



HAL
open science

Robustesse des systèmes homogènes échantillonnés : application aux systèmes multi-agents

Florence Josse

► **To cite this version:**

Florence Josse. Robustesse des systèmes homogènes échantillonnés : application aux systèmes multi-agents. Automatique / Robotique. Université de Poitiers, 2021. Français. NNT : 2021POIT2298 . tel-03554803

HAL Id: tel-03554803

<https://theses.hal.science/tel-03554803>

Submitted on 3 Feb 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS

FACULTÉ DES SCIENCES FONDAMENTALES ET APPLIQUÉES

Diplôme National - Arrêté du 25 mai 2016

École Doctorale :

**Sciences et Ingénierie des Systèmes, Mathématiques, Informatique
de la ComUE de l'Université Confédérale Léonard de Vinci**

Spécialité :

Automatique, Signal et Robotique

Présentée par

Florence JOSSE

Robustesse des systèmes homogènes échantillonnés: application aux systèmes multi-agents

Directeur de thèse : Emmanuel MOULAY Chargé de recherche CNRS à XLIM

Co-directeur : Emmanuel BERNUAU Maître de conférences à AgroParisTech

Soutenue le 9 décembre 2021

Thèse préparée au sein du
laboratoire XLIM – UMR CNRS 7252

COMPOSITION DU JURY

Rapporteurs : Denis EFIMOV Directeur de recherche à l'INRIA Lille - Nord Europe

Christophe PRIEUR Directeur de recherche CNRS au GIPSA-lab

Examineurs : Mohamed DJEMAI Professeur à l'Université Polytechnique Hauts-de-France

Patrick COIRAULT Professeur à l'Université de Poitiers

Emmanuel MOULAY Chargé de recherche CNRS à XLIM

Emmanuel BERNUAU Maître de conférences à AgroParisTech

Table des matières

1	Introduction générale	3
2	Systèmes homogènes et échantillonnage	7
2.1	Introduction	8
2.2	Homogénéité	8
2.2.1	Stabilité des systèmes dynamiques	11
2.2.2	Homogénéité classique	14
2.2.3	Homogénéité pondérée	15
2.2.4	Homogénéité géométrique	16
2.2.5	Systèmes homogènes	19
2.3	Systèmes contrôlés	22
2.3.1	Systèmes linéaires	24
2.3.2	Systèmes non-linéaires	24
2.4	Échantillonnage de la commande	27
2.4.1	Les différents types d'échantillonnage	27
2.4.2	Les problèmes liés à l'échantillonnage de la commande	31
2.5	Conclusion	32
3	Robustesse des systèmes homogènes échantillonnés	33
3.1	Introduction	34
3.2	Robustesse des systèmes homogènes échantillonnés	39
3.2.1	Modélisation	39
3.2.2	Lemme préliminaire	40
3.2.3	Résultat principal	42
3.3	Exemples et simulations	48

3.4	Conclusion	52
4	Stabilité pratique d'un système multi-agent échantillonné avec leader	53
4.1	Introduction	54
4.2	Présentation des systèmes multi-agents	54
4.2.1	Les différents types de contrôles coopératifs	57
4.2.2	Théorie des graphes	59
4.2.3	Modélisation mathématique des SMA et échantillonnage	61
4.3	Consensus pratique d'un système multi-agents échantillonné	65
4.3.1	Prérequis	65
4.3.2	Formulation du problème	67
4.3.3	Résultat principal	68
4.4	Simulations	70
4.5	Conclusion	72
5	Conclusion et perspectives	77
5.1	Conclusion générale	77
5.2	Perspectives	77
	Références	79

Table des figures

2.1 Leonhard Euler (1707–1783)	9
2.2 Alexander Mikhaïlovich Lyapunov (1857-1918)	12
2.3 Décroissance de l'état $\phi^x(\tau)$ à partir de différentes conditions initiales $x(\tau = 0)$	21
2.4 Évolution de τ_{lim} en fonction de la condition initiale $x(\tau = 0)$	21
2.5 Asservissement d'un système en boucle fermée	23
2.6 Rudolf Kalman (1930-2016)	25
2.7 Systèmes cyber-physiques	27
3.1 Cartographie de la commande (3.4) dans le plan de phase	35
3.2 Cartographie de la commande (3.5) dans le plan de phase	35
3.3 Évolution des commandes (3.4) (en noir) et (3.5) (en rouge) dans le plan de phase pour $h = 0.01s$	36
3.4 Évolution de la commande (3.4) dans le plan de phase pour $h = 2s$	36
3.5 Évolution de la commande (3.5) dans le plan de phase pour $h = 2s$	37
3.6 Écart entre la commande qui devrait être appliquée et la commande réellement appliquée pour les commandes (3.4) (en rouge) et (3.5) (en bleu) pour $h = 2s$	37
3.7 Évolution au cours du temps de l'état x du système (3.14) et de $N(x)$ pour $h = 0.1s$ et $h = 2s$ pour une perturbation externe constante $d_{max} = 10$	50
3.8 Évolution au cours du temps de l'état x du système (3.14) et de $N(x)$ pour $d_{max} = 1$ et $d_{max} = 81$ pour un taux d'échantillonnage constant $h = 2s$	50
3.9 Évolution de la norme supérieure $N(x)$ pour le système (3.14) en fonction du taux d'échantillonnage h pour une perturbation $d_{max} = 10$	51
3.10 Évolution de la norme supérieure $N(x)$ pour le système (3.14) en fonction de la pertur- bation externe d_{max} pour un taux d'échantillonnage constant $h = 0.5s$	52

4.1	Nuée d'oiseaux	54
4.2	Colonie de bactéries	55
4.3	Vol en formation d'avions de combat	55
4.4	Convoi routier de véhicules autonomes ou platooning	56
4.5	Les types de contrôles coopératifs	57
4.6	Flotte de robots centralisée	58
4.7	Flotte de robots distribuée	59
4.8	Représentation de graphes	60
4.9	SMA composé de 3 agents (1,2,3) et d'un leader (0) envoyant ses données à un agent (1)	67
4.10	Graphe de communication du SMA constitué par 5 agents et un leader	70
4.11	Accélérations linéaires $u_0 = (u_{0_x}, u_{0_y})$ du leader	71
4.12	Trajectoires des agents et du leader pour $h = 0.01s$	72
4.13	Positions des agents et du leader pour $h = 0.01s$	73
4.14	Trajectoires du leader et des agents pour $h = 0.45s$	74
4.15	Positions du leader et des agents pour $h = 0.45s$	75
4.16	Résultats de simulation pour une loi de commande homogène pour $h = 0.6s$	76

Notations

Sigles mathématiques

- \mathbb{N} : ensemble des entiers naturels ; $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- \mathbb{R} : ensemble des réels.
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.
- \mathbb{C} : ensemble des complexes.
- \triangleq : est égal à par définition.
- $|\cdot|$: valeur absolue dans \mathbb{R} .
- $\|\cdot\|$: norme euclidienne dans \mathbb{R}^n .
- $\|\cdot\|_2$: norme euclidienne dans \mathbb{R}^2 .
- $[x]^\alpha = (|x_1|^\alpha \text{sign}(x_1), \dots, |x_n|^\alpha \text{sign}(x_n))^T$ où $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha > 0$.
- \mathcal{N} : norme homogène dans \mathbb{R}^n .
- \mathcal{G} : graphe de communication.
- \mathcal{A} : matrice d'adjacence.
- \mathcal{L} : matrice laplacienne.
- I_n : matrice identité dans \mathbb{R}^n .
- $\mathbf{1}_n$: vecteur $(1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$.
- $A \otimes B$: produit de Kronecker de A par B .
- \mathcal{K} est l'ensemble des fonctions $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui sont strictement croissantes et qui vérifient $\sigma(0) = 0$. Une fonction $\sigma \in \mathcal{K}$ sera dite de classe \mathcal{K} .
- \mathcal{KL} est l'ensemble des fonctions $\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telles que pour tout $t \geq 0$ la fonction $r \mapsto \beta(r, t)$ est de classe \mathcal{K} et pour tout $r \geq 0$ la fonction $t \mapsto \beta(r, t)$ est strictement décroissante et tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$.

Fonctions et champs de vecteurs

- On appelle fonction une application Lebesgue mesurable définie de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .
- On appelle champ de vecteurs une application Lebesgue mesurable définie de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n .
- Si $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ est un champ de vecteurs différentiable, on note $d_x f$ sa différentielle au point $x \in \mathbb{R}^n$.
- Si V est une fonction différentiable, on note $\mathcal{L}_f V(x) = d_x V f(x)$ la dérivée de Lie de V le long de f au point $x \in \mathbb{R}^n$.
- Si f et g sont des champ de vecteurs différentiables, on note $[f, g]$ le crochet de Lie de f et g défini par : $[f, g](x) = d_x g \cdot f(x) - d_x f \cdot g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Abréviations

- ISS : Input-to-State-Stability
- SCR : Systèmes Contrôlés en Réseau
- SMA : Système Multi-Agents

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Robustesse du latin *robustus* signifiant solide comme le chêne, et de *robur* signifiant chêne. Robuste désigne ce qui est fort, vigoureux, résistant. La conception de systèmes contrôlés robustes, dont les performances doivent rester acceptables face à des perturbations internes du contrôle ou des perturbations externes du système provenant de l'environnement, est un défi auquel se confrontent les automaticiens. Un système contrôlé robuste doit avoir la capacité d'agir de manière satisfaisante même lorsque les conditions changent par rapport à celles prises en compte dans la phase de modélisation du système et de conception de la commande. Ainsi, un système contrôlé robuste continuera à fonctionner malgré la présence de perturbations en les neutralisant par des interventions correctives de la commande ou bien en minimisant leur impact. L'objectif est donc de développer un système contrôlé stable malgré les perturbations du système et de la commande.

Au cours des deux dernières décennies, les systèmes avec commandes échantillonnées ont fait l'objet d'une attention particulière en raison de leurs nombreuses applications, par exemple dans les systèmes commandés en réseau ou les systèmes cyber-physiques. L'inconvénient de la discrétisation de la loi de commande vient du fait que de l'information se perd pendant entre les périodes d'échantillonnage, car la loi de commande est très souvent conçue en temps continu. Cette perte d'information peut conduire à la déstabilisation du système contrôlé. À cela s'ajoutent les inconvénients liés intrinsèquement à la transmission de l'information dans un réseau : les transmissions par paquets, les retards de transmission, la limitation de la bande passante et les pertes de paquets sont inévitables. Ces perturbations directement liées à la conception de la commande sont dites internes au système. Plusieurs méthodes ont été envisagées pour atténuer les effets de celles-ci sur la dynamique du système.

Une nouvelle classe de systèmes, les systèmes homogènes, est apparue dans les années 1960 et suscite toujours aujourd'hui un grand intérêt. Les systèmes homogènes occupent une place intermédiaire entre

les systèmes dynamiques linéaires et non-linéaires et admettent des propriétés de changement d'échelle qui permettent d'étendre globalement des comportements locaux. Ils généralisent les systèmes linéaires et certains systèmes polynomiaux. Les avantages déjà connus des systèmes homogènes sont multiples : l'extensibilité des trajectoires (notion développée dans le premier chapitre) ou encore la robustesse aux bruits de mesure et aux perturbations exogènes. La robustesse des systèmes homogènes vis-à-vis de l'échantillonnage de la commande a également fait l'objet d'une étude détaillée complète. Le sujet de cette thèse se situe dans la continuité de ces travaux : il consiste à évaluer les effets conjugués de l'échantillonnage de la commande et des perturbations externes sur un système homogène de degré négatif globalement asymptotiquement stable en temps continu et de voir dans quelles proportions sa stabilité est préservée. Nous allons montrer qu'une convergence pratique est atteinte par l'état du système contrôlé dans une zone dont la taille est fonction à la fois du pas d'échantillonnage, du degré d'homogénéité et de l'intensité de la perturbation externe. Ce résultat va ensuite être appliqué dans le cadre des systèmes multi-agents (SMA).

Les SMA forment une branche de l'intelligence artificielle distribuée et connaissent un véritable développement depuis la fin des années 1980. L'une des grandes sources d'inspiration pour les SMA a été l'étude des comportements sociaux de certaines familles d'insectes. Les SMA forment un type intéressant de modélisation de sociétés, et ont à ce titre des champs d'application larges, allant jusqu'aux sciences humaines. La question de la robustesse de tels systèmes face à différents facteurs tels que l'incertitude du système (des agents non fiables, des éléments ou composants défaillants), des attaques malveillantes, des perturbations courantes, des environnements variables liés à des situations inattendues ou des conditions exceptionnelles est inévitable et incontournable. Un SMA peut être vu comme un réseau de communication dont les liens entre les agents sont modélisés par un graphe. Les questions les plus fréquemment soulevées dans la littérature concernent principalement des problématiques de consensus ou de suivi par consensus. On dit qu'un groupe d'agents atteint un consensus stable lorsque tous les individus convergent vers une valeur ou un état commun. Dans le cas d'un suivi par consensus, un agent nommé leader poursuit une trajectoire propre et est suivi par les autres agents appelés suiveurs. Notre objectif dans ce mémoire ici est d'appliquer le résultat théorique obtenu dans le cas d'un SMA désirant atteindre le suivi par consensus pratique (*practical consensus tracking* en anglais). Nous nous plaçons dans la configuration où chacun des agents ne communique qu'avec ses voisins et est donc en capacité de prendre des décisions locales. Nous voulons analyser l'influence conjointe de l'échantillonnage et de l'accélération du leader sur la stabilité du SMA, dans le cas où la loi de commande est homogène de degré négatif.

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres. Le chapitre 2 est consacré à la présentation du concept

d'homogénéité, aux définitions et aux propriétés inhérentes à ce sujet. Quelques rappels concernant la stabilité des systèmes contrôlés et des généralités sur les systèmes homogènes y sont donnés. Nous nous intéresserons également aux principaux types d'échantillonnage et aux problèmes associés à l'échantillonnage de la commande. Le chapitre 3 est consacré à l'étude de la stabilité des systèmes homogènes échantillonnés soumis à une perturbation externe. Nous allons montrer qu'un système homogène non perturbé et stable en temps continu voit sa stabilité préservée dans un sens que nous définirons lorsqu'il est soumis à une perturbation externe et que sa loi de commande est échantillonnée. Ce résultat est ensuite illustré au moyen de simulations via un exemple simple. Le chapitre 4 traite de la problématique du suivi par consensus d'un système multi-agents échantillonné contrôlé par une loi de commande homogène de degré négatif. Nous illustrerons ce résultat au moyen de simulations d'un SMA constitué par 5 agents et un leader. Enfin, le chapitre 5 présente une conclusion qui résume le travail effectué et propose des perspectives pour de futurs travaux.

SYSTÈMES HOMOGENES ET ÉCHANTILLONNAGE

Sommaire

2.1	Introduction	8
2.2	Homogénéité	8
2.2.1	Stabilité des systèmes dynamiques	11
2.2.2	Homogénéité classique	14
2.2.3	Homogénéité pondérée	15
2.2.4	Homogénéité géométrique	16
2.2.5	Systèmes homogènes	19
2.3	Systèmes contrôlés	22
2.3.1	Systèmes linéaires	24
2.3.2	Systèmes non-linéaires	24
2.4	Échantillonnage de la commande	27
2.4.1	Les différents types d'échantillonnage	27
2.4.2	Les problèmes liés à l'échantillonnage de la commande	31
2.5	Conclusion	32

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter le concept d'homogénéité, qui généralise la notion de linéarité, et nous nous intéresserons à l'évolution de sa définition au cours du temps. Nous allons également énoncer des propriétés importantes de géométrie et de stabilité qui caractérisent les systèmes homogènes et qui en font leur singularité et leur intérêt. Nous développerons ensuite la notion de système dynamique contrôlé, en nous intéressant plus particulièrement à une catégorie de systèmes non-linéaires avec commande par modes glissants, qui ont un comportement à rapprocher de celui de systèmes homogènes de degré -1 . La troisième partie de ce chapitre est consacrée à l'échantillonnage de la commande de systèmes contrôlés. Nous allons énoncer les différents types d'échantillonnage les plus fréquemment utilisés et évoquer les problèmes rencontrés relatifs à l'échantillonnage de la commande. Si le lien entre ces deux parties ne semblent pas évident de prime abord, nous verrons dans le chapitre suivant comment l'homogénéité permet de résoudre efficacement le problème de l'échantillonnage de la commande. Il s'agit d'une nouvelle propriété de l'homogénéité découverte ces dernières années et développée dans les articles suivants [16, 17].

2.2 Homogénéité

Apparu dans les années 1640-1650, le terme homogénéité est issu du latin médiéval *homogeneus*, du grec *homogenes* "de même nature", lui-même formé de deux mots : *homos* "même" et de *genos* "genre". Une fonction homogène au sens classique est une fonction qui a un comportement d'échelle multiplicatif par rapport à son ou ses arguments : si l'argument est multiplié par un scalaire, alors le résultat sera multiplié par ce scalaire porté à une certaine puissance, appelée le degré d'homogénéité. Cette définition est une extension de la notion d'homogénéité relative aux fonctions linéaires, qui, mise conjointement avec la notion d'additivité, caractérise les fonctions linéaires. De la définition de l'homogénéité classique, il résulte que l'étude des fonctions homogènes peut se restreindre à l'étude de leur comportement sur une sphère centrée en l'origine du repère. En effet, à partir d'une valeur prise par la fonction en un point situé sur une demi-droite partant de l'origine du repère, il est possible de déterminer n'importe quelle valeur prise par la fonction sur cette demi-droite.

Un système dynamique est dit homogène lorsque l'équation qui régit l'état du système est homogène. Nous pouvons en déduire que le comportement de l'état d'un système homogène sur la sphère centrée en l'origine peut être étendu à l'ensemble de l'espace. Cette propriété relative aux fonctions homogènes permet donc de réduire la dimension du problème d'étude, et donc de le simplifier (voir [150]).

La notion d'homogénéité classique a initialement été définie pour les polynômes à plusieurs va-

riables. Un polynôme homogène est aussi désigné par le terme forme algébrique. Les formes algébriques jouent un rôle important dans les mathématiques du XIXe siècle, elles sont utilisées en géométrie projective et en théorie des nombres. En particulier, leur utilité en géométrie est justifiée par la théorie des invariants. C'est au XVIIIe siècle que le mathématicien suisse Leonhard Euler, dont le portrait est représenté à la Figure 2.1, a énoncé un théorème sur les fonctions homogènes qui est très utilisé en thermodynamique et en économie [11, 32, 57, 141]. L'étude des systèmes homogènes au sens classique a



FIGURE 2.1 – Leonhard Euler (1707–1783)

connu un regain d'intérêt depuis les années 1960, lorsque plusieurs travaux ont été consacrés à l'étude de la stabilisation de systèmes homogènes [63, 64, 83, 93, 107, 197].

Afin d'élargir le champ des polynômes à plusieurs variables vérifiant le critère d'homogénéité, une première extension de la définition a été proposée de manière indépendante par Hermès et Zubov [69, 71, 196]. L'idée est de multiplier chacune des variables par un scalaire porté à une certaine puissance appelée poids, chaque poids attribué étant indépendant et pouvant différer des autres. La transformation ainsi effectuée sur les variables est appelée dilatation. Ce procédé permet ainsi de définir un nouveau type d'homogénéité nommée homogénéité à poids ou homogénéité pondérée, qui s'inscrit comme un prolongement de la définition de l'homogénéité classique, où tous les poids doivent être égaux. Beaucoup de travaux ont utilisé ce concept, notamment pour étudier la stabilité d'un système [61, 110, 119, 154,

155], la robustesse d'un système utilisant les commandes par modes glissants [15, 100], la stabilité de systèmes avec retard [44, 45], ou bien enfin la stabilité de systèmes assurant la convergence en temps fini [22, 76, 120]. Dans [10, 21] il est démontré que la convergence en temps fini est garantie pour les systèmes homogènes de degré négatif qui sont localement asymptotiquement stables. Un autre résultat important démontré indépendamment par Zubov et Rosier et très largement utilisé dans la littérature s'énonce comme suit : si un système continu est globalement asymptotiquement stable, alors il existe pour ce système une fonction de Lyapunov propre et homogène [148].

La principale caractéristique d'un système non-linéaire homogène est que son comportement local est le même que le comportement global, comme pour les systèmes linéaires [10]. De nombreux travaux sur les systèmes homogènes sont en fait des généralisations de propriétés des systèmes linéaires. Les systèmes homogènes peuvent également être utilisés pour approximer des modèles non-linéaires au voisinage d'un point donné en préservant les caractéristiques importantes du système d'origine. Le système non-linéaire ayant un comportement local semblable à celui de son approximation, l'étude du problème se retrouve simplifiée. Une approximation locale homogène peut être déterminée au voisinage de l'origine ou bien de l'infini [6]. Cependant, il existe des systèmes non-linéaires qui n'admettent aucune approximation locale homogène. De plus, la définition de l'homogénéité à poids, qui s'exprime en fonction d'une dilatation donnée, est dépendante du choix des coordonnées. Ainsi, un système qui est homogène dans un ensemble de coordonnées peut ne pas l'être dans un autre. Par ailleurs, il n'existe pas de condition suffisante garantissant l'existence de poids rendant homogène une expression donnée. Les limites de cette définition étant posées, un besoin d'extension de la notion, dont la caractérisation doit s'effectuer sans mentionner les coordonnées, se fait ressentir. La définition de l'homogénéité géométrique est ainsi apparue de façon indépendante dans [89] et dans [149]. L'idée sous-jacente est de remplacer la matrice de dilatation des coordonnées par un flot vérifiant certaines propriétés. Peu d'articles traitent de l'homogénéité géométrique en raison de sa faible utilité pratique. [23] met en lumière dans le cadre de l'homogénéité géométrique les propriétés préalablement démontrées pour les systèmes homogènes pondérés convergeants en temps fini. Nous pouvons également citer [7] qui traite de l'étude des systèmes homogènes échantillonnés par auto-déclenchement.

La première partie de cette section se compose de rappels sur la stabilité des systèmes dynamiques. La section suivante traite de l'homogénéité au sens classique, des propriétés et résultats fondateurs qui y sont associés. Ensuite nous présenterons l'homogénéité pondérée, qui s'inscrit comme un élargissement du concept d'homogénéité au sens classique, et les propriétés qui en découlent. Enfin nous nous intéresserons à l'homogénéité géométrique, qui complète la notion d'homogénéité à poids et qui permet de résoudre le problème de la dépendance de l'écriture en fonction de coordonnées choisies.

2.2.1 Stabilité des systèmes dynamiques

Depuis les travaux d'Isaac Newton (1687), l'idée que l'évolution temporelle d'un système physique quelconque est modélisée par une équation différentielle est admise. Mais ce n'est qu'avec Poincaré, à la fin du 19ème siècle, que commence leur étude qualitative systématique. Un système différentiel du premier ordre s'écrit typiquement sous la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

où la fonction f (généralement supposée continue ou de classe C^1) définit le système dynamique étudié et $x(t)$ désigne l'état du système évoluant au cours du temps $t \geq 0$.

Dans le cas des systèmes non linéaires de la forme (2.1), l'existence de plusieurs points d'équilibres modifie les conditions de stabilité du système. Si la stabilité est facilement définie dans le cas des systèmes linéaires, ce n'est pas aussi simple dans le cas de systèmes non-linéaires. On peut néanmoins définir trois méthodes principales pour étudier la stabilité des systèmes non-linéaires (voir [92]) : deux méthodes locales basées sur la linéarisation du système autour du point d'équilibre appelée la première méthode de Lyapunov ou d'un point de la trajectoire projetée sur un plan appelée théorie de Floquet, et une méthode globale appelée la seconde méthode de Lyapunov utilisant une fonction non-linéaire dite de Lyapunov. Ces résultats sont dûs à Alexander Mikhaïlovich Lyapunov, voir son portrait à la Figure 2.2.

Définition 1. *Un point d'équilibre (ou point singulier) \bar{x} du système (2.1) vérifie $f(\bar{x}) = 0$.*

Grâce à la linéarisation du système autour d'un point d'équilibre, ou sous certaines hypothèses (approximation de faibles déviations), il est souvent possible de décrire localement le système par un modèle mathématique linéaire. Toutefois, aucun système physique n'est rigoureusement linéaire et en dehors du domaine de linéarité, il est nécessaire d'utiliser d'autres méthodes pour vérifier la stabilité et la robustesse aux perturbations d'un système en boucle fermée. De plus, la méthode par linéarisation est une méthode valide seulement localement autour d'un point de fonctionnement et par conséquent, cette méthode ne peut pas être utilisée pour définir un comportement global. De plus, lors de la linéarisation les effets non-linéaires sont alors considérés comme perturbateurs et de ce fait négligés. Or, la dynamique apportée par ces effets non-linéaires est plus riche que celle des systèmes linéaires. De fait, les systèmes non-linéaires peuvent être le siège d'oscillations appelées cycles limites caractérisées par leur amplitude et leur fréquence quelles que soient les conditions initiales et sans l'apport d'excitation extérieure alors qu'un système linéaire, pour osciller, doit présenter une paire de pôles sur l'axe imaginaire, condition très fragile vis-à-vis des perturbations et des erreurs de

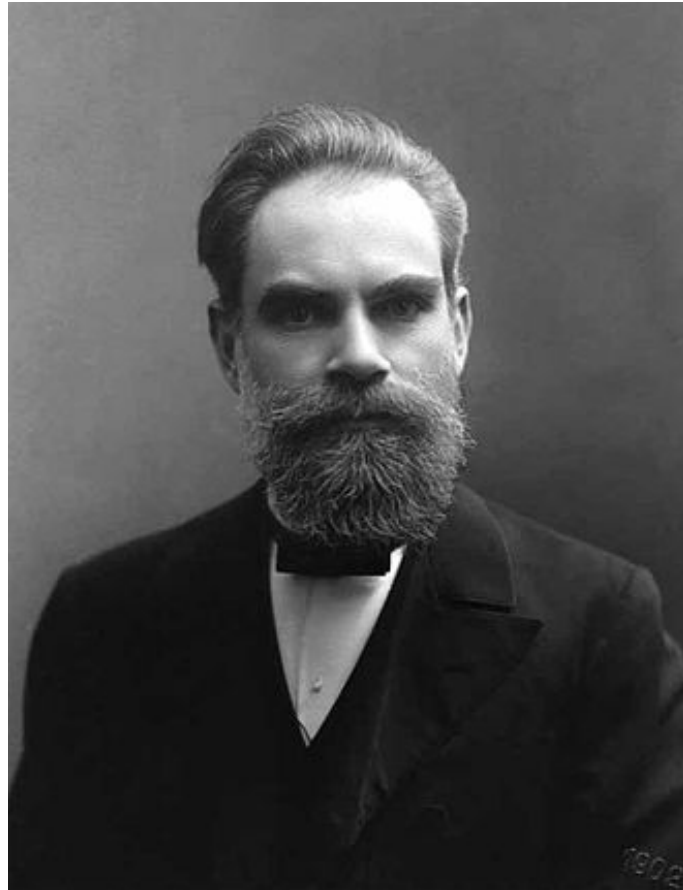


FIGURE 2.2 – Alexander Mikhaïlovich Lyapunov (1857-1918)

modélisation. On peut aussi constater d'autres phénomènes dans les systèmes non linéaires comme les bifurcations qui sont des phénomènes impliquant une variation de l'évolution du système en terme de nombre de points d'équilibre et de stabilité lorsqu'un ou plusieurs paramètres du modèle varient.

Nous allons dans un premier temps définir différents types d'équilibre en supposant le système décrit par le modèle d'état (2.1).

On suppose que le système (2.1) possède un point singulier \bar{x} . Par un changement de variables, on peut toujours se ramener à $\bar{x} = 0$. Dans certains cas, les systèmes n'admettent pas de point d'équilibre, ou alors le point d'équilibre n'est pas stable. Pour autant, les trajectoires ne divergent pas. Divers cas peuvent se produire :

- Le système admet un domaine stable : il existe un domaine de conditions initiales appelé bassin d'attraction tel que toutes les trajectoires restent comprises à l'intérieur de cet ensemble ;
- Le système admet un domaine attractif : il existe un domaine de conditions initiales tel que toutes les trajectoires issues de ce domaine de conditions initiales rentrent dans le domaine attractif au bout d'un certain temps ;
- Le système admet une trajectoire stable. La stabilité d'une trajectoire peut être démontrée par l'application du deuxième théorème de Lyapunov.

Rappelons maintenant quelques notions relatives à la stabilité de Lyapunov d'un système :

Définition 2. *Considérons le système (2.1). Un ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^n$ est :*

- *stable si pour tout voisinage U de K , il existe un voisinage V de K tel que pour tout $x_0 \in V$, toute solution maximale $x(t)$ du système (2.1) avec $x(0) = x_0$ est définie pour tout $t \geq 0$ et vérifie $x(t) \in U$ pour tout $t \geq 0$;*
- *localement attractif s'il existe un voisinage U de K tel que pour toute solution maximale $x(t)$ du système (2.1) telle que $x(0) \in U$, alors $x(t)$ est définie pour tout $t \geq 0$ et $x(t) \rightarrow K$ quand $t \rightarrow +\infty$; le domaine d'attraction d'un ensemble localement attractif est le plus grand ensemble U pour lequel l'assertion précédente est valable ;*
- *globalement attractif s'il est localement attractif et si son domaine d'attraction est \mathbb{R}^n ;*
- *localement (respectivement globalement) asymptotiquement stable s'il est stable et localement (respectivement globalement) attractif ;*
- *instable s'il n'est pas stable.*

Nous allons maintenant définir la notion de fonction de Lyapunov pour le système (2.1).

Définition 3. *Une fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction de Lyapunov pour le système (2.1) si elle vérifie les propriétés suivantes :*

- *V est continûment différentiable ;*
- *V est définie positive, i.e. $V(x) > 0$ pour $x \neq 0$ et $V(0) = 0$;*
- *il existe un voisinage W de 0 tel que la dérivée $\dot{V}(x) = d_x V f(x)$ de $V(x)$ le long de la trajectoire de (2.1) est définie négative, i.e. $\dot{V}(x) < 0$ pour $x \in W \setminus \{0\}$ et $\dot{V}(0) = 0$.*

V définit des équipotentielles de Lyapunov qui sont données par : $\forall c \in \mathbb{R}^+, V^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = c\}$.

Rappelons maintenant le théorème de Lyapunov.

Théorème 4. [106] *Considérons le système (2.1) avec $f(0) = 0$. S'il existe une fonction de Lyapunov pour le système (2.1) alors l'origine est asymptotiquement stable.*

Il existe différents théorèmes inverses de Lyapunov, dont le suivant pour les fonctions continues dû à Kurzweil.

Théorème 5. [94] *Considérons le système (2.1) avec f continue et $f(0) = 0$. Si l'origine est asymptotiquement stable alors il existe une fonction de Lyapunov pour le système (2.1).*

Les théorèmes de Lyapunov et inverse de Lyapunov précédents formulés pour un point d'équilibre se généralisent très naturellement à un ensemble K compact, voir le livre de Bhatia et Szegö [24].

2.2.2 Homogénéité classique

Définition 6. [63] Soient n et m deux entiers positifs. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ est dite homogène au sens classique de degré $\kappa \in \mathbb{R}$ si et seulement si :

$$f(\lambda x) = \lambda^\kappa f(x), \quad \forall \lambda > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Voici quelques exemples intéressants :

- La fonction $f_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2$$

est continue, homogène de degré 3, car

$$f_1(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^3 f_1(x_1, x_2) \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- La fonction $f_2 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$f_2(x_1, x_2) = k_1 |x_1|^\alpha + k_2 |x_2|^\alpha$$

avec $\alpha \in (0, 1)$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, est continue, homogène de degré α , car

$$f_2(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^\alpha f_2(x_1, x_2) \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- La fonction $f_3 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$f_3(x_1, x_2) = k_1 \operatorname{sign}(x_1) + k_2 \operatorname{sign}(x_2)$$

avec $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, est discontinue, homogène de degré 0, car

$$f_3(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^0 f_3(x_1, x_2) \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Rappelons le Théorème d'Euler sur l'homogénéité classique.

Théorème 7. [195] Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction différentiable. φ est \mathbf{r} -homogène de degré κ si et seulement si

$$\sum_{j=1}^n r_j x_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = \kappa \varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs différentiable. f est \mathbf{r} -homogène de degré κ si et seulement si pour tout $i \in \{1 \dots n\}$:

$$\sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = (\kappa + r_i) f_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

2.2.3 Homogénéité pondérée

Définition 8. Un poids généralisé est la donnée d'un n -uplet $r = [r_1, \dots, r_n]$, avec $r_i > 0$ pour tout $i \in \{1 \dots n\}$. La dilatation associée au poids généralisé r est donnée par :

$$\mathbf{\Lambda}_r = \text{Diag}(\lambda^{r_1}, \dots, \lambda^{r_n}).$$

Définition 9. Soit \mathbf{r} un poids généralisé. Une fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite \mathbf{r} -homogène de degré κ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda > 0$, on a :

$$\varphi(\mathbf{\Lambda}_r x) = \lambda^\kappa \varphi(x). \quad (2.2)$$

Un champ de vecteurs $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dit \mathbf{r} -homogène de degré κ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda > 0$, on a :

$$f(\mathbf{\Lambda}_r x) = \lambda^\kappa \mathbf{\Lambda}_r f(x). \quad (2.3)$$

Nous pouvons facilement vérifier que la définition de l'homogénéité à poids est une extension de la définition de l'homogénéité classique. Nous remarquons en effet que l'écriture de la condition d'homogénéité pondérée par rapport à la dilatation $\mathbf{\Lambda}_{(\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1})} = \lambda I_n$ (tous les poids r_i sont égaux à 1) correspond exactement à l'écriture de la définition de l'homogénéité classique :

$$\varphi(\lambda I_n x) = \lambda^\kappa \varphi(x), \quad \forall \lambda > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Cependant, nous constatons un écart entre la définition de l'homogénéité pondérée pour une fonction et pour un champ de vecteurs. En effet, un champ de vecteurs $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ est homogène pondéré si et seulement si pour tout $i \in \{1 \dots n\}$, chaque f_i vérifie : $f_i(\lambda x) = \lambda^\kappa \lambda^{r_i} f_i(x)$. Nous pouvons donc déduire la proposition suivante :

Proposition 10. Un champ de vecteurs f est \mathbf{r} -homogène de degré κ si et seulement si chaque fonction coordonnée f_i est \mathbf{r} -homogène de degré $\kappa + r_i$.

Dans le cas où les f_i sont des fonctions linéaires et $r = [1, \dots, 1]$, cette écriture implique que $\kappa = 0$. Ceci montre qu'un champ de vecteurs linéaire est \mathbf{r} -homogène pondéré de degré 0 relativement au poids

$$\mathbf{r} = [1, \dots, 1].$$

Remarque 11. *Le poids généralisé définissant l'homogénéité d'une fonction ou d'un champ de vecteurs n'est pas unique. En effet, une fonction est \mathbf{r} -homogène de degré κ si et seulement si elle est $\alpha\mathbf{r}$ -homogène de degré $\alpha\kappa$ pour tout $\alpha > 0$.*

Définition 12. *Soit \mathbf{r} un poids généralisé. Une fonction \mathcal{N} est une norme \mathbf{r} -homogène si les trois assertions suivantes sont vérifiées :*

1. \mathcal{N} est définie positive ;
2. \mathcal{N} est \mathbf{r} -homogène de degré 1 ;
3. \mathcal{N} est continue.

Voici deux exemples de norme \mathbf{r} -homogène :

- $\mathcal{N}_\rho(x) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{\rho}{r_i}} \right)^{\frac{1}{\rho}}$ avec $\rho = \prod_{i=1}^n r_i$.
- $\mathcal{N}_\infty(x) = \sup_{i \in \{1 \dots n\}} |x_i|^{\frac{1}{r_i}}$.

Remarque 13. *Une norme \mathbf{r} -homogène \mathcal{N} est toujours radialement non bornée et propre [23, lemme 4.1]. En conséquence, l'ensemble $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{N}(x) = 1\}$ est toujours compact.*

La proposition qui suit est une conséquence immédiate de [23, lemme 4.2].

Proposition 14. *Soient \mathcal{N}_1 et \mathcal{N}_2 deux normes \mathbf{r} -homogènes. Alors il existe $a, b > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:*

$$a\mathcal{N}_1(x) \leq \mathcal{N}_2(x) \leq b\mathcal{N}_1(x).$$

2.2.4 Homogénéité géométrique

2.2.4.1 Cas général

L'écriture de la définition de l'homogénéité pondérée repose sur le choix d'un jeu de coordonnées pour écrire l'état du système. La fonction ou le champ de vecteurs peut donc être homogène vis-à-vis d'un ensemble de coordonnées mais pas par rapport à un autre. Voyons sur un exemple. Soit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ définie par :

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2, 2x_1^3 + (x_2 - x_1^2)^2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

Ce champ de vecteurs n'est homogène pour aucune dilatation donnée. Effectuons maintenant le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_2 - x_1^2 \end{cases} \quad (2.4)$$

Le champ de vecteurs devient :

$$g(z_1, z_2) = (z_1^2, z_2^2), \quad \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Il est facile de vérifier que ce champ de vecteurs est $[1, 1]$ -homogène de degré 2.

L'homogénéité étant une propriété géométrique intrinsèque au système, il est possible de définir ce concept sans recourir aux coordonnées. Si nous considérons l'ensemble $(\mathbf{\Lambda}_r x)_{\lambda > 0}$ pour un $x \in \mathbb{R}^n$ donné, nous pouvons voir que la relation d'homogénéité classique vérifiée par une fonction, respectivement un champ de vecteurs, signifie que le long de la courbe $(\mathbf{\Lambda}_r x)_{\lambda > 0}$, les valeurs obtenues par la fonction, respectivement le champ de vecteurs, sont obtenues à l'aide de la relation 2.2, respectivement 2.3, et nécessitent donc la valeur obtenue par la fonction, respectivement le champ de vecteurs, au point x . L'idée est donc de remplacer la dilatation par un objet qui ne soit pas dépendant des coordonnées, à savoir par le flot d'un champ de vecteurs remplissant certains critères. Selon Kawski ([90]), ces critères sont les suivants :

Définition 15. *Un champ de vecteurs ν est dit **Euler** si et seulement si :*

- $\nu \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$;
- ν est complet ;
- l'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable de $-\nu$.

On désigne par $\Phi^s(x_0)$ l'état du système $\dot{x} = \nu(x)$ au temps s de la trajectoire partant de x_0 à $s = 0$.

Dans la suite, nous allons conserver ces notations.

Nous pouvons étendre la définition d'une norme \mathbf{r} -homogène pour définir la notion de norme ν -homogène.

Définition 16. *Soit ν un champ d'Euler. Une fonction φ ou un champ de vecteurs f est dit ν -homogène de degré κ si et seulement si pour tout $s \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, nous avons :*

$$\varphi(\Phi^s(x)) = e^{\kappa s} \varphi(x), \quad f(\Phi^s(x)) = e^{\kappa s} d_x \Phi^s f(x). \quad (2.5)$$

Définition 17. *Soit ν un champ d'Euler. \mathcal{N} est une norme ν -homogène si les trois assertions suivantes sont vérifiées :*

1. \mathcal{N} est définie positive ;
2. \mathcal{N} est ν -homogène de degré 1 ;
3. \mathcal{N} est continue.

Remarque 18. Si l'on considère le champ d'Euler $\nu_r = \sum_{i=1}^n r_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, avec $r_i > 0$ pour tout $i \in \{1 \dots n\}$, nous voyons que pour une fonction ou un champ de vecteurs être ν_r -homogène correspond au fait d'être \mathbf{r} -homogène avec $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_n]$.

Le théorème suivant appelé le théorème d'Euler pour l'homogénéité géométrique peut être vu comme une extension du théorème 7 :

Théorème 19. Soit φ une fonction différentiable. φ est ν -homogène de degré κ si et seulement si

$$\mathcal{L}_\nu \varphi = \kappa \varphi.$$

Soit f un champ de vecteurs différentiable. f est ν -homogène de degré κ si et seulement si

$$[\nu, f] = \kappa f.$$

Proposition 20. Soit ν un champ d'Euler. Alors il existe une norme ν -homogène.

Démonstration. Soit $f = -\nu$. Puisque $[\nu, f] = 0$, f est ν -homogène de degré 0. D'après le Théorème 28, pour chaque $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $\mu > 0$ et une fonction de Lyapunov V appartenant à $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R}) \cap C^p(\mathbb{R})$ ν -homogène de degré μ . Alors $\mathcal{N} = V^{\frac{1}{\mu}}$ est une norme ν -homogène. \square

2.2.4.2 Cas particulier du champ d'Euler linéaire

Définition 21. Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite une matrice de Hurwitz si et seulement si ses valeurs propres sont à partie réelle strictement négatives.

Si nous considérons une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $-A$ soit une matrice de Hurwitz, le champ de vecteurs défini par $\nu(x) = Ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, est un champ de vecteurs d'Euler. Le flux de ν vérifie, $\Phi^s(x) = \exp(As)x$ pour tout $s \in \mathbb{R}_+$. Si $A = \text{Diag}(r_1, \dots, r_n)$ avec $r_1, \dots, r_n > 0$, le champ de vecteurs défini par $\nu(x) = Ax$ pour $x \in \mathbb{R}^n$, est Euler et nous trouvons : $\Phi^s(x) = \text{Diag}(e^{r_1 s}, \dots, e^{r_n s})x$ pour tout $s \in \mathbb{R}_+$. Dans ce cas, nous avons :

$$\Phi^s(x + y) = \Phi^s(x) + \Phi^s(y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n, \forall s > 0. \quad (2.6)$$

Lemme 22. [17] Soit \mathbf{A} une matrice anti-Hurwitz et \mathcal{N} une norme \mathbf{A} -homogène. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\alpha_1(\mathcal{N}(x)) \leq \|x\|_2 \leq \alpha_2(\mathcal{N}(x))$$

où α_1 and α_2 sont des fonctions \mathcal{K}_∞ .

2.2.5 Systèmes homogènes

Commençons par donner la définition des systèmes homogènes.

Définition 23. Le système (2.1) est homogène si et seulement si la fonction f est homogène.

Nous pouvons maintenant donner un premier exemple important de système homogène développé dans [135].

Exemple 24. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et l_1, \dots, l_n des réels strictement positifs. Soient $1 - \frac{1}{n} < \beta < 1$ et $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_n]$ un poids généralisé, avec $r_i = 1 + (i - 1)(\beta - 1)$ et $r_{n+1} = 1 + n(\beta - 1)$. Considérons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 - \ell_1 [x_1]^{r_2} \\ \vdots \\ \dot{x}_k = x_{k+1} - \ell_k [x_1]^{r_{k+1}} \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n - \ell_{n-1} [x_1]^{r_n} \\ \dot{x}_n = - \ell_n [x_1]^{r_{n+1}} \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Le système (2.7) est \mathbf{r} -homogène de degré $\beta - 1 < 0$.

Nous avons les résultats suivants sur l'homogénéité pondérée.

Proposition 25. [195] Supposons que $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs \mathbf{r} -homogène de degré κ . Pour toute solution $x(t)$ de (2.1), et pour tout $\lambda > 0$, la courbe $t \mapsto \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{r}} x(\lambda^\kappa t)$ est une solution de (2.1). Si le système (2.1) admet un semi-flot $\Psi^t(\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{r}} x)$, nous avons :

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{r}} \Psi^{\lambda^\kappa t}(x) = \Psi^t(\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{r}} x). \quad (2.8)$$

On a la caractérisation suivante du flot des systèmes homogènes.

Proposition 26. [63, 197] Soit un champ de vecteurs $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ homogène de degré κ . Pour toute solution $x(t)$ de (2.1) et pour tout $\lambda > 0$, la courbe $t \mapsto \lambda x(\lambda^{\kappa-1} t)$ est une solution de (2.1). Si le

Le système (2.1) admet un semi-flot $\Psi^t(x)$, nous avons :

$$\lambda \Psi^{\lambda^{\kappa-1}}(x) = \Psi^t(\lambda x). \quad (2.9)$$

Nous avons le pendant de la Proposition 26 pour l'homogénéité géométrique :

Proposition 27. [23] Soit f un champ de vecteurs ν -homogène de degré κ . Pour chaque solution $x(t)$ de (2.1) et pour tout $s \in \mathbb{R}$, la courbe $t \mapsto \Phi^s(x(e^{\kappa s}t))$ est une solution de (2.1). Dans le cas où le système (2.1) admet un flot $\Psi^t(x), t > 0$, on a :

$$\Phi^s \circ \Psi^{e^{\kappa s}t} = \Psi^t \circ \Phi^s. \quad (2.10)$$

Rappelons maintenant le théorème inverse de Lyapunov homogène dû à Rosier.

Théorème 28. [148] Soit le système (2.1) \mathbf{r} -homogène de degré $\kappa \in \mathbb{R}$ avec f continue vérifiant $f(0) = 0$ et $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_n]$. Supposons que l'origine soit localement asymptotiquement stable pour ce système. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit μ vérifiant $\mu > p \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \{r_i\}$. Alors il existe pour ce système une fonction de Lyapunov appartenant à $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R}) \cap C^p(\mathbb{R})$, homogène de degré $\mu > 0$ avec $\kappa + \mu > 0$.

Un système homogène est dit stabilisable s'il existe une loi de commande telle que le système en boucle fermée devient asymptotiquement stable. Pour les systèmes homogènes, la stabilité locale et la stabilité globale sont équivalentes [10].

Les systèmes homogènes sont plus riches en description du mouvement de l'état d'un système que les systèmes linéaires et présentent de nombreux atouts : l'extensibilité des trajectoires [197] (ceci signifie que sur une trajectoire $s \mapsto \exp(As)x, x \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}^+, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ donnée, il est possible de calculer toutes les valeurs prises par f à partir d'une seule valeur de f connue), l'existence de fonctions de Lyapunov homogènes [124, 148], la stabilisation homogène [61, 70, 88, 154], les taux de convergence [23, 124], la robustesse intrinsèque aux perturbations exogènes, aux bruits de mesure [4, 19, 136], la robustesse par rapport aux retards [45, 193], l'homogénéité des limites [6] et les extensions aux inclusions différentielles [99, 124]. Les systèmes homogènes peuvent apparaître naturellement comme des approximations locales de systèmes non-linéaires qui vont hériter de certaines de leurs propriétés, comme par exemple la stabilité asymptotique [72, 89, 124].

Certains phénomènes intéressants peuvent être observés, à savoir des taux de convergence en temps fini pour des degrés d'homogénéité négatifs, voir [23]. Donnons un exemple simple de système stable

en temps fini afin de comprendre cette notion. Soit l'équation

$$\dot{x} = -\varphi_a(x), \quad x \in \mathbb{R}, a \in]0, 1[, \quad (2.11)$$

où $\varphi_a(x) = |x|^a$ dont les solutions partant de x en $\tau = 0$ sont données par

$$\phi^x(\tau) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) \left(|x|^{1-a} - \tau(1-a) \right)^{\frac{1}{1-a}} & \text{si } 0 \leq \tau \leq \tau_{lim} \\ 0 & \text{si } \tau > \tau_{lim} \end{cases}$$

avec $\tau_{lim} = \frac{|x|^{1-a}}{1-a}$, voir la figure 2.3. La figure 2.4 donne l'évolution de τ_{lim} en fonction de la condition

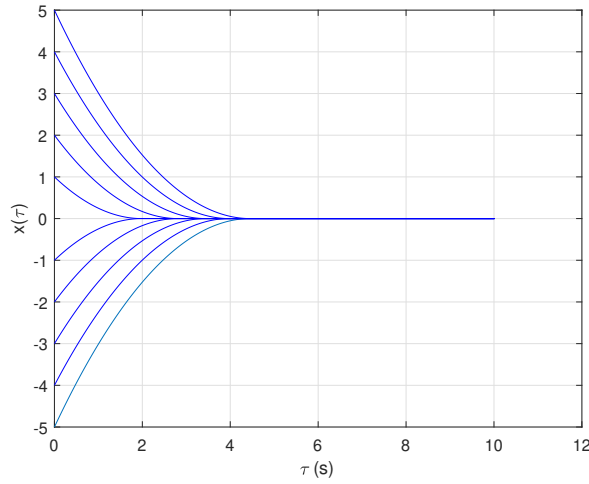


FIGURE 2.3 – Décroissance de l'état $\phi^x(\tau)$ à partir de différentes conditions initiales $x(\tau = 0)$.

initiale. Le système (2.11) est dit stable en temps fini et il est aussi 1-homogène de degré $\kappa = a - 1 < 0$.

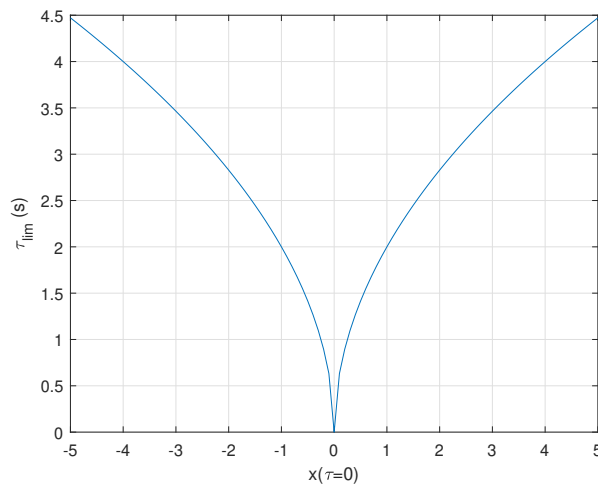


FIGURE 2.4 – Évolution de τ_{lim} en fonction de la condition initiale $x(\tau = 0)$

Nous énonçons maintenant le théorème qui relie l'homogénéité à la stabilité en temps fini.

Théorème 29. [20] *Soit f un champ de vecteurs continu et r -homogène de degré $\kappa < 0$ avec unicité des solutions pour tout $t > 0$. Si l'origine est un point d'équilibre localement attractif de (2.1), alors l'origine est globalement stable en temps fini.*

En raison des nombreuses applications pratiques de la stabilité et stabilisation en temps fini, la théorie de l'homogénéité s'est beaucoup développée ces dernières années. Dans ce manuscrit, nous n'utiliserons pas l'homogénéité pour développer la théorie de la stabilisation en temps fini mais celle de l'échantillonnage de la commande. De façon générale, les systèmes homogènes de degré positif sont souvent Lipschitz mais sont moins utiles en pratique. Leur comportement au voisinage de l'infini s'avère plus intéressant néanmoins. En revanche, les systèmes homogènes de degré négatif ne sont jamais Lipschitz mais possèdent de bonnes propriétés de robustesse et assurent une convergence en temps fini [20, 22]. Cette non-Lipschitzité ne permet pas toutefois l'unicité des solutions, et soulève des problèmes de différentiabilité. L'étude des systèmes homogènes de degré négatif peut se restreindre à l'étude des systèmes dont le degré est compris entre -1 et 0 . Il est à noter que le comportement des systèmes homogènes de degré proche de -1 est à rapprocher du comportement des modes glissants, notion que nous verrons plus en détails par la suite.

2.3 Systèmes contrôlés

Un système dynamique est la donnée d'un système et d'une loi décrivant l'évolution de ce système. Un système modélise un procédé en fonctionnement, il possède une ou plusieurs entrées, et une ou plusieurs sorties. Les entrées du système sont appelées variables exogènes ; elles rassemblent les perturbations et les variables manipulées, commandes ou grandeurs de réglage souvent représentées de manière générique par la lettre u . Elles sont reliées au procédé par un actionneur. Les sorties du système sont appelées variables contrôlées ou mesures et sont souvent représentées de manière générique par la lettre y . Les données de la sortie du système sont récupérées par un capteur. L'automatique est la science qui traite de la modélisation, de l'analyse, de l'identification et de la commande des systèmes dynamiques. Lorsque le système est contrôlé par une loi de commande $u(t)$, l'équation dynamique du système s'écrit :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m. \quad (2.12)$$

Un asservissement est un système dont l'objet principal est d'atteindre le plus rapidement possible sa valeur de consigne et de la maintenir, quelles que soient les perturbations externes. L'utilisation d'une boucle fermée (rétroaction) va être essentielle pour parvenir à remplir cet objectif. Le principe

général est de comparer la consigne et l'état du système de manière à le corriger efficacement. On parle également de système commandé par rétroaction négative.

Un système asservi est composé de 3 parties essentielles schématisées sur la Figure 2.5 :

- le système ou processus physique à réguler qui comprend les actionneurs comme des moteurs par exemple ;
- le capteur chargé de mesurer les signaux de sortie pour ensuite vérifier s'ils sont conformes à la consigne ;
- le correcteur ou contrôleur qui est l'organe de décision chargé de commander le système en fonction d'un objectif appelé consigne et des mesures provenant du capteur.

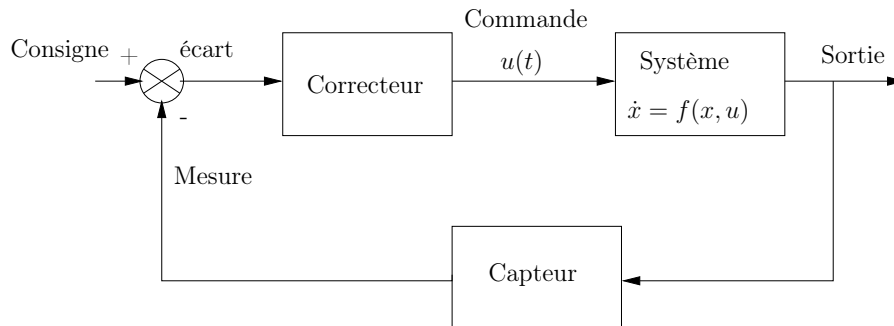


FIGURE 2.5 – Asservissement d'un système en boucle fermée

Un *capteur* est un dispositif qui transforme une grandeur physique (déplacement, vitesse, accélération, température, pression, etc.) en tension électrique dans la plupart des cas. Le *correcteur* est un dispositif en général numérique qui détermine l'entrée u de l'actionneur en fonction de l'erreur présente et parfois aussi passée.

Le système à réguler doit respecter un cahier des charges comprenant :

- la stabilité : le correcteur doit rendre le système stable ;
- la précision : atteindre l'objectif donné par la consigne ;
- la rapidité ;
- le rejet des perturbations ;
- les coûts et délais de développement.

L'asservissement va permettre de stabiliser un système instable en boucle ouverte, compenser des perturbations externes, compenser des incertitudes liées au système lui-même (vieillesse, imprécision du modèle, etc.). Nous distinguons les systèmes dynamiques linéaires des systèmes dynamiques non linéaires. Les systèmes linéaires sont longtemps restés majoritairement étudiés par les automaticiens.

Cependant, la dynamique des systèmes linéaires n'étant pas suffisamment riche pour décrire de nombreux phénomènes couramment observés, le recours aux systèmes non-linéaires s'est accentué à partir des années 1970. Il a alors été possible de modéliser des systèmes pourvus :

- d'équilibres multiples ou points de fonctionnement multiples ;
- de variation périodique des variables d'état ou cycles limites ;
- de bifurcations ;
- de synchronisations et d'entraînements en fréquence ;
- de comportements dynamiques complexes.

2.3.1 Systèmes linéaires

Dans le cas des systèmes linéaires, le membre de droite de l'équation (2.12) est une fonction f dépendant linéairement de x . L'équation d'un système linéaire à temps continu peut être défini pour tout $t \in [0, \infty)$ par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2.13)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{m \times k}$ et $u(t) \in \mathbb{R}^k$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ sont appelés respectivement l'entrée, l'état et la sortie du système. L'équation dynamique $\dot{x}(t)$ est appelée *l'équation de l'état* et l'équation algébrique $y(t)$ est appelée *l'équation de sortie*. Pour une même entrée, différents choix de la condition initiale $x(0)$ pour l'équation d'état entraîneront différentes trajectoires d'état $t \mapsto x(t)$. Par conséquent, à une entrée $u(t)$ correspondent plusieurs sorties possibles $y(t)$.

Kalman fut le grand initiateur de la représentation d'état linéaire et sut mettre en évidence l'intérêt de cette dernière au regard des outils de l'algèbre linéaire, voir son portrait à la Figure 2.6. En 1960, il a développé la théorie presque complète de ces systèmes dans le cas linéaire. Il a notamment mis en évidence les notions fondamentales de commandabilité et d'observabilité. La même année, il faisait la théorie de la commande optimale linéaire quadratique (par application des résultats de Pontriaguine et de Bellman) et sa « version duale », le filtre de Kalman qui généralise le filtre de Wiener [87].

2.3.2 Systèmes non-linéaires

En ce qui concerne le développement des méthodes de contrôle des systèmes non linéaires de la forme (2.12), le lecteur peut se référer au livre de Sontag [160] qui présente de nombreuses méthodes de contrôlabilité et de stabilisation dont le fameux contrôle de Sontag.



FIGURE 2.6 – Rudolf Kalman (1930-2016)

Nous allons nous intéresser plus particulièrement à une méthode de stabilisation liée à l'homogénéité et plus précisément le cas limite où le degré d'homogénéité vaut -1 car cela conduit à définir des commandes discontinues appelées commandes par modes glissants qui sont largement utilisées par la communauté des automaticiens [15, 137]. Nous ne développerons pas ces commandes dans la suite du manuscrit mais c'est une belle illustration de l'importance de l'homogénéité pour la commande. Les commandes par modes glissants ont été utilisées pour la conception des systèmes de commande d'attitude des missiles équipés de propulseurs à réaction dans les années 1950. Mais c'est Utkin qui a formalisé la théorie dans les années 1970 [172]. Les commandes par modes glissants sont caractérisées en pratique par une commutation à haute fréquence de la commande. L'action de commande discontinue, souvent appelée *Variable Structure Control (VSC)*, est définie dans le domaine du temps continu. Le système de rétroaction qui en résulte est appelé *Variable Structure System (VSS)*. La surface de l'espace d'état du système sur lequel les modes glissants se produisent est la surface de glissement. Cette caractéristique particulière du système est censée se traduire par des performances exceptionnelles, notamment une insensibilité aux variations des paramètres et un rejet total des perturbations.

Les principaux avantages de la commande par modes glissants sont les suivantes : la robustesse, la convergence en temps fini vers la surface de glissement et la dynamique compensée d'ordre réduit. Le comportement exceptionnel des systèmes VSS suscite parfois la critique et le scepticisme de la part de la communauté des automaticiens [54]. En effet, le chattering reste le principal obstacle pour que les commandes par modes glissants deviennent l'une des commandes les plus intéressantes en pratique. De nombreuses méthodes de conception analytiques ont été proposées pour réduire ses effets [27, 40, 186].

Les effets des modes glissants peuvent être illustrés par un système de contrôlé extrêmement simple donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u, & x(t) \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.14)$$

avec la commande $u(x) = -k \operatorname{sign}(x)$ où $k > 0$ désigne le gain. Dans cet exemple, la surface de glissement est l'origine. Pour toute condition initiale, la trajectoire de l'état se dirige vers la surface de glissement. Idéalement, si la commande peut commuter infiniment vite, alors $x(t) = 0$, pour tout $t \geq t^*$, où t^* est le premier instant pour lequel $x(t) = 0$. Une fois que la trajectoire de l'état atteint la surface de glissement, elle y reste pour de bon. Cependant, en pratique, des oscillations autour de la surface de glissement apparaissent, c'est le phénomène de chattering. Cela est dû à la présence de non-idéalités de commutations de la commande en raison de l'échantillonnage. Un mode de glissement idéal n'existe pas en pratique car il impliquerait que la commande commute à une fréquence infinie. La présence de dynamiques parasites fait apparaître une oscillation haute fréquence de faible amplitude au voisinage de la surface de glissement. Ces dynamiques parasites représentent en pratique une dynamique rapide des actionneurs et des capteurs qui peut les endommager.

Rajoutons une perturbation externe $d(t) \in \mathbb{R}$ au système (2.14), il devient alors :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u + d(t), & x(t) \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.15)$$

avec la même commande $u(x) = -k \operatorname{sign}(x)$. On voit que la perturbation est éliminée dès lors que $|d(t)| < d_{max} < k$.

Considérons maintenant le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u + d(t), & x_1(t) \in \mathbb{R} \\ \dot{x}_2(t) = \dot{d}(t) - k_2 \operatorname{sign}(x_1), & x_2(t) \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.16)$$

avec la commande $u(x_1) = -k_1 [x_1]^{\frac{1}{2}} - k_2 \int_0^t \operatorname{sign}(x_1(s)) ds$ où $x_2(t) = -k_2 \int_0^t \operatorname{sign}(x_1(s)) ds + d(t)$.

Là aussi, la perturbation est éliminée lorsque $|\dot{d}| < \dot{d}_{max} < k_2$.

Une méthode pour la suppression du chattering est l'utilisation des commandes par modes glissants d'ordre supérieur [98]. Une méthode alternative est la discrétisation temporelle implicite d'Euler [2]. Elle donne une très bonne stabilisation de la trajectoire et de sa dérivée sur la surface de glissement. Par conséquent, les oscillations parasites qui sont parfois signalées lorsqu'une méthode explicite est utilisée, sont évitées, tout en gardant la nature intrinsèquement discontinue de la dynamique sur les surfaces de

glissement. La difficulté principale de cette méthode réside dans le fait que ce type d'implémentation de la commande nécessite la résolution d'une équation non-linéaire en temps réel, ce qui n'est pas toujours possible.

2.4 Échantillonnage de la commande

Les systèmes de données échantillonnées sont des systèmes hybrides pouvant impliquer soit des signaux en temps continu soit des signaux en temps discret. Les systèmes contrôlés échantillonnés que nous allons considérer sont dotés de lois de commande échantillonnées et ont la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(x(t_k))), \quad t \in [t_k, t_{k+1}).$$

Ces lois de commande $u(x(t_k))$ sont mises à jour à chaque instant de discrétisation t_k en prenant en entrée l'état du système à l'instant t_k . Le lecteur peut se référer au survey suivant [74] pour une étude exhaustive sur la stabilité des systèmes échantillonnés en entrée. Dans ce cas on dit qu'on a effectué un retour d'état échantillonné et le fonctionnement de ces systèmes est en boucle fermée. Ce phénomène apparaît principalement de nos jours dans :

1. les systèmes contrôlés en réseaux où l'échantillonnage est dû à l'utilisation de la transmission sans fil [12, 190] ;
2. les systèmes cyber-physiques où l'échantillonnage est dû au temps de calcul de contrôleurs complexes et/ou embarqués et aussi à l'utilisation de l'Internet des objets [158], voir la Figure 2.7.

Dans cette partie, nous allons présenter les différents types d'échantillonnage les plus fréquemment utilisés, puis nous allons évoquer les problèmes générés par la pratique de l'échantillonnage.

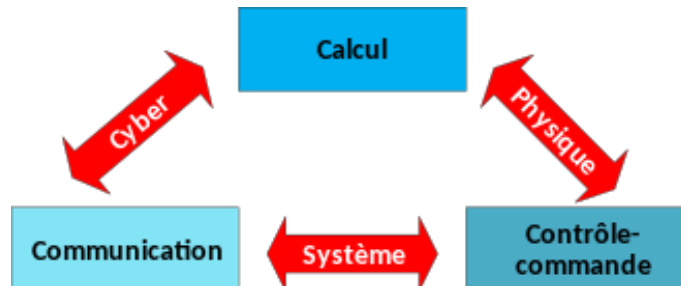


FIGURE 2.7 – Systèmes cyber-physiques

2.4.1 Les différents types d'échantillonnage

L'échantillonnage *sample-and-hold* est un procédé qui consiste à implémenter en temps discret une commande conçue pour un système en temps continu et à maintenir sa valeur jusqu'au prochain temps

de discrétisation [5,9,30,91]. Le système en boucle fermée qui en résulte ne possède pas nécessairement les mêmes propriétés que le système en boucle fermée implémenté en temps continu. La déduction des propriétés en temps discret à partir des propriétés vérifiées en temps continu est assez difficile. On ne peut pas répondre de manière générale à la question : « Est-ce qu'une commande peut stabiliser globalement asymptotiquement l'origine sous une implémentation en temps discret, si elle stabilise globalement asymptotiquement l'origine sous une implémentation en temps continu? » même si la période d'échantillonnage est supposée être arbitrairement petite. De plus, dans le cas où la réponse à la question ci-dessus est affirmative, la prochaine question importante est la suivante : « Quelle est la période d'échantillonnage maximale admissible assurant une stabilité asymptotique globale? ». En général, fournir des réponses aux questions ci-dessus est une tâche hautement non triviale. Il existe plusieurs ouvrages traitant de ces questions importantes et difficiles [51,74,105]. Des travaux ont démontré la stabilité de systèmes non-linéaires échantillonnés vérifiant une condition de stabilité portant sur le système non discrétisé. D'après [95,126], si une loi de rétroaction stabilise globalement asymptotiquement l'origine d'un système non-linéaire en temps continu, alors son émulation conduit en général à une stabilité pratique semi-globale de l'état du système. Le résultat suivant s'applique en revanche seulement à une certaine classe de systèmes non-linéaires. Il est démontré dans [133] que pour un système stable en temps continu, il existe une valeur seuil telle que le système échantillonné reste stable tant que le pas d'échantillonnage demeure en dessous de cette valeur. Dans la continuité de ce travail, les auteurs de [191] montrent qu'un taux d'échantillonnage plus rapide peut augmenter la taille du domaine d'attraction du système. Les auteurs de [169] étudient quant à eux la stabilité d'un système ISS après échantillonnage. Ils démontrent qu'un échantillonnage suffisamment rapide de la loi de commande assurant la stabilité ISS du système en temps continu permet de conserver cette stabilité après échantillonnage. Rappelons la définition de la stabilité ISS.

Définition 30. *Le système (2.12) est appelé entrée-état stable (ISS) s'il existe une fonction β de classe \mathcal{KL} et une fonction γ de classe \mathcal{K} telles que pour chaque commande mesurable essentiellement bornée u et chaque état initial x_0 , la solution existe pour chaque $t \geq 0$ et de plus elle satisfait à :*

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x_0\|, t) + \sup_{0 \leq \tau \leq t} \gamma(\|u(\tau)\|).$$

Un résumé des principaux résultats théoriques concernant les systèmes ISS et les notions connexes de stabilité d'entrée/sortie et de détectabilité est fourni dans [161].

Les principaux procédés mis en place relatifs à l'échantillonnage discret des lois de commande avec rétroaction de type sample-and-hold sont les suivants : l'échantillonnage imposé par le système qu'il

soit périodique ou apériodique, l'échantillonnage déclenché sur événement (event triggered control), l'échantillonnage auto-déclenché (self-triggered control). Pour les systèmes de commande échantillonnés par déclenchement sur événement et auto-déclenchés, l'état du système doit être mesuré (ou estimé) pour calculer la prochaine valeur du contrôleur. Cette information peut donc être utilisée pour décider quand la tâche de contrôle doit être appliquée à nouveau. Les systèmes utilisant ce type d'échantillonnage se composent de deux éléments, à savoir d'un contrôleur à rétroaction qui calcule la commande et d'un mécanisme de déclenchement qui détermine quand la commande doit être actualisée. Nous allons présenter ci-dessous les trois types d'échantillonnage même si nous nous intéresserons par la suite uniquement à l'échantillonnage imposé par le système.

2.4.1.1 L'échantillonnage imposé par le système

L'échantillonnage imposé par le système à la commande peut être périodique ou apériodique. Sa particularité est de ne pas être choisi par l'utilisateur mais imposé par le système à la commande. Ainsi, l'envoi d'une nouvelle commande peut par exemple dépendre de la qualité d'un canal de communication sans fil entre la commande et l'actionneur pour les systèmes contrôlés en réseau. Pour les systèmes à échantillonnage périodique, la loi de commande est mise à jour périodiquement avec un temps d'échantillonnage $t_k = kh$ avec $h > 0$. C'est de loin la plus simple. Il est parfois possible de supposer un échantillonnage périodique dans la mise en oeuvre conventionnelle des systèmes à données échantillonnées. Le principal enjeu de cette approche réside dans la période d'échantillonnage constante qui garantit les niveaux souhaités de performance du contrôle. De plus, les mises en oeuvre périodiques entraînent généralement une utilisation conservatrice des ressources puisque la période est choisie pour le scénario le plus défavorable et que, par conséquent, la commande est exécutée au même rythme quel que soit l'état de l'installation. Mais le plus souvent, l'échantillonnage est apériodique avec une fréquence $t_{k+1} - t_k$ variable mais bornée et l'utilisateur n'a pas de moyen pour la connaître. Il existe une vaste littérature sur ce mode d'opération, mais il existe encore de nombreux points ouverts, en particulier pour les systèmes non-linéaires. Des études se sont concentrées sur des structures spécifiques, ou ont essayé de déterminer l'existence d'un temps d'échantillonnage suffisamment rapide garantissant la stabilité d'un système non-linéaire échantillonné [25]. Des relations implicites entre le domaine d'attraction et les taux d'échantillonnage ont été étudiées dans [133, 191], où certaines estimations pour les périodes d'échantillonnage ont été calculées numériquement dans le cas périodique. Pour l'échantillonnage apériodique, les choses sont encore plus compliquées et des méthodes d'émulation ont permis d'obtenir de bons résultats [74]. Un système échantillonné avec des perturbations est considéré dans [125]. Des conditions suffisantes portant sur le système en temps continu, le contrôleur et le modèle

approximatif en temps discret garantissent que si le système approximé suivant la méthode d'Euler explicite est Input-to-State-Stable, alors le système exact en temps discret est aussi ISS.

Concernant les systèmes linéaires, il existe plusieurs résultats reliant l'échantillonnage et la stabilité du système, la plupart d'entre eux étant basés sur la construction d'un modèle discret équivalent. Un nouveau cadre pour l'analyse de la stabilité des systèmes linéaires à données échantillonnées est proposé dans [156] en utilisant le théorème de Lyapunov en temps discret et le modèle en temps continu des systèmes à données échantillonnées. Des critères de stabilité asymptotiques et exponentiels sont dérivés de cette méthode. Ces critères fournissent des limites supérieures plus strictes de la période d'échantillonnage maximale autorisée que les critères existants, qui sont basés seulement sur la modélisation en temps continu. De nombreux articles reliant des conditions suffisantes d'inégalité de matrice linéaire (Linear Matrix Inequalities) avec la stabilité de systèmes linéaires aperiodiques sont données dans la littérature, basées sur l'existence de fonctions de Lyapunov quadratiques [48, 55, 152] ou de fonctions de Lyapunov qui dépendent de l'intervalle d'échantillonnage [36, 73].

2.4.1.2 L'échantillonnage déclenché sur évènement

Dans le cas de l'échantillonnage déclenché, la tâche de contrôle est exécutée en fonction d'une condition basée sur les mesures de l'installation. Contrairement à l'échantillonnage précédent, c'est l'utilisateur qui fixe au préalable la condition qui déclenchera l'envoi d'une nouvelle commande au système. On peut citer comme exemple le capteur de température qui envoie un signal au contrôleur de la chaudière pour que celui-ci remette en route ou coupe le chauffage. Cette technique a été explorée d'un point de vue stochastique dans [8]. Dans [167], le comportement inter-périodes d'échantillonnage de systèmes non-linéaires a été analysé afin de mettre en place une loi de rétroaction stabilisante déclenchée par évènement. En effet, il semble naturel d'appliquer la loi de rétroaction au moment où quelque chose de significatif se produit dans le processus. Cette stratégie permet de réduire l'utilisation des ressources, de fournir une plus grande robustesse, mais dans de nombreux cas, elle nécessite un matériel spécial, qui n'est pas disponible dans les appareils à usage général, pour décider quand le contrôle doit être exécuté [1]. La notion de retour déclenché par évènement est apparue sous différents noms, tels que le retour basé sur les interruptions [78], l'échantillonnage de Lebesgue [8], l'échantillonnage asynchrone [175] ou le retour déclenché par état. La commande déclenchée par évènement est capable de réduire significativement le nombre de transmissions par rapport à l'échantillonnage périodique traditionnel [109, 138, 177]. Néanmoins, l'évaluation continue de la condition de déclenchement n'est pas possible lorsque la plate-forme de mise en oeuvre est numérique. Au lieu de cela, le critère de déclenchement ne peut être évalué qu'à certains instants d'échantillonnage, ce qui conduit à la commande périodique

déclenchée par événement (PETC) [66–68]. Divers autres types de conditions de déclenchement ont été proposés dans la littérature : l’envoi sur delta (échantillonnage de Lesbegue déclenchement absolu) [31, 132], l’envoi sur l’énergie [116], l’envoi sur la zone [117] ou bien l’échantillonnage de Lyapunov [50, 139, 156, 174].

2.4.1.3 L’échantillonnage par auto-déclenchement

La différence entre la commande déclenchée par événement et la commande auto-déclenchée est que la première est réactive, tandis que la seconde est proactive. En effet, dans le cas d’une commande déclenchée par événement, une condition de déclenchement basée sur des mesures de l’état du système est continuellement appliquée et dès qu’elle n’est plus respectée, un événement est déclenché. Dans la commande auto-déclenchée, le moment de la prochaine mise à jour est précalculé, basé sur des prédictions utilisant les données reçues précédemment et la connaissance de la dynamique de l’installation. Cependant, ces deux d’échantillonnages partagent le fait d’être choisis par l’utilisateur et donc ajustables, contrairement à l’échantillonnage imposé par le système. Dans cette méthode, l’idée sous-jacente est de fusionner les avantages des implémentations à déclenchement temporel et événementiel : réduire le nombre de fois que les tâches de contrôle sont exécutées sans recourir à du matériel supplémentaire. Le modèle auto-déclenché a été étudié précédemment pour les systèmes linéaires dans [97] et dans [173]. La sélection de la période d’échantillonnage pour ce type de systèmes nécessite une analyse détaillée du comportement du système entre les temps d’échantillonnage. Cela implique généralement l’étude d’une fonction de Lyapunov candidate, comme l’ont fait Zheng et al.[191] pour une classe de systèmes non-linéaires à données échantillonnées. Nesic et al.[126] ont utilisé des techniques de stabilité entre l’entrée et l’état, ou Input to State Stability pour limiter le comportement des systèmes non-linéaires entre chaque temps d’échantillonnage. Le modèle de la stabilité entrée/état (ISS) est motivé comme une généralisation des concepts classiques de systèmes linéaires sous changement de coordonnées. Cette approche a été utilisée par Tabuada et al.[168] pour estimer les périodes d’échantillonnage d’une classe de systèmes de contrôle non-linéaires déclenchés par des événements. Une implémentation de commande par auto-déclenchement est proposée dans [109] et garantit une stabilité ISS d’un système linéaire soumis à des perturbations additives externes.

2.4.2 Les problèmes liés à l’échantillonnage de la commande

Dans un système, lors de la transmission de données numériques par paquets entre les dispositifs de contrôle, qui s’effectue sur des largeurs de bandes limitées, les retards de réseau et les pertes de paquets sont inévitables. Le retard induit par le réseau qui se produit lors de l’échange de données

entre les dispositifs, qu'il soit constant ou variable dans le temps, peut dégrader les performances des systèmes de commande conçus sans tenir compte de ce retard et même déstabiliser le système.

Dans certaines applications récentes, il est difficile d'effectuer rigoureusement un échantillonnage périodique. Les ressources pour la mesure et le contrôle étant limitées dans les systèmes contrôlés en réseau et/ou embarqués [79], l'opération d'échantillonnage tend à être apériodique et incertain. Compte tenu de l'utilisation répandue de ces systèmes, il est important d'étudier la robustesse face à la variation des intervalles d'échantillonnage. L'approche dite du retard d'entrée [51, 52] a été proposée pour traiter les systèmes à échantillonnage apériodique. L'idée de base de l'approche est de modéliser les opérations d'échantillonnage et de maintien apériodiques par un retard variable dans le temps à l'entrée de commande, ainsi peut-on appliquer les méthodologies développées pour les systèmes à retard dans le temps aux systèmes à données échantillonnées apériodiques. Plusieurs problèmes d'analyse et de synthèse ont été résolus sur la base de cette approche, par exemple dans [123, 164, 165]. Pour les systèmes linéaires avec des retards variables, de nouvelles conditions de stabilité sont proposées en termes d'inégalités matricielles dans [53, 62, 128].

2.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté la notion d'homogénéité mathématique, qui étend la notion de linéarité et qui caractérise un certain type de symétrie d'un objet au moyen d'une opération de dilatation. Nous avons vu que le concept d'homogénéité a beaucoup évolué au cours de ces dernières décennies, en s'élargissant au fur et à mesure. La forme la plus utilisée dans la littérature est la forme pondérée. Les avantages apportés par les systèmes contrôlés homogènes sont multiples : l'extensibilité des trajectoires, la robustesse aux mesures aux bruits de mesure et aux perturbations exogènes. L'échantillonnage des lois de commande a connu un véritable essor avec le développement des systèmes contrôlés en réseaux, des systèmes cyber-physiques et de l'internet des objets ces dernières années. Nous avons évoqué les principaux types d'échantillonnage les plus fréquemment rencontrés et les problématiques liées aux effets de l'échantillonnage sur les systèmes, qui sont majoritairement des problèmes de stabilité. Dans le chapitre suivant, nous allons porter notre attention plus particulièrement sur l'échantillonnage des systèmes homogènes afin de comprendre en quoi l'homogénéité peut aider à limiter le problème d'instabilité généré par l'échantillonnage de la commande.

ROBUSTESSE DES SYSTÈMES HOMOGÈNES ÉCHANTILLONNÉS

Sommaire

3.1	Introduction	34
3.2	Robustesse des systèmes homogènes échantillonnés	39
3.2.1	Modélisation	39
3.2.2	Lemme préliminaire	40
3.2.3	Résultat principal	42
3.3	Exemples et simulations	48
3.4	Conclusion	52

3.1 Introduction

Les travaux présentés dans ce chapitre ont été publiés dans l'article [85].

L'intérêt que porte la communauté des chercheurs en automatique aux systèmes homogènes se justifie notamment par leur comportement face à l'échantillonnage de la commande. Nous allons présenter dans un premier temps succinctement les résultats antérieurs traitant de la stabilité des systèmes homogènes échantillonnés, et faire état de leurs propriétés de robustesse. La problématique que nous allons poser viendra alors s'inscrire dans la continuité de ces travaux, à savoir la question de la stabilité d'un système homogène échantillonné soumis à une perturbation externe. La preuve détaillée de l'article [85] s'ensuit. Nous allons déterminer l'influence des perturbations endogènes (liées à l'échantillonnage) et exogènes appliquées conjointement sur la stabilité du système et établir s'il existe une interférence entre elles. Enfin une perspective d'extension de ce résultat sera proposée en fin de chapitre.

Afin de bien comprendre les difficultés générées par l'échantillonnage de la commande, commençons par un exemple introductif simple, celui du double intégrateur

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), & t \geq 0 \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

On veut discrétiser la commande $u(t)$ à des instants $(t_k)_{k \geq 0}$ suivant le procédé d'échantillonnage sample-and-hold. Le système devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), & t \in [t_k, t_{k+1}) \\ \dot{x}_2(t) = u(t_k) \end{cases} \quad (3.2)$$

On suppose la commande discrétisée et mise à jour aux instants t_k . Entre deux instants de discrétisation, elle reste constante (bloqueur d'ordre zéro). On suppose que les temps de discrétisation $(t_k)_{k \geq 0}$ vérifient :

$$t_{k+1} - t_k = h. \quad (3.3)$$

On va considérer deux types de commande, une commande linéaire (3.4) notée u_{lin} et une commande non-linéaire (3.5) notée u_{hom} définies par :

$$u_{lin}(t) = -x_1(t) - x_2(t) \quad (3.4)$$

et

$$u_{hom}(t) = -[x_1(t)]^\alpha - [x_2(t)]^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} \quad (3.5)$$

avec $\alpha \in (0, 1)$. Cette commande est mentionnée dans [18]. Il est facile de montrer qu'elle est $[1, 1 + \alpha]$ -homogène de degré $\alpha - 1 < 0$.

Le système avec la commande linéaire (3.4) a un temps de Schur égal à $T_{Schur} = 2s$ (ce qui revient à prendre $h = 2s$). On sait que pour $h \geq 2s$, le système avec la commande (3.4) est instable. On a par contre la stabilité dans un ensemble pour le système avec la commande homogène (3.5) en choisissant α tel que le degré d'homogénéité du système en boucle fermée soit négatif. On prendra par la suite $\alpha = 0.5$.

Les deux figures 3.1 et 3.2 montrent la cartographie des deux commandes dans le plan de phase. On retrouve bien pour la commande linéaire la portion du plan définie par $-x_1 - x_2$. Soit $x_0 = [1; 1]$

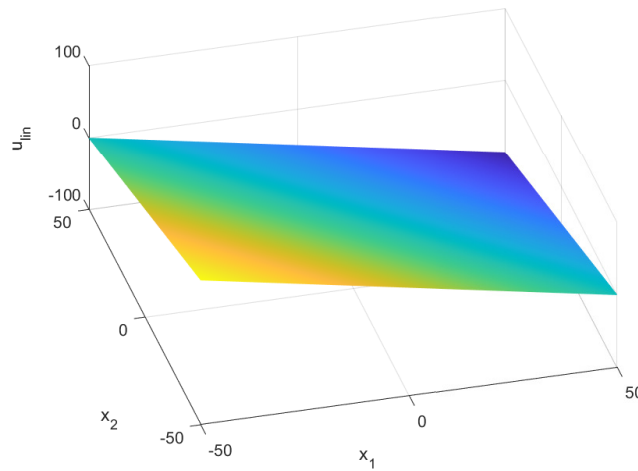


FIGURE 3.1 – Cartographie de la commande (3.4) dans le plan de phase

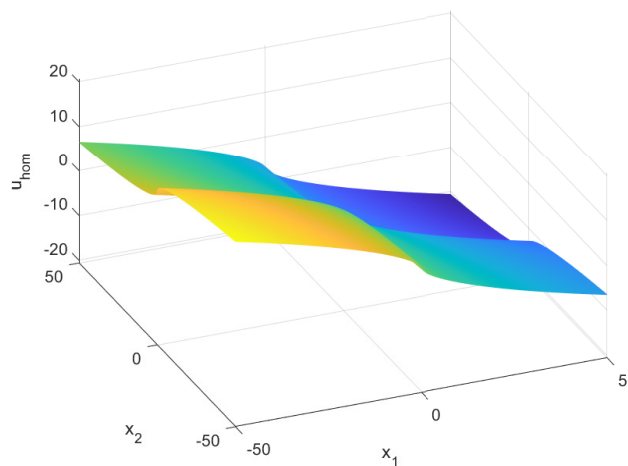


FIGURE 3.2 – Cartographie de la commande (3.5) dans le plan de phase

la condition initiale du système (3.2). La figure 3.3 montre l'évolution des deux commandes dans le plan de phase pour $h = 0.01s$. Pour $h = 2s$, on atteint la limite de Schur et le système associé à la commande linéaire devient instable. La figure 3.4 met en évidence cette instabilité. La commande reste

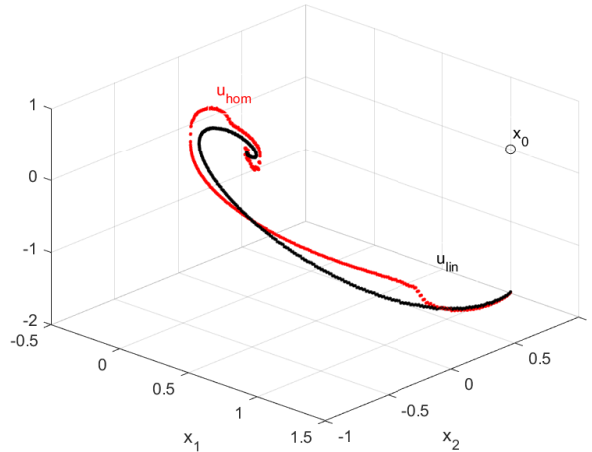


FIGURE 3.3 – Évolution des commandes (3.4) (en noir) et (3.5) (en rouge) dans le plan de phase pour $h = 0.01s$

bloquée entre deux instants de discrétisation et n'est mise à jour que toutes les h secondes. Par contre l'état du système continue d'évoluer. L'évolution de la commande (3.5) est représentée dans le plan de phase sur la figure 3.5. On voit bien la convergence de l'état vers un ensemble centré sur l'origine.

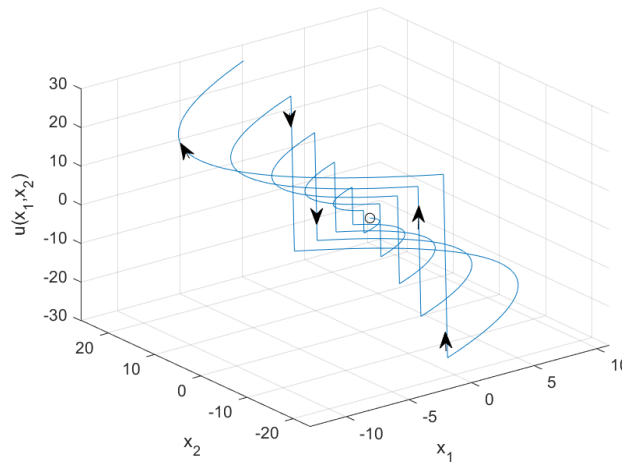


FIGURE 3.4 – Évolution de la commande (3.4) dans le plan de phase pour $h = 2s$

Enfin, la figure 3.6 représente l'écart entre la commande qui devrait être appliquée et la commande réellement appliquée. A chaque instant de discrétisation, cet écart est remis à zéro. Dans le cas de la commande linéaire (3.4), l'écart augmente à chaque instant de discrétisation t_k , le système est instable. Pour la commande homogène (3.5), l'écart reste compris dans un ensemble. On obtient alors la stabilité pratique.

Intéressons nous à présent aux articles traitant de la question de l'échantillonnage des systèmes homogènes. Grüne a montré dans [61] que les systèmes homogènes asymptotiquement stables admettent des fonctions de Lyapunov homogènes continues et lipschitziennes. Il a également montré la stabilité

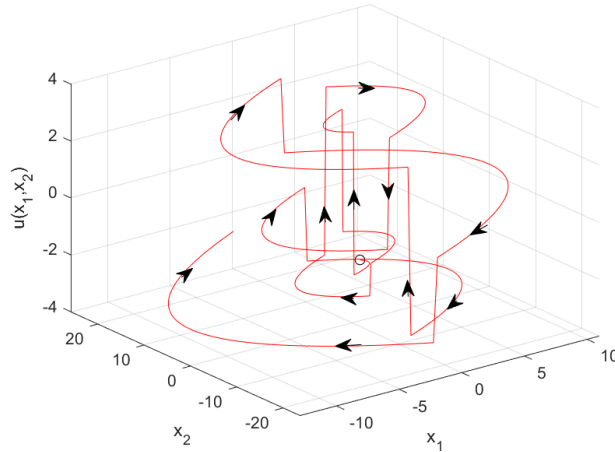


FIGURE 3.5 – Évolution de la commande (3.5) dans le plan de phase pour $h = 2s$

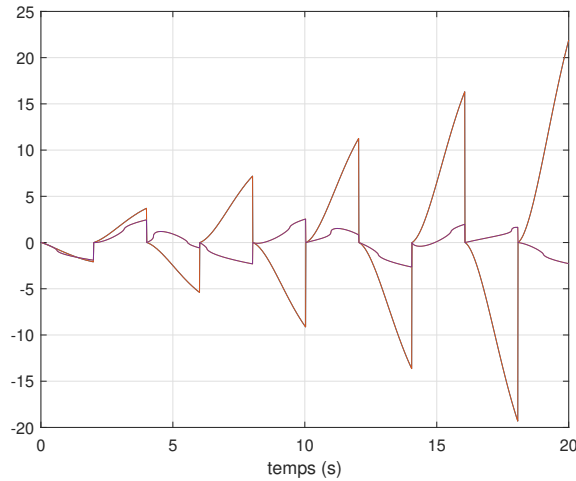


FIGURE 3.6 – Écart entre la commande qui devrait être appliquée et la commande réellement appliquée pour les commandes (3.4) (en rouge) et (3.5) (en bleu) pour $h = 2s$

de systèmes échantillonnés vérifiant une condition de stabilité portant sur le système non discrétisé. Elle s'énonce comme suit : pour tout système homogène asymptotiquement stable (non nécessairement Lipschitz à l'origine), il existe une fonction de Lyapunov homogène et une loi de commande avec retour d'état homogène, éventuellement discontinue, stabilisant le système en boucle fermée échantillonné correspondant. Si le système satisfait la condition de Lipschitz locale habituelle sur l'espace entier, nous obtenons une stabilité semi-globale du système en boucle fermée échantillonné pour chaque période d'échantillonnage fixe suffisamment petite. Si le système satisfait une condition de Lipschitz globale, nous obtenons une stabilité exponentielle globale pour chaque période d'échantillonnage fixe suffisamment petite.

Dans [60], Grüne a montré qu'en utilisant la fonction de Lyapunov du système il est possible de construire une loi de commande échantillonnée discontinue, homogène et stabilisante. Une borne

en fonction du degré d'homogénéité est établie pour laquelle un taux d'échantillonnage inférieur à cette valeur garantit la stabilité asymptotique du système échantillonné en boucle fermée. Ce résultat implique la stabilité asymptotique locale pour les systèmes non-linéaires qui peuvent être approximés par des systèmes homogènes asymptotiquement stables.

Une attention particulière va être apportée à [16], car notre travail va s'inscrire dans la continuité de celui-ci. Le résultat principal de cet article est le suivant : s'il est possible pour un système homogène de construire une commande de rétroaction (non nécessairement Lipschitz) assurant que l'origine du repère soit globalement asymptotiquement stable en temps continu, alors il est possible de préserver pour le système échantillonné correspondant différentes notions de stabilité en fonction du degré d'homogénéité κ . Notons que ces propriétés restent valables même si l'échantillonnage est aperiodique. Voici les résultats obtenus suivant le type de degré d'homogénéité κ qui sont en accord avec l'exemple introductif du double intégrateur ci-dessus :

- Si $\kappa = 0$ alors le système en boucle fermée est globalement asymptotiquement stable dès que la période d'échantillonnage maximale h_{\max} est inférieure à une certaine constante H et cette valeur seuil est appelée seuil de Schur. Différentes stratégies sont proposées dans la littérature pour estimer H [156, 162, 189].
- Si $\kappa > 0$ alors le système en boucle fermée admet une stabilité asymptotique locale. Le domaine de convergence est en général très petit et cette configuration est difficilement applicable. Par conséquent ce cas n'est pas ou peu utilisé.
- Si $\kappa < 0$ alors le système admet une stabilité pratique asymptotique globale. Dans ce cas, l'état du système converge dans une zone dont la taille est fonction de la valeur du pas d'échantillonnage. Bien que l'échantillonnage induise une perte de précision de convergence du système, le système reste stable même avec un taux d'échantillonnage élevé.

Une extension de ce résultat aux systèmes homogènes échantillonnés discontinus est proposée dans [17], avec des résultats très similaires. Cependant, dans ces deux études, nous pouvons noter qu'aucune perturbation externe s'exerçant sur le système n'a été considérée.

Par ailleurs, les propriétés de robustesse des systèmes homogènes face aux perturbations externes ont été largement étudiées dans la littérature. Sous des hypothèses raisonnables, les systèmes homogènes sont ISS lorsqu'ils sont soumis à des perturbations dues à des causes externes, comme les bruits de mesure ou des forces mal modélisées, voir [19, 75, 147, 151] pour l'homogénéité pondérée et [13] pour le cas plus général de l'homogénéité géométrique. Lorsque des perturbations liées à l'échantillonnage et des perturbations externes sont appliquées simultanément sur un système non-linéaire, il n'est pas évident de croire que leurs effets conjugués sont nécessairement la somme de leurs effets individuels.

Par conséquent, pour de simples systèmes continus soumis à la fois à l'échantillonnage de la commande et aux perturbations externes, aucun résultat générique n'est encore disponible.

Notre contribution ici consiste à étudier les effets combinés de deux types de perturbations, endogènes (provenant de l'échantillonnage) et exogènes sur un système homogène continu de degré négatif. Il complète les articles mentionnés précédemment, notamment [16] et [14]. Sous les hypothèses que le système en boucle fermée en temps continu sans perturbation soit globalement asymptotiquement stable et que le système perturbé échantillonné vérifie une propriété d'homogénéité appropriée, nous allons montrer que la stabilité pratique est atteinte.

3.2 Robustesse des systèmes homogènes échantillonnés

3.2.1 Modélisation

Considérons le système contrôlé non-linéaire suivant :

$$\dot{x} = f(x, u, d) \quad (3.6)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ la variable de contrôle, $d \in \mathbb{R}^p$ la perturbation supposée bornée presque partout et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^n$ une fonction continue. La commande u est choisie telle que l'origine soit un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable du système en boucle fermée $\dot{x} = f(x, u(x), 0)$. Nous considérons une suite $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $t_0 = 0$, et une durée maximale d'échantillonnage $h > 0$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$0 < t_{k+1} - t_k \leq h. \quad (3.7)$$

A cause de l'échantillonnage, la loi de commande est à présent $u_{SH}(t) = u(x(t_k))$ pour tout $t \in [t_k, t_{k+1})$ (sample-and-hold). Le système peut donc être réécrit sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(x(t_k)), d(t)), \quad t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (3.8)$$

Notre objectif dans ce qui va suivre est d'étudier l'influence simultanée de l'échantillonnage et de la perturbation externe sur la stabilité de notre système. Partant des propriétés de robustesse des systèmes homogènes, nous nous concentrerons sur des systèmes qui vérifient une propriété d'homogénéité convenable. Nous allons donc formuler pour le système 3.8 l'hypothèse suivante :

Hypothèse 31. *Il existe une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice $\bar{A} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ telle que $-A$ et $-\bar{A}$ soient*

Hurwitz et un degré $\kappa < 0$ tel que :

$$f(e^{As}x, u(e^{As}z), e^{\bar{A}s}d) = e^{\kappa s}e^{As}f(x, u(z), d)$$

pour tous $x, z \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}^p$ et tout $s \in \mathbb{R}$.

Remarque 32. Il est utile de remarquer que, en pratique, cette hypothèse est toujours vérifiée tant que le système nominal est homogène. Les effets de la perturbation d sur le système 3.8 sont souvent écrits sous la forme $f(x, u) + d$. Pour une telle perturbation, si f est une fonction homogène, l'hypothèse 31 reste valable avec $\bar{A} = A + \kappa I_n$, avec $\lambda_{\min}(A) + \kappa > 0$. Cependant, en pratique, si $n = p$, la commande u possède des propriétés d'homogénéité comme $u(e^{\bar{A}s}x) = e^{\bar{A}s}u(x)$ pour une matrice A donnée. Dans cette situation, l'hypothèse 31 serait aussi valable pour un système perturbé de la forme $f(x, u + d)$.

Nous allons montrer que, sous l'hypothèse 31, la stabilité pratique est atteinte pour le système 3.8. Mais auparavant, il nous faut démontrer un lemme préliminaire.

3.2.2 Lemme préliminaire

Lemme 33. Soit ν un champ d'Euler sur \mathbb{R}^n et N une norme ν -homogène et $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : N(x) = 1\}$.

Nous considérons les fonctions :

$$\underline{h} : c \in \mathbb{R}_+ \mapsto \inf\{N(z) : \exists y \in \mathcal{S}, N(y - z) \leq c\},$$

$$\bar{h} : c \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sup\{N(z) : \exists y \in \mathcal{S}, N(y - z) \leq c\}.$$

Les fonctions \underline{h} et \bar{h} sont continues sur \mathbb{R}_+ , \underline{h} est décroissante sur $[0, 1]$ et \bar{h} est décroissante sur \mathbb{R}_+ .

De plus, $\underline{h}(0) = \bar{h}(0) = 1$, $\underline{h}(c) = 0$ si $c \geq 1$ et $\lim_{c \rightarrow +\infty} \bar{h}(c) = +\infty$.

Démonstration. Considérons $c \in \mathbb{R}_+$ et $(c_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels dans \mathbb{R}_+ convergeant vers c .

1) Posons $E_c = \{z \in \mathbb{R}^n : \exists y \in \mathcal{S}, N(y - z) \leq c\}$. Nous avons $E_c = \mathcal{S} + \{x \in \mathbb{R}^n : N(x) \leq c\}$.

Comme N est une norme homogène, \mathcal{S} et $\{x \in \mathbb{R}^n : N(x) \leq c\}$ sont compacts, E_c est compacte.

2) Par compacité, il existe un $z \in E_c$ tel que $N(z) = \underline{h}(c)$. Par définition de E_c , il existe $y \in \mathcal{S}$ tel que $N(y - z) \leq c$. Supposons qu'il existe un $y \in \mathcal{S}$ tel que $N(y - z) < c$. Par continuité de N , il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(z, \varepsilon)$ est incluse dans E_c , où $B(z, \varepsilon)$ désigne la boule Euclidienne de centre z et de rayon ε . Considérons, pour $t \in \mathbb{R}$, la courbe $t \mapsto \Phi^t(z)$, avec Φ le flux de ν . Donc pour des petites valeurs de $t < 0$, $\Phi^t(z) \in B(z, \varepsilon) \subset E_c$. Mais $N(\Phi^t(z)) = e^t N(z) < N(z) = \underline{h}(c)$ ce qui est contradictoire puisque $\Phi^t(z)$ appartient à E_c . Nous en déduisons que pour tout $z \in E_c$ tel que $N(z) = \underline{h}(c)$ et pour tout $y \in \mathcal{S}$, nous avons $N(y - z) \geq c$.

3) Puisque E_c est compact, il existe $z \in E_c$ tel que $\underline{h}(c) = N(z)$ et donc $y \in \mathcal{S}$ tel que $N(y - z) = c$, selon le point 2). Notons $z_n = y - \Phi^{\ln(c_n/c)}(y - z)$. Nous avons :

$$N(y - z_n) = N(\Phi^{\ln(c_n/c)}(y - z)) = \frac{c_n}{c} N(y - z) = c_n$$

donc $z_n \in E_{c_n}$ donc $\underline{h}(c_n) \leq N(z_n)$. De plus, la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ converge vers z donc par continuité $(N(z_n))_{n \geq 0}$ converge vers $N(z) = \underline{h}(c)$. Nous en déduisons que :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \underline{h}(c_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} N(z_n) = \underline{h}(c).$$

4) Soit $(z_n)_{n \geq 0}$ une suite de vecteurs telle que $z_n \in E_{c_n}$ pour tout n et $N(z_n) = \underline{h}(c_n)$. Comme \underline{h} est bornée sur \mathbb{R}_+ et décroissante, nous avons $\underline{h}(1) = 0 \leq \underline{h}(c) \leq \underline{h}(0) = 1$ pour tout $c \in \mathbb{R}_+$, donc $(\underline{h}(c_n))_{n \geq 0}$ est borné. Par conséquent nous pouvons extraire de la suite $(c_n)_{n \geq 0}$ une sous-suite, notée $(c_{n_k})_{k \geq 0}$, de telle façon que $(\underline{h}(c_{n_k}))_{k \geq 0}$ converge vers une limite $\ell \in [0, 1]$. Comme la suite $(c_n)_{n \geq 0}$ converge, elle est bornée par une constante positive c_{\max} . De plus, comme pour tout n , z_n appartient à $E_{c_n} \subset E_{c_{\max}}$ qui est compact, nous pouvons donc extraire une sous suite convergente $(z_n)_{n \geq 0}$, notée $(z_{n_p})_{p \geq 0}$, de limite z^* . Pour chaque z_n , il existe $y_n \in \mathcal{S}$ tel que $N(y_n - z_n) = c_n$. Comme \mathcal{S} est compacte, nous extrayons de $(y_{n_p})_{p \geq 0}$ une sous-suite convergente, notée $(y_{n_q})_{q \geq 0}$, qui converge vers $y^* \in \mathcal{S}$. En passant à la limite, nous avons $N(y^* - z^*) = c$, donc $z^* \in E_c$. Ainsi, on obtient :

$$\underline{h}(c) \leq N(z^*) = \lim_{k \rightarrow +\infty} N(z_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \underline{h}(c_{n_k}) = \ell.$$

Puisque cette inégalité est vraie pour n'importe quel point d'accumulation ℓ de la suite $(\underline{h}(c_n))_{n \geq 0}$, nous concluons que $\underline{h}(c) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \underline{h}(c_n)$, ce qui avec le point 3), prouve la continuité.

5) \underline{h} est clairement décroissante. Montrons qu'elle est strictement décroissante. Supposons qu'il existe c_1 et c_2 vérifiant $0 \leq c_1 < c_2 \leq 1$ tels que $\underline{h}(c_1) = \underline{h}(c_2)$. Cela signifie qu'il existe y_1 et $y_2 \in \mathcal{S}$ et $z_1 \in E_{c_1}$, $z_2 \in E_{c_2}$ tels que $N(y_1 - z_1) = c_1$ et $N(y_2 - z_2) = c_2$ des points 1) et 2). Puisque $E_{c_1} \subset E_{c_2}$ alors $z_1 \in E_{c_2}$. Du point 2), puisque $y_1 \in \mathcal{S}$, alors $N(y_1 - z_1) \geq c_2$, ce qui implique que $c_1 \geq c_2$, ce qui est une contradiction.

De façon similaire, nous pouvons montrer que la fonction \bar{h} définie par

$$\bar{h} : c \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sup\{N(z) : \exists y \in \mathcal{S}, N(y - z) \leq c\},$$

est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$. □

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal qui vient résoudre notre problématique.

3.2.3 Résultat principal

Théorème 34. *Supposons que le système échantillonné 3.8 soit tel que les temps d'échantillonnage satisfont 3.7 et que l'hypothèse 31 soit vérifiée. Considérons N une norme ν -homogène et \bar{N} une norme $\bar{\nu}$ -homogène. Alors il existe des constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ telles que l'ensemble*

$$\mathcal{B} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : N(x) \leq c_1 h^{-\frac{1}{\kappa}} + c_2 d_{max} \right\}$$

est globalement asymptotiquement stable relativement au système (3.6), où $d_{max} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}_+} \bar{N}(d(t))$.

Démonstration. La preuve est organisée en plusieurs parties. Tout d'abord, trois résultats préliminaires vont nous permettre de construire plusieurs constantes qui vont être utiles dans la suite de la preuve. Ensuite, nous traiterons la partie principale de la preuve, elle-même divisée en 6 étapes. Dans les 5 premières étapes, nous allons montrer que l'état du système atteint finalement l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n : N(x) \leq C_1 h^{-\frac{1}{\kappa}} + C_2 d_{max}\}$, où C_1 et C_2 sont des constantes positives. Enfin, la dernière étape qui montre la stabilité pratique conclura la preuve.

Soit V une fonction de Lyapunov ν -homogène C^1 de degré $\mu > 0$ telle que $\kappa + \mu > 0$ du système en boucle fermée globalement asymptotiquement stable $\dot{x} = f(x, u(x), 0)$. Son existence est garantie par le Théorème 28. Soit la norme ν -homogène N_μ définie par $N_\mu = V^{\frac{1}{\mu}}$. Nous notons $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : N_\mu(x) = 1\}$ et $\Delta(t) = x(t_k) - x(t) = x_k - x(t)$. Nous allons prouver le théorème dans le cas de la norme homogène N_μ , le résultat va ensuite être étendu à n'importe quelle norme homogène en utilisant la Proposition 14. Pour simplifier les notations dans cette preuve, N_μ sera notée N . Posons $a = -\sup_{z \in \mathcal{S}} d_z V f(z, u(z), 0)$, qui est strictement positive puisque V est une fonction de Lyapunov homogène pour le système $\dot{x} = f(x, u(x), 0)$, et $b = \sup_{z \in \mathcal{S}} \|d_z V\|$.

Résultat préliminaire 1 : Il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $t \in [t_k, t_{k+1})$ vérifie $N(\Delta(t)) < \varepsilon N(x(t))$, alors

$$d_{x(t)} V f(x(t), u(x_k), 0) < -\frac{a}{2} V(x(t))^{\frac{\kappa+\mu}{\mu}}.$$

En effet, prenons un $t \in [t_k, t_{k+1})$ tel que $x(t) \neq 0$. Pour plus de clarté, nous écrivons x à la place de $x(t)$. Soit $s \in \mathbb{R}$ tel que $N(x) = e^s$ et posons $\tilde{x} = e^{-As} x$ et $\tilde{\Delta} = e^{-As} \Delta(t)$. Remarquons que $N(\tilde{x}) = 1$. Par homogénéité de V et f , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} d_x V f(x, u(x_k), 0) &= d_x V f(x, u(x + \Delta(t)), 0) \\ &= e^{(\kappa+\mu)s} d_{\tilde{x}} V f(\tilde{x}, u(\tilde{x} + \tilde{\Delta}), 0). \end{aligned}$$

La fonction $\delta \in \mathbb{R}^n \mapsto \sup_{z \in \mathcal{S}} d_z V f(z, u(z + \delta), 0)$ est continue, puisque V est \mathcal{C}^1 , f est continue et \mathcal{S} est compacte. Si $\delta = 0$, nous avons $\sup_{z \in \mathcal{S}} d_z V f(z, u(z), 0) = -a < 0$. Donc par continuité, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tous $\tilde{\Delta}$ vérifiant $N(\tilde{\Delta}) < \varepsilon$:

$$d_{\tilde{x}} V f(\tilde{x}, u(\tilde{x} + \tilde{\Delta}), 0) < -\frac{a}{2}.$$

Puisque $e^s = N(x)$, $N(\tilde{\Delta}) < \varepsilon$ est équivalent à $N(\Delta) < \varepsilon N(x)$. Par conséquent, si cette condition est satisfaite alors nous avons :

$$e^{(\kappa+\mu)s} d_{\tilde{x}} V f(\tilde{x}, u(\tilde{x} + \tilde{\Delta}), 0) < -\frac{a}{2} e^{(\kappa+\mu)s}$$

ce qui mène à l'inégalité annoncée.

Résultat préliminaire 2 : Considérons les fonctions \underline{h} et \bar{h} définies dans le Lemme 33 et définissons $c^*(\alpha) = \min\{\underline{h}^{-1}(1-\alpha), \bar{h}^{-1}(1+\alpha)\}$. Nous avons l'existence d'un $\alpha^* \in (0, 1)$ tel que $c^*(\alpha^*) < (1-\alpha^*)\varepsilon$, où ε est défini dans le résultat préliminaire 1.

Montrons tout d'abord que la fonction c^* est bien définie sur $(0, 1)$. Fixons $\alpha \in (0, 1)$. La fonction \underline{h} est continue et strictement décroissante de $[0, 1]$ vers $[0, 1]$, donc est bijective et \underline{h}^{-1} est continue et strictement décroissante de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. De façon analogue, \bar{h} est une fonction strictement croissante de $[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$, donc \bar{h}^{-1} est bien définie, continue et strictement croissante de $[1, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$. Par conséquent, $c^*(\alpha) = \min\{\underline{h}^{-1}(1-\alpha), \bar{h}^{-1}(1+\alpha)\}$ existe, appartient à $[0, 1]$ et vérifie :

$$1 - \alpha \leq \underline{h}(c^*(\alpha)) \leq \bar{h}(c^*(\alpha)) \leq 1 + \alpha.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \underline{h}(x) = 1^+$ nous avons $\lim_{y \rightarrow 1^+} \underline{h}^{-1}(y) = 0^+$, donc $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \underline{h}^{-1}(1-\alpha) = 0^+$. De façon similaire, on obtient $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \bar{h}^{-1}(1+\alpha) = 0^+$. Donc $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{c^*(\alpha)}{1-\alpha} = 0$ et nous pouvons choisir un $\alpha^* \in (0, 1)$ tel que $c^*(\alpha^*) < (1-\alpha^*)\varepsilon$.

Résultat préliminaire 3 : Il existe $\eta > 0$ tel que, si $\bar{N}(\tilde{d}) \leq \eta$ alors :

$$\sup_{(\tilde{x}, \tilde{x}_k) \in \mathcal{C}} \|f(\tilde{x}, u(\tilde{x}_k), \tilde{d}) - f(\tilde{x}, u(\tilde{x}_k), 0)\| < \frac{a}{4b},$$

où

$$\mathcal{C} = \mathcal{S} \times N^{-1} \left(\left[\frac{1}{1+\alpha^*}, \frac{1}{1-\alpha^*} \right] \right). \quad (3.9)$$

Puisque \mathcal{C} est compact, la fonction :

$$\tilde{d} \mapsto \sup_{(\tilde{x}, \tilde{x}_k) \in \mathcal{C}} \|f(\tilde{x}, u(\tilde{x}_k), \tilde{d}) - f(\tilde{x}, u(\tilde{x}_k), 0)\|$$

est continue. De plus, cette fonction s'annule pour $\tilde{d} = 0$. L'affirmation s'ensuit.

Définissons, pour $r \geq 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_r &= \mathcal{S} \times N^{-1}([0, c^*(\alpha^*)]) \times \overline{N}^{-1}([0, r]), \\ g(r) &= \sup_{(\tilde{x}_k, \tilde{\Delta}, \tilde{d}) \in \mathcal{K}_r} |d_{\tilde{\Delta}} V f(\tilde{x}_k - \tilde{\Delta}, u(\tilde{x}_k), \tilde{d})|, \\ C_1 &= \left(\frac{c^*(\alpha^*)^\mu}{g((1 - \alpha^*)\eta)} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \text{ et } C_2 = \frac{1}{(1 - \alpha^*)\eta}. \end{aligned}$$

Une fois ces résultats préliminaires établis, nous allons construire la preuve principale du théorème composée de 6 étapes.

Étape 1 : Si $N(x_k) \geq C_1 h^{-\frac{1}{\kappa}} + C_2 d_{max}$ alors

$$N(\Delta(t)) \leq c^*(\alpha^*)N(x_k) \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}).$$

\mathcal{K}_r est compact pour tout $r \geq 0$ et g est une fonction croissante. Un calcul direct nous donne $\dot{\Delta} = -f(x_k - \Delta, u(x_k), d)$. Posons $t^* = \inf\{t \geq t_k : N(\Delta(t)) \geq c^*(\alpha^*)N(x_k)\}$. Pour tout t dans $[t_k, t^*]$, nous avons $N(\Delta(t)) \leq c^*(\alpha^*)N(x_k)$. De plus, $N(\Delta(t_k)) = 0 < c^*(\alpha^*)N(x_k)$, ainsi $t^* > t_k$. Considérons $s \in \mathbb{R}$ tel que $e^s = N(x_k)$, et posons, pour $t \in [t_k, t^*]$, $\tilde{x}_k = e^{-As}x_k$, $\tilde{\Delta}(t) = e^{-As}\Delta(t)$ et $\tilde{d}(t) = e^{-As}d(t)$. Remarquons que $N(\tilde{x}_k) = 1$. Par homogénéité, nous avons $N(\tilde{\Delta}(t)) \leq c^*(\alpha^*)$ et $\overline{N}(\tilde{d}) \leq \frac{d_{max}}{N(x_k)}$. Maintenant un calcul direct donne :

$$\begin{aligned} V(\Delta(t^*)) &= \int_{t_k}^{t^*} -d_{\Delta(\tau)} V f(x_k - \Delta(\tau), u(x_k), d(\tau)) d\tau \\ &= \int_{t_k}^{t^*} -e^{(\mu+\kappa)s} d_{\tilde{\Delta}(\tau)} V f(\tilde{x}_k - \tilde{\Delta}(\tau), u(\tilde{x}_k), \tilde{d}(\tau)) d\tau \\ &\leq (t^* - t_k) e^{(\mu+\kappa)s} \times \sup_{t \in [t_k, t^*]} |d_{\tilde{\Delta}(t)} V f(\tilde{x}_k - \tilde{\Delta}(t), u(\tilde{x}_k), \tilde{d}(t))| \\ &\leq (t^* - t_k) e^{(\mu+\kappa)s} \times \sup_{(\tilde{x}_k, \tilde{\Delta}, \tilde{d}) \in \mathcal{K}_{\frac{d_{max}}{N(x_k)}}} |d_{\tilde{\Delta}} V f(\tilde{x}_k - \tilde{\Delta}, u(\tilde{x}_k), \tilde{d})| \\ &= (t^* - t_k) N(x_k)^{\kappa+\mu} g \left(\frac{d_{max}}{N(x_k)} \right). \end{aligned}$$

Puisque $N(x_k) \geq C_2 d_{max} = \frac{d_{max}}{(1-\alpha^*)\eta}$, donc nous avons $\frac{d_{max}}{N(x_k)} \leq (1 - \alpha^*)\eta$ et donc, puisque g est

croissante :

$$V(\Delta(t^*)) \leq (t^* - t_k)N(x_k)^{\mu+\kappa}g((1 - \alpha^*)\eta).$$

Par continuité de V , nous avons $V(\Delta(t^*)) = c^*(\alpha^*)^\mu N(x_k)^\mu$.

Ainsi $c^*(\alpha^*)^\mu N(x_k)^\mu \leq (t^* - t_k)N(x_k)^{\mu+\kappa}g((1 - \alpha^*)\eta)$, c'est-à-dire

$$t^* - t_k \geq \frac{c^*(\alpha^*)^\mu}{N(x_k)^\kappa g((1 - \alpha^*)\eta)}.$$

Maintenant, la condition $N(x_k) \geq C_1 h^{-1/\kappa}$ nous permet d'écrire $\frac{c^*(\alpha^*)^\mu}{N(x_k)^\kappa g((1 - \alpha^*)\eta)} \geq h$ et nous obtenons $t^* \geq t_{k+1}$.

Puisque, pour tout $t \in [t_k, t_{k+1})$, nous avons $N(\Delta(t)) \leq c^*(\alpha^*)N(x_k)$ ce qui termine l'étape 1.

Étape 2 : Si $N(x_k) \geq C_1 h^{-\frac{1}{\kappa}} + C_2 d_{max}$, alors pour tout $t \in [t_k, t_{k+1})$, nous avons :

$$(1 - \alpha^*)N(x_k) \leq N(x) \leq (1 + \alpha^*)N(x_k).$$

Nous avons vu dans l'étape 1 que si $N(x_k) \geq C_1 h^{-\frac{1}{\kappa}} + C_2 d_{max}$, cela nous conduit à :

$$N(x_k - x(t)) \leq c^*(\alpha^*)N(x_k) \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (3.10)$$

Posons $e^s = N(x_k)$, $\tilde{x}_k = e^{-As}x_k$ et $\tilde{x}(t) = e^{-As}x(t)$, cela est équivalent à :

$$N(\tilde{x}_k - \tilde{x}) \leq c^*(\alpha^*) \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}).$$

Donc d'après la définition de α^* , c^* , \bar{h} et \underline{h} , nous avons :

$$1 - \alpha^* \leq \underline{h}(c^*(\alpha^*)) \leq N(\tilde{x}) \leq \bar{h}(c^*(\alpha^*)) \leq 1 + \alpha^*$$

et donc

$$(1 - \alpha^*)N(x_k) \leq N(x) \leq (1 + \alpha^*)N(x_k). \quad (3.11)$$

Étape 3 : Si $N(x_k) \geq C_1 h^{-\frac{1}{\kappa}} + C_2 d_{max}$ alors pour tout $t \in [t_k, t_{k+1})$ nous avons :

$$|d_x V f(x, u(x_k), d) - d_x V f(x, u(x_k), 0)| \leq \frac{a}{4} V(x)^{\frac{\kappa+\mu}{\mu}}.$$

Supposons que $N(x_k) \geq C_1 h^{-\frac{1}{\kappa}} + C_2 d_{max}$. Posons $e^s = N(x)$, $\tilde{x}_k = e^{-As}x_k$, $\tilde{x} = e^{-As}x$ et $\tilde{d} = e^{-\bar{A}s}d$,

nous avons

$$\begin{aligned} |d_x V f(x, u(x_k), d) - d_x V f(x, u(x_k), 0)| &= e^{(\kappa+\mu)s} |d_{\tilde{x}} V [f(\tilde{x}, u(\tilde{x}_k), \tilde{d}) - f(\tilde{x}, u(\tilde{x}_k), 0)]| \\ &\leq e^{(\kappa+\mu)s} b \sup_{(\tilde{x}, \tilde{x}_k) \in \mathcal{C}} \|f(\tilde{x}, u(\tilde{x}_k), \tilde{d}) - f(\tilde{x}, u(\tilde{x}_k), 0)\|. \end{aligned}$$

De l'étape 2, nous obtenons :

$$\frac{1}{1 + \alpha^*} \leq N(\tilde{x}_k) \leq \frac{1}{1 - \alpha^*} \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1})$$

et donc, étant donné que $C_2 = \frac{1}{\eta(1-\alpha^*)}$, $\bar{N}(d) \leq d_{\max} \leq \eta(1 - \alpha^*)N(x_k) \leq \eta N(x)$, ou de manière équivalente, $\bar{N}(\tilde{d}) \leq \eta$. Mais, selon le Résultat préliminaire 3, si $\bar{N}(\tilde{d}) \leq \eta$, nous avons :

$$\sup_{(\tilde{x}, \tilde{x}_k) \in \mathcal{C}} \|f(\tilde{x}, u(\tilde{x}_k), \tilde{d}) - f(\tilde{x}, u(\tilde{x}_k), 0)\| < \frac{a}{4b}$$

Remarquant que $e^s = N(x) = V(x)^{\frac{1}{\mu}}$, ceci conduit à :

$$|d_x V f(x, u(x_k), d) - d_x V f(x, u(x_k), 0)| \leq \frac{a}{4} V(x)^{\frac{\kappa+\mu}{\mu}}.$$

Étape 4 : Si $N(x_k) \geq C_1 h^{-\frac{1}{\kappa}} + C_2 d_{\max}$ alors on a :

$$d_x V f(x, u(x_k), d) < -\frac{a}{4} V(x)^{\frac{\kappa+\mu}{\mu}} \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (3.12)$$

En utilisant consécutivement les résultats de l'étape 1, l'étape 2 et du Résultat préliminaire 1 nous obtenons : $N(\Delta) \leq \varepsilon N(x)$. Par conséquent nous déduisons du Résultat préliminaire 1 :

$$d_x V f(x, u(x_k), 0) < -\frac{a}{2} V(x)^{\frac{\kappa+\mu}{\mu}} \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (3.13)$$

En écrivant

$$d_x V f(x, u(x_k), d) = d_x V f(x, u(x_k), 0) + d_x V f(x, u(x_k), d) - d_x V f(x, u(x_k), 0)$$

Nous obtenons (3.12) de l'étape 3 et de (3.13).

Étape 5 : Si $N(x_k) < R = C_1 h^{-\frac{1}{\kappa}} + C_2 d_{\max}$, il existe $\omega_0 > 0$ tel que $N(x(t)) \leq (1 + \omega_0)^{\frac{1}{\mu}} R$, pour

tout $t \in [t_k, t_{k+1})$. Posons, pour $\omega \geq 0$:

$$\theta(\omega) = (1 + \omega)^{\frac{\kappa + \mu}{\mu}} \sup_{(\tilde{x}, \tilde{x}_k, \tilde{d}) \in \mathcal{M}_\omega} |d_{\tilde{x}} V f(\tilde{x}, u(\tilde{x}_k), \tilde{d})|,$$

où $\mathcal{M}_\omega = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{x}_k, \tilde{d}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p : V(\tilde{x}) \leq 1, V(\tilde{x}_k) \leq \frac{1}{1+\omega}, \bar{N}(\tilde{d}) \leq \frac{d_{max}}{R(1+\omega)^{\frac{1}{\mu}}} \right\}$, et $\varphi(\omega) = \omega/\theta(\omega)$.

Étant donné que $\theta(\omega) > 0$ pour tout $\omega \geq 0$, φ est bien définie. De plus, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\omega) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\xi} \omega^{-\frac{\kappa}{\mu}}$, où $\xi = \sup_{V(\tilde{x}) \leq 1} |d_{\tilde{x}} V f(\tilde{x}, u(0), 0)| > 0$. Mais $-\kappa/\mu > 0$ et nous concluons que $\varphi(\omega) \rightarrow +\infty$ quand $\omega \rightarrow +\infty$.

Puisque φ est continue, cela prouve qu'il existe $\omega_0 > 0$ tel que $\varphi(\omega_0) = hR^\kappa$, i.e. $\frac{\omega_0}{\theta(\omega_0)} = hR^\kappa$.

Posons $t^* = \inf\{t \geq t_k, V(x(t)) \geq (1 + \omega_0)R^\mu\} > t_k$. Par conséquent, pour tout $t \in [t_k, t^*]$, nous avons $V(x(t)) \leq (1 + \omega_0)R^\mu$ et

$$\begin{aligned} V(x(t^*)) &= V(x_k) + \int_{t_k}^{t^*} d_x V f(x, u(x_k), d) dt \\ &\leq R^\mu + (t^* - t_k) \sup_{t \in [t_k, t^*]} |d_x V f(x, u(x_k), d)|. \end{aligned}$$

Soit $s = \frac{\ln[(1+\omega)R^\mu]}{\mu}$, $\tilde{x}_k = e^{-As}x_k$, $\tilde{x} = e^{-As}x$ et $\tilde{d} = e^{-\bar{A}s}d$. Remarquons que nous avons $V(\tilde{x}) \leq 1$, $V(\tilde{x}_k) \leq \frac{1}{(1+\omega)}$ et $\bar{N}(\tilde{d}) \leq \frac{d_{max}}{R(1+\omega)^{\frac{1}{\mu}}}$. Nous obtenons

$$V(x(t^*)) \leq R^\mu + (t^* - t_k)e^{(\kappa + \mu)s} \times \sup_{(\tilde{x}, \tilde{x}_k, \tilde{d}) \in \mathcal{M}_{\omega_0}} |d_{\tilde{x}} V f(\tilde{x}, u(\tilde{x}_k), \tilde{d})|.$$

Puisque $e^{(\kappa + \mu)s} = R^{\kappa + \mu}(1 + \omega_0)^{\frac{\kappa + \mu}{\mu}}$, nous avons

$$\begin{aligned} V(x(t^*)) &\leq R^\mu + (t^* - t_k)R^{\kappa + \mu}\theta(\omega_0) \\ &\leq R^\mu + (t^* - t_k)R^\mu \frac{\omega_0}{h} \\ &\leq R^\mu \left(1 + \frac{t^* - t_k}{h} \omega_0 \right). \end{aligned}$$

Par continuité de V , nous avons $V(x(t^*)) = (1 + \omega_0)R^\mu$ et donc $h \leq t^* - t_k$, i.e. $t^* \geq t_{k+1}$. Finalement, si $N(x_k) < R$ nous avons pour tout $t \in [t_k, t_{k+1})$,

$$V(x(t)) \leq (1 + \omega_0)R^\mu, \text{ ou de manière équivalente } N(x(t)) \leq (1 + \omega_0)^{\frac{1}{\mu}} R.$$

Étape 6 : Conclusion

Considérons $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : N(x) \leq (1 + \omega_0)^{\frac{1}{\mu}} R\}$ et prenons un $t \geq 0$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $t \in [t_k, t_{k+1})$. Posons $x_k = x(t_k)$. Si $N(x_k) \geq R$, alors d'après l'étape 4 nous avons $d_x V f(x, u(x_k), d) < -\frac{\alpha}{4} V(x)^{\frac{\kappa + \mu}{\mu}}$. Si $N(x_k) < R$, alors de l'étape 5 nous avons $N(x(t)) \leq (1 + \omega_0)^{\frac{1}{\mu}} R$. Ceci démontre que \mathcal{B} est positivement invariant et aussi qu'il est globalement asymptotiquement stable. Cela conclue la

preuve en prenant $c_1 = (1 + \omega_0)^{\frac{1}{\mu}} C_1$ et $c_2 = (1 + \omega_0)^{\frac{1}{\mu}} C_2$. □

Remarque 35. *Le Théorème 34 est un résultat de stabilité pratique. En effet, le résultat implique :*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} N(x(t)) \leq c_1 h^{-\frac{1}{\kappa}} + c_2 d_{\max},$$

ce qui établit qu'en fin de compte l'état du système atteint une boule homogène centrée en l'origine dont la taille est donnée par $c_1 h^{-\frac{1}{\kappa}} + c_2 d_{\max}$. Plus le pas d'échantillonnage et la perturbation maximale seront petits, plus l'état du système échantillonné 3.8 sera proche de l'origine.

Remarque 36. *Seule la simple continuité est supposée pour la fonction du système échantillonné 3.8 dans le Théorème 34, ce qui signifie que le résultat est encore valable quand le champ de vecteurs f n'est pas Lipschitz.*

En pratique, les constantes c_1 et c_2 données par le Théorème 57 sont très difficiles à calculer ; cependant, elles peuvent être estimées numériquement, voir le Chapitre 4 de ce manuscrit.

Nous avons considéré un système perturbé par deux phénomènes : une perturbation interne/endogène, à savoir les effets de l'échantillonnage et une perturbation externe/exogène appelée d . Nous remarquons que qualitativement les effets de chaque perturbation peuvent être analysés séparément et que leurs effets conjugués ne sont pas plus importants que la somme de chacun. Cela est surprenant étant donné que le champ de vecteurs f est seulement supposé continu et homogène et pourrait présenter de fortes non-linéarités.

Le Théorème 34 est une autre illustration des propriétés de robustesse des systèmes homogènes. Il est déjà établi dans [14,18] que les systèmes homogènes étaient robustes par rapport aux perturbations internes et externes quand ces deux perturbations sont appliquées séparément ; le Théorème 34 montre à son tour que les systèmes homogènes sont robustes au regard de ces deux perturbations appliquées ensemble.

Une autre conséquence du résultat principal est que lorsque l'on échantillonne un système homogène perturbé, augmenter la fréquence de l'échantillonnage ne diminue plus la taille de la zone de convergence à partir d'un certain seuil. En effet, quand le taux d'échantillonnage maximal h est petit, la taille de la zone de convergence pratique est déjà de base $c_2 d_{\max}$.

3.3 Exemples et simulations

Dans cette section, nous voulons illustrer le résultat théorique du Théorème 34 avec un exemple simple académique et montrer comment il est possible d'estimer numériquement les constantes c_1 et

c_2 données par le Théorème 34. Nous considérons le système de contrôle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u + d(t) \end{cases} \quad (3.14)$$

avec (x_1, x_2) désignant l'état du système, u sa commande et $d(t)$ une perturbation externe, vérifiant $|d(t)| \leq d_{\max}$ pour un $d_{\max} > 0$ donné. La commande choisie est :

$$u(x_1, x_2) = -k_1 |x_1|^{\frac{1}{3}} - k_2 |x_2|^{\frac{1}{2}} \quad (3.15)$$

où $k_1, k_2 > 0$ sont des gains positifs. Des commandes de ce type ont été largement utilisées dans la littérature, par exemple dans [18, 23]. Remarquons que, avec cette loi de commande, l'équation du système **n'est pas** Lipschitz continue. Le système en boucle fermée (3.14)–(3.15) avec $d(t) = 0$ est reconnu pour être homogène de degré $\kappa = -0.5$ par rapport à $A = \text{diag}(1.5, 1)$ et stable en temps fini, voir [23, Proposition 8.1].

Vérifions à présent l'Hypothèse 57. En effet, en prenant $\bar{A} = (0.5)$ et en posant $f(x, u, d) = (x_2, u + d(t))$ pour le membre de droite de (3.14), nous obtenons :

$$\begin{aligned} f(e^{As}x, u(e^{As}z), e^{\bar{A}s}d) &= \begin{pmatrix} e^s x_2 \\ -k_1 [e^{1.5s} z_1]^{\frac{1}{3}} - k_2 [e^s z_2]^{\frac{1}{2}} + e^{s/2} d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^s x_2 \\ e^{s/2} (-k_1 [z_1]^{\frac{1}{3}} - k_2 [z_2]^{\frac{1}{2}} + d) \end{pmatrix} \\ &= e^{-s/2} e^{As} f(x, u(z), d). \end{aligned}$$

Ainsi, une application directe du Théorème 34 montre que, sous un échantillonnage périodique donné par $t_k = kh$, avec $h > 0$, le système échantillonné perturbé est pratiquement stable.

La figure 3.7 montre l'évolution de l'état du système (3.14) en fonction du temps et l'évolution au cours du temps de la norme homogène $N(x) = |x_1|^{\frac{2}{3}} + |x_2|$ dans deux différents cas en faisant varier le taux d'échantillonnage. Pour les courbes en noir le taux d'échantillonnage est $h = 0.1s$, et pour les courbes rouges $h = 2s$. Dans les deux cas la perturbation externe est $d_{\max} = 10$. Tout d'abord, la figure 3.7 montre que la stabilité pratique est atteinte comme attendu. Ensuite, nous observons que la taille de la zone de convergence pratique augmente lorsque h devient plus grand.

Les simulations de la Figure 3.8 s'intéressent à l'influence de la perturbation externe. Les courbes noires montrent l'évolution de l'état du système (3.14) et de la norme homogène dans le cas où $d_{\max} = 1$

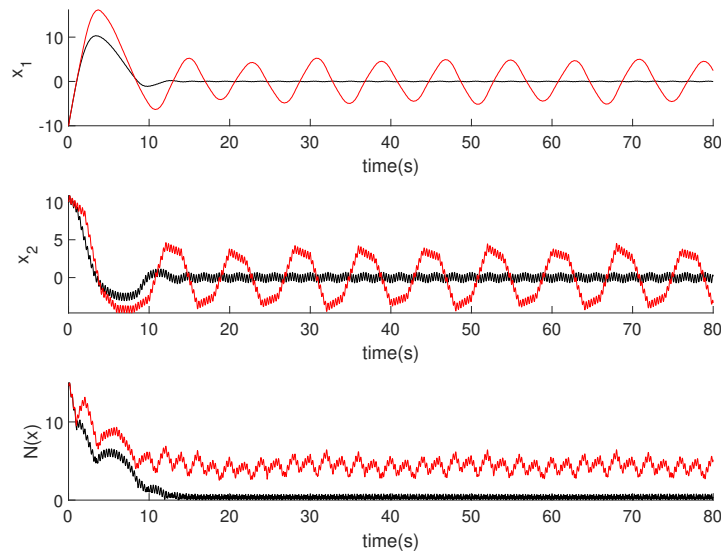


FIGURE 3.7 – Évolution au cours du temps de l'état x du système (3.14) et de $N(x)$ pour $h = 0.1s$ et $h = 2s$ pour une perturbation externe constante $d_{\max} = 10$.

et les courbes rouges dans le cas où $d_{\max} = 81$, avec un taux d'échantillonnage constant $h = 2s$. Comme attendu, la zone de convergence augmente lorsque d_{\max} devient plus grand. Cependant, nous remarquons qu'une faible augmentation du taux d'échantillonnage a une grande influence sur la taille de la zone de convergence pratique. De l'autre côté, une grande augmentation de la perturbation a une petite influence sur la taille de la zone de convergence pratique.

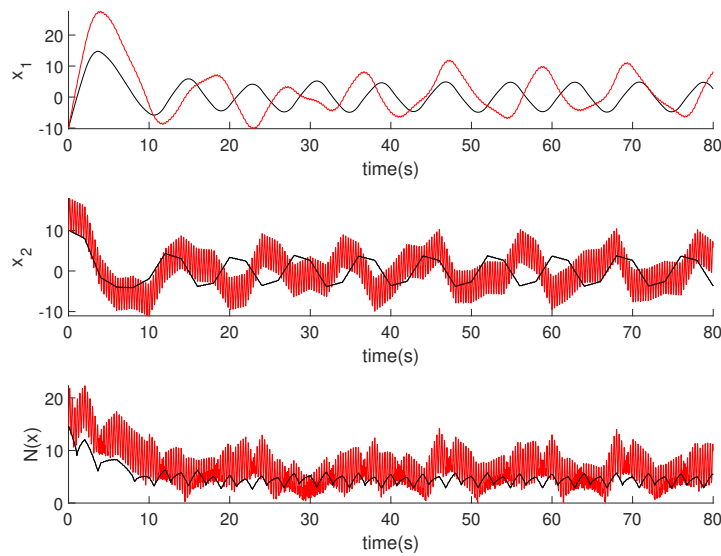


FIGURE 3.8 – Évolution au cours du temps de l'état x du système (3.14) et de $N(x)$ pour $d_{\max} = 1$ et $d_{\max} = 81$ pour un taux d'échantillonnage constant $h = 2s$.

Les figures 3.9 et 3.10 montrent respectivement l'influence du taux d'échantillonnage h et de l'am-

plitude de la perturbation maximale d_{\max} sur le comportement asymptotique du système quand l'autre paramètre est fixé. En considérant les normes homogènes $N(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{2}{3}} + |x_2|$, nous estimons la valeur maximale de $N(x_1, x_2)$ quand l'état du système atteint l'ensemble de stabilité pratique. Pour ce faire, le système est simulé pendant 200 périodes de temps et la norme supérieure est estimée en prenant la valeur maximale de $N(x_1, x_2)$ sur les 50 dernières périodes. L'opération est répétée pour 100 valeurs initiales différentes, et la norme supérieure est donnée par la valeur maximale atteinte. Nous observons que les courbes ont la forme attendue : une parabole dans 3.9, une ligne droite dans 3.10. Les courbes bleues sont calculées à l'aide de la méthode des moindres carrés pour estimer séparément les coefficients c_1 et c_2 .

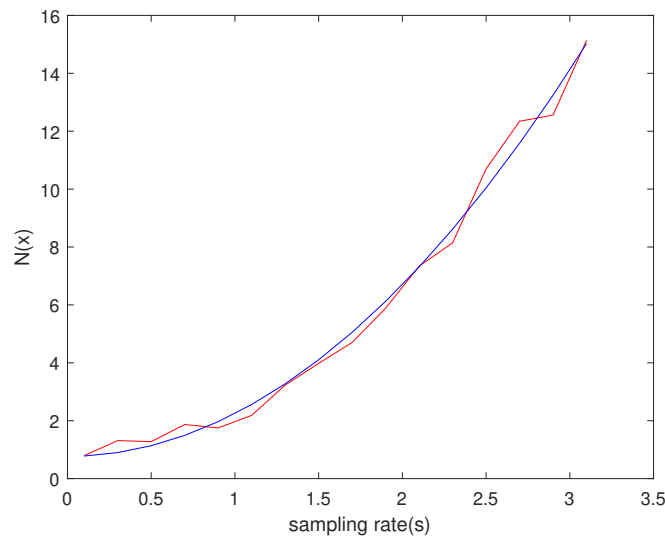


FIGURE 3.9 – Évolution de la norme supérieure $N(x)$ pour le système (3.14) en fonction du taux d'échantillonnage h pour une perturbation $d_{\max} = 10$.

Pour obtenir une meilleure estimation des coefficients c_1 et c_2 , le processus est effectué pour un ensemble de valeurs de h (de 0.1 à 3.1 par pas de 0.2) et pour d_{\max} (de 1 à 501 par pas de 50) en variant de manière indépendante.

Toutes les valeurs calculées par le logiciel sont ensuite utilisées pour estimer numériquement les coefficients c_1 et c_2 du Théorème 34 à l'aide de la méthode des moindres carrés. Les valeurs numériques obtenues sont $c_1 = 2.3667$ et $c_2 = 0.079$. Ils confirment les résultats obtenus dans les figures 3.7 et 3.8 : l'influence du taux d'échantillonnage sur la taille de la zone de convergence pratique est plus importante que celle exercée par la perturbation externe. Cet effet relatif des deux perturbations n'a aucune raison d'être identique pour d'autres systèmes. Cela signifie que pour ce système du double intégrateur en boucle fermée avec la commande homogène (3.15), les effets de l'échantillonnage sont plus importants que les effets de la perturbation. Le comportement de ce système est à rapprocher de celui des modes glissants : forte robustesse face aux perturbations exogènes, mais instabilité augmentant

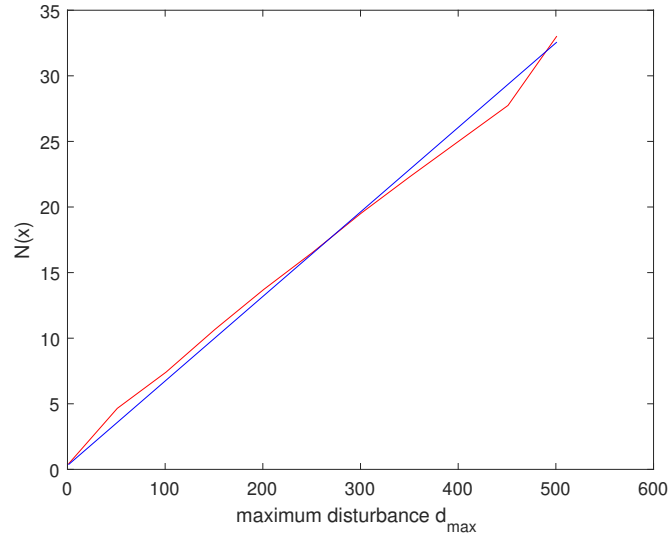


FIGURE 3.10 – Évolution de la norme supérieure $N(x)$ pour le système (3.14) en fonction de la perturbation externe d_{\max} pour un taux d'échantillonnage constant $h = 0.5s$.

significativement avec le pas d'échantillonnage (chattering).

3.4 Conclusion

Nous avons prouvé qu'un système contrôlé homogène de degré négatif atteint la stabilité pratique quand il est soumis simultanément à une perturbation externe et à un échantillonnage de sa commande. Il a été préalablement démontré dans [16] que pour un système homogène de degré négatif la taille de la zone de convergence pratique dépend du pas d'échantillonnage et du degré d'homogénéité κ du champ de vecteurs f . En appliquant de surcroît une perturbation externe sur le système, la taille de la zone de convergence devient fonction à la fois du taux d'échantillonnage, du degré d'homogénéité κ et de l'intensité maximale de la perturbation. De plus, le théorème principal révèle que les deux perturbations se superposent mais qu'elles n'interfèrent pas entre elles. Ce résultat vient combler une lacune dans la littérature du domaine, puisqu'aucun résultat n'était disponible jusqu'alors. Dans le chapitre suivant, nous allons appliquer ce résultat aux systèmes multi-agents dans le cadre d'un consensus tracking.

**STABILITÉ PRATIQUE D'UN SYSTÈME MULTI-AGENT
ÉCHANTILLONNÉ AVEC LEADER**

Sommaire

4.1	Introduction	54
4.2	Présentation des systèmes multi-agents	54
4.2.1	Les différents types de contrôles coopératifs	57
4.2.2	Théorie des graphes	59
4.2.3	Modélisation mathématique des SMA et échantillonnage	61
4.3	Consensus pratique d'un système multi-agents échantillonné	65
4.3.1	Prérequis	65
4.3.2	Formulation du problème	67
4.3.3	Résultat principal	68
4.4	Simulations	70
4.5	Conclusion	72

4.1 Introduction

Notre objectif dans ce chapitre est d'appliquer les résultats du chapitre précédent aux systèmes multi-agents. Après une présentation succincte des systèmes multi-agents et quelques rappels sur la théorie des graphes, nous allons considérer la problématique de la robustesse vis-à-vis de l'échantillonnage de la commande d'un système multi-agents incluant un leader autonome qui évolue indépendamment du reste de la flotte. En recourant à une loi de commande homogène de degré négatif, nous allons étudier et montrer la stabilité pratique d'un système multi-agents d'ordre deux en assimilant l'accélération du leader à une perturbation externe s'appliquant sur le système. Des simulations viendront ensuite illustrer les résultats obtenus pour un système composé de 5 agents et d'un leader. Les travaux présentés dans ce chapitre ont été soumis à la conférence IEEE American Control Conference 2022 [86].

4.2 Présentation des systèmes multi-agents

Un agent est une entité autonome, réelle ou abstraite, qui est capable d'agir sur elle-même et sur son environnement, qui peut communiquer avec d'autres agents, et dont le comportement est la conséquence de ses observations, de ses connaissances et de ses interactions avec les autres agents [49]. Un système multi-agent (SMA) est un système composé de plusieurs agents dont chacun a une activité et des informations propres. Depuis les années 1990, les SMA ont connu une importance croissante au sein de la communauté scientifique et sont depuis lors sortis des laboratoires et de plus en plus convoités en milieu industriel. Nous pouvons observer une large variété de SMA présents dans le monde vivant : les nuées d'oiseaux (voir la Figure 4.1), les bactéries (voir la Figure 4.2), les essaims d'abeilles, les

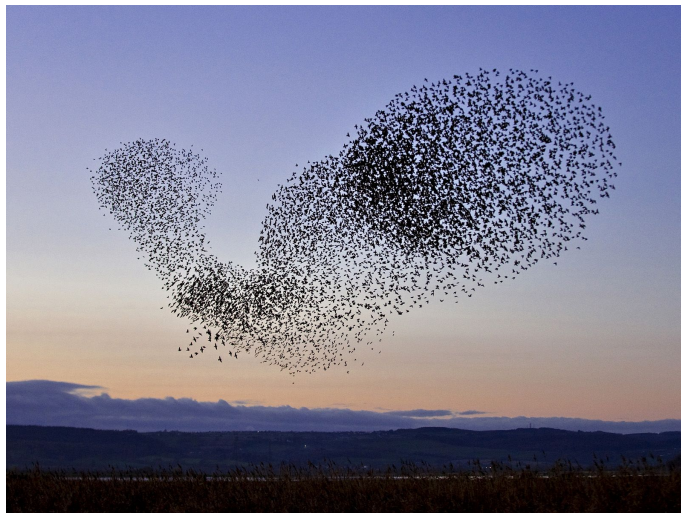


FIGURE 4.1 – Nuée d'oiseaux

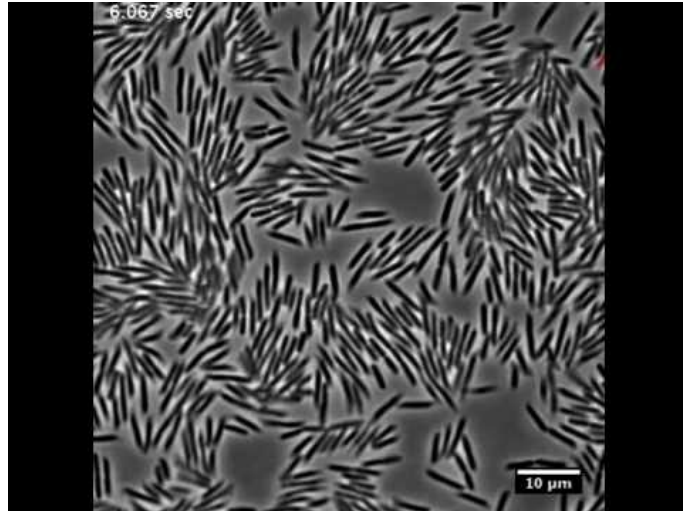


FIGURE 4.2 – Colonie de bactéries

troupeaux de bétail, les bancs de poissons etc.

Le contrôle des SMA s’inspire directement de ces comportements naturels observés, et a connu un véritable développement ces dernières décennies [38, 46, 47, 130]. Pour les SMA d’ordre deux, le suivi par consensus peut être compris comme le contrôle des positions d’un groupe d’agents de manière à ce qu’ils ne s’éloignent pas trop les uns des autres tout en assurant le suivi d’un leader. Le contrôle de formation assure en plus le maintien d’une configuration donnée et est très largement utilisé pour le transport de charges, le vol de satellites [153, 185] et le vol des véhicules aériens sans pilote [28, 58], voir la Figure 4.3. Par exemple dans le domaine de l’agriculture, les flottes autonomes/semi-autonomes



FIGURE 4.3 – Vol en formation d’avions de combat

de robots agricoles peuvent effectuer des travaux de précision s’ils sont équipés d’outils appropriés : doses variables d’engrais ou de pulvérisations, contrôle mécanique des mauvaises herbes et semoirs. Ces outils sont également automatisés avec les mêmes types de capteurs et d’actionneurs que ceux utilisés dans les véhicules autonomes par exemple pour le platooning [166], voir la Figure 4.4. Dans le domaine de l’industrie, les SMA sont également mis en oeuvre pour procéder à la surveillance d’un processus

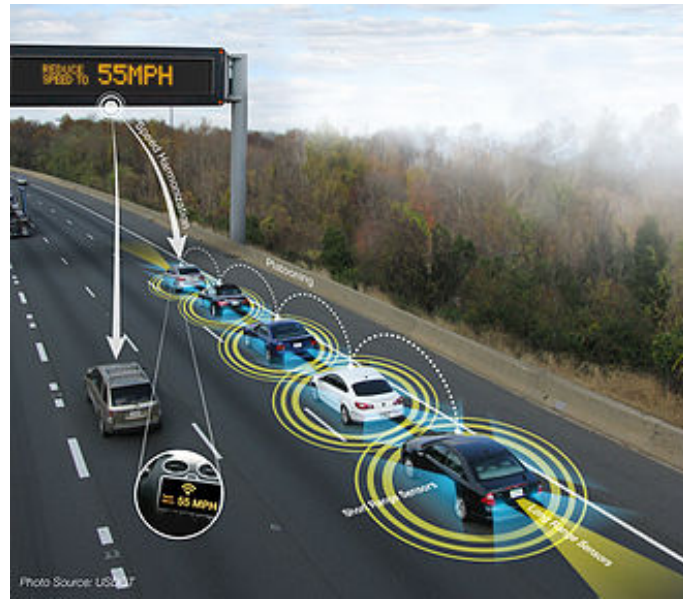


FIGURE 4.4 – Convoi routier de véhicules autonomes ou platooning

en coordonnant plusieurs surveillants spécialisés, au lieu d'envisager un seul surveillant omniscient.

Les systèmes multi-agents constituent aujourd'hui une technologie de choix pour la conception et la mise en oeuvre d'applications réparties et coopératives. La coopération entre les agents consiste à décomposer les tâches en sous-tâches puis à les répartir entre les différents agents. Les SMA peuvent ainsi résoudre des problèmes difficiles ou impossibles à résoudre pour un agent individuel ou un système centralisé.

En électronique, le développement de la miniaturisation permet de concevoir des robots qui disposent d'une certaine autonomie quant à la gestion de leur énergie et à leur capacité de décision. On peut montrer qu'un ensemble de petits robots ne disposant que de capacités élémentaires de décision et d'intelligence peut facilement rivaliser avec les performances d'un seul robot «intelligent», nécessairement plus lourd et plus difficile à gérer. Les SMA ont également des applications dans le domaine de l'intelligence artificielle où ils permettent de réduire la complexité de la résolution d'un problème en divisant le savoir nécessaire en sous-ensembles, en associant un agent intelligent indépendant à chacun de ces sous-ensembles et en coordonnant l'activité de ces agents.

Les SMA appartiennent à la grande famille des Systèmes Contrôlés en Réseau (SCR). Les SCR sont des systèmes de contrôle composés du système à contrôler, d'actionneurs, de capteurs et dont le fonctionnement est coordonné par un réseau de communication. Les capteurs collectent les informations, les contrôleurs calculent les commandes et les actionneurs exécutent les commandes. Les informations peuvent être transmises de manière fiable via des réseaux filaires ou sans fil. Les SCR ont connu un essor considérable ces dernières années. Cet engouement peut s'expliquer par le fait que les SCR permettent une facilité d'entretien et d'installation, ainsi qu'une grande flexibilité à moindre coût. Cependant,

ces avantages ont une contrepartie moins séduisante car les SCR peuvent présenter des déficiences en matière de communication. En effet, il faut tenir compte des temps d'échantillonnage/de transmission variables, des retards de communication variables, des pertes de paquets causés par le manque de fiabilité du réseau qui impactent la qualité des transmissions. Ces possibles défaillances impactent les commandes et justifient donc l'intérêt de la communauté des chercheurs en automatique quant à la question de l'étude de la robustesse des SMA soumis à des commandes avec entrées échantillonnées.

4.2.1 Les différents types de contrôles coopératifs

Le contrôle coopératif des SMA est un domaine de recherche en plein essor de la théorie du contrôle. Ces dernières années, des problèmes tels que l'afflux d'agents, le consensus, le recouvrement d'une zone géographique et les modèles de formations d'agents ont été des sujets d'étude importants.

On peut distinguer trois types de contrôles coopératifs : le contrôle centralisé, le contrôle décentralisé, et le contrôle distribué, voir la Figure 4.5.

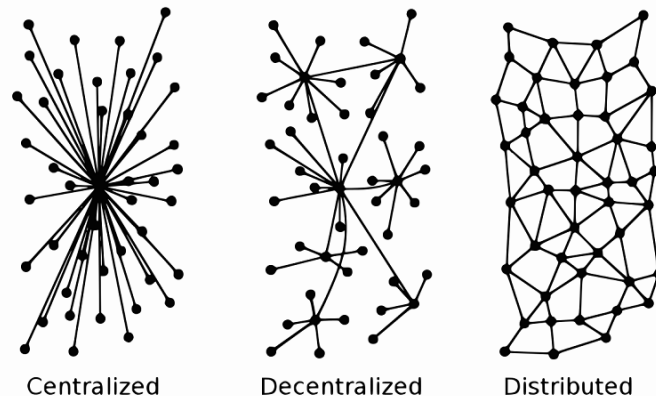


FIGURE 4.5 – Les types de contrôles coopératifs

Dans le cadre du contrôle centralisé [163], tous les agents sont reliés à une unité pilote et lui envoient leurs informations propres, voir l'exemple d'une flotte de robots sur la Figure 4.6. Historiquement c'est d'abord l'approche centralisée qui a été utilisée pour coordonner le fonctionnement d'un ensemble d'agents, par exemple sur les chaînes de production. Le comportement des agents est alors considéré collectivement. Les agents reçoivent des instructions de la part de l'unité pilote mais ne peuvent pas échanger d'information entre eux. Ce type de schéma de communication peut apporter une meilleure vue d'ensemble de l'organisation, car la gestion par l'unité centrale est optimale. En revanche, les inconvénients liés à un tel procédé sont assez contraignants : une panne de l'unité centrale va paralyser le système tout entier et le temps de calcul associé au traitement des données effectué par l'unité pilote peut rapidement devenir important et irréalisable en temps réel si le nombre d'agents est conséquent.



FIGURE 4.6 – Flotte de robots centralisée

La performance de l'unité centrale implique de ce fait une certaine contrainte qui limite le nombre d'agents qu'elle peut gérer. La capacité limitée des équipements de communication peut aussi perturber la transmission de l'information.

Il existe de nombreux réseaux complexes à grande échelle pour lesquels un contrôle centralisé est souvent difficile, voire impossible à appliquer, comme les réseaux de télécommunications. C'est pourquoi une autre configuration, décentralisée, a été envisagée [181]. Dans ce cas, le système est divisé en plusieurs sous parties fonctionnant localement de façon centralisée avec une unité pilote locale, chacune d'entre elles étant reliée à l'unité centrale du système.

Cependant la configuration décentralisée nécessite encore la mise en place d'unités centrales qui peut s'avérer difficile, par exemple pour le déploiement d'agents sans infrastructure fixe de communication. C'est pourquoi la configuration distribuée sans unité centrale a été développée. Elle a conduit au développement du contrôle distribué de SMA [29, 37, 43, 142, 144]. Elle permet de mener des actions et de mettre en oeuvre une stratégie coopérative de résolution des problèmes à l'aide de données partielles du système, voir sur la Figure 4.7 l'exemple d'une flotte de robots distribuée. Le contrôle distribué des SMA a donc connu un grand essor ces dernières décennies [129, 142, 143, 145]. Les avantages liés à cette stratégie distribuée sont multiples : l'efficacité, la rapidité et la flexibilité à moindre coût. En effet, la décision de l'évolution de chacun des agents ne nécessite qu'une connaissance partielle du système pour chaque agent, fonction de l'état de ses voisins. A partir d'observations partielles, chaque agent prend des décisions locales. Le mode de contrôle distribué peut se retrouver notamment dans le domaine de l'intelligence artificielle où il permet de réduire la complexité de la résolution d'un problème en divisant le savoir nécessaire en sous-ensembles. On parle ainsi d'intelligence artificielle distribuée.

Parmi les types de contrôle de SMA, le contrôle coopératif distribué a été largement privilégié pour

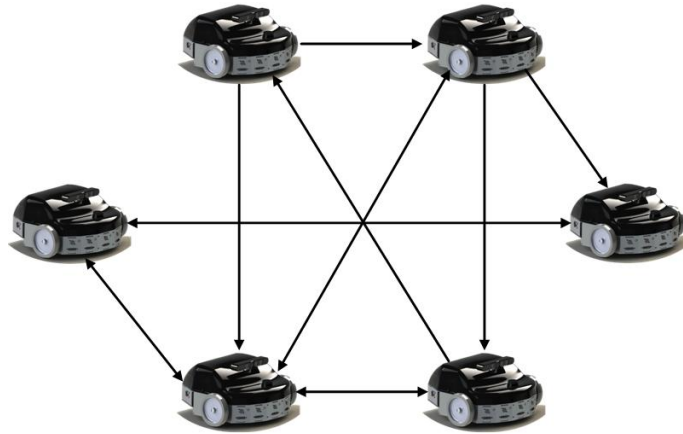


FIGURE 4.7 – Flotte de robots distribuée

sa facilité de mise en oeuvre, sa forte robustesse et sa grande faculté d'auto-organisation. Dans ce type de structure de communication en réseau, chacun des agents doit partager des informations avec ses voisins en lien avec lui.

Une topologie de communication définissant les connexions et les voies de circulation de l'information entre les agents peut alors être modélisée par un graphe algébrique. Les sommets représentent les agents et les arêtes représentent la communication entre les agents. Différents cas de figure peuvent se présenter. Le graphe peut être orienté ou dirigé et alors les échanges d'informations entre les agents sont unilatéraux [59, 104, 111, 157]. Dans le cas contraire, il est dit non orienté. La topologie peut être variable et alors le graphe évolue au cours du temps. Cette configuration a été étudiée dans [35, 77, 84, 103, 118, 121, 127, 140, 145].

4.2.2 Théorie des graphes

La modélisation des graphes est développée dans [26, 180]. Voici un rappel de définitions et propriétés élémentaires de la théorie des graphes.

Définition 37. *Un graphe $\mathcal{G} = (X, E)$ orienté est une structure mathématique composée de deux ensembles $X = \{1, \dots, N\}$, $N \in \mathbb{N}^*$ et $E \subset X \times X$. Les éléments de X sont appelés sommets (ou noeuds), et les éléments de E sont les arêtes. Chaque arête est associée à deux sommets appelés extrémités. Deux sommets reliés entre eux via une arête sont dits adjacents. L'ordre du graphe est le nombre de sommets du graphe.*

Définition 38. *Un graphe \mathcal{G} est dit non orienté si pour toute paire de sommets $(i, j) \in E$ alors $(j, i) \in E$.*

Définition 39. *Un graphe est dit complet si tous les sommets du graphe sont reliés deux à deux.*

Définition 40. Le voisinage ouvert d'un sommet $i \in X$ dans un graphe \mathcal{G} , noté $\mathcal{N}(i)$, est l'ensemble de tous les voisins de i . Le voisinage fermé de i est $\mathcal{N}(i) \cup \{i\}$. Une arête propre est une arête qui joint deux sommets disjoints. Une boucle propre est une arête qui joint un sommet à lui-même. Un graphe simple est un graphe qui n'a aucune boucle et qui a au plus une arête entre deux sommets. Dans le cas contraire, on parle de multigraphe.

Définition 41. Une chaîne est une suite finie d'arêtes e_1, \dots, e_p , $p \in \mathbb{N}^*$ pour laquelle il existe une suite d'arêtes $a_0, a_1, \dots, a_p \in X$ telle que $e_i = (a_{i-1}, a_i)$. Les extrémités sont a_0 et a_p . La longueur de la chaîne est égale au nombre d'arêtes qui la compose, soit p . Un cycle est une chaîne dont les extrémités coïncident.

Définition 42. Un graphe \mathcal{G} est connexe lorsque pour toute paire de sommets (i, j) , il existe une chaîne dont les extrémités sont les sommets i et j .

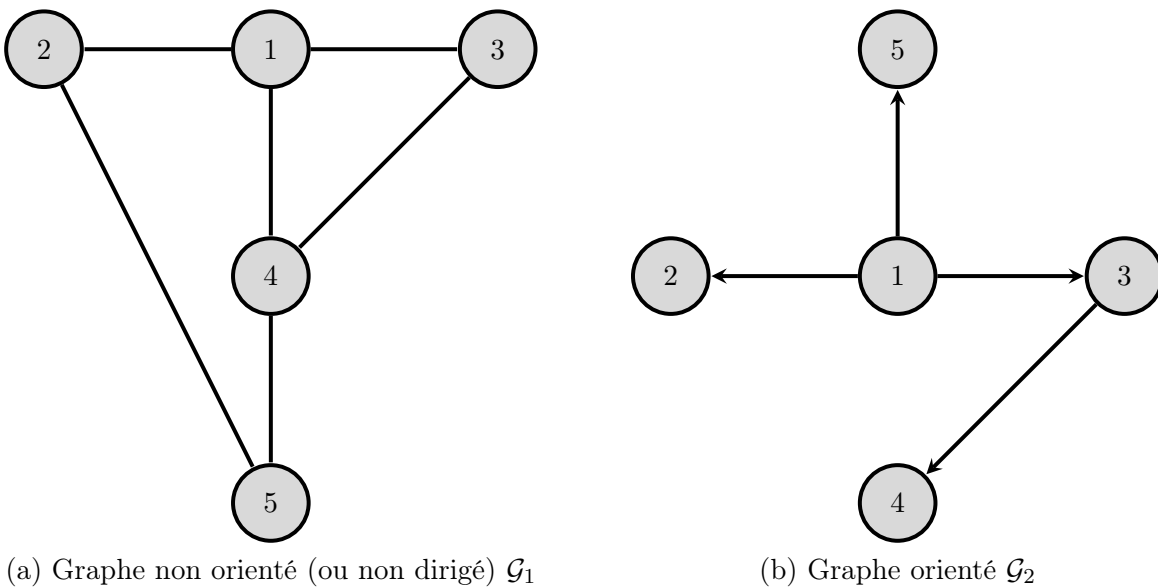


FIGURE 4.8 – Représentation de graphes

Définition 43. Soit (i, j) une arête de \mathcal{G} , alors :

- i est l'extrémité initiale ;
- j est l'extrémité terminale ;
- j est le successeur de i ;
- i et j sont adjacents.

Nous pouvons maintenant définir la matrice d'adjacence d'un graphe.

Définition 44. Soit $\mathcal{G} = (X, E)$ un graphe d'ordre N avec $X = \{1, \dots, N\}$. La matrice \mathcal{A} d'adjacence du graphe \mathcal{G} est la matrice $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ telle que : $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Proposition 45. Lorsque le graphe \mathcal{G} est non orienté, \mathcal{A} est symétrique.

Par exemple, pour le graphe non orienté \mathcal{G}_1 , nous avons la matrice \mathcal{A}_1 d'adjacence suivante :

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Définition 46. La matrice laplacienne associée à un graphe \mathcal{G} qui se déduit de la matrice d'adjacence \mathcal{A} est définie par $\mathcal{L} = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ où $l_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}$ et $l_{ij} = -a_{ij}$ si $i \neq j$.

Remarque 47. Pour un graphe non orienté, les matrices \mathcal{L} et \mathcal{A} sont symétriques.

Lemme 48. [131] Toutes les valeurs propres non nulles de la matrice laplacienne \mathcal{L} sont réelles et positives pour un graphe non orienté. 0 est une valeur propre simple de \mathcal{L} et le vecteur propre associé est 1_N si et seulement si le graphe non orienté est connexe.

Remarque 49. Pour un graphe non orienté, si $\lambda_i(\mathcal{L})$ est la i^{eme} valeur propre de la matrice \mathcal{L} avec $\lambda_1(\mathcal{L}) \leq \lambda_2(\mathcal{L}) \leq \dots \leq \lambda_N(\mathcal{L})$ alors $\lambda_1(\mathcal{L}) = 0$ et $\lambda_2(\mathcal{L})$ est appelée la connectivité algébrique du graphe.

Ces définitions établies, nous pouvons à présent considérer la modélisation des systèmes multi-agents.

4.2.3 Modélisation mathématique des SMA et échantillonnage

Nous modéliserons chaque agent d'un SMA homogène, i.e. un SMA ayant des agents tous identiques, par un système dynamique sous la forme :

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{4.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ désigne l'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ la variable de contrôle et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ est une fonction continue. n est la dimension de l'espace d'état et $m \in \mathbb{N}^*$ est la dimension de l'espace de

contrôle. Il est possible de modéliser les SMA par un simple, double, triple intégrateur et même par des intégrateurs d'ordre supérieur.

Modélisons tout d'abord le système multi-agents constitué par N agents par un simple intégrateur. La dynamique des agents est alors décrite par :

$$\dot{x}_i = u_i \quad i = 1, \dots, N \quad (4.2)$$

avec $x_i \in \mathbb{R}^n$ désignant l'état de l'agent i , et $u_i \in \mathbb{R}^n$ le contrôle de l'agent i . Dans ce cas, on a $f(x, u) = u$, où $x = (x_1^T, \dots, x_N^T)^T$ et $u = (u_1^T, \dots, u_N^T)^T$.

Un exemple de SMA modélisé par un simple intégrateur est proposé dans [33], dont voici le système d'équations :

$$\dot{x}_i(t) = - \sum_{j=1}^N a_{ij}(t)[x_i(t) - x_j(t)] \quad i = 1, \dots, N \quad (4.3)$$

où la commande est définie par $u_i(x) = - \sum_{j=1}^N a_{ij}(t)[x_i(t) - x_j(t)]$, les termes $a_{i,j}$ représentent les coefficients de la matrice d'adjacence.

Modélisons à présent le SMA d'ordre deux à l'aide d'un double intégrateur. Considérons, pour tout i , l'état $x_i \in \mathbb{R}^{2n}$ de l'agent i , avec $x_i = (p_i^T, q_i^T)^T$, où $q_i \in \mathbb{R}^n$ représente la position de l'agent i , $p_i \in \mathbb{R}^n$ sa vitesse et $u_i \in \mathbb{R}^n$ sa loi de commande. Le système d'équations est alors donné par :

$$\begin{cases} \dot{q}_i = p_i & i = 1, \dots, N \\ \dot{p}_i = u_i \end{cases} \quad (4.4)$$

Cette modélisation apparaît notamment dans [192] sous le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{q}_i = p_i & i \in \{1 \dots N\} \\ \dot{p}_i = -\beta q_i - \alpha p_i + \sum_{v_j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}[\gamma_0(q_j - q_i) + \gamma_1(p_j - p_i)]. \end{cases} \quad (4.5)$$

où la commande est définie par $u_i(x) = -\beta q_i - \alpha p_i + \sum_{v_j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}[\gamma_0(q_j - q_i) + \gamma_1(p_j - p_i)]$ avec $\alpha, \beta, \gamma_0, \gamma_1 > 0$, \mathcal{N}_i désignant l'ensemble des voisins de l'agent i et les termes a_{ij} représentant les coefficients de la matrice d'adjacence.

Nous pouvons réécrire le système (4.4) sous la forme suivante :

$$\dot{x}_i = Ax_i + Bu_i$$

où $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dans ce cas, $f(x, u) = A \otimes I_N x + B \otimes I_N u$, où $u = (u_1^T, \dots, u_N^T)^T$ et $x = (x_1^T, \dots, x_N^T)^T$.

Dans la littérature, la dynamique des SMA est principalement modélisée par des systèmes de premier et second ordre, qui permettent de décrire efficacement le comportement d'un groupe d'agents à l'aide des coordonnées de position et de vitesse. Cependant, l'accélération a également un effet sur les états des agents et sa variation est également un élément à prendre en compte. La modélisation du SMA par un triple intégrateur ou même un système d'ordre supérieur [159, 170, 171] permet de quantifier cette variation.

Intéressons-nous à présent à la problématique du consensus et du suivi par consensus des SMA. Le terme consensus signifie accord, adhésion, unanimité. Un consensus est un accord tacite ou explicite entre plusieurs agents sur un sujet déterminé.

Définition 50. *Un groupe d'agents atteint un consensus stable lorsque tous les agents convergent vers une valeur ou un état commun.*

Avec les notations des systèmes (4.4) et (4.2), cette définition est équivalente à :

Définition 51. *Le consensus est atteint si, pour toutes valeurs initiales $x_i(0)$ et pour tous $i, j = 1, \dots, N$, on a $\|x_i(t) - x_j(t)\| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.*

Dans ce cas, les agents doivent se coordonner de façon à ce que tous les états des agents soient égaux en temps infini [82, 115, 188, 192]. C'est la configuration la plus répandue chez les SMA du fait du grand nombre d'applications qu'elle comporte. On peut distinguer fondamentalement plusieurs types de consensus :

- le consensus asymptotique : les agents convergent vers un équilibre en temps asymptotique [19, 104, 192]
- le consensus exponentiel : les agents convergent vers un équilibre en temps exponentiel [104, 192]
- le consensus en temps fini : les agents convergent vers un équilibre en un temps fini [59, 182, 194, 200]. Dans ce cas de figure se trouve le problème du rendez-vous : les agents arrivent simultanément à un emplacement prédéfini au départ [65, 102, 146, 176].

Quand le consensus n'est pas exact, à savoir que la convergence des états des agents se fait dans une boule autour d'un équilibre, on parle de consensus pratique.

Définition 52. *Le consensus pratique est atteint pour (4.4) et (4.2) s'il existe $\varepsilon > 0$, tel que pour toutes valeurs initiales $x_i(0)$, pour tous $i, j = 1, \dots, N$, on a $\|x_i(t) - x_j(t)\| \leq \varepsilon$ quand $t \rightarrow \infty$.*

Le problème du suivi par consensus avec leader, *consensus tracking* en anglais, est traité dans [80, 81, 198, 199]. Le leader est un agent particulier de la flotte qui a une dynamique indépendante des autres agents. Il est en lien avec au moins un agent et lui transmet tout ou une partie de son état. Cependant le leader ne reçoit aucune information de la part des autres agents et suit sa propre trajectoire de référence. Afin de définir la notion de suivi par consensus, introduisons quelques notations. Considérons à présent un SMA constitué par N agents et un leader dont la trajectoire est régie par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{q}_0 &= p_0 \\ \dot{p}_0 &= u_0 \end{cases} \quad (4.6)$$

où $q_0 \in \mathbb{R}^n$ représente la position du leader, $p_0 \in \mathbb{R}^n$ sa vitesse et $u_0 \in \mathbb{R}^n$ est sa commande. On note $x_0(t) = (q_0(t)^T, p_0(t)^T)^T$. Les équations régissant la dynamique des N agents restent identiques au système (4.4). La définition la plus simple du suivi par consensus correspond à la convergence asymptotique des états des agents vers celui du leader. En reprenant les notations des systèmes (4.6) et (4.4), nous avons :

Définition 53 (Suivi par consensus). *Le suivi par consensus est atteint pour le SMA (4.4)–(4.6) si pour toutes valeurs initiales $x_i(0)$ et pour tout $i = 1, \dots, N$, on a $\|x_i(t) - x_0(t)\| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.*

Définition 54 (Suivi par consensus pratique). *Le suivi par consensus pratique est atteint pour le SMA (4.4)–(4.6) s'il existe $\varepsilon \geq 0$ tel que pour tout $i = 1, \dots, N$, et pour toutes valeurs initiales $x_i(0)$ on a $\|x_i(t) - x_0(t)\| \leq \varepsilon$ quand $t \rightarrow \infty$.*

Définition 55 (Suivi par consensus pratique stable). *On considère que le SMA (4.4)–(4.6) atteint le consensus pratique stable s'il existe une fonction β de classe \mathcal{KL} et une constante $C \geq 0$ tels que $\|x\| \leq \beta(\|x_0\|, t) + C$, où $x = ((q_1 - q_0)^T, \dots, (q_N - q_0)^T, (p_1 - p_0)^T, \dots, (p_N - p_0)^T)^T$. Si $C = 0$, nous disons que le suivi par consensus stable est atteint.*

Parfois une approche avec un leader virtuel a été utilisée pour résoudre le problème du consensus [29, 130, 134, 187]. D'autres notions de consensus pour les SMA intégrant un leader peuvent également être envisagées :

- le suivi par formation, *formation tracking* en anglais : le but de ce consensus est de contrôler tous les agents pour réaliser et maintenir une forme géométrique préspecifiée. Le suivi par formation de MAS est largement utilisé dans le transport de charges, le vol en formation de satellites et la mise en formation de véhicules aériens sans pilote, voir [41, 42, 96].
- le *containment tracking* est un problème de suivi par consensus avec plusieurs leaders. Dans ce

cas, l'objectif de contrôle est d'amener les états des suiveurs dans la coque convexe couverte par ceux des leaders, voir [101, 112, 178, 179].

L'échantillonnage de la commande des SMA pose des problèmes plus complexes que l'échantillonnage de la commande des systèmes avec un seul agent. Il existe 4 types d'échantillonnage de la commande pour les SMA

1. l'échantillonnage synchrone périodique, *synchronously periodic sampling (SPS)* en anglais, où tous les agents ont la même période d'échantillonnage périodique en entrée [18, 34, 183];
2. l'échantillonnage asynchrone périodique, *asynchronously periodic sampling (APS)* en anglais, où chaque agent a sa propre période d'échantillonnage périodique en entrée [114];
3. l'échantillonnage synchrone apériodique, *synchronously variable sampling (SVS)* en anglais, où tous les agents ont la même période d'échantillonnage apériodique en entrée [3, 18, 122];
4. l'échantillonnage asynchrone apériodique, *asynchronously variable sampling (AVS)* en anglais, où chaque agent a sa propre période d'échantillonnage apériodique en entrée [39, 101, 102, 108, 113, 184].

On pourra se référer à l'article suivant [56] pour plus de détails sur le consensus des SMA avec échantillonnage de la commande. Dans ce qui suit, nous nous intéresserons au problème de l'échantillonnage SVS des SMA perturbés avec des commandes homogènes. Le cas non perturbé a été traité dans [18].

4.3 Consensus pratique d'un système multi-agents échantillonné

Le Théorème 58 figurant dans cette section est une reformulation du Théorème 34 figurant dans le chapitre précédent.

4.3.1 Prérequis

Nous considérons le système non-linéaire (3.6) vu précédemment :

$$\dot{x} = f(x, u, d)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ est la variable de contrôle, $d \in \mathbb{R}^p$ la perturbation qui est supposée essentiellement bornée et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Nous considérons qu'une loi de commande statique $u(x)$ est connue pour laquelle les deux hypothèses suivantes sont valables :

Hypothèse 56. *L'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable du système en boucle fermée $\dot{x} = f(x, u(x), 0)$.*

Hypothèse 57. *Il existe une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice $\bar{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ telles que $-\mathbf{A}$ et $-\bar{\mathbf{A}}$ sont Hurwitz et $\kappa < 0$ tels que*

$$f(e^{\mathbf{A}s}x, u(e^{\mathbf{A}s}z), e^{\bar{\mathbf{A}}s}d) = e^{\kappa s} e^{\mathbf{A}s} f(x, u(z), d)$$

pour tout $x, z \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}^p$ et tout $s \in \mathbb{R}$.

Puisque dans les systèmes de communication en réseau, l'état du système est mis à jour seulement à des instants de discrétisation, nous considérons une suite de temps d'échantillonnage $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant $t_0 = 0$ et une période d'échantillonnage maximale $h > 0$ telle que :

$$0 < t_{k+1} - t_k \leq h. \quad (4.7)$$

En raison de l'échantillonnage, la loi de commande sample and hold vérifie $u_{SD}(t) = u(x(t_k))$ pour tout $t \in [t_k, t_{k+1})$. Le système peut donc être réécrit sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(x(t_k)), d(t)), \quad t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (4.8)$$

Nous énonçons ci-dessous une nouvelle formulation du Théorème 34 plus adaptée aux notations de ce chapitre.

Théorème 58. *Supposons que le système échantillonné (4.8) est tel que les instants d'échantillonnage vérifient (4.7) et que les Hypothèses 56 et 57 soient vérifiées. Considérons \mathcal{N} une norme \mathbf{A} -homogène et $\bar{\mathcal{N}}$ une norme $\bar{\mathbf{A}}$ -homogène. Alors il existe des constantes $c_1 > 0, c_2 > 0$ telles que l'ensemble*

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{N}(x) \leq c_1 h^{-\frac{1}{\kappa}} + c_2 d_{max} \right\}$$

est globalement asymptotiquement stable par rapport au système (4.8), où $d_{max} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}^+} \bar{\mathcal{N}}(d(t))$. Ainsi, il existe une fonction β de classe \mathcal{KL} telle que :

$$\mathcal{N}(x) \leq \beta(\mathcal{N}(x_0), t) + c_1 h^{-\frac{1}{\kappa}} + c_2 d_{max}.$$

Nous allons appliquer ce théorème à un système homogène multi-agents échantillonné avec leader afin de montrer que le consensus tracking pratique stable est atteint.

4.3.2 Formulation du problème

Nous considérons un SMA d'ordre 2 constitué par un leader et N agents dont la dynamique est décrite par un double intégrateur. L'objectif des agents est de rejoindre le leader qui suit une trajectoire indépendante des agents. Nous supposons que le leader envoie ses informations de position et de vitesse à au moins un agent, voir la Figure 4.9.

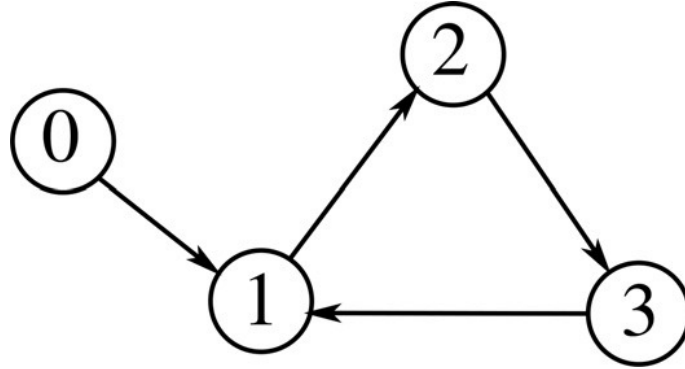


FIGURE 4.9 – SMA composé de 3 agents (1,2,3) et d'un leader (0) envoyant ses données à un agent (1)

Nous supposons également qu'une loi de commande par retour d'état qui permette aux agents et au leader d'atteindre le consensus est déjà connue. Cependant, en raison de la communication en réseau, les lois de commande pour les N agents doivent être échantillonnées. Ainsi, les agents envoient leurs informations de position et de vitesse à leurs voisins à des instants discrets selon un graphe connexe statique. Notre but est de montrer que le SMA échantillonné atteint le consensus pratique sous des hypothèses convenables. Dans ce but, nous pouvons appliquer le Théorème 58.

On suppose que la dynamique du leader est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{q}_0 = p_0 \\ \dot{p}_0 = u_0 \end{cases} \quad (4.9)$$

où $q_0 \in \mathbb{R}^n$ indique sa position, $p_0 \in \mathbb{R}^n$ sa vitesse, et $u_0 \in \mathbb{R}^n$ son accélération, qui est supposée essentiellement bornée, c'est-à-dire $\text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}^+} \|u_0(t)\|_2 < +\infty$. Pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, on pose également pour la dynamique de chaque agent i :

$$\begin{cases} \dot{q}_i = p_i \\ \dot{p}_i = u_i \end{cases} \quad (4.10)$$

où $q_i \in \mathbb{R}^n$ indique la position de l'agent i , $p_i \in \mathbb{R}^n$ sa vitesse, u_i sa loi de commande, $q = (q_1^T, \dots, q_N^T)^T$, et $p = (p_1^T, \dots, p_N^T)^T$.

Remarque 59. *Le suivi par consensus est habituellement formulé en disant que, pour chaque $i \in \{1, \dots, N\}$, $q_i - q_0 \rightarrow 0$ et $p_i - p_0 \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. La Définition 55 peut être vue comme une version renforcée de cette formulation classique où les agents ne doivent pas seulement atteindre de façon asymptotique le leader mais doivent le faire de façon stable. En fait, il est nécessaire que $\|q_i - q_0\| \leq \|x\| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ mais ce n'est pas suffisant.*

Nous supposons que les lois de commande u_i dans (4.10) sont échantillonnées à des instants $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suivant (4.7). Nous allons montrer que le suivi par consensus est atteint pour le SMA si les lois de commande u_i satisfont les hypothèses suivantes :

Hypothèse 60. *Pour chaque $i \in \{1, \dots, N\}$, la loi de commande u_i dépend seulement de $q_i - q_j$ et $p_i - p_j$ pour tout $j \in \{0, \dots, N\}$ tel que l'agent i reçoit des informations de l'agent j .*

En posant $\tilde{q}_j = q_j - q_0$ et $\tilde{p}_j = p_j - p_0$, l'Hypothèse 60 implique en particulier que u_i dépend seulement de $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_N, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_N$. Par ailleurs, nous noterons $\tilde{q} = (\tilde{q}_1^T, \dots, \tilde{q}_N^T) \in \mathbb{R}^{nN}$ and $\tilde{p} = (\tilde{p}_1^T, \dots, \tilde{p}_N^T)^T \in \mathbb{R}^{nN}$ et nous écrirons $u_i = u_i(\tilde{q}, \tilde{p})$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible et ceci pour plus de clarté.

Hypothèse 61. *En temps continu, si $u_0 = 0$ alors les lois de commande u_i avec $i \in \{1, \dots, N\}$ appliquées à (4.9) et (4.10) atteignent le suivi par consensus stable.*

Hypothèse 62. *Il existe $\frac{1}{2} < r < 1$ tel que pour tous $s \in \mathbb{R}$ et tout $i \in \{1, \dots, N\}$, nous avons*

$$u_i(e^s \tilde{q}, e^{rs} \tilde{p}) = e^{(2r-1)s} u_i(\tilde{q}, \tilde{p}) \quad (4.11)$$

4.3.3 Résultat principal

Énonçons à présent le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 63. *Nous considérons le SMA (4.9)–(4.10). Nous supposons que les Hypothèses 60–62 sont vérifiées. Nous considérons que les lois de commande u_i sont échantillonnées à des instants $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui vérifient (4.7). Posons $x = (\tilde{q}^T, \tilde{p}^T)^T$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \otimes I_{nN}$ et $\overline{\mathbf{A}} = (2r - 1)I_{nN}$; \mathbf{A} et $\overline{\mathbf{A}}$ sont anti-Hurwitz. Pour toute norme \mathbf{A} -homogène \mathcal{N} et $\overline{\mathbf{A}}$ -homogène $\overline{\mathcal{N}}$, il existe des constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ telles que l'ensemble compact*

$$\mathcal{K} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{2nN} : \mathcal{N}(x) \leq c_1 h^{-\frac{1}{\kappa}} + c_2 d_{\max} \right\}$$

est globalement asymptotiquement stable où h désigne le pas d'échantillonnage et $d_{\max} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}^+} \overline{\mathcal{N}}(u_0 \otimes 1_N)$. Ainsi, le SMA (4.9)–(4.10) atteint le suivi par consensus pratique stable.

Démonstration. Posons $u(\tilde{q}, \tilde{p}) = (u_1(\tilde{q}, \tilde{p})^T, \dots, u_N(\tilde{q}, \tilde{p})^T)^T \in \mathbb{R}^{nN}$. En soustrayant le système (4.9) à chacun des N systèmes (4.10), nous avons :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}} = \tilde{p} \\ \dot{\tilde{p}} = u(\tilde{q}, \tilde{p}) - u_0 \otimes 1_N \end{cases} \quad (4.12)$$

Soit f le membre de droite de (4.12) :

$$f(x, u(x), d) = \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ u(x) + d \end{pmatrix}$$

avec $d = -u_0 \otimes 1_N \in \mathbb{R}^{nN}$. u_0 correspond à l'accélération du leader, son influence sur le système est assimilée à une perturbation externe. Pour appliquer le Théorème 58, nous avons besoin de vérifier les deux Hypothèses 56 et 57.

Tout d'abord, nous avons que l'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système en boucle fermée $\dot{x} = f(x, u(x), 0)$. Cette affirmation est exactement équivalente à l'Hypothèse 61.

Ensuite, nous vérifions la condition d'homogénéité de l'Hypothèse 57 pour f . En posant $z = (\zeta^T, \xi^T)^T \in \mathbb{R}^{2nN}$, nous avons :

$$\begin{aligned} f(e^{\mathbf{A}s}x, u(e^{\mathbf{A}s}z), e^{\bar{\mathbf{A}}s}d) &= \begin{pmatrix} e^{rs}\tilde{p} \\ u(e^s\zeta, e^{rs}\xi) - e^{(2r-1)s}u_0 \otimes 1_N \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{rs}\tilde{p} \\ e^{(2r-1)s}u(\zeta, \xi) - e^{(2r-1)s}u_0 \otimes 1_N \end{pmatrix} \text{ d'après l'hypothèse (62)} \\ &= e^{(r-1)s} \left[\begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{rs} \end{pmatrix} \otimes I_{nN} \right] \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ u(\zeta, \xi) - u_0 \otimes 1_N \end{pmatrix} \\ &= e^{(r-1)s} \left[\begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{rs} \end{pmatrix} \otimes I_{nN} \right] f(x, u(z), d). \end{aligned}$$

Ceci montre que l'Hypothèse 57 est vérifiée pour f avec $\kappa = r - 1 < 0$.

D'après le Théorème 58, nous pouvons conclure qu'il existe une fonction β de classe \mathcal{KL} et des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$\mathcal{N}(x) \leq \beta(\mathcal{N}(x_0, t)) + c_1 h^{-\frac{1}{\kappa}} + c_2 d_{\max}.$$

En conséquence, d'après le Lemme 22, il existe des fonctions α_1, α_2 de classe \mathcal{K}_∞ telles que

$$\|x\| \leq \alpha_2(\beta(\alpha_1^{-1}(\|x_0\|), t) + c_1 h^{-\frac{1}{\kappa}} + c_2 d_{\max}).$$

Par des opérations usuelles sur des fonctions de classe \mathcal{K} , nous avons finalement montré le suivi par consensus pratique stable. \square

4.4 Simulations

Dans cette partie, nous illustrons les performances de la loi de commande homogène proposée par des simulations numériques. Nous considérons un SMA d'ordre 2 de la forme de (4.9)–(4.10), constitué par 5 agents et un leader, évoluant dans le plan ($n = 2$) et dont la topologie de communication est donnée par la Figure 4.10. Nous choisissons une période d'échantillonnage constante $t_k = kh$ avec

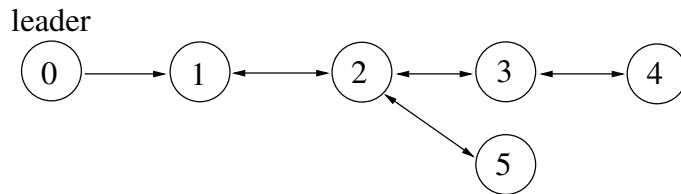


FIGURE 4.10 – Graphe de communication du SMA constitué par 5 agents et un leader

$h > 0, k \in \mathbb{N}$. Dans un premier temps, nous considérons la loi de commande linéaire suivante :

$$u_i = - \left(\sum_{j=1}^5 a_{ij}(q_i - q_j) + d_{ii}(q_i - q_0) \right) - \left(\sum_{j=1}^5 a_{ij}(p_i - p_j) + d_{ii}(p_i - p_0) \right) \quad (4.13)$$

avec $i \in \{1, \dots, 5\}$, où $d_{ii} = 1$ si l'agent i a un lien direct avec le leader et $d_{ii} = 0$ sinon. Remarquons que (4.13) assure le consensus du SMA si et seulement si l'accélération du leader est égale à zéro. Dans le cas contraire, il y a seulement un suivi par consensus pratique. Le seuil de Schur h_{schur} correspondant à la loi de commande (4.13) est égal à 0.48s.

Dans un deuxième temps, nous considérons la loi de commande homogène donnée par :

$$u_i = - \left[\left(\sum_{j=1}^5 a_{ij}(q_i - q_j) + d_{ii}(q_i - q_0) \right) \right]^\alpha - \left[\left(\sum_{j=1}^5 a_{ij}(p_i - p_j) + d_{ii}(p_i - p_0) \right) \right]^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} \quad (4.14)$$

avec $\alpha = 0.5$. Nous pouvons vérifier que pour cette loi de commande les Hypothèses (57)–(62) sont satisfaites. Le degré d'homogénéité est égal à $\alpha - 1 = -0.5$. Posons $q_i = (q_{ix}, q_{iy})$ et $p_i = (p_{ix}, p_{iy})$ les vecteurs position et vitesse des agents pour tout $i \in \{1, \dots, 5\}$. Nous supposons que les positions initiales des agents $(q_{ix}(0), q_{iy}(0))$ sont contenues dans le domaine $[-1; 1] \times [-1; 1]$ et que toutes les

vitesses initiales des agents $(p_{ix}(0), p_{iy}(0))$ sont nulles. Les conditions initiales du leader sont $q_0 = (0, 0)$ et $p_0 = (0, 0)$. Posons $u_0 = (u_{0x}, u_{0y})$ l'accélération du leader. La Figure 4.11 montre l'accélération de référence du leader $u_0(t)$. Les vitesses de référence ne dépassent jamais 1.5 en valeur absolue.

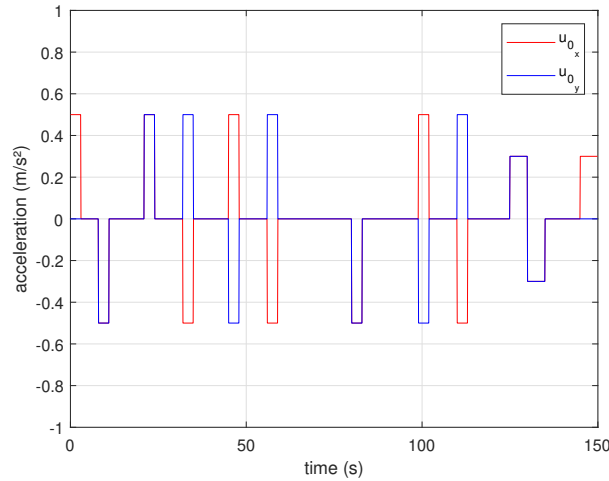
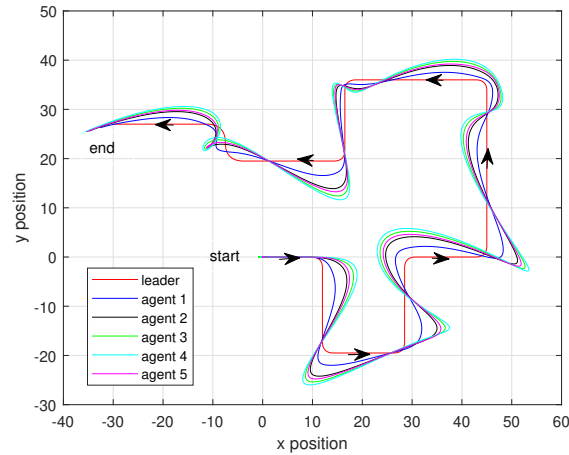


FIGURE 4.11 – Accélérations linéaires $u_0 = (u_{0x}, u_{0y})$ du leader

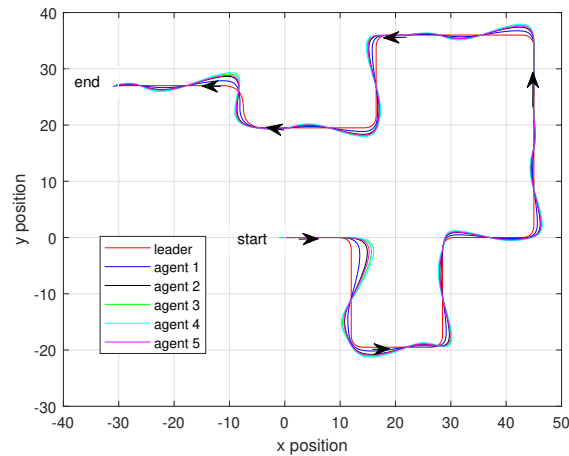
Cas 1 : le temps d'échantillonnage h est fixée à 0.01s. La Figure 4.12a montre les trajectoires de chaque agent dans le plan quand la loi de commande linéaire (4.13) est appliquée. Les trajectoires tracées sur la Figure 4.12b sont obtenues via la loi de commande homogène (4.14). Les unités des coordonnées sont données en mètres. Les Figures 4.13a et 4.13b représentent les positions des agents en fonction du temps pour l'accélération de référence du leader donnée par la Figure 4.11 pour les deux lois de commande. Pour la période d'échantillonnage $h = 0.01s$, les effets de la discrétisation de la commande sont négligeables. Le suivi par consensus pratique est atteint pour les deux lois de commande. Seules les perturbations dues à l'accélération du leader ont un impact sur le suivi par consensus. Les lois de contrôle homogènes donnent de meilleurs résultats que les lois de commande linéaires, dans le sens où les trajectoires des agents sont plus proches de celle du leader.

Cas 2 : nous considérons à présent un temps d'échantillonnage $h = 0.45s$ proche de $h_{schur} = 0.48s$ pour montrer les effets de la discrétisation de la loi de commande. Comme attendu, l'erreur entre les trajectoires des agents et la trajectoire du leader augmente quand le pas d'échantillonnage augmente. Cette erreur reste bornée en accord avec le Théorème 63 quand la loi de commande homogène est appliquée. Pour le cas linéaire, le système s'approche de l'instabilité lorsque h s'approche de h_{schur} , voir les Figures 4.14a, 4.14b, 4.15a, et 4.15b.

Cas 3 : La période d'échantillonnage $h = 0.6s$ est plus grande que $h_{schur} = 0.48s$. Les résultats de simulation sont présentés sur les Figures 4.16a et 4.16b quand la loi de commande homogène est



(a) Loi de commande linéaire (3.4)



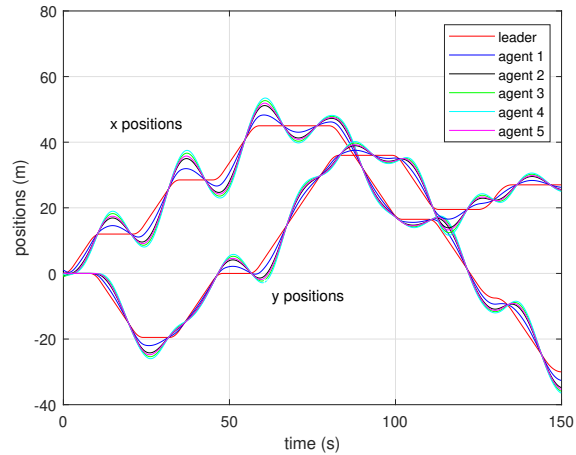
(b) Loi de commande homogène (4.14)

FIGURE 4.12 – Trajectoires des agents et du leader pour $h = 0.01s$

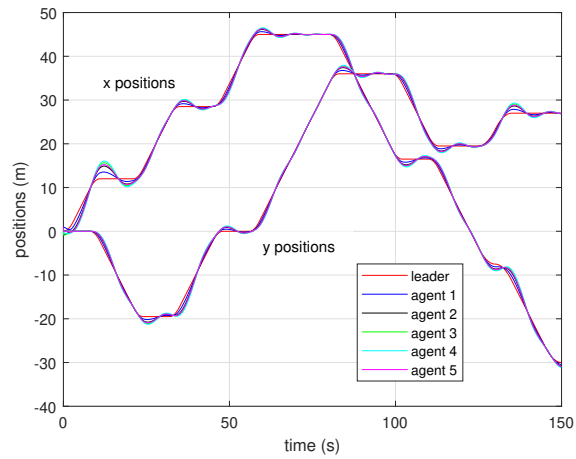
appliquée. On peut remarquer que le suivi par consensus pratique est atteint, même si le suivi est moins précis. L'erreur de position entre les agents et le leader reste bornée alors qu'avec la loi de commande linéaire, le système en boucle fermée est instable.

4.5 Conclusion

Nous avons montré que le consensus tracking pratique stable était atteint pour un SMA dans le cas d'une loi de commande homogène de degré négatif. Les simulations d'un SMA composé de 5 agents et d'un leader illustrent ce résultat et confirment la stabilité du système même avec des périodes d'échantillonnage importantes. Contrairement au cas de la commande linéaire où les agents divergent lorsque la période d'échantillonnage dépasse une valeur seuil appelée seuil de Schur, il n'existe pas de valeur seuil pour l'échantillonnage des commandes d'un SMA dont la dynamique est régie par une loi de commande homogène. La contrainte qui s'établit en revanche est que l'on perd en précision de



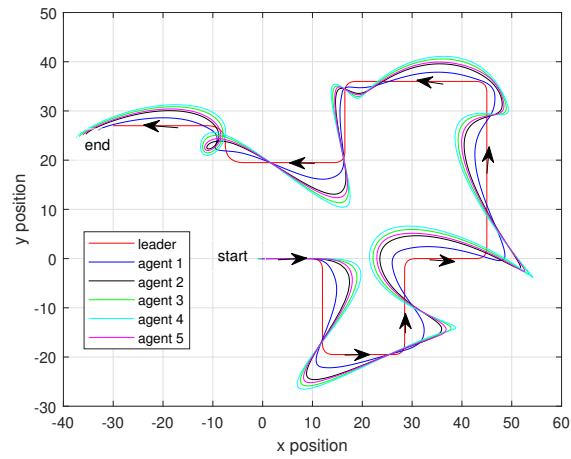
(a) Loi de commande linéaire (3.4)



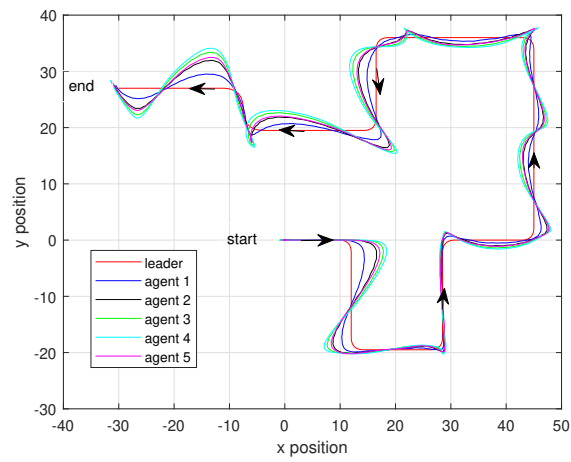
(b) Loi de commande homogène (4.14)

FIGURE 4.13 – Positions des agents et du leader pour $h = 0.01s$

convergence et qu'au lieu d'obtenir un consensus avec une convergence asymptotique, le SMA réalise un consensus pratique dans une boule homogène dont la taille est fonction à la fois du pas d'échantillonnage et de l'accélération maximale du leader. Ce résultat montre la bonne robustesse des SMA homogènes soumis à un échantillonnage basse fréquence dans le cadre d'un suivi par consensus et vient s'ajouter aux autres propriétés de robustesse déjà connues pour les systèmes homogènes.

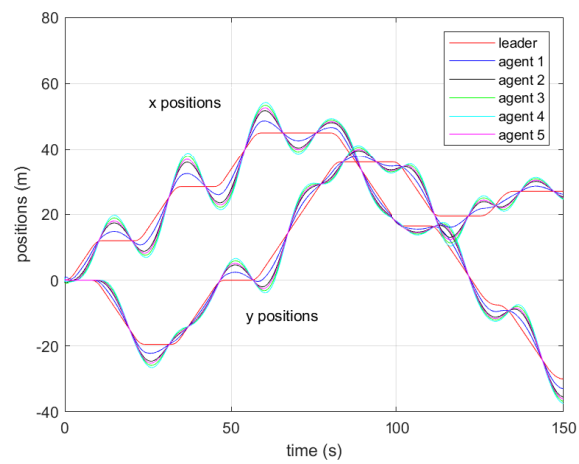


(a) Loi de commande linéaire (3.4)

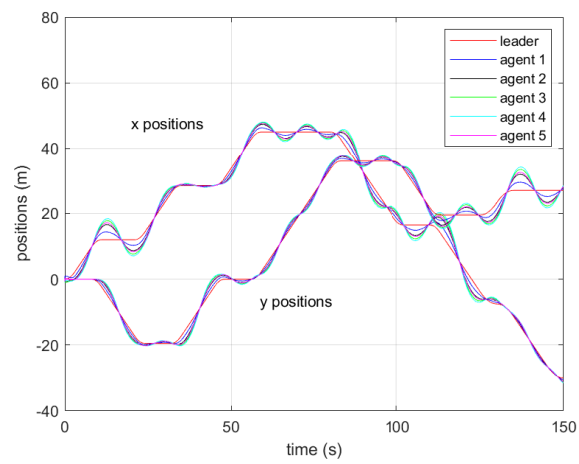


(b) Lois de commande homogènes (4.14)

FIGURE 4.14 – Trajectoires du leader et des agents pour $h = 0.45s$

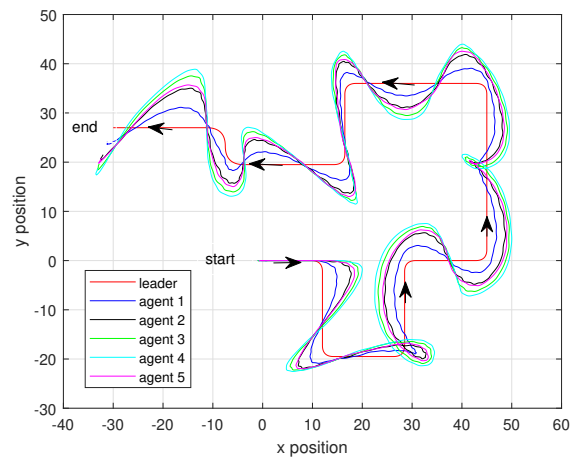
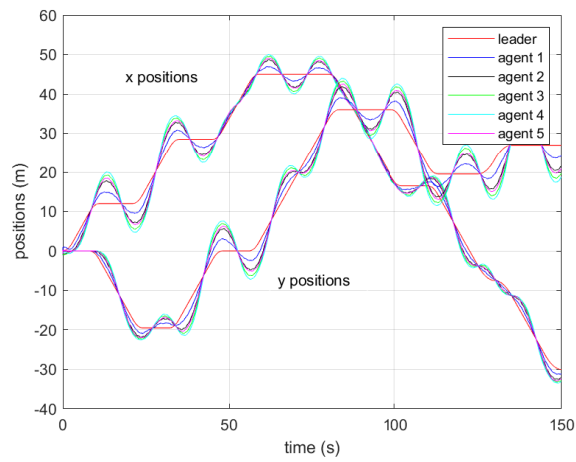


(a) Loi de commande linéaire (3.4)



(b) Loi de commande homogène (4.14)

FIGURE 4.15 – Positions du leader et des agents pour $h = 0.45s$

(a) Trajectoires des agents et du leader pour $h = 0.6s$ (b) Positions du leader et des agents pour $h = 0.6s$ FIGURE 4.16 – Résultats de simulation pour une loi de commande homogène pour $h = 0.6s$

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

5.1 Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons étudié l'influence conjointe de l'échantillonnage de la commande et de l'ajout d'une perturbation exogène pour un système dynamique contrôlé homogène de degré négatif. Dans le premier chapitre figure la présentation du concept d'homogénéité, des systèmes homogènes ainsi que des notions relatives à la stabilité des systèmes. Un descriptif des différents modes d'échantillonnage de la commande et de leurs implications y est détaillé. Dans le deuxième chapitre, nous nous sommes intéressés à la question de la stabilité des systèmes homogènes échantillonnés de degré négatif soumis à une perturbation externe. Nous avons montré que ces systèmes présentent une bonne robustesse face aux perturbations exogènes et que la convergence pratique était atteinte. Nous avons également mis en lumière le lien entre période d'échantillonnage, degré d'homogénéité, intensité de la perturbation externe et taille de la zone de convergence pratique. Enfin dans le dernier chapitre, nous avons appliqué ce résultat aux systèmes multi-agents échantillonnés soumis à une loi de commande homogène de degré négatif dans le cadre d'un suivi par consensus. Dans ce contexte, l'accélération du leader est assimilable à une perturbation externe au système. La simulation d'un système multi-agents constitué de 5 agents et d'un leader corrobore les résultats énoncés dans le deuxième chapitre.

5.2 Perspectives

Les travaux menés dans cette thèse peuvent être poursuivis dans différentes directions. Tout d'abord, l'idée d'alléger l'hypothèse de continuité du système contrôlé dans le but d'appliquer les résultats du manuscrit dans le cadre des commandes par modes glissants est un objectif de recherche qui semble possible pour de futurs travaux. Il a déjà été établi dans [17] que les résultats énoncés dans

[16], où seuls les effets de l'échantillonnage de la commande sont considérés, peuvent être étendus au cas des commandes discontinues par modes glissants. Or, cette thèse s'inscrit dans la continuité du travail effectué dans [16] étant donné que nous considérons les effets conjugués de l'échantillonnage de la commande et de l'ajout d'une perturbation externe au système contrôlé. Il est donc légitime de penser que ce résultat puisse de manière analogue être étendu dans le contexte des commandes par modes glissants. D'autre part, relaxer l'hypothèse d'homogénéité stricte par une hypothèse d'homogénéisabilité, autrement dit le fait que la commande puisse être approximée par une commande homogène, est également une autre piste possible.

En ce qui concerne les applications aux systèmes multi-agents, il serait judicieux de considérer à l'avenir les effets d'un échantillonnage asynchrone des commandes des agents sur le système, ce qui serait susceptible dans certains cas de donner de meilleurs résultats dans le cas périodique ou apériodique.

Bibliographie

- [1] K.-E. Årzn. A simple event-based pid controller. *IFAC Proceedings Volumes*, 32(2) :8687–8692, 1999. 14th IFAC World Congress.
- [2] V. Acary and B. Brogliato. Implicit Euler numerical scheme and chattering-free implementation of sliding mode systems. *Systems & Control Letters*, 59(5) :284–293, 2010.
- [3] S. A. Ajwad, E. Moulay, M. Defoort, T. Ménard, and P. Coirault. Output-feedback formation tracking of second-order multi-agent systems with asynchronous variable sampled data. In *2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 4483–4488. IEEE, 2019.
- [4] A. Y. Aleksandrov and A. P. Zhabko. On the asymptotic stability of solutions of nonlinear systems with delay. *Siberian Mathematical Journal*, 53(3) :393–403, 2012.
- [5] B. Anderson, K. Chongsrid, D. J. Limebeer, and S. Hara. Direct reduced order discretization of continuous-time controller. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 9(3) :143–155, 1999.
- [6] V. Andrieu, L. Praly, and A. Astolfi. Homogeneous approximation, recursive observer design, and output feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47(4) :1814–1850, 2008.
- [7] A. Anta and P. Tabuada. To sample or not to sample : Self-triggered control for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(9) :2030–2042, 2010.
- [8] K. J. Aström and B. M. Bernhardsson. Comparison of Riemann and Lebesgue sampling for first order stochastic systems. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2011–2016. IEEE, 2002.
- [9] K. J. Aström and B. Wittenmark. *Computer-controlled systems : theory and design*. Dover Publications, third edition, 2012.
- [10] A. Bacciotti and L. Rosier. *Liapunov functions and stability in control theory*. Communications and Control Engineering. Springer, 2005.

- [11] B. R. Beattie, M. T. Holt, and M. J. Watts. On the function coefficient, Euler's theorem, and homogeneity in production theory. *Review of Agricultural Economics*, 24(1) :240–249, 2002.
- [12] A. Bemporad, M. Heemels, M. Johansson, et al. *Networked control systems*, volume 406 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer, 2010.
- [13] E. Bernuau, D. Efimov, and W. Perruquetti. On the robustness of homogeneous systems and a homogeneous small gain theorem. In *2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, pages 929–934. IEEE, 2014.
- [14] E. Bernuau, D. Efimov, and W. Perruquetti. Robustness of homogeneous and locally homogeneous differential inclusions. In *2014 European Control Conference (ECC)*, pages 2624–2629. IEEE, 2014.
- [15] E. Bernuau, D. Efimov, W. Perruquetti, and A. Polyakov. On homogeneity and its application in sliding mode control. *Journal of the Franklin Institute*, 351(4) :1866–1901, 2014.
- [16] E. Bernuau, E. Moulay, and P. Coirault. Stability of homogeneous nonlinear systems with sampled-data inputs. *Automatica*, 85 :349–355, 2017.
- [17] E. Bernuau, E. Moulay, and P. Coirault. Stability of discontinuous homogeneous nonlinear sampled-data systems. *Automatica*, 107 :467–473, 2019.
- [18] E. Bernuau, E. Moulay, P. Coirault, and F. Isfoula. Practical consensus of homogeneous sampled-data multiagent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(11) :4691–4697, 2019.
- [19] E. Bernuau, A. Polyakov, D. Efimov, and W. Perruquetti. Verification of ISS, iISS and IOSS properties applying weighted homogeneity. *Systems & Control Letters*, 62(12) :1159–1167, 2013.
- [20] S. P. Bhat and D. S. Bernstein. Finite-time stability of homogeneous systems. In *Proceedings of the 1997 American Control Conference*, pages 2513–2514. IEEE, 1997.
- [21] S. P. Bhat and D. S. Bernstein. Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(5) :678–682, 1998.
- [22] S. P. Bhat and D. S. Bernstein. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(3) :751–766, 2000.
- [23] S. P. Bhat and D. S. Bernstein. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 17(2) :101–127, 2005.
- [24] N. P. Bhatia and G. P. Szegö. *Stability theory of dynamical systems*. Classics in Mathematics. Springer, 2002.
- [25] W. Bian and M. French. General fast sampling theorems for nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 54(11) :1037–1050, 2005.

- [26] N. Biggs, N. L. Biggs, and B. Norman. *Algebraic graph theory*, volume 67. Cambridge University Press, 1993.
- [27] A. Bondarev, S. Bondarev, N. Kostyleva, and V. I. Utkin. Sliding modes in systems with asymptotic state observers. *Avtomatika i Telemekhanika*, (6) :5–11, 1985.
- [28] L. Buzogany, M. Pachter, and J. D’azzo. Automated control of aircraft in formation flight. In *Guidance, Navigation and Control Conference*, page 3852, 1993.
- [29] Y. Cao and W. Ren. Distributed coordinated tracking with reduced interaction via a variable structure approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(1) :33–48, 2011.
- [30] B. Castillo, S. Di Gennaro, S. Monaco, and D. Normand-Cyrot. On regulation under sampling. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(6) :864–868, 1997.
- [31] A. Cervin and K. J. Astrom. On limit cycles in event-based control systems. In *2007 46th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3190–3195. IEEE, 2007.
- [32] A. Charnes, W. Cooper, and A. Schinnar. A theorem on homogeneous functions and extended cobb-douglas forms. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 73(10) :3747–3748, 1976.
- [33] P. Y. Chebotarev and R. P. Agaev. Coordination in multiagent systems and laplacian spectra of digraphs. *Automation and Remote Control*, 70(3) :469–483, 2009.
- [34] F. Chen, H. Yu, and X. Xia. Output consensus of multi-agent systems with delayed and sampled-data. *IET Control Theory & Applications*, 11(5) :632–639, 2016.
- [35] K. Chen, J. Wang, Y. Zhang, and Z. Liu. Second-order consensus of nonlinear multi-agent systems with restricted switching topology and time delay. *Nonlinear Dynamics*, 78(2) :881–887, 2014.
- [36] M. B. Cloosterman, L. Hetel, N. Van de Wouw, W. Heemels, J. Daafouz, and H. Nijmeijer. Controller synthesis for networked control systems. *Automatica*, 46(10) :1584–1594, 2010.
- [37] M. Defoort, A. Polyakov, G. Demesure, M. Djemai, and K. Veluvolu. Leader-follower fixed-time consensus for multi-agent systems with unknown non-linear inherent dynamics. *IET Control Theory & Applications*, 9(14) :2165–2170, 2015.
- [38] J. P. Desai, J. Ostrowski, and V. Kumar. Controlling formations of multiple mobile robots. In *Proceedings. 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 4, pages 2864–2869. IEEE, 1998.
- [39] D. V. Dimarogonas, E. Frazzoli, and K. H. Johansson. Distributed event-triggered control for multi-agent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(5) :1291–1297, 2012.

- [40] M. Djemai, K. Busawon, K. Benmansour, and A. Marouf. High-order sliding mode control of a DC motor drive via a switched controlled multi-cellular converter. *International Journal of Systems Science*, 42(11) :1869–1882, 2011.
- [41] X. Dong and G. Hu. Time-varying formation tracking for linear multiagent systems with multiple leaders. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(7) :3658–3664, 2017.
- [42] X. Dong, Y. Zhou, Z. Ren, and Y. Zhong. Time-varying formation tracking for second-order multi-agent systems subjected to switching topologies with application to quadrotor formation flying. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 64(6) :5014–5024, 2016.
- [43] J. Ebegbulem and M. Guay. Distributed control of multi-agent systems over unknown communication networks using extremum seeking. *Journal of Process Control*, 59 :37–48, 2017.
- [44] D. Efimov and W. Perruquetti. Homogeneity for time-delay systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1) :3861–3866, 2011.
- [45] D. Efimov, A. Polyakov, W. Perruquetti, and J.-P. Richard. Weighted homogeneity for time-delay systems : Finite-time and independent of delay stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(1) :210–215, 2015.
- [46] M. Egerstedt and X. Hu. Formation constrained multi-agent control. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 17(6) :947–951, 2001.
- [47] J. A. Fax and R. M. Murray. Information flow and cooperative control of vehicle formations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(9) :1465–1476, 2004.
- [48] F. E. Felicioni and S. J. Junco. A Lie algebraic approach to design of stable feedback control systems with varying sampling rate. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2) :4881–4886, 2008. 17th IFAC World Congress.
- [49] J. Ferber. *Les Systèmes multi-agents : vers une intelligence collective*. InterEditions, 1995.
- [50] C. Fiter, L. Hetel, W. Perruquetti, and J.-P. Richard. A robust stability framework for LTI systems with time-varying sampling. *Automatica*, 54 :56–64, 2015.
- [51] E. Fridman, A. Seuret, and J.-P. Richard. Robust sampled-data stabilization of linear systems : an input delay approach. *Automatica*, 40(8) :1441–1446, 2004.
- [52] E. Fridman, A. Seuret, and J.-P. Richard. Robust sampled-data control : An input delay approach. In *Applications of Time Delay Systems*, pages 315–327. Springer, 2007.
- [53] E. Fridman and U. Shaked. Delay-dependent stability and H_∞ control : constant and time-varying delays. *International Journal of Control*, 76(1) :48–60, 2003.

- [54] B. Friedland. *Advanced control system design*. Prentice-Hall, Inc., 1995.
- [55] H. Fujioka. A discrete-time approach to stability analysis of systems with aperiodic sample-and-hold devices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(10) :2440–2445, 2009.
- [56] X. Ge and Q.-L. Han. A brief survey of recent advances in consensus of sampled-data multi-agent systems. In *42nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IECON)*, pages 6758–6763. IEEE, 2016.
- [57] C. GIERSCH. Control analysis of metabolic networks : 1. homogeneous functions and the summation theorems for control coefficients. *European Journal of Biochemistry*, 174(3) :509–513, 1988.
- [58] F. Giulietti, L. Pollini, and M. Innocenti. Autonomous formation flight. *IEEE Control Systems Magazine*, 20(6) :34–44, 2000.
- [59] P. Gong, Q.-L. Han, and W. Lan. Finite-time consensus tracking for incommensurate fractional-order nonlinear multiagent systems with directed switching topologies. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020.
- [60] L. Grüne. Homogeneous control lyapunov functions for homogeneous control systems. *EPub Bayreuth*, 2000.
- [61] L. Grüne. Homogeneous state feedback stabilization of homogenous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(4) :1288–1308, 2000.
- [62] K. Gu and S.-I. Niculescu. Survey on recent results in the stability and control of time-delay systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 125(2) :158–165, 2003.
- [63] W. Hahn. *Stability of motion*, volume 138 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 1967.
- [64] W. Hahn. *Theory and application of Liapunov's direct method*. Dover Publications, 2019.
- [65] X. He and Q. Wang. Distributed finite-time leaderless consensus control for double-integrator multi-agent systems with external disturbances. *Applied Mathematics and Computation*, 295 :65–76, 2017.
- [66] W. P. M. H. Heemels, M. C. F. Donkers, and A. R. Teel. Periodic event-triggered control for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(4) :847–861, 2012.
- [67] W. P. M. H. Heemels, G. Dullerud, and A. R. Teel. \mathcal{L}_2 -gain analysis for a class of hybrid systems with applications to reset and event-triggered control : A lifting approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(10) :2766–2781, 2015.

- [68] W. P. M. H. Heemels, R. Postoyan, M. Donkers, A. R. Teel, A. Anta, P. Tabuada, and D. Nešić. Periodic event-triggered control. In *Event-based control and signal processing*, pages 105–119. CRC Press, 2016.
- [69] H. Hermes. Nilpotent approximations of control systems and distributions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 24(4) :731–736, 1986.
- [70] H. Hermes. Homogeneous coordinates and continuous asymptotically stabilizing feedback controls. *Differential Equations, Stability and Control*, 109(1) :249–260, 1991.
- [71] H. Hermes. Nilpotent and high-order approximations of vector field systems. *SIAM Review*, 33(2) :238–264, 1991.
- [72] H. Hermes. Homogeneous feedback controls for homogeneous systems. *Systems & Control Letters*, 24(1) :7–11, 1995.
- [73] L. Hetel, J. Daafouz, and C. Iung. Lmi control design for a class of exponential uncertain systems with application to network controlled switched systems. In *2007 American Control Conference*, pages 1401–1406. IEEE, 2007.
- [74] L. Hetel, C. Fiter, H. Omran, A. Seuret, E. Fridman, J.-P. Richard, and S. I. Niculescu. Recent developments on the stability of systems with aperiodic sampling : An overview. *Automatica*, 76 :309–335, 2017.
- [75] Y. Hong. H_∞ control, stabilization and input output stability of nonlinear systems based on homogeneous techniques. *IFAC Proceedings Volumes*, 32(2) :2766–2771, 1999. 14th IFAC World Congress.
- [76] Y. Hong. Finite-time stabilization and stabilizability of a class of controllable systems. *Systems & Control Letters*, 46(4) :231–236, 2002.
- [77] Y. Hong, J. Hu, and L. Gao. Tracking control for multi-agent consensus with an active leader and variable topology. *Automatica*, 42(7) :1177–1182, 2006.
- [78] D. Hristu-Varsakelis and P. R. Kumar. Interrupt-based feedback control over a shared communication medium. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 3223–3228. IEEE, 2002.
- [79] D. Hristu-Varsakelis and W. S. Levine. *Handbook of networked and embedded control systems*. Control Engineering. Springer, 2005.
- [80] C.-C. Hua, K. Li, and X.-P. Guan. Leader-following output consensus for high-order nonlinear multiagent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(3) :1156–1161, 2018.

- [81] C.-C. Hua, X. You, and X.-P. Guan. Leader-following consensus for a class of high-order nonlinear multi-agent systems. *Automatica*, 73 :138–144, 2016.
- [82] A. Jadbabaie, J. Lin, and A. S. Morse. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(6) :988–1001, 2003.
- [83] H. Jerbi. Asymptotic stabilizability of three-dimensional homogeneous polynomial systems of degree three. *Applied Mathematics Letters*, 17(3) :357–366, 2004.
- [84] J. Jiang and Y. Jiang. Leader-following consensus of linear time-varying multi-agent systems under fixed and switching topologies. *Automatica*, 113 :108804, 2020.
- [85] F. Josse, E. Bernuau, E. Moulay, and P. Coirault. Robustness of sampled-data homogeneous systems. *Automatica*, 123 :109345, 2021.
- [86] F. Josse, E. Bernuau, E. Moulay, P. Coirault, and Q. Hui. Practical consensus tracking of sampled data multi-agent systems. In *IEEE American Control Conference (ACC)*. IEEE, 2022. Submitted.
- [87] R. E. Kalman. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(1) :35–45, 03 1960.
- [88] M. Kawski. Stability and nilpotent approximations. In *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1244–1248. IEEE, 1988.
- [89] M. Kawski. Homogeneous stabilizing feedback laws. *Control Theory and advanced technology*, 6(4) :497–516, 1990.
- [90] M. Kawski. Geometric homogeneity and stabilization. *IFAC Proceedings Volumes*, 28(14) :147–152, 1995.
- [91] J. P. Keller and B. D. Anderson. A new approach to the discretization of continuous-time controllers. In *1990 American Control Conference*, pages 1127–1132. IEEE, 1990.
- [92] H. K. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice hall, 3rd edition, 2002.
- [93] N. N. Krasovskii. Stability of motion. *Stanford University Press*, 1963.
- [94] J. Kurzweil. On the inversion of Ljapunov’s second theorem on stability of motion. *American Mathematical Society Translations Series 2*, 24 :19–77, 1963.
- [95] D. S. Laila, D. Nešić, and A. R. Teel. Open-and closed-loop dissipation inequalities under sampling and controller emulation. *European Journal of Control*, 8(2) :109–125, 2002.
- [96] E. Lalish, K. A. Morgansen, and T. Tsukamaki. Formation tracking control using virtual structures and deconfliction. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5699–5705. IEEE, 2006.

- [97] M. Lemmon, T. Chantem, X. S. Hu, and M. Zyskowski. On self-triggered full-information H-infinity controllers. In *International Workshop on Hybrid Systems : Computation and Control*, pages 371–384. Springer, 2007.
- [98] A. Levant. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76(9-10) :924–941, 2003.
- [99] A. Levant. Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 41(5) :823–830, 2005.
- [100] A. Levant and M. Livne. Weighted homogeneity and robustness of sliding mode control. *Automatica*, 72 :186–193, 2016.
- [101] L. Li, D. W. Ho, and S. Xu. A distributed event-triggered scheme for discrete-time multi-agent consensus with communication delays. *IET Control Theory & Applications*, 8(10) :830–837, 2014.
- [102] J. Lin, A. S. Morse, and B. D. O. Anderson. The multi-agent rendezvous problem. In *42nd IEEE International Conference on Decision and Control*, pages 1508–1513. IEEE, 2003.
- [103] W. Liu, S. Zhou, Y. Qi, and X. Wu. Leaderless consensus of multi-agent systems with Lipschitz nonlinear dynamics and switching topologies. *Neurocomputing*, 173 :1322–1329, 2016.
- [104] X. Liu, T. Chen, and W. Lu. Consensus problem in directed networks of multi-agents via nonlinear protocols. *Physics Letters A*, 373(35) :3122–3127, 2009.
- [105] J. Louisell. Delay differential systems with time-varying delay : New directions for stability theory. *Kybernetika*, 37(3) :239–251, 2001.
- [106] A. M. Lyapunov. Stability of motion : General problem. *International Journal of Control*, 55(3) :520–790, 1992. Lyapunov Centenary issue.
- [107] I. G. Malkin. *Theory of stability of motion*. University of Michigan Library, 1959.
- [108] M. Mattioni. On multiconsensus of multi-agent systems under aperiodic and asynchronous sampling. *IEEE Control Systems Letters*, 4(4) :839–844, 2020.
- [109] M. Mazo Jr, A. Anta, and P. Tabuada. An iss self-triggered implementation of linear controllers. *Automatica*, 46(8) :1310–1314, 2010.
- [110] R. T. M’closkey and R. M. Murray. Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(5) :614–628, 1997.
- [111] J. Mei, W. Ren, and J. Chen. Consensus of second-order heterogeneous multi-agent systems under a directed graph. In *2014 American Control Conference*, pages 802–807. IEEE, 2014.
- [112] D. Meng. Bipartite containment tracking of signed networks. *Automatica*, 79 :282–289, 2017.

- [113] X. Meng and T. Chen. Event based agreement protocols for multi-agent networks. *Automatica*, 49(7) :2125–2132, 2013.
- [114] X. Meng, L. Xie, and Y. C. Soh. Asynchronous periodic event-triggered consensus for multi-agent systems. *Automatica*, 84 :214–220, 2017.
- [115] Z. Meng, W. Ren, Y. Cao, and Z. You. Leaderless and leader-following consensus with communication and input delays under a directed network topology. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 41(1) :75–88, 2010.
- [116] M. Miskowicz. Sampling of signals in energy domain. In *2005 IEEE Conference on Emerging Technologies and Factory Automation*, volume 1, pages 263–266. IEEE, 2005.
- [117] M. Miskowicz. Asymptotic effectiveness of the event-based sampling according to the integral criterion. *Sensors*, 7(1) :16–37, 2007.
- [118] L. Moreau. Stability of multiagent systems with time-dependent communication links. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(2) :169–182, 2005.
- [119] E. Moulay. Stability and stabilization of homogeneous systems depending on a parameter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(6) :1382–1385, 2009.
- [120] E. Moulay and W. Perruquetti. Finite time stability and stabilization of a class of continuous systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 323(2) :1430–1443, 2006.
- [121] U. Munz, A. Papachristodoulou, and F. Allgower. Consensus in multi-agent systems with coupling delays and switching topology. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(12) :2976–2982, 2011.
- [122] T. Ménard, S. A. Ajwad, E. Moulay, P. Coirault, and M. Defoort. Leader-following consensus for multi-agent systems with nonlinear dynamics subject to additive bounded disturbances and asynchronously sampled outputs. *Automatica*, 121 :109176, 2020.
- [123] P. Naghshtabrizi and J. P. Hespanha. Designing an observer-based controller for a network control system. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 848–853. IEEE, 2005.
- [124] H. Nakamura, Y. Yamashita, and H. Nishitani. Smooth lyapunov functions for homogeneous differential inclusions. In *Proceedings of the 41st SICE Annual Conference. SICE 2002.*, volume 3, pages 1974–1979. IEEE, 2002.
- [125] D. Nešić and D. S. Laila. A note on input-to-state stabilization for nonlinear sampled-data systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(7) :1153–1158, 2002.

- [126] D. Nešić, A. R. Teel, and E. D. Sontag. Formulas relating KL stability estimates of discrete-time and sampled-data nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 38(1) :49–60, 1999.
- [127] W. Ni and D. Cheng. Leader-following consensus of multi-agent systems under fixed and switching topologies. *Systems & Control Letters*, 59(3-4) :209–217, 2010.
- [128] S.-I. Niculescu and K. Gu. *Advances in time-delay systems*, volume 38 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer, 2012.
- [129] K.-K. Oh, M.-C. Park, and H.-S. Ahn. A survey of multi-agent formation control. *Automatica*, 53 :424–440, 2015.
- [130] R. Olfati-Saber. Flocking for multi-agent dynamic systems : Algorithms and theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(3) :401–420, 2006.
- [131] R. Olfati-Saber, J. A. Fax, and R. M. Murray. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proceedings of the IEEE*, 95(1) :215–233, 2007.
- [132] P. G. Otañez, J. R. Moyne, and D. M. Tilbury. Using deadbands to reduce communication in networked control systems. In *Proceedings of the 2002 American Control Conference*, volume 4, pages 3015–3020. IEEE, 2002.
- [133] D. Owens, Y. Zheng, and S. Billings. Fast sampling and stability of nonlinear sampled-data systems : Part 1. existence theorems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 7(1) :1–11, 1990.
- [134] K. Peng and Y. Yang. Leader-following consensus problem with a varying-velocity leader and time-varying delays. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 388(2-3) :193–208, 2009.
- [135] W. Perruquetti, T. Floquet, and E. Moulay. Finite-time observers : application to secure communication. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(1) :356–360, 2008.
- [136] J. Peuteman and D. Aeyels. Averaging results and the study of uniform asymptotic stability of homogeneous differential equations that are not fast time-varying. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 37(4) :997–1010, 1999.
- [137] A. Polyakov. *Generalized homogeneity in systems and control*. Communications and Control Engineering. Springer, 2020.
- [138] R. Postoyan, M. C. Bragagnolo, E. Galbrun, J. Daafouz, D. Nešić, and E. B. Castelan. Event-triggered tracking control of unicycle mobile robots. *Automatica*, 52 :302–308, 2015.
- [139] R. Postoyan, P. Tabuada, D. Nešić, and A. Anta. A framework for the event-triggered stabilization of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(4) :982–996, 2014.

- [140] J. Qin, H. Gao, and W. X. Zheng. Second-order consensus for multi-agent systems with switching topology and communication delay. *Systems & Control Letters*, 60(6) :390–397, 2011.
- [141] H. Quevedo, M. N. Quevedo, and A. Sánchez. Homogeneity and thermodynamic identities in geometrothermodynamics. *The European Physical Journal C*, 77(3) :1–4, 2017.
- [142] W. Ren. Consensus strategies for cooperative control of vehicle formations. *IET Control Theory & Applications*, 1(2) :505–512, 2007.
- [143] W. Ren. Distributed leaderless consensus algorithms for networked euler–lagrange systems. *International Journal of Control*, 82(11) :2137–2149, 2009.
- [144] W. Ren and E. Atkins. Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 17(10-11) :1002–1033, 2007.
- [145] W. Ren and R. W. Beard. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(5) :655–661, 2005.
- [146] W. Ren, R. W. Beard, and T. W. McLain. Coordination variables and consensus building in multiple vehicle systems. In *Cooperative control*, pages 171–188. Springer, 2005.
- [147] H. Ríos, D. Efimov, A. Polyakov, and W. Perruquetti. Homogeneous time-varying systems : Robustness analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(12) :4075–4080, 2016.
- [148] L. Rosier. Homogeneous lyapunov function for homogeneous continuous vector field. *Systems & Control Letters*, 19(6) :467–473, 1992.
- [149] L. Rosier. *Etude de quelques problemes de stabilisation*. PhD thesis, Cachan, Ecole Normale Supérieure, 1993.
- [150] L. P. Rothschild and E. M. Stein. Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. *Acta Mathematica*, 137(1) :247–320, 1976.
- [151] E. Ryan. Universal stabilization of a class of nonlinear systems with homogeneous vector fields. *Systems & Control Letters*, 26(3) :177–184, 1995.
- [152] A. Sala. Computer control under time-varying sampling period : An LMI gridding approach. *Automatica*, 41(12) :2077–2082, 2005.
- [153] H. Schaub, S. R. Vadali, J. L. Junkins, and K. T. Alfriend. Spacecraft formation flying control using mean orbit elements. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 48(1) :69–87, 2000.
- [154] R. Sepulchre and D. Aeyels. Homogeneous lyapunov functions and necessary conditions for stabilization. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 9(1) :34–58, 1996.
- [155] R. Sepulchre and D. Aeyels. Stabilizability does not imply homogeneous stabilizability for controllable homogeneous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 34(5) :1798–1813, 1996.

- [156] A. Seuret. A novel stability analysis of linear systems under asynchronous samplings. *Automatica*, 48(1) :177–182, 2012.
- [157] Y. Shang and Y. Ye. Leader-follower fixed-time group consensus control of multiagent systems under directed topology. *Complexity*, 2017, 2017.
- [158] J. Shi, J. Wan, H. Yan, and H. Suo. A survey of cyber-physical systems. In *2011 International Conference on Wireless Communications and Signal Processing (WCSP)*, pages 1–6. IEEE, 2011.
- [159] S. Shi, H. Feng, W. Liu, and G. Zhuang. Finite-time consensus of high-order heterogeneous multi-agent systems with mismatched disturbances and nonlinear dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 96(2) :1317–1333, 2019.
- [160] E. D. Sontag. *Mathematical control theory : deterministic finite dimensional systems*, volume 6 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, 1998.
- [161] E. D. Sontag. The ISS philosophy as a unifying framework for stability-like behavior. In *Nonlinear control in the year 2000*, volume 2, pages 443–467. Springer, 2001.
- [162] Y. S. Suh. Stability and stabilization of nonuniform sampling systems. *Automatica*, 44(12) :3222–3226, 2008.
- [163] A. Sujil, S. K. Agarwal, and R. Kumar. Centralized multi-agent implementation for securing critical loads in PV based microgrid. *Journal of Modern Power Systems and Clean Energy*, 2(1) :77–86, 2014.
- [164] V. Suplin, E. Fridman, and U. Shaked. H_∞ sampled data control of systems with time-delays. In *2007 46th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 426–431. IEEE, 2007.
- [165] V. Suplin, E. Fridman, and U. Shaked. Sampled-data h_∞ control and filtering : Nonuniform uncertain sampling. *Automatica*, 43(6) :1072–1083, 2007.
- [166] D. Swaroop and J. K. Hedrick. Constant spacing strategies for platooning in automated highway systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 121(3) :462–470, 1999.
- [167] P. Tabuada. Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(9) :1680–1685, 2007.
- [168] P. Tabuada and X. Wang. Preliminary results on state-triggered scheduling of stabilizing control tasks. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 282–287. IEEE, 2006.
- [169] A. R. Teel, D. Nesic, and P. V. Kokotovic. A note on input-to-state stability of sampled-data nonlinear systems. In *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 2473–2478. IEEE, 1998.

- [170] Y.-P. Tian. High-order consensus of heterogeneous multi-agent systems. In *2011 8th Asian Control Conference (ASCC)*, pages 341–346. IEEE, 2011.
- [171] Y.-P. Tian and Y. Zhang. High-order consensus of heterogeneous multi-agent systems with unknown communication delays. *Automatica*, 48(6) :1205–1212, 2012.
- [172] V. Utkin. Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(2) :212–222, 1977.
- [173] M. Velasco, J. Fuertes, and P. Marti. The self triggered task model for real-time control systems. In *Work-in-Progress Session of the 24th IEEE Real-Time Systems Symposium (RTSS03)*, volume 384, 2003.
- [174] M. Velasco, P. Martí, and E. Bini. On Lyapunov sampling for event-driven controllers. In *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 6238–6243. IEEE, 2009.
- [175] P. Voulgaris. Control of asynchronous sampled data systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(7) :1451–1455, 1994.
- [176] J. Wang, T. Gao, and G. Zhang. Finite-time leader-following consensus for multiple non-holonomic agents. In *Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference*, pages 1580–1585. IEEE, 2014.
- [177] X. Wang and M. D. Lemmon. Event-triggering in distributed networked control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(3) :586–601, 2010.
- [178] X. Wang, S. Li, and P. Shi. Distributed finite-time containment control for double-integrator multiagent systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 44(9) :1518–1528, 2013.
- [179] G. Wen, Z. Duan, Y. Zhao, W. Yu, and J. Cao. Robust containment tracking of uncertain linear multi-agent systems : a non-smooth control approach. *International Journal of Control*, 87(12) :2522–2534, 2014.
- [180] D. B. West et al. *Introduction to graph theory*, volume 2. Prentice hall Upper Saddle River, 2001.
- [181] J. Wolfe, D. Chichka, and J. Speyer. Decentralized controllers for unmanned aerial vehicle formation flight. In *Guidance, Navigation, and Control Conference*, page 3833, 1996.
- [182] J. Wu, H. Li, and X. Chen. Leader-following consensus of nonlinear discrete-time multi-agent systems with limited communication channel capacity. *Journal of the Franklin Institute*, 354(10) :4179–4195, 2017.

- [183] G. Xie, H. Liu, L. Wang, and Y. Jia. Consensus in networked multi-agent systems via sampled control : fixed topology case. In *2009 American Control Conference*, pages 3902–3907. IEEE, 2009.
- [184] M. Xue, Y. Tang, W. Ren, and F. Qian. Practical output synchronization for asynchronously switched multi-agent systems with adaption to fast-switching perturbations. *Automatica*, 116 :108917, 2020.
- [185] H.-H. Yeh, E. Nelson, and A. Sparks. Nonlinear tracking control for satellite formations. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 25(2) :376–386, 2002.
- [186] K. Young and S. Drakunov. Discontinuous frequency shaping compensation for uncertain dynamic systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 26(2) :207–210, 1993. 12th IFAC World Congress.
- [187] P. Yu, L. Ding, Z.-W. Liu, Z.-H. Guan, and M.-X. Hu. Flocking with a virtual leader based on distributed event-triggered hybrid control. In *Proceedings of the 32nd Chinese Control Conference*, pages 6947–6952. IEEE, 2013.
- [188] W. Yu, G. Chen, and M. Cao. Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems. *Automatica*, 46(6) :1089–1095, 2010.
- [189] W. Zhang, M. S. Branicky, and S. M. Phillips. Stability of networked control systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 21(1) :84–99, 2001.
- [190] X.-M. Zhang, Q.-L. Han, and X. Yu. Survey on recent advances in networked control systems. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 12(5) :1740–1752, 2015.
- [191] Y. Zheng, D. Owens, and S. Billings. Fast sampling and stability of nonlinear sampled-data systems : Part 2. sampling rate estimations. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 7(1) :13–33, 1990.
- [192] J. Zhu, Y.-P. Tian, and J. Kuang. On the general consensus protocol of multi-agent systems with double-integrator dynamics. *Linear Algebra and its Applications*, 431(5-7) :701–715, 2009.
- [193] K. Zimenko, D. Efimov, A. Polyakov, and W. Perruquetti. A note on delay robustness for homogeneous systems with negative degree. *Automatica*, 79 :178–184, 2017.
- [194] W. Zou, P. Shi, Z. Xiang, and Y. Shi. Finite-time consensus of second-order switched nonlinear multi-agent systems. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2019.
- [195] V. I. Zubov. Systems of ordinary differential equations with generalized-homogeneous right-hand sides. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, (1) :80–88, 1958.
- [196] V. I. Zubov. Methods of am lyapunov and their application. Technical report, ERDA Div. Phys. Res., 1961.

-
- [197] V. I. Zubov. *Methods of AM Lyapunov and their application*. P. Noordhoff, 1964.
- [198] Z. Zuo. Nonsingular fixed-time consensus tracking for second-order multi-agent networks. *Automatica*, 54 :305–309, 2015.
- [199] Z. Zuo, B. Tian, M. Defoort, and Z. Ding. Fixed-time consensus tracking for multiagent systems with high-order integrator dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63(2) :563–570, 2017.
- [200] Z. Zuo and L. Tie. A new class of finite-time nonlinear consensus protocols for multi-agent systems. *International Journal of Control*, 87(2) :363–370, 2014.

Robustesse des systèmes homogènes échantillonnés : application aux systèmes multi-agents

Résumé

Ce mémoire traite du problème de la robustesse des systèmes homogènes échantillonnés soumis à une perturbation externe. Tout d'abord, une présentation du concept d'homogénéité sous ses différentes déclinaisons (homogénéité classique, pondérée puis géométrique) est proposée. Puis quelques rappels sur la stabilité des systèmes contrôlés et les résultats principaux concernant les systèmes homogènes s'ensuivent. Un récapitulatif des principaux modes d'échantillonnage de la commande et des problèmes rencontrés au niveau de la stabilité est exposé. Des lois de commande homogènes de degré négatif sont utilisées afin de pallier ces difficultés. Ensuite, la problématique de la robustesse des systèmes homogènes échantillonnés de degré négatif soumis à une perturbation externe est abordée. Le principal résultat montre la convergence pratique de l'état des systèmes contrôlés dans une boule homogène dont le diamètre est fonction du pas d'échantillonnage, du degré d'homogénéité et de l'intensité de la perturbation externe. Après cela, il est appliqué aux systèmes multi-agents dans le cadre du suivi par consensus à l'aide de lois de commande homogènes de degré négatif où l'accélération du leader est assimilable à une perturbation externe au système. Ce résultat est enfin illustré au moyen de simulations d'un système multi-agent constitué par un leader et 5 agents.

Mots-clefs : Systèmes homogènes, stabilité et stabilisation de Lyapunov, systèmes échantillonnés, systèmes multi-agents

Robustness of homogeneous sampled-data systems: application to multi-agent systems

Abstract

This thesis deals with the robustness of sampled homogeneous systems subject to an external disturbance. First of all, a presentation of the concept of homogeneity under its different variations (classical, weighted and geometric homogeneity) is proposed. Then, some reminders on the stability of controlled systems and the main results concerning homogeneous systems follow. A summary of the main sampled-data input modes and associated problems is presented. Homogeneous control laws of negative degree are used in order to overcome these difficulties. Then, the problem of the robustness of homogeneous sampled data systems of negative degree subjected to an external disturbance is tackled. The main result shows the practical convergence of the state of the controlled systems in a homogeneous ball whose diameter depends on the sampling step, the degree of homogeneity and the intensity of the external disturbance. After that, it is applied to multi-agent systems in the context of consensus tracking by using homogeneous control laws of negative degree where the leader's acceleration is assimilated to an external disturbance to the system. This result is finally illustrated by means of simulations of a multi-agent system consisting of a leader and 5 agents.

Keywords: Homogeneous systems, Lyapunov stability and stabilization, sampled-data systems, multi-agent systems