



HAL
open science

Influence des hétérogénéités de la lithosphère et des structures complexes des failles sur le contenu fréquentiel des ondes sismiques

Martin Colvez

► **To cite this version:**

Martin Colvez. Influence des hétérogénéités de la lithosphère et des structures complexes des failles sur le contenu fréquentiel des ondes sismiques. Vibrations [physics.class-ph]. Université Paris-Saclay, 2021. Français. NNT : 2021UPAST089 . tel-03551874

HAL Id: tel-03551874

<https://theses.hal.science/tel-03551874>

Submitted on 2 Feb 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Influence des hétérogénéités de la
lithosphère et des structures
complexes des failles sur le contenu
fréquentiel des ondes sismiques
*Influence of the Earth's Crust
heterogeneities and complex fault
structures on the frequency content of
seismic waves*

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay

École doctorale n°579, Sciences Mécaniques et Énergétiques,
Matériaux et Géosciences (SMEMAG)
Spécialité de doctorat : Mécanique des solides
Unité de recherche : Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, CNRS,
Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux, 91190,
Gif-sur-Yvette, France
Référent : CentraleSupélec

**Thèse présentée et soutenue à Paris-Saclay,
le 29 septembre 2021, par**

Martin COLVEZ

Composition du jury

| | |
|---|------------------------|
| Sonia FLISS Professeur associé, ENSTA | Présidente du jury |
| Hideo AOCHI Ingénieur de recherche, BRGM | Rapporteur & Examineur |
| Fabian BONILLA Directeur de recherche, IFFSTAR | Rapporteur & Examineur |
| Luis RIVERA Professeur, Ecole et Observatoire des Sciences de La Terre | Examineur |
| Evelyne FOERSTER Ingénieure de recherche, CEA | Examinatrice |

Direction de la thèse

| | |
|--|--------------|
| Régis COTTEREAU Chargé de recherche, CNRS | Directeur |
| Fernando LOPEZ-CABALLERO Maître de Conférence, CentraleSupélec | Co encadrant |

Titre : Influence des hétérogénéités de la lithosphère et des structures complexes des failles sur le contenu fréquentiel des ondes sismiques

Mots clés : sismologie, propagation d'onde, milieu aléatoire

Résumé : Les tremblements de terre ont encore aujourd'hui des conséquences dramatiques. Pour permettre de mesurer le risque sismique et pour parfaire le dimensionnement parasismique ; il est important de prendre en compte le caractère hétérogène du milieu de propagation pour en déterminer l'impact sur le champ d'onde au cours de la propagation.

Nous nous sommes essentiellement intéressés dans le cadre de ce travail aux hétérogénéités de la croûte et aux structures complexes proches des failles sismiques. Ces modèles ont permis de déterminer les effets d'un milieu hétérogène sur le contenu fréquentiel de l'onde transmise captée en surface. Nous avons choisi d'approximer les fluctuations des propriétés du milieu par un milieu aléatoire.

Nous avons tout d'abord développé les équations de l'élasto-dynamique dans le cas où nous nous sommes placés dans un régime faiblement hétérogène. Ce régime correspond au cas où la longueur caractéristique des fluctuations est de l'ordre de la longueur d'onde étudiée avec une variance faible et une distance de propagation très grande devant la longueur des fluctuations. Il a tout d'abord été considéré l'arrivée d'une onde plane en incidence normale sur une couche aléatoire stratifiée horizontalement. Dans ce cas, les ondes P-SV-SH sont découplées et il a été possible de déterminer une atténuation d'une partie fréquentielle de l'onde traversant le milieu aléatoire. Cette atténuation correspond à une partie manquant de l'énergie injectée sur une bande de fréquence donnée.

Nous avons ensuite considéré un cas où l'onde incidence est une onde plane inclinée d'inclinaison faible. Il y a, dans ce cas, un couplage fort entre l'onde P et l'onde SV.

A partir d'un développement limité sur l'inclinaison de l'onde, il est possible d'arriver à l'écriture du système d'équations différentielles stochastiques où l'on verra apparaître les termes de couplages. La mise en place des simulations numériques nous a permis de mettre en avant la différence d'atténuation avec le cas de l'incidence normale et également de montrer de manière qualitative les couplages et les transmissions d'énergie entre P et SV.

Nous avons étudié à travers des simulations numériques, les effets d'hétérogénéités d'amplitudes faibles sur des grandes distances, plus représentatives des hétérogénéités de la lithosphère. En étudiant la variabilité des grandeurs caractéristique dans le cas d'un séisme et de plusieurs sites (« within-event ») ou de plusieurs séismes et d'un seul site (« between-event »), on montre l'effet des hétérogénéités sur ces grandeurs caractéristiques (telles que les PGA). De plus, nous avons reproduit la démarche pour le calcul du paramètre empirique kappa. Ce paramètre, utilisé en génie parasismique, modélise l'atténuation haute fréquence. A partir du calcul de kappa via les simulations numériques effectuées, un lien direct entre l'atténuation théorique obtenue dans ces travaux et ce modèle empirique a été fait.

Dans une dernière partie, nous avons observé des résultats préliminaires sur la prise en compte des zones très fracturées au niveau de la faille. Dans ce cas nous avons pu illustrer que nous avons création d'une onde incohérente, et une localisation d'une partie des fréquences ainsi qu'un possible effet de « piègeage » de l'énergie au sein de la structure hétérogène.

Title : Influence of the Earth's Crust heterogeneities and complex fault structures on the frequency content of seismic waves

Keywords : wave propagation, random media, seismology

Abstract : Earthquakes, till today, have disastrous losses and damages. In order to measure the seismic risk and to improve the seismic design; it is important to take into account the heterogeneity of the propagating medium to identify its impact on the seismic wave field during the propagation. In this work, we were mainly focused on the heterogeneities of the crust and the complex structures close to the seismic fault. The modeling of these heterogeneities allowed us to determine their effects on the frequency content of the seismic wave captured at the free surface. The heterogeneous medium is modeled by randomly fluctuating properties.

First of all, the elasto-dynamic equations are developed considering a weakly heterogeneous regime. This regime corresponds to the case where the characteristic length of the fluctuations is of the order of the studied wavelength with a low variance and a propagation distance much greater compared to the length of the fluctuations. A plane wave propagating through a horizontally stratified random layer at normal incidence was first considered. In this case the P-SV-SH waves are not coupled, and it was possible to determine an attenuation of a frequency part of the wave propagating through the random medium. This attenuation corresponds to an energy that is not transported all the way to the other side of the random slab. Then, an inclined incident wave with a small inclination was considered. In this case, there is a strong coupling between the P wave and the SV wave.

Considering a limited development of the wave's inclination, it is possible to write the stochastic differential equations for a small inclination where the coupling terms appear. The implementation of numerical simulations allowed to highlight the difference in attenuation with the case of normal incidence and also to show in a qualitative way the couplings and energy transfers between P and SV for the inclined wave.

Through numerical simulations, we have studied the effects of small amplitude heterogeneities over large distances, which are more representative of the heterogeneities of the lithosphere. By considering both within-event or between-event variability, we show the effect of heterogeneities on characteristic quantities such as PGA. In addition, we have reproduced the approach for the computation of the empirical parameter kappa. This parameter, used in earthquake engineering, models the high frequency attenuation. From the calculation of kappa via the numerical simulations performed, a direct link between the theoretical attenuation obtained in this work and this empirical model was made.

In the last part, we observed preliminary results on the consideration of the highly fractured areas at the vicinity of the fault. In this case we were able to illustrate that part of the energy loses its coherency and a localization of part of the frequencies as well as a possible "trapping" effect of the energy within the heterogeneous structure.

Remerciements

Tout d'abord je souhaiterais remercier Sonia Fliss, Fabian Bonilla, Hideo Aochi, Luis Rivera et Evelyne Foerster d'avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse et de juger mon travail.

Ensuite, je souhaite remercier Régis et Fernando, pour avoir accepté d'encadrer ma thèse. Merci Régis d'avoir accepté de monter le sujet pour le dossier dans un temps (très) court et du temps mis à profit au cours de ces années. Merci également à Fernando d'avoir accepté de co-encadrer la thèse et de m'avoir inclus dans de nombreux projets, et aussi pour l'enseignement du « multitasking ». Merci à tous les deux pour votre patience lors de la rédaction, même si ce n'était pas le moment le plus fun mais également de votre proximité tout au long de la thèse, des discussions que l'on a pu avoir et des conférences faites. Sans vous cela n'aurait pas été possible.

Je remercie également Céline et Fabian pour les discussions qu'on a pu avoir et le temps consacré. Ces discussions ont fait émerger énormément d'idées et j'espère qu'on arrivera à en faire aboutir une majorité.

Je voudrais ensuite remercier tous les membres de l'équipe au MSSMat que j'ai eu la chance de côtoyer dès le début de ma thèse. Merci notamment à Filippo, Lucio, Romain, Alfonso, Christina, Sara, Michael, Michail, David pour tous les moments qu'on a pu partager ! Filippo et Lucio, merci pour l'aide apportée sur le code et la patience pour expliquer, sans vous le départ aurait été plus compliqué. Merci Christina et Sara pour l'initiation à l'arabe (même si je n'ai pas retenu énormément de choses) et les moments passés ! Surtout cette fameuse école d'été à Porquerolles. Michael merci pour les discussions boulot (et oui on en a eu !) et aussi tous les moments passés (Cdm Foot, afterwork, BBQ & co) ! Romain, merci d'avoir pu partager de nombreuses choses avec toi, les sorties Paris, la gestion du coin café/goûter, les repas sushi etc. Je finirai ici par remercier Michail pour l'accueil à mon retour de Marseille et également les personnes que je n'avais pas eu le temps de connaître avant ou qui n'était pas encore arrivées, merci à Ramon, Valeria, Andrea, Christian et Amar.

Également, je souhaiterais remercier les gens du LMA et les amis de Marseille, que j'ai pu côtoyer une bonne moitié de ma thèse. Merci à Patryk pour l'accueil et tous les moments partagés, le défi Monte Cristo, l'initiation Tabata et j'en passe ! Sans toi l'arrivée à Marseille aurait été bien différente. Merci à Alexandre également de m'avoir supporté comme cobureau ! Et merci à toute l'équipe : Ana, Marion, Marie, Augustin, Tim, Tom, j'en oublie sans doute. Merci pour les sorties plages, les sorties cours ju' et la liste est bien trop longue. Merci aussi à Kesh, pour tes connaissances approfondies du Little.

Je voudrais également remercier Adrien, Astrid et Lise pour les soirées jeux, les discussions, le court passage à la radio, les randos aussi. Je garde de très bons souvenirs de cela et j'espère qu'on arrivera à en refaire beaucoup d'autres. Et merci beaucoup Lise d'avoir aidé à la rédaction d'un bout de la thèse. En plus de vous, je souhaiterai remercier Lucie pour les soirées endiablées à tes côtés avec Léon, Lola et Marie. On aura sauvé un goéland, cette soirée est (presque) devenue mythe. Merci également à toutes personnes avec qui j'ai pu échanger à Marseille.

Pour terminer, merci aux copains de Strasbourg, Maxime et Guillaume. Le court passage à Strasbourg et les soirées jeux en visio pendant le confinement c'était vraiment top, et j'espère bien pouvoir venir te voir à Umea dès que possible Maxime ! Merci aussi à Etienne et Ophélie, pour les moments partagés à Seattle, les conseils culinaires. Merci Ophélie pour les brioches et la visite d'Antibes !

Enfin je voudrais remercier du fond du cœur ma famille, mon frère et mes parents, pour m'avoir soutenu tout au long de cette thèse.

Table des matières

| | |
|--|------------|
| Table des matières | iii |
| Liste des figures | v |
| Liste des tableaux | xi |
| 1 Introduction | 1 |
| 1.1 Description du déroulement d'un événement sismique | 2 |
| 1.2 Description des hétérogénéités de la Terre | 13 |
| 1.2.1 Bassin sédimentaire | 14 |
| 1.2.2 Hétérogénéité large échelle de la lithosphère | 16 |
| 1.2.3 Roche fortement fracturée proche de la faille | 17 |
| 1.2.4 Tailles caractéristiques et classification des hétérogénéités | 20 |
| 1.3 Impact des hétérogénéités sur les champs d'onde en surface | 21 |
| 1.3.1 Classification des différentes familles d'hétérogénéités | 21 |
| 1.3.2 Modèle stochastique utilisé pour approcher les hétérogénéités terrestres | 23 |
| 1.4 Problématiques et développements | 24 |
| 2 Propagation d'onde élastique en milieu aléatoire stratifié horizontalement | 27 |
| 2.1 Décomposition SH-PSV en milieu stratifié horizontalement | 28 |
| 2.2 Onde élastique en incidence normale | 30 |
| 2.2.1 Définition du problème en incidence normale | 30 |
| 2.2.2 Décomposition modale et recentrage | 32 |
| 2.2.3 Ecriture du problème aux conditions initiales à partir de la décomposition modale | 34 |
| 2.2.4 Représentation martingale du coefficient de transmission | 34 |
| 2.2.5 Longueur de localisation pour l'onde S | 36 |
| 2.2.6 Longueur de localisation pour l'onde P | 37 |
| 2.2.7 Longueur de localisation dans le cas d'un milieu fortement hétérogène | 37 |
| 2.3 Analyse numérique des effets de la présence d'un milieu aléatoire sur le contenu fréquentiel | 39 |
| 2.3.1 Cas d'une onde plane élastique en incidence normale | 39 |
| 2.4 Onde SH en incidence quelconque | 46 |
| 2.4.1 Amortissement apparent et longueur de localisation | 46 |
| 2.4.2 Illustration numérique | 47 |
| 2.5 Onde P-SV en incidence faible | 49 |
| 2.5.1 Détermination du comportement homogénéisé | 50 |
| 2.5.2 Projection modale du comportement local | 51 |
| 2.5.3 Détermination de la longueur de localisation dans le cas d'une fluctuation aléatoire faible du coefficient de cisaillement | 54 |
| 2.5.4 Illustration numérique : onde incidente plane inclinée polarisée SV sur un milieu dont la vitesse des ondes S fluctue de manière aléatoire horizontalement | 57 |
| 2.5.5 Conclusion | 60 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3 | Influence des hétérogénéités de la croûte terrestre sur l'onde sismique captée en surface | 63 |
| 3.1 | Mise en place du modèle numérique | 66 |
| 3.1.1 | Géométrie considérée et définition des propriétés mécaniques du modèle . . | 66 |
| 3.1.2 | Génération du milieu aléatoire | 67 |
| 3.2 | Vérification des résultats numériques dans le cas homogène | 70 |
| 3.3 | Impact des hétérogénéités sur le contenu temporel de l'onde sismique | 74 |
| 3.3.1 | Mesure des accélérations maximales | 74 |
| 3.3.2 | Mesure des intensités d'Arias | 77 |
| 3.3.3 | Effet des hétérogénéités sur une autre mesure d'intensité | 81 |
| 3.4 | Analyse du contenu fréquentiel des signaux impactés par la présence des hétérogénéités | 88 |
| 3.4.1 | Analyse fréquentielle du scénario considéré et calcul du paramètre κ | 88 |
| 3.4.2 | Analyse des valeurs de κ à différentes stations | 90 |
| 3.4.3 | Amortissement apparent et lien avec la longueur de localisation | 92 |
| 3.4.4 | Extension de l'analyse numérique : mise en place d'une nouvelle stratégie . . | 94 |
| 3.5 | Conclusion et discussion autour de l'atténuation haute fréquence en présence d'un milieu hétérogène | 98 |
| 4 | Conclusions et premières perspectives | 99 |
| 4.1 | Atténuation apparente du signal fréquentiel due à la présence d'hétérogénéités . . . | 99 |
| 4.2 | Limitations et perspectives | 100 |
| 4.3 | Utilisation des résultats obtenus pour l'extension à la faille sismique et premières perspectives | 101 |
| 4.3.1 | Extension à une faille sismique | 101 |
| 4.3.2 | Modèle numérique | 102 |
| 4.3.3 | Etude numérique pour une hétérogénéité 3D | 103 |
| A | Calcul de la limite du coefficient de transmission à l'ordre 0 | I |

Liste des figures

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Représentation schématique de la propagation d'une onde sismique à partir d'une faille dans la croûte terrestre | 2 |
| 1.2 | Représentation des paramètres géométriques pour définir la localisation du plan de faille. Repris de [Aki & Richards, 1980, chap. 3] | 3 |
| 1.3 | Représentation schématique de l'onde P (onde de pression, à gauche) et de l'onde S (onde de cisaillement, à droite) se propageant à la surface de la Terre (image modifiée issue de l'USGS) | 3 |
| 1.4 | Représentation d'un signal sismique à la surface libre généré par simulation numérique dans le cas d'un milieu stratifié | 4 |
| 1.5 | Relation entre la surface de la faille et le moment sismique M_0 [Kanamori & Anderson, 1975] | 6 |
| 1.6 | Relation le logarithme du moment sismique M_0 et la magnitude des ondes de surface [Brune, 1968] | 7 |
| 1.7 | Représentation d'un corps élastique de volume fini, incluant une discontinuité représentée par la normale \vec{n} et de surface Σ | 8 |
| 1.8 | Illustration des différents couples de forces possibles [Aki & Richards, 1980] | 9 |
| 1.9 | Dépendance de la magnitude en fonction du modèle de source de Brune [Aki, 1967] | 10 |
| 1.10 | Représentation du repère cartésien et du repère sphérique | 11 |
| 1.11 | Représentation du modèle multi-couche introduit par [Hisada, 1994] | 12 |
| 1.12 | Représentation des couches composant la structure interne du globe mises en évidence par discontinuités des vitesses des ondes sismiques | 13 |
| 1.13 | Représentation des hétérogénéités de la Lithosphère. L'étoile en rouge représente la position de l'hypocentre, alors que l'étoile en bleue représente un accéléromètre à la surface. | 14 |
| 1.14 | Représentation de la stratification des couches superficielles dans le cas de [Perron et al., 2018]. Profil des vitesses des ondes S de 0 à 90 mètres | 15 |
| 1.15 | Identification de la fréquence propre f_0 à partir du rapport spectral des composantes de bruit sismique [Brûlé & Javelaud, 2013] | 15 |
| 1.16 | A gauche : Anomalies des vitesses V_s en fonction de la latitude et la longitude à différentes profondeurs dans le cas de Java, Indonésie [Koulakov et al., 2007]. A droite : Hétérogénéités large échelle [Wang et al., 2009] | 16 |
| 1.17 | Constitution de la géologie locale aux alentours de la ligne tectonique Arima Takatsuki au japon [Mitchell et al., 2011] | 18 |
| 1.18 | Représentation schématique des hétérogénéités au niveau du plan de faille dans le cas de la ligne tectonique Arima-Takatsuki [Mitchell et al., 2011] | 18 |
| 1.19 | Densité de micro-fractures de part et d'autre du plan de faille [Mitchell et al., 2011] | 19 |
| 1.20 | Densité de micro-fractures dans la zone très proche de la faille dans le cas de la faille chilienne Caleta Coloso [Mitchell & Faulkner, 2012] | 20 |
| 1.21 | Schématisation de la zone faible (Schéma inspiré de [Huang et al., 2014]) | 20 |
| 1.22 | Classification des hétérogénéités en fonction de l'échelle caractéristique de fluctuation des vitesses des ondes [Wu & Aki, 1988] | 21 |

| | | |
|------|--|----|
| 1.23 | A gauche sont représentés les différents régimes en fonction de la longueur du milieu L et a qui à la longueur caractéristique [Wu & Aki, 1988] A droite sont représentés les différents régimes en fonction de la fréquence considérée et le rapport entre la longueur d'onde et la longueur caractéristique de l'hétérogénéité ℓ_c [Cottreau, 2016] | 22 |
| 1.24 | Représentation d'un milieu hétérogène correspondant à un milieu homogénéisé au regard d'une onde de longueur d'onde égale à la moitié du milieu de propagation . . | 22 |
| 1.25 | Représentation d'un milieu hétérogène correspondant à un milieu faiblement hétérogène au regard d'une onde de longueur d'onde très petite devant la longueur du milieu de propagation | 23 |
| 1.26 | Représentation d'un milieu hétérogène correspondant à un milieu fortement hétérogène | 23 |
| 1.27 | Représentation des densités spectrales pour différents milieux pour décrire les fluctuations des vitesses des ondes P et des ondes S [Sato, 2019] | 24 |
| 1.28 | Représentation schématique de la croûte terrestre en tenant compte des différentes échelles d'hétérogénéités. | 25 |
| 2.1 | Représentation du problème de propagation d'onde en milieu aléatoire | 28 |
| 2.2 | Représentation des polarisations des ondes | 29 |
| 2.3 | Représentation du problème dans le cas d'une onde en incidence normale traversant la couche aléatoire | 30 |
| 2.4 | Représentation du plan de source permettant la création d'une onde plane et la position des récepteurs en sortie de la couche aléatoire. | 39 |
| 2.5 | A gauche, signal temporel injecté à la source. A droite son contenu fréquentiel. . . . | 39 |
| 2.6 | Représentation plane du modèle 3D avec les différentes répartitions de V_s et V_p prises dans la couche aléatoire. Ici $\ell_c = 50$ m, $\sigma_K = 30\%$ et $L_0 = 5000$ m et V_p et V_s sont indépendantes | 41 |
| 2.7 | Représentation de la longueur de localisation pour différentes longueurs de corrélation avec $\bar{c} \sim 1000$ m/s et $\sigma_K = 0.3$. On représente en vert la longueur de localisation pour $\ell_c = 50$ m (en trait plein le cas d'un milieu faiblement hétérogène et en pointillé le cas d'un milieu fortement hétérogène). On représente également en rouge, le cas où $\ell_c = 30$ m. La ligne pointillée noirée représente le cas limite où $L_{loc} = L_0$ qui est l'épaisseur de la couche aléatoire. | 41 |
| 2.8 | Représentation, à différents instants, de la propagation du front d'onde au sein du milieu aléatoire | 42 |
| 2.9 | Zoom sur la partie réfléchie | 42 |
| 2.10 | Représentation temps-fréquence du signal traversant un milieu stratifié aléatoire à 2 points de l'espace | 43 |
| 2.11 | A gauche est représentée l'entrée et la sortie pour différents tirages (en gris, pointillé) ainsi que la moyenne des sorties (en rouge, trait plein) dans le cas de $\ell_c = 30$ m et la valeur théorique de la sortie (en rouge, pointillé). A droite est représentée l'entrée et la sortie pour différents tirages (en gris, pointillé) ainsi que la moyenne des sorties (en vert, trait plein) dans le cas de $\ell_c = 50$ m et la valeur théorique de la sortie (en vert, pointillé). | 43 |
| 2.12 | En rouge est représenté la sortie pour $\ell_c = 30$ m, respectivement la sortie moyenne numérique en trait plein et la sortie théorique en pointillé. En vert est représenté la sortie pour $\ell_c = 50$ m, respectivement la sortie moyenne numérique en trait plein et la sortie théorique en pointillé. | 44 |
| 2.13 | Représentation de la longueur de localisation pour différentes longueurs de corrélation avec $\bar{c}_p \sim 1750$ m/s et $\sigma_K = 0.3$ | 44 |
| 2.14 | Représentation des valeurs en sortie dans le cas d'une onde incidente P pour différentes longueurs de corrélation et différents tirages | 45 |

| | |
|---|----|
| 2.15 Comparaison des valeurs moyennes en sortie dans le cas d'une onde incidente P pour différentes longueurs de corrélation | 46 |
| 2.16 Représentation du plan de source (d'inclinaison β) permettant la création d'une onde plane et la position des récepteurs en sortie de la couche aléatoire. La couche aléatoire a une longueur $L_0 = 5000$ m | 47 |
| 2.17 Représentation de la longueur de localisation définie équation ?? pour différentes inclinaisons, une longueur de corrélation $\ell_c = 50$ m et une vitesse des ondes S égale à $\bar{c}_s \sim 1000$ m/s et $\sigma_K = 0.3$ | 48 |
| 2.18 Représentation à différents instants de la propagation d'une onde polarisée SH pour $\beta = 10^\circ$ | 48 |
| 2.19 Comparaison de la sortie polarisée SH pour 2 inclinaisons différentes | 49 |
| 2.20 Représentation des fluctuations des propriétés mécaniques pour la vitesse des ondes S (à gauche) et la vitesse des ondes P (à droite) | 57 |
| 2.21 Représentation du repère tourné pour le suivi des différentes polarisations | 58 |
| 2.22 Représentation à différents instants de la propagation d'une onde polarisée SV pour $\beta = 10^\circ$ | 59 |
| 2.23 Représentation à différents instants de la propagation d'une onde polarisée P pour $\beta = 10^\circ$ | 59 |
| 2.24 Représentation à l'instant $t = 5$ sec du snapshot pour la composante S à gauche et pour la composante P à droite. On retrouve $\beta = 10^\circ$ pour S et $\beta_p \sim 17^\circ$ pour P. De plus on représente dans un encadré l'onde de retour, avec saturation des couleurs pour mieux visualiser la présence de celle-ci | 60 |
| 2.25 Représentation des sorties pour différentes inclinaisons | 60 |
| 2.26 Représentation de l'énergie polarisée P en sortie de la couche aléatoire | 61 |
| 3.1 A gauche, enregistrement complet (en gris) et sélection de la fenêtre S (en noir). A droite, mesure du paramètre Kappa pour la fenêtre sélectionnée. Figure extraite de Douglas et al. [2010] | 65 |
| 3.2 Géométrie du scénario sismique | 67 |
| 3.3 Vitesse à la source suivant chaque composante pour le modèle de Brune utilisé | 68 |
| 3.4 Spectre de la vitesse à la source en échelle log-log : modèle de Brune | 68 |
| 3.5 Représentation du champ aléatoire 1 | 68 |
| 3.6 Représentation du champ aléatoire 2 | 69 |
| 3.7 Représentation des différentes coupes du champ aléatoire orthotrope généré dans le cas 1 | 70 |
| 3.8 Diagramme de bode du filtre de Butterworth pour $n = 4$ | 71 |
| 3.9 Comparaison du signal numérique filtré en fonction de différents ordres de filtrage. A gauche est représentée la composante Est-Ouest de la vitesse pour un capteur à la surface libre, à droite est représentée l'accélération du signal pour ce même capteur | 71 |
| 3.10 Comparaison du signal numérique filtré en fonction de différents ordres de filtrage. A gauche est représentée la valeur absolue de la transformée de Fourier de la vitesse pour un capteur à la surface libre, à droite celle de l'accélération du signal pour ce même capteur | 71 |
| 3.11 Résultats de l'application du critère de Kristekova pour le capteur avec le score d'enveloppe le plus faible | 72 |
| 3.12 Comparaison à plusieurs stations de la solution semi-analytique Hisada [1994, 1995] (en pointillé) et du calcul numérique SEM (en trait continu) | 73 |
| 3.13 Cartographie de la position des stations à la surface libre du milieu et positionnement de la source dans le cas de l'étude temporelle pour une occurrence d'événement sismique | 74 |

| | |
|--|----|
| 3.14 Représentation des valeurs des PGA horizontaux dans le cas des 3 milieux considérés différents. L'épicentre est à la position E-W = -2km et N-S=0. (A) correspond au cas homogène, (B) au cas hétérogène 1 ($\ell_{c,z} = 500\text{m}$) et (C) au cas hétérogène 2 ($\ell_{c,z} = 100\text{m}$) | 75 |
| 3.15 Représentation des valeurs des PGA verticaux dans le cas des 3 milieux considérés différents. (A) correspond au cas homogène, (B) au cas hétérogène 1 et (C) au cas hétérogène 2 | 75 |
| 3.16 Représentation du ratio $\log \text{PGA}_{het1,horiz} / \text{PGA}_{hom,horiz}$ dans le cas des 2 milieux aléatoires considérés. (A) correspond au rapport des PGA horizontaux dans le cas du milieu hétérogène 1 ($\ell_{c,z} = 500\text{m}$) et (B) au cas hétérogène 2 ($\ell_{c,z} = 100\text{m}$). Ces ratio sont tracés par rapport aux PGA horizontaux dans le cas homogène. | 76 |
| 3.17 Représentation des valeurs des PGA verticaux dans le cas des 3 milieux considérés différents. (A) correspond à la représentation, pour chaque station, du ratio $\log(\text{PGA}_{het1,vert} / \text{PGA}_{hom,vert})$ dans le cas du milieu hétérogène 1 ($\ell_{c,z} = 500\text{m}$). (B) correspond à la représentation des vitesses V_s locales à la surface libre dans le cas hétérogène 1. (C) correspond au même ratio dans le cas du milieu hétérogène 2 ($\ell_{c,z} = 100\text{m}$), et (D) correspond à la représentation des vitesses V_s locales à la surface libre dans le cas hétérogène 2 | 77 |
| 3.18 Représentation de la variation des intensités d'Arias en fonction de la localisation à la surface libre pour le cas de la composante Est-Ouest. (A), (B) et (C) correspondent respectivement à la réponse dans le cas homogène, à la réponse dans le cas hétérogène 1, à la réponse dans le cas hétérogène 2 | 78 |
| 3.19 Représentation de la variation des intensités d'Arias en fonction de la localisation à la surface libre pour le cas de la composante verticale DU (A), (B) et (C) correspondent respectivement à la réponse dans le cas homogène, à la réponse dans le cas hétérogène 1, à la réponse dans le cas hétérogène 2 | 78 |
| 3.20 Représentation de la variation des intensités d'Arias en fonction de la distance épiscopentrale pour le cas de la composante Est-Ouest. (A), (B) et (C) correspondent respectivement à la réponse dans le cas homogène, à la réponse dans le cas hétérogène 1, à la réponse dans le cas hétérogène 2. | 79 |
| 3.21 Représentation d'une zone d'ombre énergétique suite à la présence d'une hétérogénéité sur le chemin de propagation | 80 |
| 3.22 Tracé de l'intensité d'Arias et du temps de montée de 5% à 95% pour une ligne de capteurs en fonction de la distance épiscopentrale pour la composante verticale pour le milieu homogène (en bleu) et le milieu hétérogène 1 (en rouge) | 81 |
| 3.23 Tracé de l'intensité d'Arias et du temps de montée de 5% à 95% pour une ligne de capteurs en fonction de la distance épiscopentrale pour la composante EW pour le milieu homogène (en bleu) et le milieu hétérogène 1 (en rouge) | 82 |
| 3.24 Tracé de la transformée temps-fréquence du signal pour la composante EW (en haut) et la composante verticale (en bas) | 82 |
| 3.25 Tracé de la transformée temps-fréquence du signal pour la composante EW (en haut) et la composante verticale (en bas). On indique le gain en se basant sur le critère de Kristekova pour une station placée à 4000 m de l'épicentre dans le cas homogène (en noir) et hétérogène 2 (en rouge) | 83 |
| 3.26 Représentation du maximum du coefficient de corrélation entre différentes stations | 84 |
| 3.27 Position de différentes sources | 85 |
| 3.28 ΔFFT pour les composantes N-S (à gauche), E-W (au centre) et D-U à droite dans le cas de la source 4 | 85 |
| 3.29 ΔFFT pour les composantes N-S (à gauche), E-W (au centre) et D-U à droite dans le cas de la source 8 | 86 |
| 3.30 Schéma représentant la rotation angulaire pour le calcul de la minimisation de la corrélation entre composantes horizontales | 87 |

| | |
|--|-----|
| 3.31 Représentation de la variation angulaire entre réponse homogène et réponse hétérogène en fonction de la distance épacentrale pour différentes localisations de la source. | 87 |
| 3.32 Δ FFT pour les composantes N-S (à gauche), E-W (au centre) et D-U à droite dans le cas de la source 2 | 88 |
| 3.33 Représentation temporelle de la composante radiale à une station déterminée. En noir, l'enregistrement complet de la composante radiale, en rouge le fenêtrage autour de l'onde S | 89 |
| 3.34 Représentation de la transformée de Fourier de la composante radiale. En rouge, la transformée de Fourier de l'onde S fenêtrée (Figure 3.33). En pointillé, la régression sur la plage de fréquence choisie. | 89 |
| 3.35 Représentation des épacentres des différentes sources (en rouge), de la localisation de quelques stations et des valeurs de kappa associées. | 90 |
| 3.36 Représentation des épacentres des différentes sources (en rouge), de la localisation de quelques stations et des variations angulaires associées. | 91 |
| 3.37 Représentation de la régression pour κ (à gauche) et de l'angle θ_{hom} et θ_{het} pour chaque distance épacentrale (à droite). | 92 |
| 3.38 Longueur de localisation théorique associée aux paramètres mécaniques pour le modèle numérique correspondant au cas hétérogène 1. On représente en trait plein la limite dans le cas d'un milieu faiblement hétérogène, et en pointillé la limite pour le cas fortement hétérogène | 93 |
| 3.39 Extension du modèle | 94 |
| 3.40 Longueur de localisation théorique associée aux paramètres mécaniques pour le modèle numérique correspondant au nouveau cas numérique. On représente en trait plein la limite dans le cas d'un milieu faiblement hétérogène, et en pointillé la limite pour le cas fortement hétérogène | 95 |
| 3.41 Statistique des valeurs de m_κ pour différents nombres de source | 95 |
| 3.42 Statistique des valeurs de κ_0 pour différents nombres de source | 96 |
| 3.43 Représentation de κ par superposition de toutes les stations et de toutes les sources | 96 |
| 3.44 Représentation de κ pour 3 stations différentes et 40 positions de sources | 97 |
| 4.1 Tracé de la longueur de localisation à partir des résultats théoriques (Chapitre 2) pour l'onde S et l'onde P en incidence normale pour $\ell_c = 50$ m, $c_s = 1000$ m/s et $c_p = 1750$ m/s | 99 |
| 4.2 Tracé des différentes valeurs de κ pour une seule simulation et différentes stations pour des distances épacentrales autour de 50 km(Chapitre 3). | 101 |
| 4.3 Représentation schématique des différents modèles | 102 |
| 4.4 Géométrie du modèle numérique 3D de l'inclusion de la zone fortement fracturée | 102 |
| 4.5 Tracé de la longueur de localisation à partir des résultats théoriques (Chapitre 2) et du choix des fluctuations des résultats numériques (Chapitre 3) | 103 |
| 4.6 Représentation à différents instants de la propagation de l'onde dans le cas d'un milieu complètement homogène(ligne supérieure) ou dans le cas d'un milieu aléatoire suivant un modèle de corrélation de type Gauss | 104 |
| 4.7 Représentation de la réponse en fréquence au niveau de la surface libre pour différentes stations | 105 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|---|-----|
| 2.1 | Propriétés mécaniques du milieu | 40 |
| 2.2 | Propriétés mécaniques du milieu | 57 |
| 3.1 | Propriété mécanique des couches constituant le milieu | 67 |
| 3.2 | Propriétés de la source | 67 |
| 3.3 | Propriétés des fluctuations considérées | 69 |
| 3.4 | Valeurs des gains obtenus pour différents capteurs sur l'enveloppe et la phase pour chacune des composantes | 72 |
| 3.5 | Valeurs médianes représentées figure 3.20 | 79 |
| 3.6 | Position des différentes sources exploitées en accord avec la figure 3.27. | 85 |
| 3.7 | Valeurs de m_κ , κ_0 associées aux stations représentées figure 3.35. | 92 |
| 3.8 | Propriétés des fluctuations considérées pour le nouveau modèle | 94 |
| 4.1 | Propriétés mécaniques du milieu | 103 |

Liste des symboles

$\mu(z)$ coefficient de cisaillement.

$K(z)$ coefficient de compressibilité.

$\rho(z)$ masse volumique.

k nombre d'onde.

$\bar{\tau}$ coefficient homogénéisé.

L_0 épaisseur de la couche aléatoire.

ℓ_c longueur de corrélation.

σ_K coefficient de variation.

$\gamma(\omega)$ densité spectrale de puissance.

W_i mouvement standard Brownien.

$T_\omega^\varepsilon(0, L)$ Coefficient de transmission d'une couche d'épaisseur L .

$R_\omega^\varepsilon(0, L)$ Coefficient de réflexion d'une couche d'épaisseur L .

\mathbf{p}_p vecteur polarisation associé à l'onde P.

\mathbf{p}_{sh} vecteur polarisation associé à l'onde SH.

\mathbf{p}_{sv} vecteur polarisation associé à l'onde SV.

Chapitre 1

Introduction

De manière générale, les séismes désignent tout événement, quel qu'en soit la nature, générant des ondes sismiques. Celui-ci peut être de cause naturelle (tectonique, volcanique, ...) ou humaine (carrière, explosions, ...). Dans ces travaux, nous nous focaliserons uniquement sur les séismes d'origine tectonique dont les connaissances sont désormais importantes suite à l'évolution des technologies et la possibilité d'enregistrer des ondes sismiques sur différents sites. Néanmoins, les tremblements de terre ont aujourd'hui encore des conséquences dramatiques aussi bien sur les infrastructures qu'en terme de bilan humain. Un des exemples de ces dernières années est le séisme de Tohoku au Japon ayant eu pour conséquence un tsunami responsable de nombreuses disparitions ainsi que des dégâts matériels monstrueux dont l'accident nucléaire de la centrale de Fukushima. Le développement des structures parasismiques a permis de limiter le bilan humain et matériel qui aurait pu être beaucoup plus important. Néanmoins cet événement a mis en avant la nécessité d'améliorer encore les connaissances acquises pour une meilleure prévention du risque sismique. Par ce biais, une meilleure connaissance des sources sismiques permettrait de mieux comprendre les différents mécanismes pour une meilleure prévention de l'aléa sismique. Cette thèse a pour objectif de proposer des modèles analytiques de propagation d'onde en milieu complexe au sein de la croûte terrestre en prenant en compte le caractère hétérogène de celle-ci. A partir de ces modèles, une stratégie de calcul numérique sera mis en place pour mettre en avant et quantifier les effets de la prise en compte de cette structure complexe sur le champ résultant en surface. Dans cette partie, plusieurs éléments seront mis en avant pour pouvoir avoir tous les outils nécessaires pour modéliser de manière fiable la propagation d'une onde sismique.

1.1 Description du déroulement d'un événement sismique

Lors du mouvement des plaques tectoniques, il y a, de manière localisée, une accumulation de contraintes au niveau du contact entre différentes plaques tectoniques. Cette accumulation est présente sous forme de frottement au niveau de l'interface entre les plaques. Lorsque l'accumulation de contraintes atteint un certain seuil, il y a un glissement brutal entre les deux plaques tectoniques. Ce glissement brutal correspond à la libération des contraintes accumulées dans la roche le long du plan d'accumulation (usuellement appelé plan de faille, repéré figure 1.1).

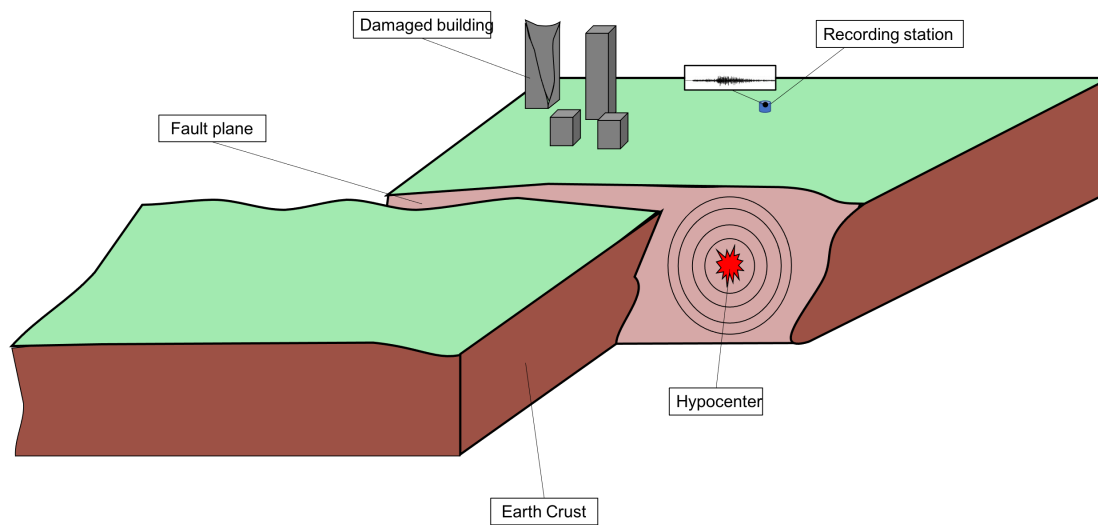


FIGURE 1.1 – Représentation schématique de la propagation d'une onde sismique à partir d'une faille dans la croûte terrestre

Ce plan de faille est orienté dans l'espace par 3 angles différents par rapport aux coordonnées géographiques (Encadré n°1 "Orientation du plan de faille"). Suite à la libération de cette contrainte il en résulte une onde sismique émise à partir de l'hypocentre (Figure 1.1) et se propageant dans la croûte terrestre jusqu'à atteindre la surface de celle-ci. Elle est ensuite captée par des stations placées à la surface, elle peut également causer des dommages aux infrastructures suite au déplacement du sol dont elle est la cause et l'interaction de ce déplacement avec les fondations des bâtiments. L'enregistrement des ondes sismiques, sous forme de sismogramme (représentation de l'amplitude à un point géographique donné en fonction du temps), est la principale donnée pour l'étude des séismes et pour améliorer leur compréhension. L'acquisition de ces données permet de localiser la position de l'hypocentre (longitude - latitude - profondeur) du séisme plus précisément possible et de déterminer la puissance de celui-ci ainsi que l'instant (date - heure) auquel il s'est déclenché. La précision sur la localisation du séisme sera dépendante de la quantité de sismogrammes obtenus et leur distributions pour un événement sismique. C'est pourquoi dans les zones les plus actives du monde, mais également en France, de plus en plus de réseaux de stations ont été placés pour pouvoir identifier avec précision les séismes ayant lieu (Par exemple le RAP - Réseau Accéléromètre Permanent - en France). On parle alors de réseau dense.

Encadré n°1 "Orientation du plan de faille"

Une source sismique représentée par une faille, correspondant à la surface de glissement, est associée à une surface interne. Cette surface est localisée dans l'espace. On définit le glissement au niveau de cette surface de manière unique. Pour définir l'orientation de la surface et la direction de glissement on utilise les 3 paramètres suivant (Figure 1.2) : l'azimut (*Strike*), le pendage (*Dip*) et l'angle de glissement (*Rake*) :

- L'azimut ϕ_s varie de 0 à 360 degrés, en allant vers l'Est où le Nord correspond au 0. Il s'agit de l'intersection du plan de la faille avec la surface libre.
- Le pendage δ varie entre 0 et 90 degrés. Il correspond à l'angle d'inclinaison du plan de faille par rapport à l'horizontal
- l'angle de glissement λ varie entre -180 et 180 degrés pour déterminer la direction du mouvement de la faille.

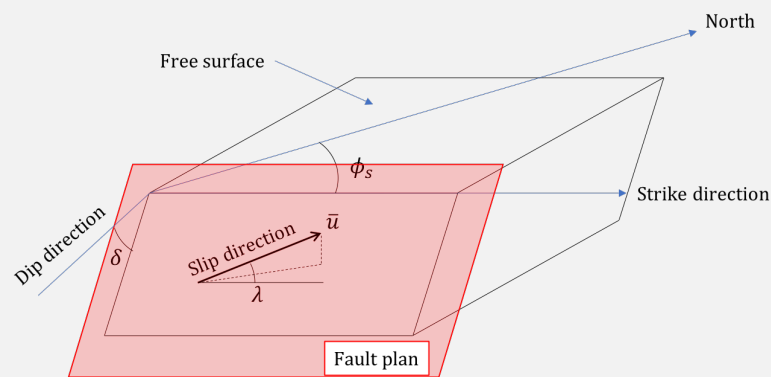


FIGURE 1.2 – Représentation des paramètres géométriques pour définir la localisation du plan de faille. Repris de [Aki & Richards, 1980, chap. 3]

La localisation des séismes se fait en calculant les temps d'arrivée des ondes aux différentes stations constituant le réseau. Pour cela on identifie les différents types d'ondes sismiques, principalement l'onde P (onde primaire) ou onde de pression et l'onde S (onde secondaire) ou onde de cisaillement (Figure 1.3). Ces deux ondes sont des ondes de volume se propageant dans la totalité de la croûte terrestre à l'exception de la partie liquide du noyau, où les ondes S ne se propagent pas.

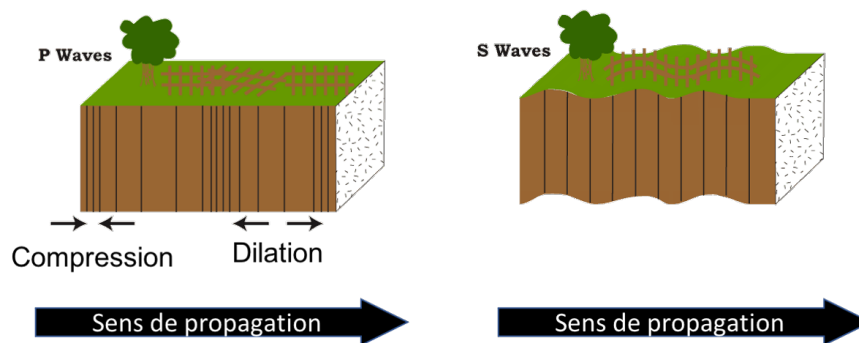


FIGURE 1.3 – Représentation schématique de l'onde P (onde de pression, à gauche) et de l'onde S (onde de cisaillement, à droite) se propageant à la surface de la Terre (image modifiée issue de l'USGS)

A partir d'un sismogramme, on peut identifier l'arrivée de l'onde P et celle de l'onde S (Figure 1.4). L'onde P est celle arrivant la première et l'onde S correspond quant à elle au 2^e pic. En

ayant le temps d'arrivée pour chacune des ondes à divers endroits de la surface de la terre il est possible d'appliquer des méthodes similaires à celles de triangulation pour localiser l'hypocentre du séisme.

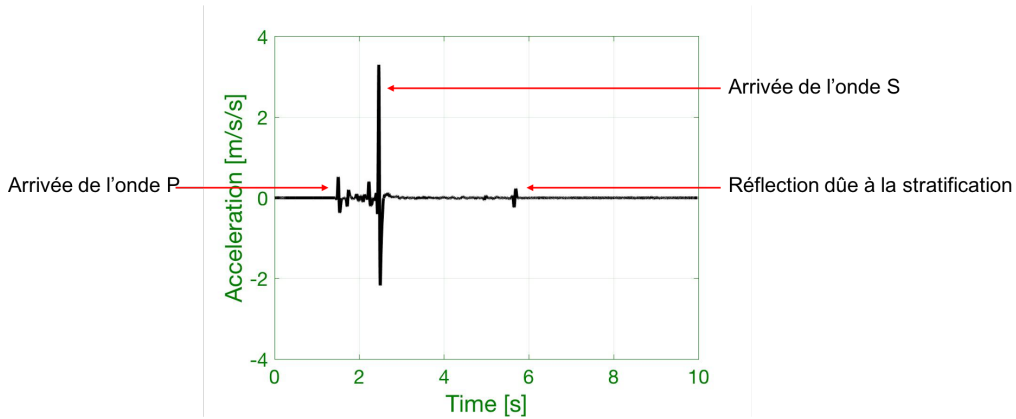


FIGURE 1.4 – Représentation d'un signal sismique à la surface libre généré par simulation numérique dans le cas d'un milieu stratifié

Ces méthodes reposent tout de même sur les connaissances de la vitesse de propagation à l'intérieur de la croûte terrestre. Les méthodes les plus complexes et les plus précises utilisent un modèle où la vitesse des ondes varient en fonction de la localisation géographique. Néanmoins un modèle homogène d'élastodynamique linéaire permet déjà de comprendre la séparation en onde P et onde S d'une onde sismique et les temps d'arrivées de celles-ci (Encadré n°2 Equation de l'élastodynamique en milieu homogène). Ce modèle est un des premiers modèles qui a été utilisé pour décrire la propagation des ondes sismiques dans le sol [Lamb, 1904].

On rappelle l'équation mathématiques décrivant un milieu élastodynamique (avec $\mathbf{x} = (x, y, z)$ la coordonnée considérée où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ et \mathbf{u} le champ de déplacement). Les propriétés du milieu sont définis par ρ, λ, μ . Le terme source est noté \mathbf{f} .

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} &= \underline{\text{div}} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) &= \lambda(\mathbf{x}) \text{div}(\mathbf{u}) \mathbb{1} + 2\mu(\mathbf{x}) \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Encadré $n^{\circ}2$ Equation de l'élastodynamique en milieu homogène

A partir du système d'équations 1.1, on considère le milieu comme homogène, en d'autres termes les propriétés du milieu sont constants quelque soit l'instant t et quelque soit la position dans l'espace. On suppose que le terme source est nul ici. On en déduit l'équation :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \lambda \underline{\text{div}}(\underline{\text{div}}(\mathbf{u})) + 2\mu \underline{\text{div}}(\underline{\text{e}}(\mathbf{u})) + \mathbf{f} \quad (1.2)$$

A partir des propriétés sur les opérateurs, l'équation 1.2 peut être réécrite comme :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla(\underline{\text{div}}(\mathbf{u})) - \mu \underline{\text{rot}} \underline{\text{rot}}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} \quad (1.3)$$

Afin de mettre en évidence la présence de différents types d'ondes, on peut chercher une solution à l'équation 1.3 en écrivant \mathbf{u} comme la somme d'un potentiel scalaire ϕ et d'un potentiel vectoriel ψ .

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla\phi(\mathbf{x}, t) + \underline{\text{rot}}\psi(\mathbf{x}, t)$$

Cette décomposition, appelée décomposition de Helmholtz permet de réécrire l'équation comme :

$$\nabla\left(\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \Delta\phi\right) + \underline{\text{rot}}\left(\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \mu \Delta\psi\right) = 0 \quad (1.4)$$

Ce qui nous permet d'obtenir le système découplé suivant, en notant $c_p^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$ et $c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c_p^2 \Delta\phi &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta\psi &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

A partir des équations 1.5, le champ de déplacement peut être décomposé en deux ondes, l'onde P (onde de pression) et l'onde S (onde de cisaillement). On note u_L l'onde de pression correspondant à une onde longitudinale et u_T l'onde transverse, l'onde de cisaillement. On peut réécrire l'équation 1.5 sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_L}{\partial t^2} - c_p^2 \Delta\mathbf{u}_L &= 0 \\ \frac{\partial^2 \mathbf{u}_T}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta\mathbf{u}_T &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Une condition entre c_p et c_s définie équation 1.7 montre que les ondes de cisaillement se propagent plus lentement que les ondes de pression.

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} = 2\frac{\mu}{\rho} + \frac{\lambda}{\rho} = 2c_s^2 + \frac{\lambda}{\rho} \geq 2c_s^2 \quad (1.7)$$

Sous hypothèse d'avoir une onde plane d'amplitude U_0 , de pulsation ω se propageant dans la direction \mathbf{d} et de polarisation \mathbf{P} , on peut écrire le déplacement sous la forme de l'équation 1.8 :

$$\mathbf{u} = U_0 \mathbf{P} e^{j(\omega t - k\mathbf{d}\cdot\mathbf{x})} \quad (1.8)$$

Le champ de déplacement associé à une onde longitudinale correspond au cas où le rotationnel est nul dans la décomposition de Helmholtz (Equation 1.9).

$$\underline{\text{rot}}\mathbf{u}_L = 0 \quad (1.9)$$

Cela implique que $\mathbf{d} \wedge \mathbf{P}_T = 0$, la polarisation de l'onde longitudinale est colinéaire à la direction de propagation. Dans le cas de l'onde transverse on montre de la même manière que $\mathbf{d} \cdot \mathbf{P}_L = 0$. La polarisation de l'onde transverse est incluse dans un plan de normale \mathbf{d} .

Une fois la localisation du séisme connue, il est possible de quantifier sa magnitude. Initialement, la quantification de la magnitude se faisait essentiellement sur l'observation des effets de ceux-ci, en fonction des dégradations subies. Ensuite, une mesure de magnitude est apparue à partir des sismogrammes introduite par **Richter [1935]**. Il définit ainsi une magnitude à partir de l'amplitude maximale du premier pic d'arrivée de l'onde P mesurée. La magnitude ainsi introduite quantifie l'énergie libérée lors d'un séisme. L'échelle de Richter reste une échelle locale, c'est pourquoi on s'intéressera plutôt aux magnitudes globales, et notamment à la magnitude en moment introduite par **Kanamori [1977]** (Encadré n°3 "Moment sismique et magnitude").

Encadré n°3 "Moment sismique et magnitude"

A partir de la définition de la surface de glissement, il est nécessaire de décrire mathématiquement le glissement pour pouvoir déterminer le terme source à injecter dans les équations de l'élasticité. La magnitude en moment se définit de manière globale par rapport au déplacement relatif entre les 2 plaques tectoniques au niveau du plan de faille. On introduit le moment sismique M_0 caractérisé par :

$$M_0 = \mu A \Delta u \tag{1.10}$$

avec A la surface de glissement, Δu le déplacement moyen et μ le coefficient de cisaillement (ou second coefficient de Lamé). A partir de plusieurs événements sismiques, **Kanamori & Anderson [1975]** ont reliés de manière empirique le moment sismique M_0 et la surface de la faille correspond à la surface de glissement. Ce modèle repose sur une estimation de la surface de glissement. Pour différents événements sismiques il est possible d'associer une valeur M_0 à une surface de glissement (Figure 1.5).

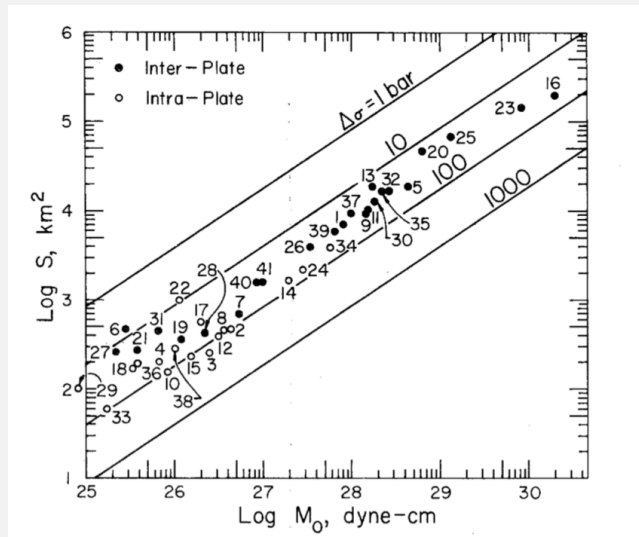


FIGURE 1.5 – Relation entre la surface de la faille et le moment sismique M_0 [**Kanamori & Anderson, 1975**]

Pour modéliser une source sismique, il est nécessaire de connaître la valeur M_0 . Pour cela, **Kanamori [1977]** a introduit la définition de M_w :

$$\log M_0 = 1.5M_w + 16.1$$

où M_w correspond à la magnitude en moment. Celle-ci peut être calculée à partir de relevés à la surface de la Terre lors d'un événement sismique. **Brune [1968]** montre une proportionnalité directe entre la valeur de $\log M_0$ et la magnitude des ondes de surface Figure 1.6.

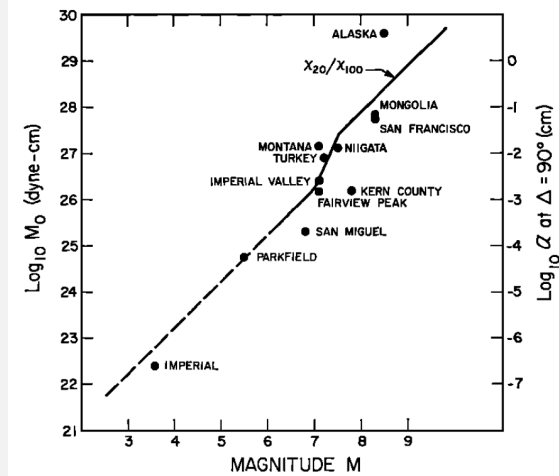


FIGURE 1.6 – Relation le logarithme du moment sismique M_0 et la magnitude des ondes de surface [Brune, 1968]

En plus de donner des informations, à la fois sur la localisation et sur la magnitude, les sismogrammes permettent également d'avoir des informations sur le processus de rupture. C'est un des objectifs du développement du RAP en France. Pour comprendre les processus de rupture il est essentiel d'avoir des relevés en champs proches, c'est à dire à des distances raisonnables du plan de faille. En ce sens, un des enjeux du RAP est d'installer des stations à des distances de moins de 20 km du plan de faille. Il est donc nécessaire d'avoir un réseau de stations suffisamment conséquent. Ainsi, à partir des différents relevés obtenus suite à l'implémentation de réseaux denses sur des zones d'activités sismique, plusieurs modèles de sources ont fait leur apparition. La première étant la description de source cinématique, c'est à dire que l'on considère la source comme un point dans l'espace localisée au niveau de l'hypocentre. En ce point, on définit la discontinuité du déplacement correspondant au glissement de la faille. [Aki & Richards, 1980, Chap. 3] introduit cette notion de source cinématique en introduisant un modèle mathématique pour décrire ce phénomène de rupture (Encadré n°4 Encadré Approximation du déplacement induit par la rupture par un double couple de force -a). Associés à ces modèles de rupture on y joint des modèles de déplacement entre les plans de failles pour complètement décrire le processus. Les modèles sont dépendants des propriétés géophysiques de la faille considérée où les roches constituant les plaques et sa géométrie sont prises en compte (Encadré n°4 Encadré Approximation du déplacement induit par la rupture par un double couple de force - b). Il existe également des modèles de failles dynamiques. Ces modèles de failles prennent en compte la définition de la surface de la faille à laquelle on va associer un processus de nucléation et une vitesse de rupture correspondant au déplacement dynamique au niveau du plan de faille [Okubo, 2018].

Encadré n°4 "Approximation du déplacement induit par la rupture par un double couple de force"

a-Modélisation par un double couple de force

La représentation de la source sismique par une surface de rupture bornée peut être faite soit par l'application de force volumique sur certains éléments au niveau de ce plan, soit par une discontinuité du déplacement ou des contraintes au niveau de la surface de rupture ([Aki & Richards, 1980, Chap. 3] [Burridge & Knopoff, 1964]).

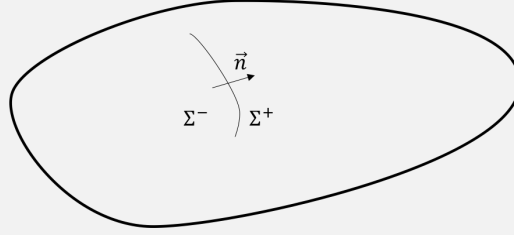


FIGURE 1.7 – Représentation d'un corps élastique de volume fini, incluant une discontinuité représentée par la normale \vec{n} et de surface Σ

On note Σ le plan de discontinuité, et \vec{n} la normale orientée à ce plan, ξ la position générale d'un point sur la surface Σ et η la position générale d'un point dans le volume totale. Le saut de déplacement à l'interface est noté $[\mathbf{u}(\xi, \tau)] = \mathbf{u}(\xi, \tau)|_{\Sigma^+} - \mathbf{u}(\xi, \tau)|_{\Sigma^-}$. A partir de ce saut de déplacement et de l'introduction des fonctions de Green [Aki & Richards, 1980], on peut connaître l'expression de \mathbf{u} en tout point du domaine, définie par :

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{\Sigma} [\mathbf{u}_i(\xi, \tau)] c_{ijpq} n_j \frac{\partial}{\partial \xi_q} \mathbf{G}_{np}(\mathbf{x}, t - \tau, \xi, 0) d\Sigma \quad (1.11)$$

La fonction δ est la fonction de Kronecker. Le tenseur $c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ correspond au coefficient de la loi de Hooke généralisée dans le cas homogène, avec λ et μ correspondant aux coefficients de lamé définis précédemment. La fonction de Green associée à la composante n du déplacement s'écrit : \mathbf{G}_{np} . Où, pour une impulsion définie en ξ à un instant $t = \tau$ cette fonction de Green est solution de l'équation :

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{G}_{np}(\mathbf{x}, t, \xi, \tau) = \delta_{np} \delta(\mathbf{x} - \xi) \delta(t - \tau) + \frac{\partial}{\partial x_m} \left(c_{nmpq} \frac{\partial}{\partial x_q} \mathbf{G}_{pn} \right) \quad (1.12)$$

A partir du théorème de représentation (Equation 1.11) et des fonctions de Green (Equation 1.12) on peut déterminer l'équivalence entre le saut de déplacement et l'application d'une force de volume [Aki & Richards, 1980]. Celle-ci s'écrit sous la forme [Burridge & Knopoff, 1964] :

$$f_p^{[\mathbf{u}]} = - \int_{\Sigma} [\mathbf{u}_i(\xi, \tau)] c_{ijpq} n_j \frac{\partial}{\partial \eta_q} \delta(\eta - \xi) d\Sigma \quad (1.13)$$

L'équation 1.13 permet d'écrire la force équivalente au saut de déplacement $[\mathbf{u}]$. Dans la pratique, les sources sont caractérisées par un tenseur de moment modélisé par des doubles couples de force, ou paires de forces telle que celle définie dans l'équation 1.13. On note \mathbf{M} le tenseur de moment sismique. Cette quantité est dépendante de l'orientation de la faille ainsi que de l'amplitude de la source. Le tenseur de moment sismique est ainsi défini à partir de 9 couples de forces (Figure 1.8) correspondant à chacune des composantes de celui-ci. Traditionnellement, on utilise que 6 des composantes du tenseur de moment sismique. A partir du tenseur de moment on peut définir la densité de tenseur de moment \mathbf{m} tel quel : $\mathbf{m} = \frac{d\mathbf{M}}{d\Sigma}$.

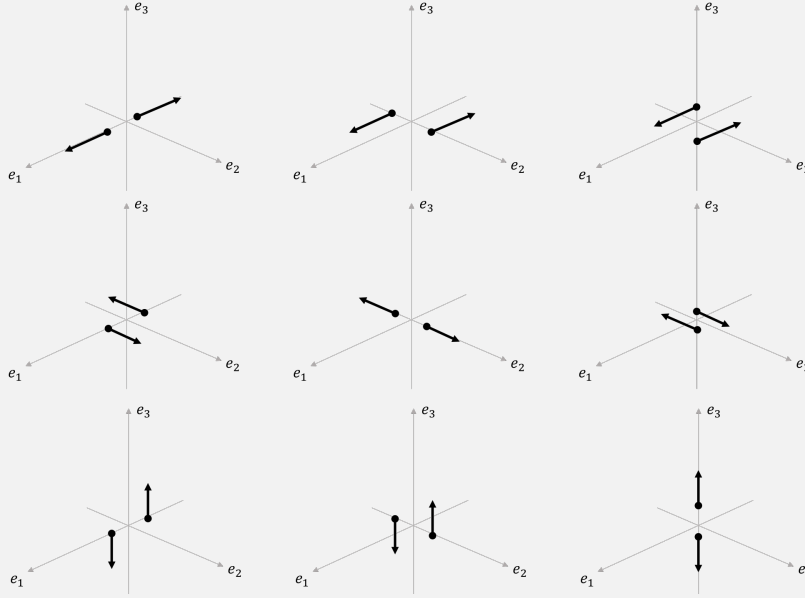


FIGURE 1.8 – Illustration des différents couples de forces possibles [Aki & Richards, 1980]

Pour une extension finie de la source la quantité de densité de tenseur de moment peut s'écrire : $m_{pq} = [u_i] n_j c_{ijpq}$. Cela permet d'écrire le théorème de représentation (Equation 1.11 en un point \mathbf{x} due à la discontinuité sur Σ sous la forme :

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int \int_{\Sigma} m_{pq} * G_{np,q} d\Sigma \quad (1.14)$$

Une des approximations faites est de supposer que les contributions élémentaires sont globalement en phase, la surface de glissement peut être approximée par une source ponctuelle. Il est donc possible d'écrire le champ de déplacement u_n tel que :

$$u_n(\mathbf{x}, t) = M_{pq} * G_{np,q} \quad (1.15)$$

Où $*$ représente le produit de convolution, $M_{pq} * G_{np,q} = \int_0^t M_{pq}(\tau).G_{np,q}(t - \tau) d\tau$.

b-Modélisation du champ de déplacement associé au double couple

M_0 étant déterminé, il est désormais nécessaire de proposer un modèle temporelle ou fréquentielle de la source. Pour cela, [Brune, 1970] propose un modèle avec une décroissance de la transformée de fourier de la vitesse en ω^2 avec $\Omega = \text{FFT}(\dot{u})$.

$$\Omega(\omega) = \frac{\Omega_0}{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^{1/2}} \quad (1.16)$$

L'équation 1.16 correspond à la transformée de Fourier de la vitesse au niveau de la source, ce modèle est en ω^2 à haute fréquence. ω_0 correspond au pôle de la fonction [Brune, 1970]. Ce pôle sera relié à la fréquence coin du modèle de source, notée f_c , c'est à dire la fréquence caractéristique tel que le modèle décroît, à partir de celle-ci en ω^2 . Cette fréquence est liée à la magnitude du seisme. Aki [1967] trace, pour différentes magnitudes sismiques la densité spectrale de déplacement en fonction de la fréquence (Figure 1.9). Plus la magnitude est forte, plus la fréquence caractéristique (fréquence coin) à laquelle le modèle va atteindre son régime asymptotique sera petite.

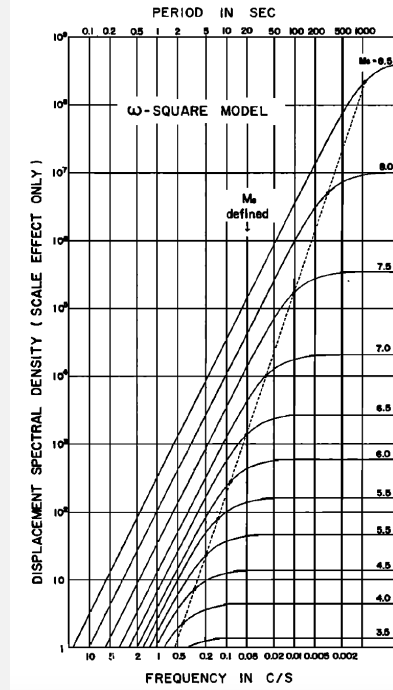


FIGURE 1.9 – Dépendance de la magnitude en fonction du modèle de source de Brune [Aki, 1967]

Pour modéliser ce type de source, le déplacement correspondant au double couple de force s'écrit :

$$u_{Source} = A \left[1 - \left(1 + \frac{t}{2\tau_R} \right) \exp \left(-\frac{t}{2\tau_R} \right) \right] H(t - t_s) \quad (1.17)$$

L'amplitude A est déterminée par la valeur scalaire du moment sismique noté M_0 , le terme τ_R est le temps de montée caractéristique (Rise-Time). t_s correspond au temps de décalage pour respecter l'hypothèse de quiescence du passé.

Il existe également un autre modèle de source avec une pente asymptotique en ω^3 plutôt que le modèle présenté précédemment [Haskell, 1964; Aki, 1967]. Dans les travaux effectués, on se basera sur le modèle de Brune essentiellement.

Propagation d'onde élastodynamique en milieu homogène infini

Maintenant que la source a été caractérisée, il est possible de déterminer la solution du déplacement dans un milieu homogène infini. On définit le repère sphérique (r, θ, ϕ) représenté figure 1.10. Dans ce repère, on peut écrire le champ de déplacement issu en un point \mathbf{x} quelconque de l'espace tel que présenté dans l'équation 1.18 [Aki & Richards, 1980].

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = & \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{A}^N \frac{1}{r^4} \int_{r/v_p}^{r/v_s} \tau M_0(t - \tau) d\tau \\ & + \frac{1}{4\pi\rho v_p^2} \mathbf{A}^{IP} \frac{1}{r^2} M_0 \left(t - \frac{r}{v_s} \right) + \frac{1}{4\pi\rho v_s^2} \mathbf{A}^{IS} \frac{1}{r^2} M_0 \left(t - \frac{r}{v_p} \right) \\ & + \frac{1}{4\pi\rho v_p^3} \mathbf{A}^{FP} \frac{1}{r} \dot{M}_0 \left(t - \frac{r}{v_s} \right) + \frac{1}{4\pi\rho v_s^3} \mathbf{A}^{FS} \frac{1}{r} \dot{M}_0 \left(t - \frac{r}{v_p} \right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

où v_s correspond à la vitesse des ondes S et v_p à la vitesse des ondes P dans le milieu et r correspond à la distance par rapport au point source. Le terme en \mathbf{A}^N correspond à la solution en

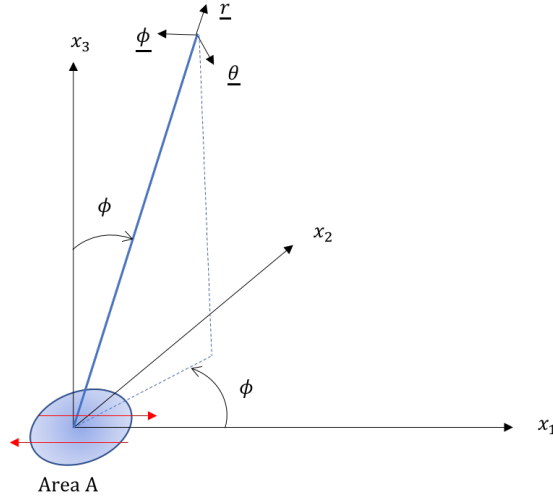


FIGURE 1.10 – Représentation du repère cartésien et du repère sphérique

champ proche. Ce terme étant proportionnel à $\frac{1}{r^3}$ celui-ci va décroître très rapidement et sera rapidement proche de zéro. Ceux en \mathbf{A}^{IS} et \mathbf{A}^{IP} correspondent aux termes en champ intermédiaire, respectivement pour l'onde S et pour l'onde P. Ces termes ont une décroissance en r^2 . Les termes en \mathbf{A}^{FS} et \mathbf{A}^{FP} correspondent quant à eux à la solution en champ lointain avec une décroissance en r , respectivement pour l'onde S et pour l'onde P. Ces coefficients dépendent de l'orientation et sont explicités équation 1.19

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^{\text{N}} &= 9 \sin 2\theta \cos \phi \underline{r} - 6 \left(\cos 2\theta \cos \phi \underline{\theta} - \cos \theta \sin \theta \underline{\phi} \right) \\
 \mathbf{A}^{\text{IP}} &= 4 \sin 2\theta \cos \phi \underline{r} - 2 \left(\cos 2\theta \cos \phi \underline{\theta} - \cos \theta \sin \theta \underline{\phi} \right) \\
 \mathbf{A}^{\text{IS}} &= -3 \sin 2\theta \cos \phi \underline{r} + 3 \left(\cos 2\theta \cos \phi \underline{\theta} - \cos \theta \sin \theta \underline{\phi} \right) \\
 \mathbf{A}^{\text{FP}} &= \sin 2\theta \cos \phi \underline{r} \\
 \mathbf{A}^{\text{IS}} &= \cos 2\theta \cos \phi \underline{\theta} - \cos \theta \sin \theta \underline{\phi}
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Propagation d'onde dans un demi espace stratifié, homogène par couche

Le premier cas étudié correspond au cas d'un milieu infini, cependant il est important de prendre en compte la stratification terrestre pour comprendre l'onde propagée à la surface de celle-ci. Un modèle plus élaboré consiste à prendre en compte les différentes couches de roches composant la terre et donc d'avoir un modèle homogène par couche [Thomson, 1950; Haskell, 1953]. De plus, il est important de prendre en compte l'interface de la couche supérieure de la Terre avec l'atmosphère. Pour décrire le modèle mathématique, dans le cas d'un demi-espace, en plus des conditions du problème précédent, il est nécessaire d'inclure la condition de surface libre. Par conséquent, les fonctions de Green solution du problème seront différentes par rapport à la solution dans un espace infini. Pour faire un modèle de la croûte terrestre, il est nécessaire de considérer un modèle stratifié pour avoir une meilleure modélisation de la propagation. Des techniques numériques ont été développées pour palier à cela, permettant de déterminer une solution semi analytique dans le cas d'un milieu stratifié homogène par couche. Hisada [1994, 1995] présente une méthode de calcul pour un problème multicouche représenté figure 1.11. La résolution de ce problème se fait en se plaçant en coordonnées cylindriques. On définit la source à une profondeur h et de composante (Q_x, Q_y, Q_z) . On suppose un récepteur en position (r, θ, z) avec un champ de déplacement (u_r, u_θ, u_z) . On suppose que le milieu est constitué de N couches.

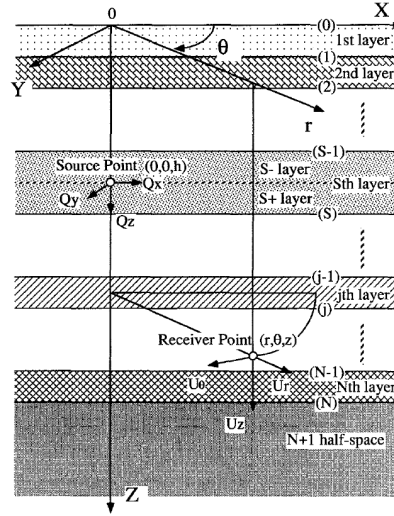


FIGURE 1.11 – Représentation du modèle multi-couche introduit par [Hisada, 1994]

On peut définir le champ de déplacement par exemple pour la composante u_r comme détaillé dans l'équation 1.20. Où j correspond à la j -ième strate, V et H sont les vecteurs de déplacements contraintes et chaque composante est respectivement déterminée pour chaque composante de la source, c'est à dire $u_{r,x}^j$ correspond au champ de déplacement u_r pour la j -ième strate et une source de vecteur $(Q_x, 0, 0)$. La fonction J_1 correspond à la fonction de Bessel d'ordre 1.

$$\begin{aligned}
 u_{r,x}^j(r, \theta, z, h) &= \int_0^\infty \left[V_{1x}^j(z, h) \frac{dJ_1(kr)}{dkr} + H_{1x}^j(z, h) \frac{J_1(kr)}{kr} \right] dk \cos(\theta) \\
 u_{r,y}^j(r, \theta, z, h) &= \int_0^\infty \left[V_{1y}^j(z, h) \frac{dJ_1(kr)}{dkr} + H_{1y}^j(z, h) \frac{J_1(kr)}{kr} \right] dk \sin(\theta) \\
 u_{r,z}^j(r, \theta, z, h) &= - \int_0^\infty \left[V_{1z}^j(z, h) J_1(kr) \right] dk
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

La méthode appliquée par Hisada [1994] illustrée ici sera utilisée pour valider les solutions obtenues par simulation numérique 3-D qui seront exploitées au cours de cette thèse. La figure 1.4 représente un signal généré de manière synthétique et reçu à la surface libre d'un milieu stratifié. On peut repérer, sur ce signal, l'arrivée de l'onde P ainsi que l'arrivée de l'onde S et également la réflexion due à la stratification. Le modèle homogène stratifié permet de décrire la propagation de l'onde sismique dans la croûte terrestre de manière pertinente. Néanmoins, ce modèle qui est simple à utiliser et à maîtriser ne permet pas de décrire fidèlement le signal reçu lors d'un événement sismique. Pour pouvoir décrire plus fidèlement le milieu de propagation, en plus de la stratification, il est nécessaire de prendre en compte l'hétérogénéité propre de chaque couche qui fera l'objet de la prochaine partie.

1.2 Description des hétérogénéités de la Terre

La Terre est, en première approximation, un milieu hétérogène divisé en plusieurs couches (Figure 1.12). La partie superficielle de la Terre ou lithosphère est constituée de la croûte continentale d'une épaisseur de 20 km à 80 km et de la croûte océanique plus mince, allant de 6 à 15 km d'épaisseur. Ces croûtes continentales et océaniques peuvent toutes deux être recouvertes par un dépôt sédimentaire. La lithosphère comprend également la partie supérieure du manteau de 100 km à de 230 km de profondeur. Cette zone est ductile et permet la mobilité des plaques de la lithosphère sur une zone plus rigide correspondant à l'athénosphère allant de 100 km à 700 km de profondeur. Ensuite, se situe le manteau inférieur jusqu'à la limite de Gutenberg, constituant la limite avec le noyau externe qui est liquide. La limite de Lehmann correspond quant à elle à la séparation entre la partie liquide du noyau (noyau externe) et la partie solide de celui-ci.

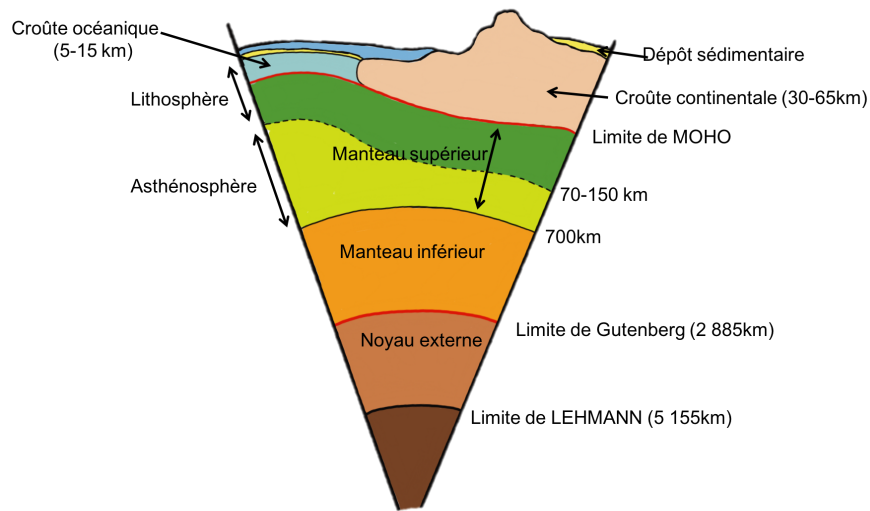


FIGURE 1.12 – Représentation des couches composant la structure interne du globe mises en évidence par discontinuités des vitesses des ondes sismiques

Les sources sismiques ont une profondeur allant de quelques kilomètres à plusieurs centaines de kilomètres environ. La lithosphère constitue ainsi le milieu direct de propagation des ondes entre les infrastructures urbaines et la source sismique. L'hétérogénéité de la Terre peut être vue comme un assemblage de couches homogènes. Néanmoins cette modélisation ne permet pas d'avoir une description suffisante pour comprendre les différents processus lors de la propagation de l'onde sismique. C'est pourquoi, il est intéressant de considérer la lithosphère comme un milieu hétérogène et non de se limiter à un modèle homogène par couche.

Le caractère hétérogène de la lithosphère est essentiellement dû à la complexité des matériaux la composant ainsi qu'aux diverses couches mises en jeu (croûte et manteau supérieur) avec des conditions de pressions, de températures différentes, changeant ainsi la composition des roches présentes. L'influence de cette complexité a notamment été prise en compte dans l'étude des effets de sites, de la non linéarité du sol pour le dimensionnement des structures et les effets de topographie sur la génération d'ondes de surface. La majorité des données connues sur les séismes sont les relevés effectués à la surface. Les fluctuations des propriétés mécaniques au sein même de la Terre ne sont pas connues de manière directe. Par contre, certains carottages à grandes profondeurs effectués en pétrologie ont montrés des fluctuations des propriétés mécaniques en certains points de la croûte. Par ailleurs des méthodes indirectes ont été mises en place pour déterminer

un modèle 3D des vitesses de propagation des ondes dans le milieu. Par exemple la tomographie inverse [Koulakov et al., 2007; Wang et al., 2009] permet de décrire les hétérogénéités sur des profondeurs de quelques dizaines de kilomètres. A partir de ces méthodes, il est possible d'approcher un modèle hétérogène 3D des propriétés du sol sur une zone géologique importante.

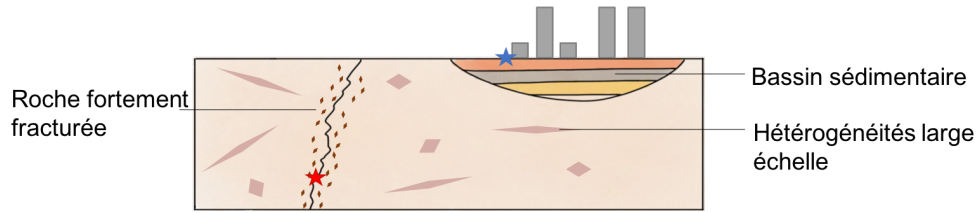


FIGURE 1.13 – Représentation des hétérogénéités de la Lithosphère. L'étoile en rouge représente la position de l'hypocentre, alors que l'étoile en bleue représente un accéléromètre à la surface.

Dans ces fluctuations, sont prises en compte, la stratigraphie globale de la croûte, ainsi que la stratigraphie locale, notamment à l'échelle d'une ville ou d'une région, mettant en avant la présence de bassin sédimentaire correspondant à un dépôt d'une couche fine de sédiments sur la croûte continentale. De plus, de récentes études au niveau des failles affleurantes dans différentes parties du monde (Japon, Californie ou Turquie par exemple) ont révélées une roche très fracturée très proche des failles sismiques [Chester et al., 1993; Chester & Chester, 1998; Ben-Zion & Sammis, 2003]. Cette stratigraphie particulière met en avant 3 types d'hétérogénéités (Figure 1.13), d'un côté, les bassins sédimentaires et de l'autre les fluctuations des propriétés mécaniques de la stratigraphie globale de la lithosphère correspondant d'une part à des hétérogénéités sur une grande échelle spatiale de fluctuations et d'autre part à la particularité des zones de failles composée d'une structure particulière dans les premières centaines de mètres autour des plans de failles.

1.2.1 Bassin sédimentaire

Les bassins sédimentaires sont des assemblages de couches constitués de dépôts sédimentaires où les vitesses de propagation des ondes sismiques sont faibles, de l'ordre de quelques centaines de mètres par seconde. Ces dépôts dépendent de l'histoire de la zone géologique et peuvent avoir une profondeur de quelques dizaines de mètres à quelques centaines de mètres [Perron et al., 2018; Cushing et al., 2020; Rohmer et al., 2020].

Par exemple, dans le cas d'un bassin basé en Provence [Perron et al., 2018], le profil des vitesses des ondes S a été identifié pour des profondeurs allant de 0 à 90m (Figure 1.14). Les vitesses des ondes S fluctuent entre 100 m/s et 1000 m/s pour une profondeur de 0 à 30 m. Ces premiers correspondent à différentes couches dont la couche superficielle correspond à un dépôt limoneux dont la vitesse de propagation est très faible. Celle-ci repose sur une couche sableuse de quelques mètres d'épaisseurs. Une plus grande couche est ensuite composée de mélange de sable et de grès, d'une épaisseur de 40 m où les vitesses sont plus élevées (entre 1000 m/s et 1500 m/s). A partir de 50 m le bassin est composé d'une roche sédimentaire plus dure avec des vitesses des ondes S de l'ordre de 2000 m/s.

Les bassins sédimentaires génèrent des effets de site notoires sur l'onde sismique ressentie à la surface libre de celui-ci [Touhami, 2020; Touhami et al., 2020]. L'onde ressentie peut y être amplifiée de par les propriétés mécaniques qui diffèrent par rapport aux propriétés en profondeur, mais également de par les géométries des bassins et les différents contrastes d'interfaces. Il est donc nécessaire d'identifier et de connaître précisément la structure des bassins sédimentaires pour pouvoir modéliser la propagation des ondes sismiques dans ce milieu stratifié dont les variations de vitesses sont très importantes.

Pour déterminer la structure d'un bassin, il est possible d'effectuer divers carottages. Cela permet

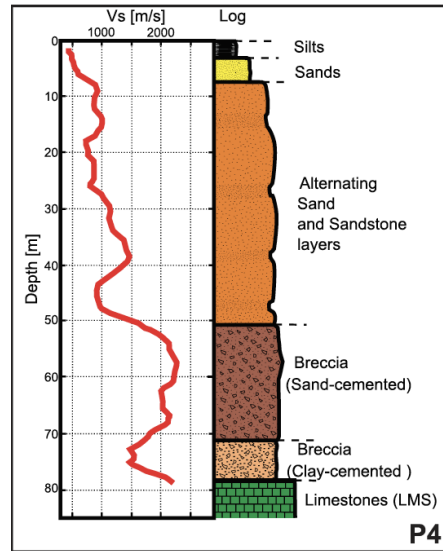


FIGURE 1.14 – Représentation de la stratification des couches superficielles dans le cas de [Perron et al., 2018]. Profil des vitesses des ondes S de 0 à 90 mètres

de connaître la constitution des dépôts sédimentaires dans les premiers mètres sous la surface de la Terre. Néanmoins ces méthodes sont onéreuses et demandent des moyens importants qui peuvent être difficiles à mettre en place. C'est pourquoi, Nakamura [1989] propose une méthode de caractérisation du milieu à partir de micro-tremors. Les micro-tremors sont les composantes de bruits sismiques haute fréquence imperceptibles (> 1 Hz). En considérant un bassin constitué d'une seule couche sédimentaire (d'épaisseur notée H), dont l'épaisseur est faible par rapport à la profondeur de la croûte terrestre supposée infinie. La couche sédimentaire a une rigidité très faible par rapport à la croûte. L'utilisation de bruit sismique et notamment de micro-tremors permet d'évaluer la fréquence de résonance de cette couche superficielle en faisant le ratio entre les composantes horizontales des micro-tremors et la composante verticale. Pour une structure d'une couche superficielle sur une couche très rigide, la fréquence propre f_0 correspondant au pic du ratio des composantes horizontales sur la composante verticale (méthode H/V) peut être reliée à la vitesse V_s de la couche superficielle à la profondeur de celle-ci dont l'expression est détaillée dans l'équation 1.21.

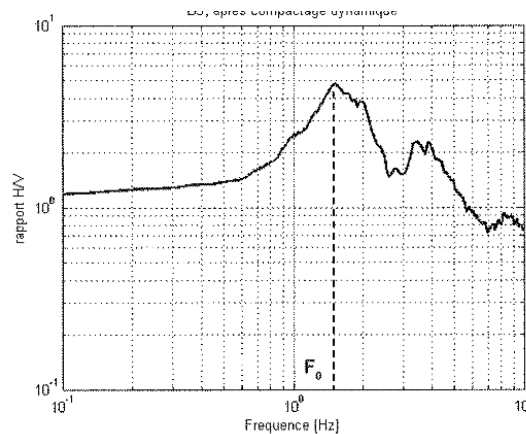


FIGURE 1.15 – Identification de la fréquence propre f_0 à partir du rapport spectral des composantes de bruit sismique [Brûlé & Javelaud, 2013]

Cette méthode est largement utilisée pour l'identification de ces bassins. Suivant la géométrie supposée il existe plusieurs applications de la méthode en fonction de ce qui est préconisé par les normes. L'idée étant d'identifier la fréquence propre de la vibration de la couche pour pouvoir déterminer sa structure (Equation 1.21).

$$f_0 = \frac{V_s}{4H} \quad (1.21)$$

Où f_0 désigne la fréquence propre de la couche et H l'épaisseur de cette couche. Ce cas est applicable dans une stratification majoritairement horizontale (1D) sans considérer des effets de site 2-D ou 3-D qui peuvent être identifiés mais qui ne seront pas évoqués ici. A partir de la méthode H/V on peut ainsi tracer le rapport entre la partie horizontale du spectre et sa composante verticale et ainsi identifier la fréquence propre de la couche sédimentaire (Figure 1.15). A partir de cette fréquence il est donc possible de déterminer l'épaisseur de la couche (H). On peut identifier un profil de vitesse en profondeur pour un point donné (Figure 1.14) grâce à l'utilisation des relevés des microtrémors et aux méthodes similaires. En plus d'avoir un profil moyen par couche, une fluctuation autour de ces valeurs moyennes est identifiable et correspond aux fluctuations locales des couches. Néanmoins, Bonnefoy-Claudet [2004] montre la limite de la méthode H/V dans le cas de l'utilisation du bruit sismique, notamment quand il n'y a pas un pic clairement identifié.

1.2.2 Hétérogénéité large échelle de la lithosphère

Les méthodes permettant l'obtention d'un profil de vitesse des bassins sédimentaires ne sont plus valides pour déterminer la stratification et les hétérogénéités de la lithosphère pour des profondeurs allant jusqu'à ~ 100 km. Ainsi, des méthodes de tomographies grandes échelles ont été mise en place pour pouvoir décrire ce milieu de propagation en profondeur [Meschede & Romanowicz, 2015]. Ces méthodes permettent, à partir d'un modèle de source calibré sur un évènement sismique et de mesures à différentes stations, de retrouver les propriétés du milieu traversé par l'onde sismique. A partir de ces propriétés matériaux, on peut ainsi déterminer pour une profondeur donnée la variation des vitesses des ondes P et des ondes S autour d'une valeur moyenne (Figure 1.16).

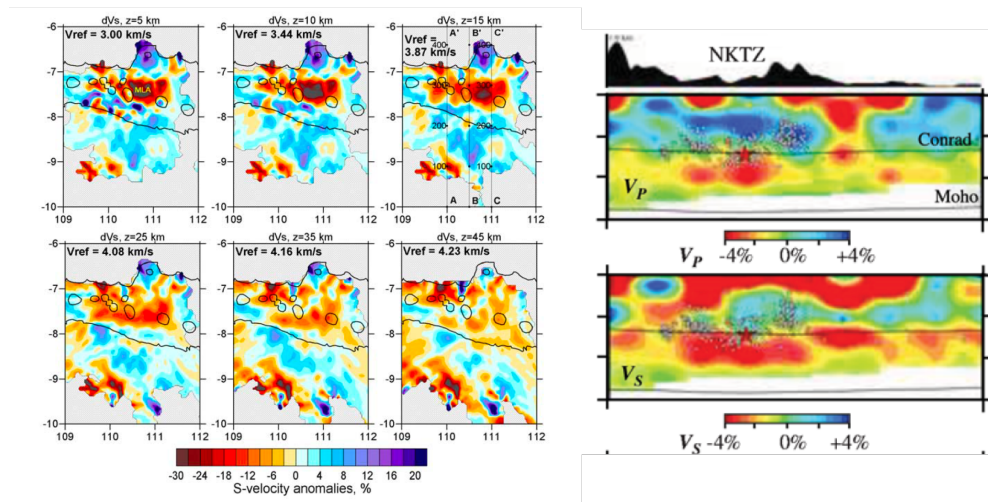


FIGURE 1.16 – A gauche : Anomalies des vitesses V_s en fonction de la latitude et la longitude à différentes profondeurs dans le cas de Java, Indonésie [Koulakov et al., 2007]. A droite : Hétérogénéités large échelle [Wang et al., 2009]

La figure 1.16 représente, à gauche, la structure, à différentes profondeurs des anomalies sur la vitesse des ondes S suite à une méthode d'inversion appliquée par Koulakov et al. [2007]. Celle-ci

illustre les fluctuations de vitesse des ondes S pour différentes profondeurs sur une zone géologique de plusieurs centaines de kilomètres carrés. Pour une profondeur de 5 km on a une vitesse moyenne $V_{s,ref,z=5km} = 3000$ m/s avec une fluctuation allant jusqu'à 20 % autour de cette moyenne. Pour cette même zone géologique mais pour une profondeur de 25 km on a cette fois une vitesse moyenne $V_{s,ref,z=25km} = 4080$ m/s avec des fluctuations plus faibles de manière globale avec, par contre, quelques fluctuations très fortes localement. La figure à droite représente le profil en profondeur sur les vitesses des ondes S et P sur une coupe donnée dans le nord du Japon au niveau de Niigata Wang et al. [2009]. On a suivant cette coupe des vitesses V_p et V_s qui fluctuent de l'ordre de 5 %. Ces fluctuations sont présentes sur des distances de plusieurs dizaines à plusieurs centaines de kilomètres.

Dans la pratique il est possible de déterminer la structure hétérogène pour une région sismique spécifique à partir de ces méthodes de tomographie. Il est ainsi possible d'avoir une description complète du milieu de propagation de l'onde au niveau de la lithosphère sur de grandes échelles (de l'ordre de $\sim 10 - 100$ km).

1.2.3 Roche fortement fracturée proche de la faille

En plus de regarder la variabilité spatiale des propriétés mécaniques de la lithosphère, les zones de contact entre plaque tectonique et notamment les failles sismiques ont également été l'objet de nombreuses études, aussi bien à l'échelle mésoscopique qu'à l'échelle microscopique (de l'échelle du mètre jusqu'au micromètre). La compréhension de la complexité de la zone de faille est un enjeu majeur pour modéliser le mécanisme de rupture et le milieu de propagation locale autour de celle-ci. La complexité de cette structure est liée à son histoire par les différents dépôts sédimentaires mais aussi aux ruptures successives ayant eu lieu dans cette zone. La composition autour de ses failles est connue et déterminée à partir de relevés géologiques sur les failles affleurantes (Représentatif de la structure géologique autour de la ligne tectonique Arima Takatsuki ou ATTL au Japon : figure 1.17).

On peut ainsi identifier les compositions en terme de roches et aussi voir l'histoire de la faille et l'asymétrie entre les deux côtés autour de la zone tectonique. Au niveau d'une des failles actives (point jaune représenté sur la figure), on peut voir un contraste entre 2 milieux de part et d'autre de la faille, avec d'un côté un milieu granitique (en vert) et de l'autre un milieu rhyolitique (en orange) où le milieu rhyolitique (roche volcanique) est d'une consistance plus dure. Cette zone est moins endommagée que la zone granitique par les multiples fracturations dues aux différents événements sismiques.

Les fortes contraintes dues aux mouvements des plaques induisent des effets physico-chimiques sur la roche très proche du plan de faille. Dues aux températures, aux conditions de pression, la roche présente est broyée et recomposée sous forme de cataclasites (roche cohésive créée par une importante contrainte au niveau de la faille). Sur les failles affleurantes présentées, la présence de roches broyées avec une matrice de cristallisation supérieure à 90% (dite ultracataclasite) est révélée dans les quelques mètres du plan de failles. La présence de ces forts changements de cristallographie peut être considérée, à l'échelle mésoscopique comme une forte densité de fracturations dans les quelques premiers mètres de la faille. Pour le cas de la ligne tectonique Arima Takatsuki, au Japon, dans les premiers mètres par rapport à la faille, la zone représentée est extrêmement fracturée. Celle-ci est constituée de conglomérats fins (entre 0 et 0.2 m du plan de faille). Une zone plus grossière, avec des fractures plus importantes, est présente entre 0.2 et 3 m du plan de faille. Ensuite, une zone de roche granitique pulvérisée constituant une zone de roches non cohésives est présente jusqu'à environ 200 mètres de la faille, suivie d'une zone cohésive fracturée de granites. Les fissures et milieux non cohésifs sont présents dans les 100 premiers mètres par rapport au plan de la faille. De l'autre côté de la faille, la roche en présence étant plus dure, celle-ci n'est que très faiblement fracturée dans les tous premiers mètres par rapport au plan de la faille (de 0 à 3 m) puis quasi-intacte par la suite (Représentation schématique figure 1.18 issue de [Mitchell et al., 2011]).

Les études menées sur les failles affleurantes, révèlent une forte présence de fissures qui décroît

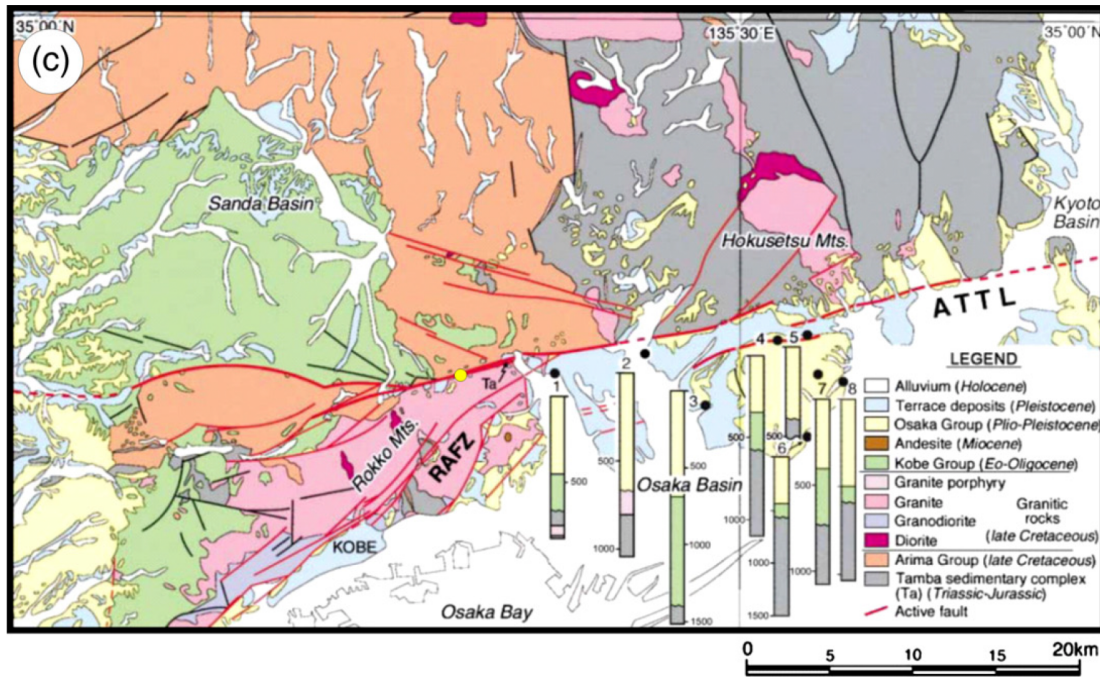


FIGURE 1.17 – Constitution de la géologie locale aux alentours de la ligne tectonique Arima Takatsuki au japon [Mitchell et al., 2011]

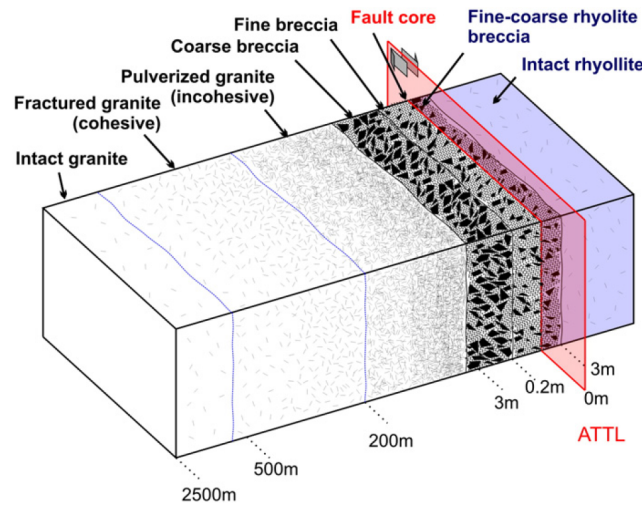


FIGURE 1.18 – Représentation schématique des hétérogénéités au niveau du plan de faille dans le cas de la ligne tectonique Arima-Takatsuki [Mitchell et al., 2011]

rapidement en fonction de la distance par rapport au plan de faille. Ces densités de fractures ont été quantifiées sur certaines zones de failles, telle que celle présentée précédemment (Figure 1.19). Dans la roche rhyolitique, les fractures sont très peu nombreuses en comparaison à la roche granitique. Pour la roche granitique, on a une densité de fracture très forte dans les premiers mètres et qui décroît exponentiellement. Au niveau de la zone de conglomérats (entre 0 et 0.2 mètres) on tend à avoir une quantité de fractures moindre qu'aux alentours de 10 mètres, même si le nombre de mesure dans cette zone ne permet pas de tirer de conclusions claires.

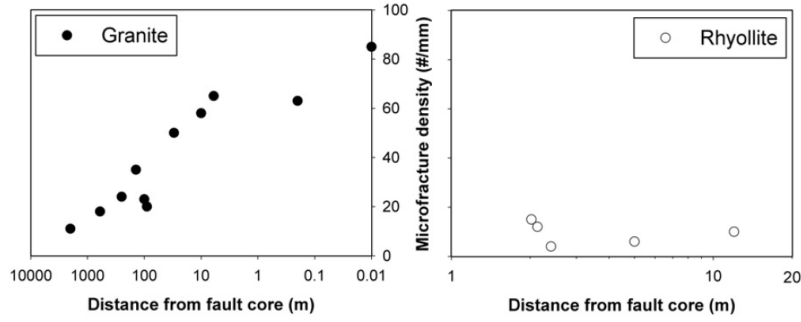


FIGURE 1.19 – Densité de micro-fractures de part et d’autre du plan de faille [Mitchell et al., 2011]

La présence de ces fractures est la cause de variations importantes des propriétés mécaniques. De plus le milieu de propagation proche du foyer du séisme ne peut être considéré comme un milieu homogène. Ces résultats sont notables également pour d’autres failles sismiques dans le monde comme Mitchell & Faulkner [2009] et Mitchell & Faulkner [2012]. Dans le cas de la faille de Caleta Coloso au nord du Chili (Figure 1.20), la structure de la faille ne correspond pas forcément à une structure asymétrique comme précédemment. Par contre la variation de la densité de fissuration en fonction de la distance à la source est également exponentiellement décroissante avec la distance de la faille.

La zone très fracturée étant suffisamment petite, celle-ci est parfois négligée pour la propagation d’onde, en considérant que celle-ci ne sera pas vue par le contenu basse fréquence de l’onde propagée. Néanmoins, pour mieux comprendre et améliorer les modèles de ruptures ainsi que la propagation de l’onde à ce niveau, la prise en compte de cette zone a été incluse dans les nouveaux modèles de failles. Une des approches mise en place est de prendre en compte cette zone comme une zone homogène aux propriétés mécaniques plus faibles pour tenir compte de la fracturation de la roche. Cette zone faible aura donc une vitesse des ondes V_s et V_p diminuée. La prise en compte de cette zone affaiblie fait l’objet de nombreux travaux tel que ceux de Huang et al. [2014]; Okubo [2018] où la présence de ces zones endommagées a un impact dans la mécanique de rupture et dans la propagation de l’onde sismique. La figure 1.21 représente un schéma de la zone de faille où W correspond à l’épaisseur de la zone faille avec des propriétés mécaniques plus faibles. En notant $\Delta V = 1 - \frac{V_{Fault}}{V_{Rock}}$ on peut avoir des réductions de vitesse entre 30 et 60% pour certaines failles citées dans [Huang et al., 2014] et pour des épaisseurs de zone de 100 à 1500 m.

Cette modélisation est justifiée dans le cas où la partie de la zone homogénéisée est fine, on considère alors que les basses fréquences, donc les plus grandes longueurs d’ondes n’interagiront pas avec les hétérogénéités constituant le milieu de la zone de faille. Néanmoins, cela ne permet pas de connaître l’impact des hétérogénéités sur les plus petites longueurs d’ondes qui risquent d’interagir avec celles-ci. C’est pourquoi on souhaite conserver le caractère hétérogène du milieu dans les modélisations pour rester le plus fidèle dans la description du milieu (Equation 1.22). $\mathbf{x} = (x, y, z)$ correspond aux 3 dimensions dans un repère cartésien et ρ , λ et μ sont les paramètres mécaniques du milieu considéré dépendants de la position. Ces paramètres peuvent être reliés aux différentes vitesses de propagation par $c_s^2(z) = \frac{\mu}{\rho}$, $c_p^2(z) = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} + f(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) &= \lambda(\mathbf{x}) \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \mathbb{1} + 2\mu(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (1.22)$$

Même si on connaît par contre les fluctuations des propriétés et la distance caractéristique de ces fluctuations, une des difficultés majeures est que les propriétés mécaniques du milieu ne sont pas

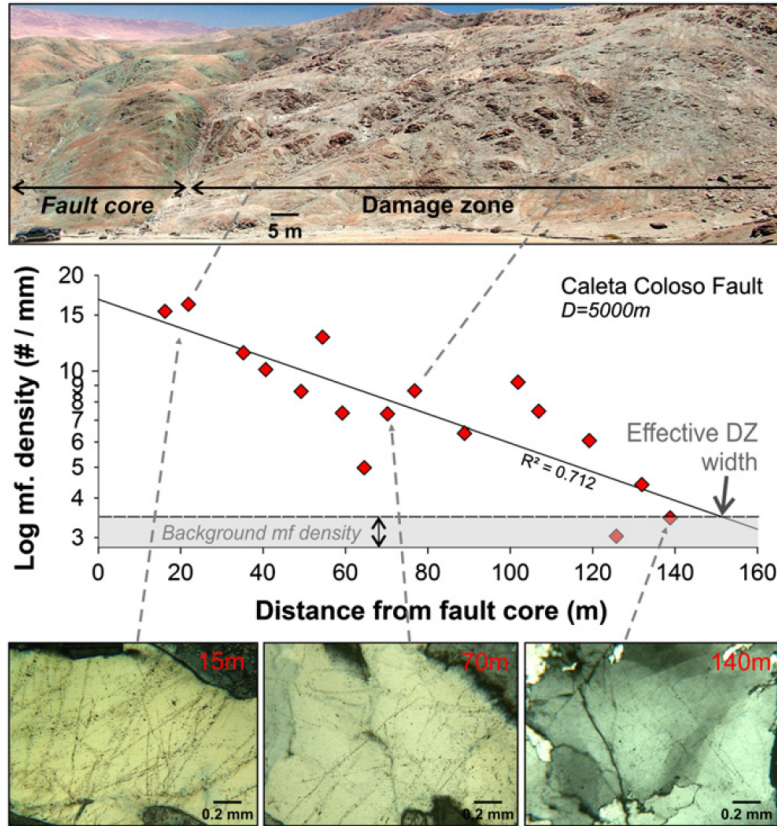


FIGURE 1.20 – Densité de micro-fractures dans la zone très proche de la faille dans le cas de la faille chilienne Caleta Coloso [Mitchell & Faulkner, 2012]

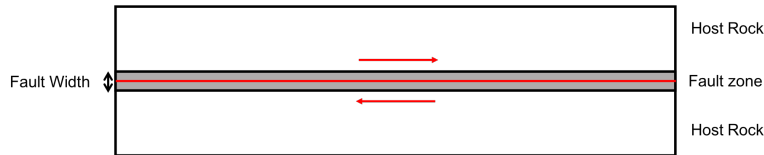


FIGURE 1.21 – Schématisation de la zone faible (Schéma inspiré de [Huang et al., 2014])

connues en tout point de l'espace, et notamment en profondeur. Une approximation du milieu hétérogène utilisée dans la suite est de considérer ce milieu comme un milieu aléatoire dont les propriétés aléatoires seront choisies en fonction des fluctuations considérées suivant les différents relevés géophysiques connus.

1.2.4 Tailles caractéristiques et classification des hétérogénéités

Wu & Aki [1988] propose une classification des hétérogénéités terrestres. Cette classification est faite en considérant l'ordre de grandeur des perturbations en fonction de leur taille caractéristique (Figure 1.22).

En ne s'intéressant qu'à la partie régionale, on a dans le cadre de la lithosphère des hétérogénéités avec une longueur caractéristique entre $\ell_c \sim 100 - 1000$ m (échantillon 12 et 14 Figure 1.22) pour des fluctuations de l'ordre de 1% (échantillon 12) à 10% (échantillone 14). On trouve également des régimes avec des longueurs caractéristiques plus grandes (échantillons 10, 11 et 12) où les fluctuations sont de l'ordre de 1% pour des longueurs caractéristiques de l'ordre de 10 km

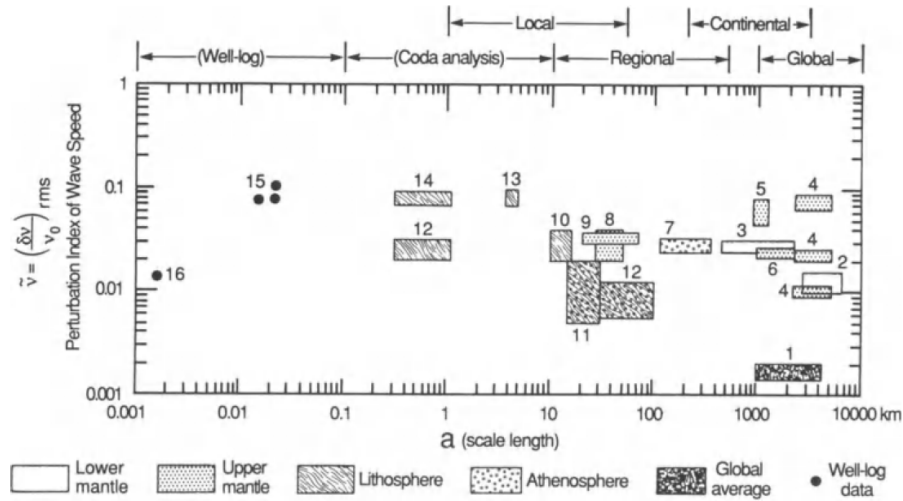


FIGURE 1.22 – Classification des hétérogénéités en fonction de l'échelle caractéristique de fluctuation des vitesses des ondes [Wu & Aki, 1988]

à 100 km. Cela correspond aux hétérogénéités large échelle de la lithosphère, où les variations de vitesse sont relativement faibles par rapport à la longueur caractéristique de fluctuations. On pourrait également inclure les échantillons correspondants au manteau supérieur (notamment les échantillons 8 et 9) qui refléteront une partie des fluctuations de la Lithosphère en profondeur. En complétant ces données avec les relevés sur les roches fracturées proches de la faille on peut y ajouter une hétérogénéité plus locale avec une longueur caractéristique entre $\ell_c \sim 1 - 100$ m et cette fois-ci pour des fluctuations de l'ordre de 10% jusqu'à 60%.

1.3 Impact des hétérogénéités sur les champs d'onde en surface

Les champs aléatoires sont utilisés pour approximer les hétérogénéités terrestres [Capon, 1974; Aki & Richards, 1980; Shapiro & Hubral, 1999; Sato et al., 2011]. L'approximation des hétérogénéités de la Terre par une approche stochastique permet de modéliser les fluctuations des propriétés mécaniques des différents milieux considérés. On souhaite ainsi classifier les hétérogénéités en différents régimes. Chaque régime aura un impact différent sur l'onde propagée.

1.3.1 Classification des différentes familles d'hétérogénéités

La présence de ces hétérogénéités induit différents régimes de propagation [Wu & Aki, 1988; Cottureau, 2016] (Figure 2.1). Wu & Aki [1988] représente les différents régimes en fonction de $\frac{\ell_c}{\lambda}$, si $\ell_c \approx \lambda$ on est dans un régime de diffraction à angle large, correspondant aux hétérogénéités large échelle illustrées au début de ce chapitre. Si $\ell_c \gg \lambda$ alors on se place cette fois dans un régime de diffraction à petit angle, ce qui correspond à un régime haute fréquence et donc au régime modélisant les hétérogénéités locales dans les premiers mètres de la faille pour le contenu haute fréquence des ondes sismiques. Cottureau [2016] introduit également le régime de localisation correspondant à de fortes hétérogénéités pouvant retenir l'énergie au sein de la structure fortement hétérogène, pour une certaine bande de fréquences. A partir de ces différentes classifications et en se basant sur les classifications de Fouque et al. [2007] on peut décrire 3 régimes différents dont le comportement de l'onde dans ce milieu sera différent (les influences du régime considéré seront étudiées dans les différents chapitres).

Il est possible de classifier suivant différents ordres de grandeur entre la fréquence considérée et la longueur du domaine ainsi que la longueur caractéristique des fluctuations, différents régimes de

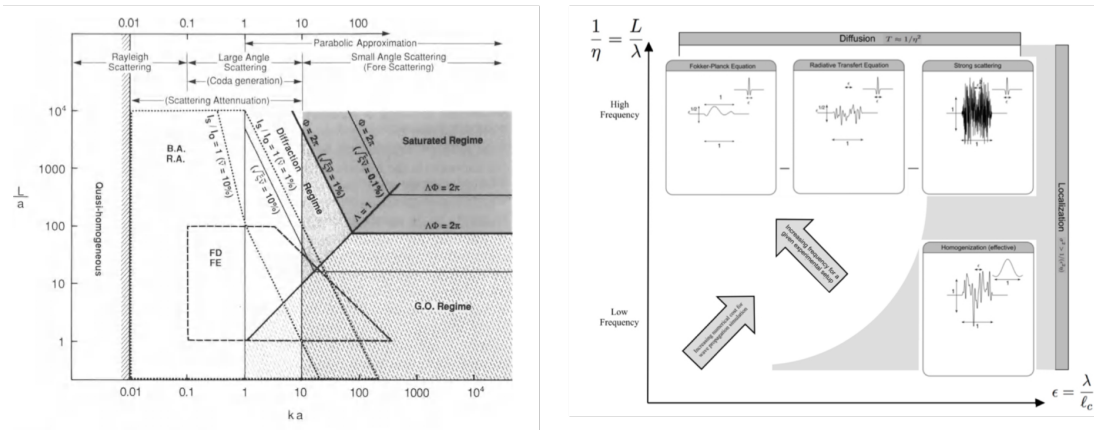


FIGURE 1.23 – A gauche sont représentés les différents régimes en fonction de la longueur du milieu L et a qui à la longueur caractéristique [Wu & Aki, 1988] A droite sont représentés les différents régimes en fonction de la fréquence considérée et le rapport entre la longueur d’onde et la longueur caractéristique de l’hétérogénéité ℓ_c [Cottreanu, 2016]

fluctuations (Figure 2.1). On souhaite, à partir de Fouque et al. [2007] et de la figure précédemment détaillée, définir les régimes correspondants en fonction de rapport de grandeurs caractéristiques. Pour cela, on considère une onde monochromatique se propageant dans un milieu unidimensionnel où la longueur d’onde est définie par : $\lambda_0 = \frac{2\pi\bar{c}}{\omega_0}$, la longueur de corrélation du milieu par ℓ_c , l’amplitude des fluctuations par v_0 et la longueur caractéristique de propagation par L_0 . On peut considérer 3 régimes caractéristiques du milieu hétérogène approché par un milieu aléatoire :

1. Régime d’homogénéisation :

Ce régime correspond à un régime basse fréquence où la distance de propagation est de l’ordre de grandeur de la longueur d’onde et la longueur de corrélation est très petite devant la longueur d’onde. C’est un milieu aléatoire faiblement diffractant dont la propagation de

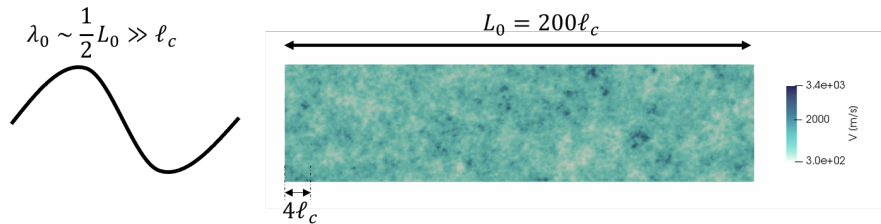


FIGURE 1.24 – Représentation d’un milieu hétérogène correspondant à un milieu homogénéisé au regard d’une onde de longueur d’onde égale à la moitié du milieu de propagation

l’onde est décrite par une équation d’onde déterministe effective. En termes de rapports de grandeurs, ce milieu est caractérisé par :

$$\frac{\ell_c}{\lambda_0} \ll 1, \quad \frac{L_0}{\lambda_0} \sim 1, \quad v_0 \ll 1 \quad \text{ou} \quad v_0 \sim 1$$

Celui-ci correspond au régime d’homogénéisation (figure 1.23).

2. Régime faiblement hétérogène :

Ce régime correspond à un régime haute fréquence avec un couplage faible entre l’onde et le milieu où la distance de propagation est très grande devant la longueur de corrélation. Les

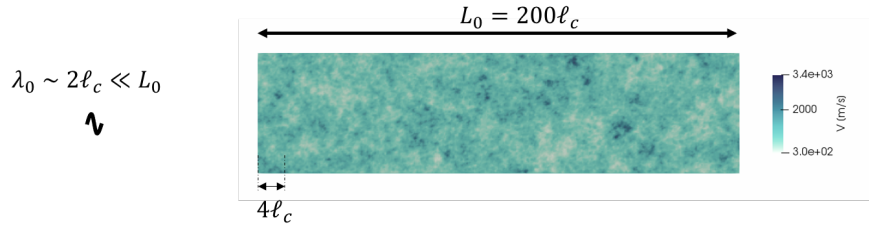


FIGURE 1.25 – Représentation d’un milieu hétérogène correspondant à un milieu faiblement hétérogène au regard d’une onde de longueur d’onde très petite devant la longueur du milieu de propagation

fluctuations des propriétés du milieu sont faibles. La longueur caractéristique de propagation doit être assez grande pour qu’il y ait une diffraction significative du milieu. En termes de rapports de grandeurs, ce milieu est caractérisé par :

$$\frac{\ell_c}{\lambda_0} \sim 1, \quad \frac{L_0}{\lambda_0} \gg 1, \quad \nu_0 \ll 1$$

Celui-ci correspond au régime de transfert radiatif (figure 1.23).

3. Régime fortement hétérogène :

Ce régime correspond à un régime haute fréquence avec un couplage fort entre l’onde et le milieu car les fluctuations des propriétés du milieu sont élevées. La longueur caractéristique

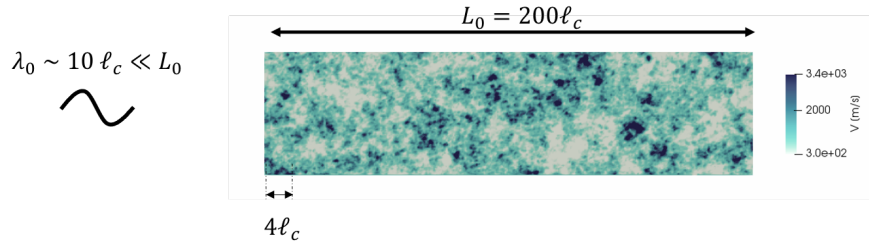


FIGURE 1.26 – Représentation d’un milieu hétérogène correspondant à un milieu fortement hétérogène

de propagation doit être assez grande pour qu’il y ait une rétrodiffusion suffisante. En termes de rapports de grandeurs, ce milieu est caractérisé par :

$$\frac{\ell_c}{\lambda_0} \ll 1, \quad \frac{L_0}{\lambda_0} \gg 1, \quad \nu_0 \sim 1$$

Celui-ci correspond au régime de forte diffusion (figure 1.23).

1.3.2 Modèle stochastique utilisé pour approcher les hétérogénéités terrestres

Pour modéliser le champ aléatoire des hétérogénéités terrestres, plusieurs modèles ont été proposés. Capon [1974] propose un modèle de corrélation gaussien pour décrire la variation de vitesse en fonction de la profondeur. Par ailleurs, Wu & Aki [1985b] décrit la nature fractale des hétérogénéités constituant la Lithosphère. Wu & Aki [1985a] étudie également un modèle exponentiel ou de Von Kármán. De nos jours, le modèle de corrélation de Von Kármán est le modèle généralement utilisé pour modéliser les hétérogénéités terrestres [Sato et al., 2011; Sato, 2019]. Ce modèle a initialement été défini pour décrire les turbulences en acoustique [Von Karman, 1948]. Il est décrit à l’équation 1.23 avec $R(\mathbf{x})$ la fonction d’autocorrélation et $P(k)$ la densité spectrale de puissance associée. k représente le nombre d’onde, H l’exposant de Hurst qui peut être quantifié

suivant les matériaux en présence, d la dimension du milieu hétérogène. Dans le cas où $H = 0.5$ on retrouve un modèle exponentiel. La fonction K_H est une fonction de Bessel d'ordre 2.

$$\begin{aligned}
 R(\mathbf{x}) &= \frac{2^{1-H}}{\Gamma(H)} \sigma^2 \left(\frac{|\mathbf{x}|}{\ell_c} \right)^H K_H \left(\frac{|\mathbf{x}|}{\ell_c} \right) \\
 P(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R(\mathbf{x}) \exp(-i k \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
 P(k) &= \frac{2^d \pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(H + \frac{d}{2}) \sigma^2 \ell_c^d}{\Gamma(H) (1 + \ell_c^2 k^2)^{H + \frac{d}{2}}}
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

Sato [2019] décrit pour plusieurs zones sismiques et suivant les constituants les densités spectrales de puissance pouvant être associés pour modéliser le milieu par une fonction de type Von Kármán pour décrire les hétérogénéités. Un exemple est représenté figure 1.27

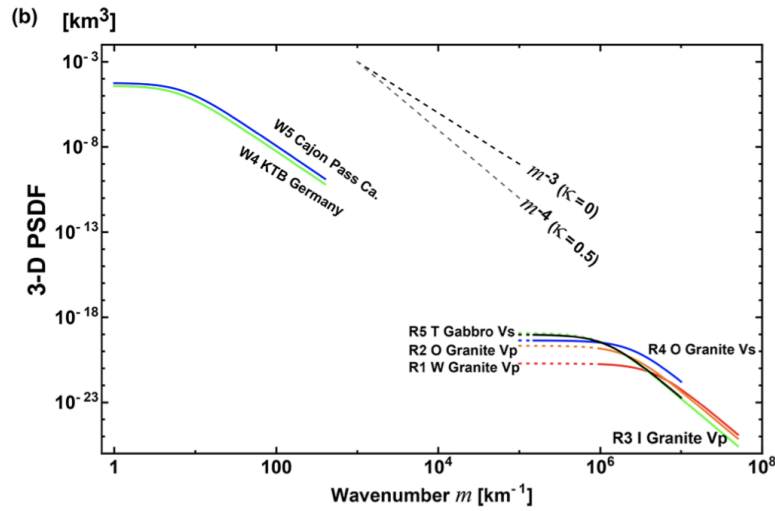


FIGURE 1.27 – Représentation des densités spectrales pour différents milieux pour décrire les fluctuations des vitesses des ondes P et des ondes S [Sato, 2019]

Le modèle de corrélation de Von Kármán sera le modèle utilisé dans ces travaux de thèse pour modéliser les fluctuations terrestres. De plus, la distribution choisie sera une distribution log-normale. Cette distribution assure que les propriétés mécaniques générées devant être positives le sont en tout point de l'espace.

1.4 Problématiques et développements

La croûte terrestre est un milieu hétérogène, dont différentes échelles d'hétérogénéités ont été mises en évidence (représentation schématique voir figure 1.28). Ces travaux ont pour objectif d'apporter de nouvelles connaissances sur l'impact de ces hétérogénéités sur le champ d'ondes mesuré en surface. Ces travaux de recherches sont articulés en 3 parties majeures, la première est de développer des modèles analytiques permettant, en fonction des grandeurs caractéristiques des hétérogénéités de caractériser l'impact sur le contenu fréquentiel. Pour cela, on partira de résultats de propagation d'onde acoustique dans un milieu aléatoire où l'atténuation fréquentielle est connue [Fouque et al., 2007]. Ces résultats seront adaptés aux développements des équations de l'élastodynamique en considérant un milieu aléatoire 3D stratifié dont les fluctuations seront 1D. Ces résultats sont présentés dans le chapitre 2, dont l'apport majeur est que dans le cas d'un couplage entre les ondes P et SV on peut déterminer l'atténuation fréquentielle d'une onde traversant un milieu aléatoire dont les hétérogénéités sont 1D de manière théorique. Par ailleurs, sous

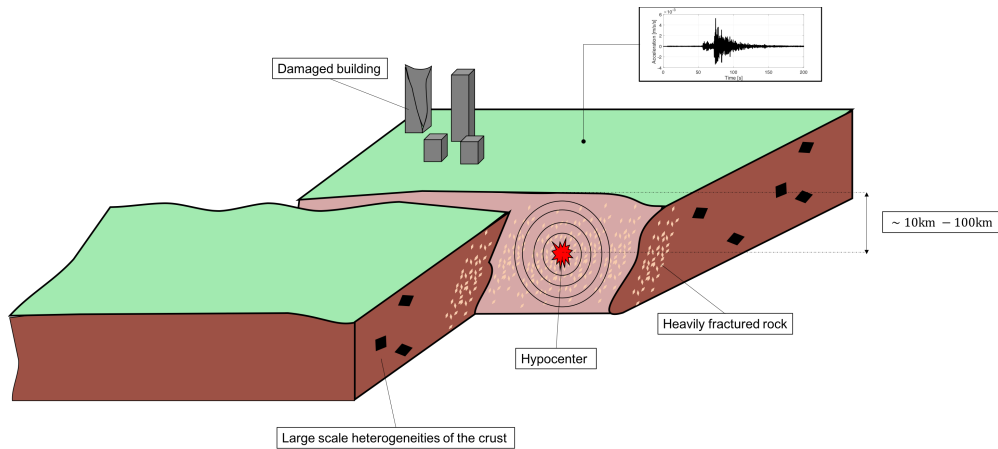


FIGURE 1.28 – Représentation schématique de la croûte terrestre en tenant compte des différentes échelles d’hétérogénéités.

certaines configurations, il est possible de retrouver à partir des équations de l’élastodynamique des résultats similaires à l’acoustique. Il sera également montré que cette atténuation dépend de paramètres dimensionnant le milieu aléatoire (variance, longueur de corrélation et densité spectrale).

La seconde partie, exposée dans le chapitre 3, s’intéresse à la modélisation par simulation numérique des hétérogénéités constituant la lithosphère et correspondant aux hétérogénéités large échelle présentées précédemment. On modélise ses hétérogénéités par un milieu aléatoire 3D dont les fluctuations seront également 3D. Pour cela on caractérise les effets des hétérogénéités par des grandeurs usuellement utilisées pour le dimensionnement dans le cadre de la géophysique tel que les valeurs de PGA à la surface du modèle numérique. La mise en place de ces simulations numériques permet également de générer une base de données de signaux synthétiques importante. On applique, sur celle-ci des méthodes utilisées dans le cas de signaux enregistrés pour comparer l’atténuation haute fréquence obtenues par simulation numérique en supposant que l’on a un milieu élastique aléatoire linéaire. On a choisi dans ces travaux notamment de s’intéresser à la détermination du paramètre empirique κ qui est un paramètre empirique modélisant l’atténuation haute fréquence introduit par [Anderson & Hough \[1984\]](#).

Enfin, la dernière partie de ces travaux propose de modéliser les hétérogénéités très proches de la faille pour caractériser les effets de la structure mince, très fracturée dans les premiers mètres du plan de faille. Ces travaux sont présentés en conclusion de ce manuscrit où quelques résultats préliminaires ont été obtenus. On montre qu’il peut être possible d’avoir une zone où il y a un piègeage d’une partie de l’énergie. Cette énergie piégée correspond essentiellement à la partie haute fréquence de l’onde émise à la source.

Chapitre 2

Propagation d'onde élastique en milieu aléatoire stratifié horizontalement

Pour comprendre l'atténuation due aux hétérogénéités terrestres mis en avant par [Aki & Chouet \[1975\]](#); [Shapiro & Hubral \[1999\]](#); [Sato et al. \[2011\]](#), on souhaite développer les équations de l'élasticité en 3D se propageant à travers un milieu aléatoire dont les propriétés fluctuent aléatoirement sur la direction horizontale. On souhaite déterminer, à travers le développement de ces équations, l'effet de la présence d'un milieu aléatoire sur le contenu fréquentiel de l'onde traversant celui-ci. Pour mener à bien cet objectif, on adapte une méthode utilisée en acoustique [[Fouque et al., 2007](#)] au cas de l'élasticité. Cette méthode repose sur le traitement d'équations différentielles stochastiques en considérant un milieu stratifié dont les fluctuations des propriétés matériaux sont suivant la direction de stratification. Dans le cadre de la sismologie, on a une stratification par couche entre le noyau et l'atmosphère. Pour effectuer les développements analytiques on considèrera un régime faiblement aléatoire avec $\frac{\ell_c}{\lambda_0} \sim 1$, $\frac{L_0}{\lambda_0} \gg 1$, $\nu_0 \sim 1$. C'est à dire que la longueur caractéristique des fluctuations est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde, la longueur de la couche aléatoire est grande devant la longueur d'onde et les fluctuations sont faibles (Partie 1.3.1). De plus on suppose que la taille du pulse est petite et est de l'ordre de $\varepsilon^2 = \frac{\ell_c}{L_0}$. La première partie de ce chapitre est consacrée au cas d'une onde élastique en incidence normale sur la couche aléatoire. Dans ce cas particulier les ondes P et S sont complètement découplées et peuvent être traitées séparément. On retombe, dans cette configuration, sur le cas de l'acoustique [[Fouque et al., 2007](#), Chap.7]. Ensuite, on regarde le cas d'une onde en incidence inclinée, on adapte la méthode développée au cas de l'incidence normale pour cette configuration inclinée. Avec cette inclinaison, on a un couplage entre les ondes P et les ondes SV. On regarde ensuite, à partir de simulations numériques, l'impact de l'inclinaison sur le contenu fréquentiel transmis en sortie de la couche aléatoire.

Code de calcul et cluster utilisé

Les simulations numériques présentées dans ce chapitre ont été effectuées à l'aide du code de calcul SEM3D ^a, un code numérique basé sur la méthode des éléments spectraux développé conjointement par le CEA, l'IPGP et CentraleSupélec dans le contexte du projet SINAPS@. Les simulations illustrées par la suite ont été effectuées sur le centre de calcul Fusion, hébergé par le Mésocentre Moulon ^b.

^a. SEM3D Ver 2017.04. Registered at French Agency for Protection of Programs (Dépôt APP) under IDDN.FR.001.400009.000.S.P.2018.000.31235 (Inter Deposit Digital Number) by owners : CEA - Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives; IPGP - Institut de Physique du Globe de Paris; Centrale-Supélec; CNRS - Centre National de la Recherche Scientifique.

^b. <http://mesocentre.centralesupelec.fr/>

2.1 Décomposition SH-PSV en milieu stratifié horizontalement

On considère un milieu infini défini par trois couches. La couche centrale est une couche dont les propriétés mécaniques fluctuent aléatoirement. Cette couche aléatoire a une longueur finie L dans la direction z , et infinie dans les deux autres directions. La figure 2.1 représente une vue du problème considéré. On note $R_{\omega}^{\varepsilon}(0, L)$ le coefficient de réflexion de la couche aléatoire de longueur L et $T_{\omega}^{\varepsilon}(0, L)$ le coefficient de transmission, pour la fréquence ω et le rapport $\varepsilon^2 = \frac{\ell_c}{L}$ avec ℓ_c la longueur de corrélation.

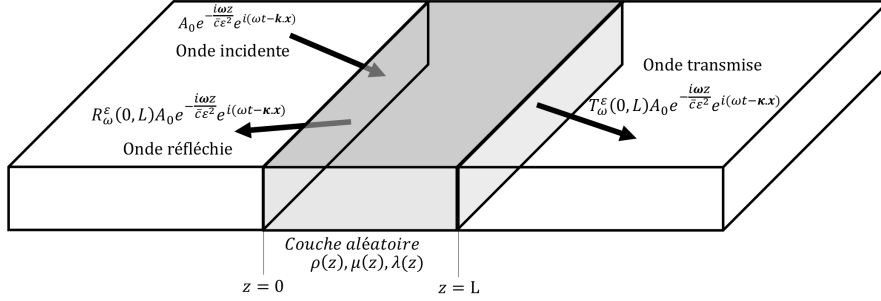


FIGURE 2.1 – Représentation du problème de propagation d'onde en milieu aléatoire. En amont est située l'onde incidence et l'onde réfléchie, et l'onde transmise est situé en aval de la couche aléatoire

On rappelle les équations générales de l'élastodynamique (Equation 2.1). Les variables tridimensionnelles (x, y, z) sont contractées sous la forme : (\mathbf{x}, z) . Ce choix d'écriture découle du fait que la fluctuation aléatoire est verticale et est donc portée que par z (Par analogie avec la fluctuation des propriétés mécaniques de la Terre en fonction de la profondeur). On applique une décomposition en onde plane sur les composantes (x, y) , ce qui correspond à la partie horizontale pour une application géophysique. ρ, λ et μ sont les paramètres mécaniques du milieu considéré. Par la suite on notera $c_s^2(z) = \frac{\mu(z)}{\rho(z)}$, $c_p^2(z) = \frac{\lambda(z)+2\mu(z)}{\rho(z)}$ respectivement la vitesse des ondes S et la vitesse des ondes P dans le milieu. Le rapport entre les vitesses sera noté $\alpha = \frac{c_s}{c_p}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma) &= \rho(z) \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, z, t)}{\partial t^2} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ \sigma(\mathbf{u}) &= \lambda(z) \operatorname{Tr}(\varepsilon(\mathbf{u})) \mathbb{1} + 2\mu(z) \varepsilon(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

On développe le système d'équations 2.1 en introduisant les transformées de Fourier espace temps horizontales de u, σ tel que :

$$\begin{aligned} \hat{u}(\omega, \kappa, z) &= \int \int e^{i\omega(t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} u(\mathbf{x}, z, t) dt d\mathbf{x} \\ \hat{\sigma}(\omega, \kappa, z) &= \int \int e^{i\omega(t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \sigma(u(\mathbf{x}, z, t), z) dt d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Le paramètre \mathbf{k} représente le nombre d'onde normalisé par ω , il est donc exprimé comme l'inverse d'une vitesse.

Polarisation et décomposition de l'onde S en onde SH et SV

Pour simplifier l'écriture des équations, et tel que nous l'avons introduit dans le chapitre précédent (Equation 1.6), on souhaite décomposer l'onde sismique en onde P et onde S qui auront une polarisation différente dans le cas d'un milieu homogène (Voir encadré 1.1). Cette décomposition sera adaptée ici dans le cas hétérogène stratifié. On représente figure 2.2 la polarisation des ondes incidentes sur la couche aléatoire. Soit \mathbf{d} la direction d'incidence de l'onde, on rappelle que la polarisation associée à l'onde P est tel que $\mathbf{p} \wedge \mathbf{d} = 0$ avec \mathbf{p} le vecteur polarisation. La polarisation de l'onde P est colinéaire à la direction d'incidence de l'onde. L'onde S est caractérisée par

$\mathbf{p} \cdot \mathbf{d} = 0$, c'est à dire que la polarisation est incluse dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation. Dans le cas d'un milieu stratifié tel que représenté figure 2.1 où on a une stratification du milieu suivant la direction \mathbf{e}_z il est possible de séparer l'onde S en 2 ondes, l'onde S-horizontale (SH) et l'onde S verticale (SV). On définit l'onde SH tel que sa polarisation est colinéaire à un des 2 vecteurs définissant le plan de la stratification.

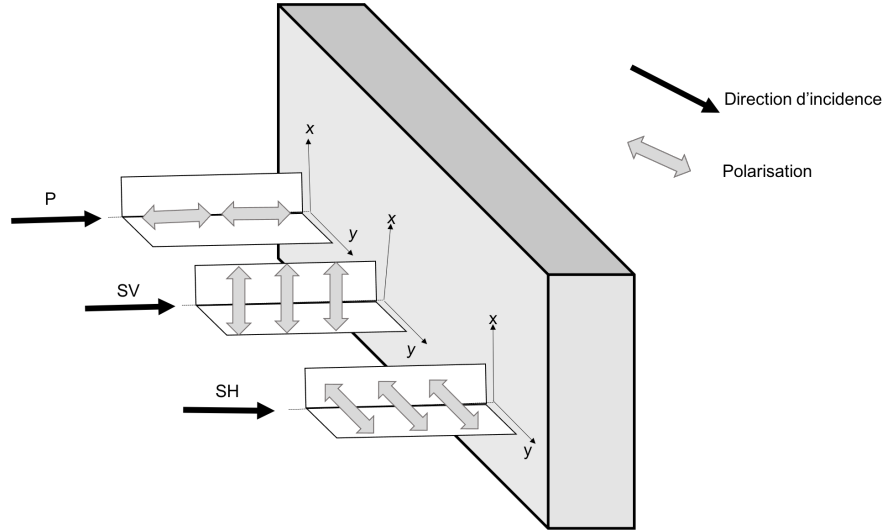


FIGURE 2.2 – Représentation des polarisations des ondes

Dans notre cas (figure 2.1), La stratification est suivant l'axe z , dont le plan de l'interface est défini par $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$. On représente les différentes polarisations de l'onde pour cette stratification (figure 2.2). L'onde SH correspond à celle polarisée suivant l'axe de vecteur unitaire \mathbf{e}_y (tel que $\mathbf{p}_{SH} \wedge \mathbf{e}_y = 0$, encadré 1.1). L'onde polarisée SV correspond à la polarisation tel que $\mathbf{p}_{SV} \cdot \mathbf{p}_{SH} = 0$ et $\mathbf{p}_{SV} \cdot \mathbf{d} = 0$. Dans le cas d'une incidence normale par rapport au plan, les ondes SH et SV peuvent être décomposées arbitrairement.

Dans le cas d'une incidence normale de direction \mathbf{e}_z sur le milieu stratifié, le champ de déplacement associé à l'onde P correspond au déplacement porté par \mathbf{e}_z . Dans ce cas, l'onde SH est choisie comme étant sur \mathbf{e}_y et l'onde SV est sur \mathbf{e}_x . La décomposition SH-SV est ici choisie arbitrairement et sera nécessaire dans le cas incliné. Dans le cas d'une onde incidente inclinée, on verra que les ondes P-SV sont couplées alors que la partie SH de l'onde, portée par \mathbf{e}_y , pourra quant à elle être découplée. La direction d'incidence de l'onde est incluse dans le plan $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$. A partir de l'équation 2.1 et de la décomposition précédemment exposée, on peut effectuer une transformée de Fourier sur les 2 directions horizontales ainsi qu'une transformée de Fourier en temps tel que cela est explicité aux équations 2.2. Etant donné que l'on a choisi une direction de propagation dans le plan orthogonal à y , $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ est porté par \mathbf{e}_x . En notant $||\mathbf{k}|| = k$ on peut écrire le système d'équations 2.3, en introduisant les transformées de Fourier en espace définies équation

tion 2.2 par projection de l'équation 2.1.

$$\begin{aligned}
 \frac{dv_x}{dz} &= -\frac{i\omega}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\rho c_s^2} \sigma_{xz} - kv_z \right) \\
 \frac{d\sigma_{xz}}{dz} &= -\frac{i\omega}{\varepsilon} \left([\rho - 4\rho c_s^2 k^2 (1 - \alpha^2)] v_x - k(1 - 2\alpha^2) \sigma_{zz} \right) \\
 \frac{dv_y}{dz} &= -\frac{i\omega}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\rho c_s^2} \sigma_{yz} \right) \\
 \frac{d\sigma_{yz}}{dz} &= -\frac{i\omega}{\varepsilon} (\rho - \rho c_s^2 k^2) v_y \\
 \frac{dv_z}{dz} &= -\frac{i\omega}{\varepsilon} \left(-k(1 - 2\alpha^2) v_x + \frac{1}{\rho c_s^2} \sigma_{zz} \right) \\
 \frac{d\sigma_{zz}}{dz} &= -\frac{i\omega}{\varepsilon} (-k\sigma_{xz} + \rho v_z)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

On peut ainsi isoler la partie SH de l'onde correspondant au couple (v_y, σ_{yz}) qui correspond à :

$$\begin{aligned}
 \frac{dv_y}{dz} &= -\frac{i\omega}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\rho c_s^2} \sigma_{yz} \right) \\
 \frac{d\sigma_{yz}}{dz} &= -\frac{i\omega}{\varepsilon} (\rho - \rho c_s^2 k^2) v_y
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Et la partie P-SV de l'onde correspondant au couple $(v_x, \sigma_{xz}, v_z, \sigma_{zz})$ qui correspond à :

$$\begin{aligned}
 \frac{dv_x}{dz} &= -\frac{i\omega}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\rho c_s^2} \sigma_{xz} - kv_z \right) \\
 \frac{d\sigma_{xz}}{dz} &= -\frac{i\omega}{\varepsilon} \left([\rho - 4\rho c_s^2 k^2 (1 - \alpha^2)] v_x - k(1 - 2\alpha^2) \sigma_{zz} \right) \\
 \frac{dv_z}{dz} &= -\frac{i\omega}{\varepsilon} \left(-k(1 - 2\alpha^2) v_x + \frac{1}{\rho c_s^2} \sigma_{zz} \right) \\
 \frac{d\sigma_{zz}}{dz} &= -\frac{i\omega}{\varepsilon} (-k\sigma_{xz} + \rho v_z)
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.2 Onde élastique en incidence normale

2.2.1 Définition du problème en incidence normale

On s'intéresse tout d'abord au cas de l'incidence normale (Figure 2.3).

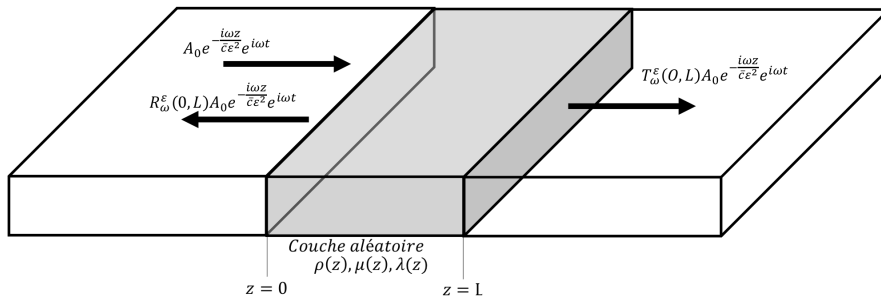


FIGURE 2.3 – Représentation du problème dans le cas d'une onde en incidence normale traversant la couche aléatoire. En amont est située l'onde incidente et l'onde réfléchie, et l'onde transmise est située en aval de la couche aléatoire

Dans cette configuration (où $k = 0$), le système d'équations 2.3 peut s'écrire simplement sous forme matricielle où tous les termes en k et k^2 disparaissent. Ce système matriciel est écrit équation 2.6. On remarquera que la matrice de comportement explicitée est diagonale par bloc. Cela implique l'on peut découpler par bloc 2x2 le système d'équations global. Cette décomposition revient physiquement à dire que l'on peut résoudre indépendamment la partie de l'onde polarisée en S et celle polarisée en P. Les polarisations correspondent à celles illustrées section 2.1.

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} v_x \\ \sigma_{xz} \\ v_y \\ \sigma_{yz} \\ v_z \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} = -\frac{i\omega}{\varepsilon} \begin{bmatrix} 0 & (\alpha^2(z)\zeta(z))^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho(z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\alpha^2(z)\zeta(z))^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta^{-1}(z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho(z) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ \sigma_{xz} \\ v_y \\ \sigma_{yz} \\ v_z \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Où $\zeta(z) = \rho(z) c_p^2(z)$ et $\alpha^2(z)\zeta(z) = \rho(z) c_s^2(z)$. Ce système peut être décomposé en 3 systèmes indépendants (respectivement pour SV, SH et P) :

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} v_x \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = -\frac{i\omega}{\varepsilon} \begin{bmatrix} 0 & (\alpha^2(z)\zeta(z))^{-1} \\ \rho(z) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} v_y \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = -\frac{i\omega}{\varepsilon} \begin{bmatrix} 0 & (\alpha^2(z)\zeta(z))^{-1} \\ \rho(z) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} v_z \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} = -\frac{i\omega}{\varepsilon} \begin{bmatrix} 0 & \zeta^{-1}(z) \\ \rho(z) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_z \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

La décomposition en sous système met en évidence que les équations pour SH et SV sont identiques (respectivement équation 2.8 et équation 2.7) et confirment bien que le comportement est le même pour ces 2 polarisations. Physiquement, cela se traduit par l'invariance par rotation autour de z et que la décomposition SH-SV ici effectuée est arbitraire. Entre les 3 systèmes, les écritures sont semblables, on choisit donc de ne détailler la résolution que d'un seul de ces systèmes. Ainsi, on ne s'intéresse pour l'instant qu'au système associé à la polarisation SV (équation 2.7). La matrice associée à ce système, notée \mathbf{H}_{xz} par la suite, peut être diagonalisée sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{xz} &= \begin{bmatrix} 0 & (\alpha^2(z)\zeta(z))^{-1} \\ \rho(z) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (\alpha(z)\xi(z))^{-\frac{1}{2}} & (\alpha(z)\xi(z))^{-\frac{1}{2}} \\ (\alpha(z)\xi(z))^{\frac{1}{2}} & -(\alpha(z)\xi(z))^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_s^{-1}(z) & 0 \\ 0 & -c_s^{-1}(z) \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (\alpha(z)\xi(z))^{\frac{1}{2}} & (\alpha(z)\xi(z))^{-\frac{1}{2}} \\ (\alpha(z)\xi(z))^{\frac{1}{2}} & -(\alpha(z)\xi(z))^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Avec $\xi(z) = \rho(z) c_p(z)$ et $\rho(z) c_s(z) = \alpha(z)\xi(z)$. Par la suite, pour des raisons de simplification d'écriture, la dépendance en z ne sera plus explicitée pour les coefficients matriciels. On note \mathbf{M} la matrice des modes propres associées aux valeurs propres respectives c_s^{-1} et $-c_s^{-1}$. On note également \mathbf{M}^{-1} son inverse. Où :

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (\alpha\xi)^{-\frac{1}{2}} & (\alpha\xi)^{-\frac{1}{2}} \\ (\alpha\xi)^{\frac{1}{2}} & -(\alpha\xi)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (\alpha\xi)^{\frac{1}{2}} & (\alpha\xi)^{-\frac{1}{2}} \\ (\alpha\xi)^{\frac{1}{2}} & -(\alpha\xi)^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

La diagonalisation précédemment effectuée revient à décomposer la solution des équations sur une base modale composée d'un mode se déplaçant vers les z croissants à la vitesse $c_s(z)$ et un mode se déplaçant vers les z décroissants à la même vitesse. On peut ainsi parler de mode "descendant" et "montant" en référence à la figure 2.3.

2.2.2 Décomposition modale et recentrage

Pour pouvoir résoudre le problème, on souhaite suivre l'onde à tout instant, c'est pourquoi il est intéressant de projeter l'onde sur une base de mode. Une manière de faire serait de projeter directement le problème sur les modes précédemment explicités. Néanmoins, l'analyse du système, dans ce cas, est difficile parce que les modes eux-mêmes sont dépendant de z . Il est par contre possible de projeter sur une base de mode constant. C'est cette méthode qui sera utilisée ici. On note $\frac{1}{\bar{\mu}} = \mathbb{E} \left[\frac{1}{\mu} \right]$ la moyenne harmonique de μ , et de manière générale, les grandeurs homogénéisés seront notés de la même manière. On reprend ainsi l'équation 2.7, et on note $\bar{\mathbf{M}}$ le mode correspondant au milieu homogénéisé associé. Les coefficients de $\bar{\mathbf{M}}$ correspondent aux coefficients de \mathbf{M} en remplaçant μ par sa moyenne harmonique et ρ par sa moyenne arithmétique (équation 2.11). On repart du problème écrit équation 2.7 que l'on réécrit en temps :

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} v_x \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = -\mathbf{H}_{xz} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} v_x \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Sachant que $\bar{\mathbf{M}}$ est constant on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{\mathbf{M}}^{-1} \begin{bmatrix} v_x \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} \right) = -\bar{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{H}_{xz} \bar{\mathbf{M}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{\mathbf{M}}^{-1} \begin{bmatrix} v_x \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} \right) \quad (2.13)$$

On note les modes $A(t, z)$ et $B(t, z)$ tels que :

$$\begin{bmatrix} A(t, z) \\ B(t, z) \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{M}}^{-1} \begin{bmatrix} v_x \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Avec :

$$\begin{aligned} A(t, z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\bar{\alpha}\bar{\xi})^{-\frac{1}{2}} \sigma_{xz}(t, z) + (\bar{\alpha}\bar{\xi})^{\frac{1}{2}} v_x(t, z) \right) \\ B(t, z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-(\bar{\alpha}\bar{\xi})^{-\frac{1}{2}} \sigma_{xz}(t, z) + (\bar{\alpha}\bar{\xi})^{\frac{1}{2}} v_x(t, z) \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Cette projection a pour intérêt majeur que l'on peut suivre à chaque instant la forme de l'onde à une position z donnée. Celle-ci se décompose alors en une partie se propageant vers les z croissants et une partie se propageant vers les z décroissants. A partir de l'écriture des modes (équations 2.15 et 2.14), on reprend l'équation 2.13 pour obtenir une équation différentielle sur A et B .

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial z} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\alpha}\bar{\xi})^{\frac{1}{2}} \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\alpha}\bar{\xi})^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\alpha}\bar{\xi})^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\mu(z)} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\alpha}\bar{\xi})^{-\frac{1}{2}} \left(\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} \right) \\ &= (\bar{\alpha}\bar{\xi})^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\mu(z)} \frac{(\bar{\alpha}\bar{\xi})^{\frac{1}{2}}}{2} \frac{\partial(A-B)}{\partial t} \right) - (\bar{\alpha}\bar{\xi})^{-\frac{1}{2}} \left(\rho \frac{(\bar{\alpha}\bar{\xi})^{\frac{1}{2}}}{2} \frac{\partial(A+B)}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

On peut finalement écrire :

$$\frac{\partial B}{\partial z} = -\frac{1}{2\bar{c}_s} \left(\frac{\rho(z)}{\bar{\rho}} - \frac{\bar{\mu}}{\mu(z)} \right) \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{1}{2\bar{c}_s} \left(\frac{\rho(z)}{\bar{\rho}} + \frac{\bar{\mu}}{\mu(z)} \right) \frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.17)$$

De même pour A :

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{2\bar{c}_s} \left(\frac{\rho(z)}{\bar{\rho}} + \frac{\bar{\mu}}{\mu(z)} \right) \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2\bar{c}_s} \left(\frac{\rho(z)}{\bar{\rho}} - \frac{\bar{\mu}}{\mu(z)} \right) \frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.18)$$

On peut réécrire sous forme matricielle les équations sur le mode $A(t, z)$ et $B(t, z)$ telles que :

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} A(t, z) \\ B(t, z) \end{bmatrix} = \frac{1}{\bar{c}_s} \begin{bmatrix} -\Delta_s^{(+)} & -\Delta_s^{(-)} \\ \Delta_s^{(-)} & \Delta_s^{(+)} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} A(t, z) \\ B(t, z) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Où :

$$\Delta_s^{(\pm)}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho(z)}{\bar{\rho}} \pm \frac{\bar{\mu}}{\mu(z)} \right) \quad (2.20)$$

Dans le cas d'un milieu homogène, les modes descendants et montants restent inchangés quand on observe l'onde dans un repère mobile se déplaçant à la vitesse effective de ce milieu. Dans le cas du milieu hétérogène, on peut également suivre l'onde dans un repère se déplaçant à la vitesse effective du milieu homogénéisé équivalent. Pour suivre l'onde de cette manière, on effectue un recentrage des modes, c'est à dire que l'on applique un changement de variable tel que $t = \varepsilon^2 s \pm z/\bar{c}$ (Equation 2.21). Les modes sont couplés (le couplage correspond aux termes en Δ). De plus, les équations en fonction de $a(s, z)$ et $b(s, z)$ ne sont plus locales en temps suite au décalage dû au changement de variable.

$$\begin{aligned} a(s, z) &= A \left(\varepsilon^2 s + \frac{z}{\bar{c}_s}, z \right) \\ b(s, z) &= B \left(\varepsilon^2 s - \frac{z}{\bar{c}_s}, z \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

On se place ensuite dans le domaine fréquentiel en effectuant les transformées de Fourier suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{a}(\omega, z) &= \int e^{i\omega s} a(s, z) ds \\ \hat{b}(\omega, z) &= \int e^{i\omega s} b(s, z) ds \end{aligned} \quad (2.22)$$

A partir de la transformée de Fourier définie précédemment, et de l'équation 2.19, on réécrit le système associé aux modes $(A(t, z), B(t, z))$ en fonction de $(\hat{a}(\omega, z), \hat{b}(\omega, z))$.

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{a}}{dz}(\omega, z) &= \frac{d}{dz} \int e^{i\omega s} A \left(\varepsilon^2 s + \frac{z}{\bar{c}_s}, z \right) ds = \int e^{i\omega s} \left(\frac{1}{\bar{c}_s} \frac{\partial A}{\partial s} \left(\varepsilon^2 s + \frac{z}{\bar{c}_s}, z \right) + \frac{\partial A}{\partial z} \left(\varepsilon^2 s + \frac{z}{\bar{c}_s}, z \right) \right) ds \\ &= -\frac{i\omega}{\varepsilon^2 \bar{c}_s} \int e^{i\omega s} \left(a(s, z) - \Delta_s^{(+)} a(s, z) - \Delta_s^{(-)} b(s + \frac{2z}{\bar{c}_s}, z) \right) ds \\ &= -\frac{i\omega}{\varepsilon^2 \bar{c}_s} \left((1 - \Delta_s^{(+)}) \hat{a}(\omega, z) - \Delta_s^{(-)} e^{-2i\omega z/\varepsilon^2 \bar{c}_s} \hat{b}(\omega, z) \right) ds \end{aligned} \quad (2.23)$$

On effectue ensuite le même calcul pour $\hat{b}(\omega, z)$, on en déduit ainsi le système dont $\hat{a}(\omega, z), \hat{b}(\omega, z)$ sont solutions par :

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \frac{i\omega}{\varepsilon^2 \bar{c}_s} \begin{bmatrix} \Delta_s^{(+)} - 1 & \Delta_s^{(-)} e^{-2i\omega z/\varepsilon^2 \bar{c}_s} \\ -\Delta_s^{(-)} e^{+2i\omega z/\varepsilon^2 \bar{c}_s} & 1 - \Delta_s^{(+)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Les modes recentrés satisfont les conditions limites du problème (Figure 2.3), c'est à dire, une onde incidente d'amplitude connue se propageant vers la droite en $z = 0$, et aucune onde incidente vers la gauche en $z = L$ (où L correspond à la longueur de la couche hétérogène). Pour simplifier, on supposera l'onde incidente en $z = 0$ d'amplitude unitaire. On a donc :

$$\begin{aligned} \hat{a}(\omega, 0) &= 1 \\ \hat{b}(\omega, L) &= 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

De plus on peut également introduire les quantités d'intérêts suivantes :

$$\begin{aligned} R_\omega^\varepsilon(0, L) &= \hat{b}(\omega, 0) \\ T_\omega^\varepsilon(0, L) &= \hat{a}(\omega, L) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Où $T_\omega^\varepsilon(0, L)$ correspond au coefficient de transmission et $R_\omega^\varepsilon(0, L)$ au coefficient de réflexion.

2.2.3 Ecriture du problème aux conditions initiales à partir de la décomposition modale

On a pour le moment déterminé le système d'équations pour un problème aux conditions au limites pour \hat{a} et \hat{b} (Equations 2.24 et 2.25). Pour résoudre ce problème, on va transformer celui en un problème aux conditions initiales. Pour cela on introduit le propagateur pour chaque fréquence ω , $\mathbf{P}_\omega^\varepsilon$ tel que :

$$\begin{pmatrix} \hat{a}(\omega, z) \\ \hat{b}(\omega, z) \end{pmatrix} = \mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z) \begin{pmatrix} \hat{a}(\omega, 0) \\ \hat{b}(\omega, 0) \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

La matrice $\mathbf{P}_\omega^\varepsilon$ modélise la fonction de transfert correspondant au changement d'état de l'onde entre la position à la coordonnée $z = 0$ et une position à une coordonnée $z > 0$. A partir de la définition de $\mathbf{P}_\omega^\varepsilon$ et de l'équation 2.24, on peut écrire $\mathbf{P}_\omega^\varepsilon$ comme étant la solution fondamentale de l'équation :

$$\frac{d}{dz} \mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z) = \frac{i\omega}{\varepsilon^2 \bar{c}_s} \begin{bmatrix} \Delta_s^{(+)} - 1 & \Delta_s^{(-)} e^{-2i\omega z / \bar{c}_s} \\ -\Delta_s^{(-)} e^{+2i\omega z / \bar{c}_s} & 1 - \Delta_s^{(+)} \end{bmatrix} \mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z) \quad (2.28)$$

avec $\mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, 0) = \mathbf{I}$. On notera par la suite : $\mathbf{H}_\omega^\varepsilon = \begin{bmatrix} \Delta_s^{(+)} - 1 & \Delta_s^{(-)} e^{-2i\omega z / \bar{c}_s} \\ -\Delta_s^{(-)} e^{+2i\omega z / \bar{c}_s} & 1 - \Delta_s^{(+)} \end{bmatrix}$.

On applique ensuite la formule de Jacobi au système. On obtient ainsi la relation suivante :

$$\frac{d \det(\mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z))}{dz} = \text{Tr} \left(\text{Com}(\mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z)) \frac{d(\mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z))}{dz} \right) = \text{Tr}(\text{Com}(\mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z)) \mathbf{H}_\omega^\varepsilon) \quad (2.29)$$

La propriété sur la comatrice nous permet d'écrire : $\text{Com}(\mathbf{P}_\omega^\varepsilon) = \det(\mathbf{P}_\omega^\varepsilon) \mathbf{I}$. Ainsi, en utilisant la propriété de commutation, on obtient :

$$\frac{d \det(\mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z))}{dz} = \text{Tr}(\det(\mathbf{P}_\omega^\varepsilon) \mathbf{H}_\omega^\varepsilon) = \det(\mathbf{P}_\omega^\varepsilon) \text{Tr}(\mathbf{H}_\omega^\varepsilon) \quad (2.30)$$

Sachant que $\text{Tr}(\mathbf{H}_\omega^\varepsilon) = 0$, on a la dérivée de $\det(\mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z)) = 0$, donc $\det(\mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z))$ est constant et est égale à sa valeur en 0. Sachant que $\mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, 0) = \mathbf{I}$, alors on a $\det(\mathbf{P}_\omega^\varepsilon) = 1$.

On pose $(\alpha_s^\varepsilon, \beta_s^\varepsilon)^T$ la première colonne de \mathbf{P} telle que $(\alpha_s^\varepsilon, \beta_s^\varepsilon)^T$ est solution de l'équation 2.28. En prenant le conjugué de l'équation 2.28, on note que $(\bar{\beta}_s^\varepsilon, \bar{\alpha}_s^\varepsilon)^T$ est également solution. Ainsi on peut écrire $\mathbf{P}_\omega^\varepsilon$ sous la forme :

$$\mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z) = \begin{bmatrix} \alpha_s^\varepsilon(0, z) & \overline{\beta_s^\varepsilon(0, z)} \\ \beta_s^\varepsilon(0, z) & \overline{\alpha_s^\varepsilon(0, z)} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Sachant que le déterminant de $\mathbf{P}_\omega^\varepsilon$ vaut 1, on a $|\alpha_s^\varepsilon|^2 - |\beta_s^\varepsilon|^2 = 1$, avec $\alpha_s^\varepsilon(0, z=L) = 1$ et $\beta_s^\varepsilon(0, z=L) = 0$. Avec la définition des quantités d'intérêt (Equation 2.26), les conditions aux limites (Equation 2.25) et la définition du propagateur (Equation 2.27) on peut écrire, pour $z = L$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}_\omega^\varepsilon(0, L) \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, L) \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{R}_\omega^\varepsilon(0, L) \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

On en déduit ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\omega^\varepsilon(0, L) &= -\frac{\beta_s^\varepsilon(0, L)}{\alpha_s^\varepsilon(0, L)} \\ \mathbf{T}_\omega^\varepsilon(0, L) &= \frac{1}{\alpha_s^\varepsilon(0, L)} \end{aligned} \quad (2.33)$$

2.2.4 Représentation martingale du coefficient de transmission

On souhaite désormais écrire et résoudre le système d'équations différentielles stochastiques dont $(\alpha_s^\varepsilon, \beta_s^\varepsilon)^T$ est solution. Pour cela, on applique le théorème de convergence en distribution [Fouque et al., 2007, chap. 6]. A partir de ce théorème énoncé ci-dessous, on réécrit l'équation 2.28.

Théorème 1 Soit le processus $\mathbf{X}^\varepsilon(z)$ défini par l'équation différentielle stochastique :

$$\frac{d}{dz}\mathbf{X}^\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{F}\left(\mathbf{X}^\varepsilon(z), Y\left(\frac{z}{\varepsilon^2}\right), \frac{z}{\varepsilon}\right) \quad (2.34)$$

Avec, pour condition initiale : $\mathbf{X}_\omega^\varepsilon(z) = x_0 \in \mathbb{R}^d$. On suppose que $Y(z)$ est un processus de Markov z -homogène ergodique sur l'espace d'état S . On suppose également que $\mathbf{F}(x, y, \tau)$ est une fonction périodique de périodicité Z_0 et la fonction \mathbf{F} satisfait la condition de centrage, $\mathbb{E}[\mathbf{F}(x, Y(0), \tau)] = 0$ pour tout x et pour tout τ . Alors le processus aléatoire $\mathbf{X}^\varepsilon(z)$ converge en distribution vers le processus de diffusion de Markov $\mathbf{X}(z)$ dont le générateur s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varphi(x) &= \frac{1}{Z_0} \int_0^{Z_0} \int_0^\infty \mathbb{E}[\mathbf{F}(x, Y(0), \tau) \cdot \nabla_x(\mathbf{F}(x, Y(z), \tau) \cdot \nabla_x \varphi(x))] dz d\tau \\ &+ \frac{1}{Z_0} \int_0^{Z_0} \mathbb{E}[\mathbf{G}(x, Y(0), \tau) \cdot \nabla_x \varphi(x)] d\tau \end{aligned} \quad (2.35)$$

Dans notre cas, on choisit de prendre ρ constant et on suppose que $\mu(z)$ s'écrit tel quel $\frac{1}{\mu(z)} = \frac{1}{\mu(\frac{z}{\varepsilon^2})} (1 + \varepsilon v_0(\frac{z}{\varepsilon^2}))$ où v_0 vérifie les propriétés du théorème. On souhaite réécrire $\mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z)$ sous la forme du théorème précédemment énoncé. En introduisant la forme de $\frac{1}{\mu(z)}$ dans l'équation 2.28, on peut réécrire cette équation sous la forme :

$$\frac{d}{dz}\mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z) = \frac{i\omega v_0}{2\varepsilon\bar{c}_s} \begin{bmatrix} 1 & -e^{-2i\omega z/\varepsilon^2\bar{c}_s} \\ e^{+2i\omega z/\varepsilon^2\bar{c}_s} & -1 \end{bmatrix} \mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z) \quad (2.36)$$

On développe ensuite cette équation sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z) &= \frac{i\omega v_0}{2\varepsilon\bar{c}_s} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z) \\ &- \frac{\omega v_0}{2\varepsilon\bar{c}_s} \sin\left(\frac{2\omega z}{\varepsilon^2\bar{c}_c}\right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z) - \frac{i\omega v_0}{2\varepsilon\bar{c}_s} \cos\left(\frac{2\omega z}{\varepsilon^2\bar{c}_c}\right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z) \end{aligned} \quad (2.37)$$

On peut décomposer le terme \mathbf{F} de l'équation 2.34 sous la forme suivante :

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z), v_0\left(\frac{z}{\varepsilon^2}\right), \frac{z}{\varepsilon}\right) = \frac{\omega}{2\bar{c}_s} \sum_{p=0}^2 g^{(p)}\left(v_0\left(\frac{z}{\varepsilon^2}\right), \frac{z}{\varepsilon}\right) \mathbf{h}_p \mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z) \quad (2.38)$$

où $\mathbf{h}_0 = i\sigma_3$, $\mathbf{h}_1 = -\sigma_1$, $\mathbf{h}_2 = \sigma_2$ avec σ_i correspondant aux spin de Pauli tel que :

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

et $g^{(i)}$ les fonctions réelles :

$$g^{(0)} = v_0 \quad g^{(1)} = v_0 \sin\left(\frac{2\omega z}{\varepsilon^2\bar{c}_s}\right) \quad g^{(2)} = v_0 \cos\left(\frac{2\omega z}{\varepsilon^2\bar{c}_s}\right) \quad (2.40)$$

$\mathbf{F}(\mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z), \dots)$ est une fonction régulière et croissante, et elle vérifie toutes les propriétés du théorème 1, on peut donc écrire l'équation en $\mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z)$ tel que :

$$\frac{d}{dz}\mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z) = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{F}\left(\mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z), v_0\left(\frac{z}{\varepsilon^2}\right), \frac{z}{\varepsilon}\right) \quad (2.41)$$

A partir de l'expression 2.41, on sait que $\mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z)$ converge en distribution vers $\mathbf{P}_\omega(0, z)$ qui est solution de l'équation différentielle stochastique de Stratonovich [Fouque et al., 2007, chap. 7] :

$$\begin{aligned} d\mathbf{P}_\omega(0, z) &= \frac{i\omega\sqrt{\gamma(0)}}{2\bar{c}_s} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{P}_\omega(0, z) \circ dW_0(z) - \frac{\omega\sqrt{\gamma(\omega)}}{2\sqrt{2}\bar{c}_s} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{P}_\omega(0, z) \circ dW_1(z) \\ &- \frac{i\omega\sqrt{\gamma(\omega)}}{2\sqrt{2}\bar{c}_s} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{P}_\omega(0, z) \circ d\tilde{W}_1(z) - \frac{i\omega^2\gamma^{(s)}(\omega)}{8\bar{c}_s^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{P}_\omega(0, z) dz \end{aligned} \quad (2.42)$$

où W_i sont des mouvements Browniens standards indépendants et les termes de la matrice de corrélation sont définis ci-dessous.

$$\begin{aligned}\Gamma(\omega) &= 2 \int_0^\infty \mathbb{E} [v_0(0)v_0(z)] \cos\left(\frac{2\omega z}{\bar{c}_s}\right) dz \\ \Gamma^{(s)}(\omega) &= 2 \int_0^\infty \mathbb{E} [v_0(0)v_0(z)] \sin\left(\frac{2\omega z}{\bar{c}_s}\right) dz\end{aligned}\quad (2.43)$$

Le couple $(\alpha_\omega^\varepsilon, \beta_\omega^\varepsilon)$ vérifie le système d'équations différentielles stochastiques :

$$\begin{aligned}d\alpha_s &= \frac{\omega}{2\bar{c}_s} \left(i\sqrt{\Gamma(0)}\alpha_s \circ dW_0(z) - \frac{\sqrt{\Gamma(\omega)}}{\sqrt{2}}\beta_s \circ (dW_1(z) + id\tilde{W}_1(z)) \right) - \frac{i\omega^2\Gamma^{(s)}(\omega)}{8\bar{c}_s}\alpha_s dz \\ d\beta_s &= \frac{\omega}{2\bar{c}_s} \left(-i\sqrt{\Gamma(0)}\beta_s \circ dW_0(z) - \frac{\sqrt{\Gamma(\omega)}}{\sqrt{2}}\alpha_s \circ (dW_1(z) - id\tilde{W}_1(z)) \right) + \frac{i\omega^2\Gamma^{(s)}(\omega)}{8\bar{c}_s}\alpha_s dz\end{aligned}\quad (2.44)$$

Il est possible de paramétrer le couple de solution α_s et β_s , où $\alpha_s, \beta_s \in \mathbb{C}^2$, en fonction de processus stochastiques notés $(\theta_\omega, \psi_\omega, \phi_\omega)$ où $\theta_\omega \in [0, +\infty[$ et $\psi_\omega, \phi_\omega \in \mathbb{R}$ [Fouque et al., 2007, p. 181]. On peut réécrire le couple de solution α_s et β_s sous la forme de l'équation 2.45.

$$\begin{aligned}\alpha_s(0, z) &= \cosh\left(\frac{\theta_\omega(z)}{2}\right) e^{i\Phi_\omega(z)} \\ \beta_s(0, z) &= \sinh\left(\frac{\theta_\omega(z)}{2}\right) e^{i(\Psi_\omega(z) + \Phi_\omega(z))}\end{aligned}\quad (2.45)$$

Les processus stochastiques $(\theta_\omega, \psi_\omega, \phi_\omega)$ vérifient également un système d'équations stochastiques similaires à celui de l'équation 2.44. Le système vérifié par $(\theta_\omega, \psi_\omega, \phi_\omega)$ sera par contre réel [Fouque et al., 2007, p. 182].

2.2.5 Longueur de localisation pour l'onde S

A partir de l'écriture des quantités d'intérêts (Equation 2.33), de la paramétrisation de α_s et β_s et de la résolution des équations stochastique, on peut écrire la représentation intégrale du module du coefficient de transmission $T_\omega(0, L)$ dont les détails de calculs sont explicités dans [Fouque et al., 2007, chap. 7] :

$$|T_\omega(0, L)|^2 = \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\theta_\omega(z)}{2}\right)} = \exp\left[-\frac{\sqrt{\Gamma(\omega)}\omega}{\sqrt{2}\bar{c}_s} \int_0^L \tanh\left(\frac{\theta_\omega(z)}{2}\right) d\tilde{W}_1^* - \frac{\Gamma(\omega)\omega^2}{4\bar{c}_s^2} L\right]\quad (2.46)$$

A partir de cette représentation, quand L tend vers $+\infty$, l'équivalence asymptotique s'écrit :

$$|T_\omega(0, L)|^2 \sim \exp\left[-\frac{L}{L_{loc}(\omega)} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{L_{loc}(\omega)}} \tilde{W}_1^*(L)\right]\quad (2.47)$$

avec $L_{loc}(\omega) = \frac{4\bar{c}_s^2}{\Gamma(\omega)\omega^2}$.

Pour déterminer la limite du coefficient de transmission, il est possible d'encadrer celui-ci à partir de son équivalence asymptotique [Fouque et al., 2007, chap. 7]. Ainsi on obtient la limite du coefficient de transmission quand L tend vers $+\infty$:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln |T_\omega(0, L)|^2 = -\frac{1}{L_{loc}(\omega)}\quad (2.48)$$

2.2.6 Longueur de localisation pour l'onde P

Dans le cas de l'onde P, on peut, en repartant de l'équation 2.9 refaire tout le développement analytique effectué pour le cas de l'onde S. De ce fait, en notant cette fois \hat{a}_p et \hat{b}_p les modes montant et descendant associé à l'onde P, on peut écrire l'équation :

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \frac{i\omega}{\varepsilon \bar{c}_s} \begin{bmatrix} \Delta_p^{(+)} - 1 & \Delta_p^{(-)} e^{-2i\omega z/\varepsilon^2 \bar{c}_p} \\ -\Delta_p^{(-)} e^{+2i\omega z/\varepsilon^2 \bar{c}_p} & 1 - \Delta_p^{(+)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

avec

$$\Delta_p^{(\pm)}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho(z)}{\bar{\rho}} \pm \frac{\bar{\kappa}}{\kappa(z)} \right) \quad (2.50)$$

Dans ce cas, on définit le milieu avec $\rho = \bar{\rho}$ et $\frac{1}{\kappa(z)} = \frac{1}{\bar{\kappa}(z)} (1 + \varepsilon v_{0,\kappa}(\frac{z}{\varepsilon}))$. A partir de cette définition du milieu, on peut réécrire l'équation dans le cas de l'onde P pour appliquer le théorème 1. La vitesse c_s est alors remplacée par la vitesse c_p , et la matrice de corrélation s'écrit avec $\gamma_\kappa(\omega) = 2 \int_0^\infty \mathbb{E}[v_{0,\kappa}(0)v_{0,\kappa}(z)] \cos\left(\frac{2\omega z}{c_p}\right) dz$. La limite du coefficient de transmission associée à l'onde P à partir de laquelle on verra une atténuation des fréquences pour l'onde traversant le milieu aléatoire s'écrit alors :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{L} \ln |T_\omega^\varepsilon(0, L)|^2 = -\frac{\gamma_\kappa(\omega) \omega^2}{4\bar{c}_p^2} \quad (2.51)$$

2.2.7 Longueur de localisation dans le cas d'un milieu fortement hétérogène

Précédemment on s'était placé dans le cas d'un milieu faiblement hétérogène. Dans le cas d'un milieu fortement hétérogène il est également possible de refaire la même démarche. On s'intéresse par la suite aux changements apportés à la limite du coefficient de transmission dans le cas d'un milieu fortement hétérogène. Pour rappel, on caractérise un milieu fortement hétérogène par : $\frac{\ell_\varepsilon}{\lambda_0} \ll 1$, $\frac{L_0}{\lambda_0} \gg 1$, $v_0 \sim 1$ (1.3.1). On ne s'intéresse ici qu'à la limite de transmission. Dans le cas d'un milieu fortement hétérogène, la seule grandeur impactée correspond à la matrice de corrélation [Fouque et al., 2007, p. 200]. Celle-ci "perd" sa dépendance en ω , ainsi on remplace $\gamma(\omega)$ par $\gamma(0)$ dans la limite en transmission. La longueur de localisation s'écrit alors :

$$L_{loc, FH}(\omega) = \frac{4\bar{c}_s^2}{\gamma(0)\omega^2} \quad (2.52)$$

avec $\gamma(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[v_0(0)v_0(z)] dz$. Dans le cas de l'onde P, il suffit de remplacer c_s par c_p et $\gamma(0)$ par $\gamma_\kappa(0)$.

Résumé : Onde élastique en incidence normale se propageant à travers un milieu aléatoire

Dans cette partie on s'est intéressé à la propagation d'une onde élastique en incidence normale sur une couche aléatoire. On a souhaité adapter la méthode appliquée dans le cas de l'acoustique par Fouque et al. [2007]. On a montré que l'on peut découpler les parties S et P de l'onde. Et direction de polarisation peut être découplée. Ainsi on peut découpler les parties arbitrairement appelées SV et SH. A partir de ce découplage on a mené la résolution pour un seul type d'onde puis on a adapté le résultat final pour chaque cas. Pour cela on a suivi la démarche suivante :

- Découplage des ondes SH-SV-P
- Décomposition modale du problème : introduction d'une onde descendante et d'une onde montante ainsi que les conditions limites associées
- Recentrage de l'onde sur une caractéristique associée à un milieu de référence (milieu homogénéisé équivalent) et introduction des quantités d'intérêt
- Transformation du problème aux conditions limites en problème aux conditions initiales par introduction du propagateur

— Détermination des quantités d'intérêt par utilisation de théorème de converg

On rappelle également la limite du coefficient de transmission dans le cas d'un milieu faiblement hétérogène :

$$|T_\omega(0, L)|^2 \equiv \exp\left(-\frac{L}{L_{loc}(\omega)}\right) \quad (2.53)$$

$$L_{loc}(\omega) = \frac{4\bar{c}_i^2}{\gamma_i(\omega)\omega^2}$$

avec $\gamma(\omega) = 2 \int_0^\infty \mathbb{E}[v_i(0)v_i(z)] \cos\left(\frac{2\omega z}{\bar{c}_i}\right) dz$ où v_i représente les fluctuations. Celles-ci sont soit portées sur μ soit sur κ si on étudie respectivement la partie SH-SV ou la partie P de l'onde. Et $\bar{c}_i = \bar{c}_s$ si on s'intéresse à la partie SH ou SV de l'onde ou $\bar{c}_i = \bar{c}_p$ si on s'intéresse à la partie P de l'onde. On retrouve dans notre cas des résultats quasi identiques à ceux de [Fouque et al. \[2007\]](#) avec une limite du coefficient de transmission similaire. La seule différence est que dans le cas de l'élasticité on aura 2 types d'ondes distinctes, une se déplaçant à la vitesse c_s et une se déplaçant à la vitesse c_p .

2.3 Analyse numérique des effets de la présence d'un milieu aléatoire sur le contenu fréquentiel

2.3.1 Cas d'une onde plane élastique en incidence normale

Définition du modèle numérique

On souhaite, à partir de simulations numériques, retrouver les résultats analytiques développés précédemment. Pour cela, on définit un domaine fini de $6000 \text{ m} \times 6000 \text{ m} \times 11000 \text{ m}$ avec une taille d'élément de $h = 27 \text{ m}$. Avec une taille de maille de 27 m , il est possible de propager les fréquences jusqu'à $\sim 25 \text{ Hz}$ pour l'onde S (Celle-ci sera la plus restrictive pour la partie haute fréquence, car c'est celle dont la vitesse est la plus faible). On étudie une couche aléatoire de longueur L_0 avec de part et d'autre un milieu homogène. Dans le cas de la propagation d'onde élastique, on aura 2 vitesses de propagations à considérer et donc 2 longueurs de localisations différentes en fonction de l'onde P et de l'onde S. Ainsi que 2 couples de longueurs d'ondes associés à chacune des vitesses de propagation.

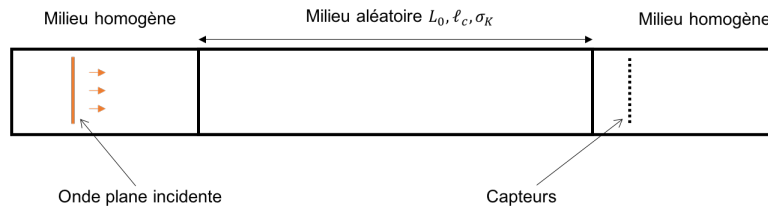


FIGURE 2.4 – Représentation du plan de source permettant la création d'une onde plane et la position des récepteurs en sortie de la couche aléatoire.

On choisit de propager une onde plane dont le spectre est plat entre $\sim 1 \text{ Hz}$ et $\sim 20 \text{ Hz}$ (Figure 2.5)

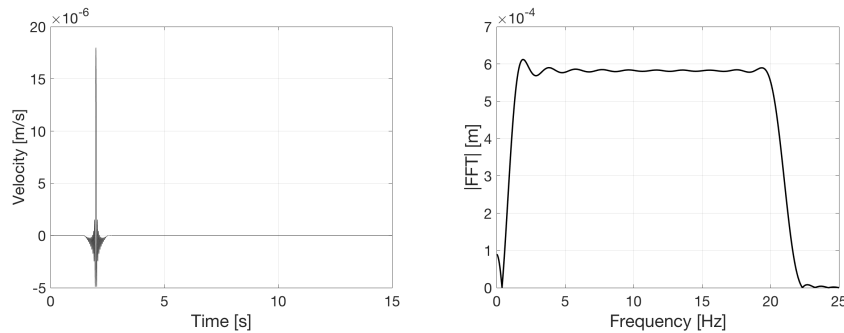


FIGURE 2.5 – À gauche, signal temporel injecté à la source. À droite son contenu fréquentiel.

La figure 2.4 représente une coupe du modèle. On définit un plan de sources ponctuelles en amont de la couche aléatoire pour générer l'onde plane. Ce plan de source va permettre de générer une onde plane se propageant à travers la couche aléatoire. Pour le moment, nous nous intéresserons à une onde en incidence normale polarisée P-SH-SV. C'est à dire qu'on aura une onde polarisée sur chacune des composantes. Des capteurs sont placés en aval de la couche pour mesurer le signal en sortie de la couche (à droite sur la figure 2.4). On a choisit de placé 2 plans de capteurs différents, un à 200 m de la sortie de la couche et l'autre à 400 m . Cela permettra de vérifier que l'on obtient bien la même réponse sur ces 2 plans. De plus, pour vérifier si l'onde obtenue est bien une onde plane, on place pour le premier plan différents capteurs en fixant leur position z et en rendant aléatoire leurs positions pour (x, y) . Pour le deuxième bloc de capteurs, on aura en plus

une variation de ± 10 m en z . Ce placement permet de vérifier qu'il n'y a pas d'effet de la géométrie (réflexion de l'onde sur les bords pouvant perturber le signal) et également que l'on a bien une onde quasi plane. Normalement la réponse en chaque point en sortie devra être la même.

Pourquoi ne pas mettre de PML ?

On pourrait également ajouter des PML (perfectly match layers) aux frontières du domaines pour modéliser les domaines semi-infinis. Néanmoins étant donné que l'on va regarder un contenu fréquentiel assez large, l'ajout de PML sera très cher numériquement. On a un maillage avec une taille $h \sim 25$ m. Et on souhaite propager des longueurs d'ondes entre ~ 1750 m et ~ 50 m. Pour la partie haute fréquence, le coût en PML est bas. La partie limitante vient des basses fréquences, et donc des grandes longueurs d'ondes. Il faudrait étendre de parts et d'autres le domaine en ajoutant ~ 1750 m de PML, soit une couche de 70 éléments PML à chaque bord du domaine. On va donc ici privilégier un domaine sans PML suffisamment grand pour pouvoir gérer les réflexions, éviter de créer des ondes de surfaces et également suffisamment petit pour ne pas faire exploser le coup de calcul.

On définit ensuite les propriétés mécaniques du milieu homogénéisé choisi. Les propriétés matériaux sont définies tableau 2.1. On choisit de définir l'axe z comme étant l'axe de stratification.

TABLEAU 2.1 – Propriétés mécaniques du milieu

| V_p | V_s | Coefficient de Poisson | ρ |
|-----------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|
| 1750m.s^{-1} | 1000m.s^{-1} | 0.25 | 2800kg.m^{-3} |

On définit ensuite notre modèle aléatoire. Pour cela il faut définir v_μ et v_κ . On choisit $\sigma_{\kappa,\mu} = \sigma_{\kappa,\kappa} = \sigma_\kappa = 0.3$ dans chacun des cas, on définit ensuite le modèle de corrélation suivant :

$$\begin{aligned} \gamma_\kappa(\omega) &= \ell_c \sigma_\kappa^2 e^{-\ell_c^2 \omega^2 \pi / \bar{c}_p^2} \\ \gamma_\mu(\omega) &= \ell_c \sigma_\kappa^2 e^{-\ell_c^2 \omega^2 \pi / \bar{c}_s^2} \end{aligned} \quad (2.54)$$

On s'intéressera par la suite à 2 longueurs de corrélations : $\ell_c = 30$ m et $\ell_c = 50$ m. Le régime ainsi modélisé correspond au régime faiblement hétérogène tel que $\frac{\ell_c}{\lambda_0} \sim 1$, $\frac{L_0}{\lambda_0} \gg 1$, $\sigma_\kappa \ll 1$.

On représente la fluctuation des propriétés en traçant une réalisation de V_s et V_p (Figure 2.6). Les fluctuations sur V_s et V_p sont indépendantes.

Calcul de la longueur de localisation attendue

A partir de l'équation 2.54 et de l'équation de L_{loc} (Equation 2.58), on peut tracer pour les différentes longueurs de corrélations et différents régimes qui nous intéressent, les longueurs de localisations associées en fonction de la fréquence. Pour pouvoir comparer différentes réalisations et les effets des hétérogénéités, on choisit de fixer $L_0 = 5000\text{m}$.

La figure 2.7 montre, pour différentes longueurs de corrélation, la longueur de localisation en fonction de la fréquence pour le cas de l'onde S. Pour une longueur de corrélation de l'ordre de $\ell_c = 50$ m, on a, en théorie, une localisation de l'énergie entre 2 et 4 Hz. Pour le cas de la longueur de corrélation de $\ell_c = 30$ m on a une localisation de 2 Hz à 7 Hz.

Ces résultats illustrent la longueur de localisation théorique pour laquelle il y aura un impact du milieu aléatoire sur le signal en sortie de la couche hétérogène.

Etude de la propagation de l'onde S à travers le milieu aléatoire

On va tout d'abord s'intéresser qualitativement aux effets de la présence du milieu aléatoire sur le champ d'onde. Pour cela on observe les snapshots en sortie de la simulation numérique à

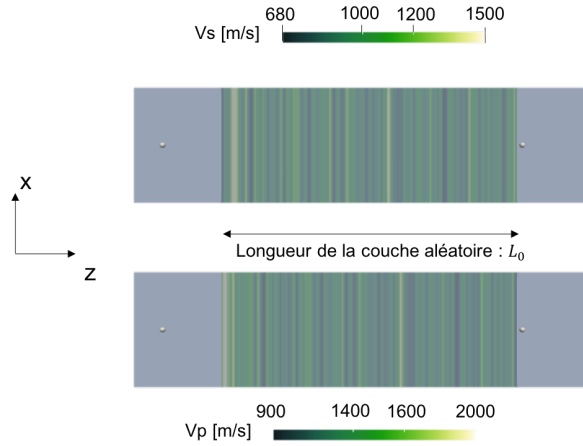


FIGURE 2.6 – Représentation plane du modèle 3D avec les différentes répartitions de V_s et V_p prises dans la couche aléatoire. Ici $\ell_c = 50$ m, $\sigma_K = 30\%$ et $L_0 = 5000$ m et V_p et V_s sont indépendantes

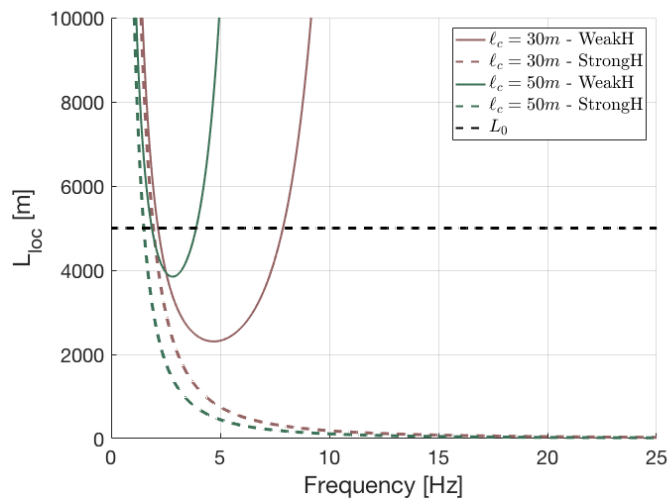


FIGURE 2.7 – Représentation de la longueur de localisation pour différentes longueurs de corrélation avec $\bar{c} \sim 1000$ m/s et $\sigma_K = 0.3$. On représente en vert la longueur de localisation pour $\ell_c = 50$ m (en trait plein le cas d'un milieu faiblement hétérogène et en pointillé le cas d'un milieu fortement hétérogène). On représente également en rouge, le cas où $\ell_c = 30$ m. La ligne pointillée noiree représente le cas limite où $L_{loc} = L_0$ qui est l'épaisseur de la couche aléatoire.

différents instants de la propagation dans le cas où $\ell_c = 30$ m (Figure 2.8). Il y a création d'une onde réfléchiée au cours de la propagation dans la couche aléatoire. Notamment si l'on regarde une partie zoomée en amont de la couche aléatoire (Figure 2.9) on voit l'onde réfléchiée due à la présence des hétérogénéités et donc non traversante du milieu aléatoire. Ainsi une partie de l'énergie ne traverse pas le milieu aléatoire de part en part, celle énergie ne sera donc pas reçue en sortie de la couche. Néanmoins, à partir des snapshots nous n'avons pas d'information si la partie de l'énergie bloquée correspond à la partie fréquentielle localisée d'après la figure 2.7.

On peut également tracer, dans le domaine temps-fréquence, la transformée du signal en entrée et du signal en sortie (Figure 2.10). Pour le signal en entrée, on a un front constant entre les fréquences 1 Hz et 20 Hz (modélisé par la zone jaune pour $t \sim 2$ s). Pour le signal en sortie, on peut voir qu'on a un front principal qui arrive vers 7.5 sec.

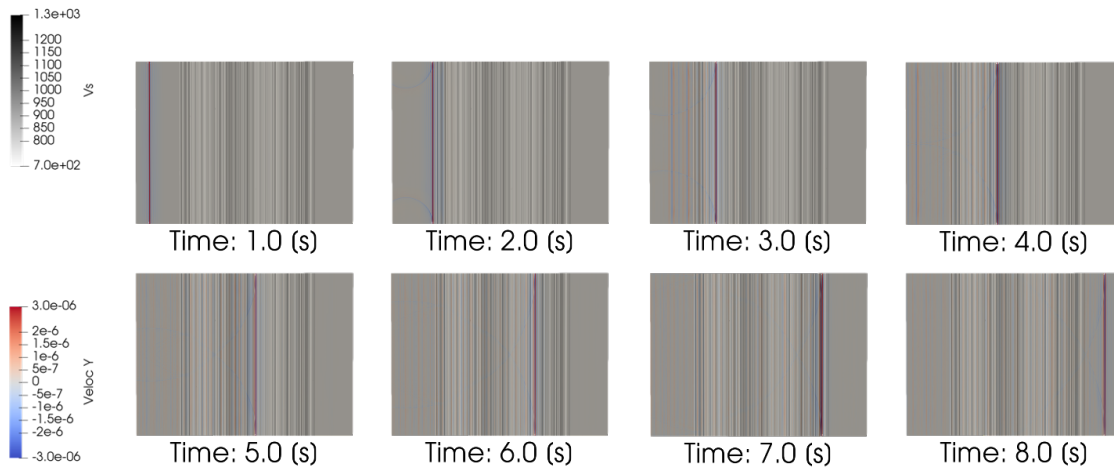


FIGURE 2.8 – Représentation, à différents instants, de la propagation du front d'onde au sein du milieu aléatoire. En teinte de gris est représentée la vitesse V_s du milieu. Et en variation bleu-rouge, l'amplitude de la vitesse, en m/s, pour la composante polarisée SH.

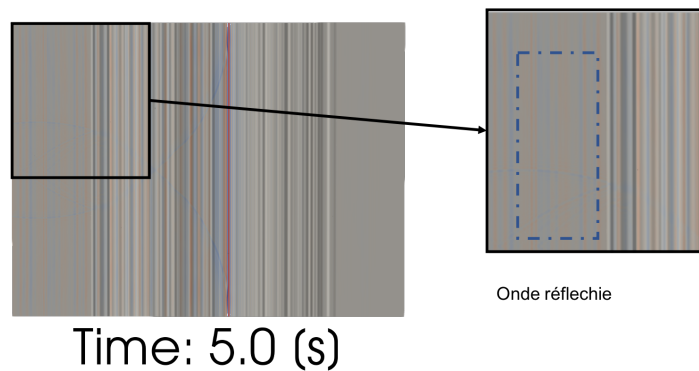


FIGURE 2.9 – A gauche est représenté le snapshot à l'instant $t = 5$ s, à droite est représentée la zone encadrée agrandie où on voit apparaître l'onde réfléchie par le milieu aléatoire (Avec saturation des couleurs)

Si on s'intéresse au front d'onde en sortie autour de $t \sim 7.5$ sec (avec une distance de ~ 5800 m entre l'entrée et la sortie, et une vitesse moyenne $\bar{c}_s = 1000 \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ on a un front théorique qui arrive vers $t = 1.5 + 5.8 = 7.3 \text{sec}$), on a une conservation du front d'onde pour la partie haute fréquence (entre 10 et 20 Hz). On observe une chute de l'amplitude autour de 5 Hz (visible via le "trou" au niveau de la bande jaune correspondant au maximum d'énergie). On observe également une chute de l'amplitude pour la partie entre 1 et 10 Hz, avec notamment, pour cette bande de fréquence, une partie de l'énergie qui arrive après le front principal. En comparaison avec la figure 2.7, on s'attend à avoir un minimum d'énergie (correspondant au minimum de la longueur de localisation) pour 5Hz, ce qui correspond bien aux résultats qualitatifs obtenus.

Analyse des spectres en sortie de la couche aléatoire - Cas de l'onde S

Pour pouvoir quantifier précisément la partie atténuée du signal et comparer pour différentes longueurs de corrélations, on trace pour différents tirages la transformée de Fourier de la vitesse en sortie, comparée à la transformée de Fourier de la vitesse injectée en entrée (Figure 2.11).

On s'intéresse aux 2 longueurs de corrélations dont on a représenté les longueurs de localisation (Figure 2.7). La figure 2.11 représente la transformée de Fourier de la vitesse de l'entrée et

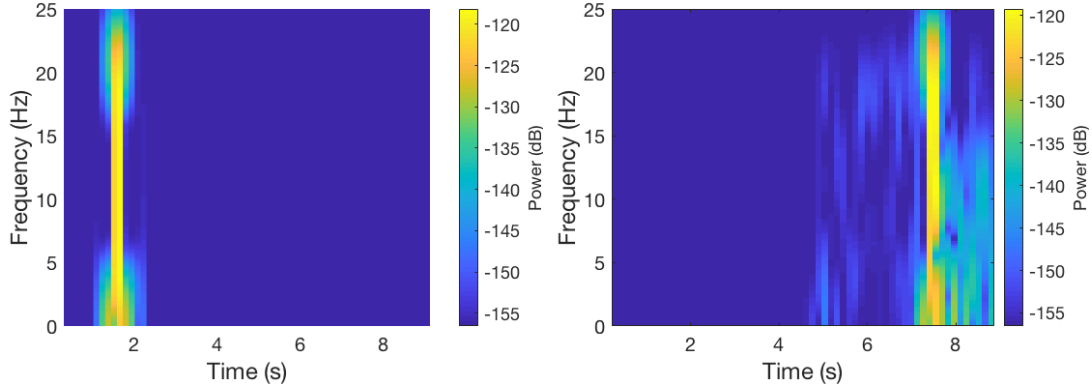


FIGURE 2.10 – À gauche est représentée la transformée en temps fréquence du signal d'entrée. À droite est représentée la transformée en temps fréquence du signal en sortie de la couche aléatoire pour $\ell_c = 30$ m.

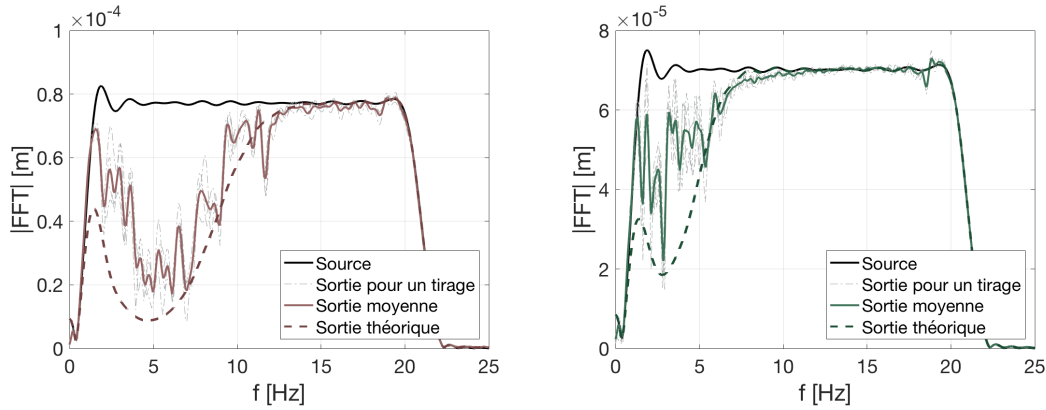


FIGURE 2.11 – À gauche est représentée l'entrée et la sortie pour différents tirages (en gris, pointillé) ainsi que la moyenne des sorties (en rouge, trait plein) dans le cas de $\ell_c = 30$ m et la valeur théorique de la sortie (en rouge, pointillé). À droite est représentée l'entrée et la sortie pour différents tirages (en gris, pointillé) ainsi que la moyenne des sorties (en vert, trait plein) dans le cas de $\ell_c = 50$ m et la valeur théorique de la sortie (en vert, pointillé).

de la sortie pour différents tirages dans le cas où $\ell_c = 30$ m et $\ell_c = 50$ m. Pour la plus petite des longueurs de corrélation (en rouge à gauche sur la figure), on localise pour des fréquences entre 1Hz et 12Hz. La diminution d'amplitude est proche de la valeur théorique attendue (en pointillé rouge) qui correspond au signal d'entrée multiplié par $\exp\left(-\frac{L}{L_{Loc}}\right)$, c'est à dire :

$$S(z=L) = |T_\omega(0,L)| S(z=0) = \exp\left(-\frac{L}{L_{Loc}}\right) S(z=0) \quad (2.55)$$

Avec $S(z=0)$ le signal en $z=0$ et $S(z=L)$ le signal en $z=L$. On retrouve dans le cas de $\ell_c = 50$ m un comportement similaire avec cette fois-ci une bande de fréquence impactée plus basse (entre 1Hz et 7Hz). Une fois encore, pour cette longueur de corrélation, la valeur moyenne sur différents tirages (en vert, plein) suit la valeur théorique attendue en sortie.

Les résultats ne convergent pas parfaitement vers la valeur théorique néanmoins la tendance obtenue de manière numérique est très proche. Les résultats ne sont valables théoriquement que dans le cas d'une couche aléatoire d'épaisseur infinie.

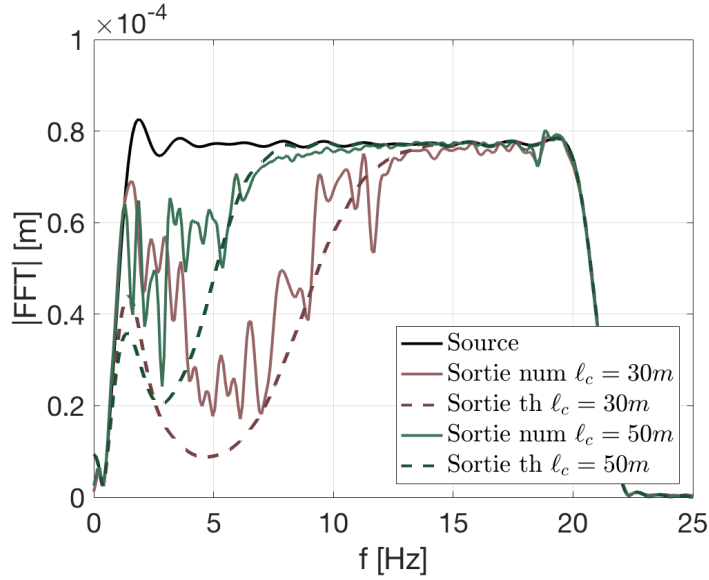


FIGURE 2.12 – En rouge est représenté la sortie pour $\ell_c = 30$ m, respectivement la sortie moyenne numérique en trait plein et la sortie théorique en pointillé. En vert est représenté la sortie pour $\ell_c = 50$ m, respectivement la sortie moyenne numérique en trait plein et la sortie théorique en pointillé.

Cas de l'onde P

On peut désormais s'intéresser au cas de l'onde P, qui devrait être indépendante de l'atténuation de l'onde S dans le cas d'une onde en incidence normale par rapport à la stratification du milieu aléatoire.

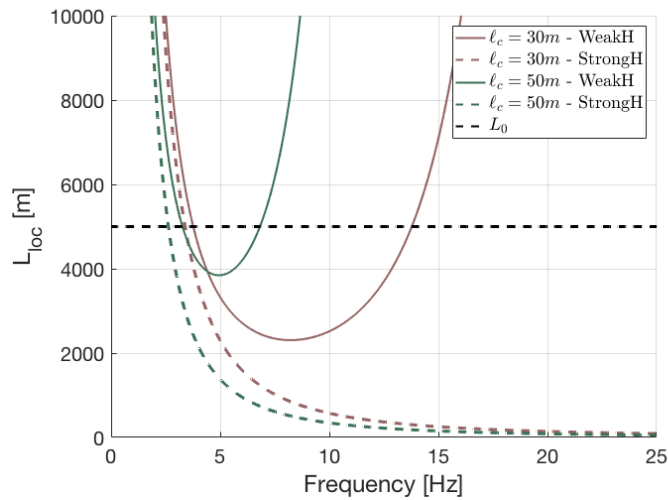


FIGURE 2.13 – Représentation de la longueur de localisation pour différentes longueurs de corrélation avec $\bar{c}_p \sim 1750$ m/s et $\sigma_K = 0.3$.

Dans le cas de l'onde P, en comparaison à l'onde S, on aura une atténuation plus haute fréquence que pour l'onde S. Ici on aura par exemple pour $\ell_c = 30$ m, une atténuation entre 4Hz et 15Hz alors que pour la même longueur de corrélation on était entre 1Hz et 7Hz pour l'onde S. On s'intéresse ensuite à la transformée de Fourier de la sortie pour la composante polarisée en P

(Figure 2.14).

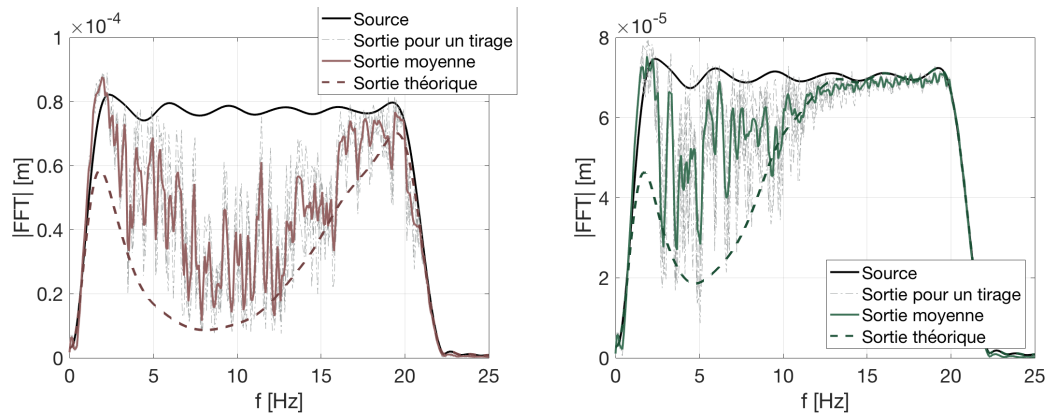


FIGURE 2.14 – A gauche est représentée l'entrée et la sortie pour différents tirages (en gris, pointillé) ainsi que la moyenne des sorties (en rouge, trait plein) dans le cas de $\ell_c = 30$ m et la valeur théorique de la sortie (en rouge, pointillé) pour l'onde P. A droite est représentée l'entrée et la sortie pour différents tirages (en gris, pointillé) ainsi que la moyenne des sorties (en vert, trait plein) dans le cas de $\ell_c = 50$ m et la valeur théorique de la sortie (en vert, pointillé) pour l'onde P.

On observe bien un déplacement de la bande de fréquence atténuée par rapport au cas de l'onde S. De plus la bande de fréquence atténuée est plus large autour du minimum d'atténuation. Si l'on regarde pour $\ell_c = 50$ m on a tout de même une convergence vers la valeur théorique moins bonne, même si la tendance est respectée. Pour le cas où $\ell_c = 30$ m on retrouve bien le minimum pour la même fréquence que celle attendue, c'est à dire autour de 7-8 Hz. Si on compare les résultats entre les 2 longueurs de corrélation (Figure 2.15), on voit que, comme pour l'onde S, l'atténuation correspondant au champ aléatoire avec la plus petite longueur de corrélation est la plus haute fréquence. Dans le cas de l'onde P, la bande de fréquence impactée est différente de celle impactée par S.

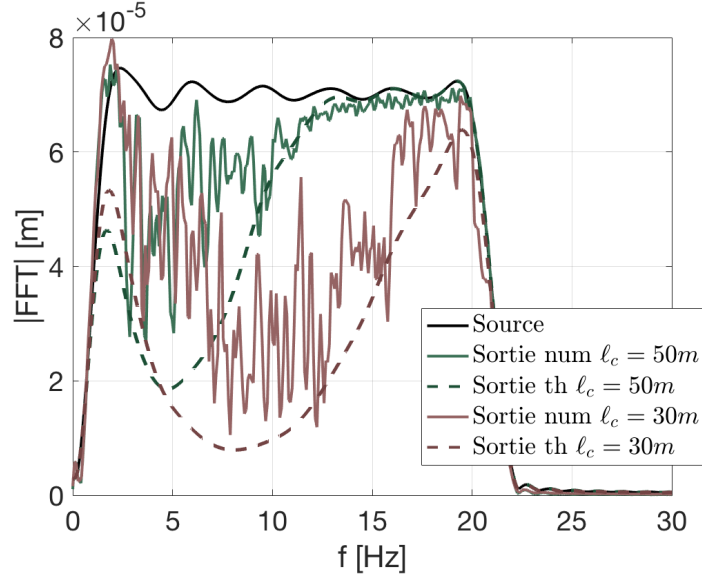


FIGURE 2.15 – À gauche est représentée la transformée de Fourier de la vitesse pour l'entrée et la sortie pour différents tirages (en gris, pointillé) ainsi que la moyenne des sorties (en rouge, trait plein) dans le cas de $\ell_c = 30$ m et la valeur théorique de la sortie (en rouge, pointillé). À droite est représentée l'entrée et la sortie pour différents tirages (en gris, pointillé) ainsi que la moyenne des sorties (en vert, trait plein) dans le cas de $\ell_c = 50$ m et la valeur théorique de la sortie (en vert, pointillé).

2.4 Onde SH en incidence quelconque

On se place dans le cas $k_x = k \neq 0$. On peut donc découpler la partie SH des ondes élastiques (v_y, σ_{yz}) comme explicité équation 2.3

2.4.1 Amortissement apparent et longueur de localisation

Le système d'équations 2.4 se réécrit sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} v_y \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = -\frac{i\omega}{\varepsilon} \begin{bmatrix} 0 & (\alpha^2 \zeta)^{-1} \\ \rho - (\alpha^2 \zeta) k^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Pour le système 2.56, on applique la même méthodologie que pour le cas des ondes en incidence normale (Partie 2.2). On recalcule les valeurs propres associées à la matrice pour l'onde SH uniquement. Ici la vitesse effective dépend de k . On note $\tilde{c}_k(k) = \frac{\tilde{c}_s}{\sqrt{1-k^2\tilde{c}_s^2}}$. On peut ainsi réécrire le système d'équations comme dans l'équation 2.37 après avoir réexplicité les termes et réécrit le problème aux interfaces avec dans ce cas $v_k = \frac{\tilde{c}_s^2(k)}{\tilde{c}_s^2(0)} v_0$ avec v_0 correspondant à la fluctuation introduite dans le cas en incidence normale (Equation 2.37). Le terme v_k va jouer un rôle similaire à v_0 introduit dans le cas de l'incidence normale.

On peut réécrire la convergence du coefficient de transmission tel que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{L} \ln |T_\omega^\varepsilon(0, L, k)|^2 = -\frac{1}{L_{loc,SHi}(\omega, k)} \quad (2.57)$$

Avec $L_{loc,SHi}(\omega, k) = \frac{4\tilde{c}_s^2(k)}{\omega^2 \gamma_k}$ où $\gamma_k = \frac{\tilde{c}_s^4(k)}{\tilde{c}_s^4} \gamma(\omega)$. On en déduit donc dans ce cas :

$$L_{loc,SHi}(\omega, k) = \frac{4\tilde{c}_s^4}{\omega^2 \gamma \tilde{c}_s^2(k)} = \frac{\tilde{c}_s^2}{\tilde{c}_s^2(k)} L_{loc}(\omega) \quad (2.58)$$

avec $L_{loc}(\omega)$ la longueur de localisation pour le cas d'une onde S en incidence normale. L'inclinaison non nulle ($k \neq 0$) de l'onde ajoute un terme correcteur $\frac{c_s^2(k)}{c_s^2(0)}$ par rapport au cas de l'incidence normale (Partie 2.2). On montre ici que le coefficient de transmission associé sera différent par rapport au cas en incidence normale. On a $\frac{c_s^2(k)}{c_s^2(0)} = 1 - c_s^2 k^2 \leq 1$, la longueur de localisation sera plus importante que dans le cas d'une onde en incidence normale.

Résumé : Onde polarisée SH inclinée se propageant à travers un milieu aléatoire

On adopte la même méthode que dans le cas incidence normale, l'inclinaison correspondant à la dépendance en k va jouer comme un facteur correcteur sur le coefficient de transmission obtenu pour la partie SH de l'onde. On retrouve dans cette partie un résultat similaire au cas de l'onde acoustique inclinée développé par Fouque et al. [2007], néanmoins les résultats dans le cas de l'élasticité ne s'applique qu'à la partie polarisée SH de l'onde.

2.4.2 Illustration numérique

On souhaite désormais mettre en évidence l'influence de l'inclinaison du front d'onde sur le contenu fréquentiel atténué. Pour cela on incline le plan de source par rotation par rapport à l'axe y . L'onde polarisée SH sera quant à elle sur cet axe y . On suppose ici 4 inclinaisons de sources différentes avec $\beta = 0^\circ$, $\beta = 5^\circ$, $\beta = 10^\circ$ et $\beta = 20^\circ$. Le modèle numérique correspond à celui présenté figure 2.16. On considère le même modèle aléatoire.

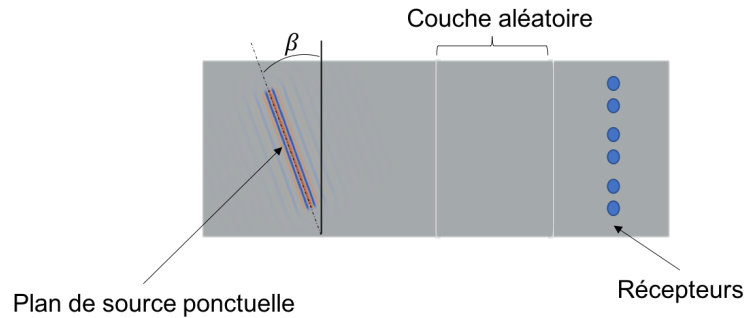


FIGURE 2.16 – Représentation du plan de source (d'inclinaison β) permettant la création d'une onde plane et la position des récepteurs en sortie de la couche aléatoire. La couche aléatoire a une longueur $L_0 = 5000$ m

On trace, comme dans le cas de l'incidence normale, la longueur de localisation $L_{loc,SHi}(\omega, k)$ sachant que cette longueur de localisation est égale à la longueur de localisation dans le cas de l'incidence normale, multipliée par le coefficient correcteur : $\frac{c_s^2}{c_s^2(k)}$.

Plus l'inclinaison est importante plus la localisation est "forte" c'est à dire que la bande de fréquence sur laquelle on localise croît (Figure 2.17). Cela correspond à l'allongement du parcours moyen de l'onde au sein du milieu aléatoire. De plus quand on a une inclinaison très faible, il n'y a aucun changement. La longueur parcourue par l'onde dans le milieu aléatoire est proche de la longueur de la couche aléatoire L_0 . Numérique, on ne s'attend pas à voir de différence entre les différents angles tracés ici.

Lors de la propagation d'une onde inclinée, où on suit l'onde polarisée SH (Figure 2.18). On peut voir les retours correspondant à l'onde réfléchi au fur et à mesure de la propagation. Cette onde correspond à la partie ne traversant pas le milieu aléatoire. Si l'onde incidente a une inclinaison β , on peut voir que la partie réfléchi aura une inclinaison $-\beta$.

On peut regarder la réponse en sortie de la couche aléatoire pour différentes inclinaisons (Figure 2.19). On choisit ici de ne tracer la réponse que pour $\beta = 0^\circ$ et $\beta = 20^\circ$. On peut voir qu'il n'y a

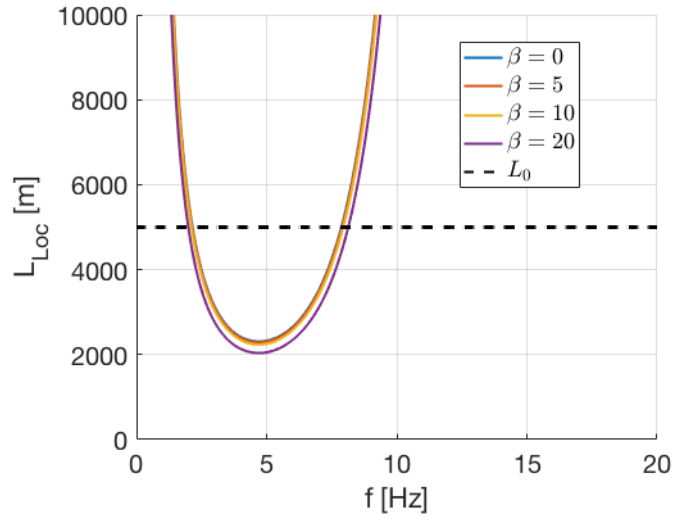


FIGURE 2.17 – Représentation de la longueur de localisation définie équation ?? pour différentes inclinaisons, une longueur de corrélation $\ell_c = 50$ m et une vitesse des ondes S égale à $\bar{c}_s \sim 1000$ m/s et $\sigma_K = 0.3$.

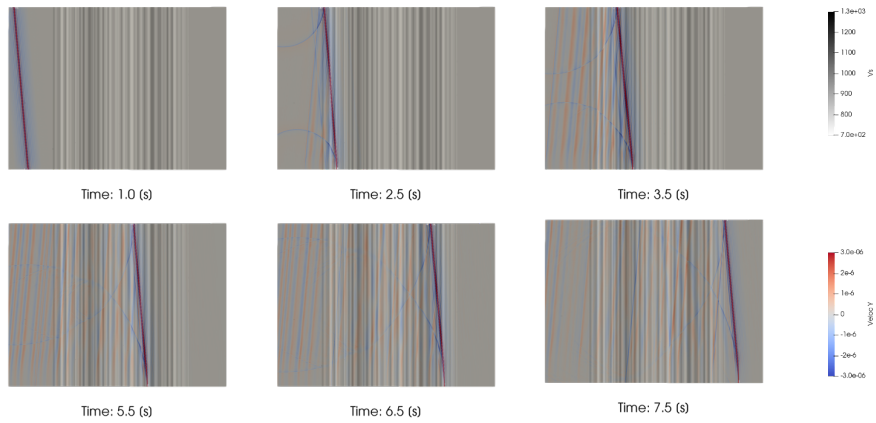


FIGURE 2.18 – Représentation à différents instants de la propagation d'une onde polarisée SH pour $\beta = 10^\circ$

pas de différence notable dans les résultats. Il y a une légère différence entre la sortie pour $\beta = 20^\circ$ et celle en incidence normale mais comme attendu pour des inclinaisons relativement faible et pour la taille de la couche considérée la variation de l'atténuation est faible (Figure 2.17).

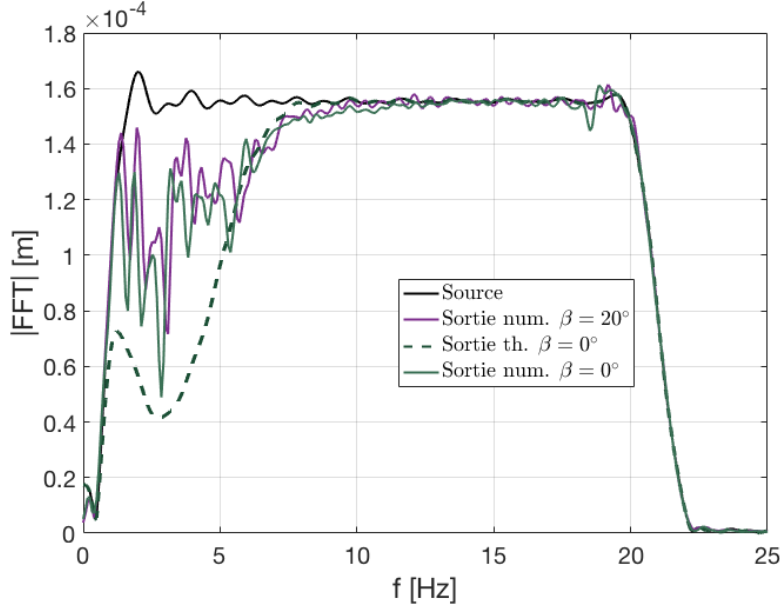


FIGURE 2.19 – Comparaison de la sortie polarisée SH pour 2 inclinaisons différentes. En vert, trait plein, est représentée la réponse dans le cas où $\beta = 0^\circ$, en vert, en pointillé, est représentée la limite théorique pour $\beta = 0^\circ$ et en violet est représentée la réponse pour $\beta = 20^\circ$

2.5 Onde P-SV en incidence faible

Dans cette partie, on s'intéresse à la transmission de l'onde élastique P-SV dans le cas d'une onde d'incidence inclinée par rapport à la couche hétérogène. Dans ce cas présent, les équations en élastodynamique ne sont plus identiques aux équations acoustiques. Les résultats de l'acoustique ne s'appliquent donc pas. Etant donné la résolution de l'onde SH connue désormais, on isole la partie P-SV du système d'équations pour pouvoir résoudre le problème. Cette contribution nouvelle permet de mettre en place les premières étapes pour aboutir au système stochastique pour les coefficients de transmission et de réflexion pour l'onde P-SV. Les hypothèses considérées seront explicitées au fur et à mesure du développement des équations. Le système linéaire associé à la partie P-SV de l'onde s'écrit, à partir de l'équation 2.5, sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} v_x \\ \sigma_{xz} \\ v_z \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} = -i\omega \mathbf{H}_{xz} \begin{bmatrix} v_x \\ \sigma_{xz} \\ v_z \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

avec :

$$\mathbf{H}_{xz} = \begin{bmatrix} 0 & \zeta_s^{-1}(z) & -k & 0 \\ \rho(z) - 4\zeta_s(z)k^2(1 - \alpha^2(z)) & 0 & 0 & -k(1 - 2\alpha^2(z)) \\ -k(1 - 2\alpha^2(z)) & 0 & 0 & \zeta_p^{-1}(z) \\ 0 & -k & \rho & 0 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Pour simplifier les calculs, sous hypothèse d'avoir une incidence faible de l'onde dans le milieu aléatoire, on réécrit \mathbf{H}_{xz} à l'ordre 1 en k .

$$\mathbf{H}_{xz} = \begin{bmatrix} 0 & \zeta_s^{-1}(z) & 0 & 0 \\ \rho(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_p^{-1}(z) \\ 0 & 0 & \rho(z) & 0 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 2\alpha^2 \\ 1 - 2\alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(k^2) \quad (2.61)$$

Les valeurs propres associées à ce développement à l'ordre 1 en k s'écrivent sous la forme :

$$\lambda_s^\pm = \pm \frac{1}{c_s(z)} + \mathcal{O}(k^2), \quad \lambda_p^\pm = \pm \frac{1}{c_p(z)} + \mathcal{O}(k^2). \quad (2.62)$$

Hypothèses de petites inclinaisons

On s'est ici placé sous hypothèse de petites inclinaisons, ce qui nous permet de ne faire qu'un développement à l'ordre 1 en k et donc de ne pas tenir compte des termes aux ordres supérieurs. Le choix de cette hypothèse permet de simplifier une partie du couplage présent et donc de pouvoir mener à bien le développement des équations. De plus, ce choix semble judicieux dans un contexte géophysique où les sources sismiques sont très profondes. Les angles apparents entre le trajet de l'onde directe arrivant en surface et la surface de la Terre peuvent raisonnablement être considérés comme petit. Le passage à l'ordre 2 est tout à fait possible, mais le traitement des équations est dans ce cas plus calculatoire.

2.5.1 Détermination du comportement homogénéisé

A partir de la matrice \mathbf{H}_{xz} , on souhaite suivre l'onde sur une caractéristique homogénéisée comme ce qui a été effectué dans le cas d'une onde élastique incidente (Section 2.2). Pour ce faire on doit déterminer au préalable le comportement de ce milieu homogénéisé. À la différence du cas découplé, le couplage entre une partie de l'onde S et l'onde P ne permet pas d'avoir un milieu homogénéisé isotrope. Dans notre cas le milieu est stratifié horizontalement. Il y a donc une orthotropie entre la stratification horizontale et les propriétés du milieu dans les autres directions. C'est pourquoi on réécrit la matrice de la loi constitutive du milieu homogénéisé orthotrope [Backus, 1962].

$$\sigma = \bar{\rho} \begin{bmatrix} \bar{c}_{ph}^2 & \bar{c}_{ph}^2 - 2\bar{c}_{sh}^2 & \delta(\bar{c}_p^2 - \bar{c}_s^2) - \bar{c}_s^2 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{c}_{ph}^2 - 2\bar{c}_{sh}^2 & \bar{c}_{ph}^2 & \delta(\bar{c}_p^2 - \bar{c}_s^2) - \bar{c}_s^2 & 0 & 0 & 0 \\ \delta(\bar{c}_p^2 - \bar{c}_s^2) - \bar{c}_s^2 & \delta(\bar{c}_p^2 - \bar{c}_s^2) - \bar{c}_s^2 & \bar{c}_p^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{sh}^2 \end{bmatrix} \epsilon \quad (2.63)$$

où les coefficients homogénéisés sont :

$$\bar{c}_p = \sqrt{\frac{\mathbb{E}[\kappa(z)^{-1}]^{-1}}{\bar{\rho}}}, \quad \bar{c}_s = \sqrt{\frac{\mathbb{E}[\mu(z)^{-1}]^{-1}}{\bar{\rho}}}, \quad \bar{c}_{sh} = \sqrt{\frac{\mathbb{E}[\mu(z)]}{\bar{\rho}}}, \quad \bar{\rho} = \mathbb{E}[\rho(z)] \quad (2.64)$$

$$\bar{c}_{ph} = \sqrt{\frac{1}{\bar{\rho}} \mathbb{E} \left[\frac{4\mu(z)(\lambda(z) + \mu(z))}{\kappa(z)} \right] + \bar{c}_p^2 (\delta(1 - \bar{\alpha}^2) - \bar{\alpha}^2)^2} \quad (2.65)$$

et

$$\delta = \frac{1}{1 - \bar{\alpha}^2} \left(\mathbb{E} \left[\frac{\lambda(z)}{\kappa(z)} \right] + \bar{\alpha}^2 \right) \quad (2.66)$$

La matrice illustrée équation 2.63 fait apparaître le caractère orthotrope transverse du milieu.

Détermination des modes propres associés au milieu homogénéisé

A partir de la détermination du comportement homogénéisé du milieu, on souhaite déterminer les modes associés [Chadwick, 1989]. Pour cela on repart de l'équation de Hooke caractérisée

précédemment (Equation 2.63) et on réécrit le système d'équations :

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} v_x \\ \sigma_{xz} \\ v_z \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} = -i\omega \bar{\mathbf{H}}_{xz} \begin{bmatrix} v_x \\ \sigma_{xz} \\ v_z \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

On note $\bar{\zeta}_s = \bar{\rho} \bar{c}_s^2$, $\bar{\zeta}_p = \bar{\rho} \bar{c}_p^2$ et $\beta = \bar{c}_{ph} / \bar{c}_p$. On peut écrire $\bar{\mathbf{H}}_{xz}$ comme :

$$\bar{\mathbf{H}}_{xz} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\zeta}_s^{-1} & -k & 0 \\ \bar{\rho} \left(1 - k^2 (\bar{c}_{ph}^2 - \bar{c}_p^2 (\delta(1 - \bar{\alpha}^2) - \bar{\alpha}^2)^2) \right) & 0 & 0 & -k(\delta(1 - \bar{\alpha}^2) - \bar{\alpha}^2) \\ -k(\delta(1 - \bar{\alpha}^2) - \bar{\alpha}^2) & 0 & 0 & \bar{\zeta}_p^{-1} \\ 0 & -k & \bar{\rho} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

En conservant les développements limités au premier ordre en k on a pour valeurs propres de $\bar{\mathbf{H}}_{xz}$ les valeurs propres suivantes :

$$\bar{\lambda}_s^\pm = \pm \frac{1}{\bar{c}_s} + \mathcal{O}(k^2), \quad \bar{\lambda}_p^\pm = \pm \frac{1}{\bar{c}_p} + \mathcal{O}(k^2) \quad (2.69)$$

Les modes propres associés à ces valeurs propres s'écrivent :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \bar{\xi}_s^{-1/2} & \bar{\xi}_s^{-1/2} & 0 & 0 \\ \bar{\xi}_s^{1/2} & -\bar{\xi}_s^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\xi}_p^{-1/2} & \bar{\xi}_p^{-1/2} \\ 0 & 0 & \bar{\xi}_p^{1/2} & -\bar{\xi}_p^{1/2} \end{bmatrix} + \frac{k\bar{c}_s}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\delta}{\bar{\alpha}} \bar{\xi}_p^{-1/2} & -\frac{\delta}{\bar{\alpha}} \bar{\xi}_p^{-1/2} \\ 0 & 0 & \bar{\alpha}(1 + \delta) \bar{\xi}_p^{1/2} & \bar{\alpha}(1 + \delta) \bar{\xi}_p^{1/2} \\ -\delta \bar{\xi}_s^{-1/2} & \delta \bar{\xi}_s^{-1/2} & 0 & 0 \\ -(1 + \delta) \bar{\xi}_s^{1/2} & -(1 + \delta) \bar{\xi}_s^{1/2} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(k^2) \\ \bar{\mathbf{M}}^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \bar{\xi}_s^{-1/2} & \bar{\xi}_s^{-1/2} & 0 & 0 \\ \bar{\xi}_s^{1/2} & -\bar{\xi}_s^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\xi}_p^{1/2} & \bar{\xi}_p^{-1/2} \\ 0 & 0 & \bar{\xi}_p^{-1/2} & -\bar{\xi}_p^{-1/2} \end{bmatrix} + \frac{k\bar{c}_s}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(1 + \delta) \bar{\xi}_s^{-1/2} & -\delta \bar{\xi}_s^{-1/2} \\ 0 & 0 & (1 + \delta) \bar{\xi}_s^{1/2} & -\delta \bar{\xi}_s^{1/2} \\ \bar{\alpha}(1 + \delta) \bar{\xi}_p^{-1/2} & \frac{\delta}{\bar{\alpha}} \bar{\xi}_p^{-1/2} & 0 & 0 \\ -\bar{\alpha}(1 + \delta) \bar{\xi}_p^{1/2} & \frac{\delta}{\bar{\alpha}} \bar{\xi}_p^{1/2} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(k^2) \end{aligned} \quad (2.70)$$

2.5.2 Projection modale du comportement local

Comme pour le cas de l'équation 2.14, on peut désormais réécrire la décomposition modale au niveau d'une interface en notant A_{sv} , B_{sv} les modes d'interfaces correspondant à la partie SV de l'onde et A_p , B_p les modes correspondant à la partie P de l'onde. On en déduit, en procédant de la même manière que dans la section 2.2.2 :

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} A_{sv} \\ B_{sv} \\ A_p \\ B_p \end{bmatrix} = -\bar{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{H}_{xz}(z) \bar{\mathbf{M}} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} A_{sv} \\ B_{sv} \\ A_p \\ B_p \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Avec :

$$\bar{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{H}_{xz}(z) \bar{\mathbf{M}} = \frac{1}{\bar{c}_s} \begin{bmatrix} \Delta_s^{(+)} & \Delta_s^{(-)} & 0 & 0 \\ -\Delta_s^{(-)} & -\Delta_s^{(+)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\alpha} \Delta_p^{(+)} & \bar{\alpha} \Delta_p^{(-)} \\ 0 & 0 & -\bar{\alpha} \Delta_p^{(-)} & -\bar{\alpha} \Delta_p^{(+)} \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Delta^{(+)} & \Delta^{(-)} \\ 0 & 0 & \Delta^{(-)} & \Delta^{(+)} \\ \Delta^{(+)} & \Delta^{(-)} & 0 & 0 \\ -\Delta^{(-)} & -\Delta^{(+)} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(k^2) \quad (2.72)$$

Où Δ_s et Δ_p sont définis équation 2.20 et équation 2.50. Et $\Delta^{(\pm)}$ fait apparaître le couplage entre les deux ondes.

$$\sqrt{\bar{\alpha}}\Delta^{(\pm)} = (\bar{\alpha} \pm \delta \mp (1 + \delta)\bar{\alpha}^2) \frac{\rho(z)}{\bar{\rho}} \mp 1 - \bar{\alpha} - 2\bar{\alpha}(1 + \delta) \left(\Delta_s^- \mp \bar{\alpha}\Delta_p^- \right) \pm 2\alpha^2(z) \quad (2.73)$$

A partir de la décomposition modale précédemment effectuée, il faut recentrer les modes sur une caractéristique en effectuant un changement de variable similaire à l'équation 2.21. On choisit de recentrer les modes respectivement en fonction des vitesses \bar{c}_s et \bar{c}_p .

$$\begin{aligned} a_{sv}(s, z) &= A_{sv} \left(\varepsilon^2 s + \frac{z}{\bar{c}_s}, z \right) & b_{sv}(s, z) &= B_{sv} \left(\varepsilon^2 s - \frac{z}{\bar{c}_s}, z \right) \\ a_p(s, z) &= A_p \left(\varepsilon^2 s + \frac{z}{\bar{c}_p}, z \right) & b_p(s, z) &= B_p \left(\varepsilon^2 s - \frac{z}{\bar{c}_p}, z \right) \end{aligned} \quad (2.74)$$

L'équation après recentrage et transformée de Fourier correspond à :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \begin{bmatrix} a_{sv} \\ b_{sv} \\ a_p \\ b_p \end{bmatrix} &= \frac{i\omega}{\varepsilon^2 \bar{c}_s} \begin{bmatrix} \Delta_s^+ - 1 & \Delta_s^- e^{-2i\omega z / \bar{c}_s \varepsilon^2} & 0 & 0 \\ -\Delta_s^- e^{2i\omega z / \bar{c}_s \varepsilon^2} & 1 - \Delta_s^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\alpha}(\Delta_p^+ - 1) & \bar{\alpha}\Delta_p^- e^{-2i\omega z / \bar{c}_p \varepsilon^2} \\ 0 & 0 & -\bar{\alpha}\Delta_p^- e^{-2i\omega z / \bar{c}_p \varepsilon^2} & \bar{\alpha}(1 - \Delta_p^+) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{sv} \\ b_{sv} \\ a_p \\ b_p \end{bmatrix} \\ &- \frac{i\omega k}{\varepsilon^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Delta^+ e^{i\omega z / \bar{\delta}_c^- \varepsilon^2} & -\Delta^- e^{i\omega z / \bar{\delta}_c^+ \varepsilon^2} \\ 0 & 0 & -\Delta^- e^{-i\omega z / \bar{\delta}_c^+ \varepsilon^2} & \Delta^+ e^{-i\omega z / \bar{\delta}_c^- \varepsilon^2} \\ \Delta^+ e^{-i\omega z / \bar{\delta}_c^- \varepsilon^2} & \Delta^- e^{i\omega z / \bar{\delta}_c^+ \varepsilon^2} & 0 & 0 \\ \Delta^- e^{-i\omega z / \bar{\delta}_c^+ \varepsilon^2} & \Delta^+ e^{i\omega z / \bar{\delta}_c^- \varepsilon^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{sv} \\ b_{sv} \\ a_p \\ b_p \end{bmatrix} + \mathcal{O}(k^2) \end{aligned} \quad (2.75)$$

où

$$\frac{1}{\bar{\delta}_c^\pm} = \frac{1}{\bar{c}_s} \pm \frac{1}{\bar{c}_p} \quad (2.76)$$

En supposant que l'on peut exprimer les modes recentrés sous forme de développement limité tel que $a_i = a_i^0 + ka_i^1 + \mathcal{O}(k^2)$ et $b_i = b_i^0 + kb_i^1 + \mathcal{O}(k^2)$ (avec i correspondant soit à "sv" soit "p"), on obtient le système d'équations 2.77 où on notera $\mathbf{0}_2$ la matrice nulle dans $M_2(\mathbb{C})$.

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} a_s^0 \\ b_s^0 \\ a_p^1 \\ b_p^1 \\ a_p^0 \\ b_p^0 \\ a_s^1 \\ b_s^1 \end{bmatrix} = \frac{i\omega}{\varepsilon^2 \bar{c}_s} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{0,s} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{H}_{1,sp} & \mathbf{H}_{0,p} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{H}_{0,p} & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{H}_{1,ps} & \mathbf{H}_{0,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_s^0 \\ b_s^0 \\ a_p^1 \\ b_p^1 \\ a_p^0 \\ b_p^0 \\ a_s^1 \\ b_s^1 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{0,s} &= \begin{bmatrix} \Delta_s^+ - 1 & \Delta_s^- e^{-2i\omega z / \bar{c}_s \varepsilon^2} \\ -\Delta_s^- e^{2i\omega z / \bar{c}_s \varepsilon^2} & 1 - \Delta_s^+ \end{bmatrix} & \mathbf{H}_{0,p} &= \begin{bmatrix} \bar{\alpha}(\Delta_p^+ - 1) & \bar{\alpha}\Delta_p^- e^{-2i\omega z / \bar{c}_p \varepsilon^2} \\ -\bar{\alpha}\Delta_p^- e^{-2i\omega z / \bar{c}_p \varepsilon^2} & \bar{\alpha}(1 - \Delta_p^+) \end{bmatrix} \\ \mathbf{H}_{1,ps} &= \begin{bmatrix} -\bar{c}_s \Delta^+ e^{i\omega z / \bar{\delta}_c^- \varepsilon^2} & \bar{c}_s \Delta^- e^{i\omega z / \bar{\delta}_c^+ \varepsilon^2} \\ \bar{c}_s \Delta^- e^{-i\omega z / \bar{\delta}_c^+ \varepsilon^2} & -\bar{c}_s \Delta^+ e^{-i\omega z / \bar{\delta}_c^- \varepsilon^2} \end{bmatrix} & \mathbf{H}_{1,sp} &= \begin{bmatrix} -\bar{c}_s \Delta^+ e^{-i\omega z / \bar{\delta}_c^- \varepsilon^2} & -\bar{c}_s \Delta^- e^{i\omega z / \bar{\delta}_c^+ \varepsilon^2} \\ -\bar{c}_s \Delta^- e^{-i\omega z / \bar{\delta}_c^+ \varepsilon^2} & -\bar{c}_s \Delta^+ e^{i\omega z / \bar{\delta}_c^- \varepsilon^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.78)$$

On cherche à résoudre l'équation 2.77 de manière similaire à l'équation 2.28 dans le cas de l'incidence normale. On sait que $[a_s^0 \ b_s^0 \ a_p^1 \ b_p^1 \ a_p^0 \ b_p^0 \ a_s^1 \ b_s^1]^T$ est solution pour la condition initiale $[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, on définit ainsi une base de solution vérifiant l'équation 2.77 pour la base de conditions initiales s'écrivant $(M_{1,j}^q)_{1 \leq j \leq 6}$ avec $M_{1,j}^q = \delta_{q,j}$ pour $1 \leq q \leq 6$. Ainsi, à partir de chaque condition initiale possible on peut définir une forme de la solution, de manière

identique au cas en incidence normale. Néanmoins le couplage complexifie la forme de \mathbf{P} . On peut écrire \mathbf{P} , solution du problème tel que :

$$\mathbf{P}(0, z) = \begin{bmatrix} \alpha_s^0 & \overline{\beta_s^0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_s^0 & \overline{\alpha_s^0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_p^1 & -\overline{\beta_p^1} & \alpha_p^0 & \overline{\beta_p^0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_p^1 & -\overline{\alpha_p^1} & \beta_p^0 & \overline{\alpha_p^0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_p^0 & \overline{\beta_p^0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_p^0 & \overline{\alpha_p^0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_s^1 & -\overline{\beta_s^1} & \alpha_s^0 & \overline{\beta_s^0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_s^1 & -\overline{\alpha_s^1} & \beta_s^0 & \overline{\alpha_s^0} \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

Sachant que \mathbf{P} vérifie l'équation 2.29 (formule de Jacobi), et que l'on vérifie bien que $\text{Tr} \mathbf{H}_{xz, \omega} = 0$ alors on obtient la propriété suivante :

$$\det(\mathbf{P}) = (|\alpha_s^0|^2 - |\beta_s^0|^2)^2 (|\beta_p^0|^2 - |\alpha_p^0|^2)^2 = 1 \quad (2.80)$$

Par ailleurs l'équation 2.77 peut se séparer en 2 équations dont les sous problèmes s'écrivent :

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} a_s^0 \\ b_s^0 \\ a_p^1 \\ b_p^1 \end{bmatrix} = \frac{i\omega}{\varepsilon^2 \overline{c_s}} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{0,s} & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{H}_{1,sp} & \mathbf{H}_{0,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_s^0 \\ b_s^0 \\ a_p^1 \\ b_p^1 \end{bmatrix} \quad \frac{d}{dz} \begin{bmatrix} a_p^0 \\ b_p^0 \\ a_s^1 \\ b_s^1 \end{bmatrix} = \frac{i\omega}{\varepsilon^2 \overline{c_s}} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{0,p} & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{H}_{1,ps} & \mathbf{H}_{0,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_p^0 \\ b_p^0 \\ a_s^1 \\ b_s^1 \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

On peut associer à ces sous systèmes les propagateurs suivant :

$$\mathbf{P}_1(0, z) = \begin{bmatrix} \alpha_s^0 & \overline{\beta_s^0} & 0 & 0 \\ \beta_s^0 & \overline{\alpha_s^0} & 0 & 0 \\ \alpha_p^1 & -\overline{\beta_p^1} & \alpha_p^0 & \overline{\beta_p^0} \\ \beta_p^1 & -\overline{\alpha_p^1} & \beta_p^0 & \overline{\alpha_p^0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_2(0, z) = \begin{bmatrix} \alpha_p^0 & \overline{\beta_p^0} & 0 & 0 \\ \beta_p^0 & \overline{\alpha_p^0} & 0 & 0 \\ \alpha_s^1 & -\overline{\beta_s^1} & \alpha_s^0 & \overline{\beta_s^0} \\ \beta_s^1 & -\overline{\alpha_s^1} & \beta_s^0 & \overline{\alpha_s^0} \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

L'équation 2.82 montre deux sous matrices pour lesquelles on retrouve un comportement proche du comportement en incidence normale. Pour le premier bloc 2×2 de chaque matrice, on retrouve une écriture identique au cas de l'incidence normale. Ce bloc correspond au terme à l'ordre 0. Le terme antidiagonal fait lui apparaître le couplage entre P et S. Par ailleurs, ce couplage se fait de l'ordre 0 en S (respectivement P) vers l'ordre 1 en P (respectivement S). Ce couplage est uniquement présent dans ce sens. On ne peut avoir de création d'onde S (respectivement P) à l'ordre 1 à partir uniquement d'onde S à l'ordre 0 (respectivement P).

On a également pour chaque sous matrice la conservation du déterminant : $\det(\mathbf{P}_1) = \det(\mathbf{P}_2) = (|\alpha_s^0|^2 - |\beta_s^0|^2) (|\beta_p^0|^2 - |\alpha_p^0|^2) = 1$.

On en déduit, pour ces sous systèmes les mêmes conditions sur les déterminants que dans la partie précédente, c'est à dire :

$$(|\alpha_s^0|^2 - |\beta_s^0|^2) = 1 \quad \text{et} \quad (|\beta_p^0|^2 - |\alpha_p^0|^2) = 1$$

On s'intéresse ensuite à définir le coefficient de transmission et de réflexion de l'onde. On s'intéressera au système dont la solution est une onde principalement polarisée SV avec uniquement du P à l'ordre 1 ($[a_s^0 \ b_s^0 \ a_p^1 \ b_p^1]^T$). Cela correspond au cas d'une onde incidence purement SV avec un transfert d'énergie en P à l'ordre 1 au cours de la propagation à travers la couche aléatoire. L'écriture du coefficient de transmission et du coefficient de réflexion pour ce sous système est détaillé dans l'encadré "Lien entre coefficients de transmission/réflexion et comportement local".

Encadré "Lien entre coefficients de transmission/réflexion et comportement local"

On choisit ici de ne considérer qu'une onde SV entrante pour le système associé à $[a_s^0 \ b_s^0 \ a_p^1 \ b_p^1]^T$ sur la couche aléatoire avec une inclinaison faible. D'après l'équation 2.82, et la définition du propagateur, on sait que :

$$\begin{bmatrix} a_s^0 \\ b_s^0 \\ a_p^1 \\ b_p^1 \end{bmatrix}(\omega, L) = \mathbf{P}_1(0, L) \begin{bmatrix} a_s^0 \\ b_s^0 \\ a_p^1 \\ b_p^1 \end{bmatrix}(\omega, 0) \quad (2.83)$$

L'onde incidente est purement SV, c'est à dire que l'on a qu'un terme en S à l'ordre 0 : $a_s^0(\omega, 0) = 1$ et $a_p^0(\omega, 0) = 0$. De plus en $z = L$, on n'a pas de réflexion, $b_s^0(\omega, 0) = 0$ et $b_p^0(\omega, 0) = 0$. On définit ainsi les différents coefficients tel que :

$$\begin{bmatrix} a_s^0 \\ b_s^0 \\ a_p^1 \\ b_p^1 \end{bmatrix}(\omega, L) = \begin{bmatrix} T_{ss}^0 \\ 0 \\ T_{sp}^1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} a_s^0 \\ b_s^0 \\ a_p^1 \\ b_p^1 \end{bmatrix}(\omega, 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ R_{ss}^0 \\ 0 \\ R_{sp}^1 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

A partir du système d'équations 2.84 et de la définition du propagateur, ainsi que des propriétés de conservation d'énergie on en déduit la définition des coefficients suivant en fonction des coefficients de la matrice \mathbf{P}_1 :

$$\begin{aligned} T_{ss}^0(0, L) &= \frac{1}{\alpha_s^0(0, L)} \\ R_{ss}^0(0, L) &= -\frac{\beta_s^0(0, L)}{\alpha_s^0(0, L)} \\ T_{sp}^1(0, L) &= \alpha_p^1(0, L) - \overline{\beta_p^1(0, L)R_{ss}^0} + \overline{\beta_p^0(0, L)R_{sp}^1} \\ R_{sp}^1(0, L) &= -\frac{\beta_p^1(0, L)}{\alpha_p^0(0, L)} + \frac{\alpha_p^1(0, L)}{\alpha_p^0(0, L)} R_{ss}^0 \end{aligned} \quad (2.85)$$

2.5.3 Détermination de la longueur de localisation dans le cas d'une fluctuation aléatoire faible du coefficient de cisaillement

On souhaite désormais réécrire l'équation 2.77 pour pouvoir appliquer le théorème 2.34 à partir de la forme de $\mathbf{P}(z=0)$ paramétrée précédemment. On suppose dans le cas présent que seul le coefficient de cisaillement fluctue en fonction de z pour simplifier les équations.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(z)} &= \frac{1}{\bar{\mu}} \left(1 + \varepsilon v_\mu \left(\frac{z}{\varepsilon^2} \right) \right) \\ \rho(z) &= \bar{\rho} \\ \frac{1}{K(z)} &= \frac{1}{\bar{K}} \end{aligned} \quad (2.86)$$

On en déduit $\Delta^\pm = 2\sqrt{\bar{\alpha}}\varepsilon(1 \mp \bar{\alpha})v_\mu\left(\frac{z}{\varepsilon^2}\right)$, $\Delta_s^{(+)} - 1 = \frac{\varepsilon}{2}v_\mu$, $\Delta_s^{(-)} = -\frac{\varepsilon}{2}v_\mu$, $\Delta_p^{(+)} - 1 = 0$ et $\Delta_p^{(-)} = 0$.

On réécrit l'équation du problème dont est solution le propagateur défini équation 2.82 :

$$\frac{d}{dz} \mathbf{P}_{1\omega}^\varepsilon(0, z) = \frac{i\omega}{\varepsilon} \mathbf{H}_\omega \left(\frac{z}{\varepsilon^2}, v \left(\frac{z}{\varepsilon^2} \right) \right) \mathbf{P}_{1\omega}^\varepsilon(0, z)(0, z) \quad (2.87)$$

avec :

$$\frac{i\omega}{\varepsilon} \mathbf{H}_\omega \left(\frac{z}{\varepsilon^2}, \mathbf{v} \left(\frac{z}{\varepsilon^2} \right) \right) = \frac{i\omega}{\varepsilon^2 \bar{c}_s} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{0,s} & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{H}_{1,sp} & \mathbf{H}_{0,p} \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

L'équation 2.87 peut être mise sous la forme du théorème 2.34 où $\mathbf{F}(\mathbf{P}, \mathbf{v}, \tau) = \frac{\omega}{2\bar{c}_s} \sum_{p=0}^6 a_p g^{(p)}(\mathbf{v}, \tau) \mathbf{h}_p \mathbf{P}$ avec :

$$a_{0,1,2} = 1 \quad a_{3,4} = k\bar{c}_s 2\sqrt{\bar{\alpha}}(1 + \bar{\alpha}) \quad a_{5,6} = k\bar{c}_s 2\sqrt{\bar{\alpha}}(1 - \bar{\alpha}) \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} g^{(0)}(\mathbf{v}_\mu, \tau) &= \mathbf{v}_\mu \left(\frac{z}{\varepsilon^2} \right) \\ g^{(1)}(\mathbf{v}_\mu, \tau) &= \mathbf{v}_\mu \left(\frac{z}{\varepsilon^2} \right) \sin \left(\frac{2\omega\tau}{\bar{c}_s \varepsilon^2} \right) & g^{(2)}(\mathbf{v}_\mu, \tau) &= \mathbf{v}_\mu \left(\frac{z}{\varepsilon^2} \right) \cos \left(\frac{2\omega\tau}{\bar{c}_s \varepsilon^2} \right) \\ g^{(3)}(\mathbf{v}_\mu, \tau) &= \mathbf{v}_\mu \left(\frac{z}{\varepsilon^2} \right) \sin \left(\frac{\omega\tau}{\delta_c^+ \varepsilon^2} \right) & g^{(4)}(\mathbf{v}_\mu, \tau) &= \mathbf{v}_\mu \left(\frac{z}{\varepsilon^2} \right) \cos \left(\frac{\omega\tau}{\delta_c^+ \varepsilon^2} \right) \\ g^{(5)}(\mathbf{v}_\mu, \tau) &= \mathbf{v}_\mu \left(\frac{z}{\varepsilon^2} \right) \sin \left(\frac{\omega\tau}{\delta_c^- \varepsilon^2} \right) & g^{(6)}(\mathbf{v}_\mu, \tau) &= \mathbf{v}_\mu \left(\frac{z}{\varepsilon^2} \right) \cos \left(\frac{\omega\tau}{\delta_c^- \varepsilon^2} \right) \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_0 &= \begin{bmatrix} i\sigma_3 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} & \mathbf{h}_1 &= \begin{bmatrix} -\sigma_1 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} & \mathbf{h}_2 &= \begin{bmatrix} \sigma_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{h}_3 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ i\sigma_2 & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} & \mathbf{h}_4 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ -i\sigma_1 & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} & \mathbf{h}_5 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ -\sigma_3 & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} & \mathbf{h}_6 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ -i\mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.91)$$

Avec \mathbf{I}_2 la matrice identité 2×2 (Les autres matrices étant définies équation 2.39). On calcule ensuite la matrice de corrélation :

$$C_{pq} = 2 \lim_{Z_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{Z_0} \int_0^{Z_0} \int_0^\infty \mathbb{E} [g^{(p)}(Y(0), \tau) g^{(q)}(Y(z), \tau + z)] dz d\tau \quad (2.92)$$

$$C(\omega) = \begin{bmatrix} \gamma(0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma \left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s} \right) & -\frac{1}{2}\gamma^{(s)} \left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma^{(s)} \left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s} \right) & \frac{1}{2}\gamma \left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma \left(\frac{\omega}{\delta_c^+} \right) & -\frac{1}{2}\gamma^{(s)} \left(\frac{\omega}{\delta_c^+} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma^{(s)} \left(\frac{\omega}{\delta_c^+} \right) & \frac{1}{2}\gamma \left(\frac{\omega}{\delta_c^+} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma \left(\frac{\omega}{\delta_c^-} \right) & -\frac{1}{2}\gamma^{(s)} \left(\frac{\omega}{\delta_c^-} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma^{(s)} \left(\frac{\omega}{\delta_c^-} \right) & \frac{1}{2}\gamma \left(\frac{\omega}{\delta_c^-} \right) \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

Où

$$\gamma(k) = 2 \int_0^\infty \mathbb{E} [\mathbf{v}_\mu(0) \mathbf{v}_\mu(z)] \cos(kz) dz, \quad (2.94)$$

$$\gamma^{(s)}(k) = 2 \int_0^\infty \mathbb{E} [\mathbf{v}_\mu(0) \mathbf{v}_\mu(z)] \sin(kz) dz. \quad (2.95)$$

La matrice de corrélation $C(\omega)$ peut être décomposée en une partie symétrique (étant ici les éléments diagonaux de la matrice) et une partie antisymétrique (composée des éléments non diagonaux) notées respectivement $C^S(\omega)$ et $C^A(\omega)$. En appliquant le théorème limite (Equation 2.34), on sait que $\mathbf{P}_\omega^e(0, z)$ converge en distribution vers $\mathbf{P}_\omega(0, z)$ qui est un processus linéaire de diffusion solution de l'équation de Stratonovitch :

$$d\mathbf{P}(0, z) = \sum_{l=1}^n \tilde{\mathbf{h}}_l \mathbf{P}(0, z) \circ dW_l(z) + \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^n C_{p,q}^{(A)} \mathbf{h}_p \mathbf{h}_q \mathbf{P}(0, z) \quad (2.96)$$

où $W_l(z)$ sont des mouvements browniens standards indépendants et $\tilde{\mathbf{h}}_l = \sum_{p=1}^n \tilde{\sigma}_{lp} \mathbf{h}_p$ avec $\tilde{\sigma}$ les racines carrés de $C^{(S)}$ où $C^{(S)}$ correspond à la partie symétrique de la matrice C (Equation 2.93). L'équation 2.96 peut être explicitée :

$$\begin{aligned} d\mathbf{P}_\omega(0, z) &= \frac{\sqrt{\Upsilon(0)}\omega}{2\bar{c}_s} \mathbf{h}_0 \mathbf{P}(0, z) \circ dW_0(z) \\ &+ \frac{\sqrt{\Upsilon\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)}\omega}{2\sqrt{2}\bar{c}_s} (\mathbf{h}_1 \mathbf{P}(0, z) \circ dW_1(z) + \mathbf{h}_2 \mathbf{P}(0, z) \circ d\tilde{W}_1(z)) \\ &+ k\omega\sqrt{\bar{\alpha}}(1 + \bar{\alpha}) (\mathbf{h}_3 \mathbf{P}(0, z) \circ dW_2(z) + \mathbf{h}_4 \mathbf{P}(0, z) \circ d\tilde{W}_2(z)) \\ &+ k\omega\sqrt{\bar{\alpha}}(1 - \bar{\alpha}) (\mathbf{h}_5 \mathbf{P}(0, z) \circ dW_3(z) + \mathbf{h}_6 \mathbf{P}(0, z) \circ d\tilde{W}_3(z)) \\ &- \frac{\omega^2}{8\bar{c}_s} \Upsilon^{(s)}\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right) \mathbf{h}_0 \mathbf{P}(0, z) dz \end{aligned} \quad (2.97)$$

A partir de l'équation 2.97, on peut écrire les équations en fonction des α_s^i , α_p^i , β_s^i et β_p^i avec $i \in \{0; 1\}$.

$$\begin{aligned} d\alpha_s^0 &= i\omega \frac{\sqrt{\Upsilon(0)}}{2\bar{c}_s} \alpha_s^0 \circ dW_0(z) - \frac{\omega}{2\sqrt{2}\bar{c}_s} \sqrt{\Upsilon\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)} \beta_s^0 \circ (dW_1(z) + id\tilde{W}_1(z)) - i \frac{\omega^2}{8\bar{c}_s} \Upsilon^{(s)}\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right) \alpha_s^0 dz \\ d\beta_s^0 &= -i\omega \frac{\sqrt{\Upsilon(0)}}{2\bar{c}_s} \beta_s^0 \circ dW_0(z) - \frac{\omega}{2\sqrt{2}\bar{c}_s} \sqrt{\Upsilon\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)} \alpha_s^0 \circ (dW_1(z) - id\tilde{W}_1(z)) + i \frac{\omega^2}{8\bar{c}_s} \Upsilon^{(s)}\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right) \beta_s^0 dz \\ d\alpha_p^1 &= +k\omega\sqrt{\bar{\alpha}}(1 + \bar{\alpha}) \beta_s^0 \circ (dW_2(z) - id\tilde{W}_2(z)) - k\omega\sqrt{\bar{\alpha}}(1 - \bar{\alpha}) \alpha_s^0 \circ (dW_3(z) + id\tilde{W}_3(z)) \\ d\beta_p^1 &= -k\omega\sqrt{\bar{\alpha}}(1 + \bar{\alpha}) \alpha_s^0 \circ (dW_2(z) + id\tilde{W}_2(z)) + k\omega\sqrt{\bar{\alpha}}(1 - \bar{\alpha}) \beta_s^0 \circ (dW_3(z) - id\tilde{W}_3(z)) \end{aligned} \quad (2.98)$$

A partir du système d'équations 2.98, on confirme que l'on retrouve les mêmes équations pour α_s^0 et β_s^0 que dans le cas de l'incidence normale, ce qui était déjà induit par la forme de \mathbf{P} . A partir de la connaissance de α_s^0 et β_s^0 il nous est possible de calculer α_p^1 et β_p^1 . Les équations pour α_p^1 et β_p^1 ne dépendent que de la partie S de l'onde, cela vient du fait que l'on a qu'une hétérogénéité sur S. Dans le cas général il faudra également déterminer α_p^0 et β_p^0 pour calculer T_{sp}^1 et R_{sp}^1 . Dans le cas présent, on peut simplifier la relation sur le coefficient de transmission en résolvant également le système d'équations associé au propagateur $\mathbf{P}_{2\omega}^\varepsilon(0, z)$. Ce cas est présenté en annexe (A). On peut ainsi montrer que :

$$\begin{aligned} \alpha_s^0 &= \cosh\left(\frac{\theta_\omega(z)}{2}\right) e^{i\Phi_\omega(z)} \\ \beta_s^0 &= \sinh\left(\frac{\theta_\omega(z)}{2}\right) e^{i(\Psi_\omega(z) + \Phi_\omega(z))} \\ d\alpha_p^1 &= +k\omega\sqrt{\bar{\alpha}}(1 + \bar{\alpha}) \beta_s^0 \circ (dW_2(z) - id\tilde{W}_2(z)) - k\omega\sqrt{\bar{\alpha}}(1 - \bar{\alpha}) \alpha_s^0 \circ (dW_3(z) + id\tilde{W}_3(z)) \\ d\beta_p^1 &= -k\omega\sqrt{\bar{\alpha}}(1 + \bar{\alpha}) \alpha_s^0 \circ (dW_2(z) + id\tilde{W}_2(z)) + k\omega\sqrt{\bar{\alpha}}(1 - \bar{\alpha}) \beta_s^0 \circ (dW_3(z) - id\tilde{W}_3(z)) \\ \alpha_p^0 &= 1 \\ \beta_p^0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.99)$$

On peut simplifier les coefficients de transmission/réflexion dans notre cas tels que :

$$\begin{aligned} T_{ss}^0(0, L) &= \frac{1}{\alpha_s^0(0, L)} \\ R_{ss}^0(0, L) &= -\frac{\beta_s^0(0, L)}{\alpha_s^0(0, L)} \\ T_{sp}^1(0, L) &= \alpha_p^1(0, L) - \overline{\beta_p^1(0, L)} R_{ss}^0 \\ R_{sp}^1(0, L) &= -\beta_p^1(0, L) + \overline{\alpha_p^1(0, L)} R_{ss}^0 \end{aligned} \quad (2.100)$$

Les coefficients T_{ss}^0 et R_{ss}^0 sont inchangés par rapport à l'incidence normale. Ainsi pour déterminer complètement les coefficients T_{sp}^1 et R_{sp}^1 il faut traiter les équations sur α_p^1 et β_p^1 en faisant intervenir des quantités d'intérêt nous permettant d'effectuer un changement de variable adéquat pour obtenir des équations sur T_{sp}^1 et R_{sp}^1 et avoir une valeur limite de chacun de ces coefficients. Ainsi on pourra complètement déterminer la solution de notre problème. Cette résolution n'a pas pu être finalisée dans le cadre de cette thèse, ainsi nous allons étudier numériquement quelle partie de l'énergie est impactée par le couplage.

2.5.4 Illustration numérique : onde incidente plane inclinée polarisée SV sur un milieu dont la vitesse des ondes S fluctue de manière aléatoire horizontalement

Description du modèle

On s'intéresse dans cette partie à voir l'influence de l'inclinaison sur le coefficient de transmission à travers une couche aléatoire horizontalement stratifiée. Pour cela, on reprend le modèle numérique précédemment utilisé. On rappelle les paramètres matériaux dans le tableau 2.2. On choisit ici comme onde incidente une onde plane polarisée SV uniquement.

TABLEAU 2.2 – Propriétés mécaniques du milieu

| V_p | V_s | coefficient de Poisson | ρ | σ_K | ℓ_c |
|-----------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|------------|----------|
| 1750m.s ⁻¹ | 1000m.s ⁻¹ | 0.25 | 2800kg.m ⁻³ | 0.3 | 80 m |

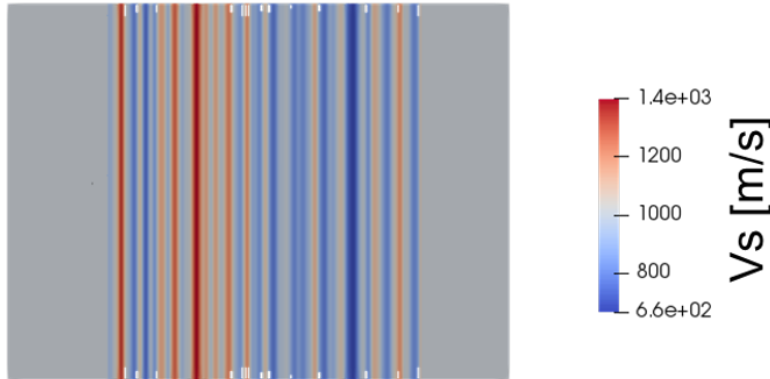


FIGURE 2.20 – Représentation des fluctuations des propriétés mécaniques pour la vitesse des ondes S (à gauche) et la vitesse des ondes P (à droite)

Pour se mettre dans les mêmes conditions que le cas analytique, on impose une fluctuation sur la vitesse des ondes S uniquement au sein du milieu aléatoire (μ fluctue aléatoirement alors que κ est constant). La vitesse des ondes P est constante. La modélisation du champ aléatoire donne une variation de V_s entre 700m.s⁻¹ et 1400m.s⁻¹ avec une valeur moyenne d'environ 1000m.s⁻¹ (Représentation du champ de V_s figure 2.20). On s'intéressera à plusieurs inclinaisons pour comparer les effets entre chaque cas. On choisit ainsi de regarder les inclinaisons $\beta = 0^\circ$, $\beta = 5^\circ$, $\beta = 10^\circ$.

Choix de l'orientation

Étant donné que la source est une onde plane inclinée, et que les équations explicités précédemment nous donnent des résultats sur les différentes polarisations. Il est nécessaire de définir la base sur laquelle on pourra suivre l'onde P et l'onde SV. On impose le paramétrage P-SV défini

figure 2.21 en se basant sur les orientations en milieu homogène.

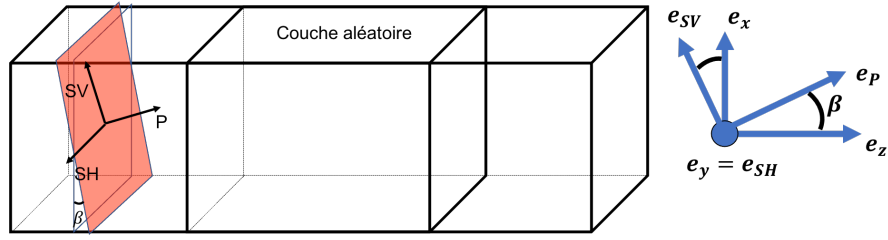


FIGURE 2.21 – Représentation du repère tourné pour le suivi des différentes polarisations

On considère dans notre cas un plan incliné d'angle β autour de l'axe y . On définit ainsi l'axe de vecteur directeur e_{SV} et l'axe de vecteur directeur e_P correspondant respectivement à la polarisation SV et P.

$$\begin{aligned} e_{SV} &= e_x \cdot \cos(\beta) - e_z \cdot \sin(\beta) \\ e_P &= e_x \cdot \sin(\beta) + e_z \cdot \cos(\beta) \end{aligned} \quad (2.101)$$

Ainsi, une fois cette orientation définie, on choisira de conserver celle-ci tout au long de la propagation pour suivre l'onde.

Résultats numériques obtenus

On s'attend, dans notre cas, à avoir une forme pour la transmission en S proche de ce que l'on avait dans le cas de l'incidence normale, superposée à une partie de cette même onde S qui est convertie en une onde P.

D'un point de vue numérique, on a fait le choix de n'injecter qu'une onde polarisée SV au niveau de la source. Cela nous permettra normalement d'identifier plus simplement si il y a une conversion de SV vers P, ce qui est normalement attendu d'après les équations stochastiques.

On souhaite suivre les deux polarisations au cours de la propagation. Initialement on ne devrait avoir qu'une onde polarisée en SV. Puis une onde polarisée P devrait apparaître au fur et à mesure de la propagation à travers le milieu aléatoire. L'onde polarisée P correspond à l'ordre 1 dans les développements effectués. Tout d'abord on regarde à différents instants de la propagation l'onde polarisée SV (Figure 2.22).

On a une propagation similaire à la partie SH précédemment présentée. On peut voir que l'on a une onde de retour (Voir figure 2.24), dont l'inclinaison est $-\beta$. On a bien de manière qualitative une action de la présence de la couche aléatoire sur la propagation de l'onde. Il n'est par contre pas possible à ce stade d'identifier si l'atténuation due au milieu aléatoire correspond bien à l'atténuation d'ordre 0 attendue.

On s'intéresse ensuite à la partie polarisée P. Initialement on n'a aucune énergie P qui est injectée dans le modèle. Néanmoins on peut tout de même identifier l'onde sphérique parasite à chaque extrémité du plan de source. De plus, à partir du moment où la partie SV traverse la couche aléatoire, on voit une onde apparaître sur la polarité en P. On a ici une conversion du SV vers P due aux hétérogénéités. Ceci était prévu dans les équations étant donné que l'ordre 1 en P est lié à l'ordre 0 en SV. Les amplitudes en P restent plus faibles que les amplitudes pour S (échelles de couleur différentes sur les 2 figures).

Si on s'intéresse aux angles, on a $\beta = 10^\circ$ comme angle incident pour une onde polarisée SV associée à $\bar{c}_s = 1000\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, l'angle associé à la génération de l'onde polarisée P est égale à $\theta = 17^\circ$ après mesure. On peut ainsi retrouver la loi de Snell-Descartes tel que $\frac{\sin\beta}{\bar{c}_s} = \frac{\sin\theta}{\bar{c}_p}$. Avec

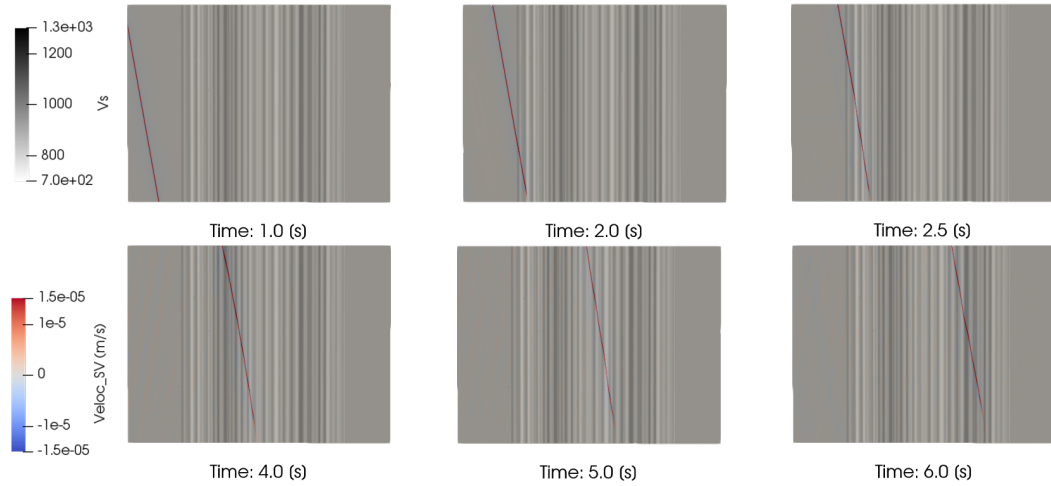


FIGURE 2.22 – Représentation à différents instants de la propagation d'une onde polarisée SV pour $\beta = 10^\circ$

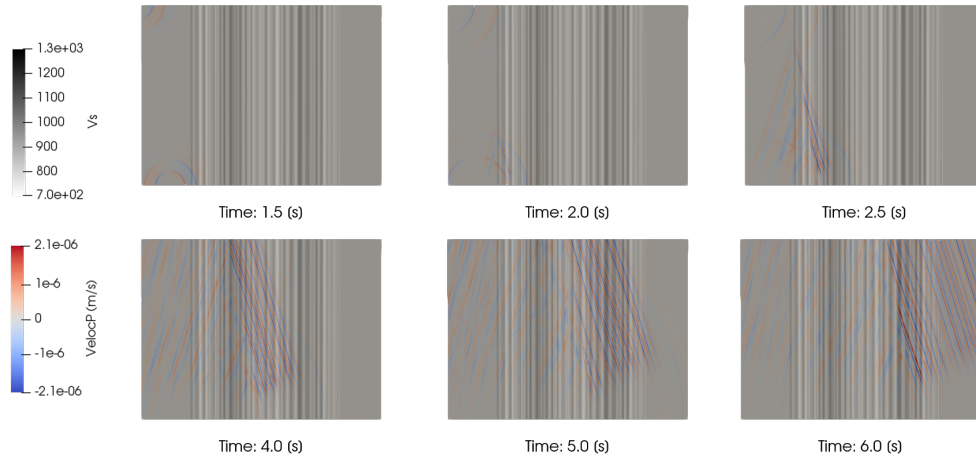


FIGURE 2.23 – Représentation à différents instants de la propagation d'une onde polarisée P pour $\beta = 10^\circ$

$\bar{c}_p = 1750\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ on retrouve bien un angle associé à la polarisation P de l'ordre de grandeur $\sim 17^\circ$.

Tout d'abord, la partie basse fréquence ne semble pas très influencée par l'inclinaison de la source (Figure 2.25). On retrouve sensiblement le résultat attendu par rapport au résultat théorique pour une inclinaison nulle. Cela correspond au fait que l'on retrouve dans le cas d'une inclinaison faible, le même comportement à l'ordre 0. Par contre, on peut voir que la partie plus haute fréquence semble également atténuée quand l'onde incidente est inclinée. On regarde ensuite en sortie de la couche aléatoire la composante normalement polarisée P (Figure 2.26). L'énergie apparente en P est plus importante dans le cas où on est le plus incliné ($\beta = 10^\circ$), la conversion entre énergie SV et P est plus grande. De plus la partie la plus impactée correspond bien à la partie haute fréquence du signal injecté.

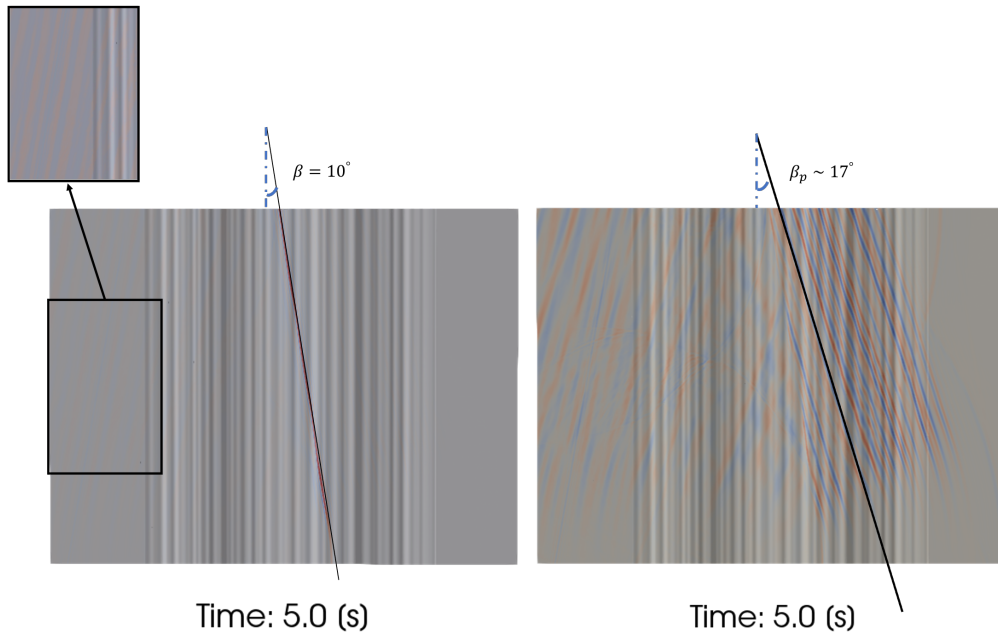


FIGURE 2.24 – Représentation à l’instant $t = 5\text{sec}$ du snapshot pour la composante S à gauche et pour la composante P à droite. On retrouve $\beta = 10^\circ$ pour S et $\beta_p \sim 17^\circ$ pour P. De plus on représente dans un encadré l’onde de retour, avec saturation des couleurs pour mieux visualiser la présence de celle-ci

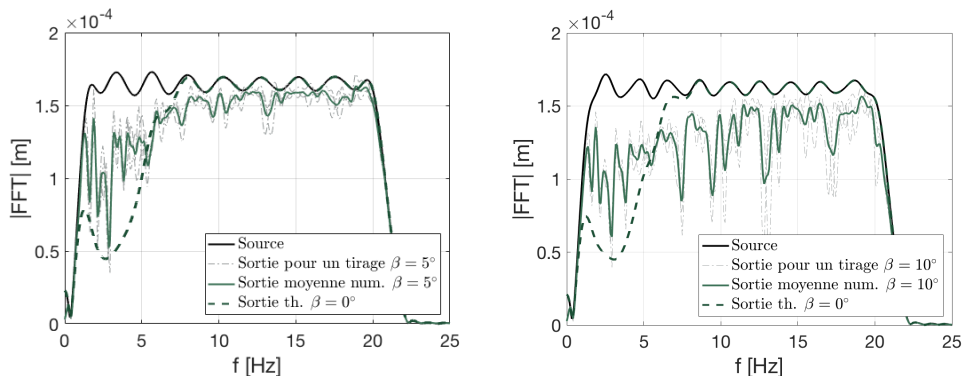


FIGURE 2.25 – Représentation des sorties pour différentes inclinaisons. On représente en pointillé vert la valeur théorique de la sortie polarisée SV dans le cas d’une incidence normale, en trait plein vers la sortie polarisée SV pour l’inclinaison donnée, à gauche avec $\beta = 5^\circ$ et à droite avec $\beta = 10^\circ$

2.5.5 Conclusion

Dans cette partie, en partant des équations de l’élastodynamique et de résultats déjà connus dans le cadre de l’acoustique ([Fouque et al., 2007](#)), on a démontré que l’on retrouve un comportement similaire dans le cas des ondes élastiques et notamment des ondes sismiques. Un des résultats importants est que l’on montre qu’il est possible d’avoir une localisation d’une partie fréquentielle du signal sismique, à partir de fluctuations faibles des propriétés mécaniques du milieu, et plus particulièrement des fluctuations de l’ordre de ce qu’il est possible de trouver au sein de la croûte terrestre.

On a montré, dans le cas d’une onde élastique, qu’une partie fréquentielle du signal peut être atténuée suivant le milieu considéré, et que la longueur de corrélation impacte la partie atténuée du signal. Si la longueur de corrélation est plus faible, alors, pour une même longueur de couche

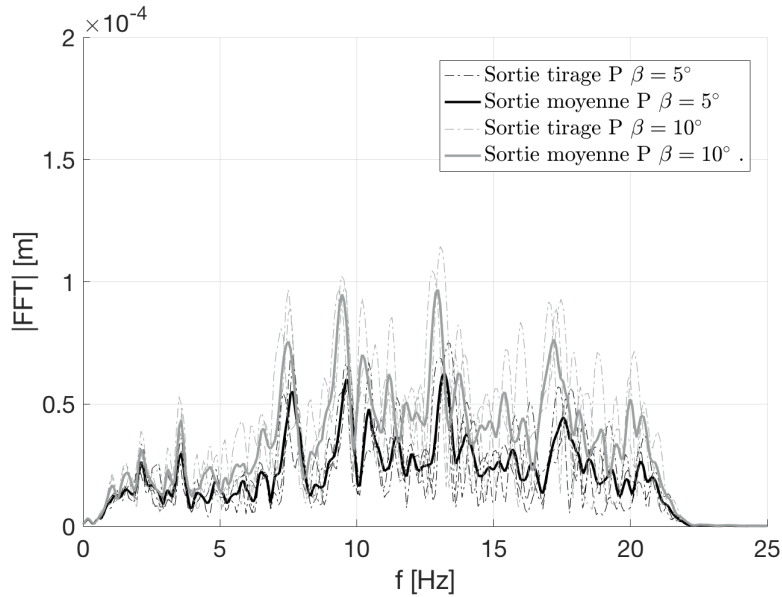


FIGURE 2.26 – Représentation de l'énergie polarisée P en sortie de la couche aléatoire en pointillé gris est représenté la valeur pour différents tirages dans le cas où $\beta = 5^\circ$ et en pointillé noir est représenté la valeur pour différents tirages dans le cas où $\beta = 10^\circ$. Les courbes en trait plein correspondent aux moyennes respectives de la réponse pour une inclinaison donnée

hétérogène, la partie atténuée du signal sera décalée vers des plus hautes fréquences que pour une longueur de corrélation plus grande. Ces résultats ont également été mis en avant à partir des simulations numériques avec une onde élastique en incidence normale. A la différence de l'acoustique, on présente ici une atténuation suivant la polarisation de l'onde élastique (P-SH-SV) où dans le cas de l'incidence normale, le comportement de l'onde SH et SV sera identique et découplé de l'atténuation de l'onde P.

De plus, pour le cas d'une onde incidente inclinée, on découple la partie SH de la partie P-SV. On montre que l'atténuation de l'onde SH correspond au cas de l'incidence normale en ajoutant un coefficient correcteur à l'ordre 2 en k .

On s'intéresse ensuite au couplage P-SV, en se limitant à l'ordre 1 en k avec une hétérogénéité sur S. On montre de manière qualitative à partir du système d'équations stochastiques obtenu qu'une partie de l'énergie en SV va se convertir en une énergie sur P. Ce résultats est par la suite quantifié à partir de simulations numériques. En injectant une source polarisée uniquement SV, on voit que l'on a une partie de l'énergie qui est atténuée par la couche hétérogène qui correspond au cas de l'incidence normale, et plus précisément aux termes d'ordre 0 prédit par l'équation. Et une partie de l'énergie va quant à elle se polariser en P au cours de la propagation. La partie de l'énergie passant d'une polarisation SH en une polarisation P est plus importante pour la partie haute fréquence du signal.

Ces résultats préliminaires sont importants car ils permettent de mettre en évidence l'influence d'un milieu hétérogène sur une onde traversant celui-ci. Dans le cas de la géophysique, où le milieu de propagation des ondes sismiques est un milieu complexe, il est important de comprendre ces phénomènes d'atténuations fréquentielles dues à la présence des hétérogénéités.

Chapitre 3

Influence des hétérogénéités de la croûte terrestre sur l'onde sismique captée en surface

Il a été mis en évidence que le milieu de propagation entre la source et une station en surface est un milieu hétérogène. Ces dernières décennies, l'hétérogénéité 3D de la croûte terrestre a été caractérisée à partir de méthodes de tomographie sismique. De plus, la présence de cette hétérogénéité a notamment été identifiée à partir des trains d'ondes suivant l'arrivée de l'onde principale P et de l'onde principale S. Ces trains d'ondes sont communément appelés coda sismique [Aki, 1969]. Cette coda a été identifiée comme la partie de la réponse sismique qui est diffractée par le milieu hétérogène. Elle correspond à la partie non cohérente du signal sismique dont l'enveloppe décroît au cours du temps [Aki & Chouet, 1975; Sato, 1977].

Grâce à ces nouvelles techniques d'imagerie il est possible de connaître de manière fine les fluctuations des vitesses des ondes P et des ondes S engendrées par la présence des hétérogénéités de la lithosphère [Koulakov et al., 2007; Wang et al., 2009]. Ces hétérogénéités sont caractérisées par des fluctuations de l'ordre de 5 à 25% des vitesses des ondes pour des distances de l'ordre de 100 m à 100 km. L'analyse des signaux ainsi diffractés par le milieu permet de quantifier certaines atténuations de la partie du signal haute fréquence [Shapiro & Hubral, 1999; Sato et al., 2011].

De plus, le développement des simulations numériques dans le cadre de la géophysique permet un apport conséquent de données synthétiques [Graves, 1996; Faccioli et al., 1997; Komatitsch & Vilotte, 1998; Chaljub et al., 2015]. L'utilisation de l'outil numérique est devenue un atout pour augmenter les connaissances mais également pouvoir prédire les mouvements de sols suivant le scénario sismique modélisé. Par exemple, Gatti [2017] a mis en avant l'utilisation de l'outil numérique pour améliorer la prédiction de la réponse des structures dans le cas d'une centrale nucléaire au Japon. Touhami [2020] a mis en place un modèle numérique qui a été calibré à partir de données d'enregistrements, permettant ainsi d'avoir un modèle fiable et précis d'un bassin sédimentaire.

Pour modéliser numériquement ces fluctuations, on introduit un modèle aléatoire de variation des propriétés mécaniques. A partir des vitesses moyennes des ondes représentant la stratification de la lithosphère, on construit le modèle aléatoire des propriétés du milieu. Pour cela, on ajoute des fluctuations autour de ces valeurs moyennes. Pour générer le champ aléatoire, on définit tout d'abord une distribution marginale d'ordre 1 devant posséder une borne inférieure. Dans notre cas, on choisit une distribution en log-normal associée aux vitesses V_s et V_p . On choisit ensuite un modèle de corrélation spatiale. Il est possible de discuter plusieurs types de modèles de corrélation. Un des premiers modèles utilisés en géophysique est le modèle gaussien [Capon, 1974]. Néanmoins, considérant la nature fractale des hétérogénéités constituant la Lithosphère [Wu & Aki, 1985b], le modèle le plus communément utilisé correspond à un modèle de Von Kármán [Von Karman, 1948]. Il fait parti des modèles majoritairement utilisés dans le cadre des simulations numériques de propagation des ondes sismiques en milieu aléatoire [Holliger, 1997; Dolan

et al., 1998; Imperatori & Mai, 2013]. Ce modèle permet également d'englober le cas du modèle gaussien. Par ailleurs, Sato [2019] a caractérisé, suivant les roches considérées, différents choix de paramètres pour modéliser les hétérogénéités à partir de ce modèle de corrélation spatiale.

Dans ce travail de recherche, on se basera essentiellement sur l'apport des simulations numériques pour retrouver certains des effets dus à la présence des hétérogénéités sur le champs d'onde en surface tels que la génération de coda sismique et l'atténuation de certaines fréquences. En choisissant de modéliser le milieu de propagation par un milieu linéaire élastique aléatoire, on va essayer de quantifier l'impact de la présence de ce milieu sur l'onde sismique, en plus de retrouver les effets précédemment énoncés. On va également jouer sur différents paramètres du milieu hétérogène pour voir quelles en sont les conséquences. Pour cela, on se basera à la fois sur différents relevés en surface (réseau dense de capteurs) mais également sur différentes occurrences sismiques (c'est à dire, plusieurs séismes générés) pour avoir une base de données importante. On comparera ensuite les réponses entre différents modèles hétérogènes sur les des grandeurs dimensionnantes suivantes :

- L'amplitude du front d'onde (PGA - Peak Ground Acceleration [Aghabbarati & Tehranizadeh, 2009])
- La répartition de l'énergie due à la présence des hétérogénéités (Intensité d'Arias [Arias, 1970])
- La création de coda et quantification des fréquences concernées (Comparaison des transformées en ondelettes [Kristeková et al., 2006, 2009])

De plus, comme quantificateur de l'atténuation haute fréquence, on va s'intéresser à un paramètre empirique normalement utilisé sur des données réelles. Dans notre cas, on va reproduire la méthodologie de calcul de celui-ci sur les données synthétiques obtenues. Le choix a été fait d'appliquer la méthode de calcul de l'atténuation haute fréquence modélisé par le paramètre κ [Anderson & Hough, 1984]. Ce modèle sera exposé à la suite, et l'introduction de celui-ci permettra de discuter de l'impact des hétérogénéités sur l'atténuation haute fréquence modélisé par ce paramètre empirique. L'objectif étant de voir si l'on peut reproduire les résultats sur κ dans le contexte de ses simulations, pour mettre en évidence les implications du milieu aléatoire dans cette atténuation en se basant sur l'application de la méthodologie [Ktenidou et al., 2013, 2014b], et de relier cette atténuation à ce qui a été vu dans le chapitre précédent.

Code de calcul et cluster utilisé

Les simulations numériques présentées dans ce chapitre ont été effectuées à l'aide du code de calcul SEM3D^a, un code numérique basé sur la méthode des éléments spectraux développé conjointement par le CEA, l'IPGP et CentraleSupélec dans le contexte du projet SINAPS@. Les simulations illustrées par la suite ont été effectuées sur le centre de calcul Fusion, hébergé par le Mésocentre Moulon^b.

^a. SEM3D Ver 2017.04. Registered at French Agency for Protection of Programs (Dépôt APP) under IDDN.FR.001.400009.000.S.P.2018.000.31235 (Inter Deposit Digital Number) by owners : CEA - Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives; IPGP - Institut de Physique du Globe de Paris; Centrale-Supélec; CNRS - Centre National de la Recherche Scientifique.

^b. <http://mesocentre.centralesupelec.fr/>

Modèle d'atténuation empirique

Le déplacement enregistré à la surface, consécutif à un événement sismique peut être écrit dans le domaine de Fourier comme le produit d'un terme source (S), du site considéré (G), de l'instrumentation (I) et du chemin parcouru (P) tel que :

$$Y(M_0, R, f) = S(M_0, f) \cdot P(R, f) \cdot G(f) \cdot I(f) \quad (3.1)$$

où M_0 correspond au moment sismique, R à la distance à la source et f à la fréquence [Boore, 2003]. Dans notre cas, on ne s'intéresse qu'au terme $P(R, f)$ qui caractérise l'influence du chemin de parcours. On fixe ainsi à 1 les termes correspondant aux effets de site ($G(f)$) et à l'instrumentation ($I(f)$). Pour le terme source ($S(M_0, f)$), Brune [1970] a proposé un modèle de source dont le spectre en accélération est plat à haute fréquence. Ce modèle est très largement utilisé et est celui appliqué à la source du modèle numérique mis en place. En se basant sur ce modèle de source, et à partir de l'équation 3.1, l'onde sismique est progressivement atténuée au cours de sa propagation suite à la présence de différents mécanismes (modélisé par $P(R, f)$ dans Eq. 3.1) [Papageorgiou & Aki, 1983]. Deux sources principales d'atténuations ont été identifiées : (a) l'atténuation anélastique correspondant à la perte d'énergie suite aux effets de frictions durant la propagation et (b) l'atténuation élastique correspondant aux effets de multiples réflexions et diffractions [Aki & Richards, 1980]. La décroissance de l'onde S [Boore, 2003] à la distance R de la source et à une fréquence f peut s'exprimer, pour une vitesse V_s moyenne comme :

$$P(f, R) = Z(R) \exp\left(-\pi f \frac{R}{Q_{ef} V_s}\right) \quad (3.2)$$

avec

$$\frac{1}{Q_{ef}} = \frac{1}{Q_{in}} + \frac{1}{Q_{sc}} \quad (3.3)$$

où $1/Q_{ef}$ correspond à l'atténuation du milieu effectif, $1/Q_{in}$ et $1/Q_{sc}$ sont respectivement l'atténuation inélastique et l'atténuation élastique du milieu. $Z(R)$ inclut les atténuations géométriques durant la propagation de l'onde. Le terme d'atténuation élastique $1/Q_{sc}$ a été défini comme étant dépendant de la fréquence [Sato et al., 2011].

En comparaison, le paramètre kappa (κ) a été introduit par Anderson & Hough [1984] comme étant proportionnel à l'enveloppe de la partie S de l'onde dans le domaine de Fourier sur une échelle log-linéaire (Fig. 3.1). Ce paramètre est mesuré entre 2 bornes, une fréquence basse (f_E) devant être plus grande que la fréquence coin de la source et une fréquence haute (f_{max}) contrôlée par l'apparition du bruit. L'équation 3.4 résume cela.

$$A(f) = A_0 \exp(-\pi f \kappa), \quad f_E \leq f \leq f_{max} \quad (3.4)$$

La figure 3.1 montre un exemple de calcul du paramètre kappa à partir d'un signal donné extrait de Douglas et al. [2010]. Kappa est supposé être un paramètre indépendant de la fréquence [Anderson & Hough, 1984].

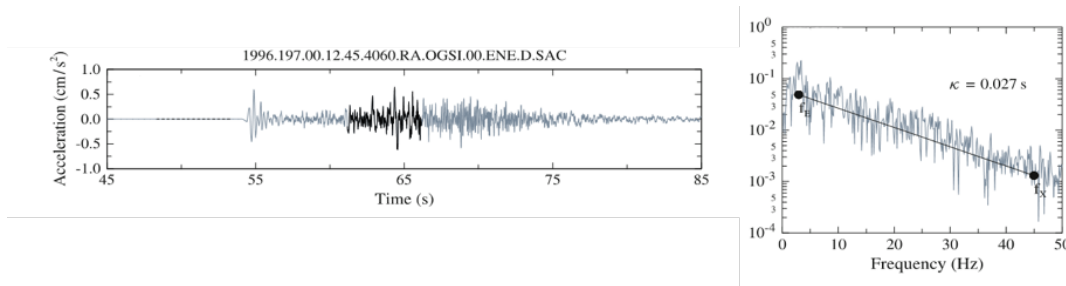


FIGURE 3.1 – A gauche, enregistrement complet (en gris) et sélection de la fenêtre S (en noir). A droite, mesure du paramètre Kappa pour la fenêtre sélectionnée. Figure extraite de Douglas et al. [2010]

Il est considéré que le paramètre κ peut être défini comme étant la somme de 3 termes (Equation 3.5) [Ktenidou et al., 2014a].

$$\kappa = \kappa_0 + \bar{\kappa}(R) + \kappa_s \quad (3.5)$$

où κ_0 est une constante et correspond à la composante du site, κ_s correspond à la composante de la source et $\bar{\kappa}(R)$ correspond au chemin de propagation, où cette composante est dépendante de la

distance épacentrale (R). En se basant sur des observations, $\bar{\kappa}(R)$ peut être approximé comme étant une fonction linéaire de la distance épacentrale c'est à dire que : $\bar{\kappa}(R) = m_{\kappa}R$ avec m_{κ} le coefficient directeur. Néanmoins la seule contrainte imposée sur cette fonction est qu'elle soit suffisamment régulière [Anderson, 1991].

3.1 Mise en place du modèle numérique

3.1.1 Géométrie considérée et définition des propriétés mécaniques du modèle

La géométrie définie, pour pouvoir modéliser et comprendre les effets des hétérogénéités sur le champ d'onde sismique, doit répondre à plusieurs contraintes, qui sont à la fois des contraintes physiques mais également des contraintes numériques. Tout d'abord, on souhaite avoir un domaine assez grand pour pouvoir étudier la propagation d'onde sur des distances importantes. On se place ici dans un régime d'hétérogénéités dit faiblement hétérogène (Voir partie 1.3.1). Ce régime correspond à une longueur du milieu de propagation grande devant la longueur de corrélation et devant la longueur d'onde. Et une longueur de corrélation des hétérogénéités faibles devant la longueur d'onde [Komatitsch & Vilotte, 1998; Komatitsch & Tromp, 1999]. On cherche à étudier l'influence des hétérogénéités sur le contenu fréquentiel des ondes, on choisit un maillage permettant de propager une plage de fréquence de [0.5 – 20 Hz] avec une vitesse $V_s = 3000$ m/s. Pour pouvoir dimensionner notre maillage, on souhaite avoir au moins une maille par longueur d'onde. C'est à dire que l'on doit avoir $\frac{3000}{20} \geq h$ avec h la taille de maille. Il faut donc $h \leq 150$ m. Etant donné que l'on souhaite avoir des résultats fiables, il serait mieux d'avoir plus d'éléments par longueur d'onde, et donc une meilleure discrétisation. D'un autre côté pour éviter d'avoir un coût de calcul trop élevé il faut avoir un nombre d'éléments raisonnable. Pour cela on choisit une taille d'éléments de 85 m \times 85 m \times 85 m. Le maillage est un maillage structuré, le pas de temps de résolution sera contraint par la condition de stabilité (code explicite) en fonction de la taille de maille. Ce maillage est également utilisé pour le cas hétérogène car même si la vitesse minimale est inférieure au cas homogène ($V_{s,min-het} \sim 2600$ m/s), celui-ci permet tout de même une bonne discrétisation de la plus petite longueur d'onde. On choisira des éléments avec 5 \times 5 \times 5 GLLs par éléments (Points de Gauss Lobatto-Legendre). Ainsi, on aura presque 10 GLLs par longueur d'onde. Ce maillage permet, en incluant une marge au niveau des hautes fréquences, de bien propager une onde sur la plage de fréquence [0.5 – 20 Hz]. Pour propager les plus grandes longueurs d'onde, il faut un domaine suffisamment grand, c'est pour cela que l'on choisit un modèle correspondant à un domaine rectangulaire de 40 km \times 10 km \times 10 km. Le coût de calcul est lié en partie au rapport entre la taille de maille et la taille du domaine global. A la troncature du domaine on utilise des PML (Perfectly Matched Layers) pour modéliser les conditions de radiation pour tenir compte du caractère infini du demi-espace [Komatitsch & Tromp, 2003]. Ces PML sont présentes au niveau des faces latérales du domaine physique et également au niveau de la face inférieure. On impose sur la face supérieure une condition de bord libre (Voir Figure 3.2).

On considérera une couche supérieure qui représentera un milieu hétérogène aléatoire dont les propriétés seront détaillées par la suite (Propriétés mécaniques indiquées dans le tableau 3.1). La couche inférieure sera représentative d'une roche cristalline homogène. Les deux couches sont des milieux linéaires élastiques et sans amortissement.

L'intérêt d'avoir une couche homogène est, en plus de considérer un milieu stratifié, de permettre de contrôler aisément les paramètres de la source qui sera placée dans cette couche. La génération de la source faite par le code SEM3D recalcule le moment sismique, ainsi il prend en compte les propriétés aux nœuds autour de la position du point source [Aki & Richards, 1980; Faccioli et al., 1997]. Le positionnement de la source dans le milieu homogène permet de conserver celle-ci constante quelque soit sa position au sein du milieu. Et également de conserver son amplitude constante quelque soit la simulation effectuée, ce qui sera essentiel pour l'étude inter-événements sismiques.

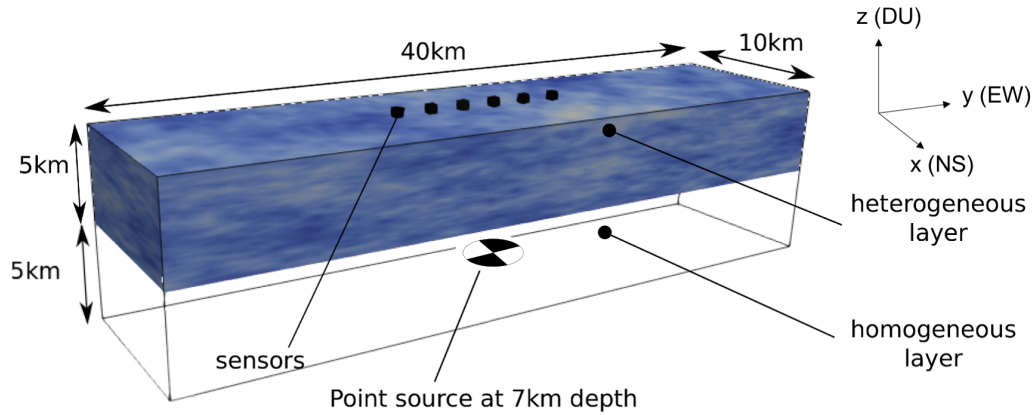


FIGURE 3.2 – Géométrie du scénario sismique

TABLEAU 3.1 – Propriété mécanique des couches constituant le milieu

| Couche | V_p [m.s ⁻¹] | V_s [m.s ⁻¹] | ρ [kg.m ⁻³] | Coefficient de Poisson ν |
|--------------------|----------------------------|----------------------------|------------------------------|------------------------------|
| Couche hétérogène* | 5200 | 3000 | 2700 | 0.25 |
| Couche homogène | 7800 | 4500 | 2700 | 0.25 |

* Valeur moyenne des propriétés de la couche hétérogène.

La source utilisée est une source ponctuelle modélisant la dislocation au niveau de la faille lors d'un événement sismique. Cette source est générée par le code SEM3D à partir d'un double couple de forces équivalent au saut de déplacement au point de dislocation :

$$u(t) = u_0 \left[1 - \left(1 + \frac{t}{2\tau_R} \right) \exp\left(-\frac{t}{2\tau_R}\right) \right] H(t - t_s) \quad (3.6)$$

On rappelle l'équation du déplacement correspondant au modèle de source de Brune [Brune, 1970] dans le cas d'une source ponctuelle. Où t_s correspond au temps de décalage (temps de retard) pour avoir un déplacement nul à $t = 0$ s. Ce modèle a une décroissance en ω^2 au niveau de la transformée de Fourier de la vitesse à partir de la fréquence coin de la source $f_{corner} \sim 2$ Hz. Les caractéristiques de la source sont rappelées dans le tableau 3.2.

TABLEAU 3.2 – Propriétés de la source

| f_c | τ_R | M_w | M_0 |
|-------|----------|------------|-----------|
| 2 Hz | 0.125 s | ~ 5.5 | 10^{15} |

Pour cette source, on représente la vitesse pour les 3 composantes (dont la position est représenté dans la figure 3.2), ainsi que la transformée de Fourier de la vitesse pour la composante E-W. Le contenu fréquentiel est identique pour la composante verticale (DU). On retrouve la fréquence coin (f_c) aux alentours de 1 – 2 Hz et également la pente en ω^2 à partir de cette fréquence.

3.1.2 Génération du milieu aléatoire

La couche supérieure du modèle figure 3.2 est soit une couche homogène dont les propriétés mécaniques correspondent à celles présentées dans la table 3.1 soit un milieu aléatoire modélisant les hétérogénéités de la croûte. On choisit de modéliser 2 milieux aléatoires différents. Entre les 2

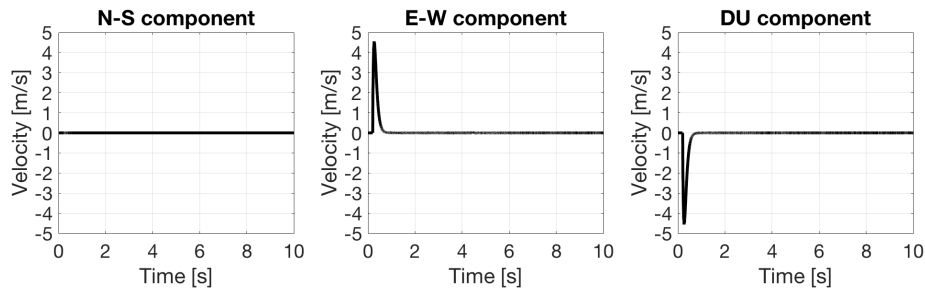


FIGURE 3.3 – Vitesse à la source suivant chaque composante pour le modèle de Brune utilisé

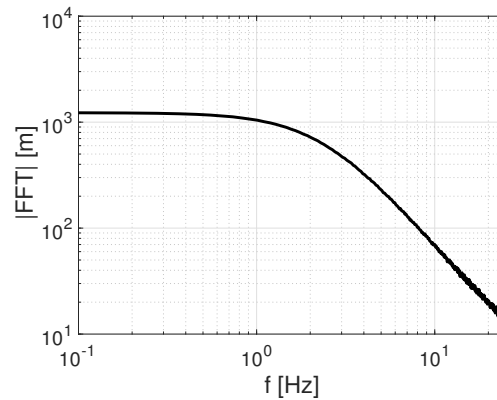


FIGURE 3.4 – Spectre de la vitesse à la source en échelle log-log : modèle de Brune

milieu, on change les valeurs des longueurs de corrélations choisies pour chaque direction. Cela permet de voir l'impact d'un changement d'une des caractéristiques du milieu aléatoire sur la propagation de l'onde. Ces deux milieux sont respectivement appelés champs aléatoire 1 et 2 (voir Figures 3.5 et 3.6).



FIGURE 3.5 – Représentation du champ aléatoire 1

Le générateur utilisé dans ces travaux permet de générer les propriétés matériaux fluctuantes sur une grille régulière à partir des caractéristiques aléatoires (longueurs de corrélation, écart type, etc.) [de Carvalho Paludo et al., 2019]. Ces valeurs sont ensuite interpolées sur les points GLL constituant le maillage du modèle 3D. L'interpolation utilisée est une interpolation linéaire 3D. La méthode de génération de champs aléatoire permet de plus une bonne scalabilité pour la parallélisation sur un cluster. Pour correspondre à un champ fluctuant proche de ce qui est caractérisé, la densité spectrale de puissance utilisée correspond à un modèle de Von Kàrman dans un cas

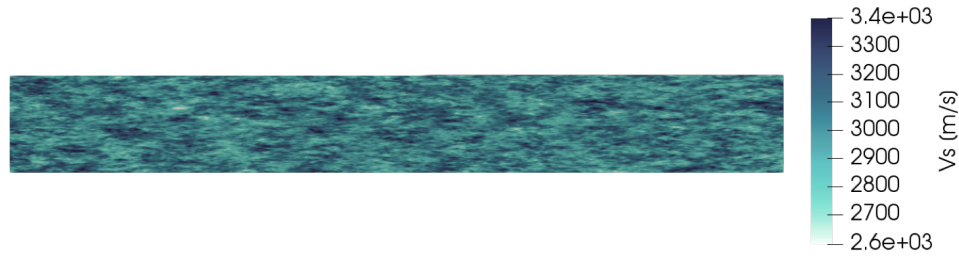


FIGURE 3.6 – Représentation du champ aléatoire 2

anisotrope :

$$\Upsilon_{VK}(\omega) = \frac{2^3 \pi^{3/2} \Gamma(H + 3/2) \sigma_K^2 \ell_{c,x} \ell_{c,y} \ell_{c,z}}{\Gamma(H) \left(1 + \frac{\ell_{c,x}^2 \omega^2}{c_s^2} + \frac{\ell_{c,y}^2 \omega^2}{c_s^2} + \frac{\ell_{c,z}^2 \omega^2}{c_s^2} \right)^{H+3/2}} \quad (3.7)$$

avec H l'exposant de Hurst, $\ell_{c,x}$ et $\ell_{c,y}$ les longueurs de corrélation horizontales, $\ell_{c,z}$ la longueur de corrélation verticale et c_s la vitesse des ondes S. Et σ_K le coefficient de variation noté par la suite CV (exprimé en pourcentage). Le tableau 3.3 résume les valeurs choisies pour ces différents paramètres. Les valeurs indiquées correspondent aux valeurs injectées dans le générateur aléatoire. Les distributions choisies sont des distributions log-normal directement appliquées sur la vitesse des ondes S où le coefficient de poisson ν ainsi que la densité ρ seront supposés constants (Tableau 3.1). L'exposant de Hurst est choisi pour rester dans l'intervalle de valeurs identifié pour différents sols, c'est à dire entre 0 et 0.5 [Sato, 2019].

La figure 3.7 représente le champ aléatoire étudié pour le premier milieu hétérogène. On re-

TABLEAU 3.3 – Propriétés des fluctuations considérées

| Milieu | $\ell_{c,x}$ | $\ell_{c,y}$ | $\ell_{c,z}$ | CV | H |
|---------------------|--------------|--------------|--------------|----|-----|
| Milieu hétérogène 1 | 2500 m | 2500 m | 500 m | 5% | 0.1 |
| Milieu hétérogène 2 | 500 m | 500 m | 100 m | 5% | 0.1 |

présente 2 plans de coupes, le premier correspond à une portion du plan en surface (x, y) avec $\ell_{c,xy} = 2500$ m et le second une coupe du plan vertical (y, z), avec $\ell_{c,z} = 500$ m.

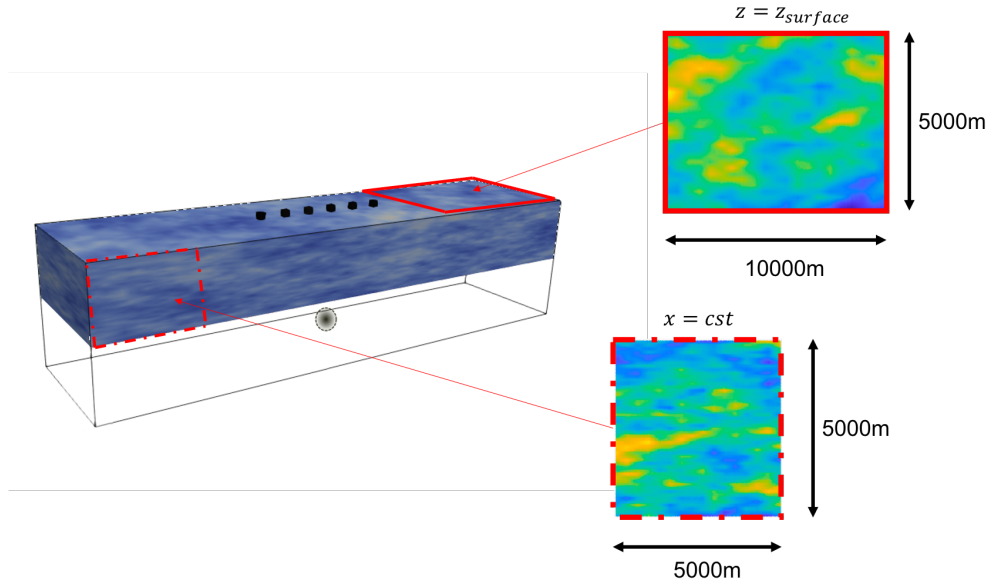


FIGURE 3.7 – Représentation des différentes coupes du champ aléatoire orthotrope généré dans le cas 1

3.2 Vérification des résultats numériques dans le cas homogène

Dans cette partie, les simulations 3D sont faites en remplaçant le milieu hétérogène par un milieu homogène dont les propriétés mécaniques correspondent aux propriétés moyennes spécifiées dans le tableau 3.1 pour vérifier que le code de calcul SEM permet de bien modéliser la propagation d'une onde sismique en milieu stratifié. Les signaux seront filtrés, le choix du filtre sera un filtre butterworth à l'ordre 4. Le filtrage des signaux est nécessaire car la source utilisée a une large bande de fréquences, on souhaite filtrer le signal sur les fréquences que le maillage permet de bien propager. Ce filtre correspond à un filtre passe-bas (Equation 3.8) à gain G_0 égal à 1 et dont la fréquence de coupure f_c vaut 20 Hz.

$$G^2(\omega) = |H(j\omega)|^2 = \frac{G_0^2}{1 + \left(\frac{j\omega}{j\omega_c}\right)^{2n}} \quad (3.8)$$

La figure 3.9 présente le signal obtenu par simulation numérique avec un milieu homogène par couche avec l'application de différents ordres pour le filtre de butterworth. L'ordre 4 permet une atténuation plus rapide au delà de la fréquence de coupure en comparaison aux autres ordres. De plus, en terme de contenu fréquentiel, on a bien conservation de l'amplitude pour le filtre à l'ordre 4 (Figure 3.10). La bande de fréquence proche de la fréquence de coupure (de 18 à 20Hz) sera légèrement atténuée par le filtrage.

Pour différents capteurs, les réponses en vitesse ont été tracées suivant les 3 directions dans le domaine temporel ainsi que dans le domaine fréquentiel. Les signaux provenant de la simulation numérique ainsi que des résultats semi-analytiques sont filtrés avec le filtre de Butterworth précédemment illustré. Pour pouvoir comparer la qualité de réponse entre les 2 signaux, il est possible d'appliquer un critère des moindres carrés pour quantifier une erreur entre le résultat semi analytique et le signal synthétique. Néanmoins, il sera préféré d'appliquer le critère temps-fréquence développé par [Kristeková et al. \[2006, 2009\]](#). Ce critère repose sur une comparaison des enveloppes de 2 signaux dont un étant le signal de référence. On note $s_{ref}(t)$ le signal de référence en temps, correspondant à la réponse semi-analytique; et $s(t)$ le signal correspondant au signal synthétique. On note également $W(t, f)$ la transformée en ondelette de $s(t)$ et $W_{ref}(t, f)$

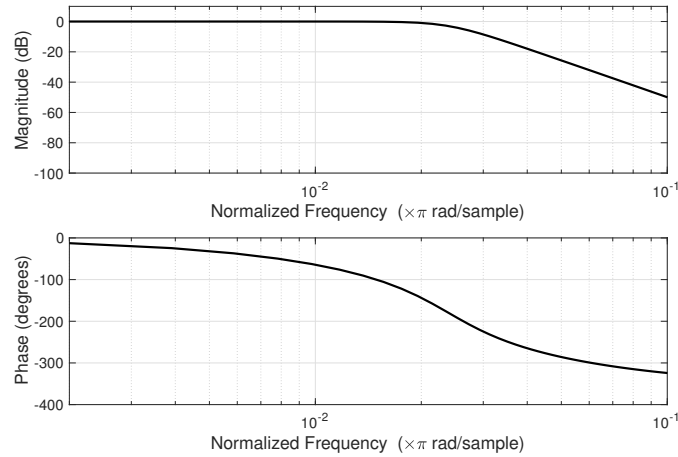


FIGURE 3.8 – Diagramme de bode du filtre de Butterworth pour $n = 4$

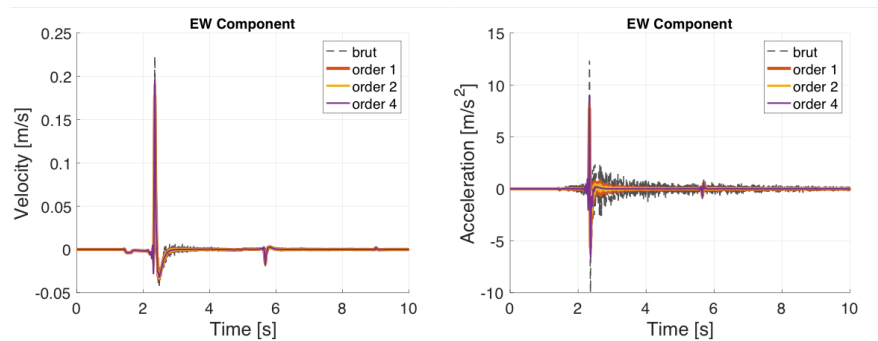


FIGURE 3.9 – Comparaison du signal numérique filtré en fonction de différents ordres de filtrage. A gauche est représentée la composante Est-Ouest de la vitesse pour un capteur à la surface libre, à droite est représentée l'accélération du signal pour ce même capteur

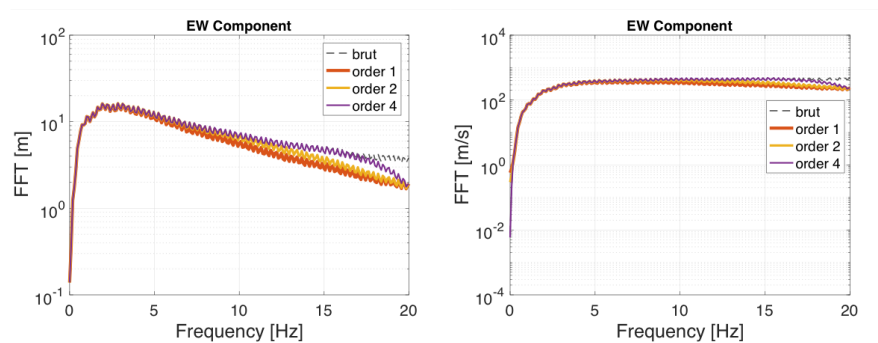


FIGURE 3.10 – Comparaison du signal numérique filtré en fonction de différents ordres de filtrage. A gauche est représentée la valeur absolue de la transformée de Fourier de la vitesse pour un capteur à la surface libre, à droite celle de l'accélération du signal pour ce même capteur

la transformée de $s_{ref}(t)$. On peut ainsi écrire le critère de comparaison de l'enveloppe en temps fréquence TFEM (*Time Frequency Envelope Misfit*) comme étant la différence des modules des transformées s'écrivant :

$$TFEM(t, f) = \frac{|W(t, f)| - |W_{ref}(t, f)|}{\max_{t, f} (|W_{ref}(t, f)|)}$$

Il existe un critère similaire sur la phase (TFPM : *Time Frequency Phase Misfit*). A partir de ces deux critères il est possible de donner un score pour caractériser la validité du résultat par rapport au signal de référence pour quantifier les écarts et déterminer si les résultats issus des simulations numériques sont valides [Kristeková et al., 2006, 2009] :

$$\text{TFEG}(t, f) = 10 \exp^{-|\text{TFEM}(t, f)|} \quad (3.9)$$

On compare le signal issu des simulations numériques 3D à un signal issu de code semi-analytique permettant de calculer la solution en différents points pour un demi espace stratifié [Hisada, 1994, 1995] qui sera considérée comme la référence. On utilise un amortissement qui tend vers 0 dans le code Hisada, pour correspondre au cas de SEM où aucun amortissement n'est injecté. Le tableau 3.4 donne les scores obtenus entre signal de référence et signal obtenu par simulation 3D avec le code de calcul SEM3D pour 6 capteurs placés à la surface libre, à la fois pour l'enveloppe du signal et également la phase. Un score correspondant à un bon fitting se situe entre 8 et 10. Dans notre cas, le gain minimal est de 8.17 on peut ainsi considérer que l'approximation numérique du calcul discret 3-D est vérifié. Le cas avec le gain le plus faible est représenté figure 3.11. Les plus grosses différences se situent au niveau des pics des ondes principales.

TABLEAU 3.4 – Valeurs des gains obtenus pour différents capteurs sur l'enveloppe et la phase pour chacune des composantes

| Capteur | 171 | 342 | 350 | 359 | 488 | 518 |
|-------------------|-------|-------|------|------|------|-------|
| Gain enveloppe-NS | 8.61 | 8.75 | 8.73 | 8.58 | 8.17 | 8.80 |
| Gain enveloppe-EW | 8.38 | 8.85 | 8.72 | 8.52 | 8.20 | 8.80 |
| Gain enveloppe-DU | 8.51 | 8.74 | 8.58 | 8.39 | 8.19 | 8.66 |
| Gain phase-NS | 9.86 | 9.66 | 9.85 | 9.85 | 9.85 | 9.87 |
| Gain phase-EW | 9.88 | 9.86 | 9.87 | 9.90 | 9.85 | 9.89 |
| Gain phase-DU | 9.88 | 9.86 | 9.87 | 9.87 | 9.86 | 9.87 |
| N-S pos. [m] | -2000 | 0 | 0 | 0 | 1000 | 200 |
| E-W pos. [m] | 2899 | -1202 | -710 | 1202 | 5303 | -4596 |

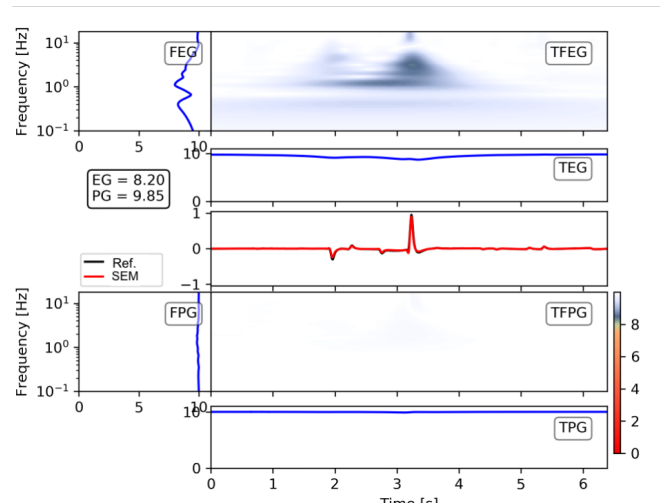


FIGURE 3.11 – Résultats de l'application du critère de Kristekova pour le capteur avec le score d'enveloppe le plus faible

La partie supérieure de la figure 3.11 représente la carte d'erreur dont le maximum est centré sur le pic du signal en vitesse autour de 3 s pour des fréquences de 2 à 3 Hz. La figure 3.12 représente pour 3 capteurs placés à la surface libre, la réponse dans le cas d'un milieu homogène par

couche effectué avec SEM et la réponse pour ces mêmes positions à partir du code semi analytique [Hisada, 1994, 1995].

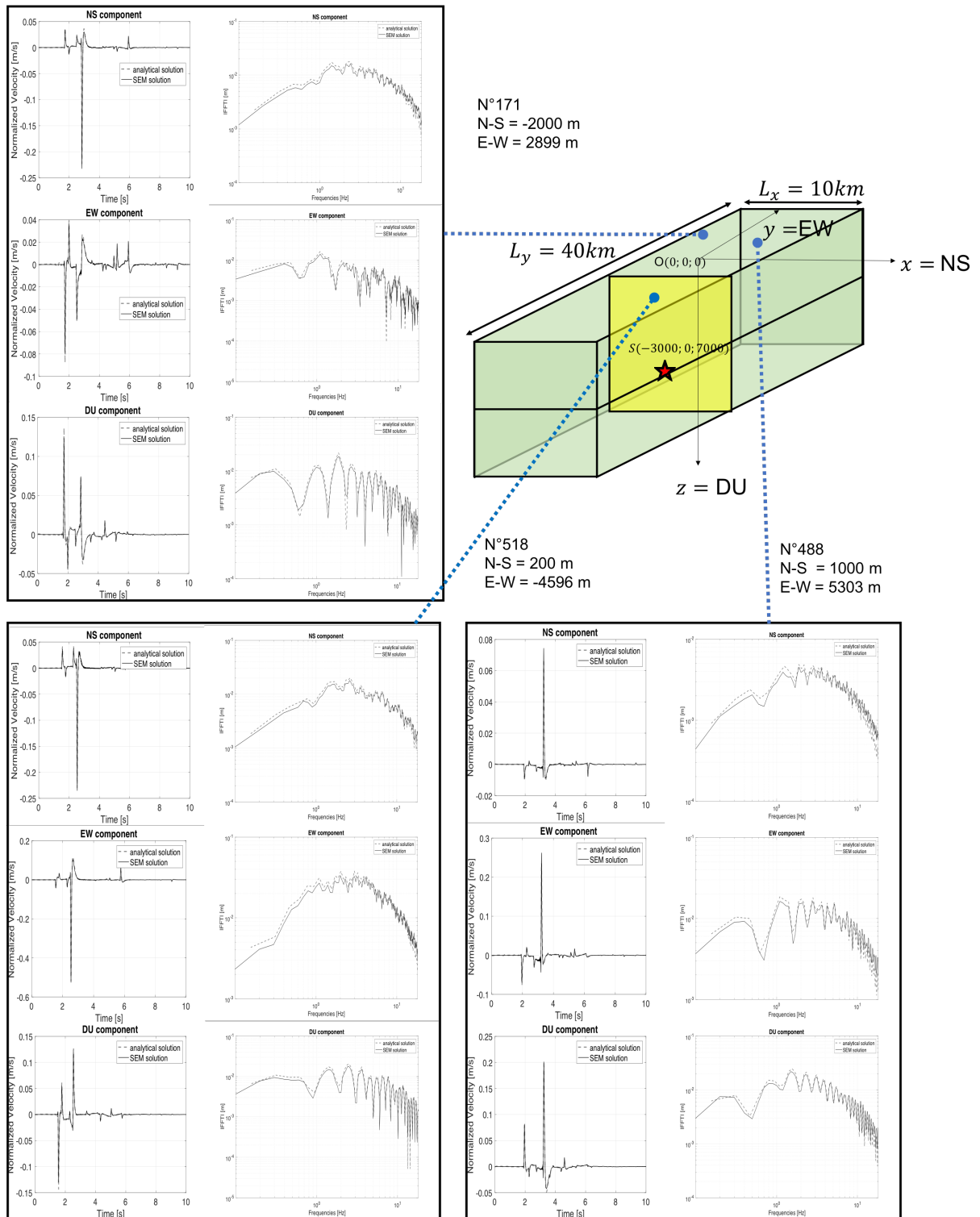


FIGURE 3.12 – Comparaison à plusieurs stations de la solution semi-analytique Hisada [1994, 1995] (en pointillé) et du calcul numérique SEM (en trait continu)

3.3 Impact des hétérogénéités sur le contenu temporel de l'onde sismique

Dans cette partie on va s'intéresser à l'influence de la présence d'un milieu hétérogène sur le contenu temporel de l'onde capté en surface en utilisant le modèle numérique validé précédemment. Pour caractériser les effets des hétérogénéités on s'intéresse à 2 grandeurs, les valeurs de PGA et les intensités d'Arias et on choisit d'injecter une bande de fréquence de 0.5 à 20 Hz. Ce choix permet à la fois de voir l'influence sur la phase forte du signal (maximum d'amplitude) et également sur l'étalement du signal et l'énergie transmise en surface. On place sur un rectangle de 6 km × 15 km un ensemble de 700 stations, espacées de $Dx = 1$ km et $Dy = 150$ m (Figure 3.13).

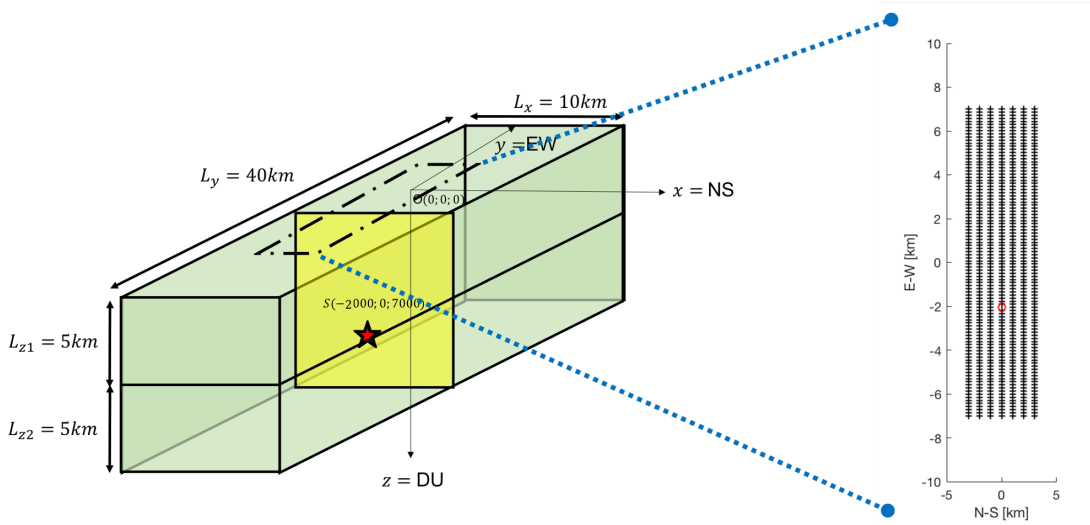


FIGURE 3.13 – Cartographie de la position des stations à la surface libre du milieu et positionnement de la source dans le cas de l'étude temporelle pour une occurrence d'événement sismique

3.3.1 Mesure des accélérations maximales

On s'intéresse tout d'abord aux amplitudes maximales des accélérations (**PGA**) dans le cas énoncé précédemment. On sépare les composantes verticales et horizontales des accélérations relevées à la surface libre. On calcule pour la composante horizontale la valeur du PGA_{horiz} comme étant :

$$PGA_{horiz} = \sqrt{\max_{t \in [0, T]} |a_x(x_{station}, t)| \max_{t \in [0, T]} |a_y(x_{station}, t)|} \quad (3.10)$$

a_x et a_y désignent respectivement la composante Nord-Sud et la composante Est-Ouest (Coordonnées représentées figure 3.12) pour un signal de durée T . Dans le cas de la composante verticale on a simplement :

$$PGA_{vert} = \max_{t \in [0, T]} |a_z(x_{station}, t)| \quad (3.11)$$

Effet de dispersion due à la présence des hétérogénéités sur les PGA

Si l'on s'intéresse tout d'abord au tracé des valeurs de PGA pour la composante horizontale (Figure 3.14) on a une dispersion des valeurs de PGA en présence d'un milieu hétérogène. On peut voir que dans le cas (B) les amplitudes attendues par rapport à au cas (A) sont globalement plus étalées, avec des pics de concentration plus localisés. De même quand on regarde le cas (C) dont les longueurs de corrélation sont inférieures à celles du cas (B) on a un étalement plus important

du signal. Dans le cas des PGA verticaux (Figure 3.15), on observe un résultat similaire, avec des pics de valeurs localement plus forts puis, plus on s'éloigne de ces concentrations, plus les PGA sont étalés. On retrouve par contre la forme globale de répartition des valeurs, avec, en diminuant les longueurs de corrélation la diffusion est accrue.

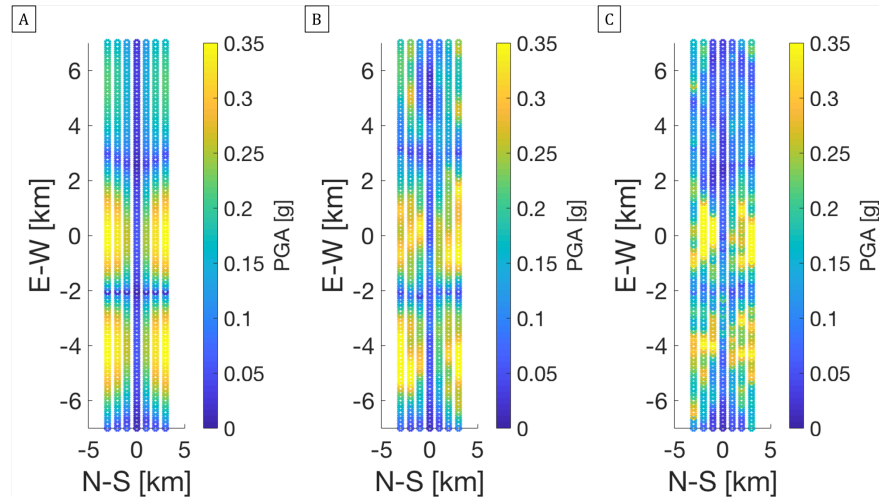


FIGURE 3.14 – Représentation des valeurs des PGA horizontaux dans le cas des 3 milieux considérés différents. L'épicentre est à la position E-W = -2km et N-S=0. (A) correspond au cas homogène, (B) au cas hétérogène 1 ($\ell_{c,z} = 500\text{m}$) et (C) au cas hétérogène 2 ($\ell_{c,z} = 100\text{m}$)

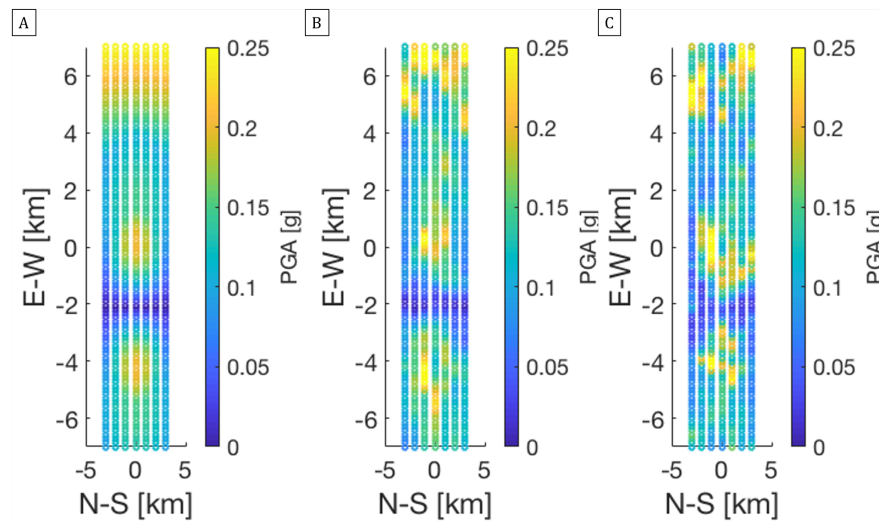


FIGURE 3.15 – Représentation des valeurs des PGA verticaux dans le cas des 3 milieux considérés différents. (A) correspond au cas homogène, (B) au cas hétérogène 1 et (C) au cas hétérogène 2

On observe également que les pics de concentration localisés ont des amplitudes plus fortes que dans le cas homogène. Autour de E-W=6 km, on retrouve une amplification des valeurs de PGA, ces valeurs élevées sont dues à la stratification et proviennent de la réflexion au niveau de l'interface. C'est pourquoi, pour analyser plus en détail la localisation des zones d'atténuation ou d'augmentation du maximal d'accélération du signal, on s'intéresse désormais au rapport $\log(PGA_{het,horiz}/PGA_{hom,horiz})$ (Figure 3.16). Si l'on s'intéresse aux zones où on a normalement les plus grandes valeurs de PGA pour le cas homogène (par exemple le bloc de [-5 km 0 km] sur

l'axe N-S et [-2 km 2 km] sur l'axe E-W). On a pour le cas hétérogène 1 ($\ell_{c,z} = 500$ m) des ratios proches de 0, avec peu de différences entre la réponse homogène et la réponse hétérogène. Localement on a des atténuations (ratio < 0) et des amplifications (ratio > 0). Si l'on diminue la longueur de corrélation, et que l'on regarde désormais le ratio pour le cas hétérogène 2 ($\ell_{c,z} = 100$ m), pour la même zone on observe beaucoup moins de valeurs proches de 0 et beaucoup plus de fluctuations du ratio. L'effet de scattering due aux hétérogénéités est plus marqué dans le cas hétérogène 2. Si l'on s'éloigne de la source on a d'importantes zones atténuées. Proche des maximaux, on a une grosse variation entre zone atténué et zone amplifiée. On retrouve, sur une plage de fréquence étendue ici des résultats déjà rapportés pour des plages de fréquences restreintes [Imperator & Mai, 2013].

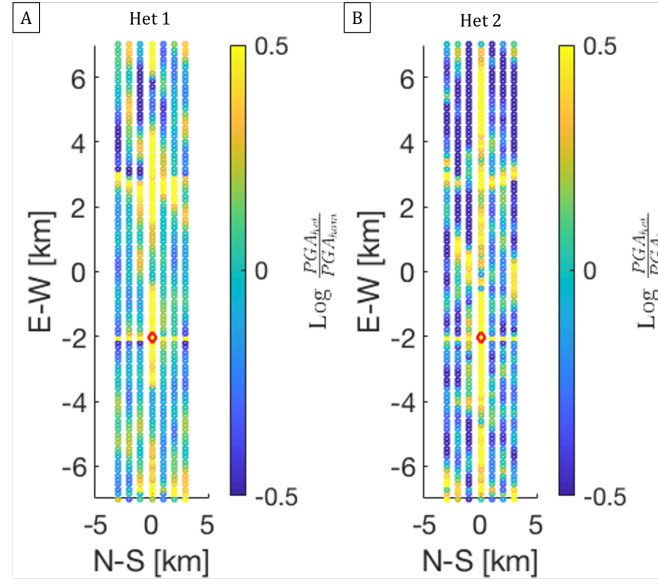


FIGURE 3.16 – Représentation du ratio $\log \text{PGA}_{\text{het1,horiz}} / \text{PGA}_{\text{hom,horiz}}$ dans le cas des 2 milieux aléatoires considérés. (A) correspond au rapport des PGA horizontaux dans le cas du milieu hétérogène 1 ($\ell_{c,z} = 500$ m) et (B) au cas hétérogène 2 ($\ell_{c,z} = 100$ m). Ces ratio sont tracés par rapport aux PGA horizontaux dans le cas homogène.

Lien entre valeurs minimale ou maximale des PGA et $V_{s,h}$

On a précédemment montré, à partir de simulation 3D, l'effet diffusif que la présence du milieu aléatoire a sur les valeurs des PGA. Une question qui se pose est de savoir pourquoi localement on peut avoir une valeur atténuée ou une valeur amplifiée de PGA. Une idée possible est de relier ces atténuations/amplifications locales à des propriétés matériaux locales également et notamment à la vitesse des ondes S. Pour valider ou non cette idée, on essaie de comparer la position des zones d'atténuation/amplification en fonction d'une valeur de V_s moyennée sur une profondeur donnée en analogie avec des valeurs $V_{s,h=30m}$:

$$V_{s,h} = \frac{h}{\int_0^h \frac{dz}{V_{s,i}}} \quad (3.12)$$

avec h_i la distance entre 2 points de discrétisation et $V_{s,i}$ la vitesse des ondes S en ce point. On représente ainsi, pour une valeur moyenne de V_s sur une profondeur de 100 m $V_{s,h=100m}$ la cartographie à la surface pour les 2 milieux hétérogènes (Figure 3.17).

On s'intéresse à 2 zones particulières pour déterminer si les zones d'atténuation/amplification ont un lien direct avec une valeur V_s . Si l'on s'intéresse à la zone dans les modèles (A) et (B), on a une amplification des valeurs de PGA, pour le milieu hétérogène 1 alors que l'on est dans une zone

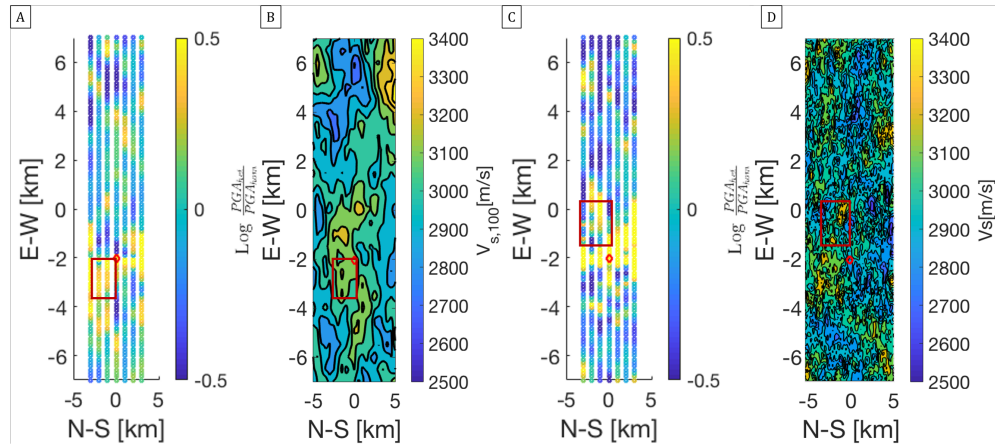


FIGURE 3.17 – Représentation des valeurs des PGA verticaux dans le cas des 3 milieux considérés différents. (A) correspond à la représentation, pour chaque station, du ratio $\log(PGA_{het1,vert}/PGA_{hom,vert})$ dans le cas du milieu hétérogène 1 ($l_{c,z} = 500m$). (B) correspond à la représentation des vitesses V_s locales à la surface libre dans le cas hétérogène 1. (C) correspond au même ratio dans le cas du milieu hétérogène 2 ($l_{c,z} = 100m$), et (D) correspond à la représentation des vitesses V_s locales à la surface libre dans le cas hétérogène 2

où les vitesses $V_{s,h=100m}$ sont proches de la valeur moyenne du milieu (c'est à dire $V_s = 3000$ m/s). Si désormais on regarde la zone particulière pour (C) et (D), on a au niveau des valeurs maximales de $V_{s,h=100m}$ (autour de 3400m/s) une amplification des valeurs de PGA. En bas de cette zone, on a un début d'atténuation, alors que pourtant on a des valeurs de $V_{s,h=100m}$ qui sont autour de la valeur moyenne et qui remonte vers des valeurs plus grandes ensuite. Par la suite, nous avons aussi regardé des V_s moyenne sur des profondeurs différentes, notamment une profondeur de 50 m ($V_{s,h=50m}$) et également juste en prenant la valeur à la surface. A partir de ces 3 moyennes on ne trouve pas de lien entre la valeur $V_{s,h}$ et les zones d'atténuations/amplifications dans le cadre de nos simulations.

3.3.2 Mesure des intensités d'Arias

On s'intéresse désormais à un critère d'intensité sur l'intégralité du signal enregistré et non sur une amplitude maximale. C'est pourquoi on s'intéresse à l'intensité d'Arias comme une mesure de la force d'un séisme [Arias, 1970]. L'équation 3.13 donne l'expression de cette intensité, exprimée en m/s pour une des composantes i du signal reçu en surface. A la différence des PGA, ce critère nous permet de prendre en compte l'entièreté du signal et est un reflet de l'énergie qui arrive sur une durée T correspondant au temps d'acquisition du signal, soit $T = 10$ s. On souhaite, de manière similaire à l'étude sur les PGA, rendre compte de l'effet de scattering sur cette grandeur. On regarde également l'influence de la distance sur les valeurs d'intensité et indirectement l'influence de la longueur du parcours dans le milieu hétérogène comme impact sur la grandeur relevée à la surface libre [Aki & Chouet, 1975; Imperatori & Mai, 2013]

$$I_{arias,i} = \frac{\pi}{2g} \int_0^T a_i^2(t) dt \quad (3.13)$$

Effet de dispersion due à la présence des hétérogénéités sur les valeurs d'intensité d'Arias

On représente les valeurs d'intensité d'Arias pour la composante E-W (Figure 3.18) et pour la composante D-U (Figure 3.19) pour chaque cas (A), (B) et (C), respectivement le cas homogène, hétérogène 1 ($l_c, z = 500$ m) et hétérogène 2 ($l_c, z = 100$ m). On retrouve, de manière similaire au cas des PGA, un scattering sur les valeurs d'intensité d'Arias. La figure 3.18 représente les valeurs

d'intensités d'Arias de la composante E-W pour chaque cas. Pour le cas de la composante E-W, on représente l'épicentre par un losange rouge, on note que l'on a dans le cas homogène une décroissance des valeurs d'intensités en s'éloignant de l'épicentre. Dans les cas hétérogènes, le maximum d'intensité d'Arias n'est plus au niveau de l'épicentre mais décalé de celui-ci. Pour le modèle hétérogène 1, on a une plus forte intensité puis une décroissance en fonction de la distance par rapport au maximum d'intensité. Ainsi qu'une dispersion des valeurs. Dans le cas hétérogène 2, on a une plus forte dispersion des intensités. Si l'on s'intéresse à la composante DU on va retrouver le même phénomène avec une plus forte dispersion dans le cas hétérogène 2.

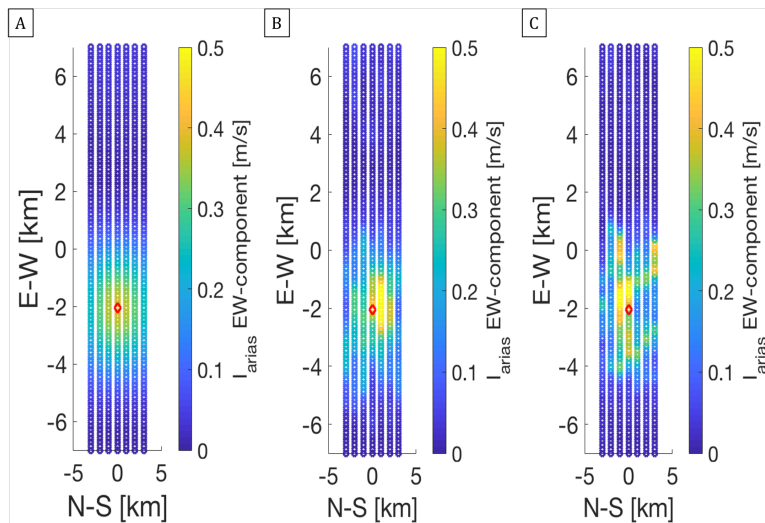


FIGURE 3.18 – Représentation de la variation des intensités d'Arias en fonction de la localisation à la surface libre pour le cas de la composante Est-Ouest. (A), (B) et (C) correspondent respectivement à la réponse dans le cas homogène, à la réponse dans le cas hétérogène 1, à la réponse dans le cas hétérogène 2

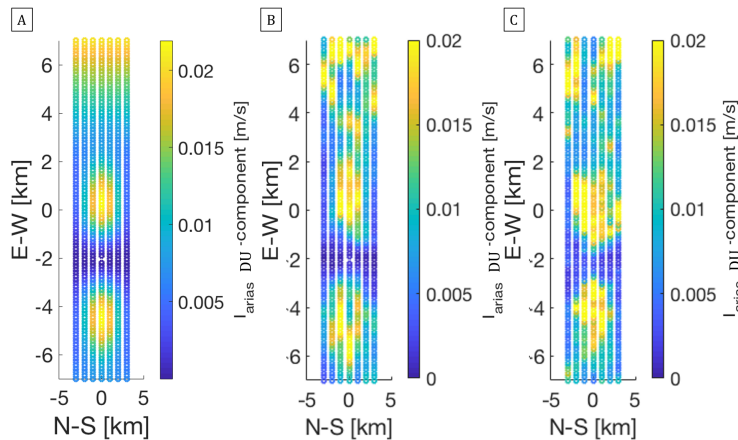


FIGURE 3.19 – Représentation de la variation des intensités d'Arias en fonction de la localisation à la surface libre pour le cas de la composante verticale DU (A), (B) et (C) correspondent respectivement à la réponse dans le cas homogène, à la réponse dans le cas hétérogène 1, à la réponse dans le cas hétérogène 2

Pour la composante EW, on s'intéresse désormais à voir en fonction de la distance, l'évolution des valeurs d'intensité. On trace ainsi sous forme de boîtes à moustaches (Figure 3.20), les intensités d'Arias regroupés en fonction de la distance épacentrale. On choisit ici de regrouper les

données par groupe en fonction de la distance épacentrale à ± 250 m. Le nombre d'échantillons est relativement faible ici. On relève de plus les valeurs médianes dans le tableau 3.5. Pour une distance épacentrale R_e d'1 km, on a des valeurs médianes identiques. Par contre on a beaucoup plus de dispersion dans les cas hétérogènes. On a des valeurs de quartiles différentes entre les 2 cas hétérogènes, mais l'étendue est assez similaire. Au niveau des valeurs extrêmes on a une variation plus importante dans le cas avec les longueurs de corrélation les plus faible (hétérogène 2). Pour une distance épacentrale de 2 km, on voit une baisse de 15 % de la médiane dans le cas hétérogène 1 par rapport au cas homogène, et une baisse de ~ 30 % pour le cas hétérogène 2. Les quartiles sont assez similaires dans les 3 cas, par contre les valeurs extrêmes sont plus éloignées de la médiane dans les 2 cas hétérogènes. Pour une distance épacentrale de 3 km, on a une diminution des valeurs médianes dans les cas hétérogènes par rapport à la médiane du cas homogène, de l'ordre de 10 à 20 %. Les quartiles dans le cas homogène sont plus importants, cela provient en partie des données statistiques, où la distance considérée est prise à un pourcentage près. On note que l'on a une médiane plus petite dans le cas avec les longueurs de corrélation plus grandes, alors que la tendance était inversée pour la distance épacentrale précédente. Par contre, les valeurs extrêmes sont toujours plus grandes pour le cas avec la longueur de corrélation la plus petite. Les marques rouges correspondent aux points en dehors de la boîte. Ces valeurs sont ainsi considérées comme aberrantes par définition de la boîte à moustaches.

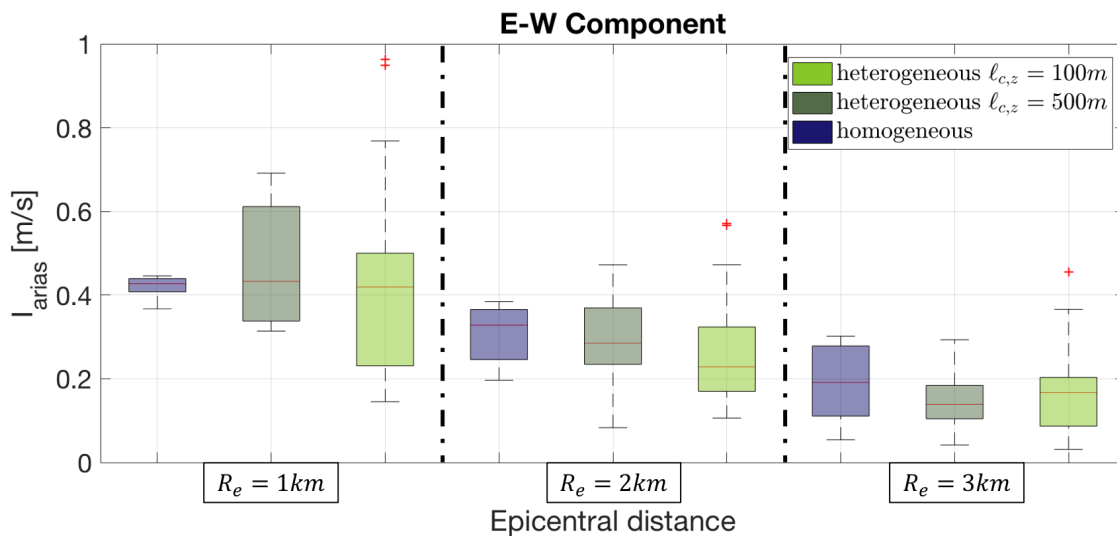


FIGURE 3.20 – Représentation de la variation des intensités d'Arias en fonction de la distance épacentrale pour le cas de la composante Est-Ouest. (A), (B) et (C) correspondent respectivement à la réponse dans le cas homogène, à la réponse dans le cas hétérogène 1, à la réponse dans le cas hétérogène 2.

TABLEAU 3.5 – Valeurs médianes représentées figure 3.20

| Milieu | Médiane $R_e = 1$ km | Médiane $R_e = 2$ km | Médiane $R_e = 3$ km |
|---|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| Milieu homogène | $0.43\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ | $0.33\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ | $0.19\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ |
| Milieu hétérogène 1, $\ell_{c,z} = 500$ m | $0.43\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ | $0.29\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ | $0.14\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ |
| Milieu hétérogène 2, $\ell_{c,z} = 100$ m | $0.42\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ | $0.23\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ | $0.17\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ |

Intensité d'Arias et étalement de l'énergie, une conséquence du chemin parcouru?

A travers les différents résultats, on a vu qu'en moyenne on retrouve des résultats statistiques proches entre les différents cas. La présence des hétérogénéités a un effet de délocalisation du maximum d'intensité (décalage par rapport au cas homogène) mais il y a également un effet d'étalement de l'énergie. Les maxima de l'intensité dans les cas hétérogène semblent plus localisés par rapport au cas homogène, et autour de ses maxima l'intensité chute plus rapidement. On retrouve une dépendance des valeurs d'intensité en fonction de la distance et donc en fonction du chemin parcouru par l'onde au sein du milieu aléatoire. Pour comprendre pourquoi on peut avoir des atténuations très localement, on représente à différents instants de propagation, la magnitude de l'accélération d'une onde se propageant dans un milieu hétérogène (Figure 3.21). On a une zone d'ombre créée par la présence d'une hétérogénéité sur le chemin de parcours. Cette zone correspond à une zone où l'onde arrivant est une onde essentiellement indirecte. Celle-ci est repérée par un cadre pointillé noir sur la figure. Au cours de la propagation, l'énergie n'arrive pas complètement dans cette zone, on a une atténuation globale, alors que la zone voisine, elle, ne semble pas être impactée.

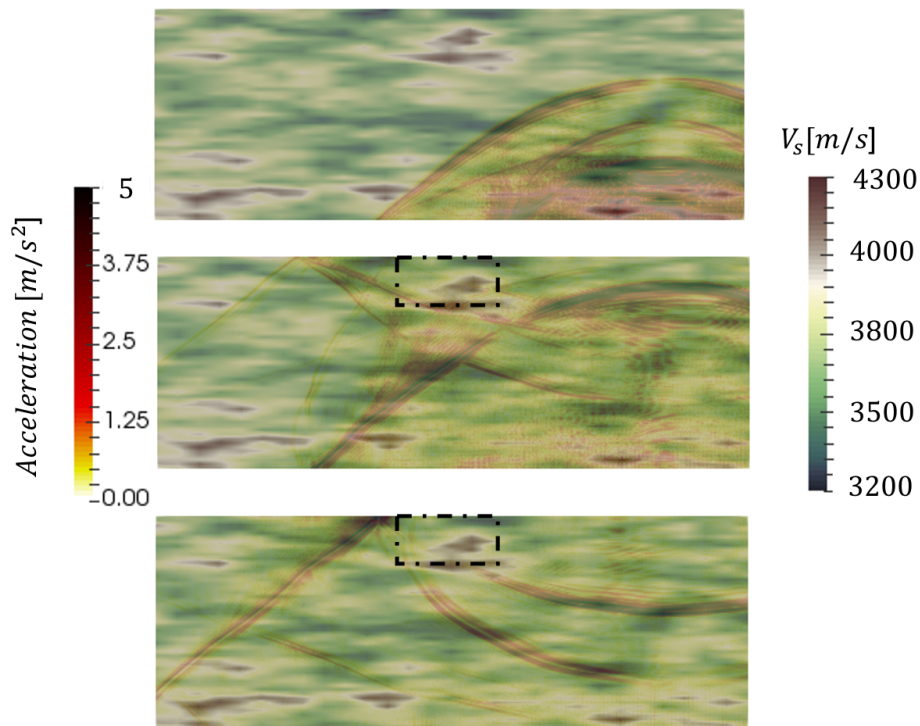


FIGURE 3.21 – Représentation d'une zone d'ombre énergétique suite à la présence d'une hétérogénéité sur le chemin de propagation. On représente à 3 instants différents (de haut en bas) la propagation d'une onde sismique dans un milieu hétérogène. Le cadre en pointillé noir représente la zone d'ombre énergétique

3.3.3 Effet des hétérogénéités sur une autre mesure d'intensité

On s'intéresse ensuite à tracer, en parallèle de l'intensité d'Arias, le temps de montée de 5 % à 95 % (noté D_{5-95} par la suite). C'est le temps qui correspond à l'arrivée de 90 % du signal en terme d'énergie. Pour regarder ce paramètre on ne s'intéresse ici qu'à une ligne de capteurs, celle pour E-W=0 km (Voir figure 3.13). Ainsi, on trace la valeur d'intensité d'Arias pour la composante verticale (DU) et le temps de 5 à 95 % correspondant, en fonction de la distance par rapport à l'épicentre (Figure 3.22). On compare le cas homogène au premier cas hétérogène ($\ell_{c,z} = 500$ m). Au niveau de l'intensité d'Arias, on retrouve la dispersion des valeurs telle que déjà explicitée précédemment. Pour D_{5-95} , dans le cas homogène, on a un temps presque constant, ce qui correspond à une phase forte sans coda et la réflexion due à la stratification. Pour le cas hétérogène, on voit une valeur de D_{5-95} qui augmente en fonction de la distance à la source et qui est globalement plus élevée que dans le cas homogène. On refait le même tracé pour la composante E-W (Figure 3.23). Ici on obtient le même constat que précédemment pour l'intensité d'Arias. Dans le cas de D_{5-95} , les variations sont moindres entre homogène et hétérogène. On a également un saut de valeur autour de 4000 m pour D_{5-95} . Cela correspond à la réflexion du signal au niveau de l'interface entre les deux milieux correspondant à la stratification du domaine. On peut vérifier cela sur le signal temporel. On trace (Figure 3.24), pour une station à une distance d'environ 4000 m par rapport à l'épicentre (en rouge partie A). On a le pic principal de l'onde S autour de 2.5 s et la réflexion qui arrive autour de 6 s. Cela donne un delta de temps de l'ordre de 3.5 s qui correspond à la valeur de D_{5-95} pour cette distance. De plus on voit que l'on a peu de coda pour cette composante par rapport à la composante DU (en rouge partie B) où la coda est plus importante.

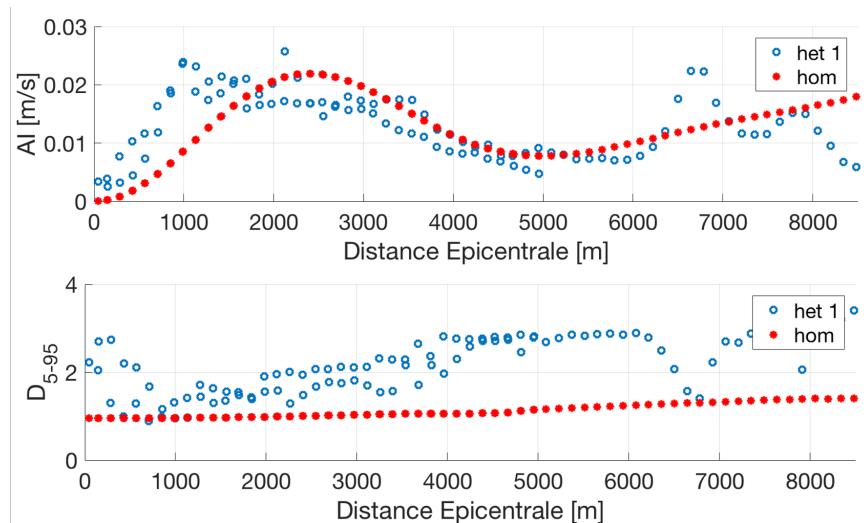


FIGURE 3.22 – Tracé de l'intensité d'Arias et du temps de montée de 5% à 95% pour une ligne de capteurs en fonction de la distance épicentrale pour la composante verticale pour le milieu homogène (en bleu) et le milieu hétérogène 1 (en rouge)

Pour aller plus loin, on trace également les gains suivant le critère de comparaison de Kristekova [Kristeková et al., 2006, 2009] explicité dans la partie 3.2 pour quantifier en temps-fréquence les différences entre le cas homogène et le cas hétérogène. Ici on détourne ce critère de qualité en posant que la variation de l'enveloppe entre le cas homogène et le cas hétérogène sera uniquement due à la présence des hétérogénéités [Tchawe Nziha, 2021]. Ainsi on peut quantifier sur quelle partie fréquentielle les hétérogénéités jouent, à quelle partie fréquentielle correspond la coda et également si l'on diminue $\ell_{c,z}$ comment cela va influencer le contenu. La box TEG (*Temporal Envelope Gain*) correspond à l'écart de l'enveloppe dans le domaine temporel. La box FEG (*Frequency Envelope Gain*) correspond quant à elle à l'écart de l'enveloppe dans le domaine fréquentiel. La box TFEG correspond à la convolution des deux autres réponses où les couleurs cor-

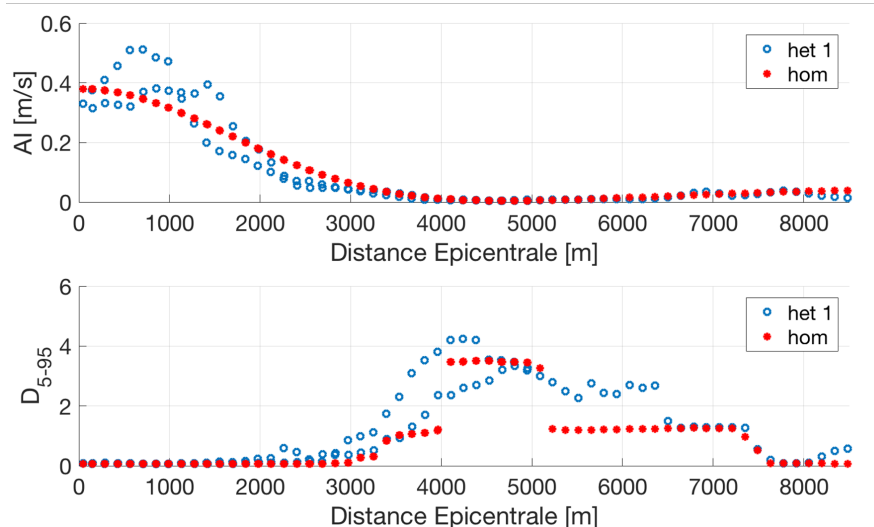


FIGURE 3.23 – Tracé de l'intensité d'Arias et du temps de monté de 5% à 95% pour une ligne de capteurs en fonction de la distance épacentrale pour la composante EW pour le milieu homogène (en bleu) et le milieu hétérogène 1 (en rouge)

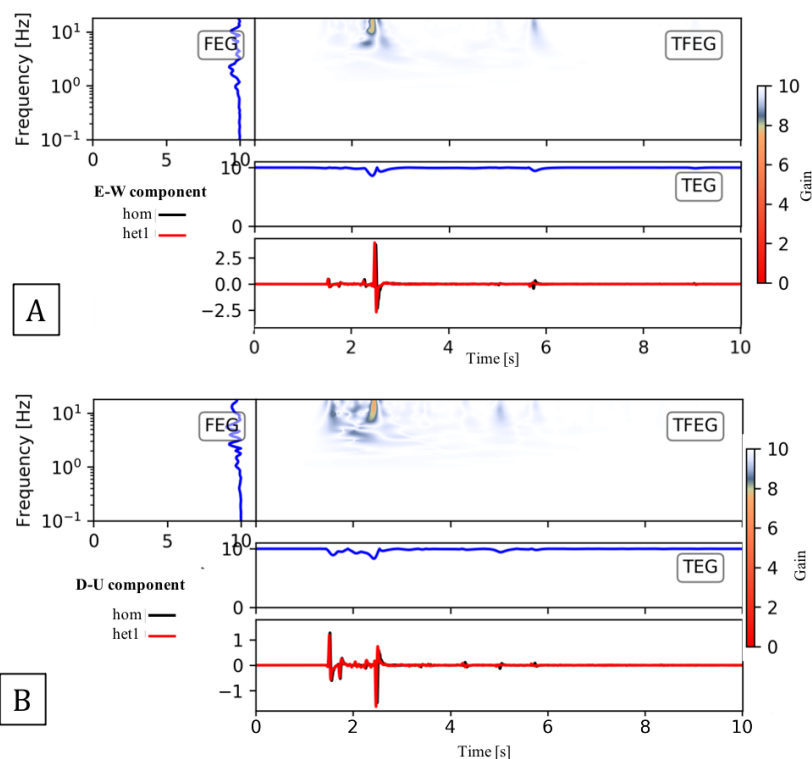


FIGURE 3.24 – Tracé de la transformée temps-fréquence du signal pour la composante EW (en haut) et la composante verticale (en bas). On indique le gain en se basant sur le critère de Kristekova pour une station placée à 4000 m de l'épicentre dans le cas homogène (en noir) et hétérogène 1 (en rouge)

respondent aux valeurs de gain (Figure 3.24). Plus on s'approche de 0, plus on a d'écart entre les signaux. Dans le cas présent, les fluctuations sont faibles voire très faibles et comprises entre 4-

5 Hz et 20 Hz. On identifie également la partie réfléchiée par la stratification qui est plus significative dans le cas de la composante E-W que pour la composante D-U.

On trace ensuite, sur le même modèle, la comparaison entre milieu homogène et le second milieu hétérogène : $\ell_{c,z} = 100$ m (Figure 3.25). Dans ce cas, la coda générée est beaucoup plus importante. La diminution de la longueur de corrélation accentue l'effet de dispersion du milieu hétérogène et donc augmente la partie du signal contenue dans la coda.

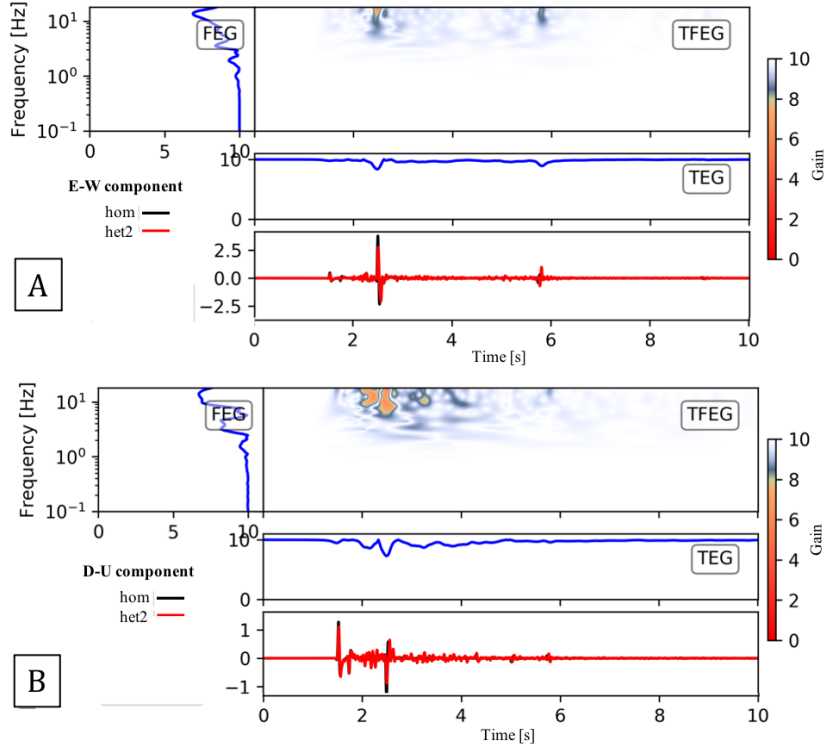


FIGURE 3.25 – Tracé de la transformée temps-fréquence du signal pour la composante EW (en haut) et la composante verticale (en bas). On indique le gain en se basant sur le critère de Kristekova pour une station placée à 4000 m de l'épicentre dans le cas homogène (en noir) et hétérogène 2 (en rouge)

On peut également tracer la cross-corrélation des signaux entre chaque station telle que [Bendat & Piersol, 1980] :

$$C_{a_i a_j}(\tau) = \frac{\frac{1}{N-M} \sum_{n=1}^{N-m} a_i(n\Delta t) a_j((n+m)\Delta t)}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_i^2(n\Delta t)} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_j^2(n\Delta t)}} \quad m = 0, 1, \dots, N \quad (3.14)$$

où a_i et a_j sont les accélérations prises à deux stations distinctes. Δt correspond au pas de temps et $N\Delta$ correspond au temps d'acquisition total.

On prend comme station de référence la station à distance épicentrale nulle et on calcule le maximum de la cross-corrélation en fonction de la distance relative entre les différentes stations par rapport à la station de référence : $\max_{\tau} (C(\tau))$ avec a_i l'accélération à la station i espacée de h_i par rapport à la station de référence. A partir de ce calcul, on représente la variation du maximum de cross-corrélation en fonction de la distance par rapport à la station de référence (Figure 3.26). Pour le cas homogène on part d'une corrélation valant 1, puis celle-ci diminue en fonction de la distance étant donné que l'amplitude du signal va diminuer au cours de la propagation. Si l'on s'intéresse au cas hétérogène 1 ($\ell_{c,z} = 500$ m), on a une corrélation initiale à 1, qui va diminuer très

rapidement jusqu'à osciller autour de 0.6. On peut également regarder l'amplitude de la cross-corrélation pour le milieu hétérogène 2 ($\ell_{c,z} = 100$ m), dans ce cas, on a pour une distance relative presque nulle une corrélation inférieure à 1 (autour de 0.8) avec une chute très rapide de la corrélation jusqu'à atteindre une valeur limite autour de 0.4, la corrélation dans le cas du milieu hétérogène 2 reste inférieure à celle du milieu hétérogène 1.

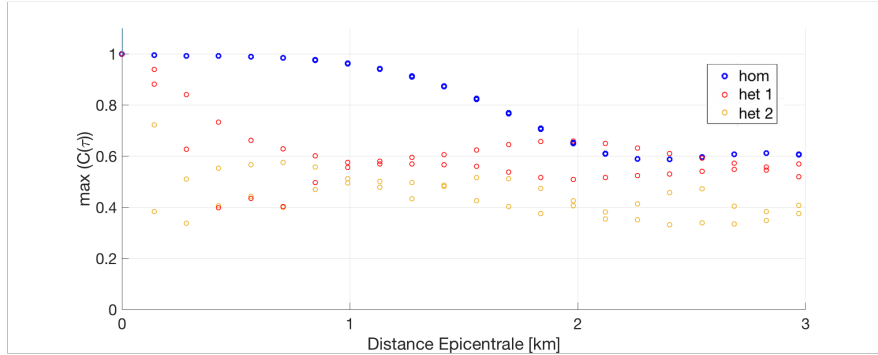


FIGURE 3.26 – Représentation du maximum du coefficient de corrélation entre stations en fonction de la distance de la station de comparaison par rapport à la station de référence pour la composante DU de l'accélération. On représente en bleu le coefficient de corrélation dans le cas homogène, en rouge le coefficient de corrélation dans le cas hétérogène 1 et en jaune dans le cas hétérogène 2

Cette chute rapide ainsi que la différence de cross-corrélation par rapport au cas homogène conforte l'effet de scattering dû à la présence du milieu hétérogène sur le champ d'onde. De plus, quand on diminue les longueurs de corrélations, cet effet est accentué.

Hétérogénéités et création de la coda sismique

La présence des hétérogénéités est l'une des causes de création de la coda sismique [Aki & Richards, 1980; Sato et al., 2011]. L'utilisation du critère de Kristekova permet de quantifier sur quelle plage de fréquence cette partie du signal est générée. On a, dans notre cas, une création de coda sur des fréquences entre 5 et 20 Hz, ce qui correspond à la partie haute fréquence du signal. Il est également possible de caractériser le temps de coda, et d'une certaine manière l'étalement de l'énergie après le front principal. De plus, en diminuant les longueurs de corrélations, on augmente la partie de l'énergie du front principal qui passe dans le front d'onde incohérent correspondant à la coda.

Analyse statistique du contenu fréquentiel impacté par les hétérogénéités pour différentes positions de source sismique

Précédemment, on a identifié une partie des effets des hétérogénéités ainsi que la bande de fréquence concernée. On souhaite ici comparer, en fonction de la distance à la source, la différence fréquentielle entre le milieu homogène et un milieu aléatoire. On choisira de présenter ici les résultats entre modèle homogène et le premier modèle hétérogène (Avec $\ell_{c,z} = 500$ m). On définit différents scénarios sismiques où l'on change la localisation de la source (Figure 3.27) sans en modifier les autres paramètres (même mécanisme au foyer, même amplitude, même fréquence coin, ...). On décrit la position exacte des sources dans le tableau 3.6.

On trace ensuite $\Delta|FFT| = (|FFT_{hom}| - |FFT_{het}|)$, pour différentes sources. On regroupe de manière statistique les résultats en fonction de la distance par rapport à la source (distance hypocentrale). On trace ensuite sur la plage de fréquence donnée (0.1 - 20 Hz) $\Delta|FFT|_h$, la valeur moyenne

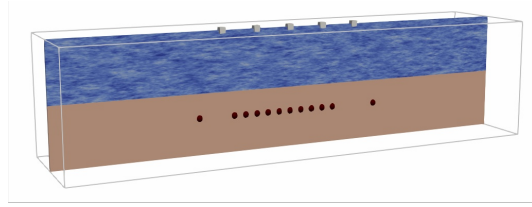


FIGURE 3.27 – Position de différentes sources

TABLEAU 3.6 – Position des différentes sources exploitées en accord avec la figure 3.27.

| Source n° | Coordonnée N – S [m] | Coordonnée E – W [m] | Profondeur [m] |
|--------------------|----------------------|----------------------|----------------|
| 1 | 50 | -5050 | 7000 |
| 2 | 50 | -4050 | 7000 |
| 3 | 50 | -3050 | 7000 |
| 4 | 50 | -2050 | 7000 |
| 5 | 50 | -1050 | 7000 |
| 6 | 50 | -50 | 7000 |
| 7 | 50 | 950 | 7000 |
| 8 | 50 | 1950 | 7000 |

des $\Delta|\text{FFT}|$ pour $h = 8$ km, $h = 10$ km et $h = 12$ km (à $\pm 5\%$). Pour chaque simulation, le milieu vu par l'onde sera différent car la position de la source change, alors que le milieu global lui reste le même.

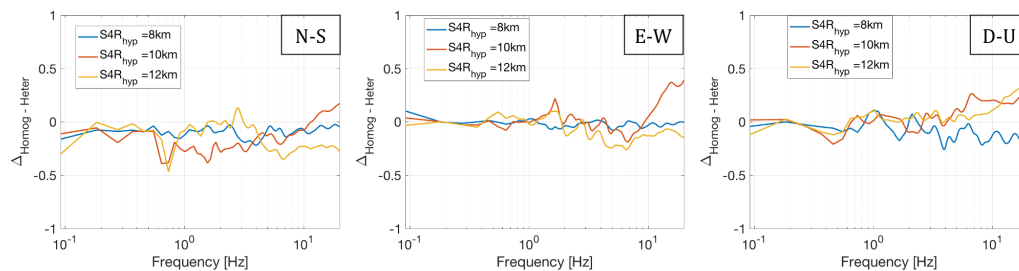


FIGURE 3.28 – $\Delta|\text{FFT}|$ pour les composantes N-S (à gauche), E-W (au centre) et D-U à droite dans le cas de la source 4

On trace ainsi pour la source 4 (Figure 3.28) et la source 8 (Figure 3.29) la comparaison entre réponse homogène et hétérogène pour chaque composante. On a, pour la partie basse fréquence du signal, $\Delta|\text{FFT}| \sim 0$ quelles que soient les distances hypocentrales. C'est à dire qu'il n'y a pas

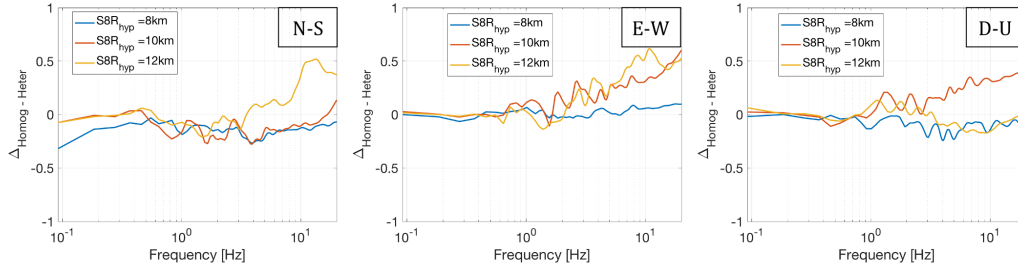


FIGURE 3.29 – Δ FFT pour les composantes N-S (à gauche), E-W (au centre) et D-U à droite dans le cas de la source 8

de différence statistiquement entre la réponse homogène et hétérogène pour la partie basse fréquence (en dessous de 1 Hz). Cela est en accord avec les résultats précédents et le fait que la partie créée par la présence des hétérogénéités (coda) est à partir de 3 à 5 Hz jusque 20 Hz dans notre cas [Aki & Chouet, 1975; Shapiro & Hubral, 1999; Sato et al., 2011].

Plus précisément, dans le cas de la source 4, on a peu de différences pour la composante N-S. Pour la composante E-W on a $\Delta|FFT| > 0$ pour une distance hypocentrale de 10 km à partir de 10 Hz. La réponse du signal pour le milieu hétérogène est atténuée par rapport à la réponse au milieu homogène. Pour la composante D-U on note une atténuation de la réponse au milieu hétérogène à partir de 3-4 Hz pour les distances de 10 km et 12 km sans différence notable entre les 2.

Dans le cas de la source 8, on note une atténuation à partir de 2 Hz uniquement pour la plus grande distance hypocentrale (12 km) pour la composante N-S. On a également une atténuation pour la composante E-W, à partir de 1.5-2 Hz pour les distances de 10 km et 12 km. Pour la composante DU, on a par contre une atténuation uniquement pour la distance hypocentrale de 10 km et ceci à partir de 2 Hz.

Globalement on trouve que si la distance augmente, on a une atténuation de la partie haute fréquence du signal. Par contre, dans le cas de la source 4, composante E-W l'atténuation est très haute fréquence et peu importante. Par contre dans le cas de la source 8, on a, pour la composante D-U, une atténuation pour la distance de 10 km plus importante, alors que l'on a pas d'atténuation notable pour la distance de 12 km.

Pour l'ensemble des positions des sources, on a une tendance globale à avoir une atténuation pour la partie haute fréquence qui augmente en fonction de la distance épacentrale. On peut ainsi faire un lien entre cette atténuation et le modèle de Boore [2003]. A partir de l'équation 3.3, sachant que $\frac{1}{Q_{ef}} = \frac{1}{Q_{in}} + \frac{1}{Q_{sc}}$ et que dans notre cas le modèle est linéaire élastique, on a $\frac{1}{Q_{in}} \sim 0$ donc le terme d'atténuation correspondrait à $\frac{\pi}{Q_{sc}V_s}$. Pour certaines sources on retrouve par contre l'anomalie repérée sur le cas de la source 8, où la distance intermédiaire est plus atténuée que la plus grande distance. Dans le cas homogène, les 3 composantes restent orthogonales quelque soit la distance. Alors qu'en présence du milieu aléatoire, les effets de scattering peuvent avoir pour conséquence que les 3 composantes (N-S, E-W, D-U) ne seront plus forcément orthogonales. Si la rotation due aux effets de scattering est grande, il se peut que l'on ne compare plus vraiment les mêmes composantes en termes d'énergie. Avec le mécanisme au foyer utilisé, la composante la plus énergétique en homogène est la composante E-W, ainsi avec la présence d'une partie de l'énergie E-W peut se retrouver diffractée sur une autre composante ou même bloquée (Figure 3.21). Pour étudier cela, on va regarder la variation angulaire entre le cas homogène et le cas hétérogène. On calcule initialement la corrélation statistique entre la composante N-S et la composante E-W, puis on tourne le repère d'un angle θ tel que l'on ait une composante notée X' et une composante notée Y' (Figure 3.30). On fixe ensuite θ_{hom} (respectivement θ_{het}) telle que pour cette valeur, la corrélation entre la composante X' et Y' soit nulle dans le cas homogène (ou minimale dans le cas hétéro-

gène).

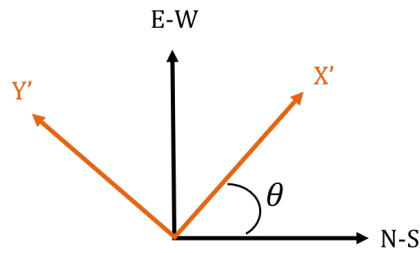


FIGURE 3.30 – Schéma représentant la rotation angulaire pour le calcul de la minimisation de la corrélation entre composantes horizontales

On trace, pour 3 positions de sources différentes les variations angulaires (Figure 3.31). On représente $\Delta\theta = \theta_{hom} - \theta_{het}$ qui correspond à la rotation du signal due aux hétérogénéités. Dans le cas de la source 2, on peut voir que l'on a une fluctuation assez importante de l'angle. Pour la distance $h = 8$ km, même si la médiane est localisée sur 0° , il y a un nombre non négligeable de valeurs en dehors de la box, de même pour $h = 10$ km et $h = 12$ km. Il y a donc une rotation importante pour certaines des stations aux distances considérées. Cela met à la fois en avant l'influence des hétérogénéités dans le parcours global de l'onde mais également que l'on peut, si l'on reste dans le repère initial, ne pas comparer les bonnes composantes par rapport à la référence. Pour le cas de la source 4 et 8 par contre, en dehors des valeurs pour $h = 8$ km on a une localisation de la variation angulaire autour de 0, ce qui signifie que si l'on compare la réponse homogène à celle hétérogène, on compare bien des composantes qui sont de même "nature".

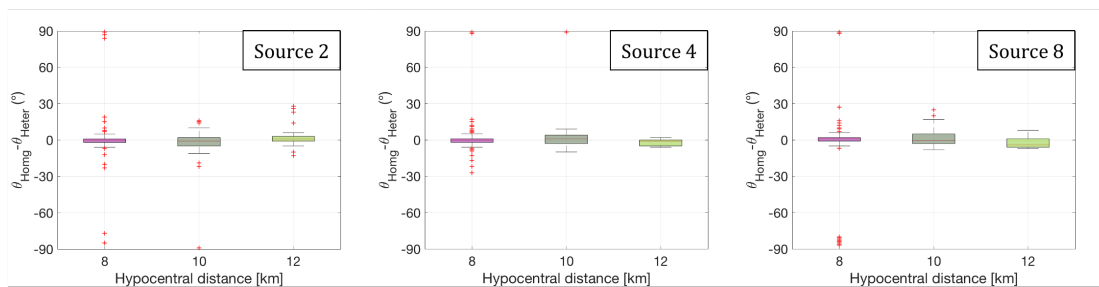


FIGURE 3.31 – Représentation de la variation angulaire entre réponse homogène et réponse hétérogène en fonction de la distance épacentrale pour différentes localisations de la source.

Ainsi, si l'on a peu de variations angulaires, on obtient bien une atténuation haute fréquence qui augmente avec la distance épacentrale. Si par contre on a une grande variation angulaire, on compare des composantes différentes en termes d'énergie. On ne peut ainsi pas conclure sur une possible atténuation ou non dans ce cas. Pour illustrer cela, on trace les valeurs de $\Delta|FFT|_h$ dans le cas de la source 2, où l'on sait que l'on a une variation angulaire importante (Figure 3.32).

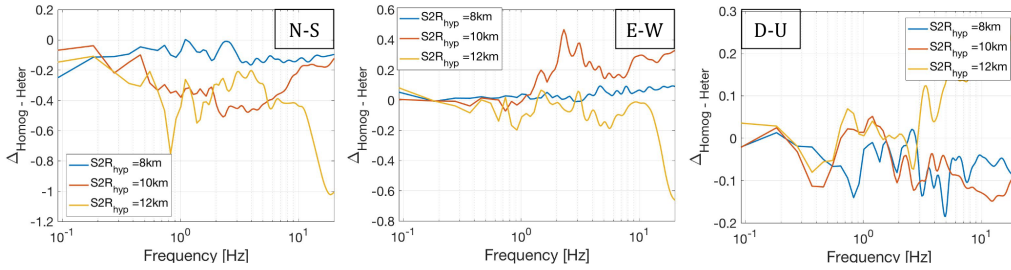


FIGURE 3.32 – Δ FFT pour les composantes N-S (à gauche), E-W (au centre) et D-U à droite dans le cas de la source 2

Atténuation haute fréquence et variation angulaire

On a vu dans cette partie que l'on observe une atténuation du contenu haute fréquence du signal en fonction de la distance épacentrale. La plage de fréquence impactée dans les simulations présentées correspond une plage de 2 Hz à 20 Hz. Ainsi on retrouve une atténuation dépendant de la distance telle qu'elle est exposée dans l'équation 3.3 ou pour le cas du paramètre empirique κ (Equation 3.5).

De plus, on a vu que suivant le chemin suivi, la variation angulaire peut être importante. C'est notamment le cas quand on compare pour une même distance épacentrale les variations angulaires entre les source 2, 4 et 8. Cette variation angulaire peut avoir des conséquences importantes dans la comparaison de signaux. Notamment si les signaux ont fortement été impactés suite aux effets diffractants des hétérogénéités alors on ne compare plus les grandeurs souhaitées. C'est cet effet qui est présent pour le cas de la source 2, et dans ce cas on compare des grandeurs qui n'ont plus la même nature.

3.4 Analyse du contenu fréquentiel des signaux impactés par la présence des hétérogénéités

3.4.1 Analyse fréquentielle du scénario considéré et calcul du paramètre κ

Précédemment, on a montré que l'on retrouve une atténuation en fonction de la distance pour la partie haute fréquence du signal. On souhaite désormais reproduire la méthodologie appliquée pour le calcul du paramètre empirique κ et ainsi voir si l'on retrouve une atténuation de la forme de l'équation 3.5. C'est à dire une atténuation linéaire en fonction de la fréquence et qui peut s'écrire : $\kappa = \kappa_0 + \kappa_s + \bar{\kappa}(R)$. Sachant que l'on utilise une source de type Brune, on impose ainsi $\kappa_s = 0$. De plus, κ_0 correspond à la constante de site. Dans notre cas on ne considère pas d'atténuation du milieu. Ainsi on souhaite discuter de la valeur de κ_0 dans notre cas. De plus, $\bar{\kappa}(R)$ est souvent identifié comme linéaire par rapport à R [Anderson & Hough, 1984; Ktenidou et al., 2014b] mais également comme une fonction suffisamment régulière en R [Anderson, 1991]. On regardera, en considérant une dépendance linéaire si ce modèle est suffisant.

Fenêtrage de l'onde S et choix de la bande de fréquence de régression

Pour obtenir la valeur de la pente, on choisit de sélectionner la partie S de l'onde en effectuant un fenêtrage du signal autour de $[t_s - 0.3s, t_s + 2s]$, avec t_s le temps d'arrivée du pic principal de l'onde S (Figure 3.33). Ce fenêtrage permet de prendre entièrement l'arrivée de l'onde S [Ktenidou et al., 2014a]. On effectue ensuite la transformée de Fourier de ce signal fenêtré et on représente

dans une échelle linéaire-log, l'amplitude du signal en fonction de la fréquence. On cherche ensuite à effectuer une régression linéaire sur la partie haute fréquence du signal. Il est donc important de déterminer la valeur f_0 à partir de laquelle on effectue cette régression. Pour cela on définira pour chaque signaux la fréquence prédominante du signal notée f_p (Equation 3.15).

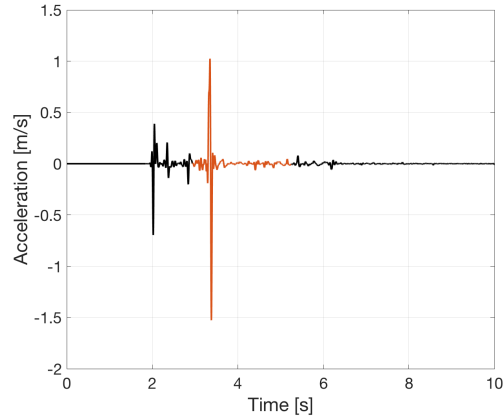


FIGURE 3.33 – Représentation temporelle de la composante radiale à une station déterminée. En noir, l'enregistrement complet de la composante radiale, en rouge le fenêtrage autour de l'onde S

$$f_p^2 = \frac{\int_0^{\infty} f^2 P(f) df}{\int_0^{\infty} P(f) df} \quad (3.15)$$

La fréquence prédominante correspond à la fréquence à partir de laquelle on peut observer une chute du spectre [Cohen, 1989; Bonilla et al., 2019]. On effectue le calcul de la fréquence prédominante pour l'ensemble des relevés à chacune des stations. La fréquence prédominante de la majorité des réponses se situe autour de 13 Hz. On fixe ainsi la plage de fréquence de régression : [13 – 20] Hz (Figure 3.34). Le calcul de la fréquence prédominante nous permet ici d'avoir une valeur de la fréquence à partir de laquelle le spectre de l'accélération chute et de permettre de déterminer la fréquence f_E [Anderson & Hough, 1984] et donc d'automatiser la démarche.

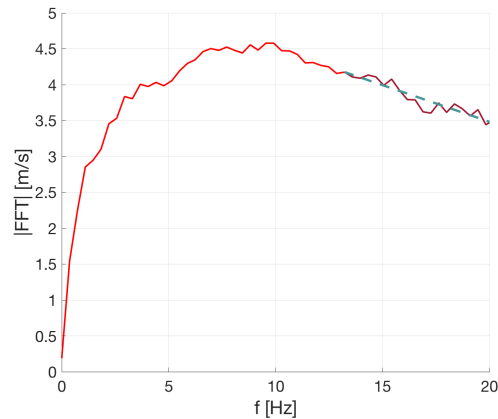


FIGURE 3.34 – Représentation de la transformée de Fourier de la composante radiale. En rouge, la transformée de Fourier de l'onde S fenêtrée (Figure 3.33). En pointillé, la régression sur la plage de fréquence choisie.

3.4.2 Analyse des valeurs de κ à différentes stations

On réalise des simulations pour 9 sources différentes avec le milieu aléatoire 1 (Pour rappel $\ell_{c,z} = 500$ m et $\ell_{c,x} = \ell_{c,y} = 2500$ m). On modifie entre chaque simulation, uniquement la position de la source sur la coordonnée y (Sources représentées par un losange rouge sur la figure 3.35). On représente, pour un échantillon de stations la valeur obtenue de κ pour chacune des sources. On supposera ici $\bar{\kappa}(R)$ linéaire en fonction de R : $\bar{\kappa}(R) = m_{\kappa} * R$ avec R la distance épacentrale et m_{κ} le coefficient directeur indépendant de la fréquence.

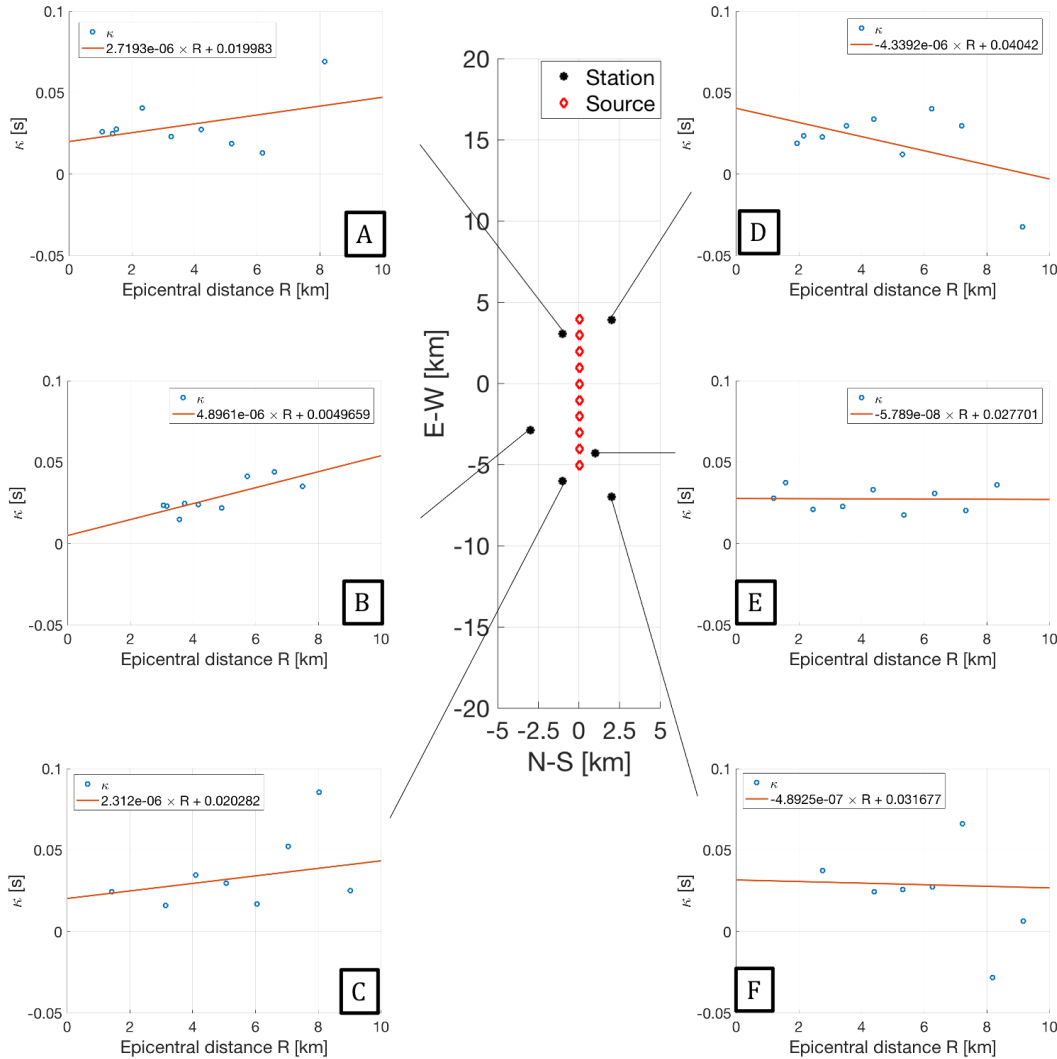


FIGURE 3.35 – Représentation des épicentres des différentes sources (en rouge), de la localisation de quelques stations et des valeurs de kappa associées.

On retrouve une augmentation de la valeur de κ en fonction de distance épacentrale (A,B,C sur la figure 3.35) avec une pente positive de l'ordre de 10^{-6} s/m (Valeurs détaillées dans le tableau 3.7. Pour le cas E et F, on a une pente de l'ordre de 10^{-8} s/m et 10^{-7} s/m, cette pente est 10 à 100 fois inférieure aux précédents cas. Dans ce cas présent il n'y a pas d'atténuation en comparaison avec les atténuations pour A, B et C.

Pour le cas D, on constate par contre une pente négative, ce qui ne correspond pas à une atténuation mais à une amplification. Cela ne correspond pas au modèle d'atténuation de κ . Pour essayer de comprendre pourquoi, pour ce cas, on ne retrouve pas la forme attendue, on peut s'intéresser

à l'ensemble des points on a une valeur qui est négative pour ce cas, et très distante du nuage de point obtenu.

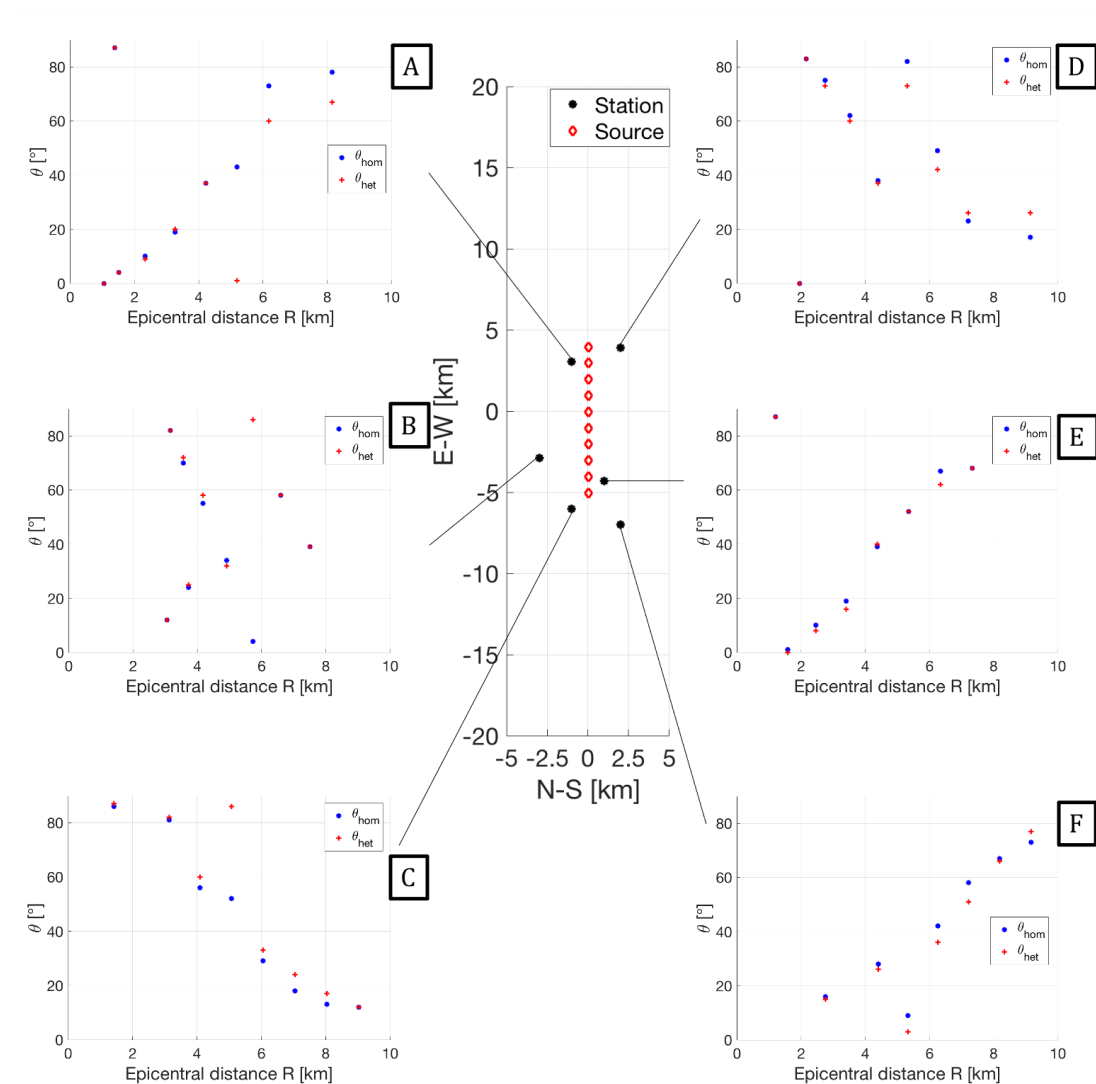


FIGURE 3.36 – Représentation des épicentres des différentes sources (en rouge), de la localisation de quelques stations et des variations angulaires associées.

Afin d'expliquer les différents cas, et comme cela a été observé dans les sections précédentes, on s'intéresse à la variation angulaire pour chacun des tracés par rapport à la référence homogène. Sauf pour certaines valeurs, on a globalement peu de différences angulaires pour les points tracés (Figure 3.36). La variation angulaire est en moyenne de 5° . Dans certains cas, on a une grosse fluctuation angulaire, notamment avec des sauts de valeurs de θ et une importante variation entre θ_{hom} et θ_{het} . Dans ces cas, on ne retrouve pas de résultats attendus, la valeur obtenue pour κ n'a pas de sens (voir cas à la figure 3.37). On peut conclure ici que l'on a, quand les variations angulaires sont grandes, potentiellement une partie de l'énergie qui n'est peut être plus sur la composante suivie. Ici on a toujours mesuré l'arrivée de l'onde S sur la composante E-W. Ainsi cela peut fausser les résultats. En plus de cela, le nombre de points n'est pas assez important pour avoir des régressions propres (cas D, figure 3.35).

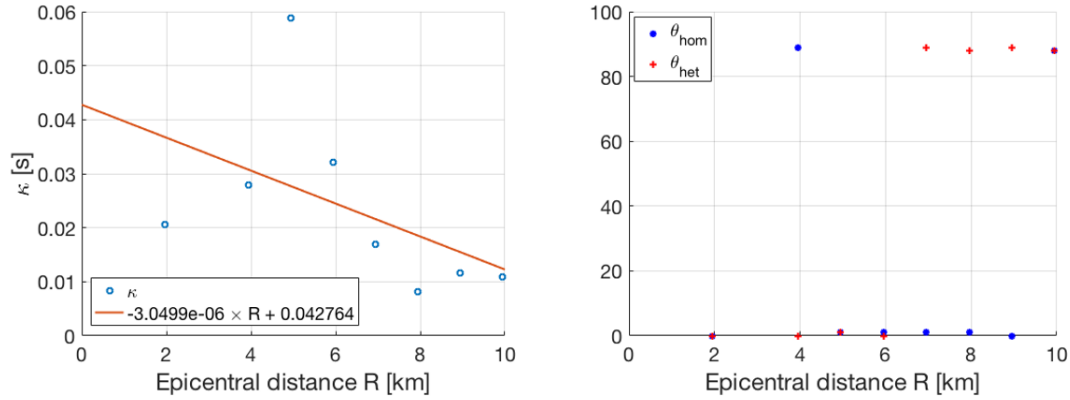


FIGURE 3.37 – Représentation de la régression pour κ (à gauche) et de l'angle θ_{hom} et θ_{het} pour chaque distance épiscoptrale (à droite).

TABLEAU 3.7 – Valeurs de m_κ , κ_0 associées aux stations représentées figure 3.35.

| Station | Coordonnée x [m] | Coordonnée y [m] | $m_\kappa 10^{-6}$ [s/m] | κ_0 [s] |
|---------|------------------|------------------|--------------------------|----------------|
| A | -1000 | 3040 | 2.72 | 0.02 |
| B | -3000 | -2899 | 4.90 | 0.005 |
| C | -1000 | -6010 | 2.31 | 0.02 |
| D | 2000 | 3889 | -4.34 | 0.04 |
| E | 1000 | -4313 | -0.058 | 0.03 |
| F | -2000 | -7000 | -0.49 | 0.03 |

κ et atténuation apparente des hétérogénéités

En appliquant la méthodologie permettant le calcul de κ on retrouve, pour certaines stations une dépendance de l'atténuation en fonction de la distance épiscoptrale tel que $A(f) = A_0 \exp^{-(\kappa_0 + m_\kappa R)\pi f}$ [Anderson & Hough, 1984]. Pour ces stations la variation angulaire est faible par rapport à la référence homogène. Dans certains cas on trouve également que l'on a pas d'atténuations notables. Cela peut être la conséquence d'un chemin de propagation au sein du milieu aléatoire trop petit. De plus, pour certaines stations on a des données pour une bande de distances épiscoptrales trop restreinte. La dépendance linéaire en R semble pertinente pour le modèle étudié. Le paramètre κ est directement lié à l'atténuation apparente due à la présence d'hétérogénéités sur le chemin de propagation. Pour quelques autres stations, où l'on trouve par contre un résultat contraire à ce qui est attendu, on note une différence angulaire importante, comme déjà explicité précédemment, le calcul de κ ne fait pas forcément sens.

Par la suite on identifie les grandeurs caractéristiques pour augmenter l'effet des hétérogénéités et on modifie le modèle pour permettre d'avoir plus de sources avec des signaux se propageant dans des directions variées.

3.4.3 Amortissement apparent et lien avec la longueur de localisation

Tout d'abord, à partir des résultats du chapitre 2, on peut réécrire le coefficient de transmission en fonction du milieu hétérogène choisi :

$$|T_\omega(0, L)|^2 \sim \exp(-L/L_{loc, VK}(\omega)) \quad (3.16)$$

avec :

$$L_{loc,VK}(\omega) \equiv \frac{4\bar{c}^2}{\gamma_{VK}(\omega)\omega^2} \quad (3.17)$$

On a ainsi, en injectant $\omega = 2\pi f$:

$$|T_\omega(0, L)| \equiv \exp\left(\frac{-\pi^2 L \gamma_{VK}(2\pi f) f^2}{2\bar{c}^2}\right) \equiv \exp(-\pi\kappa f) \quad (3.18)$$

Avec L le chemin de parcours dans le milieu hétérogène. Dans le cas où L correspond à la distance hypocentrale, on a $L = \sqrt{H^2 + R^2}$ avec H la profondeur et R la distance épacentrale. Pour R grand et H faible on a $L \equiv R$ au premier ordre. On peut ainsi, dans l'hypothèse où $R^2 \gg H^2$ avoir une dépendance linéaire en R (Cette hypothèse se vérifie pour $R \gtrsim 10$ km). Aux ordres supérieurs, on conserve une dépendance en R dont la fonction est suffisamment régulière [Anderson, 1991].

Dans le chapitre 2, on a vu que l'on peut calculer la longueur de localisation sous hypothèse d'une fluctuation 1D verticale. Sachant qu'ici l'on a $\ell_{c,xy} = 2500\text{m} = 5\ell_{c,z}$, on peut considérer une fluctuation prédominante sur la composante verticale et faire une analogie avec une fluctuation équivalente uniquement 1D. Par ailleurs dans un cas isotropique, Sato [2019] donne une équivalence entre la densité spectrale de puissance 1D et l'autocorrélation 3D dans le cas d'un milieu aléatoire isotrope. On écrit ainsi :

$$L_{loc,VK-1D}(\omega) \equiv \frac{4\bar{c}^2}{\gamma_{VK-1D}(\omega)\omega^2} \quad (3.19)$$

Avec

$$\gamma_{VK-1D} = \frac{2\pi^{1/2}\Gamma(H+0.5)\sigma_K^2\ell_{c,z}}{\Gamma(H)\left(1 + \frac{\ell_{c,z}^2\omega^2}{c_s^2}\right)^{H+0.5}} \quad (3.20)$$

Dans notre cas, en considérant le milieu hétérogène 1, on a $c_s = 3000\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $H = 0.1$, $\ell_{c,z} = 500$ m et $\sigma_K = 0.05$. On peut ainsi tracer la longueur de localisation théorique (figure 3.38).

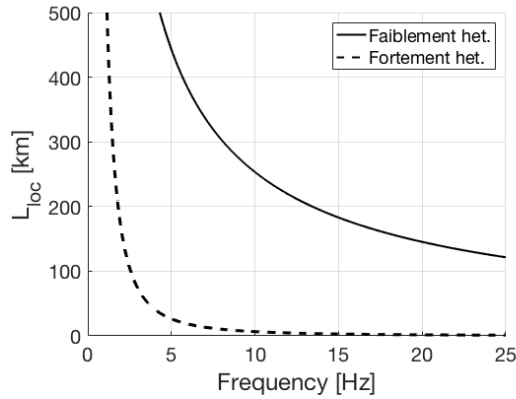


FIGURE 3.38 – Longueur de localisation théorique associée aux paramètres mécaniques pour le modèle numérique correspondant au cas hétérogène 1. On représente en trait plein la limite dans le cas d'un milieu faiblement hétérogène, et en pointillé la limite pour le cas fortement hétérogène

Sachant que $\sigma_K = 0.05$, on se place dans un milieu faiblement hétérogène (Valeur de L_{loc} en trait plein sur la figure 3.38), dans ce cas pour atteindre le régime limite de localisation pour une bande fréquence de 15 à 20 Hz, il faut une distance de propagation de l'ordre de 200 km. La limite numérique du modèle ne nous permet pas d'aller jusqu'à ces distances. Pour cela on met en place modèle où on modifie les propriétés mécaniques pour augmenter les effets des hétérogénéités qui sont exposés ci-dessous.

3.4.4 Extension de l'analyse numérique : mise en place d'une nouvelle stratégie

On définit ici le nouveau modèle par un domaine de $26 \text{ km} \times 26 \text{ km} \times 7 \text{ km}$ (Figure 3.39). On définit une zone centrale de capteurs de l'ordre de $10 \text{ km} \times 10 \text{ km}$ avec $Dx = Dy = 250 \text{ m}$. Cette zone centrale permettra de placer des sources de manière à éclairer de tous les côtés les capteurs en surface. Les sources seront placées aléatoirement dans le domaine, à une profondeur fixe de 5 km . On choisit également de modifier la vitesse des ondes, étant donné que L_{Loc} est proportionnel à V_s^2 on souhaite diminuer la vitesse des ondes S pour diminuer cette longueur. Ainsi dans le nouveau modèle on a $V_s = 2000 \text{ m.s}^{-1}$. De plus, par rapport au modèle précédent, on augmente le nombre de sources possibles. Ainsi, on va regarder en fonction du nombre de sources la convergence des résultats obtenus ainsi que les écarts possibles.

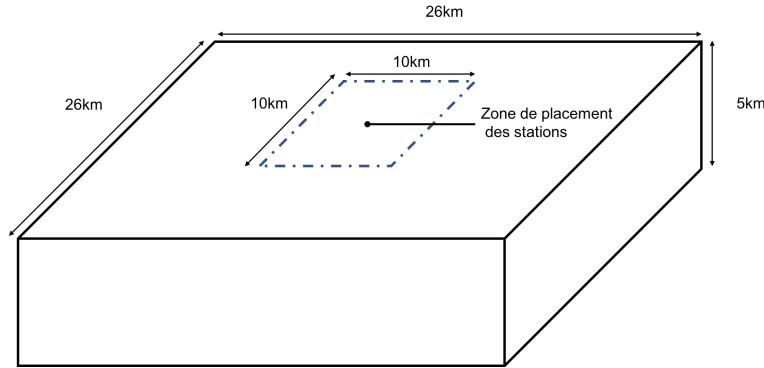


FIGURE 3.39 – Extension du modèle

On change également les paramètres aléatoires pour amplifier les effets attendus par la présence du milieu hétérogène. On définit les propriétés aléatoires dans le tableau 3.8.

TABEAU 3.8 – Propriétés des fluctuations considérées pour le nouveau modèle

| $l_{c,x}$ | $l_{c,y}$ | $l_{c,z}$ | CV | H |
|-----------|-----------|-----------|-----|-----|
| 250 m | 250 m | 100 m | 10% | 0.1 |

On choisit de placer les stations essentiellement au centre du modèle, ce qui permettra de déplacer le point source tout autour de cette zone pour avoir différents "éclairages" reçus par la station suivant la localisation du point source. A la différence du modèle précédent, la source sera cette fois dans le modèle hétérogène, ainsi on pourra directement assimiler la distance parcourue dans le milieu aléatoire à la distance hypocentrale (ou en connaissant la profondeur, à la distance épacentrale, plus représentative dans le calcul de κ). De plus, on se place dans le cas où κ_s est non nul, mais identique entre chaque réalisation. On parlera pour simplifier de $\kappa_0 + \kappa_s$ comme étant la composante à la station. Le nouveau modèle permet d'avoir une fréquence maximale propagée de 30 Hz (la vitesse moyenne des ondes S étant ici $V_s = 2000 \text{ m.s}^{-1}$). Pour ce setting on peut tracer la nouvelle longueur de localisation théorique (Figure 3.40). On observe une longueur de localisation de l'ordre de 20 km pour ce nouveau setting numérique. Ainsi si l'on atteint une distance hypocentrale de 20 km ou de manière équivalente une distance épacentrale de $\sim 19 \text{ km}$ on atteint le régime limite pour une fréquence autour de $16 - 17 \text{ Hz}$. Plus on augmente ensuite la distance épacentrale, plus on augmente la bande de fréquence impactée.

Ici, on va s'intéresser à la variabilité des caractéristiques de m_κ et κ_0 pour l'ensemble des données en augmentant le nombre de sources. Tout d'abord, on trace pour 10 sources, 15 sources, 25 sources puis 40 sources la boîte à moustaches correspondant à la variabilité de m_κ dans chacun des cas (Figure 3.41). On obtient ainsi une convergence des valeurs à partir de 25 sources. En augmentant le nombre de sources on réduit la variabilité globale de m_κ . Cette convergence vers une

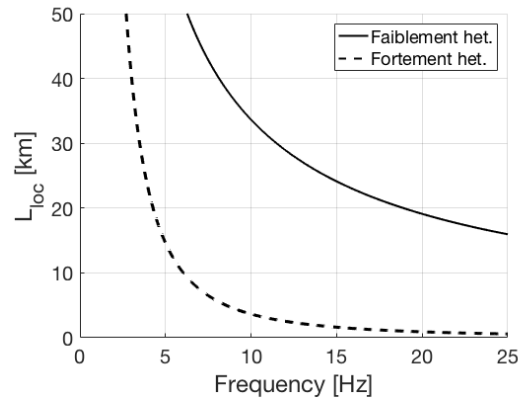


FIGURE 3.40 – Longueur de localisation théorique associée aux paramètres mécaniques pour le modèle numérique correspondant au nouveau cas numérique. On représente en trait plein la limite dans le cas d'un milieu faiblement hétérogène, et en pointillé la limite pour le cas fortement hétérogène

valeur médiane laisse entendre que cette valeur m_κ est une caractéristique globale du milieu, indépendamment de la localisation de la station. Cela rejoint les résultats théoriques comme quoi l'atténuation dépend de la vitesse des ondes S et de la longueur du chemin parcouru, mais la limite du coefficient de transmission ne dépend pas d'une valeur locale, sous jacente à l'emplacement de la station. Quand on applique le même calcul à κ_0 on obtient un résultat similaire avec une convergence de la valeur et une réduction de la variabilité en augmentant le nombre de sources. Pour le cas de κ_0 , à partir de l'écriture de $L = \sqrt{H^2 + R^2}$, κ_0 correspond au terme où $R = 0$, c'est à dire $L = H$.

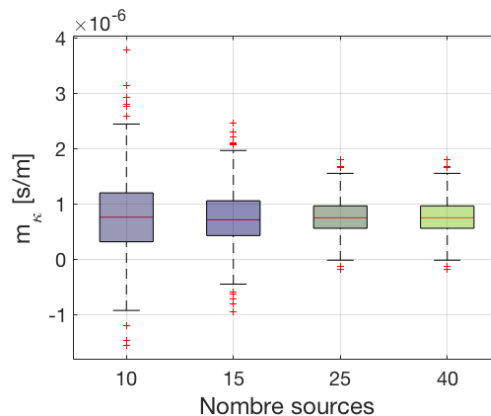


FIGURE 3.41 – Statistique des valeurs de m_κ pour différents nombres de source

Les résultats précédents où on observe la convergence des valeurs de κ vers une valeur médiane lorsque l'on augmente le nombre de sources laissent à penser que κ est une caractéristique régionale des hétérogénéités. Ainsi, on va superposer l'ensemble des données pour obtenir une régression κ_{region} [Douglas et al., 2010]. Les résultats sont présentés figure 3.43. A partir de la superposition des données on peut écrire $\kappa_{region} = 0.053 + 9.03 \times 10^{-7} \times R$.

A partir de la valeur de m_κ régionale, on trace pour 3 stations différentes en itérant la régression à partir de cette valeur régionale. A partir de ces régressions on a, une régression pour chacune des stations dont la majorité des points est incluse dans les bornes de confidences à 95 %. On améliore ainsi la régression pour les 3 stations présentées.

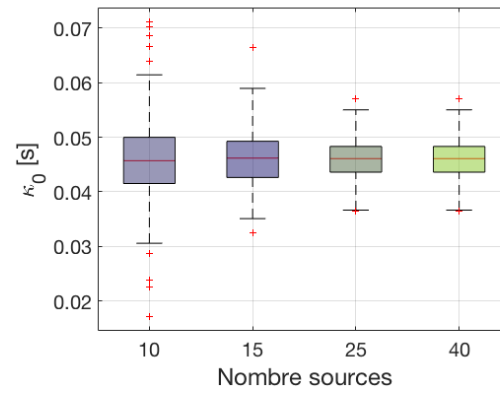


FIGURE 3.42 – Statistique des valeurs de κ_0 pour différents nombres de source

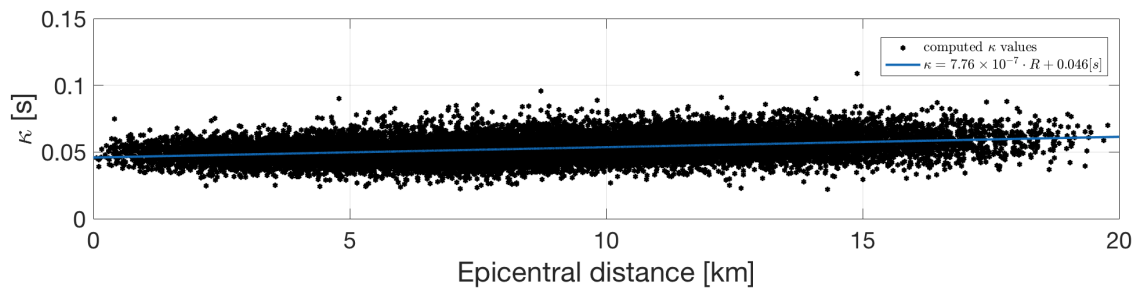


FIGURE 3.43 – Représentation de κ par superposition de toutes les stations et de toutes les sources. On a $\kappa = 0.046 + 7.76 \times 10^{-7} \cdot R$

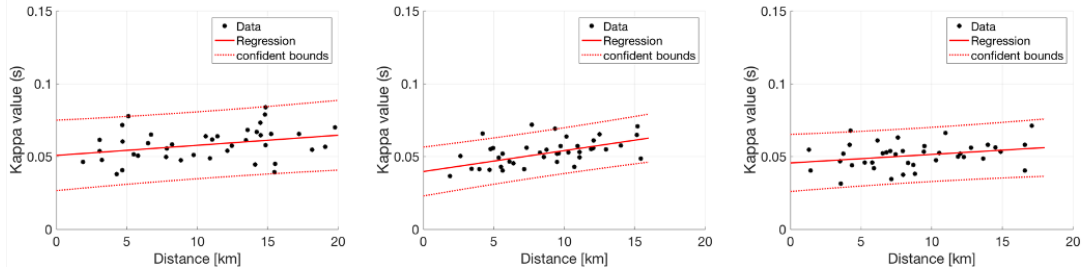


FIGURE 3.44 – Représentation de κ pour 3 stations différentes et 40 positions de sources

κ , indépendance fréquentielle du paramètre empirique

En supposant toujours que l'on se place dans des conditions proches du chapitre 2, c'est à dire que l'on suppose une hétérogénéité quasi 1D pour pouvoir écrire la longueur de localisation on peut écrire :

$$\gamma_{VK}(f) = \frac{2\pi^{1/2}\Gamma(H+1/2)\sigma_K^2\ell_c}{\Gamma(H)\left(1 + \frac{\ell_c^2 4\pi^2 f^2}{c_s^2}\right)^{H+1/2}} \quad (3.21)$$

Par la suite on se place dans le cas où $H = 0.1$, $c_s = 2000$ m/s, $\sigma_K = 0.1$ et $\ell_c = \ell_{c,z} = 100$ m, ce qui correspond au dernier cas étudié. Pour $f \gg 3$ Hz, on a, pour ce setting, $\frac{\ell_c^2 4\pi^2 f^2}{c_s^2} \gg 1$. Cela permet d'écrire une forme approchée de γ_{VK} pour la plage de fréquence étudiée : 10–20 Hz.

$$\gamma_{VK}(f) \sim \frac{2\pi^{1/2}\Gamma(H+1/2)\sigma_K^2\ell_c}{\Gamma(H)\left(\frac{\ell_c^2 4\pi^2 f^2}{c_s^2}\right)^{H+1/2}} \quad (3.22)$$

Si H est faible, et notamment dans notre cas où $H = 0.1$, on a :

$$\gamma_{VK}(f) \sim \frac{2\pi^{1/2}\Gamma(0.6)\sigma_K^2\ell_c}{\Gamma(0.1)\left(\frac{\ell_c^2 4\pi^2 f^2}{c_s^2}\right)^{0.6}} f^{1.2} \quad (3.23)$$

On note $\gamma_1 = \frac{2\pi^{1/2}\Gamma(0.6)\sigma_K^2\ell_c}{\Gamma(0.1)\left(\frac{\ell_c^2 4\pi^2}{c_s^2}\right)^{0.6}}$. Cela permet d'écrire :

$$\kappa f \equiv \frac{\pi L \gamma_1}{2c_s^2} f^{1.2} \quad (3.24)$$

Si on ne s'intéresse qu'au terme m_κ , en écrivant que $L = R\sqrt{1 + \frac{H^2}{R^2}}$ on peut approximer celui-ci par :

$$m_\kappa = \pi \frac{\gamma_1}{2c_s^2} \sim 8.7 \times 10^{-7} \text{ [s/m]} \quad (3.25)$$

Dans ce cas de figure, on retrouve, pour un modèle aléatoire de Von Kármán et un coefficient de Hurst petit, une dépendance très faible de κ par rapport à la fréquence. κ est initialement défini comme étant indépendant de la fréquence [Anderson & Hough, 1984]. Hors dans la théorie explicitée dans le chapitre 2, on trouve une convergence du coefficient de transmission vers une limite dépendant de la fréquence. Néanmoins, sous certaines conditions comme le cas présenté ici (Hétérogénéités 1D, H faible et modèle de Von Kármán), on retrouve une limite du coefficient de transmission très faiblement dépendant de la fréquence voire quasi indépendante.

3.5 Conclusion et discussion autour de l'atténuation haute fréquence en présence d'un milieu hétérogène

A partir des différentes stratégies mises en place pour la génération de signaux synthétiques, on a pu mettre en évidence l'influence des hétérogénéités sur des grandeurs caractéristiques mesurables à la surface libre, notamment les PGA et les mesures d'intensités d'Arias. On retrouve ainsi un effet de scattering due à la présence des hétérogénéités sur ces différentes grandeurs [Shapiro & Hubral, 1999; Sato et al., 2011]. De plus on a identifié l'effet de la longueur de corrélation (ℓ_c) sur la création de coda en utilisant le critère de Kristekova [Kristeková et al., 2006, 2009]. Cela a également permis de quantifier les fréquences impactées par la présence des hétérogénéités en identifiant les fréquences correspondantes aux ondes incohérentes créées par propagation au sein du milieu aléatoire [Aki & Chouet, 1975].

A partir d'un premier scénario, et de différentes sources, il a été discuté de l'effet de l'atténuation en fonction de la distance à la source (hypocentrale et/ou épacentrale) pour faire le lien avec les résultats d'atténuation du chapitre 2 mais également pour faire le lien avec le paramètre empirique κ [Anderson & Hough, 1984]. De plus il a été illustré l'influence des hétérogénéités sur la variation angulaire en termes d'énergie pour les différentes composantes et des conséquences que cela peut avoir sur le calcul de l'atténuation et la comparaison avec une référence.

On retrouve une augmentation de l'atténuation quand la distance source-station augmente. Ce qui revient à une augmentation de la distance de propagation au sein du milieu hétérogène. Le setting utilisé ne permettant pas d'atteindre le régime de localisation identifié chapitre 2, un 2ème scénario a été réalisé pour s'en approcher.

Ainsi, on a pu voir la convergence des valeurs de κ_0 et m_κ en augmentant le nombre de source et ainsi identifier un κ "régional" correspondant au scénario étudié. De plus on a mis en évidence que m_κ correspond essentiellement aux effets des hétérogénéités. Pour κ_0 , dans notre scénario, celui-ci correspond au terme d'ordre 0 en R, c'est à dire le terme lié à la profondeur.

Chapitre 4

Conclusions et premières perspectives

4.1 Atténuation apparente du signal fréquentiel due à la présence d'hétérogénéités

Ce travail de thèse a permis d'obtenir des résultats importants sur l'atténuation des ondes sismiques se propageant au sein d'un milieu aléatoire en fonction de la fréquence et de mettre en évidence les paramètres importants qui sont liés à cette atténuation. Notamment, au sein du chapitre 2, nous avons montré que cette atténuation dépend de :

- la longueur du chemin de parcours dans le milieu aléatoire et le régime de fluctuation considéré
- les propriétés du milieu (moyenne, longueur de corrélation, variance, modèle de corrélation)

Ainsi, nous avons montré un effet différent suivant la polarisation de l'onde considérée. En effet, dans le cas d'une onde en incidence normale se propageant dans une couche aléatoire, les atténuations sur les ondes P et S sont découplées et celles-ci sont quantifiables. Pour une même fréquence, les longueurs de localisation pour l'onde S et pour l'onde P sont différentes (Figure 4.1). En pratique, cela signifie que les fréquences localisées seront différentes suivant si l'on visualise la partie S ou la partie P de l'onde en surface. Dans le cas où l'on a une inclinaison, on va avoir un couplage entre la partie SV et P. La bande de fréquence sur laquelle l'on peut observer une atténuation est plus importante dans le cas de l'onde inclinée par rapport au cas de l'incidence normale. Une partie de l'énergie S va se transformer en énergie P et inversement.

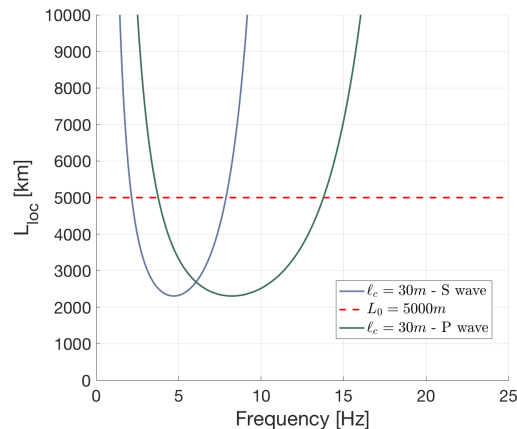


FIGURE 4.1 – Tracé de la longueur de localisation à partir des résultats théoriques (Chapitre 2) pour l'onde S et l'onde P en incidence normale pour $\ell_c = 50$ m, $c_s = 1000$ m/s et $c_p = 1750$ m/s

Par ailleurs, à partir des simulations numériques effectuées dans le chapitre 3, on a tout d'abord retrouvé les effets connus de la présence du milieu hétérogène sur le champ d'onde comme la création de la coda [Aki, 1969; Shapiro & Hubral, 1999; Sato et al., 2011], conséquence des effets de diffusion dûs aux hétérogénéités. On retrouve également ces effets de diffusion sur des grandeurs caractéristiques comme les PGA [Imperator & Mai, 2013]. A partir d'un premier modèle 3D, on a regardé les effets de certains paramètres aléatoires et notamment la longueur de corrélation. En passant d'une longueur de corrélation de 500 m à une longueur de corrélation de 100 m pour des longueurs d'ondes entre ~ 150 m et ~ 2000 m, la partie incohérente (coda) est plus conséquente. L'atténuation haute fréquence a ensuite été étudiée en comparant la réponse homogène et la réponse hétérogène pour différentes sources tout en conservant le même milieu aléatoire. Ainsi, on a pu mettre en avant que la plage de fréquence impactée correspond à la plage entre 5 et 20 Hz. De plus on retrouve la dépendance par rapport à la longueur du chemin parcouru. Cela permet de faire un lien entre la limite du coefficient de transmission déterminée dans le chapitre 2 et le paramètre empirique κ . A partir de cela, on reproduit le calcul de κ sur l'ensemble des données numériques. On retrouve la dépendance en fonction de la distance épacentrale. Néanmoins, on atteint une limite du modèle numérique due aux les dimensions de celui-ci, ne permettant pas d'atteindre des longueurs de propagation de l'ordre de grandeur de la longueur de localisation équivalente. C'est pourquoi on choisit de modifier les propriétés hétérogènes du milieu (ℓ_c , CV, V_s) pour avoir une longueur de localisation limite autour de 20 km (précédemment ~ 100 km avec le premier modèle). On augmente également le nombre de sources pour avoir plus de données par station. A partir de ce nouveau modèle, on recalcule les valeurs de κ , on montre la convergence globale de κ_0 (terme d'atténuation correspondant au site) et m_κ (terme d'atténuation correspondant au chemin de parcours) en fonction du nombre de sources. Cela permet de caractériser le caractère global de ce paramètre dans notre modèle. Ainsi, on montre que κ n'est pas lié à une grandeur locale dans le modèle numérique. Par ailleurs, on peut faire un lien direct entre m_κ et la limite du coefficient de transmission où m_κ est le terme lié aux ordres 1 et supérieur en R (distance épacentrale). On caractérise ainsi le milieu global, et il y a un lien important entre la limite du coefficient de transmission et m_κ . Pour ce qui est de κ_0 , en pratique celui-ci est souvent caractérisé comme étant lié à une propriété locale de la station. On ne retrouve pas cette caractéristique dans le cadre de nos simulations.

4.2 Limitations et perspectives

Une des limitations majeures est que les résultats théoriques imposent des hypothèses (milieu stratifié avec fluctuation 1D, espace semi infini, ...) dont on souhaiterait se soustraire. Les simulations numériques permettent d'aller dans des applications plus proches de la réalité (surface libre, source en milieu aléatoire, etc.) mais dans ce cas nous n'avons pas le développement des équations analytiques associées. La première limitation est la prise en compte de la surface libre. Pour intégrer celle-ci, il faut reconsidérer la condition limite en sortie de la couche aléatoire. Dans le cas de l'incidence normale on aurait cette fois $a_\omega(L) = b_\omega(L) = T_\omega(0, L)$ et non $b_\omega(L) = 0$. Cela impacte le calcul de $R_\omega(0, L)$ et $T_\omega(0, L)$ en fonction de α et β . Dans le cas d'une incidence faible, il faut en plus de cela ajouter des modes de propagation avec une inclinaison différente.

L'autre limitation est l'utilisation d'un milieu aléatoire fluctuant dans les 3 directions. L'inclusion de fluctuation 2D/3D complexifie le système initial. Ajouter une fluctuation sur une autre direction n'est pas envisageable avec les outils de travail utilisés dans les développements analytiques. Il pourrait par contre être intéressant de dégrader une simulation numérique avec fluctuation 1D bien maîtrisée pour regarder l'impact de l'inclusion d'une fluctuation 2D puis 3D. D'un autre côté, au niveau des simulations numériques une des limitations majeures est le coût de calcul pour atteindre les régimes limites en restant avec des propriétés réalistes pour modéliser la croûte terrestre. Dans ces travaux une première adaptation du modèle a été faite pour diminuer la longueur de localisation. En perspective de cela il peut être intéressant d'étendre un modèle numérique pour atteindre des distances épacentrales de l'ordre de 50 km pour améliorer le calcul de κ et s'ap-

procher de distances auxquelles on a des données réelles. Une extension du modèle avait été faite pour un obtenir des distances épacentrales de l'ordre de 50 km. On a tracé les valeurs de κ obtenues pour cette simulation (Voir figure 4.2). La taille du modèle a été étendue à 80 km × 80 km × 10 km et la fréquence maximale simulée à 30 Hz. Le temps de calcul pour simuler un temps de propagation de 40 s est de 16 heures (walltime) sur 2000 processeurs. Le coût de calcul étant conséquent il n'a été possible de faire qu'une seule simulation pour ce modèle.

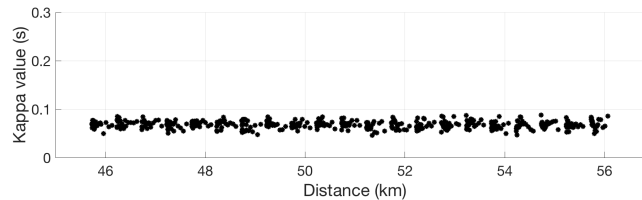


FIGURE 4.2 – Tracé des différentes valeurs de κ pour une seule simulation et différentes stations pour des distances épacentrales autour de 50 km (Chapitre 3).

Par la suite, on a commencé à investiguer, par simulation numérique, l'influence des zones fortement fracturées au niveau des failles. On conclura ainsi ce document par les résultats préliminaires obtenus.

4.3 Utilisation des résultats obtenus pour l'extension à la faille sismique et premières perspectives

Dans cette section, on s'intéresse à la zone très fortement fracturée présente autour des failles sismiques pouvant avoir un impact important sur la propagation d'onde en champ proche de la source sismique. Il est courant de considérer cette zone de faille comme un milieu homogène. Cette zone étant très fine, elle n'a que peu d'interactions avec le contenu basse fréquence des ondes sismiques. Le contenu basse fréquence est normalement le contenu impactant pour la tenue des bâtiments et structures. Néanmoins, la prise en considération des hautes fréquences est importante pour comprendre et modéliser la dynamique de la rupture des failles sismiques. Dans ce contexte, des études poussées de certaines failles ont été menées [Chester & Chester, 1998; Ben-Zion & Sammis, 2003; Mitchell et al., 2011]. Suite à cela, certaines études ont également modélisées la zone particulière autour de la faille par une zone homogénéisée dont les caractéristiques mécaniques sont plus faibles du fait de la présence d'un milieu fortement fracturé [Huang et al., 2014]. La prise en compte des hétérogénéités est aussi un sujet d'intérêt pour la modélisation de la dynamique de rupture d'une faille, la localisation et également la qualification des événements co-sismiques. Okubo [2018] met en avant l'importance de ces zones sur la modélisation de la dynamique de rupture. L'objectif de ces travaux est d'améliorer les connaissances du mécanisme des sources sismiques pour permettre d'évaluer le risque sismique et de prédire l'impact d'un séisme sur les structures sensibles et les zones urbaines. En repartant des résultats analytiques mis en avant précédemment (Chapitre 2), on va s'intéresser à cette structure particulière. Pour cela on va mettre en place un modèle numérique pour obtenir des premiers résultats qui vont montrer l'influence de cette structure sur la partie fréquentielle du signal sismique émis au niveau de la faille. De plus, on va quantifier une partie du signal qui pourra être localisée au sein même de cette structure.

4.3.1 Extension à une faille sismique

A partir des relevés géologiques [Chester & Chester, 1998; Ben-Zion & Sammis, 2003; Mitchell et al., 2011] des fractures proches de la faille, on postule un ordre de grandeur des fluctuations pour pouvoir définir un modèle aléatoire approximant la présence de ces hétérogénéités (figure 1.19).

De plus, [Huang et al. \[2014\]](#) met en avant une zone où la vitesse est plus faible autour du plan de faille (Figure 1.21). On choisit de construire différents modèles numériques : un modèle homogène complet, un modèle homogène possédant une zone affaiblie [[Huang et al., 2014](#)], et un modèle incluant une zone hétérogène (Figure 4.3). A partir de ces modèles on va pouvoir comparer les différentes réponses pour analyser l'effet des hétérogénéités sur le signal sismique. Tous ces modèles seront des demi espaces possédant une surface libre au niveau de la surface supérieure.

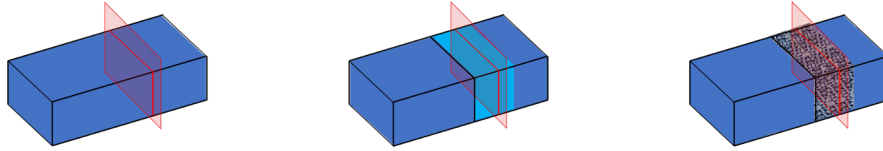


FIGURE 4.3 – Représentation schématique des différents modèles. De droite à gauche, le modèle homogène, le modèle avec inclusion de propriétés plus faibles au niveau de la faille, le modèle avec inclusion aléatoire

4.3.2 Modèle numérique

Le modèle numérique est représenté figure 4.4. On modélise un demi espace d'une taille globale de $3000 \text{ m} \times 3000 \text{ m} \times 6000 \text{ m}$. On définit une zone interne au modèle correspondant à la zone fracturée au niveau de la faille sismique dont la taille correspond à un bloc de $1000 \text{ m} \times 1000 \text{ m} \times 400 \text{ m}$. La surface supérieure du modèle correspond à la surface libre. Au niveau des autres surfaces, des PML sont mis en place pour satisfaire les conditions de rayonnement pour la modélisation du demi espace infini. Pour pouvoir analyser les effets de la présence des hétérogénéités sur le champ proche, on choisit de placer la zone de faille fracturée en profondeur dans le milieu. Au centre de cette zone, on définit le point source correspondant à la position du double couple. Le contenu temporel de la source utilisée correspond à la source du chapitre 2 avec pour transformée de Fourier du déplacement, un plateau fréquentiel entre 5 et 20 Hz. La source utilisée ici sera la même que dans le chapitre 2.

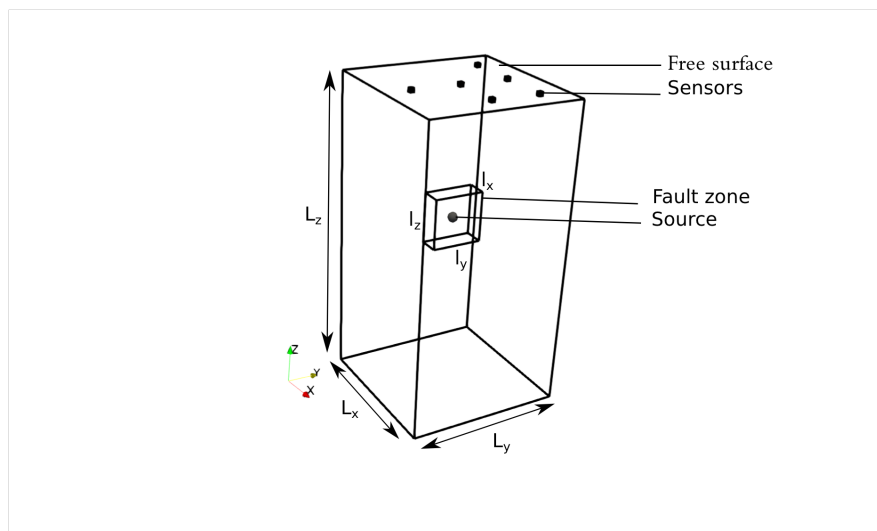


FIGURE 4.4 – Géométrie du modèle numérique 3D de l'inclusion de la zone fortement fracturée

On place plusieurs capteurs à la surface libre sur lesquels seront comparer les différentes réponses en fonction des milieux considérés. Les propriétés mécaniques du milieu externe sont définis dans le tableau 4.1. A partir de [Huang et al. \[2014\]](#), on choisit de définir une largeur de zone

de faille de l'ordre de $L_0 = 400$ m, avec une fluctuation des propriétés de l'ordre de 30%. Pour le milieu incluant la zone affaiblie au niveau de la faille on fixe la vitesse de ce milieu comme étant celui du milieu homogène extérieur avec une diminution de 30% [Huang et al., 2014]. Pour l'inclusion aléatoire on choisit un modèle de corrélation de type Gaussien. On choisira tout d'abord de se placer avec une longueur de corrélation ℓ_c de l'ordre de 50 m avec $\sigma_K = 0.3$ (covariance).

| Milieu | V_p | V_s | ρ |
|--|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| Milieu homogène | 5400m.s ⁻¹ | 3000m.s ⁻¹ | 2700kg.m ⁻³ |
| Zone affaiblie | 3640m.s ⁻¹ | 2100m.s ⁻¹ | 2700kg.m ⁻³ |
| Inclusion aléatoire (valeurs moyennes) | 5400m.s ⁻¹ | 3000m.s ⁻¹ | 2700kg.m ⁻³ |

TABLEAU 4.1 – Propriétés mécaniques du milieu

Dans le cas du milieu aléatoire, on peut, en supposant un milieu aléatoire fluctuant sur une seule direction tracer la longueur de localisation dans le cas correspondant (à partir des résultats du chapitre 2).

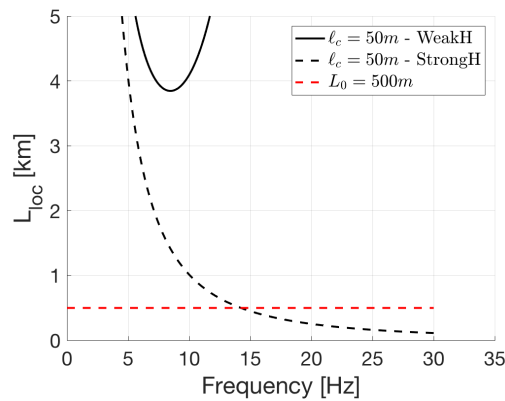


FIGURE 4.5 – Tracé de la longueur de localisation à partir des résultats théoriques (Chapitre 2) et du choix des fluctuations des résultats numériques (Chapitre 3)

A partir du choix de paramètres effectué, on a plus la condition $\sigma \ll 1$, on se situe plutôt dans un milieu fortement hétérogène (Partie 1.3.1).

4.3.3 Etude numérique pour une hétérogénéité 3D

On représente différents snapshots pour le cas homogène et le cas avec inclusion aléatoire (Figure 4.6). On peut voir, à partir de cette simulation que, par rapport au cas du milieu complètement homogène on a création d'une onde incohérente due à la présence du milieu aléatoire. On a également une partie de l'énergie qui est localisée au sein même de cette structure. Cette énergie localisée au sein du milieu est une énergie qui ne sera pas reçue en phase avec l'onde principale au niveau de la surface libre. Il y aura donc une partie manquante dans les capteurs à la surface qui devrait correspondre à cette énergie localisée. Dans la suite on s'intéressera à l'étude des réponses fréquentielles à la surface libre de ce milieu.

Si on s'intéresse aux réponses au niveau de la surface libre (Figure 4.7), on compare tout d'abord la réponse homogène au cas avec vitesse affaiblie. On a autour de 10 – 12 Hz une atténuation par

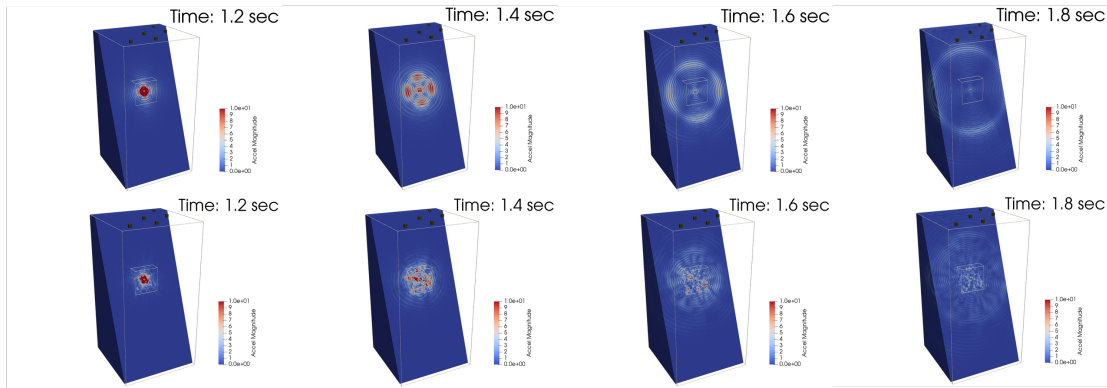


FIGURE 4.6 – Représentation à différents instants de la propagation de l’onde dans le cas d’un milieu complètement homogène (ligne supérieure) ou dans le cas d’un milieu aléatoire suivant un modèle de corrélation de type Gauss

rapport au cas homogène. Cette atténuation est présente dans chacune des stations, mais également dans le cas de l’inclusion aléatoire. Ce résultat laisse à penser que l’on a un effet de résonance de l’inclusion. Pour une V_s de l’ordre de 2100m/s dans le cas de la vitesse affaiblie et une largeur de la zone de 400 m on a un mode fondamental autour de 5 Hz. Il pourrait donc s’agir d’un des harmoniques. Pour confirmer cela il faudrait étendre la source pour voir apparaître les différentes valeurs de résonance. Si on compare désormais la réponse dans le cas homogène à la réponse dans le cas de l’inclusion aléatoire, on voit également que l’on a la partie haute fréquence qui n’est pas reçue en surface (à partir de 15 Hz). Si l’on reprend le tracé de la longueur de localisation (Figure 4.5) on avait pour une longueur L_0 d’environ 500 m une localisation des fréquences à partir de 15 Hz. Ce résultat préliminaire est très intéressant dans le sens où il donne des informations sur une possible localisation des fréquences au sein de la structure aléatoire. Une perspective possible serait de faire une campagne numérique plus complète pour discuter de cette atténuation sur différents tirages. On pourrait également identifier l’effet que l’on observe sur le cas homogène avec vitesse affaiblie et qui revient sur le cas aléatoire pour pouvoir différencier les deux effets (atténuation due aux hétérogénéités et résonance de couche).

Dans la prise en compte de la zone de faille, il serait intéressant de reconsidérer les modèles analytiques en incluant cette fois la source au sein du milieu aléatoire. De plus, une des difficultés majeures étant de choisir les propriétés stochastiques représentatives du milieu fracturé, il serait également intéressant de définir un milieu dont les propriétés mécaniques augmentent en s’éloignant de la zone de faille en suivant un modèle mathématique connu tout en ajoutant des fluctuations autour de ce gradient de propriétés.

Par ailleurs, l’utilisation d’un double couple est normalement une bonne approximation pour modéliser une source sismique en champ lointain. Ici on retrouve pour le cas homogène la forme attendue, celle-ci ayant été vérifiée au préalable. Il pourrait être intéressant de considérer un modèle de source étendue pour modéliser au mieux le mécanisme de faille dans de futurs travaux.

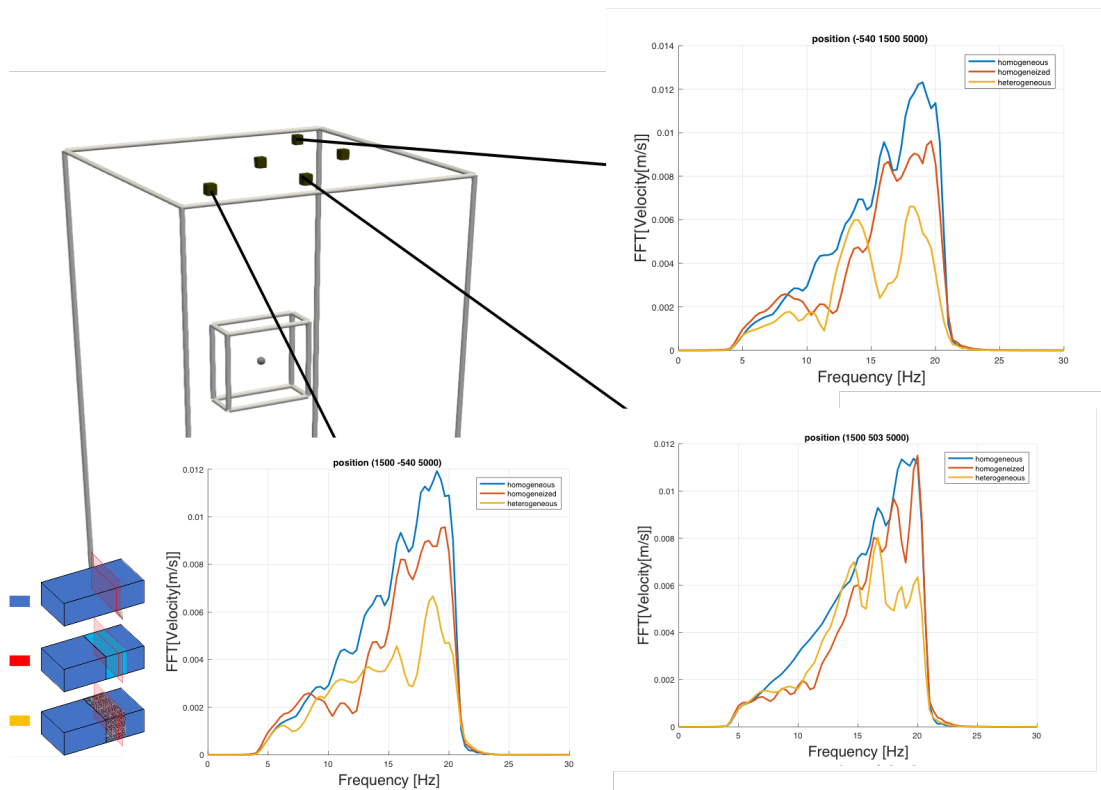


FIGURE 4.7 – Représentation de la réponse en fréquence au niveau de la surface libre pour différentes stations. En bleu on représente la réponse pour le milieu homogène, en rouge le milieu pour le milieu avec la présence de la zone affaiblie, et en jaune le milieu avec inclusion aléatoire.

References

- Aghabarati, H. and Tehranizadeh, M. (2009). Near-source ground motion attenuation relationship for pga and psa of the vertical and horizontal components. *Bulletin of Earthquake Engineering*, 7(3) :609–635. [64](#)
- Aki, K. (1967). Scaling law of seismic spectrum. *Journal of Geophysical Research*, 72(4) :1217–1231. [v](#), [9](#), [10](#)
- Aki, K. (1969). Analysis of the seismic coda of local earthquakes as scattered waves. *Journal of geophysical research*, 74(2) :615–631. [63](#), [100](#)
- Aki, K. and Chouet, B. (1975). Origin of coda waves : source, attenuation, and scattering effects. *Journal of geophysical research*, 80(23) :3322–3342. [27](#), [63](#), [77](#), [86](#), [98](#)
- Aki, K. and Richards, P. G. (1980). Quantitative seismology : Theory and methods. [v](#), [3](#), [7](#), [8](#), [9](#), [10](#), [21](#), [65](#), [66](#), [84](#)
- Anderson, J. G. (1991). A preliminary descriptive model for the distance dependence of the spectral decay parameter in southern california. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 81(6) :2186–2193. [66](#), [88](#), [93](#)
- Anderson, J. G. and Hough, S. E. (1984). A model for the shape of the fourier amplitude spectrum of acceleration at high frequencies. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 74(5) :1969–1993. [25](#), [64](#), [65](#), [88](#), [89](#), [92](#), [97](#), [98](#)
- Arias, A. (1970). Measure of earthquake intensity. Technical report, Massachusetts Inst. of Tech., Cambridge. Univ. of Chile, Santiago de Chile. [64](#), [77](#)
- Backus, G. E. (1962). Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering. *Journal of Geophysical Research*, 67(11) :4427–4440. [50](#)
- Ben-Zion, Y. and Sammis, C. G. (2003). Characterization of fault zones. *Pure and Applied Geophysics*, 160(3-4) :677–715. [14](#), [101](#)
- Bendat, J. S. and Piersol, A. G. (1980). Engineering applications of correlation and spectral analysis. *New York*. [83](#)
- Bonilla, L. F., Guéguen, P., and Ben-Zion, Y. (2019). Monitoring coseismic temporal changes of shallow material during strong ground motion with interferometry and autocorrelation. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 109(1) :187–198. [89](#)
- Bonnefoy-Claudet, S. (2004). *Nature du bruit de fond sismique : implications pour les études des effets de site*. PhD thesis, Grenoble 1. [16](#)
- Boore, D. M. (2003). Simulation of ground motion using the stochastic method. *Pure and applied geophysics*, 160(3-4) :635–676. [65](#), [86](#)
- Brûlé, S. and Javelaud, E. (2013). Méthode h/v en géotechnique. application à un modèle bicouche. *Revue française de Géotechnique*, (142) :3–15. [v](#), [15](#)

- Brune, J. N. (1968). Seismic moment, seismicity, and rate of slip along major fault zones. *Journal of Geophysical Research*, 73(2) :777–784. [v](#), [6](#), [7](#)
- Brune, J. N. (1970). Tectonic stress and the spectra of seismic shear waves from earthquakes. *Journal of geophysical research*, 75(26) :4997–5009. [9](#), [65](#), [67](#)
- Burridge, R. and Knopoff, L. (1964). Body force equivalents for seismic dislocations. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 54(6A) :1875–1888. [7](#), [8](#)
- Capon, J. (1974). Characterization of crust and upper mantle structure under lasa as a random medium. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 64(1) :235–266. [21](#), [23](#), [63](#)
- Chadwick, P. (1989). Wave propagation in transversely isotropic elastic media-ii. surface waves. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 422(1862) :67–101. [50](#)
- Chaljub, E., Maufroy, E., Moczo, P., Kristek, J., Hollender, F., Bard, P.-Y., Priolo, E., Klin, P., De Martin, F., Zhang, Z., et al. (2015). 3-d numerical simulations of earthquake ground motion in sedimentary basins : testing accuracy through stringent models. *Geophysical Journal International*, 201(1) :90–111. [63](#)
- Chester, F. M. and Chester, J. S. (1998). Ultracataclasite structure and friction processes of the punchbowl fault, san andreas system, california. 295(1) :199–221. [14](#), [101](#)
- Chester, F. M., Evans, J. P., and Biegel, R. L. (1993). Internal structure and weakening mechanisms of the san andreas fault. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 98(B1) :771–786. [14](#)
- Cohen, L. (1989). Time-frequency distributions-a review. *Proceedings of the IEEE*, 77(7) :941–981. [89](#)
- Cottureau, R. (2016). *Scale coupling and upscaling techniques in elastostatics and elastodynamics in random media*. Habilitation à diriger des recherches, Université Pierre & Marie Curie - Paris 6. [vi](#), [21](#), [22](#)
- Cushing, E. M., Hollender, F., Moiriat, D., Guyonnet-Benaize, C., Theodoulidis, N., Pons-Branchu, E., Sepulcre, S., Bard, P.-Y., Cornou, C., Dechamp, A., et al. (2020). Building a three dimensional model of the active plio-quaternary basin of argostoli (cephalonia island, greece) : an integrated geophysical and geological approach. *Engineering Geology*, 265 :105441. [14](#)
- de Carvalho Paludo, L., Bouvier, V., and Cottureau, R. (2019). Scalable parallel scheme for sampling of gaussian random fields over very large domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 117(8) :845–859. [68](#)
- Dolan, S. S., Bean, C. J., and Riollet, B. (1998). The broad-band fractal nature of heterogeneity in the upper crust from petrophysical logs. *Geophysical Journal International*, 132(3) :489–507. [63](#)
- Douglas, J., Gehl, P., Bonilla, L. F., and Gélis, C. (2010). A κ model for mainland France. 167(11) :1303–1315. [vii](#), [65](#), [95](#)
- Faccioli, E., Maggio, F., Paolucci, R., and Quarteroni, A. (1997). 2d and 3d elastic wave propagation by a pseudo-spectral domain decomposition method. *Journal of seismology*, 1(3) :237–251. [63](#), [66](#)
- Fouque, J.-P., Garnier, J., Papanicolaou, G., and Solna, K. (2007). *Wave propagation and time reversal in randomly layered media*, volume 56. Springer Science & Business Media. [21](#), [22](#), [24](#), [27](#), [34](#), [35](#), [36](#), [37](#), [38](#), [47](#), [60](#)

- Gatti, F. (2017). *Analyse physics-based de scénarios sismiques «de la faille au site» : prédiction de mouvement sismique fort pour l'étude de vulnérabilité sismique de structures critiques*. PhD thesis, Université Paris-Saclay; Politecnico di Milano. [63](#)
- Graves, R. W. (1996). Simulating seismic wave propagation in 3d elastic media using staggered-grid finite differences. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 86(4) :1091–1106. [63](#)
- Haskell, N. (1964). Total energy and energy spectral density of elastic wave radiation from propagating faults. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 54(6A) :1811–1841. [10](#)
- Haskell, N. A. (1953). The dispersion of surface waves on multilayered media. *Bulletin of the seismological Society of America*, 43(1) :17–34. [11](#)
- Hisada, Y. (1994). An efficient method for computing green's functions for a layered half-space with sources and receivers at close depths. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 84(5) :1456–1472. [v](#), [vii](#), [11](#), [12](#), [72](#), [73](#)
- Hisada, Y. (1995). An efficient method for computing green's functions for a layered half-space with sources and receivers at close depths (part 2). *Bulletin of the Seismological Society of America*, 85(4) :1080–1093. [vii](#), [11](#), [72](#), [73](#)
- Holliger, K. (1997). Seismic scattering in the upper crystalline crust based on evidence from sonic logs. *Geophysical Journal International*, 128(1) :65–72. [63](#)
- Huang, Y., Ampuero, J.-P., and Helmberger, D. V. (2014). Earthquake ruptures modulated by waves in damaged fault zones. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 119(4) :3133–3154. [v](#), [19](#), [20](#), [101](#), [102](#), [103](#)
- Imperator, W. and Mai, P. M. (2013). Broad-band near-field ground motion simulations in 3-dimensional scattering media. *Geophysical journal international*, 192(2) :725–744. [64](#), [76](#), [77](#), [100](#)
- Kanamori, H. (1977). The energy release in great earthquakes. *Journal of geophysical research*, 82(20) :2981–2987. [6](#)
- Kanamori, H. and Anderson, D. L. (1975). Theoretical basis of some empirical relations in seismology. *Bulletin of the seismological society of America*, 65(5) :1073–1095. [v](#), [6](#)
- Komatitsch, D. and Tromp, J. (1999). Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation. *Geophysical journal international*, 139(3) :806–822. [66](#)
- Komatitsch, D. and Tromp, J. (2003). A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation. *Geophysical Journal International*, 154(1) :146–153. [66](#)
- Komatitsch, D. and Vilotte, J.-P. (1998). The spectral element method : an efficient tool to simulate the seismic response of 2d and 3d geological structures. *Bulletin of the seismological society of America*, 88(2) :368–392. [63](#), [66](#)
- Koulakov, I., Bohm, M., Asch, G., Lühr, B.-G., Manzanares, A., Brotopuspito, K., Fauzi, P., Purbawinata, M., Puspito, N., Ratdomopurbo, A., et al. (2007). P and s velocity structure of the crust and the upper mantle beneath central java from local tomography inversion. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 112(B8). [v](#), [14](#), [16](#), [63](#)
- Kristeková, M., Kristek, J., and Moczo, P. (2009). Time-frequency misfit and goodness-of-fit criteria for quantitative comparison of time signals. *Geophysical Journal International*, 178(2) :813–825. [64](#), [70](#), [72](#), [81](#), [98](#)

- Kristeková, M., Kristek, J., Moczo, P., and Day, S. M. (2006). Misfit criteria for quantitative comparison of seismograms. *Bulletin of the seismological Society of America*, 96(5) :1836–1850. [64](#), [70](#), [72](#), [81](#), [98](#)
- Ktenidou, O.-J., Cotton, F., Abrahamson, N. A., and Anderson, J. G. (2014a). Taxonomy of κ : A review of definitions and estimation approaches targeted to applications. *Seismological Research Letters*, 85(1) :135–146. [64](#), [88](#)
- Ktenidou, O.-J., Cotton, F., Abrahamson, N. A., and Anderson, J. G. (2014b). Taxonomy of κ : Review of definitions and estimation approaches targeted to applications. 85(1) :135–146. [65](#), [88](#)
- Ktenidou, O.-J., Gélis, C., and Bonilla, L.-F. (2013). A study on the variability of kappa (κ) in a borehole : Implications of the computation process. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 103(2A) :1048–1068. [64](#)
- Lamb, H. (1904). I. on the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing papers of a mathematical or physical character*, 203(359-371) :1–42. [4](#)
- Meschede, M. and Romanowicz, B. (2015). Lateral heterogeneity scales in regional and global upper mantle shear velocity models. *Geophysical Journal International*, 200(2) :1078–1095. [16](#)
- Mitchell, T., Ben-Zion, Y., and Shimamoto, T. (2011). Pulverized fault rocks and damage asymmetry along the arima-takatsuki tectonic line, japan. *Earth and Planetary Science Letters*, 308(3-4) :284–297. [v](#), [17](#), [18](#), [19](#), [101](#)
- Mitchell, T. and Faulkner, D. (2009). The nature and origin of off-fault damage surrounding strike-slip fault zones with a wide range of displacements : A field study from the atacama fault system, northern chile. *Journal of Structural Geology*, 31(8) :802–816. [19](#)
- Mitchell, T. and Faulkner, D. (2012). Towards quantifying the matrix permeability of fault damage zones in low porosity rocks. *Earth and Planetary Science Letters*, 339 :24–31. [v](#), [19](#), [20](#)
- Nakamura, Y. (1989). A method for dynamic characteristics estimation of subsurface using micro-tremor on the ground surface. *Railway Technical Research Institute, Quarterly Reports*, 30(1). [15](#)
- Okubo, K. (2018). *Dynamic earthquake ruptures on multiscale fault and fracture networks*. Theses, Institut de Physique du Globe de Paris. [7](#), [19](#), [101](#)
- Papageorgiou, A. S. and Aki, K. (1983). A specific barrier model for the quantitative description of inhomogeneous faulting and the prediction of strong ground motion. part II. applications of the model. 73(4) :953–978. [65](#)
- Perron, V., Gélis, C., Froment, B., Hollender, F., Bard, P.-Y., Cultrera, G., and Cushing, E. M. (2018). Can broad-band earthquake site responses be predicted by the ambient noise spectral ratio? insight from observations at two sedimentary basins. *Geophysical Journal International*, 215(2) :1442–1454. [v](#), [14](#), [15](#)
- Richter, C. F. (1935). An instrumental earthquake magnitude scale. *Bulletin of the seismological society of America*, 25(1) :1–32. [6](#)
- Rohmer, O., Bertrand, E., Mercerat, E., Régnier, J., Pernoud, M., Langlaude, P., and Alvarez, M. (2020). Combining borehole log-stratigraphies and ambient vibration data to build a 3d model of the lower var valley, nice (france). *Engineering Geology*, 270 :105588. [14](#)
- Sato, H. (1977). Single isotropic scattering model including wave conversions simple theoretical model of the short period body wave propagation. *Journal of Physics of the Earth*, 25(2) :163–176. [63](#)

- Sato, H. (2019). Power spectra of random heterogeneities in the solid earth. *Solid Earth*, 10(1) :275–292. [vi](#), [23](#), [24](#), [64](#), [69](#), [93](#)
- Sato, H., Fehler, M. C., and Maeda, T. (2011). Seismic wave propagation and scattering in the heterogeneous earth. [21](#), [23](#), [27](#), [63](#), [65](#), [84](#), [86](#), [98](#), [100](#)
- Shapiro, S. A. and Hubral, P. (1999). *Elastic waves in random media : Fundamentals of seismic stratigraphic filtering*. Springer Berlin. [21](#), [27](#), [63](#), [86](#), [98](#), [100](#)
- Tchawe Nziaha, F. (2021). *Numerical simulations of seismic wave propagation in stochastic environments : impact of the spatial variability of soil properties on surface seismic motion*. Theses, Institut de Radioprotection et de sûreté nucléaire. [81](#)
- Thomson, W. T. (1950). Transmission of elastic waves through a stratified solid medium. *Journal of applied Physics*, 21(2) :89–93. [11](#)
- Touhami, S. (2020). *Numerical modeling of seismic field and soil interaction : application to the sedimentary basin of Argostoli (Greece)*. PhD thesis, Université Paris-Saclay. [14](#), [63](#)
- Touhami, S., Lopez-Caballero, F., and Clouteau, D. (2020). A holistic approach of numerical analysis of the geology effects on ground motion prediction : Argostoli site test. *Journal of Seismology*, pages 1–26. [14](#)
- Von Karman, T. (1948). Progress in the statistical theory of turbulence. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 34(11) :530. [23](#), [63](#)
- Wang, Z., Zhao, D., Huang, R., Tang, X., and Mishra, O. (2009). Structural heterogeneity in northeast japan and its implications for the genesis of the 2004 and 2007 niigata earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 99(6) :3355–3373. [v](#), [14](#), [16](#), [17](#), [63](#)
- Wu, R. and Aki, K. (1985a). Elastic wave scattering by a random medium and the small-scale inhomogeneities in the lithosphere. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 90(B12) :10261–10273. [23](#)
- Wu, R.-S. and Aki, K. (1985b). The fractal nature of the inhomogeneities in the lithosphere evidenced from seismic wave scattering. *Pure and applied geophysics*, 123(6) :805–818. [23](#), [63](#)
- Wu, R.-S. and Aki, K. (1988). Introduction : Seismic wave scattering in three-dimensionally heterogeneous earth. In *Scattering and Attenuations of Seismic Waves, Part I*, pages 1–6. Springer. [v](#), [vi](#), [20](#), [21](#), [22](#)

Annexe A

Calcul de la limite du coefficient de transmission à l'ordre 0

On souhaite désormais réécrire l'équation 2.77 pour pouvoir appliquer le théorème 2.34 à partir de la forme de $\mathbf{P}(z=0)$ paramétrée précédemment. On suppose dans le cas présent que seul le coefficient de cisaillement fluctue en fonction de z pour simplifier le modèle. De plus on se placera dans un régime faiblement hétérogène où $\epsilon \sim \sigma$ et $\epsilon \ll 1$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(z)} &= \frac{1}{\bar{\mu}} \left(1 + \epsilon v_\mu \left(\frac{z}{\epsilon^2} \right) \right) \\ \rho(z) &= \bar{\rho} \\ \frac{1}{K(z)} &= \frac{1}{\bar{K}} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

On en déduit, au premier ordre en ϵ , $\Delta_{cp}^\pm = 2\sqrt{\bar{\alpha}}\epsilon(1 \mp \bar{\alpha})v_\mu\left(\frac{z}{\epsilon^2}\right)$, $\Delta_s^{(+)} - 1 = \frac{\epsilon}{2}v_\mu\Delta_s^{(-)} = -\frac{\epsilon}{2}v_\mu\Delta_p^{(+)} - 1 = 0$ et $\Delta_p^{(-)} = 0$.

On réécrit l'équation du problème dont est solution le propagateur défini équation 2.79 :

$$\frac{d}{dz} \mathbf{P}_\omega^\epsilon(0, z) = \frac{i\omega}{\epsilon} \mathbf{H}_\omega \left(\frac{z}{\epsilon^2}, v \left(\frac{z}{\epsilon^2} \right) \right) \mathbf{P}_\omega^\epsilon(0, z)(0, z) \quad (\text{A.2})$$

L'équation A.2 peut être mise sous la forme du théorème 2.34 où $\mathbf{F}(\mathbf{P}, v, \tau) = \frac{\omega}{2\bar{c}_s} \sum_{p=0}^6 a_p g^{(p)}(v, \tau) \mathbf{h}_p \mathbf{P}$ avec :

$$a_{0,1,2} = 1 \quad a_{3,4} = k\bar{c}_s 2\sqrt{\bar{\alpha}}(1 + \bar{\alpha}) \quad a_{5,6} = k\bar{c}_s 2\sqrt{\bar{\alpha}}(1 - \bar{\alpha}) \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} g^{(0)}(v_\mu, \tau) &= v_\mu \left(\frac{z}{\epsilon^2} \right) \\ g^{(1)}(v_\mu, \tau) &= v_\mu \left(\frac{z}{\epsilon^2} \right) \sin \left(\frac{2\omega\tau}{\bar{c}_s \epsilon^2} \right) & g^{(2)}(v_\mu, \tau) &= v_\mu \left(\frac{z}{\epsilon^2} \right) \cos \left(\frac{2\omega\tau}{\bar{c}_s \epsilon^2} \right) \\ g^{(3)}(v_\mu, \tau) &= v_\mu \left(\frac{z}{\epsilon^2} \right) \sin \left(\frac{\omega\tau}{\delta_c^+ \epsilon^2} \right) & g^{(4)}(v_\mu, \tau) &= v_\mu \left(\frac{z}{\epsilon^2} \right) \cos \left(\frac{\omega\tau}{\delta_c^+ \epsilon^2} \right) \\ g^{(5)}(v_\mu, \tau) &= v_\mu \left(\frac{z}{\epsilon^2} \right) \sin \left(\frac{\omega\tau}{\delta_c^- \epsilon^2} \right) & g^{(6)}(v_\mu, \tau) &= v_\mu \left(\frac{z}{\epsilon^2} \right) \cos \left(\frac{\omega\tau}{\delta_c^- \epsilon^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{h}_0 &= \begin{bmatrix} i\sigma_3 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & i\sigma_3 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{h}_1 &= \begin{bmatrix} -\sigma_1 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & -\sigma_1 \end{bmatrix} & \mathbf{h}_2 &= \begin{bmatrix} \sigma_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \sigma_2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{h}_3 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ i\sigma_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & -i\sigma_2 & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} & \mathbf{h}_4 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ -i\sigma_1 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & i\sigma_1 & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{h}_5 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ -\sigma_3 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \sigma_3 & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} & \mathbf{h}_6 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ -i\mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & -i\mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Avec \mathbf{I}_2 la matrice identité 2×2 (Les autres matrices étant définies équation 2.39). On calcule ensuite la matrice de corrélation :

$$C_{pq} = 2 \lim_{Z_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{Z_0} \int_0^{Z_0} \int_0^\infty \mathbb{E} [g^{(p)}(Y(0), \tau) g^{(q)}(Y(z), \tau + z)] dz d\tau \tag{A.6}$$

$$C(\omega) = \begin{bmatrix} \gamma(0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{2\omega}{c_s}\right) & -\frac{1}{2}\gamma^{(s)}\left(\frac{2\omega}{c_s}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma^{(s)}\left(\frac{2\omega}{c_s}\right) & \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{2\omega}{c_s}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{\omega}{\delta_c^+}\right) & -\frac{1}{2}\gamma^{(s)}\left(\frac{\omega}{\delta_c^+}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma^{(s)}\left(\frac{\omega}{\delta_c^+}\right) & \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{\omega}{\delta_c^+}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{\omega}{\delta_c^-}\right) & -\frac{1}{2}\gamma^{(s)}\left(\frac{\omega}{\delta_c^-}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma^{(s)}\left(\frac{\omega}{\delta_c^-}\right) & \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{\omega}{\delta_c^-}\right) & 0 \end{bmatrix} \tag{A.7}$$

Où

$$\gamma(k) = 2 \int_0^\infty \mathbb{E} [v(0)v(z)] \cos(kz) dz, \tag{A.8}$$

$$\gamma^{(s)}(k) = 2 \int_0^\infty \mathbb{E} [v(0)v(z)] \sin(kz) dz. \tag{A.9}$$

La matrice de corrélation $C(\omega)$ peut être décomposée en une partie symétrique (étant ici les éléments diagonaux de la matrice) et une partie antisymétrique (composé des éléments non diagonaux) notées respectivement $C^S(\omega)$ et $C^A(\omega)$. En appliquant le théorème limite, on sait que $\mathbf{P}_\omega^\varepsilon(0, z)$ converge en distribution vers $\mathbf{P}_\omega(0, z)$ qui est un processus linéaire de diffusion solution de l'équation de Stratonovitch (Equation A.10) :

$$d\mathbf{P}(0, z) = \sum_{l=1}^n \tilde{\mathbf{h}}_l \mathbf{P}(0, z) \circ dW_l(z) + \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^n C_{p,q}^{(A)} \mathbf{h}_p \mathbf{h}_q \mathbf{P}(0, z) \tag{A.10}$$

Où $W_l(z)$ sont des mouvements browniens indépendants et $\tilde{\mathbf{h}}_l = \sum_{p=1}^n \tilde{\sigma}_{lp} \mathbf{h}_p$ avec $\tilde{\sigma}$ les racines

carrés de $C^{(S)}$. L'équation A.10 peut être explicitée :

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{P}_\omega(0, z) &= \frac{\sqrt{\gamma(0)}\omega}{2\bar{c}_s} \mathbf{h}_0 \mathbf{P}(0, z) \circ dW_0(z) \\
 &+ \frac{\sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)}\omega}{2\sqrt{2}\bar{c}_s} \left(\mathbf{h}_1 \mathbf{P}(0, z) \circ dW_1(z) + \mathbf{h}_2 \mathbf{P}(0, z) \circ d\tilde{W}_1(z) \right) \\
 &+ k\omega\sqrt{\bar{\alpha}}(1 + \bar{\alpha}) \left(\mathbf{h}_3 \mathbf{P}(0, z) \circ dW_2(z) + \mathbf{h}_4 \mathbf{P}(0, z) \circ d\tilde{W}_2(z) \right) \\
 &+ k\omega\sqrt{\bar{\alpha}}(1 - \bar{\alpha}) \left(\mathbf{h}_5 \mathbf{P}(0, z) \circ dW_3(z) + \mathbf{h}_6 \mathbf{P}(0, z) \circ d\tilde{W}_3(z) \right) \\
 &- \frac{\omega^2}{8\bar{c}_s} \gamma^{(s)} \left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s} \right) \mathbf{h}_0 \mathbf{P}(0, z) dz
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

A partir de l'équation A.11, on peut écrire les équations en fonction des termes de \mathbf{P} , c'est à dire en fonction des α_s^i , α_p^i , α_p^i et β_p^i .

$$\begin{aligned}
 d\alpha_s^0 &= i\omega \frac{\sqrt{\gamma(0)}}{2\bar{c}_s} \alpha_s^0 \circ dW_0(z) - \frac{\omega}{2\sqrt{2}\bar{c}_s} \sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)} \beta_s^0 \circ (dW_1(z) + id\tilde{W}_1(z)) - i \frac{\omega^2}{8\bar{c}_s} \gamma^{(s)} \left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s} \right) \alpha_s^0 dz \\
 d\beta_s^0 &= -i\omega \frac{\sqrt{\gamma(0)}}{2\bar{c}_s} \beta_s^0 \circ dW_0(z) - \frac{\omega}{2\sqrt{2}\bar{c}_s} \sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)} \alpha_s^0 \circ (dW_1(z) - id\tilde{W}_1(z)) + i \frac{\omega^2}{8\bar{c}_s} \gamma^{(s)} \left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s} \right) \beta_s^0 dz \\
 d\alpha_p^1 &= +k\omega\sqrt{\bar{\alpha}}(1 + \bar{\alpha}) \beta_s^0 \circ (dW_2(z) - id\tilde{W}_2(z)) - k\omega\sqrt{\bar{\alpha}}(1 - \bar{\alpha}) \alpha_s^0 \circ (dW_3(z) + id\tilde{W}_3(z)) \\
 d\beta_p^1 &= -k\omega\sqrt{\bar{\alpha}}(1 + \bar{\alpha}) \alpha_s^0 \circ (dW_2(z) + id\tilde{W}_2(z)) + k\omega\sqrt{\bar{\alpha}}(1 - \bar{\alpha}) \beta_s^0 \circ (dW_3(z) - id\tilde{W}_3(z)) \\
 d\alpha_p^0 &= 0 \\
 d\beta_p^0 &= 0 \\
 d\alpha_s^1 &= -k\omega\sqrt{\bar{\alpha}}(1 + \bar{\alpha}) \beta_p^0 \circ (dW_2(z) - id\tilde{W}_2(z)) + k\omega\sqrt{\bar{\alpha}}(1 - \bar{\alpha}) \alpha_p^0 \circ (dW_3(z) - id\tilde{W}_3(z)) \\
 d\beta_s^1 &= k\omega\sqrt{\bar{\alpha}}(1 + \bar{\alpha}) \alpha_p^0 \circ (dW_2(z) + id\tilde{W}_2(z)) - k\omega\sqrt{\bar{\alpha}}(1 - \bar{\alpha}) \beta_p^0 \circ (dW_3(z) + id\tilde{W}_3(z))
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

Le système d'équation A.12 nous montre que α_p^0 et β_p^0 sont indépendants de z dans le cas considéré. Il n'y a pas d'influence du milieu hétérogène sur le coefficient de transmission et de réflexion de l'onde P à l'ordre 0 étant donné que l'on considère le module de compressibilité du milieu comme homogène. On peut choisir $\alpha_p^0 = 1$ et $\beta_p^0 = 0$. Ce qui correspond physiquement à un coefficient de transmission de l'onde P de 1. Le déterminant de P est conservé, toutes les matrices $\mathbf{h}_k \forall k \in \{0, 6\}$ ont une trace nulle. L'équation 2.80 nous permet alors de choisir la paramétrisation suivante :

$$\begin{aligned}
 \alpha_s^0 &= \cosh\left(\frac{\theta_\omega(z)}{2}\right) e^{i\Phi_\omega(z)} \\
 \beta_s^0 &= \sinh\left(\frac{\theta_\omega(z)}{2}\right) e^{i(\Psi_\omega(z) + \Phi_\omega(z))} \\
 \alpha_p^0 &= 1 \\
 \beta_p^0 &= 0
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

On obtient ainsi $d\alpha_s^0 = id\Phi_\omega \alpha_s^0 - \frac{d\theta_\omega}{2} \sinh\left(\frac{\theta_\omega(z)}{2}\right) e^{i\Phi_\omega(z)}$ donc

$$\frac{d\alpha_s^0}{\alpha_s^0} = id\Phi_\omega + \frac{d\theta_\omega}{2} \tanh\left(\frac{\theta_\omega(z)}{2}\right) \tag{A.14}$$

On peut réinjecter la forme de l'équation A.14 dans l'équation A.12 correspondant à l'expression

de α_s^0 ce qui nous donne :

$$id\Phi_\omega + \frac{d\theta_\omega}{2} \tanh\left(\frac{\theta_\omega(z)}{2}\right) = i\omega \frac{\sqrt{\gamma(0)}}{2\bar{c}_s} dW_0(z) - \frac{\omega}{2\sqrt{2}\bar{c}_s} \sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)} \tanh\left(\frac{\theta_\omega(z)}{2}\right) e^{i\Psi_\omega(z)} (dW_1(z) + id\tilde{W}_1(z)) - i \frac{\omega^2}{8\bar{c}_s} \gamma^{(s)}\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right) dz \quad (\text{A.15})$$

En prenant la partie imaginaire de cette équation on obtient une équation sur $d\Phi_\omega$:

$$d\Phi_\omega = \omega \frac{\sqrt{\gamma(0)}}{2\bar{c}_s} dW_0(z) - \frac{\omega}{2\sqrt{2}\bar{c}_s} \sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)} \tanh\left(\frac{\theta_\omega(z)}{2}\right) (\sin\Psi_\omega(z)dW_1(z) + \cos\Psi_\omega(z)d\tilde{W}_1(z)) - \frac{\omega^2}{8\bar{c}_s} \gamma^{(s)}\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right) dz \quad (\text{A.16})$$

En prenant cette fois la partie réelle on obtient une equation sur $d\theta_\omega$

$$d\theta_\omega = -\frac{\omega}{\sqrt{2}\bar{c}_s} \sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)} (\cos\Psi_\omega(z)dW_1(z) - \sin\Psi_\omega(z)d\tilde{W}_1(z)) \quad (\text{A.17})$$

On applique la même démarche dans le cas de β_s^0 avec :

$$id\Phi_\omega + id\Psi_\omega + \frac{d\theta_\omega}{2} \tanh^{-1}\left(\frac{\theta_\omega(z)}{2}\right) = -i\omega \frac{\sqrt{\gamma(0)}}{2\bar{c}_s} dW_0(z) - \frac{\omega}{2\sqrt{2}\bar{c}_s} \sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)} \frac{e^{-i\Psi_\omega(z)}}{\tanh\left(\frac{\theta_\omega(z)}{2}\right)} (dW_1(z) - id\tilde{W}_1(z)) + i \frac{\omega^2}{8\bar{c}_s} \gamma^{(s)}\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right) dz \quad (\text{A.18})$$

Pour avoir l'équation de $d\Psi_\omega$ on doit prendre la partie imaginaire de l'équation précédente en retirant $d\Phi_\omega$. Soit :

$$d\Psi_\omega = -\omega \frac{\sqrt{\gamma(0)}}{\bar{c}_s} dW_0(z) + \frac{\omega}{2\sqrt{2}\bar{c}_s} \sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)} \frac{1}{\tanh\left(\frac{\theta_\omega(z)}{2}\right)} (\sin\Psi_\omega(z)dW_1(z) + \cos\Psi_\omega(z)d\tilde{W}_1(z)) + \frac{\omega^2}{4\bar{c}_s} \gamma^{(s)}\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right) dz + \frac{\omega}{2\sqrt{2}\bar{c}_s} \sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)} \tanh\left(\frac{\theta_\omega(z)}{2}\right) (\sin\Psi_\omega(z)dW_1(z) + \cos\Psi_\omega(z)d\tilde{W}_1(z)) \quad (\text{A.19})$$

Sachant que $2 \tanh\left(\frac{\theta_\omega(z)}{2}\right) = \tanh(\theta_\omega(z)) \left(1 + \tanh^2\left(\frac{\theta_\omega(z)}{2}\right)\right)$ alors on a :

$$d\Psi_\omega = -\omega \frac{\sqrt{\gamma(0)}}{\bar{c}_s} dW_0(z) + \frac{\omega}{2\sqrt{2}\bar{c}_s} \sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)} \frac{1 + \tanh^2\left(\frac{\theta_\omega(z)}{2}\right)}{\tanh\left(\frac{\theta_\omega(z)}{2}\right)} (\sin\Psi_\omega(z)dW_1(z) + \cos\Psi_\omega(z)d\tilde{W}_1(z)) + \frac{\omega^2}{4\bar{c}_s} \gamma^{(s)}\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right) dz \quad (\text{A.20})$$

Et on peut simplifier l'expression pour obtenir la 3ème équation de la paramétrisation choisie :

$$d\Psi_\omega = -\omega \frac{\sqrt{\gamma(0)}}{\bar{c}_s} dW_0(z) + \frac{\omega}{\sqrt{2}\bar{c}_s} \sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)} \frac{1}{\tanh(\theta_\omega(z))} (\sin\Psi_\omega(z)dW_1(z) + \cos\Psi_\omega(z)d\tilde{W}_1(z)) + \frac{\omega^2}{4\bar{c}_s} \gamma^{(s)}\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right) dz \quad (\text{A.21})$$

En utilisant les transformations de ces équations différentielles stochastique en formulation de Itô, on peut faire ressortir le terme correctif et on obtient ainsi le système d'équations suivant pour la reparamétrisation correspondant à l'ordre à l'ordre 0 et à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
 d\Phi_\omega &= \omega \frac{\sqrt{\gamma(0)}}{2\bar{c}_s} dW_0(z) - \frac{\omega}{2\sqrt{2}\bar{c}_s} \sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)} \tanh\left(\frac{\theta_\omega(z)}{2}\right) (\sin \Psi_\omega(z) dW_1(z) + \cos \Psi_\omega(z) d\tilde{W}_1(z)) - \frac{\omega^2}{8\bar{c}_s} \gamma^{(s)}\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right) dz \\
 d\Psi_\omega &= -\omega \frac{\sqrt{\gamma(0)}}{\bar{c}_s} dW_0(z) + \frac{\omega}{\sqrt{2}\bar{c}_s} \sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)} \frac{1}{\tanh(\theta_\omega(z))} (\sin \Psi_\omega(z) dW_1(z) + \cos \Psi_\omega(z) d\tilde{W}_1(z)) \\
 &\quad + \frac{\omega^2}{4\bar{c}_s} \gamma^{(s)}\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right) dz \\
 d\theta_\omega &= -\frac{\omega}{\sqrt{2}\bar{c}_s} \sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)} (\cos \Psi_\omega(z) dW_1(z) - \sin \Psi_\omega(z) d\tilde{W}_1(z)) + \frac{\omega^2 \gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)}{4\bar{c}_s \tanh(\theta_\omega)} dz
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

On obtient ainsi pour les équations sous forme Ito pour le système A.22.

$$\begin{aligned}
 d\Phi_\omega &= \omega \frac{\sqrt{\gamma(0)}}{2\bar{c}_s} dW_0(z) - \frac{\omega}{2\sqrt{2}\bar{c}_s} \sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)} \tanh\left(\frac{\theta_\omega(z)}{2}\right) dW_1^*(z) - \frac{\omega^2}{8\bar{c}_s^2} \gamma^{(s)}\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right) dz \\
 d\Psi_\omega &= -\omega \frac{\sqrt{\gamma(0)}}{\bar{c}_s} dW_0(z) + \frac{\omega}{\sqrt{2}\bar{c}_s} \sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)} \frac{1}{\tanh(\theta_\omega(z))} dW_1^*(z) + \frac{\omega^2}{4\bar{c}_s^2} \gamma^{(s)}\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right) dz \\
 d\theta_\omega &= \frac{\omega}{\sqrt{2}\bar{c}_s} \sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)} d\tilde{W}_1^*(z) + \frac{\omega^2 \gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)}{4\bar{c}_s^2 \tanh(\theta_\omega)} dz
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

A partir de l'équation 2.80 et de manière similaire au cas en incidence normale, on peut définir les coefficients de transmissions et réflexion pour chaque ordre et chaque partie de l'onde.

$$\begin{aligned}
 R_{\omega,s}^{0,\varepsilon}(0,L) &= -\frac{\beta_\omega^{\varepsilon,0}(0,L)}{\alpha_s^{\varepsilon,0}(0,L)} \\
 T_{\omega,s}^{0,\varepsilon}(0,L) &= \frac{1}{\alpha_s^{\varepsilon,0}(0,L)}
 \end{aligned} \tag{A.24}$$

Dans notre cas, on a $\alpha_p^0 = 1$ et $\beta_p^0 = 0$, l'onde P est donc complètement transmise à l'ordre 0. A partir de la paramétrisation équation A.13, $T_{\omega,s}^{0,\varepsilon}$ converge en distribution vers :

$$T_{\omega,s}^0(0,L) = \frac{\exp(i\Phi_\omega(L))}{\cosh\left(\frac{\theta_\omega(L)}{2}\right)} \tag{A.25}$$

On s'intéresse à l'écriture de $T_{\omega,s}^0(0,L)$. Tout d'abord on peut écrire :

$$\exp(i\Phi_\omega(L)) = \exp\left(-i \frac{\omega}{2\sqrt{2}\bar{c}_s} \sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)} \int_0^L \tanh\left(\frac{\theta_\omega(z)}{2}\right) dW_1^*(z) - i\omega \frac{\sqrt{\gamma(0)}}{2\bar{c}_s} W_0(L) - i \frac{\omega^2}{8\bar{c}_s^2} \gamma^{(s)}\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right) L\right) \tag{A.26}$$

De plus on peut écrire la dérivée de $d\left(\frac{1}{\cosh\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right)}\right)$ sous la forme d'une dérivée composée :

$$\begin{aligned}
 d\left(\frac{1}{\cosh\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right)}\right) &= -\frac{1}{2} \frac{\tanh\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right)} \circ d\theta_\omega \\
 d\left(\frac{1}{\cosh\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right)}\right) &= -\frac{1}{2} \frac{\tanh\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right)} \circ \left(\frac{\omega}{\sqrt{2}\bar{c}_s} \sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)} d\tilde{W}_1^*(z) + \frac{\omega^2 \gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)}{4\bar{c}_s^2 \tanh(\theta_\omega)} dz\right)
 \end{aligned} \tag{A.27}$$

Sachant que $d\left(\frac{1}{\cosh\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right)}\right) \cosh\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right) = d\ln\left(\frac{1}{\cosh\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right)}\right)$ et en utilisant le fait que $\tanh(u/2)/\tanh(u) = (1/2)(1 + \tanh^2(u/2))$ on en déduit que :

$$\frac{1}{\cosh\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right)} = \exp\left(-\frac{\omega}{2\sqrt{2}\bar{c}_s}\sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)}\int_0^L \tanh\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right) \circ dW_1^*(z) - \frac{\omega^2}{8\bar{c}_s^2}\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)\int_0^L \frac{1}{2}\left(1 + \tanh^2\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right)\right) dz\right) \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{1}{\cosh\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right)} = \exp\left(-\frac{\omega}{2\sqrt{2}\bar{c}_s}\sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)}\int_0^L \tanh\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right) \circ dW_1^*(z) - \frac{\omega^2}{8\bar{c}_s^2}\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)\int_0^L \frac{1}{2}\tanh^2\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right) dz - \frac{\omega^2}{16\bar{c}_s^2}\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)L\right) \quad (\text{A.29})$$

On transforme ensuite le terme $\frac{\omega}{2\sqrt{2}\bar{c}_s}\sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)}\int_0^L \tanh\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right) \circ dW_1^*(z)$ de Stratonovich en Ito.

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{2\sqrt{2}\bar{c}_s}\sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)}\int_0^L \tanh\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right) \circ dW_1^*(z) &= \frac{\omega}{2\sqrt{2}\bar{c}_s}\sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)}\int_0^L \tanh\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right) dW_1^*(z) \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^L \frac{\omega}{\sqrt{2}\bar{c}_s}\sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)} \times \frac{\omega}{2\sqrt{2}\bar{c}_s}\sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)} \frac{d\tanh\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right)}{d\theta_\omega} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{2\sqrt{2}\bar{c}_s}\sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)}\int_0^L \tanh\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right) \circ dW_1^*(z) &= \frac{\omega}{2\sqrt{2}\bar{c}_s}\sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)}\int_0^L \tanh\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right) dW_1^*(z) \\ &\quad + \int_0^L \frac{\omega^2}{16\bar{c}_s^2}\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right) \times \left(1 - \tanh^2\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right)\right) \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

On peut alors éliminer le terme en $\int_0^L \tanh^2 dz$ et simplifier l'expression par :

$$\frac{1}{\cosh\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right)} = \exp\left(-\frac{\omega}{2\sqrt{2}\bar{c}_s}\sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)}\int_0^L \tanh\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right) dW_1^*(z) - \frac{\omega^2}{8\bar{c}_s^2}\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)L\right) \quad (\text{A.32})$$

On a, à partir de l'expression A.32,

$$|T_{\omega,s}^0(0,L)|^2 = \exp\left(-\frac{\omega}{\sqrt{2}\bar{c}_s}\sqrt{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)}\int_0^L \tanh\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right) dW_1^*(z) - \frac{\omega^2}{4\bar{c}_s^2}\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)L\right) \quad (\text{A.33})$$

On suppose $\gamma(\omega) > 0$, on note $L_{loc}(\omega) = \frac{4\bar{c}_s^2}{\gamma\left(\frac{2\omega}{\bar{c}_s}\right)\omega^2}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{L} \ln |T_{\omega,s}^0(0,L)|^2 &= \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{L} \ln \left[\cosh^{-2}\left(\frac{\theta_\omega}{2}\right) \right] \\ &= - \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{L} \theta_\omega = - \frac{1}{L_{loc}(\omega)} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$