des écoulements initialement stables à la surface, l’apparition de bourrasques et d’effet de Föhn déstabilisent l’écoulement en aval, les ondes piégées sont alors dues au développement d’instabilités dans le sillage de la montagne. L’apparition des ondes piégées est donc fortement liée à la stabilité dynamique de l’écoulement en aval, particulièrement lorsque que le vent incident est faible près de la surface. Ces résultats sont ensuite étendus dans le cas où la dynamique de la couche limite est représentée de manière simplifiée à l’aide d’un coefficient de viscosité constant, les interactions entre la topographie et l’écoulement moyen sont alors évaluées en estimant les flux de quantité de mouvement. On montre que les ondes piégées exercent une traînée sur l’écoulement moyen à bas niveau mais que celle-ci est faible comparée à la traînée turbulente due à la dynamique de la couche limite ou à la traînée due aux ondes de gravité non piégées. D’autre part, la stabilité de l’écoulement joue de nouveau un rôle central et la transition entre le régime de traînée turbulente dû à la dynamique de la couche limite et le régime de traînée orographique dû aux ondes de gravité se propageant verticalement apparaît pour $J \sim 1$. Enfin, on montre que l’augmentation de la courbure du vent incident déplace la transition entre les deux régimes de traînée vers des écoulements dynamiquement moins stables. Ce résultat est important dans le sens où il étend le domaine pour lequel les ondes de gravité expliquent habituellement la traînée orographique.

Abstract

The objectives of this thesis work are to deepen the theoretical knowledge concerning the interactions between the flows forced by the mountains and the boundary layer. They are carried out in a theoretical framework and validated using non-linear models. It is shown that in the linear case, when the incident wind near the surface is small, the trapped lee waves are no longer induced by low level confinement but are analogous to Kelvin-Helmholtz instabilities. They are then conditioned by the dynamic stability of the near-surface flow and are favoured for values of the Richardson number $J < 0.25$. For higher orography, the non-linear dynamics modify the downstream flow stability and trapped lee waves are inhibited for initially unstable flows near the ground. Conversely, for initially stable flows at the surface, the onset of downslope winds and Foehn destabilizes the downstream flow and trapped lee waves result to the development of instabilities in the wake of the mountain. The onset of trapped lee waves is therefore strongly linked to the dynamic stability of the downstream flow, especially when the incident wind is quite small near the surface. These results are then extended in the case where the boundary layer dynamics are represented in a simplified manner using a constant eddy viscosity coefficient, the interactions between the topography and the mean flow are then evaluated by estimating momentum fluxes. It is shown that trapped lee waves exert a drag on the mean flow at low level but also that this drag is small compared to the turbulent drag due to the boundary layer dynamics or the drag due to free propagating gravity waves. On the other hand, flow stability again plays a central role and the transition between the turbulent drag regime due to boundary layer dynamics and the orographic drag regime due to vertically propagating gravity waves appears for $J \sim 1$. Finally, it is shown that the increase in the curvature of the incident wind shifts the transition between the two drag regimes to dynamically less stable flows. This result is important in the sense that it extends the range for which gravity waves usually explain the orographic drag.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	La météorologie de montagne	1
1.2	Les ondes de montagne	5
1.2.1	Dynamique des ondes de montagne	5
1.2.2	La présence de niveaux critiques	9
1.3	Interaction ondes-écoulement moyen	11
1.3.1	Trainée orographique	11
1.3.2	Action des ondes et budget de pseudomoment	13
1.3.3	La trainée orographique dans les modèles de prévision du temps	15
1.4	Les ondes piégées	17
1.4.1	Onde se propageant à une inversion	18
1.4.2	Ondes résonnantes piégées	19
1.4.3	Caractère linéaire et stationnaire	22
1.5	Interaction ondes et couche limite	23
1.5.1	Influence dynamique de la couche limite	24
1.5.2	Importance de la réflexion à la surface	24
1.5.3	Trainée à bas niveau due aux ondes piégées	26
1.6	Problématiques et plan de la thèse	28
2	Modèle théorique	29
2.1	Formalisme général	29
2.2	Cas avec cisaillement variable, dissipation linéaire	36
2.3	Cas avec cisaillement constant, visqueux	39
2.3.1	Écoulement hydrostatique	39
2.3.2	Écoulement non Hydrostatique	41
2.4	Cas avec cisaillement variable, visqueux	42
2.5	Considérations numériques	44
2.6	Modélisation non linéaire des ondes de montagne	46

3	Trapped mountain waves with a critical level just below the surface	49
3.1	Introduction	50
3.2	Theory	52
3.2.1	Continuous variations in $U(z)$	52
3.2.2	Discontinuous variations in $U(z)$	54
3.2.3	Inviscid result	55
3.2.4	Forced dissipative results	57
3.3	Fully nonlinear simulations	58
3.3.1	Experimental setup	58
3.3.2	Low mountain	59
3.3.3	Medium height mountain	62
3.4	Conclusion	66
4	Ondes de montagne produites dans une couche limite stratifiée	69
4.1	Introduction	69
4.2	Écoulement hydrostatique	70
4.3	Écoulement non hydrostatique	74
4.4	Conclusion	77
5	Interaction ondes piégées et couche limite	79
5.1	Introduction	79
5.2	Impact de la courbure du vent incident	81
5.3	Configuration du MITgcm	83
5.4	Sensibilité des ondes piégées à la stabilité et à la hauteur de la couche limite	83
5.5	Traînée orographique	87
5.6	Traînée due aux ondes dans des écoulements faiblement stratifiés	89
5.7	Conclusion	92
6	Conclusions et Perspectives	95
6.1	Paramétrisation des ondes piégées et représentation de la couche limite .	95
6.2	Dynamique des ondes de montagne et transport dans la couche limite . .	96
A	Bilan de pseudo-moment	99
B	Solutions du modèle théorique, cas cisaillement variable	101
C	Solutions du modèle théorique, cas avec cisaillement constant	105
C.1	Solution non visqueuse	105
C.2	Calcul des coefficients de la fonction de raccordement	106
C.3	Pré-conditionnement des solutions visqueuses	107

D Mountain Waves Produced by a Stratified Boundary Layer Flow. Part I :Hydrostatic Case	109
E Mountain waves produced by a stratified shear flow with a boundary layer. Part II : Form drag, wave drag, and transition from downstream sheltering to upstream blocking	125
E.1 Introduction	126
E.2 Theory	128
E.2.1 Outer solution	130
E.2.2 Inner solutions	130
E.3 Transition from form drag to wave drag	131
E.4 Low drag and high drag states	135
E.5 Waves Reynolds stress	137
E.6 Transition from downstream sheltering to upstream blocking when $S \approx \bar{\delta}$	139
E.7 Conclusion	141
Bibliographie	145

Chapitre 1

Introduction

1.1 La météorologie de montagne

La météorologie de montagne consiste à étudier l'influence de la topographie sur l'atmosphère. Les montagnes représentent approximativement 25 % de la surface continentale terrestre et abritent environ la même proportion de la population mondiale (Meybeck et al., 2001), la compréhension des mécanismes météorologiques induits par les montagnes est donc essentielle. Pour se rendre compte dans quelle mesure les montagnes peuvent influencer l'atmosphère, on peut par exemple souligner que leur hauteur moyenne¹ ~ 1600 m équivaut à ~ 20 % de l'épaisseur réduite de l'atmosphère² ~ 8 km (Gill, 2016). Elle est également comparable à la hauteur caractéristique de la couche limite atmosphérique ~ 1 km (Stull, 2012). Certaines chaînes de montagnes, comme la cordillère des Andes, dépassent largement ces valeurs et ont une influence sur la circulation atmosphérique globale.

En milieu montagneux, de nombreux mécanismes dynamiques et thermodynamiques interagissent à des échelles temporelles allant de la seconde à quelques heures, ce qui engendre une grande variabilité, de plus il existe un nombre infini de configurations du relief, les montagnes interagissent donc à toutes les échelles spatiales avec l'atmosphère (Smith, 1979). Certains phénomènes observables peuvent être en partie expliqués par des considérations thermodynamiques, en particulier lorsque l'écoulement de grande échelle est au repos. Des anomalies de température de l'air dans la couche limite, provoquées par exemple par le rayonnement solaire, entraînent une différence de pression et produisent des vents soufflant des hautes pressions vers les basses pressions. Ce mécanisme est à l'origine des vents anabatiques (vents montants la pente) ou des vents de vallée entrant ou sortant. Le refroidissement du sol la nuit peut, à l'inverse, engendrer des vents katabatiques (vents descendants la pente), l'air se refroidit au contact du sol et un courant de densité se forme alors le long de la pente jusque dans la vallée. Ces écoulements d'air,

1. De nombreuses définitions existe concernant la hauteur moyenne des montagnes, par soucis de simplicité nous avons ici considéré seulement la topographie supérieure à 300 m.

2. L'atmosphère terrestre peut être caractérisée par sa hauteur réduite, elle correspond à la hauteur moyenne pour laquelle la pression est égale à environ 1/3 de la pression au sol.

peuvent être à l'origine de la formation de poches d'air froid dans les bassins fermés (*cold pools*). Ce phénomène peut persister plusieurs jours, la pollution atmosphérique est alors piégée dans la vallée et peut atteindre des concentrations très élevées.

Lorsque le vent est plus important, les effets dynamiques dominent et les montagnes, en canalisant l'écoulement atmosphérique, contrôlent en bonne partie la répartition des précipitations à la surface du globe. Par exemple, lorsque le vent force des parcelles d'air à suivre le relief, celles-ci s'élèvent, sont refroidies adiabatiquement et peuvent condenser si la masse d'air est suffisamment humide. Ces déplacements peuvent engendrer des phénomènes de convection menant à des précipitations sur la pente amont du relief (Smith, 2003). Des études climatologiques ont montré que la présence de relief de quelques centaines de mètres seulement pouvait augmenter les précipitations de plus de 50 %, une augmentation pouvant dépasser les 100 % pour des montagnes de quelques kilomètres (Barros and Lettenmaier, 1994). Ces précipitations, quant à elles, affectent directement le ruissellement et l'érosion, qui ont des impacts importants sur les écosystèmes naturels et la société humaine.



FIGURE 1.1 – Nuages lenticulaires stationnaires au-dessus du Mont Rainier (État de Washington, États-Unis) caractéristique des ondes de montagne. Photo prise par Long B. Nguyen

Lorsque l'écoulement incident sur une montagne possède suffisamment d'énergie cinétique, *i.e.* si le vent est assez fort, la masse d'air est soulevée jusqu'au sommet de la montagne. Dans le cas d'une atmosphère stratifiée-stable, les parcelles d'air vont alors subir une force de flottabilité négative (analogue à la poussée d'Archimède) et revenir dans leur position d'équilibre. Ces perturbations engendrées par la présence de relief peuvent se propager verticalement ou horizontalement, sous la forme d'ondes de gravité,

ce sont des ondes dites « de montagne », (Durrán, 1990). Leur longueur d'onde caractéristique varie de quelques centaines de mètres à plusieurs dizaines de kilomètres. La fréquence de ces ondes est mesurée par rapport à la vitesse de l'écoulement incident, on parle de fréquence ou de période « intrinsèque ». Pour les ondes de montagne, cette dernière est de l'ordre de la dizaine de minutes dans une atmosphère standard. Les ondes de montagne ont donc une pulsation à la fois plus lente que les ondes sonores et plus rapide que les oscillations inertielles résultant de l'effet de la rotation terrestre. Ces ondes de gravité peuvent être vues comme un retour à l'équilibre de l'atmosphère lorsque celle-ci subit une perturbation, ici due à la présence de relief. Lorsqu'elles se propagent, elles provoquent des variations de vitesse, de pression et de température à travers l'atmosphère et peuvent être détectées à l'aide de radars Doppler ou de LIDAR (*Light Detection And Ranging*). La présence d'ondes de montagne peut aussi être détectée par l'observation de nuages stationnaires appelés nuages lenticulaires formant un ou plusieurs « chapeau » au-dessus et/ou en aval de la montagne (Figure 1.1). Plus précisément, l'air contraint de suivre la pente du relief se soulève et se condense en amont, la redescende du côté aval induit un réchauffement provoquant l'évaporation du nuage. De manière générale, les ondes de gravité stationnaires « contrôlent » dynamiquement les écoulements en milieu montagneux et, de ce fait, sont une composante essentielle des interactions entre la topographie et l'atmosphère. Par exemple, les ondes de montagne peuvent déclencher des processus convectifs pouvant augmenter ou diminuer les précipitations localement. Ces interactions entre ondes de montagne et précipitations permettent parfois d'expliquer des épisodes de précipitations extrême en milieu montagneux (Garvert et al., 2007; Kingsmill et al., 2016).

Une propriété importante des ondes de gravité est leur capacité à transporter de la quantité de mouvement à travers l'atmosphère. Nous verrons que la quantité de mouvement transportée par ces ondes est directement liée à la force de pression que l'atmosphère exerce sur les montagnes (Bretherton, 1969), elles contribuent de ce fait à coupler les basses et hautes couches atmosphériques entre elles (Eliassen, 1960). Lorsque ces ondes déferlent, elles transfèrent une partie de leur quantité de mouvement à leur environnement, provoquant une accélération ou un freinage local de l'écoulement. Ce processus engendre parfois des zones de turbulence au sommet de la troposphère pouvant perturber le trafic aérien (Strauss et al., 2015; Bramberger et al., 2020) ou encore modifier la répartition spatiale de certaines espèces chimiques (Dörnbrack and Dürbeck, 1998). Ces réponses dynamiques peuvent aussi avoir des conséquences locales sur la propagation des incendies (Sharples et al., 2010), la pollution et la production électrique éolienne en milieu montagneux (Wilczak et al., 2019).

Enfin, suivant les caractéristiques de l'atmosphère, certains modes se propageant verticalement peuvent se retrouver piégés entre deux niveaux verticaux : on observe alors des ondes se propageant horizontalement en aval des montagnes, naturellement appelées

ondes piégées (Figure 1.2). Ce sont les interactions de ces ondes avec la couche limite qui seront étudiées dans cette thèse à travers des modèles numériques linéaire et non linéaires.

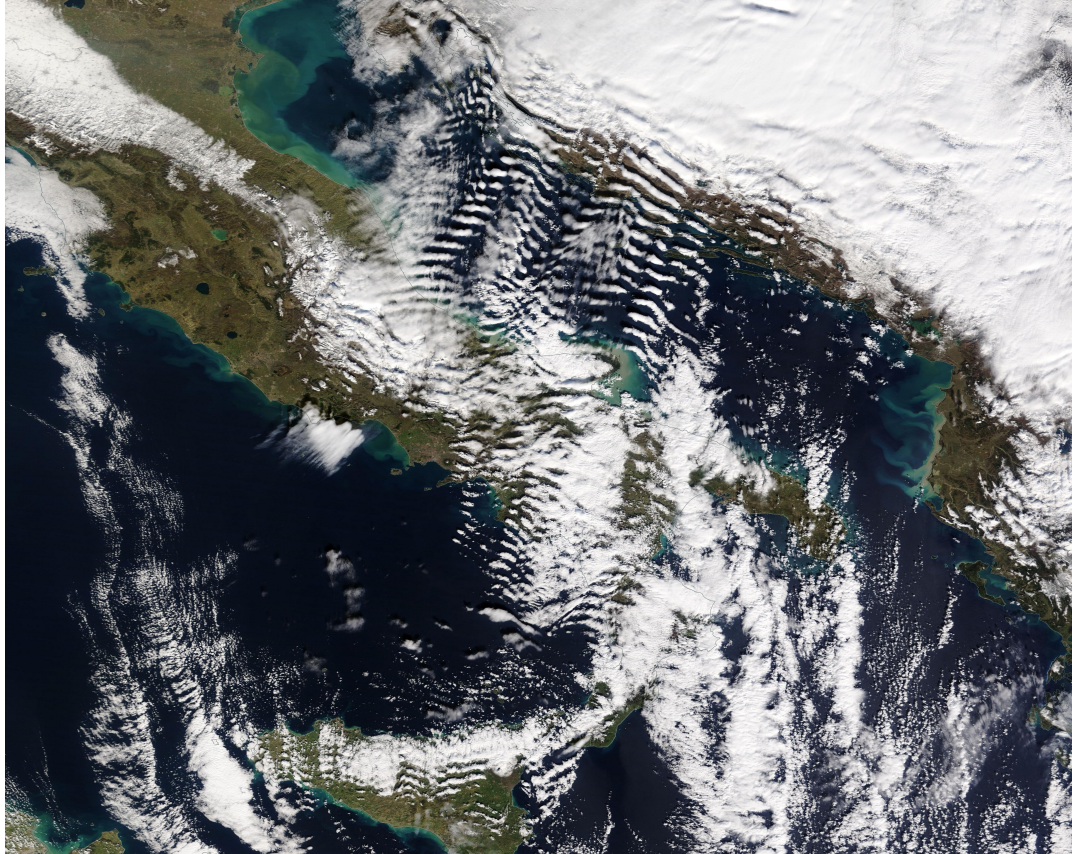


FIGURE 1.2 – Image issue du satellite MODIS, prise le 10 Février 2015. Les bandes de nuages parallèles au-dessus de la Mer Adriatique sont la signature d’ondes piégées forcées par le relief des côtes Croates. Le vent moyen vient du nord-est. Image tirée du site NASA Worldview, <https://worldview.earthdata.nasa.gov/>.

La suite de ce chapitre est dédiée à l’introduction de la dynamique des ondes de montagne, leur influence sur l’écoulement de grande échelle et aux différents concepts utilisés dans ces travaux. Nous aborderons en particulier les principaux mécanismes pouvant mener à la présence d’ondes piégées ainsi que l’influence de la couche limite sur cette dynamique.

1.2 Les ondes de montagne

1.2.1 Dynamique des ondes de montagne

Pour préciser ce que nous entendons par « ondes de montagne », nous rappelons ici les travaux fondateurs de (Queney, 1947) et (Long, 1953), dont seules les étapes essentielles seront présentées. Dans un premier temps, la description des hypothèses générales nous permettra de définir les paramètres adimensionnels du problème. Nous analyserons ensuite le champ d'ondes produit pour différentes valeurs de ces paramètres. On considère un écoulement atmosphérique en deux dimensions (x, z) , perturbé par la présence d'une montagne définie par $h(x)$ de hauteur maximale H et de largeur caractéristique L ,

$$h(x) = \frac{H}{1 + \frac{x^2}{2L^2}}. \quad (1.1)$$

Dans la suite de ces travaux, on utilisera les ordres de grandeur suivants, $U \sim 10 \text{ m.s}^{-1}$, $L \sim 1 \text{ km}$. Dans les latitudes moyennes, le paramètre de Coriolis f est de l'ordre de 10^{-4} s^{-1} , le nombre de Rossby vaut alors $R_o = u_0/fL \sim 100$, la force de Coriolis pourra donc être négligée. La structure du champ d'ondes de gravité forcées par les montagnes dépend principalement de la forme du relief, du profil vertical de vent horizontal $u_0(z)$ et de la fréquence de Brunt-Vaisälä $N = \sqrt{-\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}}$ où ρ est la densité de l'écoulement et g l'accélération de la pesanteur terrestre. Ici on se place dans le cas particulier d'un système stationnaire, linéaire, non dissipatif, pour lequel le vent horizontal et la stabilité de l'atmosphère sont constants sur la verticale, soit $u_0 = U$ et $N = N_0$. L'approximation de Boussinesq est adoptée ici pour filtrer les ondes sonores. Dans ce contexte, la dynamique du système peut être décrite par une équation aux dérivées partielles linéaire, c'est l'équation de Taylor Goldstein,

$$\frac{d^2 \mathbf{w}}{dz^2} + (S_c^2(z) - k^2) \mathbf{w} = 0 \quad \text{avec} \quad S_c^2 = \frac{N^2}{u_0^2} - \frac{1}{u_0} \frac{d^2 u_0}{dz^2}, \quad (1.2)$$

où $\mathbf{w}$ est la transformée de Fourier dans la direction horizontale de la vitesse verticale w' ,

$$w' = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}(k, z) e^{ikx} dk, \quad (1.3)$$

k le nombre d'onde horizontal, et S_c le paramètre de Scorer (Scorer, 1949). Dans toute cette thèse, on résoudra cette équation linéaire en posant une condition à la limite non linéaire à la surface,

$$w'(x, h) = (u_0(h) + u'(x, h)) \frac{dh}{dx}, \quad (1.4)$$

une résolution qui permet aux champs d'être réalistes près de la surface et qui est strictement exacte lorsque u_0 et N sont constants (Long, 1953).

Ici, on considère le cas où $u_0 = U$ et $S_c = N_0/U$ sont constants, et le nombre d'onde vertical est défini par $m^2 = S_c^2 - k^2$. Le caractère propagatif des ondes dépend à la fois

de la valeur de S_c et des modes k forcés par la montagne. Pour un nombre d'onde k donné, la condition de propagation s'écrit $N/U > k$. Dans (1.2) le terme $-k^2 \mathbf{w}$ disparaît sous l'approximation hydrostatique : en d'autres termes, cette approximation est valide lorsque $N/U \gg k$. Le nombre d'onde dominant, k_D , forcé par une montagne de largeur caractéristique L , étant $k_D \sim 1/L$, l'importance des effets non hydrostatiques dans l'écoulement peut être mesurée par le nombre de Froude du système défini comme,

$$F_r = \frac{LN}{U}. \quad (1.5)$$

Le nombre de Froude est sans dimension et peut aussi être interprété comme le rapport entre N , la fréquence propre de l'atmosphère et U/L , l'échelle de temps de l'advection des ondes par l'écoulement moyen. Lorsque ces deux grandeurs sont comparables, les effets non hydrostatiques sont significatifs³. Dans une atmosphère standard, $N \sim 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, ainsi les effets non hydrostatiques ne peuvent plus être négligés lorsque $L < 5 \text{ km}$.

Pour illustrer le champ d'ondes produit par une montagne, la Figure 1.3 représente

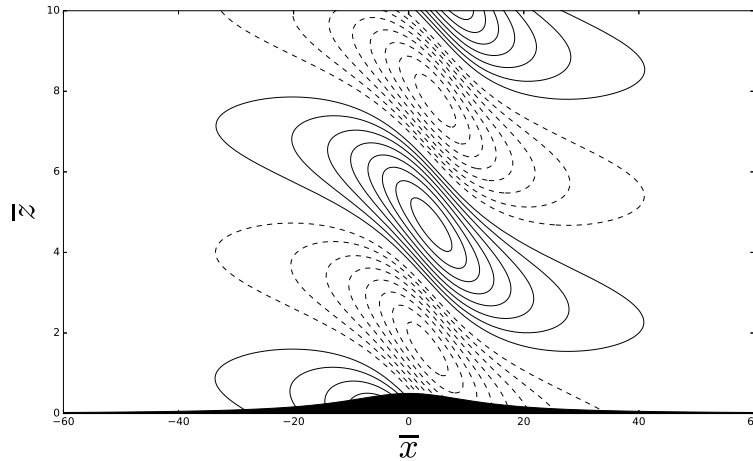


FIGURE 1.3 – Champ de vitesse verticale adimensionnée, $\bar{w} = w/U$, avec $H_N = 0.5$ (la hauteur adimensionnée de la montagne qui sera définie par la suite), $F_r = 10$, dans le plan $(\bar{x}, \bar{z}) = (x, z) \frac{N}{U}$. L'écoulement moyen étant dans le sens des $\bar{x}$ positifs.

la vitesse verticale, lorsque la montagne en 2D est définie par (1.1). Comme $U > 0$, la vitesse verticale est positive sur la pente amont et négative sur la pente aval de la montagne. Le champ de vitesse verticale dessine la propagation des ondes de gravité se propageant verticalement. De plus, ici $F_r \gg 1$, le système est donc en approximation hydrostatique. On remarque que les lignes de phase sont inclinées à l'opposé du sens du vent incident, les perturbations sont localisées au-dessus de la montagne et que les ondes possèdent une direction de propagation majoritairement verticale. Cette caractéristique peut être expliquée en calculant le rapport des vitesses de groupe horizontale et verticale

3. Il existe plusieurs définition du nombre de Froude dans la littérature. Les ondes piégées étant dues aux effets non hydrostatiques du système cette définition apparaît ici la plus appropriée.

i.e. C_{g_x}/C_{g_z} , où $C_{g_x} = \frac{\partial \Omega}{\partial k}$ et $C_{g_z} = \frac{\partial \Omega}{\partial m}$ avec $\Omega = -kU$ la fréquence intrinsèque pour un système d'ondes stationnaires. Dans notre cas,

$$C_{g_x} = -U \text{ et } C_{g_z} = \frac{mU}{k} \text{ donc } \frac{C_{g_x}}{C_{g_z}} = -\frac{k}{m}.$$

D'autre part, $k \propto 1/L$ et $m \propto N/U$, on a donc $k/m \propto F_r^{-1}$. Ainsi, $F_r \gg 1$, $C_{g_x}/C_{g_z} \ll 1$, les lignes de phase (aussi proportionnelles à $-k/m$) sont faiblement inclinées et la propagation est majoritairement verticale. Ces caractéristiques sont propres aux ondes de montagne hydrostatiques.

A l'inverse, pour de petit nombre de Froude, les effets non hydrostatiques deviennent non négligeables et le champ d'ondes est relativement différent (Figure 1.4). Il est cette

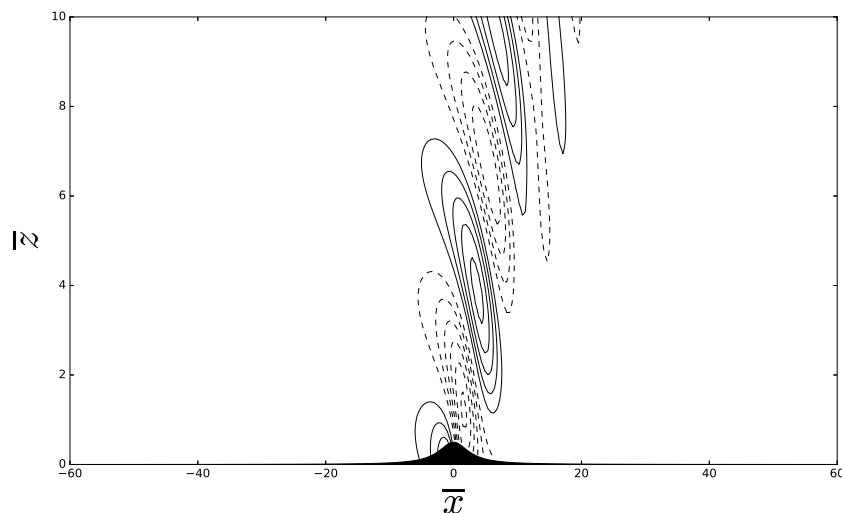


FIGURE 1.4 – Idem Figure 1.3 avec $F_r = 2$.

fois localisé plus en aval du relief, les lignes de phase s'inclinent dans le sens de l'écoulement et la propagation est donc plus horizontale. D'autre part, pour u_0 et N constants, une diminution du nombre de Froude implique une augmentation du nombre d'onde dominant k_D ; de moins en moins de modes se propagent verticalement et pour $k > N/U$, la propagation verticale n'est plus possible, et les modes forcés par la montagne sont évanescents.

De même, lorsque S_c n'est pas constant sur la verticale, certains modes peuvent se propager tandis que d'autre sont réfléchis lorsque pour une altitude z_k , $S_c^2(z_k) = k^2$. Ces niveaux sont appelés des points tournants où la structure de l'onde passe de propagative à évanescence. Ce mécanisme peut donner naissance à des ondes piégées entre le sol et l'altitude z_k pouvant se propager horizontalement. Ce phénomène sera amplement détaillé dans la suite.

L'hypothèse linéaire adoptée jusqu'ici traduit le fait que les perturbations de l'écoulement sont faibles par rapport à son état moyen, qu'elles ne modifient pas celui-ci et qu'elles

n'interagissent pas entre elles. Le degré de linéarité du problème peut être représenté par la hauteur adimensionnée du relief,

$$H_N = \frac{HN}{U}. \quad (1.6)$$

H_N peut être vue comme le rapport entre la hauteur de la montagne H et la longueur d'onde caractéristique associée aux modes se propageant verticalement U/N . La condition de linéarité se traduit alors par $H_N \ll 1$. Lorsque la longueur d'onde caractéristique devient comparable à la hauteur de la montagne, les ondes peuvent déferler au-dessus de la montagne ce qui produit des effets non linéaires. On peut illustrer cette situation en se plaçant dans le cadre du modèle de Long (1953) où u_0 et N sont constants avec l'altitude.

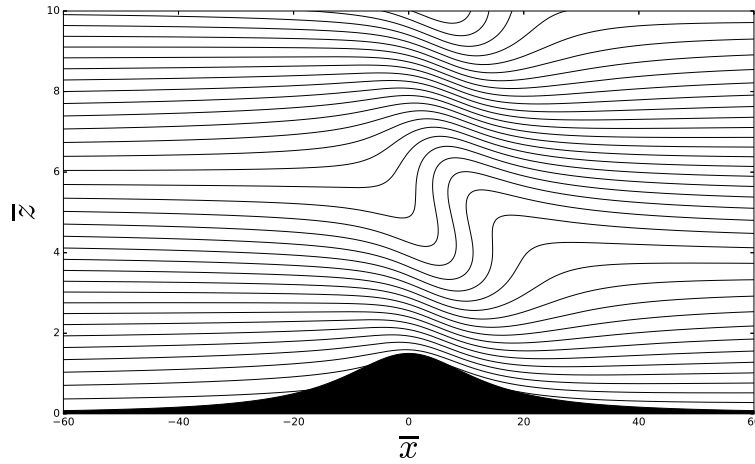


FIGURE 1.5 – Contour du champ total de flottabilité adimensionnée définie par $\bar{b} = \bar{b}' + \bar{z}$ où $\bar{b}' = b'/(UN)$ et $b' = g \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0}$ où ρ_0 est le profil vertical moyen de densité. Les paramètres sont identiques à ceux de la Figure 1.3 avec $H_N = 1.5$.

La Figure 1.5 représente les altitudes de densité constante. Les déplacements étant considérés comme adiabatiques, ces contours sont analogues aux isentropes de l'écoulement et nous permettent de visualiser les trajectoires des parcelles d'air. La déformation des isentropes au-dessus de la montagne pour $3 < \bar{z} < 7$ traduit le déferlement des ondes de gravité forcées par celle-ci. En effet, les isentropes sont si inclinées que des parcelles de fluides plus denses tendent à passer au-dessus de parcelles moins denses qu'elles, on parle dans ce cas d'instabilité convective. Le déferlement des ondes de montagne peut aussi survenir dans la moyenne et la haute atmosphère à cause de la diminution de la densité de l'air associée à la conservation de la quantité de mouvement⁴. Dans ce cas leur interaction avec l'écoulement moyen peut avoir des effets sur la circulation générale de l'atmosphère (section 1.3.1).

4. Notez cependant qu'ici, l'utilisation de l'approximation Boussinesq, en négligeant les variations de la densité sur la verticale, ne permet pas de modéliser cet effet.

Lorsque des ondes de grande amplitude déferlent près du sommet de la montagne le mélange résultant peut y produire un niveau critique. Plus précisément, l'onde primaire déferle, freine localement l'écoulement de grande échelle jusqu'à l'arrêter totalement. La fréquence intrinsèque des ondes y est alors nulle et le concept d'onde ne s'applique plus localement, on parle de niveau critique (section 1.2.2). Un tel niveau critique peut inhiber localement la propagation verticale vers le haut des ondes, elles peuvent alors être réfléchies vers le sol. Cette situation peut provoquer un effet de résonance forçant le vent au sol à accélérer très fortement en aval de la montagne, c'est ce que l'on appelle des *downslope windstorms*. (Clark and Peltier, 1977; Peltier and Clark, 1979). Ces bourrasques de vent très violentes peuvent dépasser les 50 m.s^{-1} (Chow et al., 2013) et causer des dégâts matériels importants (Mass and Ovens, 2019).

La Figure 1.5 illustre le rôle central de la condition à la limite au sol sur la dynamique des ondes de montagne dans le cas non linéaire. Nous verrons dans la suite de ces travaux que le traitement des conditions à la limite près du sol est tout aussi important dans le cas linéaire, notamment lorsque la dynamique de la couche limite contraint le vent horizontal à des valeurs proches de zéro, c'est à dire lorsque le vent incident impose un niveau critique à l'onde de montagne.

1.2.2 La présence de niveaux critiques

Lorsqu'une onde de gravité rencontre une zone où sa vitesse de phase intrinsèque est nulle, *i.e.* lorsque la vitesse de l'écoulement moyen est égale à sa vitesse de phase, la propagation devient physiquement impossible : c'est un niveau critique.

La présence de niveaux critiques pour les ondes dans l'atmosphère est directement liée au fait que le vent horizontal présente souvent de forts cisaillements verticaux. Ils peuvent être dus à des gradients horizontaux de température, à des zones de turbulences (provoquées par exemple par le déferlement d'ondes de gravité) ou encore à la dynamique de la couche limite. Dans le cas des ondes de montagne, rappelons que l'équation (1.2) explicitée dans la partie précédente décrit une solution stationnaire du champ d'ondes induit par le relief, *i.e.* la vitesse de phase absolue de ces ondes est nulle. Les niveaux critiques pour ces ondes sont donc définis tels que $u_0(z_c) = 0$, avec z_c l'altitude du niveau critique. Mathématiquement, cette situation se traduit alors par une singularité dans (1.2), lorsque $z \rightarrow z_c$ et donc $u_0 \rightarrow 0$. Le terme de flottabilité devient dominant et on peut montrer, toujours dans le cadre de l'hypothèse linéaire, que (1.2) devient à l'ordre dominant (Booker and Bretherton, 1967),

$$\frac{d^2}{dz^2} \mathbf{w} + \frac{J}{(z - z_c)^2} \mathbf{w} = 0, \quad \text{avec } J = N_0^2 / \left(\frac{du_0}{dz} \right)^2, \quad (1.7)$$

où J est le nombre de Richardson qui représente le rapport entre l'énergie potentielle de l'écoulement, décrit par la stratification, et son énergie cinétique, caractérisée par le

cisaillement vertical de vent horizontal. J est donc une mesure de la stabilité dynamique de l'écoulement. Lorsque l'onde approche le niveau critique, on peut montrer que

$$\mathbf{w} \propto (z - z_c)^{1/2+i\mu}, \text{ et } m \propto \frac{\mu}{z - z_c} \text{ avec } \mu = \sqrt{J - 1/4} \quad (1.8)$$

où m est le nombre d'onde vertical. Proche de z_c , la longueur d'onde et la vitesse verticale tendent vers zéro. En réalité, l'onde n'atteint jamais le niveau critique car la vitesse de groupe verticale décroît très rapidement proche de z_c , l'énergie se propage alors horizontalement. D'après l'équation de continuité, on a aussi $\mathbf{u} \propto (z - z_c)^{-1/2}$, ce qui entraîne un fort vent horizontal proche de la singularité, amplifie les non linéarités et favorise le déferlement des ondes. Il est aussi intéressant de noter que près d'un niveau critique m devient très grand, on peut donc s'attendre à de fortes dissipations dès lors que la viscosité est prise en compte. Cette dynamique singulière implique aussi que les interactions onde-niveau critique peuvent provoquer de fortes rafales de vent dans le cas linéaire (Lott (2016), L16 ci après, Damiens et al. (2018)). Comme mentionné dans la partie précédente (section 1.2.1), lorsque u_0 ou N varie sur la verticale des ondes se propageant verticalement peuvent être réfléchies vers la surface. Cependant, proche du sol, la dynamique visqueuse peut produire des vents horizontaux très faibles, parfois nuls au sol, conduisant à une situation de niveau critique à la surface pour ces ondes (Smith et al., 2006). D'autre part, lorsque qu'une onde s'approche d'un niveau critique, la vitesse horizontale de l'écoulement augmente fortement. Par ce mécanisme, la présence de niveaux critiques proche de la surface peut aussi être à l'origine de *downslope windstorms* sur la pente aval du relief.

Ce mécanisme est illustré par la Figure 1.6, montrant le champ total de flottabilité dans

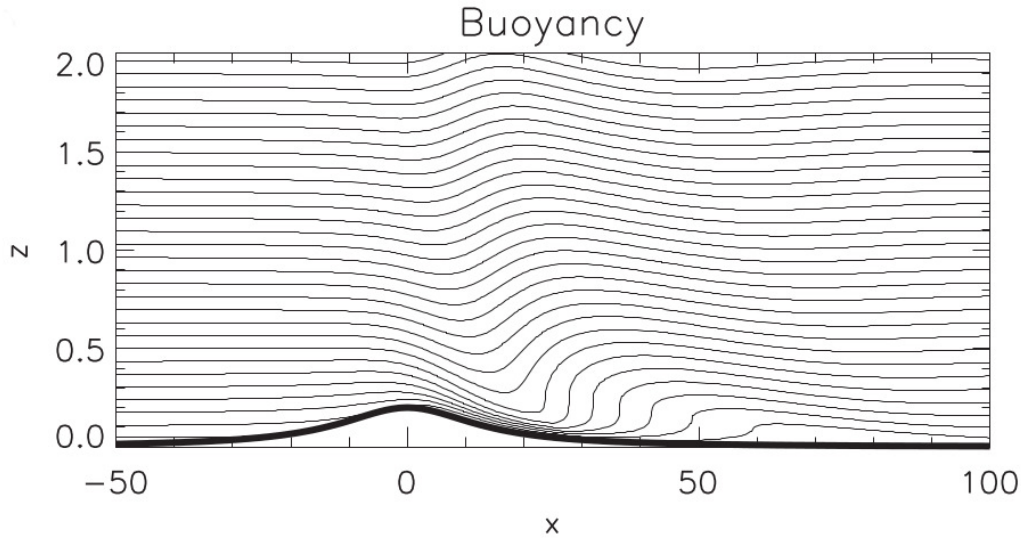


FIGURE 1.6 – Contour de la flottabilité totale, dans le cas d'une montagne définie comme (1.1) avec $H_N = 0.2$ et $F_r = 10$, L16.

un cas linéaire ($H_N = 0.2$). Contrairement à la Figure 1.5, les ondes ne déferlent pas

au-dessus de la montagne mais un fort effet de foehn est tout de même présent : le vent accélère sur la pente aval, derrière la montagne l'écoulement devient instable et ressemble quelque peu à un saut hydraulique. Ce dernier exemple souligne le caractère essentiel du traitement des conditions aux limites à la surface, extrêmement actives dynamiquement en présence d'un niveau critique.

1.3 Interaction ondes-écoulement moyen

1.3.1 Traînée orographique

Nous avons vu que, dans une atmosphère stratifiée, la présence du relief pouvait déclencher la propagation verticale d'ondes de gravité. Le champ de pression à la surface résultant de cette interaction est caractérisé par une surpression sur la pente amont et une dépression sur la pente aval du relief : l'écoulement pousse la montagne de l'amont vers l'aval. Cette force est équilibrée par un transfert de quantité de moment à l'atmosphère, c'est la traînée due aux ondes de montagne. En 2D, la conservation de la quantité de mouvement horizontale peut s'écrire,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u w) = -\frac{\partial}{\partial x}p + \frac{\partial}{\partial z}\tau_x, \quad (1.9)$$

où τ_x est un tenseur des contraintes. Dans notre cas il sera souvent modélisé par un processus de diffusion turbulente avec un coefficient pris constant dans la théorie mais qui pourra varier dans les simulations non linéaires. En intégrant cette équation sur la surface comprise entre la topographie, $h(x)$, et un niveau z_f quelconque, sur un domaine horizontal périodique on obtient dans le cas stationnaire,

$$\int \rho u w(z = z_f) dx = - \int p(z = h) \frac{dh}{dx} dx + \int [\tau_x]_{h(x)}^{z_f} dx. \quad (1.10)$$

Dans cette équation, le membre de gauche représente le flux de quantité de mouvement à travers le niveau z_f et le premier membre à droite représente la force de traînée, due aux modifications du champ de pression, induite par le relief sur l'atmosphère. Cette quantité sera notée D_x , pour *drag* en anglais que l'on pourra traduire indifféremment par traînée ou contrainte. Pour un relief symétrique, si le champ de pression de part et d'autre de la montagne est asymétrique, ce terme de traînée devient non nul. L'équation (1.10) montre que dans le cas stationnaire non dissipatif ($\tau_x = 0$), ce freinage à bas niveau est compensé par un flux vertical de quantité de mouvement à travers le niveau z_f . Ce flux vertical est dû à la propagation des ondes de montagne qui transportent une fraction de quantité de mouvement depuis la région où elles sont dissipées vers la surface. Cette quantité de mouvement est ensuite communiquée à la terre solide par l'intermédiaire du gradient de pression de part et d'autre de la montagne.

Pour une vitesse horizontale positive, on peut montrer que le flux de quantité de mouvement dû aux ondes est lui aussi positif et dirigé vers le bas (voir section 1.3.2). Ce

transfert de quantité de mouvement tend à accélérer la surface solide, le gradient de pression transverse joue alors le rôle d'un puits de quantité de mouvement. Pour expliciter précisément où les ondes de montagne interagissent avec l'écoulement moyen, il est particulièrement utile d'utiliser la décomposition de Reynolds : les variables dynamiques (a_i) sont représentées comme la somme de leur valeur moyenne ($\bar{a}_i$), représentant l'écoulement moyen, et des écarts à cette moyenne, associés aux perturbations de l'écoulement dues aux ondes de montagne (a'_i). En moyennant l'équation (1.9) dans la direction horizontale sur un domaine périodique,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\bar{u}) = -\frac{\partial}{\partial z}(\overline{\rho u'w'}) + \frac{\partial}{\partial z}\bar{\tau}_x. \quad (1.11)$$

Il est donc important de connaître le profil vertical du flux de quantité de mouvement pour identifier où les ondes orographiques freinent (accélèrent) l'écoulement moyen, c'est à dire là où la divergence verticale de la quantité de mouvement, second membre de l'équation, est positive (négative).

En utilisant les hypothèses précédentes (linéarité, stationnarité), dans le cas non dissipatif, (Eliassen, 1960) montre que la quantité $\overline{\rho u'w'}$ est constante sur la verticale sauf si l'onde est dissipée, ce qui, dans le cadre de la théorie linéaire, équivaut à la présence d'un niveau critique, *i.e.* $\bar{u} = 0$. La théorie linéaire permet aussi de prédire les altitudes de déferlement ; à ces altitudes, la quantité $\overline{\rho u'w'}$ peut alors être ramenée à une valeur sous saturante $(\overline{\rho u'w'})_s$ pour laquelle l'onde de montagne n'est plus déferlante. De proche en proche, on peut ainsi re-définir les profils verticaux de $\overline{\rho u'w'}$,

$$\overline{\rho u'w'}(z + \delta z) = \min(\overline{\rho u'w'}(z), (\overline{\rho u'w'})_s), \quad (1.12)$$

et calculer l'accélération due aux ondes. C'est de cette manière qu'est paramétrée la traînée des ondes de gravité depuis plus de 30 ans dans les modèles de prévision du temps et du climat (Palmer et al., 1986; Lott and Miller, 1997a).

Afin d'estimer la quantité de mouvement transportée par les ondes de montagne, on doit calculer le flux de quantité de mouvement à la surface, qui, dans le cas non dissipatif, vaut D_x . Pour des ondes de faible amplitude, sous l'hypothèse hydrostatique, (Smith, 1979),

$$D_x \propto \rho_0 N_0 U H^2, \quad (1.13)$$

le freinage à la surface varie linéairement avec U et ne dépend pas de la largeur caractéristique de la montagne. Bien entendu, en réalité, d'autres paramètres influencent de manière significative l'amplitude de D_x comme la direction du vent par rapport à la topographie (en 3D), ou encore des phénomènes de résonances dus à des réflexions non linéaires pouvant modifier le champ de pression à la surface (voir Teixeira (2014), Annexe E). Cependant, bien que réalisé dans un cadre simplifié, ce calcul nous donne une première approximation du transfert vertical de quantité de mouvement par les ondes

de montagne. Ainsi, le calcul de la traînée à la surface induite par le relief nous permet d'estimer l'amplitude du forçage dû aux ondes de montagne, tandis que la connaissance des profils verticaux de vent et température nous donne accès aux niveaux verticaux où les ondes peuvent potentiellement être dissipées (niveau critique ou déferlement). On peut donc, dans une certaine mesure, quantifier l'effet des ondes topographiques hydrostatiques sur l'écoulement de grande échelle.

La traînée due à la présence de relief est très dépendante de la stratification de l'écoulement incident, elle-même modifiée par la dynamique de la couche limite. Lorsque l'écoulement est caractérisé par une stratification neutre (dans une couche limite turbulente par exemple), les ondes de montagne ne peuvent plus se propager. La traînée orographique devient alors analogue à une force de friction quadratique suivant la vitesse horizontale U de la forme

$$C_D \rho_0 l U^2, \quad (1.14)$$

où C_D est le coefficient de friction, ρ_0 la densité du fluide et l une taille caractéristique de l'obstacle considéré (voir par exemple la version (Gill, 2016)). Ce terme de traînée appelé *form drag* est généralement dominant dans les interactions entre la topographie et l'écoulement moyen dans la couche limite et, de ce fait, nécessite d'être pris en compte dans les modèles numériques de climat et de prévision du temps (Wood and Mason, 1993).

Nous verrons par la suite que ces deux mécanismes d'interaction entre la topographie et l'écoulement de grande échelle, *i.e.* la traînée turbulente dans la couche limite ou celle due aux ondes de gravité, peuvent interagir, la stabilité de l'écoulement devient alors un paramètre central pour déterminer le mécanisme dominant.

1.3.2 Action des ondes et budget de pseudomoment

Dans la partie précédente, nous avons mis en évidence que les ondes de gravité induites par les montagnes pouvaient freiner ou accélérer localement l'écoulement de grande échelle via des transferts de quantité de mouvement. Pour étudier ces transferts nous avons vu qu'il est intéressant de caractériser les ondes du système à l'aide d'une quantité qui se conserve dans le cas adiabatique et non dissipatif et qui étend le concept de transfert de quantité de mouvement aux cas où les ondes peuvent se propager dans la direction horizontale. Dans un cadre tout à fait général, une telle quantité est appelée une « action » vérifiant,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = Q, \quad (1.15)$$

où A est l'action, $\nabla \mathbf{F}$ est la divergence du flux d'action $\mathbf{F}$ et Q un terme dissipatif. L'action est une quantité quadratique associée aux perturbations, elle représente donc une mesure locale de l'amplitude des ondes, et permet d'identifier où ces ondes sont

produites et où elles sont dissipées. Une autre propriété intéressante est que dans le cadre linéaire, pour un milieu lentement variable, le flux d'action $\mathbf{F}$ vérifie,

$$\langle F \rangle = \mathbf{c}_g \langle A \rangle, \quad (1.16)$$

où l'opérateur $\langle \rangle$ représente une moyenne sur une phase de l'onde et $\mathbf{c}_g$ est la vitesse de groupe. Les différentes composantes de $\mathbf{F}$ moyennées sur une phase sont donc directement proportionnelles aux composantes de la vitesse de groupe. Une forme d'action particulièrement adaptée à l'étude des interactions ondes-écoulement moyen est le « pseudo-moment », notamment car il permet aussi de caractériser les transports de quantité de mouvement.

Dans notre cas, nous partirons du pseudo-moment déduit des équations 2D Boussinesq par (Scinocca and Shepherd, 1992) et dont le bilan, (1.15), à l'ordre dominant est donné par,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\left(u_0 A + \frac{b^2}{2N^2} + \frac{u^2 - w^2}{2} \right)}_{F^x} + \frac{\partial}{\partial z} \underbrace{(uw)}_{F^z} = Q, \quad (1.17)$$

où,

$$\zeta = \partial_z u - \partial_x w \quad \text{et} \quad A = \frac{\zeta b}{N^2} - \frac{u_{0zz} b^2}{2N^4},$$

et b est la flottabilité, A le pseudo-moment, F^x et F^z sont respectivement les composantes horizontale et verticale du flux de pseudo-moment. La composante verticale du flux de pseudo-moment, moyennée sur une longueur d'onde, est analogue au transport vertical de quantité de mouvement induit par les ondes de montagne (section 1.3.1, Eq. (1.11)) et nous permet d'apprécier où les ondes interagissent avec l'écoulement moyen. Dans le cadre des ondes de gravité forcées par la topographie, les diagnostics de pseudo-moment sont particulièrement adaptés pour identifier les niveaux verticaux pour lesquels les ondes freinent l'écoulement moyen.

La Figure 1.7 illustre le vecteur du flux d'action dans le cas d'un système non dissipatif avec un vent incident constant ($Q = 0$, $u_{0zz} = 0$ dans (1.17)). Le pseudo-moment étant une quantité du second ordre, elle décroît rapidement dans la direction horizontale et reste localisée au-dessus de la montagne. On voit que le vecteur d'action est presque vertical et illustre clairement l'échange de quantité de mouvement entre le fluide et la surface solide dû aux ondes de montagne se propageant verticalement vers le haut. La composante horizontale du flux de pseudo-moment F^x nous permet d'estimer la quantité de mouvement transportée dans la direction horizontale. Cette composante, qui ici est négligeable (Figure 1.7) peut devenir significative dans le cas où des ondes piégées sont forcées par la topographie (Durran, 1995a). Ce mécanisme peut dans certains cas expliquer les variations du profil vertical de flux de quantité de mouvement (Lott, 1998). Dans le cas d'une dynamique visqueuse, cette quantité de mouvement peut alors être dissipée à bas niveau, augmentant ainsi les échanges près de la surface et limitant les interactions ondes de montagne-écoulement moyen à plus haute altitude.

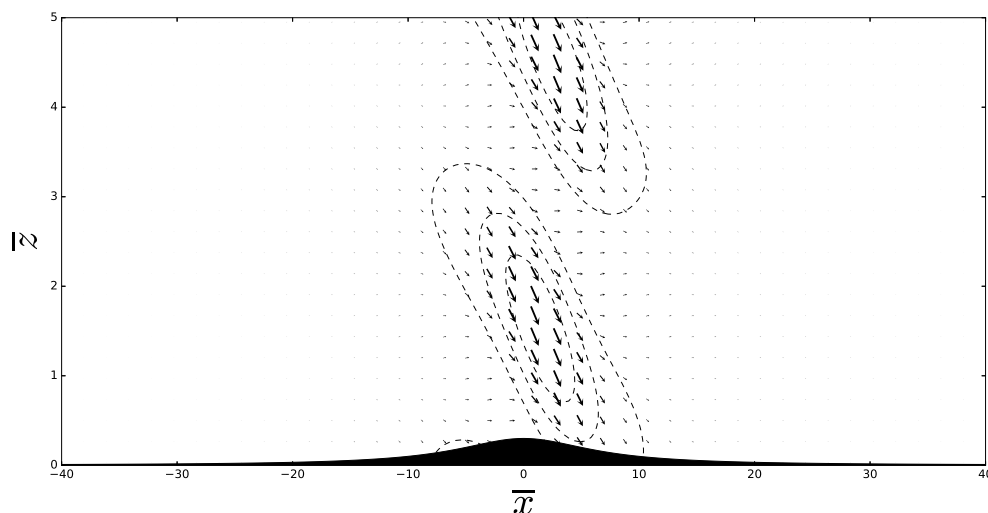


FIGURE 1.7 – Vecteur du flux d'action (F^x , F^z) ainsi que les contours du flux vertical d'action (F^z). Les paramètres sont identiques à la Figure 1.3.

1.3.3 La traînée orographique dans les modèles de prévision du temps

Dans la section 1.3.1, nous avons vu que le déferlement des ondes de montagne exerce un forçage sur la circulation atmosphérique en modifiant le bilan local de quantité de mouvement. Dans cette partie, nous détaillons quelques effets de ce forçage sur la circulation de grande échelle et de manière générale comment ces effets sont représentés dans les modèles de circulation générale atmosphérique.

Un premier exemple est la circulation de Brewer-Dobson dont les ondes de montagne sont en partie responsables. Cette circulation fait référence au transport d'air troposphérique tropical entrant dans la stratosphère puis se déplaçant vers le pôle de l'hémisphère d'hiver avant de redescendre dans les moyennes et hautes latitudes, (Brewer, 1949; Dobson, 1956). Celle-ci permet notamment d'expliquer la distribution spatiale d'ozone et de vapeur d'eau ainsi que le profil de température de l'atmosphère dans ces régions.

Les ondes de gravité forcées par les montagnes modulent aussi l'apparition des réchauffement stratosphériques soudains. Lorsque ces ondes de gravité se propagent suffisamment haut, elles peuvent interagir avec le jet stratosphérique formant le vortex polaire de l'hémisphère nord en hiver. Les ondes de gravité en se dissipant, provoquent un freinage de l'écoulement, affaiblissant le jet et donc le vortex polaire (Matsuno, 1971). La dépression formée par le vortex devient alors moins intense entraînant une compression adiabatique de l'air au pôle et donc un réchauffement de la masse d'air stratosphérique polaire.

L'idée que les contraintes dues à l'orographie via les ondes de gravité puissent avoir un impact significatif sur la représentation de la circulation générale atmosphérique dans les modèles de prévision du temps et de climat a d'abord été suggérée par Lilly (1972). Cependant, pour représenter ces effets, il est nécessaire de pouvoir résoudre spatialement

et temporellement non seulement la propagation des ondes de gravité mais aussi les mécanismes de dissipation. L'ordre de grandeur des longueurs d'ondes verticales concernées varie typiquement entre 1 et 10 km. Les modèles des années 80 n'ayant pas une résolution suffisante, la prise en compte de ces processus a donné lieu au développement de paramétrisations appelées paramétrisations orographiques d'échelle sous maille. Dans ce cas, on ne cherche plus à résoudre explicitement l'effet des ondes, on se contente d'ajouter aux équations du mouvement de grande échelle une force locale qui rend compte de l'action des ondes sur le bilan de quantité de mouvement.

Différentes études ont alors montré que l'omission de ces processus induit un biais significatif à l'échelle synoptique dans les modèles météorologiques, notamment concernant les vents d'ouest et la pression de surface (Palmer et al., 1986) comme déjà évoqué. Les paramétrisations sont alors construites à l'aide de l'approximation hydrostatique en 2D : la traînée orographique dépend linéairement du vent horizontal (voir Eq. (1.13)). La contrainte obtenue est appliquée à certains niveaux verticaux déterminés à partir de critères d'instabilité pour l'onde considérée. D'autres paramétrisations ont été développées par la suite notamment pour évaluer les effets de blocage de l'écoulement sur la traînée induite par le relief (Lott and Miller, 1997a) ou encore la traînée turbulente (*form drag*) due à l'orographie d'échelle sous maille (Beljaars et al., 2004).

Malgré l'augmentation significative de la résolution des modèles, les reliefs d'échelle caractéristique de l'ordre de la dizaine de kilomètres ne sont ni complètement résolus, ni totalement d'échelle sous maille, c'est ce que l'on appelle la zone grise (Vosper et al., 2016). De ce fait, actuellement, ces processus nécessitent toujours d'être paramétrisés (Sandu et al., 2016). Aujourd'hui, de nombreux schémas de paramétrisation de l'effet des ondes de gravité ont été construits à l'aide d'études expérimentales et théoriques souvent dans un cadre très idéalisé et ont significativement amélioré la représentation de la circulation générale atmosphérique.

Cependant, si le transport de quantité de mouvement vers la moyenne et haute atmosphère semble de mieux en mieux pris en compte, il est apparu que la plupart des paramétrisations sous-estimaient la contrainte orographique exercée proche de la surface (Vosper et al., 2018), particulièrement dans le cas d'une couche limite stable. En conséquence, les modèles sous-estiment le comblement des dépressions à cause d'un manque de mélange turbulent, impliquant un découplage entre la couche de surface et la couche limite (Sandu et al., 2013). Les effets turbulents ont alors été amplifiés artificiellement dans les conditions de couche limite stable (Louis, 1979), ce qui a eu pour effet d'améliorer la prédiction de la pression au sol à grande échelle mais aussi de dégrader la température et le vent proche de la surface, dus à un mélange trop important et physiquement non justifié.

Plus récemment des études comme Steeneveld et al. (2008) et Tsiringakis et al. (2017) suggèrent que le freinage manquant à la surface, dans le cas de couches limites stables,

pourrait être dû à la propagation et la dissipation d’onde de gravité forcées par le relief de petite échelle. Cependant, les ondes de gravité, tout comme la friction turbulente, peuvent engendrer une force de traînée à bas niveau. Cette superposition spatiale rend alors plus complexes les paramétrisations de ces mécanismes dans les modèles de prévision du temps. L’enjeu est donc à la fois de quantifier l’amplitude totale de la traînée mais aussi de pouvoir déterminer les contributions relatives des différentes sources de ce freinage, (une mesure au moins aussi importante d’après (Sandu et al., 2016)), à savoir la friction turbulente (*form drag*) et la traînée due à la propagation des ondes de gravité (*wave drag*).

Enfin, les couches limites stables peuvent, sous certaines conditions, supporter la propagation d’ondes piégées en aval de relief de petite échelle. Comme abordé brièvement dans la section 1.3.2, ces ondes peuvent transporter horizontalement une fraction non négligeable de quantité de mouvement (Lott, 1998; Broad, 2002) qui peut être transférée à la couche limite là où elles sont potentiellement dissipées (Bretherton, 1969). La dissipation des ondes piégées dans la couche limite est donc une hypothèse intéressante vis à vis du manque apparent de mélange turbulent à ce niveau dans les modèles numériques actuels (Sandu et al., 2019). La quantification de ce mécanisme est étroitement liée aux interactions entre les ondes piégées et la couche limite atmosphérique, et constitue le sujet central de cette thèse.

1.4 Les ondes piégées

Dans certaines conditions atmosphériques, les modes les plus courts forcés par les montagnes donnent naissance à un type particulier d’onde de montagne, appelé les ondes piégées (Scorer, 1949; Durran, 1990; Wurtele et al., 1996). Elles apparaissent lorsque l’écoulement moyen (*i.e* u_0 ou N) présente des variations significatives sur la verticale qui perturbent la propagation des ondes de montagne. Ces ondes peuvent alors se propager horizontalement sur des dizaines de kilomètres en aval des montagnes, elles sont généralement caractérisées par une longueur d’onde comprise entre 5 et 30 km. Lorsque la masse d’air est suffisamment humide, le déplacement vertical des parcelles d’air peut déclencher la condensation localement, et on peut observer des bandes nuageuses stationnaires perpendiculaires à la direction du vent en aval des montagnes, Figure 1.8.

Le but de cette partie est de présenter les divers mécanismes connus pouvant mener à la formation d’ondes piégées en aval d’un relief en deux dimensions. Pour ce faire, nous allons considérer ici une atmosphère à deux couches caractérisées par des stratifications (N_{0j}) et des vents horizontaux constants (U_j) avec $j = \{1, 2\}$, séparées par une interface en $z = d$. De même que dans la section 1.2.1, la transformée de Fourier de la vitesse



FIGURE 1.8 – Nuages lenticulaires en aval d’un relief illustrant les crêtes d’une onde piégée en Autriche, dans la région de St. Margarethen. Illustration du blog tablix, <https://www.tablix.org/avian/blog/archives/2008/02/>.

verticale dans chacune des couches vérifie

$$\frac{d^2 \mathbf{w}_j}{dz^2} + \underbrace{(S_{cj}^2 - k^2)}_{m_j^2} \mathbf{w}_j = 0 \quad \text{avec} \quad S_{cj}^2 = \frac{N_{0j}^2}{U_j^2}. \quad (1.18)$$

1.4.1 Onde se propageant à une inversion

On commence par considérer le cas particulier où le vent est identique et constant dans les deux couches et où l’interface entre celles-ci est caractérisée par une discontinuité en densité, chaque couche ayant une stratification neutre (*i.e.*, $N_1 = N_2 = 0$), $S_{c1,2} = 0$. Dans ces conditions, tous les modes forcés sont évanescents, et l’énergie du système est concentrée au niveau de la discontinuité de densité entre les deux couches. L’amplitude de ces ondes décroît rapidement lorsque l’altitude du niveau de discontinuité augmente, dû au fait que la source d’énergie de l’onde se situe à la surface (Sachsperger et al., 2015). Dans cette situation, il n’existe qu’un seul mode stationnaire susceptible de se propager à l’interface entre les deux couches, ce mécanisme est proche de celui des ondes de surface.

Ce cas théorique est assez rare dans l’atmosphère, les faibles valeurs de N étant le plus souvent observées dans la couche limite où la turbulence inhibe la stratification de

l'écoulement. En revanche, il est plus courant d'observer une couche limite convective caractérisée par une faible stratification, surmontée d'une discontinuité importante à l'interface avec la troposphère libre dans laquelle la stratification est plus forte. Ce cas découle du précédent en relaxant l'hypothèse d'une stratification neutre dans la couche supérieure, *i.e.* $N_2 > 0$.

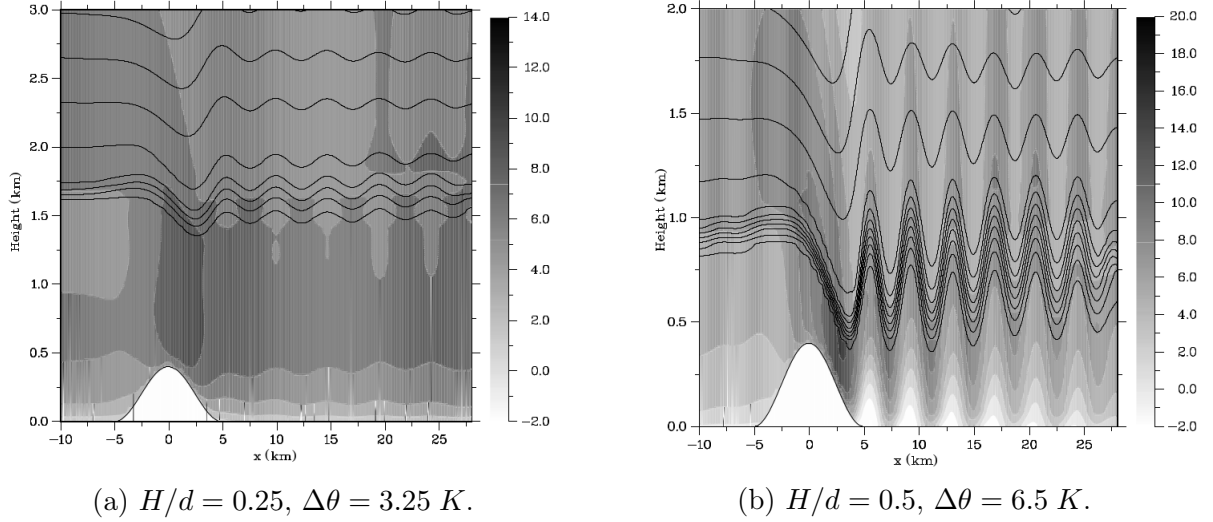


FIGURE 1.9 – Ondes piégées se propageant à l'interface entre une couche neutre et une couche stable, forcées par une montagne de hauteur $H = 400$ m. Les nuances de gris représentent le vent horizontal et les contours les lignes de température potentielle constante. L'interface est caractérisée par une discontinuité de température potentielle $\Delta\theta$ située à (a) $d = 1600$ m, (b) $d = 800$ m, (Vosper, 2004).

Dans cette situation, les ondes observées à l'interface peuvent être forcées par des ondes internes se propageant dans la couche du dessus (Scorer, 1997) ou par la présence de topographie, Figure 1.9a. Dans ce dernier cas, l'amplitude des ondes piégées au niveau de la discontinuité augmente avec le rapport H/d *i.e.* le rapport entre la hauteur de la montagne et la hauteur de l'inversion (Vosper, 2004). Associée à une condition de non-glissement au sol qui, par définition, crée de la vorticité horizontale dans le profil de vent moyen, l'augmentation du rapport H/d peut alors significativement augmenter l'amplitude des ondes piégées (Figure 1.9b). Le gradient de pression, induit par les ondes piégées et couplé à cette source de vorticité, forme parfois des zones très turbulentes appelées rotors, situées sous les crêtes des ondes (Lester and Fingerhut, 1974; Doyle and Durran, 2004), qui peut être à l'origine de graves accidents aéronautiques.

1.4.2 Ondes résonnantes piégées

On s'intéresse maintenant au cas où la stratification et le vent horizontal dans chacune des couches est positif et constant. Comme introduit dans la section 1.2.1, au-delà des altitudes z_k pour lesquelles $S_c^2(z_k) = k^2$, l'onde devient évanescente. Physiquement,

cela revient à dire que la fréquence intrinsèque de l'onde Uk est supérieur à N , la fréquence propre de l'atmosphère. On le voit aussi mathématiquement puisque dans ce cas $m^2 < 0$ et la solution de (1.18) est imaginaire pure. Lorsqu'une onde se propage jusqu'à une telle altitude, le théorème de Eliassen-Palm (Eliassen, 1960) dit qu'elle est en partie, voire intégralement, réfléchi(e) sans atténuation (*i.e.* si elle n'est pas réfléchi(e) intégralement, une partie est transmise). D'après (1.18), le piégeage des ondes est favorisé lorsque S_c est petit (*i.e.* pour des grandes valeurs de U ou des faibles valeurs de N) ou lorsque k est grand (*i.e.* pour des petites valeurs de L). Ces conditions correspondent à des faibles valeurs du nombre de Froude (1.5), les ondes piégées sont donc purement dues aux effets non hydrostatiques de l'écoulement.

Les variations de S_c avec l'altitude peuvent être dues ou bien aux variations de la stratification de l'atmosphère, par exemple au sommet de la couche limite, lors d'inversions nocturnes dues au fait que le sol se refroidit plus vite que l'air ambiant, ou bien aux cisaillements verticaux de vent horizontal, comme lors de la présence d'un courant jet en altitude (Vosper et al., 2013) ou simplement dues à la dynamique de la couche limite. On se propose ici de modéliser ces situations afin de montrer les principales caractéristiques de ondes résonantes piégées.

Lorsque $k^2 < S_{cj}^2$, les solutions de (1.18) dans chaque couche j s'écrivent,

$$\mathbf{w}_j = A_j e^{+im_j z'} + B_j e^{-im_j z'}, \quad (1.19)$$

où $z' = z - d$, d étant la hauteur de l'interface entre les deux couches et

$$m_j = \text{signe}(Uk) \sqrt{S_{cj}^2 - k^2}, \quad (1.20)$$

le signe de m_j étant choisi afin que la vitesse de groupe verticale

$$C_{gz} = \frac{\partial \Omega}{\partial m} = \frac{Um}{k} > 0,$$

$\Omega = -kU$ étant la fréquence intrinsèque de nos ondes stationnaires. Dans ce formalisme, le premier terme de (1.19) représente une onde se propageant vers le haut et le second une onde se propageant vers le bas. Lorsque $k^2 > S_{cj}^2$, les modes propagatifs deviennent évanescents, (1.19) s'applique toujours en remplaçant m_j par,

$$m_j = i \sqrt{k^2 - S_{cj}^2}.$$

Les constantes A_j et B_j sont déterminées à l'aide des conditions aux limites. On suppose que le système n'est pas forcé par le haut, par conséquent, aucune onde ne peut se propager vers le bas dans la couche supérieure, ce qui revient à imposer $B_2 = 0$. D'autre part, on considère que l'onde transmise dans la couche supérieure possède une amplitude « unitaire » et donc $A_2 = 1$. La continuité de la pression à l'interface entre les deux couches, $z' = 0$, se traduit par,

$$U_1 \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial z'} \Big|_{z'=0} = U_2 \frac{\partial \mathbf{w}_2}{\partial z'} \Big|_{z'=0}. \quad (1.21)$$

Enfin, les parcelles d'air à l'interface entre les deux couches subissent le même déplacement vertical $\eta(x)$, et donc $\mathbf{w}_j = U_j \frac{d\eta}{dx}$. Cette condition s'écrit

$$\left. \frac{\mathbf{w}_1}{U_1} \right|_{z'=0} = \left. \frac{\mathbf{w}_2}{U_2} \right|_{z'=0}. \quad (1.22)$$

En injectant (1.19) dans (1.21) et (1.22) on obtient pour les solutions $\mathbf{w}_j$,

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \left(\frac{1}{2} \frac{U_1}{U_2} + \frac{U_2}{2U_1} \frac{m_2}{m_1} \right) e^{+im_1(z-d)} + \left(\frac{1}{2} \frac{U_1}{U_2} - \frac{U_2}{2U_1} \frac{m_2}{m_1} \right) e^{-im_1(z-d)} \text{ et} \\ \mathbf{w}_2 &= e^{+im_2(z-d)}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Enfin, au sol, la vitesse verticale s'annule, $\mathbf{w}_1(k, z=0) = 0$, soit

$$\left(\frac{U_1}{U_2} \right)^2 \tan(m_1 d) = -i \frac{m_1}{m_2}, \quad (1.24)$$

soit,

$$\left(\frac{U_1}{U_2} \right)^2 \tan \left(d \sqrt{S_{c1}^2 - k^2} \right) = -i \frac{\sqrt{S_{c1}^2 - k^2}}{\sqrt{S_{c2}^2 - k^2}}. \quad (1.25)$$

Cette dernière équation possède des solutions réelles seulement dans le cas où m_2 est imaginaire pur et donc

$$S_{c2}^2 < k^2 < S_{c1}^2. \quad (1.26)$$

L'onde est alors propagative dans la couche inférieure mais évanescence dans la couche supérieure, l'équation (1.25) se traduit par

$$S_{c1}^2 - S_{c2}^2 > \frac{\pi^2}{4d^2} \text{ avec } S_{c2}^2 < k^2 < S_{c1}^2. \quad (1.27)$$

Ces conditions ont d'abord été établies par Scorer (1949) dans le cas où U_j et N_j sont constants dans chacune des couches. Lorsqu'elles sont vérifiées, en supposant que les ondes se réfléchissent totalement au sol *i.e.* sans perte d'énergie, une onde interne de gravité se propageant dans la couche inférieure va se réfléchir à l'interface entre les deux couches et se superposer à l'onde incidente. On parle d'ondes résonnantes piégées. Les modes solutions sont périodiques et il peut exister plusieurs modes piégés, leur amplitude étant contrôlée à la fois par la hauteur de l'interface d et par les échelles caractéristiques de la montagne (largeur et hauteur).

On peut illustrer ce mécanisme avec N constant et identique dans les deux couches mais avec un vent horizontal différent dans chacune des couches $S_{cj} = \frac{N_0^2}{U_j^2}$ et $U_2 = 1 \text{ m.s}^{-1}$, $U_1 = \frac{1}{2}U_2 = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$ (Figure 3.1a). Dans ce cas, (1.23) devient

$$\mathbf{w}_1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{m_2}{m_1} \right) e^{-m_1(z-d)} + \left(\frac{1}{4} - \frac{m_2}{m_1} \right) e^{+m_1(z-d)} \text{ et } \mathbf{w}_2 = e^{-m_2(z-d)}, \quad (1.28)$$

et d'après (1.27) il existe des modes piégés lorsque

$$d > \frac{\pi}{2\sqrt{3}N_0} \text{ avec } N_0^2 < k^2 < 4N_0^2. \quad (1.29)$$

La Figure 1.10 représente cette situation dans le cas où $d = 2$. Comme dans le cas de la Figure 1.4, certains modes se propagent verticalement tandis que d'autres sont piégés dans la couche inférieure ($0 < \bar{z} < 2$) et se propagent alors horizontalement. Le champ d'ondes piégées en aval est caractérisé par des lignes de phases verticales à cause de la superposition des modes se propageant vers le haut et vers le bas. Notez que ici les ondes piégées sont artificiellement dissipées en aval.

Ces différents mécanismes nous donnent un aperçu des paramètres dynamiques impor-

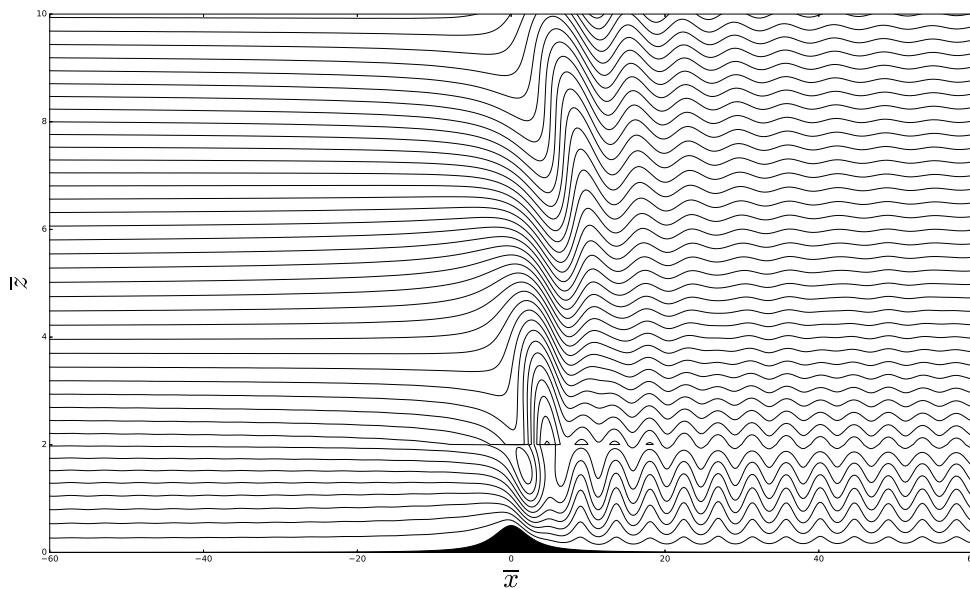


FIGURE 1.10 – Champ de flottabilité totale dans le cas d'une atmosphère à deux couches avec $d = 2$, $U_1 = \frac{1}{2}U_2$, $H_N = 0.5$ et $F_r = 2$, avec une condition au sol non linéaire. Notez que la discontinuité dans le profil de vent horizontal implique un saut dans la dérivée verticale de flottabilité en $\bar{z} = 2$.

tants pour la modélisation dynamique des ondes piégées. La suite de ce chapitre discute des différentes hypothèses considérées, leur domaine d'application, ainsi que l'influence des conditions aux limites.

1.4.3 Caractère linéaire et stationnaire

Les hypothèses de linéarité et stationnarité sont largement utilisées pour modéliser les ondes piégées. Ces hypothèses étant aussi adoptées dans la suite de ces travaux, nous discutons ici brièvement de leur intérêt ainsi que de leur domaine de validité à travers la littérature existante.

L'hypothèse linéaire est centrale dans de nombreuses études concernant la dynamique des ondes de gravité. Pour les ondes piégées, des comparaisons avec des observations aéroportées et des expériences en cuve ont montré que la théorie linéaire prédit correctement la longueur d'ondes des modes piégés mais qu'elle sous estime parfois leur

amplitude. Ces erreurs peuvent être dues à des non-linéarités importantes près du sol (Smith, 1976) ou à la taille caractéristique des modes piégés (Vosper, 2004). Plus récemment, Sachsperger et al. (2017) montre que la quantification précise de la source des ondes piégées est une question délicate. Celle-ci peut être plus localisée dans le ressaut se produisant derrière la montagne que sur le relief lui-même.

Les comparaisons entre simulations linéaires et observations restent tout de même de manière générale assez délicates. En effet, les reliefs naturels à l'origine de la propagation de ces ondes sont rarement constitués d'un seul sommet. Les champs observés sont alors une superposition de plusieurs modes qui, suivant les cas, peuvent interagir de façon non linéaire, rendant difficiles les comparaisons avec la théorie linéaire.

Les variations de la structure verticale de l'écoulement en amont du relief peuvent aussi être une cause de non linéarité de l'écoulement. Hills and Durran (2012) montre par exemple que le développement d'un courant jet isolé en amont peut entraîner une modification des modes piégés pouvant donner lieu à des interactions non linéaires avec le champ d'ondes déjà présent en aval.

Ce dernier exemple souligne une autre hypothèse importante pour la modélisation des ondes piégées : l'hypothèse de stationnarité. En effet, certaines interactions, parfois non linéaires, modifient le caractère stationnaire du champ d'ondes en aval du relief (Nance and Durran, 1997, 1998). On peut alors se poser la question de la pertinence de l'hypothèse de stationnarité. Des observations ont montré que la longueur d'ondes des modes piégés pouvait varier significativement en quelques heures. Ce phénomène peut être dû au développement de la couche limite convective modifiant les conditions de piégeage des ondes (Ralph et al., 1997). Dans certaines conditions les ondes piégées peuvent aussi être considérées comme un phénomène transitoire et être progressivement évacuées en aval (Lott and Teitelbaum, 1993; Vosper, 2004; Hills and Durran, 2012). Il existe cependant des cas où les hypothèses linéaires et stationnaires permettent de reproduire assez fidèlement les observations (Vosper and Mobbs, 1996).

Toutes ces différentes études doivent cependant être mises en relief avec la complexité d'un système dynamique non linéaire évoluant dans le temps. En effet, ces deux hypothèses majeures simplifient la dynamique et nous permettent dans certains cas de calculer des solutions analytiques. Enfin ces hypothèses, en simplifiant le problème, nous permettent de focaliser l'étude sur la dynamique du processus modélisé, elles seront adoptées dans le chapitre 2.

1.5 Interaction ondes et couche limite

La dynamique des ondes de montagne est largement impactée par la représentation de la couche limite qui, du fait de sa variabilité et de son caractère dissipatif, est une zone privilégiée concernant les interactions entre les ondes et l'écoulement moyen. Dans

cette partie, nous introduisons les principaux mécanismes, induits par la dynamique de la couche limite, susceptibles de perturber la propagation des ondes piégées.

1.5.1 Influence dynamique de la couche limite

La dynamique de la couche limite peut significativement modifier l'amplitude des ondes de gravité et parfois inhiber leur déferlement (Ólafsson and Bougeault, 1997; Peng and Thompson, 2003). Les variables thermodynamiques comme l'humidité (Durran and Klemp, 1983) et les flux de chaleur à la surface causés par le rayonnement solaire, peuvent aussi jouer un rôle non négligeable (Smith and Skillingstad, 2011).

Les ondes piégées étant majoritairement observées dans la troposphère, elles sont sensibles à la dynamique de la couche limite. Jiang et al. (2006) montre notamment que de forts flux de chaleur à la surface, caractéristique d'une couche limite convective, peuvent atténuer leur décroissance en aval. Ces flux conditionnent aussi en partie la hauteur de la couche limite, ainsi que l'amplitude et la dissipation des modes piégés (voir section 1.4.2, Vosper (2004); Hills et al. (2016)). D'autre part, la présence d'inversion au sommet de la couche limite peut favoriser l'apparition de modes se propageant à l'interface (section 1.4.1). Cependant, cette barrière physique favorise aussi l'accumulation d'humidité dans la couche limite, une situation pouvant atténuer les modes résonnants piégés (Durran and Klemp, 1982). Des simulations LES (*"Large Eddy Simulation"*) montrent aussi que la présence d'une couche limite peut, de manière générale, atténuer les ondes piégées (Sauer et al., 2016).

Ces interactions complexes expliquent en partie pourquoi les théories conventionnelles échouent parfois à modéliser les observations (Smith et al., 2002). Smith et al. (2006) et Jiang et al. (2006) ont cherché à expliquer comment la présence d'une couche limite, associée à une dynamique non visqueuse en altitude, modifie le guide d'onde à bas niveau nécessaire à la propagation des ondes piégées. Ces études montrent qu'une couche limite dynamiquement instable favorise l'apparition des ondes piégées. La représentation des variables dynamiques dans la couche limite et notamment à la surface est donc centrale dans l'étude des interactions entre les ondes piégées et la couche limite.

1.5.2 Importance de la réflexion à la surface

Le traitement de la condition à la limite à la surface est particulièrement délicat car il peut mener à des réponses dynamiques complètement différentes (Georgelin and Lott, 2001; Vosper, 2004). En ce qui concerne la dynamique des ondes piégées, la représentation de l'écoulement à la surface joue un rôle central simplement car c'est à la surface que les ondes piégées sont réfléchies. Dans la théorie classique, il est généralement admis qu'à la surface (i) le vent horizontal est non nul, (ii) les ondes piégées sont intégralement réfléchies vers le haut (section 1.4.2). Cependant, ces deux hypothèses,

bien qu'elles facilitent la modélisation de la dynamique des ondes piégées, peuvent être remises en question. La dynamique de la couche limite, plus précisément la friction au sol et la viscosité de l'écoulement, contraint le vent proche de la surface à de très faibles valeurs, proche de zéro. D'autre part, il est utile de rappeler que les ondes piégées sont considérées, dans une certaine mesure (voir section 1.4.3), comme étant stationnaires et possèdent donc une vitesse de phase nulle. Par conséquent, la surface se comporte comme un niveau critique (voir section 1.2.2, Jiang et al. (2006)) où l'absorption des ondes est contrôlée par la dynamique d'interaction onde-niveau critique (Booker and Bretherton, 1967).

Dans ce contexte Lott (2007) (ci après L07) a calculé les conditions de réflexion au sol d'une onde de gravité se propageant vers le bas en présence d'une couche limite visqueuse avec un vent nul à la surface. La réflexion est alors conditionnée par la stabilité dynamique de l'écoulement au sol, caractérisée par J , le nombre de Richardson Eq (1.7). Cette étude montre que les petites valeurs de J favorisent la réflexion des ondes à la surface, la réflexion totale étant atteinte dans le cas non visqueux lorsque $J < 0.25$.

Ces résultats s'expliquent par le fait que l'absorption des ondes de gravité par une couche limite visqueuse avec un niveau critique au sol est, pour $J > 0.25$, moins efficace que lors de l'interaction classique d'une onde avec un niveau critique *i.e.* sans surface rigide (L07 Figure 3). D'autre part, pour $J < 0.25$, Lindzen (1988) montre qu'une onde de gravité peut être sur-réfléchi au niveau critique. Dans le cas considéré par L07, la présence de la surface, en limitant l'interaction dynamique entre l'onde et le niveau critique, empêche la sur-réflexion, l'onde est « seulement » totalement réfléchi. Ces résultats suggèrent à l'instar de Smith et al. (2006), qu'une couche limite instable facilite l'apparition des ondes piégées.

Enfin, L07 considère aussi le cas où le vent horizontal est représenté par un profil vertical en tangente hyperbolique, *i.e.* nul au sol, linéaire proche de la surface et devient constant pour $z \rightarrow \infty$. Dans cette configuration, sous l'hypothèse d'un domaine non borné, l'équation de Taylor-Goldstein possède des modes neutres pour $J < 0.25$, définis par $J = k^2(1 - k^2)$ (Drazin, 1958). Cette courbe délimite dans le plan (k, J) l'existence de modes instables, donnant lieu à des instabilités de Kelvin-Helmholtz (KH) dans l'écoulement, de modes évanescents. L07 montre que dans le cas d'un niveau critique à la surface, certains de ces modes neutres deviennent analogues à des ondes piégées : ils se propagent alors sans atténuation dans le cas non visqueux, soulignant le lien entre ondes piégées et l'instabilité de KH.

Dans L16, ces résultats sont confirmés dans le cas linéaire non visqueux, en présence d'un forçage topographique : l'apparition des ondes piégées est favorisée lorsque $J < 1$. Cependant, dans cette approche, deux aspects deviennent particulièrement délicats. D'une part, la condition à la limite à la surface, dans le cas linéaire, est dégénérée car la vitesse verticale tout comme la vitesse horizontale est nulle en $z = 0$. Il convient alors d'utiliser

sa forme non linéaire en $z = h$, la hauteur de la montagne, (Eq. (1.4)), une forme à priori valable seulement dans le cas d'un profil de vent constant (Long, 1953). D'autre part, proche du niveau critique, la contribution des termes non linéaires peut augmenter de façon significative. Dans L16, l'ajout de termes dissipatifs dans les équations de la dynamique du système permet d'atténuer ces effets non linéaires tout en régularisant la singularité associée dans l'équation de Taylor-Goldstein (section 1.2.2).

Pour vérifier si ces deux aspects ne remettent pas en cause les résultats, il est intéressant de comparer ces simulations, réalisées dans le cadre linéaire, avec des modèles non linéaires, ce qui sera l'objet du chapitre 3.

1.5.3 Traînée à bas niveau due aux ondes piégées

Les paramétrisations actuelles de la traînée induite par les ondes de montagne se basent beaucoup sur la théorie hydrostatique et les effets à bas niveau dus aux modes piégés sont représentés de manière très simplifiée (Lott, 1999). Cependant, en utilisant des profils atmosphériques verticaux plus réalistes, des études comme Vosper (1996); Stiperski and Grubišić (2011) ou Teixeira et al. (2013a) montrent que la traînée à bas niveau produite par des ondes résonantes piégées peut, dans certain cas, être comparable à la traînée due aux ondes hydrostatiques. Les ondes piégées étant purement non hydrostatiques (section 1.4.2), ces résultats, tout comme Steeneveld et al. (2008) et Tsi-ringakis et al. (2017), suggèrent que le relief de petite échelle, responsable du forçage non hydrostatique, contribue de façon significative à la traînée orographique et ne peut être représenté de manière trop simplifiée.

L'idée que la dissipation turbulente des ondes piégées puisse freiner l'écoulement moyen a été mis en évidence pour la première fois par Bretherton (1969). Dans ces situations, la force de traînée s'exerce au niveau vertical où les ondes sont dissipées. Parfois, les ondes piégées pénètrent dans la stratosphère (Hills et al., 2016) et la traînée s'exerce dans la haute atmosphère alors que lorsqu'elles sont absorbées dans la couche limite la traînée s'exerce à bas niveau (Jiang et al., 2006; Smith, 2007).

Cependant, Georgelin and Lott (2001) montre que les ondes piégées observées, lors de la campagne PYREX (*Pyrenées Experiment*⁵) semblent contribuer de manière significative au bilan du flux de moment non seulement dans la couche limite mais plus généralement entre le sol et leur point tournant, un résultat corroboré par Xue et al. (2020) dans des simulations LES sur le plateau tibétain.

D'autre part, des modélisations linéaires et non linéaires (Durrán, 1995b; Lott, 1998) évaluent l'impact des ondes piégées en utilisant des diagnostics de pseudo-moment (section 1.3.2). Ces études montrent, dans le cas non dissipatif, que la diminution du flux de

5. PYREX est une campagne de mesure internationale effectuée en 1990 dans les Pyrénées. Les principaux objectifs étaient de mesurer l'effet des ondes de gravité sur l'écoulement moyen et de valider des modèles numériques méso-échelle.

quantité de mouvement vertical peut être due à un flux de moment horizontal transporté par les ondes piégées en aval, un résultat également étayé par Broad (2002) et Héreil and Stein (1999).

Bien entendu, la présence d'une couche limite visqueuse peut influencer significativement la traînée induite par les ondes piégées à bas niveau. Cependant, les études antérieures réalisées dans cette situation considèrent une dissipation turbulente agissant dans une couche interne proche du sol, associée à une dynamique hydrostatique en altitude (Belcher and Wood, 1996), une configuration rendant impossible l'apparition de modes résonnants piégés.

1.6 Problématiques et plan de la thèse

Nous avons vu que la présence d'un niveau critique à la surface pouvait significativement influencer la dynamique des ondes de montagne, notamment la propagation des ondes piégées, en modifiant les conditions de réflexion à la surface. Nous avons aussi vu que la présence d'un tel niveau critique peut aussi produire des vents très forts près du sol, une dynamique pouvant expliquer assez naturellement les fortes bourrasques se produisant en aval des montagnes dans des écoulements stratifiés (L16), on parle de *downslope windstorms*. Dans cette étude, la dynamique étant non visqueuse et linéaire il est important de vérifier que ces mécanismes restent actifs dans un cadre complètement non linéaire et en présence de couche limite plus réaliste. On doit aussi analyser comment l'apparition des *downslope windstorms* modifie l'écoulement moyen en aval et quels sont les impacts sur la dynamique des ondes piégées dans ce cas.

En ce qui concerne les interactions avec l'écoulement de grande échelle, une question centrale est l'effet de la couche limite sur les ondes de montagne, ce qui inclut les transports de quantité de mouvement par les ondes piégées.

Afin de répondre à ces questions, nous commencerons par décrire précisément le modèle théorique utilisé tout au long de ces travaux ; ça sera l'objet du chapitre 2. La dynamique des ondes piégées dans un cadre linéaire non visqueux, en présence d'un niveau critique à la surface est décrite et comparée à des simulations non linéaires dans le chapitre 3. On s'intéressera ensuite, dans les chapitres 4 et 5, aux interactions entre les ondes de montagne et la couche limite lorsque celle-ci est représentée de manière simplifiée à l'aide d'un coefficient de viscosité constant. La traînée orographique de surface et le flux vertical de quantité de mouvement seront estimés pour évaluer les interactions entre la topographie et l'écoulement moyen. Le chapitre 4 présente les principaux résultats issus du modèle théorique en configuration hydrostatique et non hydrostatique dans le cas où le vent incident présente un cisaillement vertical constant. Enfin, le chapitre 5 reprend le cas précédent avec un cisaillement vertical variable. Nous verrons que cette configuration supporte la propagation d'ondes piégées, dont nous évaluerons l'impact sur la traînée orographique. Finalement, le dernier chapitre traitera des perspectives de ces travaux concernant l'amélioration de la représentation de la dynamique des ondes de montagne en présence de la couche limite dans les modèles numériques actuels.

Chapitre 2

Modèle théorique

L'intégralité de ce chapitre est dédié à la description du modèle théorique que nous utiliserons pour étudier la dynamique des ondes de montagne. Ce modèle est caractérisé principalement par une dynamique stationnaire, une stratification constante et un profil de vent incident nul à la surface. La dynamique est linéaire mais sujette à une condition à la limite non linéaire à la surface (Long, 1953).

Ce chapitre est divisé en cinq parties. La première partie traite du formalisme général permettant de décrire les différentes configurations du modèle (Tableau 2.1), celles-ci seront ensuite présentées par ordre croissant de complexité. Nous allons tout d'abord considérer le cas d'une dynamique non visqueuse, associée à un profil de vent caractéristique de couche limite, (*i.e.* présentant un cisaillement vertical variable). La partie suivante traite le cas où la dynamique visqueuse de la couche limite est représentée de manière simplifiée par la présence d'une couche intérieure associée, cette fois, à un profil de vent incident linéaire (*i.e.* présentant un cisaillement vertical constant). La dernière configuration combine les deux précédentes en associant un profil de vent à cisaillement variable avec une représentation simplifiée de la dynamique visqueuse de la couche limite. Enfin une dernière partie discutera brièvement les aspects numériques du modèle.

2.1 Formalisme général

On considère un domaine en deux dimensions (x, z) , dans lequel u, w, p et ρ sont les vitesses horizontale et verticale, la pression et la densité. L'écoulement moyen est représenté par

$$u_0(z) = u_{0z}(0)d \tanh(z/d), \quad (2.1a)$$

$$\rho_0(z) = \rho_r + \rho_{0z}z, \quad (2.1b)$$

où le cisaillement caractéristique de vent à la surface $u_{0z}(0)$ et le gradient vertical de densité ρ_{0z} sont constants et d représente l'échelle caractéristique du cisaillement de vent vertical. Dans la suite on pourra aussi étudier le cas d'un cisaillement constant en

considérant la limite de (2.1a) lorsque $d \rightarrow \infty$. Dans le modèle, la topographie pourra être représentée par une Gaussienne ou une Lorentzienne en deux dimensions de taille caractéristique L et de hauteur H ,

$$h(x) = He^{-x^2/(2L^2)} \quad \text{ou} \quad h(x) = \frac{H}{1 + \frac{x^2}{2L^2}}. \quad (2.2)$$

En adoptant l'approximation de Boussinesq le système est décrit par,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \epsilon u, \quad (2.3a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} - g \frac{\tilde{\rho}}{\rho_r} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \epsilon w, \quad (2.3b)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} + w \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} = \kappa \left(\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial x^2} \right) - \epsilon \tilde{\rho}, \quad (2.3c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.3d)$$

Le système (2.3), représente respectivement le bilan de quantité de mouvement dans les directions horizontale et verticale (2.3a), (2.3b), avec ν un coefficient de viscosité cinématique et g l'accélération de la pesanteur, le bilan de flottabilité où κ est un coefficient de diffusion thermique (2.3c) et l'incompressibilité (2.3d).

Les variables ρ_r et p_r sont respectivement une densité constante et une pression de référence vérifiant l'équilibre hydrostatique,

$$\frac{dp_r}{dz} = -\rho_r g,$$

seuls les écarts à ces références $\tilde{\rho}$ et $\tilde{p}$ contribuent à la dynamique,

$$\tilde{\rho} = \rho - \rho_r \quad \text{et} \quad \tilde{p} = p - p_r(z).$$

Des termes dissipatifs sont ajoutés dans les équations (2.3a), (2.3b) et (2.3c) contrôlés par $\epsilon \ll 1$, notamment pour des raisons numériques. Ils correspondent à des amortissements dits « linéaires »¹ analogues à une friction de Raighleigh dans (2.3a), (2.3b) et à un refroidissement Newtonien dans l'équation (2.3c). Suivant les cas considérés, la dissipation dans (2.3) pourra être modélisée en négligeant les termes de dissipation verticale (∂_z^2 , section 2.2) ou en ne considérant que ceux-ci (section 2.3, 2.4).

Ces équations sont ensuite linéarisées autour de l'état incident $u_0(z)$, 0, $\rho_0(z)$, $p_0(z)$:

$$u = u_0(z) + u'(x, z, t)$$

$$w = w'(x, z, t),$$

$$\tilde{\rho} = \rho_0(z) + \rho'(x, z, t)$$

1. Dans la suite de ces travaux, ces termes dissipatifs seront appelés « dissipation linéaire ».

$$\tilde{p} = p_0(z) + p'(x, z, t)$$

où u' , w' , ρ' et p' sont les perturbations de u , w , $\tilde{\rho}$, $\tilde{p}$.

En supposant les solutions stationnaires et en ne gardant que les termes du premier ordre on obtient,

$$u_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{du_0}{dz} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \right) - \epsilon u', \quad (2.5a)$$

$$u_0 \frac{\partial w'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p'}{\partial z} - g \frac{\rho'}{\rho_r} + \nu \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} \right) - \epsilon w', \quad (2.5b)$$

$$u_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} + w' \frac{d\rho_0}{dz} = \kappa \left(\frac{\partial^2 \rho'}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} \right) - \epsilon \rho', \quad (2.5c)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0. \quad (2.5d)$$

Le système (2.5) est associé aux conditions aux limites en $z = h$ pour les variables dynamiques u' , w' et ρ' . La condition d'ajustement thermique à la surface s'écrit

$$\rho_{0z} h + \rho'(x, h) = 0. \quad (2.6)$$

Les cas où la dissipation verticale (∂_z^2) est négligée seront traités avec une condition de glissement,

$$\frac{\partial u'}{\partial z}(x, h) = 0, \quad w'(x, h) = (u_0(h) + u'(x, h)) \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (2.7)$$

tandis que les cas où la dissipation est seulement due aux termes de dissipation verticale, on adoptera une condition de non glissement,

$$u_0(h) + u'(x, h) = 0, \quad w'(x, h) = 0. \quad (2.8)$$

On adimensionne ensuite les équations afin de mettre en évidence les paramètres qui contrôlent la dynamique du système,

$$(x, z) = L(\bar{x}, \bar{z}) ; (u', w') = u_{0z}(0) L(\bar{u}, \bar{w}) ; p' = \rho_r u_{0z}^2(0) L^2 \bar{p} ; b' = u_{0z}^2(0) L \bar{b}, \quad (2.9)$$

où $b' = -g \frac{\rho'}{\rho_r}$ représente la flottabilité et où le symbole "—" est associé aux grandeurs sans dimension. On notera l'utilisation $u_{0z}(0)$ comme échelle caractéristique temporelle afin de pouvoir traiter les cas neutres dans la théorie. Dans ce formalisme,

$$\bar{u}_0(\bar{z}) = D \tanh(\bar{z}/D) \text{ avec } D = \frac{d}{L}. \quad (2.10)$$

En utilisant la notation $\partial_i = \frac{\partial}{\partial i}$, le système (2.5) s'écrit

$$\bar{u}_0 \partial_{\bar{x}} \bar{u} + \bar{u}_{0\bar{z}} \bar{w} = -\partial_{\bar{x}} \bar{p} + \bar{\nu} \left(\partial_{\bar{x}}^2 \bar{u} + \partial_{\bar{z}}^2 \bar{u} \right) - \epsilon \bar{u}, \quad (2.11a)$$

$$\bar{u}_0 \partial_{\bar{x}} \bar{w} = -\partial_{\bar{z}} \bar{p} + \bar{b} + \bar{\nu} \left(\partial_{\bar{x}}^2 \bar{w} + \partial_{\bar{z}}^2 \bar{w} \right) - \epsilon \bar{w}, \quad (2.11b)$$

$$\bar{u}_0 \partial_{\bar{x}} \bar{b} + J \bar{w} = P^{-1} \bar{\nu} \left(\partial_{\bar{x}}^2 \bar{b} + \partial_{\bar{z}}^2 \bar{b} \right) - \epsilon \bar{b}, \quad (2.11c)$$

$$\partial_{\bar{x}}\bar{u} + \partial_{\bar{z}}\bar{w} = 0, \quad (2.11d)$$

avec

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{u_{0z}^2(0)L^2}, \quad P_r = \frac{\nu}{\kappa}, \quad \text{et} \quad J = -\frac{g\rho_{0z}}{\rho_r u_{0z}^2(0)}. \quad (2.12)$$

Dans (2.12) les nombres adimensionnés sont $\bar{\nu}$ l'inverse du nombre de Reynolds, P_r le nombre de Prandtl, et J le nombre de Richardson de l'écoulement.

Le nombre de Reynolds quantifie la force d'inertie par rapport aux forces dues à la viscosité du fluide, il sera petit, c'est à dire que les forces d'inertie domineront les termes dissipatifs. L'effet de la viscosité ne se fera sentir que dans une fine couche limite près de la surface. Dans toute la suite de cette étude, nous utiliserons un coefficient de viscosité $\bar{\nu}$ constant. Cette hypothèse, bien que restrictive, nous permettra de simplifier les équations.

Le nombre de Prandtl est défini comme le rapport entre la viscosité cinématique et la diffusion thermique. Il permet de quantifier l'importance relative du transport de quantité de mouvement dû à la viscosité par rapport à la diffusion thermique au sein d'un écoulement. Dans l'atmosphère $P_r \sim 1$, même dans le cas où la diffusion est essentiellement turbulente. De plus, nous verrons que les résultats montrés par la suite sont peu impactés pour des valeurs de P_r autour de l'unité.

La valeur de D correspond à la courbure maximum du profil de vent, un critère généralement utilisé pour définir la hauteur de la couche limite. Il est intéressant de noter qu'une plus grande valeur de D correspond donc à une couche limite plus épaisse mais aussi à un vent plus fort au sommet de celle-ci, en accord avec le fait que le vent augmente avec l'altitude dans la couche limite.

Le système (2.11) fait aussi apparaître le nombre de Richardson qui, rappelons le, mesure la stabilité dynamique de l'écoulement (section 1.2.2). Ce paramètre est central dans notre étude des ondes piégées car, dans une situation de niveau critique à la surface, il conditionne l'efficacité de la réflexion des ondes au sol et donc celle du piégeage (section 1.5.2).

L'adimensionalisation des équations nous permet de définir la hauteur du relief qui dans le cas d'une Gaussienne s'écrit

$$\bar{h}(\bar{x}) = S e^{-\bar{x}^2/2}, \quad \text{où} \quad S = \frac{H}{L}, \quad (2.13)$$

S étant la pente adimensionnée. Dans ce formalisme, on peut établir le bilan d'action du système (voir le calcul détaillé dans l'annexe A),

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{u}_0 A + \frac{\bar{b}^2}{2J} + \frac{\bar{u}^2 - \bar{w}^2}{2} \right)}_{F^x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\bar{u}\bar{w})}_{F^z} = \underbrace{\frac{\bar{\nu}}{J} \left(\bar{b}\Delta\bar{\zeta} + P^{-1}\Delta\bar{b} \left(\bar{\zeta} - \bar{b}\frac{\bar{u}_{0z\bar{z}}}{J} \right) \right)}_Q - 2\epsilon A \quad (2.14)$$

où,

$$\bar{\zeta} = \partial_{\bar{z}}\bar{u} - \partial_{\bar{x}}\bar{w} \text{ et } A = \frac{\bar{\zeta}\bar{b}}{J} - \frac{\bar{u}_{0\bar{z}\bar{z}}\bar{b}^2}{2J^2}.$$

A est le pseudo-moment (section 1.3.2), son flux ayant pour composantes horizontale et verticale F^x et F^z respectivement, les termes dissipatifs étant représentés par Q . Par soucis de continuité avec l'Eq (1.17) le terme $\partial_t A$ est écrit dans l'Eq (2.14), bien entendu, ici, la dynamique est stationnaire, $\partial_t A = 0$, par conséquent la divergence du flux d'action est directement égale aux termes de production/destruction d'action Q .

Dans le cadre de la théorie linéaire, une montagne comme celle représentée par (2.2) force un spectre de nombre d'onde centré autour du nombre d'onde principal ici, $\bar{k}_D = 1$ (ou $k_D = 1/L$ dans l'espace dimensionnel). Afin d'évaluer le champ d'ondes résultant de la superposition de ces différents modes excités par la montagne, les différentes variables du système sont représentées en fonction de leur transformée de Fourier dans la direction horizontale,

$$\bar{w}(\bar{x}, \bar{z}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\mathbf{w}}(\bar{k}, \bar{z}) e^{i\bar{k}\bar{x}} d\bar{k}, \text{ avec } \bar{\mathbf{w}}(\bar{k}, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{w}(\bar{x}, \bar{z}) e^{-i\bar{k}\bar{x}} d\bar{x}, \quad (2.15)$$

où $i^2 = -1$ et $\bar{k}$ est le nombre d'onde horizontal adimensionné. Dans ce formalisme, $\partial_x = ik$, en négligeant les termes de dissipation linéaire et en adoptant l'approximation de Prandtl,²

$$i\bar{k}\bar{u}_0\bar{\mathbf{u}} + \bar{u}_{0\bar{z}}\bar{\mathbf{w}} = -i\bar{k}\bar{\mathbf{p}} + \bar{\nu}\partial_{\bar{z}}^2\bar{\mathbf{u}} \quad (2.16a)$$

$$i\bar{k}\bar{u}_0\bar{\mathbf{w}} = -\partial_{\bar{z}}\bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{b}} + \bar{\nu}\partial_{\bar{z}}^2\bar{\mathbf{w}} \quad (2.16b)$$

$$i\bar{k}\bar{u}_0\bar{\mathbf{b}} + J\bar{\mathbf{w}} = P^{-1}\bar{\nu}\partial_{\bar{z}}^2\bar{\mathbf{b}} \quad (2.16c)$$

$$i\bar{k}\bar{\mathbf{u}} + \partial_{\bar{z}}\bar{\mathbf{w}} = 0. \quad (2.16d)$$

Les sections suivantes sont dédiées à la résolution de ce système dans différents cas particulier de plus en plus complexes. Pour chacun des cas abordés nous effectuerons la résolution en plusieurs étapes. Tout d'abord, loin de la surface, **ie** : dans la troposphère libre, la dynamique peut être considérée comme non visqueuse, $\bar{\nu} \ll 1$. Le système (2.16) devient,

$$i\bar{k}\bar{u}_0\bar{\mathbf{u}} + \bar{u}_{0\bar{z}}\bar{\mathbf{w}} = -i\bar{k}\bar{\mathbf{p}}, \quad (2.17a)$$

$$i\bar{k}\bar{u}_0\bar{\mathbf{w}} = -\partial_{\bar{z}}\bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{b}}, \quad (2.17b)$$

$$i\bar{k}\bar{u}_0\bar{\mathbf{b}} + J\bar{\mathbf{w}} = 0, \quad (2.17c)$$

$$i\bar{k}\bar{\mathbf{u}} + \partial_{\bar{z}}\bar{\mathbf{w}} = 0. \quad (2.17d)$$

On peut alors définir une solution extérieure $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}$, satisfaisant l'équation,

$$\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}zz} + \left[\frac{J}{\bar{u}_0^2} - \frac{\bar{u}_{0\bar{z}\bar{z}}}{\bar{u}_0} - \bar{k}^2 \right] \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}} = 0, \quad (2.18)$$

2. L'approximation de Prandtl consiste à négliger la dissipation horizontale (∂_x^2) devant la dissipation verticale (∂_z^2).

c'est l'équation de Taylor-Goldstein sous sa forme adimensionnelle. Dans cette équation le terme $J/\bar{u}_0^2$ représente l'effet de la flottabilité, le terme $\bar{u}_{0zz}/\bar{u}_0$ est lié à la vorticité de l'écoulement moyen, et le dernier terme $\bar{k}^2$ est la signature des effets non hydrostatiques. L'étape suivante consiste à exprimer un développement asymptotique de la solution $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}$ lorsque $\bar{z} \rightarrow 0$, pour construire une fonction de raccordement que nous appellerons $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{M}}$ (*matching solution*), Figure 2.1a. Puis, nous calculerons une solution intérieure près de la surface : $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{V}}$ (*inner solution*) raccordée à $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{M}}$, Figure 2.1b. Cette solution int  grera la viscosité à l'ordre dominant ce qui lui permettra de satisfaire les conditions aux limites. Nous serons alors en mesure de construire une approximation uniforme, $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{C}}$,    l'aide des trois solutions calculées précédemment, $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}$, $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{M}}$ et $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{V}}$: $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{V}}$.

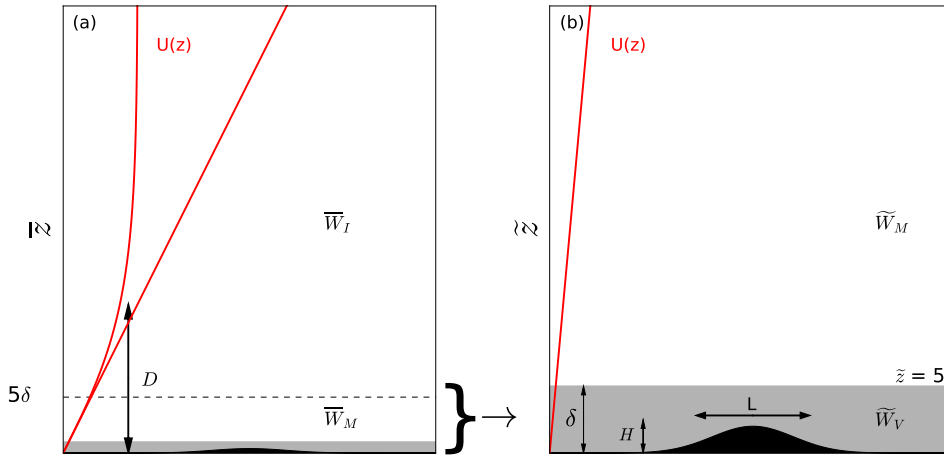


FIGURE 2.1 – Schéma illustrant les différents paramètres du modèle théorique décrit dans ce chapitre. Les profils de vent considérés (rouge), la topographie (noire) ainsi que leurs caractéristiques sont représentées. La bande grise correspond à l'échelle caractéristique de la couche intérieure, $\bar{\delta}$. Les domaines de validité verticaux des différentes solutions ($\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}$, $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{M}}$, $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{V}}$) sont placés schématiquement. (a) Système représenté avec les variables extérieures pour les deux profils de vent utilisés dans le modèle. (b) Zoom près de la surface entre, $0 < \bar{z} < 5\bar{\delta}$, en variables intérieures. Les variables intérieures ainsi que l'échelle caractéristique de la couche intérieure, $\bar{\delta}$ seront définies par la suite.

Enfin, (2.16) nous permet d'exprimer les relations de polarisations du système qui relient, dans l'espace spectral, la phase et l'amplitude des perturbations associées à chaque variable avec la perturbation de la vitesse verticale. Ces relations nous permettent donc de reconstruire $\bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{C}}$, $\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{C}}$ et $\bar{\mathbf{b}}_{\mathbf{C}}$ à partir de $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{C}}$. Dans la suite, seuls les cas $k > 0$ seront considérés, les solutions pour $k < 0$ étant construites en prenant le complexe conjugué des solutions pour $k > 0$. Enfin, les conditions aux limites à la surface nous permettront de calculer l'amplitude de la solution $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{C}}$ associée à chaque harmonique.

Configurations	Cisaillement constant, $u_{0z} = \text{cste}$		Cisaillement variable, $u_{0zz} \neq \text{cste}$, (Existence des ondes piégées)	
Hypothèses	Hydrostatique, couche limite visqueuse	Non hydrostatique, couche limite visqueuse	Non hydrostatique, dissipation linéaire	Non hydrostatique, couche limite visqueuse
Solution extérieure ($\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}$)				
Fonction de raccordement ($\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{M}}$)				
Solution intérieure ($\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{V}}$)				
Sections	2.3.1, 4.2 et Annexe D	2.3.2, 4.3 et Annexe E	2.2, 3 et L16	2.4, 5
Principaux résultats	Dynamique de niveau critique à la surface = <i>downslopes</i> <i>winds</i> + effet de Foehn pour des écoulements stratifiés, (1)	(1) + Cas neutres. Transition entre le régime de traînée turbulente et celui dû aux ondes de gravité pour $J \simeq 1$, (2)	(1) + Ondes piégées = instabilités de KH, elles sont favorisées pour $J < 1$, (3)	(1)+(2)+(3) + Interaction ondes piégées-couche limite, influence de la courbure de l'écoulement sur la traînée orographique, (4)

Tableau 2.1 – Tableau récapitulatif des différentes configurations du modèle avec les différentes solutions utilisées pour la construction de l'approximation uniforme $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{C}}$. Les principaux résultats correspondant à chaque cas sont aussi indiqués.

Dans les cas (1), (2) et (4) la traînée orographique de surface et le flux vertical de quantité de mouvement sont estimés pour évaluer les interactions entre la topographie et l'écoulement moyen.

- Solution hydrostatique avec cisaillement constant (Booker and Bretherton, 1967) ;
- Solution non dissipative construite à partir des fonctions de Hankel ;
- Solution non dissipative construite à partir des fonctions hypergéométriques ;
- Solution visqueuse construite à partir des solutions de (Baldwin and Roberts, 1970) dans le cas d'un coefficient de viscosité constant ;
- Solution avec dissipation linéaire proche du niveau critique (Booker and Bretherton, 1967).

2.2 Cas avec cisaillement variable, dissipation linéaire

Comme vu précédemment dans la section 1.5, les interactions entre les ondes piégées et la couche limite atmosphérique peuvent être complexes. Dans ce contexte, il est intéressant de d'abord considérer une représentation de la couche limite très simplifiée, caractérisée par une dissipation linéaire, associée à une condition de glissement à la surface (Tableau 2.1). Au premier abord, l'association d'un tel profil de vent (*i.e.* un profil typique de couche limite) avec une condition de glissement à la surface et une dynamique non visqueuse peut sembler inadaptée. En effet, la courbure du vent incident est généralement due à la friction et/ou à la dynamique visqueuse présente dans la couche limite.

Il faut cependant rappeler que les cisaillements de vent horizontal dans l'atmosphère ne sont pas toujours dus à la dynamique de la couche limite et résultent parfois de gradients de température horizontaux : ils peuvent alors s'étendre sur plusieurs kilomètres (Sheridan et al., 2007; Doyle et al., 2011), bien au-delà de la couche limite, là où la dynamique peut être considérée comme non visqueuse.

Malgré cette représentation simplifiée, la présence d'un niveau critique à la surface (section 1.5) induit une singularité en $\bar{z} = 0$ (voir Eqs. (2.18) et (2.1a)). Cette situation singulière à bas niveau nous oblige à conserver des termes dissipatifs dans les équations, même dans le cas non visqueux, d'une part pour atténuer les effets dissipatifs non linéaires dus au niveau critique à la surface et d'autre part pour des raisons numériques. Dans ce contexte, la dynamique du système peut être représentée par,

$$i\bar{k}\bar{u}_0\bar{\mathbf{u}} + \bar{u}_0\bar{z}\bar{\mathbf{w}} + i\bar{k}\bar{\mathbf{p}} = -\bar{\epsilon}\bar{\mathbf{u}} - \bar{\nu}\bar{k}^2\bar{\mathbf{u}}, \quad (2.19a)$$

$$i\bar{k}\bar{u}_0\bar{\mathbf{w}} + \partial_{\bar{z}}\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{b}} = -\bar{\epsilon}\bar{\mathbf{w}} - \bar{\nu}\bar{k}^2\bar{\mathbf{w}}, \quad (2.19b)$$

$$i\bar{k}\bar{u}_0\bar{\mathbf{b}} + J\bar{\mathbf{w}} = -\bar{\epsilon}\bar{\mathbf{b}} - P^{-1}\bar{\nu}\bar{k}^2\bar{\mathbf{b}}, \quad (2.19c)$$

$$i\bar{k}\bar{\mathbf{u}} + \partial_{\bar{z}}\bar{\mathbf{w}} = 0. \quad (2.19d)$$

Une dissipation visqueuse est aussi appliquée dans la direction horizontale, contrôlée par $\bar{\nu}$, toujours pour les mêmes raisons. Ces termes dissipatifs deviennent significatifs près du sol et la hauteur caractéristique de cette couche dissipative à la surface peut être évaluée en calculant pour quelle hauteur $\bar{\delta}$, l'amplitude des termes dissipatifs devient comparable à celle des termes d'advection. Lorsque $z \ll 1$, $\bar{u}_0 \simeq \bar{z}$, alors pour une harmonique $\bar{k}$ dans l'équation (2.19a) la dissipation est non négligeable si,

$$i\bar{k}\bar{z}\bar{\mathbf{u}} \simeq -\bar{\epsilon}\bar{\mathbf{u}} - \bar{\nu}\bar{k}^2\bar{\mathbf{u}},$$

$$i\bar{k}\bar{\mathbf{u}}[\bar{z} - i(\bar{\epsilon}/\bar{k} + \bar{\nu}\bar{k})] \simeq 0.$$

Soit,

$$\bar{\delta} = \bar{\epsilon}/\bar{k} + \bar{\nu}\bar{k}. \quad (2.20)$$

Cette grandeur définit la hauteur caractéristique de la couche intérieure pour un nombre d'onde $\bar{k}$. On peut alors déterminer au premier ordre l'épaisseur de la couche dissipative z_B , pour le nombre d'onde principal forcé par la montagne ($\bar{k}_D = 1$), définie par,

$$z_B = 5\bar{\delta} = 5(\bar{\epsilon} + \bar{\nu}). \quad (2.21)$$

Globalement, les effets dissipatifs introduit dans les équations pourront être négligés lorsque $\bar{z} > z_B$ ³. L'équation de Taylor-Goldstein dissipative s'écrit

$$\bar{\mathbf{w}}_{zz} + \left[\frac{J}{(\bar{u}_0 - i\bar{\delta})^2} - \frac{\bar{u}_{0\bar{z}\bar{z}}}{\bar{u}_0 - i\bar{\delta}} - \bar{k}^2 \right] \bar{\mathbf{w}} = 0, \quad (2.22)$$

associée à la condition à la limite de glissement non linéaire en $\bar{z} = \bar{h}$,

$$\bar{w}(\bar{x}, \bar{h}) = [\bar{u}_0(\bar{h}) + \bar{u}(\bar{x}, \bar{h})] \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}}. \quad (2.23)$$

La première étape consiste à exprimer la solution non visqueuse, $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}$, valable loin de la surface, qui vérifie l'équation (2.22) pour $\bar{\delta} = 0$. Dans le cas d'un profil de vent donné par (2.1a),

$$\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}zz} + \left[\frac{J}{\bar{u}_0^2} + \frac{2}{D^2} \left(1 - \frac{\bar{u}_0^2}{D^2} \right) - \bar{k}^2 \right] \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}} = 0. \quad (2.24)$$

Les solutions de cette équation s'expriment à l'aide des fonctions hypergéométriques, le calcul complet de ces solutions est détaillé dans l'annexe B. On peut alors définir $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}$,

$$\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}} = 2^{-\bar{m}} r^{\frac{1}{4} + i\frac{\mu}{2}} (1 - r)^{-\frac{\bar{m}}{2}} \mathbf{W}_{2(1)} \underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} e^{-\bar{m}\bar{z}/D}, \quad (2.25)$$

où $\mathbf{W}_{2(1)}$ s'exprime à l'aide de la fonction hypergéométrique et,

$$\bar{m} = \sqrt{|J - D^2 \bar{k}^2|}, \quad r = \bar{u}_0^2 / D^2 \quad \text{et} \quad \mu = \sqrt{|J - \frac{1}{4}|} \quad (2.26)$$

La solution $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}$ est construite de sorte que, pour $D^2 \bar{k}^2 < J$ et $\bar{z} \rightarrow \infty$, elle correspond à une perturbation d'amplitude unitaire qui décroît exponentiellement avec l'altitude, *i.e.* une onde se propageant vers le haut.

Pour un système d'onde stationnaire, la fréquence intrinsèque s'exprime comme $\bar{\Omega} = -\bar{k}\bar{u}_0 = -\bar{k}D$. Les solutions d'ondes se propageant verticalement vers le haut peuvent être sélectionnées en imposant une vitesse de groupe verticale positive,

$$C_{gz} = \frac{d\bar{\Omega}}{d\bar{m}} = \frac{\bar{m}}{\bar{k}D} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{sign}(\bar{m}) = \text{sign}(\bar{k}),$$

où C_{gz} est la vitesse de groupe verticale. Les cas pour lesquels $J < \bar{k}^2 D^2$ et $J < 1/4$, sont traités en remplaçant $\bar{m}$ par $i \text{sign}(\bar{k})\bar{m}$ et μ par $i\mu$.

La suite de la résolution consiste à exprimer $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}$ près de la surface, soit,

$$\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}(\bar{k}, \bar{z} \ll 1) \approx \bar{a}_1(\bar{k}) \bar{z}^{\frac{1}{2} - i\mu} + \bar{a}_2(\bar{k}) \bar{z}^{\frac{1}{2} + i\mu} = \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{M}}(\bar{k}, \bar{z}), \quad (2.27)$$

3. Le facteur 5 présent dans l'expression de z_B témoigne de la distance verticale nécessaire à la convergence des solutions $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{V}}$ et $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{M}}$, voir Eqs. (2.27) et (2.30)

avec

$$\bar{a}_1(\bar{k}) = b_1 D^{-\frac{1}{2}+i\mu} \text{ et } \bar{a}_2(\bar{k}) = b_2 D^{-\frac{1}{2}-i\mu}, \quad (2.28)$$

où les coefficients b_1 et b_2 sont des fonctions détaillées dans l'annexe B.

Enfin, proche de $\bar{z} = 0$, la dissipation devient non négligeable, $\bar{u}_0 \approx \bar{z}$ et $\bar{u}_{0\bar{z}\bar{z}} = 0$. Au premier ordre la solution $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{V}}$ vérifie (Booker and Bretherton, 1967),

$$\frac{d^2}{d\bar{z}^2} \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{V}} + \frac{J}{\bar{z}^2} \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{V}} = 0, \text{ avec } \tilde{z} = \bar{z} - i\bar{\delta}, \quad (2.29)$$

dont la solution est de la forme,

$$\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{V}} = \tilde{a}_1(\bar{k})(\bar{z} - i\bar{\delta})^{\frac{1}{2}-i\mu} + \tilde{a}_2(\bar{k})(\bar{z} - i\bar{\delta})^{\frac{1}{2}+i\mu}. \quad (2.30)$$

En prenant comme expression pour les coefficients $\tilde{a}_1$ et $\tilde{a}_2$ celles de $\bar{a}_1$ et $\bar{a}_2$ données par (2.28), on remarque que lorsque $\tilde{z} \rightarrow \bar{z}$ (*i.e.* $\bar{z} \gg \bar{\delta}$) les solutions $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{M}}$ et $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{V}}$ sont équivalentes.

Pour résumer, on a calculé une solution extérieure loin de la surface ($\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}$), une solution intérieure à la surface ($\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{V}}$), reliées entre elles par une fonction de raccordement ($\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{M}}$) telle que,

$$\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}} \underset{\bar{z} \rightarrow 0}{\approx} \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{M}} \text{ et } \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{V}} \underset{\tilde{z} \rightarrow \bar{z}}{\approx} \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{M}}. \quad (2.31)$$

On peut alors construire une approximation uniforme (Bender and Orszag, 1978) pour $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{C}}$ telle que,

$$\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{C}}(\bar{k}, \bar{z}) = \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}(\bar{k}, \bar{z}) + \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{V}}(\bar{k}, \bar{z}) - \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{M}}(\bar{k}, \bar{z}), \quad (2.32)$$

et donc

$$\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{C}} \underset{\bar{z} \rightarrow 0}{\approx} \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{V}} \text{ et } \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{C}} \underset{\tilde{z} \rightarrow \bar{z}}{\approx} \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}. \quad (2.33)$$

La dernière étape de la résolution consiste à calculer l'amplitude de la vitesse verticale imposée par la condition à la limite à la surface. Pour cela, on cherche $w(\bar{x}, \bar{z})$ sous la forme,

$$w(\bar{x}, \bar{z}) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} f(\bar{k}) \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{C}}(\bar{k}, \bar{z}) e^{i\bar{k}\bar{x}} d\bar{k}, \quad (2.34)$$

où les coefficients $f(\bar{k})$ correspondent aux amplitudes associées à chaque harmonique $\bar{k}$. Dans le cas d'une condition non linéaire de glissement à la surface, cela revient chercher les coefficients $f(\bar{k})$ vérifiant,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\bar{k}) \left[\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{C}}(\bar{k}, \bar{h}) - \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{C}}(\bar{k}, \bar{h}) \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} \right] e^{i\bar{k}\bar{x}} d\bar{k} = \bar{u}_0 \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}}, \quad (2.35)$$

où $\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{C}}$ peut être exprimé en fonction de $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{C}}$ à l'aide des relations de polarisations. Le fait d'utiliser l'approximation uniforme $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{C}}$ afin de satisfaire la condition à la limite au lieu d'utiliser la solution à la surface $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{V}}$, nous permet de considérer des montagnes relativement hautes. L'inversion de la condition (2.35) est réalisée avec un programme d'inversion numérique (voir section 2.5).

2.3 Cas avec cisaillement constant, visqueux

Le but de cette section est de traiter le cas où la dissipation due à la couche limite agit dans une couche intérieure, les termes dissipatifs étant modélisés avec un coefficient de viscosité ν constant (Tableau 2.1).

D'autre part, on se place dans le cas d'un profil de vent à cisaillement constant. Ce profil de vent est obtenu dans la limite des grandes valeurs de D ,

$$\bar{u}_0(\bar{z}) = \lim_{D \rightarrow +\infty} D \tanh(\bar{z}/D) = \bar{z} \quad (2.36)$$

Nous exprimerons dans un premier temps la solution dans le cas hydrostatique, puis dans le cas non hydrostatique.

2.3.1 Écoulement hydrostatique

Comme précédemment on recherche d'abord une solution non visqueuse pour $\bar{z} \gg 1$. Dans le cadre de l'approximation hydrostatique avec un profil de vent donné par (2.36) l'équation (2.18) devient,

$$\bar{\mathbf{w}}_{I_{zz}} + \frac{J}{\bar{z}^2} \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}} = 0. \quad (2.37)$$

Cette équation a deux solutions (Booker and Bretherton, 1967),

$$\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}} = \bar{z}^{\frac{1}{2} \pm i\mu} \quad \text{avec} \quad \mu = \sqrt{J - \frac{1}{4}}. \quad (2.38)$$

Dans le cas hydrostatique, les ondes n'ont pas de points tournants et aucune d'entre elles ne se propage vers la surface, on choisit donc la solution correspondant à une onde se propageant vers le haut lorsque $k > 0$ et $J > 1/4$,

$$\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}(\bar{k}, \bar{z}) = \bar{z}^{\frac{1}{2} + i\mu}. \quad (2.39)$$

Pour les cas $J < 1/4$, le sens de propagation de l'onde ne nous permet plus de différencier les deux solutions (2.38). Ces situations faiblement stratifiées seront néanmoins traitées dans la section non hydrostatique 2.3.2.

Nous verrons dans la suite que, pour le cas hydrostatique, il n'est pas nécessaire de chercher un développement asymptotique de $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}$ en $\bar{z} = 0$, nous allons donc calculer directement la solution visqueuse. Pour cela, on introduit les variables « intérieures » à l'aide du dimensionnement suivant,

$$\bar{z} = \bar{\delta} \tilde{z}, \quad (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}}) = (\tilde{\mathbf{u}}, \bar{k} \bar{\delta} \tilde{\mathbf{w}}), \quad (\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\delta} \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{b}}), \quad (2.40)$$

où $\bar{\delta}$ représente l'épaisseur caractéristique de la couche intérieure, *i.e.* l'épaisseur caractéristique de la couche dissipative et le symbole " $\sim$ " est associé aux variables intérieures. Comme dans la section précédente (2.2), $\bar{\delta}$ peut être calculée en vérifiant pour quelle

hauteur l'amplitude des termes dissipatifs devient comparable à celle des termes d'advection, soit

$$i\bar{k}\bar{\delta}\tilde{z}\tilde{\mathbf{u}} \simeq \frac{\bar{\nu}}{\bar{\delta}^2}\partial_{\tilde{z}}^2\tilde{\mathbf{u}} \Rightarrow \bar{\delta} = \left(\frac{\bar{\nu}}{\bar{k}}\right)^{1/3}. \quad (2.41)$$

De même, les effets dissipatifs pourront être négligés pour $\tilde{z} > 5\bar{\delta}$. Il est important de souligner que dans ce formalisme, l'échelle caractéristique de la couche intérieure $\bar{\delta}$ et la hauteur de la couche limite sont bien deux paramètres distincts. Le premier étant associé à la hauteur caractéristique sur laquelle les ondes sont affectées par la dissipation visqueuse et le second faisant référence à la hauteur de la courbure maximum du profil de vent incident *i.e.* D qui, dans le cas d'un cisaillement constant, est infinie.

À l'ordre dominant en $\bar{\delta}$, cette mise à l'échelle transforme (2.16) en

$$\partial_{\tilde{z}}^2\tilde{\mathbf{u}} = i\tilde{z}\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{w}} + i\tilde{\mathbf{p}}, \quad (2.42a)$$

$$\partial_{\tilde{z}}^2\tilde{\mathbf{b}} = P(i\tilde{z}\tilde{\mathbf{b}} + J\tilde{\mathbf{w}}), \quad (2.42b)$$

$$\partial_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{w}} = -i\tilde{\mathbf{u}}, \quad \partial_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{b}}, \quad (2.42c)$$

$\tilde{\mathbf{w}}$ vérifie alors l'équation d'ordre 6,

$$(\partial_{\tilde{z}}^2 - iP\tilde{z})(\partial_{\tilde{z}}^2 - i\tilde{z})\partial_{\tilde{z}}^2\tilde{\mathbf{w}} = JP\tilde{\mathbf{w}}, \quad (2.43)$$

Cette équation possède 6 solutions indépendantes. Deux de ces solutions divergent lorsque $\tilde{z}$ tend vers l'infini et ne seront pas utilisées (Van Duin and Kelder, 1986). Les quatre autres s'expriment comme (Hazel, 1967; Baldwin and Roberts, 1970),

$$\tilde{\mathbf{w}}_1 \underset{\tilde{z} \rightarrow +\infty}{\simeq} \tilde{z}^{\frac{1}{2}-i\mu}, \quad \tilde{\mathbf{w}}_2 \underset{\tilde{z} \rightarrow +\infty}{\simeq} \tilde{z}^{\frac{1}{2}+i\mu}, \quad \tilde{\mathbf{w}}_3 \underset{\tilde{z} \rightarrow \infty}{\simeq} \tilde{z}^{-\frac{5}{4}}e^{-\frac{2\sqrt{i}}{3}\tilde{z}^{3/2}}, \quad \tilde{\mathbf{w}}_4 \underset{\tilde{z} \rightarrow \infty}{\simeq} \tilde{z}^{-\frac{9}{4}}e^{-\frac{2\sqrt{iP}}{3}\tilde{z}^{3/2}}. \quad (2.44)$$

Ces solutions peuvent être évaluées en considérant leurs formes asymptotiques valables pour $\tilde{z} > 5$ et en intégrant numériquement vers le bas pour $0 < \tilde{z} < 5$ à l'aide d'un algorithme de Runge-Kutta (L07).

Dans ce cas, on remarque que $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}} = \tilde{\mathbf{w}}_2$ (2.39). D'autre part, les solutions $\tilde{\mathbf{w}}_3$, $\tilde{\mathbf{w}}_4$ tendent rapidement vers zéro lorsque $\tilde{z}$ tend vers l'infini. De ce fait, toutes combinaisons linéaires des solutions $\tilde{\mathbf{w}}_2$, $\tilde{\mathbf{w}}_3$, $\tilde{\mathbf{w}}_4$ coïncident, lorsque $\tilde{z}$ tend vers l'infini, avec la solution non visqueuse $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}$. À noter que le comportement exponentiel des solutions $\tilde{\mathbf{w}}_3$, $\tilde{\mathbf{w}}_4$ lorsque $\tilde{z}$ tend vers zéro donne lieu à des problèmes de convergence discutés dans l'annexe C.3.

Ainsi, on peut définir une solution $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{C}}$ s'écrivant en fonction des variables extérieures,

$$\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{C}}(\bar{k}, \bar{z}) = \bar{k}\bar{\delta}(\bar{k}) \left[f_2(\bar{k})\tilde{\mathbf{w}}_2(\bar{z}/\bar{\delta}(\bar{k})) + f_3(\bar{k})\tilde{\mathbf{w}}_3(\bar{z}/\bar{\delta}(\bar{k})) + f_4(\bar{k})\tilde{\mathbf{w}}_4(\bar{z}/\bar{\delta}(\bar{k})) \right], \quad (2.45)$$

où les $f_i(\bar{k})$ correspondent aux amplitudes associées aux différents harmoniques pour chaque solution. En considérant que la montagne est incluse dans la couche limite, les

conditions aux limites à la surface (ajustement thermique et non glissement Eqs. (2.6), 2.8)) sont satisfaites par $\overline{\mathbf{w}}_{\mathbf{C}}$ et s'écrivent,

$$\overline{w}(\overline{x}, \overline{h}) \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{k} \overline{\delta}(\overline{k}) \left[f_2(\overline{k}) \tilde{\mathbf{w}}_2(\overline{k}, \tilde{h}) + f_3(\overline{k}) \tilde{\mathbf{w}}_3(\overline{k}, \tilde{h}) + f_4(\overline{k}) \tilde{\mathbf{w}}_4(\overline{k}, \tilde{h}) \right] e^{i\overline{k}\overline{x}} d\overline{k} = 0, \quad (2.46a)$$

$$\overline{u}(\overline{x}, \overline{h}) \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{k} \overline{\delta}(\overline{k}) \left[f_2(\overline{k}) \tilde{\mathbf{u}}_2(\overline{k}, \tilde{h}) + f_3(\overline{k}) \tilde{\mathbf{u}}_3(\overline{k}, \tilde{h}) + f_4(\overline{k}) \tilde{\mathbf{u}}_4(\overline{k}, \tilde{h}) \right] e^{i\overline{k}\overline{x}} d\overline{k} = -\overline{h}(\overline{x}), \quad (2.46b)$$

$$\overline{b}(\overline{x}, \overline{h}) \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{k} \overline{\delta}(\overline{k}) \left[f_2(\overline{k}) \tilde{\mathbf{b}}_2(\overline{k}, \tilde{h}) + f_3(\overline{k}) \tilde{\mathbf{b}}_3(\overline{k}, \tilde{h}) + f_4(\overline{k}) \tilde{\mathbf{b}}_4(\overline{k}, \tilde{h}) \right] e^{i\overline{k}\overline{x}} d\overline{k} = -J\overline{h}(\overline{x}), \quad (2.46c)$$

avec $\tilde{h} = \overline{h}(\overline{x})/\overline{\delta}(\overline{k})$.

Dans ce cas, les solutions $\overline{\mathbf{w}}_{\mathbf{C}}$ et $\overline{\mathbf{w}}_{\mathbf{V}}$ sont confondues. Cependant, l'utilisation des solutions visqueuses pour satisfaire les conditions aux limites se traduit par une condition sur la hauteur maximum de la montagne. En effet, les solutions visqueuses sont valables pour $\overline{z} \leq \overline{\delta}$, il faut donc que $S < \overline{\delta}(\overline{k}_D)$ (voir section 2.5).

2.3.2 Écoulement non Hydrostatique

On s'intéresse maintenant au cas non hydrostatique (Tableau 2.1). La solution $\overline{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}$ vérifie alors l'équation,

$$\overline{\mathbf{w}}_{I_{zz}} + \left[\frac{J}{\overline{z}^2} - \overline{k}^2 \right] \overline{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}} = 0. \quad (2.47)$$

Les solutions de cette équation peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions de Hankel (voir (Abramowitz and Stegun, 1964a) (AS dans la suite) et annexe C.1), on choisit,

$$\overline{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}(\overline{k}, \overline{z}) = i \sqrt{\frac{\pi \overline{k} \overline{z}}{2}} e^{-\frac{\mu \pi}{2}} H_{i\mu}^{(1)}(i\overline{k}\overline{z}) \quad \text{avec} \quad \mu = \sqrt{\left| J - \frac{1}{4} \right|}, \quad (2.48)$$

où $H_{i\mu}^{(1)}$ représente la fonction de Hankel et le facteur $i \sqrt{\pi \overline{k} \overline{z}/2} e^{-\frac{\mu \pi}{2}}$ assure une décroissance exponentielle d'amplitude unitaire dans le champ lointain (voir AS, 9.2.3),

$$\overline{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}(\overline{k}, \overline{z}) \underset{\overline{z} \rightarrow \infty}{\simeq} e^{-\overline{k}\overline{z}}. \quad (2.49)$$

Lorsque $J < 1/4$, μ est remplacé par $i\mu$ et il est possible de traiter les cas faiblement stratifiés. Contrairement au cas hydrostatique où tous les modes peuvent se propager verticalement sans contrainte, ici, pour chaque mode il existe un $\overline{z}$ pour lequel $\frac{J}{\overline{z}^2} - \overline{k}^2 < 0$, *i.e.* tous les modes sont piégés dans l'écoulement et se réfléchissent vers la surface.

Près de la surface, (2.48) peut se mettre sous la forme

$$\overline{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}(\overline{k}, \overline{z}) \underset{\overline{z} \rightarrow 0}{\approx} \overline{a}_1(\overline{k}) \overline{z}^{\frac{1}{2} - i\mu} + \overline{a}_2(\overline{k}) \overline{z}^{\frac{1}{2} + i\mu} = \overline{\mathbf{w}}_{\mathbf{M}}(\overline{k}, \overline{z}), \quad (2.50)$$

avec

$$\bar{a}_1 = -\frac{i\sqrt{\pi}}{\sinh(\mu\pi)\Gamma(1-i\mu)}\left(\frac{\bar{k}}{2}\right)^{\frac{1}{2}-i\mu} \quad \text{et} \quad \bar{a}_2 = \frac{i\sqrt{\pi}}{\sinh(\mu\pi)\Gamma(1+i\mu)}\left(\frac{\bar{k}}{2}\right)^{\frac{1}{2}+i\mu}, \quad (2.51)$$

où le calcul des coefficients $\bar{a}_1$ et $\bar{a}_2$ est détaillé dans l'annexe C.2.

Les équations décrivant la dynamique dans la couche limite visqueuse étant strictement identiques à la section précédente (2.3.1), le traitement de la solution visqueuse est effectué de manière similaire jusqu'à l'obtention des quatre solutions pour $\tilde{\mathbf{w}}$ (Eq (2.44)).

Dans ce cas, en posant

$$\tilde{\mathbf{w}}_{12} = \tilde{a}_1(\bar{k})\tilde{\mathbf{w}}_1 + \tilde{a}_2(\bar{k})\tilde{\mathbf{w}}_2, \quad (2.52)$$

on remarque que $\tilde{\mathbf{w}}_{12} = \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{M}}$ si,

$$\tilde{a}_1(\bar{k}) = \frac{\bar{a}_1}{\bar{k}}\bar{\delta}^{-1/2-i\mu}, \quad \text{et} \quad \tilde{a}_2(\bar{k}) = \tilde{a}_1(\bar{k})^*, \quad (2.53)$$

où l'indice « * » correspond au complexe conjugué de la grandeur considérée et les coefficients $\bar{\delta}^{-1/2\pm i\mu}/\bar{k}$ apparaissent pour exprimer les variables extérieures en fonction des variables intérieures. De plus, les solutions $\tilde{\mathbf{w}}_3$, $\tilde{\mathbf{w}}_4$ étant toujours négligeables devant $\tilde{\mathbf{w}}_{12}$ lorsque $\tilde{z}$ tend vers l'infini, toutes combinaisons linéaires des solutions $\tilde{\mathbf{w}}_{12}$, $\tilde{\mathbf{w}}_3$, $\tilde{\mathbf{w}}_4$ coïncident, lorsque $\tilde{z}$ tend vers l'infini avec la fonction de raccordement $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{M}}$ (*i.e.* avec la solution non visqueuse $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}$ lorsque $\tilde{z}$ tend vers zéro.)

La solution visqueuse $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{V}}$ en fonction des variables extérieures s'écrit,

$$\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{V}}(\bar{k}, \bar{z}) = \bar{k}\bar{\delta}(\bar{k}) \left[f_{12}(\bar{k})\tilde{\mathbf{w}}_{12}(\bar{z}/\bar{\delta}(\bar{k})) + f_3(\bar{k})\tilde{\mathbf{w}}_3(\bar{z}/\bar{\delta}(\bar{k})) + f_4(\bar{k})\tilde{\mathbf{w}}_4(\bar{z}/\bar{\delta}(\bar{k})) \right]. \quad (2.54)$$

Comme dans le cas hydrostatique, on considère que la montagne est située complètement dans la couche limite, et les conditions aux limites au sol sont donc toujours satisfaites par la solution visqueuse. On retrouve les équations (2.46) en remplaçant $(\tilde{\mathbf{w}}_2, \tilde{\mathbf{u}}_2, \tilde{\mathbf{b}}_2)$ par $(\tilde{\mathbf{w}}_{12}, \tilde{\mathbf{u}}_{12}, \tilde{\mathbf{b}}_{12})$ respectivement.

Enfin l'approximation uniforme pour $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{C}}$ dans le cas non hydrostatique s'écrit,

$$\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{C}}(\bar{k}, \bar{z}) = f_{12}(\bar{k})[\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}(\bar{k}, \bar{z}) - \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{M}}(\bar{k}, \bar{z})(\bar{k}, \bar{z})] + \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{V}}(\bar{k}, \bar{z}). \quad (2.55)$$

2.4 Cas avec cisaillement variable, visqueux

A partir des calculs des parties précédentes, on peut maintenant combiner les différentes approches et traiter le cas hybride où le vent incident possède un cisaillement variable,

$$\bar{u}_0(\bar{z}) = D \tanh(\bar{z}/D), \quad (2.56)$$

et la couche limite est représentée par des termes dissipatifs agissant dans une couche intérieure de hauteur caractéristique $\bar{\delta}$ (Tableau 2.1). Dans ce contexte, la solution non

visqueuse et son comportement asymptotique sont identiques aux expressions $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}$ et $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{M}}$ calculées dans la section 2.2,

$$\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}} = 2^{-\bar{m}} r^{\frac{1}{4} + i\frac{\mu}{2}} (1 - r)^{-\frac{\bar{m}}{2}} \mathbf{W}_{2(1)} \underset{\bar{z} \rightarrow \infty}{\simeq} e^{-\bar{m}\bar{z}/D}, \quad (2.57)$$

$$\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{M}}(\bar{k}, \bar{z}) = \bar{a}_1(\bar{k}) \bar{z}^{\frac{1}{2} - i\mu} + \bar{a}_2(\bar{k}) \bar{z}^{\frac{1}{2} + i\mu}, \quad (2.58)$$

avec,

$$\bar{m} = \sqrt{|J - D^2 k^2|}, \quad r = \bar{u}_0^2 / D^2 \quad \text{et} \quad \mu = \sqrt{|J - \frac{1}{4}|} \quad (2.59)$$

$$\bar{a}_1(\bar{k}) = b_1 D^{-\frac{1}{2} + i\mu} \quad \text{et} \quad \bar{a}_2(\bar{k}) = b_2 D^{-\frac{1}{2} - i\mu}. \quad (2.60)$$

D'autre part, dans le cas d'un profil de vent horizontal défini par (2.56) le comportement asymptotique proche de zéro reste inchangé par rapport au cas avec cisaillement constant,

$$\bar{u}_0(\bar{z} \ll 1) = \bar{z}, \quad (2.61)$$

le traitement de la solution visqueuse est donc similaire à la section 2.3.1 avec

$$\tilde{\mathbf{w}}_{12} = \tilde{a}_1(\bar{k}) \tilde{\mathbf{w}}_1 + \tilde{a}_2(\bar{k}) \tilde{\mathbf{w}}_2 \quad (2.62)$$

où $\tilde{a}_1$ et $\tilde{a}_2$ tels que,

$$\tilde{a}_1(\bar{k}) = \frac{\bar{a}_1}{\bar{k}} \bar{\delta}^{-1/2 - i\mu}, \quad \text{and} \quad \tilde{a}_2(\bar{k}) = \frac{\bar{a}_2}{\bar{k}} \bar{\delta}^{-1/2 + i\mu}, \quad (2.63)$$

La solution visqueuse s'écrit,

$$\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{V}}(\bar{k}, \bar{z}) = \bar{k} \bar{\delta}(\bar{k}) \left[f_{12}(\bar{k}) \tilde{\mathbf{w}}_{12}(\bar{z}/\bar{\delta}(\bar{k})) + f_3(\bar{k}) \tilde{\mathbf{w}}_3(\bar{z}/\bar{\delta}(\bar{k})) + f_4(\bar{k}) \tilde{\mathbf{w}}_4(\bar{z}/\bar{\delta}(\bar{k})) \right]. \quad (2.64)$$

De la même manière que dans la partie précédente, l'inversion des conditions aux limites à la surface nous permet de calculer l'amplitude des variables dynamiques au sol ; la hauteur maximale de la montagne étant toujours contrainte par l'utilisation de $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{V}}$ lors de l'inversion.

On peut alors construire une approximation uniforme $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{C}}$ similaire à (2.55) en utilisant les expressions pour $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}$, $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{V}}$ et $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{M}}$ établies ci dessus.

Dans cette configuration cependant, une autre limitation apparaît quant aux valeurs possibles de D et de $\bar{\delta}$. En effet, le domaine de validité de la solution $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}$ et celui de $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{V}}$ doivent rester distincts afin de permettre le raccord de ces deux solutions avec $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{M}}$. Dans la suite on se limitera donc aux cas où $D \geq 5\bar{\delta}$.

2.5 Considérations numériques

Dans les sections précédentes nous avons décrit comment établir l'expression de la transformée de Fourier de la vitesse verticale dans différentes configurations. Le but de cette dernière partie est de détailler brièvement les méthodes numériques utilisées pour modéliser ce formalisme.

Le raisonnement général est le même dans tous les cas décrits plus haut : l'inversion de la condition à la limite à la surface nous permet de calculer l'amplitude associée à la vitesse verticale pour chaque harmonique $\bar{k}$, puis les relations de polarisations sont utilisées afin de reconstruire la transformée de Fourier des autres variables dynamiques du système à partir de $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{C}}$. Enfin pour chaque niveau vertical, le calcul de la transformée de Fourier inverse nous permet de reconstruire l'ensemble des variables dans l'espace physique.

La principale difficulté réside dans l'inversion de la condition non linéaire à la surface. Dans le cas non visqueux, à l'aide des relations de polarisations, cette condition s'écrit,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\bar{k}) \left[\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{C}} - \frac{i}{\bar{k}} \frac{\partial \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{C}}}{\partial \bar{z}} \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} \right]_{\bar{z}=\bar{h}} e^{i\bar{k}\bar{x}} d\bar{k} = \bar{u}_0 \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}}. \quad (2.65)$$

En considérant un domaine horizontal de longueur finie D_h , échantillonné par un nombre impair de point N , cette équation intégrale non linéaire se traduit sous sa forme discrète,

$$\sum_{l,j=1}^N f(\bar{k}_j) \underbrace{\left[\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{C}} - \frac{i}{\bar{k}_j} \frac{\partial \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{C}}}{\partial \bar{z}} \left(\frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} \right)_l \right]_{\bar{z}=\bar{h}_l}}_{W_{lj}} e^{i\bar{k}_j \bar{x}_l} = \bar{u}_0 \left(\frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} \right)_l, \quad (2.66)$$

où $k_j = (j-1)2\pi/D_h$ et $x_l = (l-1)D_h/N$ sont respectivement le nombre d'onde horizontal dans l'espace spectral et la position horizontale dans l'espace physique. Une fois construite, la matrice W_{lj} peut être inversée à l'aide d'un programme d'inversion numérique, on obtient alors les coefficients $f(\bar{k})$.

Dans le cas visqueux, le raisonnement est similaire, cependant puisque $\bar{w}$ à la surface est de la forme,

$$\bar{w}(\bar{x}, \bar{h}) \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{k} \delta(\bar{k}) \left[f_2(\bar{k}) \tilde{\mathbf{w}}_2(\bar{k}, \tilde{h}) + f_3(\bar{k}) \tilde{\mathbf{w}}_3(\bar{k}, \tilde{h}) + f_4(\bar{k}) \tilde{\mathbf{w}}_4(\bar{k}, \tilde{h}) \right] e^{i\bar{k}\bar{x}} d\bar{k}, \quad (2.67)$$

deux autres équations sont nécessaires pour fermer le système, à savoir les deux dernières conditions aux limites sur $\bar{u}$ et $\bar{b}$ (voir Eqs. (2.46)). Une fois discrétisées dans le domaine spectral et horizontal, les équations (2.46) correspondent à trois équations linéaires pour les $f_i(\bar{k})$, formant le système,

$$\bar{k}_j \delta(\bar{k}_j) \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_2^{l,j} & \tilde{\mathbf{w}}_3^{l,j} & \tilde{\mathbf{w}}_4^{l,j} \\ \tilde{\mathbf{u}}_2^{l,j} & \tilde{\mathbf{u}}_3^{l,j} & \tilde{\mathbf{u}}_4^{l,j} \\ \tilde{\mathbf{b}}_2^{l,j} & \tilde{\mathbf{b}}_3^{l,j} & \tilde{\mathbf{b}}_4^{l,j} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_2^j \\ f_3^j \\ f_4^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{h}_{l,j} \\ -J\bar{h}_{l,j} \end{pmatrix}.$$

Ce système est composé de neuf matrices de la forme,

$$\sum_{l,j=1}^N \bar{k}_j \bar{\delta}(\bar{k}_j) \tilde{\mathbf{w}}_2(\bar{k}_j, \tilde{h}_{lj}) e^{i\bar{k}_j \bar{x}_l}, \quad (2.68)$$

pour le premier terme de l'équation ci dessus, pouvant être inversées numériquement. La résolution de ce système linéaire nous donne alors accès aux coefficients $f_i(\bar{k})$. Enfin, un dernier aspect important concerne la condition sur la hauteur maximale de la montagne. Elle est, bien entendu, tout d'abord limitée par l'approximation linéaire et on a $S \ll 1$. Cependant, dans le cas visqueux, les conditions aux limites à la surface ($\bar{z} = \bar{h}$) sont vérifiées par $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{V}}$ et, par conséquent, la montagne doit être immergée dans la couche limite. Or $\bar{\delta} \propto 1/\bar{k}$ donc cette condition se traduit par $S < \bar{\delta}(\bar{k}_{max})$. Dans le cas discret, $\bar{k}_{max} \sim N\pi/D_h$, ainsi en prenant un domaine horizontal suffisamment grand, $\bar{k}_{max}$ devient suffisamment petit et la hauteur de la couche intérieure reste de l'ordre de grandeur de S . En pratique, en prenant un domaine $D_h \propto 10^2$, il est suffisant de satisfaire cette condition pour le nombre d'onde principal forcé par la montagne, c'est à dire $S < \bar{\delta}(\bar{k}_D)$.

2.6 Modélisation non linéaire des ondes de montagne

De nos jours de nombreux modèles numériques sont développés afin de capturer la dynamique atmosphérique et océanique à différentes échelles. Ces modèles, dont la complexité a beaucoup augmenté, doivent néanmoins être (i) comparés à des mesures effectuées en situation réelle (Doyle et al., 2011), (ii) évalués dans des cas plus simples, *i.e.* des cas où la dynamique nous permet d'établir des solutions analytiques. La dynamique des ondes de montagne, dans des conditions comme celles abordées dans la section 1.2.1, se prête particulièrement bien à cet exercice. Cette pratique explique pourquoi des cas d'études d'interactions entre un écoulement et la topographie sont très souvent présents dans les tutoriels de ces modèles (Skamarock et al., 2005; Adcroft et al., 2008).

A l'inverse, la dynamique des ondes de montagne dans des situations réelles peut être très complexe. Pour modéliser cette dynamique et comprendre comment les différents processus en jeu interviennent, il est souvent nécessaire de faire des approximations, comme l'approximation linéaire (section 1.4.3). Cependant, cette hypothèse peut être invalidée pour des cas plus réalistes. Il est donc essentiel de comparer des études réalisées dans le cadre linéaire avec des modèles non linéaires à hautes résolutions afin d'évaluer, *à posteriori*, l'impact des effets non linéaires négligés.

Ces deux aspects expliquent pourquoi il est pertinent d'utiliser des modèles numériques régionaux en configuration idéalisée, avec des hautes résolutions, pour caractériser la dynamique des ondes de montagne (Damiens et al., 2018), et notamment les ondes piégées (Miglietta et al., 2013; Li and Chen, 2017). De plus, leur résultats étant meilleurs à la méso-échelle que ceux des modèles globaux, notamment en région montagneuse, ils sont parfois utilisés en tandem avec ces derniers (Sharman et al., 2004). Dans cette thèse nous avons utilisé deux modèles non linéaires différents pour effectuer des comparaisons, avec le modèle théorique décrit dans ce chapitre. Dans le chapitre 3 c'est le modèle *Weather research and Forecasting* (WRF) (Skamarock et al., 2005) qui est utilisé tandis que dans les chapitres 4, et 5 c'est le modèle *Massachusetts Institute of Technology general circulation model* (MITgcm) (Marshall et al., 1997).

Le modèle WRF est un modèle de prévision régional. Il a été développé principalement au *National Center for Atmospheric Research* (NCAR) en collaboration avec d'autres instituts⁴ pour prévoir et modéliser la circulation atmosphérique. Ce modèle résout les équations d'Euler non hydrostatiques sur une grille horizontale cartésienne et une grille verticale en coordonnées sigma (l'altitude est définie en normalisant la pression par la pression à la surface) qui, par conséquent, est particulièrement adaptée pour étudier l'influence de la topographie sur l'écoulement.

Le MITgcm, développé par l'institut du même nom, permet la modélisation de la dynamique océanique et atmosphérique pour des échelles allant de la centaine de mètre

4. Le *National Oceanic and Atmospheric Administration*, la *Air Force Weather Agency* (AFWA), le *Naval Research Laboratory*, la *Oklahoma University* et la *Federal Aviation Administration* (FAA)

à l'échelle globale de la Terre. Il résout les équations non linéaires sous l'approximation Boussinesq en deux dimensions. Ici, la représentation de la topographie utilise la méthode des volumes finis ayant une représentation comparable aux coordonnées sigma utilisées dans WRF (Adcroft et al., 1997). De ce fait, ce modèle est particulièrement adapté pour la modélisation des interactions écoulement-relief (Nikurashin and Legg, 2011) lorsque ces derniers ont une forte pente.

Les configurations utilisées pour chacun de ces deux modèles seront décrites dans les chapitres correspondant.

Chapitre 3

Trapped mountain waves with a critical level just below the surface

Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society

C. Soufflet, F. Lott, and F. Damiens

Laboratoire de Météorologie Dynamique, PSL Research University,
École Normale Supérieure, Paris

The trapped mountain waves produced when the incident wind near the surface is small compared to its value aloft are analyzed with a theory adapted from Long (1953) and compared to fully nonlinear simulations done with WRF. Although small near surface incident winds naturally occur in fronts via combination of the thermal wind balance and of the boundary layer, they pose at least two problems in mountain meteorology : zero surface incident winds produce no wave in the fully linear case, they also correspond to places where mountain waves have a critical level. Despite these problems, the theory and WRF show that for small mountains (i) trapped lee waves can occur and (ii) are favored when the surface Richardson number $J = N^2 / (\frac{\partial u}{\partial z})^2$ is small. This last result is related to the theoretical fact that the surface absorption of stationary gravity waves increases when J increases. The relation with flow stability is further corroborated by the fact that the trapped lee waves resembles to the KH modes of instability that exist when $J < 0.25$. For medium mountains some aspects of the theory still hold but need to be adapted, the more intense winds and foehn that occur along the lee side of the mountain having a tendency to increase the surface flow stability. For "initially" small J , this can limit the onset of trapped lee-waves, again consistent with the fact that mountain wave surface absorption increases with surface flow stability. For large J the dynamics produces wave breaking on the lee side, destabilizing the flow in the wake of the mountain. In the region where the Richardson number is small, trapped waves develop despite the fact that the surface Richardson number can be quite large, suggesting that the trapped lee waves now result from an absolute instability of the wake.

3.1 Introduction

Trapped mountain waves generally occur when the vertical profiles of the large scale flow favor the low level confinement of stationary gravity waves. They are sometimes associated with rotors (Doyle and Durran, 2002) and can produce dangerous weather situations near the ground (Keller et al., 2015). They also contribute to the low level mountain wave drag (Lott, 1998; Georgelin and Lott, 2001; Teixeira et al., 2013a) and still today, it is well established that low level mountain drags improve weather forecast and climate models (Sandu et al., 2016; Pithan et al., 2016). For this reason, there is some debate on which source of low-level mountain drag should be better represented, the results in Tsiringakis et al. (2017) suggesting that the trapped lee waves could contribute as much as the blocked flow mountain drag (Lott and Miller, 1997a) or the turbulent subgrid scale orographic drag (Beljaars et al., 2004).

According to the conventional theory, the low level confinement favoring lee waves can have two dynamical mechanisms. The first attributes the trapped lee waves to free oscillations along a low level density discontinuity. This mechanism has been re-examined recently by Vosper (2004) and Sachsperger et al. (2017), the first extending the theory to situations where the discontinuity results from a boundary-layer inversion underneath a continuously-stratified atmosphere the latter quantifying analytically the amplitude of the waves in the nonlinear context.

The second mechanism, first identified by Scorer (1949), involves the trapping of vertically propagating internal gravity waves between the ground and a turning point aloft. In this theory the Scorer parameter

$$S = \frac{N^2}{U^2} - \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dz^2}, \quad (3.1)$$

plays a central role, N , U and z being the background buoyancy frequency, the background wind and the vertical coordinate respectively. If $S(z)$ decreases with height, due to a diminution of N with altitude for instance, some gravity waves that propagate vertically near above the surface become evanescent aloft. For a given mode with horizontal wave number k , this transition occurs at the turning level where $S(z_k) = k^2$, and at this level the corresponding wave is reflected downward. The onset of trapped waves then strongly depends to what happen to the reflected waves when they return to the surface. In the initial theory of Scorer (1949), the flow is inviscid and the downward waves are entirely reflected at the surface. In this case a small and discrete number of harmonics survive the multiple interferences between the turning point and the surface, these harmonics dominate the lee waves field. Although the cases where the variations of $S(z)$ are due variations in $N(z)^2$ are the most studied, (Jackson et al., 2013; Markowski and Richardson, 2011), it is clear from Eq.(3.1) that the variations in $S(z)$ can also be due to the variation of the wind with altitude (examples of trapped lee waves due to

increase of the jet stream with altitude in the low troposphere can be found in Vosper et al. (2013); Teixeira et al. (2013a)). Nevertheless and still according to Eq.(3.1), the variation of N and U should not be treated on the same footing. To illustrate the difference we can recall that when $U(z)$ becomes very small and even changes sign at a given altitude, $S(z)$ becomes infinite. We are in the presence of a critical level where the waves are often absorbed in the linear case (Booker and Bretherton, 1967), rather than being entirely reflected as occurs at turning points. The differences become even more important in the nonlinear cases, the mountain waves systematically breaking near that level, the resulting gravity wave mean flow interactions sometimes yielding to mountain waves amplification, downslope winds and foehn (Clark and Peltier, 1984; Nappo and Chimonas, 1992).

If we now return to the effect of the surface on the lee waves, a major limitation of the inviscid theory is that it neglects the boundary layer effect. For this reason, many numerical studies have included the effect of the boundary layer and shown that the surface friction and the treatment of the turbulent dissipation affect mountain waves (Bougeault and Lacarrere, 1989; Richard et al., 1989). More recently (Smith et al., 2006; Teixeira, 2017) and (Hills et al., 2016) returned to the basic mechanisms, included some boundary layer absorption in the theory. More specifically, Smith et al. (2006) shows that flows that are the more unstable near the surface absorbs less gravity waves and favor the onset of lee waves. They also noticed that in the presence of a boundary layer the incident flow near the surface can become very small, causing a near critical level situation where the waves can be efficiently absorbed, if the theory of Booker and Bretherton (1967) where the critical level is located within the flow applies.

Realizing that the absorption of gravity waves (GWs) by critical levels located at the surface had never been studied, Lott (2007) (hereinafter L07) solved this problem theoretically in the viscous case. This paper shows that the wave absorption at the "surface" critical level can be substantial and increases when the surface flow stability increases. This paper also shows that pure reflection only occurs in the inviscid limit and when the surface Richardson number, $J = N^2/(\frac{\partial u}{\partial z})^2 < 0.25$. To translate how this result affect trapped lee-waves, L07 applied these results to the analysis of the stationary disturbances that can exist in flows with constant stratification and wind that varies like a tanh profile above the surface. This profile was chosen because it has zero wind at the surface, near constant shear immediately aloft and a very smooth transition to constant wind in the far field : it is stationary enough in the viscous case to make the analysis of stationary solutions relevant (at least for reasonably large Reynolds numbers). In such profile, L07 confirmed that GWs absorption increases with J and also that pure trapped modes exist in the inviscid limit when $J < 0.25$: these neutral modes correspond to neutral modes of KH instability found by Drazin (1958) for the same profile in the unbounded case. Later, these results were confirmed in Lott (2016), (hereinafter L16), where an explicit

mountain forcing is introduced. The result in L16 also reveals consequences of the near surface critical level dynamics that could not be anticipated from the analysis in L07. It shows that in the presence of a near surface critical levels, the mountain forcing easily triggers strong downslope winds and foehn. Interestingly, downslope windstorms in this case do not result from upper level wave breaking, as often mentions the literature (Durran, 1990). In this paper we will question how these downslope winds will modify the background flow in which the trapped waves develop.

One of the more severe limitation of L16 is that it considers free-slip boundary conditions but forces the incident flow to satisfy a no-slip boundary condition far upstream : it does not use the viscous solutions presented in L07 or solutions affected by a turbulent boundary layer as in Belcher and Wood (1996). Although these simplifications are essentially made to simplify the theory they are in part justified by the fact that in the atmosphere the low level wind shears are often due to horizontal gradients in temperature, they do not solely result from boundary layer dynamics : they can extend well above the boundary layer and there, the inviscid dynamics can be applied.

The first purpose of this paper is to describe further the dynamical nature of the trapped lee waves with surface critical level found in L16 and by comparison with a more commonly accepted theory. The second is to analyze if these trapped lee waves still occur in the nonlinear context and with realistic boundary layers. For the first purpose we will compare the nature of trapped modes due to slow low level winds with and without surface critical levels using the L16 theory. For the second, we will follow Damiens et al. (2018) (hereinafter D18), who (i) adapted the theory to higher mountains than in L16, (ii) used in the theory boundary layer depths that gives result comparable to WRF, and (iii) used the WRF model in various idealized configurations and boundary layer specifications. The plan of this paper is as follows. In section 2, the formalism in L16 is extended to higher mountains, it is also applied to flows with and without surface critical levels. This will highlight how dynamically different can be situations where the changes in the background wind only affect the Scorer parameter, to the situation where they both affect the Scorer parameter and induce a near surface critical level. Section 3 then compares the theory with surface critical level and the WRF simulations for small and medium height mountains respectively.

3.2 Theory

3.2.1 Continuous variations in $U(z)$

To analyze the mountain waves produced by a stably stratified shear flow when the incident wind is null at $z = 0$, we follow L16 and consider the background flow profiles

$$U(z) = U_{\infty} \tanh(z/d), N^2(z) = \text{const}, \quad (3.2)$$

incident on a 2-dimensional mountain modeled by the Witch of Agnesi profile :

$$h(x) = \frac{H}{1 + \frac{x^2}{2L^2}}. \quad (3.3)$$

In (3.2), $U(z)$ is the background horizontal wind, $N(z)$ the Brunt Vaisala frequency, z the altitude, d is the vertical scale of the shear and U_∞ the incident wind maximum amplitude. In (3.3) H is the maximum mountain height, L its characteristic horizontal length, and x the horizontal coordinate. When scaling time by N^{-1} and distances by U_∞/N the 2-dimensional non-rotating linear dynamics can be expressed in term of a non dimensional vertical velocity, $\bar{w}(\bar{x}, \bar{z})$ of the form,

$$\bar{w}(\bar{x}, \bar{z}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\bar{k}) \bar{\mathbf{w}}_c(\bar{k}, \bar{z}) e^{i\bar{k}\bar{x}} d\bar{k}, \quad (3.4)$$

where overbars denote dimensionless variables, and $\bar{\mathbf{w}}_c(k, z)$ is a canonical monochromatic solution of "unit" amplitude in the far field which satisfies the dissipative Taylor Goldstein equation,

$$\frac{d^2 \bar{\mathbf{w}}_c}{d\bar{z}^2} + \left[\frac{1}{\left(\bar{U} - i \frac{\bar{z}_k}{\sqrt{J}} \right)^2} - \frac{\bar{U}_{\bar{z}\bar{z}}}{\bar{U} - i \frac{\bar{z}_k}{\sqrt{J}}} - \bar{k}^2 \right] \bar{\mathbf{w}}_c = 0. \quad (3.5)$$

In (3.4) the amplitude term $f(\bar{k})$ is obtained by numerical inversion of the non-linear free-slip boundary condition :

$$\bar{w}(\bar{x}, \bar{h}(\bar{x})) = [\bar{U}(\bar{h}) + \bar{u}(\bar{x}, \bar{h}(\bar{x}))] \frac{d\bar{h}(\bar{x})}{d\bar{x}}, \quad (3.6)$$

where $\bar{u}(\bar{x}, \bar{z})$ is the horizontal wind disturbance. In (3.5)-(3.6)

$$\bar{U}(\bar{z}) = \tanh \left(\frac{\bar{z}}{\sqrt{J}} \right), \text{ and } \bar{h}(\bar{x}) = \frac{H_N}{1 + \bar{x}^2/2F_r^2} \quad (3.7)$$

where

$$J = \frac{N^2 d^2}{U_\infty^2}, \quad H_N = \frac{HN}{U_\infty}, \quad \text{and } F_r = \frac{LN}{U_\infty} \quad (3.8)$$

are the surface and minimum Richardson number, the non-dimensional mountain height, and the Froude number respectively. Still in (3.5) the dissipative vertical scale for each harmonics,

$$\bar{z}_k = \frac{\bar{z}_b}{2} \left(\frac{1}{F_r \bar{k}} + F_r \bar{k} \right). \quad (3.9)$$

has been expressed in terms of a global scale $\bar{z}_b$, with the first term in parenthesis resulting from Rayleigh drag and Newtonian cooling of coefficient $\bar{z}_b/F_r/\sqrt{J}/2$ and the second term from a viscous dissipation which acts in the x -direction only of coefficient $\bar{z}_b F_r/\sqrt{J}/2$ (for a more thorough discussion of these terms see discussion of Eq. 4 in L16). They are introduced to regularize the critical level dynamics for all the harmonics,

i.e. the longer and the shorter ones respectively. Note that $\bar{z}_k$ is written differently than in L16 to make clear that when the formula is applied to the dominant wave number Fr^{-1} , $\bar{z}_k$ in (3.9) is comparable to the dissipative scale $\bar{z}_b$ ¹. To construct $\bar{\mathbf{w}}_c$, L16 uses for each k an exact solution of the inviscid version of (3.5), $\bar{\mathbf{w}}_{\text{inv}}(\bar{k}, \bar{z})$, which is based on hypergeometric functions (see Lott and Teitelbaum (1992)) and (34) in L16, and which asymptotic behaviors are

$$\bar{\mathbf{w}}_{\text{inv}}(\bar{k}, \bar{z} \gg 1) \approx e^{-\bar{m}\bar{z}}, \quad (3.10)$$

$$\bar{\mathbf{w}}_{\text{inv}}(\bar{k}, \bar{z} \ll 1) \approx \bar{\mathbf{w}}_{\text{mat}}(\bar{k}, \bar{z}) = a_1(\bar{k})\bar{z}^{1/2-i\mu} + a_2(\bar{k})\bar{z}^{1/2+i\mu} \quad (3.11)$$

where,

$$\bar{m} = \sqrt{|\bar{k}^2 - 1|}, \quad \mu = \sqrt{|J - \frac{1}{4}|}, \quad (3.12)$$

and where $a_1(\bar{k})$ and $a_2(\bar{k})$ have analytical forms once the "unit" amplitude condition (3.10) is satisfied. Also, when $\bar{k}^2 < 1$, $\bar{m}$ is changed in $-\text{isign}(\bar{k})\bar{m}$, where the sign is to ensure upward group speed, and when $J < 0.25$, μ is changed in $i\mu$. Near the surface, L16 also uses the asymptotic solution of the damped Taylor-Goldstein Equation (3.5) valid when $\bar{z} \ll 1$:

$$\hat{w}_{\text{srf}}(\bar{k}, \bar{z}) = a_1(\bar{k})(\bar{z} - i\bar{z}_k)^{1/2-i\mu} + a_2(\bar{k})(\bar{z} - i\bar{z}_k)^{1/2+i\mu}, \quad (3.13)$$

where a_1 and a_2 are the same as in (3.11) to ensure convergence toward the "matching" function $\bar{\mathbf{w}}_{\text{mat}}$ given in (3.11) and when $\bar{z} \rightarrow \infty$. Then, following Bender and Orszag (1978) we will approximate $\bar{\mathbf{w}}_c$ by its uniform estimate :

$$\bar{\mathbf{w}}_c \approx \bar{\mathbf{w}}_{\text{inv}} + \bar{\mathbf{w}}_{\text{srf}} - \bar{\mathbf{w}}_{\text{mat}}. \quad (3.14)$$

The only difference with L16, is that we use this approximation in the inversion of (3.6),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\bar{k}) \left[\bar{\mathbf{w}}_c(\bar{k}, \bar{h}) - \bar{\mathbf{u}}_c(\bar{k}, \bar{h}) \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} \right] e^{i\bar{k}\bar{x}} d\bar{k} = \bar{U} \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} \quad (3.15)$$

rather than using the surface solution in (3.13) to express $\bar{\mathbf{w}}_c$ and $\bar{\mathbf{u}}_c$ in the terms between brackets in (3.15). This formally permits to consider more elevated ridges than in L16.

3.2.2 Discontinuous variations in $U(z)$

To contrast our results to the more common case where trapped lee waves are only due to changes in the Scorer parameter and where the ground is not a critical level we also apply our theory to a low level shear zone represented by a two layers flow,

$$\bar{U}(\bar{z} < \sqrt{J}) = \bar{U}_1 = 0.5 \text{ and } \bar{U}(\bar{z} > \sqrt{J}) = \bar{U}_2 = 1. \quad (3.16)$$

1. For consistency, note also that the boundary layer depth $\bar{z}_B$ used in L16 is related to the one here by $\bar{z}_B = 5\bar{z}_b$.

This profile is given in the non-dimensional formalism of subsection (1.1), see also Fig. 3.1a. For this profile the dissipative Taylor Goldstein equation takes the form,

$$\frac{d^2 \bar{\mathbf{w}}_c}{d\bar{z}^2} + \left(\frac{1}{(U_j - i\bar{z}_k)^2} - \bar{k}^2 \right) \bar{\mathbf{w}}_c = 0 \quad (3.17)$$

where the $j = 1, 2$ index indicates the layer of interest. Also, the continuity of pressure and the uniqueness of the material displacement at the altitude $\bar{z} = \sqrt{J}$ require that

$$\left[(U_j - i\bar{z}_k) \frac{d\bar{\mathbf{w}}_c}{d\bar{z}} \right]_{j=1}^{j=2} = 0, \quad \text{and} \quad \left[\frac{\bar{\mathbf{w}}_c}{U_j} \right]_{j=1}^{j=2} = 0 \quad (3.18)$$

respectively. If we then define vertical "wavenumbers" as

$$\bar{m}_j = \epsilon \sqrt{\bar{k}^2 - \frac{1}{(U_j - i\bar{z}_k)^2}}, \quad (3.19)$$

where the sign $\epsilon = \pm 1$ is chosen so that $\Re\{\bar{m}_j\} > 0$, the canonical solution writes,

$$\bar{\mathbf{w}}_c = e^{-\bar{m}_2(\bar{z}-\sqrt{J})} \quad \text{and} \quad \bar{\mathbf{w}}_c = \left(\frac{1}{4} + \frac{\bar{m}_2}{\bar{m}_1} \right) e^{-\bar{m}_1(\bar{z}-\sqrt{J})} + \left(\frac{1}{4} - \frac{\bar{m}_2}{\bar{m}_1} \right) e^{+\bar{m}_1(\bar{z}-\sqrt{J})}, \quad (3.20)$$

for $\bar{z} > \sqrt{J}$ and $\bar{z} < \sqrt{J}$, respectively (see also Teixeira et al. (2013a)).

3.2.3 Inviscid result

To show the fundamental dynamical differences between the two profiles we next search the neutral solutions that exist in both the inviscid case and when the surface is flat.

When the variations in $U(z)$ are continuous, L07 shows that the dynamics is intimately related to the absorptive properties of the near-surface critical level. To expose them in a concise way we can use the near surface inviscid solution in (3.11) and express the wave momentum flux

$$F^z = \frac{\bar{\mathbf{u}}_c \bar{\mathbf{w}}_c^* + \bar{\mathbf{u}}_c^* \bar{\mathbf{w}}_c}{4} = \begin{cases} \frac{\mu}{2k} (|a_1|^2 - |a_2|^2) & \text{when } J > 0.25, \\ \frac{\mu}{2k} (a_1 a_2^* + a_1^* a_2) & \text{when } J < 0.25. \end{cases} \quad (3.21)$$

L07 showed that for fixed a_1 , the inviscid solution (3.11) can be matched to dissipative solutions that satisfy the surface boundary condition, a matching that determines a_2 . It also shows that $|a_2| < |a_1|$ when $J > 0.25$, which implies $F^z > 0$ according to (3.21) : the upward waves dominate the downward propagating ones. The pure surface reflection which is at the basis of the classical trapped lee wave theory (Scorer, 1949) cannot be satisfied. L07 also shows that the ratio $|a_2/a_1|$ tend to decrease when J increases, which in lee waves theory translate into the fact that the wave field decays more rapidly with downstream distance when J increases (Smith et al., 2006). L07 also shows that these

results still hold in the inviscid limit. When $J < 0.25$ L07 also shows that for fixed $|a_1|$ one can have $|a_2| = 0$ in the inviscid limit. In this case $F^z = 0$ according to (3.21) which means that the reflection is total and trapped lee waves can exist. To find them, the near surface analysis in (3.11) is nevertheless not sufficient. We have to find if there are indeed solutions of the global inviscid problem that satisfies $a_2 = 0$ near $z = 0$. L07 also shows that such solution do exist, they correspond to half of the branch of the neutral modes of KH instabilities found by (Drazin, 1958) (see his Eq. 25). In our definition of the non dimensional parameters it corresponds to the modes for which

$$\bar{k}^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4J}}{2J}, \quad (3.22)$$

This dispersion curve is shown in Fig. 3.1b.

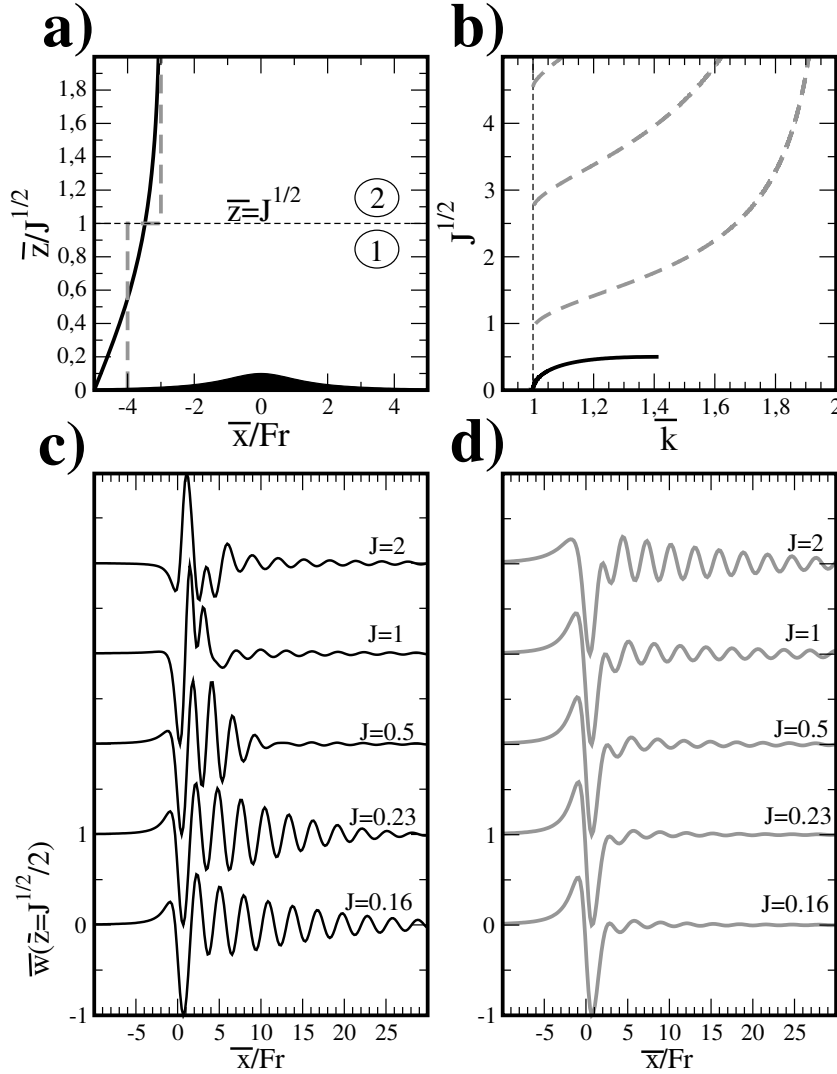


FIGURE 3.1 – (a) Mountain profile and background wind configurations used in the theory : $\bar{U}$ in tanh (black solid), $\bar{U}$ stairway (grey dashed); (b) Dispersion curves (3.22) and (3.24)(same color convention); c) vertical velocity at $\bar{z} = \sqrt{J}/2$ from the dissipative model when $\bar{U}$ is in tanh : d) Same as c) but when $\bar{U}$ is stairway.

When the variations in $U(z)$ are discontinuous, the dynamics is almost as in (Teixeira et al., 2013a), and the onset of trapped modes correspond to wave numbers for which $\overline{\mathbf{w}}_c(z=0) = 0$, a condition that imposes,

$$4 \tanh(\overline{m}_1 \sqrt{J}) = -\frac{\overline{m}_1}{\overline{m}_2}. \quad (3.23)$$

In the inviscid case, the only wave numbers that satisfy this condition are those for which $1 < \overline{k} < 2$ and when :

$$4 \tan \left(\sqrt{J} \sqrt{4 - \overline{k}^2} \right) = -\frac{\sqrt{4 - \overline{k}^2}}{\sqrt{\overline{k} - 1}}. \quad (3.24)$$

The corresponding dispersion curves are shown in Fig. 3.1b. It shows that pure trapped waves occur for much "deeper" low level shear layer, the onset of trapped waves being now conditional to $J > \pi^2/12 \approx 0.822$ rather than $J < 0.25$ in the continuous case. We also see that when J increases the number of trapped modes increases, this number being given by the resolution of (3.24) when $\overline{k} = 1$, e.g. by the number n satisfying

$$\frac{\pi}{2} + n\pi < \sqrt{3J} < \frac{3\pi}{2} + n\pi. \quad (3.25)$$

3.2.4 Forced dissipative results

To include an explicit forcing, we next proceed numerically as in L16, discretize in the spectral space the Fourier integral in (3.4), taking for $\overline{\mathbf{w}}_c$ (3.14) in the continuous case or (3.20) in the stairway case. In both, cases, $f(\overline{k})$ is determined through the numerical inversion of the nonlinear boundary condition (3.15). In the discrete space this inversion is a matrix inversion that only converges with increasing resolution when there is dissipation and because the surface boundary condition becomes singular in the inviscid case when there are resonant modes. In this section, we take a domain of length 500, spanned by 2048 equally spaced points, the boundary layer parameter $z_b = 0.01$, and the non-dimensional mountain height $H_N = 0.1$. We also take $Fr = 2$, which means that waves with wavenumbers around $Fr^{-1} = 0.5$ will be forced. This value is sufficiently near the lower bound of the dispersion curves in Fig. 3.1b to ensure that some trapped waves will be well excited.

The two panels in Figs. 3.1c) and 3.1d) show the vertical velocities around the center of the shear layer in $\overline{z} = \sqrt{J}/2$, for the continuous and discontinuous profiles respectively. As expected from L16, one sees that in the presence of a surface critical level, trapped lee waves develop more easily when the flow is unstable, i.e. for small J 's, whereas it is the other way round when the background flow is discontinuous. In the later case, trapped waves develop more easily when the parameter J becomes larger than one, consistent with the inviscid results for the stairway case in section 2.3). These results corroborate that reasoning in terms of trapping only can be misleading. If the surface

critical level dynamics is neglected, increasing the depth of the shear increases the depth of the low level wave duct : more and more modes can be trapped within it. When including reasoning in terms of shear flow stability, the surface critical level dynamics becomes central, and, when the depth of the shear zone decreases, the surface critical level absorption decreases, which favors trapped lee waves.

3.3 Fully nonlinear simulations

3.3.1 Experimental setup

To test if the relation between flow stability and trapped mountain waves still hold in the fully non linear context, we next follow D18 and use the WRF model in the 2D mountain flow configuration available on line (Skamarock et al., 2005). In all the simulations presented we consider a mountain of length $L = 1.1$ km which height typically varies between 50 m and 500 m. To capture well the gravity waves dynamics the model domain is 80 km long and 9 km high, and both directions are discretized by 800×450 equally spaced points respectively. These yield an horizontal resolution of $\Delta x = 100$ m and a vertical resolution of $\Delta z = 20$ m, both are near an order of magnitude smaller than the mountain dimension. These rather high resolutions force to use a time step of $\Delta t = 0.5$ s, they are necessary to guarantee that the near surface critical level dynamics is well captured, and we verified that our results are not much changed when these resolutions and domain sizes are changed by a factor 2. To allow gravity waves to propagate away from the domain without lateral and upper boundary reflections we use open lateral boundary conditions and introduce a 6km high damping layer below the domain lid. To impose a constant buoyancy frequency, and because the WRF model is fully compressible we take an isothermal atmosphere with $T_0 = 288$ K. This results in a constant Brunt-Vaisala frequency N with $N^2 = \frac{g}{\theta_0} \frac{d\theta_0}{dz} = \frac{\kappa g^2}{RT_0} = 3.32 \cdot 10^{-4} \text{s}^{-2}$ where κ , R and g have their usual earth values, and θ_0 is the background potential temperature. The background wind is defined by (3.7) with $U_\infty = 10 \text{ m s}^{-1}$. In this setup the froude number value $Fr = 2$, as in section 2 and will not vary, the sensitivity to the surface Richardson number J will be analyzed by changing the value of the shear layer depth d , and that to the mountain height by varying the mountain height H_N . In most case, and except when specified the results are shown after 4 h of integration, that is much longer than the advective time-scale $\frac{L}{U_\infty} \approx 100$ s, and sufficiently long for the trapped lee waves to develop downstream.

As the theory in Section 2 is based on an free-slip treatment of the lower boundary, we will first present WRF simulations where the constant diffusion coefficients are put to zero and where the surface boundary condition is free-slip. Nevertheless, this does not necessarily make the simulations inviscid because irreversible or diabatic processes certainly occur near the surface : it happens that the WRF dynamical core is stable and

dissipative enough to handle these processes (see discussion in D18). When we return to the theory, it is a priori difficult to say how these irreversible processes can affect the wave dynamics. Nevertheless, as the theory has a free parameter to represent dissipation, the boundary layer scale $\bar{z}_b$, we can vary it and try to identify a value for which there is a match between the nonlinear simulations and the theory. In D18, it was found that a dependence in $\sqrt{J}$ helped the comparison with WRF and we take here

$$\bar{z}_b/\sqrt{J} = 0.005. \quad (3.26)$$

We will keep this value in all the following experiments with the theoretical model.

To extent even further the significance of our results, we have also used WRF with two boundary layer schemes that have been extremely validated by the community, the Yonsei University Planetary Boundary Layer scheme (hereinafter YSU BLYR, (Hong et al., 2006)) and the Mellor Yamada scheme (hereinafter MY BLYR, (Mellor and Yamada, 1982)). Although the two schemes have fundamental differences, the YSU BLYR is based on the nonlocal diffusion concept of Troen and Mahrt (1986) whereas the MY calculates local diffusion coefficients with amplitude controlled by the amplitude of a turbulent kinetic energy evaluated at each time step, we do not expect them to behave very differently in all the dry and initially convectively stable cases we consider. The intention here is more to test robustness using well known schemes, and although the two schemes may well regularize the convectively unstable regions produced by the waves quite differently. In these two configurations where the interaction with the surface is more thoroughly taken into account we force the potential temperature of the surface to equals the background potential temperature, $\theta_s(x) = T_0 e^{\kappa h(x)/H_0}$, where the characteristic height $H_0 = RT_0/g$, whereas the roughness length has its default value $z_0 = 0.1$ m.

3.3.2 Low mountain

The left panels in Fig. 3.2 show the vertical velocity fields produced by the theoretical model for three different values of J , and the right panels show the same fields evaluated with the free-slip WRF simulations. In all panels, the results are shown using non-dimensional variables to ease comparison with theory and the mountain maximum height $H_N = 0.1$. The first striking result is that the theory and WRF compare very well qualitatively and quantitatively. This is maybe the most important result of this work : the theory is based on a linear approximation that is often questioned in the presence of critical levels (Lott and Teitelbaum, 1992; Dörnbrack and Nappo, 1997).

If we return to the fields themselves, we see that for $J = 3$ in Figs. 3.2a and 3.2b, the vertical velocity field is largely dominated by vertically propagating mountain waves, the sign of the constant phase lines slope being opposite to that of the incident wind. In both models, the wave field substantially extends downstream of the ridge, which is

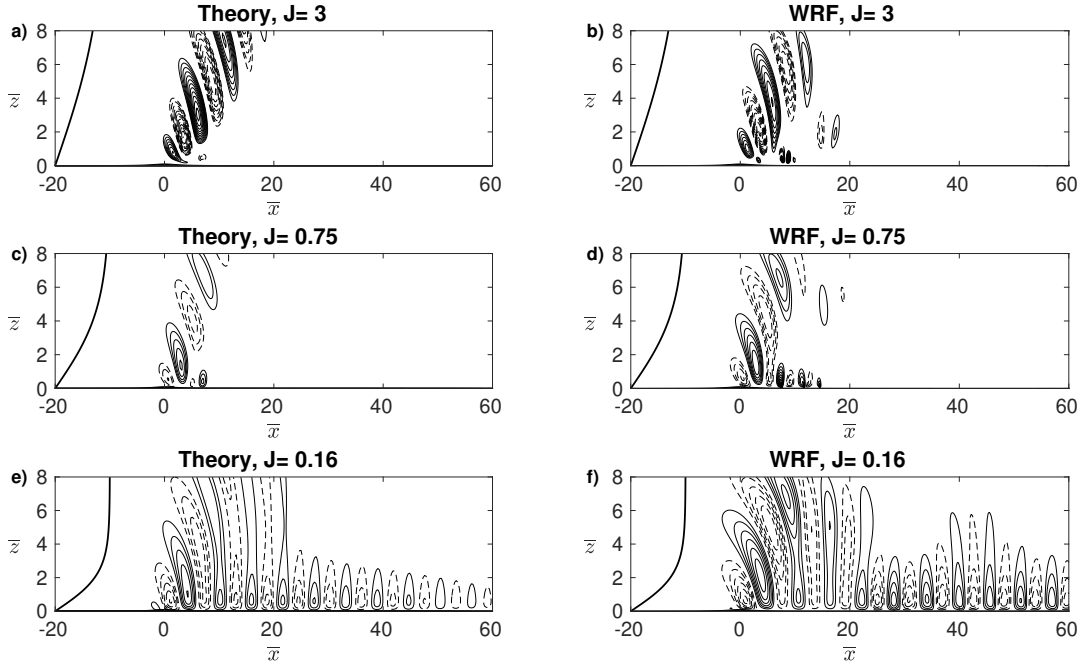


FIGURE 3.2 – Non dimensional vertical velocity from the theoretical model and from free-slip WRF simulations. In all panels the background wind is shown on the left, $H_N=0.1$, and the contour interval is $0.001/\sqrt{J}$.

characteristic of non-hydrostatic effect when the background flow is uniform (Queney, 1947) and the Froude number near $Fr = 1$. Here the interpretation holds above the shear layer, i.e. when $\bar{z} > \sqrt{J}$. Still for $J = 3$, note that in WRF, the wave amplitude is a little smaller than in the theory, but this difference could be sorted out by moderately increasing the boundary layer depth z_b in the latter (not shown).

If we now look at smaller values of J , we see that for $J = 0.75$ the theory and WRF in Figs. 3.2c and 3.2d still predict comparable fields, trapped lee waves start to appear, although they are still quite small in both models. Note that now, it is the theory that predicts smaller amplitude wave field than WRF, which could suggest that we should now decrease the boundary layer depth z_b in the theory. As this amplitude factor changes from one experiment to another this indicates that the relation between z_b and J we have taken here and in D18, should eventually be improved or made dependent on the Froude number or on H_N . Nevertheless as this does not affect our interpretation of the results we prefer to keep the relation (3.26).

In both models, and for even smaller values of J , (i.e. $J = 0.16$) we see again that WRF and theory give comparable results, but now both present a well defined train of lee waves, extending downstream down to more than 50 km. These trains of lee waves are characterized by almost vertical phase lines, the vertical velocity fields being essentially confined within the shear layer (see $U(z)$ in the left part of each panel). A difference is that in the theory, the train of lee waves seems to dissipate faster than in WRF, again this can be easily sorted out by decreasing further z_b in the theory, an issue that

is not critical for our interpretation of the results. A more interesting aspect concern the horizontal wavelength. We see that in both models it is near equals $\bar{\lambda} \approx 6$, which corresponds to $\bar{k} \approx 1.05$, whereas the corresponding KH mode in (3.22) has $\bar{k} \approx 1.10$ for $J = 0.16$. If we remember that the Drazin solutions are confined to the shear layer and have only one node for the vertical velocity, the inflection point of the background wind (here $z = 0$), it is clear that the wave field downstream in Figs. 3.2e and 3.2f has the structure of a neutral mode of KH instability.

As the central objective of this paper is focused on the trapped lee-waves development, we next choose a representation that emphasize them. For this purpose, the Fig. 3.3 shows the horizontal variations of the vertical velocity at the altitude $\bar{z} = 1$. The panels in the left column are for the theory (Fig. 3.3a), and are consistent with the results in L16, which establishes that more unstable flows favor trapped lee waves. In L16 nevertheless dissipation is almost absent, which makes that the lee waves for $J < 0.25$ are almost pure trapped lee waves, their amplitude do not decay downstream, the mountain exciting a neutral mode of KH instability. Also, in L16, the boundary layer depth does not increase with J , which here absorbs even further the waves when J increase : this makes that in Fig. 3.3a) almost no waves are present when $J > 1$. A striking result is

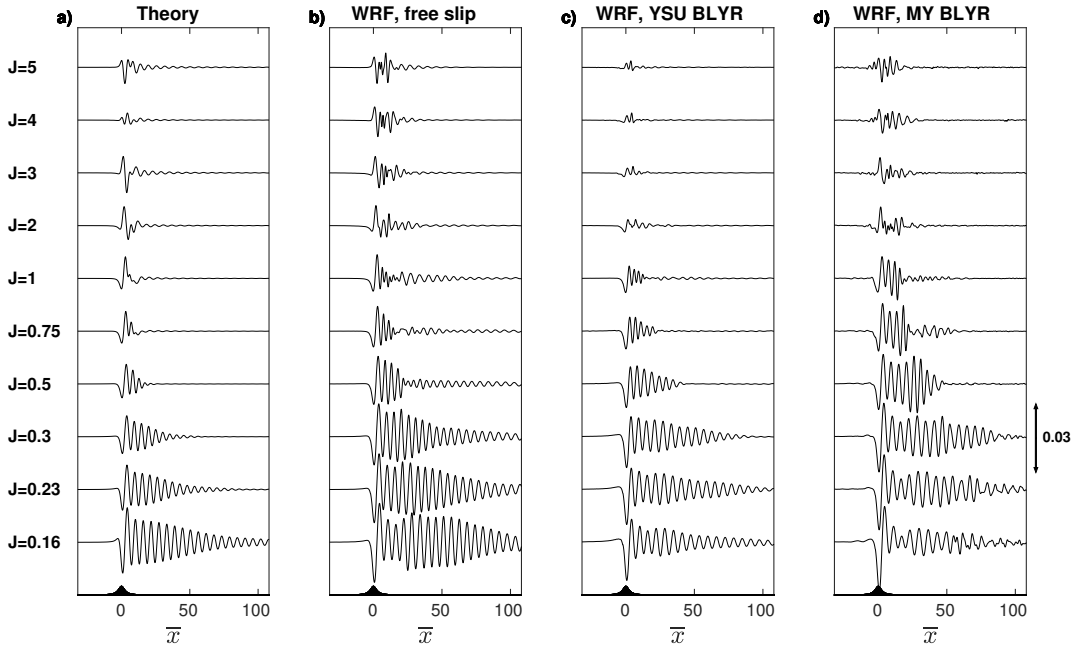


FIGURE 3.3 – Horizontal profiles of non dimensional vertical velocity at $\bar{z} = 1$, with $H_N = 0.1$ and for various J . All curves have the same vertical scale given by the arrow on the right.

that WRF reproduces well this dependence with J , in the free-slip case which we already discussed but confirm here more systematically. What is more interesting is that with more sophisticated boundary layer parameterization schemes in Figs. 3.3c and 3.3d the transition from more unstable flows with more trapped waves to more stable flows with less trapped waves still hold. As said in the model description, our choice was to use well

tuned and stable schemes to confirm our findings beyond the free slip assumption, rather than to discuss with details the differences. What can be said here is that imposing a surface drag via similarity theory, what fundamentally do both the MY-BLYR and the YSU-BLYR schemes, does not fundamentally change the absorptive properties of the waves near the surface compared to the inviscid case, and hence the downstream development of the trapped lee-waves. A reason is probably that our background winds are small near the surface, and the roughness length is also quite small, two reasons that make the frictional drag small and the results quite consistent with the free-slip cases.

3.3.3 Medium height mountain

To test if some of our results hold for higher mountains, we next present experiments with $H_N = 0.7$, that is $H = 404$ m in dimensional units. The results for the horizontal profiles of the vertical velocity in Fig 3.4 confirm that some aspects of the theory are still relevant. The most remarkable one is that trapped waves do occur in most experiments, they all have horizontal wavenumber around $\bar{k} = 1$, their spatial structure also resemble to KH neutral modes (not shown). Although there is an overall tendency for the simulations with small J to produce trapped waves propagating over longer distances downstream, some remarkable differences start to occur. The first is that for small J

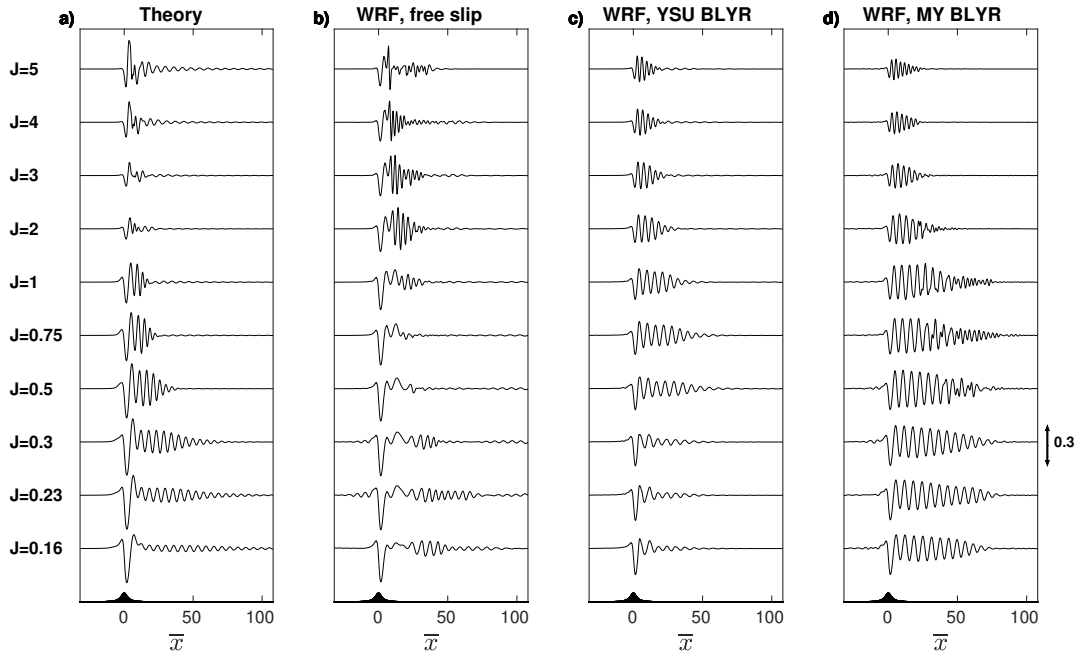


FIGURE 3.4 – Same as Fig 3.3 but for $H_N = 0.7$.

and except when the MY BLYR scheme is used, the first minimum in vertical velocity located immediately downstream of the ridge becomes substantially larger in amplitude compared to the oscillations associated with the lee wave. This follows that enhanced non-linearities increase downslope winds, a behaviour already analyzed in D18. We will not discuss it further here, essentially because this effect is present in the theory in

Fig. 3.4 for $J = 0.16$, $J = 0.23$, and $J = 0.3$, as well as in the free slip case, and to a lesser extent when using the YSU BLYR. Note that this enhancement of downslope winds is almost absent with MY-BLYR, indicating that turbulent parameterizations affect seriously the downslope winds. As we shall see with more details below this impacts in return the development of the trapped lee waves : at small J and with MY-BLYR in Fig. 3.4d), the downslope winds are not as intense as with the other BLYR, which seems to favor the downstream development of the lee waves.

The second difference is more directly related to the lee wave downstream extension. In some cases it can almost disappear locally at small J (for instance in the free-slip case in Fig. 3.4b when $J = 0.16$ between $1 < \bar{x} < 30$). Conversely lee waves can develop downstream more substantially than in the theory, as occur quite systematically in WRF when $J > 1$. To test if these changes challenge our interpretation of trapped lee waves in terms of stability, we next analyze with more details the cases with the two extreme values $J = 0.16$ and $J = 5$.

The results above suggest that when H_N approaches 1 the interpretation in term of upstream flow surface stability becomes incomplete. Interestingly for such values of H_N , we also know that strong downslope winds and low level wave breaking can occur. These certainly change the large-scale flow downstream and hence the local properties of the flow in which the trapped waves develop. To substantiate this relation between local flow stability and trapped waves, we next use the fact that the lee wave fields shown in Fig. 3.4 have rather well defined horizontal wavelength : we can make a separation between the "large-scale flow" and the waves by averaging fields over horizontal distances that compare with the horizontal wavelength. In the following, as the trapped waves have wavelength that are always near and below 3 km, we will apply a top hat horizontal filter with a fixed length of 3 km to extract the large scale, but we found little sensitivity when moderately increasing the horizontal length of the filter.

For $J = 0.16$ the top panels in Fig. 3.5 show the temporal evolution of the altitude of the "unfiltered" isentrope $\theta = 291$ K, and which upstream altitude is almost equal to H . The time evolution in the free slip case in Fig. 3.5a shows the development of a moderate Foehn downslope, the region where the isentrope altitude is below the mountain top extents with time to reach near $x = 20$ km after $t = 240$ min. This region of moderate Foehn does not end by an abrupt hydraulic jump, consistent with the fact that strong Foehn are favored when J is large (see L16, D18). In term of trapped waves, what is interesting is that the oscillations with wavelength below 3 km are stationary, as expected for mountain waves, but begins downstream the Foehn region. The panel below in Fig. 3.5d shows the raw fields of potential temperature altitude at $t = 240$ min, superimposed onto the "large scale" Richardson number,

$$R_{if} = \frac{g}{\theta_f} \frac{\partial \theta_f}{\partial z} \bigg/ \left(\frac{\partial u_f}{\partial z} \right)^2 \quad (3.27)$$

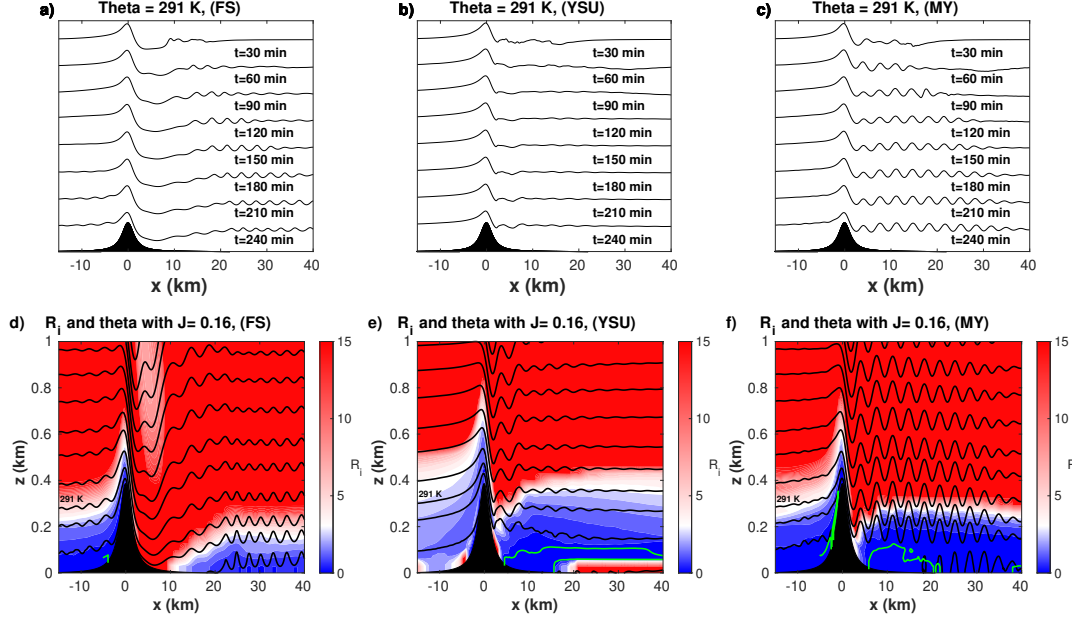
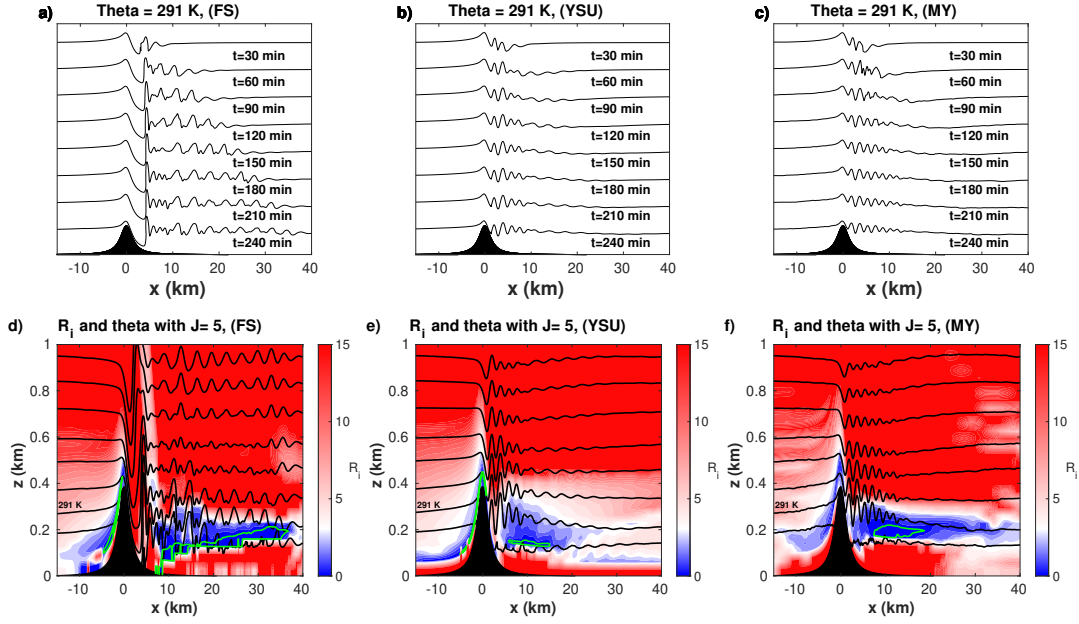


FIGURE 3.5 – WRF simulation, for $J = 0.16$ and $H_N = 0.7$. Left to right : free slip, YSU BLYR and MY BLYR. Upper row : isotherm $\theta = 291$ K at different time. Lower row : large scale Richardson number (color), saturated at $R_{if} = 15$ for clarity. The blue color correspond to $R_{if} < 3$, green contours represent $R_{if} < 0.25$ and black contours are iso-lines of potential temperature

where θ_f and u_f are the filtered field of potential temperature and horizontal wind respectively. Here we see that the region where the trapped waves are present are also characterized by regions where R_{if} is small near the surface, and which are quite far downstream of the ridge. In Figs. 3.5b one sees that an effect of the YSU-BLYR layer parameterization is to reduce the Foehn intensity, the descent of the $\theta = 291$ K surface downstream is less pronounced than in the inviscid case, and the flow near the surface still has $R_{if} < 0.25$, as indicates the green curves and at least until the $x = 20$ km. Above this region substantial small scale oscillations do occur, whereas beyond $x = 20$ km, the surface flow is stabilized and the isentropes no longer present small scale oscillations. This correspondence between surface flow stability and trapped waves is also found when the MY BLYR scheme is used (see Figs. 3.5c-3.5f), in this case also the scheme reduces the foehn amplitude, the flow stays unstable on the lee-side of the ridge, it even stays so down to at least $x = 40$ km and trapped waves are present almost everywhere in this zone. In all cases, we see that the correspondence between trapped waves and the near surface flow stability continues to hold. Differences between the theory and the WRF are even more pronounced when the initial background flow is stable as show the simulations with $J = 5$ in Fig. 3.6. First, in the free slip case, the $\theta = 291$ K surface in Fig 3.5a presents a pronounced foehn immediately downstream of the ridge, followed by an abrupt transition beyond which trapped lee-waves develop. Again the trapped lee

FIGURE 3.6 – Same as Fig. 3.5 for $J = 5$.

waves field develops in time, but is stationary : the first pronounced crest at around $x = 10$ km for instance stays almost at the same place, and this is true for the other crests. The fields of large scale flow stability and isentropic surface in Fig 3.5d show that on the lee side, the dynamics has not much modified the surface flow stability (the Richardson number near $z = 0$ is still much larger than 1), but produced in the mountain wake a large unstable zone that extent with time. We see in Fig. 3.5d that this unstable zone is also where the trapped wave signal is the most pronounced. According to this result, it seems reasonable to suggest that the trapped waves are again related to an instability triggered by the mountain, as suggests the stationarity of the lee wave.

To support this, one needs to verify that where the flow is unstable the large-scale wind is also small, and following that (i) KH instabilities have a phase speed near the large-scale wind value in the region where they are produced, and (ii) mountains force stationary waves. This is verified in Fig. 3.7a, which shows profiles from filtered fields at $x = 13$ km. In it, we see that in the region of instability, the large scale wind is quite small, the near unstable modes, if they exist, are likely to have small phase speed and to be excited by an orographic forcing. The results from other boundary layer parameterizations in Figs. 3.6b-3.6e and Figs. 3.6c-3.6f somehow corroborate these results. In all of them, trapped waves develop whereas the surface stability stays strong. They seem associated to the unstable regions located well above the surface in the wake of the mountain. In all cases, the large scale winds in the region where the Richardson number is small are quite small (Figs. 3.7b and 3.7c). A marked difference is that between the free slip case and the cases with BLYR parameterization the horizontal wavelength of the waves is

quite different, another is that the intensity of the foehn is much less pronounced with the BLYR parameterizations than in the free slip case.

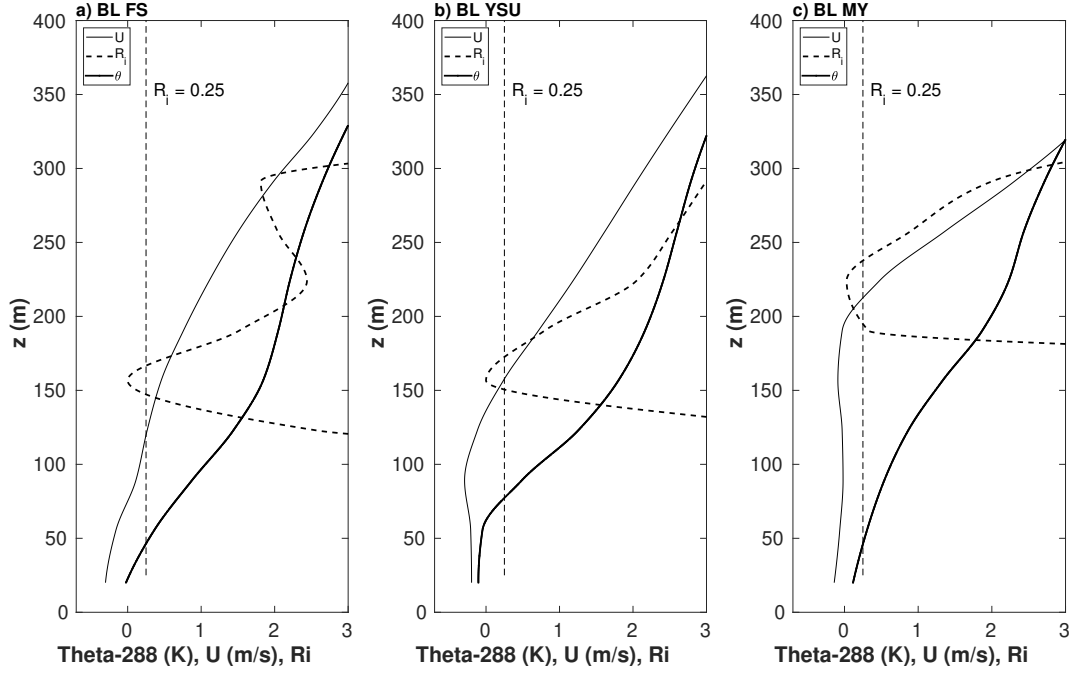


FIGURE 3.7 – Vertical profile of large scale horizontal velocity U_f , potential temperature $\theta_f - 288$ K and Richardson number R_{if} , 13km downstream the mountain. $H_N = 0.7$ and $J = 5$. Thin dashed line corresponds to $R_{if} = 0.25$

3.4 Conclusion

Using theory and WRF simulations with various boundary layer parameterization, this paper has shown that the onset of trapped lee waves is strongly linked to the stability property of the background flow. This complement our conventional view of trapped lee waves where the dynamics is mainly explained in term of variations of the Scorer parameter. We believe that this view becomes mandatory when the variations in the Scorer parameter are due to variations of the incident wind rather than of stratification, and when the incident wind is quite small near the surface. For small mountains, it happens that the theory in L16 explains well this dependence. Small surface Richardson numbers result in large gravity wave surface reflections and favor the trapped wave development. For medium height mountain, the nonlinear dynamics in the wake of the mountain modify the large scale flow, and therefore the background properties in which the trapped waves develop. For small J , non-linearities yield in an increase of the surface Richardson number near the surface and the trapped waves are attenuated. For large J , strong downslope windstorms happen and yield mixing that destabilizes the flow in the wake of the mountain. In this case, we attribute the onset of trapped waves to the triggering of small phase speed unstable modes.

Despite the fact that there is some coherency in our results concerning the links between trapped waves and instabilities, it is important to note that the boundary layer parameterizations have strong quantitative impacts. These impacts are extremely evident in the medium height mountain simulation (section 3.3). In this case and when the background flow is unstable near the surface ($J = 0.16$), the dynamics stabilizes the surface flow in the free slip case, whereas it does not affect it much when the MY-BLYR scheme is used. This impacts the location of the trapped waves. For very stable cases $J = 5$, the dynamics produce strong foehn in the free-slip case, whereas the Foehn is less intense with the YSU and MY boundary layer parameterizations. Again the location of the trapped waves is affected in return. These results clearly illustrate that the boundary layer parameterizations have strong impacts on mountain wave dynamics, at least when the incident wind presents strong shears in the low troposphere. In essence, the results obtained illustrate again the significance of low level wind shears and stability on mountain flow dynamics, something often noticed in the context of trapped lee waves (Reinecke and Durran, 2009; Georgelin and Lott, 2001). In this context it is interesting to note that there are many field experiments where upstream soundings show low level shears (Doyle et al., 2011; Sheridan et al., 2007) generally related to advancing fronts (Lothon et al., 2003), when the low level shear is associated with thermal wind balance.

Chapitre 4

Ondes de montagne produites dans une couche limite stratifiée

Ce chapitre présente les principaux résultats issus du modèle théorique dans sa configuration cisaillement constant (section 2.3), une configuration pour laquelle, nous le verrons, les ondes piégées ne peuvent pas se propager loin derrière la montagne. Ces résultats sont néanmoins utiles pour la compréhension de la dynamique dans le cas avec cisaillement variable (section 2.4) qui seront détaillés dans le chapitre 5. Ces résultats ont donné lieu à des articles publiés ou soumis que le lecteur pourra retrouver dans les Annexes D et E. Nous montrerons d’abord les résultats obtenus dans le cas hydrostatique, puis dans le cas non hydrostatique.

4.1 Introduction

Comme évoqué précédemment dans le contexte de la dynamique des ondes piégées (section 1.5), la présence de la couche limite peut significativement moduler l’influence des montagnes sur la circulation atmosphérique. Des études, comme Jackson and Hunt (1975) ont cherché à expliquer comment était modifié l’écoulement de la couche limite par la présence de relief montrant que la traînée turbulente (*form drag*) engendrée par celui-ci pouvait être modélisée en ajustant l’échelle caractéristique de la topographie (section 1.3.1 Eq (1.14), Wood and Mason (1993)). Ces études, parmi d’autres, ont inspiré les paramétrisations de la traînée orographique d’échelle sous maille, pour des reliefs de taille caractéristique inférieure à 5 km, utilisées actuellement dans les modèles numériques de prévision (Beljaars et al., 2004).

Dans le même temps, d’autres études, plus portées sur la météorologie de montagne (Durrán, 1990), où les effets de la couche limite sont généralement négligés, montrent que la traînée orographique est contrôlée par la dynamique liée à la propagation des ondes de gravité. La prise en compte de cette dynamique constitue la base des paramétrisations de la traînée orographique d’échelle supérieure à 5 km dans les modèles numériques (Lott and Miller, 1997a; Sandu et al., 2016).

En réalité, principalement parce que la topographie est souvent incluse dans la couche limite, ces deux approches sont complémentaires et la prévalence de l'une ou l'autre est fortement liée à la stratification de l'écoulement. Dans ce contexte, Hunt et al. (1988); Belcher and Wood (1996) ont considéré le cas d'une couche limite stratifiée perturbée par la topographie. Belcher and Wood (1996) montrent alors que lorsque le nombre de Froude¹ est plus petit que 1, la traînée orographique est due à la propagation des ondes de gravité (*wave drag*) et est correctement prédite par la dynamique linéaire. À l'inverse, pour $F_r > 1$ le relief force une traînée turbulente qui dans ce cas est contrôlée par la dynamique de la couche limite. Ces résultats sont particulièrement importants pour les paramétrisations de la traînée orographique, néanmoins, la valeur du nombre de Froude correspondant à cette transition reste dépendante de l'altitude à laquelle sont évalués u_0 et N . Pour résumer, nous avons d'une part des études centrées sur la couche limite montrant que la traînée orographique est fortement influencée par la dynamique des ondes de montagne au-dessus de la couche limite, mais considérant une dynamique très simplifiée dans la troposphère libre (Belcher and Wood, 1996). D'autre part, des études axées sur la dynamique des ondes de montagne, pointant les effets potentiels de la couche limite sur cette dynamique mais utilisant une représentation très simplifiée de celle-ci (Smith et al., 2006).

Le modèle théorique décrit dans le chapitre 2 permet, d'une certaine manière, de combiner ces deux approches en associant la dynamique des ondes de montagne à une couche limite simplifiée, modélisée à l'aide d'un coefficient de viscosité cinématique constant. Les deux configurations étudiées dans la suite sont en quelque sorte deux situations extrêmes dans le sens où, dans la configuration hydrostatique il n'existe aucun point tournant pour les ondes se propageant verticalement, tandis que dans le cas non hydrostatique, la présence d'un profil de vent linéaire implique que tous les modes propagatifs sont piégés dans l'écoulement et réfléchis vers la surface. Nous verrons que cette différence fondamentale affecte de manière non négligeable la traînée orographique et les profils verticaux de quantité de mouvement. D'autre part, nous regarderons aussi l'impact de la stratification de l'écoulement sur la dynamique des ondes dans ce modèle.

4.2 Écoulement hydrostatique

Afin d'avoir une vue d'ensemble des champs produits par le modèle théorique, la Figure 4.1 représente les variables dynamiques ainsi que le flux de pseudo-moment pour $J = 4$, $S = 0.01$ et $\bar{\delta}(1) = 0.1$. On remarque que, proche de la surface, l'écoulement est symétrique de part et d'autre de la montagne (Figure 4.1a) et la vitesse verticale met en évidence un système d'ondes de gravité se propageant au-dessus de la montagne (Figure 4.1b). D'autre part, la Figure 4.1c montre que, pour chaque altitude, les

1. Dans Belcher and Wood (1996) le nombre de Froude est défini comme $F_r = u_0/L/N$

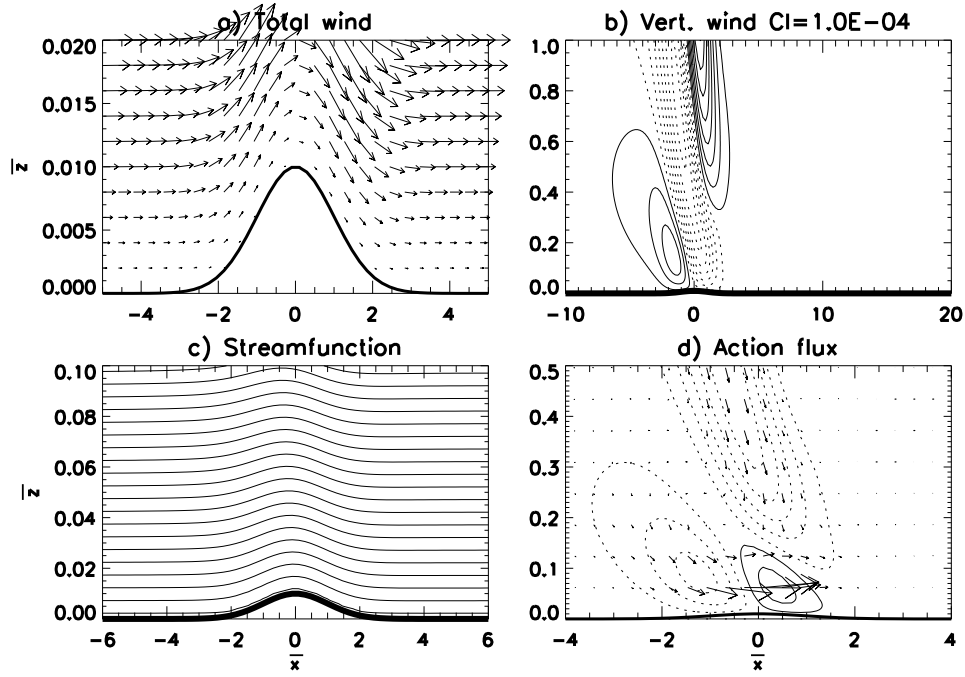


FIGURE 4.1 – Champs physiques issus du modèle théorique dans sa configuration hydrostatique pour $J = 4$ et $\bar{\delta} = 0.1$. La topographie est représenté par une Gaussienne avec $S = 0.01$. (a) Vent total ($\bar{z} + \bar{u}, \bar{w}$). (b) Vitesse verticale $\bar{w}$. (c) Fonction de courant $\bar{\psi}$ définie par $\partial_{\bar{z}}\bar{\psi} = \bar{z} + \bar{u}$. (d) Flux vertical d'action F^z (contours) et vecteur total du flux d'action (F^x, F^z). Les contours pointillés correspondent aux valeurs négatives. Figure tirée de Lott et al. (2020).

lignes de courant sont déplacées sur une distance verticale équivalente à S , de la surface jusqu'à $\bar{z} \sim \bar{\delta}(1)$. A l'aide d'une analyse en ordre de grandeur, en considérant que les parcelles d'air suivent la pente des lignes de courant, on peut estimer que pour $\bar{z} = 1$, $\bar{w} \simeq S\bar{\delta}(1)/2 = 5.10^{-4}$ (Annexe D). On retrouve bien l'ordre de grandeur de la vitesse verticale représentée par la Figure 4.1b. Cet argument qualitatif souligne que le système d'ondes observé est forcé, non pas directement par la montagne mais plutôt par la couche intérieure déformée par celle-ci.

L'idée, à partir de cette observation, est d'estimer le flux de quantité de mouvement dû aux ondes et la traînée orographique à la surface définis respectivement par

$$\bar{u} \bar{w}(\bar{z}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}(\bar{x}, \bar{z}) \bar{w}(\bar{x}, \bar{z}) d\bar{x}, \quad Dr = - \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{p}(\bar{x}, \bar{h}) \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} d\bar{x}. \quad (4.1)$$

On calcule pour cela la traînée orographique de surface dans le cas linéaire, non dissipatif, produit par un écoulement de stratification N où un vent U est incident sur une montagne de hauteur H : UNH^2 . Dans notre cas, en fonction des variables adimensionnelles du problème et en prenant comme valeur pour le vent incident sa moyenne dans la couche intérieure, cette grandeur s'écrit

$$-\frac{\bar{\delta}(1)}{2} \sqrt{JS^2} = -Dr_{GWP}, \quad (4.2)$$

où Dr_{GWP} est le prédicteur de la traînée orographique de surface.

La Figure 4.2 montre que la quantité Dr_{GWP} est une bonne estimation de la traînée orographique de surface quelle que soit la pente S et pour une large gamme du nombre de Richardson. Ces résultats sont d'autre part corroborés par les simulations issues du MITgcm. Ainsi, on peut conclure que la traînée orographique est contrôlée par la dynamique non visqueuse en dehors de la couche intérieure. Les cas faiblement stratifiés ne pouvant pas être traités ici, ils seront abordés dans la section 4.2.

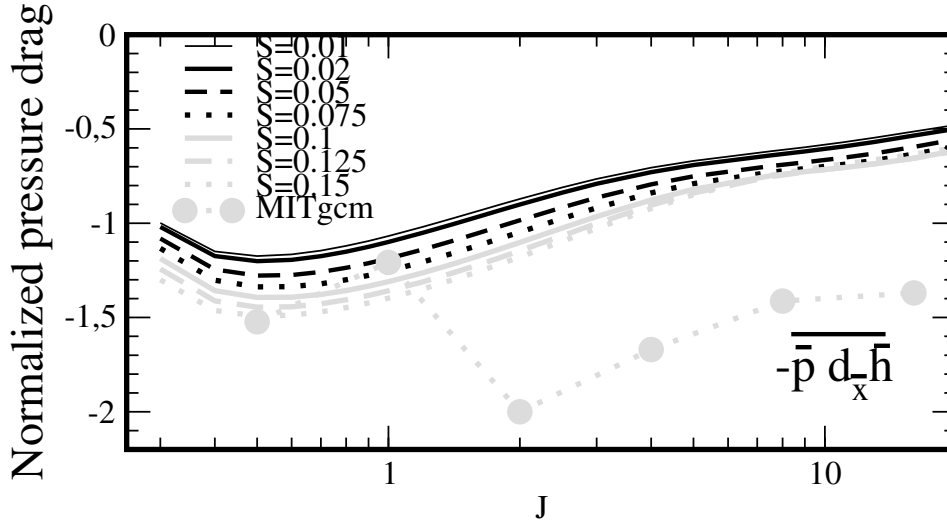


FIGURE 4.2 – Traînée orographique à la surface calculée à partir du modèle théorique, normalisée par l'amplitude obtenue dans le cas linéaire, non dissipatif, avec un vent uniforme U incident sur une montagne de hauteur H . Les points sont issus des simulations du MITgcm pour $S = 0.15$. Figure tirée de Lott et al. (2020).

La traînée orographique à la surface est généralement (dans le cas non dissipatif) considérée comme une mesure directe de l'effet des montagnes sur l'écoulement moyen (section 1.3.1, Eq (1.10)). Cependant, dans notre cas, non seulement la dynamique est visqueuse près du sol mais les ondes de gravité ne sont pas directement forcées par la montagne mais plutôt par la déformation de la couche intérieure. Pour s'en convaincre, la Figure 4.1d montre le flux de pseudo-moment dû aux ondes. On voit qu'au-dessus de la couche intérieure le flux de pseudo-moment est orienté vers le bas, cohérent avec une propagation verticale vers le haut des ondes de gravité (Durrant, 1995a). Toutefois, proche du sol, c'est à dire dans la couche intérieure, le vecteur de pseudo-moment est clairement horizontal et orienté vers l'aval contrairement au cas non dissipatif où ce même vecteur pointe directement vers la surface (voir section 1.3.2, Figure 1.7). Tout se passe comme si l'accélération induite par la propagation des ondes de gravité était communiquée à l'écoulement dans la couche intérieure plutôt qu'à la terre solide.

Ce résultat est confirmé dans la Figure 4.3a où les profils verticaux normalisés de $\overline{u\overline{w}}$ sont représentés pour différentes valeurs de J . On voit qu'à la surface la quantité de mouvement due aux ondes est exactement nulle, son amplitude croît ensuite avec $\bar{z}$

jusqu'à atteindre un maximum pour $\bar{z} \sim 5\bar{\delta}$, *i.e.* la hauteur de la couche limite dissipative (voir Eq 2.21). Cette variation traduit une accélération de l'écoulement dans la couche intérieure.

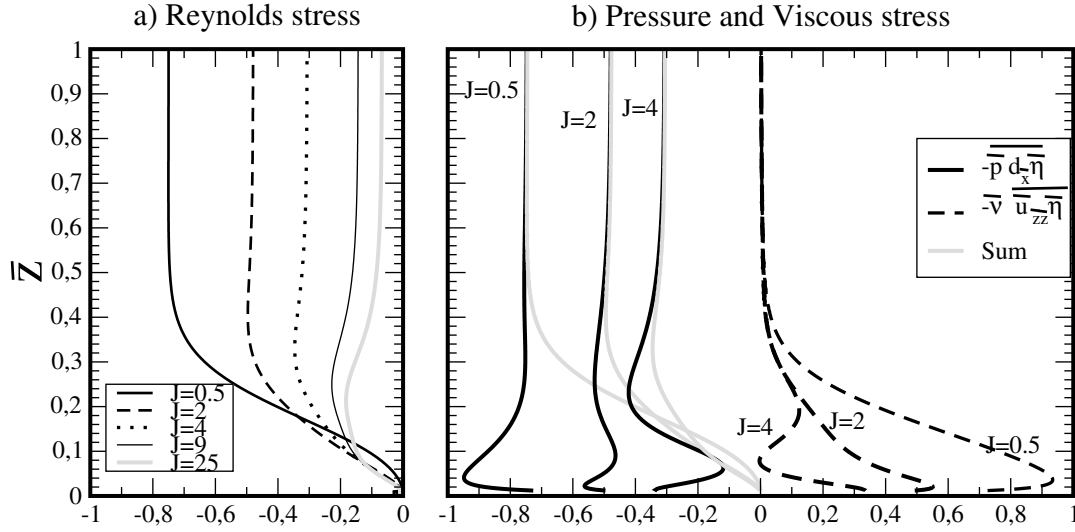


FIGURE 4.3 – (a) Profils verticaux de quantité de mouvement normalisée par Dr_{GWP} associée aux ondes de gravité, pour $S = 0.01$. (b) Contrainte le long des lignes de courant $\bar{\eta}$ pour chaque altitude due à la différence de pression (trait plein noir) et aux termes visqueux (pointillés), voir Eq (23) Lott et al. (2020). La somme est représentée en gris.

Les ondes étant en partie dissipées lorsqu'elles traversent la couche intérieure, la valeur émise du flux de quantité de mouvement, *i.e.* pour $\bar{z} > 5\bar{\delta}$, est en moyenne la moitié de la traînée orographique de surface prédite par Dr_{GWP} (Figure 4.3a). D'autre part, à mesure que J augmente, on remarque que l'amplitude maximum de $\bar{u}\bar{w}$ diminue. Pour expliquer ce comportement, il est important de rappeler que pour $\bar{\delta} < \bar{z} < 5\bar{\delta}$, $\bar{w}_C \propto \bar{z}^{\frac{1}{2}+i\mu}$ avec $\mu = \sqrt{J-1/4}$. Ainsi, lorsque J augmente, la longueur d'onde verticale des modes propagatifs diminue, l'onde oscille plus à travers la couche intérieure, elle est donc plus dissipée, la valeur émise de $\bar{u}\bar{w}$ est alors plus faible.

Dans le cas non dissipatif la traînée orographique à la surface est directement compensée par le flux de quantité de mouvement vertical dû aux ondes. Cependant, ici, comme remarqué sur la Figure 4.3a, ce flux est nul à la surface. Pour comprendre qu'est ce qui équilibre la traînée orographique à la surface dans notre cas il est utile de rappeler que d'après Eliassen (1960) le flux de quantité de mouvement est relié à la force de pression dans la direction horizontale exercée le long des lignes de courant. Dans le cas linéaire et stationnaire, on peut obtenir l'analogue de cette relation en multipliant l'équation de la conservation de quantité de mouvement (Eq (2.11a)) par le déplacement vertical des lignes de courant $\bar{\eta}$. En intégrant par parties suivant $\bar{x}$ on obtient,

$$\bar{u}\bar{w} = -\bar{p}\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} - \bar{v}\left(\bar{\eta}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2}\right), \quad \text{avec } \bar{z}\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} = \bar{w}. \quad (4.3)$$

Ici, le flux de moment étant nul à la surface, c'est le terme visqueux (troisième terme) qui compense la traînée orographique. Pour illustrer ce mécanisme, les deux termes de

droite et leur somme sont représentés en fonction de $\bar{z}$ sur la Figure 4.3b pour différentes valeurs de J . On voit que dans la couche limite la traînée orographique est presque entièrement compensée par la contrainte visqueuse, la quantité $\overline{u\bar{w}}$ est proche de zéro, tandis que lorsque $\bar{z}$ augmente, l'amplitude des termes visqueux diminue et la traînée orographique devient équivalente aux flux de quantité de mouvement vertical (Figure 4.3b). La présence de la couche dissipative près du sol modifie donc de manière significative le bilan de quantité de mouvement à la surface.

4.3 Écoulement non hydrostatique

Nous présentons ici quelques résultats du modèle dans sa configuration non hydrostatique, toujours avec un cisaillement de vent constant. Dans la partie précédente, nous avons montré que la quantité Dr_{GWP} permettait d'estimer la traînée orographique lorsque celle-ci était contrôlée par la propagation des ondes de gravité. Cependant, pour les cas faiblement stratifiés, la propagation des ondes de gravité n'est plus possible et la topographie induit alors une traînée turbulente dans l'écoulement. De la même manière on peut estimer cette contrainte orographique à l'aide d'arguments dimensionnels. On considère par la suite que dans la couche intérieure les variations de la pression sur la verticale sont négligeables et que le gradient de pression horizontal équilibre la contrainte visqueuse, soit,

$$\partial_{\bar{x}}\bar{p} \approx \bar{\nu}\partial_{\bar{z}}^2\bar{u}. \quad (4.4)$$

En intégrant sur la hauteur de la couche intérieure, la traînée turbulente induite par le relief peut être estimée par (voir Annexe E),

$$Dr_{FDP} = \bar{\delta}(1)S^2/2. \quad (4.5)$$

En considérant que la transition entre les régimes d'écoulement faiblement stratifiés et stratifiés a lieu pour $J \simeq 1$, les deux expressions obtenues Eqs. (4.2) et (4.5) peuvent être combinées pour former le nouveau prédicteur de la contrainte orographique,

$$Dr_P = \text{Max}\left(1, \sqrt{J}\right) \bar{\delta}(1)S^2/2. \quad (4.6)$$

Ainsi, pour des faibles stratifications la traînée orographique est normalisée par une estimation de la traînée turbulente et pour les cas plus stratifiés elle est normalisée par une estimation de la traînée orographique due à la propagation des ondes de gravité. La Figure 4.4 montre l'évolution de la contrainte orographique normalisée par Dr_P en fonction de J . On voit que le prédicteur est une bonne approximation pour $J < 0.1$ et pour $J > 3$. Cependant, pour $J \simeq 1$, on remarque un minimum d'amplitude ($J \simeq 0.7$) suivi d'un maximum ($J \simeq 1.6$). Ce comportement, totalement absent dans le cas hydrostatique (traits fins), peut être interprété en rappelant qu'ici, toutes les ondes se

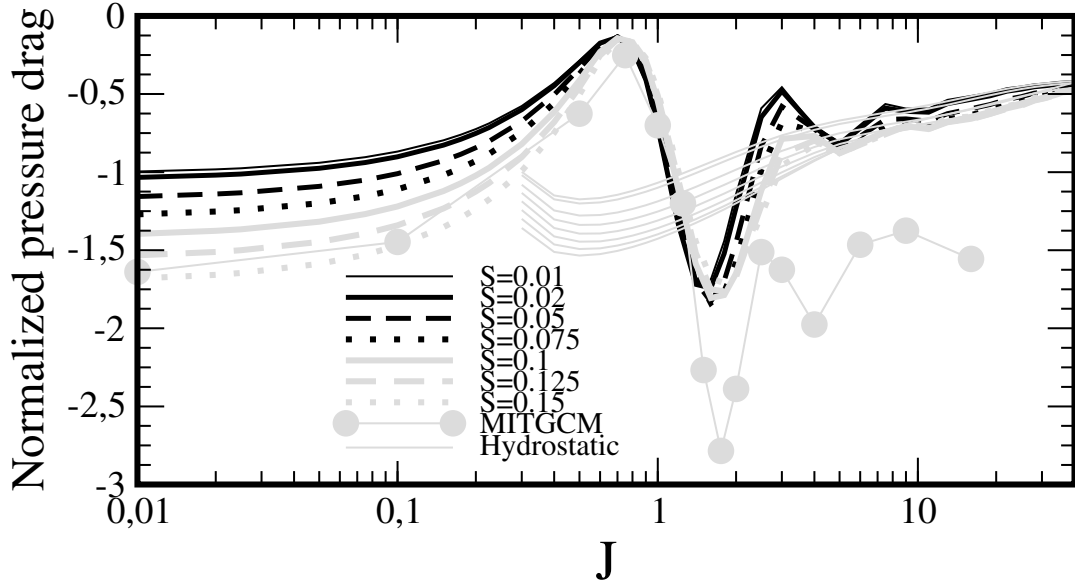


FIGURE 4.4 – Traînée orographique à la surface normalisée par le prédicteur Dr_P . Les valeurs obtenues dans le cas hydrostatique et normalisées par D_{GWP} sont aussi représentées (traits fins).

propageant verticalement sont piégées dans l'écoulement et sont réfléchies vers la surface. On rappelle ici l'équation (2.47) satisfaite par la solution extérieure,

$$\bar{\mathbf{w}}_{I_{zz}} + \left[\frac{J}{\bar{z}^2} - \bar{k}^2 \right] \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}} = 0.$$

On voit alors que l'altitude des points tournants pour le nombre d'onde $\bar{k}$ s'écrit $\bar{z}_T(\bar{k}) = \sqrt{J/\bar{k}}$, et augmente avec J . On en déduit que pour des petites valeurs de J les ondes sont réfléchies proche de la surface. Par contre, lorsque $J \simeq 1$, et pour le nombre d'onde principal $\bar{k} = 1$, les ondes sont réfléchies à une altitude proche de la largeur caractéristique de la montagne L ($z_T(1/L) = \sqrt{J}L$ dans l'espace dimensionnel). Dans ce cas les ondes émises et réfléchies peuvent interagir de manière destructives et constructives, le champ de pression sur la pente de la montagne est modifié, induisant un minimum et un maximum d'amplitude de la traînée orographique à la surface (Figure 4.4, voir aussi Annexe E). Pour des valeurs de J plus grandes, les ondes sont réfléchies plus haut mais aussi plus en aval, elles ont alors un impact réduit sur le champ de pression au-dessus de la montagne et ne modifient pas l'amplitude la traînée orographique. Il est utile, dans une certaine mesure, de quantifier l'amplitude de la traînée orographique à la surface. Cependant, comme souligné dans la partie précédente (section 4.2), dans le cas visqueux l'effet du relief sur l'écoulement est mieux représenté par le flux de quantité de mouvement vertical. La Figure 4.5 illustre les différents termes de l'équation (4.3), c'est à dire les profils verticaux des contraintes dues au gradient de pression horizontal, des contraintes visqueuses et du flux vertical de quantité de mouvement. Tout d'abord, le flux de quantité de mouvement émis au-dessus de la couche intérieure est nul par construction car

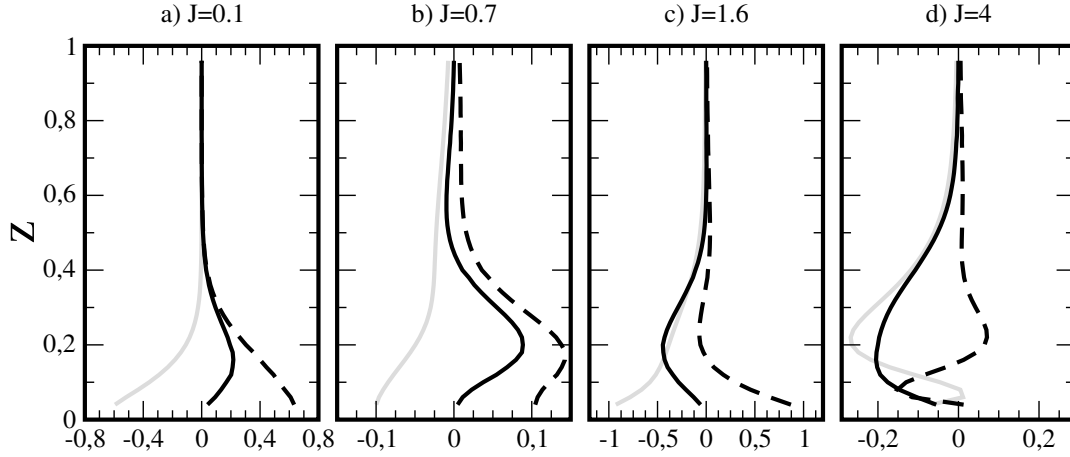


FIGURE 4.5 – Profils verticaux du flux de quantité de mouvement vertical (trait noir plein), de la contrainte due au gradient de pression horizontal (gris) et de la contrainte visqueuse (pointillés noir) pour différentes valeurs de J pour $S = 0.01$. Toutes les courbes sont normalisées par Dr_P .

toutes les ondes sont piégées dans l'écoulement et les effets du relief sont alors confinés dans la couche intérieure. Comme dans le cas hydrostatique, les contraintes dues à la pression et aux forces visqueuses se compensent proche de la surface et $\overline{u\overline{w}}$ est faible. Dans la section 1.3.1, nous avons vu que le signe de la divergence verticale du flux de quantité de mouvement $\partial_z \overline{u\overline{w}}$ traduit l'effet des perturbations sur l'écoulement moyen. Ainsi, pour les cas faiblement stratifiés l'écoulement de la partie inférieure de la couche intérieure est freiné tandis qu'il est accéléré au-dessus (Figure 4.5a,b). L'effet est inversé pour les cas plus stratifiés (Figure 4.5c,d).

Il est intéressant de quantifier les valeurs extrêmes de $\overline{u\overline{w}}$ ainsi que leur signe qui, dans les cas peu stratifiés, peut être opposé à celui de la traînée orographique de surface. C'est l'objet de la Figure 4.6 qui représente les extrema de $\overline{u\overline{w}}$ normalisés par Dr_P . Tout d'abord, on voit que la traînée due aux ondes de gravité dans les cas stables est d'amplitude comparable à la traînée turbulente induite par la couche limite lorsque l'écoulement est faiblement stratifié. De plus, cette représentation met clairement en évidence la transition entre les deux régimes d'interaction pour $J \simeq 1$ et montre que l'amplitude du flux de quantité de mouvement est en moyenne surestimée d'un facteur 3 par le prédicteur. Cette transition est d'autre part confirmée avec les simulations non linéaires du MITgcm.

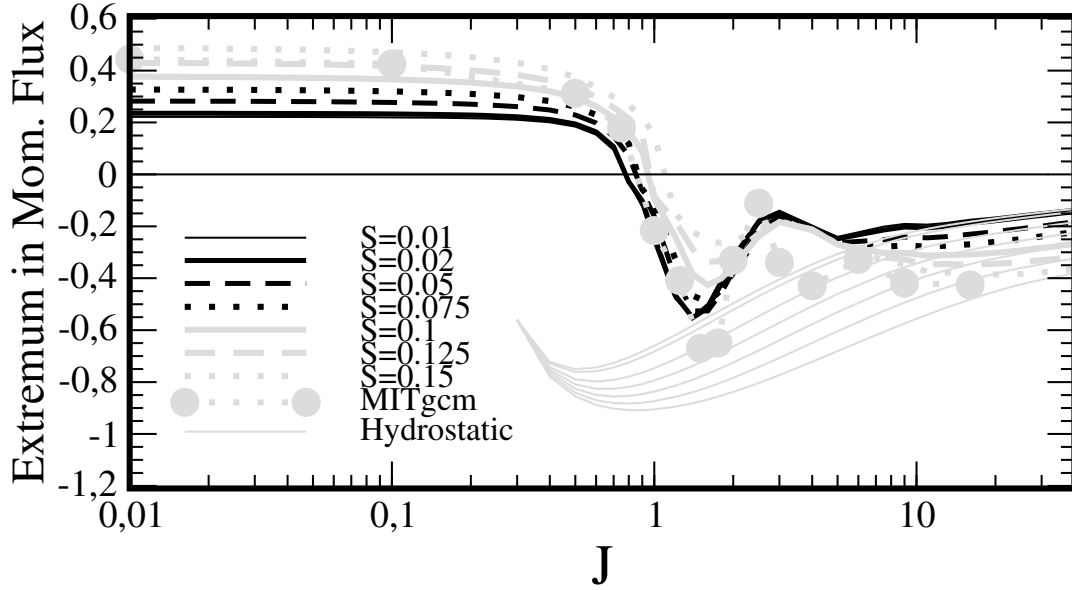


FIGURE 4.6 – Idem que la Figure 4.4 pour l'extremum de $\overline{uw}$.

4.4 Conclusion

Dans l'introduction de ce chapitre nous avons mis en évidence l'existence de deux manières différentes de considérer l'effet du relief sur l'écoulement moyen, dépendant d'une part de l'échelle caractéristique du relief et d'autre part de la stratification de l'écoulement. Ces deux méthodes sont respectivement associées à des études plutôt centrées sur la couche limite (Beljaars et al., 2004) et sur la dynamique des ondes de montagne (Lott and Miller, 1997a). Dans le cadre d'un profil de vent à cisaillement constant, le modèle décrit dans le chapitre 2, en configuration hydrostatique et non hydrostatique, nous a permis d'expliciter les interactions et la transition entre ces deux régimes.

Nous avons vu que la théorie linéaire pouvait donner une bonne estimation de la traînée orographique à condition de prendre comme échelle de vent incident celle correspondant à la hauteur de la couche intérieure $\bar{\delta}$, c'est à dire la hauteur pour laquelle les termes visqueux sont du même ordre de grandeur que les termes d'advection. Pour le cas d'écoulement faiblement stratifié, la théorie linéaire est corrigée afin de rendre compte de la traînée turbulente induite par le relief, cette transition étant relativement bien mesurée par le nombre de Richardson J .

Cependant, ici les deux configurations étudiées possèdent un cisaillement de vent horizontal constant et infini. Ainsi, ou bien aucune onde n'est piégée et les écoulements faiblement stratifiés ne sont pas considérés (cas hydrostatique) ou bien elles le sont toutes et le flux émis de quantité de mouvement est nul par construction (cas non hydrostatique). Dans ce dernier cas, les effets du relief sur l'écoulement moyen sont confinés dans la couche intérieure.

D'autre part, malgré un profil de vent pour lequel tous les modes possèdent un point tournant, les ondes résonnantes piégées (section 1.4.2) ne sont pas présentes. Les ondes

sont en fait absorbées lorsqu'elles regagnent la surface à cause du niveau critique, leur réflexion étant conditionnée par la stabilité de l'écoulement au sol (section 1.5.2), *i.e.* une réflexion partielle à lieu si $J < 0.25$ dans le cas visqueux (L07). Or, ici, lorsque cette condition est vérifiée, la stratification de l'écoulement n'est pas suffisante pour supporter la propagation des modes forcés par la montagne. Le système ne peut donc pas supporter la propagation d'ondes résonnantes piégées.

En modélisant le vent incident avec un cisaillement variable on peut d'une part étudier le cas hybride où, suivant la hauteur caractéristique du cisaillement, certains modes sont piégés et d'autres non, et d'autre part étudier l'influence des ondes piégées sur le bilan de quantité de mouvement dans la couche intérieure. Cette étude sera l'objet du chapitre 5.

Chapitre 5

Interaction ondes piégées et couche limite

Après avoir introduit une dynamique de couche limite assez complète dans le chapitre 4, nous revenons au problème des modes résonnants piégés étudiés au chapitre 3.

5.1 Introduction

La couche limite atmosphérique est parfois caractérisée par un écoulement stratifié, dans lequel des ondes forcées par le relief peuvent se propager. Ces ondes peuvent alors interagir avec la dynamique de la couche limite, produisant du mélange turbulent (Finnigan, 1999) et ainsi moduler le bilan de flux de quantité de mouvement vertical dans la couche limite, (Brown et al., 2003; Zaitseva et al., 2018). Ces interactions influencent de manière significative les prévisions de la qualité de l'air (Salmond and McKendry, 2005) ou encore de l'énergie éolienne, (Storm et al., 2009). D'autre part, sous estimer ces interactions, dans le cas de couche limite stable, détériore la prédiction de la traînée orographique à la surface (Sandu et al., 2013). Certaines études récentes montrent que ces processus ont un impact non négligeable sur la circulation atmosphérique générale (Pithan et al., 2016; Elvidge et al., 2019). Des travaux théoriques et expérimentaux ont cherché à quantifier l'effet des ondes se propageant dans une couche limite stable. En utilisant la théorie linéaire, Chimonas and Nappo (1989) montrent que la modification de flux de quantité de mouvement vertical due aux ondes de gravité peut dans certains cas être du même ordre de grandeur que la friction au sol, une conclusion partagée avec des observations récentes comme Steeneveld et al. (2008). Les variations de la contrainte dues aux ondes de gravité et à la traînée turbulente, forcées par un relief en deux dimensions dans une couche limite stable, ont aussi été étudiées par Belcher and Wood (1996). Dans ce cas, la traînée turbulente domine pour des écoulements peu stratifiés et la traînée due aux ondes de gravité contrôle les variations du flux de quantité de mouvement lorsque la stratification augmente. Ces conclusions sont d'autant plus pertinentes que Sandu et al. (2016) montre que la quantification des différentes contributions à la traînée

de surface est une mesure au moins aussi importante que celle de l'amplitude totale de la traînée orographique à la surface. Récemment, les résultats de Tsiringakis et al. (2017) suggèrent aussi que la traînée induite par la propagation des ondes de gravité dues aux reliefs de petite échelle pourrait contribuer tout autant que la traînée provoquée par les blocages orographiques (Lott and Miller, 1997a) ou la traînée orographique turbulente d'échelle sous maille (Beljaars et al., 2004).

Une hypothèse pour expliquer le manque de traînée à bas niveau dans des écoulements stratifiés est de considérer que celle-ci est provoquée par la dissipation d'ondes piégées dans la couche limite (Sandu et al., 2019). L'idée que la dissipation turbulente des ondes piégées en aval d'un relief puissent exercer une contrainte sur l'écoulement moyen a d'abord été soulignée par Bretherton (1969). Dans ce cas, la contrainte est directement exercée là où les ondes piégées sont dissipées. Parfois, les ondes piégées se propagent dans la stratosphère (Hills et al., 2016) et la traînée contraint l'écoulement à haute altitude, tandis que lorsque ces ondes sont dissipées dans la couche limite, (Jiang et al., 2006; Smith, 2007), la traînée est exercée proche de la surface. Cependant, Georgelin and Lott (2001) montrent, à partir d'observations pendant la campagne PYREX, que les ondes piégées peuvent contribuer de manière significative au bilan de flux vertical de quantité de mouvement pas seulement dans la couche limite mais plus généralement entre le sol et l'altitude de leur point tournant. Ces résultats étant cohérents avec l'étude des ondes piégées de Xue et al. (2020) sur le plateau Tibétain à l'aide de simulation LES.

D'autres études théoriques, dans le cadre linéaire (Lott, 1998) ou non linéaire (Durran, 1995b), évaluent l'impact des ondes piégées en utilisant des diagnostics de pseudo-moment. Elles montrent que la diminution du flux vertical de quantité de mouvement, dans le cas non dissipatif, est due en partie à un flux de pseudo-moment horizontal induit par les ondes piégées, un résultat corroboré par Broad (2002); Héreil and Stein (1999). Nous avons vu tout au long de ces travaux que la couche limite pouvait significativement modifier la dynamique de ces ondes et par conséquent la traînée induite par celles-ci. Cependant, la plupart des études concernant l'impact des ondes piégées sur la traînée à bas niveau négligent ou bien la couche limite (Teixeira et al., 2013a,b) ou bien ses interactions avec les ondes piégées. Par exemple, Belcher and Wood (1996) étudient un écoulement forcé par la topographie où la dissipation turbulente agit dans une couche intérieure près de la surface, associée à une dynamique hydrostatique au-dessus, une configuration rendant impossible l'apparition de modes résonnants piégés. De plus, dans la majorité des études précédentes, le piégeage des ondes est généralement assuré en imposant une discontinuité dans le profil de stabilité de l'écoulement. Néanmoins, au vu du paramètre de Scorer, il est évident que les profils de vent induits par la dynamique de la couche limite, *i.e.* proche de zéro à la surface et caractérisés par une courbure importante au sommet de la couche limite, peuvent aussi induire un piégeage vertical pour les ondes de montagne. Cette configuration a été étudiée dans le cas linéaire non

visqueux, les ondes de montagne possèdent alors un niveau critique proche du sol (Lott, 2016; Soufflet et al., 2019). Les ondes piégées résultent, dans ce cas, de modes propres d’instabilité de KH, dont la propagation est conditionnée par la stabilité dynamique de l’écoulement à la surface. Ce mécanisme est, d’autre part, soutenu par de récentes études expérimentales soulignant que la présence de relief peut augmenter le cisaillement vertical de vent, qui en retour, facilite le développement d’instabilité de KH dans la couche limite en aval (Grasmick and Geerts, 2020; Barnes et al., 2018).

Le but de ce chapitre est donc d’examiner les interactions entre les ondes piégées induites par un cisaillement vertical de vent et la couche limite en présence d’un forçage topographique. On utilise pour cela la configuration du modèle théorique décrite dans la section 2.4. Dans un premier temps, à travers les sections 5.2-5.4 nous analyserons l’influence de la courbure du vent incident et de la stabilité sur le champ d’ondes de gravité forcées par le relief, nous regarderons ensuite l’impact de ces ondes sur la traînée orographique à différents niveaux dans la section 5.5. Dans la partie 5.6, les effets de la courbure de l’écoulement incident sur la transition entre les régimes de traînée turbulente et de la traînée due aux ondes de gravité sont analysés.

5.2 Impact de la courbure du vent incident

Pour mettre en évidence les effets dus à la courbure du vent incident sur la dynamique et lier cette étude avec le chapitre précédent, nous commençons ici par comparer les champs de vitesse verticale issus du cas avec cisaillement constant non hydrostatique (Fig. 5.1a-c) et du cas avec cisaillement variable avec $D = 1$ (Fig. 5.1d-f). Pour chacun des cas, on évalue l’influence de la stabilité dynamique de l’écoulement en variant le nombre de Richardson J . Les conclusions n’étant pas modifiées dans le cas de petite pente, *i.e.* $S = 0.01$, nous montrerons dans l’ensemble de ce chapitre seulement les simulations pour $S = 0.15$. D’autre part, ceci nous permettra dans les sections 5.4-5.6 de pouvoir comparer nos résultats avec les simulations non linéaires du MITgcm. Enfin, pour l’ensemble des simulations présentées ici le nombre de Prandtl et la hauteur de la couche limite de surface sont constants tels que $P_r = 2$ et $\bar{\delta} = 0.1$ pour le nombre d’onde principal en choisissant $\nu = 0.001$.

Tout d’abord on peut voir sur la Figure 5.1 que la courbure du vent incident impacte fortement la dynamique quelle que soit la stabilité de l’écoulement. Lorsque celui-ci est fortement stratifié ($J = 4$), des ondes de gravité se propagent verticalement au-dessus de la montagne, la seule différence entre les deux cas étant la quantité de modes piégés se réfléchissant vers la surface. Tous les modes étant piégés dans le cas avec cisaillement constant, le champ d’ondes est composé à la fois d’ondes se propageant vers le haut, localisées au-dessus de la montagne, et d’ondes se propageant vers le bas plutôt en aval (Figure 5.1a). À l’inverse, dans le cas avec cisaillement variable la plupart des ondes

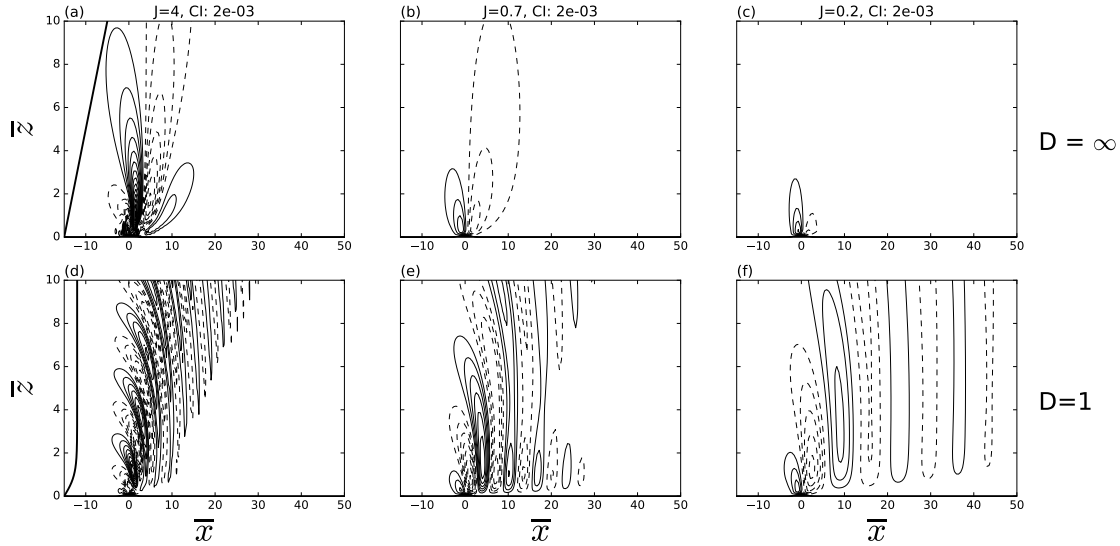


FIGURE 5.1 – Champ de vitesse verticale pour $\bar{\delta} = 0.1$. $J = 4$ en a,d ; $J = 0.7$ en b,e et $J = 0.2$ en c,f. La topographie est représenté par une Gaussienne avec $S = 0.15$. La première ligne correspond au cas avec cisaillement constant et la deuxième au cas avec cisaillement variable avec $D = 1$. Le profil de vent incident pour les deux configurations est aussi représenté en noir en a,d. Le profil de vent en d, a cependant été multiplié par 3 pour plus de lisibilité.

se propagent vers le haut (Figure 5.1d). Comme évoqué dans le chapitre précédent, la composante significative des modes se réfléchissant vers le sol peut avoir un fort impact sur la traînée orographique (Figure 4.4), soulignant l'importance de la courbure du vent incident dans la dynamique du système. Si l'on regarde maintenant le champ d'ondes lorsque la stabilité de l'écoulement diminue ($J = 0.7, 0.2$), la propagation verticale est progressivement atténuée et la réponse de l'écoulement est très différente suivant le cas considéré. Dans le cas avec cisaillement constant, l'écoulement suit doucement la pente du relief (Figure 5.1b et c), comme on peut s'y attendre dans le cas d'écoulement faiblement stratifié. A l'inverse, dans le cas avec cisaillement variable, le champ de vitesse verticale met en évidence la propagation d'ondes piégées en aval jusqu'à $\bar{x} = 30$, toujours associées à des ondes se propageant verticalement au-dessus de la montagne (Figure 5.1e). Ces ondes piégées sont caractérisées par des lignes de phase verticales et sont progressivement dissipées en aval, dans la couche cisailée proche de la surface. Enfin, la comparaison entre les Figures 5.1e et 5.1f montre que la diminution de la stratification finit par inhiber la propagation verticale des ondes de gravité, les ondes piégées deviennent presque barotropes. On remarque que l'étendue de la propagation des ondes piégées en aval est presque multipliée par deux lorsque la stabilité diminue (Figure 5.1f), cet effet est dû, en partie, à l'augmentation de la longueur d'onde des modes piégés. Pour résumer, la Figure 5.1 montre que la courbure du vent incident ne contrôle pas seulement la quantité de modes piégés dans l'écoulement mais permet aussi la propagation d'ondes piégées en aval dans le cas d'écoulement faiblement stratifié.

5.3 Configuration du MITgcm

Tout au long de ce chapitre, les résultats sont comparés à ceux obtenus avec des simulations non linéaires issues du MITgcm (section 2.6) dans une configuration similaire. Pour ce faire, la montagne est représentée par une Gaussienne définie par l'équation (2.2) avec $L = 1$ km, $H = 150$ m et donc $S = 0.15$. La montagne est centrée en $x = 30$ km et la taille du domaine horizontal est de 100 km pour pouvoir visualiser la propagation des ondes piégées en aval. La résolution horizontale varie entre 205 m proche de la topographie jusqu'à 705 m au bord du domaine. Le vent horizontal et la température sont relaxés vers leur profil initial à travers une couche d'amortissement sur les bords latéraux. La grille verticale a une résolution de 11 m proche de la surface et de 830 m à $z = 50$ km, *i.e.* au sommet du domaine vertical. Une couche d'amortissement est aussi mise en place pour $z > 15$ km afin d'éviter aux ondes de gravité se propageant verticalement de se réfléchir au sommet du domaine. L'écoulement est défini par les équations (2.1) avec $u_{0z} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ et $d = 500, 1000$ ou 2000 m impliquant $D = 0.5, 1$ ou 2 . Pour chaque simulation, le gradient vertical de densité est constant et contraint par la valeur de J , (Eqs. (2.12)). On a par exemple $N^2 = 10^{-8} \text{ s}^{-2}$ pour $J = 0.01$ et $N^2 = 10^{-5} \text{ s}^{-2}$ pour $J = 10$. Une condition de non glissement est imposée aux vitesses horizontales et verticales (Eqs. (2.8)). De plus, la température à la surface de la topographie est maintenue constante en imposant un flux à la surface tel que $T = 0^\circ \text{ C}$. Les coefficients horizontaux de diffusion et de viscosité pour la température et la vitesse sont nuls. Dans la direction verticale ils sont respectivement fixés à $1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ et $0.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, on a donc $P_r = 2$. Enfin, le modèle est intégré dans le temps jusqu'à atteindre un état stationnaire, généralement 24 h sont nécessaires. Le pas de temps utilisé est de 0.2 s, une valeur choisie afin de limiter les instabilités numériques.

5.4 Sensibilité des ondes piégées à la stabilité et à la hauteur de la couche limite

Le mécanisme impliqué dans le développement d'ondes piégées en aval de la topographie dans les cas faiblement stratifiés a déjà été mis en évidence dans L16, puis comparé à des simulations non linéaires dans le chapitre 3. Bien que le cadre théorique de cette étude soit proche de L16, il est important ici de souligner deux différences majeures. La première est que dans L16, la dynamique est non visqueuse et les effets de la viscosité dans la couche limite de surface ne sont pas considérés. La deuxième concerne les variations de la hauteur de la couche limite (D) et de la stabilité de l'écoulement (J). En effet, ici, l'impact de ces paramètres peut être déterminé indépendamment, ce qui n'est pas le cas dans L16 où la stabilité est maintenue constante, les variations du nombre de Richardson étant induites par la modification de D (*i.e.* d dans L16). Afin d'évaluer

l'impact de ces deux paramètres importants de la couche limite, la Figure 5.2 représente les profils horizontaux de vitesse verticale à $\bar{z} = D$. Chaque graphique correspond à une valeur différente de D et la stabilité croît du haut vers le bas. Ces profils sont aussi comparés avec ceux obtenus avec les simulations non linéaires du modèle MITgcm en gris sur la Figure 5.2.

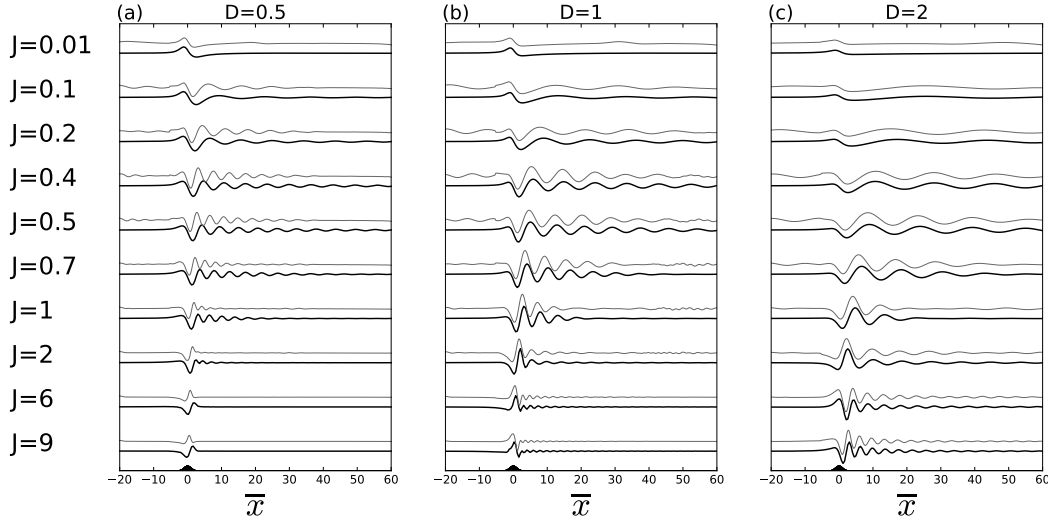


FIGURE 5.2 – Profils horizontaux de vitesse verticale à $\bar{z} = D$ pour $S = 0.15$, et $\bar{\delta} = 0.1$. Chaque graphique et chaque ligne correspondent respectivement à une valeur différente de D et de J . Les profils issus du modèle MITgcm sont représentés en gris.

La Figure 5.2 montre tout d'abord que quelle que soit la valeur de D , les écoulements peu stratifiés ($J < 1$), induisant une absorption plus faible des ondes de gravité à la surface, favorisent le développement des ondes piégées en aval dans le modèle théorique comme dans le MITgcm. Bien que la distance de propagation en aval soit plus faible comparée au cas étudié dans L16, cela ne remet pas en cause ces résultats puisque dans L16 la dynamique était non visqueuse, produisant de pures ondes piégées, *i.e.* leur amplitude ne diminue pas lors de leur propagation en aval. Ainsi, ces résultats renforcent la théorie développée dans L07 et L16 en montrant que l'absorption due à la présence d'un niveau critique à la surface joue encore un rôle non négligeable dans la dynamique des ondes piégées même lorsque les effets dissipatifs de la couche limite sont en partie représentés.

Cependant, le raisonnement évoqué précédemment explique mal la quasi absence d'ondes piégées pour les écoulements neutres *i.e.* pour $J = 0.01$ sur la Figure 5.2. Pour expliquer ce cas particulier, il est important de rappeler que d'après L16, les modes piégés correspondent aux modes neutres des instabilités de KH et par conséquent vérifient, en utilisant le formalisme de ces travaux,

$$\bar{k}^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4J}}{2D^2} \text{ lorsque } J < 1/4. \quad (5.1)$$

La Figure 5.3a représente le nombre d'onde piégé $\bar{k}$ en fonction de J pour $D = 0.5$ (gris clair), $D = 1$, (gris), $D = 2$ (noir) ainsi que le nombre d'onde dominant forcé par la montagne $\bar{k}_D = 1$, (noir pointillés). On remarque clairement que pour les écoulements peu stratifiés, quelle que soit la hauteur de la couche limite, $\bar{k} \leq 0.2 \ll \bar{k}_D$, *i.e.* les modes piégés ne sont pas beaucoup excités par la topographie, et par conséquent les ondes piégées sont peu présentes. Ce mécanisme explique aussi pourquoi les ondes piégées deviennent plus intense lorsque J augmente jusqu'à environ 0.25 quelle que soit la valeur de D ; $\bar{k}$ s'approche alors de k_D .

Pour résumer, la Figure 5.3a montre que pour des écoulements faiblement stratifiés ($J < 0.05$), dans le cas de montagne suffisamment large ($\bar{k}_D < 0.3$), la hauteur de la couche limite a peu d'influence sur les modes piégés, tandis que pour des montagnes plus étroites ($\bar{k}_D > 0.7$) les ondes piégées sont favorisées dans le cas d'une hauteur de couche limite inférieure à L . Ainsi, contrairement au cas classique détaillé dans la section 1.4.2, ici une grande valeur de D ne favorise pas systématiquement l'apparition d'ondes piégées.

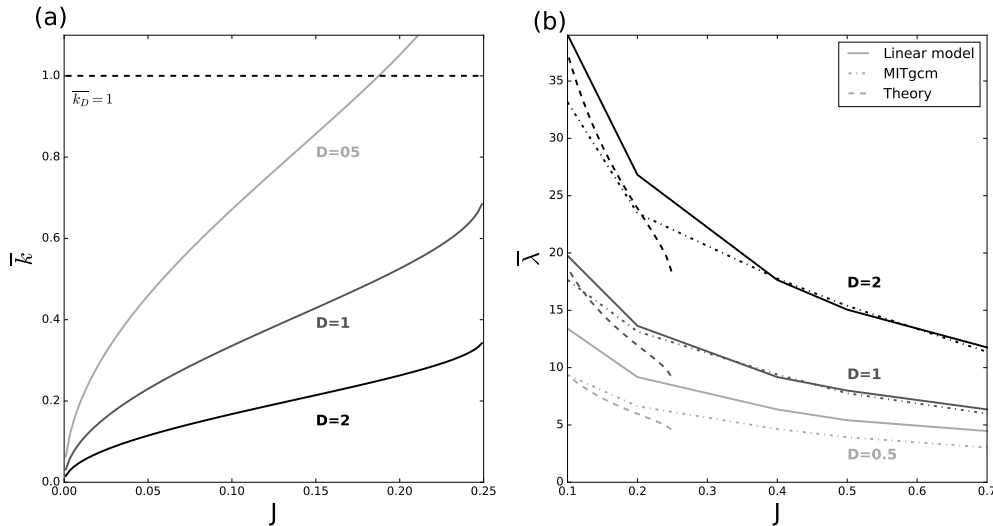


FIGURE 5.3 – (a) : Modes piégés d'après l'équation (5.1) en fonction de la stabilité pour $D = 0.5; 1; 2$. Le nombre d'onde dominant $\bar{k}_D$ est aussi représenté en tirets noirs. (b) : Longueur d'onde horizontale des ondes piégées en fonction de J , calculée à partir de l'équation (5.1) (tiret), du modèle linéaire (traits pleins) et du MITgcm (tirets-points). Dans (a) et (b) chaque nuance de gris correspond à une valeur différente de D .

Enfin, si l'on revient sur la Figure 5.2, on remarque que des écoulements très stratifiés associés à une hauteur de couche limite suffisamment épaisse *i.e.* $D \geq 1$, sont aussi caractérisés par un signal ondulatoire en aval, par exemple Figure 5.2c pour $J = 9$. Pour comprendre l'origine de ce signal en aval rappelons-nous que la dynamique non visqueuse dans ce cas est contrôlée par l'équation (2.24), soit,

$$\bar{\mathbf{w}}_{zz} + \left[\frac{J}{\bar{u}_0^2} + \frac{2}{D^2} \left(1 - \frac{\bar{u}_0^2}{D^2} \right) - \bar{k}^2 \right] \bar{\mathbf{w}} = 0, \quad (5.2)$$

et par conséquent le nombre de modes piégés augmente avec D . Ainsi, pour de fortes stratifications, et des grandes valeurs de D , plus d'ondes peuvent se propager verticalement et sont piégées dans l'écoulement. On peut alors supposer que le signal ondulatoire présent en aval est provoqué par des ondes piégées réfléchies vers la surface où elles sont absorbées (voir aussi Figure 5.1a). Pour vérifier cette hypothèse, on peut comparer le nombre d'onde observé sur la Figure 5.2c ($\bar{k}_{obs}$) avec celui des ondes piégées au sommet de la couche limite, c'est à dire les modes piégés lorsque $\bar{u}_0 = D$, soit d'après l'équation (5.2) $\bar{k} = J/D^2$. Par exemple pour $J = 2$, le nombre d'onde observé vaut $\bar{k}_{obs} \sim 0.7$ et $J/D^2 = 0.5$. Cependant, lorsque J augmente de manière significative, de moins en moins de modes sont piégés et cette correspondance n'est plus vraie, on a par exemple pour $\bar{k}_{obs} \sim 1.6$ et $J/D^2 = 2.2$. Il est important cependant de noter que la distance sur laquelle se dissipent ces ondes est courte par rapport aux cas faiblement stratifiés.

Finalement, les variations de la longueur d'onde horizontale des ondes piégées pour différentes stratifications et hauteurs de couche limite sont représentées sur la Figure 5.3b. Elles sont calculées à partir de l'équation (5.1) et des deux modèles numériques, les nuances de gris différencient les valeurs de D et le style de trait est associé au modèle utilisé. Les principales variations de la longueur d'onde des modes piégés esquissées par les Figures 5.1 et 5.2 apparaissent plus clairement. Tout d'abord, on remarque que les deux modèles et la théorie donnent des résultats similaires (comparer chaque style de trait de la même couleur). La Figure 5.3b montre que la stabilité et la courbure du vent incident ont des effets opposés sur la longueur d'onde des modes piégés. En effet, quel que soit J , l'augmentation de D induit systématiquement une augmentation de la longueur d'onde tandis que celle-ci tend à diminuer pour des écoulements plus stables, en tout cas jusqu'à $J = 0.25$. On remarque aussi que le modèle linéaire (tirets-point) sous estime la longueur d'onde pour les petites valeurs de D . Cette différence, particulièrement visible pour $D = 0.5$ peut être due au fait que lorsque D diminue, les domaines de validité dans la direction verticale des solutions visqueuses et non visqueuses peuvent se recouper, on peut alors s'interroger sur la pertinence de l'approximation uniforme. Cet aspect explique aussi pourquoi les simulations pour $D < 0.5$ ne sont pas considérées dans ces travaux (voir aussi section 2.4).

Les résultats détaillés dans cette section corroborent d'autres études théoriques et observationnelles comme Ralph et al. (1997) où l'augmentation de la hauteur de la couche limite en journée induit une augmentation de la longueur d'onde des modes piégés. D'autre part, le fait que les modes piégés en aval soient contrôlés par le même mécanisme que dans L16, étaye aussi les résultats de Jiang et al. (2006) montrant que la dissipation des ondes piégées due à la dynamique visqueuse dans la couche limite influe peu sur les modes piégés.

5.5 Traînée orographique

Dans le paragraphe 5.4 nous avons analysé sous quelles conditions des ondes piégées pouvaient être forcées par le relief. Ici, les effets potentiels de ces ondes sur la traînée orographique au sol et sur le flux de quantité de mouvement émis au-dessus de la couche limite de surface sont analysés. Pour faciliter la comparaison avec le cas avec cisaillement constant où, nous l'avons vu, les ondes piégées ne sont pas présentes, les diagnostics présentés ici sont normalisés en utilisant la même expression du prédicteur de la traînée orographique présenté dans la section 4.3, Eq (4.6) à savoir,

$$Dr_P = \text{Max} \left(1, \sqrt{J} \right) \bar{\delta}(1) S^2 / 2.$$

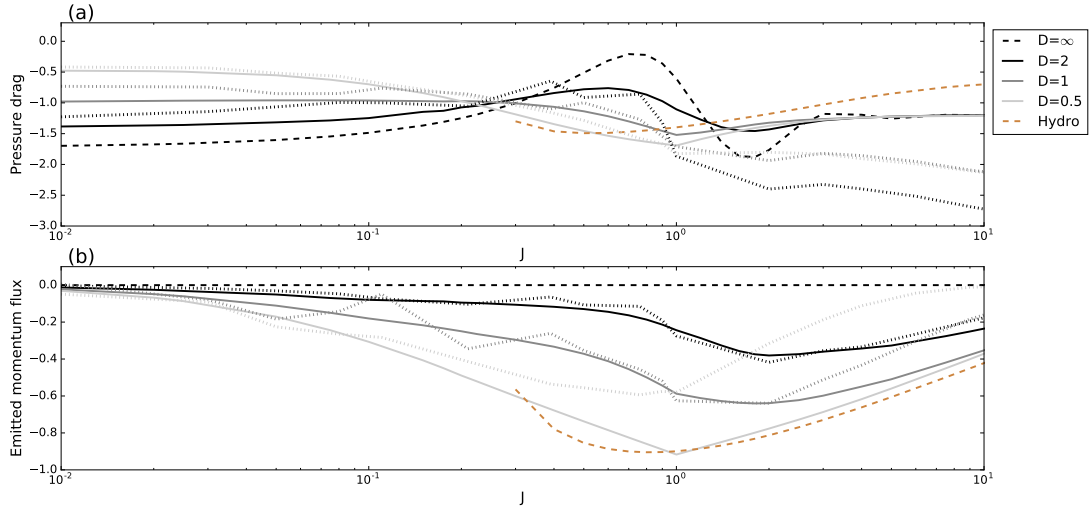


FIGURE 5.4 – Traînée orographique à la surface (a) et flux vertical de quantité de mouvement émis pour $z \gg \bar{\delta}$ (b), pour $S = 0.15$. Les deux quantités sont normalisées par Dr_P . Le style de trait correspond à différentes valeurs de D exceptée la ligne tiretée-marron qui représente les résultats issus des simulations hydrostatiques (section 4.2). Les courbes en pointillés représentent les simulations du MITgcm.

La Figure 5.4a représente la traînée orographique à la surface normalisée par Dr_P pour $S = 0.15$ en fonction de J . Comme dans la section précédente, les nuances de gris différencient les valeurs de D , les courbes tiretées représentent respectivement les cas avec cisaillement constant sous l'approximation hydrostatique (marron) et non hydrostatique (noir). Premièrement, on remarque que l'augmentation de la courbure, *i.e.* la diminution de D , tend à atténuer les variations de la traînée orographique à la surface autour de $J = 1$ par rapport au cas avec cisaillement constant. Bien que les situations pour lesquelles $J < 1$ et $D \leq 1$ favorisent l'apparition d'ondes piégées, rien ne laisse à penser que les variations de la traînée orographique soient dues à ces ondes, essentiellement car elles influencent majoritairement le champ de pression en aval du relief plutôt que directement sur la pente de celui-ci. L'atténuation de ces variations peut être

expliquée en rappelant qu'à l'origine celles-ci sont dues à un effet de résonance entre les ondes de gravité se propageant vers le haut et vers le bas, proche de la pente aval de la montagne. Cet effet devient significatif lorsque l'altitude du point tournant du nombre d'onde dominant s'approche de la largeur caractéristique du relief L , une situation observée pour $J \simeq 1$ (section 4.3). Dans le cas considéré ici, toujours d'après l'équation (5.2), l'altitude du point tournant le plus élevé, qui correspond aussi à la valeur maximum du vent incident, est bornée par D . Par conséquent, lorsque D devient proche ou inférieur à 1, les ondes associées au nombre d'onde dominant, $\bar{k}_D = 1$, ne seront pas réfléchies vers la surface, une situation qui atténue fortement l'effet de résonance comparé au cas avec cisaillement constant. Plus précisément, lorsque D décroît, les interactions destructives et donc la diminution de l'amplitude de la traînée orographique disparaît pour $0.1 < J < 1$. À la place, la traînée augmente doucement jusqu'à des valeurs comparables au cas avec cisaillement constant pour $J \simeq 1$. Ainsi, pour $D \approx 1$, une valeur typique de la hauteur de la couche limite, le prédictor de la traînée orographique apparaît plus fiable pour une gamme importante de stratification.

Cependant, comme montré dans le chapitre précédent, même lorsque tous les modes peuvent se propager verticalement (section 4.2), la traînée orographique de surface sur-estime environ de moitié la valeur du flux de quantité de mouvement émis au-dessus de la couche limite de surface, ce dernier étant une mesure plus quantitative de l'impact des montagnes sur l'écoulement moyen à plus haute altitude. Ici, on s'intéresse donc à la variation de ce flux émis en fonction de la courbure du vent incident et de la stratification, y compris pour des écoulements faiblement stratifiés, une situation qui ne pouvait pas être analysée dans la section 4.2.

Pour cela, cette quantité, toujours normalisée par Dr_P , est représentée sur la Figure 5.4b suivant les mêmes conventions que sur la Figure 5.4a. L'augmentation de D se traduit logiquement par un nombre plus important de modes piégés, les fortes valeurs de D sont donc associées à un flux émis plus faible. D'autre part, dans le cas avec cisaillement variable, quelque soit D , la valeur émise du flux de quantité de mouvement présente toujours un minimum autour de $J = 1$. Lorsque J augmente, de plus en plus de modes peuvent se propager verticalement induisant une augmentation du flux de quantité de mouvement. De plus, on pourrait s'attendre, toujours d'après l'équation (5.2), à ce que l'augmentation de J renforce simplement le flux émis en limitant le nombre de modes piégés dans l'écoulement. Cependant, dans le cas d'écoulement plus stratifié, les ondes se propageant verticalement ont aussi une longueur d'onde réduite et de ce fait oscillent plus rapidement, elles sont dans ce cas plus dissipées lorsqu'elles se propagent à travers la couche intérieure (section 4.3). Ce mécanisme explique la décroissance du flux de quantité de mouvement pour des valeurs de J supérieures à 1. Enfin, on remarque que, du moment que le nombre d'onde principal n'est pas piégé dans l'écoulement, *i.e.* pour

$D < 1$, la traînée orographique de surface, tout comme le flux émis de quantité de mouvement, deviennent, dans le cas d'un cisaillement variable, similaires à leur « version » hydrostatique.

5.6 Traînée due aux ondes dans des écoulements faiblement stratifiés

On a vu dans la partie précédente que la courbure du vent incident pouvait moduler le forçage dû aux montagnes à haute altitude. Le but de cette partie est d'explicitier les interactions ayant lieu proche de la surface, *i.e.* là où la dissipation visqueuse devient significative, en fonction de la stratification de l'écoulement. On rappelle que dans ce cas, la conservation de la quantité de mouvement peut se mettre sous la forme,

$$\overline{u} \overline{w} = -\overline{p} \partial_x \overline{\eta} - \overline{\nu} (\overline{\eta} \partial_z^2 \overline{u}), \quad \text{avec} \quad \overline{z} \partial_x \overline{\eta} = \overline{w}. \quad (5.3)$$

Comme dans la Figure 4.3b la Figure 5.5 représente les profils verticaux des trois termes de l'équation ci-dessus à savoir, le flux de quantité de mouvement vertical (trait noir plein), la contrainte due au gradient de pression horizontal (gris) et la contrainte visqueuse (pointillés noir) pour différentes valeurs de J avec $S = 0.15$. La première ligne correspond au cas avec cisaillement constant et la seconde au cas avec cisaillement variable pour $D = 1$.

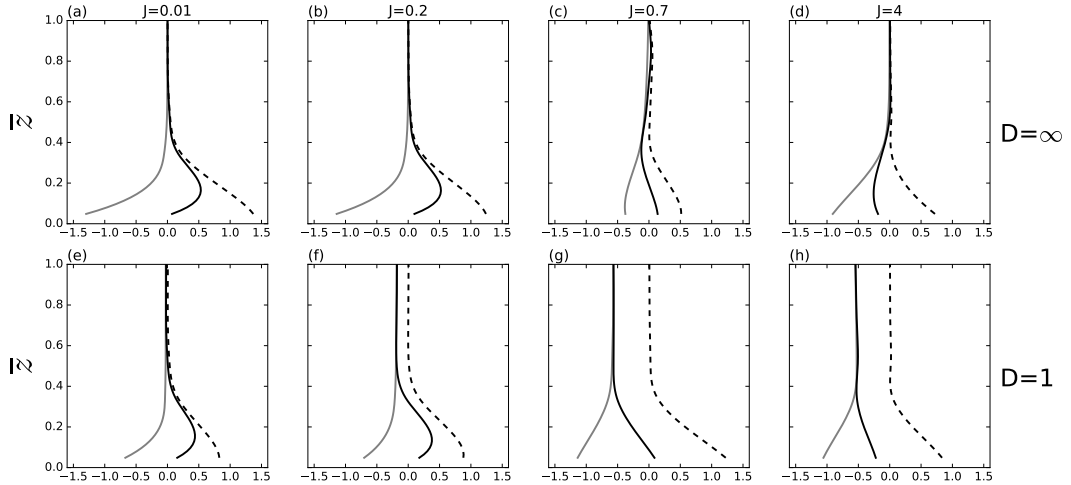


FIGURE 5.5 – Profils verticaux de quantité de mouvement (trait plein noir), contrainte le long des lignes de courant pour chaque altitude due à la différence de pression (gris) et aux termes visqueux (pointillés). Tous les profils sont normalisés par Dr_P avec $S = 0.15$. Quatre valeurs de J sont représentées, (a,e) : $J = 0.01$, (b,f) : $J = 0.2$, (c,g) : $J = 0.7$, (d,h) : $J = 4$. La première et la seconde ligne correspondent respectivement au cas avec cisaillement constant et avec cisaillement variable pour $D = 1$.

Les deux différents cas représentés sur la Figure 5.5 présentent trois caractéristiques communes. Tout d'abord, quelle que soit la stratification de l'écoulement, la valeur du flux de quantité de mouvement à la surface est toujours proche de zéro, la traînée orographique de surface étant, à cet endroit, presque entièrement équilibrée par les contraintes visqueuses. Ensuite, on remarque que le flux de quantité de mouvement présente un extremum, toujours situé dans la couche limite de surface, positif pour des écoulements faiblement stratifiés et devenant négatif lorsque J augmente.

Dans des situations presque neutres, la courbure du vent incident n'influe pas de manière significative sur les profils verticaux de flux de quantité de mouvement (Figure 5.5 a,e). Le flux augmente jusqu'à atteindre un maximum, induisant un freinage de l'écoulement moyen localisé dans la partie inférieure de la couche intérieure, puis produit une accélération au-dessus, associée à la diminution de $\overline{u\overline{w}}$. À mesure que la stabilité augmente, l'amplitude du flux de quantité de mouvement émis au-dessus de la couche intérieure augmente dans le cas avec cisaillement variable (Figure 5.5 f,g) tandis que dans le cas avec cisaillement constant il reste nul, traduisant le fait que tous les modes sont évanescents lorsque $z \rightarrow \infty$. Par conséquent, dans les deux cas l'écoulement moyen est accéléré dans la partie supérieure de la couche limite mais dans le cas d'un cisaillement variable il est aussi potentiellement freiné à plus haute altitude, là où les ondes de gravité se propageant verticalement déferlent (Figure 5.5 b,f). D'autre part, une stabilité plus forte induit un changement de signe des extrema de $\overline{u\overline{w}}$, l'écoulement est alors accéléré proche de la surface puis freiné au sommet de la couche intérieure dans le cas avec cisaillement constant ou à des altitudes plus élevées dans le cas avec cisaillement variable, (Figure 5.5 c,g). Cette transition entre un extremum positif puis négatif à mesure que la stabilité augmente a déjà été mise en évidence dans la section 4.3 pour le cas avec cisaillement constant. Cependant, tandis que cette transition apparaît autour de $J \simeq 1$ dans le cas avec cisaillement constant (Figure 5.5 c), lorsque la courbure du profil de vent incident devient significative, cette transition semble avoir lieu pour des écoulements moins stables dynamiquement, *i.e.* pour $J < 1$ (Figure 5.5 f).

Dans le but d'illustrer l'influence de la courbure du profil de vent incident sur cette transition, la Figure 5.6a représente les variations des extrema du profil vertical de flux de quantité de mouvement en fonction de J et pour différentes valeurs de D , toujours normalisés par Dr_P . On voit tout d'abord que, quelle que soit la valeur de D , les extrema varient globalement de la même manière, ils sont d'abord positifs dans les cas peu stables (associés à une traînée orographique turbulente) puis négatifs dans les cas plus stables (due à la propagation verticale des ondes de gravité forcées par le relief).

Comme pressenti en analysant la Figure 5.5, la Figure 5.6a montre que la transition entre les deux régimes apparaît pour des écoulements de moins en moins stables à mesure que D diminue. Par exemple, pour $D = 0.5$ cette transition a lieu pour $J \simeq 0.06$, comparé à $J \simeq 1$ dans le cas avec cisaillement constant. Les écoulements faiblement

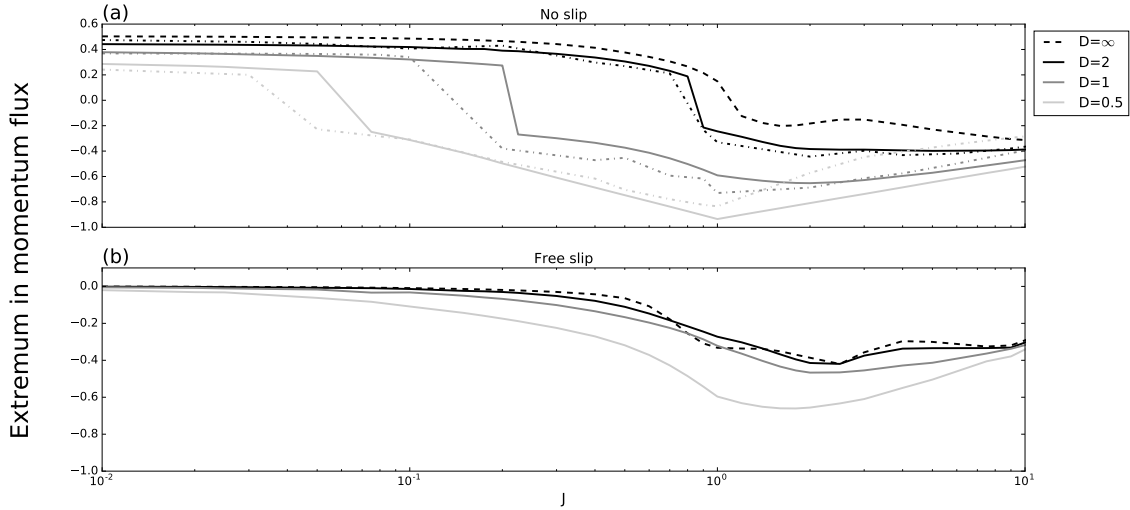


FIGURE 5.6 – Extrema du flux vertical de quantité de mouvement normalisés pour différentes valeurs de D et dans le cas avec cisaillement constant (tireté), pour $S = 0.15$. Avec une condition au sol (a) de non glissement, (b) de glissement. Dans ce dernier cas, le flux vertical de quantité de mouvement est seulement dû aux ondes de gravité, il est donc normalisé par $\sqrt{J\delta}(1)S^2/2$. Les valeurs issues des simulations du MITgcm sont représentées par les courbes pointillées-tiretées dans le cas (a).

stratifiés supportent généralement peu la propagation verticale des ondes de gravité et de ce fait ne sont pas accélérés près de la surface. Cependant, ces situations peu stables, associées à de faible valeur de D , sont aussi des conditions favorisant l'apparition des ondes piégées, (section 5.4). Ainsi, afin de déterminer si les ondes piégées peuvent, dans ces conditions, produire une traînée à bas niveau, l'analogie de la Figure 5.6a, mais utilisant une condition à la limite de glissement au sol, est représentée par la Figure 5.6b. Les conditions aux limites au sol pour $\bar{u}$ et $\bar{w}$ s'écrivent alors

$$\partial_z \bar{u}(\bar{x}, \bar{h}) = 0, \quad \bar{w}(\bar{x}, \bar{h}) = \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{h}. \quad (5.4)$$

Il est important de noter que ces nouvelles conditions au sol ne changent pas significativement le champ d'ondes (non représenté). Par contre, elles permettent d'évaluer la contribution nette des ondes piégées à la traînée exercée à bas niveau, puisque la traînée turbulente est nulle par construction. Un résultat important est que les ondes piégées produisent une traînée turbulente dans la couche intérieure dans le cas d'écoulement faiblement stratifié. Néanmoins, la Figure 5.6 montre clairement que cette contribution est en moyenne trois fois plus petite que la traînée turbulente produite dans le cas de simulation avec une condition de non glissement au sol et, de ce fait, ne peut pas être responsable du déplacement de cette transition.

Une explication plus plausible pour justifier le déplacement de cette transition provient du fait que le flux de quantité de mouvement vertical est lié à l'amplitude de la traînée orographique à la surface via les effets dissipatifs agissant dans la couche intérieure

(Eq (5.3)). Dans la section 5.5 on a montré que, dans le cas avec cisaillement variable, les variations de l'amplitude de la traînée orographique de surface lorsque $J \simeq 1$ sont atténuées pour $D \leq 1$. En particulier, on voit que dans ces situations l'amplitude de la traînée orographique reste à peu près constante et augmente légèrement autour de $J = 1$ (Fig 5.4a), au lieu de diminuer fortement comme dans le cas avec cisaillement constant. Ce comportement peut alors expliquer en partie pourquoi la traînée orographique due aux ondes domine pour des cas moins stratifiés. En effet, lorsque D diminue moins d'ondes sont piégées, l'effet de résonance est limité et l'amplitude de la traînée orographique reste constante, elle domine alors la contrainte visqueuse. Le flux vertical de quantité de mouvement résultant dans la couche intérieure est alors négatif. Les valeurs de D contrôlent dans une certaine mesure l'amplitude de la traînée orographique à la surface et donc, indirectement, l'amplitude du flux de quantité de mouvement dans la couche intérieure.

5.7 Conclusion

La représentation de la traînée orographique de surface est une caractéristique essentielle des modèles numériques de climat et de prévision du temps (Sandu et al., 2016; Pithan et al., 2016). Les principaux mécanismes contribuant à cette quantité sont respectivement la traînée turbulente engendrée par la dynamique de la couche limite (Beljaars et al., 2004) et la traînée due aux phénomènes de blocage et à la propagation des ondes de gravité forcées par le relief (Lott and Miller, 1997a). Ces deux sources de contraintes sur l'écoulement moyen sont généralement associées à des reliefs d'échelle différente par des choix arbitraires, la traînée turbulente et la traînée due à la propagation des ondes de gravité étant respectivement associées aux reliefs de taille caractéristique inférieure et supérieure à 5 km.

Cependant, il est apparu que la plupart des paramétrisations sous-estiment la contrainte orographique à bas niveau (Vosper et al., 2018), particulièrement dans le cas d'une couche limite stable, *i.e.* dans le cas où la stratification permet la propagation d'onde de gravité forcées par la topographie. Certaines études suggèrent que la traînée induite par la propagation des ondes de gravité forcées par le relief de petite échelle pourrait contribuer de manière significative à la traînée orographique dans la couche limite (Steenefeld et al., 2008; Tsiringakis et al., 2017). Plus précisément, une hypothèse intéressante consiste à supposer que ce manque de traînée à bas niveau pourrait provenir de la dissipation d'ondes piégées. Néanmoins, la présence de la couche limite peut moduler les interactions entre les ondes piégées et l'écoulement moyen et de ce fait nécessite d'être prise en compte.

Dans ce contexte, l'étude présentée dans ce chapitre avait pour objectif de caractériser l'impact de la topographie sur l'écoulement moyen en présence d'ondes piégées dans le

cas où la couche limite est représentée de manière simplifiée avec un coefficient de viscosité constant.

Dans un premier temps, nous avons montré que l'augmentation de la courbure du profil de vent incident, en plus de contrôler la proportion de modes verticaux piégés dans l'écoulement, permet la propagation d'ondes piégées en aval du relief dans des écoulements faiblement stratifiés, *i.e.* pour $J < 1$. Ces résultats complètent la théorie développée dans L07 et L16 en montrant que l'absorption due à la présence d'un niveau critique à la surface joue encore un rôle non négligeable dans la dynamique des ondes piégées même lorsque les effets dissipatifs de la couche limite sont en partie représentés. On montre aussi que dans ces situations, la proportion de modes piégés est modulée par la hauteur de la couche limite pour des montagnes suffisamment étroites ($k_D > 0.7$, Figure 5.3a).

Nous avons vu dans le chapitre 4 que la traînée orographique à la surface peut être correctement estimée à l'aide de la théorie linéaire à condition de considérer le vent incident à l'altitude où les termes dissipatifs équilibrent les termes d'advection *i.e.* $\bar{z} \simeq \bar{\delta}$. Lorsque tous les modes sont piégés dans l'écoulement, cas d'un cisaillement vertical constant, l'amplitude de la traînée orographique à la surface est fortement modulée par la stratification de l'écoulement autour de $J \simeq 1$. Dans le cas d'un cisaillement variable, la présence d'ondes piégées pour $J < 1$ n'affecte pas l'amplitude de la traînée orographique à la surface. À l'inverse, les variations de celle-ci sont largement atténuées lorsque la courbure du vent incident augmente c'est à dire lorsque D diminue (Figure 5.4a). Un autre résultat important est que la traînée orographique à la surface, dans ce cas, devient similaire au cas hydrostatique à partir du moment où $D \leq 1$, *i.e.* lorsque le nombre d'onde dominant k_D n'est pas piégé dans l'écoulement. Cette caractéristique du système justifie en partie l'utilisation de l'approximation hydrostatique pour la construction de paramétrisation des effets de la topographie sur l'écoulement de grande échelle.

Toutefois, on montre aussi que, quelle que soit la stabilité de l'écoulement, la dissipation dans la couche limite équilibre la traînée orographique à bas niveau et le profil vertical de quantité de mouvement est alors une mesure plus pertinente de l'impact du relief sur l'écoulement moyen. La courbure du profil de vent incident, en contrôlant la proportion de modes piégés, contrôle aussi la valeur émise du flux vertical de quantité de mouvement et donc les effets potentiels du relief sur l'écoulement moyen à plus haute altitude. Quelle que soit D , cette valeur émise présente un maximum autour de $J = 1$, car pour des écoulements plus stratifiés les ondes de gravité émises sont plus dissipées dans la couche intérieure. D'autre part, la stratification influence significativement le signe de l'extremum de $\overline{u\bar{w}}$ dans la couche intérieure, l'écoulement moyen est freiné à la surface et accéléré au sommet de la couche intérieure dans les cas neutres, la situation étant inversée pour les cas stratifiés. Dans le chapitre 4, on montre que cette transition a lieu pour $J \simeq 1$. Dans le cas d'un cisaillement variable, cette transition devient sensible à

la courbure du vent incident et à mesure que D diminue elle apparaît pour des écoulements moins stables dynamiquement. Ce résultat est important dans le sens où il étend le domaine pour lequel les ondes de gravité expliquent habituellement la traînée orographique de surface. Des simulations complémentaires avec une condition de glissement à la surface montrent cependant que le déplacement de cette transition ne semble pas être dû à la propagation d'ondes piégées favorisées dans des écoulements peu stratifiés.

De manière générale, les ondes piégées observées dans cette étude, c'est à dire les ondes résultant d'instabilité due au cisaillement vertical de vent, ne semblent pas avoir un impact significatif sur la traînée orographique à la surface ni sur le profil vertical de quantité de mouvement. Cependant, ces conclusions sont à mettre en relief avec les conditions de cette étude notamment vis à vis de la représentation de la couche limite à l'aide d'un coefficient de viscosité constant qui, de fait, surestime la dissipation des ondes dans la couche intérieure.

Chapitre 6

Conclusions et Perspectives

Ce dernier chapitre rappelle les principaux résultats présentés dans ces travaux tout en présentant quelques perspectives de recherche associées.

6.1 Paramétrisation des ondes piégées et représentation de la couche limite

L'influence de la topographie sur la circulation atmosphérique est une composante essentielle de la dynamique de l'atmosphère, notamment car elle impacte aussi bien les échelles locales que globales via le forçage d'ondes internes de gravité. Dans ces travaux, nous avons examiné les interactions entre les ondes piégées forcées par la topographie et la couche limite atmosphérique dans un cadre linéaire avec et sans effets dissipatifs. La dynamique des ondes piégées considérées ici est fortement liée à la stabilité de l'écoulement lorsque le vent est faible près de la surface, *i.e.* lorsque les ondes piégées possèdent un niveau critique au sol. Dans ce cas, elles sont favorisées lorsque $J < 0.25$ et leur amplitude ainsi que leur longueur d'onde sont modulées par le forçage orographique et la hauteur de la couche limite. Bien qu'exerçant une contrainte sur l'écoulement moyen à bas niveau, la présence des ondes piégées ne modifie pas de façon significative les interactions entre le relief et l'écoulement moyen, essentiellement car leur traînée est faible comparée à la traînée turbulente due à la dynamique de la couche limite ou à la traînée due aux ondes de gravité non piégées.

Cependant, dans ces travaux, la couche limite est représentée de manière très simplifiée à l'aide d'un coefficient de viscosité constant ; par conséquent, les effets dissipatifs sont surestimés et les ondes piégées sont plus dissipées. D'autres études pour lesquelles (i) la couche limite n'est pas représentée, (ii) le piégeage des ondes est modélisé par une atmosphère à deux couches où le vent est constant dans chacune d'elle (section 1.4.2 et Teixeira et al. (2013a,b)), montrent que les ondes piégées peuvent avoir un impact significatif sur la traînée orographique. Il est donc difficile de conclure de manière définitive sur la nécessité de paramétrer l'effet des ondes piégées sur la traînée orographique dans les modèles de circulation générale.

Dans un premier temps, il serait intéressant de compléter ces résultats en calculant la composante horizontale du flux de pseudo-moment (F^x , Eq (2.14)) ; on aurait alors une estimation de la quantité de mouvement transférée en aval, à bas niveau, par les ondes piégées.

Une autre piste pour expliciter cette question serait de considérer le cas d'une atmosphère à deux couches, comme dans Teixeira et al. (2013a), en incluant les effets dissipatifs de la couche limite afin d'évaluer dans quelle mesure ces effets peuvent moduler l'influence des ondes piégées sur la traînée orographique. D'autre part, la dynamique des ondes de montagne est sensible à la représentation de la couche limite, notamment à la manière dont sont représentés les flux turbulents. Par exemple, Elvidge and Renfrew (2016) montrent que le mélange turbulent peut contribuer significativement au réchauffement de la masse d'air lors d'effet de Foehn. Il serait donc pertinent d'améliorer la représentation de ces flux en introduisant dans le formalisme adopté ici des fermetures turbulentes plus élaborées. Dans le cas de couche limite stable ou neutre, une fermeture locale, où les flux turbulents sont proportionnels aux gradients locaux, est plus adaptée. Les coefficients de proportionnalité (coefficient de viscosité turbulente ou de diffusion) sont alors analogues à une longueur de mélange (Prandtl, 1925), ils sont proportionnels au cisaillement de vent et à la variance des déplacements verticaux ; ils dépendent donc de l'altitude.

Enfin, les conditions aux limites à la surface peuvent aussi considérablement influencer l'amplitude des modes piégés. Mis à part la présence de niveau critique lorsque le vent horizontal est faible près du sol, la présence de flux de chaleur à la surface peut significativement modifier la dynamique en aval (Smith and Skillingstad, 2011). Il est donc également nécessaire d'évaluer comment ces conditions modulent l'effet des ondes piégées sur la traînée orographique.

6.2 Dynamique des ondes de montagne et transport dans la couche limite

La plupart des recherches portant sur les interactions entre la dynamique des ondes de montagne et la couche limite sont focalisées sur la quantification des flux verticaux et horizontaux de quantité de mouvement. Comme évoqué dans ces travaux, afin de quantifier l'effet des montagnes sur l'écoulement de grande échelle, deux mécanismes principaux sont considérés, à savoir : la traînée orographique turbulente dans la couche limite et la traînée due à la propagation des ondes de gravité.

Cependant, peu d'études sont dédiées à l'impact de la dynamique des ondes de montagne sur la dynamique de la couche limite. Pourtant, les conditions de couche limite stables à la fois inhibent la turbulence et permettent la propagation d'ondes de gravité forcées par la topographie. Tout comme dans la haute atmosphère, ces ondes peuvent déferler et/ou produire des cisaillements de vent horizontal (pouvant mener à des instabilités

dans l'écoulement), elles sont alors responsables du mélange turbulent dans la couche limite. Cette dynamique influence naturellement les flux de quantité de mouvement, les flux de chaleur mais aussi les flux de constituant comme les polluants, entre la surface, la couche limite et la troposphère libre¹.

Par exemple, dans Lott et al. (2020), on montre que pour des situations stables, les *downslope winds* peuvent pénétrer de manière significative dans la couche intérieure et contribuent donc aux échanges dans la couche limite. Le phénomène de rotor évoqué dans la section 1.4.1 est un autre exemple pouvant illustrer ces mécanismes de transport. Lorsque des ondes piégées de grande amplitude sont forcées par la topographie, le champ de pression résultant, associé à la friction près du sol, peut provoquer une re-circulation d'air sous les crêtes de l'onde. Les parcelles d'air sont soulevées en amont du rotor et il y a séparation de la couche limite. Ce mécanisme forme une zone de vorticité horizontale, très turbulente, perpendiculaire au vent moyen. De ce fait, les rotors contribuent aussi de manière importante aux mécanismes de transport entre la surface et la couche limite. Sous estimer ces interactions peut notamment induire des erreurs importantes dans les prévisions de la qualité de l'air ou des précipitations en présence de relief. Une question clé est donc de pouvoir quantifier la contribution des phénomènes contrôlés par les ondes orographiques (*downslope winds*, rotors... etc) aux échanges turbulents dans la couche limite en milieu montagneux.

  l'heure actuelle, la modélisation de la dynamique atmosphérique en milieu montagneux utilise des modèles non linéaires régionaux à haute résolution ou des modèles LES. Dans le premier cas, la couche limite est représentée à l'aide de fermetures turbulentes plus ou moins  labor es². Ces modèles sont assez réalistes à haute résolution mais nécessitent alors une puissance de calcul importante. De plus, la dynamique étant non linéaire, il est difficile de mettre en évidence les mécanismes d'interaction entre la couche limite et la dynamique des ondes de montagne. Dans le deuxième cas, les simulations LES sont capables de représenter la dynamique fine échelle de la couche limite mais ne représentent pas la dynamique des ondes de montagne. Enfin, ces deux approches ne sont pas directement utilisables de manière opérationnelle et les interactions entre ces deux dynamiques doivent être paramétrées.

L'utilisation de modèle théorique, comme présenté dans ces travaux, où la dynamique des ondes de montagne et de la couche limite interagissent de manière plus compréhensible semble indispensable pour mieux caractériser ces interactions. Dans un premier temps, on pourrait étudier comment la dynamique du modèle, en fonction de la stabilité de l'écoulement et du profil de vent incident, modifie la répartition d'un traceur (vapeur

1. Notez cependant que cette problématique fait partie des objectifs de recherche de la futur campagne de mesure TeamX (*Multi-scale transport and exchange processes in the atmosphere over mountains – programme and experiment*) prévue en 2023-2024 dans les Alpes (Rotach et al., 2020).

2. On peut par exemple citer les schémas de couche limite YSU (Hong et al., 2006) et MY (Mellor and Yamada, 1982) utilisés dans le modèle WRF, voir aussi section 3.3.1.

d'eau, aérosols, polluants...) initialement distribué de façon homogène ou non sur le domaine. Bien entendu, étant donné la simplicité de la représentation de la couche limite, les résultats devront être comparés avec des modèles régionaux haute résolution et des simulations LES. Ces comparaisons permettront d'évaluer à posteriori la contribution de la dynamique des ondes de montagne au transport dans la couche limite.

Annexe A

Bilan de pseudo-moment

La méthode générale pour établir le bilan d'action du système consiste à utiliser le formalisme de la dynamique Hamiltonienne. Cependant, dans notre cas, l'équation vérifiée par le pseudo-moment du système peut être établie en effectuant sur le système (2.11) les opérations suivantes :

$$\frac{\bar{b}}{J} \partial_{\bar{z}} (\text{Eq. 2.11a}) + \frac{\bar{\zeta}}{J} (\text{Eq. 2.11c}) \text{ avec } \bar{\zeta} = \partial_{\bar{z}} \bar{u} - \partial_{\bar{x}} \bar{w}.$$

En dérivant l'équation (2.11a) par rapport à $\bar{z}$ et en utilisant l'équation de conservation (2.11d), on obtient

$$\partial_{\bar{x}} [\bar{u}_0 \bar{\zeta} + \bar{b}] + \bar{u}_{0\bar{z}\bar{z}} \bar{w} = \bar{\nu} \bar{\Delta} \bar{\zeta} - \bar{\epsilon} \bar{\zeta}.$$

En multipliant par $\frac{\bar{b}}{J}$ et en intégrant par parties,

$$\partial_{\bar{x}} \left[\bar{u}_0 \frac{\bar{\zeta} \bar{b}}{J} + \frac{\bar{b}^2}{2J} \right] + \frac{\bar{b}}{J} \bar{u}_{0\bar{z}\bar{z}} \bar{w} - \frac{\bar{u}_0}{J} \bar{\zeta} \partial_{\bar{x}} \bar{b} = \bar{\nu} \bar{b} \frac{\bar{\Delta} \bar{\zeta}}{J} - \bar{\epsilon} \frac{\bar{b}}{J} \bar{\zeta}. \quad (\text{A.1})$$

D'autre part, $\frac{\bar{\zeta}}{J}$. Eq (2.11c) nous donne

$$\frac{\bar{u}_0}{J} \bar{\zeta} \partial_{\bar{x}} \bar{b} + \bar{\zeta} \bar{w} = \frac{P^{-1} \bar{\nu}}{J} \bar{\zeta} \bar{\Delta} \bar{b} - \bar{\epsilon} \frac{\bar{b}}{J} \bar{\zeta}. \quad (\text{A.2})$$

La somme des équations (A.1) et (A.2) s'écrit

$$\partial_{\bar{x}} \left[\bar{u}_0 \frac{\bar{\zeta} \bar{b}}{J} + \frac{\bar{b}^2}{2J} \right] + \frac{\bar{b}}{J} \bar{u}_{0\bar{z}\bar{z}} \bar{w} + \bar{\zeta} \bar{w} = \bar{\nu} \bar{b} \frac{\bar{\Delta} \bar{\zeta}}{J} + \frac{P^{-1} \bar{\nu}}{J} \bar{\zeta} \bar{\Delta} \bar{b} - 2\bar{\epsilon} \frac{\bar{b}}{J} \bar{\zeta}. \quad (\text{A.3})$$

En intégrant par parties et à l'aide de l'équation de continuité (2.11d)

$$\bar{\zeta} \bar{w} = \partial_{\bar{z}} (\bar{u} \bar{w}) + \partial_{\bar{x}} \left(\frac{\bar{u}^2 - \bar{w}^2}{2} \right).$$

De plus d'après (2.11c),

$$\frac{\bar{b}}{J} \bar{u}_{0\bar{z}\bar{z}} \bar{w} = -\bar{u}_0 \partial_{\bar{x}} \left(\frac{\bar{u}_{0\bar{z}\bar{z}} \bar{b}^2}{2J^2} \right) + \frac{\bar{b}}{J^2} P^{-1} \bar{\nu} \bar{\Delta} \bar{b} \bar{u}_{0\bar{z}\bar{z}} - \bar{\epsilon} \frac{\bar{u}_{0\bar{z}\bar{z}} \bar{b}^2}{J^2}.$$

En injectant les deux dernières équations dans (A.3) on retrouve la l'équation (2.14),

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{u}_0 A + \frac{\bar{b}^2}{2J} + \frac{\bar{u}^2 - \bar{w}^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\bar{u}\bar{w}) = \frac{\bar{\nu}}{J} \left(\bar{b} \Delta \bar{\zeta} + P^{-1} \Delta \bar{b} \left(\bar{\zeta} - \bar{b} \frac{\bar{u}_{0\bar{z}\bar{z}}}{J} \right) \right) - 2\bar{\epsilon} A, \quad (\text{A.4})$$

avec $A = \frac{\bar{\zeta}\bar{b}}{J} - \frac{\bar{u}_{0\bar{z}\bar{z}}\bar{b}^2}{2J^2}$.

Le bilan d'action dans le cas non hydrostatique avec un cisaillement de vent vertical constant (2.3) découle directement du résultat précédent en prenant $\bar{u}_0 = \bar{z}$ et donc $\bar{u}_{0\bar{z}\bar{z}} = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{z} \frac{\bar{\zeta}\bar{b}}{J} + \frac{\bar{b}^2}{2J} + \frac{\bar{u}^2 - \bar{w}^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\bar{u}\bar{w}) = \frac{\bar{\nu}}{J} (\bar{b} \Delta \bar{\zeta} + \bar{\zeta} P^{-1} \Delta \bar{b}) - 2\bar{\epsilon} \frac{\bar{\zeta}\bar{b}}{J}. \quad (\text{A.5})$$

Enfin, toujours dans le cas d'un cisaillement constant, l'approximation hydrostatique se traduit dans l'équation précédente en imposant $\partial_{\bar{x}} \bar{w} = 0$ et donc $\bar{\zeta} = \partial_{\bar{z}} \bar{u}$,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{z} \frac{\partial_{\bar{z}} \bar{u}}{J} \bar{b} + \frac{\bar{b}^2}{2J} + \frac{\bar{u}^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\bar{u}\bar{w}) = \frac{\bar{\nu}}{J} (\bar{b} \partial_{\bar{z}}^2 \partial_{\bar{z}} \bar{u} + \partial_{\bar{z}} \bar{u} P^{-1} \partial_{\bar{z}}^2 \bar{b}) - 2\bar{\epsilon} \frac{\partial_{\bar{z}} \bar{u}}{J} \bar{b} \quad (\text{A.6})$$

Annexe B

Solutions du modèle théorique, cas cisaillement variable

Cette annexe présente le détail du calcul de la solution non visqueuse $\overline{\mathbf{w}}_I$ ainsi que son comportement asymptotique proche de la surface dans le cas d'un profil de vent incident décrit par (2.1a). Pour $\bar{z} \gg 1$, $\overline{\mathbf{w}}_I$ vérifie,

$$\frac{d^2 \overline{\mathbf{w}}_I}{d\bar{z}^2} + \left[\frac{J}{\bar{u}_0^2} + \frac{2}{D^2} \left(1 - \frac{\bar{u}_0^2}{D^2} \right) - \bar{k}^2 \right] \overline{\mathbf{w}}_I = 0. \quad (\text{B.1})$$

On pose $r = \bar{u}_0^2/D^2 = \tanh^2(\bar{z}/D)$, de plus,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \overline{\mathbf{w}}_I}{d\bar{z}^2} &= \frac{d^2 \overline{\mathbf{w}}_I}{dr^2} \left(\frac{dr}{d\bar{z}} \right)^2 + \frac{d\overline{\mathbf{w}}_I}{dr} \frac{d^2 r}{d\bar{z}^2}, \\ \frac{dr}{d\bar{z}} &= \frac{2}{D} \sqrt{r}(1-r) \quad \text{et} \quad \frac{d^2 r}{d\bar{z}^2} = \frac{2}{D^2} (1-r)^2 - \frac{4r}{D^2} (1-r). \end{aligned}$$

En injectant les deux dernières équations dans (2.24), puis en divisant par $\left(\frac{dr}{d\bar{z}}\right)^2$ on obtient,

$$\frac{d^2 \overline{\mathbf{w}}_I}{dr^2} + \left[\frac{1}{2r} - \frac{1}{1-r} \right] \frac{d\overline{\mathbf{w}}_I}{dr} + \left[\frac{J}{4r^2(1-r)^2} + \frac{1}{2r(1-r)} - \frac{D^2 \bar{k}^2}{4r(1-r)^2} \right] \overline{\mathbf{w}}_I = 0. \quad (\text{B.2})$$

Cette équation possède 3 singularités, en $r = 0$, $r = 1$ et $r \rightarrow \infty$. L'idée, ici, est de trouver un développement asymptotique locale autour de chacune de ces singularités en effectuant un développement de Frobenius. Ainsi pour $r_i = \{0, 1\}$, on pose,

$$\overline{\mathbf{w}}_I(r) = (r - r_i)^\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (r - r_i)^n. \quad (\text{B.3})$$

On a, au premier ordre,

$$\frac{d\overline{\mathbf{w}}_I}{dr} = a_0 \alpha (r - r_i)^{\alpha-1} + a_1 (r - r_i)^\alpha, \quad (\text{B.4a})$$

$$\frac{d^2 \overline{\mathbf{w}}_I}{dr^2} = a_0 \alpha (\alpha - 1) (r - r_i)^{\alpha-2} + 2a_1 \alpha (r - r_i)^{\alpha-1} + 2a_2 (r - r_i)^\alpha. \quad (\text{B.4b})$$

- En $r = 0$:

Les différents termes de l'équation (B.2) ont pour limite quand $r \rightarrow 0$,

$$\frac{J}{4r^2(1-r)^2} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{J}{4r^2}, \quad \frac{1}{2r(1-r)} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r}, \quad \frac{D^2 \bar{k}^2}{4r(1-r)^2} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{D^2 \bar{k}^2}{4r}. \quad (\text{B.5})$$

En injectant les équations (B.3-B.5) dans (B.2), et en conservant l'ordre dominant lorsque $r \rightarrow 0$,

$$a_0 r^{\alpha-2} \left[\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{2}\alpha + \frac{J}{4} \right] = 0,$$

soit pour $J > 1/4$,

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{4} \pm i \frac{\mu}{2} \quad \text{avec} \quad \mu = \sqrt{J - 1/4}. \quad (\text{B.6})$$

- En $r = 1$:

On utilise le même raisonnement, ce qui nous donne

$$a_0(r-1)^{\gamma-2} \left[\gamma(\gamma-1) + \gamma + \frac{1}{4}(J - D^2 k^2) \right] = 0,$$

soit pour $J > D^2 k^2$,

$$\gamma_{1,2} = \pm \frac{m}{2} \quad \text{avec} \quad m = \sqrt{J - D^2 k^2}. \quad (\text{B.7})$$

- En $r \rightarrow \infty$:

Dans ce cas, on pose $r = \frac{1}{h}$, on cherche donc le développement de $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}(h)$ lorsque $h \rightarrow 0$,

$$\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}(h) = h^\beta \sum_0^n a_n h^n, \quad (\text{B.8})$$

et

$$\frac{d\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}}{dr} = -h^2 \frac{d\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}}{dh} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}}{dr^2} = h^4 \frac{d^2 \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}}{dh^2} + 2h^3 \frac{d\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}}{dh}. \quad (\text{B.9})$$

Avec à l'ordre zéro,

$$\frac{d\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}}{dh} = a_0 \beta h^{\beta-1} + a_1 h^\beta, \quad (\text{B.10a})$$

$$\frac{d^2 \bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}}{dh^2} = a_0 \beta(\beta-1) h^{\beta-2} + 2a_1 \beta h^{\beta-1} + 2a_2 h^\beta. \quad (\text{B.10b})$$

Les différents termes de l'équation (B.2) ont pour limite quand $r \rightarrow 0$,

$$\frac{1}{1-r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} -h, \quad \frac{J}{4r^2(1-r)^2} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{J}{4} h^4, \quad (\text{B.11a})$$

$$\frac{1}{2r(1-r)} \xrightarrow{r \rightarrow 0} -\frac{h^2}{2}, \quad \frac{D^2 \bar{k}^2}{4r(1-r)^2} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{D^2 k^2}{4} h^3. \quad (\text{B.11b})$$

De même, en injectant les équations (B.8-B.11) dans (B.2), on obtient au premier ordre,

$$a_0 h^{\beta+2} \left[\beta(\beta-1) + 2\beta - \frac{\beta}{2} - \beta - \frac{1}{2} \right] = 0,$$

soit,

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = -\frac{1}{2}. \quad (\text{B.12})$$

Ainsi, les singularités sont régulières et $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{I}}$ peut être approchée par (B.3) en utilisant les exposant suivant

- En $r = 0$, $\alpha_1 = \frac{1}{4} + i\frac{\mu}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{4} - i\frac{\mu}{2}$ avec $\mu = \sqrt{J - 1/4}$
- En $r = \infty$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -\frac{1}{2}$
- En $r = 1$, $\gamma_1 = -\frac{m}{2}$, $\gamma_2 = +\frac{m}{2}$ avec $m = \sqrt{J - D^2 k^2}$.

D'après (Olver, 1974), le changement de variable

$$\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{I}} = r^{\alpha_1} (1 - r)^{\gamma_1} \mathbf{W}, \quad (\text{B.13})$$

nous permet de ramener l'équation (B.2) à une équation hypergéométrique pour $\mathbf{W}$, soit

$$r(1 - r) \frac{d^2 \mathbf{W}}{dr^2} + [c - (a + b + 1)r] \frac{d\mathbf{W}}{dr} - ab\mathbf{W} = 0, \quad (\text{B.14})$$

avec

- $a = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}(i\mu - m)$,
- $b = \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(i\mu - m)$,
- $c = 1 + \alpha_1 - \alpha_2 = 1 + i\mu$.

Le but étant de trouver une solution pour $\bar{z} \gg 1$. On choisit la solution de l'équation (B.14) autour de la singularité en $r = 1$, ie : $\bar{z} = +\infty$, (Abramowitz and Stegun, 1964a) (AS dans la suite), Eq 15.5.6,

$$\mathbf{W}_{2(1)} = (1 - r)^{c-a-b} F(c - b, c - a, c - a - b + 1; 1 - r) \quad \text{et} \quad c - a - b = -2\gamma_1, \quad (\text{B.15})$$

où F est la fonction hypergéométrique. On peut alors définir la solution $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{I}}$

$$\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{I}} = 2^{2\gamma_1} r^{\alpha_1} (1 - r)^{\gamma_1} \mathbf{W}_{2(1)},$$

où le facteur $2^{2\gamma_1}$ assure une amplitude unitaire de la solution lorsque $\bar{z} \rightarrow \infty$.

Ainsi on retrouve bien la solution (2.25) pour $\bar{z} \gg 1$,

$$\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{I}} = 2^{-m} r^{\frac{1}{4} + i\frac{\mu}{2}} (1 - r)^{-\frac{m}{2}} \mathbf{W}_{2(1)} \underset{\bar{z} \rightarrow \infty}{\simeq} e^{-m\bar{z}/D}, \quad (\text{B.16})$$

On cherche maintenant à exprimer $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{M}}$ comme un développement asymptotique de $\bar{\mathbf{W}}_{\mathbf{I}}$ pour $\bar{z} \ll 1$. Proche de la surface on utilise la solution de l'équation (B.14) autour de $r = 0$. Toujours d'après AS, les solutions autour de $r = 0$ ($\mathbf{W}_{1(0)}$, $\mathbf{W}_{2(0)}$) et celle autour

de $r = 1$ ($\mathbf{W}_{2(1)}$) ne sont pas indépendantes, et d'après la transformation 15.3.6 dans AS, on a

$$\begin{aligned} W_{1(0)} &= A_1 W_{1(1)} + A_3 W_{2(2)} \quad \text{et} \quad W_{2(0)} = A_2 W_{1(1)} + A_4 W_{2(2)}, \\ W_{1(0)} &= F(a, b, c, t) \quad \text{et} \quad W_{2(0)} = t^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c, t), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad A_3 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \\ A_2 &= \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}, \quad A_4 = \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)}. \end{aligned}$$

On peut alors ré-exprimer $W_{2(1)}$ comme,

$$W_{2(1)} = -\frac{A_2}{A_1 A_4 - A_2 A_3} W_{1(0)} + \frac{A_1}{A_1 A_4 - A_2 A_3} W_{2(0)}. \quad (\text{B.17})$$

Et donc,

$$\overline{\mathbf{w}}_I = r^{\alpha_1} (1-r)^{\gamma_1} (b_1 W_{2(0)} + b_2 W_{1(0)}), \quad (\text{B.18})$$

avec

$$b_j = (-1)^{j-1} \frac{2^{-m} A_j}{A_1 A_4 - A_2 A_3}.$$

Pour $\bar{z} \ll 1$,

$$W_{2(0)} \simeq r^{1-c} = r^{i\mu}, \quad W_{1(0)} \simeq 1,$$

et $\overline{\mathbf{w}}_I$ peut s'écrire sous la forme asymptotique,

$$\overline{\mathbf{w}}_I(\bar{k}, \bar{z} \ll 1) \simeq a_1(\bar{k}) \bar{z}^{\frac{1}{2}-i\mu} + a_2(\bar{k}) \bar{z}^{\frac{1}{2}+i\mu} = \overline{\mathbf{w}}_{\mathbf{M}}(\bar{k}, \bar{z}), \quad (\text{B.19})$$

avec

$$a_1(\bar{k}) = b_1 D^{-\frac{1}{2}+i\mu} \quad \text{et} \quad a_2(\bar{k}) = b_2 D^{-\frac{1}{2}-i\mu}. \quad (\text{B.20})$$

Annexe C

Solutions du modèle théorique, cas avec cisaillement constant

Le but de cette annexe est d'expliciter les calculs concernant la solution non visqueuse dans le cas non hydrostatique avec un cisaillement constant.

C.1 Solution non visqueuse

D'après AS (voir Eq 9.1.49), l'équation

$$\overline{w}_{\overline{z}\overline{z}} + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\overline{z}^2} \right) \overline{w} = 0 \quad \text{admet comme solution} \quad \overline{w} = \overline{z}^{\frac{1}{2}} H_{\nu}^{(1)}(\lambda \overline{z}), \quad (\text{C.1})$$

où $H_{\nu}^{(1)}$ représente la fonction de Hankel et λ, ν des paramètres indépendant de $\overline{z}$. En posant

$$\lambda^2 = -\overline{k}^2 \quad \nu^2 = \frac{1}{4} - J = i\mu, \quad (\text{C.2})$$

l'équation (C.1) se ré-écrit,

$$w_{\overline{z}\overline{z}} + \left(\frac{J}{\overline{z}^2} - \overline{k}^2 \right) w = 0, \quad \text{avec comme solution} \quad w = \overline{z}^{\frac{1}{2}} H_{i\mu}^{(1)}(i\overline{k}\overline{z}). \quad (\text{C.3})$$

Toujours d'après AS, le comportement asymptotique de la fonction de Hankel s'écrit,

$$H_{i\mu}^{(1)}(i\overline{k}\overline{z}) \underset{\overline{z} \rightarrow \infty}{\simeq} \sqrt{\frac{2}{i\pi\overline{k}\overline{z}}} e^{i(\overline{k}\overline{z} - \frac{1}{2}i\mu\pi - \frac{1}{4}\pi)} = \sqrt{\frac{2}{i\pi\overline{k}\overline{z}}} e^{-i(\frac{1}{2}i\mu\pi + \frac{1}{4}\pi)} e^{-\overline{k}\overline{z}}. \quad (\text{C.4})$$

Donc,

$$w \underset{\overline{z} \rightarrow \infty}{\simeq} \sqrt{\frac{2}{i\pi\overline{k}}} e^{-i(\frac{1}{2}i\mu\pi + \frac{1}{4}\pi)} e^{-\overline{k}\overline{z}}. \quad (\text{C.5})$$

On peut alors construire une solution d'amplitude unitaire lorsque $\overline{z} \rightarrow +\infty$, avec $\overline{k} > 0$ telle que,

$$\mathbf{W}(\overline{k}, \overline{z}) = i\sqrt{\frac{\pi\overline{k}}{2}} e^{-\frac{\mu\pi}{2}} w = i\sqrt{\frac{\pi\overline{k}\overline{z}}{2}} e^{-\frac{\mu\pi}{2}} H_{i\mu}^{(1)}(i\overline{k}\overline{z}) \quad \text{avec} \quad \mu = \sqrt{|J - \frac{1}{4}|}. \quad (\text{C.6})$$

On retrouve bien l'expression de la solution non visqueuse (2.48).

C.2 Calcul des coefficients de la fonction de raccordement

On cherche maintenant le comportement asymptotique de cette solution lorsque $\bar{z} \rightarrow 0$. Toujours d'après AS on a,

$$H_{i\mu}^{(1)}(i\bar{k}\bar{z}) = \frac{i}{\sin(i\mu\pi)} [e^{\mu\pi} J_{i\mu}(i\bar{k}\bar{z}) - J_{-i\mu}(i\bar{k}\bar{z})], \quad (\text{C.7})$$

où J est la fonction de Bessel et,

$$J_{i\mu}(i\bar{k}\bar{z}) \underset{\bar{z} \rightarrow 0}{\simeq} \left(\frac{1}{2}i\bar{k}\bar{z}\right)^{i\mu} \frac{1}{\Gamma(1+i\mu)}. \quad (\text{C.8})$$

Donc,

$$H_{i\mu}^{(1)}(i\bar{k}\bar{z}) \underset{\bar{z} \rightarrow 0}{\simeq} \frac{i}{\sin(i\mu\pi)} \left[e^{\mu\pi} \left(\frac{1}{2}i\bar{k}\bar{z}\right)^{i\mu} \frac{1}{\Gamma(1+i\mu)} - \left(\frac{1}{2}i\bar{k}\bar{z}\right)^{-i\mu} \frac{1}{\Gamma(1-i\mu)} \right]. \quad (\text{C.9})$$

Or,

$$\sin(i\mu\pi) = i \sinh(\mu\pi) \text{ et } i = e^{i\frac{\pi}{2}}. \quad (\text{C.10})$$

Donc,

$$H_{i\mu}^{(1)}(i\bar{k}\bar{z}) \underset{\bar{z} \rightarrow 0}{\simeq} \frac{e^{\mu\frac{\pi}{2}}}{\sinh(\mu\pi)} \left[\left(\frac{1}{2}\bar{k}\bar{z}\right)^{i\mu} \frac{1}{\Gamma(1+i\mu)} - \left(\frac{1}{2}\bar{k}\bar{z}\right)^{-i\mu} \frac{1}{\Gamma(1-i\mu)} \right]. \quad (\text{C.11})$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\bar{k}, \bar{z}) &\underset{\bar{z} \rightarrow 0}{\simeq} i \sqrt{\frac{\pi \bar{k} \bar{z}}{2}} e^{-\frac{\mu\pi}{2}} \frac{e^{\mu\frac{\pi}{2}}}{\sinh(\mu\pi)} \left[\left(\frac{1}{2}\bar{k}\bar{z}\right)^{i\mu} \frac{1}{\Gamma(1+i\mu)} - \left(\frac{1}{2}\bar{k}\bar{z}\right)^{-i\mu} \frac{1}{\Gamma(1-i\mu)} \right] \\ &= \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2}\bar{k}\bar{z}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{i}{\sinh(\mu\pi)} \left[\left(\frac{1}{2}\bar{k}\bar{z}\right)^{i\mu} \frac{1}{\Gamma(1+i\mu)} - \left(\frac{1}{2}\bar{k}\bar{z}\right)^{-i\mu} \frac{1}{\Gamma(1-i\mu)} \right] \\ &= \frac{i\sqrt{\pi}}{\sinh(\mu\pi)} \left[\left(\frac{1}{2}\bar{k}\bar{z}\right)^{\frac{1}{2}+i\mu} \frac{1}{\Gamma(1+i\mu)} - \left(\frac{1}{2}\bar{k}\bar{z}\right)^{\frac{1}{2}-i\mu} \frac{1}{\Gamma(1-i\mu)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

On retrouve alors l'équation (2.50), avec

$$\bar{a}_1 = -\frac{i\sqrt{\pi}}{\sinh(\mu\pi)\Gamma(1-i\mu)} \left(\frac{\bar{k}}{2}\right)^{\frac{1}{2}-i\mu} \text{ et } \bar{a}_2 = \frac{i\sqrt{\pi}}{\sinh(\mu\pi)\Gamma(1+i\mu)} \left(\frac{\bar{k}}{2}\right)^{\frac{1}{2}+i\mu}. \quad (\text{C.13})$$

C.3 Pré-conditionnement des solutions visqueuses

Dans les différents cas où les effets dissipatifs de la couche limite sont représentés (section 2.3 et 2.4), l'inversion de la condition à la limite se fait en utilisant les solutions visqueuses définies par (2.44). Cependant les solutions $\tilde{\mathbf{w}}_3$, $\tilde{\mathbf{w}}_4$ varient de façon exponentielle avec $\tilde{z}$ et l'inversion des Eqs (2.46) devient numériquement impossible. Afin de palier à ce problème on utilise le fait que toutes combinaisons linéaires des solutions (2.44) sont aussi des solutions de (2.43), on définit alors,

$$\tilde{\mathbf{w}}_a(\tilde{z}) = \tilde{\mathbf{w}}_2(\tilde{z}) + \tilde{a}_3\tilde{\mathbf{w}}_3(\tilde{z}) + \tilde{a}_4\tilde{\mathbf{w}}_4(\tilde{z}) \quad (\text{C.14a})$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_b(\tilde{z}) = \tilde{\mathbf{w}}_2(\tilde{z}) + \tilde{b}_3\tilde{\mathbf{w}}_3(\tilde{z}) + \tilde{b}_4\tilde{\mathbf{w}}_4(\tilde{z}) \quad (\text{C.14b})$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_c(\tilde{z}) = \tilde{\mathbf{w}}_2(\tilde{z}) + \tilde{c}_3\tilde{\mathbf{w}}_3(\tilde{z}) + \tilde{c}_4\tilde{\mathbf{w}}_4(\tilde{z}). \quad (\text{C.14c})$$

Ces solutions sont construites de manière à ce que leur comportement asymptotique lorsque $\tilde{z} \rightarrow \infty$ coïncide avec la solution non visqueuse $\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}$ et qu'elles ne divergent pas lorsque $\tilde{z} \rightarrow 0$. Cette dernière condition est réalisée en imposant des valeurs finies à la surface pour les variables dynamiques et leur dérivées, c'est à dire,

$$(\partial_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{u}}_a(0), \partial_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{b}}_a(0)) = (0, 0), \quad (\partial_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{u}}_b(0), \tilde{\mathbf{p}}_b(0)) = (0, 0), \quad \text{et} \quad (\partial_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{b}}_c(0), \tilde{\mathbf{p}}_c(0)) = (0, 0), \quad (\text{C.15})$$

pour les paires de coefficients $(\tilde{a}_3, \tilde{a}_4)$, $(\tilde{b}_3, \tilde{b}_4)$, et $(\tilde{c}_3, \tilde{c}_4)$ respectivement. Ainsi dans les équations (2.45)-(2.46), $\tilde{\mathbf{w}}_2$, $\tilde{\mathbf{w}}_3$, et $\tilde{\mathbf{w}}_4$ sont remplacées par $\tilde{\mathbf{w}}_a$, $\tilde{\mathbf{w}}_b$ et $\tilde{\mathbf{w}}_c$. On peut alors construire les solutions pour la vitesse horizontale et la flottabilité suivant le même raisonnement.

Annexe D

Mountain Waves Produced by a Stratified Boundary Layer Flow. Part I :Hydrostatic Case

Mountain Waves Produced by a Stratified Boundary Layer Flow. Part I: Hydrostatic Case

FRANÇOIS LOTT, BRUNO DEREMBLE, AND CLÉMENT SOUFFLET

Laboratoire de Météorologie Dynamique, PSL Research Institute, Ecole Normale Supérieure, Paris, France

(Manuscript received 19 September 2019, in final form 30 January 2020)

ABSTRACT

A hydrostatic theory for mountain waves with a boundary layer of constant eddy viscosity is presented. It predicts that dissipation impacts the dynamics over an inner layer whose depth is controlled by the inner-layer scale δ of viscous critical-level theory. The theory applies when the mountain height is smaller or near δ and is validated with a fully nonlinear model. In this case the pressure drag and the wave Reynolds stress can be predicted by inviscid theory, if one takes for the incident wind its value around the inner-layer scale. In contrast with the inviscid theory and for small mountains the wave drag is compensated by an acceleration of the flow in the inner layer rather than of the solid earth. Still for small mountains and when stability increases, the emitted waves have smaller vertical scale and are more dissipated when traveling through the inner layer: a fraction of the wave drag is deposited around the top of the inner layer before reaching the outer regions. When the mountain height becomes comparable to the inner-layer scale, nonseparated upstream blocking and downslope winds develop. Theory and the model show that (i) the downslope winds penetrate well into the inner layer and (ii) upstream blocking and downslope winds are favored when the static stability is strong and (iii) are not associated with upper-level wave breaking.

1. Introduction

The impact of small- to medium-scale mountains on the atmospheric dynamics has been intensively studied over the last 50 years by two quite distinct communities. One community is studying how mountains modify the turbulent boundary layer (Jackson and Hunt 1975), an issue that is central in the context of wind resource modeling (Ayotte 2008) or dune formation (Charru et al. 2013). The associated theories form the basis of subgrid-scale orography parameterizations, where the enhancement of turbulence caused by mountains is modeled by increasing the terrain roughness length (Wood and Mason 1993). Wood et al. (2001) used fully nonlinear simulations to extend the theory and improve the estimate of the depth over which the mountain drag is deposited. These parameterizations are used for mountains with horizontal scales smaller than 5000 m (Beljaars et al. 2004). At these scales one can expect that the horizontal scale of the mountains L is such that the advective time scale L/u_0 is smaller than the inverse of the buoyancy frequency N^{-1} . This ensures that the flow behaves according to neutral flow dynamics.

The second community is more focused on mountain dynamical meteorology. It studies the onset of downslope winds, foehn, and trapped waves using theories and models where internal gravity waves control the dynamics, and where the boundary layer is often neglected. The relevance of the approach is illustrated by Sheridan et al. (2017), where a near-linear mountain wave model permits to interpret wind perturbations due to mountain wave events over the United Kingdom. The associated theory is extremely vast in itself (Durran 1990). Among other things, this theory has been used to predict realistic partitions between upper-level and lower-level wave drag and orographic blocking, which are concepts that are used in parameterizations of subgrid-scale orography with horizontal scales $L > 5000$ m (Lott and Miller 1997). Note that this type of parameterization is still used in atmospheric models, and even in the models with horizontal resolution that resolve these scales (Sandu et al. 2015; Pithan et al. 2016). In fact, it is not so clear whether there is a critical mountain size ($L = 5000$ m) below which the flow would only impact the boundary layer and above which the flow would only impact the waves. We actually believe that this criteria is quite ad hoc and should depend on the nature of the flow.

Corresponding author: François Lott, flott@lmd.ens.fr

DOI: 10.1175/JAS-D-19-0257.1

© 2020 American Meteorological Society. For information regarding reuse of this content and general copyright information, consult the AMS Copyright Policy (www.ametsoc.org/PUBSReuseLicenses).

Because boundary layer dynamics is highly controlled by the inviscid dynamics aloft, and because in mountain meteorology the wave forcing is embedded into the boundary layer, it soon appeared that the two communities should make some effort to integrate results from the other community. It is in this context that [Hunt et al. \(1988\)](#) and [Belcher and Wood \(1996\)](#) included stratification and gravity waves in boundary layer theories over mountain. [Belcher and Wood \(1996\)](#) showed that when the Froude number $F = u_0/NL$ is smaller than 1, the mountain drag is due to mountain gravity waves (rather than boundary layer effect) and is well predicted by linear gravity mountain wave theory. This result actually depends on the height at which one chooses the reference velocity u_0 and reference Brunt–Väisälä frequency N . As we shall see, in the absence of background wind curvature, the relevant altitude to compute these quantities is that of the inner layer, which is the altitude where disturbance advection by the background wind is balanced by dissipation. Still in this context but in the mountain meteorology community, studies using numerical model show that the boundary layer drag reduces downslope windstorms and mountain waves ([Richard et al. 1989](#); [Ólafsson and Bougeault 1997](#)). More recent observations show that the atmospheric boundary layer can absorb downward-propagating waves and weaken trapped lee waves ([Smith et al. 2002](#); [Jiang et al. 2006](#)). These last results have motivated a series of theoretical studies on the interaction between the boundary layer and mountain waves. All so far use crude parameterizations of the boundary layer: [Smith et al. \(2006\)](#) uses a bulk boundary layer model, [Lott \(2007\)](#) used constant eddy viscosity, and [Lott \(2016\)](#) uses linear drags (Newtonian cooling and Rayleigh drag).

Despite these simplifications, these studies reproduce the increase in trapped waves absorption when stability increases, insisting on cases where the incident wind is weak near the ground. This near-surface critical-level situation, a situation that was little studied because it poses fundamental problems in the inviscid mountain wave theory, was nevertheless found to produce interesting dynamics. Near-surface critical level favors downslope windstorms and foehn ([Lott 2016](#); [Damiens et al. 2018](#)) and permits to establish a bridge between trapped lee waves and Kelvin–Helmholtz instabilities ([Lott 2016](#); [Soufflet et al. 2019](#)). Interestingly, the critical-level mechanism that is a priori a dissipative mechanism turned out to be extremely active dynamically.

To summarize, there are two descriptions of the interaction between boundary layers and mountain waves: on the one hand boundary layer studies tell that the

pressure drag is controlled by the mountain wave dynamics outside of the boundary layer, but imposes very simplified dynamics outside of it ([Belcher and Wood 1996](#)). And on the other hand, “mountain wave” studies that give great attention to the potential impact of a boundary layer on mountain waves but that use very simplified boundary layer representation ([Smith et al. 2006](#)). We actually believe that there is still room to develop a theory where the boundary layer and the mountain wave field fully interact in a comprehensive way. We see at least three reasons for this. The first is that in mountain wave theory, the gravity wave (GW) field is controlled by the low-level flow amplitude, and it is not obvious to tell at which (or over which) altitude it should be measured in the absence of strong wind curvatures. Second, we know that the inviscid dynamics potentially produces downslope winds in the stratified case and it could be interesting to test if they extend down to the surface and well into the inner layer. Last, we know that the pressure drag is controlled by the wave drag in the stable case, but we do not know if a fraction of the wave drag could and should be deposited into the inner layer rather than being radiated away. This issue could have important consequences for the formulation of parameterizations.

The purpose of the present paper is to answer these questions in the reference case where the boundary layer is parameterized via a constant kinematic eddy viscosity ν . This case has the unique merit that, while the Couette profile with constant shear u_{0z} is an exact solution, we can handle the interactions with topography using the stratified viscous solutions derived by [Hazel \(1967\)](#) and [Baldwin and Roberts \(1970\)](#). However, a consequence of using uniform wind shear is that the “boundary layer depth” of the incident flow is infinite, it is therefore totally distinct from the “inner-layer depth” over which the waves are affected by dissipation and that scales as

$$\delta = \left(\frac{\nu L}{u_{0z}} \right)^{1/3}. \quad (1)$$

These simplifications of uniform viscosity and background shear were made in the literature of the late 1950s by [Benjamin \(1959\)](#) and [Smith \(1973\)](#) in the context of flows over water waves and dunes, respectively. Since then, we are well aware that such a “laminar” approach is an extreme idealization. A reason is that boundary layer dynamics tends to produce winds with strong shear near the surface but that vary much more slowly at higher altitudes (the associated curvatures defining the “boundary layer depth” quite precisely). To defend our choice nevertheless, we can recall that in the

atmosphere the low-level wind shears are not only due to the boundary layer: they are also related to the large-scale dynamics. This has been shown for instance in experiments done by [Sheridan et al. \(2007\)](#) and [Doyle et al. \(2011\)](#), where they observe strong shears over few kilometers above the ground. This being said, we will have to keep in mind that models with constant eddy viscosity probably overstate the significance of the low-level shear stresses on the waves and pressure drag ([Sykes 1978](#)).

The plan of the paper is as follows. In [section 2](#) we derive the theory in the hydrostatic case. In [section 3](#) we discuss the pressure drag and wave momentum fluxes it predicts. In [section 4](#) we analyze the onset of downslope winds. As our theory is linear except for the lower boundary condition, our results are checked against fully nonlinear simulations in [section 5](#). In [section 6](#), we discuss further the significance of works on boundary layer using constant eddy viscosity. We also discuss in this section how our results could be useful to understand the dynamics in more realistic cases. In [appendix A](#), we detail some aspects of the theory, and in [appendix B](#) we provide details on the numerical implementation of the model.

2. Theory

a. Basic equations

We consider a background flow solution of the viscous equations,

$$u_0(z) = u_{0z}z, \quad \rho_0(z) = \rho_r + \rho_{0z}z, \quad (2)$$

where the wind shear u_{0z} and stratification ρ_{0z} are both constant, and that is incident on a Gaussian ridge of characteristic length L and maximum height H :

$$h(x) = He^{-x^2/(2L^2)}. \quad (3)$$

Following quite conventional approaches ([Beljaars et al. 1987](#); [Belcher and Wood 1996](#)), we consider obstacles of small slope and use linear equations. To characterize the factors that control the dynamics we also normalize the response by introducing the “outer” scaling:

$$(x, z) = L(\bar{x}, \bar{z}), \quad (u', w') = u_{0z}L(\bar{u}, \bar{w}), \\ (p', b') = (\rho_r u_{0z}^2 L^2 \bar{p}, u_{0z}^2 L \bar{b}), \quad (4)$$

where u' and w' are the horizontal and vertical wind disturbances whereas b' is the buoyancy disturbance. With this scaling, and making the conventional “Prandtl”

approximation that the vertical derivatives dominate the viscous terms, the 2D Boussinesq hydrostatic linear equations write

$$\bar{z}\partial_{\bar{x}}\bar{u} + \bar{w} = -\partial_{\bar{x}}\bar{p} + \bar{\nu}\partial_{\bar{z}}^2\bar{u}, \quad (5a)$$

$$0 = -\partial_{\bar{z}}\bar{p} + \bar{b}, \quad (5b)$$

$$\bar{z}\partial_{\bar{x}}\bar{b} + J\bar{w} = P^{-1}\bar{\nu}\partial_{\bar{z}}^2\bar{b}, \quad (5c)$$

$$\partial_{\bar{x}}\bar{u} + \partial_{\bar{z}}\bar{w} = 0 \quad (5d)$$

with no-slip boundary conditions:

$$\bar{h}(\bar{x}) + \bar{u}(\bar{x}, \bar{h}) = 0, \quad \bar{w}(\bar{x}, \bar{h}) = 0, \quad \text{and} \\ J\bar{h}(\bar{x}) + \bar{b}(\bar{x}, \bar{h}) = 0 \quad \text{at} \quad \bar{h} = Se^{-\bar{x}^2/2}. \quad (6)$$

In Eqs. (5) and (6),

$$J = -\frac{g\rho_{0z}}{\rho_r u_{0z}^2}, \quad P = \frac{\nu}{\kappa}, \quad S = \frac{H}{L}, \quad \text{and} \quad \bar{\nu} = \frac{\nu}{u_{0z}L^2} \quad (7)$$

are a Richardson number, a Prandtl number, a slope parameter, and an inverse Reynolds number, respectively.

To help establish where the waves are produced and where they are dissipated, we next derive from Eqs. (5) a wave-action budget. As this is not often done in mountain waves literature, we recall that the interest is to define a quantity A that is quadratic (to measure the wave amplitude locally) and conservative in the adiabatic frictionless case. For action we chose the pseudomomentum, because its vertical flux F^z is closely related to the mountain wave Reynolds stress¹ [see further discussions in [Durrán \(1995\)](#) and [Lott \(1998\)](#)]. Although the exact form of the wave action is rigorously derived when starting from Hamiltonian dynamics ([Scinocca and Shepherd 1992](#)), we can directly use the formula for the pseudomomentum A derived in this paper, and derive a budget that includes dissipation by doing the formal operation:

$$\frac{\bar{b}}{J}\partial_{\bar{z}}[\text{Eq. (5a)}] + \frac{\bar{u}}{J}\partial_{\bar{x}}[\text{Eq. (5c)}]. \quad (8)$$

After few integrations by parts one obtains

¹ It is actually interesting to recall that the seminal paper on wave-mean flow interaction by [Eliassen and Palm \(1961\)](#) was about mountain waves.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \underbrace{\left(\bar{z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \bar{b} + \frac{\bar{b}^2}{2J} + \frac{\bar{u}^2}{2} \right)}_{F^x} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \underbrace{\bar{u} \bar{w}}_{F^z} = \underbrace{\bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} + P^{-1} \bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial^2 \bar{b}}{\partial \bar{z}^2}}_Q, \quad (9)$$

where F^x and F^z the horizontal and vertical components of the pseudomomentum flux, and where Q is the production/destruction of action by dissipative processes. Note that F^x includes the horizontal advection of action by the background flow $\bar{z}A$. As we search inflow solutions that are linear, we next express them in terms of Fourier transform,

$$\bar{w}(\bar{x}, \bar{z}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\mathbf{w}}(\bar{k}, \bar{z}) e^{i\bar{k}\bar{x}} d\bar{k}, \quad \text{where} \\ \bar{\mathbf{w}}(\bar{k}, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{w}(\bar{x}, \bar{z}) e^{-i\bar{k}\bar{x}} d\bar{x}, \quad (10)$$

which transforms Eqs. (5) into

$$i\bar{k} \bar{z} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{w}} = -i\bar{k} \bar{\mathbf{p}} + \bar{v} \partial_{\bar{z}}^2 \bar{\mathbf{u}}, \quad (11a)$$

$$i\bar{k} \bar{z} \bar{\mathbf{b}} + J\bar{\mathbf{w}} = P^{-1} \bar{v} \partial_{\bar{z}}^2 \bar{\mathbf{b}}, \quad (11b)$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \partial_{\bar{z}} \bar{\mathbf{p}}, \quad (11c)$$

$$i\bar{k} \bar{\mathbf{u}} + \partial_{\bar{z}} \bar{\mathbf{w}} = 0. \quad (11d)$$

b. Solutions

For high Reynolds number $\bar{v} \ll 1$, the dynamics is inviscid at leading order. Each harmonics satisfy Eqs. (11) with $\bar{v} = 0$, which results in $\bar{\mathbf{w}}$ satisfying

$$\bar{\mathbf{w}}_{\bar{z}\bar{z}} + \frac{J}{\bar{z}^2} \bar{\mathbf{w}} = 0. \quad (12)$$

Such equation has two solutions (Booker and Bretherton 1967):

$$\bar{z}^{1/2 \pm i\mu}, \quad \text{where} \quad \mu = \sqrt{J - \frac{1}{4}}. \quad (13)$$

When $\bar{k} > 0$ and $J > 0.25$, only the solution

$$\bar{\mathbf{w}}_l(\bar{k}, \bar{z}) = \bar{z}^{1/2 + i\mu} \quad (14)$$

corresponds to a gravity wave propagating upward. The cases with $\bar{k} < 0$ are treated by complex conjugation and will not be discussed further. The cases with $J < 0.25$ are

degenerated in the hydrostatic approximation because the direction of vertical propagation cannot be used to distinguish between the two solutions in Eq. (13). This difficulty, which forbids to treat the weakly stratified cases (i.e., here when $J < 1/4$), will be resolved in a future nonhydrostatic treatment of the inviscid solution.

To solve the inner layer we introduce the scaling,

$$\bar{z} = \bar{\delta} \tilde{z}, \quad (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}}) = (\tilde{\mathbf{u}}, \bar{\delta} \tilde{k} \tilde{\mathbf{w}}), \\ (\bar{p}, \bar{b}) = (\bar{\delta} \tilde{p}, \tilde{b}) \quad \text{where} \quad \bar{\delta} = \left(\frac{\bar{v}}{\tilde{k}} \right)^{1/3}. \quad (15)$$

At leading order, it transforms the full set of non-dimensional Eqs. (5) into the sixth-order set:

$$\partial_{\tilde{z}}^2 \tilde{\mathbf{u}} = i\tilde{z} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{w}} + i\tilde{\mathbf{p}}, \quad (16a)$$

$$\partial_{\tilde{z}}^2 \tilde{\mathbf{b}} = P(i\tilde{z} \tilde{\mathbf{b}} + J\tilde{\mathbf{w}}), \quad (16b)$$

$$\partial_{\tilde{z}} \tilde{\mathbf{w}} = -i\tilde{\mathbf{u}}, \quad \partial_{\tilde{z}} \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{b}}. \quad (16c)$$

This set of equations can be reduced to one single equation for $\tilde{\mathbf{w}}$,

$$(\partial_{\tilde{z}}^2 - iP\tilde{z})(\partial_{\tilde{z}}^2 - i\tilde{z})\partial_{\tilde{z}}^2 \tilde{\mathbf{w}} = JP\tilde{\mathbf{w}}, \quad (17)$$

which has six independent solutions. Hazel (1967) and Baldwin and Roberts (1970) have found their asymptotic form when $\tilde{z} \rightarrow \infty$. Two grow exponentially as $\tilde{z} \rightarrow \infty$ and cannot be used (Van Duin and Kelder 1986), the four that remain have asymptotic forms:

$$\tilde{\mathbf{w}}_1 \approx \tilde{z}^{1/2 - i\mu}, \quad \tilde{\mathbf{w}}_2 \approx \tilde{z}^{1/2 + i\mu}, \quad \tilde{\mathbf{w}}_3 \approx \tilde{z}^{-5/4} e^{-(2\sqrt{i/3})\tilde{z}^{3/2}}, \\ \tilde{\mathbf{w}}_4 \approx \tilde{z}^{-9/4} e^{-(2\sqrt{i/3})\tilde{z}^{3/2}}. \quad (18)$$

In Lott (2007), these four solutions are evaluated over the entire domain $0 < \tilde{z} < \infty$, that is, by using the asymptotic forms (18) above $\tilde{z} = 5$ and integrating down Eq. (17) from $\tilde{z} = 5$ to $\tilde{z} = 0$ with a Runge-Kutta algorithm. We will essentially proceed like this here (some serious convergence issues are discussed in appendix A). We then notice that the inner function $\tilde{\mathbf{w}}_2$ matches the upward inviscid solution (14) and that $\tilde{\mathbf{w}}_3$ and $\tilde{\mathbf{w}}_4$ decay exponentially fast with altitude, which permit to tell that all the combinations of $\tilde{\mathbf{w}}_2$, $\tilde{\mathbf{w}}_3$, and $\tilde{\mathbf{w}}_4$ are uniform solutions that can match $\bar{\mathbf{w}}_l$. We therefore search a uniform approximation of the vertical velocity under the form

$$\bar{\mathbf{w}}(\bar{k}, \bar{z}) = \bar{k} \bar{\delta}(k) \left\{ f_2(\bar{k}) \tilde{\mathbf{w}}_2 \left[\frac{\bar{z}}{\bar{\delta}(\bar{k})} \right] + f_3(\bar{k}) \tilde{\mathbf{w}}_3 \left[\frac{\bar{z}}{\bar{\delta}(\bar{k})} \right] \right. \\ \left. + f_4(\bar{k}) \tilde{\mathbf{w}}_4 \left[\frac{\bar{z}}{\bar{\delta}(\bar{k})} \right] \right\}, \quad (19)$$

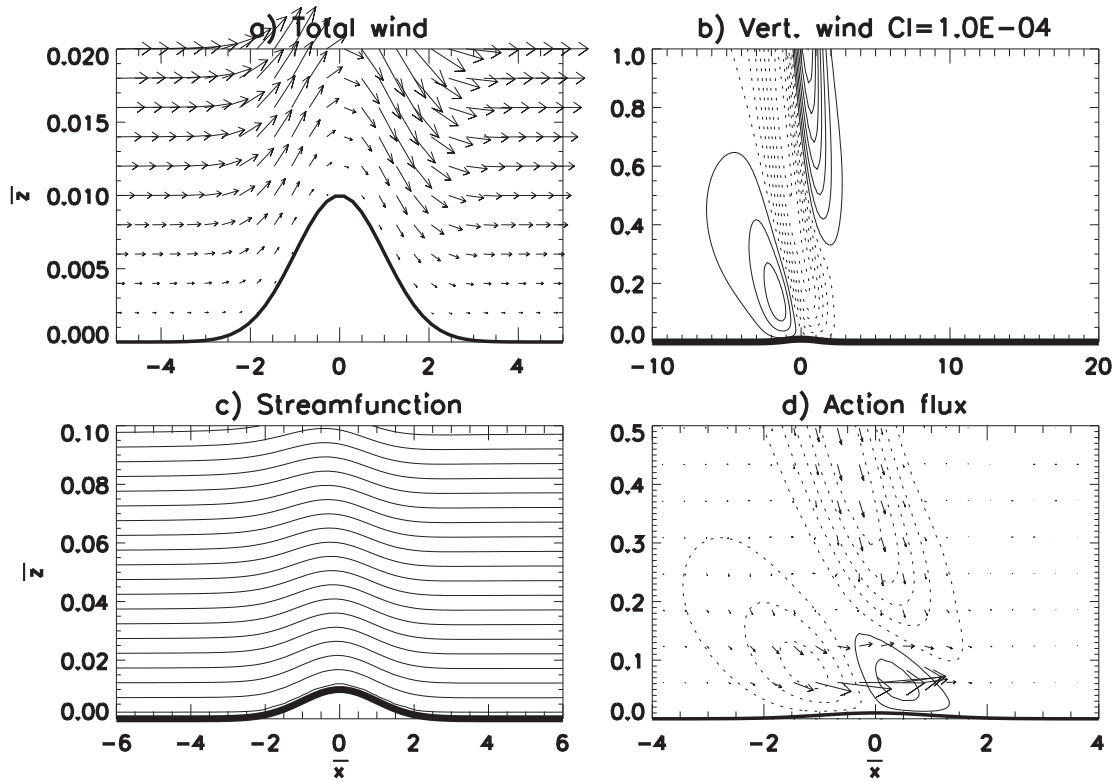


FIG. 1. Physical fields predicted by the theory in the hydrostatic case and when $J = 4$, $S = 0.01$, $\bar{\delta} = 0.1$. (a) Total wind vector ($\bar{z} + \bar{u}$, $\bar{w}$). (b) Vertical wind $\bar{w}$. (c) Total streamfunction $\bar{\psi}$ defined by $\partial_{\bar{z}}\bar{\psi} = \bar{z} + \bar{u}$. (d) Vertical flux of action F^z (contours) and action flux vector (F^x , F^y). In (b) and (d) the negative values are dashed.

where all fields are expressed using outer variables, and with similar expression for $\bar{u}$ and $\bar{b}$ deduced from Eq. (11). To evaluate the unknown functions f_2 , f_3 , and f_4 , we write the boundary conditions:

$$\begin{aligned} \bar{w}(\bar{x}, \bar{h}) &\approx \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{k} \bar{\delta}(\bar{k}) [f_2(\bar{k}) \tilde{w}_2(\tilde{h}) + f_3(\bar{k}) \tilde{w}_3(\tilde{h}) \\ &+ f_4(\bar{k}) \tilde{w}_4(\tilde{h})] e^{i\bar{k}\bar{x}} d\bar{k} = 0, \end{aligned} \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{x}, \bar{h}) &\approx \int_{-\infty}^{+\infty} [f_2(\bar{k}) \tilde{u}_2(\tilde{h}) + f_3(\bar{k}) \tilde{u}_3(\tilde{h}) \\ &+ f_4(\bar{k}) \tilde{u}_4(\tilde{h})] e^{i\bar{k}\bar{x}} d\bar{k} = -\bar{h}(\bar{x}), \end{aligned} \quad (20b)$$

$$\begin{aligned} \bar{b}(\bar{x}, \bar{h}) &\approx \int_{-\infty}^{+\infty} [f_2(\bar{k}) \tilde{b}_2(\tilde{h}) + f_3(\bar{k}) \tilde{b}_3(\tilde{h}) \\ &+ f_4(\bar{k}) \tilde{b}_4(\tilde{h})] e^{i\bar{k}\bar{x}} d\bar{k} = -J\bar{h}(\bar{x}), \end{aligned} \quad (20c)$$

where $\tilde{h}(\bar{x}, \bar{k}) = \bar{h}(\bar{x})/\bar{\delta}(\bar{k})$. Once discretized in the horizontal and spectral domain, the set of Eqs. (20) corresponds to three linear equations for $f_2(\bar{k})$, $f_3(\bar{k})$, and $f_4(\bar{k})$ that can be inverted with conventional matrix inversion

routines (see [appendix B](#) for more details on the numerical treatment).

3. Mountain wave fields and drags

We plot in [Fig. 1](#) the flow response when the inverse Reynolds number $\bar{\nu} = 0.001$, the slope parameter $S = 0.01$, the Richardson number $J = 4$, and the Prandtl number $\text{Pr} = 0.5$. This last parameter will stay unchanged in the rest of the paper: we have found moderate sensitivity of the upper wave fields to this parameter as long as its value stays around 1. In this setup, the characteristic inner-layer scale is that of the dominant harmonic $\bar{k} = 1$, that is, $\bar{\delta}(\bar{k} = 1) = \bar{\nu}^{1/3} = 0.1$, which is also the nondimensional form of the inner-layer scale in Eq. (1). The inner-layer scale is therefore much larger than the mountain slope.

The total wind at low level in [Fig. 1a](#) contours well the obstacle and the vertical velocity field ([Fig. 1b](#)) highlight a system of well-defined upward-propagating gravity waves. We notice that the streamfunction in [Fig. 1c](#) follows well the orography, up to at least the inner-layer scale $\bar{\delta}(1) = 0.1$. For each altitudes below and around $\bar{\delta}(1)$ the streamlines are displaced vertically over distances that are near the mountain height S , and

the vertical velocity when $\bar{z} \approx \bar{\delta}$ should scale as $\bar{w} \approx [\bar{\delta}(1)/2]S$ to follow the streamlines. We therefore propose that the wave amplitude corresponds to the inviscid case when a uniform flow of amplitude $\bar{\delta}(1)/2$ (the average of the incident wind over the inner-layer scale) is incident over a mountain of maximum height S . Far aloft and in the sheared case, the vertical velocity should therefore scale as $\bar{w} = 0 \left\{ \left[\sqrt{\bar{z} \bar{\delta}(1)/2} \right] S \right\}$, where the square root corresponds to the $1/2$ factor in the exponent of the inviscid solution [Eq. (14)]. This qualitative argument tells that the amplitude of $\bar{w}$ should be around $S\bar{\delta}(1)/2 = 5 \times 10^{-4}$ at $\bar{z} = 1$, which is in qualitative agreement with what is found in Fig. 1b.

We follow this line of qualitative reasoning and propose as predictor of the wave momentum flux and mountain pressure drag,

$$\overline{u\bar{w}}(\bar{z}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}(\bar{x}, \bar{z}) \bar{w}(\bar{x}, \bar{z}) d\bar{x}, \quad \text{Dr} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{p}(\bar{x}, \bar{h}) \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} d\bar{x}, \quad (21)$$

the inviscid linear hydrostatic pressure drag produced by a uniform wind of intensity $\bar{\delta}(1)/2$ incident on the orography given by $\bar{h}(\bar{x})$ in Eq. (6), and which exact value is

$$-\frac{\bar{\delta}(1)}{2} \sqrt{JS^2} = -\text{Dr}_{\text{GWP}}. \quad (22)$$

Henceforth, we will refer to Dr_{GWP} as the gravity wave drag amplitude predictor. Figure 2 shows that this predictor is a good estimate for the drag given by the theoretical model for a very large range of J and slope S . We conclude that the pressure drag is well controlled by the inviscid GW dynamics outside of the inner layer, the GWs being forced by the undulations of the inner layer produced by the mountain. This picture where the inner layer forces the (inviscid) dynamics aloft, and that the pressure drag is ultimately controlled by this inviscid dynamics follows the general principle of boundary layer theories that pressure is approximately constant across the inner layer.

This predictor of the surface pressure drag is nevertheless misleading if we take it as a measure of the effect of the mountain on the large-scale flow, as is generally done in mountain meteorology. The reason is that, in a steady state, our waves are forced indirectly by the distortion of the inner layer produced by the mountain rather than directly by the mountain as in the inviscid case. To establish this, we return to Fig. 1d where we plotted the waves pseudomomentum flux vector. Aloft the inner layer this flux clearly points down, as expected for mountain GWs propagating upward (Durrán 1995;

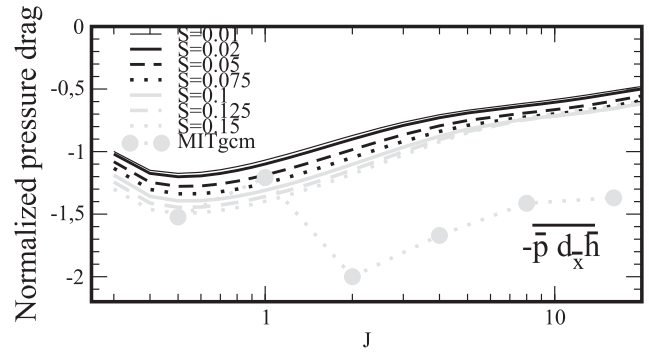


FIG. 2. Surface pressure drag predicted by theory and normalized by the amplitude of the inviscid linear mountain gravity wave drag produced by a mountain of height H in a uniform flow of intensity $U = u_0[\bar{\delta}(L^{-1})/2]$ and of stratification $N: UNH^2$ [in nondimensional form: $[\bar{\delta}(1)/2]\sqrt{(J)S^2}$; see Eq. (22)]. Gray dots are from the MITgcm with $S = 0.15$.

Lott 1998), but within the inner layer, it points very strongly from the upstream sector toward the downstream sector. This is to be contrasted with the inviscid case where this flux goes through the surface and produces an exchange of momentum between the fluid and the solid ground.

This result suggests that the acceleration that balances the gravity wave drag is not communicated to Earth's surface but rather to the inner layer. This last statement is confirmed in Fig. 3a, where we plot the wave stress as a function of altitude. The wave stress is null at the surface, increases with altitude before reaching a constant value at altitudes above $\bar{z} > 5\bar{\delta}(1)$ typically. As is often the case for viscous boundary layers, the depth over which dissipation is significant seems to be around 5 times the inner-layer scale $\bar{\delta}(1)$, so we will systematically make the distinction between the inner-layer scale $\bar{\delta}(1)$ and the inner-layer depth [around $5\bar{\delta}(1)$]. The flux emitted at the top of the inner layer [above $5\bar{\delta}(1)$] is around half the pressure drag, at least when $J \approx 1$. Such value stays comparable to the theoretical drag but suggests that substantial wave dissipation occurs when the wave travels vertically through the inner layer [in our scenario where the waves are forced around $\bar{\delta}(1)$]. This erosion of the pressure drag toward the gravity wave stress is even more significant when J increases. This is again consistent with a qualitative argument: for large values of J , the waves oscillate more rapidly in the vertical according to Eq. (14) and are more affected by viscous dissipation. This difficulty in converting the pressure drag into a momentum flux as stability increases makes that for $J > 4$ typically, there is a minimum in $\overline{u\bar{w}}$ in the middle of the inner layer [between $2\bar{\delta}(1)$ and $5\bar{\delta}(1)$]: part of the momentum given to the inner layer near the surface is restored back around the top of the inner layer.

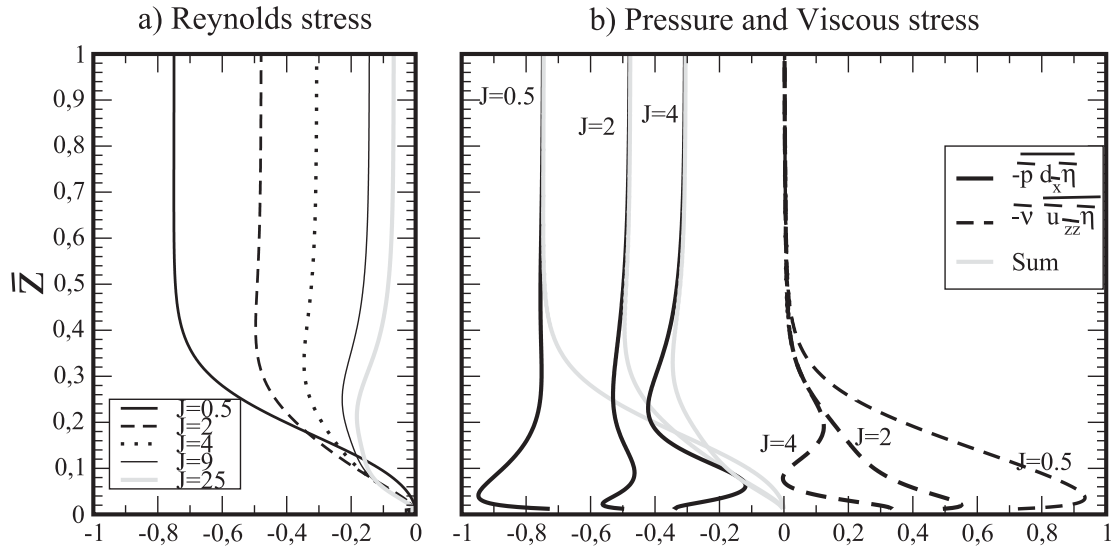


FIG. 3. (a) Vertical profiles of the normalized wave Reynolds stress $\bar{u}\bar{w}$ for $S = 0.01$. (b) Pressure (black solid) and viscous (black dashed) stresses as defined on the RHS of Eq. (23).

To understand what can replace the Reynolds stress to balance the pressure drag, it is important to return to the initial Eliassen and Palm's (1961) paper, where it is shown that the momentum flux is related to the pressure force exerted in the horizontal direction on an undulating surface. In the linear stationary case, this relation is obtained by multiplying a momentum equation [Eq. (5a) in our case] by the vertical displacement of streamlines $\bar{\eta}$ and after integration by part over $\bar{x}$ we get

$$\bar{u}\bar{w} = -\bar{p} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} - \bar{v}(\bar{\eta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}), \quad \text{where} \quad \bar{z} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} = \bar{w}. \quad (23)$$

In the inviscid case the pressure stress equals the Reynolds stress, but this is no longer true in the viscous scenario where dissipation plays a nonnegligible role. To illustrate how dissipation becomes significant for small slopes, we plot the two terms on the right-hand side and their sum for three values of J in Fig. 3b. After verification that the sum in Fig. 3b exactly equals the Reynolds stresses in Fig. 3a, we see that Reynolds stress and the pressure drag only coincide well above the inner layer. Near the surface and in the lower part of the inner layer, the pressure drag is almost entirely balanced by the viscous drag.

This erosion of the pressure drag toward the wave Reynolds stress is summarized in Fig. 4a where we plot the Reynolds stress emitted in $\bar{z} \rightarrow \infty$ normalized by the predictor Dr_{GWP} . As already discussed, the emitted flux is half the predicted drag, but this result becomes sensitive to the stability J : when J is large, the emitted flux almost vanishes. This erosion of the pressure drag toward the Reynolds stress for large J is less pronounced

if we consider the minimum values in Fig. 4b. These minima are in general located in the middle of the inner layer [i.e., above $\bar{z} = \bar{\delta}(1)$ and below $5\bar{\delta}(1)$, see Fig. 3a] such that for large J some GW deceleration should be applied directly around the top of the inner layer [which we locate at $5\bar{\delta}(1)$].

4. Nonseparated blocking and downslope winds

To analyze what occurs in nonlinear situations we next consider cases where the slope S becomes comparable to the inner-layer scale $\bar{\delta}(1)$. As a first example, the simulation in Fig. 5 corresponds to that in Fig. 1 but with

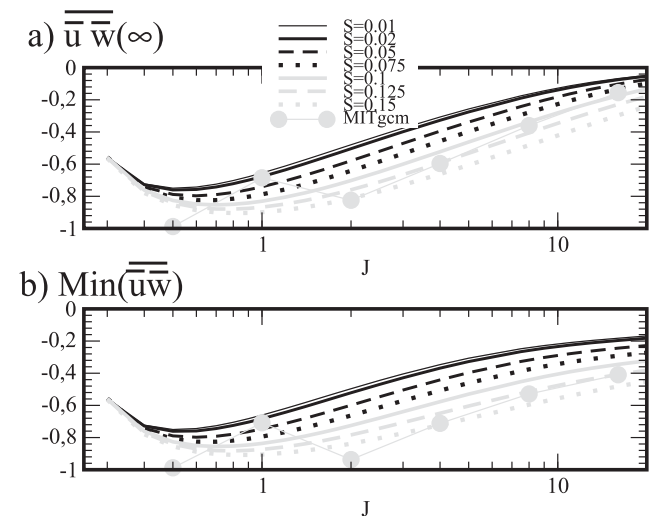
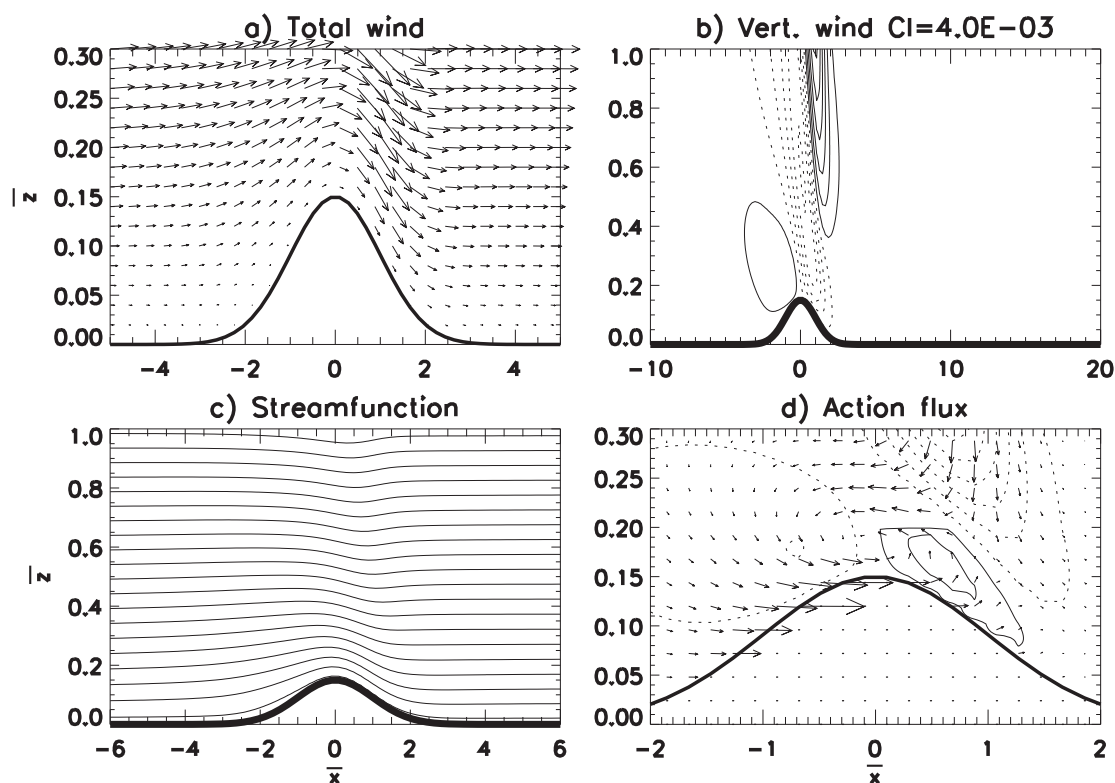


FIG. 4. (a) Normalized Reynolds stress emitted in the far field $\bar{u}\bar{w}(\infty)$. (b) Minimum value of $\bar{u}\bar{w}(z)$ for $0 < \bar{z} < \infty$. Gray dots are from the MITgcm with $S = 0.15$.

FIG. 5. As in Fig. 1, but for $S = 0.15$.

$S = 0.15$ instead of $S = 0.01$. We readily notice that the total wind (Fig. 5a) presents an downslope–upslope asymmetry that is almost absent in Fig. 1a. The vertical velocity is around 30 times larger than in the small slope case, that is, 3 times larger than what should have been obtained if we applied a linear ratio of the slopes (Figs. 5b, 1b). The asymmetry in the winds is also visible in the streamfunction in Fig. 5c, with a pronounced descent on the lee side. Finally, the largest differences are maybe in the pseudomomentum flux vector in Fig. 5d. Now that the obstacle penetrates well into the inner layer, there is a substantial pseudomomentum flux across the surface. In opposition to the inviscid case (Lott 1998) we did not identify clear relations between this flux and the mountain drag, except that the total flux across the surface is on the same order of magnitude as the mountain drag when the slope approaches the inner-layer scale.

To appreciate more systematically the changes occurring when the slope parameter increases as a function of stability, we plot in Fig. 6 the vertical velocity fields for different values of S and J . Figures 6a–c are for a slope that is small compared to the inner-layer scale [$S = 0.02 < \bar{\delta}(1)$] and Figs. 6d–f are for a slope that compares to it [$S = 0.15 \approx \bar{\delta}(1)$]. The contour interval stays the same for all panels with a given slope, consistent with the fact that the kinematic boundary

conditions are independent of J [see Eq. (6)]. Between Figs. 6a–c and 6d–f where the slope changes, the contour interval changes with a factor proportional to the slope ratio, that is, following a linear relation. For the small slope cases when J increases (Figs. 6a–c), one sees that the wave amplitude in the far field decreases with J . If we recall that the vertical scale of variations of our solutions is inversely proportional to J , larger values of J correspond to cases where the solutions oscillate more in the vertical direction, these plots are therefore consistent with the interpretation that with large J the waves are more dissipated when they travel through the inner layer. When the slope increases, a second interesting behavior is worth noticing. When $J = 1$ there are little differences between the patterns in Figs. 6a and 6d, which means that amplitudes varies linearly with S (remember that the contour interval varies linearly with S between the top and bottom rows). Again, we know since Lott (2016) and Damiens et al. (2018) that this is also related to the vertical scale of the waves: strong nonlinear effects enter the dynamics via the surface boundary condition and when the vertical wavelength at the top of the obstacle compares to the vertical wavenumber, a criteria that corresponds to $J > 1$. As we see in Figs. 6e and 6f these nonlinear effects become substantial: for a given slope the wave amplitude now increases when J increases. In addition to the enhanced

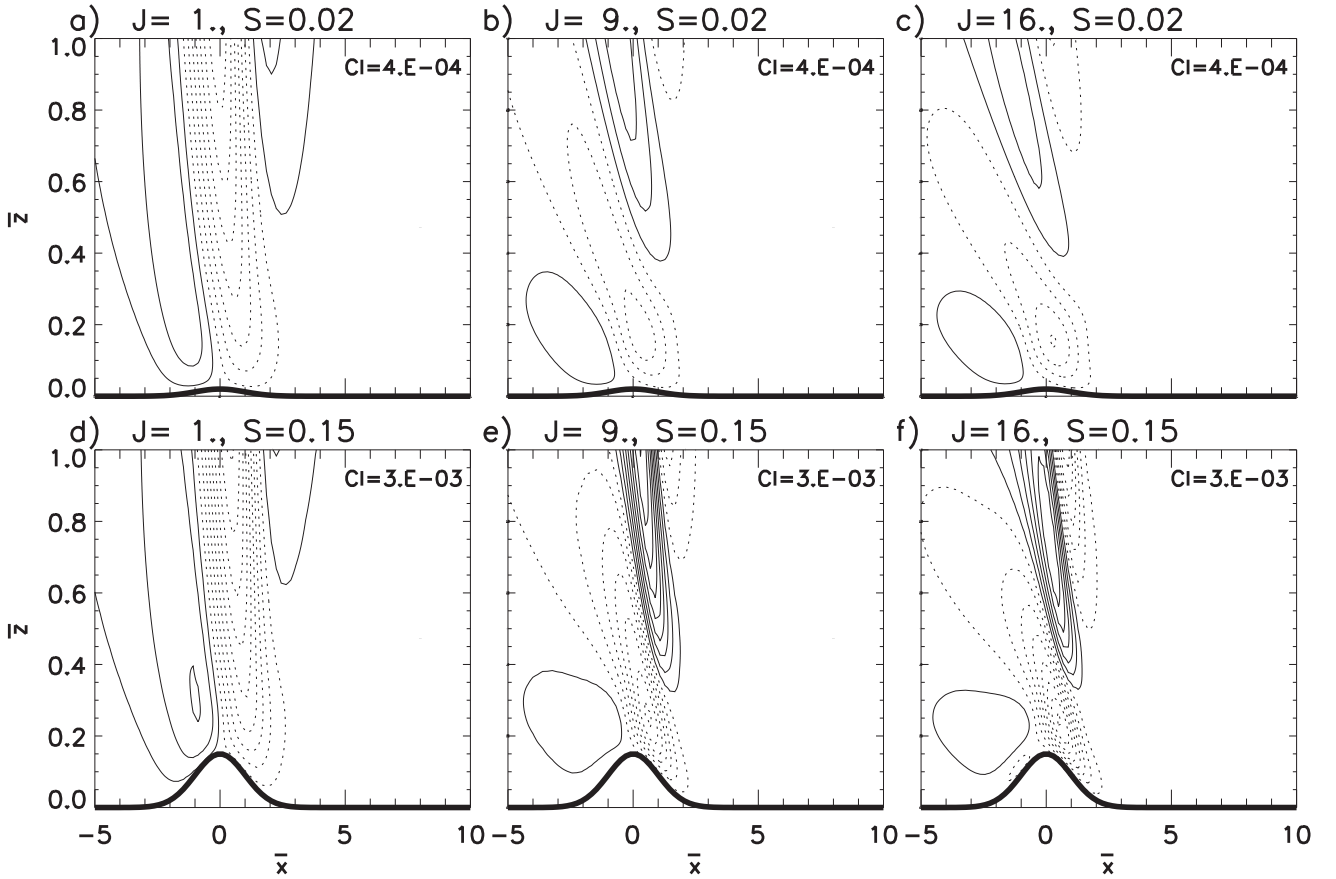


FIG. 6. Vertical velocity for different values of the Richardson number J and of the slope S . Inner-layer depth $\delta(1) = 0.1$. Contour intervals are shown in each panel.

emission due to nonlinearities, it is also plausible that the wave dissipation through the inner layer is less intense because the level of emission is located at a higher altitude than for smaller slopes. If we return to the emitted momentum fluxes in Fig. 4, a consequence of these enhanced emission and reduced dissipation when the slope increase and for large J is that the inviscid predictor of the momentum flux Dr_{GWP} becomes more and more accurate (see the gray dotted line in Figs. 4a and 4b).

If we now return to the total winds in Fig. 7 we also see that for large slope and large J , the winds along the upslope flank of the mountain become small compared to the downslope winds, an asymmetry that increases with both S and J . More specifically, when $J = 1$ (Fig. 7a) the flow contours the obstacle: the flow is upward on the upwind side and downward on the downwind side with little asymmetry in amplitudes, a behavior that is little affected by the increase in the slope in Fig. 7d. When J increase and still for small slope in Figs. 7b and 7c some upwind–downwind asymmetry starts to occur but stays limited: there is still substantial ascent on the upstream side of the obstacle. This ascent is actually not confined

to the lower layers but extends up to at least twice the mountain slope. When the slope is larger (Figs. 7e and 7f), the upwind ascent is much smaller than the downwind descent. The downwind descent extends well along the downwind slope whereas along the upwind slope the total wind is very small. We call this situation a “non-separated” blocking because it is produced by linear inflow dynamics.

To quantify the dependence on S and J more systematically in terms of upstream blocking and down-slope winds, we plot in Fig. 8 the ratio between the wind amplitude along the downwind slope and the upwind slope of the ridge defined as

$$\frac{\max_{\bar{z} < 2\bar{h}/3, 0 < \bar{x} < 2} \sqrt{(\bar{z} + \bar{u})^2 + \bar{w}^2}}{\max_{\bar{z} < 2\bar{h}/3, -2 < \bar{x} < 0} \sqrt{(\bar{z} + \bar{u})^2 + \bar{w}^2}}. \quad (24)$$

This ratio emphasizes more the downslope–upslope asymmetry than the criteria used in Lott (2016), where

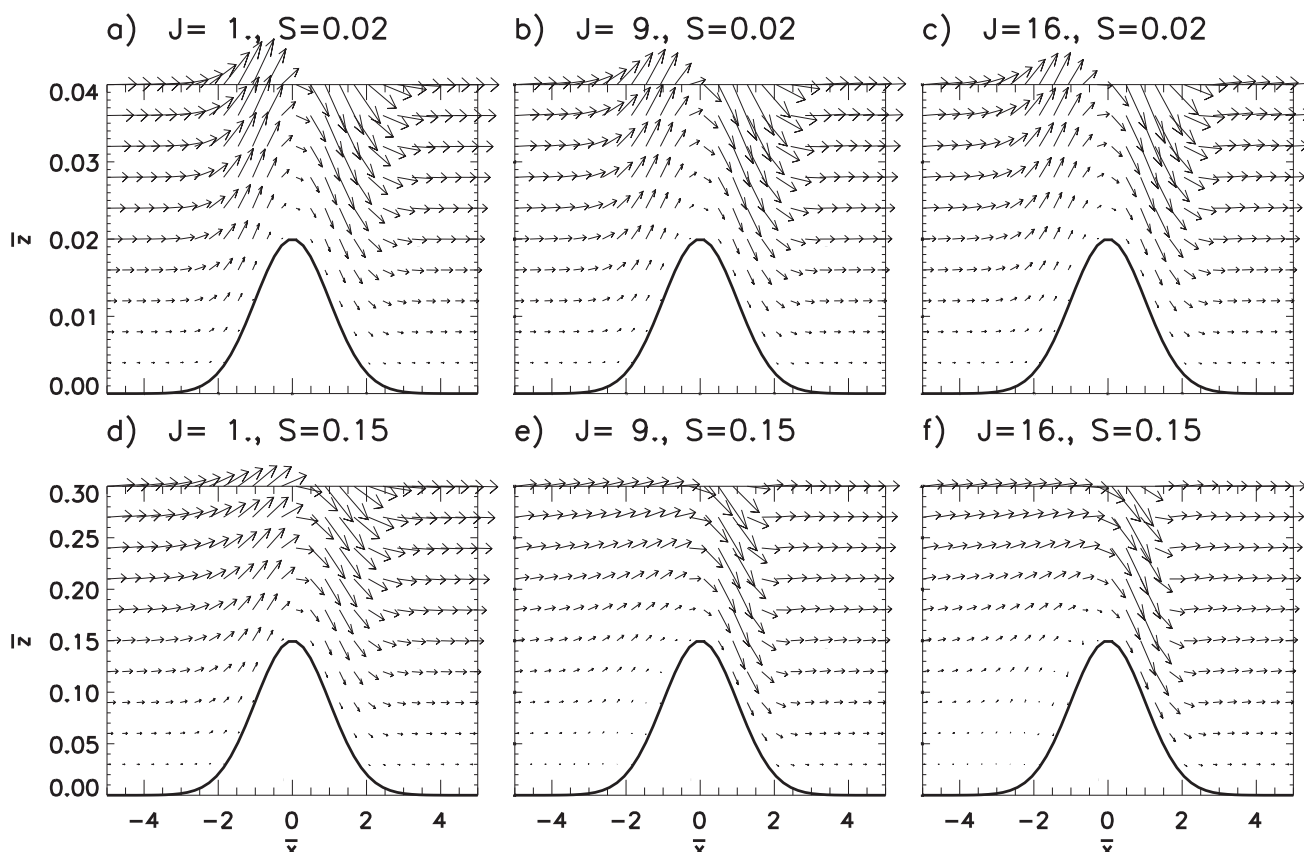


FIG. 7. Wind vectors around the hill and for different values of the Richardson number J and of the slope S . Inner-layer depth $\delta(1) = 0.1$.

only the downslope wind amplitude was measured in relation with the wind at the top of the hill. The reason is that here the wind at the top of the hill is null so this measure makes little sense. Here the ratio measures the upstream flow blocking as much as the downslope wind intensification and we see that it can easily reach values around 4 or 5 for slopes near the inner-layer depth $\delta(1) = 0.1$ and when J is sufficiently large. It always stays near 1 for small slopes and essentially increases with J and S as expected.

5. Validation with a fully nonlinear model

To validate our results we now use the ocean Massachusetts Institute of Technology General Circulation Model (MITgcm) (Marshall et al. 1997) and that solves the fully nonlinear Boussinesq hydrostatic equations on a cartesian mesh with a staggered Arakawa C grid. We set the shape of the topography to a Gaussian [Eq. (3)] and take $L = 1$ km and $H = 150$ m, which yield $S = 0.15$. Cells near the bottom are cut with the partial cells strategy (Adcroft et al. 1997) with $hFac_{min} = 0.1$ (if a fraction of the cell is less than $hFac_{min}$, then it is rounded to the nearer of 0 or $hFac_{min}$). The total

domain horizontal size is 60 km with a stretched grid near the topography: the minimum and maximum grid size are 60 and 600 m, respectively. We use a sponge layer at the lateral boundaries to relax the dynamic variables (momentum and temperature) to the prescribed upstream profiles (2). The relaxation time scale is 100 s in the innermost point of the sponge layer and 10 s in the outermost point of the sponge layer. We also

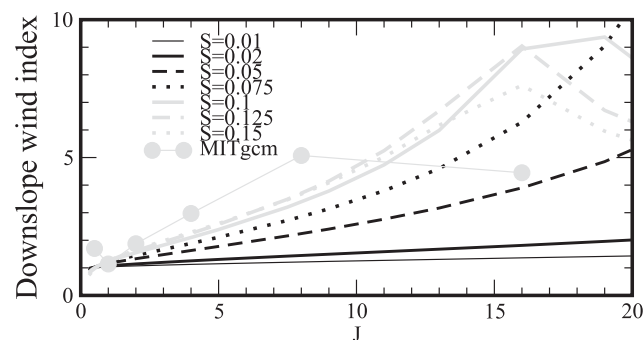


FIG. 8. Upstream blocking vs downslope windstorm index defined as the ratio between the maximum downslope wind amplitude and the maximum upslope wind amplitude. Gray dots are from the MITgcm with $S = 0.15$.

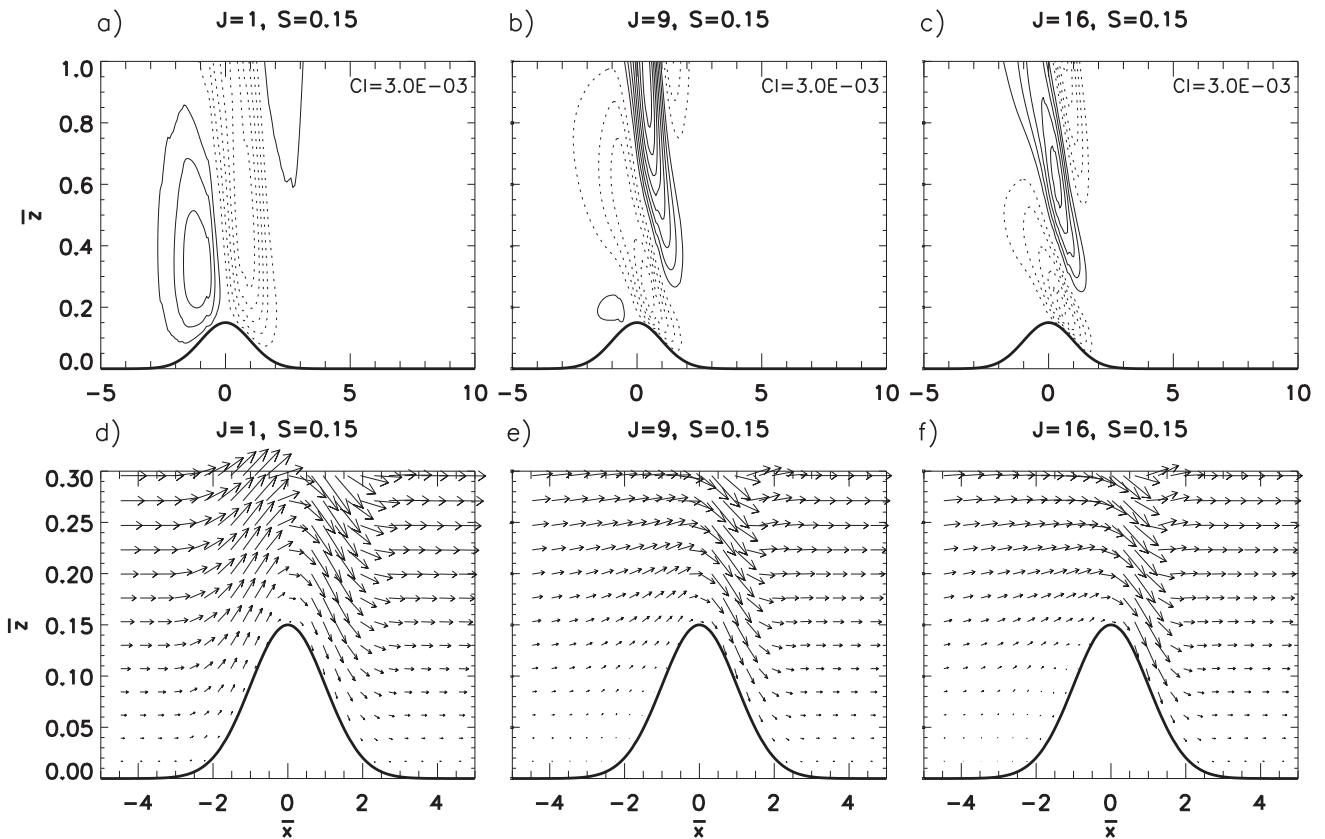


FIG. 9. (a)–(c) Vertical velocities from the MITgcm corresponding to the theory in Figs. 6d–f. (d)–(f) Wind vectors from the MITgcm corresponding to the theory in Figs. 7d–f.

use a stretched grid in the vertical with maximum resolution of 5.6 m at the topography and 415 m at the top of the domain. The total height of the domain is 50 km, and we use a sponge layer above 10 km with a relaxation time scale that varies quadratically with a minimum time scale of 10 s at the uppermost grid point (and infinite relaxation time scale at 10 km). We use a constant wind shear ($u_{0z} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$) and constant vertical temperature gradient. The temperature is related to the density via a linear equation of state and we adjust the vertical stratification N^2 to match the nondimensional values of J : from $N^2 = 5 \times 10^{-7} \text{ s}^{-2}$ ($J = 0.5$) to $N^2 = 1.6 \times 10^{-5} \text{ s}^{-2}$ ($J = 16$). We use no-slip boundary conditions for momentum at the topography and we set the bottom temperature to $T = 0^\circ\text{C}$ (we modified the code to get a temperature flux at the boundary to ensure that the temperature at the topography is constant). The horizontal and vertical viscosities for momentum are set to $1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. The vertical and horizontal coefficients of diffusivity for temperature are set to $2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. We also added a horizontal biharmonic damping with a coefficient of $2 \times 10^3 \text{ m}^4 \text{ s}^{-1}$ for both the temperature and momentum in order to damp grid-scale noise generated at the topography. The time step is 0.5 s. The model is

integrated forward in time until we reach a steady state (usually less than 1 day).

The results for the vertical velocity field in Figs. 9a–c, reproduce reasonably well the corresponding predictions from the theory in Figs. 6d–f, respectively. The horizontal scale and vertical variations are well reproduced, the amplitudes in the MITgcm are about 10% smaller near $\bar{z} = 1$ than in the theory, a difference we attribute to numerical dissipations that are not easy to control. The results for the winds at low level in Figs. 9d–f are also consistent with those from the theory in Figs. 7d–f, respectively. The flow in the MITgcm presents the upstream/downstream symmetry predicted by theory when $J = 1$ in Fig. 9a, and stronger downslope than upslope winds when $J = 9$ and $J = 16$. We conclude that there is a good agreement between the global indexes defined in the theoretical model and the fully nonlinear model (see for instance the comparison of the emitted wave fluxes in Figs. 3a and 3b, or of the downslope windstorm index in Fig. 8). The only noticeable difference is on the pressure drag in Fig. 2, the MITgcm predicts a larger drag than in the theory. We have tried to understand the causes of the differences, but find it difficult to correct the error. A reason is that the major

differences between the theory and the MITgcm are essentially located near the surface (not shown), that is, at places where viscous stress equals the Reynolds stress and where the stepwise treatment of the lower boundary can produce gridscale irregularities on these fields. As such irregularities are likely to be damped out by dissipation as we move away from the surface, we can speculate that these low-level differences on the velocity shears and pressure are not significant in the context of the interactions between the waves and the large-scale flow at upper levels.

6. Conclusions

In dynamical meteorology and oceanography, solutions with constant viscosity have always been a starting point to understand phenomena that involve the interaction between the surface and the boundary layer. Examples are numerous, from the Ekman (1905) solutions systematically given in textbooks, the Prandtl (1952) model for katabatic winds, the inclusion of a boundary layer in the Miles theory for the generation of oceanic waves (Benjamin 1959), or in theories of sand ripples and dunes formation (Engelund 1970) (see also Fowler 2001). In waves and dune theories, the fact that the near-surface wind profiles play a crucial role in the dynamics was early recognized (Miles 1957; Benjamin 1959), and a first difficulty consisted in solving the fourth-order Orr–Sommerfeld equation and to introduce a corrugated bottom at the surface (Fowler 2001). A difficulty arises if one wishes to introduce stratification: the equation to solve becomes of the sixth order [see Eq. (17)]. This difficulty plus the facts that a constant eddy viscosity is a crude approximations of the turbulence in actual boundary layers, are two reasons why the viscous problem is not often treated in the stratified case. When it is, the techniques used are extremely involved [see, for instance, the introduction of “triple decks” in Sykes (1978)], and does not permit to derive uniform approximations of the solutions over the entire domain. As this last remark also holds for more sophisticated eddy viscosity closure, it is fair to say that theories failed so far in predicting the vertical profiles of the wave Reynolds stress, a quantity that is central in mountain meteorology. For these reasons but also because more and more papers in mountain meteorology call for a better understanding of the interaction between boundary layers and mountain waves, we found useful to solve the viscous mountain wave problem theoretically, and verify the theory with a fully nonlinear model (here the MITgcm). Note that in the context of stratified oceanic boundary layers over corrugated and tilted slopes, a

recent paper by Passaggia et al. (2014) shares the same concern.

Once given this context, what are the messages that could be useful in a more realistic context? The first is probably that pressure drag and wave Reynolds stress are well predicted by inviscid theory and if we take for the incident flow, its value averaged over the inner-layer depth. This depth has a definition that can be generalized, at least conceptually. For instance, if the boundary layer scheme uses first-order closure with vertical diffusion coefficients, the coefficients and tendencies can be linearized around the large-scale resolved state. If we consider a small perturbation of given horizontal scale, the inner-layer depth of interest is that where advection by the resolved wind equals the disturbance in boundary layer tendency. These predictions of the drag and waves Reynolds stress remain valid until the mountain height equals the inner-layer scale. Our theory does not go beyond that height. For higher mountains we should probably average the incident flow over the mountain height to obtain realistic predictions. Actually, this is what we find with our model when imposing free slip boundary condition in $\bar{z} = \bar{h}$, that is, in an inviscid approximation where the boundary layer depth is drastically reduced (not shown).

For large values of the stratification, we also find that a good fraction of the stress is dissipated near the top of the inner layer, simply because the waves have shorter vertical wavelength and are more dissipated there. This effect is mitigated when the top of the hill is near the top of the inner-layer scale again, but suggests that a good fraction of the mountain wave drag should be given back to the flow near the top of the inner layer. Another interesting result concerns the source of the mountain wave stress. When the mountain is well inside the inner layer, the wave stress is in good part extracted from the inner layer itself rather than from the solid earth as in the inviscid case. When the mountain slope approaches the inner-layer depth this result is less applicable and a good part of the pseudo momentum flux is directed toward the surface as in the inviscid case (Durran 1995; Lott 1998).

Our results could also be used to provide alternative views concerning the dynamics of upstream blocking and downslope winds. They occur through a near-surface critical-level dynamics and without upper-level wave breaking (remember that our theory is linear inside the flow) providing that the flow is stable $J > 1$, and that the mountain slope is near the inner-layer scale. This confirms the results in Lott (2016) and Damiens et al. (2018) who predicted these behaviors using simpler theories and using simulations with

WRF including more sophisticated boundary layers. Another important result concerns the structure of the inner layer itself: the downslope winds penetrate well into it, as shown for instance in Fig. 7 when $J = 9$ or $J = 16$.

Last, for all the results presented here, we have neglected that the mountain gravity waves necessarily return to the surface in the constant shear case: they are all trapped, and this effect should be taken into account to give a more realistic treatment of the constant shear case. To take this into account within our theoretical framework we need to reject the hydrostatic approximation and we have to treat the inviscid solution in terms of Hankel functions (Keller 1994), a solution we will describe in a future paper. Note that such subsequent development will also allow us to treat the nonstratified situation and describe the transition from the neutral to the stratified case. Here we wanted to treat the hydrostatic case first because an extremely rich dynamics already occur at the low level and we do not need to attribute this dynamics to the fact that all the harmonics are trapped.

In this paper also, the background shear flow is constant, which corresponds to a boundary layer flow of infinite depth. Hence, even though we insist on using the terminology that the dynamics introduces an “inner” layer scale, it has to be clearly distinguished from the plausible presence of a “boundary layer,” where the incident wind present large curvature. Again, we can treat such problem with our formalism by imposing background flow with nonzero curvature, a situation that can introduced trapped lee waves in the non-hydrostatic case (Soufflet et al. 2019).

Acknowledgments. This work was supported by the Laboratoire de Recherche Conventionné “Yves Rocard,” a collaborative unit between CEA and Ecole Normale Supérieure.

APPENDIX A

Preconditioning of the Viscous Solution

To evaluate $\tilde{\mathbf{w}}_2$, $\tilde{\mathbf{w}}_3$, and $\tilde{\mathbf{w}}_4$ we proceed as in Lott (2007), take the asymptotic forms in Eq. (18) when $\tilde{z} > 5$ and integrate down to $\tilde{z} = 0$ with a Runge–Kutta algorithm. Nevertheless these solutions are ill-conditioned when it comes to the inversion of the boundary condition, essentially because $\tilde{\mathbf{w}}_3$ and $\tilde{\mathbf{w}}_4$ vary exponentially with altitude [see Eq. (18)]. To circumvent this difficulty, rather than $\tilde{\mathbf{w}}_2$, $\tilde{\mathbf{w}}_3$, and $\tilde{\mathbf{w}}_4$

we have used 3 solutions $\tilde{\mathbf{w}}_a$, $\tilde{\mathbf{w}}_b$, and $\tilde{\mathbf{w}}_c$, whose asymptotic behavior for $\tilde{z} \rightarrow \infty$ all match the inviscid solution $\tilde{\mathbf{w}}_I$ but do not grow exponentially fast when $\tilde{z} \rightarrow 0$:

$$\tilde{\mathbf{w}}_a(\tilde{z}) = \tilde{\mathbf{w}}_2(\tilde{z}) + \tilde{a}_3 \tilde{\mathbf{w}}_3(\tilde{z}) + \tilde{a}_4 \tilde{\mathbf{w}}_4(\tilde{z}), \quad (\text{A1a})$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_b(\tilde{z}) = \tilde{\mathbf{w}}_2(\tilde{z}) + \tilde{b}_3 \tilde{\mathbf{w}}_3(\tilde{z}) + \tilde{b}_4 \tilde{\mathbf{w}}_4(\tilde{z}), \quad (\text{A1b})$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_c(\tilde{z}) = \tilde{\mathbf{w}}_2(\tilde{z}) + \tilde{c}_3(\tilde{k})(\tilde{z}) + \tilde{c}_4 \tilde{\mathbf{w}}_4(\tilde{z}). \quad (\text{A1c})$$

The three pairs $(\tilde{a}_3, \tilde{a}_4)$, $(\tilde{b}_3, \tilde{b}_4)$, and $(\tilde{c}_3, \tilde{c}_4)$ are then chosen so that $[\partial_{\tilde{z}} \tilde{\mathbf{u}}_a(0), \partial_{\tilde{z}} \tilde{\mathbf{b}}_a(0)] = (0, 0)$, $[\partial_{\tilde{z}} \tilde{\mathbf{u}}_b(0), \partial_{\tilde{z}} \tilde{\mathbf{b}}_b(0)] = (0, 0)$, and $[\partial_{\tilde{z}} \tilde{\mathbf{u}}_c(0), \partial_{\tilde{z}} \tilde{\mathbf{b}}_c(0)] = (0, 0)$, respectively. These three solutions are shown in Fig. A1 for $J = 1$ and $\text{Pr} = 0.5$, they show moderate variations with inner altitude $\tilde{z}$, the exponential behavior of $\tilde{\mathbf{w}}_3$ and $\tilde{\mathbf{w}}_4$ has clearly been mitigated by adopting finite amplitudes values for the variables and their derivatives at the surface. The boundary condition is then satisfied by writing

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{w}}(\bar{x}, \bar{h}) \approx & \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{k} \bar{\delta}(\bar{k}) [f_a(\bar{k}) \tilde{\mathbf{w}}_a(\tilde{h}) + f_b(\bar{k}) \tilde{\mathbf{w}}_b(\tilde{h}) \\ & + f_c(\bar{k}) \tilde{\mathbf{w}}_c(\tilde{h})] e^{i\bar{k}\bar{x}} d\bar{k} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A2a})$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{x}, \bar{h}) \approx & \int_{-\infty}^{+\infty} [f_a(\bar{k}) \tilde{\mathbf{u}}_a(\tilde{h}) + f_b(\bar{k}) \tilde{\mathbf{u}}_b(\tilde{h}) \\ & + f_c(\bar{k}) \tilde{\mathbf{u}}_c(\tilde{h})] e^{i\bar{k}\bar{x}} d\bar{k} = -\bar{h}(\bar{x}), \end{aligned} \quad (\text{A2b})$$

$$\begin{aligned} \bar{b}(\bar{x}, \bar{h}) \approx & \int_{-\infty}^{+\infty} [f_a(\bar{k}) \tilde{\mathbf{b}}_a(\tilde{h}) + f_b(\bar{k}) \tilde{\mathbf{b}}_b(\tilde{h}) \\ & + f_c(\bar{k}) \tilde{\mathbf{b}}_c(\tilde{h})] e^{i\bar{k}\bar{x}} d\bar{k} = -\bar{J}\bar{h}(\bar{x}), \end{aligned} \quad (\text{A2c})$$

where $\tilde{h}(\bar{x}, \bar{k}) = \bar{h}[\bar{x}/\bar{\delta}(\bar{k})]$. Once discretized in the horizontal and spectral domain, the set of Eqs. (20) corresponds to three linear equations involving nine matrices [for instance one of the matrices has for components $\bar{k}_j \bar{\delta}(\bar{k}_j) \tilde{\mathbf{w}}_a(\tilde{h}_{ij}) e^{i\bar{k}_j \bar{x}_i} d\bar{k}$] and three unknown vectors [with components $f_a(\bar{k}_j)$, $f_b(\bar{k}_j)$, and $f_c(\bar{k}_j)$] that can be inverted with conventional matrix inversion routines.

Still in this formalism, the uniform approximation of $\tilde{\mathbf{w}}$ in Eq. (19) writes

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}}(\bar{k}, \bar{z}) = & \bar{k} \bar{\delta}(\bar{k}) \{f_a(\bar{k}) \tilde{\mathbf{w}}_a[\bar{k}, \bar{z}/\bar{\delta}(\bar{k})] \\ & + f_b(\bar{k}) \tilde{\mathbf{w}}_b[\bar{k}, \bar{z}/\bar{\delta}(\bar{k})] + f_c(\bar{k}) \tilde{\mathbf{w}}_c[\bar{k}, \bar{z}/\bar{\delta}(\bar{k})]\}, \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

again with similar expression for $\bar{\mathbf{u}}$ and $\bar{\mathbf{b}}$.

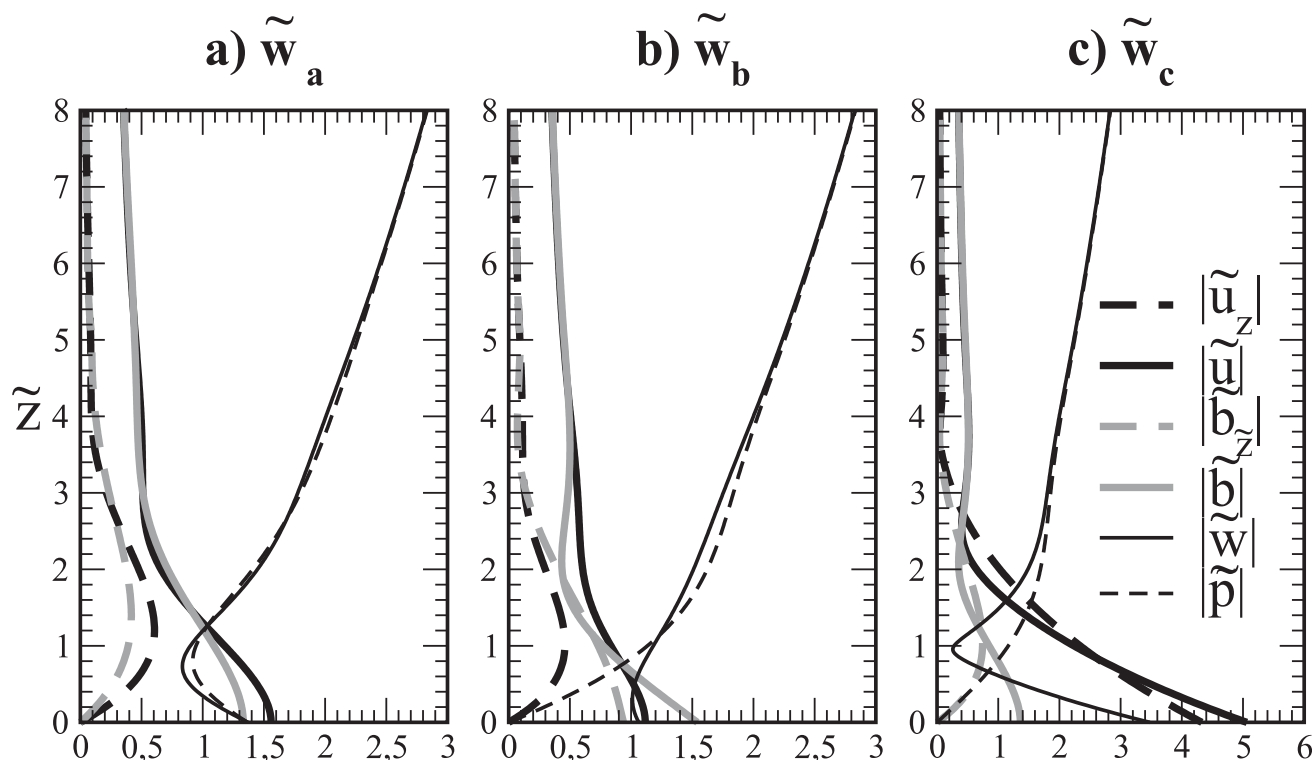


FIG. A1. Uniform solutions used to invert boundary conditions and to evaluate the wave fields over the entire domain. $J = 1$ and $\text{Pr} = 0.5$. All the solutions are expressed using inner variables.

APPENDIX B

Numerical Resolution

To solve numerically our problem we always take a domain of length $\bar{X} = 100$ spanned by $N = 1024$ points, which corresponds to a spectral resolution around $d\bar{k} \approx 0.01$ and a spatial resolution around $d\bar{x} \approx 0.1$. In the vertical we take grids of maximum depth $\bar{Z} = 3$ and smoothly varying vertical resolution. The variable resolution is such that for $\bar{z} > 10S$ the grid spacing $d\bar{z} \approx 0.03$ whereas near around and below the mountain top $d\bar{z} \approx S/10$. We will then systematically vary the other two nondimensional parameters of the problem S and J .

Concerning the variations in slope S , we have to assume that the mountain is well in the inner layer, a condition that needs to be satisfied for each harmonics. Although this poses a theoretical problem since in the infinite Fourier integrals $\bar{k}$ can become extremely large [and $\bar{\delta}(\bar{k})$ very small] it can be handled numerically once fixed the horizontal scale of the domain over which Fourier series approximate Fourier transform and once fixed the number of horizontal grid points. More specifically, if $\bar{k}_{\max} = N\pi/\bar{X}$, the condition that the associated inner-layer depth is larger than the mountain top is

$S/\bar{\delta}(\bar{k}_{\max}) \approx 1$ or less. Nevertheless, and for moderately large domain length $\bar{X}$ it happens that it is sufficient to satisfy this condition for the dominant wavenumbers, that is, to satisfy $S/\bar{\delta}(1) \gtrsim 1$. This guaranties that the dominant harmonics forced by the obstacle are still well viscous near the mountain top. In this case, numerical convergence was found up to around $S \approx 0.15$.

REFERENCES

- Adcroft, A., C. Hill, and J. Marshall, 1997: Representation of topography by shaved cells in a height coordinate ocean model. *Mon. Wea. Rev.*, **125**, 2293–2315, [https://doi.org/10.1175/1520-0493\(1997\)125<2293:ROTBSC>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1997)125<2293:ROTBSC>2.0.CO;2).
- Ayotte, K., 2008: Computational modelling for wind energy assessment. *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.*, **96**, 1571–1590, <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2008.02.002>.
- Baldwin, P., and P. H. Roberts, 1970: The critical layer in stratified shear flow. *Mathematika*, **17**, 102–119, <https://doi.org/10.1112/S0025579300002783>.
- Belcher, S. E., and N. Wood, 1996: Form and wave drag due to stably stratified turbulent flow over low ridges. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **122**, 863–902, <https://doi.org/10.1002/qj.49712253205>.
- Beljaars, A. C. M., J. Walmsley, and P. Taylor, 1987: A mixed spectral finite-difference model for neutrally stratified boundary-layer flow over roughness changes and topography. *Bound.-Layer Meteor.*, **38**, 273–303, <https://doi.org/10.1007/BF00122448>.

- , A. R. Brown, and N. Wood, 2004: A new parametrization of turbulent orographic form drag. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **130**, 1327–1347, <https://doi.org/10.1256/qj.03.73>.
- Benjamin, T. B., 1959: Shearing flow over a wavy boundary. *J. Fluid Mech.*, **6**, 161–205, <https://doi.org/10.1017/S0022112059000568>.
- Booker, J. R., and F. P. Bretherton, 1967: The critical layer for internal gravity waves in a shear flow. *J. Fluid Mech.*, **27**, 513–539, <https://doi.org/10.1017/S0022112067000515>.
- Charru, F., B. Andreotti, and P. Claudin, 2013: Sand ripples and dunes. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **45**, 469–493, <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-011212-140806>.
- Damiens, F., F. Lott, C. Millet, and R. Plougonven, 2018: An adiabatic foehn mechanism. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **144**, 1369–1381, <https://doi.org/10.1002/qj.3272>.
- Doyle, J. D., and Coauthors, 2011: An intercomparison of T-REX mountain-wave simulations and implications for mesoscale predictability. *Mon. Wea. Rev.*, **139**, 2811–2831, <https://doi.org/10.1175/MWR-D-10-05042.1>.
- Durran, D. R., 1990: Mountain waves and downslope winds. *Atmospheric Processes over Complex Terrain*, Meteor. Monogr., No. 23, Amer. Meteor. Soc., 59–83.
- , 1995: Pseudomomentum diagnostics for two-dimensional stratified compressible flow. *J. Atmos. Sci.*, **52**, 3997–4009, [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1995\)052<3997:PDFTDS>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1995)052<3997:PDFTDS>2.0.CO;2).
- Ekman, V. W., 1905: On the influence of the Earth's rotation on ocean-currents. *Arch. Math. Astron. Phys.*, **2**, 1–52.
- Eliassen, A., and E. Palm, 1961: On the transfer of energy in stationary mountain waves. *Geophys. Publ.*, **22**, 1–23.
- Engelund, F., 1970: Instability of erodible beds. *J. Fluid Mech.*, **42**, 225–244, <https://doi.org/10.1017/S0022112070001210>.
- Fowler, A. C., 2001: Dunes and drumlins. *Geomorphological Fluid Mechanics*, N. J. Balmforth and A. Provenzale, Eds., Springer, 430–454.
- Hazel, P., 1967: The effect of viscosity and heat conduction on internal gravity waves at a critical level. *J. Fluid Mech.*, **30**, 775–783, <https://doi.org/10.1017/S0022112067001752>.
- Hunt, J. C. R., S. Leibovich, and K. J. Richards, 1988: Turbulent shear flows over low hills. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **114**, 1435–1470, <https://doi.org/10.1002/qj.49711448405>.
- Jackson, P. S., and J. C. R. Hunt, 1975: Turbulent wind flow over low hill. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **101**, 929–955, <https://doi.org/10.1002/qj.49710143015>.
- Jiang, Q., J. D. Doyle, and R. B. Smith, 2006: Interaction between trapped waves and boundary layers. *J. Atmos. Sci.*, **63**, 617–633, <https://doi.org/10.1175/JAS3640.1>.
- Keller, T. L., 1994: Implications of the hydrostatic assumption on atmospheric gravity waves. *J. Atmos. Sci.*, **51**, 1915–1929, [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1994\)051<1915:IOTHAO>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1994)051<1915:IOTHAO>2.0.CO;2).
- Lott, F., 1998: Linear mountain drag and averaged pseudo-momentum flux profiles in the presence of trapped lee waves. *Tellus*, **50A**, 12–25, <https://doi.org/10.3402/tellusa.v50i1.14509>.
- , 2007: The reflection of a stationary gravity wave by a viscous boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, **64**, 3363–3371, <https://doi.org/10.1175/JAS4020.1>.
- , 2016: A new theory for downslope windstorms and trapped lee waves. *J. Atmos. Sci.*, **73**, 3585–3597, <https://doi.org/10.1175/JAS-D-15-0342.1>.
- , and M. Miller, 1997: A new subgrid-scale orographic drag parametrization: Its formulation and testing. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **123**, 101–127, <https://doi.org/10.1002/qj.49712353704>.
- Marshall, J., A. Adcroft, C. Hill, L. Perelman, and C. Heisey, 1997: A finite-volume, incompressible Navier Stokes model for studies of the ocean on parallel computers. *J. Geophys. Res.*, **102**, 5753–5766, <https://doi.org/10.1029/96JC02775>.
- Miles, J. W., 1957: On the generation of surface waves by shear flows. *J. Fluid Mech.*, **3**, 185–204, <https://doi.org/10.1017/S0022112057000567>.
- Ólafsson, H., and P. Bougeault, 1997: The effect of rotation and surface friction on orographic drag. *J. Atmos. Sci.*, **54**, 193–210, [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1997\)054<0193:TEORAS>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1997)054<0193:TEORAS>2.0.CO;2).
- Passaglia, P.-Y., P. Meunier, and S. Le Dizes, 2014: Response of a stratified boundary layer on a tilted wall to surface undulations. *J. Fluid Mech.*, **751**, 663–684, <https://doi.org/10.1017/jfm.2014.296>.
- Pithan, F., T. G. Shepherd, G. Zappa, and I. Sandu, 2016: Climate model biases in jet streams, blocking and storm tracks resulting from missing orographic drag. *Geophys. Res. Lett.*, **43**, 7231–7240, <https://doi.org/10.1002/2016GL069551>.
- Prandtl, L., 1952: *Essentials of Fluid Dynamics*. Blackie, 452 pp.
- Richard, E., P. Mascart, and E. C. Nickerson, 1989: The role of surface friction in downslope windstorms. *J. Appl. Meteor.*, **28**, 241–251, [https://doi.org/10.1175/1520-0450\(1989\)028<0241:TROSFI>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0450(1989)028<0241:TROSFI>2.0.CO;2).
- Sandu, I., P. Bechtold, A. Beljaars, A. Bozzo, F. Pithan, T. Shepherd, and A. Zadra, 2015: Impacts of parameterized orographic drag on the Northern Hemisphere winter circulation. *J. Adv. Model. Earth Syst.*, **8**, 196–211, <https://doi.org/10.1002/2015MS000564>.
- Scinocca, J., and T. Shepherd, 1992: Nonlinear wave-activity conservation laws and Hamiltonian structure for the two-dimensional anelastic equations. *J. Atmos. Sci.*, **49**, 5–28, [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1992\)049<0005:NWACLA>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1992)049<0005:NWACLA>2.0.CO;2).
- Sheridan, P. F., V. Horlacherxi, G. G. Rooney, P. Hignett, S. D. Mobbs, and S. Vosper, 2007: Influence of lee waves on the near surface flow downwind of the Pennines. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **133**, 1353–1369, <https://doi.org/10.1002/QJ.110>.
- , S. Vosper, and P. Brown, 2017: Mountain waves in high resolution forecast models: Automated diagnostics of wave severity and impact on surface winds. *Atmosphere*, **8**, 24, <https://doi.org/10.3390/atmos8010024>.
- Smith, F. T., 1973: Laminar flow over a small hump on a flat plate. *J. Fluid Mech.*, **57**, 803–824, <https://doi.org/10.1017/S002211207300203X>.
- Smith, R. B., S. Skubis, J. D. Doyle, A. S. Broad, C. Kiemle, and H. Volkert, 2002: Mountain waves over Mont Blanc: Influence of a stagnant boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, **59**, 2073–2092, [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(2002\)059<2073:MWOMBI>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(2002)059<2073:MWOMBI>2.0.CO;2).
- , Q. Jiang, and J. D. Doyle, 2006: A theory of gravity wave absorption by a boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, **63**, 774–781, <https://doi.org/10.1175/JAS3631.1>.
- Soufflet, C., F. Lott, and F. Damiens, 2019: Trapped mountain waves with critical level just below the surface. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **145**, 1503–1514, <https://doi.org/10.1002/qj.3507>.
- Sykes, R., 1978: Stratification effects in boundary layer flow over hills. *Proc. Roy. Soc. London*, **361A**, 225–243, <https://doi.org/10.1098/RSPA.1978.0100>.
- Van Duin, C. A., and H. Kelder, 1986: Internal gravity waves in shear flows at large Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, **169**, 293–306, <https://doi.org/10.1017/S0022112086000642>.
- Wood, N., and P. Mason, 1993: The pressure force induced by neutral, turbulent flow over hills. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **119**, 1233–1267, <https://doi.org/10.1002/qj.49711951402>.
- , A. R. Brown, and F. E. Hewer, 2001: Parameterizing the effects of orography on the boundary layer: An alternative to effective roughness lengths. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **127**, 759–777, <https://doi.org/10.1256/SMSQJ.57302>.

Annexe E

Mountain waves produced by a stratified shear flow with a boundary layer. Part II : Form drag, wave drag, and transition from downstream sheltering to upstream blocking

Submitted to Journal of the Atmospheric Sciences

François Lott, Bruno Deremble, and Clément Soufflet

Laboratoire de Météorologie Dynamique, PSL Research University,
École Normale Supérieure, Paris

The non hydrostatic version of the mountain flow theory presented in Part I is detailed. In the near neutral case, the surface pressure decreases when the flow crosses the mountain to balance an increase in surface friction along the ground. This produces a form drag which can be predicted qualitatively. When stratification increases, internal waves start to control the dynamics and the drag is due to upward propagating mountain waves as in part I. The reflected waves nevertheless add complexity to the transition. First, when stability increases, upward propagating waves and reflected waves interact destructively and low drag states occur. When stability increases further, the interaction becomes constructive and high drag state are reached. In very stable cases the reflected waves do not affect the drag much. Although the drag gives a reasonable estimate of the Reynolds stress, its sign and vertical profile are profoundly affected by stability. In the near neutral case the Reynolds stress in the flow is positive, with maximum around the top of the inner layer, decelerating the large-scale flow in the inner layer and accelerating it above. In the more stable cases, on the contrary, the large-scale flow above the inner layer is decelerated as expected for dissipated mountain waves. The structure of the flow around the mountain is also strongly affected by stability : it is characterized by non separated sheltering in the near neutral cases, by upstream blocking in the very stable case, and at intermediate stability by the presence of a strong but isolated wave crest immediately downstream of the ridge.

E.1 Introduction

The impact of small to medium scale mountains on atmospheric dynamics is extremely sensitive to the stratification. In neutral flows, the atmospheric boundary layer stress changes the flow and hence the surface pressure on either sides of the mountain. This produces a form drag that will in turn drive an exchange of momentum between the atmosphere and the earth surface (Hunt et al., 1988). This pressure drop in the lee side is associated with an effect of downstream sheltering. For obstacle with small slope the sheltering is non-separated, but for obstacles with larger slopes, this sheltering is separated (Reinert et al., 2007) and can cause the formation of banner clouds (Voigt and Wirth, 2013). The dynamical regime in the stably stratified case is fundamentally different because internal gravity waves create a drag even in the absence of boundary layer (Durrán, 1990). For small mountains, the asymmetry in the fields near the surface is such that the flow decelerates upstream, and it accelerates downstream. This can cause a form of non-separated upstream blocking with strong downslope winds ((Lott et al., 2020), Part I in the following). For large mountains, the situation is different because the associated waves approach breaking, a dynamics that produces separated upstream blocking and strong downslope winds (see recent examples in (Pokharel et al., 2017)). To summarize and from a qualitative point of view, two radically different flow regimes occur above a mountain : on the one hand we assist to the development of strong upslope winds in neutral case and on the other hand we see strong downslope winds in the stratified case.

Although the two type of dynamics in the neutral and stratified case are today quite well understood, it remains unclear what parameter characterizes the transition between the two regimes. For small mountains, the seminal paper of (Belcher and Wood, 1996) describes a transition from form drag to wave drag that occurs when the Froude number $F_m = U(h_m)/N(h_m)/L \approx 1$ (with U the incident flow velocity, and N the Brunt-Vaisala frequency measured at a middle layer height h_m ; see henceforth). When the Froude number $F_m < 1$, the dynamics is neutral and the drag is a form drag, but when $F_m > 1$ this form drag is replaced by a wave drag. (Belcher and Wood, 1996) also shows that the wave drag is that predicted by inviscid theory, if we take for incident flow parameters those at the middle layer height h_m , an altitude where the disturbance dynamics is inviscid and largely controlled by the curvature of the background wind. Mathematically, for a mountain of characteristic horizontal scale L , h_m satisfies,

$$\frac{u_0(h_m)}{u_{0zz}(h_m)} = L^2, \quad (\text{E.1})$$

where u_0 and u_{0zz} are the background wind and wind curvature respectively. While (Belcher and Wood, 1996) do not describe the transition in terms of upstream/downstream

separation (upstream separation indicating blocking), the theoretical analysis of (Ambaum and Marshall, 2005) shows that neutral flows separate on the lee side, and that this separation is largely inhibited in the stable case, or, more precisely that it occurs much further in the lee beyond the first lee wave trough and upstream the mountain crest. This lee side separation and more generally the interaction between the boundary layer and mountain waves are central in the development of downstream rotors (Doyle and Durran, 2002; Sachsperger et al., 2016).

Maybe because early theories on boundary layer flow over mountains demand quite involved asymptotic analysis (Belcher and Wood, 1996), subsequent theories on the interactions between boundary layer and mountain have often used simplified representation of the boundary layer to remain tractable (Smith et al., 2006; Lott, 2007). To a certain extent, these simplifications mirror the simplifications made in the literature on stable boundary layer over complex terrain. In such studies, the inviscid dynamics often boils down to that above the boundary layer all the mountain waves propagate upward within being reflected back (Belcher and Wood, 1996; Weng, 1997; Athanasiadou, 2003). There is nevertheless a growing effort in the community to analyze the interaction between boundary layers and mountain waves (Tsiringakis et al., 2017; Lapworth and Osborne, 2019). These efforts are motivated by the fact that present day numerical weather prediction and climate models still make errors in the representation of subgrid-scale orography (SSO) and because these errors are at scales where neutral dynamics and stratified dynamics can no longer be treated separately (see discussion in (Serafin et al., 2018) and in Part I). Also, a remaining issue in SSO parameterizations still concern the representation of the vertical distribution of the wave Reynolds stress (Tsiringakis et al., 2017; Lapworth and Osborne, 2019) and existing theories do not tell much about this.

To better understand this vertical distribution, we argued in Part I that the theory in the simplest case with constant eddy viscosity ν needed to be developed beyond the historical papers (see (Smith, 1973) for the neutral case and (Sykes, 1978) for the stratified case). In fact, we showed in Part I that with constant viscosity, we were able to predict the wave field with uniform approximation over the entire domain. This permits to calculate altogether the mountain drag, the wave Reynolds stress vertical profile, and the non-separated structure of the flow within the boundary layer (in the form of upstream blocking and downslope winds). Using these solutions we showed that the wave pressure drag and stress can be deduced from mountain wave linear theory if we evaluate the background flow at the "inner layer" scale,

$$\delta = \left(\frac{\nu L}{u_{0z}} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (\text{E.2})$$

with u_{0z} the background wind shear. We insist that this inner scale is distinct from a boundary layer height, the latter being infinite in the constant shear case. In Part I, we

also showed that the wave Reynolds stress that radiates aloft the inner layer (which total depth is estimated around 5δ) is only a fraction of the surface pressure drag : internal waves are substantially dissipated when they travel through the inner layer and part of the wave drag is deposited near the top of the inner layer. Last, we showed in Part I that for mountains with height $H \ll \delta$, the wave stress is extracted from the boundary layer rather than from the surface as in the inviscid case. This means that the interaction between the boundary layer and the obstacle accelerates the large-scale flow near the surface as waves are emitted. Finally, for mountain with height $H \approx \delta$, we showed that upstream blocking and downslope winds occur within the boundary layer. Because we built our analysis on linear dynamics, these phenomena correspond to non-separated dynamics by construction. They actually mirror the non-separated intensified upslope winds and downstream sheltering that occurs in the neutral case.

A first limit of Part I, is that we only considered upward propagating internal waves above the inner layer. This is a serious limitation, reflected waves potentially affecting the boundary layer when they return to the ground. A second limit is that we only studied constant shear within the hydrostatic approximation. In this situation the properties of the inviscid solution makes that we cannot study weakly stratified situations and analyze the transition from neutral to stratified flows. The purpose of the present paper is therefore to work with a non hydrostatic model in order to analyze the case where all the harmonics are reflected. As we shall see in section 2, this happens with constant infinite shear in the non hydrostatic Boussinesq approximation. In section 3, we describe a characteristic wave field and extend the mountain wave drag predictor proposed in Part I to the neutral case. We demonstrate that we need to substitute it by a form drag for small values of the Richardson number ($J < 1$). We analyze the transition from neutral to stratified situation for small slopes in section 4 and show that reflected waves can interact destructively or constructively with the surface when $J \approx 1$ yielding low drag and high drag states. We then analyze in section 5 the action of the waves on the large-scale flow and show that this action differs between the neutral cases and the stratified cases. In section 6 we describe situations with slopes comparable to the inner layer scale. In this case neutral flows are characterized by strong upslope winds and non-separated sheltering in the lee-side, whereas in stable case we recover the strong downslope winds and upstream blocking found in Part. I. All our results have been validated with the full non-linear model used in Part I, the results of which are mentioned all along the paper. We conclude and present perspectives in section 6.

E.2 Theory

Many elements are reminiscent of Part I, so we recall in this section the general formulation and only emphasize the differences. As in Part I we consider a background

flow with constant shear u_{0z} and constant stratification ρ_{0z}

$$u_0(z) = u_{0z}z; \quad \rho_0(z) = \rho_r + \rho_{0z}z, \quad (\text{E.3})$$

incident on a Gaussian ridge of characteristic length L :

$$h(x) = H e^{-x^2/(2L^2)}. \quad (\text{E.4})$$

We then consider obstacles well embedded into the "inner" layer and use linear equations that we normalize by introducing the "outer" scaling :

$$(x, z) = L(\bar{x}, \bar{z}), (u', w') = u_{0z}L(\bar{u}, \bar{w}), (p', b') = (\rho_r u_{0z}^2 L^2 \bar{p}, u_{0z}^2 L \bar{b}) \quad (\text{E.5})$$

where the "primes" are for disturbances and the overbar for dimensionless variables. All notations are standard : x, z, u' , and w' have their conventional definitions, and b' is the disturbance buoyancy. The relevant non-dimensional parameters are

$$J = -\frac{g\rho_{0z}}{\rho_r u_{0z}^2}, \quad P_r = \frac{\nu}{\kappa}, \quad S = \frac{H}{L}, \quad \text{and} \quad \bar{\nu} = \frac{\nu}{u_{0z} L^2} \quad (\text{E.6})$$

with J a Richardson number, P a Prandtl number, S a slope parameter and $\bar{\nu}$ an inverse Reynolds number respectively. Henceforth, we only work with non-dimensional variables and the stationary 2D Boussinesq linear equations we use are as in part I except that the hydrostatic approximation (Eq. 5 in part I) is replaced by the equation for the vertical acceleration :

$$\bar{z} \partial_{\bar{x}} \bar{w} = -\partial_{\bar{z}} \bar{p} + \bar{b} + \bar{\nu} \partial_{\bar{z}}^2 \bar{w}, \quad (\text{E.7})$$

At the topography, we use the three boundary conditions :

$$\bar{h}(\bar{x}) + \bar{u}(\bar{x}, \bar{h}) = \bar{w}(\bar{x}, \bar{h}) = J\bar{h}(\bar{x}) + \bar{b}(\bar{x}, \bar{h}) = 0 \text{ at } \bar{h} = S e^{-x^2/2}. \quad (\text{E.8})$$

The Boussinesq equations satisfy a wave action budget that is slightly different than in the hydrostatic case :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\underbrace{\bar{z} \frac{\partial_{\bar{z}} \bar{u} - \partial_{\bar{x}} \bar{w}}{J} \bar{b}}_A + \frac{\bar{b}^2}{2J} + \frac{\bar{u}^2 - \bar{w}^2}{2} \right)}_{F^x} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \underbrace{\bar{u} \bar{w}}_{F^z} = \underbrace{\frac{\bar{\nu}}{J} \bar{b} \partial_{\bar{z}}^2 (\partial_{\bar{z}} \bar{u} - \partial_{\bar{x}} \bar{w}) + P^{-1} \frac{\bar{\nu}}{J} (\partial_{\bar{z}} \bar{u} - \partial_{\bar{x}} \bar{w}) \partial_{\bar{z}}^2 \bar{b}}_Q, \quad (\text{E.9})$$

where A is the pseudo-momentum, F^x and F^z the horizontal and vertical components of the pseudo-momentum flux, and Q its production/destruction by dissipative processes.

E.2.1 Outer solution

We then search inflow solutions in term of Fourier transform, and for high Reynolds number ($\bar{\nu} \ll 1$), the dynamics is inviscid at leading order. In this case the Fourier transform of the vertical velocity, $\bar{\mathbf{w}}(\bar{k}, \bar{z})$, is solution of Bessels's equation,

$$\bar{\mathbf{w}}_{\bar{z}\bar{z}} + \left(\frac{J}{\bar{z}^2} - \bar{k}^2 \right) \bar{\mathbf{w}} = 0. \quad (\text{E.10})$$

When the horizontal wavenumber $\bar{k} > 0$, and $J > \frac{1}{4}$ a bounded solution in $\bar{z} \rightarrow \infty$ can be expressed in terms of the Hankel function,

$$\bar{\mathbf{w}}_I(\bar{k}, \bar{z}) = i \sqrt{\frac{\pi \bar{k} \bar{z}}{2}} e^{-\frac{\mu \pi}{2}} H_{i\mu}^{(1)}(i \bar{k} \bar{z}) \text{ where } \mu = \sqrt{|J - \frac{1}{4}|}. \quad (\text{E.11})$$

A first major difference with the hydrostatic case is that we can now treat the weakly stratified situations when $J < \frac{1}{4}$ simply by changing μ in $i\mu$. Also, in (E.11) we introduce the notation $\bar{\mathbf{w}}_I$, to indicate that we choose a particular inviscid solution that is scaled to behave like an exponentially decaying solution of "unit" amplitude in the far-field (see 9.2.3 in (Abramowitz and Stegun, 1964b)) :

$$\bar{\mathbf{w}}_I(\bar{k}, \bar{z}) \underset{\bar{z} \rightarrow \infty}{\approx} e^{-\bar{k}\bar{z}}. \quad (\text{E.12})$$

This also shows that all harmonics are trapped, which is another major difference compared to the hydrostatic case (in the latter case, all waves propagate upward without reflection). From this and the limiting form of the Hankel functions when $\bar{z} \rightarrow 0$ (9.1.9 in (Abramowitz and Stegun, 1964b)) we write the asymptotic form of the inviscid solution near the surface as

$$\bar{\mathbf{w}}_I(\bar{k}, \bar{z}) \underset{\bar{z} \rightarrow 0}{\approx} \bar{\mathbf{w}}_M(\bar{k}, \bar{z}) = \bar{a}_1(\bar{k}) \bar{z}^{1/2-i\mu} + \bar{a}_2(\bar{k}) \bar{z}^{1/2+i\mu}, \quad (\text{E.13})$$

with

$$\bar{a}_1(\bar{k}) = -\frac{i\sqrt{\pi}}{\sinh(\mu\pi) \Gamma(1-i\mu)} \left(\frac{\bar{k}}{2} \right)^{1/2-i\mu}, \quad \bar{a}_2(\bar{k}) = \bar{a}_1(\bar{k})^*. \quad (\text{E.14})$$

E.2.2 Inner solutions

To get the solutions in the inner layer, we introduce the scaling

$$\bar{z} = \bar{\delta} \tilde{z}, (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}}) = (\tilde{\mathbf{u}}, \bar{\delta} \tilde{\mathbf{w}}), (\bar{p}, \bar{b}) = (\bar{\delta} \tilde{p}, \tilde{b}) \text{ where } \bar{\delta} = \left(\frac{\bar{\nu}}{\bar{k}} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (\text{E.15})$$

At leading order and with this scaling, the inner layer Equations are as in Part I (Eq. 16) they can be reduced to a 6th order equation for $\tilde{\mathbf{w}}$ (Part I Eq. 17). Among its six independent solutions, only the three with asymptotic form in $\tilde{z} \gg 1$,

$$\tilde{\mathbf{w}}_{12} \approx \tilde{a}_1(\bar{k}) \tilde{z}^{1/2-i\mu} + \tilde{a}_2(\bar{k}) \tilde{z}^{1/2+i\mu}, \quad \tilde{\mathbf{w}}_3 \approx \tilde{z}^{-5/4} e^{-\frac{2\sqrt{i}}{3} \tilde{z}^{3/2}}, \quad \tilde{\mathbf{w}}_4 \approx \tilde{z}^{-9/4} e^{-\frac{2\sqrt{iPr}}{3} \tilde{z}^{3/2}}. \quad (\text{E.16})$$

need to be considered. As in Part I they are evaluated numerically and the matching with the outer layer is simply done by taking,

$$\tilde{a}_1(\bar{k}) = \frac{\bar{a}_1}{\bar{k}} \bar{\delta}^{-1/2-i\mu}, \quad \tilde{a}_2(\bar{k}) = \tilde{a}_1(\bar{k})^*. \quad (\text{E.17})$$

This guaranties that $\tilde{\mathbf{w}}_{12}$ matches the inviscid solution $\bar{\mathbf{w}}_I$ according to (E.13) and (E.15).

Next, we assume that the mountain is well in the inner layer, and use the inner solution to satisfy the lower boundary conditions (E.8). The one on the vertical velocity writtes

$$\bar{w}(\bar{x}, \bar{h}) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{k} \bar{\delta}(\bar{k}) \left(f_{12}(\bar{k}) \tilde{\mathbf{w}}_{12}(\bar{k}, \tilde{h}) + f_3(\bar{k}) \tilde{\mathbf{w}}_3(\tilde{h}) + f_4(\bar{k}) \tilde{\mathbf{w}}_4(\tilde{h}) \right) e^{i\bar{k}\bar{x}} d\bar{k} = 0, \quad (\text{E.18})$$

where $\tilde{h}(\bar{x}, \bar{k}) = \bar{h}(\bar{x})/\bar{\delta}(\bar{k})$. Inversion of this integral equation together with the two integral equations expressing the boundary conditions on $\bar{u}(h)$ and $\bar{b}(h)$ permits to evaluate $f_{12}(\bar{k})$, $f_3(\bar{k})$ and $f_4(\bar{k})$.

Since we are now in the presence of an exact inviscid solution connected to a viscous solution via the matching function $\bar{\mathbf{w}}_M(\bar{k}, \bar{z})$ we can follow conventional techniques to build a uniform approximation. To do so we express the viscous solution in terms of the outer variables, e.g. by writing

$$\bar{\mathbf{w}}_V(\bar{k}, \bar{z}) = \bar{k} \bar{\delta}(\bar{k}) \left[f_{12}(\bar{k}) \tilde{\mathbf{w}}_{12}(\bar{k}, \bar{z}/\bar{\delta}(\bar{k})) + f_3(\bar{k}) \tilde{\mathbf{w}}_3(\bar{k}, \bar{z}/\bar{\delta}(\bar{k})) + \tilde{\mathbf{w}}_4(\bar{k}, \bar{z}) \tilde{\mathbf{w}}_4(\bar{k}, \bar{z}/\bar{\delta}(\bar{k})) \right] \quad (\text{E.19})$$

and use for $\bar{\mathbf{w}}(\bar{k}, \bar{z})$ the uniform approximation,

$$\bar{\mathbf{w}}(\bar{k}, \bar{z}) = f_{12} \left[\bar{\mathbf{w}}_I(\bar{k}, \bar{z}) - \bar{\mathbf{w}}_M(\bar{k}, \bar{z}) \right] + \bar{\mathbf{w}}_V(\bar{k}, \bar{z}), \quad (\text{E.20})$$

again with similar expression for the horizontal wind and buoyancy.

The solutions used in the following are then obtained via inverse Fourier transform of the uniform approximations, and as in Part I, we validate these solutions with nonlinear simulations done with the MITgcm (Marshall et al., 1997)s. The configuration of this model is essentially the same as in Part I except that we run it in non hydrostatic mode. All the 2D fields (winds, buoyancy, streamfunction) from this model are essentially the same as from the linear model so we will only plot 2D fields from the linear model.

E.3 Transition from form drag to wave drag

In Figure E.1 we plot the flow response when the slope parameter $S = 0.01$, is much smaller than the inner layer scale $\bar{\delta}(1) = 0.1$ and the Richardson number $J = 4$. We also take a Prandtl number $\text{Pr} = 0.5$, that will stay unchanged in the remainder of the analysis. Henceforth, we will call this case the reference case. Note that these values are the same as in Part I to allow direct comparison between Fig E.1 here and its hydrostatic counterpart (Fig.1 of Part I).

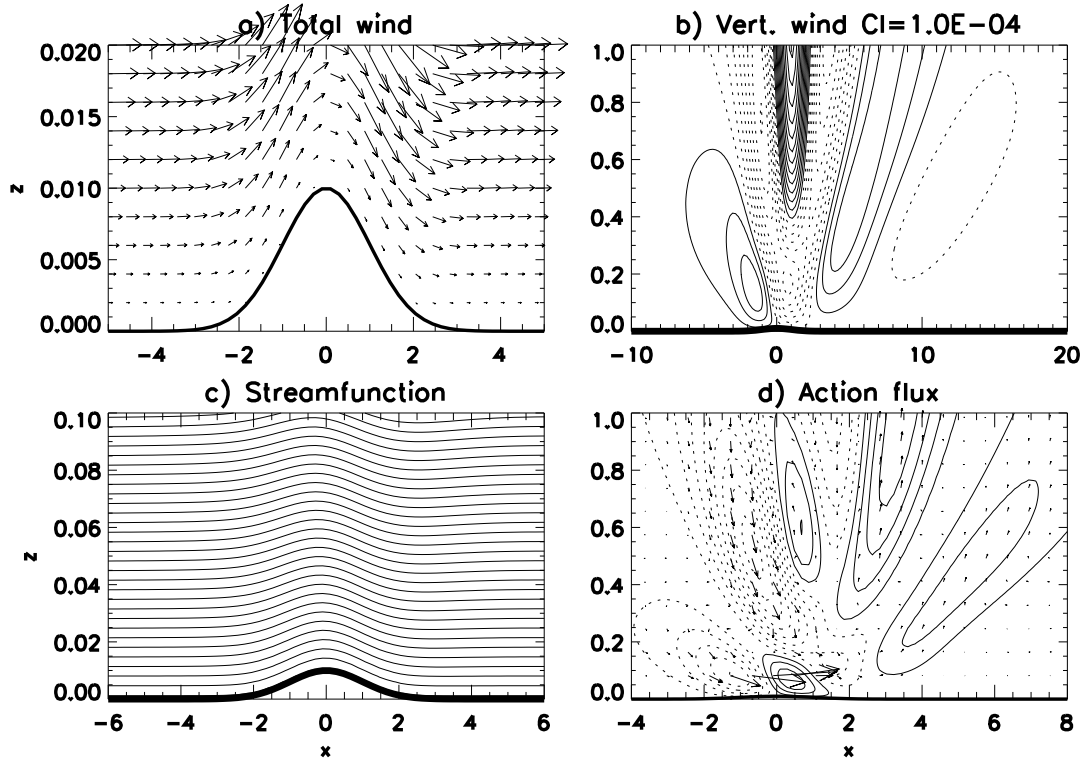


FIGURE E.1 – Physical fields predicted by the viscous theory when $J = 4$, $S = 0.01$, $\bar{\delta} = 0.1$. a) Total wind vector ($\bar{z} + \bar{u}, \bar{w}$); b) vertical wind $\bar{w}$; c) total streamfunction $\bar{\psi}$ defined by $\partial_{\bar{z}}\bar{\psi} = \bar{z} + \bar{u}$; d) Vertical flux of action F^z and action flux vector (F^x, F^z). In Figs. E.1b and E.1d the negative values are dashed.

The total wind at low level in Fig. E.1a contours well the obstacle and is null at the surface as expected. We plot in Fig. E.1b the vertical velocity field which highlights a system of gravity waves. In the upstream region $x < 0$, the phase lines tilt against the shear indicating upward propagation, directly above the hill the wave phase lines are more vertical, and downstream they become tilted in the direction of the shear indicating downward propagation. Such structure suggests that the mountain produces upward propagating gravity waves, that these waves are entirely reflected in the far field (the waves phase lines tilt downstream is almost symmetric and opposite to their upstream tilt) and are almost entirely absorbed when they return to the surface (the wave amplitude rapidly decreases when horizontal distance increases). It is important to note that the amplitude of the vertical velocity is of the same order of magnitude as the amplitude predicted in Part I, which is the amplitude predicted by linear theory if we take for the incident wind at the ground the average of the incident wind over the inner layer scale ($\bar{\delta}(1)/2$). In Part I, we interpreted that by the fact that over a distance equal to the inner layer scale, the viscous dynamics produces a flow which streamlines have vertical displacements with amplitude near the mountain height (as we see here in Fig. E.1c), as a consequence, the waves produced by the inner layer resemble to the inviscid waves produced by a lower boundary located at $\bar{h}(\bar{x}) + \bar{\delta}$.

Finally, the wave action flux in Fig. E.1d confirms that the waves are produced indirectly by the distortion of the inner layer rather than directly by the mountain (the wave action flux in the inner layer is oriented from one side of the mountain to the other). The orientation of the wave action flux aloft the inner layer also corroborates the fact that over the obstacle the waves propagate upward (the wave action flux points toward the surface), whereas the wave field downstream is dominated by downward propagating wave (the wave action flux is everywhere pointing upward, $F^z > 0$). The fact that $F^z > 0$ almost everywhere in the lee side is also consistent with the fact that there is almost no surface reflection on the ground. This contrasts with part I, where downward waves were excluded by construction, such that in the hydrostatic case, we had $F^z < 0$ almost everywhere above the inner layer (see Fig. 1d in Part I).

In part I, we noticed that predicting the wave amplitude with linear inviscid theory was also useful to scale the mountain waves stress and drag,

$$\overline{u} \overline{w}(\bar{z}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{u}(\bar{x}, \bar{z}) \overline{w}(\bar{x}, \bar{z}) d\bar{x}, \quad Dr = - \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{p}(\bar{x}, \bar{h}) \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} d\bar{x}, \quad (\text{E.21})$$

More precisely, we found that the predictor

$$Dr_{GWP} = \sqrt{J} \bar{\delta}(1) S^2 / 2 \quad (\text{E.22})$$

provides a good description of the drag for a large range of slopes S and for Richardson numbers $J > 0.25$. This scaling was however based on hydrostatic theory, such that we cannot use it for neutral cases ($J \ll 1$). In neutral cases, the mountain drag becomes a form drag due to dissipative loss of pressure when the air passes over the obstacle. To estimate this drag we next make the conventional hypothesis that in the inner layer the pressure varies little in the vertical direction and that the horizontal pressure gradient balances the divergence of the viscous stress,

$$\partial_{\bar{x}} \bar{p} \approx \bar{\nu} \partial_{\bar{z}}^2 \bar{u}. \quad (\text{E.23})$$

If we then remark that in the inner layer the wind increases from 0 (at the surface) to $\bar{h}$ (at the top of the inner layer), then the surface wind shear should be on the order of $\bar{h}/\bar{\delta}(1)$. We can then estimate the form drag as a vertical integral of (E.23) over the inner layer. We get $\bar{\delta}(1) \partial_{\bar{x}} \bar{p} \approx -\bar{\nu} \bar{h}/\bar{\delta}(1) = -\bar{\delta}(1)^2 \bar{h}$. We can thus estimate the form drag as

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{h} \partial_{\bar{x}} \bar{p} d\bar{x} \approx - \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\delta}(1) \bar{h}^2 = -\sqrt{\pi} \bar{\delta}(1) S^2. \quad (\text{E.24})$$

Because this evaluation is qualitative and because the transition between stratified cases and near neutral cases is more likely occurring near $J = 1$ we simplify the form drag predictor in

$$Dr_{FDP} = \bar{\delta}(1) S^2 / 2. \quad (\text{E.25})$$

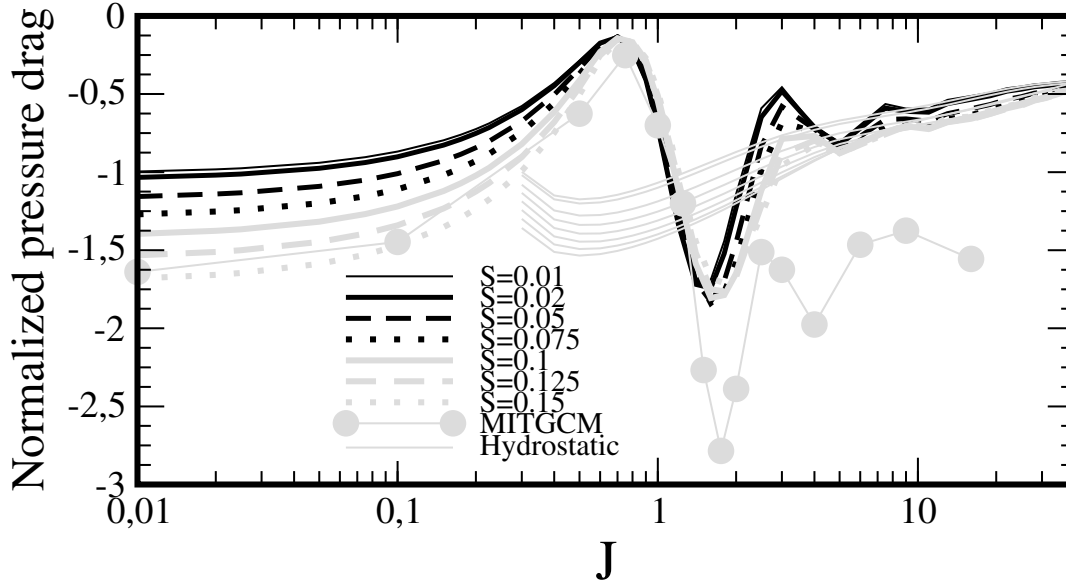


FIGURE E.2 – Surface pressure drag normalized by the predictor Dr_P in (E.26). The hydrostatic pressure drag normalized by Dr_{GWP} from Part I is also shown for comparison (thin grey lines). The grey dots are from the MITgcm with $S = 0.15$.

Then, following (Belcher and Wood, 1996) we take as predictor of the mountain drag and stress the maximum between (E.22) and (4.5) :

$$Dr_P = \text{Max} \left(1, \sqrt{J} \right) \bar{\delta}(1) S^2 / 2. \quad (\text{E.26})$$

We plot in Fig. E.2 the mountain drag normalized by this predictor for several values of J and S . We see that the predictor is quite accurate (the ratio is around 1) at least when the flow is stable ($J > 3$) or neutral ($J < 0.1$). But, there is a transition zone when $J \approx 1$ which seems quite rich dynamically. This transition is characterized by a relative maximum of the drag near $J = 1.6$, and a relative minimum near $J = 0.7$ that were completely absent in the hydrostatic case (see the thin gray lines in Fig. E.2 and remember again that in Part I, (i) the cases with $J < 0.25$ were not treated, and (ii) that the reflected waves were absent by construction). To understand the physics behind the minimum and maximum values of the drag for intermediate values of J , it is important to include the reflected waves in the discussion. We recall that the altitude of dominant turning point of the wave field, which is the turning point above which the dominant wavenumber $\bar{k} = 1$ becomes evanescent is $\bar{z}_T(1) = \sqrt{J}$ and so increases with J . As J diminishes, waves are reflected closer to the surface.

The local minimum and maximum of the drag in Fig. E.2 correspond to a situation where the reflections occur at altitudes close to the mountain horizontal scale (in dimensional units $z_T(1/L) = \sqrt{J}L$). In these situations, the reflected waves interact destructively and constructively with the emitted waves to produce low drag and high drag states respectively. When the reflections occur higher, the reflected waves return to

the surface further in the lee, so their effect on the surface pressure becomes small over the hill compared to that of the upward propagating waves.

E.4 Low drag and high drag states

To better appreciate what occurs when the flow is weakly or moderately stratified, we plot in Fig. E.3 the vertical velocity and action flux in a weakly stratified case ($J = 0.1$), and in the two moderately stratified cases ($J = 0.7$ and $J = 1.7$) where the drag is respectively lower and larger than the predictor. To ease comparison, we keep all the other parameters similar to those of the reference case (Fig. E.1). In the weakly stratified case, the vertical velocity is positive on the upstream side of the ridge and negative on the downstream side. This pattern is similar to the neutral solutions in the inviscid case with no vertical tilt. We also see in Fig. E.3b that the wave action flux stays confined inside the inner layer : there is almost no flux of action through the height $z = 5\bar{\delta}(1)$, which measures the inner layer depth (see Part. I). We conclude that in the neutral case, the drag cannot have an inviscid wave origin. For $J = 0.7$ in Fig. E.3c one sees that the vertical velocity field has still quite vertical phase lines but it extends significantly higher above the inner layer than in the case with $J = 0.1$. Above the inner layer, one sees in Fig. E.3d that there is substantial pseudo-momentum fluxes, pointing upward on the windward side and downward on the leeward side. Although the local directions of pseudo-momentum fluxes do not quantify directions of propagation without ambiguity (in theory an action flux is proportional to action times group velocity after averaging over a wave phase), it is quite systematic that for mountain waves a negative vertical component of the wave action flux ($F^z < 0$) indicate upward propagation (although there are variations from one wave crest to the other, as seen in Fig. 1d of Part I). Accordingly, we state that regions above the inner layer where $F^z > 0$ correspond to downward propagating waves, as seen in Fig. E.3d on the downwind side of the hill. Still in Fig. E.3d, we notice that regions with $F^z > 0$ occupy about the same area as regions with $F^z < 0$, as if the downward propagating waves were balancing almost exactly the upward propagating waves in terms of vertical flux of momentum. This balance probably explains the minimum in pressure drag seen when $J \approx 0.7$ in Fig. E.2.

The case with $J = 1.7$ in Fig. E.3e) presents substantial phase line tilt, and a system of internal waves with two crest and trough. Upstream and above the ridge, the pseudo-momentum flux is quite strong and points downward, as expected for upward propagating waves. There is also large pseudo momentum flux above the inner layer that points upward but this flux is located well on the downwind side, i.e. as if the reflected wave were returning to the surface further downstream than in the case with $J = 0.7$. This is of course consistent with the fact that the turning altitude increases with J . Interestingly, it seems that the downward waves in this case return to the surface near

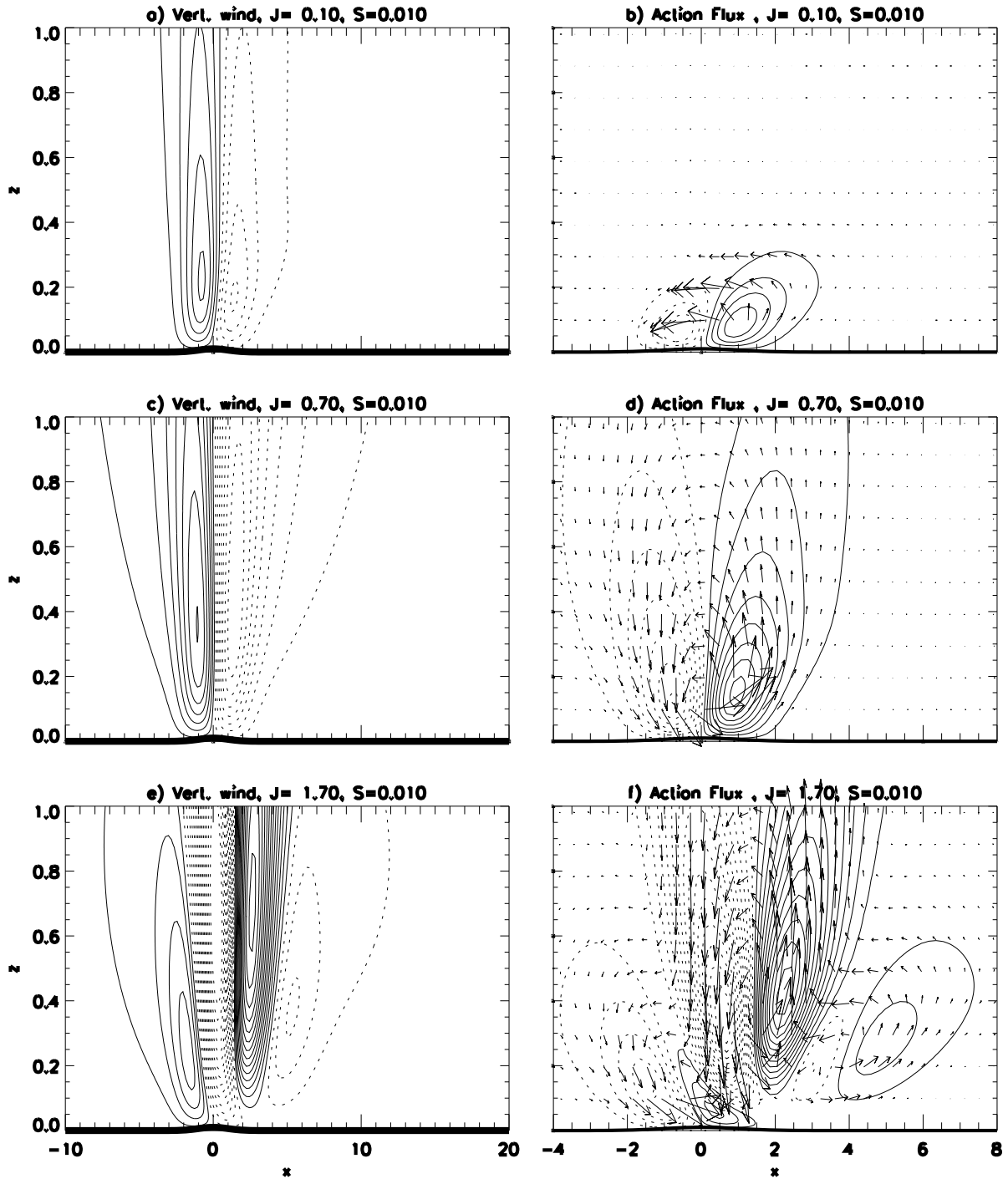


FIGURE E.3 – Vertical velocity (left panels) and action flux (vertical component F^z and vector (F^x, F^z) for $S = 0.01$. Contour interval for w in a), c) and e) is as in Fig. E.1b). Contour interval for vertical component of the wave action flux is as in Fig. E.1d).

enough downstream the mountain to interfere with the surface boundary condition and to produces large pseudo momentum fluxes and drag.

E.5 Waves Reynolds stress

The predictors of the surface pressure drag may not be very useful if we take them as a measure of the effect of the mountain on the large-scale flow, as generally done in mountain meteorology (see discussion in Part I). The reason is that, in a steady state, the wave pseudomomentum flux vector within the inner layer is oriented from the upstream side of the ridge toward the downstream side. This situation differs from the inviscid case where this flux goes through the surface produces an exchange of momentum between the fluid and the solid ground in the form of a pressure drag. In the hydrostatic case, we concluded that the acceleration that balances the gravity wave drag is not communicated to the earth surface but rather to the flow below around the inner layer scale. As we shall see, this is even more problematic in the non hydrostatic case because mountain drag does not necessarily lead to flow deceleration above the inner layer scale.

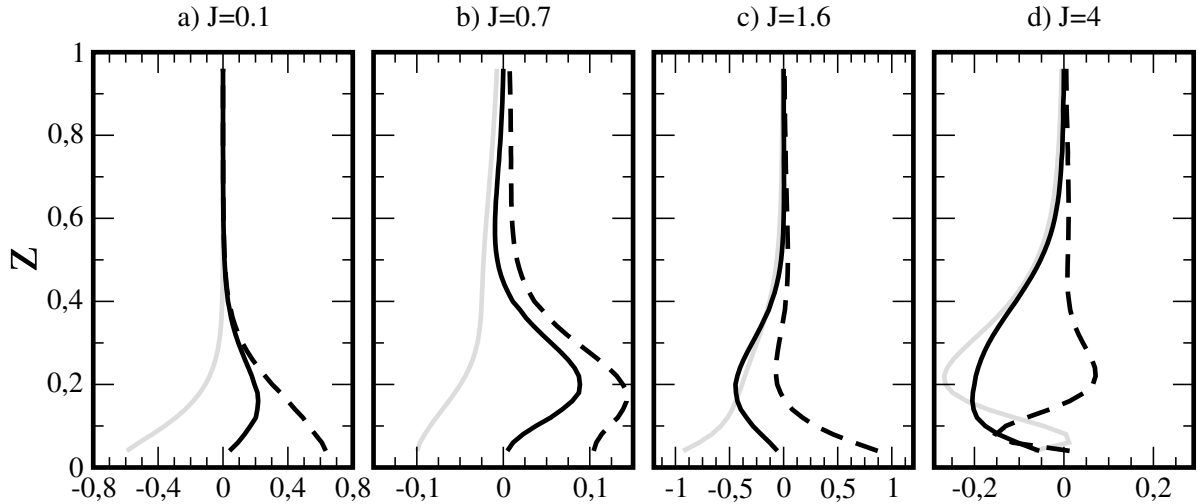


FIGURE E.4 – Vertical profiles of the Reynolds stress (thick line), pressure drag through streamlines (thick grey), and viscous drag through streamlines (thick dashed), see the balance Eq. E.27 and for $S = 0.01$, $\bar{\delta} = 0.1$.

To understand how mountains interact with the large-scale flow, we plot in Fig. E.4 the vertical profile of the wave Reynolds stress (in black), the pressure stress (gray) and the viscous stress (dashed) acting along displaced streamlines. These are the three terms of the balance equation derived in Part I :

$$\overline{u} \overline{w} = -\overline{p} \partial_x \overline{\eta} - \overline{\nu} \left(\overline{\eta} \partial_z^2 \overline{u} \right), \quad \text{where} \quad \overline{z} \partial_x \overline{\eta} = \overline{w}, \quad (\text{E.27})$$

and which can only be estimated above the mountain top S . We see in Fig. E.4 that at low level, the Reynolds stress is small and there is a balance between pressure and viscous

stress. In the inner layer, the magnitude of the Reynolds stress increases with height, reaches an extreme and vanishes when $\bar{z} \rightarrow \infty$ (as expected because all harmonics are evanescent in $\bar{z} \rightarrow \infty$). What is remarkable is that in the near neutral case $J = 0.1$ as well as in the low drag case $J = 0.7$, the Reynolds stress $\overline{u'w'} > 0$ is positive in the inner layer such that it should produce a deceleration of the large-scale flow in the lower part of the inner layer (for instance around $\bar{z} \approx \bar{\delta}(1)$) and an acceleration of the large-scale flow in the upper part (for instance around $\bar{z} \approx 3\bar{\delta}(1)$). In the stratified case ($J > 1$), we recover the standard result that waves accelerate the large-scale flow in the lower part of the inner layer and decelerate the large-scale flow above, as expected for mountain gravity wave drag (Figs. E.4c and E.4d).

It is clear from Fig. E.4 that the interesting quantity is the extreme value of the wave Reynolds stress rather than the pressure drag itself. In fact, these extremes are always smaller in amplitude, and even of opposite sign to the pressure drag. We further explore the parameter space, and we plot in Fig. E.5 these extremes normalized by the predictor of the pressure drag (E.26) for different values of the slope and stability. We conclude that our predictors overestimate by a factor 3 the extreme value of the Reynolds stress and more importantly that the sign of the Reynolds stress extreme changes around $J = 1$: there is flow acceleration above the inner layer scale $\bar{\delta}$ when $J < 1$ and deceleration due to gravity wave drag when $J > 1$. These acceleration/deceleration are balanced by opposing deceleration/acceleration below $\bar{\delta}(1)$, at least when $S \ll \bar{\delta}(1)$, but these start to be partly transferred to the ground when $S \approx \bar{\delta}(1)$, as in Part I (not shown).

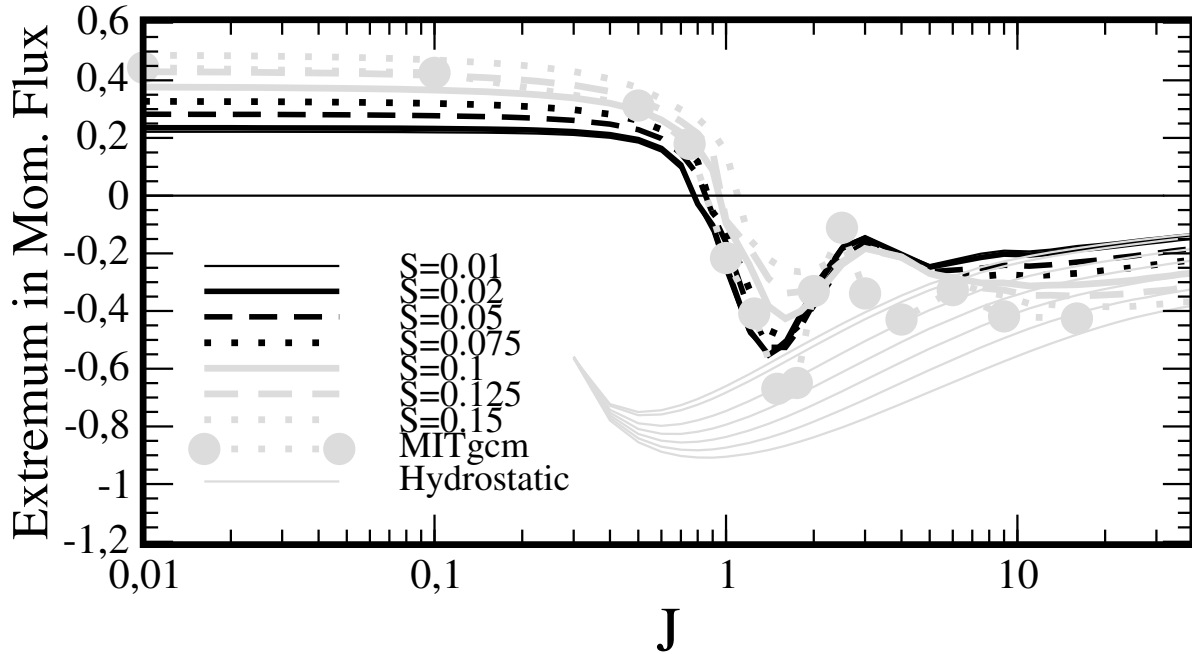


FIGURE E.5 – Extrema in Reynolds stress normalized by the predictor Dr_P . Hydrostatic values normalized by D_{GWP} from Part I are also shown for comparison (thin grey lines). Grey dots are from the MITgcm with $S = 0.15$.

E.6 Transition from downstream sheltering to upstream blocking when $S \approx \bar{\delta}$

To analyze further what occurs in the more nonlinear situations we next consider cases where the slope parameter becomes comparable to the inner layer scale $\bar{\delta}(1)$. We first consider the upper limit $S = 0.185$ beyond which our theoretical model often diverges when $\bar{\delta}(1) = 0.1$. We choose $J = 0.01$ to illustrate the neutral case and $J = 9$ to illustrate the stratified case. We plot in Fig. E.6 the stream function and the wind field for these two cases as well as in the intermediate case where the reflected waves impact strongly the surface conditions near the mountain ($J = 1.7$). In the near neutral case (Fig. E.6a and E.6b) the wind is intensified on the windward side and small downwind, which correspond to a form of non-separated sheltering. When stratification increases, this upslope/downslope asymmetry reduces, up to around $J = 1$: the low drag case with $J \approx 0.7$ for instance is almost symmetric between the upstream and the downstream side (not shown).

In situations with high drag ($J = 1.7$) the upslope/downslope asymmetry is not much pronounced, at least on the streamlines in Fig. E.6c near the surface. The most remarkable behavior is the pronounced ridge occurring downstream around $\bar{x} = 4$, which corresponds to the strong positive vertical wind anomaly already present in the case with small slop and around the same place (Fig. E.3e). This pronounced oscillation cannot be attributed to trapped lee waves because these waves are not present in our configuration : trapped waves are always related to neutral modes of KH instability when the wind vanishes at the surface (Lott, 2016), and these modes do not exist when the Richardson number is constant according the Miles-Howard theorem (Miles, 1961; Howard, 1961). The absence of trapped modes differs from the study of (Keller, 1994), who first solved the Bessel's equation to analyze inviscid trapped waves in constant shear cases. In (Keller, 1994) nevertheless, the wind at the surface is non zero. (Lott, 2016) proposes that when the surface wind does not vanish, the surface wind shear is infinite and the surface Richardson number is null, so downward propagating stationary waves can be entirely reflected and neutral modes can exist.

In situation with strong stratification, ($J = 9$, Figs. E.6e and E.6f), we recover the upstream blocking and downslope winds present in the hydrostatic case in Part I, although in this case all the waves are reflected toward the ground. We do not discuss the results from the MITgcm, but we have used this model in all the configurations with $S = 0.15$ and $S = 0.185$ presented in this paper and the solutions from the non-linear model are almost identical to those shown in Fig. E.6 (see also the thorough comparison in part I, where the validation of the theory by the model was excellent).

We propose one last index to characterize the downstream sheltering versus upstream blocking as a function of S and J . We define this index as the ratio between the wind

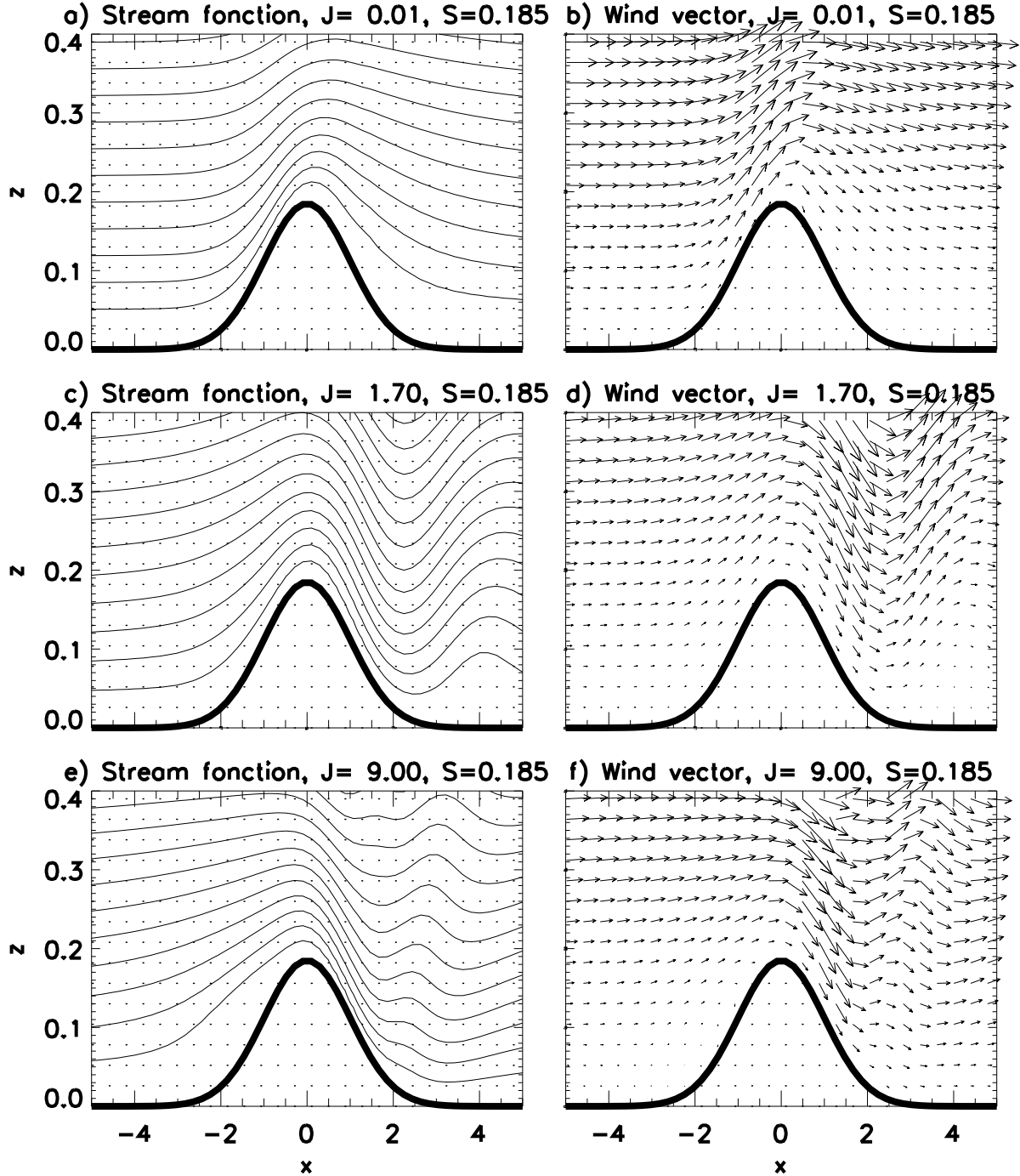


FIGURE E.6 – Stream function defined by $\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{z}} = \bar{u} + \bar{z}$ and total wind when $S = 0.185$ and $\bar{\delta} = 0.1$. a) and b) $J=0.01$; c) and d) $J=1.70$; e) and f) $J=9$.

amplitude along the downwind slope and the upwind slope of the ridge defined as

$$\underbrace{\text{Max}}_{\bar{z} < \frac{2\bar{h}}{3}, 0 < \bar{x} < 2} \sqrt{(\bar{z} + \bar{u})^2 + \bar{w}^2} \bigg/ \underbrace{\text{Max}}_{\bar{z} < \frac{2\bar{h}}{3}, -2 < \bar{x} < 0} \sqrt{(\bar{z} + \bar{u})^2 + \bar{w}^2}, \quad (\text{E.28})$$

and we plot this index for several values of J and S in Fig. E.7. As in the hydrostatic case and for large values of J , this index can easily reach values around 4 or 5 for slopes near the inner layer depth and larger. This ratio is always around 1 when $J \approx 1$, as in

the hydrostatic case, except near the critical value $J = 1.7$ which corresponds to the high drag scenario. For $J < 1$, the ratio becomes smaller than 1, which corresponds to non-separated sheltering. The smallest values we obtain are around 0.5 for $J = 0.01$ and slopes $S \approx 0.15$.

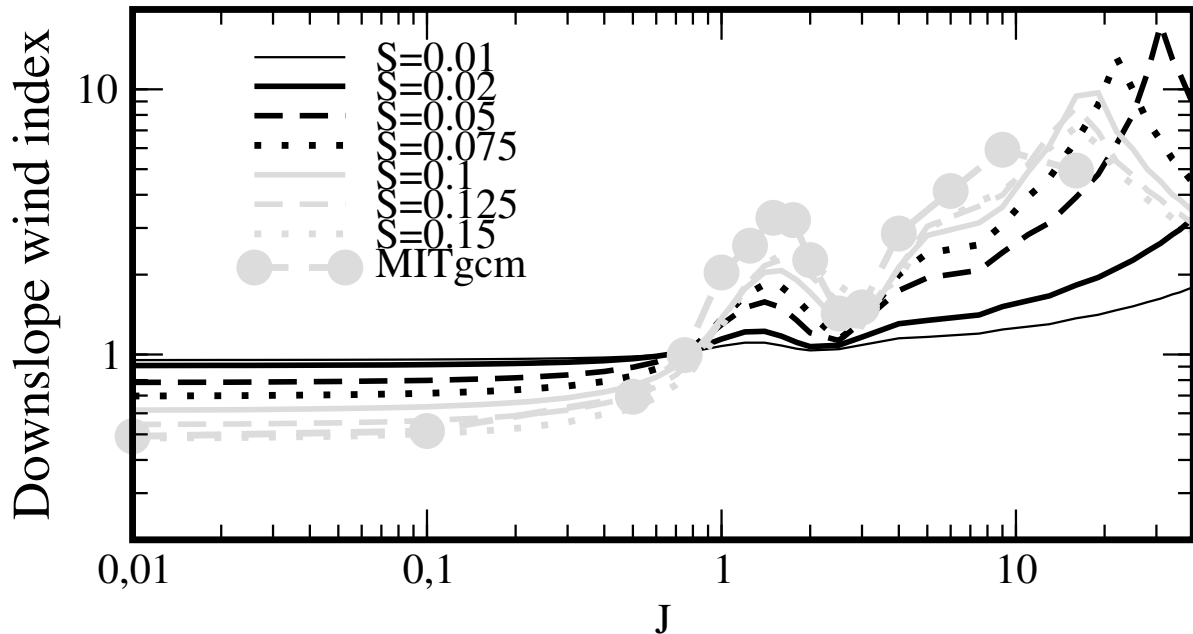


FIGURE E.7 – Downslope sheltering versus upstream blocking index defined as the ratio between the max downslope wind amplitude and the max upslope wind amplitude (see Eq. E.28). Grey dots are from the MITgcm with $S = 0.15$.

E.7 Conclusion

One central question in this article is to understand how small scale mountains interact with the large-scale flow in the neutral and stratified cases. A motivation is that state of the art numerical weather prediction and climate models parameterize subgrid scale orography in the neutral case using techniques derived from boundary layer parameterization schemes (Beljaars et al., 2004), and treat the stratified cases separately and using low level wave drag schemes (Lott and Miller, 1997b). The choice of one parameterization versus the other is enforced by adhoc criteria : for instance, subgrid-scale orography of horizontal scales below 5 km are often treated with boundary layer parameterizations, whereas orography with larger horizontal length scales are exclusively treated with low level wave drag schemes. The issue is that since the two types of schemes have profound impact on the performance of these models (Sandu et al., 2016; Pithan et al., 2016), it seems worthwhile revisiting the criteria for the transition between the two regimes. Moreover, the standard model resolution of atmospheric models is such that we are today in a grey zone between resolved and unresolved mesoscale orographic flows (Vosper et al., 2016).

In this context, we demonstrated in this paper how to compute the drag in the neutral and in the stratified case. In the stratified case, we showed that the pressure drag is a wave drag to be computed at the inner layer scale, and in the neutral case, it must be replaced by a form drag, and we showed that the transition between the stratified and neutral case is well captured by the Richardson number (see Eq. E.26). This result is consistent with (Belcher and Wood, 1996), except that they captured the transition with a Froude number. Also, (Belcher and Wood, 1996) chose to evaluate the large-scale fields (to compute the drag) at a middle layer height h_m whereas here we evaluate the large-scale fields at the inner layer scale δ . To apply Eq. E.26 in a general circulation model, one should therefore evaluate the altitude at which disturbance dissipation equals advection for a given mountain length. For instance, if the boundary layer scheme uses first order closure with vertical diffusion coefficients, the coefficients can be linearized around the large-scale resolved state. For a small perturbation of given horizontal scale L , the inner layer depth is that where advection by the resolved wind equals the disturbance in boundary layer tendency.

So on the one hand, our results essentially extend the hydrostatic results in Part I by applying a correction for $J < 1$, on the other hand, the vertical distribution of the stress is clearly different in the hydrostatic and non hydrostatic regime. This difference is in part due to the low level confinement of the waves in the non hydrostatic equations such that there is no gravity wave drag in the far field by construction. As we see in Fig. E.4c and Fig. E.4d nevertheless, the wave drag is deposited in the upper part of the inner layer (roughly between $2\bar{\delta}(1) < \bar{z} < 5\bar{\delta}(1)$, and its integrated value (the maximum of the stress) is well predicted by the hydrostatic theory. In terms of parameterization, we conclude that the vertically integrated effect of trapped waves is about that of freely propagating waves but should be distributed in the upper part of the inner layer. As we observed in Part I, a fraction of the drag is extracted from the lower part of the inner layer for very small mountains $S \ll \bar{\delta}(1)$, (or from the ground for larger $S \approx \bar{\delta}(1)$, see Part I).

A first surprising result occurs in the stratified case ($J > 1$) since we show that with trapped waves the drag is deposited in the inner layer rather than below turning altitudes. This is to be contrasted with papers where trapped waves are not dissipated (basically in the absence of surface critical levels here), and where the wave Reynolds stress decay with altitude up to the turning heights, and to balance a downstream horizontal flux of pseudo-momentum (Georgelin and Lott, 2001). An important difference with (Georgelin and Lott, 2001) is that our solutions do not include pure trapped waves (see discussion in section 6). As we shall see in part III, when such modes are present, the depth of the inner layer will still be that over which the wave drag is redistributed once the waves are all dissipated which question the way low level drag due to trapped lee waves should be parameterized in models (Teixeira et al., 2013a).

A second surprising result is that when the flow is weakly stratified ($J < 1$), the Reynolds stress is positive in the inner layer and so accelerates the large-scale flow in the upper part of the inner layer, and decelerates the flow in the lower part of the inner layer without exchanging momentum with the surface. It seems that the effect of mountains is more to force a large-scale contouring of small-scale obstacles than a deceleration. This is strongly reminiscent of the concept of envelope orography introduced by (Wallace et al., 1983), where subgrid-scale orography is not necessarily represented by pure drag forces but rather by forces that higher up the lower bound of the model without necessarily decelerating the large-scale flow (Lott, 1999). This low-level deceleration and high-level acceleration is the opposite of what occurs in stable cases where the stress is due to gravity waves.

Finally we also found that in intermediate cases, when the characteristic turning height of the background flow is sufficiently close to the surface, $\bar{z}_T = \sqrt{J} \approx 1$, the reflected waves deeply affect the surface condition producing low drag state and high drag states, here at $J \approx 0.7$ and $J \approx 1.4$.

Our results also indicate that mountain waves modify the boundary layer when the mountain height is comparable to the inner layer scale ($s \approx \bar{\delta}(1)$). At small $J \ll 1$, the obstacle produces a region of calm flow in the inner layer on the lee side, while the flow is accelerated along the upstream side, that corresponds to a form of non-separated sheltering. At large $J \gg 1$, we observe the opposite situation : the inner layer flow on the upstream side is blocked, whereas the downslope winds are substantial in the inner layer on the lee side. The high drag state is characterized by a strong and unique wave crest downstream near the top of the inner layer, illustrating without ambiguity that strong lee waves signal near the surface do not necessarily call the presence of trapped modes.

A clear limit of our results is that they assume linear fields above the surface and small slopes, so it could be argued that they can not be applied in the context of parameterization of real mountains. To moderate such critics, we can recall that we have tried to extent our calculation up to the limit where the mountain height and the inner layer height compare. We can also recall that parameterizations are always based on linear theories, and are then adapted to nonlinear configurations by comparing the vertical scales of disturbances and the height of the obstacles (criteria that always involve the parameters J and S that we use here). In all these parameterizations, the linear values are always upper bounds of the drag. Interestingly, linear theories are also used to predict these bounds, essentially via their prediction of the separation points (Smith, 1989; Lott and Miller, 1997a; Ambaum and Marshall, 2005). In this context, the present article enforces the point that linear theories can be used to predict nonlinear fields, since here a linear theory with nonlinear boundary condition accurately reproduce the sheltering and the blocking occurring in the more nonlinear cases. Finally, and this is

maybe a significant point, it is worth recalling that with increasing horizontal resolution, the height of subgrid scale mountains decreases so they are more and more located within the boundary layer, maybe rendering our linear dissipative formalism more and more adapted.

Acknowledgement

This work was supported by the Laboratoire de Recherche Conventionné “Yves Ro-card”, a collaborative unit between CEA and Ecole Normale Supérieure.

Bibliographie

- Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1964a). *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55. Courier Corporation.
- Abramowitz, M. J. and Stegun, I. A. (1964b). Handbook of mathematical functions (9th edition). *Dover Publ. Inc NEw-York*, page 1045pp.
- Adcroft, A., Campin, J., Dutkiewicz, S., Evangelinos, C., Ferreira, D., Forget, G., Fox-Kemper, B., Heimbach, P., Hill, C., Hill, E., et al. (2008). Mitgcm user manual. *Massachusetts Institute of Technology*.
- Adcroft, A., Hill, C., and Marshall, J. (1997). Representation of topography by shaved cells in a height coordinate ocean model. *Monthly Weather Review*, 125(9) :2293–2315.
- Ambaum, M. and Marshall, D. (2005). The effects of stratification on flow separation. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 62(7) :2618–2625.
- Athanassiadou, M. (2003). Wave and form drag : their relation in the linear gravity wave regime. *Tellus A : Dynamic Meteorology and Oceanography*, 55(2) :173–180.
- Baldwin, P. and Roberts, P. (1970). The critical layer in stratified shear flow. *Mathematika*, 17(1) :102–119.
- Barnes, H. C., Zagrodnik, J. P., McMurdie, L. A., Rowe, A. K., and Houze Jr, R. A. (2018). Kelvin–helmholtz waves in precipitating midlatitude cyclones. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 75(8) :2763–2785.
- Barros, A. P. and Lettenmaier, D. P. (1994). Dynamic modeling of orographically induced precipitation. *Reviews of geophysics*, 32(3) :265–284.
- Belcher, S. E. and Wood, N. (1996). Form and wave drag due to stably stratified turbulent flow over low ridges. *QJRMS*, 122 :863–902.
- Beljaars, A. C., Brown, A. R., and Wood, N. (2004). A new parametrization of turbulent orographic form drag. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 130(599) :1327–1347.

- Bender, C. M. and Orszag, S. A. (1978). *Advanced mathematical methods for scientists and engineers I : Asymptotic methods and perturbation theory*. Springer Science & Business Media.
- Booker, J. R. and Bretherton, F. P. (1967). The critical layer for internal gravity waves in a shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 27(03) :513–539.
- Bougeault, P. and Lacarrere, P. (1989). Parameterization of orography-induced turbulence in a mesobeta-scale model. *Monthly weather review*, 117(8) :1872–1890.
- Bramberger, M., Dörnbrack, A., Wilms, H., Ewald, F., and Sharman, R. (2020). Mountainwave turbulence encounter of the research aircraft halo above iceland. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*.
- Bretherton, F. P. (1969). Momentum transport by gravity waves. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 95(404) :213–243.
- Brewer, A. (1949). Evidence for a world circulation provided by the measurements of helium and water vapour distribution in the stratosphere. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 75(326) :351–363.
- Broad, A. (2002). Momentum flux due to trapped lee waves forced by mountains. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society : A journal of the atmospheric sciences, applied meteorology and physical oceanography*, 128(584) :2167–2173.
- Brown, A., Athanassiadou, M., and Wood, N. (2003). Topographically induced waves within the stable boundary layer. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society : A journal of the atmospheric sciences, applied meteorology and physical oceanography*, 129(595) :3357–3370.
- Chimonas, G. and Nappo, C. J. (1989). Wave drag in the planetary boundary layer over complex terrain. *Boundary-layer meteorology*, 47(1-4) :217–232.
- Chow, F. K., De Wekker, S. F., and Snyder, B. J. (2013). *Mountain weather research and forecasting : recent progress and current challenges*. Springer.
- Clark, T. and Peltier, W. (1984). Critical level reflection and the resonant growth of nonlinear mountain waves. *Journal of the atmospheric sciences*, 41(21) :3122–3134.
- Clark, T. L. and Peltier, W. (1977). On the evolution and stability of finite-amplitude mountain waves. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 34(11) :1715–1730.
- Damiens, F., Lott, F., Millet, C., and Plougonven, R. (2018). An adiabatic foehn mechanism. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 144(714) :1369–1381.

- Dobson, G. M. B. (1956). Origin and distribution of the polyatomic molecules in the atmosphere. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 236(1205) :187–193.
- Dörnbrack, A. and Dürbeck, T. (1998). Turbulent dispersion of aircraft exhausts in regions of breaking gravity waves. *Atmospheric Environment*, 32(18) :3105–3112.
- Dörnbrack, A. and Nappo, C. J. (1997). A note on the application of linear wave theory at a critical level. *Boundary-layer meteorology*, 82(3) :399–416.
- Doyle, J. D. and Durran, D. R. (2002). The dynamics of mountain-wave-induced rotors. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 59(2) :186–201.
- Doyle, J. D. and Durran, D. R. (2004). Recent developments in the theory of atmospheric rotors. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 85(3) :337–342.
- Doyle, J. D., Gaberšek, S., Jiang, Q., Bernardet, L., Brown, J. M., Dörnbrack, A., Filaus, E., Grubišić, V., Kirshbaum, D. J., Knoth, O., et al. (2011). An intercomparison of t-rex mountain-wave simulations and implications for mesoscale predictability. *Monthly weather review*, 139(9) :2811–2831.
- Drazin, P. G. (1958). The stability of a shear layer in an unbounded heterogeneous inviscid fluid. *JFM*, 4 :214–224.
- Durran, D. R. (1990). Mountain waves and downslope winds. In *Atmospheric processes over complex terrain*, pages 59–81. Springer.
- Durran, D. R. (1995a). Do breaking mountain waves decelerate the local mean flow? *Journal of the atmospheric sciences*, 52(22) :4010–4032.
- Durran, D. R. (1995b). Pseudomomentum diagnostics for two-dimensional stratified compressible flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 52(22) :3997–4009.
- Durran, D. R. and Klemp, J. B. (1982). The effects of moisture on trapped mountain lee waves. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 39(11) :2490–2506.
- Durran, D. R. and Klemp, J. B. (1983). A compressible model for the simulation of moist mountain waves. *Monthly Weather Review*, 111(12) :2341–2361.
- Eliassen, A. (1960). On the transfer of energy in stationary mountain waves. *Geophys. Publ.*, 22 :1–23.
- Elvidge, A. D. and Renfrew, I. A. (2016). The causes of foehn warming in the lee of mountains. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 97(3) :455–466.

- Elvidge, A. D., Sandu, I., Wedi, N., Vosper, S. B., Zadra, A., Boussetta, S., Bouyssel, F., van Niekerk, A., Tolstykh, M. A., and Ujiie, M. (2019). Uncertainty in the representation of orography in weather and climate models and implications for parameterized drag. *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*, 11(8) :2567–2585.
- Finnigan, J. (1999). A note on wave-turbulence interaction and the possibility of scaling the very stable boundary layer. *Boundary-Layer Meteorology*, 90(3) :529–539.
- Garvert, M. F., Smull, B., and Mass, C. (2007). Multiscale mountain waves influencing a major orographic precipitation event. *Journal of the atmospheric sciences*, 64(3) :711–737.
- Georgelin, M. and Lott, F. (2001). On the transfer of momentum by trapped lee waves. case of the iop3 of pyrex. *JAS*, 58 :3563–3580.
- Gill, A. E. (2016). *Atmosphere—ocean dynamics*. Elsevier.
- Grasmick, C. and Geerts, B. (2020). Detailed dual-doppler structure of kelvin-helmholtz waves from an airborne profiling radar over complex terrain. part i : Dynamic structure. *Journal of the Atmospheric Sciences*.
- Hazel, P. (1967). The effect of viscosity and heat conduction on internal gravity waves at a critical level. *Journal of Fluid Mechanics*, 30(4) :775–783.
- Héreil, P. and Stein, J. (1999). Momentum budgets over idealized orography with a non-hydrostatic anelastic model. i : Two-dimensional flows. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 125(558) :2019–2051.
- Hills, M. O. and Durran, D. R. (2012). Nonstationary trapped lee waves generated by the passage of an isolated jet. *Journal of the atmospheric sciences*, 69(10) :3040–3059.
- Hills, M. O., Durran, D. R., and Blossey, P. N. (2016). The dissipation of trapped lee waves. part ii : The relative importance of the boundary layer and the stratosphere. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 73(3) :943–955.
- Hong, S.-Y., Noh, Y., and Dudhia, J. (2006). A new vertical diffusion package with an explicit treatment of entrainment processes. *Monthly weather review*, 134(9) :2318–2341.
- Howard, L. N. (1961). Note on a paper of john w miles. *J. Fluid Mech.*, 10 :509–512.
- Hunt, J., Leibovich, S., and Richards, K. (1988). Turbulent shear flows over low hills. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 114(484) :1435–1470.
- Jackson, P. and Hunt, J. (1975). Turbulent wind flow over a low hill. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 101(430) :929–955.

- Jackson, P., Mayr, G., and Vosper, S. (2013). Dynamically-driven winds. In *Mountain weather research and forecasting*, pages 121–218. Springer.
- Jiang, Q., Doyle, J. D., and Smith, R. B. (2006). Interaction between trapped waves and boundary layers. *Journal of the atmospheric sciences*, 63(2) :617–633.
- Keller, T. L. (1994). Implications of the hydrostatic assumption on atmospheric gravity waves. *Journal of the atmospheric sciences*, 51(13) :1915–1929.
- Keller, T. L., Trier, S. B., Hall, W. D., Sharman, R. D., Xu, M., and Liu, Y. (2015). Lee waves associated with a commercial jetliner accident at denver international airport. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*, 54(7) :1373–1392.
- Kingsmill, D. E., Persson, P. O. G., Haimov, S., and Shupe, M. D. (2016). Mountain waves and orographic precipitation in a northern colorado winter storm. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 142(695) :836–853.
- Lapworth, A. and Osborne, S. (2019). Gravity-wave drag in the stable boundary layer over moderate terrain. *Boundary-Layer Meteorol .*, 171 :175–189.
- Lester, P. F. and Fingerhut, W. A. (1974). Lower turbulent zones associated with mountain lee waves. *Journal of Applied Meteorology*, 13(1) :54–61.
- Li, L. and Chen, Y.-L. (2017). Numerical simulations of two trapped mountain lee waves downstream of oahu. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*, 56(5) :1305–1324.
- Lilly, D. (1972). Wave momentum flux—a garp problem. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 53(1) :17–24.
- Lindzen, R. S. (1988). Instability of plane parallel shear flow (toward a mechanistic picture of how it works). *pure and applied geophysics*, 126(1) :103–121.
- Long, R. R. (1953). Some aspects of the flow of stratified fluids : I. a theoretical investigation. *Tellus*, 5(1) :42–58.
- Lothon, M., Druilhet, A., Bénéch, B., Campistron, B., Bernard, S., and Said, F. (2003). Experimental study of five föhn events during the mesoscale alpine programme : From synoptic scale to turbulence. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society : A journal of the atmospheric sciences, applied meteorology and physical oceanography*, 129(592) :2171–2193.
- Lott, F. (1998). Linear mountain drag and averaged pseudo-momentum flux profiles in the presence of trapped lee waves. *Tellus A : Dynamic Meteorology and Oceanography*, 50(1) :12–25.

- Lott, F. (1999). Alleviation of stationary biases in a gcm through a mountain drag parameterization scheme and a simple representation of mountain lift forces. *Monthly weather review*, 127(5) :788–801.
- Lott, F. (2007). The reflection of a stationary gravity wave by a viscous boundary layer. *Journal of the atmospheric sciences*, 64(9) :3363–3371.
- Lott, F. (2016). A new theory for downslope windstorms and trapped mountain waves. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 73(9) :3585–3597.
- Lott, F., Deremble, B., and Soufflet, C. (2020). Mountain waves produced by a stratified boundary layer flow. part i : Hydrostatic case. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 77(5) :1683–1697.
- Lott, F. and Miller, M. (1997a). A new subgrid scale orographic drag parameterization ; its testing in the ecmwf model. *QJRM*S, 123 :101–127.
- Lott, F. and Miller, M. J. (1997b). A new subgrid-scale orographic drag parametrization : Its formulation and testing. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 123(537) :101–127.
- Lott, F. and Teitelbaum, H. (1992). Nonlinear dissipative critical level interaction in a stratified shear flow : Instabilities and gravity waves. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 66(1-4) :133–167.
- Lott, F. and Teitelbaum, H. (1993). Topographic waves generated by a transient wind. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 50(16) :2607–2624.
- Louis, J.-F. (1979). A parametric model of vertical eddy fluxes in the atmosphere. *Boundary-Layer Meteorology*, 17(2) :187–202.
- Markowski, P. and Richardson, Y. (2011). *Mesoscale meteorology in midlatitudes*, volume 2. John Wiley & Sons.
- Marshall, J., Adcroft, A., Hill, C., Perelman, L., and Heisey, C. (1997). A finite-volume, incompressible navier stokes model for studies of the ocean on parallel computers. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 102(C3) :5753–5766.
- Mass, C. F. and Ovens, D. (2019). The northern california wildfires of 8–9 october 2017 : The role of a major downslope wind event. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 100(2) :235–256.
- Matsuno, T. (1971). A dynamical model of the stratospheric sudden warming. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 28(8) :1479–1494.

- Mellor, G. L. and Yamada, T. (1982). Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems. *Reviews of Geophysics*, 20(4) :851–875.
- Meybeck, M., Green, P., and Vörösmarty, C. (2001). A new typology for mountains and other relief classes. *Mountain Research and Development*, 21(1) :34–45.
- Miglietta, M. M., Zecchetto, S., and De Biasio, F. (2013). A comparison of wrf model simulations with sar wind data in two case studies of orographic lee waves over the eastern mediterranean sea. *Atmospheric research*, 120 :127–146.
- Miles, J. W. (1961). On the stability of heterogeneous shear flow. *J. Fluid. Mech.*, 10 :496–508.
- Nance, L. B. and Durran, D. R. (1997). A modeling study of nonstationary trapped mountain lee waves. part i : Mean-flow variability. *Journal of the atmospheric sciences*, 54(18) :2275–2291.
- Nance, L. B. and Durran, D. R. (1998). A modeling study of nonstationary trapped mountain lee waves. part ii : Nonlinearity. *Journal of the atmospheric sciences*, 55(8) :1429–1445.
- Nappo, C. J. and Chimonas, G. (1992). Wave exchange between the ground surface and a boundary-layer critical level. *Journal of the atmospheric sciences*, 49(13) :1075–1091.
- Nikurashin, M. and Legg, S. (2011). A mechanism for local dissipation of internal tides generated at rough topography. *Journal of Physical Oceanography*, 41(2) :378–395.
- Ólafsson, H. and Bougeault, P. (1997). The effect of rotation and surface friction on orographic drag. *Journal of the atmospheric sciences*, 54(1) :193–210.
- Olver, F. W. (1974). *Asymptotics and special functions*. Academic press.
- Palmer, T., Shutts, G., and Swinbank, R. (1986). Alleviation of a systematic westerly bias in general circulation and numerical weather prediction models through an orographic gravity wave drag parametrization. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 112(474) :1001–1039.
- Peltier, W. and Clark, T. (1979). The evolution and stability of finite-amplitude mountain waves. part ii : Surface wave drag and severe downslope windstorms. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 36(8) :1498–1529.
- Peng, M. S. and Thompson, W. T. (2003). Some aspects of the effect of surface friction on flows over mountains. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society : A journal of the atmospheric sciences, applied meteorology and physical oceanography*, 129(593) :2527–2557.

- Pithan, F., Shepherd, T. G., Zappa, G., and Sandu, I. (2016). Missing orographic drag leads to climate model biases in jet streams, blocking and storm tracks. *Geophysical Research Letters*, 43(13) :7231–7240.
- Pokharel, B., Geerts, B., Chu, X., and Bergmaier, P. (2017). Profiling radar observations and numerical simulations of a downslope wind storm and rotor on the lee of the medicine bow mountains in wyoming. *Atmosphere*, 8 :39.
- Queney, P. (1947). *Theory of perturbations in stratified currents with applications to air flow over mountain barriers*, volume 23. University of Chicago Press.
- Ralph, F. M., Neiman, P. J., Keller, T. L., Levinson, D., and Fedor, L. (1997). Observations, simulations, and analysis of nonstationary trapped lee waves. *Journal of the atmospheric sciences*, 54(10) :1308–1333.
- Reinecke, P. A. and Durran, D. R. (2009). Initial-condition sensitivities and the predictability of downslope winds. *Journal of the atmospheric sciences*, 66(11) :3401–3418.
- Reinert, D., Wirth, V., Eichhorn, J., and Panhans, W.-G. (2007). A new large-eddy simulation model for simulating air flow and warm clouds above highly complex terrain. part i : The dry model. *Boundary-layer meteorology*, 125(1) :109–132.
- Richard, E., Mascart, P., and Nickerson, E. C. (1989). The role of surface friction in downslope windstorms. *Journal of Applied Meteorology*, 28(4) :241–251.
- Rotach, M. W., Arpagaus, M., Colfescu, I., Cuxart, J., De Wekker, S. F., Evans, M. J., Grubišić, V., Kalthoff, N., Karl, T., Kirshbaum, D. J., et al. (2020). Multi-scale transport and exchange processes in the atmosphere over mountains. programme and experiment. *Innsbruck university press*.
- Sachsperger, J., Serafin, S., and Grubišić, V. (2015). Lee waves on the boundary-layer inversion and their dependence on free-atmospheric stability. *Frontiers in Earth Science*, 3 :70.
- Sachsperger, J., Serafin, S., and Grubisic, V. (2016). Dynamics of rotor formation in uniformly stratified two-dimensional flow over a mountain. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 142(696) :1201–1212.
- Sachsperger, J., Serafin, S., Grubišić, V., Stiperski, I., and Paci, A. (2017). The amplitude of lee waves on the boundary-layer inversion. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 143(702) :27–36.
- Salmond, J. and McKendry, I. (2005). A review of turbulence in the very stable nocturnal boundary layer and its implications for air quality. *Progress in Physical Geography*, 29(2) :171–188.

- Sandu, I., Bechtold, P., Beljaars, A., Bozzo, A., Pithan, F., Shepherd, T. G., and Zadra, A. (2016). Impacts of parameterized orographic drag on the northern hemisphere winter circulation. *Journal of advances in modeling earth systems*, 8(1) :196–211.
- Sandu, I., Beljaars, A., Bechtold, P., Mauritsen, T., and Balsamo, G. (2013). Why is it so difficult to represent stably stratified conditions in numerical weather prediction (nwp) models? *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*, 5(2) :117–133.
- Sandu, I., van Niekerk, A., Shepherd, T. G., Vosper, S. B., Zadra, A., Bacmeister, J., Beljaars, A., Brown, A. R., Dörnbrack, A., McFarlane, N., et al. (2019). Impacts of orography on large-scale atmospheric circulation. *npj Climate and Atmospheric Science*, 2(1) :1–8.
- Sauer, J. A., Muñoz-Esparza, D., Canfield, J. M., Costigan, K. R., Linn, R. R., and Kim, Y.-J. (2016). A large-eddy simulation study of atmospheric boundary layer influence on stratified flows over terrain. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 73(7) :2615–2632.
- Scinocca, J. and Shepherd, T. (1992). Nonlinear wave-activity conservation laws and hamiltonian structure for the two-dimensional anelastic equations. *Journal of the atmospheric sciences*, 49(1) :5–28.
- Scorer, R. (1949). Theory of waves in the lee of mountains. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 75(323) :41–56.
- Scorer, R. S. (1997). *Dynamics of meteorology and climate*. Wiley Chichester.
- Serafin, S., Adler, B., Wekker, J. C. S. D., Grisogono, A. G. B., Kalthoff, N., Kirshbaum, D., Rotach, M., and I. Stiperski, J. S., Vecenaj, Z., and Zardi, D. (2018). Exchange processes in the atmospheric boundary layer over mountainous terrain. *Atmosphere*, page 102.
- Sharman, R., Hall, W., Frehlich, R., and Keller, T. (2004). 5.28 the operational prediction of mountain wave turbulence using a high resolution nonhydrostatic mesoscale model. *unknown*.
- Sharples, J. J., Mills, G. A., McRae, R. H., and Weber, R. O. (2010). Foehn-like winds and elevated fire danger conditions in southeastern australia. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*, 49(6) :1067–1095.
- Sheridan, P., Horlacher, V., Rooney, G., Hignett, P., Mobbs, S., and Vosper, S. (2007). Influence of lee waves on the near-surface flow downwind of the pennines. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society : A journal of the atmospheric sciences, applied meteorology and physical oceanography*, 133(627) :1353–1369.

- Skamarock, W. C., Klemp, J. B., Dudhia, J., Gill, D. O., Barker, D. M., Wang, W., and Powers, J. G. (2005). A description of the advanced research wrf version 2. Technical report, National Center For Atmospheric Research Boulder Co Mesoscale and Microscale
- Smith, C. M. and Skyllingstad, E. D. (2011). Effects of inversion height and surface heat flux on downslope windstorms. *Monthly weather review*, 139(12) :3750–3764.
- Smith, F. (1973). Laminar flow over a small hump on a flat plate. *Journal of Fluid Mechanics*, 57(4) :803–824.
- Smith, R. B. (1976). The generation of lee waves by the blue ridge. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 33(3) :507–519.
- Smith, R. B. (1979). The influence of mountains on the atmosphere. In *Advances in geophysics*, volume 21, pages 87–230. Elsevier.
- Smith, R. B. (1989). Mountain-induced stagnation points in hydrostatic flow. *Tellus A*, 41(3) :270–274.
- Smith, R. B. (2003). A linear upslope-time-delay model for orographic precipitation. *Journal of hydrology*, 282(1-4) :2–9.
- Smith, R. B. (2007). Interacting mountain waves and boundary layers. *Journal of the atmospheric sciences*, 64(2) :594–607.
- Smith, R. B., Jiang, Q., and Doyle, J. D. (2006). A theory of gravity wave absorption by a boundary layer. *Journal of the atmospheric sciences*, 63(2) :774–781.
- Smith, R. B., Skubis, S., Doyle, J. D., Broad, A. S., Kiemle, C., and Volkert, H. (2002). Mountain waves over mont blanc : Influence of a stagnant boundary layer. *Journal of the atmospheric sciences*, 59(13) :2073–2092.
- Soufflet, C., Lott, F., and Damiens, F. (2019). Trapped mountain waves with critical level just below the surface. *QJRM*S, Submitted.
- Steenefeld, G., Holtslag, A., Nappo, C., Van de Wiel, B., and Mahrt, L. (2008). Exploring the possible role of small-scale terrain drag on stable boundary layers over land. *Journal of applied meteorology and climatology*, 47(10) :2518–2530.
- Stiperski, I. and Grubišić, V. (2011). Trapped lee wave interference in the presence of surface friction. *Journal of the atmospheric sciences*, 68(4) :918–936.

- Storm, B., Dudhia, J., Basu, S., Swift, A., and Giammanco, I. (2009). Evaluation of the weather research and forecasting model on forecasting low-level jets : Implications for wind energy. *Wind Energy : An International Journal for Progress and Applications in Wind Power Conversion Technology*, 12(1) :81–90.
- Strauss, L., Serafin, S., Haimov, S., and Grubišić, V. (2015). Turbulence in breaking mountain waves and atmospheric rotors estimated from airborne in situ and doppler radar measurements. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 141(693) :3207–3225.
- Stull, R. B. (2012). *An introduction to boundary layer meteorology*, volume 13. Springer Science & Business Media.
- Sykes, R. (1978). Stratification effects in boundary layer flow over hills. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 361(1705) :225–243.
- Teixeira, M. A. (2014). The physics of orographic gravity wave drag. *Frontiers in Physics*, 2 :43.
- Teixeira, M. A. (2017). Diagnosing lee wave rotor onset using a linear model including a boundary layer. *Atmosphere*, 8(1) :5.
- Teixeira, M. A., Argáin, J., and Miranda, P. (2013a). Drag produced by trapped lee waves and propagating mountain waves in a two-layer atmosphere. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 139(673) :964–981.
- Teixeira, M. A., Argáin, J. L., and Miranda, P. M. (2013b). Orographic drag associated with lee waves trapped at an inversion. *Journal of the atmospheric sciences*, 70(9) :2930–2947.
- Troen, I. and Mahrt, L. (1986). A simple model of the atmospheric boundary layer ; sensitivity to surface evaporation. *Boundary-Layer Meteorology*, 37(1-2) :129–148.
- Tsiringakis, A., Steeneveld, G.-J., and Holtslag, A. (2017). Small-scale orographic gravity wave drag in stable boundary layers and its impact on synoptic systems and near-surface meteorology. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 143(704) :1504–1516.
- Van Duin, C. A. and Kelder, H. (1986). Internal gravity waves in shear flows at large reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 169 :293–306.
- Voigt, M. and Wirth, V. (2013). Mechanisms of banner cloud formation. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 70(11) :3631–3640.

- Vosper, S. (1996). Gravity-wave drag on two mountains. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 122(532) :993–999.
- Vosper, S. (2004). Inversion effects on mountain lee waves. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society : A journal of the atmospheric sciences, applied meteorology and physical oceanography*, 130(600) :1723–1748.
- Vosper, S., Brown, A., and Webster, S. (2016). Orographic drag on islands in the nwp mountain grey zone. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 142(701) :3128–3137.
- Vosper, S. and Mobbs, S. (1996). Lee waves over the english lake district. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 122(534) :1283–1305.
- Vosper, S., Wells, H., Sinclair, J., and Sheridan, P. (2013). A climatology of lee waves over the uk derived from model forecasts. *Meteorological Applications*, 20(4) :466–481.
- Vosper, S. B., Ross, A. N., Renfrew, I. A., Sheridan, P., Elvidge, A. D., and Grubišić, V. (2018). Current challenges in orographic flow dynamics : turbulent exchange due to low-level gravity-wave processes. *Atmosphere*, 9(9) :361.
- Wallace, J. M., Tibaldi, S., and Simmons, A. J. (1983). Reduction of systematic forecast errors in the ecmwf model through the introduction of an envelope orography. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 109(462) :683–717.
- Weng, W. (1997). Stably stratified boundary-layer flow over low hills : A comparison of model results and field data. *Boundary-Layer Meteorology*, 85 :223–241.
- Wilczak, J. M., Stoelinga, M., Berg, L. K., Sharp, J., Draxl, C., McCaffrey, K., Banta, R. M., Bianco, L., Djalalova, I., Lundquist, J. K., et al. (2019). The second wind forecast improvement project (wfip2) : Observational field campaign. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 100(9) :1701–1723.
- Wood, N. and Mason, P. (1993). The pressure force induced by neutral, turbulent flow over hills. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 119(514) :1233–1267.
- Wurtele, M., Sharman, R., and Datta, A. (1996). Atmospheric lee waves. *Annual review of fluid mechanics*, 28(1) :429–476.
- Xue, H., Li, J., Qian, T., and Gu, H. (2020). A 100-m-scale modeling study of a gale event on the lee side of a long narrow mountain. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*, 59(1) :23–45.

- Zaitseva, D., Kallistratova, M., Lyulyukin, V., Kouznetsov, R., and Kuznetsov, D. (2018). The effect of internal gravity waves on fluctuations in meteorological parameters of the atmospheric boundary layer. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 54(2) :173–181.