



**HAL**  
open science

# Observables de premier passage de marches aléatoires à renforcement

Alex Barbier–Chebbah

► **To cite this version:**

Alex Barbier–Chebbah. Observables de premier passage de marches aléatoires à renforcement. Physique [physics]. Sorbonne Université, 2021. Français. NNT : 2021SORUS328 . tel-03555102

**HAL Id: tel-03555102**

**<https://theses.hal.science/tel-03555102v1>**

Submitted on 3 Feb 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT  
de Sorbonne Université**

**Spécialité : Physique**  
École doctorale n°564: Physique en Île-de-France

réalisée

au Laboratoire de Physique Théorique de la Matière Condensée

sous la direction de  
**Olivier BENICHOU**  
et **Raphaël VOITURIEZ**

présentée par

**Alex BARBIER CHEBBAH**

Sujet de la thèse :

**Observables de premier passage de marches  
aléatoires à renforcement**

soutenue le

devant le jury composé de :

M.	BENICHOU Olivier,	Co-Directeur de thèse
M <sup>me</sup>	BURIONI Raffaella,	Examinatrice
M.	MASSON Jean-Baptiste,	Examinateur
M.	RANDON-FURLING Julien,	Rapporteur
M.	RIEGER Heiko,	Rapporteur
M.	SCHEHR Grégory,	Examinateur
M.	VOITURIEZ Raphaël,	Co-Directeur de thèse, Invité



## Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier Julien Randon-Furling et Heiko Rieger qui ont accepté de rapporter ce manuscrit avec attention, ainsi que Jean-Baptiste Masson, Raffaella Burioni et Grégory Schehr qui ont accepté de faire partie du jury et d'avoir pris le temps de s'intéresser au contenu de cette thèse.

J'aimerais ensuite remercier chaleureusement mes directeurs de thèse, Olivier Bénichou et Raphaël Voituriez, qui m'ont accompagné avec douceur pendant ces trois années. Merci à votre tolérance et votre patience. Merci encore pour la spontanéité et l'optimisme dont vous faites preuve. C'est ces qualités rares qui m'ont permis d'apprendre beaucoup à vos côtés. Merci à vous deux pour les discussions d'à-côtés qui ont parsemé ce bel apprentissage.

Je souhaite remercier spécialement Thomas Guérin pour l'accompagnement et la bienveillance lors de ces deux dernières années. Le savoir, la précision et la générosité dont il a fait preuve m'ont été d'un grand réconfort. Je remercie également Joseph Allesandro et Benoît Ladoux pour leur accueil, leur gentillesse et leur contribution importante à ces travaux. Enfin, merci à Maxime et Jérémie pour avoir partagé avec moi un éphémère moment au sein de l'équipe qui cherche des cibles. Les multiples discussions qui en ont émergé ont fortement influencé le temps qu'il m'a fallu pour trouver la réponse à mon sujet. Merci à Hugo qui pour de multiples aspects a aussi contribué à rendre ce manuscrit meilleur. Je tiens à remercier Nicolas Levernier qui est à l'origine de mon engouement pour ce sujet et dont les travaux m'ont accompagné tout au long de ces années, et ce, jusqu'à la rédaction finale de ce manuscrit. La thèse [Levernier, 2017] a donc été lue, et plus d'une fois ! C'est aussi grâce à la clarté et la qualité de son travail et de ses commentaires que cette thèse a pu voir le jour. Merci également à Mary, Phillippe et Florianne pour les multiples relectures qui m'ont tant réconcilié pour le moment avec ce difficile exercice. Merci également à tous les chercheurs du LPTMC : Pascal Viot, Laura Mezio, Ivan Dornic, Bernarrd Bernu, Bertrand Delamotte, Hélène Berthomieux, Jeab-Noël Fuchs et Remi Mosséri pour tous les moments partagés. Merci de faire de ce laboratoire aux couloirs somme toute \_\_\_\_\_ un lieu unique et chaleureux. Merci à Liliane Cruzel, Diane Domand, Atunes Patricia pour leur accompagnement et leur indulgence dans la lourde tâche d'accompagner des individus parfois frileux dans l'immensité abstraite de l'administratif. Merci à l'équipe de Cinfo, Pascal Romain, Alexis, Bernard et Michel pour les incalculables services qui m'ont été apportés.

Un grand merci à Romain, Marc, Saverio, Alexis, Claude, Mathias, Grégory, Damien, Mélody, Moulay Badr, Brieuç, Lucija, Federico et Etienne qui ont éclairés ces trois années, à tenir les murs et toujours dépanner d'une idée un doctorant dans le besoin. Un chaleureux merci à quelques objets inanimés tels que mon ordinateur, mon casque, mon pouf, the wire et ma chaîne hifi-besse like qui ont tenu trois ans sans défaillir un seul instant. Merci à toi contributeur anonyme qui m'a permis, au détour d'un instant partagé, de rétablir l'équilibre à la vie de tout doctorant.

Je souhaite enfin remercier mes parents pour les innombrables attentions et la patience dont ils ont fait preuve. Un bienvenu à Felix pour sa première parisienne et je lui souhaite tout le bonheur qu'il est possible de tirer dans ces futurs recherches. Une dernière pensée à Florianne qui a partagé avec moi cette parenthèse de notre vie. Sans toi j'aurais peut-être fait deux thèses ou zéro mais celle-ci restera la seule que j'aurais voulu faire. On y a découvert une partie de nous-même, de notre futur et affronté toutes sortes de fantômes. Je suis si heureux d'avoir croisé ta route, merci d'être là.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Introduction aux marches à renforcement</b>	<b>9</b>
I.1 Introduction	9
I.2 Multiples définitions des effets de renforcement	10
I.2.1 Contrastes entre les définitions statiques et dynamiques des modèles à renforcement	10
I.2.2 Effets induits par la définition du réseau	13
a) Définition sur réseau	13
b) Représentation continue des marches à renforcement	13
c) Importance de la dimension du réseau	14
I.3 Présentation de la classe des modèles à renforcement	15
I.3.1 Présentations des modèles à renforcement	15
a) Modèle true self-avoiding walk	15
b) Modèle à renforcement sous-exponentiel	16
c) Modèle à renforcement répulsif polynomial	16
d) Modèle self-attractive walk	16
I.3.2 Équation de Fokker-Planck	19
I.4 Vers les propriétés de premier passage des marches à renforcement	22
I.4.1 Résultats connus pour les marches à renforcement	22
I.4.2 Méthodes usuelles pour déterminer le temps de premier passage	23
I.4.3 Comportement du FPT pour les marches à renforcement	25
I.4.4 Effet du confinement	27
I.5 Conclusion	31
I.6 Extensions : notations communes	32
<b>II Propriétés de premier passage de processus diffusifs vieillissants</b>	<b>33</b>
II.1 Introduction	33
II.2 Exposant de persistance de processus diffusifs en l'absence de vieillissement	34
II.2.1 Exemple explicite de la marche de Pólya	34
II.2.2 Théorème de Sparre Andersen	35
a) Processus non-markoviens diffusifs à incréments stationnaires	35
II.2.3 Processus non-markoviens diffusifs à vieillissement transient	36
II.3 Processus diffusifs à toute échelle de temps	38
II.3.1 Marches à renforcement SATW	38

a)	Présentation du modèle SATW . . . . .	38
b)	Détermination exacte de l'exposant de persistance pour la marche SATW . . . . .	39
c)	Description des incréments de la marche SATW . . . . .	43
d)	Modèle Persistent Self-Attracting Walk . . . . .	44
II.3.2	Marches à renforcement répulsif en loi de puissance . . . . .	46
II.3.3	Marche aléatoire éléphant (ERW) . . . . .	46
a)	Détermination des incréments de la marche ERW . . . . .	46
b)	Détermination de l'exposant de persistance de la marche ERW . . . . .	48
II.3.4	Conclusion : correspondances entre vieillissement et explorations anor- males . . . . .	52
II.4	Conclusion . . . . .	53
II.5	Extension : exemple de la marche avec une relocalisation sur les sites précé- demment visités . . . . .	54
II.6	Extension : lien explicite entre l'exposant de persistance et les comportements asymptotiques des incréments . . . . .	55
II.7	Extension : comportement diffusif vieillissant pour les explorations transientes et marginales . . . . .	56
<b>III</b>	<b>Propriétés de premier passage de marches à renforcement attractif</b>	<b>59</b>
III.1	Introduction . . . . .	59
III.2	Comportement piégé des marcheurs attractifs . . . . .	60
III.2.1	Définitions des conventions sur sites et sur liens . . . . .	60
III.2.2	Définition du comportement piégé des marcheurs attractifs . . . . .	60
III.2.3	Théorème de Davis et extensions . . . . .	61
III.2.4	Comparaisons entre les modèles à renforcement sur sites et sur liens . . . . .	62
III.2.5	Comportement des marches attractives piégées . . . . .	63
a)	Définition du volume piégé $V_0$ . . . . .	64
b)	Relations d'échelle entre les frontières intérieures et exté- rieures, et la probabilité de s'extraire de $V_0$ . . . . .	65
c)	Critères du comportement piégé en fonction de $e^{f(t)}$ . . . . .	67
d)	Conclusion de l'approche . . . . .	68
e)	Application : efficacité de l'exploration des marcheurs piégés . . . . .	69
III.3	Applications aux marcheurs attractifs non piégés . . . . .	69
III.3.1	Le modèle SATW attractif en dimension supérieure à 1 . . . . .	70
III.3.2	Autres modèles à renforcement sur sites . . . . .	72
III.3.3	Effet d'un comportement sous-diffusif sur les propriétés de premier passage en espace infini . . . . .	76
a)	Incidence des incréments sous-diffusifs . . . . .	76
b)	Justifications de $\theta = \infty$ . . . . .	78
c)	Effet du confinement . . . . .	80
III.4	Relation entre mouvement cellulaire et les marches à renforcement attractif . . . . .	81
III.4.1	Observations expérimentales . . . . .	81
a)	Comportements oscillants des cellules MDCK épithéliales . . . . .	81
b)	Caractérisation de l'impact des empreintes cellulaires . . . . .	82

III.4.2 Comparaisons des trajectoires réelles avec les différents modèles à renforcement attractif . . . . .	84
III.4.3 Conséquences des effets de renforcement . . . . .	85
III.5 Conclusion . . . . .	88
<b>IV Propriétés des marches à renforcement en espace confiné</b>	<b>91</b>
IV.1 Introduction . . . . .	91
IV.2 Propriétés des marches à renforcement en milieu infini et en confinement . . .	92
IV.2.1 Comportement des incréments en espace infini . . . . .	92
a) Explorations non compactes ( $d \geq 3$ ) . . . . .	93
b) Explorations compactes ( $d = 1$ ) . . . . .	93
IV.2.2 Évolution des incréments en milieu confiné . . . . .	97
a) Explorations non compactes . . . . .	97
b) Explorations compactes . . . . .	98
IV.2.3 Exposants caractéristiques associés au temps de premier passage en milieu infini . . . . .	99
a) Explorations non compactes . . . . .	99
b) Explorations compactes . . . . .	99
IV.2.4 Propriétés de premier passage pour des conditions initiales vieilles . .	99
a) Explorations compactes pour des conditions initiales vieilles	99
b) Explorations non compactes pour des conditions initiales vieilles	100
IV.3 Approche développée pour la mesure du FPT en confinement . . . . .	100
IV.3.1 Temps de premier passage de processus strictement invariants d'échelle	100
a) Statistique du FPT en confinement pour des processus strictement invariants d'échelle . . . . .	100
b) Limites de cette approche pour les marches à renforcement .	103
IV.3.2 Distribution du FPT pour les processus compacts . . . . .	104
a) Démonstration pour les explorations compactes . . . . .	104
b) Remarques et extensions de l'approche . . . . .	106
c) Conclusion de l'approche pour les explorations compactes . .	107
IV.3.3 Distribution du FPT pour les processus non compacts . . . . .	109
a) Approche générale pour les explorations non compactes . . .	109
b) Détermination du nombre typique d'excursions . . . . .	109
c) Remarques autour du nombre typique d'excursions . . . . .	111
d) Détermination du temps typique des excursions . . . . .	112
e) Conclusion de l'approche pour les marches à renforcement dans le cas non compact . . . . .	114
IV.4 Distribution de premier passage dans un espace initialement visité . . . . .	116
IV.5 Applications aux modèles étudiés et possibles extensions . . . . .	117
IV.5.1 Applications aux modèles à renforcement . . . . .	117
IV.5.2 Commentaires . . . . .	120
IV.6 Conclusion . . . . .	122
IV.7 Extension : comportements des incréments, comparaison avec les modèles invariants d'échelle . . . . .	123
IV.8 Extension : Détermination du comportement d'échelle du FPT en confinement pour des vieillissements en loi de puissance . . . . .	124

IV.9	Extension : Distribution du FPT en confinement pour les explorations marginalement compactes . . . . .	128
IV.9.1	Approche générale . . . . .	130
IV.9.2	Comportement des incréments et effet de vieillissement . . . . .	130
a)	Comportement des incréments en espace infini . . . . .	130
b)	Comportement des incréments en espace confiné . . . . .	131
IV.9.3	Propriétés de premier passage en milieu infini . . . . .	131
IV.9.4	Propriétés de premier passage en confinement . . . . .	132
a)	Exemple des marches SATW répulsives . . . . .	132
b)	Exemple de la marche TSAW . . . . .	133
c)	Extensions pour les autres modèles répulsifs . . . . .	133
d)	Conclusion du cas marginal . . . . .	134
<b>V</b>	<b>Propriétés de premier passage de processus issus d'une équation GLE</b>	<b>139</b>
V.1	Introduction . . . . .	139
V.2	Propriétés générales de l'équation de Langevin Généralisée . . . . .	141
V.2.1	La présence de multiples degrés de libertés internes conduit à une équation GLE . . . . .	141
V.2.2	Propriétés de l'équation GLE en l'absence de piège harmonique . . . . .	143
V.2.3	Propriétés de transport de l'équation GLE en présence d'un potentiel harmonique . . . . .	145
V.2.4	Approximation de Wilemski-Fixman et équation de Fokker-Planck généralisée en présence d'un point absorbant . . . . .	148
V.3	Temps moyen de premier passage associé à l'équation GLE . . . . .	150
V.3.1	Approche générale . . . . .	150
V.3.2	Applications aux processus dérivant d'une équation GLE . . . . .	154
a)	Comportement aux temps longs de la position moyenne dans le futur du FPT . . . . .	155
b)	Comportement asymptotique du MFPT dans la limite des événements rares . . . . .	157
c)	Effet des conditions initiales sur le comportement du marcheur dans le futur du FPT . . . . .	160
V.4	Conclusion . . . . .	162
V.5	Extension : théorie de perturbation . . . . .	164
<b>VI</b>	<b>Relations entre temps de premier passage et géométrie du territoire visité</b>	<b>169</b>
VI.1	Introduction . . . . .	169
VI.2	Statistiques jointes des explorations temporelles et spatiales des marcheurs aléatoires en dimension 1 . . . . .	170
VI.2.1	Connexions entre territoire exploré et problème de premier passage . . . . .	170
VI.2.2	Définition de la loi jointe . . . . .	171
VI.2.3	Comportement d'échelle de la loi jointe . . . . .	173
VI.2.4	Applications directes de la loi jointe . . . . .	177
a)	Problème conditionnel de Rosenstock . . . . .	177
b)	Importance de la loi jointe dans le cadre des marches à renforcement . . . . .	177

VI.3	Asymétrie du territoire visité . . . . .	179
VI.3.1	Distribution du centre du territoire visité pour le modèle SATW . . . . .	181
VI.3.2	Extension pour des modèles de marches aléatoires symétriques . . . . .	183
VI.4	Connexion entre temps de couverture et temps de premier passage . . . . .	184
VI.4.1	Résultats connus pour les processus markoviens . . . . .	185
VI.4.2	Distribution du temps de couverture et extension aux marcheurs non markoviens . . . . .	186
VI.4.3	Temps de couverture des marches à renforcement . . . . .	187
a)	Approche générale . . . . .	187
b)	Distribution exponentielle vieillie, exemple de la marche SATW . . . . .	188
c)	Distribution exponentielle étirée, exemple de la marche TSAW . . . . .	190
VI.5	Conclusion . . . . .	192
<b>Conclusion</b>		<b>193</b>
<b>A Tableaux récapitulatifs des propriétés des marches à renforcement</b>		<b>199</b>
<b>B Exposant de persistance de la marche SATW en dimension 1</b>		<b>203</b>
B.1	Comportement d'échelle de la borne inférieure $P_s(N)$ . . . . .	203
B.2	Relation de récurrence pour les événements $P_s$ et $P_t$ . . . . .	204
B.3	Comportement d'échelle de la borne supérieure . . . . .	204
B.3.1	Comportement de $P_-(N, 2p)$ . . . . .	205
B.3.2	Comportement de $P_+(N, 2p)$ . . . . .	205
B.3.3	Comportement de $P_+(N, 2p + 1)$ . . . . .	206
B.3.4	Comportement de $P_-(N, 2p + 1)$ . . . . .	207
B.4	Comportement d'échelle de la probabilité de survie en fonction du temps . . . . .	208
<b>C Exposant de persistance de la marche PSATW</b>		<b>209</b>
<b>D Incréments de la marche ERW en dimension 1</b>		<b>211</b>
<b>E Propriétés spécifiques aux marches à renforcement attractif</b>		<b>215</b>
E.1	Remarques autour de la différence entre les conventions sur sites et sur liens . . . . .	215
E.2	Comportement des marches attractives piégées . . . . .	215
E.2.1	Définition de la probabilité de s'extraire du piège . . . . .	215
E.2.2	Complément pour le cas $-\ln(t)/2 > f(t) > -\ln(t)$ . . . . .	216
E.2.3	Cas linéaire $f(t) \sim -\ln(t)$ . . . . .	216
E.2.4	Moyennes sur les ensembles $\partial_{\pm} V_0$ . . . . .	217
E.2.5	Répartition du nombre de visites dans $\partial_{\pm} V_0$ . . . . .	217
E.2.6	Retours réguliers du marcheur en $V_0$ . . . . .	218
E.2.7	Choix de la variable $\tau > 0$ . . . . .	218
E.2.8	Extension de l'approche pour des espaces non-euclidiens . . . . .	218
E.3	Arguments en faveur de $\theta = \infty$ pour une marche attractive sous-diffusive . . . . .	219
E.3.1	Validité des hypothèses . . . . .	219
E.3.2	Approche complémentaire . . . . .	220

E.4	Comparaisons des modèles continus et discrets de la marche PSATW . . . . .	220
<b>F</b>	<b>Propriétés des marches à renforcement en espace infini</b>	<b>223</b>
F.1	Arguments en faveur de $\psi = d - d_f$ pour des processus présentant des incréments stationnaires . . . . .	223
F.2	Mesure de la probabilité de survie de la marche ERW en dimension 2 . . . . .	224
F.3	Revue des exposants de persistance des différents modèles étudiés . . . . .	225
<b>G</b>	<b>Propriétés des marches à renforcement en confinement</b>	<b>227</b>
G.1	Croissance du temps local dans un espace confiné . . . . .	227
G.1.1	Modèle de croissance de la variance du nombre de visites . . . . .	228
G.1.2	Majoration de la dérivée de la croissance locale . . . . .	229
	a) Applications aux marches à renforcement . . . . .	229
G.1.3	Minoration de la dérivée de la croissance de la variance locale . . . . .	231
	a) Applications aux marches à renforcement . . . . .	231
G.2	Contributions des différentes échelles de temps en confinement pour les explorations non compactes . . . . .	233
G.3	Explorations compactes pour $\theta > 1$ et effet des termes sous-dominants . . . . .	235
G.4	Contribution des trajectoires directes pour les explorations marginales . . . . .	237
G.5	Comportement d'échelle de la probabilité de trouver la cible lors de la kème excursion pour les explorations non compactes et marginales . . . . .	238
G.6	Distribution en confinement pour des modèles à incréments stationnaires . . . . .	240
<b>H</b>	<b>Mesures numériques</b>	<b>241</b>
H.1	Mesures numériques des exposants caractéristiques des propriétés de premier passage . . . . .	241
H.1.1	Mesures numériques de l'exposant de persistance . . . . .	241
H.1.2	Mesures numériques de l'exposant de transience . . . . .	242
H.1.3	Mesures numériques des exposants associés aux explorations marginales . . . . .	243
H.2	Simulations numériques de processus gaussiens dérivés d'une équation GLE . . . . .	243
H.3	Méthode de résolution numérique de l'équation intégrale vérifiée par la position moyenne du marcheur dans le futur du premier passage . . . . .	245
H.4	Simulations numériques des lois jointes pour les processus FBM et RAP . . . . .	246
H.4.1	Mouvement Brownien Fractionnaire . . . . .	246
H.4.2	Random Acceleration Process . . . . .	248
	a) Définition . . . . .	248
	b) Simulations numériques . . . . .	248
<b>I</b>	<b>Propriétés des processus gaussiens vérifiant une équation GLE</b>	<b>249</b>
I.1	Formules de projection des vecteurs gaussiens . . . . .	249
I.2	Noyau de friction d'un processus bi-diffusif . . . . .	249
<b>J</b>	<b>Théorie des perturbations autour du processus d'Ornstein-Uhlenbeck</b>	<b>253</b>
J.1	Résolution de l'équation intégrale vérifiée par la position moyenne dans le futur du FPT . . . . .	253
J.2	Évaluation numérique des perturbations $m_1(t)$ et $\langle T_1 \rangle$ . . . . .	257
J.3	Validité de l'approche perturbative pour les noyaux en loi de puissance . . . . .	258

J.4	Comportement asymptotique de $m_1(t)$ . . . . .	259
J.5	Théorie perturbative pour une position initiale fixée . . . . .	259
<b>K</b>	<b>Détermination de la loi jointe de la marche SATW pour <math>s_0 = 1</math></b>	<b>263</b>
K.1	Probabilité de <i>splitting</i> de la marche SATW pour $s_0 = 1$ . . . . .	263
K.2	Fonction génératrice de la loi jointe . . . . .	263
K.3	Comportement à grand temps et grande distance de la transformée de Laplace de la distribution conditionnelle du maximum atteint à l'instant du premier passage . . . . .	265
K.4	Limite continue de la distribution conditionnelle aux grands temps et aux grandes distances . . . . .	267
K.5	Comportement asymptotique de la probabilité de survie de la marche SATW	268
<b>L</b>	<b>Distribution asymptotique du centre du territoire visité</b>	<b>271</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>273</b>



# Introduction

*Comment fonctionne un essaim de robots ?* Cette vidéo publiée par le chercheur Medhi Moussaïd\*, vidéaste à ses heures perdues pour son blog intitulé Fouloscopie, a fait de nombreux curieux (200 000 vues). Celle-ci met en scène un tournoi de programmation d'un essaim de robots dont l'objectif est la recherche d'une cible placée dans une enceinte. Ce tournoi a rencontré un grand succès, et de nombreux programmeurs en herbe se sont pris au jeu, afin d'optimiser la stratégie de recherche de leurs "fidèles exécutants mécaniques". L'effervescence qu'a suscitée ce tournoi souligne, à sa manière, notre appétit insatiable de vouloir comprendre *comment chercher une cible efficacement*. Elle reflète également l'attrait que l'on retrouve dans des domaines de recherche académique. Enfin, la diversité des réponses proposées par les internautes illustre la richesse des possibilités de stratégie d'exploration qu'il reste à découvrir.

Simplifions ce défi, et intéressons-nous à un unique robot réalisant un mouvement erratique. Combien de **temps** faut-il à ce "marcheur aléatoire" pour atteindre une cible donnée ? Cette variable, aléatoire de par le caractère erratique du marcheur, est communément appelée *temps de premier passage* (FPT, de l'anglais *first passage time*). Mais de quoi dépend-elle ? Les spectateurs de notre tournoi virtuel vont-ils mourir d'ennui avant que le robot ne réussisse enfin à trouver la cible ? Que se passe-t-il désormais si l'enceinte est supprimée ? Le robot va-t-il se perdre avant de trouver la cible ?

Ce cadre d'étude (un robot aléatoire, une cible) semble un peu restrictif. Pourtant celui-ci est incontournable. D'une part, parce qu'il reste fondamental dans l'étude de nombreuses situations réelles, et ce dans un large éventail de domaines (physique, chimie, biologie, mathématiques appliquées, économie...). Les applications directs sont nombreuses : temps de recherche d'une séquence spécifique d'ADN par un facteur transcriptionnel, temps de réaction contrôlés par la diffusion, temps de cyclisation d'une chaîne polymérique, temps mis par un actif financier avant d'atteindre un certain seuil, temps d'émission d'un potentiel d'action par un neurone... Plus généralement, il n'est pas rare que l'étude d'un modèle ou d'une réalisation expérimentale dépende à un instant donné d'un tel événement de premier passage. D'autre part, ce cadre permet le développement d'outils techniques et de méthodes de résolution importantes que l'on retrouve dans un large spectre d'applications. Le temps de premier passage peut être vu simplement comme une observable clé des marches aléatoires au même titre que le déplacement quadratique moyen ou les propriétés de corrélations de la trajectoire.

---

Chercheur en sciences cognitives à l'Institut Max Planck de Berlin

Pour toutes ces raisons, l'analyse des évènements de premier passage de marches aléatoires jouit d'une effervescence conséquente, renforçant la légitimité de son approfondissement.

Avant de poursuivre, revenons un instant à nos robots. En principe, ceux-ci peuvent stocker l'intégralité du territoire qu'ils ont déjà visité dans leur mémoire, et ce, sans grande difficulté. Cette dernière capacité offre-t-elle un avantage décisif à nos marcheurs ? Quelles seraient les conséquences sur de longues trajectoires, si nos robots possédaient une mémoire infinie ? L'importance de ces effets de mémoire de la trajectoire passée, aussi appelés effets de *renforcement*, a été considérée simultanément dans plusieurs domaines. Les fourmis en sont un exemple historique, et désormais incontournable. En effet, celles-ci déposent des phéromones lors de leurs passages, phéromones qui ensuite peuvent être détectées afin de se repérer, de suivre une trace d'un congénère, ou de revenir sur leurs pas. Cette capacité leur permet de réaliser des trajectoires dont les formes et les propriétés contrastent avec les faibles possibilités que leur offrent leurs autres champs de perception. On peut notamment citer les travaux fondateurs de [Goss et al., 1989] qui soulignent cette aptitude permettant aux fourmis de sélectionner les chemins les plus efficaces, afin d'atteindre, par exemple, une source de nourriture (figure .1). De tels comportements ont des applications claires dans un large éventail de domaines qui recouvrent l'étude d'animaux ou d'insectes [Boyer et al., 2010 ; Dussutour et al., 2004 ; Giuggioli et al., 2011], les mouvements de micro-organismes [d'Alessandro et al., 2021 ; Flyvbjerg, 2021 ; Tweedy et al., 2016], le mouvement de particules artificielles autoréplives [Kranz et al., 2016, 2019] ou encore les méthodes d'exploration algorithmiques [Arruda et al., 2017 ; Avin et al., 2008].

Plus généralement, les marcheurs dans des situations réelles sont souvent plongés dans des environnements complexes, environnements dont les propriétés sont, pour la plupart, inaccessibles à l'observateur. La conséquence directe en est l'émergence d'effets de mémoire dont il est important de caractériser les implications [Attieh et al., 2017 ; Wolf et al., 2007].

Dans le domaine des marches aléatoires, les effets de renforcement ont été introduits et discutés pour la première fois dans les années 1980 avec les travaux de Amit et al. [1983] et Ottinger [1985]. La motivation initiale repose sur les études des modèles de polymères en solution, champ plus vaste et ancien, qui partagent avec les modèles à renforcement ces effets de mémoire infinie [Flory, 1953]. Suite à ces travaux fondateurs, de nombreuses études ont contribué à enrichir notre compréhension de ces marches tant du point de vue des mathématiques que de la physique [Boyer et al., 2014 ; Grassberger, 2017b ; Pemantle, 2007 ; Tóth, 2001]. Mais encore aujourd'hui, relativement peu de travaux se concentrent sur les propriétés de premier passage des modèles à renforcement.

Ainsi, l'objectif central de cette thèse est de caractériser les propriétés de premier passage des marches aléatoires qui présentent des effets de renforcement. Pour cela, on s'appuiera sur les résultats existants obtenus dans la communauté du temps de premier passage, afin de les réadapter aux modèles à renforcement, en tenant compte de leurs spécificités. Notre travail se doit donc d'être une synthèse de ces deux champs de recherche jusqu'alors distincts.

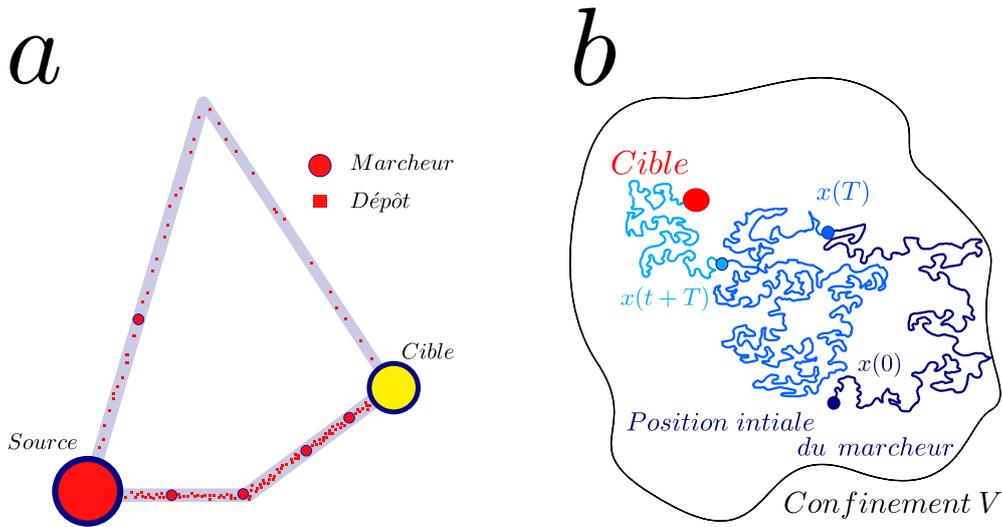


FIG. .1 **a** Illustration de l'importance des effets de renforcement dans la recherche de cible (expérience menée dans [Goss et al., 1989]). Des marcheurs déposent des signaux lors de leur déplacement et s'en servent afin d'optimiser leur trajectoire future. En suivant simplement les chemins où les signaux ont été le plus déposés, ces marcheurs peuvent différencier deux trajets et choisir le plus court sans bénéficier d'une perception globale de la géométrie de l'espace dans lequel ils évoluent. **b** Dans cette thèse, on cherchera à caractériser les propriétés de premier passage des marches à renforcement lorsque le marcheur évolue dans un volume confinant. Il faudra au préalable caractériser l'impact des effets de renforcement sur les trajectoires des marcheurs, et en particulier les propriétés de vieillissement que ces effets peuvent induire.

Tout d'abord, considérons les travaux relatifs à la théorie du temps de premier passage. Les propriétés connues des marches à renforcement seront abordées plus amplement dans le chapitre 1 qui leur sera dédié. Un paramètre géométrique clé va conditionner l'étude des événements de premier passage : notre marcheur évolue-t-il dans un espace confiné (fini) ou infini ? Il est clair que les propriétés de premier passage sont très différentes avec ou en l'absence de confinement. Par exemple, en espace infini le marcheur peut se perdre très loin de sa cible et ne jamais revenir vers celle-ci. Généralement, en l'absence de confinement *le temps moyen de premier passage* (MFPT) est infini. Inversement, dans la majorité des exemples, le marcheur trouve une cible de taille finie avec une probabilité 1 dans des espaces confinés, et le MFPT est le plus souvent fini (figure .1). Sa quantification devient alors une première étape essentielle à la compréhension des propriétés de premier passage. En pratique, les questions de premier passage en confinement sont fondamentales dans l'étude de nombreuses situations. Celles-ci s'avèrent pertinentes dans la compréhension des réactions limitées par la diffusion des réactifs qui ont lieu dans des espaces délimités comme un noyau, une cellule ou un organite. Cela s'applique également aux processus qui sont confinés de manière effective par un potentiel ou aux modes d'exploration qui restent attachés à un lieu spécifique. Pour ces différents exemples, la dépendance des propriétés de premier passage selon la taille du volume confinant est alors une question essentielle qui sera largement examinée dans cette thèse.

L'étude des propriétés de premier passage en espace infini sont contemporaines des débuts de l'étude des marches aléatoires (on trouve les premiers exemples dans les travaux de Bachelier et on doit attendre les années 1950 afin d'observer les premiers résultats en confinement). Ceux-ci concernent essentiellement des marches sur réseau pour lesquelles le marcheur saute sur un site voisin tiré avec une probabilité donnée. À partir des travaux de Montroll [1969], la question du temps que met le marcheur à atteindre une cible spécifique dans un réseau périodique, autrement dit dans un volume confinant, est clairement posée. À sa suite, de nombreuses études ont permis d'étendre ces premiers résultats à d'autres types de graphes [Haynes et al., 2008 ; Kozak et al., 2002]. Les travaux notables les plus récents permettent de généraliser ces résultats à des processus sans mémoire ou markoviens [Condamine et al., 2007c]. Autrement dit, les probabilités de transition entre chaque site ne dépendent pas de l'historique de la marche. Pour ces processus markoviens, le MFPT peut être déterminé dans la limite des grands volumes confinants. De manière similaire, le comportement asymptotique de la probabilité de survie des processus à sauts en dimension 1 a été largement étudié au courant des années 1950-70. Différents travaux ont permis de caractériser les propriétés de premier passage des processus markoviens en dimension supérieure à 1. On peut notamment se référer au livre de Redner [2001] qui reprend les principaux résultats obtenus pour les processus markoviens.

Ainsi, les statistiques de premier passage des processus markoviens sont bien connues, que ce soit en confinement ou en espace infini, de même que les outils sur lesquels ils reposent (équation de renewal, équation de Fokker-Planck en présence d'une cible absorbante [Bénichou et al., 2014 ; Coombs et al., 2009 ; Hughes, 1995 ; Redner, 2001 ; Schuss et al., 2007 ; Van Kampen, 1992]). Néanmoins, ces outils, et par voie de fait les résultats qui en découlent, dépendent fondamentalement de cette hypothèse markovienne, où la connaissance de la position du processus au temps  $t$  est suffisante pour prédire son évolution future. Or, la plupart de ces approches se révèlent insuffisantes lorsque l'on considère désormais un processus non markovien qui interagit avec un environnement complexe (figure .2) [Checkkin et al., 2003 ; Ernst et al., 2012 ; Mason et al., 1995 ; Mitterwallner et al., 2020a,b ; Turiv et al., 2013 ; Zwanzig, 1973].

Afin de tenir compte de tels effets, certaines approches consistent à retrouver un cadre markovien, en déterminant simultanément la position du marcheur et les variables de l'environnement responsables de son évolution [Malakar et al., 2018] (figure.2). D'autres méthodes de résolution négligent les effets non markoviens associés à l'évènement de premier passage [Fa et al., 2005 ; Goychuk et al., 2007 ; Wilemski et al., 1974a]. Autrement dit, elles supposent que le marcheur à l'instant de premier passage se comportera de manière identique lors de ces prochains retours sur la cible. De cette manière, les effets de mémoire associés à l'évolution du marcheur ne sont pas entièrement négligés. Malheureusement, ces deux approches restent inadaptées lorsque l'on considère des processus qui présentent des effets de mémoire importants. Les dynamiques internes des macromolécules en sont des exemples clés [Kou et al., 2004 ; Min et al., 2005]. Prédire l'évolution d'un monomère (constituant de la molécule) est laborieux puisqu'il faut tenir compte des multiples interactions de celui-ci avec l'ensemble des autres monomères formant la molécule (interactions souvent atypiques à l'instant de premier passage).

On peut aussi penser à un traceur plongé dans un bain nématique où le marcheur déforme le milieu dans lequel il évolue, milieu qui rétroagit sur ce marcheur modifiant alors sa trajectoire [Ernst et al., 2012; Mason et al., 1995; Turiv et al., 2013].

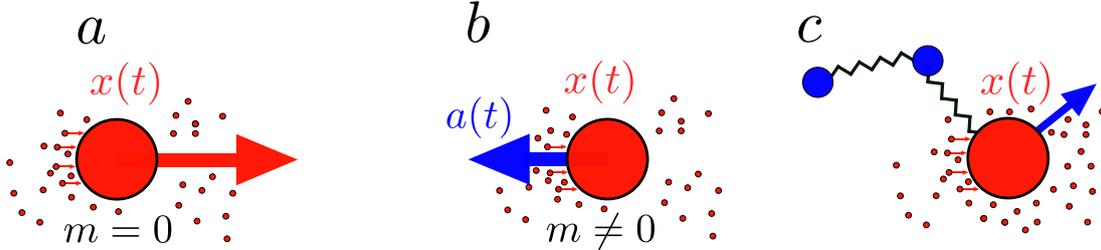


FIG. .2 **a-c** Illustration des effets non markoviens sur l'étude de la dynamique d'un marcheur aléatoire, ici soumis à une agitation thermique. **a** Dans la limite suramortie ( $m = 0$ ), la vitesse est proportionnelle à l'agitation thermique (modélisée par un bruit blanc gaussien). Le marcheur suit alors une évolution markovienne puisque son évolution future est indépendante du passé. **b** Toutefois, ce n'est plus le cas lorsque le terme inertiel n'est plus négligeable puisque l'accélération dépend des réalisations passées du bruit. **c** De manière analogue, l'évolution du marcheur devient non markovienne lorsque celui-ci est relié à d'autres éléments, par exemple, lorsque le marcheur est un constituant d'une chaîne ou d'une molécule plus complexe. Afin de retrouver une évolution markovienne, il faut simultanément caractériser l'évolution du marcheur et celle de son environnement (l'accélération en **b** et la position relative des autres constituants en **c**).

Ce problème apparaît de manière évidente pour les marches à renforcement dont l'évolution dépend explicitement de l'intégralité de la trajectoire passée. Il est donc indispensable de tenir compte de ces effets de mémoire. Dès lors, une approche qui ne tiendrait compte que de l'historique récent de la marche est clairement inadaptée. D'autre part, il est établi que ces marches présentent des effets de vieillissement [Grassberger, 2017b], au sens où le marcheur présente un comportement différent à l'instant  $t + T$  de celui observé à l'instant  $t$  [Barkai et al., 2003]. Ainsi, l'évolution du marcheur entre  $T$  et  $t + T$  dépend explicitement de la trajectoire passée entre 0 et  $T$ . Cette dernière propriété est fondamentale, et une analyse exhaustive des propriétés de vieillissement des modèles à renforcement reste à développer. À plus forte raison parce que celles-ci sont souvent concomitantes à des statistiques de premier passage non triviales.

De par la complexité qu'ils induisent, les résultats concernant les processus non markoviens sont donc bien plus récents et épars. Ceux-ci reposent souvent sur des méthodes de résolution spécifiques [Burkhardt, 2007; Malakar et al., 2018], et les résultats à caractère universel en sont d'autant plus rares. En espace infini, la majeure partie des résultats concernent le comportement asymptotique des propriétés de premier passage de processus unidimensionnels, dont une revue exhaustive a été réalisée [Bray et al., 2013]. De manière analogue, peu de résultats exacts pour des processus en confinement ont été obtenus [Bicout et al., 2000; Bénichou et al., 2015; Hanggi et al., 1985; Masoliver et al., 1986; Wilemski et al., 1974a].

Pourtant, récemment, des travaux majeurs ont franchi une étape importante dans la compréhension et l'analyse de la statistique du FPT des processus non markoviens. L'approche novatrice développée dans [Guérin et al., 2012] a permis de déterminer avec précision les temps moyens de réaction de modèle de polymères. Cette méthode a ensuite été étendue dans [Guérin et al., 2013, 2014, 2016] pour des processus gaussiens non markoviens à incréments stationnaires en présence d'un confinement. Celles-ci reposent sur l'introduction de nouveaux outils sur lesquels on s'appuiera par la suite.

Parallèlement à cela, une seconde étude a permis de mettre en valeur des comportements généraux vérifiés par des processus non markoviens dans la limite des grands volumes confinants [Levernier et al., 2018]. Cette approche permet de prédire le comportement aux temps longs de processus non markoviens strictement invariants d'échelle. Les comportements obtenus peuvent être répartis selon trois classes d'universalité. La première comprend les processus dits compacts (ils ont une probabilité 1 de trouver une cible en espace infini), la deuxième les processus non compacts (une probabilité  $< 1$  de trouver la cible dans une espace infini), et enfin les processus marginalement compacts qui reste une catégorie hybride. Cette approche qui repose sur des arguments d'échelle semble prometteuse et une généralisation de celle-ci pour les modèles à renforcement est concevable. D'autant plus qu'elle s'est révélée pertinente pour des processus potentiellement vieillissants, ce qui est le cas des modèles à renforcement.

Ainsi, l'objectif de cette thèse est double. D'une part, déterminer conjointement les propriétés de premier passage et de vieillissement d'exemples canoniques des modèles de marches à renforcement. En particulier, on cherchera à comprendre les connexions que ces deux observables entretiennent. D'autre part, on s'efforcera de déterminer la dépendance de la distribution de premier passage selon les différents paramètres géométriques, comme la taille du volume confinant, la distance initiale entre le marcheur et la cible et la taille de celle-ci. Les formes des distributions du temps de premier passage seront aussi examinées. Par ailleurs, on s'appliquera aussi à souligner les effets induits par les propriétés intrinsèques aux modèles à renforcement, et notamment leurs conséquences sur la généralisation des approches énoncées précédemment.

Tout d'abord, on proposera une revue des définitions et des propriétés des modèles à renforcement qui manquent à cette introduction et nécessitent un développement plus approfondi. On discutera de l'emploi des méthodes usuelles afin d'obtenir le temps moyen de premier passage et l'approche qu'il est nécessaire de suivre afin de les adapter à ces modèles. Ce chapitre esquissera donc l'approche générale que l'on suivra dans cette thèse.

Dans un second temps, on s'intéressera aux connexions entre effets de vieillissement et propriétés de premier passage en espace infini. On se concentrera en grande majorité sur les marcheurs diffusifs en dimension 1.

Ensuite, on s'intéressera aux marches à *renforcement attractif* pour lesquelles les marcheurs préfèrent revenir sur les sites précédemment visités. On discutera des différents comportements qui peuvent être observés pour ces modèles et les conséquences sur les statistiques de premier passage. Par ailleurs, on évoquera l'importance des effets de renforcement sur les trajectoires réelles réalisées par des cellules.

On abordera ensuite le cas des modèles *répulsifs* où le marcheur préfère découvrir de nouveaux sites que de revenir sur ses pas. On caractérisera leurs propriétés de vieillissement en confinement et en espace infini avant d'entamer l'analyse de leurs propriétés de premier passage.

Dans le chapitre 5, on se concentrera sur un système physique dont l'évolution du marcheur est non markovienne et qui présente aussi des effets de mémoire et de vieillissement importants. Ce système conserve un lien fort avec la dynamique des polymères et des macromolécules pour lesquels certains événements de premier passage ne sont pas caractérisés. On développera une approche dérivée des travaux récents [Guérin et al., 2016] afin de déterminer le temps moyen de premier passage pour de tels modèles en présence d'un piège harmonique.

Enfin, on analysera les liens qu'entretiennent les statistiques de premier passage avec d'autres observables caractéristiques des problèmes d'exploration. On insistera sur le caractère non trivial des résultats obtenus pour le cas des modèles à renforcement.

À titre indicatif, le cœur de cette thèse est constitué des chapitres 1 à 4. Ces chapitres concentrent les principaux résultats qui concernent les modèles à renforcement là où les chapitres 5 et 6 présentent des résultats plus éloignés de la problématique initiale. D'autre part, lors d'une première lecture, les extensions proposées en fin de chapitre 1, 2, 4 et 5 peuvent être parcourues plus succinctement tout comme les différentes notes de bas de page qui parsèment ce manuscrit.



# I – Introduction aux marches à renforcement

## I.1 Introduction

De nombreux systèmes physiques présentent des caractéristiques qui sont explicitement connectées à des problèmes de premier passage. Au-delà de la complexité intrinsèque, souvent spécifique, qui émerge naturellement de cette catégorie de problème [Bray et al., 2013; Metzler et al., 2014; Redner, 2001], il apparaît indispensable de développer des axes de réflexions dont l'objectif est de dresser une représentation unifiée des propriétés de premier passage. De celle-ci émergeraient alors spontanément des principes généraux directement applicables à un grand nombre de problèmes théoriques ou pratiques. De plus, l'analyse de nombreuses trajectoires réelles révèle l'importance des effets de mémoire sur les propriétés d'exploration de ces différents processus. Il apparaît donc comme essentiel de caractériser les incidences de tels effets et en particulier lorsque les marcheurs évoluent dans des espaces confinés. En outre, s'il est établi que des marcheurs réels comme des cellules ou des insectes peuvent modifier leur environnement en déposant des signaux biochimiques ou en remodelant leur environnement, l'impact de ces perturbations auto-induites sur les trajectoires elles-mêmes reste peu exploré. Il est manifeste que ces effets, que l'on appellera par la suite de renforcement, présentent un intérêt tout particulier, et que la mise en place d'un cadre général et d'outils permettant leur analyse est primordiale.

Dès lors, ce chapitre introductif se compose en trois parties. Tout d'abord, on présentera une revue succincte des multiples définitions des effets de renforcement. L'objectif étant de dresser le cadre spécifique à notre étude et de justifier le choix des principaux modèles qui seront étudiés dans cette thèse. Dans un second temps, on se concentrera plus spécifiquement sur les marches à renforcement que l'on examinera par la suite, en prenant soin de rappeler les propriétés essentielles de ces modèles qui sont pour l'heure connues. Pour finir, on soulignera l'importance des effets de mémoire qui émergent naturellement de ces marches et notamment leurs conséquences sur les problèmes de premier passage. Ainsi, on prendra soin de souligner les effets spécifiques aux modèles à renforcement qui influenceront sur les propriétés de premier passage en comparaison des analyses classiques. De cette première description succincte des effets de renforcement émergeront les propriétés clés de ces modèles, nécessaires à déterminer afin de caractériser les propriétés de premier passage. Ce chapitre esquisse donc les différentes approches qui seront menées dans les chapitres suivants.

## I.2 Multiples définitions des effets de renforcement

Commençons par définir ce que l'on appellera, par la suite, les modèles à renforcement. Pour cela, nous reprendrons les différents modèles historiques qui ont orienté l'essor de cette catégorie de processus stochastiques.

### I.2.1 Contrastes entre les définitions statiques et dynamiques des modèles à renforcement

En physique, la première représentation emblématique des modèles à renforcement découle de l'analyse des longues chaînes de polymères en solution diluée\*<sup>1</sup> [Flory, 1953]. Ce type de problème de volume exclu conduit à l'introduction du modèle éminemment connu appelé Self-Avoiding Walk.

Ce modèle sur réseau est défini par l'ensemble des chaînes de longueurs  $n$  qui ne se recoupent jamais, autrement dit pour lesquelles les sites d'un réseau ne sont pas visités plus d'une fois. De nombreux travaux autour de ce modèle ont été menés, et ce, dans des domaines variés comme la chimie, la biophysique, la physique de la matière condensée et les mathématiques [Daoud et al., 1975 ; Madras et al., 2013]. L'un des résultats principaux provient de la conjecture émise par Flory [1949] qui propose que la distance entre les deux extrémités de la chaîne soit donnée par le comportement asymptotique suivant

$$\langle X^2(n) \rangle_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^{2\nu} \quad (\text{I.1})$$

où  $\nu = 3/(d+2)$  pour  $d < 4$  et  $\nu = 1/2$  pour  $d \geq 4$ . Remarquons que la dimension critique du modèle SAW est  $d_c = 4$ . Cette observation revêtira toute son importance lorsqu'on se tournera vers les marcheurs à renforcement. Par ailleurs, notons que les connexions entre le modèle Self-Avoiding Walk et d'autres modèles de la physique statistique (tels que le modèle d'Ising ferro-magnétiques) sont multiples [Gennes, 1979]. Une remarque fondamentale concerne le caractère *statique* induit par la définition même du modèle SAW. Plus précisément, le modèle est défini par l'ensemble des chaînes de taille  $n$  pour lesquelles on associe un poids uniforme 1 à chacune de ses réalisations et cela indépendamment de la forme de celle-ci [Amit et al., 1983]. Autrement dit, on considère que l'objet existe sans faire d'hypothèse quant à sa croissance ou sa dynamique. En conséquence, cette approche se distingue des modèles classiques de marches aléatoires pour lesquels la trajectoire du marcheur forme une chaîne continue de taille  $N(t)$  qui évolue et s'agrandit au cours du temps. Notons que cela n'exclut pas l'existence de relations incrémentales entre les ensembles des modèles SAW de taille  $n$  et  $n + 1$ . Cependant, celles-ci ne sont pas assimilables à la simple croissance d'une marche aléatoire.

Une première tentative "spontanée" de renforcement serait de considérer un marcheur aléatoire refusant de revenir sur les sites ayant déjà été visités auparavant. Il choisirait alors, avec une probabilité uniforme, un site parmi les sites voisins n'ayant pas encore été visités. Cette définition d'apparence simple conduit pourtant le marcheur à finir nécessairement

---

\*<sup>1</sup> Notons que l'étude en solution diluée permet de se restreindre aux effets d'interactions du polymère seulement avec lui-même.

enfermé dans sa propre trajectoire<sup>\*2</sup> (propriété appelée "self-trapping", un exemple est représenté figure I.1). On peut notamment relever le théorème avancé par Lehman et al. [1958] qui permet de borner  $s(n)$ , définie comme la probabilité que le marcheur effectue  $n$  pas, sans s'être enfermé dans un réseau périodique en dimension supérieure à 1

$$c' \exp(-a'n) < s(n) < c \exp(-an),$$

où  $a, a', c, c'$  sont des constantes. Autrement dit, le poids des trajectoires qui ne sont pas encore piégées est asymptotiquement nul. Notons que cette propriété souligne encore une fois les différences multiples entre le modèle SAW et ses équivalents dynamiques. Dès lors, il faut nécessairement autoriser le marcheur à revenir sur des sites précédemment visités afin de lui permettre d'effectuer de longues explorations.

Dans ce sens, un autre modèle phare, appelé *true-self avoiding walk* (TSAW), a été développé dans Amit et al. [1983]. On associe alors à chaque site du réseau un poids de Boltzman dont l'énergie potentielle est proportionnelle aux nombres de visites antérieures du marcheur sur ce même site. Autrement dit, à chaque pas, le marcheur saute sur le site, noté  $i$ , tiré parmi ses plus proches voisins avec une probabilité donnée par

$$p(i) = \exp(-\beta n_i) / \sum_{j=0}^{2d} \exp(-\beta n_j), \quad (\text{I.2})$$

où  $n_i$  est le nombre de visites du site  $i$ , et  $\beta > 0$  est un paramètre libre. Précisons que la somme porte sur l'ensemble des sites voisins de la position actuelle du marcheur. Tout d'abord, observons que ce modèle permet aux marcheurs de revenir sur des sites visités auparavant, et par là même, de s'extirper de pièges potentiels, y compris dans la limite  $\beta \rightarrow \infty$ . L'analyse de ce modèle initialement menée dans [Amit et al., 1983], a permis de mettre en valeur de nombreuses dissemblances avec le modèle SAW. La plus criante reste la dimension critique  $d_c$  égale à 2 pour le modèle TSAW qui contraste avec le résultat proposé par Flory ( $d_c = 4$ , (I.1)) pour la marche SAW. Une autre observation plus subtile et moins évidente concerne l'irréversibilité de la trajectoire. En effet, lorsque l'on considère la chaîne formée par la trajectoire du marcheur TSAW, la position initiale et la position finale ne sont pas interchangeables, autrement dit les probabilités associées aux deux réalisations ne sont pas forcément égales. Cette propriété souligne simplement que l'ordre dans lequel les visites ont été effectuées compte (figure I.1).

Enfin, on peut compléter notre revue en considérant le cas attractif  $\beta < 0$ . Étonnamment, on retrouve alors également un comportement assez similaire à celui de la marche piégée précédemment. Cette fois-ci, le marcheur est tant attiré par sa trajectoire qu'il finit par s'y piéger en ne visitant *presque sûrement* que deux sites du réseau. Ce comportement est partagé par de nombreux autres modèles attractifs. On peut relever notamment un théorème fondamental émis par Davis [1990] qui permet une première classification en dimension 1. Cette spécificité sera largement examinée dans le chapitre 4 lorsque l'on considérera spécifiquement les modèles attractifs.

---

<sup>\*2</sup> Propriétés valables pour des réseaux euclidiens en dimension supérieure à 1, la dimension 1 conduisant à un comportement balistique trivial.

Ce modèle permet donc d'obtenir une première définition satisfaisante d'une marche à renforcement aléatoire sur réseau. Toutefois, il apparaît clairement que le caractère dynamique de celui-ci va aussi générer de nombreux effets particulièrement complexes à caractériser<sup>\*3</sup>. L'analyse numérique de ces marches doit donc être menée sur des échelles de temps élevées y compris en espace infini [Grassberger, 2017b].

À partir du modèle TSAW, se déclinent logiquement de nombreux exemples qui varient dans le choix du potentiel associé aux nombres de visites, exemples que l'on décrira par la suite. Par ailleurs, on peut aussi noter l'existence d'exemples introduisant des effets de renforcement non locaux, et qui conduisent le plus souvent à des résultats spécifiques [Beffara et al., 2010 ; Grassberger, 2017b].

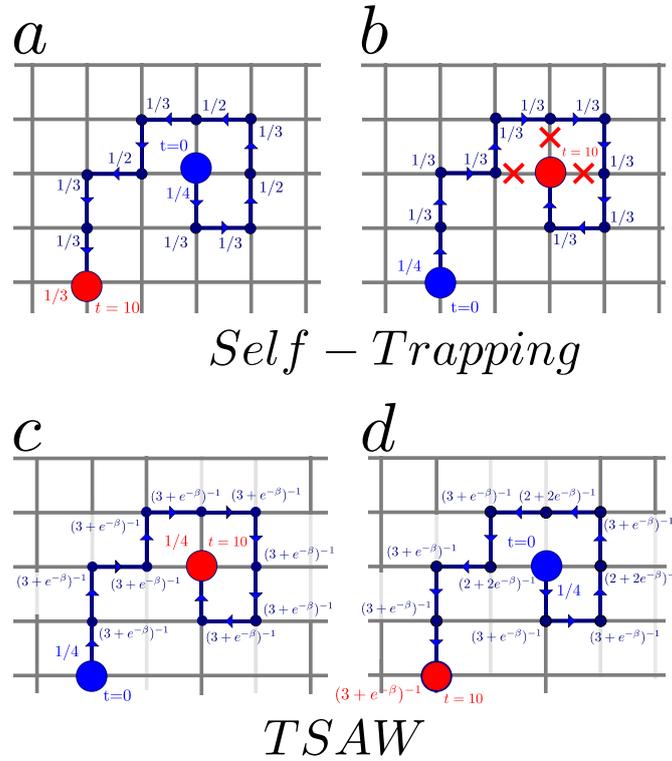


FIG. I.1 Comparaison entre les modèles de la marche self-trapping et TSAW. Une réalisation de trajectoire identique est représentée dans les cas, self-trapping a)-b) et TSAW c)-d), où les probabilités de transition associées aux différents pas sont explicitées. Contrairement au cas statique SAW, on remarque l'importance de la position initiale en bleu sur les valeurs des probabilités de transition des deux modèles (comparaison entre a) et b) puis c) et d)). Ensuite, on observe le caractère piégé de la marche self-trapping a), où le marcheur a une probabilité 1 de finir enfermé dans sa propre trajectoire. Inversement, le marcheur TSAW a une probabilité uniforme de choisir parmi les voisins visités ici équitablement.

<sup>\*3</sup> On peut noter par exemple que pour  $\beta = 0$ , on retrouve une marche de pólýa . Cette observation souligne que ce type de marche peut admettre des temps de relaxation remarquablement longs, et en particulier lorsque  $\beta \rightarrow 0$ .

### I.2.2 Effets induits par la définition du réseau

#### a) Définition sur réseau

En suivant une approche similaire à la marche TSAW, on s'intéressera dans la suite de cette thèse aux modèles à renforcement pour lesquels les probabilités de transition, entre les sites plus proches voisins, sont définies de la manière suivante

$$p(i) = \exp(-f(n_i)) / \sum_{j=0}^{2d} \exp(-f(n_j)), \quad (\text{I.3})$$

où  $f$  est une fonction que l'on choisit monotone<sup>\*4</sup>. Tout d'abord, notons que pour  $f > 0$  croissante, les effets de renforcement tendent à favoriser les sites les moins visités, le marcheur sera alors considéré comme *répulsif*. Inversement pour  $f < 0$  décroissante, ce sont les sites les plus visités qui sont préférés, traduisant un caractère *attractif* de la marche.

Relevons que notre définition n'est pas encore aboutie puisque l'on n'a pas défini rigoureusement la variable  $n_i$ . Plus précisément, on observe l'existence de deux approches majeures pour définir les effets de renforcement sur un réseau. La première a été abordée lorsque l'on a considéré le modèle TSAW, où  $n_i$  est égale au nombre de fois que le marcheur a visité le site  $i$ ,  $n_i = \{X(n) = s_i, n \leq t\}$  (où le site  $i$  est indexé). Cette définition, désignée comme la *convention sur site* par la suite, sera l'option principalement retenue dans cette thèse. La seconde approche moins répandue consiste à définir les effets de renforcement sur les liens du réseau (appelée *convention sur lien*). Autrement dit,  $n_i$  est égale au nombre de fois que le marcheur a emprunté le lien  $i$  antérieurement. Ces deux définitions qui semblent pourtant assez similaires, peuvent présenter des propriétés distinctes, et plus particulièrement dans les cas attractifs<sup>\*5</sup>. Cette particularité sera examinée dans le chapitre 3. Par ailleurs, observons que la plupart des travaux effectués dans le domaine de la physique concerne le premier type de modèle puisqu'il est le plus courant dans l'étude des marches aléatoires [Amit et al., 1983 ; Freund et al., 1992 ; Peliti et al., 1987 ; Redner et al., 1983 ; Sapozhnikov, 1994]. Inversement, pour des travaux plus mathématiques, le second type de problème est le plus souvent préféré [Toth, 1995] car il permet d'obtenir plusieurs résultats rigoureux<sup>\*6</sup>.

#### b) Représentation continue des marches à renforcement

En outre, on peut noter que des travaux approfondis [Davis et al., 2002 ; Durrett et al., 1992 ; Tóth, 2001] ont permis d'étendre les propriétés de renforcement à des processus en temps et en espace continus. Ces modèles peuvent être logiquement interprétés comme les limites des marches discrètes. On peut notamment relever les travaux de Tóth qui ont permis de construire la limite continue appelée *true self-repelling motion* du modèle analogue à la TSAW dans la convention sur lien [Tóth, 1996 ; Tóth et al., 2011, 1998]. Afin de souligner la complexité de ces modèles continus, notons que le processus *true self-repelling motion* ne peut pas être obtenu à partir d'une équation stochastique différentielle.

<sup>\*4</sup>  $f$  peut être plus généralement une distribution, généralement on prend  $f(0) = 0$ .

<sup>\*5</sup> Pour la plupart des choix de  $f$ , le comportement d'échelle aux grands temps des deux modèles est identique, mais il peut apparaître des différences majeures pour certains marcheurs attractifs.

<sup>\*6</sup> On peut notamment se référer à la revue de Pemantle [2007] qui récapitule les principaux résultats pour les deux conventions, mais qui aborde aussi des méthodes plus générales propres aux modèles à renforcement.

Une description non-exacte, mais intuitive, serait de corrélérer l'évolution de  $dX$  à celle du gradient spatial du temps local  $n(x, t)$ , défini comme la densité locale du temps passé en  $x$  (équivalent de  $n_i$ ). Toutefois, notons que  $n(x, t)$  n'est pas différentiable. Dès lors, dans cette thèse, on ne se concentrera pas sur les généralisations continues de ces modèles, puisqu'une analyse pertinente nécessiterait le développement et l'utilisation d'outils éminemment sophistiqués. D'autant que l'on s'intéresse, ici, spécifiquement aux événements de premier passage qui sont des observables particulièrement complexes en soi. Pourtant, on s'appuiera dans notre analyse des processus discrets sur des limites asymptotiques obtenues aux temps longs, pour lesquelles on espère pouvoir négliger les effets spécifiques associés à la discrétisation. Ainsi, on cherchera le plus souvent à déterminer des limites asymptotiques des observables ou des comportements de processus discrets en s'appuyant, par exemple, sur des limites invariantes d'échelle de ces comportements, sans pour autant considérer les processus continus limites.

### c) Importance de la dimension du réseau

Avant de conclure cette revue, observons qu'il est possible de prendre une fonction  $f$  non monotone, afin de permettre au marcheur de passer successivement d'un comportement attractif à répulsif en fonction du nombre de visites antérieures. Cependant, puisque les comportements effectués par les marcheurs sont très dépendants du choix de  $f$ , il est donc difficile de proposer des résultats généraux afin de décrire de tels modèles.

Afin de souligner cette observation, on pourrait proposer, par exemple, que ce soit le comportement asymptotique de  $f$  qui détermine le comportement asymptotique de ces marches. Cette affirmation reste en général vraie en dimension 1 (pour des fonctions  $f$  monotones) mais devient particulièrement erronée en dimension supérieure. Ce dernier constat soulève une dernière propriété distinctive des marches à renforcement et essentielle à leurs analyses que l'on formule ainsi : généralement, lorsque le marcheur réalise une exploration longue, il découvre constamment de nouveaux sites. Parallèlement à cela, le marcheur repasse aussi sur des sites déjà visités auparavant. On observe donc que l'évolution du marcheur implique le comportement de  $f$  à toutes les échelles de temps.

Plus particulièrement, on observera qu'en dimension élevée, certaines marches à renforcement visitent un nombre fini de fois les différents sites du réseau. Pour ce type d'exploration, le comportement de  $f$  aux temps longs est généralement peu impactant. Inversement en dimension 1, les différents marcheurs vont majoritairement visiter un nombre infini de fois les sites du réseau. Dès lors, c'est le comportement asymptotique de  $f$  aux temps longs qui sera déterminant. Cette variation des comportements illustre la complexité qui peut facilement émerger de l'analyse des modèles à renforcement, et plus particulièrement des modèles spécifiques pour lesquels le comportement de  $f$  est non trivial. Cela illustre, par ailleurs, la difficulté d'énoncer des résultats généraux pour les marches à renforcement puisqu'il faut considérer l'émergence de multiples exceptions qui dépendent de la dimension du réseau<sup>\*7</sup>. Ainsi, au travers de cette courte inspection des modèles classiques de marche à renforcement, on a dévoilé plusieurs caractéristiques qui leurs sont propres.

---

<sup>\*7</sup> Plus généralement, ces exceptions dépendent aussi du type de graphe sur lequel évolue le marcheur [Lee, 1992 ; Lee et al., 1995].

Tout d'abord, ces modèles permettent toujours le retour sur des sites déjà visités, y compris dans les cas limites où ce type de saut est particulièrement défavorisé. Puis, on a observé que la définition sur réseau impliquait d'introduire généralement les effets de renforcement sur les liens ou sur les sites du réseau, choix se révélant loin d'être anodin. De plus, on pressent déjà que la dimension du réseau a un impact majeur sur le comportement du marcheur puisque celle-ci implique des échelles distinctes de  $f$ . On va, dès à présent, définir précisément les modèles qui seront considérés dans la suite en rappelant les propriétés majeures qui sont pour l'heure connues.

## I.3 Présentation de la classe des modèles à renforcement

### I.3.1 Présentations des modèles à renforcement

On va ici présenter les différents modèles qui vont être principalement étudiés dans cette thèse.

#### a) Modèle true self-avoiding walk

Tout d'abord, pour une fonction linéaire de  $f$ , on retrouve le modèle True Self-Avoiding Walk présenté précédemment et dont la probabilité de transition est donnée par (I.2) (avec  $\beta > 0$ ). Notons, que la pertinence de ce modèle dans la description des statistiques de chaînes de polymères dans une solution polydispersée est discutée dans [Family et al., 1984].

Les propriétés de transport de ce modèle ont été largement analysées dans des espaces euclidiens pour lesquels il a été montré que la marche présentait un comportement diffusif en dimension strictement supérieure à 2 [Horváth et al., 2012] et super-diffusif en dimension 1 [Amit et al., 1983] (caractérisé par un déplacement quadratique moyen  $\langle X^2(t) \rangle \sim t^{4/3}$ ).

Ensuite, pour la dimension critique  $d_c = 2$ , on constate un comportement marginalement diffusif caractérisé par  $\langle X^2(t) \rangle \sim \ln(t)^\alpha t$  où  $\alpha$  n'a pas pu être déterminé analytiquement. En particulier, des travaux poussés dans lesquels des méthodes issues du groupe de renormalisation ont été appliquées sur un champ effectif censé décrire la statistique de la marche [Derkachov et al., 1989; Obukhov et al., 1983]. Malheureusement cette approche s'est avérée pour l'instant infructueuse pour de multiples aspects discutés dans [Grassberger, 2017b].

En dimension 1, les travaux les plus saisissants ont été menés par [Toth, 1995] qui, comme nous l'avons vu précédemment, ont permis de construire un candidat légitime à la limite continue de la marche TSAW sur site. Ce processus invariant d'échelle présente un comportement super-diffusif identique à la marche TSAW, et dont la distribution a été obtenue dans [Dumaz et al., 2013] et n'est pas gaussienne (figure I.2). En dimension supérieure ou égale à 3, la limite continue du modèle TSAW a été proposée comme étant un mouvement brownien en dimension  $d$ . Les effets de renforcement sont entièrement contenus dans la covariance  $\sigma^2$  [Horváth et al., 2012]. Cette dernière propriété sera partagée par de multiples processus à renforcement dont les plus connus sont détaillés dans la suite.

### b) Modèle à renforcement sous-exponentiel

Dans la continuation des travaux menés pour la marche TSAW, des marches similaires présentant un renforcement sous-exponentiel, pour lequel  $f$  est donnée par :  $f(n) = \beta n^k$  ( $0 < k < 1$ ), ont été construites. Ces marches, appelées dans la littérature *sub-exponentially self-repelling walks* (SESRW), que l'on abrégera par marches sous-exponentielles dans cette thèse, présentent un comportement super-diffusif en dimension 1 caractérisé par  $\langle X^2(t) \rangle \sim t^{\frac{2(1+k)}{2+k}}$  [Ottinger, 1985 ; Tóth, 1994 ; Tóth, 2001]. De manière identique à la marche TSAW, la densité n'est pas gaussienne en dimension 1 (figure I.2). De la même façon, la dimension critique de ce modèle est  $d_c = 2$ . Le modèle présente donc un caractère diffusif en dimension supérieure ou égale à 3, et est assimilable à un mouvement brownien dans la limite continue [Horváth et al., 2012]. Le comportement en dimension 2 n'a quant à lui, à notre connaissance, pas été déterminé.

### c) Modèle à renforcement répulsif polynomial

Ensuite, on peut étendre notre examen aux marches à renforcement répulsif polynomial pour lesquelles  $f(n) = -\beta \ln(n+1)$  avec  $\beta > 0$ . Ce modèle aussi désigné sous le nom *polynomially self-repelling walks* (PSRW) présente un comportement diffusif y compris en dimension 1 ; en revanche la distribution n'est pas gaussienne [Tóth, 1996, 2001] (figure I.2). Il est clair que l'on retrouve un comportement limite décrit par un mouvement brownien en dimension supérieure ou égale à 3 [Horváth et al., 2012].

### d) Modèle self-attractive walk

Pour finir, un autre modèle classique de marche à renforcement est obtenu lorsque l'on considère que les effets de renforcement sont ajoutés seulement lorsque le site ou le lien est visité pour la première fois. Autrement dit, la marche appelée *self-attractive walk* (SATW) ou encore *one-step-reinforced walk* est alors définie par une probabilité de sauter sur le site voisin  $i$  proportionnel à  $\exp(-\beta n_i)$ , où  $n_i = 0$  si le site n'a jamais été visité jusqu'à l'instant  $t$  et  $n_i = 1$  sinon [Sapozhnikov, 1994]. Notons que le marcheur est tantôt considéré comme attractif pour  $\beta > 0$ , tandis qu'il est repoussé par sa propre trajectoire pour  $\beta < 0$ \*8.

Ce modèle a reçu un intérêt tout particulier, car il présente des effets de renforcement saturants en comparaison des modèles précédents puisque, pour la SATW, le renforcement est indépendant du nombre spécifique de visites. Par ailleurs, ce modèle a aussi été largement étudié en dimension 1, dans la mesure où sa limite continue est considérée comme un candidat crédible à un mouvement brownien perturbé à ses extrémités, candidat pour lequel de nombreux travaux spécifiques ont été menés [Agliari et al., 2012 ; Carmona et al., 1998 ; Chaumont et al., 1999, 2000a ; Chaumont et al., 2000b ; Davis, 1996 ; Perman et al., 1997 ; Werner, 1995]\*9.

---

\*8 On peut bien sûr réécrire la probabilité de transition de manière analogue à (I.3) en prenant une fonction de Heaviside  $\mathcal{H}$  pour  $f$  avec comme convention  $\mathcal{H}(0) = 0$ .

\*9 Relevons en particulier que la distribution du temps local passé dans un demi-axe de ce processus continu a été déterminée dans [Carmona et al., 1998] ce qui sous-entend fortement que la densité asymptotique n'est pas gaussienne (figure I.2).

Dès lors, il a été montré que la marche discrète SATW présente un comportement diffusif en dimension 1 indépendamment de  $\beta$  [Prasad et al., 1996] tandis que pour des dimensions supérieures à 1, le signe de  $\beta$  joue un rôle primordial. En effet, pour les marches répulsives ( $\beta > 0$ ), il apparaît clairement que le comportement restera diffusif indépendamment de la dimension, puisqu'il était déjà diffusif en dimension 1. Inversement pour  $\beta < 0$ , il a été mesuré en dimension supérieure ou égale à 3 que le marcheur pouvait présenter deux types de comportements asymptotiques. Pour des effets de renforcement suffisamment faibles  $|\beta| < |\beta_c|$  le marcheur réalise un comportement diffusif. Au contraire, pour  $|\beta| > |\beta_c|$  le marcheur présente un comportement sous-diffusif caractérisé par un déplacement quadratique moyen (MSD)  $\langle X^2(t) \rangle \sim t^{2/(d+1)}$ . On reviendra plus précisément sur les fondements de ces propriétés dans le chapitre 3 qui sera plus généralement dédié aux modèles attractifs. Notons que  $\beta_c$  n'a pas été déterminé analytiquement, et dépend de la dimension [Ordemann et al., 2000, 2001]. Enfin, observons que spécifiquement à la dimension 2, l'existence d'une phase diffusive reste toujours débattue [Foster et al., 2009].

Ces différents modèles forment les candidats principaux sur lesquels on développera une analyse spécifique et ils constituent le coeur de cette thèse. Par la suite, on propose d'étendre notre approche à des modèles apparentés pour lesquels on aura ajouté des termes sous-dominants (dans la limite des grands nombres de visites). On peut en particulier citer le modèle *asymptotically free walk* (AFW) pour lequel  $f(n) = \ln(1 - 2Bn - 1 + O(n^2))$  avec  $B \in \mathbb{R}$  ou un élargissement des marches polynomiales PSRW,

$f(n) = \ln((1 + \alpha)^{-1}(n/2)^{-\alpha} - B(n/2)^{-\alpha-1} + O(n^{-\alpha-2}))$  qui ont été étudiés principalement en dimension 1 [Tóth, 1996]. Afin d'appliquer directement les résultats que l'on aura obtenus, il faudra distinguer les comportements sous-dominants attractifs et répulsifs. À l'évidence, l'analyse de la SATW attractive ayant révélé l'apparition d'un comportement sous-diffusif, on comprend que l'introduction d'effets attractifs même sous-dominants peut altérer les propriétés de transport prédites par l'analyse du terme dominant dans la limite  $n \rightarrow \infty$ .

Pour finir, on peut aussi définir les équivalents attractifs de ces différentes marches. La principale propriété évoquée précédemment est l'émergence d'un comportement piégé. À partir des travaux de Davis [1990] de nombreuses études ont étendu ce premier résultat dont on proposera une revue plus poussée dans le chapitre 3. Le comportement des marches attractives non piégées apparaît plus complexe à caractériser et peu de résultats, souvent spécifiques, ont été menés dans la littérature. La SATW attractive en reste le principal exemple.

Par ailleurs, on enrichira notre étude en y joignant des modèles dont la trajectoire future est déterminée par l'historique complet de la trajectoire passée, mais qui ne correspondent pas à la définition précise du renforcement énoncé précédemment. On s'appuiera sur deux modèles principaux, la marche *éléphant* (ERW) introduite pour la première fois dans [Schütz et al., 2004], et les marches que l'on appellera dans la suite *Monkey walk* introduites dans [Boyer et al., 2014] qui présentent des effets de mémoire à longues portées. Ces deux marches aléatoires font partie des rares exemples de processus dont la trajectoire future dépend de l'historique complet des sites visités, et dont on peut déterminer avec précision les propriétés asymptotiques du déplacement quadratique moyen. Leurs comportements seront détaillés dans la suite de cette thèse, et enrichiront notre étude des marches à renforcement.

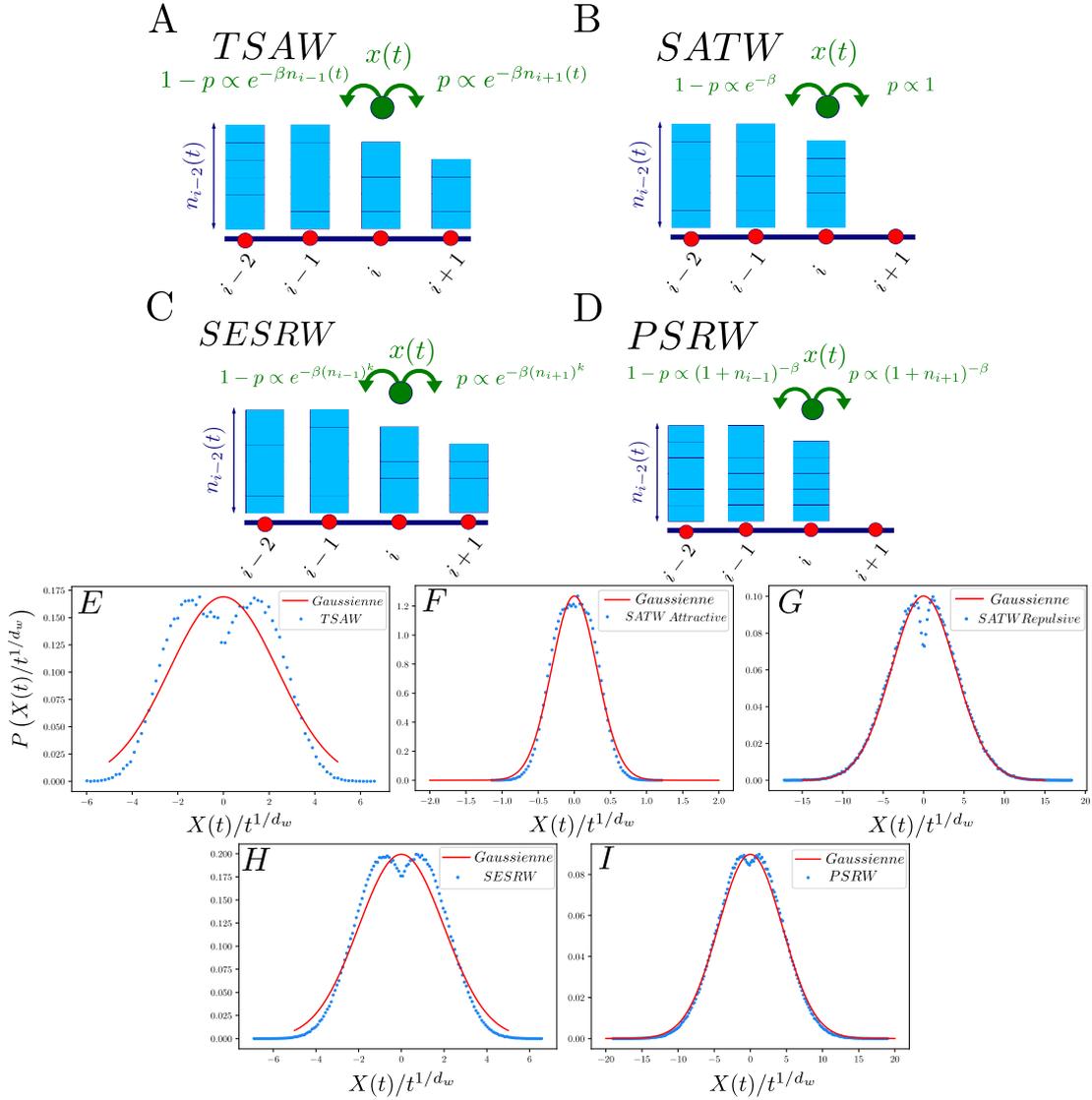


FIG. I.2 Définitions des marches à renforcement, et distribution des marches à renforcement sur site. **A-D** Les définitions des modèles sont rappelées en dimension 1 où les poids associés à chaque probabilité de transition sont marqués en vert. Pour la marche TSAW **A**, les marches SESRW **C** et les marches PSRW **D**, ceux-ci dépendent explicitement du nombre de visites contrairement au modèle SATW **B**. **E** distribution de la marche TSAW ( $\beta = 2.0, t = 10000010$  pas,  $N_{simu} = 60000$ ), **F** distribution de la marche SATW, attractive  $(e^{-\beta} + 1)^{-1} = 0.2$  et répulsive **G**  $(e^{-\beta} + 1)^{-1} = 0.8$  ( $t = 2000010$  pas,  $N_{simu} = 350000$ ). **H** distribution de la marche sous-exponentielle SESRW  $k = 0.5, \beta = 1.0$  ( $t = 1000020$  pas,  $N_{simu} = 1000000$ ), et de la marche polynomiale PSRW **I**  $\beta = 1.0$  sans termes sous-dominants ( $t = 1000020$  pas,  $N_{simu} = 1000000$ ). On constate que ces différentes distributions normalisées par leur échelle caractéristique donnée par  $t^{1/d_w}$  ne sont pas gaussiennes (comparaisons en rouge), y compris dans la limite asymptotique.

### I.3.2 Équation de Fokker-Planck

Pour compléter cette revue des propriétés de transport des marches à renforcement, on propose de retrouver ces résultats au moyen d'une équation de Fokker-Planck en champ moyen. Tout d'abord, notons que celle-ci a été largement mise en oeuvre afin, notamment, de déterminer certains des exposants caractéristiques propres aux modèles SESRW et TSAW [Ottinger, 1985], avant leur confirmation par des travaux rigoureux [Toth, 1995 ; Tóth, 1994].

On propose que le comportement d'échelle de la densité pour un processus initialement en 0 puisse être décrite dans la limite continue par l'équation suivante

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( P(x, t) \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \right), \quad (\text{I.4})$$

où les effets de renforcement sont décrits par un potentiel  $V(x, t)$ . De par la structure des probabilités de transition, on identifie logiquement  $V(x, t)$  à  $f(n(x, t))$ , où  $n(x, t)$  est le temps local passé en  $x$  jusqu'à  $t$ . Afin de déterminer le comportement typique de  $V(x, t)$ , on propose de s'appuyer sur une approche de champ moyen où on approxime le temps local par  $\int_0^t P(x, t') dt'$  (figure I.3). Autrement dit, pour les marches sous-exponentielles (SESRW), on obtient pour  $V$

$$V(x, t) = \beta \left[ \int_0^t P(x, t') dt' \right]^k.$$

Ensuite, on propose que dans la limite  $t, x \gg 1$ ,  $P(x, t)$  puisse se réexprimer sous une forme invariante d'échelle

$$P(x, t) = \frac{1}{t^\beta} g\left(\frac{x}{t^{1/d_w}}\right). \quad (\text{I.5})$$

En dimension 1, la normalisation de la densité  $P$  amène la relation  $\beta = 1/d_w$ . Notons que l'exposant  $d_w$ , communément appelé dimension de la marche, est défini par la dépendance asymptotique du MSD selon  $t$ ,  $\langle X^2(t) \rangle \sim t^{\frac{2}{d_w}}$ . Pour un processus strictement invariant d'échelle, il apparaît logiquement dans la dépendance de  $g$  selon la variable adimensionnée  $\frac{x}{t^{1/d_w}}$ .

En insérant cette forme dans (I.4) et en s'appuyant sur l'hypothèse de champ moyen, on obtient dans le cas de la marche SESRW

$$\begin{aligned} \frac{-1}{d_w t^{1+1/d_w}} g\left(\frac{x}{t^{1/d_w}}\right) - \frac{x}{d_w t^{1+2/d_w}} g'\left(\frac{x}{t^{1/d_w}}\right) &= \frac{D}{t^{3/d_w}} g''\left(\frac{x}{t^{1/d_w}}\right) \dots \\ &+ \frac{1}{t^{2/d_w}} g'\left(\frac{x}{t^{1/d_w}}\right) \beta k \left[ \int_0^t \frac{1}{t'^{1/d_w}} g\left(\frac{x}{t'^{1/d_w}}\right) dt' \right]^{k-1} \int_0^t \frac{1}{t'^{2/d_w}} g'\left(\frac{x}{t'^{1/d_w}}\right) dt' \\ &+ \frac{1}{t^{1/d_w}} g\left(\frac{x}{t^{1/d_w}}\right) \beta k(k-1) \left[ \int_0^t \frac{1}{t'^{1/d_w}} g\left(\frac{x}{t'^{1/d_w}}\right) dt' \right]^{k-2} \left[ \int_0^t \frac{1}{t'^{2/d_w}} g'\left(\frac{x}{t'^{1/d_w}}\right) dt' \right]^2 \\ &+ \frac{1}{t^{1/d_w}} g\left(\frac{x}{t^{1/d_w}}\right) \beta k \left[ \int_0^t \frac{1}{t'^{1/d_w}} g\left(\frac{x}{t'^{1/d_w}}\right) dt' \right]^{k-1} \int_0^t \frac{1}{t'^{3/d_w}} g''\left(\frac{x}{t'^{1/d_w}}\right) dt'. \end{aligned}$$

On peut comparer la dépendance selon la variable  $t$  dans les différents termes. En premier lieu, on suppose que les effets de renforcement dominent la contribution diffusive qui est proportionnelle à  $D$ . Dès lors, on peut expliciter une relation vérifiée par  $d_w$

$$-1 - \frac{1}{d_w} = -\frac{2}{d_w} + (k-1)\left(1 - \frac{1}{d_w}\right) + \left(1 - \frac{2}{d_w}\right),$$

ce qui permet d'exprimer  $d_w$  en fonction de  $k$

$$d_w = \frac{2+k}{1+k}.$$

On retrouve la relation d'échelle qui caractérisait le MSD des marches SESRW

$$\langle X^2(t) \rangle \sim t^{\frac{2}{d_w}} = t^{\frac{2(1+k)}{2+k}}.$$

En prenant  $k = 1$  on retrouve la dimension de marche de la TSAW donnée par  $d_w = 3/2$ . Inversement, on aurait pu supposer que ce soit le terme diffusif qui domine les effets de renforcement. Sous cette hypothèse, il est clair que  $d_w = 2$ . Toutefois, il apparaît alors que les effets de renforcement ne sont plus négligeables, ce qui est contradictoire. Ainsi, le terme diffusif est bien négligeable en dimension 1 pour  $k > 0$  et le comportement dominant est induit par les effets de renforcement.

Ensuite, on peut étendre notre approche pour les marches polynomiales (PSRW) qui sont décrites par l'approximation suivante pour  $V(x, t)$

$$V(x, t) = k \ln \left( \beta \int_0^t \frac{1}{t'^{1/d_w}} g \left( \frac{x}{t'^{1/d_w}} \right) dt' \right).$$

En injectant cette forme dans (I.4) cela conduit à

$$\begin{aligned} \frac{-1}{d_w t^{1+1/d_w}} g \left( \frac{x}{t^{1/d_w}} \right) - \frac{x}{d_w t^{1+2/d_w}} g' \left( \frac{x}{t^{1/d_w}} \right) &= \frac{D}{t^{3/d_w}} g'' \left( \frac{x}{t^{1/d_w}} \right) + \frac{1}{t^{2/d_w}} g' \left( \frac{x}{t^{1/d_w}} \right) \beta k \frac{\int_0^t \frac{1}{t'^{2/d_w}} g' \left( \frac{x}{t'^{1/d_w}} \right) dt'}{\int_0^t \frac{1}{t'^{1/d_w}} g \left( \frac{x}{t'^{1/d_w}} \right) dt'} \\ &+ \frac{1}{t^{1/d_w}} g \left( \frac{x}{t^{1/d_w}} \right) \beta k \frac{\int_0^t \frac{1}{t'^{3/d_w}} g'' \left( \frac{x}{t'^{1/d_w}} \right) dt'}{\int_0^t \frac{1}{t'^{1/d_w}} g \left( \frac{x}{t'^{1/d_w}} \right) dt'} \\ &- \frac{1}{t^{1/d_w}} g \left( \frac{x}{t^{1/d_w}} \right) \beta k \left[ \frac{\int_0^t \frac{1}{t'^{2/d_w}} g' \left( \frac{x}{t'^{1/d_w}} \right) dt'}{\int_0^t \frac{1}{t'^{1/d_w}} g \left( \frac{x}{t'^{1/d_w}} \right) dt'} \right]^2. \end{aligned}$$

La comparaison des différents termes mène à une unique solution donnée par  $d_w = 2$ . On retrouve que les marches polynomiales sont diffusives en dimension 1. Par ailleurs, on peut étendre aisément ce résultat aux marches SATW répulsives en dimension 1.

Ensuite, on considère des dimensions supérieures à la dimension critique 2,  $d \geq 3$ . On réexprime la normalisation de la densité de probabilité (I.5)

$$\int \int \int \frac{1}{t^\beta} g \left( \frac{x_1}{t^{1/d_w}}, \frac{x_2}{t^{1/d_w}}, \dots, \frac{x_d}{t^{1/d_w}} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_d = 1.$$

Cela permet d'isoler la relation  $\beta = d/d_w$ . Il est manifeste qu'il est pratique de se placer en coordonnées sphériques pour lesquelles  $g$  ne dépend que de la norme  $r$  et de  $t$ . En injectant cette nouvelle forme dans (I.4), on obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{-1}{d_w t^{1+d/d_w}} g\left(\frac{r}{t^{1/d_w}}\right) - \frac{r}{d_w t^{1+(d+1)/d_w}} g'\left(\frac{r}{t^{1/d_w}}\right) &= \frac{D}{t^{(d+2)/d_w}} g''\left(\frac{r}{t^{1/d_w}}\right) \dots \\ &+ \frac{1}{t^{(d+1)/d_w}} g'\left(\frac{r}{t^{1/d_w}}\right) \beta k \left[ \int_0^t \frac{1}{t'^{d/d_w}} g\left(\frac{r}{t'^{1/d_w}}\right) dt' \right]^{k-1} \int_0^t \frac{1}{t'^{(d+1)/d_w}} g'\left(\frac{r}{t'^{1/d_w}}\right) dt' \\ &+ \frac{1}{t^{d/d_w}} g\left(\frac{r}{t^{1/d_w}}\right) \beta k (k-1) \left[ \int_0^t \frac{1}{t'^{d/d_w}} g\left(\frac{r}{t'^{1/d_w}}\right) dt' \right]^{k-2} \left[ \int_0^t \frac{1}{t'^{(d+1)/d_w}} g'\left(\frac{x}{t'^{1/d_w}}\right) dt' \right]^2 \\ &+ \frac{1}{t^{d/d_w}} g\left(\frac{r}{t^{1/d_w}}\right) \beta k \left[ \int_0^t \frac{1}{t'^{d/d_w}} g\left(\frac{r}{t'^{1/d_w}}\right) dt' \right]^{k-1} \int_0^t \frac{1}{t'^{(d+2)/d_w}} g''\left(\frac{r}{t'^{1/d_w}}\right) dt'. \end{aligned}$$

De manière similaire, on propose dans un premier temps de négliger la contribution des termes diffusifs. On obtient alors la relation suivante qui définit  $d_w$

$$-1 - \frac{d}{d_w} = -\frac{d}{d_w} + (k-1)\left(1 - \frac{d}{d_w}\right) + 1 - \frac{d+2}{d_w}.$$

On obtient pour  $d \geq 2$  un comportement sous-diffusif caractérisé par

$$d_w = \frac{2 + kd}{k + 1}.$$

Cependant, le terme diffusif domine alors les effets induits par le renforcement, ce qui est contradictoire. On propose donc que la partie diffusive contrôle l'évolution du processus, ce qui permet de retrouver le comportement diffusif attendu pour tout  $k$ . Ce dernier résultat s'étend aisément pour les marches SATW et PSRW puisque les effets de renforcement sont alors plus faibles que ceux des marches SESRW.

Émettons plusieurs remarques spécifiques à cette approche :

- Avant tout, rappelons que cette méthode s'appuie sur des approximations particulièrement fortes. Elle permet seulement de prédire le comportement d'échelle asymptotique des différents modèles. On peut se remémorer les travaux de Tóth [2001] qui spécifient formellement que la densité de probabilité de la limite continue de la marche TSAW sur lien ne peut pas être obtenue à partir d'une équation stochastique. Dès lors, notre approche ne permet pas de prédire la forme de  $g$  aux temps longs.
- Ensuite, on a supposé que la distribution était décrite seulement à partir de la variable  $\frac{x}{t^{1/d_w}}$ , où  $d_w$  est obtenu à partir du comportement asymptotique du MSD. Comme le processus est défini sur un réseau discret, il n'est pas exclu que  $f$  puisse dépendre d'autres échelles qui ne sont pas données par  $d_w$ . Pourtant, on a pu déterminer le comportement dominant seulement à partir de l'échelle caractérisée par  $d_w^{*10}$ .

---

<sup>\*10</sup> On propose que notre approche reste valide malgré la présence d'effets qui surviennent à des échelles supplémentaires  $\frac{x}{t^{1/a}}$  tels que  $a > d_w$ .

- Par ailleurs, cette approche permet de prédire le comportement asymptotique des marches à renforcement répulsif mais n'est pas applicable aux marches attractives. Nous verrons par la suite que l'échelle diffusive n'est pas négligeable, y compris pour des modèles attractifs présentant un comportement sous-diffusif.
- Observons que cette approche ne permet pas d'obtenir le comportement marginal en dimension 2.
- Enfin, on peut noter que l'on a considéré essentiellement des réseaux euclidiens. On pourrait penser que ces relations d'échelles puissent s'étendre naturellement à des géométries fractales. Cependant de nombreux travaux tendent à conclure que le comportement de telles marches reste non trivial dans des géométries non euclidiennes. Il semble nécessaire de développer des arguments plus complexes afin de déterminer  $d_w$  qui semble dépendre des caractéristiques spécifiques du réseau fractal sous-jacent [Lee, 1992 ; Lee et al., 1995]. En conséquence, dans cette thèse, on considérera uniquement des réseaux euclidiens de dimension  $d$ .

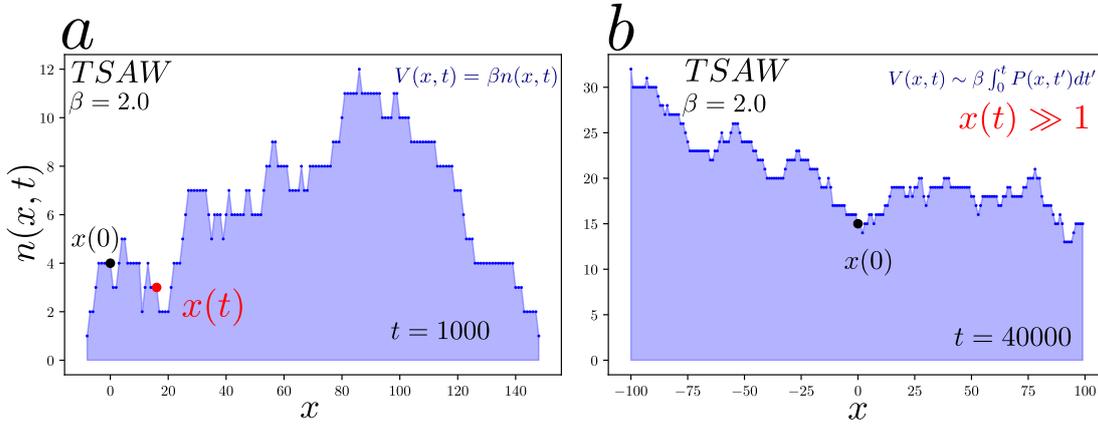


FIG. I.3 Réalisations du temps local de la marche TSAW à différentes échelles de temps. **a** un marcheur TSAW génère un potentiel donné par le nombre de visites de chacun des sites du réseau, ici après 1000 pas. **b** Dans la limite des temps longs, une approximation de champ moyen dans la limite continue permet d'exprimer le potentiel local selon  $\int_0^t P(x,t)dt$ . La position initiale est notée en noir, et la position du marcheur à  $t$  est marquée en rouge.

## I.4 Vers les propriétés de premier passage des marches à renforcement

### I.4.1 Résultats connus pour les marches à renforcement

Dans les parties précédentes, on a introduit une définition générale des marches à renforcement local sur réseau dont on a tiré des modèles standards, modèles dont on a rappelé les propriétés de transport asymptotiques connues. Dans cette thèse, on cherchera à déterminer les propriétés d'exploration de ces différentes marches en espace infini, mais aussi dans un volume confinant.

On se concentrera principalement sur le temps de premier passage (FPT), mais des observables associées, comme le temps de couverture (défini comme le temps mis par le marcheur pour visiter l'ensemble des sites d'un volume confinant), seront abordés dans le chapitre 6.

Au préalable, notons que plusieurs travaux numériques relatifs aux propriétés d'exploration des marches à renforcement ont été menés, principalement autour de la marche TSAW [Arruda et al., 2017; Avin et al., 2008; Campos et al., 2021; Guzzi Bagnato et al., 2018; Herrero, 2019; Kim et al., 2016; Meyer et al., 2021; Yang, 2005]. La majorité se concentre sur les propriétés de couverture de cette marche, et en particulier sur des réseaux non euclidiens, dans la mesure où elle présente des propriétés de couverture atypiques en comparaison de la marche de pólya. Un des résultats les plus notables a été obtenu par Avin et al. [2008], où le comportement asymptotique du temps moyen de couverture de la marche TSAW a été conjecturé en dimension 2. Celui-ci a été estimé proportionnel à  $T_{cover} \sim R^2 \ln(R)$ , où  $R$  est la taille du volume confinant<sup>\*11</sup>.

Remarquons que ces principaux résultats ne reposent que relativement peu sur des arguments analytiques afin de justifier les modes d'exploration anormaux réalisés par ces marches. Ce dernier point sera l'une des principales motivations de cette thèse, et l'on cherchera, dès que possible, à définir des critères généraux pour ces modèles à renforcement. Ensuite, on peut noter que peu de résultats concernent spécifiquement le FPT [Kim et al., 2016], cette observation étant loin d'être anecdotique dans la mesure où elle révèle les difficultés intrinsèques au FPT qui nécessite souvent une compréhension fine des marches étudiées. Par la suite, on rappellera les méthodes classiques généralement employées pour déterminer la statistique du FPT. D'autre part, on commentera la validité de leur emploi dans le cadre des marches à renforcement.

## I.4.2 Méthodes usuelles pour déterminer le temps de premier passage

Les problèmes de temps de premier passage font partie intégrante de l'étude des marches aléatoires, et restent omniprésents dans de nombreux domaines, que ce soit au travers des modèles de réactions chimiques ou d'exploration [Boyer et al., 2010; Falcón-Cortés et al., 2017; Sakiyama et al., 2018; Sims et al., 2014]. Le développement d'outils spécifiques à l'analyse du FPT revêt donc un intérêt tout particulier [Bray et al., 2013; Bénichou et al., 2014; Redner, 2001]. Un nombre considérable de travaux ont été menés dans le cadre de processus markoviens où des méthodes génériques ont permis d'obtenir des résultats exacts en espace infini et en confinement. Toutefois, pour des processus non markoviens l'obtention du FPT devient considérablement plus difficile, même si on peut relever certaines exceptions notables obtenues ces dernières années [Bénichou et al., 2015; Guérin et al., 2016; Levernier et al., 2019]. Afin de mieux saisir les répercussions des effets non markoviens sur les propriétés de premier passage, on considère en premier lieu un marcheur markovien, pour lequel on note  $P(x, t|x_0, t_0)$  la probabilité d'observer le marcheur en  $x$  à  $t$ , sachant que celui-ci est initialement en  $x_0$  à l'instant  $t_0$ . On rappelle que l'évolution markovienne du marcheur se traduit mathématiquement par

---

<sup>\*11</sup> Conjecture contrastant avec le comportement usuel des marches aléatoires simples pour lesquelles il a été prouvé que  $T_{cover} \sim (R \ln(R))^2$ . Récemment, cette étude a aussi été complétée par l'analyse du temps de couverture de la marche TSAW en dimension 1 [Campos et al., 2021].

$$P(x, t|x_0, t_0, x_1, t_1, \dots, x_N, t_N) = P(x, t|x_N, t_N) \quad \forall N \geq 1, t_0 < t_1 < \dots < t_N < t,$$

où  $P(x, t|A)$  désigne la probabilité de trouver le marcheur en  $x$  à  $t$  conditionnellement à l'évènement  $A$ . Autrement dit, les propagateurs markoviens sont entièrement caractérisés par le propagateur  $P(x, t|x_0, t_0)$  qui contient toute l'information du processus. En particulier, la probabilité de trouver une cible placée à un point  $r$  d'un marcheur initialement en 0 pour la première fois en  $t$ , notée  $F(t)$ , peut être obtenue à partir de l'équation dite de renewal

$$P(x = r, t|x_0 = 0, 0) = \sum_{t'=0}^t F(t')P(x = r, t - t'|x_0 = r, 0), \quad (\text{I.6})$$

où on a partitionné  $P(x = r, t|x_0 = 0, 0)$  suivant l'instant de premier passage  $t'$  en  $r$ . Remarquons que l'on s'est déjà appuyé sur les propriétés markoviennes du processus, puisque la probabilité de retourner en  $r$  à  $t$ , après l'instant de premier passage est exactement égale à  $P(x = r, t - t'|x_0 = r, 0)$ . Notons que la densité  $F(t)$  est alors entièrement déterminée par le propagateur  $P$ .

Il est alors possible d'exprimer analytiquement  $F$ , y compris en présence d'un volume confinant quelconque (tâche technique et en général très difficile si le propagateur n'est pas connu analytiquement [Condamine et al., 2005, 2007c; Noh et al., 2004]). Relevons que pour les marcheurs markoviens, l'état dans lequel est le marcheur, lorsqu'il atteint la cible pour la première fois, n'influe pas sur la trajectoire future. Grossièrement, l'évènement de premier passage n'a aucun effet sur le comportement futur du marcheur qui se comporte exactement comme s'il était introduit initialement en  $r$  à  $t'$  (figure I.4). Ce constat change radicalement lorsque l'on considère un processus non-markovien quelconque puisque (I.6) devient

$$P(x = r, t|x_0 = 0, 0) = \sum_{t'=0}^t F(t')P(x = r, t|FPT = t', x_0 = 0, 0).$$

La question centrale devient alors de déterminer l'importance du conditionnement  $FPT = t'$  sur le comportement de  $P(x = r, t|FPT = t', x_0 = 0, 0)$ . Une première approximation consiste à négliger les effets de ce conditionnement. Cependant, on retombe alors dans une approche que l'on qualifiera de "pseudo-markovienne" puisque le marcheur a comme "oublié" l'instant de premier passage. Par ailleurs, les marcheurs non-markoviens sont généralement dans des états hors d'équilibre lorsque ceux-ci trouvent la cible pour la première fois. Cette observation se manifeste donc par un comportement anormal dans le futur du temps de premier passage (figure I.4).

Récemment, dans le prolongement de cette idée, des travaux poussés ont permis de quantifier le comportement de  $P(x = r, t|FPT = t', x_0 = 0, 0)$  pour des processus gaussiens non nécessairement markoviens [Guérin et al., 2014, 2016; Levernier et al., 2020] en espace confiné. Une approche similaire sera développée dans le chapitre 5, en vue de caractériser le comportement du FPT pour des processus gaussiens en présence d'un piège harmonique. Toutefois, cette approche reste difficilement adaptable lorsque l'on considère les modèles à renforcement qui ne présentent pas des caractéristiques propres aux processus gaussiens.

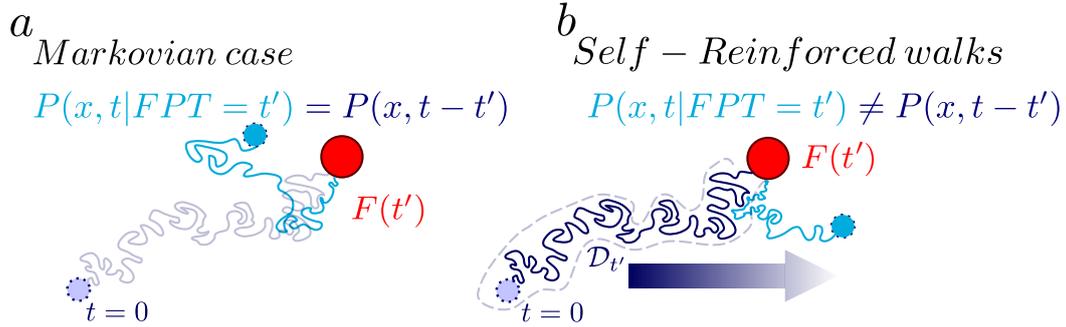


FIG. I.4 Évènement de premier passage en milieu infini. La première situation **A** considère un marcheur markovien en bleu. Celui-ci, après avoir touché pour la première fois la cible (en rouge) à  $t'$ , présente un comportement identique (en bleu clair) à celui d'un marcheur initialement sur la cible évalué à un temps  $t - t'$ . La trajectoire passée n'a pas d'influence sur le comportement du marcheur. Inversement pour une marche à renforcement, ici répulsive **B**, la trajectoire passée a une influence sur le comportement dans le futur du FPT. Cela se traduit par une trajectoire biaisée vers la droite dans cet exemple.

Ensuite, on peut évoquer une méthode largement répandue qui consiste à résoudre une équation de Fokker-Planck avec un point absorbant là où est introduite la cible. Après avoir déterminé  $P(x, t)$  en présence d'une cible absorbante, la distribution du FPT est alors directement extraite de la dérivée de  $\frac{\partial}{\partial t} \int P(x, t) dx$ , où l'intégrale porte sur l'ensemble du volume (qui peut être infini). Cette méthode qui repose, pour de nombreux processus, sur une approximation, a permis de prédire le comportement asymptotique du FPT de certains processus non-markoviens [Fa et al., 2005; Malakar et al., 2018]. Cependant, son cadre d'application reste restreint, le chapitre 5 soulignera qu'elle ne permet pas de prédire le comportement de processus gaussiens quelconques en présence d'un potentiel harmonique. En outre, il semble clair que cette approche ne peut pas être utilisée pour des modèles à renforcement, puisqu'elle s'est révélée déficiente pour déterminer la distribution  $P(x, t)$  de marches à renforcement y compris sans cible absorbante.

Dès lors, afin de déterminer les propriétés de premier passage de marches à renforcement, on devra s'appuyer sur des outils plus spécifiques.

### I.4.3 Comportement du FPT pour les marches à renforcement

Pour un marcheur quelconque, les propriétés non markoviennes sont souvent associées à des variables dites cachées qui décrivent les multiples états possibles dans lesquels peuvent se trouver le marcheur et son environnement à une position et un temps donnés  $(x, t)$ . On peut, par exemple, penser à la vitesse du marcheur, son accélération, les positions relatives des monomères qui lui sont attachés dans un modèle de polymère ou à une certaine réalisation de l'environnement [Allemand et al., 2006; Cao et al., 2015; Dinh et al., 2005; Doostmohammadi et al., 2016; Kou et al., 2004; Turiv et al., 2013; Wallace et al., 2001]. Généralement, en conditionnant sur une réalisation spécifique de l'ensemble des variables cachées du modèle, on retrouve alors une évolution markovienne du processus [Bicout et al., 2000; Malakar et al., 2018].

Cependant, dans le cas des marches à renforcement, il est clair que ces variables cachées sont constituées de l'intégralité de la trajectoire du marcheur, puisque celui-ci n'oublie aucun des sites visités<sup>\*12</sup>. Il est évident qu'il est impossible de considérer individuellement chaque trajectoire afin de déterminer leur évolution et la statistique du FPT. En revanche, cela fait ressortir le rôle crucial que joue le temps écoulé dans la description des effets de renforcement, et en particulier lorsque le marcheur trouve la cible. En conséquence, on s'interroge nécessairement sur l'éventualité de capturer la complexité intrinsèque du territoire visité (noté  $\mathcal{D}_t$ ) dans un nombre fini de variables dont le comportement d'échelle serait déterminé par  $t$ .

Ainsi, on cherchera à construire des observables, associées à  $\mathcal{D}_t$  qui sont en mesure de décrire l'impact des effets de renforcement sur l'évolution future du marcheur. Reformulées autrement, on cherche à définir un nombre fini de variables cachées qui seraient suffisantes afin de prédire le comportement typique observé par le marcheur lorsque celui-ci touche la cible pour la première fois.

On peut par exemple penser à la taille typique du territoire visité, sa rugosité, la structure de son périmètre extérieur ou plus simplement son volume. Puisque les marches à renforcement dépendent spécifiquement du nombre de visites de chaque site, on peut aussi considérer la moyenne du temps total passé sur les sites visités ou bien la variance de celui-ci. Ces différentes observables seront examinées tour à tour tout au long de cette thèse. On s'intéressera notamment à l'importance qu'elles revêtent dans les problèmes de premier passage. On peut d'ores et déjà souligner que ces variables sont intimement liées à une notion clé de notre étude des modèles à renforcement, les propriétés de *vieillessement*.

Pour cela, laissons un marcheur évoluer un temps  $T$ . Si le marcheur vieillit, alors sa dynamique entre  $T$  et  $t+T$  dépendra explicitement de  $T$  (figure I.5). En pratique, de nombreux processus réels présentent effectivement des propriétés de vieillissement [Rieger, 1996]. On peut notamment citer la physique des verres, dont l'une des principales caractéristiques est le ralentissement de la dynamique du système au cours du temps [Berthier et al., 2011]. D'autre part, les systèmes biologiques présentent généralement des propriétés de vieillissement qu'il est important de quantifier à une échelle microscopique [Weigel et al., 2011]. On peut par exemple penser à des mouvements de membranes ou de protéines [Hu et al., 2016; Krug et al., 1997].

Pour les marches à renforcement, l'importance du territoire visité  $\mathcal{D}_t$  va naturellement entraîner l'apparition d'effets de vieillissement. En effet, après avoir évolué un temps  $T$ , le marcheur a façonné un territoire  $\mathcal{D}_T$ , dont les propriétés que l'on a citées précédemment ont une influence directe sur l'évolution du marcheur entre  $T$  et  $t+T$ , et plus particulièrement quand  $t \ll T$ .

Pourtant, la grande majorité des travaux sur les marches à renforcement n'abordent pas les possibles effets de vieillissement que présentent ces différents modèles [Grassberger, 2017b].

---

<sup>\*12</sup> Notons que les mouvements brownien fractionnaires [Molchan, 1999] sont un autre exemple de modèle dont les effets de mémoire sont infinis

Dans le cadre des propriétés de premier passage, l'une des différences principales entre un état initial quelconque et l'instant de premier passage est que pour celui-ci, le processus a déjà évolué et donc vieilli. Par ailleurs, il est généralement reconnu que le temps de premier passage est intimement lié aux questions de vieillissement et qu'une compréhension fine de celles-ci est souvent nécessaire afin de déterminer la statistique du FPT. Dans le cas des marches à renforcement, c'est sur ce point que l'on insistera particulièrement.

L'objectif de cette thèse est donc triple : caractériser les effets de vieillissement intrinsèques aux marches à renforcement ; construire ensuite des observables caractéristiques du territoire  $D_T$  ; en déduire finalement des propriétés d'exploration propres aux modèles à renforcement (figure I.5).

#### I.4.4 Effet du confinement

Ici, on se penchera plus précisément sur l'effet du confinement sur la statistique du FPT de manière générique. Pour cela, on reprend (I.6) pour des marches de pólya discrètes en dimension  $d$  ( $r > 0$ ) dont on prend la transformée de Laplace

$$\tilde{P}(r, s) = \tilde{F}(s)\tilde{P}(r, s|r), \quad (\text{I.7})$$

où  $\tilde{g}(s) = \sum_0^t e^{-st}g(t)$  désigne la transformée de Laplace discrète de la fonction  $g$ . Pour des marches de pólya en espace infini, la distribution est asymptotiquement donnée par  $P(x, t) \sim t^{-d/2}e^{-x^2/4Dt}$  ce qui permet d'étudier le comportement de (I.7) à faibles valeurs de  $s$ .

Pour  $d > 2$ , il est clair que  $\tilde{P}(r, 0) < \tilde{P}(r, 0|r) < \infty$ . Autrement dit  $\sum_0^\infty F(t)dt < 1$ , le marcheur a une probabilité non nulle de ne jamais trouver la cible en milieu infini. Ce mode d'exploration est communément appelé non compact ou transient. Pour ce type de trajectoires les sites du réseau seront visités un nombre fini de fois. Plus précisément, en espace continu, une cible de taille nulle  $a = 0$  n'est jamais trouvée. Ce résultat peut être étendu aux processus invariants d'échelle pour lesquels  $d_w < d_f$ . Inversement, en présence d'un confinement, les propagateurs tendent vers une valeur stationnaire que l'on notera  $P_s(r)$ . Il est évident que  $\sum_0^\infty F(t)dt = 1$ , puisque une cible de taille finie est alors trouvée avec une probabilité 1.

Ainsi, l'introduction d'un confinement a une influence considérable sur les propriétés asymptotiques du FPT. On peut notamment introduire le temps moyen de premier passage (MFPT)  $\langle T \rangle = \int_0^\infty tF(t)dt$  qui est généralement infini en l'absence de confinement. Inversement pour des processus définis sur réseau, le MFPT est le plus souvent fini, y compris pour des cibles définies par un unique site du réseau. Reprenons l'exemple d'une marche symétrique simple unidimensionnelle où une cible est introduite à une distance  $r$  de la position initiale du marcheur. On revient à (I.6) où l'on soustrait la distribution stationnaire en  $r > 0$  en s'appuyant sur la normalisation de  $F(t)$  pour des marches markoviennes

$$P(r, t|0, 0) - P_s(r) = -P_s(r) \sum_{t'=t+1}^\infty F(t') + \sum_{t'=0}^t F(t')[P(r, t-t'|r, 0) - P_s(r)].$$

Reformulé autrement, on a soustrait à chaque propagateur sa limite asymptotique. On somme sur  $t$ , le second terme de droite est alors donné par

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{t'=0}^t F(t') [P(r, t-t'|r, 0) - P_s(r)] &= \sum_{t'=0}^{\infty} \sum_{t=t'}^{\infty} F(t') [P(r, t-t'|r, 0) - P_s(r)] \\ &= \sum_{t'=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} F(t') [P(r, t|r, 0) - P_s(r)] \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} [P(r, t|r, 0) - P_s(r)]. \end{aligned}$$

On regroupe alors le terme de gauche avec le deuxième terme de droite, lesquels se simplifient directement, et on obtient ainsi

$$P_s(r) \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{t'=t+1}^{\infty} F(t') = \sum_{t=0}^{\infty} P(r, t|r, 0) - P(r, t|0, 0).$$

Cette expression est exacte, et peut s'étendre en dimension supérieure à 1. On obtient finalement, après un changement de variable, une expression pour le MFPT en confinement dans la limite des grands volumes ( $R, r \gg 1$ ).

$$P_s(r) \langle T \rangle \underset{R, r \gg 1}{\sim} \int_{t=0}^{\infty} P(r, t|r, 0) - P(r, t|0, 0) dt.$$

On remarque que  $\langle T \rangle$  dépend explicitement des paramètres géométriques du problème,  $R$  et  $r$ . On peut envisager de résoudre ces équations pour des volumes quelconques. La difficulté restante étant de calculer les deux propagateurs en espace confiné.

De nombreux travaux ont obtenu des résultats exacts pour certains types de marches et de confinements (sphères, hypercubes, réseaux invariants d'échelle, conditions périodiques ou réfléchives [Agliari et al., 2009 ; Bénichou et al., 2014 ; Zhang et al., 2010]) mais cela devient particulièrement ardu lorsque l'on considère des processus non markoviens. Dans cette thèse, on se placera donc presque systématiquement dans la limite des grands volumes, c'est à dire que la taille typique du volume  $R$  est bien plus grande que toutes les autres échelles caractéristiques du problème. En pratique, cette limite reste pertinente, y compris pour des volumes relativement petits [Condamine et al., 2007a].

L'avantage de cette limite est double. D'une part on s'attend à ce que des comportements asymptotiques plus simples émergent. Ceux-ci peuvent être déduits des propriétés du marcheur en l'absence de confinement<sup>\*13</sup>. D'autre part, en se plaçant à des échelles bien supérieures à la taille du réseau, on pourra s'appuyer sur des outils typiques propres aux processus invariants d'échelle. Rappelons que les processus invariants d'échelle sont exempts de toutes échelles typiques, et sont uniquement caractérisés par le rapport  $x/t^{1/d_w}$  où  $d_w$  est défini via le MSD.

---

<sup>\*13</sup> Par ailleurs, on supposera que ces résultats restent valides indépendamment des conditions aux bords du confinement dans la limite des grands volumes.

Récemment, une approche développée dans [Levernier et al., 2018] a permis de caractériser la statistique du FPT en confinement dans la limite des grands volumes pour des processus strictement invariants d'échelle non markoviens et potentiellement vieillissants. On peut relever que ce résultat implique des propriétés d'exploration et de vieillissement observées *en milieu infini* afin de déterminer le FPT *en confinement*. La validité de cette approche étant assurée dans la limite des grands volumes. En conséquence, on cherchera dans cette thèse à développer des outils similaires, et de les adapter aux marches à renforcement (figure I.5).

Dressons quelques remarques spécifiques aux modèles à renforcement :

- Tout d'abord, relevons que la limite des grands volumes est obtenue pour  $R \gg 1$ , et qu'elle ne concerne pas systématiquement les deux autres paramètres géométriques associés au FPT que sont,  $r$ , la distance initiale à la cible, et la taille de celle-ci,  $a$ . Ainsi, tout au long de cette thèse, on considérera parfois des comportements limites, tels que tous les paramètres géométriques soient grands devant la taille du réseau  $a_0$  (respectivement  $R \gg r \gg a \gg a_0$ ), mais aussi des cas où la cible a une taille typique de l'ordre de celle du réseau ( $a = O(a_0)$ ). On constatera que ces deux limites peuvent présenter des propriétés distinctes.
- Ensuite, les effets générés par l'introduction du confinement peuvent être particulièrement complexes lorsque l'on considère spécifiquement les marches à renforcement. En effet, pour des modèles non-markoviens quelconques, les variables cachées sont généralement peu sensibles au confinement. Inversement pour les marches à renforcement, l'introduction du confinement *force* le marcheur à revisiter un territoire ayant été exploré auparavant. On peut donc s'attendre à l'émergence de comportements spécifiques associés au confinement.

Pour finir, justifions l'intérêt de l'analyse des marches à renforcement en milieu confiné au-delà de la dimension critique  $d_c = 2$ . Pour  $d > d_c$ , les marches à renforcement localement répulsives présentent une limite continue commune où les effets de renforcement sont négligeables. On pourrait appliquer directement les résultats connus pour les processus invariants d'échelle sans vieillissement afin de déterminer le comportement du FPT hors et en confinement. Cette observation reste pertinente en espace infini et dans la limite  $r \gg a \gg a_0$ , où la limite continue reste une approximation valable. Toutefois, ce cadre n'est plus admissible lorsque l'on considère une cible de la taille typique du réseau en confinement.

Plus précisément, dans la limite continue, le volume formé par la trajectoire d'un mouvement brownien est nul, mais possède une limite finie lorsque l'on considère qu'il est formé par l'ensemble des points situés à une distance maximale  $\epsilon > 0$  de la trajectoire [Berezukovskii et al., 1989]. Cette subtile différence joue un rôle important en confinement pour des marches discrètes. Celles-ci ont généralement une probabilité 1 de trouver un site spécifique à l'intérieur du confinement, y compris pour des processus effectuant des explorations non compactes, tandis que leurs équivalents continus ont une probabilité nulle de trouver une cible de taille  $a = 0$ . Cette dernière observation est primordiale dans le contexte des marches à renforcement puisque, pour des cibles de la taille du réseau  $a = O(a_0)$ , le marcheur va nécessairement visiter une partie non négligeable du volume avant de trouver la cible. Les effets de renforcement ne sont alors plus négligeables, y compris en dimension  $d > d_c$ .

Enfin, le comportement asymptotique des marches à renforcement en confinement reste un sujet d'étude fertile et peu connu.

Ainsi, on a esquissé l'importance du confinement sur les propriétés d'exploration, et tout particulièrement pour les marches à renforcement. Par ailleurs, on a souligné l'importance de la limite des grands volumes dont découle un ensemble de propriétés clés à notre étude. Cependant, il faudra au préalable caractériser les propriétés de vieillissement des différentes marches.

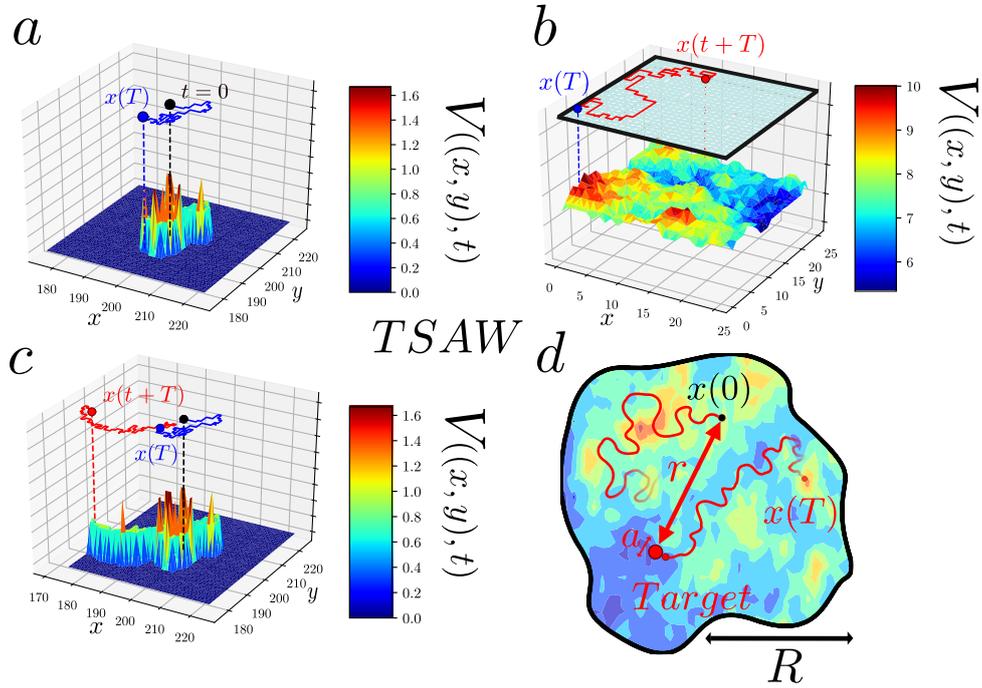


FIG. I.5 *Effet du vieillissement en espace infini a,c ou en confinement b et impact sur les propriétés de premier passage. Une trajectoire est représentée figures a et c en espace infini, où le marcheur initialement en 0 (point noir) présente des comportements distincts entre  $T$  et  $T + t$  (figure c en rouge) que celui observé entre 0 et  $t$  (figure a en bleu). Cette différence est due au territoire précédemment visité entre 0 et  $T$  qui génère un potentiel  $V((x,y),T)$  (surface a-c). Des effets de vieillissement potentiellement distincts peuvent émerger en confinement (ici de taille  $R$ , en noir figures c et d) où le marcheur, après avoir visité un grand nombre de sites (figure b), évolue dans un paysage particulièrement complexe. Par conséquent, au cours de cette thèse, on cherchera à caractériser les propriétés de premier passage de ces marches sur une cible en rouge, à une distance initiale  $r$  et de taille  $a$ , en caractérisant au préalable les comportements typiques du territoire visité  $\mathcal{D}_t$  et du potentiel  $V((x,y),t)$ , et les effets de vieillissement associés. Cette approche est dépeinte figure d.*

## I.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre introductif, on a présenté le cadre général des effets de renforcement qui seront abordés dans cette thèse. On se concentrera principalement sur des marches stochastiques dont les probabilités de transition sont proportionnelles à une énergie dépendant du nombre de visites que le marcheur a effectuées sur les différents sites du réseau. En outre, on a relevé l'existence d'une définition alternative sur les liens du réseau qui a son importance lorsque l'on considère des effets attractifs.

Puis, on a retrouvé les propriétés de transport asymptotiques connues pour les marches à renforcement répulsives au moyen d'une équation de Fokker-Planck en champ moyen. Toutefois, cette approche reste limitée, et il est évident qu'elle ne peut pas permettre de déterminer les propriétés de premier passage des marches à renforcement. Les méthodes usuelles de la détermination du FPT semblent donc peu adaptées, mais elles font ressortir des aspects importants de notre analyse future :

- Une compréhension fine du territoire visité  $\mathcal{D}_t$  et de ses propriétés apparaît comme nécessaire afin de comprendre le comportement du marcheur, et en particulier proche de la cible.
- Ensuite, les effets de vieillissement généralement peu considérés dans la littérature, ont une influence certaine sur la statistique du FPT. Une étude approfondie du comportement des incréments des différentes marches révélera les multiples connexions entre les effets de vieillissement et les propriétés de premier passage.
- Enfin, l'introduction du confinement a un impact tangible sur les propriétés de premier passage des marches usuelles, et semble avoir des incidences plus profondes dans le cas spécifique des marches à renforcement.
- Afin d'étudier ces marches, on se placera le plus souvent dans la limite des grands volumes où des approches propres aux modèles invariants seront adaptées en tenant compte du vieillissement.

On souhaite aussi que ce travail puisse apporter un formalisme commun aux modèles locaux à renforcement. On cherchera, dans la mesure du possible, à généraliser nos résultats de manière à construire un cadre commun soulignant les propriétés partagées entre ces marches à renforcement et les autres marcheurs non-markoviens. Par la même, ce cadre a pour objectif de mettre en valeur les multiples connexions entre

- Le vieillissement,
- L'effet du confinement,
- Le comportement d'échelle et la forme de la distribution de premier passage.

## I.6 Extensions : notations communes

Avant de conclure ce chapitre, introduisons quelques notations qui seront communes à l'ensemble des chapitres de cette thèse.

Tout d'abord, rappelons les paramètres géométriques introduits auparavant : la taille du volume confinant sera le plus souvent notée  $R$ , celle de la cible  $a$  et celle du réseau  $a_0$ . La distance initiale entre le marcheur et la cible sera notée  $r$  ou parfois  $x_0$ . Ensuite, le temps sera majoritairement noté  $t$ , y compris lorsque  $t$  est donné par un nombre de sauts discrets. On ne fera donc pas de distinction explicite entre la variable continue  $t$  et son équivalent discret.

Afin de caractériser les effets de vieillissement, on considérera principalement le comportement des incréments entre  $T$  et  $t + T$  donnés par

$$\langle [X(t + T) - X(T)]^2 \rangle,$$

où la variable  $T$  sera appelée temps initial. Dans la suite, on qualifiera de *limite des temps courts* lorsque  $t \ll T$ , et inversement de *limite des temps longs* lorsque  $t \gg T$ . En outre, on considérera deux types de vieillissement que l'on observera par la suite : les processus à vieillissement *transient* qui convergent vers un processus à incréments stationnaires, autrement dit pour lesquels les incréments sont indépendants de  $T$  dans la limite  $T, t \gg 1$ ; inversement, les processus à fort vieillissement qui dépendent du temps  $T$  et plus particulièrement dans la limite  $T \gg t$ .

Ensuite, intéressons-nous aux propriétés d'exploration. Tout d'abord, considérons les explorations non compactes pour lesquelles nous avons vu qu'elles étaient caractérisées par une probabilité non-nulle de ne jamais trouver la cible. Plus précisément, en notant  $P(a, r)$  la probabilité de trouver la cible, on observe le plus souvent une décroissance en loi de puissance  $P(a, r) \underset{a/r \rightarrow 0}{\sim} C(a/r)^\psi$  caractérisée par un exposant  $\psi$  appelé exposant de *transience*  $\psi$  [Levernier et al., 2018].

Les explorations compactes vérifient au contraire  $P(a, r) = 1$  pour tout  $a$ , y compris pour  $a = 0$  dans la limite continue. Pour ces processus, la probabilité de survie  $S(t)$ , définie comme la probabilité que la cible ne soit pas atteinte entre 0 et  $t$ , décroît le plus souvent en loi de puissance  $S(t) \sim S_0 t^{-\theta}$  définissant l'exposant de *persistance*  $\theta$ . Le calcul de cet exposant a donné lieu à de très nombreux travaux dont les principaux résultats sont reportés dans [Bray et al., 2013]. Observons qu'il est communément admis que  $\theta$  est particulièrement sensible aux effets de vieillissement. Dans la suite, on cherchera le plus souvent possible à déterminer les valeurs de  $\psi$  et  $\theta$ , confortées par des analyses numériques, mais aussi par des résultats analytiques lorsqu'il a été possible d'en obtenir.

# II – Propriétés de premier passage de processus diffusifs vieillissants

## II.1 Introduction

*Les résultats relatifs à ce chapitre peuvent être retrouvés dans [Barbier–Chebbah et al., 2020].*

Introduisons une cible à une distance  $r$  de la position initiale du marcheur. Notons  $S(t)$  la probabilité de survie que le marcheur n'a pas encore atteint la cible au temps  $t$ . Dans de nombreux exemples de processus stochastiques symétriques, la décroissance de  $S(t)$  aux temps longs est une loi de puissance caractérisée par  $\theta$ , communément appelé exposant de persistance. C'est la valeur de cet exposant qui nous intéressera plus particulièrement dans ce chapitre. En raison de son importance pour caractériser la dynamique de nombreux systèmes, la détermination de  $\theta$  fait l'objet d'une grande quantité de travaux dans des domaines variés tels que l'étude des processus stochastiques mais aussi la mécanique statistique hors équilibre [Bray et al., 2013; Metzler et al., 2014; Redner, 2001]. Des résultats universels ont été obtenus en particulier pour des processus sans mémoire c'est-à-dire, pour des processus markoviens [Majumdar, 1999; Redner, 2001]. Cependant, dans le cas de processus potentiellement vieillissants, il n'existe pas de méthodes génériques afin de déterminer  $\theta$ , et très peu d'exemples de résolution exacte ont été menés pour des processus non-markoviens [Derrida et al., 1995, 1996; Krug et al., 1997; Majumdar et al., 1996; Majumdar et al., 1998; Molchan, 1999; Wiese et al., 2011]. Plus généralement, il est reconnu que la valeur de  $\theta$  peut dépendre de la dynamique complète de la trajectoire, et ce à toutes les échelles de temps.

Un nombre extensif d'exemples traite de propriétés de premier passage non triviales, propriétés importantes pour les processus d'exploration, parmi lesquels on peut relever les temps de réaction diffusion, et les problématiques de diffusion dans des milieux désordonnés [Bouchaud et al., 1990; Condamine et al., 2007b; Krüsemann et al., 2014]. Toutefois remarquons que ces différents exemples impliquent toujours des processus dont les propriétés de transport sont considérées comme anormales, dans le sens où ils ne sont pas diffusifs. Nous verrons dans ce chapitre qu'il est possible d'obtenir des marcheurs diffusifs qui présentent un comportement non trivial de la probabilité de survie. Sur la base de cette analyse, on proposera le critère général suivant : l'exposant de persistance des processus asymptotiquement diffusifs est anormal si les incréments de ceux-ci présentent des effets de vieillissement à toutes les échelles de temps.

Pour cela, nous couvrirons des exemples de marches à renforcement pour lesquels il est possible de décrire simultanément les propriétés de transport et les propriétés asymptotiques de premier passage. On se concentrera principalement sur des exemples en dimension 1, mais on discutera de l'extension de ces résultats en dimension 2. Nous verrons que ces marches présentent un exposant de persistance anormal ( $\theta \neq 1/2$ ) tout en réalisant un comportement diffusif. En particulier, il est possible de faire varier fortement l'exposant de persistance en contrôlant simplement les paramètres microscopiques de ces marches, et ce, sans changer le comportement d'échelle du déplacement quadratique moyen. Afin de mieux cerner les causes de l'émergence de ce comportement anormal, on constatera que l'ensemble de ces marches présentent des effets de vieillissement permanents, caractérisés par un comportement des incréments ( $\langle [X(t+T) - X(T)]^2 \rangle$ ) diffusifs à toutes les échelles de temps. On en déduira que ces effets de vieillissement sont fortement corrélés, voir simultanés à l'apparition de propriétés d'exploration anormales. Inversement, on proposera qu'un processus à incréments stationnaires possède un exposant de persistance  $\theta = 1/2$ .

## II.2 Exposant de persistance de processus diffusifs en l'absence de vieillissement

Avant d'établir des résultats généraux sur les propriétés de premier passage de processus à fort vieillissement, il est important de passer en revue les différents exemples examinés dans la littérature afin de mieux saisir l'importance du vieillissement sur les propriétés de premier passage.

### II.2.1 Exemple explicite de la marche de Pólya

Concentrons-nous tout d'abord, sur le modèle caractérisant au mieux l'absence d'effet de mémoire : la simple marche aléatoire de Pólya pour laquelle les différents sauts sont indépendants et s'effectuent sur les sites plus proches voisins avec un poids uniforme. Il est clair que ce processus est markovien et que ses incréments en dimension 1 sont donnés par :  $\langle [X(t+T) - X(T)]^2 \rangle = 2Dt$  avec  $D = 1/2$ . On remarque que le processus est bien diffusif et que les incréments sont donc indépendants de  $T$ . Plus généralement, toutes les quantités dynamiques associées à la marche de Pólya ne vieillissent pas, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas du temps  $T$ . Considérons ensuite les propriétés de premier passage de ce processus. Dans le cas de la simple marche aléatoire, l'équation dite de *renewal* permet de relier la distribution de premier passage  $F(t', r | x_0 = 0)$  à la distribution du processus en l'absence de cible

$$P(x = r, t | x_0 = 0) = \sum_{t'=0}^t F(t', r | x_0 = 0) P(x = r, t - t' | x_0 = r), \quad (\text{II.1})$$

où  $P(x, t | x_0 = 0)$  désigne la probabilité de trouver le marcheur à l'instant  $t$  en  $x$  conditionnée par la position initiale  $x_0$ . Cette équation est obtenue en partitionnant les trajectoires à l'instant où la cible est atteinte pour la première fois. Rappelons que les propriétés markoviennes du processus sont à l'origine de la simplification du terme de droite qui est alors

égale à la distribution centrée en  $r$  à l'instant  $t - t'$ .

Il est alors possible de prédire le comportement asymptotique de  $F(t)$  à partir de (II.1), une démonstration peut être trouvée dans [Redner, 2001] conduisant alors à  $\theta = 1/2$ . Ce premier exemple sert de point de comparaison avec les autres modèles considérés comme présentant des propriétés de transport anormales, autrement dit lorsque ceux-ci ne sont pas diffusifs. Pareillement, on qualifiera une exploration comme anormale lorsque l'exposant de persistance sera différent de  $1/2$  en dimension 1.

En dernier lieu, on peut émettre une première observation : la marche de pólya est diffusive, ne vieillit pas et on observe un exposant de persistance égale à  $1/2$ . Nous verrons par la suite que ces deux dernières propriétés sont intimement reliées.

## II.2.2 Théorème de Sparre Andersen

Relaxons tout d'abord la contrainte de sauts en espace discret, et examinons le cas des processus de sauts en temps discret et en espace continu tels que

$$x(t) = x(t - 1) + \eta_t, \quad (\text{II.2})$$

où les variables  $\eta_i$  sont indépendantes, symétriques et identiquement distribuées. Par définition de l'indépendance des sauts  $\eta$ , ces processus sont markoviens. De manière similaire à l'exemple précédent les incréments sont stationnaires (indépendants de  $T$ ). En se concentrant aux distributions dont la variance est finie, on retrouve un comportement diffusif des incréments  $\langle [X(t + T) - X(T)]^2 \rangle = \text{Var}(\eta)t^{*1}$ . Pour l'ensemble de ces processus, les travaux menés par Sparre Andersen [Andersen, 1954], dont on peut trouver une version résumée dans [Bray et al., 2013], établissent la valeur de l'exposant de persistance comme égale à  $1/2$ . On retrouve donc un constat identique à l'exemple précédent : un comportement diffusif sans vieillissement et une valeur partagée de l'exposant de persistance  $\theta = 1/2^{*2}$  [Mori et al., 2020].

### a) Processus non-markoviens diffusifs à incréments stationnaires

On observe que dans le cas de processus symétriques markoviens, l'exposant de persistance de processus diffusifs reste égal à  $1/2$ . On s'intéresse désormais à des processus diffusifs non-markoviens symétriques. Une observation cruciale a été émise dans [Bray et al., 2013] : pour des processus gaussiens à incréments stationnaires, la relation suivante est vérifiée en dimension 1

$$\theta = 1 - 1/d_w.$$

---

\*<sub>1</sub> En appliquant le théorème central limite on obtient par ailleurs que la distribution est alors gaussienne.

\*<sub>2</sub> Pour ce type de processus, on peut définir l'instant de premier passage de deux manières différentes. La première suppose que la cible peut être seulement trouvée lorsque le marcheur est exactement sur celle-ci. La deuxième permet au marcheur de trouver la cible lorsqu'il la croise, c'est-à-dire lorsque le dernier saut permet au marcheur de traverser la cible. Ces deux conventions peuvent amener à des exposants de persistance distincts pour des processus anormaux [Blumenthal et al., 1961 ; Korabel et al., 2011 ; Zaburdaev et al., 2015], mais dans le cas spécifique de marcheurs diffusifs, on retrouve  $\theta = 1/2$  indépendamment de la convention.

Notons que cette relation s'applique à des processus gaussiens pour lesquels  $d_w$  est bien défini, autrement dit dont la fonction de corrélation croît en loi de puissance  $t^{2/d_w}$ .

Les auteurs proposent que cette relation puisse s'étendre à des processus non-gaussiens symétriques dont les incréments sont stationnaires. Plusieurs arguments qui s'appuient sur les propriétés asymptotiques des propagateurs justifient cette proposition, en particulier une version détaillée peut être retrouvée dans [Bray et al., 2013].

Notons que ce résultat peut être retrouvé en partant de l'équation de *renewal* présentée dans le chapitre précédent pour laquelle on suppose que  $P(x, t|x = r, FPT = t')$  présente un comportement asymptotique identique à celui de  $P(x, t - t'|x_0 = r)$ . Cette proposition est encore une fois largement admissible pour des processus à incréments stationnaires. Notons que cette relation a été étendue en dimension quelconque  $d_f$  avec  $\theta = 1 - d_f/d_w$  dans [Levernier et al., 2019]. En conséquence, on retrouve un exposant de persistance  $\theta = 1/2$  pour des processus diffusifs à incréments stationnaires en dimension 1.

### II.2.3 Processus non-markoviens diffusifs à vieillissement transient

On s'intéresse désormais à des processus diffusifs non-markoviens dont les incréments ne sont plus nécessairement stationnaires. Les processus abordés correspondent à des exemples classiques de marches non-markoviennes principalement reconnues pour présenter des propriétés de transport anormales, mais ici on se concentrera sur les cas où celles-ci restent diffusives. On veillera à présenter simultanément les propriétés de vieillissement et de premier passage de ceux-ci.

#### Run and tumble particule :

On propose le modèle suivant en temps et espace continu

$$\frac{dx}{dt} = v\sigma(t) + 2D\eta(t),$$

où la variable  $\sigma(t)$  prend les valeurs  $\pm 1$ , fluctuant selon un taux de poisson  $\gamma$  et un bruit blanc gaussien  $\eta(t)$ . Les trajectoires générées présentent un effet de persistance [Dhar et al., 2019], c'est à dire que le marcheur réalise aux temps courts un mouvement balistique. Pour  $t \gg \gamma^{-1}$ , cet effet s'estompe et la marche retrouve un caractère diffusif. Notons que le processus n'est plus markovien puisque la connaissance de  $\sigma(t)$  est nécessaire afin de déterminer l'évolution du processus. Enfin en prenant  $D = 0$ , on retrouve un simple modèle de marche persistante. Il est clair que ce processus présente des incréments asymptotiquement stationnaires pour  $T \gg \gamma^{-1}$ , et l'exposant de persistance vaut  $1/2$  [Lacroix-A-Chez-Toine et al., 2020; Malakar et al., 2018; Sadjadi et al., 2015; Shaebani et al., 2019; Weiss, 2002].

#### Continuous-time random walk :

Cette classe d'exemples a été largement considérée dans la littérature car elle permet de générer des processus effectuant des comportements anormaux qui sont simples à manipuler. L'approche commune consiste à imposer à une marche aléatoire simple des temps d'attentes entre chaque saut, tirés selon une distribution en loi de puissance aux temps longs

$$p(\tau) \sim C\tau^{-1-\beta}.$$

Les effets de vieillissement ont été largement étudiés [Allegrini et al., 2005; Barkai et al., 2003; Schulz et al., 2013, 2014], en particulier l'influence du choix du temps d'observation  $T$  (choisi quelconque ou au démarrage d'un saut). Dans le premier cas, le processus peut être initialement évalué dans un temps d'attente pouvant être particulièrement long. Cependant pour  $\beta > 1$ , le temps moyen de chaque saut est fini, imposant un comportement diffusif. De plus, les incréments sont asymptotiquement stationnaires et l'exposant de persistance a été déterminé comme égal à  $1/2$  (pour  $\beta > 1$ ) [Bray et al., 2013].

#### Levy walk :

Considérons les marches de Lévy pour lesquelles le marcheur effectue un saut de taille  $l$  tiré selon une loi large donnée par  $p(l) \sim Cl^{-1-\beta}$ . Dans ce formalisme, le marcheur évolue à une vitesse constante conduisant à des sauts de temps  $\tau \sim l/v$  en comparaison des modèles précédemment abordés dans (II.2). Pour  $\beta > 2$ , le processus est diffusif et de manière similaire à la marche CTRW, les incréments sont asymptotiquement stationnaires [Allegrini et al., 2002; Godec et al., 2013; Zaburdaev et al., 2015]. On retrouve encore un exposant de persistance égal à  $1/2$  [Bray et al., 2013; Korabel et al., 2011].

#### Chaîne de Rouse en dimension 1 :

On considère une chaîne formée de  $N$  monomères diffusifs reliés entre eux par des ressorts de raideur  $k$ . Il a été montré que, en suivant un monomère spécifique, celui-ci présente un comportement diffusif aux temps longs ( $t \gg t_o N^2$  où  $t_o$  est un paramètre microscopique) et que dans ce régime les incréments sont stationnaires [Doi et al., 1988]. Récemment, la décroissance de la probabilité de survie a été obtenue dans [Levernier et al., 2019] confirmant la valeur  $\theta = 1/2$ .

Au travers de ces différents exemples, on peut tirer deux observations principales :

- Les incréments observés ne sont plus exactement non-stationnaires et pourtant l'exposant de persistance n'en est pas altéré.
- Ensuite, il semble difficile d'observer des processus diffusifs présentant des effets de vieillissement permanents. On peut par exemple rappeler le cas des marches CTRW, connues pour leurs effets de vieillissement, qui pourtant s'estompent lorsque l'on se concentre sur le cas diffusif.

Il est reconnu que l'exposant de persistance dépend en général de l'intégralité des événements passés [Andersen, 1954; Bray et al., 2013; Krug et al., 1997], et c'est de cette observation, que l'hypothèse stricte de stationnarité des incréments prend toute son importance. Pourtant les cas observés jusqu'ici dans la littérature ne présentent aucun exemple de processus diffusif présentant un exposant de persistance anormal. Nous allons donc par la suite chercher à exhiber des marches dérogeant à cette dernière observation.

## II.3 Processus diffusifs à toute échelle de temps

Suite à l'analyse des exemples précédents, on cherchera à identifier des processus asymptotiquement diffusifs présentant des exposants de persistance anormaux. Par ailleurs, on essaiera de dégager un critère général qui permettrait de les identifier. Dans cette partie, on déterminera dans un premier temps les propriétés de premier passage des processus étudiés, puis on se tournera vers leurs propriétés de vieillissement.

### II.3.1 Marches à renforcement SATW

#### a) Présentation du modèle SATW

Considérons la marche self-attractive walk présentée, dans le chapitre précédent [Sapozhnikov, 1994] pour laquelle le marcheur a une probabilité de sauter sur le site voisin  $i$  proportionnel à  $\exp(-un_i)$ , où  $n_i = 0$  si le site n'a jamais été visité jusqu'à l'instant  $t$  et  $n_i = 1$  sinon. Le marcheur est considéré comme attiré par sa propre trajectoire pour  $u > 0$  tandis qu'il est repoussé pour  $u < 0$ .

Avant de déterminer les propriétés de premier passage de cette marche, émettons quelques observations spécifiques à la dimension 1. Comme énoncé dans le chapitre précédent, ce modèle est fortement non-markovien puisque son évolution nécessite la connaissance de l'ensemble du territoire  $D_t$  visité au temps  $t$ . Cependant, en dimension 1, la connaissance des deux extrêmes,  $x_- = \inf_{0 \leq t' \leq t} x(t')$  et  $x_+ = \sup_{0 \leq t' \leq t} x(t')$  de la trajectoire au temps  $t$ , suffit pour déterminer l'évolution du processus. En effet, cela est dû à la saturation immédiate de l'effet de renforcement, et la connaissance du nombre exact de passages sur chaque site de  $[x_- < x(t) < x_+]$  n'est pas nécessaire. Autrement dit, le modèle d'évolution  $(x(t), x_-(t), x_+(t))$  est markovien. Celui-ci a, par ailleurs, suscité des travaux conséquents pour la généralisation d'un modèle continu de mouvement Brownien perturbé à ses extrémités [Chaumont et al., 2000a; Doney, 1998].

Ce dernier point nous permet de mieux cerner la dynamique de la marche SATW en  $1d$  (figure II.1) :

- À l'intérieur de la zone visitée le marcheur effectue une marche de pólya symétrique
- Aux bords de celle-ci le marcheur a une probabilité de visiter le site voisin donnée par  $\beta = 1/[1 + \exp(-u)]$

Il est d'ores et déjà possible d'en déduire que le processus est diffusif aux temps longs,  $\langle x^2 \rangle(t) \sim D_L(\beta)t$ , ce qui a été montré dans [Prasad et al., 1996]. Remarquons que, à notre connaissance, le coefficient de diffusion aux temps longs  $D_L(\beta)$  n'a pas encore été déterminé analytiquement, ce qui confirme que les effets non-markoviens ne sont pas négligeables et complexes à caractériser avec précision<sup>\*3</sup>.

---

<sup>\*3</sup> Afin de justifier cette dernière observation, remarquons que le nombre de sauts, dont les probabilités ont été données par  $\beta$ , est de l'ordre du nombre de sites visités, puisque proportionnel aux temps passés aux bords. Pour un processus diffusif, le nombre de sites visités étant de l'ordre de  $O(t^{\frac{1}{2}})$ , en interprétant la trajectoire comme la somme d'une marche simple  $X_B(t)$  de  $t$  pas et d'une perturbation  $P_e(t)$ , on réécrit le déplacement quadratique moyen sous la forme  $\langle X(t)^2 \rangle = \langle X_B(t)^2 \rangle + \langle P_e(t)^2 \rangle + 2\langle X_B P_e \rangle$ . Le premier terme est linéaire en  $t$ , et le dernier terme est nul de par l'indépendance et la symétrie de chaque pas de  $X_B(t)$ . Enfin,

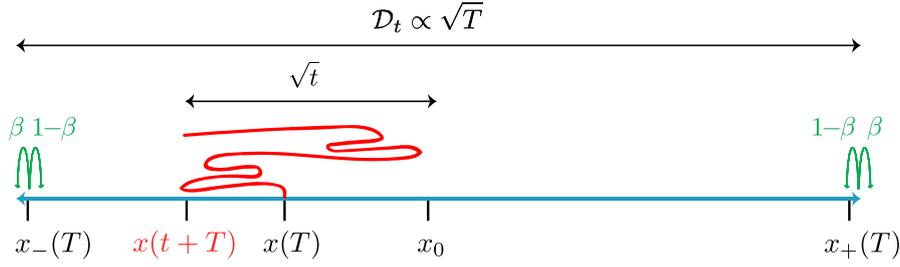


FIG. II.1 Définition de la marche SATW en dimension 1. Le processus réalise une simple marche aléatoire dans la zone déjà visitée, les effets de renforcement ne survenant qu'aux bords de celle-ci. Par ailleurs, les dépendances en  $t$  et  $t + T$  illustrent l'apparition d'effets de vieillissement propres à ce modèle.

### b) Détermination exacte de l'exposant de persistance pour la marche SATW

On s'intéresse désormais aux propriétés de premier passage de ce processus et on cherche à déterminer le comportement asymptotique de  $S(t)$ . Au vu des observations précédentes, il est indispensable, afin de déterminer les propriétés de la marche SATW, de paramétrer celles-ci en fonction du nombre de sites distincts visités à l'instant  $t$ . On définit  $S(N)$ , la probabilité de survie que la cible introduite en 0 n'a pas encore été atteinte par un marcheur initialement en  $x_0$  alors que  $N$  sites ont été déjà visités. Il a été observé pour de nombreux processus que  $S(N)$  décroît en loi de puissance caractérisée par un exposant dit de *splitting*  $\phi$ .

Dans la suite, nous allons montrer que  $S(N)$  décroît selon la loi suivante

$$S(N) \sim N^{-\frac{1-\beta}{\beta}}.$$

Détermination du comportement asymptotique de  $S(N)$  :

Pour cela, on propose d'encadrer  $S(N)$ . Une première borne inférieure est facilement identifiable. Considérons, l'ensemble des trajectoires, de probabilité associée  $P_s(N)$ , dont les  $N$  premiers sites distincts visités l'ont été du côté opposé ( $> x_0$ ) à la cible. Il est clair que  $S(N) > P_s(N)$ .

Il est possible de déterminer le comportement exact de  $P_s(N)$ , et on obtient la relation de récurrence suivante détaillée en annexe B.1

$$P_s(N+1) = \left(1 - \frac{1-\beta}{2 + \beta(N-3)}\right) P_s(N).$$

Ainsi, dans la limite  $N \gg 1$ , on obtient une première borne

$$S(N) > P_s(N) \propto N^{-\frac{1-\beta}{\beta}}.$$

---

le second terme est de l'ordre de  $t$  car cette fois-ci les effets non-markoviens sont corrélés. On voit à l'aide de cette représentation que le temps passé aux bords, pourtant négligeable par rapport à  $t$ , est suffisant pour altérer le régime diffusif. Néanmoins, il serait fallacieux de directement interpréter la perturbation comme le nombre exact de pas faits aux bords, car ce nombre dépend en réalité de chaque réalisation spécifique de la marche.

Nous allons maintenant déterminer une borne supérieure de  $S(N)$ . Celle-ci, plus subtile à caractériser, va nécessiter l'introduction de plusieurs observables.

On définit un *changement de côté* lorsque le prochain site découvert se trouve du côté opposé au dernier site découvert. Il est manifeste que, après avoir effectué  $2x_0$  *changements de côté*, la cible a été forcément traversée, puisque le changement de côté implique la découverte de 1 site au minimum. En conséquence, définissons  $P(N, k)$  la probabilité que exactement  $k$  changements de côté se soient produits au cours de la découverte de  $N$  sites tout en n'ayant jamais atteint la cible. On obtient en partitionnant  $S(N)$  en fonction du nombre de changements de côté

$$S(N) = \sum_{k=0}^{2x_0} P(N, k). \quad (\text{II.3})$$

Ainsi en majorant le comportement de  $P(N, k)$  on obtient indirectement celui de  $S(N)$ . Afin de déterminer la décroissance de  $P(N, k)$ , il est nécessaire d'introduire les instants exacts (en termes de sites distincts visités) où les différents changements de côtés se sont produits. Définissons pour cela,  $k$  variables aléatoires  $\{a_1, \dots, a_k\}$ , où  $a_i$  est le nombre total de sites distincts visités lorsque le  $i$ ème changement de côté s'est produit. Reformulé différemment, entre les changements de côté  $i$  et  $i + 1$ , le marcheur découvre  $a_{i+1} - a_i$  nouveaux sites du même côté du territoire visité. On va dans la suite s'intéresser à la loi jointe des événements  $P(\{a_1, \dots, a_k\})$ . Notons  $P_s(a_i, a)$ , la probabilité que  $a - a_i - 1$  nouveaux sites aient été visités du même côté après le  $i$ ème changement de côté. Introduisons également  $P_t(a)$ , la probabilité qu'un changement de côté se produise lorsque le nombre de sites distincts visités est  $a$  (figure II.2).

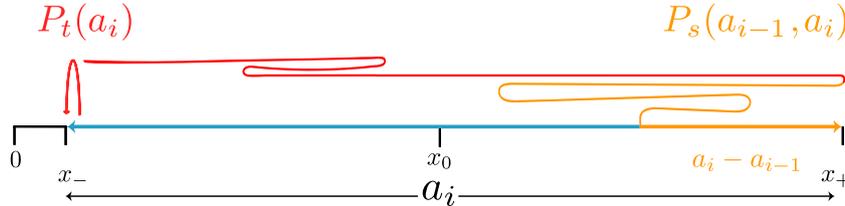


FIG. II.2 *Changement de côté de la zone visitée. Entre chaque changement de côté, le marcheur aléatoire découvre  $a_i - a_{i-1} - 1$  nouveaux sites adjacents avec une probabilité  $P_s(a_{i-1}, a_i)$ ; ici le  $i$ ème changement de côté a lieu pour  $a = a_i$  avec une probabilité  $P_t(a_i)$ .*

On va dorénavant s'appuyer sur les propriétés de la dynamique de la marche SATW énoncées précédemment. On remarque que, entre les découvertes de chaque nouveau site, l'évolution du marcheur est indépendante du reste de la trajectoire. Ainsi, on peut complètement exprimer la loi jointe des événements  $\{a_1, \dots, a_k\}$  en fonction des probabilités introduites ci-dessus.

$$P(\{a_1, \dots, a_k\}) = 2^{-1} P_s(1, a_1) P_t(a_1) \left( \prod_{i=2}^k P_s(a_{i-1}, a_i) P_t(a_i) \right) P_s(a_k, N).$$

Déterminons désormais les termes  $P_s$  et  $P_t$ , ce qui est fait en annexe B.2. En particulier, intéressons-nous à la limite  $N$  grand pour laquelle on détermine leur comportement asymptotique ( $i > 1$ )

$$P_s(a_i, a_{i+1}) \underset{a_i \rightarrow \infty}{\sim} \frac{a_i^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{a_{i+1}^{\frac{1-\beta}{\beta}}}; \quad P_t(a_i) \underset{a_i \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1-\beta}{\beta} \frac{1}{a_i},$$

Il est maintenant possible de majorer le comportement de  $P(N, k)$ . On va donc sommer sur toutes les réalisations possibles des événements  $\{a_1, \dots, a_k\}$ . Dans la limite  $N \gg 1$ , les sommes seront dans la suite approximées par des intégrales. Notons que la cible ne doit pas être atteinte. En conséquence, le marcheur ne peut découvrir successivement plus de  $x_0$  sites du côté de la cible. Pour cela, il est crucial de différencier le côté où se trouve la cible.

- Si le premier pas est fait dans la direction de la cible, alors  $a_{2(p+1)} - a_{2p+1} < x_0$  car la cible ne peut pas avoir été atteinte.
- Inversement, si le premier pas est fait dans la direction opposée, on obtient alors  $a_{2p+1} - a_{2p} < x_0$  pour la même raison.

Avec un argument identique, si après le dernier changement de côté, le marcheur se trouve du même côté que la cible, il ne peut découvrir plus de  $x_0$  sites. En tenant compte de ces contraintes, quatre cas doivent être analysés en fonction de la parité de  $k$  et de la direction initiale annotée  $\pm$  dans la suite :

- $P_-(N, 2p) < \int_1^{x_0} \int_{a_1}^N \int_{a_2}^{\min(x_0+a_2, N)} \int_{a_3}^N \dots \int_{a_{2p-2}}^{\min(x_0+a_{2p-2}, N)} \int_{N-x_0}^N P(\{a_1, \dots, a_k\}) da_1 \dots da_{2p}$ .
- $P_+(N, 2p) < \int_1^N \int_{a_1}^{\min(a_1+x_0, N)} \int_{a_2}^N \int_{a_{2p-2}}^N \dots \int_{a_{2p-1}}^{\min(a_{2p-1}+x_0, N)} P(\{a_1, \dots, a_k\}) da_1 \dots da_{2p}$ .
- $P_+(N, 2p+1) < \int_1^N \int_{a_1}^{\min(a_1+x_0, N)} \dots \int_{N-x_0}^N P(\{a_1, \dots, a_k\}) da_1 \dots da_{2p+1}$ .
- $P_-(N, 2p+1) < \int_1^{x_0} \int_{a_1}^N \int_{a_2}^{\min(a_2+x_0, N)} \int_{a_{2p}}^{\min(a_{2p}+x_0, N)} P(\{a_1, \dots, a_k\}) da_1 \dots da_{2p+1}$ .

En utilisant les comportements asymptotiques des différents termes on obtient dans la limite  $a_1 \gg 1$

$$P(\{a_1, \dots, a_k\}) = A_K (1 + O(\frac{1}{a_1})) N^{-\frac{1-\beta}{\beta}} (a_1 a_2 \times \dots \times a_k)^{-1},$$

où on définit  $A_K = 2^{-1} A_o (\frac{1-\beta}{\beta})^k$ . Il est alors possible de majorer le comportement des quatre termes, on détaillera ici le cas  $P_-(N, 2p)$ , la résolution des trois autres termes est effectuée en annexe B.3.

En reprenant le majorant de  $P_-(N, 2p)$ , il est possible de relaxer toutes les contraintes sur les variables  $a_i$  pour  $i \leq 2p-1$

$$P_-(N, 2p) < \frac{A_{2p}}{N^{\frac{1-\beta}{\beta}}} \int_1^N \int_1^N \dots \int_1^N \int_{N-x_0}^N (1 + O(a_1^{-1})) \left( \prod_{i=1}^{2p} a_i \right)^{-1} da_1 da_2 \dots da_{2p}.$$

Toutes les intégrales sont maintenant découplées, on obtient alors

$$P_-(N, 2p) < \frac{A_{2p}(1 + o(1))}{N^{\frac{1-\beta}{\beta}}} \ln\left(\frac{N}{N - x_0}\right) \ln(N)^{2p-1},$$

ce qui permet de retrouver le comportement attendu

$$P_-(N, 2p) = O(N^{-\frac{1-\beta}{\beta}}).$$

Dès lors, en sommant les différents termes, on a déterminé le comportement asymptotique de  $S(N)$  pour tout  $x_0$

$$S(N) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2x_0} P_-(N, k) + P_-(N, k) = O(N^{-\frac{1-\beta}{\beta}}). \quad (\text{II.4})$$

Détermination du comportement asymptotique de  $S(t)$  :

Afin de déterminer l'exposant de persistance, il nous reste à relier la dépendance en temps de la probabilité de survie au terme  $S(N)$  que l'on vient de caractériser. Pour cela, considérons la distribution de premier passage en  $t$  que l'on réécrit en partitionnant sur le nombre de sites distincts visités au moment où la cible est atteinte ( $F(N, t)$ ). On définit alors  $\Phi_N(t)$ , la probabilité conditionnelle que la cible soit trouvée au temps  $t$ , sachant que  $N - 1$  sites ont été découverts avant la cible, ce qui conduit à la partition suivante du FPT

$$F(t) = \sum_{N=0}^{\infty} F(N, t) = \sum_{N=0}^{\infty} \Phi_N(t) F(N).$$

De manière similaire, on a défini  $F(N)$ , la probabilité que la cible soit le Nème site découvert. Dans la limite  $N \gg 1$  en utilisant (II.4), on obtient pour  $F(N)$

$$F(N) \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} N^{-(\frac{1-\beta}{\beta} + 1)}.$$

Ensuite, on peut montrer que  $\Phi_N(t)$  prend la forme d'une fonction d'échelle dans la limite des temps longs

$$\Phi_N(t) = \frac{1}{N^2} f\left(\frac{t}{N^2}\right). \quad (\text{II.5})$$

Pour cela, on s'est appuyé sur le comportement diffusif de la marche et la normalisation de la probabilité conditionnelle  $\Phi_N(t)$ \*<sup>4</sup>. En utilisant le comportement des différents termes dans la limite des temps longs, on obtient alors le comportement attendu pour  $F(t)$

$$\begin{aligned} F(t) &\sim F_0 \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N^{-(\frac{1-\beta}{\beta} + 1)}} \frac{1}{N^2} f\left(\frac{t}{N^2}\right) \\ &\sim F_0 \int_0^{\infty} \frac{1}{N^{2 + \frac{1-\beta}{\beta} + 1}} f\left(\frac{t}{N^2}\right) dN \\ &\sim F_{\infty} t^{-1 - \frac{1-\beta}{2\beta}}, \end{aligned}$$

---

\*<sup>4</sup> Ce résultat sera démontré exactement dans le chapitre 6 et sera source de multiples réflexions qui sortent du cadre de ce chapitre. Notons que (II.5) implique que la seule échelle pertinente pour décrire le nombre de sites visités y compris en présence d'une cible est donnée par  $t/N^2$ .

où

$$F_\infty = F_0 \int_0^\infty \frac{1}{u^{3+\frac{1-\beta}{\beta}}} \frac{1}{N^2} f(u^{-2}) du.$$

Notons que ce résultat semble pouvoir être généralisé pour la limite continue de la marche SATW<sup>\*5</sup>.

Reste à définir la dépendance en  $x_0$  de  $S(t)$ . En reprenant le comportement asymptotique de  $F(t)$ , et en s'appuyant les propriétés d'invariance d'échelle, on peut obtenir la dépendance suivante en  $x_0$  aux temps longs<sup>\*6</sup>.

$$F(t) \propto \frac{x_0^{\theta d_w}}{t^{\theta+1}}.$$

Notons que le passage aux formes asymptotiques est exact dans la limite des grands temps de même que le recours aux formes intégrales. Ainsi, on a déterminé analytiquement la valeur exacte de l'exposant de persistance

$$\theta = \frac{1-\beta}{2\beta}. \quad (\text{II.6})$$

Émettons plusieurs remarques sur le résultat obtenu ci-dessus :

- Tout d'abord, soulignons que la SATW fournit un modèle simple pour lequel l'exposant de persistance varie sur une large gamme de valeurs contrôlées par un unique paramètre microscopique ( $\beta$ ).
- En particulier, pour  $\beta < 1/3$ , on obtient un exposant de persistance supérieur à 1, impliquant que le temps moyen de premier passage est fini y compris en espace infini. Ce comportement est peu fréquent dans le paysage des marches aléatoires.

Enfin, malgré le fait que le processus soit asymptotiquement **diffusif**,  $\langle x^2(t) \rangle \propto t$ , pour toutes les valeurs de  $\beta$  [Prasad et al., 1996], **l'exposant de persistance  $\theta$  est non trivial** pour  $\beta \neq 1/2$  (pour  $\beta = 1/2$ , on retrouve la marche de pólya ). Dès lors, afin de déterminer les propriétés associées à une exploration anormale, on s'intéresse désormais aux effets de vieillissement qui apparaissent pour la marche SATW.

### c) Description des incréments de la marche SATW

Selon nos précédentes observations, des effets de vieillissement doivent se manifester dans le comportement des incréments. Dans la limite des temps longs  $t \gg T \gg 1$ , les incréments satisfont la relation suivante

$$\langle [X(t+T) - X(T)]^2 \rangle_{t \gg T \gg 1} \sim 2D_L(\beta)t.$$

---

<sup>\*5</sup> Pour ce faire, notons que le nombre de termes associés à la somme (II.3) croît linéairement en  $x_0$  et indépendamment de  $N$ . Le préfacteur associé au comportement asymptotique de  $P(N, k)$  dépend explicitement de  $k$  mais la décroissance selon  $N$  est valable pour tout  $x_0$  fixé. Ainsi, on propose que la valeur de l'exposant de persistance reste valide dans la limite où le pas du réseau tend vers 0.

<sup>\*6</sup> Remarquons que dans la limite  $x_0 \gg 1$ , on observe un comportement non linéaire en  $x_0$  pour  $\beta \neq 1/2$ . En reprenant le développement de  $P(N, k)$ , on doit s'attendre à l'émergence de ce comportement en  $x_0$  mais cela reste à montrer.

Notons que l'on retrouve alors le même coefficient de diffusion  $D_L(\beta)$  que dans la limite  $T = 0$  (figure II.3), les conséquences du passé de la trajectoire de 0 à  $T$  étant négligeables par rapport à celles de l'évolution entre  $T$  et  $T + t$ . Considérons désormais la limite inverse  $t \ll T$ , on observe que les incréments sont encore diffusifs, mais présentent un coefficient de diffusion différent

$$\langle [X(t+T) - X(T)]^2 \rangle_{T \gg t \gg 1} \sim 2D_s t.$$

avec  $D_s = 1/2$  (figure II.3). Un tel comportement peut être simplement justifié. Dans la limite  $T \gg t$ , la taille de la zone visitée est déterminée par  $O(T^{\frac{1}{2}})$ , le marcheur évoluant principalement à l'intérieur de la zone visitée, il a alors une probabilité très faible d'interagir avec les bords entre  $T$  et  $t + T$ . Ainsi, il se comporte principalement comme une marche aléatoire simple, et  $2D_s t$  est indépendant de  $\beta$ . Inversement, ce n'est plus le cas lorsque  $t \gg T$ , puisque le marcheur a parcouru une zone de l'ordre de  $O(t^{\frac{1}{2}}) \gg O(T^{\frac{1}{2}})$ , les bords de la zone visitée ont nécessairement été atteints et repoussés.

Il ne reste plus qu'à déterminer le comportement  $t \sim T$ . Comme il n'existe pas d'autres échelles de temps divergentes de l'ordre de  $t$  ou  $T$ , une analyse dimensionnelle justifie que les incréments doivent s'écrire sous la forme  $\langle [X(t+T) - X(T)]^2 \rangle_{T, t \gg 1} \sim 2D(t/T) t$ . Ce comportement est confirmé par les simulations numériques (figure II.3). Notons que le comportement de  $D_L(\beta)$  est bien monotone selon  $\beta$ , ainsi pour une marche attractive ( $\beta < 1/2$ ) on aura  $D_L(\beta) < D_s$  et inversement pour le cas répulsif.

Dès lors, on a mis en lumière un premier exemple de marche aléatoire asymptotiquement diffusif présentant un effet de vieillissement à *toutes les échelles de temps*  $T$ . On propose que ce comportement, que nous appellerons aussi dans la suite *vieillissement sans échelle*, conduit à des exposants de persistance anormaux.

Désormais, on cherchera à étendre ce premier constat à d'autres modèles diffusifs potentiellement vieillissants.

#### d) Modèle Persistent Self-Attracting Walk

Afin de tester la robustesse de notre critère, on propose d'étendre le modèle SATW en ajoutant un effet de persistance dans le déplacement du marcheur. Tant que le marcheur aléatoire reste dans la zone visitée, il effectue une marche aléatoire persistante classique dont la probabilité d'imiter le pas précédent est donnée par  $p = \frac{e^k}{e^k + e^{-k}}$ , où  $k$  est un paramètre réel libre. Lorsque le marcheur aléatoire est au bord de la zone visitée  $x_{\pm}$ , les effets de renforcement et de persistance sont couplés, de sorte que la probabilité de découvrir un nouveau site est donnée par  $\beta(k, u) = \frac{e^k}{e^{-ku} + e^k}$ . Ce modèle que l'on appellera par la suite *Persistent Self-Attracting Walk* (PSAW) sera plus largement étudié dans le prochain chapitre.

Maintenant, intéressons-nous aux propriétés de premier passage de ce modèle en dimension 1. On propose pour cela de suivre exactement les mêmes étapes que pour le modèle SATW. En considérant l'observable  $S(N)$ , on note que les propriétés nécessaires pour déterminer son comportement sont partagées par les deux modèles.

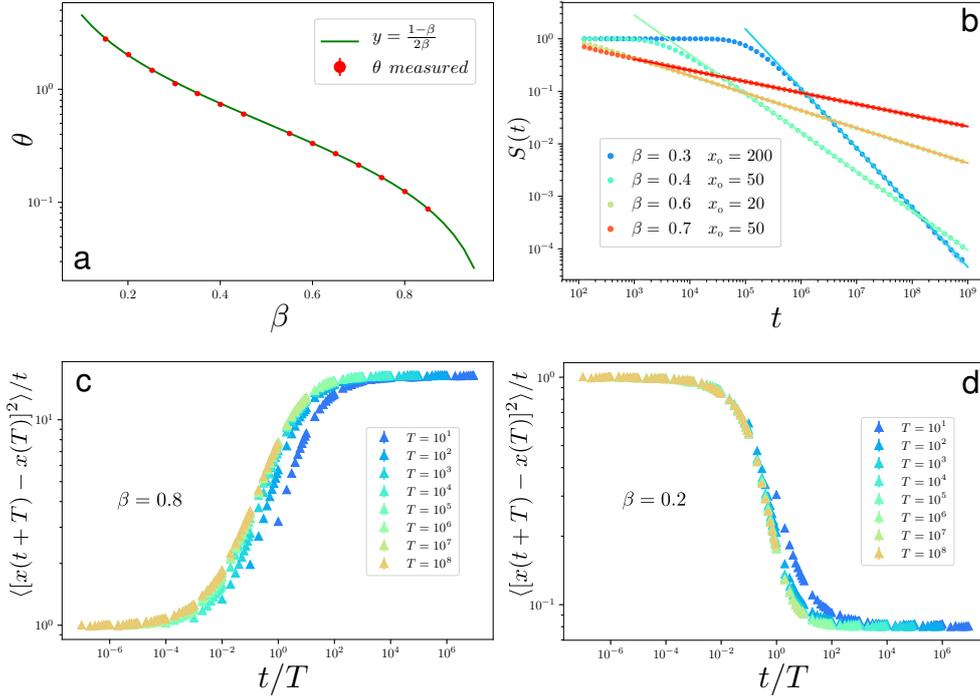


FIG. II.3 *Exposant de persistance et effet de vieillissement de la marche SATW. a)* Mesure de l'exposant de persistance : simulations numériques (symboles) et valeurs théoriques prédites par (II.6) (ligne pleine). *b)* Probabilité de survie en fonction du temps (échelle logarithmique) pour différentes valeurs de  $\beta$ . Simulations numériques (symboles) et fit de la loi de puissance utilisée dans *a)* (ligne pleine). *c),d)* Vieillesse des incréments de la marche SATW (normalisés par le comportement asymptotique diffusif attendu). Chaque courbe est tracée pour une valeur fixée de  $T$ .

En conséquence, en conservant les définitions des évènements  $\{a_1, \dots, a_k\}$ , il suffit de déterminer les probabilités associées  $P_s(a_i, a)$  et  $P_t(a)$ .

Celles-ci dépendent explicitement de la probabilité de splitting  $p_-(0, N)$ , définie comme la probabilité du marcheur, partant de 0, de découvrir le site  $-1$  avant la cible en  $N$  sachant que  $N$  ont déjà été découverts (le marcheur est initialement persistant dans la direction  $-$ ). Celle-ci est calculée en annexe C et le comportement aux temps longs est donné par

$$1 - p_-(0, N) \sim \frac{e^{-u}}{N} = \frac{1 - \beta(u, 0)}{\beta(u, 0)N}.$$

Notons que curieusement, le comportement asymptotique ne dépend pas de  $k$ . Cela a un impact majeur, puisque tous les comportements nécessaires à la détermination de l'exposant de persistance  $\theta$  vont être inchangés. Ainsi en suivant un raisonnement identique à celui développé pour la marche SATW, on obtient l'exposant de persistance suivant

$$\theta = \frac{1 - \beta(k=0, u)}{2\beta(k=0, u)}.$$

Comme dans le cas SATW ( $k = 0$ ), l'exposant de persistance est donc anormal pour  $\beta(k = 0, u) \neq 1/2$ .

Considérons ensuite l'impact de l'ajout de l'effet de persistance sur le comportement des incréments. Dans la limite des temps courts  $t \ll e^{2k}$ , il est clair que le mouvement va être balistique (si le marcheur n'est pas exactement aux bords du territoire visité). Dans la limite  $T \gg t \gg e^{2k}$ , pour des raisons identiques au modèle précédent, les incréments sont caractérisés par un coefficient de diffusion  $D_s = e^{2k}/2$ . Finalement, le comportement aux temps longs  $t \gg T \gg 1$  reste, bien sûr, diffusif avec un coefficient de diffusion inconnu dépendant du couple  $(\beta, k)$ .

Ainsi, l'introduction des effets de persistance ne modifie pas le comportement des incréments dans la limite  $t, T \gg e^{2k}$ , et on retrouve un vieillissement à toute échelle de temps  $\langle [X(t+T) - X(T)]^2 \rangle = 2D(t/T)t$ . Dès lors, notre hypothèse est vérifiée, plus encore, l'introduction d'effets évanescents dans la limite  $t, T \gg 1$  ne modifie pas la valeur de l'exposant de persistance.

### II.3.2 Marches à renforcement répulsif en loi de puissance

Considérons un autre modèle issu des marches à renforcement pour laquelle le marcheur à une probabilité de sauter sur un site voisin proportionnel à  $1/(1 + \tau_i^\beta)$ , où  $\tau_i$  est le temps total passé par le marcheur sur le site  $i$  (PSRW). Rappelons que ce processus présente un comportement diffusif aux temps longs (chapitre 1, [Tóth, 2001]).

L'analyse numérique des incréments montre que ceux-ci vérifient le même comportement que la marche SATW (II.4). De plus, l'exposant de persistance présente bien une valeur non triviale  $\theta \approx 0.25$  qui semble curieusement indépendante de  $\beta$ . On a donc mis en évidence un deuxième exemple de modèle diffusif qui présente conjointement des effets de vieillissement à toute échelle de temps et un exposant de persistance anormal.

### II.3.3 Marche aléatoire éléphant (ERW)

#### a) Détermination des incréments de la marche ERW

Considérons un autre exemple qui n'est pas issu des modèles à renforcement et dont les propriétés de premier passage peuvent être déterminées analytiquement. Intéressons-nous à la marche éléphant (ERW) introduite pour la première fois dans [Schütz et al., 2004]. Celle-ci a été présentée comme l'un des rares exemples de modèles dont l'évolution dépendait de l'historique complet de la trajectoire et pour lequel les propriétés de transport pouvaient être déterminées analytiquement. Cette marche sur réseau peut être définie comme suit en dimension 1.

À chaque pas de temps  $t$ , le marcheur effectue un saut  $\sigma$  sur un site parmi les plus proches voisins. Pour cela on tire, avec un poids uniforme,  $\sigma$  dans l'ensemble des sauts effectués dans le passé  $\{\sigma_i\}_{i < t}$ , où  $\sigma_i = \pm 1$ . Le marcheur peut alors imiter ce saut  $\sigma_t = \sigma$  avec une probabilité  $\beta$ , où effectuer le saut opposé  $\sigma_t = -\sigma$  avec une probabilité  $1 - \beta$ .

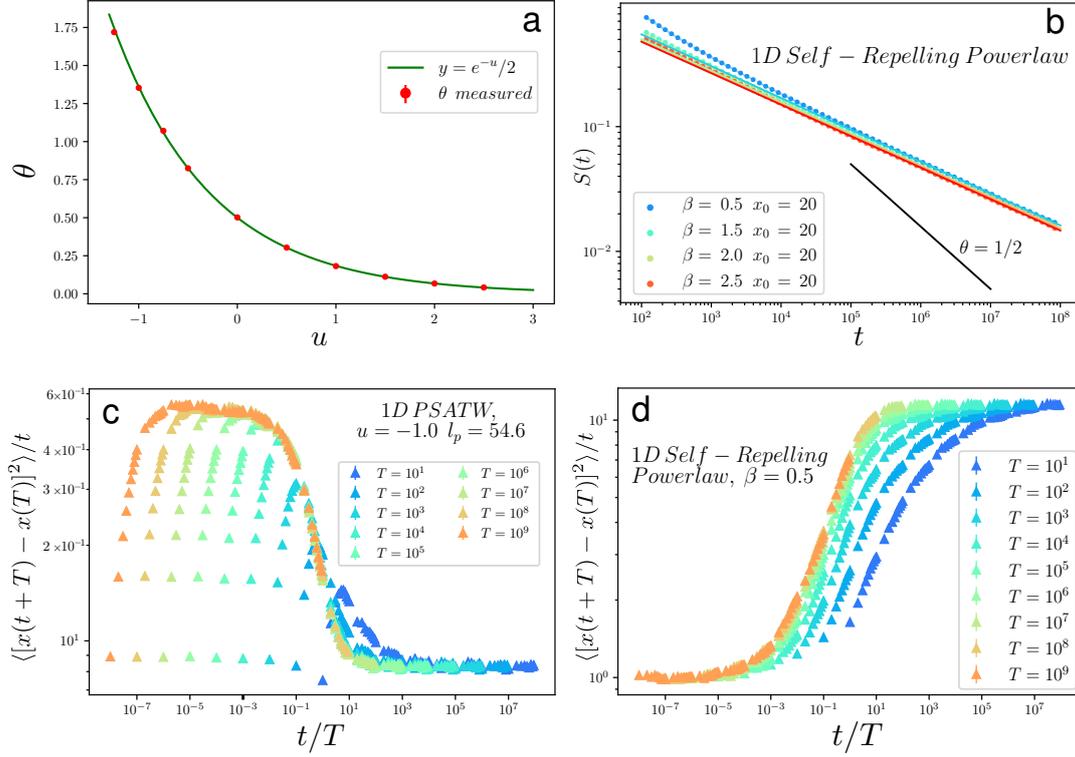


FIG. II.4 Exposant de persistance et effet de vieillissement de la marche PSATW, et la marche répulsive en loi de puissance. **a)** Exposant de persistance de la marche PSATW, les simulations numériques sont comparées aux valeurs attendues pour  $k \neq 0$ . **b)** Probabilité de survie de la marche répulsive en fonction du temps (échelle logarithmique) pour différentes valeurs de  $\theta$ . Sont tracées les simulations numériques (symboles) et les fits en loi de puissance (lignes pleines). **c)** Vieillissement des incréments de la marche PSATW de longueur de persistance  $l_p = e^{2k}$ . Ceux-ci sont normalisés par le comportement asymptotique diffusif, et chaque courbe est tracée pour une valeur fixée de  $T$ . Notons la présence d'un régime balistique aux temps courts qui disparaît dans la limite  $t \gg 1$ . **d)** Vieillissement des incréments de la marche répulsive en loi de puissance. Chaque courbe est tracée pour une valeur fixée de  $T$  et est normalisée par le comportement asymptotique diffusif attendu.

Le processus est entièrement défini après le premier saut qui peut être choisi fixé ou aléatoire, dans notre cas, on le prendra symétrique. Ce processus est par construction non-markovien, et peut sembler au premier abord difficile à caractériser. Pourtant en remarquant que l'ordre, dans lequel ont été effectués les sauts, n'a pas d'importance, il suffit alors de connaître exactement le nombre de pas faits dans les deux directions notés,  $N_+(t)$  et  $N_-(t)$ , pour pouvoir déterminer la trajectoire future. Pour aller encore plus loin, on constate que ces deux variables peuvent être explicitement déterminées en fonction de  $t$ ,  $X(0)$  et  $X(t)$  seulement

$$N_{\pm}(t) = \frac{t}{2} \pm \frac{X(t) - X(0)}{2}.$$

En injectant ces expressions dans les probabilités de tirer un saut  $\pm 1$  (notées respectivement  $p_{\pm}$ ), on obtient alors

$$p_{\pm}(t) = \frac{1}{2} \pm \frac{X(t) - X(0)}{2t}.$$

Autrement dit, le processus  $(X(0), X(t), t)$  est markovien. Intéressons-nous à l'effet du paramètre  $\beta$  sur les propriétés de transport de la marche ERW. Pour  $\beta > 1/2$ , le processus a tendance à imiter les pas précédents. Ainsi, plus le processus s'éloignera de sa position initiale, plus il aura tendance à continuer dans cette direction. Inversement, pour  $\beta < 1/2$ , le processus préférera toujours revenir vers la position initiale.

Dans ce chapitre, on se concentrera sur les cas  $\beta < 3/4$  où il a été déterminé que le processus est diffusif aux temps longs (le cas  $\beta > 3/4$  sera étudié chapitre 4). À partir du couple  $(X(0), X(t), t)$ , il est possible de déterminer exactement le comportement des incréments, ce qui est fait en annexe D. On y démontre que ceux-ci sont caractérisés par le même comportement que ceux de la marche SATW : un vieillissement diffusif à toutes les échelles de temps

$$\langle [X(t+T) - X(T)]^2 \rangle = 2D(t/T) t, \quad (\text{II.7})$$

où il est possible d'identifier le coefficient de diffusion effectif

$$D(t/T) = \frac{1}{6 - 8\beta} - \frac{1}{3 - 4\beta} \left[ \frac{T}{t} \left( \left( 1 + \frac{t}{T} \right)^{2\beta-1} - 1 \right) \right].$$

On peut notamment identifier les deux limites finies du coefficient de diffusion effectif,  $D_s = 1/2$  et  $D_L = 1/(6 - 8\beta)$  (en accord avec [Coletti et al., 2017 ; Schütz et al., 2004] pour  $T = 0$ ). En particulier, on retrouve un coefficient de diffusion égal à  $1/2$  pour  $T \gg t$ . Justifions cette dernière observation ; après avoir évolué un temps grand  $T$ , le marcheur est à une distance typique de l'ordre de  $O(T)$  de sa position initiale. On peut alors en déduire que l'écart entre les probabilités est négligeable ( $|p_+(T) - p_-(T)| \sim \frac{1}{T^{1/2}}$ ). Dès lors, lorsque le marcheur évolue entre  $t$  et  $t + T$  avec  $t \ll T$ , les effets non-markoviens sont négligeables menant à  $D_s = \frac{1}{2}$ . Ce n'est plus le cas pour  $t \gg T$ , puisque les corrélations entre les différents pas ne sont plus négligeables.

Ainsi, avant de considérer les propriétés de premier passage de la marche ERW, on observe que les incréments présentent des comportements asymptotiques similaires à ceux de la marche SATW.

## b) Détermination de l'exposant de persistance de la marche ERW

Examinons désormais les propriétés de premier passage de la marche ERW. Il a été montré dans la limite des grands temps, pour  $\beta < 3/4$ , que la distribution de probabilité  $P(x, t)$  était gaussienne [Coletti et al., 2017]. Elle vérifie donc l'équation de Fokker-Planck suivante pour  $t > 0$  :

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) - \frac{2\beta - 1}{t} \frac{\partial}{\partial x} (xP(x, t)). \quad (\text{II.8})$$

Le second terme peut être interprété comme l'effet d'un ressort, dont la raideur est du signe de  $2\beta - 1$  et décroît linéairement en  $t$ . On retrouve ici l'interprétation précédente d'un marcheur attiré/repoussé par sa position initiale. Notons que la solution de cette équation de Fokker-Planck en présence d'une cible absorbante en 0 a été résolue pour  $\beta > 1/2$  dans [Silva et al., 2011]. De vifs débats ont été menés quant à la validité de l'utilisation de cette équation pour la marche ERW, en particulier dans le cas  $\beta > 3/4$ , il a été montré que la distribution n'est plus gaussienne [Silva et al., 2011]. On pourrait donc s'interroger sur la légitimité de la correspondance entre le cas discret de la marche ERW et la résolution dans [Silva et al., 2011] dans la limite continue et  $x_0 \rightarrow 0$ . Mais une analyse numérique confirme que le résultat obtenu à partir de la résolution de (II.8) reste valide pour la marche ERW (figure II.5). Ainsi, on trouve une dépendance non triviale de l'exposant de persistance en fonction de  $\beta$

$$\theta = 3/2 - 2\beta, \quad (\text{II.9})$$

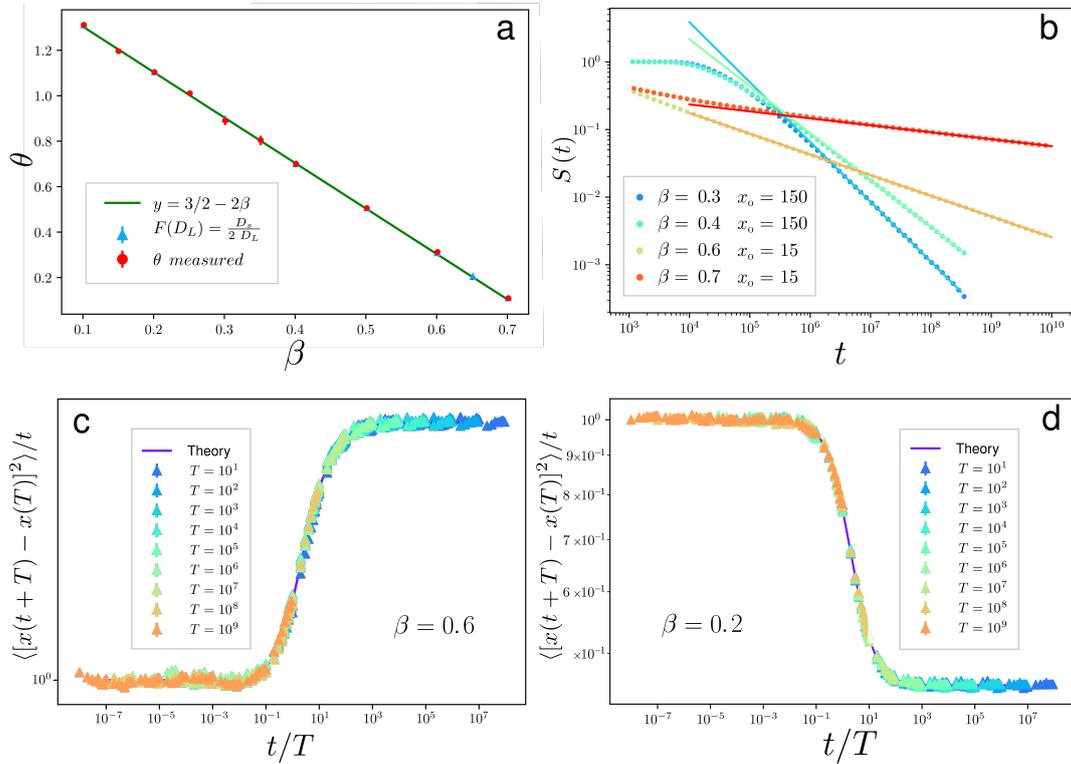


FIG. II.5 Exposant de persistance et effet de vieillissement de la marche éléphant. **a)** Exposant de persistance : simulation numérique, prédiction de l'équation (II.9) et prédiction basée sur la loi de Fick effective introduite en (II.13). **b)** Probabilité de survie de la marche ERW en fonction du temps (échelle logarithmique) pour différentes valeurs de  $\beta$ , les simulations numériques (symboles) sont tracées, de même que les fits utilisés pour **a)** (lignes pleines). **c),d)** Vieillissement des incréments de la marche ERW (normalisés par le comportement asymptotique diffusif attendu) et valeurs théoriques obtenues dans (II.7) (ligne pleine). Chaque courbe est tracée pour une valeur fixée de  $T$ .

On propose ici, de justifier la légitimité de ce résultat pour l'ensemble des cas diffusifs. On étend donc notre étude au cas  $3/4 > \beta > 1/2$  par rapport à Silva et al. [2011].

Définissons la probabilité conditionnelle  $P_c(x, t, x_0)$  que le marcheur initialement en  $x_0$ , soit en  $x$  à l'instant  $t$ , sachant qu'il n'a pas encore atteint une cible absorbante introduite en 0. La distribution en présence d'une cible absorbante peut être exprimée par  $S(t, x_0)P_c(x, t, x_0)$  où la probabilité de survie fait office de normalisation. Au vu des propriétés de la marche ERW énoncées auparavant, il est clair que dans la limite  $t \gg x_0^2/D_L$  et  $x \rightarrow 0$ , les effets de mémoire sont négligeables. On en déduit que la marche ERW vérifie aux temps longs une loi de Fick

$$\frac{\partial S(t, x_0)}{\partial t} = -S(t, x_0)D_s \frac{\partial P(t, x, x_0)}{\partial x} \Big|_{x=0}. \quad (\text{II.10})$$

En remplaçant  $S(t, x_0) \sim S_0 t^{-\theta}$ , on obtient

$$\frac{\theta}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} D_s \frac{\partial P_c(t, x, x_0)}{\partial x} \Big|_{x=0}. \quad (\text{II.11})$$

Afin de déterminer le comportement de  $P_c(x, t, x_0)$ , rappelons que dans la limite des temps longs le processus se comporte comme une marche diffusive de coefficient  $D_L$  [Coletti et al., 2017]. Ainsi, on émet l'hypothèse que les marcheurs *survivants* ont réalisé un comportement diffusif de coefficient  $D_L$ . En particulier, cela implique que la méthode des images s'applique. On obtient dans la limite des temps longs que  $P_c(x, t, x_0)$  présente la forme suivante

$$P_c(x, t, x_0) \underset{t \gg x_0^2/D_L}{\sim} \frac{x}{2D_L t} e^{-x^2/4D_L t}. \quad (\text{II.12})$$

Notons que la méthode des images ne s'applique pas directement à la densité en présence d'une cible, car la loi de Fick dépend de  $D_s$  et non  $D_L$ . De plus, on remarque que  $P_c(x, t, x_0)$  est indépendante de  $x_0$  dans la limite des temps longs, ce qui est implicitement déjà induit dans (II.10). On vérifie par ailleurs numériquement que la distribution de la loi conditionnelle vérifie bien (II.12) (figure II.6). Finalement insérons (II.12) dans (II.11) avec  $D_L$  et  $D_s$  donnée par a), on retrouve alors naturellement (II.9) pour tout  $\beta < 3/4$ . Notons qu'une approche similaire a été émise pour des processus strictement invariants d'échelle dans [Zoia et al., 2009]. Ce résultat reste valide indépendamment du choix du premier pas. Ainsi, l'exposant de persistance reste robuste à la perte d'une condition initiale non symétrique qui pourtant amène à un premier moment divergeant pour  $\beta > 1/2$ . Enfin, remarquons que  $\theta$  tend vers 0 pour  $\beta \rightarrow 3/4$ . Pour  $\beta > 3/4$ , on s'attend à ce que le processus soit transient, c'est-à-dire que la cible n'est plus atteinte avec une probabilité 1.

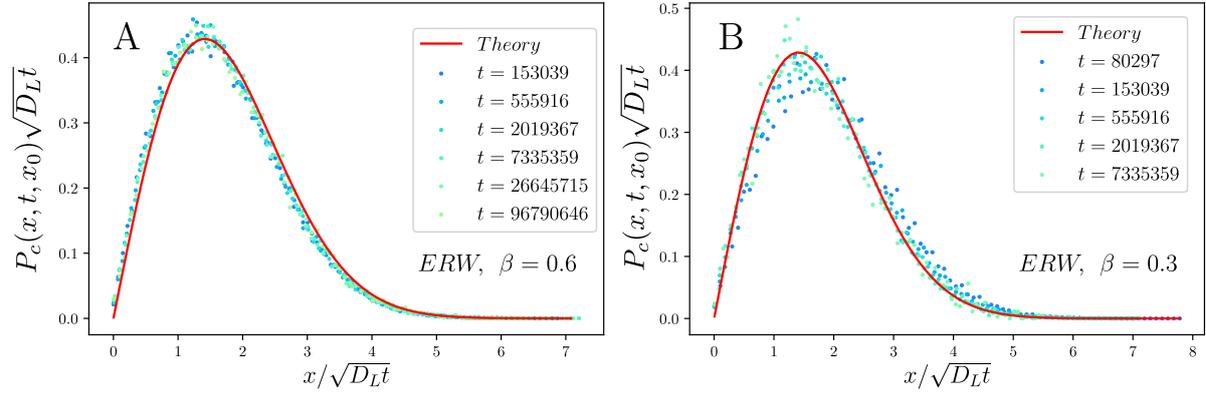


FIG. II.6 Probabilité conditionnelle de la marche éléphant  $P_c(x, t, x_0)$  pour  $\beta = 0.6$  **a)** et  $\beta = 0.3$  **b)**. Celle-ci est définie comme la probabilité que le marcheur, initialement en  $x_0$ , soit en  $x$  à l'instant  $t$  sachant qu'il n'a pas encore atteint une cible absorbante introduite en 0. Les courbes sont tracées en fonction de la variable normalisée  $x/\sqrt{D_L t}$ . La probabilité conditionnelle est tracée avec les marcheurs survivants (pour un nombre initial de  $N = 4,5 \cdot 10^5$ ). La solution de (II.12) est donnée en rouge.

### II.3.4 Conclusion : correspondances entre vieillissement et explorations anormales

Au cours de ce chapitre, on a exhibé différents exemples de processus non-markoviens asymptotiquement diffusifs présentant des exposants de persistance anormaux. Par ailleurs, nous avons observé que tous ces exemples présentent des effets de vieillissement similaires. Ceux-ci sont caractérisés par un comportement diffusif à toute échelle de temps contrôlé par la variable adimensionnée  $t/T$ . On propose donc la conjecture suivante :

**tout processus asymptotiquement diffusif présentant un exposant de persistance anormale doit nécessairement présenter des effets de vieillissement à toute échelle de temps.**

Complétons notre conjecture par plusieurs observations :

- Premièrement, on pourrait s'interroger sur la réciproque de notre conjecture. Nous proposons que dans la majorité des cas, un processus vieillissant à toute échelle de temps présente aussi un exposant de persistance anormal. Mais il n'est pas impossible de concevoir un processus vieillissant dont les propriétés d'exploration ne soient pas altérées.
- D'autre part, il paraît difficile de concevoir, pour un processus diffusif, un exemple de vieillissement à toute échelle de temps dont le comportement ne serait pas diffusif dans la limite  $T \gg t$ . En effet, en relevant les différents exemples fournis par la littérature, on observe que les processus présentant des comportements anormaux pour  $T \gg t$ , sont aussi anormaux pour  $t \gg T$ . Pour justifier ce constat, notons qu'un tel processus devrait présenter des effets non-markoviens suffisamment forts afin d'altérer le comportement  $T \gg t$ , mais dont les effets s'estomperaient entre  $T$  et  $T + t$  dans la limite  $t \gg T$ . Cela implique que les corrélations entre les différents sauts soient suffisamment fortes pour rétablir un comportement diffusif, ce qui est généralement l'inverse. Ainsi, on propose que les processus non-markoviens asymptotiquement diffusifs présentant des exposants de persistance anormaux soient nécessairement décrits par les comportements asymptotiques des incréments étudiés dans ce chapitre.
- Enfin, on pourrait s'interroger sur la généralisation de ce principe pour des processus anormalement diffusifs. On peut reprendre la relation  $\theta = 1 - d_f/d_w$  qui semble vérifiée pour des processus à incréments stationnaires anormalement diffusifs ( $d_w \neq 2$ ). On propose alors que pour observer des exposants anormaux, au sens de  $\theta \neq 1 - 1/d_w$ , ceux-ci présentent nécessairement des effets de vieillissement à toute échelle de temps<sup>\*7</sup>.

---

<sup>\*7</sup> Argument valide dans la convention où la cible est trouvée lorsque le marcheur la traverse si celui-ci effectue des sauts, comme pour les marches de Lévy.

## II.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié différents processus asymptotiquement diffusifs. Tout d'abord, nous avons remarqué que pour ceux ne présentant aucun effet de vieillissement, ces processus sont tous caractérisés par une valeur commune de l'exposant de persistance  $1/2$ . Cette observation s'étend pour des processus dont les incréments sont asymptotiquement stationnaires. Autrement dit, des effets de vieillissement transitoires ne modifient pas le comportement asymptotique de  $S(t)$ .

Ensuite, nous nous sommes penchés sur différents exemples de processus dont les incréments présentaient des propriétés de vieillissement à toute échelle de temps, tout en conservant un comportement diffusif y compris dans la limite  $t \ll T$ . Ces différents incréments sont asymptotiquement décrits par la variable adimensionnée  $t/T$ , et possèdent deux coefficients de diffusions distincts selon les limites  $t/T \rightarrow 0$ ,  $t/T \rightarrow \infty$ . Pour tous ces processus, nous avons identifié des exposants de persistance anormaux dont certains ont été déterminés analytiquement. Certains de ces exposants sont contrôlés par les paramètres microscopiques des marches associées et peuvent varier sur de grandes plages de valeurs. Deux constats importants peuvent être retenus.

Premièrement, il est possible d'obtenir des propriétés de premier passage non triviales, y compris pour des marches aléatoires diffusives, ce qui à notre connaissance n'avait jamais été observé. Des effets non-markoviens "faibles" sont donc suffisants pour influencer sur le comportement asymptotique de  $S(t)$ . Deuxièmement, de tels effets doivent être suffisamment "forts" afin de générer des effets de vieillissement à toute échelle de temps. Dès lors, nous avons proposé la conjecture suivante : tout processus asymptotiquement diffusif présentant un exposant de persistance anormal présente de tels effets de vieillissement. Ajoutons que la réciproque est le plus souvent vérifiée et que le comportement des incréments diffusifs, y compris pour  $T \gg t$ , est le modèle principal proposant un vieillissement non stationnaire pour tout  $T$ .

Par la suite, nous avons cherché à identifier une relation explicite entre le comportement des incréments et la valeur de  $\theta$ . Une telle relation est identifiée pour la marche ERW mais n'a pas pu être étendue aux autres marches étudiées.

Enfin, nous avons observé que les effets de vieillissement ont aussi un impact sur les propriétés de premier passage de processus diffusifs, y compris pour des explorations marginalement compactes. Ce dernier point est développée en extension à la suite de cette conclusion.

## II.5 Extension : exemple de la marche avec une relocalisation sur les sites précédemment visités

Afin de confirmer la validité de notre critère, considérons une autre marche aléatoire présentant des effets de mémoire à longue portée introduite dans [Boyer et al., 2014]. Ce modèle aussi appelé Monkey Walk est un des rares exemples de processus dont la trajectoire future dépend de l'historique complet des sites visités et dont on peut déterminer avec précision les propriétés asymptotiques du déplacement quadratique moyen. Le processus peut être défini comme suit en dimension 1. Le marcheur part de l'origine d'un réseau discret et à chaque pas de temps :

- a une probabilité  $1 - q$  de sauter sur un site choisi uniformément parmi les plus proches voisins
- et saute, avec une probabilité complémentaire, sur un site précédemment visité à un instant  $t' \in [0, t]$  avec une probabilité donnée par un noyau dépendant du temps  $p_t(t') = N(t)(t - t' + 1)^{-\beta}$  où  $N(t)$  est une constante de normalisation.

Pour  $\beta > 2$ , il a été montré que le processus est diffusif aux temps longs [Boyer et al., 2014]. Nous présentons ici les résultats numériques pour  $\beta = 3$ . Les incréments se révèlent être stationnaires. La valeur  $\theta = 1/2$  est vérifiée pour tout paramètre  $q \in ]0, 1[$ , en accord avec notre proposition (figure II.7).

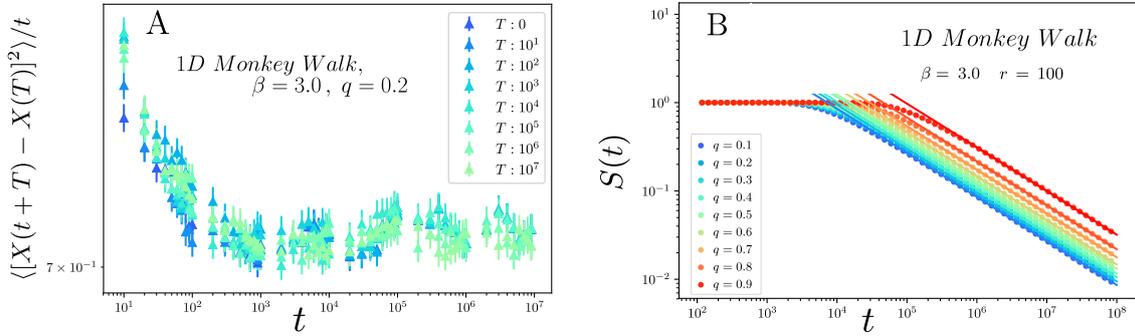


FIG. II.7 **A** Incréments de la marche Monkey walk avec  $\beta = 3.0$  (normalisés par le comportement diffusif attendu aux temps longs). Chaque courbe est tracée à  $T$  fixé. Les incréments sont stationnaires malgré le comportement non-markovien intrinsèque à la loi d'évolution du processus. **B** Probabilité de survie (échelle logarithmique) pour  $\beta = 3.0$ , et selon différentes valeurs de  $q$ . Simulations numériques (symboles) et fits en loi de puissance (ligne). Toutes les courbes partagent la même valeur de l'exposant  $\theta = 1/2$  avec un préfacteur dépendant de  $q$ .

## II.6 Extension : lien explicite entre l'exposant de persistance et les comportements asymptotiques des incréments

On a confirmé les correspondances entre le comportement des incréments et l'existence d'exposants anormaux. D'autre part, l'exemple spécifique de la marche ERW propose une relation explicite entre ceux-ci. En effet, en reprenant (II.9), on s'aperçoit que  $\theta$  peut être déduit du rapport  $D_s/D_L$

$$\theta_{ERW} = \frac{D_s}{2D_L(\beta)}. \quad (\text{II.13})$$

Cela suggère que le comportement asymptotique des incréments est suffisant pour caractériser les propriétés de premier passage de la marche ERW. Dès lors, on cherche à identifier si une telle relation peut être obtenue pour la marche SATW. Reprenons la méthode développée pour la marche ERW ([Zoja et al., 2009]), et tâchons de l'appliquer pour le cas de la marche SATW.

Considérons une cible introduite à une distance 1 de la position initiale du marcheur. Nous avons vu précédemment que ce choix n'influe pas sur la valeur de l'exposant de persistance. La cible peut alors être modélisée comme possédant un taux de réaction imparfait donné par une probabilité  $\beta$  de trouver la cible en 0. On peut ainsi s'appuyer sur les travaux de Grebenkov [2018] que l'on résumera ici : pour une marche simple diffusive de coefficient  $D_s$ , le courant sortant en 0 d'une cible imparfaite, peut être modélisé par une loi de Fick caractérisée par un coefficient de diffusion  $D_s$  dans la limite  $t \gg 1$ . On propose alors que la marche SATW admette un courant de Fick de coefficient de diffusion  $D_s$  dans la limite  $t \gg 1$ , ce qui est vérifié numériquement (figure II.8). De plus, cette hypothèse reste valide dans le cas où  $x_0 \neq 1$  dans la limite  $\sqrt{t} \gg x_0$ . Autrement dit, on suppose que les effets non-markoviens induits par les sites non visités entre la cible et  $x_0$  vont être négligeables dans la limite des temps longs, et que le profil de la distribution  $P(x, t)$  est linéaire dans la limite  $x \gg x_0$ . Justifions un tel comportement pour la marche SATW en remarquant que, dans la limite  $t \gg \sqrt{x} \gg \sqrt{x_0}$ , le marcheur va majoritairement évoluer dans le territoire déjà visité. En réécrivant la distribution en présence d'une cible selon la distribution conditionnelle  $P_c(x, t, x_0)$ , on obtient identiquement que pour la marche ERW

$$\frac{\theta_{SATW}}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} D_s \frac{\partial P_c(t, x, x_0)}{\partial x} \Big|_{x=0}.$$

On cherche alors à déterminer le comportement de  $P_c(t, x, x_0)$  pour  $x \rightarrow 0$  que l'on sait linéaire et indépendant de  $x_0$  puisque la probabilité conditionnelle vérifie une loi de Fick, dans la limite  $x, t \gg x_0$ . On propose alors la forme suivante pour  $P_c(t, x, x_0)$

$$P_c(t, x, x_0) = \frac{1}{\sqrt{D_L t}} f_\beta\left(\frac{x}{D_L \sqrt{(t)}}\right). \quad (\text{II.14})$$

Autrement dit, on fait l'hypothèse que les marcheurs survivants ont exploré un territoire décrit par  $D_L \sqrt{t}$ . Mais contrairement à la marche ERW, on suppose que proche de 0, le comportement de  $f$  est indépendant de  $\beta$ ,  $f_\beta\left(\frac{x}{D_L \sqrt{(t)}}\right) = \frac{x}{2\sqrt{D_s t}} + o\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ .

Reformulé autrement, on suppose que l'on peut découpler deux échelles, l'étalement caractéristique des marcheurs dans l'ensemble du territoire visité, déterminé par  $D_L$ , et le comportement des marcheurs proches de la cible, déterminé par  $D_s$  et indépendant de  $\beta$ . On s'appuie encore sur le fait que les marcheurs effectuent une marche de pólya dans la zone visitée. En injectant le comportement supposé de  $f_\beta$  à petite distance, on obtient la relation suivante entre  $\theta$ ,  $D_s$  et  $D_L$

$$\theta_{SATW} \approx \frac{\sqrt{D_s}}{2\sqrt{D_L}}. \quad (\text{II.15})$$

Les valeurs de  $\theta$  obtenues en utilisant  $D_L$  mesuré numériquement sont comparées au résultat exact (figure II.8). Néanmoins, même si la relation proposée pour la SATW semble capturer avec précision la dépendance de  $\theta$  selon  $\beta$ , il subsiste un écart non négligeable entre la mesure de (II.15) et la valeur exacte (II.6). Cet écart augmentant dans la limite  $\beta \rightarrow 0$ .

Ainsi, les approximations pour décrire le comportement de  $P_c(t, x, x_o)$  proche de la cible à partir du comportement des incréments permettent de décrire approximativement le comportement de  $\theta$  mais ne révèlent pas exactes. Notons que cette approche reste pertinente dans la limite où  $D_L$  n'est pas petit devant  $D_s$ . Même si ce résultat n'est pas exact, une simple mesure des incréments du processus aux temps courts et aux temps longs permet d'obtenir une valeur approchée de  $\theta$ . En effet, dans des prototypes réalistes, le paramètre microscopique  $\beta$  n'est pas forcément accessible, et une mesure des incréments peut être une manière indirecte d'obtenir le comportement approché des propriétés de premier passage de tels modèles. En particulier l'approximation (II.15) semble aussi rester pertinente dans le cas du modèle PSATW. Achéons en remarquant que cette approche ne fonctionne pas pour le modèle à renforcement en loi de puissance,  $\theta$  ne dépendant pas de  $\beta$  contrairement à  $D_L(\beta)$ . Ainsi, même s'il existe une correspondance claire entre les effets de vieillissement des incréments et l'existence d'exposants anormaux pour  $\theta$ , il n'existe pas de relation universelle entre le comportement exact des incréments et  $\theta$ . On pourrait compléter en ajoutant que le comportement des incréments est suffisant pour décrire l'évolution complète du marcheur seulement dans le cas de processus gaussiens. Il est donc naturel qu'une telle relation ne puisse pas exister pour des processus comme la SATW ou les marche à renforcement en loi de puissance dont les distributions de probabilité ne sont pas gaussiennes.

## II.7 Extension : comportement diffusif vieillissant pour les explorations transientes et marginales

Avant de conclure ce chapitre, intéressons-nous aux conséquences des effets de vieillissement sur les propriétés de premier passage de processus asymptotiquement diffusif en dimension supérieure à 1. On se concentrera sur la généralisation du modèle ERW en dimension supérieure à 1, la plus classique ne couplant pas les effets de mémoire entre les directions. Ce modèle  $d$  est donc formé de  $d$  marches éléphants  $1d$ , de paramètre commun  $\beta$ , évoluant indépendamment selon chacun des axes du réseau.

On en déduit logiquement que le comportement des incréments en dimension  $d$  est identique à celui décrit plus haut. Ainsi, la marche ERW est un bon prototype de processus vieillissant à toute échelle de temps dont les propriétés de premier passage peuvent être mesurées en dimension supérieure à 1.

En dimension 3, on s'attend à ce que le processus réalise une exploration non compacte, c'est-à-dire qu'il a une probabilité finie de ne jamais trouver une cible en espace infini. Notons  $P(a, r)$ , la probabilité de trouver une cible de taille  $a$  introduite à une distance  $r$  de la cible. Dans la limite  $r \gg a \gg 1$ , pour de nombreux processus le comportement asymptotique de  $P(a, r)$  est décrit par une loi de puissance caractérisée par l'exposant dit de transience  $\psi$  (indépendamment de la direction où se trouve la cible y compris sur des réseaux). Il a été observé que pour des processus non-vieillissants,  $\psi$  vérifiait la relation suivante :  $\psi = d - d_w$ . Cette relation se vérifie pour la marche ERW malgré les effets de vieillissement à temps longs (figure II.9, chapitre 4). Justifions ce constat en remarquant que lorsque  $T \gg t$ , le processus est déjà très loin de la cible et a une probabilité de revenir négligeable. Ainsi pour les processus non compacts, l'exemple de la marche ERW nous amène à proposer que les effets de vieillissement diffusifs à toute échelle de temps n'altèrent pas le comportement dominant des propriétés de premier passage.

Ensuite, considérons le cas de la dimension 2 pour laquelle le processus est dit marginalement compact. Il présente alors certaines caractéristiques des processus compacts et d'autres, typiques des processus non compacts. Les processus marginalement compacts ont une probabilité  $P(a, r) = 1$  de trouver la cible en milieu infini ( $a > 0$ ). Cependant, il a été montré que la probabilité de survie présente cette fois-ci une décroissance logarithmique

$$S(t) \underset{r \gg a, t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln(r^{d_w}/a^{d_w})}{\ln(t/a^{d_w})}.$$

Dans le cas de la marche ERW, l'analyse numérique de la probabilité de survie présente une dépendance du logarithmique asymptotique qui n'est plus linéaire caractérisée par un exposant  $\nu \neq 1$  (figure II.9, les détails des mesures numériques sont donnés en annexe F.2)

$$S(t) \underset{r \gg a, t \rightarrow \infty}{\sim} \left( \frac{\ln(r^{d_w}/a^{d_w})}{\ln(t/a^{d_w})} \right)^\nu.$$

Un tel comportement n'a, à notre connaissance, pas été relevé dans la littérature. À travers cet exemple, on propose que les effets de vieillissement soient liés à cette décroissance non linéaire dans le cas marginalement compact. Enfin, cette exploration que l'on qualifiera d'anormale peut avoir des conséquences importantes sur les propriétés de premier passage en confinement. Cette dernière observation sera plus largement abordée dans le chapitre 4.

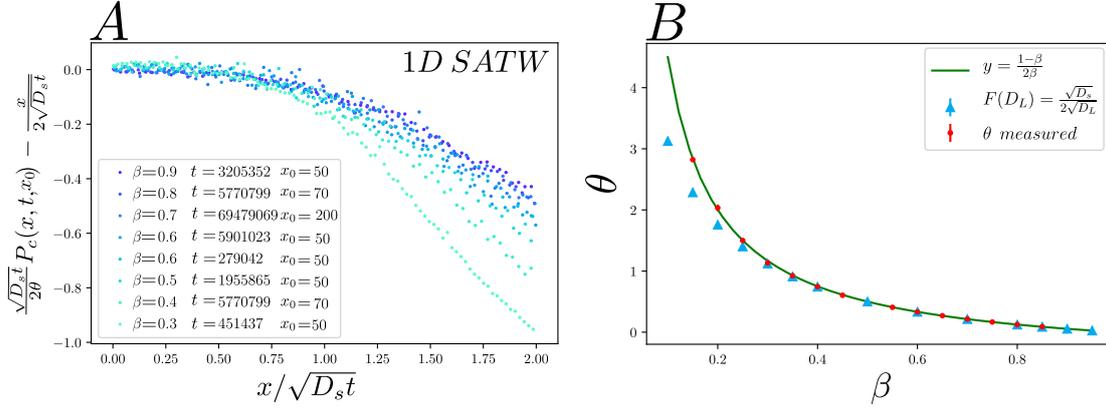


FIG. II.8 Lien explicite entre l'exposant de persistance et le comportement asymptotique des incréments. **A** Illustration du courant de Fick vérifié par la distribution conditionnellement à ce que la cible n'ait pas encore été atteinte. La distribution est multipliée par  $\sqrt{t}$  de manière à observer le comportement à petit  $x/\sqrt{D_s t}$  de  $f_\beta$  donné par (II.14) et son approximation. Pour cela, on a soustrait le terme linéaire dont les dépendances  $\sqrt{D_s}/2\theta$  et  $2\sqrt{D_s}$  sont directement déduits du courant de Fick supposément vérifié par  $P_c$ . Dès lors, on observe bien une annulation en 0 avec une dérivée nulle dans la limite  $x/\sqrt{t}$ . En conséquence  $P_c$  vérifie bien un courant de Fick faisant directement intervenir l'exposant de persistance en 0. L'hypothèse conduisant à (II.15) consiste donc à supposer que le préfacteur devant  $f_\beta$ , et donc ici devant  $P_c$ , est en réalité égal à  $\sqrt{D_L t}$ . **B** Comparaison, entre la valeur exacte de  $\theta$  obtenue précédemment pour la marche SATW et la prédiction donnée par la mesure du rapport  $D_s/D_L$  en bleu. On observe que celle-ci n'est pas exacte en particulier dans la limite  $\beta \rightarrow 0$  mais qu'elle suit le comportement global de  $\theta$  en fonction de  $\beta$ .

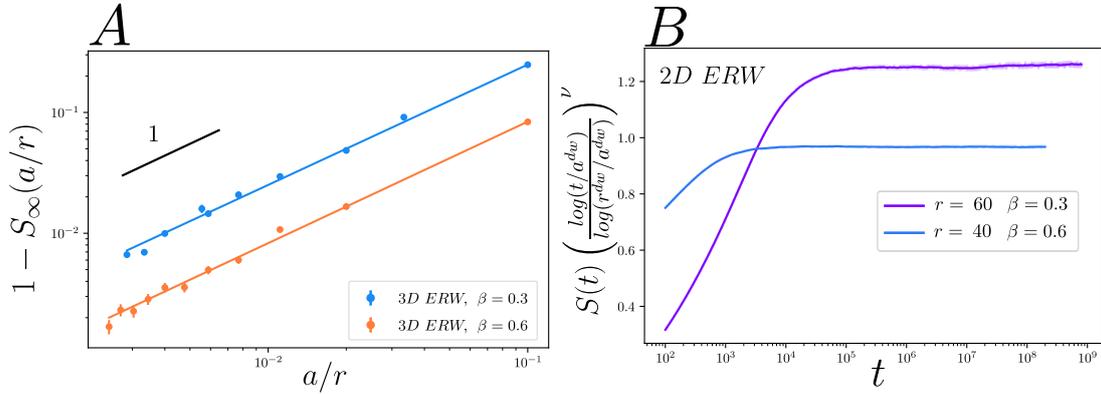


FIG. II.9 Probabilité de premier passage de la marche ERW en dimension supérieure à 1 en espace infini. **A** Probabilité de trouver la cible notée  $1 - S_\infty(a/r)$  en dimension 3 en fonction de la distance initiale pour  $\beta = 0.3$  et  $\beta = 0.6$ . On observe une dépendance linéaire en  $a/r$  attestant d'un exposant de transience  $\psi = 1$ . **B** Probabilité de survie de la marche ERW en dimension 2 en espace infini normalisée par son comportement asymptotique  $\left(\frac{\ln(t/a^{d_w})}{\ln(r^{d_w}/a^{d_w})}\right)^\nu$ . On remarque une décroissance logarithmique non linéaire pour  $\beta \neq 1/2$  ( $\nu \approx 0.61$  pour  $\beta = 0.6$  et  $\nu \approx 2$  pour  $\beta = 0.3$ ), comportement que l'on propose d'associer aux effets de vieillissement dans le cas d'explorations marginalement compactes.

# III – Propriétés de premier passage de marches à renforcement attractif

## III.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéressera plus spécifiquement aux marches dont les effets de renforcement sont considérés comme attractifs, autrement dit pour lesquels le marcheur préfère revisiter les sites qui ont été le plus souvent occupés. Ces modèles prennent toute leur importance dans la description de trajectoires réelles effectuées par des êtres vivants qui ont la capacité de déposer des signaux chimiques, puis d'interagir avec ceux-ci, voire de remodeler le territoire qu'ils explorent et cela à différentes échelles. On peut par exemple penser, à une échelle microscopique, à des trajectoires de bactéries ou de cellules [Boyer et al., 2012 ; Cremer et al., 2019 ; Donà et al., 2013 ; Schwab et al., 2007 ; Tweedy et al., 2016], et à une échelle macroscopique, à des mouvements d'animaux ou d'insectes en quête de nourriture ou d'un partenaire [Berbert et al., 2012 ; Boyer et al., 2010 ; Börger et al., 2008 ; Sakiyama et al., 2018 ; Sims et al., 2014]. Les fourmis en sont un exemple particulièrement évocateur puisqu'il est reconnu qu'elles interagissent, par le biais de phéromones avec les endroits qu'elles ont déjà visités.

Nous verrons que les effets attractifs peuvent jouer un rôle particulièrement important dans les propriétés d'exploration de ces comportements, car ils permettent de générer un territoire visité particulièrement homogène, y compris en espace infini. En particulier, ce type d'exploration permet de trouver une cible avec une probabilité 1 en espace infini, et cela indépendamment de la dimension du milieu dans lequel évolue le marcheur. En revanche, si les effets attractifs sont trop importants, le marcheur peut être piégé dans sa propre trajectoire, ne pouvant alors plus explorer de nouveaux sites. Enfin, nous verrons que les effets de renforcement à petit nombre de visites ont un impact déterminant sur les propriétés d'exploration de ces processus, rendant l'analyse précise de tels modèles très difficile en espace infini.

On suivra le cheminement suivant. Premièrement, on s'intéressera au comportement du marcheur que l'on appellera dans la suite *piégé*. Pour celui-ci, le marcheur fini par osciller entre un nombre fini de sites du réseau. On verra alors que les caractéristiques du renforcement attractif responsables de l'apparition de ce comportement, dépendent fortement de la définition exacte des effets attractifs qui peuvent être introduits sur les sites ou sur les liens du réseau. Ensuite, dans un second temps, on s'intéressera aux marcheurs effectuant une exploration non piégée, pour lesquels on déterminera les propriétés de transport.

Encore une fois, on prendra soin d'observer que la définition des effets de renforcement joue un rôle important sur le comportement asymptotique de certains de ces modèles. On s'intéressera plus spécifiquement aux marcheurs effectuant un comportement sous-diffusif, pour lesquels on déterminera leurs propriétés de vieillissement et de premier passage en espace infini. Les propriétés de premier passage et de vieillissement des marcheurs faiblement attractifs réalisant un comportement diffusif seront, quant à elles, approfondies dans le prochain chapitre. Enfin dans une dernière partie, on se penchera sur un exemple pratique de trajectoires réelles présentant des propriétés de renforcement, réalisées par des cellules épithéliales déposées sur des substrats 1D et 2D. Nous mettrons en pratique les différents résultats obtenus dans les parties précédentes afin de caractériser l'importance des effets de renforcement sur les trajectoires observées.

## III.2 Comportement piégé des marcheurs attractifs

### III.2.1 Définitions des conventions sur sites et sur liens

Commençons par rappeler la définition générale des marches à renforcement étudiées dans cette thèse. On définit le poids  $w(n_i(t)) = e^{-f(n_i(t))}$ , associé au site  $i$  qui, dans le cas de marches attractives, est une fonction monotone croissante du nombre de visites,  $n_i(t)$ , du site  $i$  jusqu'à  $t$ . La probabilité de réaliser le saut entre le site  $i$  et le site voisin  $j$  est alors donnée par

$$p(X_i \rightarrow X_j, t) = \frac{w(n_j(t))}{\sum_{i'} w(n_{i'}(t))}, \quad (\text{III.1})$$

où la somme porte sur les voisins de  $i$ . Cette convention de la définition des effets de renforcement sera appelée dans la suite, convention sur *site*. Elle sera opposée à la convention sur *lien*, pour laquelle  $n_{i-j}(t)$  compte le nombre de fois que le marcheur a emprunté le lien entre les sites  $i$  et  $j$ . Nous verrons par la suite, que selon le choix de  $w$  et de la convention, les propriétés de ces différents modèles peuvent fortement évoluer. Avant cela, introduisons le comportement dit "piégé" mentionné en introduction.

### III.2.2 Définition du comportement piégé des marcheurs attractifs

Commençons par prendre l'exemple type d'un poids exponentiel où  $w(n) = e^{-\beta n}$  (avec  $\beta < 0$ ) pour un modèle sur site et supposons que le marcheur est initialement sur le site  $x_0$ . La probabilité d'alterner successivement entre les sites  $x_0, x_0 + 1$  durant  $2n$  sauts est alors donnée par  $\prod_{k=0}^n (1 + e^{-\beta k})^{-2}$ . Il est clair que ce produit tend vers une limite finie pour  $n \rightarrow \infty$ . Autrement dit, le marcheur a une probabilité finie d'alterner à jamais entre les deux sites. Cet évènement que l'on appellera effet de *piégeage* a été largement étudié depuis l'introduction des modèles à renforcement. Plus généralement, on parlera d'un marcheur "*piégé*" si *celui-ci a une probabilité 1 de découvrir un nombre fini de sites du réseau* (figure III.1). En conséquence, un tel marcheur a une probabilité 1 de rester infiniment piégé dans un volume fini de sites du réseau. On va maintenant chercher à décrire les critères relatifs à l'apparition de ce comportement qui ont été précédemment obtenus dans la littérature, et ce dans les deux conventions (sites et liens).

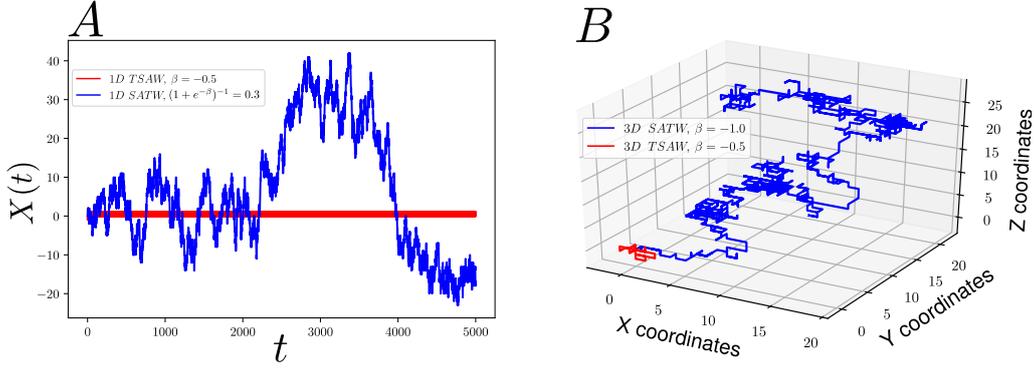


FIG. III.1 Comparisons entre les comportements piégés et non piégés. La marche TSAW attractive présente un comportement piégé en dimension 1 **A** et en dimension 3 **B**, contrairement à la marche SATW attractive, pour laquelle on définit dans ce chapitre un poids donné par,  $w(n_i(t)) = e^{-\beta}$  pour les sites précédemment visités ( $n_i(t) \geq 1$ ) et  $w(n_i(t)) = 1$  sinon.

### III.2.3 Théorème de Davis et extensions

Afin de mieux saisir l'apparition d'un comportement piégé, un théorème proposé par Davis [1990] apporte une première classification. Ce premier critère a été émis pour des marches à renforcement en dimension 1 dans la convention sur lien :

- Pour des choix de  $w(n)$  tels que  $\sum_{n=1}^{\infty} w(n)^{-1} = \infty$  la marche n'est pas piégée et va visiter tous les sites du réseau.
- À l'inverse si  $\sum_{n=1}^{\infty} w(n)^{-1} < \infty$ , la marche est piégée et oscillera entre deux sites du réseau.

De nombreux travaux ont permis d'étendre la portée de ce théorème en dimension supérieure à 1 [Cotar et al., 2017 ; Sellke, 2008 ; Stevens et al., 1997] et pour certains graphes non-euclidiens\*<sup>1</sup>. Par la suite, de nombreuses études, plus mathématiques, se sont penchées sur le comportement des marches attractives définies sur site par (III.1) dont on résumera les principaux résultats pour des espaces euclidiens\*<sup>1</sup> [Cotar et al., 2017 ; Tarrès, 2004 ; Volkov, 2001, 2006] :

- Pour des poids dont le comportement asymptotique est super linéaire ( $w(n) \sim O(n^\beta)$ , avec  $\beta > 1$ ), le processus est bien piégé sur deux sites du réseau.
- Pour des poids dont le comportement asymptotique est sous-linéaire ( $w(n) \sim O(n^\beta)$ , avec  $\beta < 1$ ), le processus n'est plus piégé\*<sup>2</sup>.
- Pour des poids asymptotiquement linéaires,  $w(n) \sim O(n)$ , les marcheurs sont piégés contrairement aux modèles sur lien. Ce résultat s'étend aussi aux modèles dont le comportement est marginalement linéaire en dimension 1, autrement dit, pour lesquels on définit  $w(n) \sim ng(n)$ , où  $g(n)$  est plus faible qu'une loi de puissance [Basdevant et al., 2014].

\*<sup>1</sup> Ces critères ont été étendus à des graphes quelconques dont le nombre de voisins restait fini [Cotar et al., 2017 ; Limic, 2003 ; Limic et al., 2007].

\*<sup>2</sup> La propriété de récurrence, autrement dit que tous les sites du réseau sont visités un nombre infini de fois, n'a toujours pas été prouvée analytiquement pour  $\beta > 1/2$  [Chen et al., 2014].

Ainsi, le critère émis par Davis reste applicable pour la convention sur site, à l'exception des poids linéaires et faiblement linéaires. De plus, il est indépendant de la dimension du réseau euclidien dans lequel le marcheur évolue<sup>\*3</sup>. Ces résultats ont été obtenus par des travaux mathématiques, et l'analyse des propriétés soulevées dans ces travaux peut être complexe. En conséquence, on proposera par la suite des arguments d'échelles permettant de retrouver ces résultats, l'objectif étant de proposer une approche simplifiée, unifiant les différents résultats énoncés ci-dessus. On cherchera par ailleurs à proposer une représentation faisant émerger naturellement les critères énoncés ci-dessus, en insistant sur les différences entre les deux conventions.

Ensuite, l'importance de la définition des deux conventions et les nombreuses différences qu'elles génèrent restent peu connues en physique. En particulier, la convention sur site est souvent privilégiée alors que les résultats exacts sont le plus souvent connus pour les modèles sur lien. En conséquence, avant de développer une analyse des comportements piégés, on propose de traiter un dernier exemple qualitatif afin de mieux saisir l'importance de la convention, en particulier pour les modèles dont les poids présentent un comportement asymptotique en loi de puissance  $w(n) \sim n^\alpha$ .

### III.2.4 Comparaisons entre les modèles à renforcement sur sites et sur liens

Afin de mieux saisir les facteurs responsables d'une telle déviation entre les deux comportements, intéressons-nous à la situation fictive suivante. Supposons pour cela, qu'un marcheur attractif, évoluant dans un espace en dimension 1, a passé un temps négligeable entre les sites  $i$  et  $i + 1$  comparé à celui entre les sites  $i$  et  $i - 1$ . Autrement dit, on s'intéresse à des sites pour lesquels le *gradient* du temps local est élevé. Ici, on va considérer des poids  $w$  divergeants, et volontairement simplifier les notations afin de mieux illustrer notre propos.

Penchons-nous alors sur l'instant où le marcheur saute du site  $i$  vers le site  $i + 1$ , et notons identiquement  $w_i$ , les poids respectifs associés au site  $i$  ou au lien  $\{i, i + 1\}$  dans les deux conventions au moment du saut. Dès lors, ce saut est effectué avec une probabilité proportionnelle à  $w_{i+1}/(w_{i+1} + w_{i-1})$  avec  $w_{i+1} \ll w_{i-1}$  pour la convention sur site et  $w_i/(w_i + w_{i-1})$  avec  $w_i \ll w_{i-1}$  pour la convention sur lien. Ainsi, un tel saut que l'on qualifie de *rare* dans les deux conventions, est bien sûr d'autant plus improbable que le temps passé entre les sites  $i$  et  $i - 1$  augmente. La distinction entre les deux conventions apparaît lorsque l'on considère le prochain saut (figure III.2).

Dans la convention sur lien, où  $w(i)$  dépend du nombre de passages entre les sites  $i$  et  $i + 1$ , la probabilité du prochain saut est relativement indépendante du temps passé sur le site  $i$ <sup>\*4</sup>, conduisant à

$$p(x = i + 2) = \frac{w(i + 1)}{w(i) + w(i + 1)} \sim O(1).$$

<sup>\*3</sup> Le comportement des marches faiblement linéaire a seulement été prouvé en dimension 1, mais on propose qu'il puisse s'étendre en dimension supérieure à 1.

<sup>\*4</sup> Notons que la relation  $w(i-1) \gg w(i)$  implique que  $w(i+1) = O(w(i))$ . En particulier si  $w(i+1) \sim w(i)$  le marcheur n'est plus particulièrement attiré par le site  $i$  alors que celui-ci a été visité un nombre de fois élevé.

Inversement dans la convention sur site, le prochain saut dépend encore du temps passé sur le site  $i$ , supposé élevé

$$p(x = i + 2) = \frac{w(i + 2)}{w(i) + w(i + 2)} \ll 1.$$

Le marcheur a alors une probabilité élevée de revenir sur le site  $i$ , puisqu'il est encore sensible aux nombreux passages entre les sites  $i$  et  $i - 1$ . Cette observation est cruciale dans la compréhension des différences entre les deux conventions, et est peu commentée en physique. Pour une définition sur lien, les marcheurs sont moins sensibles aux gradients locaux élevés. Inversement, pour la convention sur site, il faudra deux pas successifs au marcheur pour s'extraire d'une zone relativement plus visitée. Cet effet s'intensifiant d'autant plus que les probabilités de tels sauts sont très faibles. Dès lors, une convention sur site imposera une exploration nécessairement plus lente dont le comportement asymptotique peut parfois largement différer de la convention sur lien.

Notons que les différences, relevées ici, expliquent le choix de nombreux travaux analytiques y compris dans l'analyse de processus répulsifs en dimension 1 (des détails additionnels sont consultables en annexe E.1). Après avoir relevé les différences fondamentales entre ces deux conventions, on peut désormais envisager de retrouver les critères associés au comportement piégé au moyen d'arguments en loi d'échelle.

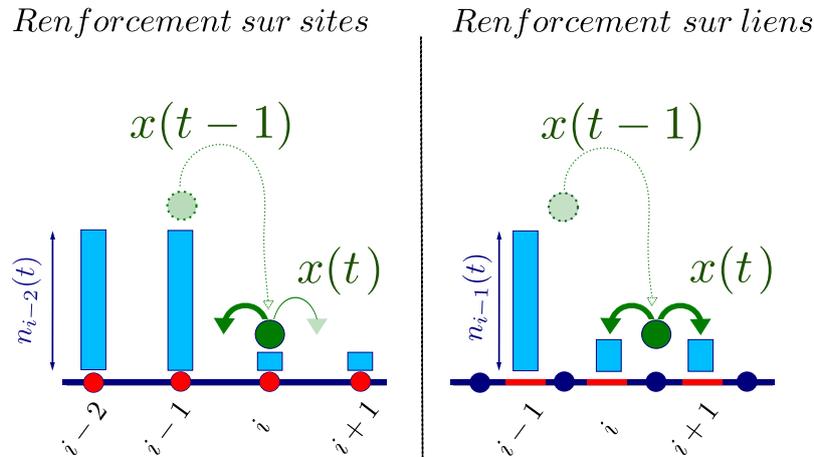


FIG. III.2 Comparaisons entre les conventions sur site et sur lien. Dans la première définition sur site, il faudra deux pas successifs au marcheur pour s'extraire d'une zone relativement plus visitée. Inversement, pour la convention sur lien, après un saut, le marcheur n'est plus sensible au temps passé sur le lien adjacent du site qu'il vient de quitter.

### III.2.5 Comportement des marches attractives piégées

Tout d'abord, observons que les arguments qui vont être développés dans cette partie ne font pas office de preuve exacte, mais sont supportés par une analyse numérique et les différents travaux précédemment cités pour les deux conventions.

Cette approche a principalement comme objectif de fournir un argument mathématiquement non rigoureux qui permet d'unifier les résultats mathématiques établis au cas par cas. En outre, elle permet de poser les fondements de l'analyse des propriétés de transport et de vieillissement que l'on développera par la suite. Les arguments qui vont être présentés ci-dessous sont émis dans le cas de la convention sur site, mais le critère de Davis peut être retrouvé dans le cas de la convention sur lien.

### a) Définition du volume piégé $V_0$

Un premier exemple de piège :

Considérons un marcheur attractif évoluant dans un espace infini de dimension quelconque dont le nombre de voisins par site reste borné, et introduisons un temps arbitraire  $\tau > 0$ . Premièrement, on remarque que le marcheur a une probabilité finie non nulle d'osciller entre le site de départ et un site voisin jusque à  $\tau$ . À partir de  $\tau$ , le marcheur va donc avoir de plus en plus de difficulté de s'extraire de ces deux sites. Cela va définir notre premier piège, ici de taille 2. En pratique, si le marcheur effectue une exploration *non piégée*, il pourra reproduire au cours de son évolution un nombre infini de *pièges* de taille variable, similaires à celui décrit précédemment. Par la suite, on étudiera les conditions nécessaires sur  $w(n)$  pour que le processus reste piégé indéfiniment avec une probabilité non nulle, ou à l'inverse, pour qu'il puisse s'en extraire avec une probabilité 1.

Définition du volume piégé  $V_0$  :

Supposons que le marcheur reste piégé dans un volume  $V_0$  depuis un instant  $\tau$  et cela jusqu'à  $t$ . Le volume  $V_0$  est alors défini le plus minimal possible, autrement dit  $V_0$  est formé exclusivement de sites visités un nombre non négligeable de fois selon  $t$  et des sites en contact avec ceux-ci. On cherche à déterminer le comportement de la probabilité d'être resté dans  $V_0$  pendant  $t - \tau$  dans la limite  $t \gg \tau$ . En s'inspirant de la partie précédente, on remarque que cela induit un gradient fort entre les frontières intérieures et extérieures de  $V_0$ , notées respectivement  $\partial_{\pm} V_0$ . La frontière extérieure  $\partial_- V_0$  est formée de sites qui ont été visités un nombre négligeable de fois comparé aux sites de la frontière intérieure  $\partial_+ V_0$ , définis comme les sites en contact avec au minimum un site de  $\partial_- V_0$  (figure III.3). Dans le cas de la convention sur site, on considérera qu'un marcheur est *sorti* de  $V_0$  s'il s'extrait de  $\partial_- V_0$ .

Afin d'explicitier plus clairement le comportement du gradient à la frontière de  $V_0$ , tâchons de déterminer le temps passé aux bords  $\partial_+ V_0$ . En remarquant que le marcheur passe la plupart de son temps à l'intérieur de  $V_0$ , on propose de réécrire le potentiel dans  $V_0$  à un instant  $t' \gg \tau$  de la manière suivante

$$V(n(x_{V_0}, t')) = \beta f(n(x_{V_0}, t')) = \beta f(A(x_{V_0}) \frac{t'}{V_0} + o(t', x_{V_0})),$$

où on a défini le temps associé à  $n'$  sauts  $t' = n' dt$  et  $A = 0(1)$ . En particulier, ce comportement reste valide à la frontière intérieure  $\partial_+ V_0$ . D'autre part, on propose que le potentiel de la frontière extérieure présente le comportement suivant

$$V(x_{\partial_- V_0}, t') = \beta f(o(t', x_{\partial_- V_0})).$$

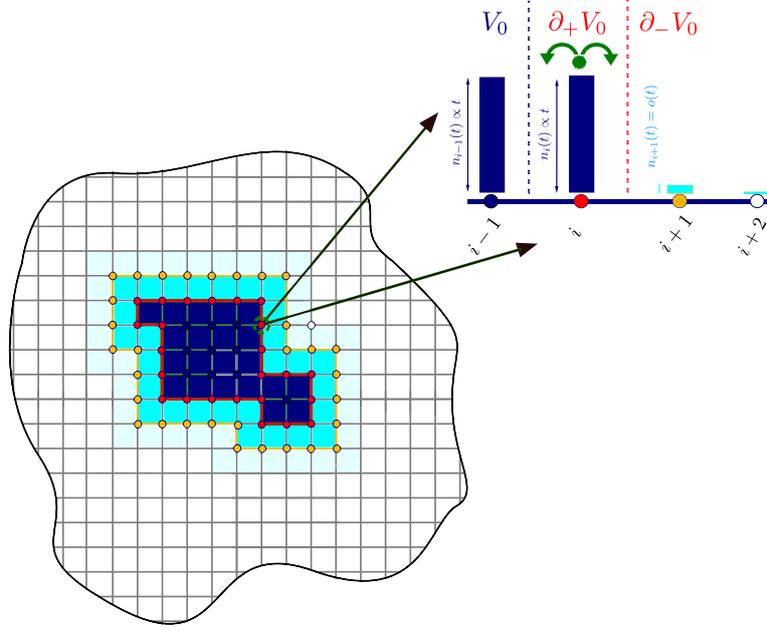


FIG. III.3 Schéma représentatif du piège  $V_0$  ici en bleu foncé. La frontière de celui-ci est composée de la frontière intérieure en rouge  $\partial_+ V_0$  et la frontière extérieure en jaune  $\partial_- V_0$ . On observe la formation d'un gradient important entre ces deux frontières, conséquence du comportement piégé du marcheur ici entre les sites  $i$  et  $i + 1$ .

#### b) Relations d'échelle entre les frontières intérieures et extérieures, et la probabilité de s'extraire de $V_0$

Par la suite, afin de simplifier notre approche, on prendra  $A(x_i) = 1$  pour tous les sites appartenant à  $V_0$ . Autrement dit, on suppose que l'ordre dominant est identique pour tous les sites appartenant à  $V_0$ . En pratique, dans la très grande majorité des processus piégés,  $V_0$  est constitué de deux sites visités infiniment souvent, vérifiant  $A(x_i) = 1$ . La validité de cette hypothèse est discutée en annexe E.2.

Afin de déterminer la probabilité de s'extraire de  $V_0$ , il faut nécessairement déterminer le comportement de  $P(x \in \partial_- V_0, t')$ . Pour cela considérons deux sites voisins, notés  $x_{\partial_\pm}$ , appartenant respectivement à  $\partial_\pm V_0$ . Notons  $V_{\pm,+}$  l'ensemble de leurs voisins respectifs appartenant à  $\{V_0, \partial_+ V_0\}$  et  $V_{\pm,-}$  les autres sites voisins. On suppose qu'il est possible d'écrire dans la limite des temps longs un équilibre quasi-stationnaire entre les probabilités de transition de ces deux sites, on obtient alors

$$\frac{e^{-f(o(t', x_{\partial_- V_0}))}}{\sum_{x_i \in V_{+,-}} e^{-f(o(t', x_i))} + \sum_{x_i \in V_{+,+}} e^{-f(\frac{t'}{V} + o(t, x_i))}} P(x_{\partial_+}, t') = \frac{e^{-f(\frac{t'}{V} + o(t', x_{\partial_+ V_0}))}}{\sum_{x_i \in V_{-,-}} e^{-f(o(t', x_i))} + \sum_{x_i \in V_{-,+}} e^{-f(\frac{t'}{V} + o(t', x_i))}} P(x_{\partial_-}, t')$$

Notons que l'on a abouti à une première condition sur  $V_0$ . Afin de vérifier  $P(x \in \partial_- V_0, t') \ll P(x \in \partial_+ V_0, t')$ , on observe que  $f$  doit nécessairement vérifier<sup>\*5</sup>

$$e^{-f(t')} \xrightarrow{t' \rightarrow \infty} \infty.$$

En étendant cette relation d'échelle entre les deux probabilités pour tous les sites appartenant à  $\partial_{\pm} V_0$ , et en remplaçant  $P(x \in \partial_+ V_0, t')$  par  $\frac{\delta V_0}{V_0}$ , il est possible d'obtenir le comportement dominant de la probabilité que le marcheur soit dans la bordure inférieure à l'instant  $t'$

$$P(x \in \partial_- V_0, t') \sim e^{f(\frac{t'}{V_0} + o_{\partial_+}(t')) - f(o_{\partial_-}(t'))}. \quad (\text{III.2})$$

Notons que l'on a, sans perte de généralité, réécrit les termes négligeables d'ordre 1 sous la forme  $o_{\partial_{\pm}}(t)$  afin de rappeler qu'ils dépendent des temps locaux moyennés respectivement sur  $\partial_{\pm} V_0$ .

Tournons-nous désormais vers la probabilité de s'extraire du piège  $V_0$ . Pour cela, définissons  $S_{\tau, V_0}(t)$ , la probabilité d'être piégé depuis  $\tau$  jusqu'à  $t$ . On cherche à exprimer  $S_{\tau, V_0}(t)$  en fonction de  $P(x \in \partial_- V_0, t')$ , on montre en annexe E.2 pour la convention sur site que

$$S_{V_0}(t, \tau) \sim \exp\left(-\int_{\tau}^t e^{2f(\frac{t'}{V_0} + o_{\partial_+}(t')) - f(o_{\partial_-}(t')) - f(O(1))} dt'\right).$$

Dès lors, il est possible de déterminer la probabilité de s'extraire de  $V_0$  et de tester la validité de notre première approximation  $P(x \in \partial_- V_0, t) \ll P(x \in \partial_+ V_0, t)$ . Définissons pour cela le temps typique passé sur la bordure entre  $\tau$  et  $t$ <sup>\*6</sup>

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\partial_- V_0}(t, \tau) &\sim \int_{\tau}^t P(x \in \partial_- V_0, t') dt' \\ &\sim \int_{\tau}^t e^{f(\frac{t'}{V_0} + o_{\partial_+}(t')) - f(o_{\partial_-}(t'))} dt'. \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

<sup>\*5</sup> Ainsi pour une fonction  $f$  présentant un effet de saturation, le marcheur s'échappera avec une probabilité 1 de n'importe quel piège formé par sa propre trajectoire. Il réalisera alors une trajectoire dont le nombre de sites distincts visités divergera en fonction du temps.

<sup>\*6</sup> Notons que le comportement des différentes observables est indépendant de  $\tau$  dans la limite  $t \gg \tau$ . Ainsi, on va par la suite prendre sans perte de généralité  $\tau = 0$ , les différentes observables seront donc réécrites indépendamment de  $\tau$ .

Par la suite, on remplacera directement le temps passé sur la frontière extérieure  $o_{\partial_-}(t')$  par son comportement typique  $\tilde{T}_{\partial_-V_0}(t)$ . Cela impose une équation auto-cohérente que doit vérifier  $P(x \in \partial_-V_0, t')$ . On va donc déterminer le comportement de  $S_{V_0}(t, \tau)$  en fonction des différents comportements de  $e^{f(t)}$ .

**c) Critères du comportement piégé en fonction de  $e^{f(t)}$**

$$\underline{\int_0^\infty e^{f(t)} dt = cst \iff f(t) < -\ln(t) :}$$

Dans ce premier cas, le temps moyen passé à la frontière de  $\partial_-V_0$  est fini. Par conséquent, le second terme  $f(o_{\partial_-}(t'))$  présent dans  $S_{V_0}(t, \tau)$  est aussi fini. Dès lors, en notant que  $\int_0^\infty e^{2\beta f(t)} dt' = cst$ , on obtient que  $S_{V_0}(t, \tau)$  tend vers une constante strictement supérieure à 0. Autrement dit, le marcheur a une probabilité finie de rester piégé dans  $V_0$ . On en conclut, pour  $\int_0^\infty e^{f(t)} = cst$ , que le marcheur finira nécessairement piégé dans sa propre trajectoire, y compris pour les modèles à renforcement sur sites, et cela en toute dimension<sup>\*7</sup>. Ce résultat est cohérent avec les travaux mathématiques présentés précédemment.

$$\underline{\int_0^\infty e^{2f(t)} dt = \infty \iff f(t) > -\ln(t)/2 :}$$

En remarquant que  $-f(o_{\partial_-}(t')) > 0$ , on obtient que, contrairement au cas précédent,  $S_{V_0}(t, \tau)$  tend nécessairement vers 0 dans la limite des temps longs. Ainsi, le marcheur a une probabilité 1 de s'échapper de  $V_0$ . Le marcheur ne peut donc pas finir piégé indéfiniment, il continuera à découvrir de nouveaux sites au cours de son évolution. Notons que l'on retrouve les résultats précédemment obtenus dans la littérature.

$$\underline{\int_0^\infty e^{2f(t)} dt = cst < \int_0^\infty e^{f(t)} dt = \infty \iff -\ln(t)/2 > f(t) > -\ln(t) :}$$

Pour ce dernier cas plus complexe, deux observations s'opposent. En négligeant le second terme  $f(o_{\partial_-}(t'))$  présent dans  $S_{V_0}(t)$ , on obtiendrait que  $S_{V_0}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} cst > 0$ . Cela sous-entendrait que le critère de Davis serait différent pour la convention sur site.

Toutefois, notons que  $\tilde{T}_{\partial_-V_0}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$ . Autrement dit, le temps local typique passé sur les sites  $\partial_-V_0$  diverge. Celui-ci, noté  $f(o_{\partial_-}(t'))$ , est explicitement impliqué dans le comportement  $S_{V_0}(t, \tau)$  et pourrait modifier le comportement aux temps longs de cette quantité. Affinons notre approche en supposant que le comportement dominant de  $f$  prend la forme asymptotique suivante

$$f(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \beta \ln(t), \text{ avec } -1/2 \geq \beta > -1. \quad (\text{III.4})$$

---

<sup>\*7</sup> De toute évidence, si le marcheur s'échappe de  $V_0$ , il pourra retomber dans  $V_0$ , ou construire un nouveau piège appelé  $V_1$  à un instant  $\tau_1 > t + \tau$ . En réutilisant les résultats obtenus ci-dessus pour  $V_1$  avec des temps relatifs  $t' - \tau' > \tau$ , le marcheur aura de nouveau une probabilité finie de rester éternellement en  $V_1$ . Ainsi, en partitionnant sur le nombre de pièges de temps minimal  $\tau > 0$  que le marcheur va former au cours de son évolution, on voit clairement que celui-ci finira nécessairement piégé dans l'un d'entre eux. On pourrait s'interroger sur les effets de vieillissement de l'espace déjà visité. Cette observation est pertinente, mais notons qu'à minima le marcheur sera piégé, ou bien dans l'hypothèse où il découvre une zone non visitée, il aura alors une probabilité finie de recréer un piège dans un espace quasi vierge.

Comme le temps typique passé  $\partial_- V_0$  diverge, on propose de considérer un comportement en loi de puissance (des dépendances plus faibles sont étudiées en annexe E.2). On le réécrit donc sous la forme suivante

$$\tilde{T}_{\partial_- V_0}(t) \sim t^{\gamma+1}. \quad (\text{III.5})$$

En particulier, cela implique en utilisant (III.3) que  $P(x \in \partial_- V_0, t) \sim t^\gamma$ . Notons que  $-1 < \gamma < 0$ . Ainsi,  $o_{\partial_-}(t') = t^{\gamma+1}$ , en injectant cette relation dans (III.2) pour des formes  $f$  données par (III.4), on obtient une seconde expression pour  $P(x \in \partial_- V_0, t)$ .

$$P(x \in \partial_- V_0, t) \sim t^{\beta-\beta(1+\gamma)}.$$

Ainsi, en comparant les deux expressions obtenues pour  $P(x \in \partial_- V_0, t)$ , on montre que  $\gamma$  doit vérifier la condition suivante

$$\gamma = -\beta\gamma.$$

On obtient nécessairement que  $\gamma = 0$  pour  $\beta > -1$ . En reprenant (III.5) pour  $\gamma = 0$ , on remarque que celui-ci est alors linéaire en  $t$  impliquant que  $P(x \in \partial_- V_0, t) \sim P(x \in \partial_+ V_0, t)$ . On a donc contredit notre hypothèse principale, le temps passé en  $\partial_- V_0$  est aussi de l'ordre de  $t$ . Par conséquent, si le temps moyen diverge en loi de puissance, le processus va nécessairement s'échapper de  $V_0$ .

Le cas  $\beta = 1$  est détaillé en annexe E.2, succinctement, il existe un temps passé dans  $\partial_- V_0$  divergeant, mais négligeable par rapport à  $t$ . La probabilité de s'échapper de  $V_0$  tend vers une constante qui reste alors strictement positive.

#### d) Conclusion de l'approche

Ainsi, on retrouve que le critère de Davis reste valide pour la convention sur site ( $\int_0^\infty e^{f(t)} dt = cst$ ), et cela en toute dimension dans des espaces euclidiens pour des poids  $w(n) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} O(t^\beta)$  avec  $\beta < 1$ . Ce résultat n'avait été obtenu que dans la littérature mathématique, dans des travaux différents, dont les approche dépendaient spécifiquement de la convention et du choix des modèles. Achéons notre analyse en commentant l'approche développée ici.

Tout d'abord, notons que le résultat obtenu ne dépend pas de la dimension de l'espace dans lequel évolue le marcheur. La seule condition reste que le nombre de voisins de chaque site soit borné. On retrouve ici les mêmes conclusions que celles obtenues dans les différents travaux menés auparavant. Afin de mieux appréhender l'effet de la dimension du réseau, observons que plus le nombre de voisins de chaque site augmente, plus le temps nécessaire afin de former un piège est long. Pour construire un piège, le marcheur doit, dans un premier temps, sauter successivement sur les mêmes sites, alors que ceux-ci ont été peu, voire pas visités auparavant. Il est évident que cet événement est plus long à se réaliser lorsque le nombre de voisins augmente. Dès lors, pour  $d \gg 1$  et pour des renforcement relativement "faibles", le marcheur va pouvoir découvrir un nombre important de sites avant qu'il ne finisse piégé.

Ensuite, notons qu'un raisonnement similaire peut être mené pour la convention sur lien conduisant au critère de Davis en toute dimension.

Dans ce cas précis, la probabilité de sortie est directement proportionnelle à  $P(x \in \partial_- V_0, t)$ . Le marcheur a donc une probabilité 1 de s'extraire de  $V_0$  pour  $\int_0^\infty e^{f(t)} dt = \infty$ .

Enfin, cette approche permet de mieux saisir les différences entre les deux conventions. En particulier l'analyse du cas  $\beta > -1, \beta \rightarrow -1$  en dimension 1, pour la convention sur site, a bien relevé une croissance extrêmement lente du territoire visité [Stevens et al., 1997], contrastant avec les résultats obtenus pour la convention sur lien [Tóth, 1996, 2001].

Dans la suite, on va donc s'intéresser successivement aux différentes catégories de marcheurs attractifs qui ont été définies dans cette partie. On cherchera à déterminer leurs propriétés de premier passage et de vieillissement.

#### e) Application : efficacité de l'exploration des marcheurs piégés

Considérons les marcheurs sur sites piégés qui possèdent donc un poids supérieur aux temps longs à  $w \propto O(t^\beta)$ ,  $\beta \geq 1$  ( $> 1$  pour la convention sur lien). Comme ceux-ci vont être piégés, la probabilité de trouver la cible est finie, et cela indépendamment de la dimension du réseau. Ces marches sortent donc du cadre de notre étude. Manifestement, pour des cibles sur réseau introduites à des distances  $r \gg 1$ , le marcheur aura une probabilité négligeable de trouver la cible<sup>\*8</sup>. Ensuite, les propriétés de transport et de vieillissement sont extrêmement dépendantes de l'instant où le marcheur commence à être piégé, et leurs analyses précises ne sont alors que peu judicieuses.

Enfin, se pose la question de la pertinence de l'utilisation de tels modèles pour décrire des situations réalistes. Nous avons montré l'apparition de gradients du potentiel localement divergent sur un réseau, ce qui est, en pratique, difficilement appréhendable dans un contexte biologique. En effet, ces gradients restent très dépendants des propriétés microscopiques du réseau et du comportement des poids  $w(n)$  à petit nombre de visites. En pratique, un effet de saturation des poids, après un très grand nombre de visites, permettrait de retrouver des comportements plus réalistes.

### III.3 Applications aux marcheurs attractifs non piégés

On va dans la suite de cette étude, distinguer plusieurs caractéristiques communes que peuvent présenter certains de ces modèles. Dans un premier temps, on retrouvera les propriétés de transport asymptotiques obtenues pour le modèle SATW. Puis on étendra ces résultats afin de caractériser le comportement des incréments des marches attractives en loi de puissance. Ces résultats se basent essentiellement sur des arguments d'échelles que l'on retrouve dans [Ordemann et al., 2001], et qui sont par ailleurs confirmés numériquement. Ensuite, on s'intéressera à la forme typique que peut prendre la probabilité de survie lorsque le marcheur présente un comportement sous-diffusif.

---

<sup>\*8</sup> Certes pour des dimensions élevées le marcheur peut parcourir des distances importantes avant d'être piégé, mais la cible est alors d'autant plus difficile à trouver. L'introduction d'un volume confinant a donc un effet marginal sur les propriétés de premier passage de tels marcheurs.

### III.3.1 Le modèle SATW attractif en dimension supérieure à 1

Commençons par nous intéresser au modèle le plus simple présentant un effet de saturation dès la première visite. Ce modèle, dont les propriétés en dimension 1 ont été abordées dans le chapitre précédent, est ici défini par le poids  $w(n) = \exp(-\beta f(n))$ , où  $f(0) = 0$  et  $f(n > 0) = 1$  et  $\beta < 0$ . Nous verrons que l'analyse des différents comportements que peut prendre ce modèle en dimension supérieure à 1 peut être étendue aux autres processus attractifs. Peu de résultats analytiques exacts ont été obtenus, et les comportements asymptotiques du MSD proposés dans [Foster et al., 2009; Ordemann et al., 2000, 2001] sont principalement supportés par des analyses numériques. Qualitativement, le processus est attiré par son territoire visité  $\mathcal{D}_t$ , dont la géométrie est toutefois plus complexe qu'en dimension 1.

Afin de déterminer le comportement du MSD, on propose de s'appuyer sur un modèle de croissance de  $\mathcal{D}_t$  qui a aussi été développé dans [Ordemann et al., 2001] pour des dimensions  $d \geq 2$ . On prendra ici comme exemple  $d = 3$ , notons que la validité de cette approche, dans le cas spécifique  $d = 2$  a été débattue dans [Foster et al., 2009].

On propose comme point de départ pour la croissance du territoire visité

$$\frac{d\langle \mathcal{D}_t \rangle}{dt} \sim \frac{1}{\langle T \rangle_s}, \quad (\text{III.6})$$

où  $\langle T \rangle_s$  est le temps de retour moyen à la frontière de  $\mathcal{D}_t$  (notée  $\delta\mathcal{D}_t$ ), moyenné sur l'ensemble des sites de départ tirés uniformément dans  $\delta\mathcal{D}_t$ . En utilisant un argument similaire à la formule de Kac pour le temps de retour moyen [Bénichou et al., 2005], on propose que le comportement de  $\langle T \rangle_s$  puisse être écrit selon

$$\frac{1}{\langle T \rangle_s} \sim \frac{\delta\mathcal{D}_t}{\mathcal{D}_t}. \quad (\text{III.7})$$

On a alors supposé une distribution quasi stationnaire à l'intérieur de  $\mathcal{D}_t$ . On introduit aussi  $d_{fc}$  et  $\alpha$ , les dimensions fractales respectives de  $\mathcal{D}_t$  et de son bord  $\delta\mathcal{D}_t$ . Comme l'échelle typique de  $\mathcal{D}_t$  est donnée par  $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$ , on obtient respectivement

$$\mathcal{D}_t \sim t^{d_{fc}/d_w}, \quad (\text{III.8})$$

$$\delta\mathcal{D}_t \sim t^{\alpha/d_w}, \quad (\text{III.9})$$

où l'exposant de marche  $d_w$  caractérise le MSD :  $\langle x^2 \rangle \sim t^{2/d_w}$ . En utilisant les propriétés de (III.8) et (III.9) dans (III.6) et (III.7), on obtient alors une relation autoconsistante vérifiée par les différents exposants

$$\alpha = 2d_{fc} - d_w. \quad (\text{III.10})$$

On suppose dans un premier temps que le poids des interactions est suffisamment faible ( $|\beta|$  faible) afin que  $\mathcal{D}_t$  présente les mêmes propriétés qu'une marche symétrique simple. Pour celle-ci en dimension 3, il est connu que le territoire visité est caractérisé par  $\alpha = d_{fc} = 2$  (vérifiant par là même (III.10) pour  $d_w = 2$ ).

Ce comportement est aussi observé pour la marche SATW pour des  $|\beta|$  faibles [Foster et al., 2009] (figure III.4). Celle-ci présente alors un comportement diffusif qui est observé numériquement. Inversement, supposons que pour  $|\beta|$  suffisamment élevé, la dimension fractale de  $\mathcal{D}_t$  est modifiée. Plus précisément on suppose que  $\mathcal{D}_t$  croît comme un volume *homogène* et *compact* pour lequel  $d_{fc} = d = 3$  et  $\alpha = d_{fc} - 1 = 2$ . Autrement dit, le marcheur explore de manière très homogène l'espace qui l'entoure en formant un territoire visité de dimension égale à la dimension du réseau. En injectant les différents comportements dans l'équation (III.10), on obtient  $d_w = 4$  en dimension 3. En conséquence, l'argument d'échelle suggère l'existence d'un régime sous-diffusif, observé numériquement<sup>\*9</sup>, pour lequel  $\langle X^2(t) \rangle \sim t^{\frac{1}{2}}$ . En principe, les arguments présentés ci-dessus peuvent être reproduits pour  $d \neq 3$ . La marche SATW présente alors deux comportements distincts :

- Diffusif avec  $d_w = 2$  indépendamment de la dimension pour des  $|\beta| < |b_c|$  faibles
- Sous-diffusif avec  $d_w = d + 1$  pour des  $|\beta| > |b_c|$  forts

La transition selon  $\beta$  entre les deux régimes dépend de la dimension. En particulier pour la dimension 2, le comportement sous-diffusif est observé pour des  $\beta$  élevés, amenant à  $\langle x^2(t) \rangle \sim t^{2/3}$ . En revanche dans la limite  $|\beta| \rightarrow 0$ , la transition vers un régime diffusif est encore débattue [Foster et al., 2009]. Enfin, notons qu'en dimension 1 les deux comportements amènent à  $d_w = 2$ . Par conséquent, cette analyse permet de retrouver tous les comportements observés et les dimensions de marches  $d_w$  associées, sans toutefois déterminer les valeurs de transition.

Poussons ces arguments afin de déterminer le comportement des incréments. Commençons par considérer le cas strictement diffusif. Le marcheur va alors explorer un volume de taille typique  $\sqrt{t}^d$ . Ainsi pour  $d \geq 2$  le marcheur a découvert un nombre négligeable de sites (borné par  $t \ll \sqrt{t}^d$ ) présents dans cette zone, de sorte que la fraction locale de sites visités finit par être négligeable dans la limite  $t \rightarrow \infty$ . D'autre part, le marcheur effectue alors un nombre fini de retours pour chaque site du réseau. Ainsi, le potentiel local de l'environnement autour du marcheur devient stationnaire pour  $T \gg 1$ , signifiant que les effets de vieillissement sont asymptotiquement indépendants de  $T$ . Notons cependant que le coefficient de diffusion est non trivial et dépend de la dynamique à petit  $t$ .

On propose donc que les effets de vieillissement de la marche SATW diffusive en dimension supérieure à 1 soient stationnaires aux temps longs et caractérisés par un coefficient de diffusion  $D_L \neq 1/2$ .

$$\langle [X(t+T) - X(T)]^2 \rangle = 2D_L t^{2/d_w} \text{ pour } t, T \gg 1$$

Ensuite, considérons le cas sous-diffusif pour lequel le volume typique exploré est de l'ordre de  $t^{d/(d+1)}$ . Il apparaît clairement que le marcheur va donc évoluer principalement dans un territoire déjà visité. En conséquence, de manière analogue au cas  $1d$ , on peut donc négliger les effets non-markoviens à l'intérieur du territoire visité. Dans la limite  $1 \ll t \ll T$ , le marcheur évolue principalement dans le territoire visité dont la taille typique est fixée par  $T$ . Le marcheur va alors présenter un comportement diffusif de coefficient  $D_s = 1/2$ .

<sup>\*9</sup> Notons que la transition exacte entre les deux régimes a été seulement mesurée numériquement en dimension 3 [Foster et al., 2009; Ordemann et al., 2001].

Inversement, pour  $t \gg T$ , le marcheur va constamment étendre le bord de  $\delta\mathcal{D}_t$  qui désormais a une taille typique fixée par  $t$ . Les effets non-markoviens ralentissant la découverte de nouveaux sites, on retrouve le comportement sous-diffusif obtenu dans [Ordemann et al., 2001]. On propose donc que les incréments s'écrivent sous la forme suivante

$$\langle [X(t+T) - X(T)]^2 \rangle = \begin{cases} 2D_L t^{2/d_w} & \text{pour } t \gg T \\ D_s t & \text{pour } t \ll T \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

En particulier, notons que les incréments ne dépendent pas de la variable  $T$  dans la limite  $T \gg 1$ . Ainsi,  $T$  agit comme une coupure entre les deux régimes, dont on propose que la transition soit logiquement décrite par le rapport  $t/T^{*10}$  (figure III.4). Afin de conclure notre analyse de la marche SATW, dressons plusieurs observations qui s'avèreront pertinentes dans l'étude des autres modèles attractifs non-piégés.

- Nous avons vu que le marcheur SATW, en dimension supérieure à 1, pouvait présenter un comportement sous-diffusif, et ce, simplement avec un effet attractif ajouté lors de la première visite. En conséquence, pour les marcheurs attractifs le comportement de  $w(n)$ , lors des premières visites, joue un rôle déterminant dans le comportement global du marcheur dans la limite des temps longs. Ainsi, alors que le caractère piégé de ces modèles est simplement déduit du comportement à grand nombre de visites, le comportement à petit nombre de visites peut néanmoins suffire à générer un comportement sous-diffusif.
- Ensuite, plusieurs régimes ont été observés en fonction du paramètre  $\beta$ . Ainsi, pour d'autres modèles attractifs, des transitions similaires sont envisageables en fonction des paramètres qui caractérisent le potentiel lors des premières visites.
- Enfin, lorsque le marcheur SATW présente un comportement sous-diffusif, le territoire visité  $\mathcal{D}_t$  est compact et présente un bord *lisse*. À l'intérieur de cette zone visitée, les effets de renforcement sont négligeables. Cette dernière observation est facilement concevable pour la marche SATW, mais semble être partagée avec les autres marches attractives sous-diffusives que l'on va présenter ultérieurement.

### III.3.2 Autres modèles à renforcement sur sites

À partir de ce premier résultat, on va considérer d'autres modèles attractifs pour lesquels on adaptera l'approche développée précédemment pour la SATW. Celle-ci a révélé l'importance du comportement du potentiel  $V$  (respectivement  $f$ ), lors des premières visites ( $n$  faibles), qui peut conduire à deux régimes distincts. Nous verrons que ces deux régimes sont présents pour les autres modèles attractifs non-piégés (la valeur de la transition dépendant des paramètres qui contrôlent le comportement de  $w$  lors des premières visites). Ainsi, on appellera par la suite, modèles à *faibles effets de renforcement* ceux dont le potentiel à petit nombre de visites est insuffisant pour imposer un comportement sous-diffusif. Inversement, on définira les modèles à *forts effets de renforcement*, comme ceux dont le comportement de  $w$  conduit à un comportement sous-diffusif.

---

<sup>\*10</sup> Notons qu'une telle forme ne peut pas être obtenue pour des processus invariants d'échelle. Ce constat sera plus amplement détaillé dans le prochain chapitre.

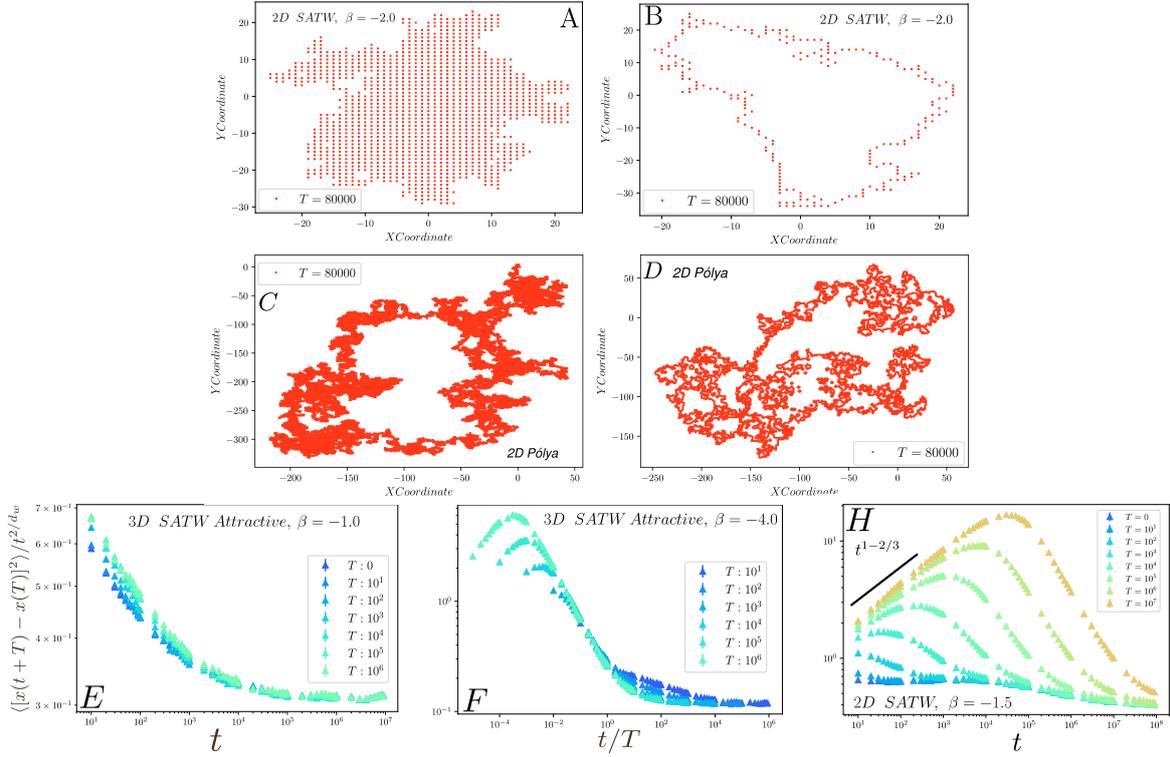


FIG. III.4 *Territoire visité et vieillissement pour la SATW en dimension 2 et 3, et comparaison avec une marche aléatoire simple. A,C Aire visitée en dimension 2, pour une marche SATW sous-diffusive et pour une marche aléatoire simple. L'ensemble des sites visités  $\mathcal{D}_t$  pour le SATW croît comme un ensemble compact, selon une aire de taille caractéristique  $t^{2/d_w}$ , contrairement à la marche aléatoire simple où  $\mathcal{D}_t$  présente une aire nulle dans la limite du continu. B,D Limite de  $\mathcal{D}_t$  pour la marche aléatoire SATW et pour une marche aléatoire simple. Les exposants caractérisant la géométrie de  $\delta\mathcal{D}_t$  sont donnés par  $\alpha_p = 1$  pour le SATW, et  $\alpha_p = 2$  pour une marche aléatoire simple. E-H Vieillissement des incréments pour le SATW (normalisés par l'échelle de diffusion attendue aux temps longs). Chaque courbe correspond à une valeur fixée de  $T$ . Les incréments sont stationnaires aux temps longs pour  $|\beta|$  faible dans régime diffusif en dimension 3 E. Inversement, pour le cas sous-diffusif observé en dimension 2 et 3 F-H, un régime diffusif est retrouvé pour  $t \ll T$ , lorsque le marcheur est principalement situé à l'intérieur de  $\mathcal{D}_t$ , et est identifiable à une simple marche aléatoire.*

#### Processus à renforcement attractif saturant :

Commençons par considérer des modèles pour lesquels  $w(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} cst$ . Pour ces derniers, on retrouve un comportement diffusif local sur les sites qui auront été visités un nombre suffisant de fois. Dès lors, le comportement du temps de retour aux bords de  $\mathcal{D}_t$  est également déterminé par (III.7). Ainsi, on propose qu'en dimension supérieure à 2, les deux comportements observés dans le cas de la SATW, diffusif sans vieillissement et sous-diffusif ( $d_w = d+1$ ) avec un comportement diffusif aux temps courts ( $T \gg t$ ), peuvent être retrouvés en fonction des effets de renforcement à faible nombre de visites.

Ensuite, en dimension 1, on propose que tous ces processus soient diffusifs aux temps longs, tout en présentant un vieillissement diffusif à toute échelle de temps identique à celui étudié dans le chapitre 2. Pour finir, considérons le cas critique de la dimension 2. De manière similaire à la marche SATW, un comportement sous-diffusif est attendu, mais l'existence d'un régime diffusif reste délicate à conjecturer.

Processus à renforcement attractif en loi de puissance non-piégés :

Intéressons-nous désormais aux processus dont le comportement pour des nombres de visites élevés est donné par  $w(n) \sim n^\beta$  avec  $\beta < 1$ . Tout d'abord, rappelons que ceux-ci ne sont pas piégés et on cherche donc à caractériser leurs propriétés de transport. Pour ces cas précis, nous avons vu précédemment que le choix de la convention, sur site et sur lien, était primordial. Commençons par rappeler les travaux de [Tóth, 1996] qui ont déterminé le comportement asymptotique de ces marches dans la convention sur lien, obtenant en particulier  $\langle x_t^2 \rangle \sim t^{\frac{2(1-\beta)}{2-\beta}}$ .

On propose de retrouver ce résultat avec des arguments similaires à ceux développés pour la marche SATW, puis on étendra cette approche en dimension supérieure à 1 pour les modèles sur lien. Ensuite, on se tournera vers l'adaptation de ces résultats dans le cas de la convention sur site.

Pour de tels modèles, on comprend que l'hypothèse (III.7) doit être revisitée. En particulier, la probabilité de s'extraire de  $\mathcal{D}_t$  dépend désormais, du nombre de fois que les sites appartenant à  $\delta\mathcal{D}_t$  ont été visités auparavant.

Premièrement, on propose que le marcheur effectue encore un comportement asymptotiquement diffusif à l'intérieur de la zone visitée<sup>\*11</sup>. Cette hypothèse a été vérifiée numériquement, et est partagée avec d'autres modèles répulsifs.

En revanche, il est plus difficile de déterminer le comportement à la frontière de la zone visitée. On propose donc d'étendre la frontière  $\delta\mathcal{D}_t$  à l'ensemble des sites visités pour lesquels les effets de renforcement ne sont pas encore négligeables. Autrement dit, le marcheur n'est pas assimilable à un marcheur aléatoire simple seulement lorsqu'il évolue dans  $\delta\mathcal{D}_t$ . Ensuite, on propose que le temps passé dans  $\delta\mathcal{D}_t$  soit négligeable, ce qui est justifié par le comportement des incréments diffusifs pour  $T \gg t$  observé numériquement.

Notons que le comportement du temps typique de retour aux bords  $\delta\mathcal{D}_t$ , moyenné sur les sites de  $\mathcal{D}_t$ , est donné par  $t^{1/d_w}$  puisque la marche reste diffusive dans  $\mathcal{D}_t$ .

---

<sup>\*11</sup> Pour cela, notons que le temps typique passé sur les sites à l'intérieur de  $\mathcal{D}_t$  est donné par  $t^{1-\frac{1}{d_w}}$ . Dans la mesure où celui-ci diverge avec  $t$ , on propose que les écarts du nombre de visites entre les différents sites à l'intérieur de  $\mathcal{D}_t$  ont un poids négligeable. D'autre part, une analyse en champ moyen des écarts relatifs entre les nombres de visites des différents sites de  $\mathcal{D}_t$  peut être trouvée en annexe G.1 et sera évoquée dans le prochain chapitre.

Enfin, on propose que le comportement d'échelle asymptotique de la probabilité que le marcheur, actuellement au bord, puisse agrandir  $\mathcal{D}_t$ , est décrite par celle d'un piège de poids typique\*<sup>12</sup>  $t^{-\beta(1-\frac{1}{d_w})}$ . En reprenant ces différents arguments et les injectant dans (III.6) on obtient

$$t^{\frac{1}{d_w}-1} \sim \frac{t^{-\beta(1-\frac{1}{d_w})}}{t^{1/d_w}}.$$

Après simplification, on retrouve le résultat attendu  $d_w = \frac{2-\beta}{1-\beta}$  [Tóth, 2001]. Cette approche revisitée des modèles de croissance de  $\mathcal{D}_t$  soulève plusieurs points :

- Celle-ci repose sur l'hypothèse que le marcheur, explorant  $\delta\mathcal{D}_t$ , découvre un nouveau site avec une probabilité  $t^{-\beta(1-\frac{1}{d_w})}$ . Ce résultat n'est sûrement pas directement adaptable pour des modèles sur sites, en particulier lorsque  $\beta$  est proche de 1.
- De plus, cette approche repose sur l'apparition d'un comportement diffusif du marcheur à l'intérieur de  $\mathcal{D}_t$ . Ce comportement a été observé à plusieurs reprises pour des marches à renforcement sur liens, mais aussi sur sites, en dimension supérieure ou égale à 1.

Ainsi, on peut conjecturer un exposant  $d_w$  en dimension supérieure à 1 pour les modèles attractifs en loi de puissance sur liens. Pour cela, on reprend les définitions précédentes en proposant que la probabilité de s'extraire de  $\delta\mathcal{D}_t$  soit proportionnelle à  $t^{-\beta(1-\frac{1}{d_w})}\delta\mathcal{D}_t$ . Enfin, le territoire visité étant compact, on obtient  $\alpha = d - 1$  et  $d_{fc} = d$ , ce qui permet d'extraire  $d_w = \frac{1+d(1-\beta)}{1-\beta}$ . Cette conjecture semble donner des résultats convaincants (figure III.5) et nécessite d'être approfondie. Remarquons que cette valeur est obtenue dans l'hypothèse où ces marches présentent un comportement sous-diffusif. En effet, de manière analogue à la marche SATW, un comportement diffusif sans vieillissement peut être observé en dimension supérieure ou égale à 3 pour des effets de renforcement suffisamment faibles à petits nombres de visites\*<sup>13</sup>.

On peut désormais commenter l'adaptation de ces résultats dans le cas de la convention sur site. Pour ces modèles, l'analyse numérique du MSD souligne que l'exposant de marche  $d_w$  est généralement différent des valeurs prédites pour la convention sur lien\*<sup>14</sup>. Ainsi, il semble difficile de proposer une approche valide dans le cas de la convention sur site. Malgré tout, dans la limite où  $\beta$  est proche de 0, ces modèles présentent des incréments diffusifs (pour  $T \gg t$ ) de manière identique à la convention sur lien. Inversement, pour  $\beta$  proche de 1, l'analyse de (III.4) souligne la difficulté de ces marches sur site à s'extraire des sites les plus visités. Cet effet a aussi été observé numériquement dans [Stevens et al., 1997], où il a été relevé que ces modèles présentaient une croissance de  $\mathcal{D}_t$  et du MSD, extrêmement lente (plus faible qu'un logarithme).

Concluons notre étude en résumant les différents comportements que peuvent prendre les marches attractives en loi de puissance :

---

\*<sup>12</sup> Ce comportement d'échelle traduisant le passage d'une zone de poids  $t^{-\beta(1-\frac{1}{d_w})}$  à une zone de poids  $O(1)$ .

\*<sup>13</sup> Malgré un poids divergeant selon le nombre de visite,  $w(n) \sim n^\beta$ , et de par le caractère diffusif de ces marches, le nombre de retours sur chacun des sites du réseau est fini. Ce qui conduit à un environnement local stationnaire de manière identique à la marche SATW.

\*<sup>14</sup> Un comportement identique dans les deux conventions peut être envisagé dans la limite  $\beta \rightarrow 0$ .

- Pour des effets de renforcement suffisamment élevés, y compris à faible nombre de visites, un régime sous-diffusif est attendu. De plus, le marcheur formera une zone compacte et homogène à l'intérieur de laquelle il réalise un comportement diffusif. De ce comportement, nous en avons déduit, au moyen d'arguments d'échelle heuristiques, un exposant type  $d_w = \frac{1+d(1-\beta)}{1-\beta}$  qui permet de décrire le comportement du MSD de ces marches pour la convention sur lien.
- Enfin, pour des effets de renforcement faibles à petits nombres de visites, le marcheur va présenter un comportement diffusif. En effet, les effets de renforcement sont trop faibles pour permettre l'apparition d'une zone compacte et homogène de  $\mathcal{D}_t$ . Celle-ci restera comparable à celle d'une marche symétrique simple. Le marcheur effectuera alors une exploration non compacte, ne repassant que rarement dans des sites visités longtemps auparavant. Pour finir, rappelons que le cas de la dimension 2 reste critique comme pour la SATW.
- Seulement pour la convention sur site, pour des exposants  $1 > \beta > \beta_c$  (où  $\beta_c$  est indéterminé), ces marches ne sont pas piégées, mais la croissance du territoire visité est extrêmement lente et reste indéterminée.

On va désormais examiner les propriétés de premier passage des marches attractives présentant un comportement sous-diffusif aux temps longs. Le cas diffusif sera étudié dans le prochain chapitre puisqu'il présente des propriétés identiques à d'autres modèles répulsifs abordés dans la suite.

### III.3.3 Effet d'un comportement sous-diffusif sur les propriétés de premier passage en espace infini

#### a) Incidence des incréments sous-diffusifs

Afin de comprendre les répercussions des incréments sous-diffusifs sur les propriétés de premier passage, une première comparaison peut être avancée avec la marche continuous-time random walk (CTRW) présentée dans le chapitre précédent.

Rappelons que ce modèle peut présenter, simultanément, un comportement sous-diffusif et des exposants de persistance anormaux en dimension 1<sup>\*15</sup>. Ainsi, au premier abord, on pourrait donc supposer qu'un tel résultat puisse être adapté pour les marches à renforcement sous-diffusives.

Pourtant, malgré le fait que la CTRW et les modèles attractifs présentent tous deux des incréments sous-diffusifs, leurs propriétés d'exploration seront bien distinctes. Pour la marche CTRW, la géométrie des sites visités reste identique à celle d'une marche simple. En revanche, pour les modèles attractifs, le marcheur explore l'espace de manière très homogène, et donc différemment d'une marche aléatoire simple<sup>\*16</sup>.

---

<sup>\*15</sup> Rappelons que ce modèle impose des temps d'attentes entre chaque saut, tirés selon une distribution en loi de puissance aux temps longs  $p(\tau) \sim Ct^{-1-\beta}$ . Pour des lois larges  $\beta \in ]0, 1[$ , il est connu que ce modèle est sous-diffusif, et présente simultanément des exposants de persistance anormaux en dimension 1,  $\theta = \beta/2$ .

<sup>\*16</sup> À titre d'exemple pour une marche CTRW, en dimension 3 la probabilité de ne jamais trouver une cible tend vers une constante non nulle. Inversement, l'analyse numérique des propriétés de premier passages de la marche SATW, menée par la suite, souligne que la cible est trouvée avec une probabilité 1.

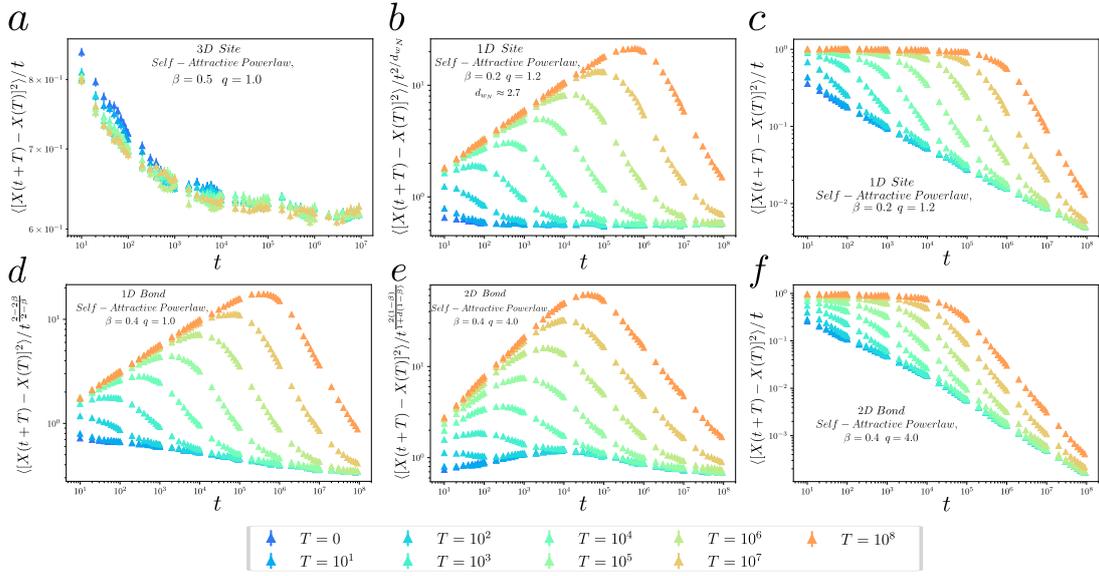


FIG. III.5 Propriété de vieillissement des marches à renforcement attractives en loi de puissance pour lesquelles, ici,  $w(n) = (1 + qn^\beta)$ . Chaque courbe est tracée pour une valeur de  $T$  fixée. Les incréments sont normalisés : par le régime asymptotique effectué aux temps longs pour les figures **a**, **b**, **d** et **e**, et par le régime diffusif attendu aux temps courts pour  $T \gg t \gg 1$  pour les figures **c** et **f**. Pour  $\beta$ ,  $q$  peu élevés, on observe un comportement diffusif sans vieillissement, en dimension supérieure on égale à 3, ici testé pour la convention sur site **a**. Pour la convention sur site, lorsque un comportement sous-diffusif est observé, celui-ci est caractérisé par  $d_w \neq \frac{1+d(\beta-1)}{1-\beta}$ . Par ailleurs, pour ces marches sous-diffusives un comportement diffusif aux temps courts est attendu, ici représenté figure **c**. En revanche, pour la convention sur lien le comportement sous-diffusif est caractérisé par un exposant  $d_w = (2-\beta)/(1-\beta)$  [Tóth, 2001] en dimension 1 **d**. En dimension 2, la valeur  $d_w = \frac{1+d(\beta-1)}{1-\beta}$ , testée figure **e**, semble donner des résultats probants. Enfin, on note que ces marches présentent aussi un comportement diffusif aux temps courts dans la convention sur lien, représenté figure **f**.

Par la suite, on présentera des arguments heuristiques supportant que les marches à renforcement sous-diffusives présentent un exposant de persistance  $\theta$  infini, comportement confirmé numériquement en dimension 2 et 3 pour la marche SATW mais aussi pour les modèles en loi de puissances sous-diffusifs en dimension 1.

Autrement dit, la probabilité de survie associée à l'évènement de premier passage présente une décroissance plus forte que n'importe quelle loi de puissance signifiant que tous les moments de la distribution de premier passage sont finis.

### b) Justifications de $\theta = \infty$

Nous allons dans un premier temps considérer le cas de la marche SATW sous-diffusive en dimension  $d > 2$  pour laquelle  $d_w = d+1$ . Introduisons une cible sur un site à une distance initiale  $r$  d'un marcheur en 0. On cherche à déterminer le comportement aux temps longs de la probabilité de survie  $S(t)$ .

La marche SATW sous-diffusive réalise une exploration compacte :

Premièrement, on définit une boule centrée sur la position initiale du marcheur et de taille typique donnée par  $t^{1/d_w}$ . Comme le marcheur passe un temps  $t$  dans un volume typique de l'ordre de  $t^{d/d_w} < t$ , on en déduit que la plupart des sites à l'intérieur de cette boule ont été visités. La probabilité de survie tend vers 0, indépendamment de la dimension.

Probabilité de survie conditionnellement à ce que la cible n'a pas été trouvée à  $T$  :

Afin de caractériser la queue de la distribution de survie, on va supposer que la cible n'a pas été encore atteinte après un temps  $T \gg r^{d_w}$ . On reprend la définition du territoire visité de  $\delta\mathcal{D}_T$  en décomposant le périmètre intérieur  $\delta\mathcal{D}_{T,i}$  et extérieur  $\delta\mathcal{D}_{T,e}$ . Plus précisément,  $\delta\mathcal{D}_{T,i}$  forme des *trous* constitués de sites qui n'ont jamais été visités par le marcheur (figure III.6), on suppose alors, dans un premier temps, que la cible est incluse dans un des trous de  $\delta\mathcal{D}_{T,i}$ .

En reprenant le comportement des incréments (III.11), on propose que la marche présente un comportement diffusif dans la zone visitée. Afin de déterminer le temps caractéristique nécessaire pour trouver la cible, on néglige l'impact de la croissance du périmètre extérieur sur les propriétés de premier passage entre  $T$  et  $t + T$ . Dès lors, on assimilera le périmètre extérieur,  $\delta\mathcal{D}_{T,e}$ , à une barrière réfléchissante.

On propose que le temps caractéristique nécessaire avant de trouver la cible soit donné par le FPT d'une marche aléatoire simple dans un volume confiné [Condamine et al., 2007a]. Cela induit qu'après un temps typique  $T^{d/d_w} \ln(T)$ , la cible a été visitée presque sûrement [Chupeau et al., 2015]. Les détails amenant à ce résultat et testant la consistance de nos hypothèses tout comme une argumentation similaire s'appuyant sur les temps de retours sur le trou entourant la cible peuvent être retrouvés en annexe E.3. En conséquence entre  $T$  et  $T + T^{d/d_w} \ln(T)^{*17}$ , pour une cible incluse dans le périmètre intérieure  $\delta\mathcal{D}_{T,i}$ , la probabilité de survie présente alors une décroissance plus forte qu'une loi de puissance puisque l'on a obtenu que  $S(T + T^{d/d_w} \ln(T))/S(T) = o(1)$ .

Remarquons que nous n'avons pas encore considéré le cas où la cible n'a pas encore été entourée par le territoire visité  $\mathcal{D}_T$ . Pour cela, observons que si le marcheur effectue de nombreuses excursions dans le territoire visité, les prochains sites que le marcheur va découvrir vont être répartis uniformément autour de  $\mathcal{D}_{T,e}$ .

---

<sup>\*17</sup> Temps caractéristique associé au temps de couverture, défini comme le temps nécessaire au marcheur, afin de visiter l'ensemble des sites du volume.

Notons que les arguments énoncés en annexe s'adaptent pour une cible en contact avec le territoire visité<sup>\*18</sup>. En reprenant cette représentation, on comprend aisément que la cible va être rapidement trouvée ou entourée par des sites visités. Notons que cet argument repose encore une fois sur les propriétés de vieillissement diffusif de ces modèles sous-diffusifs.

Pour finir, remarquons que l'argument développé ci-dessus s'étend aisément à l'ensemble des marches attractives présentant un comportement sous-diffusif (figure III.7). Ainsi, de par ces propriétés de vieillissement atypiques, les probabilité de survies de ces marches attractives présentent des décroissances suffisamment rapides, afin que tous les moments de la distribution de premier passage associée soient finis. Cette dernière propriété, spécifique aux effets de renforcement, en font des exemples très rares d'explorations particulièrement homogènes du territoire visité ; caractéristique importante lorsque l'on considère des exemples de trajectoires réelles.

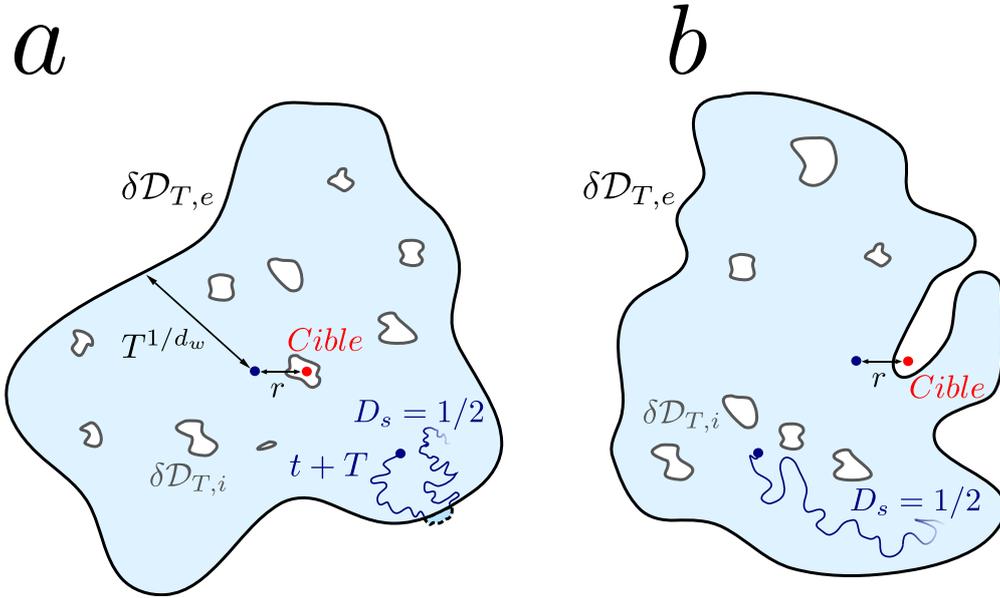


FIG. III.6 Schéma représentatif de la détermination des propriétés de premier passage des marches à renforcement attractif sous diffusives. **a** Le périmètre du territoire visité à  $T$  ( $\mathcal{D}_T$ ) est décomposé en le périmètre extérieur,  $\mathcal{D}_{T,e}$  (noir), et le périmètre intérieur,  $\mathcal{D}_{T,i}$  (noir clair). Le marcheur réalise un comportement diffusif à l'intérieur du territoire visité alors que le territoire extérieur suit une croissance sous diffusif ( $T^{1/d_w}$ ). Cette différence conduit le marcheur à visiter plus souvent l'intérieur de  $\mathcal{D}_T$ , et une cible située à l'intérieur de  $\mathcal{D}_{T,i}$  est trouvée bien plus rapidement ( $S(t)$  présente une décroissance non algébrique). **b** Une approche similaire pour une cible collée au bord extérieur  $\mathcal{D}_{T,e}$  est développée en annexe E.3.

<sup>\*18</sup> Ce comportement est encore une fois lié au caractère diffusif de la marche à l'intérieur du territoire visité qui croît plus lentement. Le marcheur va alors constamment réduire les aspérités du territoire visité, et découvrir de nouveaux sites uniformément autour de  $\mathcal{D}_{T,e}$ .

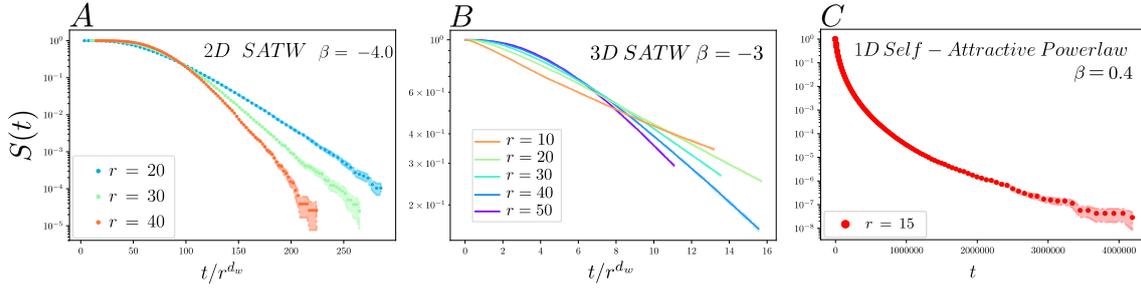


FIG. III.7 *Propriétés de premier passage en espace infini des marches à renforcement attractif sous-diffusives. A, B, les marcheurs SATW sous-diffusifs réalisent une exploration compacte avec une décroissance de la probabilité de survie proche d'un comportement exponentiel, observée en dimension 2 et 3. De même pour la marche attractive en loi de puissance en dimension 1 C, on retrouve une décroissance plus forte que n'importe quelle loi de puissance.*

### c) Effet du confinement

Intéressons-nous maintenant aux effets induits par l'ajout d'un volume confinant de taille  $R$ . Dans ce cas, la détermination de la distribution du FPT, pour une distance initiale  $r$  à la cible dans des domaines confinés de volume  $V \propto R^d$ , notée  $F(t, r, R)$ , est immédiate dans la limite des grands volumes. En effet, tous les moments de  $F(t, r, R)$  ont une limite finie de sorte que

$$F(t, r, R) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{dS}{dt},$$

où  $S(t, r)$  est la probabilité de survie en espace infini.  $F(t, r, R)$  est alors asymptotiquement indépendante de  $R$ . En définissant la variable normalisée  $\eta = t/r^{d_w}$ , un argument d'échelle permet de réécrire le comportement asymptotique de la distribution sous la forme

$$r^{d_w} F(t, r, R) = G(\eta, r, R) = h(\eta),$$

où  $h$  est une fonction d'échelle indéterminée.

Dès lors, nous avons montré que des effets de renforcement des marches attractives peuvent induire un comportement sous-diffusif. Ce comportement est couplé par l'apparition d'effet de vieillissement diffusif traduisant la formation d'un territoire visité compact. Ensuite, nous avons vu que ce comportement était suffisant pour altérer fortement les propriétés de premier passage en milieu infini et confiné dont tous les moments sont asymptotiquement finis.

Après avoir caractérisé le comportement asymptotique de ces différentes marches, on espère mettre en valeur l'apparition d'effets de renforcement pour des trajectoires réelles, observées expérimentalement.

## III.4 Relation entre mouvement cellulaire et les marches à renforcement attractif

Au fil des parties précédentes, nous avons ébauché une classification des marches attractives en caractérisant successivement leurs propriétés de transport, l'apparition de potentiels effets de vieillissement et leur efficacité à trouver une cible dans un espace infini ou confiné. Ces modèles ont des applications claires, et ce pour un large éventail d'exemples où le marcheur modifie localement son environnement, laissant des traces le long de sa trajectoire, mais surtout interagissant continuellement avec celles-ci lorsqu'il revient sur ces pas. On peut par exemple penser à des cellules capables de modifier chimiquement leur environnement et ainsi remodeler la matrice extra-cellulaire sur laquelle elles évoluent [Attieh et al., 2017; Pankov et al., 2000; Wolf et al., 2007]. On peut relever les travaux de [Stevens et al., 1997] qui proposent des modèles, numériques et analytiques, en vue de générer des phénomènes d'exploration et d'agrégation observés pour des bactéries et des micro-organismes. Dans cette partie, on cherchera à décrire des trajectoires cellulaires évoluant sur des surfaces micro-imprimées, 1D et 2D, en exhibant l'apparition d'effets de renforcement, qui sont parfaitement décrits par l'analyse développée précédemment. Même s'il a déjà été établi que les cellules peuvent modifier leur environnement, l'impact de ces perturbations auto-induites par les trajectoires cellulaires à différentes échelles reste peu exploré.

Dans la suite, nous monterons que des trajectoires de cellules épithéliales MDCK appartiennent à la classe générale des marches aléatoires à renforcement attractif. Plus généralement, nous observerons un couplage entre des cellules et leur territoire visité, générant des effets de mémoire et de vieillissement semblables à ceux étudiés précédemment dans ce chapitre.

### III.4.1 Observations expérimentales

*Les travaux que l'on va présenter ici ont été réalisés en collaboration avec Benoît Ladoux et Joseph D'Alessandro, chercheurs à l'institut Jacques-Monod à l'université de Paris.*

Nos collaborateurs ont suivi, par vidéo-microscopie, la migration spontanée de cellules épithéliales MDCK, isolées sur des pistes linéaires en dimension 1 et 2, imprimées de fibronectine, et ce, sur de larges échelles de temps (48 à 96 h). Décrivons succinctement les différentes observations qui en ont découlé (une description plus précise de la méthodologie expérimentale peut être trouvée dans [d'Alessandro et al., 2021]).

#### a) Comportements oscillants des cellules MDCK épithéliales

Deux comportements principaux ont été observés :

- Une première population de cellules présente un état statique sans déplacement net de leur centre de masse, comportement que l'on ne considérera pas dans la suite.
- Une deuxième population exhibe des trajectoires oscillantes étonnamment régulières, dont l'amplitude peut largement dépasser la taille de la cellule. On se penchera plus particulièrement sur l'étude de cette seconde population.

Relevons que des modèles oscillants ont été précédemment identifiés pour divers types de cellules [Holmes et al., 2018; Paluch et al., 2005; Peyret et al., 2019; Zhang et al., 2014]. Néanmoins on soutient, ici, que ces oscillations sont intrinsèquement liées au territoire visité par le marcheur au cours de son évolution.

En effet, notre analyse révèle que les cellules oscillantes se polarisent et acquièrent une vitesse instantanée de l'ordre de  $100\mu m.h^{-1}$ . Ces phases de mouvements sont entrecoupées par des phases d'inversion de la polarité où la cellule change alors de direction. La répétition de ces phases conduit à un mouvement global oscillant (figure III.8). Ensuite, on peut relever que la période et l'amplitude de ces oscillations augmentent au cours du temps. Observation cohérente avec la représentation d'une cellule rebondissant entre deux barrières réfléchissantes qui s'éloignent lentement. Ces observations expérimentales suggèrent que les inversions de polarité sont induites par les interactions des cellules avec leurs propres empreintes, et non pas uniquement causées par une horloge intracellulaire. Plus précisément, on proposera que ces cellules modifient les propriétés de leur environnement local, retombant alors dans le prisme des marches à renforcement attractif étudiées précédemment. Dans ce scénario, les cellules fonctionneraient donc de manière localement persistante lorsqu'elles se trouvent à l'intérieur du territoire visité, et inverseraient leur polarité en atteignant un bord de celui-ci, étendant ainsi progressivement le domaine visité.

#### b) Caractérisation de l'impact des empreintes cellulaires

Afin de confirmer cette hypothèse, les expériences précédentes ont été reproduites avec des *substrats conditionnés*, pour lesquels **un premier lot de cellules ont été déposées à haute densité et laissées évoluer librement** (figure III.8). Ces cellules sont ensuite détachées, avant d'ajouter un second lot en reproduisant le protocole des expériences précédentes pour lesquelles les cellules avaient été déposées sur des surfaces vierges. Ainsi, la seconde expérience permet d'observer des cellules évoluant dans un milieu déjà exploré et vieilli. Celles-ci présentent alors un déplacement net considérablement augmenté, de même qu'un temps de persistance, défini comme le temps moyen avant l'inversion de polarité, plus élevé que pour les substrats vierges d'empreintes<sup>\*19</sup>. Enfin, ces observations ont été confirmées pour d'autres types cellulaires, dont des cellules Caco-2 (figure III.8). Celles-ci présentent également un comportement oscillant tandis que l'on observe un simple mouvement persistant pour des substrats conditionnés.

Une analyse plus précise des empreintes cellulaires révèle que les substrats conditionnés sont entièrement recouverts de fibronectine cellulaire venant d'être déposée. Cette fibronectine peut provenir de la matrice extra-cellulaire [Pankov et al., 2000], mais également être directement produite par la cellule [Borsi et al., 1987]. Ces résultats suggèrent donc que la modification, ou le remodelage d'éléments de la matrice extracellulaire, participe aux effets de mémoire de la migration cellulaire.

Afin de caractériser l'impact des empreintes cellulaires sur la dynamique de celles-ci, on propose de développer une analyse cinématique des trajectoires observées.

---

<sup>\*19</sup> Notons par ailleurs, que seuls quelques exemples de cellules statiques ont pu être observés sur le substrat conditionné.

Pour cela, en détectant les bords des cellules, il est possible de reconstruire les trajectoires individuelles et de définir un champ d’empreinte  $\phi(x, t)$ , champ défini comme le temps total passé par la cellule à un emplacement donné  $x$  avant le temps  $t$  (figure III.9). On analyse ensuite les corrélations entre l’accélération  $a$  du centre de masse de la cellule et les valeurs  $\phi$  mesurées aux extrémités gauche ( $\phi_l$ ) et droite ( $\phi_r$ ).

Pour une cellule atteignant l’extrémité droite (respectivement gauche) du domaine visité, le champ d’empreinte locale sur laquelle la cellule se trouve est très asymétrique avec  $\phi_l \gg \phi_r$  (respectivement  $\phi_l \ll \phi_r$ ). On observe alors une moyenne significative de l’accélération vers l’intérieur du domaine visité ( $\langle a \rangle \approx \pm 100 \mu m . h^{-2}$ ). En revanche, pour une cellule se déplaçant à l’intérieur du territoire visité, le champ d’empreinte est à peu près uniforme ( $\phi_l \sim \phi_r$ ), et on n’observe aucune variation significative de la vitesse de migration cellulaire ( $a \sim 0$ ). Cette corrélation claire indique que la polarité des cellules est en partie régie par les gradients locaux  $\delta\phi = \phi_r - \phi_l$  du champ visité, et confirme notre hypothèse selon laquelle les empreintes cellulaires ont un impact sur les trajectoires.

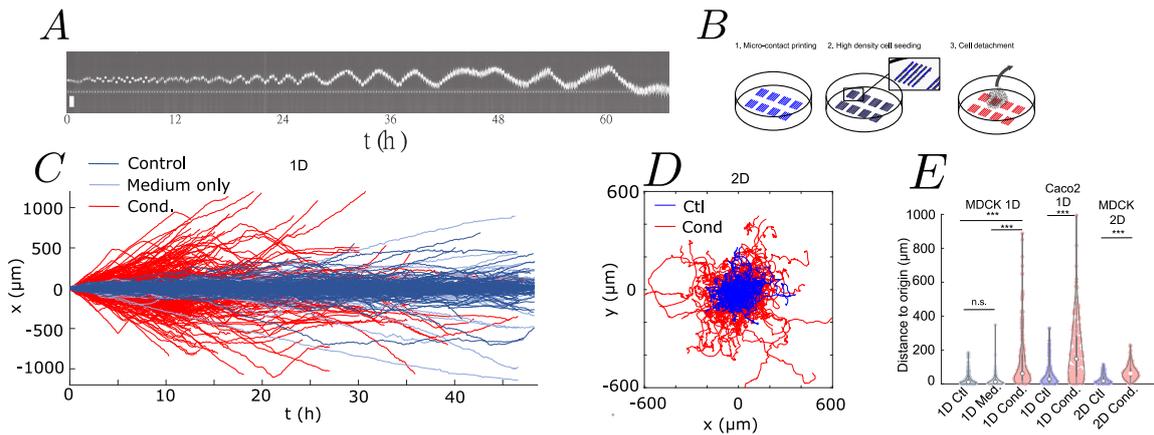


FIG. III.8 *Comportement oscillant des cellules isolées et effet du substrat conditionné sur les propriétés de transport. A* Une part significative de cellules MDCK isolées présentent des oscillations régulières, ici illustrées par le Kymographe d’une cellule MDCK en dimension 1. *B* Principe du substrat conditionné, des pistes linéaires sont imprimées par micro-contact (1), puis une première couche de cellules est ajoutée à haute densité afin qu’elles en explorent toute la surface (2), ensuite celles-ci sont décollées (3) avant de débiter l’expérience pour un second lot de cellules. *C* Trajectoires des cellules en fonction du temps selon les différents protocoles (Contrôle et Milieu seul : substrats vierges d’empreintes, Cond : cellules évoluant sur un substrat conditionné selon le protocole *B*). On remarque un comportement persistant plus élevé pour les substrats conditionnés. *D* Trajectoires des cellules isolées évoluant sur des surfaces 2D, pour des trajectoires contrôles (Ctl, bleu) ou pour des substrats conditionnés (Cond en rouge). *E* Comparaisons des distances parcourues par les cellules depuis leur position d’origine, après 16 heures sur des substrats de contrôle, ou conditionnés en 1D et 2D selon différents protocoles et lignées cellulaires (MDCK 1D, Ctl / Medium / Cond.), (Caco2 1D, Ctl / Cond.) et (MDCK 2D, Ctl/Cond.).

### III.4.2 Comparaisons des trajectoires réelles avec les différents modèles à renforcement attractif

L'analyse des trajectoires réelles a révélé des similarités entre les modèles détaillés en début de chapitre et les trajectoires observées expérimentalement. Il est clair que les modèles piégés ne correspondent pas aux résultats expérimentaux des cellules oscillantes<sup>\*20</sup>. Ensuite, les trajectoires cellulaires ne semblent pas présenter de variations de comportement importantes à l'intérieur du territoire visité. Cette dernière observation est partagée avec le modèle de la SATW, en comparaison des modèles en loi de puissance qui restent dépendants des gradients locaux à faible nombre de visites.

Dès lors, le modèle à renforcement présentant les caractéristiques les plus proches des observations expérimentales est le modèle persistant de la marche SATW (PSATW), présenté dans le chapitre précédent. Rappelons que le marcheur PSATW en dimension 1 est assimilable à une marche persistante simple à l'intérieur du territoire visité, caractérisée par une probabilité d'imiter le pas précédent  $p = e^k / (e^{-k} + e^k)$ , où  $k > 0$  contrôle la longueur de persistance  $l_p = e^{2k}$ . Ensuite, lorsque le marcheur est aux bords de la zone visitée, les effets de renforcement doivent être pris en compte conduisant à une probabilité  $p = 1 - e^{-k-\beta} / (e^{-k-\beta} + e^k)$ . Ce modèle présente donc un effet de persistance couplé à un retournement induit par le renforcement *seulement* au bord de la zone visitée, effets qui sont les principales caractéristiques observées pour les trajectoires cellulaires.

Remarquons que de nombreux autres choix de modèles saturants présentant un effet de persistance à faible nombre de visites auraient été valables. En outre, le comportement cellulaire est sûrement plus complexe et n'est pas connu pour des temps plus élevés que  $78h$ . Enfin, ce modèle défini sur réseau doit être aussi généralisé par une approche continue des modèles à renforcement afin de capturer au mieux le comportement des trajectoires réelles. Néanmoins, on propose que la marche PSATW fournit un modèle minimal pertinent afin de décrire et interpréter les schémas de migration observés (figure III.9).

Afin d'isoler des éléments de comparaison plus explicites, on peut développer une procédure de discrétisation des trajectoires réelles. La position du centre de masse  $x$  est alors interpolée sur une grille régulière de la taille minimale de la cellule, utilisée comme référence. Les événements de sauts notés  $i$  entre chaque point de la grille vont donc se manifester à des temps irréguliers ( $X(T_i) = X(T_{i-1}) \pm 1$ )<sup>\*21</sup>. En mesurant directement les fréquences conditionnelles d'inversion, aux bords ou à l'intérieur du territoire visité, il est possible de mesurer des paramètres probables  $(\tilde{\beta}, \tilde{k})$  pour chaque trajectoire cellulaire.

Ainsi, on obtient un élément de comparaison simple entre les trajectoires discrétisées et le modèle type PSATW, et ce, indépendamment des fluctuations de vitesse ou d'accélération ou de la forme de la cellule.

<sup>\*20</sup> Les cellules statiques sont assimilées à une autre phase dont l'origine ne semble pas être liée à l'empreinte de la trajectoire.

<sup>\*21</sup> Notons que de cette façon, la distribution des temps de sauts dont on a retiré les événements rares (événements où le marcheur semble entrer momentanément dans une phase statique) peut être assimilée à une loi exponentielle de moyenne  $\approx 0,6h$ .

En particulier, on constate que les mesures expérimentales  $(\tilde{\beta}, \tilde{k})$  sont concentrées autour de la ligne  $\beta = -2(k+1)$  signifiant que la probabilité d'inversion aux bords de l'empreinte semble être constante  $p \approx e^2/(e^2+1)$ , contrairement aux effets de persistance qui restent variables selon les trajectoires. Pour des substrats conditionnés en revanche, les mesures  $(\tilde{\beta}, \tilde{k})$  présentent des valeurs  $\beta$  plus élevées présentant par ailleurs, une fraction non négligeable de  $\beta$  positif. Ce dernier constat met en évidence que l'effet attractif a été réduit après de multiples passages. Enfin, les mesures des couples typiques  $(\tilde{\beta}, \tilde{k})$  obtenues permettent de justifier la présence d'un comportement oscillant. En effet pour des valeurs de  $k$  et  $|\beta|$  élevées et un petit territoire  $\mathcal{D}_t = O(1)$ , le caractère persistant de la marche reproduit un mouvement balistique entre les deux bords du domaine. Pour affiner notre comparaison, notons qu'il est possible de générer un équivalent continu du modèle PSATW. Pour cela, on introduit des temps d'attentes entre chaque saut, temps indépendants et identiquement distribués selon une loi exponentielle de moyenne  $\tau \approx 0.6h$ . Ensuite, chaque trajectoire est générée pour un couple différent  $\beta = -2(k+1)$  où  $k$  est tiré selon une distribution normale de déviation standard consistante avec les paramètres  $\tilde{k}$  mesurés. En particulier, ce modèle en temps continu permet de capturer les finesses observées aux temps courts pour les trajectoires expérimentales que le modèle en temps discret ne peut pas reproduire (figure III.10). Enfin, remarquons que la robustesse de la procédure de discrétisation a été mise à l'épreuve en faisant varier la référence de la taille de la grille et en expérimentant sur des trajectoires PSATW simulées pour des sauts continus retrouvant le couple  $(\beta, k)$  initialement choisi.

### III.4.3 Conséquences des effets de renforcement

À partir des résultats obtenus précédemment, il est possible de générer des trajectoires du modèle PSATW et ainsi de les comparer aux trajectoires réelles observées expérimentalement. Premièrement, l'analyse des incréments déduits des trajectoires expérimentales ( $\langle [X(t+T) - X(T)]^2 \rangle$ ) révèle la présence d'effets de vieillissement et une dépendance claire de ceux-ci selon le temps d'observation  $T$ , y compris pour des temps courts. Un comportement identique des incréments est retrouvé pour les simulations des marches PSATW et son équivalent continu avec des paramètres  $(\beta, k)$  proches de ceux mesurés à l'aide de la méthode de discrétisation (figure III.10). Ce constat reste identique en dimension 2 où le comportement des incréments mesurés expérimentalement est en accord avec ceux obtenus des trajectoires simulées de la généralisation du modèle PSATW sous-diffusif en dimension supérieure à 1 (pour des valeurs de  $|\beta|$  suffisamment élevés, figure III.10). Inversement, on observe que les incréments des trajectoires conditionnées ne présentent pas d'effets de vieillissement notables confirmant que les effets de mémoire sont bien induits par les empreintes cellulaires déposées. D'autre part, on peut relever que les incréments capturent la transition entre un comportement balistique persistant et un comportement diffusif dans la limite  $t, T \gg l_p^2$ . Cet effet est particulièrement saisissant dans le cas discret pour des paramètres fixés  $(\beta, k)$ \*<sup>22</sup>.

---

\*<sup>22</sup>. Pour ceux-ci un maximum local est observé; celui-ci correspond aux événements de retournements aux bords de  $\mathcal{D}_t$  qui sont alors synchronisés. En prenant en compte la variabilité des vitesses cellulaires et ses paramètres  $(\beta, k)$ , la synchronisation est perdue et le maximum disparaît (voir annexe E.4).

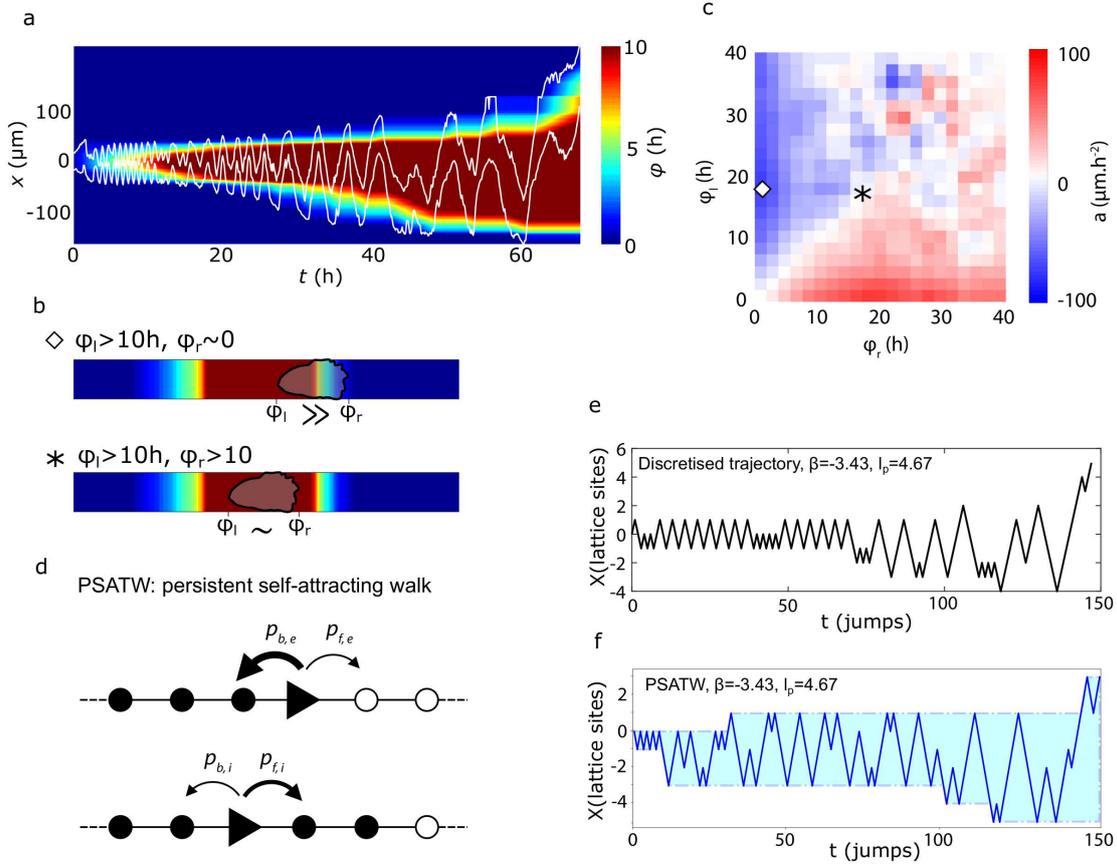


FIG. III.9 Les trajectoires des cellules isolées présentent des caractéristiques propres aux marches à renforcement attractif. **a** Kymographe d'une cellule isolée sur une piste  $W = 20 \mu m$ , superposé à son champ d'empreinte  $\varphi(x, t)$ , défini comme le temps cumulé passé sur une position donnée. **b** Croquis des mesures  $\varphi_l$  et  $\varphi_r$ . En haut : la cellule se trouve sur le bord droit de l'empreinte, son extrémité droite étant à l'extérieur,  $\varphi_r \simeq 0$ , tandis que son extrémité gauche est à l'intérieur,  $\varphi_l > 10h$ . En bas : la cellule est à l'intérieur de son territoire visité, avec des valeurs comparables de  $\varphi_l$  et  $\varphi_r$ . Les symboles sont rapportés dans **c** afin d'indiquer où se trouve chaque situation dans la représentation  $\varphi_l - \varphi_r$ . **c** Accélération moyenne des cellules isolées sur les pistes  $20 \mu m$  en fonction des valeurs de  $\varphi$  aux deux extrémités des cellules. **d** Schéma du modèle PSATW : le marcheur, se trouvant au bord du territoire visité ou à l'intérieur de celui-ci, a alors des probabilités différentes d'imiter le pas précédent ou de faire demi-tour. **e** Trajectoire expérimentale discrétisée d'une cellule oscillante (trajectoire représentée en **a**) permettant de mesurer les statistiques de retournement à l'intérieur et au bord du territoire visité. **f** Trajectoire simulée d'un marcheur PSATW avec des paramètres identiques à ceux déduits du panneau **e**.

Ces effets de vieillissement peuvent avoir des conséquences importantes sur les observations expérimentales de trajectoires cellulaires. Brièvement, une cellule déposée en avance sur un substrat présentera des propriétés d'exploration différentes de celles introduites au moment où l'expérience est déclenchée.

On peut retenir l'exemple du phénomène oscillant examiné dans ce chapitre, qui ne survient que dans le second cas. Autrement dit, il est tout aussi important de connaître le temps d'observation  $T$ , défini comme celui où la cellule est déposée, que le temps de départ de l'expérience  $t$  où la mesure débute. En particulier, le rapport  $t/T$  joue un rôle crucial dans le comportement des incréments en dimension supérieure à 1.

Par ailleurs, en reprenant les analyses menées précédemment, les effets de vieillissement observés ont des conséquences importantes sur les propriétés asymptotiques de premier passage de ces modèles. Ainsi, la probabilité de survie associée aux trajectoires cellulaires présentera un comportement asymptotique anormal, comportement caractérisé par un exposant  $\theta(\beta) \neq 1/2$ , en dimension 1, et une décroissance plus forte que n'importe quelle loi de puissance en dimension supérieure à 2. Ce résultat s'étendant à des dimensions supérieures si les effets de renforcement sont suffisants pour induire un comportement sous-diffusif.

Ainsi au travers de notre analyse, nous avons démontré que les cellules non seulement s'adaptent à leur environnement, mais sont également capables d'interagir avec leurs propres empreintes. Nous avons, en particulier, souligné les conséquences de l'empreinte du territoire précédemment visité sur l'évolution de la trajectoire future de différentes lignées cellulaires.

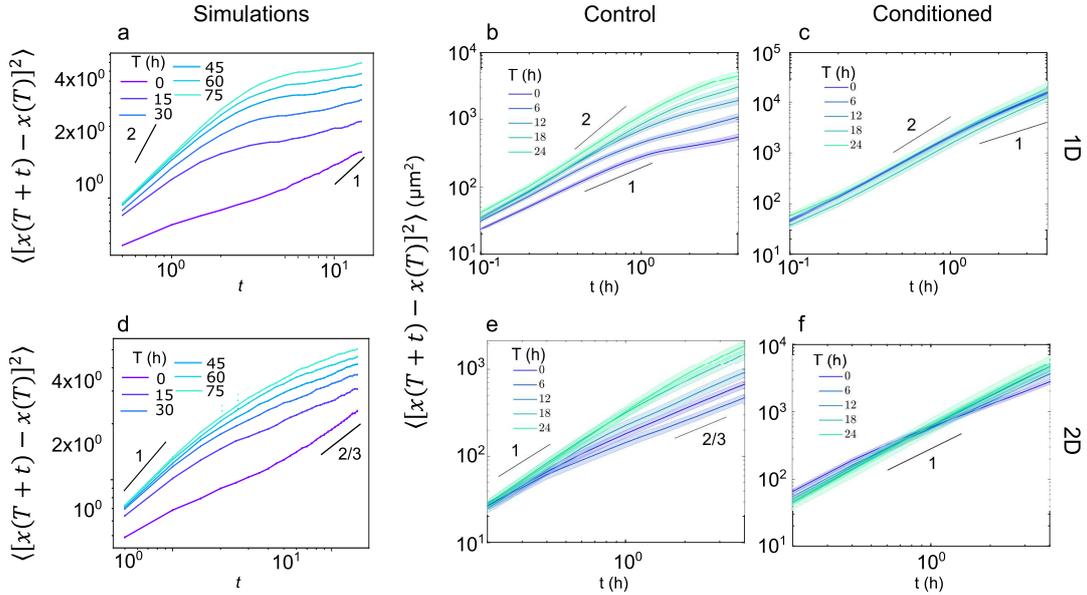


FIG. III.10 Le modèle PSATW prédit des effets de vieillissement à des échelles de temps observables expérimentalement. **a-f** Incréments tracés pour des trajectoires 1D (**A-C**) ou 2D (**D-F**). **a,d** Données issues des simulations de la généralisation continue modèle PSATW, et données issues des trajectoires observées expérimentalement sur des substrats témoins **b,e** et conditionnés **c,f**. Les lignes en noir donnent les différents exposants prédits par la théorie du modèle PSATW. Dans les figures **b,c,e,f**, les barres d'erreur représentent l'erreur quadratique moyenne pour  $n > 100$  trajectoires.

### III.5 Conclusion

Ce chapitre entame une analyse extensive des modèles à renforcement en se concentrant sur ceux dont les effets favorisent les sites les plus visités. La première observation, sur laquelle nous avons insisté, relève l'importance du choix des définitions microscopiques des effets de renforcement, et plus particulièrement entre les deux conventions pour lesquelles les effets de renforcement sont introduits sur les liens ou sur les sites du réseau. Nous avons constaté que cette petite variation génère des effets importants sur les propriétés de transport des marches attractives dont le poids  $w(n)$  croît en loi de puissance selon le nombre de visites. Puis, nous avons développé une approche générique permettant de classifier les différents processus à renforcement en deux catégories, et ce, indépendamment de la convention et de la dimension du réseau. La première catégorie comprend les marcheurs qui explorent un nombre infini de sites, contrairement à la seconde où les marcheurs sont nécessairement piégés dans leur propre trajectoire. Notre résultat a ainsi unifié les différents travaux mathématiques menés pour les marches sur sites et sur liens. Cette approche synthétise ces différents travaux en présentant des arguments d'échelle qui éclairent de ce fait les mécanismes fondamentaux à l'origine du comportement piégé.

Ensuite, nous nous sommes plus particulièrement intéressés aux marcheurs qui explorent un nombre infini de site. Tout d'abord, nous avons relevé que contrairement au comportement piégé, qui est entièrement déterminé par le comportement aux temps longs des effets de renforcement, les propriétés de transport des marches à renforcement, en dimension supérieure à 1, restent très sensibles au comportement de  $f$  à faible nombre de visites. Plus particulièrement, nous avons déterminé que ces marches, à l'exception des marches sur site en loi de puissance proche de 1, suivent trois comportements distincts en fonction de la force des effets de renforcement mais aussi de la dimension du réseau.

- En dimension 1, pour tous les modèles dont les effets de renforcement saturent, les marcheurs présentent un comportement diffusif et des effets de vieillissement diffusifs à toute échelle de temps de manière analogue que ceux détaillés dans le chapitre précédent.
- En dimension supérieure à 1, pour des processus dont les effets de renforcement à petit nombre de visites sont suffisamment forts pour altérer le comportement asymptotique du marcheur. Ces modèles présentent un comportement sous-diffusif couplé à des effets de vieillissement diffusifs dans la limite  $T \gg t$ , soulignant que le territoire visité croît de manière homogène et compacte. D'autre part, à l'intérieur de celui-ci, les effets de renforcement sont négligeables. Ce comportement peut être étendu aux modèles à renforcement dont le poids croît en loi de puissance selon le nombre de visites,  $t^\beta$  avec  $\beta < 1$ , y compris en dimension 1. Pour la convention sur lien, une valeur de l'exposant de marche  $d_w = \frac{1+d(1-\beta)}{1-\beta}$ , caractérisant le comportement asymptotique du déplacement quadratique moyen, a été proposée.
- Enfin pour des processus dont les effets de renforcement sont trop faibles pour altérer le comportement du marcheur en dimension supérieure à 1, ces marches présente un comportement diffusif et des effets de vieillissement transients, et cela indépendamment du comportement du poids  $w(n)$  à grand nombre de visites  $n$ .

De plus, Notons que les transitions entre les régimes diffusifs et sous-diffusifs en dimension supérieure à 1, sont indéterminées. Celles-ci restent très sensibles au comportement du poids  $w(n)$  à petit nombre de visites, ce qui rend la détermination exacte de celles-ci particulièrement ardue.

Ensuite, nous avons observé que les modèles attractifs sous-diffusifs présentaient des propriétés d'exploration particulièrement anormales. Ces modèles sont caractérisés par une distribution de premier passage qui présente une décroissance asymptotique plus forte que n'importe quelle loi de puissance, signifiant que tous les moments de la distribution de premier passage sont finis. En particulier, les propriétés d'exploration de ces marcheurs sont peu sensibles à l'introduction d'un volume confinant.

Pour finir, nous avons relevé l'importance des effets de renforcement dans l'analyse de trajectoires cellulaires réelles. Ces effets peuvent avoir de multiples conséquences biologiques. Tout d'abord, ils procurent à la cellule un faible effet induit de confinement, qui à première vue empêche une migration efficace sur longues distances. En retour, cette localisation assure une bien meilleure exploration de l'environnement de la cellule, afin qu'aucune zone ne soit oubliée, ce qui pourrait être important pour les cellules qui ont besoin de patrouiller sur un domaine par exemple.

Enfin, ces effets confèrent des propriétés de vieillissement aux trajectoires cellulaires, dont les conséquences peuvent être cruciales, bien que généralement négligées dans les expériences de migration cellulaire. Nous avons, en particulier, souligné les conséquences de l'empreinte du territoire précédemment visité sur l'évolution de la trajectoire future de différentes lignées cellulaires. Une extension pertinente de cette étude devra prendre en compte les effets collectifs de multiples marcheurs à renforcement qui interagissent avec leur propre empreinte, mais aussi avec l'ensemble de celles générées par les autres marcheurs.



# IV – Propriétés des marches à renforcement en espace confiné

## IV.1 Introduction

*Les résultats relatifs à ce chapitre peuvent être retrouvés dans [Barbier-Chebbah et al., 2021]*

La partie précédente a permis de fournir un cadre général aux modèles attractifs piégés ou sous-diffusifs. Dans ce chapitre, on cherche à compléter notre étude en considérant les modèles à renforcement répulsif et les modèles attractifs diffusifs présentés auparavant (chapitre 3). On abordera notamment les problématiques de premier passage en présence d'un volume *confinant* [Bénichou et al., 2014 ; Condamine et al., 2007a]. Celles-ci sont en pratique tout aussi importantes que celles en espace infini. Elles couvrent, par exemple, des réactions chimiques à l'intérieur d'une cellule ou de son noyau. Elle s'étendent aussi aux systèmes confinés par le biais d'un potentiel. Les résultats de premier passage sont particulièrement sensibles à la présence du confinement. Un marcheur symétrique évoluant en espace infini présente généralement un temps moyen de premier passage (MFPT) infini, contrairement aux marcheurs astreints à un volume fini qui possèdent un MFPT fini.

Afin de caractériser la statique du FPT en confinement, on s'appuiera notamment sur les travaux menés dans [Levernier et al., 2018]. Ceux-ci ont permis d'exhiber trois classes d'universalité vérifiées par la distribution de premier passage en confinement. Celles-ci sont obtenues dans la limite des grands volumes, pour des processus strictement invariants d'échelle. D'autre part, ces travaux soulignent l'importance des effets de vieillissement sur les propriétés de premier passage en espace infini et en confinement. On se concentrera sur les observables suivants : incréments et probabilité de survie caractérisée par  $\theta$  (pour les processus compacts) et  $\psi$  (pour les processus non compacts) en espace infini et confiné. On montrera numériquement, et à l'appui d'arguments heuristiques, que le confinement géométrique peut modifier profondément et non localement la dynamique du processus au-delà d'imposer des conditions réfléchives au bord du volume.

Ainsi dans un premier temps, on caractérisera quantitativement le comportement des incréments des marches à renforcement et leur possible vieillissement en espace infini et confiné. En particulier, pour les explorations non compactes, on observera l'apparition d'effet de vieillissement en espace confiné différents des comportements observés en espace infini.

De manière similaire, on déterminera les exposants caractéristiques associés aux propriétés de premier passage en espace infini, pour les explorations compactes et non compactes, et on discutera de leurs équivalents en espace confiné après vieillissement.

Ensuite, sur la base de cette analyse, on dérivera la distribution asymptotique du FPT en confinement pour les deux types d'exploration. Enfin, on discutera de l'impact du vieillissement sur les statistiques du FPT en analysant le cas de conditions initiales vieilles au préalable. Le cas spécifique des explorations marginales, explorations observées en dimension 2 pour les modèles à renforcement, sera abordé en fin de chapitre.

## IV.2 Propriétés des marches à renforcement en milieu infini et en confinement

Les connexions entre temps de premier passage et effets de vieillissement sont omniprésentes dans les travaux concernant les processus non markoviens [Bray et al., 2013 ; Krug et al., 1997]. Prenons l'exemple des modèles étudiés dans le chapitre 2, qui met en lumière les liens entre le comportement vieillissant des incréments diffusifs et les valeurs non triviales de l'exposant de persistance. Par conséquent, il faut, tout d'abord, caractériser les effets de vieillissement des différentes marches, avant de se tourner vers leurs propriétés de premier passage en espace infini ou confiné. Il est utile d'analyser séparément les processus effectuant des explorations compactes et non compactes [Hughes, 1995] puisque cette dernière propriété joue un rôle de premier plan pour les marches à renforcement dont la dynamique est contrôlée par le nombre de visites  $n$  sur chaque site.

Commençons par réécrire le poids associé au temps local sous la forme d'un potentiel :  $w(n) = \exp(-V(n))$ . On propose que la classe des modèles à renforcement répulsif puisse être relativement bien couverte par l'étude des exemples suivants :

- le modèle TSAW (true self avoiding walk) pour lequel  $V(n) = \beta n$ ,  $\beta > 0$ .
- les modèles SESRW à renforcement sous-exponentiels pour lesquels  $V(n) = \beta n^k$ ,  $\beta > 0$ ,  $k < 1$ .
- les modèles répulsifs en loi de puissance (PSRW) pour lesquels  $V(n) = \beta \ln(n + 1)$ ,  $\beta > 0$ .
- les marches présentant un potentiel super-linéaire  $V(n) = \beta n^k$ ,  $\beta > 0$ ,  $k > 1$ .
- le modèle SATW pour lequel  $V(n) = \beta n_i$  où  $n_i = 0$  si le site n'a jamais été visité et  $n_i = 1$  sinon.

En outre, on peut ajouter les modèles attractifs diffusifs (chapitre 3).

### IV.2.1 Comportement des incréments en espace infini

Commençons par caractériser le comportement des incréments des différents modèles en espace infini.

**a) Explorations non compactes ( $d \geq 3$ )**

En dimension supérieure ou égale à 3, l'ensemble de ces modèles présente un comportement commun. Ils sont alors caractérisés par un comportement diffusif à toute échelle de temps. Les effets de renforcement ont un impact limité dans le cas des explorations non compactes. Cette dernière observation peut être justifiée heuristiquement comme suit. À l'instant  $t$ , le volume typique couvert est de l'ordre de  $t^{d/d_w}$ , tandis que le nombre de sites distincts visités est de l'ordre de  $t$ , de sorte que la fraction locale de sites où le paysage énergétique local est non nul est de l'ordre de  $t^{1-d/d_w}$ . Ainsi cette fraction est négligeable dans la limite  $t \rightarrow \infty$ . L'environnement local entourant le marcheur est donc asymptotiquement stationnaire, le marcheur ne revenant que rarement sur les sites visités longtemps auparavant. En conséquence, on observe une relaxation du comportement des incréments, sur des temps  $t \approx O(1)$  indépendamment de  $T$  qui convergent vers un comportement diffusif stationnaire caractérisé par un coefficient de diffusion  $D_L(\beta)^{*1}$  (figure IV.2).

**b) Explorations compactes ( $d = 1$ )**

Ensuite, considérons les explorations compactes, majoritairement en dimension 1, pour lesquelles le comportement asymptotique du MSD est connu pour l'ensemble des modèles considérés (chapitre 1).

Dans le cas compact, le nombre typique de visites sur un site donné diverge selon  $t$  et  $T$ , y compris en espace infini. Part conséquent, le temps local  $n(t)$  dépend du temps d'observation  $\forall T$ . Cette dernière remarque implique un vieillissement des incréments en espace infini à toutes les échelles de temps. On va brièvement détailler le comportement de ces différents modèles. Rappelons que la marche SATW et les marches répulsives en loi de puissance présentent un comportement diffusif, caractérisé par un vieillissement diffusif à toutes les échelles de temps<sup>\*2</sup> (figure IV.1, chapitre 2, [Prasad et al., 1996; Tóth, 2001]).

Ensuite, considérons la classe des marches sous-exponentielles. On suggère que ces processus réalisent un comportement diffusif aux temps courts  $T \gg t \gg 1$ . Pour rendre cette observation quantitative, on propose d'écrire  $V(n_i)$  sous la forme d'une série de Taylor

$$V(n_i) = V(\bar{n}) + \sum_{k \geq 1} V^{(k)}(\bar{n}) \frac{(\delta n_i)^k}{k!},$$

De par la définition même des marches à renforcement, leur dynamique ne dépend que des fluctuations spatiales de  $V$ . Autrement dit, les incréments sont indépendants de  $V(\bar{n})$  pour  $t \lesssim l^{d_w} \ll T$  où  $l$  sont les longueurs caractéristiques des processus. Dans le cas des marches SESRW, toutes les dérivées  $V^{(k)}(\bar{n})$  pour  $k \geq 1$  s'annulent dans la limite  $T \rightarrow \infty$  ( $T \gg t$ ), puisque  $\bar{n} \rightarrow \infty$ .

<sup>\*1</sup> D'autre part, notons que  $D_L(\beta) \neq 1/2$  puisque le marcheur est constamment en contact avec des sites répulsifs visités récemment.

<sup>\*2</sup> Les effets de renforcement ne sont pas suffisamment forts afin d'induire un comportement anormal du MSD mais sont à l'origine des effets de vieillissement.

Cela suggère que pour  $1 \ll t \ll T$ , les effets de renforcement sont finalement négligeables, on retrouve alors un comportement équivalent à une marche aléatoire symétrique simple.

Notons que ce raisonnement s'appuie sur l'hypothèse que les fluctuations sont bien négligeables<sup>\*3</sup>. Cette question est abordée en annexe G.1 où l'on détermine leur amplitude, et on montre effectivement que  $V^{(k)}(\bar{n})\delta n_i^k \rightarrow 0$ . En conséquence, on propose que le comportement des incréments de la marche SESRW soit donné par

$$\langle [X(t+T) - X(T)]^2 \rangle = \begin{cases} 2D_L t^{\frac{2(k+1)}{(k+2)}} & \text{pour } t \gg T \\ D_s t & \text{pour } t \ll T, \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

ce qui est vérifié figure IV.1<sup>\*4</sup>. Cette observation reste importante pour la suite de notre étude. En effet, la décomposition selon (IV.1), peut s'étendre aux modèles SATW et aux modèles répulsifs en loi de puissance (figure IV.1) mais aussi aux cas où ces marcheurs évoluent dans un espace confiné (où  $\bar{n}$  diverge aussi selon  $T$ ). Plus précisément, la statistique du nombre de visites est modifiée par l'introduction du confinement mais les fluctuations spatiales de  $V$  restent négligeables. Ce constat sera justifié lorsque l'on se tournera vers les propriétés de transport des marcheurs en confinement.

En revanche, contrairement aux modèles sous-exponentiels, la marche TSAW présente un comportement super linéaire [Amit et al., 1983], y compris dans la limite  $T \gg 1$ . Pour ce modèle, en reprenant (IV.1), on a  $V'(\bar{n}) = \beta$  et  $V^{(k)}(\bar{n}) = 0$  pour  $k > 1$ , indépendamment de  $\bar{n}$ . Ce constat implique que dans le régime  $1 \ll t \ll T$ , le marcheur continue à évoluer dans un potentiel rugueux et présente un comportement superdiffusif (résultat justifié en annexe G.1 et observé en dimension 1 et 2 en confinement dans [Freund et al., 1993]). Ainsi, on propose que les incréments de la marche TSAW présentent des effets de vieillissement de la forme suivante<sup>\*5</sup>

$$\langle [X(t+T) - X(T)]^2 \rangle = 2D(t/T) t^{\frac{3}{4}}. \quad (\text{IV.2})$$

Ainsi, nous avons observé que les marches à renforcement présentent des effets de vieillissement distincts en fonction de la dimension du réseau dans lequel elles évoluent. Avant de se tourner vers les propriétés de vieillissement en confinement, relevons plusieurs points :

- En dimension 3, les différents modèles présentent une limite commune pour  $\beta \rightarrow \infty$ . Celle-ci est donnée par un marcheur qui saute sur un site choisi uniformément parmi les sites voisins les moins visités [Avin et al., 2008]. En dimension 3, comme le nombre de visites d'un site donné est fini, l'ensemble des processus répulsifs convergent vers ce comportement limite diffusif dont  $D$  est difficile à déterminer.

<sup>\*3</sup> Notons que des corrélations à longues portées de ces fluctuations pourraient modifier le comportement asymptotique des incréments mais il faudrait pour cela que le marcheur parcourt des distances suffisantes impliquant  $t \gtrsim O(T)$ , ce qui est contradictoire.

<sup>\*4</sup> En pratique, ce comportement est très difficilement observable, le régime limite étant valide pour des temps particulièrement longs ( $T > O(10^9)$ ). Il a été vérifié numériquement pour des effets de renforcement faibles ( $k$  proche de 0), mais on suggère que ce résultat puisse s'étendre à l'ensemble des marches sous-exponentielles.

<sup>\*5</sup> En pratique, la limite  $D_s$  est difficilement observable en raison de l'existence de temps de relaxation particulièrement élevés.

- Par ailleurs, en dimension 1, on observe l'émergence de temps de relaxation divergeant lorsque les effets de renforcement sont faibles ( $\beta \sim 0$ ) mais aussi lorsqu'ils sont élevés. Ainsi, la principale difficulté de l'analyse numérique des propriétés de vieillissement de ces modèles provient de l'extrême lenteur de la convergence des différentes observables\*<sup>6</sup>.

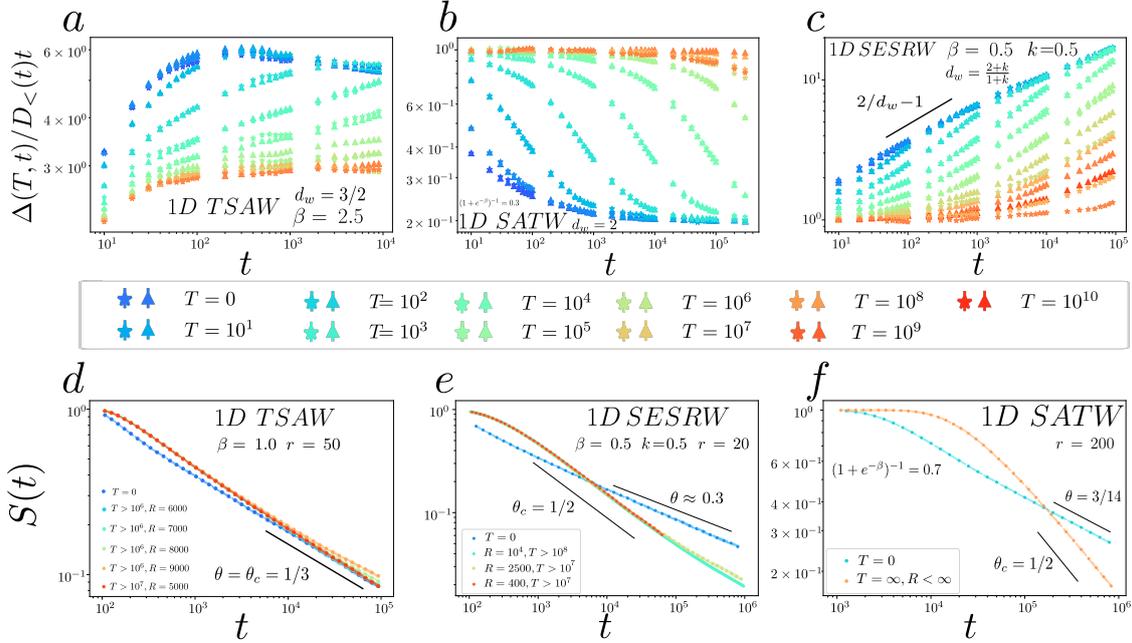


FIG. IV.1 Vieillissement et propriétés de premier passage pour les explorations compactes en espace infini et en confinement. Vieillissement des incréments  $\langle [X(t+T) - X(T)]^2 \rangle = \Delta(T, t)$  pour la marche TSAW 1D **a**, la marche SATW 1D **b** et la marche SESRW **c** en espace confiné et infini (courbes normalisées par l'échelle attendue pour  $T \gg t$ ). Il convient de noter que leur dynamique est identique en espace infini (triangles) et un confinement (étoiles) dans les deux régimes  $t, T \ll R^{d_w}$  et  $T \gtrsim R^{d_w}, t \ll R^{d_w}$ . Ainsi, la marche TSAW est superdiffusive à toutes les échelles de temps et présente un vieillissement similaire à celui de la SATW diffusive ( $D_{<}(t) \sim t^{1/3}$ ). Cependant, la marche SESRW présente un régime diffusif pour  $T \gg t$  ( $D_{<}(t) = O(1)$ ), contrairement au régime asymptotique effectué pour  $t \gg T$ , connu pour être anormal avec  $d_w = (2+k)/(k+1)$ . En espace infini pour les explorations compactes, la probabilité de survie tend vers 0 selon une loi de puissance, caractérisée par l'exposant de persistance  $\theta$ . Les mesures des exposants de persistance  $\theta$  et  $\theta_c$ , son équivalent en confinement, sont données pour la TSAW 1D **a**; la SESRW 1D **e**; et pour la SATW 1D **f**. On note que l'exposant de persistance peut être altéré par les effets de vieillissement initiaux, ici, pour les modèles SATW et SESRW. On remarque l'exception de la marche TSAW pour laquelle on suggère que  $\theta_c = \theta$  (les détails des simulations numériques peuvent être retrouvés en annexe H.1).

\*<sup>6</sup> En effet, il faut attendre l'apparition d'un territoire visité un nombre conséquent de fois pour attendre l'établissement des gradients locaux attendus. D'autre part, il faut que les marcheurs présents aux bords représentent un poids négligeable ajoutant encore à la lenteur de la relaxation. On peut citer les travaux de [Grassberger, 2017b] autour de la marche TSAW en dimension 2, qui souligne que le régime stationnaire de cette marche était atteint après des temps longs.

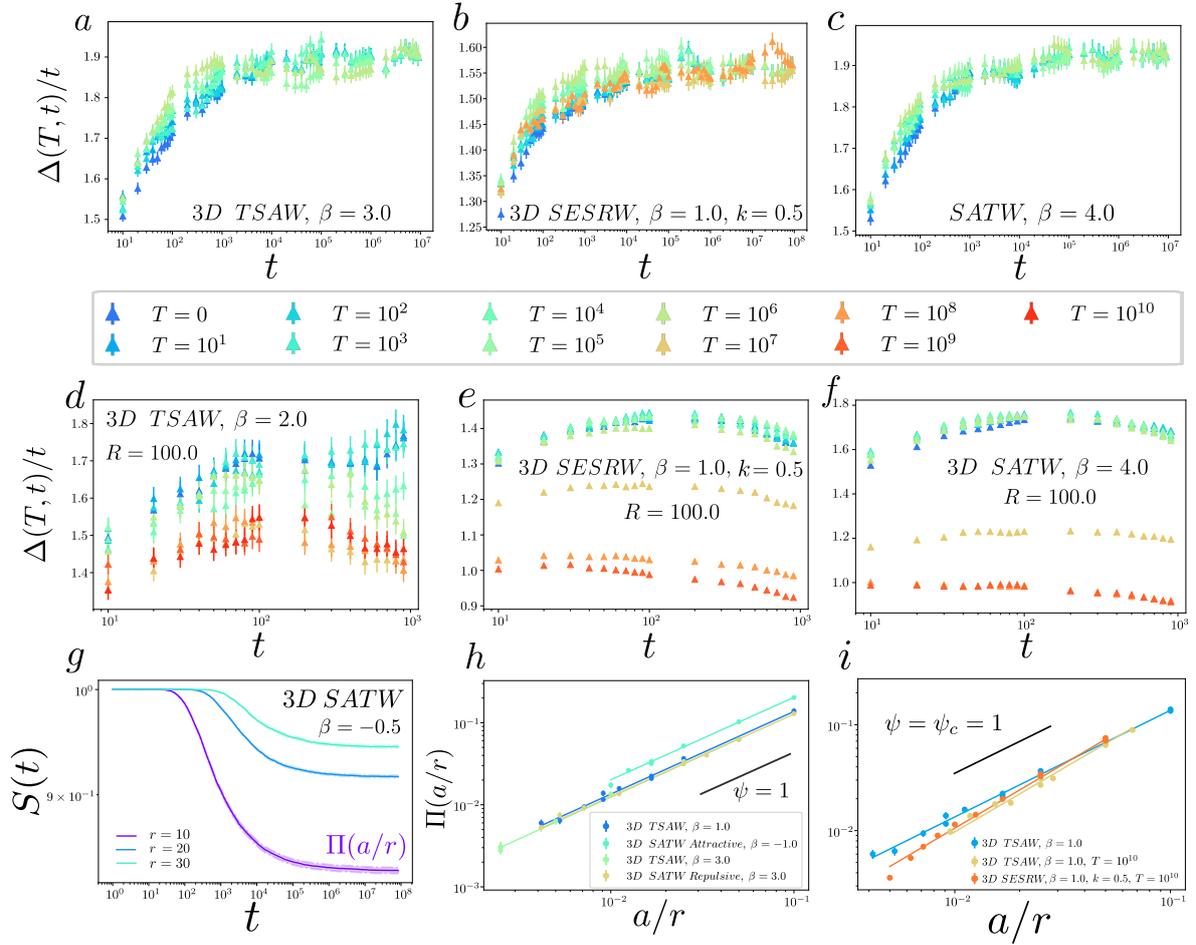


FIG. IV.2 Vieillesse et propriétés de premier passage pour les explorations non compactes en espace infini et en confinement. Vieillesse des incréments  $\langle [X(t+T) - X(T)]^2 \rangle = \Delta(T, t)$  pour le TSAW **a**, le SESRW **b** et le SATW **c** dans un espace infini (normalisées par l'échelle diffusive attendue aux temps longs). On peut noter que les incréments sont stationnaires aux temps longs. Inversement, pour des géométries confinées, le vieillissement se produit à des temps longs, ici souligné par le vieillissement des incréments pour la TSAW **d**, la SESRW **e** et la SATW **f** (courbes normalisées par l'échelle diffusive attendue aux temps longs). Ainsi, les marches à renforcement non compactes dans des géométries confinées, présentent des effets de vieillissement, mais restent diffuses à toutes les échelles de temps. Pour une exploration non compacte **g** pour la SATW diffusive en dimension 3, la probabilité de survie tend vers une constante non-nulle qui dépend de  $r$ . Mesure de l'exposant transience pour les explorations non compactes en espace infini **h** et en milieu confiné **i**. Simulations numériques (symboles) et leur fit en loi de puissance (lignes continues). Puisque les processus sont à la fois diffusifs en espace infini et en milieu confiné, on s'attend à  $\psi = \psi_c = 1$  en dimension 3, y compris pour le modèle TSAW (les détails des simulations numériques peuvent être retrouvés en annexe H.1).

### IV.2.2 Évolution des incréments en milieu confiné

Les propriétés des incréments ayant été déterminées en espace infini, on cherche ensuite à caractériser l'impact du confinement<sup>\*7</sup> sur les propriétés de transport des marches à renforcement.

Pour cela, on se placera nécessairement à une échelle caractéristique  $T \gg R^{d_w}$ , à partir de laquelle le marcheur interagit avec le bord de la zone visitée. Dès lors, on se concentrera logiquement sur les comportements aux temps courts,  $T \gg t$  (la limite  $t \gg T \gg R^{d_w}$  ayant un intérêt limité pour un marcheur confiné).

#### a) Explorations non compactes

Examinons le cas des explorations non compactes en dimension 3. En espace infini, nous avons vu que ces marcheurs ne visitent qu'un nombre fini de fois les différents sites du réseau. Le paysage énergétique local  $V(n(t))$  atteint un état stationnaire, de sorte que le vieillissement est transitoire. Le cas des géométries confinées est radicalement différent. La présence d'un confinement conduit à une divergence du nombre de visites sur un site donné et il a des conséquences importantes aux échelles de temps  $T \gtrsim R^{d_w}$ . On propose donc que le confinement génère des effets de vieillissement pour des marcheurs évoluant au-delà de la dimension critique ( $d_c = 2$ ).

Par ailleurs, on note que le raisonnement développé ci-dessus (IV.1) pour les processus compacts en espace infini s'applique aussi aux processus confinés non compacts (puisque le nombre de visites moyenné localement,  $\bar{n}$ , diverge dans les deux cas). En particulier, cela impose que pour l'ensemble des marches présentant des potentiels sous-linaires (SESRW, SATW, loi de puissance), celles-ci soient équivalentes à une marche aléatoire simple pour  $T \gtrsim R^{d_w}$ .

Justifions cette observation en considérant l'exemple du modèle SATW. Dans la limite où l'ensemble du volume a été couvert, le potentiel est constant, et le processus réalise un comportement diffusif simple caractérisé par un coefficient de diffusion  $D_s = \frac{1}{2}$ <sup>\*8</sup> (figure IV.2).

Ensuite, dans le cas de la marche TSAW confinée non compacte, on trouve numériquement que les fluctuations spatiales  $\delta n_i$  atteignent un état stationnaire dans la limite  $T \rightarrow \infty$  (résultat justifié en annexe G.1 et observé en dimension 1 et 2 dans [Freund et al., 1993]). Ceci, avec (IV.1), nous permet de conclure que dans cette limite, les incréments sont diffusifs et indépendants de  $T$  (figure IV.2).

---

<sup>\*7</sup> Dans notre approche, on considérera des barrières réfléchives. Ce choix nous semble plus pertinent dans le cadre de notre étude. Cependant, on propose que notre résultat reste valide pour des barrières périodiques à l'exception de la marche ERW, pour des raisons évidentes.

<sup>\*8</sup> Plus précisément, dans la limite  $T \ll R^{d_w}$  le marcheur présente un coefficient  $D(t, T) = D_L(\beta)$ , puis ce coefficient évolue pour  $T \gg R^{d_w}$  afin de converger vers  $D(t, T) = D_s = \frac{1}{2}$ . Par ailleurs, on peut proposer que le temps caractéristique de la transition entre les deux régimes soit donné par  $T = R^d$ , cette hypothèse sera justifiée dans la suite de ce chapitre.

En conséquence, pour les explorations non compactes en confinement, on propose que l'ensemble de marches répulsives et faiblement attractives vérifient

$$\langle [X(t+T) - X(T)]^2 \rangle = \begin{cases} 2D_L t & \text{pour } R^{d_w} \gg t, T \\ D_s t & \text{pour } t \ll R^{d_w} \ll T. \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

### b) Explorations compactes

Considérons en premier lieu, les marches à renforcement réalisant une exploration compacte. Pour celles-ci, le nombre moyen de visites  $\langle n_i \rangle$  sur un site donné diverge selon  $T$  conduisant à un vieillissement des incréments en espace infini à toutes les échelles de temps. L'ajout d'un domaine confiné, pour  $T \gtrsim R^{d_w}$ , influe sur la statistique du nombre de visites sur un site donné. Cependant, le nombre de visites sur un site donné diverge encore selon  $T$ , le vieillissement des incréments est donc également attendu en confinement.

Les simulations numériques confirment ce constat dans tous les exemples de marches à renforcement compactes (figure IV.1). On retrouve des incréments vieillissants mais plus important, *leurs comportements sont identiques en espace infini et dans les domaines confinés* pour les deux régimes<sup>\*9</sup>  $t, T \ll R^{d_w}$  et  $T \gtrsim R^{d_w}, t \ll R^{d_w}$  (figure IV.1).

Ce constat peut se justifier de la manière suivante. Dans la limite  $T \gg t$ , le marcheur évolue dans un territoire  $\mathcal{D}_T$ , visité un nombre élevé de fois. Dès lors, on propose que l'équilibre stationnaire qui régit le comportement à l'intérieur du territoire visité ne soit pas altéré par l'introduction d'un confinement dans la limite des grands volumes. L'ajout d'un confinement augmente le nombre de visites mais ne modifie pas sensiblement les propriétés du territoire visité à l'origine du comportement aux temps  $T \gg t$ .

Appliquons cette observation aux différents exemples. Pour la marche SATW, il est clair que l'ensemble des sites ont été visités après un temps  $T \gg R^{d_w}$ , le marcheur présente un comportement diffusif identique à celui observé en milieu infini pour  $T \gg t$ . Ensuite, considérons les marches en loi de puissance et sous-exponentielles pour lesquelles on a observé un comportement diffusif dans la limite  $T \gg t$ . Le comportement prédit par (IV.1) est donc retrouvé en présence d'un confinement (celui-ci est justifié en annexe G.1). Enfin, l'analyse numérique de la marche TSAW suggère que le comportement des incréments en confinement reste superdiffusif, le préfacteur asymptotique semble bien être commun aux deux situations (figure IV.1).

Ainsi, pour les explorations compactes, on retrouve un comportement des incréments identiques en espace infini et en confinement. Examinons ensuite les propriétés de premier passage de ces différents modèles.

---

<sup>\*9</sup> Notons que les mesures ont été simultanément menées pour des marcheurs initialement au centre du volume ou sur un site tiré uniformément dans le volume visité. Ces deux mesures amenant à un résultat identique dans la limite  $T \gg R^{d_w}$ . Observons que les comportements limites des incréments en milieu confiné ou en milieu infini semblent identiques. En revanche, la vitesse de convergence vers les comportements limites  $T \gg t$  semble être accélérée pour les modèles à renforcement répulsifs en présence de confinement.

### IV.2.3 Exposants caractéristiques associés au temps de premier passage en milieu infini

#### a) Explorations non compactes

Commençons par le cas des explorations non compactes. On cherchera à déterminer l'exposant de transience  $\psi$ , que l'on rappelle défini par le comportement asymptotique de la probabilité de trouver la cible.

$$p \underset{a/r \rightarrow 0}{\sim} \left(\frac{a}{r}\right)^\psi,$$

où  $a$  est la taille de la cible et  $r$  la distance initiale entre la cible et le marcheur. En dimension 3, l'ensemble des processus à renforcement répulsifs présente un exposant identique  $\psi = d - d_w = 1$ , ce qui a été vérifié numériquement figure IV.2 (un argument d'échelle justifiant ce comportement est détaillé en annexe F.1). Ce résultat peut s'étendre aux marches faiblement attractives diffusives.

#### b) Explorations compactes

Ensuite, intéressons-nous aux explorations compactes. Celles-ci sont caractérisées par un exposant  $\theta$  particulièrement sensible aux effets de vieillissement (chapitre 2). En effet, à l'exception de la marche TSAW, on observe que ces exposants, mesurés numériquement ou déterminés analytiquement pour certains (chapitre 2), sont tous anormaux (figure IV.1, une revue plus complète peut être trouvée en annexe F.3). Autrement dit  $\theta \neq 1 - 1/d_w$ . Cette relation est prédite pour les processus à incréments stationnaires et elle a été vérifiée par de nombreux modèles, notamment les mouvements browniens fractionnaires [Bray et al., 2013; Molchan, 1999]. Néanmoins, elle ne s'applique pas ici puisque ces processus présentent des effets de vieillissement à toutes les échelles de temps.

### IV.2.4 Propriétés de premier passage pour des conditions initiales vieilles

Pour l'instant, nos analyses se concentrent sur des processus évoluant dans un espace initialement vierge de tout effet de renforcement. Il est logique d'étendre notre approche en ayant, au préalable, laissé vieillir ces différents processus avant d'introduire la cible. Pour cela, on propose de définir un volume confinant dans lequel on aurait laissé le marcheur évoluer afin de permettre de le couvrir complètement. Cette étape a pour conséquence de générer un temps de vieillissement initial\*<sup>10</sup>  $T \gg t, R^{d_w}$ .

#### a) Explorations compactes pour des conditions initiales vieilles

On introduit l'exposant de persistance vieilli  $\theta_c$  en confinement qui peut être défini par

$$S(t|T) \propto t^{-\theta_c}$$

---

\*<sup>10</sup> Relevons que pour des explorations compactes, une approche similaire peut être menée en espace infini, puisque les marcheurs visitent un nombre infini de fois les différents sites du réseau. En revanche, pour des explorations non compactes, l'introduction du volume confinant est nécessaire afin que le marcheur puisse visiter un nombre infini de fois les différents sites du volume.

où  $T \gg R^{d_w}$ ,  $1 \ll t \ll R^{d_w}$  et  $S(t|T)$  dénote la probabilité de survie que le marcheur n'a pas atteint la cible entre  $T$  et  $T + t$ . Au préalable, soulignons qu'il a été montré que l'exposant de persistance était sensible aux conditions initiales vieilles ou non [Bray et al., 2013; Krug et al., 1997]. On va pouvoir s'appuyer sur notre analyse des incréments en confinement développée précédemment. On a révélé que les modèles SATW, les modèles à renforcement en loi de puissance et sous-exponentiels présentent tous un comportement diffusif en confinement dans la limite  $T \gg t, R^{d_w}$ . Par conséquent, on obtient un exposant de persistance vieilli,  $\theta_c = 1/2$  ( $t \ll R^{d_w}$ ) commun. Considérons le cas des marches TSAW pour lesquelles  $\theta_c$  semble robuste aux effets de vieillissement. On retrouve un exposant  $\theta_c = \theta$  identique inchangé y compris pour des temps de vieillissement initiaux élevés<sup>\*11</sup> (figure IV.3).

### b) Explorations non compactes pour des conditions initiales vieilles

On introduit de manière similaire

$$S(t|T) \underset{a/r \rightarrow 0}{\propto} \left(\frac{a}{r}\right)^{\psi_c}$$

avec  $T \gg R^{d_w}$  et  $a^{d_w} \ll t \ll R^{d_w}$ . De manière identique aux explorations compactes, on s'attend à une exploration non compacte en dimension 3, caractérisée par  $\psi_c = 1$  pour les modèles SATW, SESRW et en loi de puissance. Ce constat s'étend aisément aux marches TSAW diffusives en dimension 3, de variance locale asymptotiquement indépendante de  $t$  (figure IV.3).

Dès lors, on observe que les effets de vieillissement initiaux semblent avoir un impact majeur sur les propriétés de premier passage des processus compacts contrairement aux explorations non compactes. En conclusion, on retrouve des statistiques du FPT en confinement particulièrement sensibles aux conditions initiales vieilles en dimension 1 et un effet plus marginal en dimension 3.

## IV.3 Approche développée pour la mesure du FPT en confinement

### IV.3.1 Temps de premier passage de processus strictement invariants d'échelle

#### a) Statistique du FPT en confinement pour des processus strictement invariants d'échelle

Avant de détailler notre approche, nous devons prendre acte des travaux menés dans [Levernier et al., 2018] pour des processus invariants d'échelle et potentiellement vieillissants. Cette étude met en valeur les mécanismes fondamentaux qui contrôlent la statistique du FPT.

---

<sup>\*11</sup> En revanche, cette valeur  $\theta_c$ , obtenue dans l'équilibre stationnaire à l'intérieur du volume visité, se justifie plus aisément que pour un état initial vierge. En effet, nous avons vu que la variance du temps local est asymptotiquement stationnaire et indépendante de  $t$  en confinement. On propose donc que le processus après avoir vieilli, présente un comportement super-diffusif et des incréments stationnaires. L'absence de vieillissement suggère, selon l'analyse menée dans le chapitre 2, que  $\theta_c$  est alors bien donné par  $1 - 1/d_w$ .

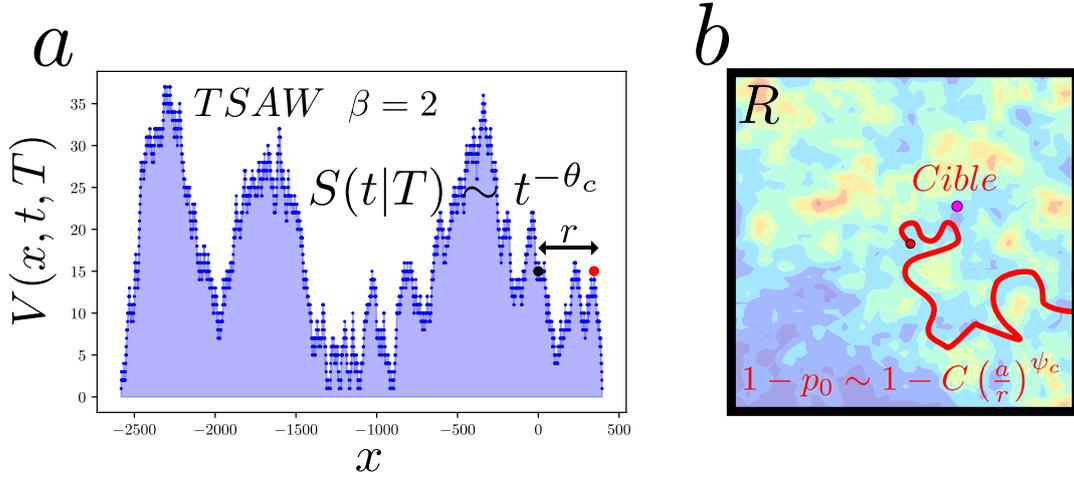


FIG. IV.3 Définitions des exposants de premier passage pour des conditions initiales vieilles. **a** Pour les explorations compactes, le marcheur explore un espace confiné sur des temps supérieurs à  $T$ . Lorsqu'il repasse en 0, une cible est ajoutée à une distance initiale  $r$ . On observe une décroissance de la probabilité de survie  $S(t|T)$  caractérisée par un exposant de persistance  $\theta_c$ . **b** Pour les explorations non compactes, un marcheur explore un espace confiné de taille  $R$  sur des temps élevés ( $T = 10^{10}$  dans la suite), générant un potentiel aléatoire sur l'ensemble du territoire visité. Puis, un second marcheur est introduit à une distance initiale  $r$  de la cible. La probabilité de trouver la cible avant les bords est alors asymptotiquement donnée par  $(a/r)^{\psi_c}$ .

En particulier, cette approche a permis de déterminer le comportement d'échelle du FPT *en confinement* uniquement à partir des caractéristiques du processus lorsqu'il évolue en *milieu infini*. Plus précisément, il est possible d'exprimer dans la limite des grands volumes  $R$ , la dépendance de la distribution du FPT en fonction des différents paramètres géométriques  $R$ ,  $r$  et  $a$ .

On présentera brièvement les points clés de cette approche dans le cas des explorations non compactes, avant de les adapter lorsque l'on envisagera de déterminer le FPT des marches à renforcement. Le cas des explorations compactes reste relativement similaire à la méthode développée dans [Levernier et al., 2018] et sera abordé dans un second temps.

L'idée principale est d'effectuer une partition sur le nombre de fois que le marcheur traverse le volume avant de trouver la cible (figure IV.4). Pour ce faire, définissons une excursion comme une portion de la trajectoire qui part du cube  $S$  de rayon  $R/2$  centré sur la cible qui touche un bord du volume confinant, et qui revient en  $S$ .

Dans le cas des explorations compactes, le marcheur va effectuer un nombre fini d'excursions avant de trouver la cible (et ce presque sûrement, y compris pour  $R \rightarrow \infty$ ). Inversement, pour un processus présentant une exploration transiente le marcheur va effectuer un nombre important d'excursions avant de trouver la cible. Plus précisément, le nombre typique d'excursions que le marcheur va réaliser avant de trouver la cible diverge avec  $R$ .

Ce premier découpage renferme déjà les ingrédients permettant de déterminer le comportement du FPT. En effet, celui-ci permet, en premier lieu, d'extraire un nombre typique d'excursions nécessaires pour trouver la cible et cela, *indépendamment* du temps mis pour effectuer les différentes excursions. Puis dans un second temps, il est possible d'extraire le temps typique nécessaire afin de réaliser une unique excursion<sup>\*12</sup>.

Prenons pour exemple les processus invariants d'échelle effectuant une exploration non compacte. Commençons par isoler la dépendance de la distribution du FPT selon  $r$ . Pour cela, rappelons qu'une exploration non compacte en milieu infini est caractérisée par une probabilité de trouver la cible  $p_0 \sim (\frac{a}{r})^\psi$ . Il est clair que dans la limite des grands volumes ( $R \gg r, a$ ),  $p_0$  décrit aussi la probabilité de trouver la cible avant les bords. En outre, après cette première excursion, la probabilité de trouver la cible devient alors indépendante de  $r$ . On fait ensuite l'hypothèse que la probabilité de trouver la cible à la  $n$ ème excursion, notée  $p$ , est indépendante des excursions précédentes. Cette hypothèse implique que la probabilité que la cible soit touchée après exactement  $n$  excursions, notée  $P(n)$ , suive la loi géométrique suivante

$$P(n) = (1 - p_0)(1 - p)^{n-1}p.$$

Dans la limite  $p \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ , cela implique l'émergence d'un nombre typique d'excursions nécessaires afin de trouver la cible, noté  $\mathcal{N}_{Typ} \sim p^{-1}$ . Dans le cas des processus invariants d'échelle, Levernier et al. [2018] propose que  $p \sim (\frac{a}{R})^\psi$ .

Ensuite, déterminons le comportement selon  $R$  et  $\mathcal{T}_{Typ}$  du temps typique mis pour réaliser  $\mathcal{N}_{Typ}$  excursions. On propose que le temps typique d'une excursion notée  $\tau_n$  soit de l'ordre du temps nécessaire au marcheur pour parcourir une distance typique de  $R$ . En outre, pour des processus vieillissants il est important de remarquer que le temps mis pour réaliser les différentes excursions peut lui aussi vieillir. Afin de caractériser cet effet, on se base sur le comportement des incréments. Pour des processus strictement invariants d'échelle, ceux-ci sont donnés par

$$\langle [X(t+T) - X(T)]^2 \rangle_{T \gg t} \sim t^{2/d_w - \alpha} T^\alpha. \quad (\text{IV.4})$$

On peut noter que cette forme est, par exemple, observée pour des processus comme le random acceleration process (RAP) [Bicout et al., 2000] ou encore des modèles dérivés des mouvements browniens fractionnaires (*flat-prepared FBM* [Krug et al., 1997; Levernier et al., 2018]). On propose alors de reprendre (IV.4) afin d'estimer  $\tau_n$

$$\langle [X(\tau_n + \sum_{k=0}^{n-1} \tau_k) - X(\sum_{k=0}^{n-1} \tau_k)]^2 \rangle \sim \tau_n^{2/d_w - \alpha} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \tau_k \right)^\alpha = R^2$$

---

<sup>\*12</sup> Par ailleurs, ce temps typique peut être supposé indépendant des propriétés géométriques de la cible, et dépend logiquement des propriétés de vieillissement du processus.

Il est alors possible d'obtenir le comportement de  $T_{typ} = \sum_{k=0}^{\mathcal{N}_T-1} \tau_k$  qui va décrire entièrement le FPT dans la limite des grands volumes\*<sup>13</sup>

$$F(t, R, r, a) \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} C \left[ \frac{a}{r} \right]^\psi \delta(t/T_{typ}) + \left( 1 - C \left[ \frac{a}{r} \right]^\psi \right) \frac{1}{T_{typ}} h(t/T_{typ}).$$

### b) Limites de cette approche pour les marches à renforcement

Afin de déterminer le comportement asymptotique du FPT en confinement des modèles à renforcement, plusieurs éléments doivent être pris en compte.

L'approche résumée ci-dessus a été initialement développée pour des processus strictement invariants d'échelle. Pour des processus définis sur réseau, l'ajout d'une longueur caractéristique supplémentaire peut altérer les différents comportements prédits pour  $t_n$  et  $p$ . Des incréments présentant des comportements différents de (IV.4) peuvent survenir. Il est clair que le temps typique associé à un nombre élevé d'excursions en est altéré (figure IV.4). L'importance de ce effet est discutée pour deux exemples de marches aléatoires non-markoviennes en fin de chapitre.

Par ailleurs, examinons les potentiels effets induits par les caractéristiques spécifiques des modèles à renforcement. Dans l'exemple détaillé ci-dessus, la probabilité de trouver la cible est indépendante des excursions précédentes. Autrement dit, on a fait l'hypothèse que les effets de vieillissement se manifestaient uniquement sur le temps nécessaire afin de réaliser une excursion. Sommairement, la géométrie du territoire exploré accélère ou ralentit le processus mais elle ne modifie pas la manière dont celui-ci explore de nouveaux sites. Il est clair que cette représentation n'est plus valide lorsque l'on considère les marches à renforcement. Ici, au contraire, c'est la géométrie des sites explorés qui risque de favoriser ou de défavoriser la recherche de la cible.

Enfin, on peut citer les travaux autour de la marche TSAW qui mettent en valeur un comportement non trivial dans le temps moyen nécessaire pour visiter la totalité d'un volume confinant [Campos et al., 2021 ; Grassberger, 2017b]. Les propriétés d'exploration peuvent donc être altérées lorsqu'un nombre important de sites ont déjà été visités.

On propose dans la suite de déterminer le comportement asymptotique du FPT en confinement en tenant compte des différentes observations que l'on a émises dans les parties précédentes. On se concentrera sur les explorations compactes et transientes, les explorations marginalement compactes seront traitées en fin de chapitre.

---

\*<sup>13</sup> On peut aussi adapter cette approche dans le cas spécifique où les temps des excursions sont donnés par des lois larges

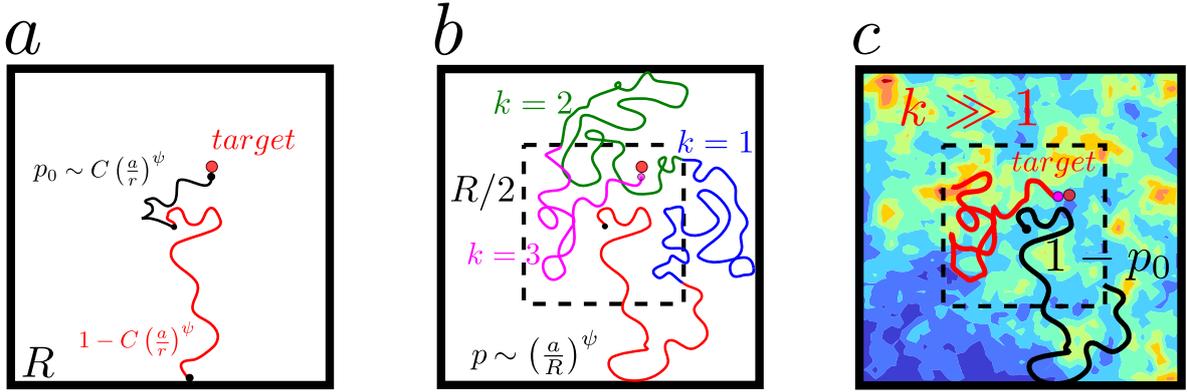


FIG. IV.4 Approche générale pour les explorations non compactes. **a** Pour les processus invariants d'échelle, le poids des trajectoires directes est déterminé par  $(a/r)^\psi$ , et il est asymptotiquement indépendant du confinement dans la limite  $R \gg r$ . **b** On propose donc de partitionner les trajectoires sur le nombre d'excursions, définies comme une portion de la trajectoire qui part du cube  $S$  de rayon  $R/2$  centré sur la cible qui touche un bord du volume confinant et qui revient en  $R/2$ . Elles sont ici représentées en différentes couleurs. **c** Dans le cas des modèles à renforcement, on cherchera à déterminer l'impact des effets de vieillissement induits par les précédentes excursions sur le comportement de  $p_k$  dans la limite  $k \gg 1$ . Celles-ci génèrent un potentiel local dont la valeur est représentée en fond.

### IV.3.2 Distribution du FPT pour les processus compacts

Commençons par considérer la classe des explorations compactes. En premier lieu, on déterminera la dépendance asymptotique de la distribution du FPT dans la limite  $R \gg r \gg a$ .

#### a) Démonstration pour les explorations compactes

De manière similaire aux processus invariants d'échelle, on effectue une partition de la distribution  $F(t, r, R, a_0)$  du temps de premier passage. On décompose les trajectoires entre celles qui sont directes et trouvent la cible sans toucher les bords du volume, avec une probabilité  $1 - \pi$ , et les trajectoires indirectes qui touchent le bord avant de trouver la cible (figure IV.5). La dépendance en  $a_0$  est rendue explicite pour rappeler que le processus est défini sur un réseau de taille typique  $a_0$ . On peut alors réécrire le FPT de la manière suivante

$$F(t, r, R, a_0) = (1 - \pi)F_t(t, r, R, a_0) + \pi F_b(t, r, R, a_0), \quad (\text{IV.5})$$

où on a défini  $F_t$  et  $F_b$  les distributions conditionnelles du FPT restreintes aux trajectoires touchant la cible respectivement avant ou après les bords. L'argument principal sur lequel on va s'appuyer consiste à évaluer le comportement de  $\pi$  à partir des propriétés de premier passage en milieu infini, ce qui conduit à

$$1 - \pi \sim \int_0^{R^{d_w}} F_\infty(t, r, a_0) dt, \quad (\text{IV.6})$$

où  $F_\infty(t, r, a_0)$  est définie comme la distribution du FPT en milieu infini.

En outre, on a utilisé que le bord était atteint pour la première fois à une échelle typique  $R^{d_w}$ . Pour des explorations compactes, dans la limite  $t, r \gg a_0$ , par définition de l'exposant de persistance on obtient que

$$F_\infty(t, r, a_0) \sim \frac{r^{d_w}}{t^{1+\theta}},$$

où la dépendance selon  $r^{d_w}$  et  $t$  est imposée par la normalisation du FPT (dans la limite  $r \gg a_0$ ). On en déduit le comportement de  $\pi$

$$\pi \sim \int_{R^{d_w}}^\infty F_\infty(t, r, a_0) dt \sim \left(\frac{r}{R}\right)^{d_w \theta} \quad (\text{IV.7})$$

Il reste à déterminer l'échelle de temps typique associé au FPT des marcheurs qui trouvent la cible après avoir touché les bords. Pour cela, introduisons la distribution du FPT restreinte aux trajectoires qui touchent le bord avant la cible. Il est clair qu'elle ne dépend pas de  $r$  dans la limite  $R \gg r$ . On cherche à déterminer la dépendance selon  $R$  de  $T_{typ}$  défini comme le temps typique du FPT après avoir touché les bords. Pour cela, introduisons  $T_r$  le temps typique mis par le marcheur pour trouver la cible après avoir touché le bord à instant  $T_b$ . On a  $T_b \sim R^{d_w}$  suite à (IV.6), ensuite on propose que  $T_r$  soit donné par le comportement des incréments

$$\langle [X(T_b + T_r) - X(T_b)]^2 \rangle = R^{d_w}.$$

Au vu de l'analyse proposée précédemment, les effets du confinement ne modifient pas le comportement typique des incréments. Pour des processus invariants d'échelle, en remplaçant  $T_b$  par  $R^{d_w}$ , on obtient directement  $T_r = R^{d_w}$ . On propose que ce résultat reste valide pour des processus non-strictement invariants d'échelle<sup>\*14</sup>. Par conséquent, la distribution conditionnelle  $F_t$  est donnée dans la limite des grands volumes par

$$F_b(t, r, R, a_0) = \frac{1}{t} f\left(\frac{t}{R^{d_w}}\right). \quad (\text{IV.8})$$

La dépendance en  $t^{-1}$  est induite par la normalisation de  $F_b$ . Enfin, on réécrit la probabilité de toucher la cible avant les bords, en introduisant une fonction de coupure  $g\left(\frac{t}{R^{d_w}}\right)$ , s'annulant dans la limite  $t \gg R^{d_w}$

$$(1 - \pi)F_t(t, r, R, a_0) \sim g\left(\frac{t}{R^{d_w}}\right) \frac{r^{d_w}}{t^{\theta+1}} \left(1 + h_1\left(\frac{t}{r^{d_w}}\right)\right).$$

Notons que l'on a isolé le terme dominant de la distribution du FPT en milieu infini, et que l'ensemble des termes sous-dominants est donné par  $h_1\left(\frac{t}{r^{d_w}}\right) = o(1)$ . Par ailleurs, notons que  $g(0) = F_0$ , où  $F_0$  est le préfacteur asymptotique de la décroissance de la distribution du FPT en espace infini. Reprenons alors (IV.5) en injectant les comportements typiques obtenus ci-dessus à l'ordre le plus bas

<sup>\*14</sup> En effet, les effets de vieillissement peuvent générer un comportement anormal dans la limite  $T_b \gg T_r$ . Dans cette situation, on aurait directement  $T_{typ} = T_r + T_b \sim T_b = R^{d_w}$ . Inversement pour  $T_r \gg T_b$ , nous avons vu que le processus n'était pas sensible aux effets de vieillissement, impliquant  $T_r \sim R^{d_w}$  ce qui est contradictoire. Il apparaît clairement que  $T_r \sim T_b = R^{d_w}$ .

$$F(t, r, R, a_0) \sim g\left(\frac{t}{R^{d_w}}\right) \frac{r^{d_w}}{t^{\theta+1}} \left(1 + h_1\left(\frac{t}{r^{d_w}}\right)\right) + \left(\frac{r}{R}\right)^{d_w \theta} \frac{1}{t} f\left(\frac{t}{R^{d_w}}\right)$$

Comme la décroissance du FPT dans la limite  $t \ll R^{d_w}$  n'admet pas d'échelle caractéristique propre, on peut ré-exprimer le premier terme en fonction de la variable adimensionnée  $\eta = t/R^{d_w}$ . La distribution du FPT selon  $\eta$  est alors donnée par

$$G(\eta, r, R, a_0) = F(t, r, R, a_0) R^{d_w} \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{r}{R}\right)^{d_w \theta} \left(g(\eta) \frac{1}{\eta^{\theta+1}} + \frac{1}{\eta} f(\eta)\right). \quad (\text{IV.9})$$

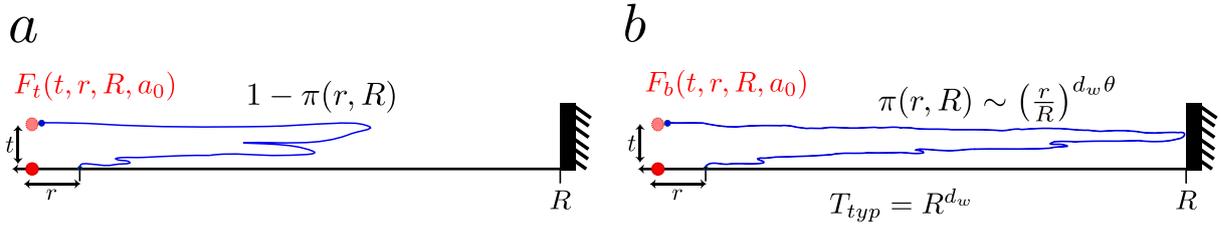


FIG. IV.5 *Approche générale pour les explorations compactes. a* Le poids,  $1 - \pi$ , des trajectoires directes touchant la cible avant les bords est déterminé par (IV.7). *b* Inversement, les trajectoires indirectes qui trouvent la cible après avoir touché les bords sont caractérisées par un temps typique  $T_{typ} = R^{d_w}$ .

## b) Remarques et extensions de l'approche

Prenons le temps d'analyser la forme obtenue. Tout d'abord, il apparaît clairement que l'échelle typique qui décrit le FPT est bien donnée par  $R^{d_w}$ . Notons que l'on a redéfini  $g(\eta)$  afin d'absorber les termes sous-dominants.  $g(\eta)$  présente donc une échelle de coupure en  $\eta \sim O(1)$ . Ensuite, cette distribution peut présenter un comportement complexe en  $\eta = 0$  lorsque  $t \ll R^{d_w}$ , mais celui-ci est entièrement déterminé par  $r^{d_w}$  dans la limite des grands volumes.

Notons que pour le cas compact, il n'est pas nécessaire de considérer les trajectoires présentant un nombre élevé d'excursions<sup>\*15</sup>.

Notons que pour les explorations compactes, on a exhibé une échelle caractéristique indépendante des effets de vieillissement. Ce résultat était prévisible étant donné que le marcheur n'effectue pas un nombre suffisamment élevé d'excursions afin que le vieillissement puisse altérer le temps caractéristique de celles-ci. En revanche, la valeur de  $\theta$  qui apparaît dans le poids des excursions directes reste intimement liée aux propriétés de vieillissement.

Ensuite, justifions brièvement la dépendance selon la distance initiale  $r$ , extraite dans la limite  $r \gg a_0$ . Celle-ci est directement induite par la décroissance en espace infini de la distribution du FPT.

<sup>\*15</sup> En effet, dans la limite des grands volumes, comme la probabilité de trouver la cible est proche de 1, la contribution à grand nombre d'excursions pour le FPT est bien négligeable.

En pratique, on observe bien une décroissance en loi de puissance pour des temps  $t \gg r^{d_w} \gg 1$ . Notons que ce comportement est implicitement utilisé dans la détermination de  $\pi$ . Dans la limite  $r, R \gg a_0$ , il est clair que  $\pi$  s'exprime bien en fonction du rapport  $r/R$ .

Enfin, complétons notre approche en considérant le cas  $r = O(a_0)$ . Il apparaît clairement que le temps caractéristique exhibé précédemment reste inchangé. En revanche, pour des processus définis sur réseau, le comportement aux temps courts  $t \sim O(1)$  peut différer de la décroissance en loi de puissance isolée dans (IV.8). Dès lors, on peut réécrire (IV.9) sous la forme suivante

$$G(\eta, r, R, a_0) = F(t, r, R, a_0)R^{d_w} = h\left(\frac{a_0}{r}\right) \left(\frac{r}{R}\right)^{d_w\theta} \left(g(\eta)\frac{1}{\eta^{\theta+1}} + \frac{1}{\eta}f(\eta)\right) + \left[1 - h\left(\frac{a_0}{r}\right)\right] \delta(\eta), \quad (\text{IV.10})$$

où  $h(a_0/r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1$ . Le dernier terme concerne les trajectoires directes trouvant la cible aux temps courts  $t \sim r^{d_w}$  et pour lesquels la distribution de premier passage en milieu infini n'est pas encore donnée par sa limite asymptotique. Par conséquent, on est en mesure de déterminer la statistique du FPT dans la limite des grands volumes  $R \gg r \gg a_0$  mais également pour  $R \gg r, a_0$  et  $r$  fixé.

La forme obtenue permet de prédire le comportement d'échelle de l'intégralité des moments de la distribution du FPT pour  $\theta \leq 1$ . En revanche, pour  $\theta > 1$ , les moments d'ordre  $m$  de la distribution du FPT tels que  $m < \theta$ , seront donnés par les moments de la distribution de premier passage en milieu infini. Pour ceux-ci, les termes sous-dominants dans (IV.10) présentent une contribution non négligeable dans la distribution de premier passage en milieu confiné. Ce comportement spécifique est détaillé en annexe G.3.

Enfin, notons que la forme obtenue est indépendante de  $a$  dans la limite  $r \gg a$ . On propose que ce résultat reste valide en dimension supérieure à 1 pour des cibles  $a \gg 1$ , tant que la limite  $r \gg a$  reste valide. Cette suggestion s'appuie sur les propriétés des explorations compactes des processus continus qui trouvent une cible pourtant ponctuelle avec une probabilité 1 [Bénichou et al., 2008]. Dès lors la taille de la cible  $a$  n'a que peu d'importance en comparaison de la probabilité de se trouver proche de celle-ci (puisque le processus a alors une probabilité très faible de la rater)\*<sup>16</sup>.

### c) Conclusion de l'approche pour les explorations compactes

Ainsi, on a obtenu le comportement d'échelle de la distribution de premier passage en confinement pour les explorations compactes

$$G(\eta, r, R, a_0) = F(t, r, R, a_0)R^{d_w} = \left(\frac{r}{R}\right)^{d_w\theta} h(\eta) \quad (\text{IV.11})$$

---

\*<sup>16</sup> Plus précisément pour des processus compacts strictement invariants d'échelle, la dépendance du MFPT selon la variable  $a$  est donnée par  $r^{d_w\theta} - a^{d_w\theta}$ . Notons que l'on retrouve dans la limite où  $a \sim r$ , que le processus est trouvé presque instantanément tandis que pour  $r \gg a$  le comportement dominant du MFPT devient indépendant de  $a$ . On suggère que cette dépendance en  $r^{d_w\theta} - a^{d_w\theta}$  reste valide pour les modèles à renforcement sur réseau dans la limite  $r, a \gg a_0$ .

où  $h$  est une fonction indéterminée qui dépend du processus (la figure IV.6 confirme notre prédiction). Enfin, (IV.11) capture explicitement la dépendance de la distribution du FPT sur les paramètres géométriques  $r, R$ , et donc de tous ses moments. En particulier, le temps moyen de premier passage (MFPT) satisfait

$$\langle T \rangle \propto R^{d_w(1-\theta)} r^{d_w \theta}.$$

Ainsi, le MFPT présente un comportement non linéaire selon le volume de confinement  $V \sim R^d$  (car  $\theta \neq 1 - d/d_w$ ) pour les marches SESRW et SATW, comme cela avait été observé pour d'autres exemples de processus vieillissants. Étonnamment, la forme asymptotique de la distribution du FPT (IV.11) est comparable à celle obtenue dans [Levernier et al., 2018], et elle peut être déterminée uniquement à partir de la connaissance de  $d_w$  et  $\theta$ , que l'on rappelle définis en espace infini. Ce résultat est en particulier indépendant de l'exposant de persistance vieilli en confinement  $\theta_c$ .

On peut se tourner vers la détermination du FPT pour les explorations non compactes.

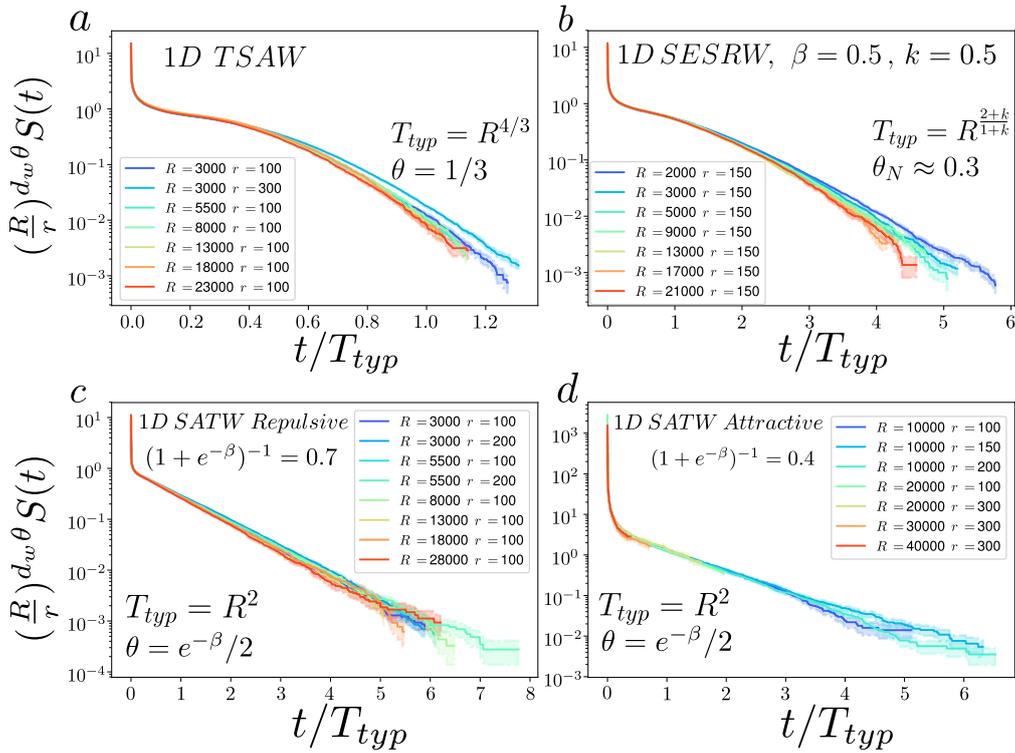


FIG. IV.6 Comportement d'échelle de la distribution du FPT selon les paramètres géométriques pour les explorations compactes. La dépendance de la probabilité de survie selon les différents paramètres géométriques est déduite de (IV.9). La convergence des différentes simulations numériques, après la normalisation prédite dans (IV.9), capture la dépendance de la distribution du FPT selon les différents paramètres géométriques. Les simulations sont réalisées dans des boîtes 1D de taille  $R$  avec des conditions aux bords réfléchissantes. **a** TSAW 1D avec  $d_w = 3/2$  indépendamment de  $\beta$ . **b** 1D SESRW avec  $\beta = 0.5$  et  $k = 0.5$ . 1D SATW répulsive avec  $(1 + e^{-\beta})^{-1} = 0.7$  **c** et  $(1 + e^{-\beta})^{-1} = 0.4$  **d**.

### IV.3.3 Distribution du FPT pour les processus non compacts

Intéressons-nous maintenant au cas des explorations non compactes en espace confiné pour un processus non nécessairement invariant d'échelle, potentiellement vieillissant. Dans un premier temps, on prendra une cible de taille fixée  $a \gg a_0$ , où  $a_0$  est la taille typique du réseau.

#### a) Approche générale pour les explorations non compactes

On reprend l'approche développée dans [Levernier et al., 2018] et on partitionne la distribution du FPT selon le nombre d'excursions réalisées par le marcheur avant de trouver la cible. Une excursion est définie comme une portion de la trajectoire qui part ici du cube  $C$  de rayon  $R/2$  (centré sur la cible) qui touche un bord du volume confinant et qui revient en  $C$ . Cette partition conduit à

$$F(t, a, r, R, a_0) = p_0 \Phi_0(t) + (1 - p_0) \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) P(n),$$

où on a défini  $p_0$  la probabilité de trouver la cible avant de toucher les bords du volume. Notons que l'on a directement isolé le cas  $k = 0$ , atypique puisque le marcheur commence à une distance  $r$  proche de la cible, comparée à  $R/2$  lors des autres excursions.

Rappelons que l'on va chercher à successivement :

1. Caractériser la dépendance selon  $R$  de  $P(n)$  dans la limite des grands volumes. Autrement dit, la dépendance selon  $R$  dans la géométrie du territoire exploré.
2. Déterminer le comportement asymptotique de  $t_n$ , le temps total typique nécessaire afin de réaliser  $n - 1$  excursions et  $\tau_n$  le temps de la nème excursion.

#### b) Détermination du nombre typique d'excursions

Commençons par évaluer la dépendance selon  $R$  et  $a$  de  $P(n)$ . Contrairement aux explorations compactes  $p_0$  et  $P(n)$  tendent vers 0 dans la limite des grands volumes. Notons que la cible est toujours trouvée dans un volume confiné, impliquant que dans la limite des grands volumes,  $\sum_{k=1}^n P(k)$  tend vers 1. Par ailleurs, on remarque qu'après avoir réalisé la première excursion, les effets induits par la distance initiale sont négligeables, impliquant que  $P(n)$  est indépendante de  $r$ . Ensuite, introduisons la probabilité  $p_k$  de trouver la cible pour la première fois lors de la kème excursion, sachant que le marcheur a déjà effectué  $k - 1$  excursions.

Tout d'abord, considérons à titre d'exemple, un marcheur dont la géométrie de la trajectoire est markovienne. Autrement dit, les probabilités  $p_k$  associées sont indépendantes et identiques (ii) et égales à  $p$ . On peut alors exprimer  $S(n)$  la probabilité de ne pas avoir trouvé la cible après  $n$  excursions en fonction de  $p$

$$S(n) = (1 - p_0) \prod_{k=1}^n (1 - p_k) = (1 - p_0) \exp \left[ \sum_{k=1}^n \log(1 - p) \right].$$

Ce cas général inclut les marches CTRW, mais peut s'étendre aux mouvements browniens fractionnaires non vieillissants ainsi que d'autres modèles invariants d'échelle [Levernier et al., 2018].

Dans la limite des grands volumes, on propose que  $p \sim (a/R)^\psi$  pour une exploration transiente. À faible nombre d'excursions, les effets de confinements sont négligeables et on peut donc légitimement s'appuyer sur l'exposant de transience défini en milieu infini. À  $n$  fixé dans la limite des grands volumes  $S(n)$  tend vers  $(1 - p_0)$ , et  $\ln(1 - p) \sim -p$ .

$$S(n) \approx (1 - p_0) \exp\left(-\sum_{k=1}^n p_k\right) \quad (\text{IV.12})$$

On cherche à extraire  $N_{typ} = O(R^\gamma)$  pour lequel  $\sum_{k=1}^{O(R^\gamma)} p_k = O(1)$ . On obtient alors directement pour des  $p_k$  *ii* que  $N_{typ} \approx \frac{1}{p} \sim (R/a)^\psi$ .

La démonstration précédente s'appuie sur l'hypothèse que les probabilités  $p_k$  sont indépendantes et identiques (*ii*). Cependant, cette hypothèse devient *fausse* lorsque la géométrie des sites visités évolue au cours du temps et plus particulièrement pour les marches à renforcement qui interagissent avec les sites déjà visités. Cet effet devient incontournable lorsqu'une partie non négligeable du volume a été visitée, ce qui est le cas lorsque le marcheur trouve généralement la cible.

On considère désormais les marches à renforcement répulsif ou faiblement attractif qui présentent un comportement diffusif à toutes les échelles de temps. L'analyse numérique des différents  $p_k$  suggère que le comportement dominant de  $p_k$  est toujours donné par  $(\frac{a}{R})^\psi$ . On réécrit  $p_k$  sous la forme

$$p_k \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{a}{R}\right)^\psi \left[1 + h\left(k \left[\frac{a}{R}\right]^\psi\right)\right], \quad (\text{IV.13})$$

où  $h$  est une fonction pour l'instant prise quelconque. Justifions la dépendance en  $k \left(\frac{a}{R}\right)^\psi$  pour les marches à renforcement. Après  $k$  excursions, le marcheur a visité un nombre typique de sites donné par  $kR^{d_w}$  dans un volume de taille  $R^d$ . Ainsi, on propose que le rapport  $k \frac{R^{d_w}}{R^d} = kR^{-\psi}$  décrive l'impact des effets de renforcement des sites précédemment visités sur la probabilité de trouver la cible<sup>\*17</sup>. En injectant (IV.13) dans (IV.12) on obtient

$$S(n) \sim (1 - p_0) \exp\left[-n \left(\frac{a}{R}\right)^\psi - H\left(n \left[\frac{a}{R}\right]^\psi\right)\right],$$

où on a défini  $H\left(n \left[\frac{a}{R}\right]^\psi\right)$  comme la primitive de  $h$ . Il apparaît naturellement que  $N_{typ} \sim \left(\frac{R}{a}\right)^\psi$ . En effet, pour  $n \ll \left(\frac{a}{R}\right)^\psi$ , on obtient que  $S(n) \approx 1$ . Inversement, pour  $n \gg \left(\frac{a}{R}\right)^\psi$ , il apparaît clairement que le premier terme amène une décroissance exponentielle<sup>\*18</sup>.

<sup>\*17</sup> Notons que cet argument d'échelle reste valide tant que  $k \sim O(R)$ .

<sup>\*18</sup> Par ailleurs, on pourrait supposer que les deux termes puissent se neutraliser mais notons que  $H$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  pour des renforcements répulsifs. Enfin pour des processus faiblement attractifs le comportement diffusif aux temps longs tend à contredire l'apparition de tels comportements.

On réécrit finalement  $P(n)$ , la probabilité de trouver la cible à la nème excursion, sous la forme

$$P(n) \sim (1 - p_0) \left(\frac{a}{R}\right)^\psi \exp \left[ -f \left( \frac{n}{N_{typ}} \right) \right], \quad (\text{IV.14})$$

où  $f$  est définie via la dérivée de  $H(n \lfloor \frac{a}{R} \rfloor^\psi)$ .

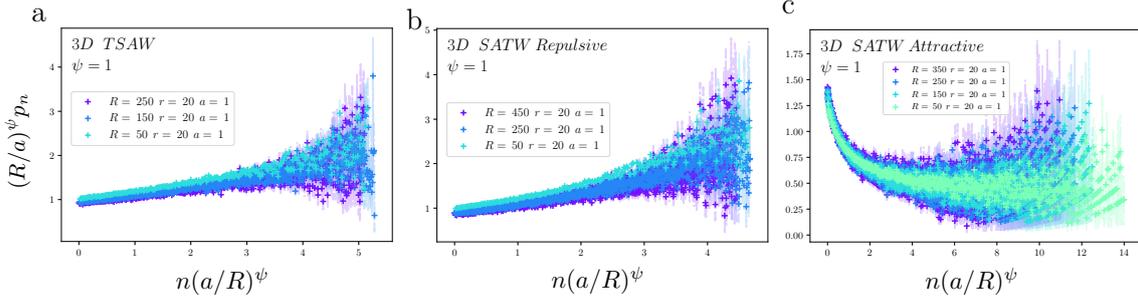


FIG. IV.7 Comportement d'échelle de  $p_n$  définie comme la probabilité de trouver la cible à la nème excursion. Afin d'étudier la dépendance selon  $n$  de  $p_n$ , celle-ci est normalisée selon (IV.13), pour la marche TSAW 3D **a** ( $\beta = 1$ ) et pour la marche SATW diffusive en 3D dans le cas répulsif, **b** ( $\beta = 3.0$ ) et dans le cas attractif **c** ( $\beta = -1.0$ ). Des figures équivalentes pour les autres modèles à renforcement peuvent être trouvées en annexe G.5.

### c) Remarques autour du nombre typique d'excursions

Émettons plusieurs remarques qui soulignent la force de cette approche :

- Tout d'abord, pour des  $p_k$  *ii*, la distribution limite  $S(n)$  est exponentielle. En revanche, ce n'est plus nécessairement vrai pour les marches à renforcement (figure IV.7).
- Ensuite, on ne s'intéresse pas au comportement de  $h$  dans la limite  $+\infty$  puisque la cible a été trouvée avec une probabilité 1 dans la limite des grands volumes. On peut par exemple supposer que  $h$  présente un comportement complexe lorsque le site fait partie des derniers sites visités du volume. Néanmoins, ces évènements sont négligeables dans la limite des grands volumes.
- Afin de souligner la robustesse de notre approche, on pourrait concevoir une fonction  $h$  qui dépende d'une seconde variable  $(\frac{a}{R})^\delta$  avec  $\delta < \psi$ , respectivement  $h(k, a/R) = h_1(k(\frac{a}{R})^\delta, k(\frac{a}{R})^\psi)$ . Si la primitive de  $h_1$  converge, le comportement attendu est toujours donné par  $(\frac{a}{R})^\psi$ . On peut alors réécrire  $h$  en ayant fait converger cette seconde variable  $h(k, a/R) = h_1(\infty, k(\frac{a}{R})^\psi)$ . En revanche, pour une divergence selon cette seconde variable  $(\frac{a}{R})^\delta$ , on obtiendrait une dépendance anormale de  $N_{typ}$  selon  $h$ . Ce comportement ne peut pas être observé pour les marches à renforcement considérées dans cette thèse<sup>\*19</sup> en dimension supérieure ou égale à 3. En revanche, de tels comportements surviennent pour les explorations marginales abordées en fin de chapitre.

<sup>\*19</sup> Cela signifierait qu'un nombre de sites négligeable est un effet déterminant dans la géométrie de la trajectoire en confinement. Ce qui a été réfuté par l'analyse des incréments en confinement.

- Enfin, notons que la décroissance de  $S(N)$  présente un comportement proche d'une loi exponentielle ( $f(t) \sim t^\alpha$ ). Ce constat est primordial lorsque l'on considère les contributions des événements rares dans la distribution du FPT. En effet, si la distribution de  $S(N)$  présentait une décroissance en loi de puissance, la contribution des événements rares peut dominer le terme principal obtenu par  $N_{typ}$ , en particulier pour les moments du FPT en confinement. En revanche, la décroissance exponentielle nous assure que l'ensemble des moments de la distribution du FPT en confinement sont bien déterminés par  $N_{typ} = \left(\frac{R}{a}\right)^\psi$  (à l'exception de comportements piégés étudiés dans le chapitre précédent).

#### d) Détermination du temps typique des excursions

On se tourne vers la détermination du comportement de  $\Phi_n(t)$ . Comme la cible est trouvée après un grand nombre d'excursions, la distribution du temps passé pour réaliser la dernière excursion avant de trouver la cible est inconnue. Néanmoins, elle est négligeable devant le temps passé lors des  $n$  premières excursions. Par conséquent, ce comportement dépend de  $R$  et  $a_0$  mais reste indépendant de  $a$ .

Au vu de l'analyse des incréments effectués précédemment, on propose que les comportements d'échelle de  $t_n$  et  $\tau_n$  (que l'on rappelle définis comme les temps typiques mis par le marcheur pour réaliser respectivement les  $n - 1$  premières excursions et seulement la nème), restent déterminés par la relation suivante

$$\langle [X(t_n + \tau_n) - X(t_n)]^2 \rangle \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} R^2$$

Les excursions ne sont plus strictement indépendantes, néanmoins on peut supposer que les corrélations sont suffisamment faibles pour ne pas altérer le comportement d'échelle de la somme.

Considérons le cas où les incréments présentent des effets de vieillissement mais dont le comportement asymptotique est inchangé. Cette analyse couvre les différents exemples de marches à renforcement répulsif et faiblement attractif en dimension supérieure à 3.

Comme le comportement de ces marches est alors diffusif à toutes les échelles de temps, on s'appuie sur deux préfacteurs. Le premier,  $D_L$  est défini à  $\tau = 0$  dans la limite où les effets de vieillissement sont négligeables. Le second  $D_s$  est défini par le comportement de la marche dans la limite où celui-ci a visité un nombre élevé de fois les différents sites du volume. On peut réécrire les temps caractéristiques associés aux différentes excursions

$$\tau_n = \frac{R^{d_w}}{2D_s} [1 + k(n, R, a_0)] \text{ avec } \frac{k(1, R, a_0) + 1}{2D_s} = \frac{1}{2D_L} \text{ et } k(n, R, a_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Comme ceux-ci ne sont pas déterminés par une loi large, on peut alors sommer afin d'extraire  $t_n$

$$t_n = nR^{d_w} H(n, R, a_0),$$

où on a défini  $H(n, R, a_0)$

$$H(n, R, a_0) = (2D_s)^{-1} \left[ 1 + \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n k(i, R, a_0) \right) \right] = O(1) \quad \forall R, n, a_0.$$

Remarquons que l'on n'a émis aucune hypothèse sur la dépendance de  $H$  selon les variables  $R$  et  $a$ . On peut donc réécrire la distribution de premier passage conditionnellement à ce que la cible ait été trouvée à la  $n$ ème excursion en faisant apparaître explicitement  $t_n$  dans la limite  $n, R \gg 1$

$$\Phi_n(t, R, a_0) \sim \frac{1}{t} \phi \left( \frac{t}{t_n} \right). \quad (\text{IV.15})$$

Plus précisément, par analyse dimensionnelle, on réécrit  $\Phi_n$  selon  $\Phi_n(t, R, a_0) = \frac{1}{t} g \left( \frac{t}{t_n}, \frac{a_0}{R}, \frac{R^{d_w}}{t_n}, \frac{L(a_0, \beta, \dots)}{a_0} \right)$  qui ne dépend que du rapport  $t \gg t_n$  dans la limite  $n, R \gg 1^{*20}$ .

On peut alors sommer sur  $n$  afin d'extraire la distribution complète du FPT. Pour cela, on s'appuie sur (IV.15) et (IV.14) en faisant apparaître explicitement le comportement d'échelle de  $N_{typ}$

$$F(t, R, r, a) \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} p_0 \Phi_0(t) + (1 - p_0) \int_0^\infty \frac{a^\psi}{R^\psi} \frac{1}{t} e^{-f(\frac{n}{N_{typ}})} \phi \left( \frac{t}{R^{d_w} H(n, R, a_0)} \right) dn.$$

Les contributions des échelles différentes de  $N_{typ}$  sont absorbées dans les bornes de l'intégrale. Afin de s'assurer de la validité de cette démarche, les contributions des temps caractéristiques autres que  $t_n$  sont étudiées en annexe G.2. Brièvement, le comportement piqué de  $S(N)$  autour de  $N_{typ}$  implique que leurs contributions sont bien négligeables. On propose le changement de variable  $u = n/N_{typ}$  qui permet d'extraire la dépendance selon  $R$  dans la limite des grands volumes. En définissant  $\eta \sim t/T_{typ}$  avec  $T_{typ} = R^{d_w} N_{typ}$ , on obtient

$$G(\eta, R, r, a) \sim F(t, R, r, a) R^{d_w} \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} p_0 \delta(\eta) + (1 - p_0) \int_0^\infty \frac{1}{\eta} e^{-f(u)} \phi \left( \frac{\eta}{h_L(u, \frac{a}{a_0})} \right) du,$$

où on a fait apparaître la dépendance explicite de  $H$  selon la variable  $u = n/N_{typ}$ . Pour cela, on a réécrit la fonction  $H$  en faisant apparaître de multiples échelles selon le rapport  $R/a_0$

$$H(n, R, a) = h \left( n, \frac{n}{R/a}, \frac{n}{\sqrt{R/a} \ln(R/a)}, \frac{n}{(R/a)^\gamma \ln(R/a)^\delta}, \dots \right).$$

Puis, en reprenant le changement de variable  $u = n/N_{typ}$ , on obtient

$$\begin{aligned} H(n, R, a) &= h \left( u N_{typ}, \frac{a}{a_0} u, \frac{a}{a_0} \frac{u}{\ln(R/a)}, \frac{a}{a_0} \frac{u}{(R/a)^{\gamma-1} \ln(R/a)^\delta}, \dots \right) \underset{R \rightarrow +\infty}{\sim} h(+\infty, u \frac{a}{a_0}, 0, +\infty, 0..) \\ &= h_L(u, \frac{a}{a_0}). \end{aligned}$$

---

\*20 On rappelle que l'on se repose sur  $t_n \gg \tau_n$  dans la limite des grands nombres d'excursions.

Finalement, on remplace  $p_0$  par son comportement asymptotique dans la limite  $r \gg a$  pour obtenir une expression selon  $\eta = ta^\psi/R^{d_w+\psi}$

$$G(\eta, R, r, a) \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} C\left(\frac{a}{a_0}\right) \left[\frac{a}{r}\right]^\psi \delta(\eta) + \left(1 - C\left(\frac{a}{a_0}\right) \left[\frac{a}{r}\right]^\psi\right) \int_0^\infty \frac{1}{\eta} e^{-f(u)} \phi\left(\frac{\eta}{h_L(u, \frac{a}{a_0})}\right) du. \quad (\text{IV.16})$$

où  $C(\frac{a}{a_0}) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 1$  traduit les effets de discrétisation du réseau aussi présents dans le cas des modèles markoviens. Notons que l'on a réécrit  $h$  en  $h_L(u, \frac{a}{a_0})$  afin de rendre plus explicite la dépendance selon le rapport  $\frac{a}{a_0}$ . De toute évidence, les effets de vieillissement associés aux temps typiques des excursions dépendent de  $a_0$ , contrairement à  $N_{typ}$  qui dépend de  $a$ . D'autre part, pour  $a \gg a_0$ , on propose que  $h_L$  tende vers une limite finie où les effets de vieillissement sont négligeables puisque la cible est atteinte bien avant que le volume ne soit suffisamment visité<sup>\*21</sup> (figure IV.9).

Ainsi, on a déterminé le comportement d'échelle de la distribution de premier passage des marches à renforcement non compactes

$$G(\eta, R, r, a) \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \left(1 - C\left(\frac{a}{R}\right)^\psi\right) h(\eta), \quad (\text{IV.17})$$

où  $h$  est une fonction indéterminée qui dépend du processus. Dans le cas des marches à renforcement non compactes, les conditions initiales ne modifient donc pas le comportement d'échelle de la distribution du FPT; elles peuvent cependant changer la fonction d'échelle  $h$  (ce résultat est confirmé numériquement figure IV.8).

Pour les processus non compacts, on obtient que le MFPT en confinement est linéaire avec le volume ( $\langle T \rangle \propto R^d$ ), ce qui est cohérent avec la limite diffusive à grand temps obtenue en début de chapitre. L'échelle de  $\langle T \rangle$  avec  $R$  est indépendante des effets de mémoire, effets qui modifient en revanche le coefficient de diffusion effectif.

### e) Conclusion de l'approche pour les marches à renforcement dans le cas non compact

On peut alors résumer, l'impact des effets de renforcement pour les marcheurs diffusifs à toutes les échelles de temps :

- Pour les effets qui surviennent à un temps caractéristique  $T \ll R^{d_w} N_{typ}$ , ceux-ci sont compris dans  $H(n, R, a_0)$ , et ne modifient pas le comportement du FPT.
- Pour ceux survenant à un temps caractéristique  $T_{typ} \sim R^{d_w} N_{typ}$ , ils sont alors entièrement décrits par la variable  $T_{typ}$ .
- Enfin, pour  $T \gg R^{d_w} N_{typ}$ , ces effets surviendront après que la cible ait été trouvée presque sûrement et n'influent pas sur la statistique du FPT.

---

<sup>\*21</sup> Cette proposition est spécifique aux marches à renforcement. Par ailleurs, celle-ci est justifiée par le comportement de la limite continue des marches à renforcement au-delà de la dimension critique, pour lesquels les effets de renforcement sont négligeables. Plus précisément, dans la limite continue, les processus sont équivalents à des mouvements brownien qui ont une probabilité nulle de se recouper. Dès lors, on retrouve des résultats indépendants du vieillissement dans la limite  $R, r, a \gg a_0$ .

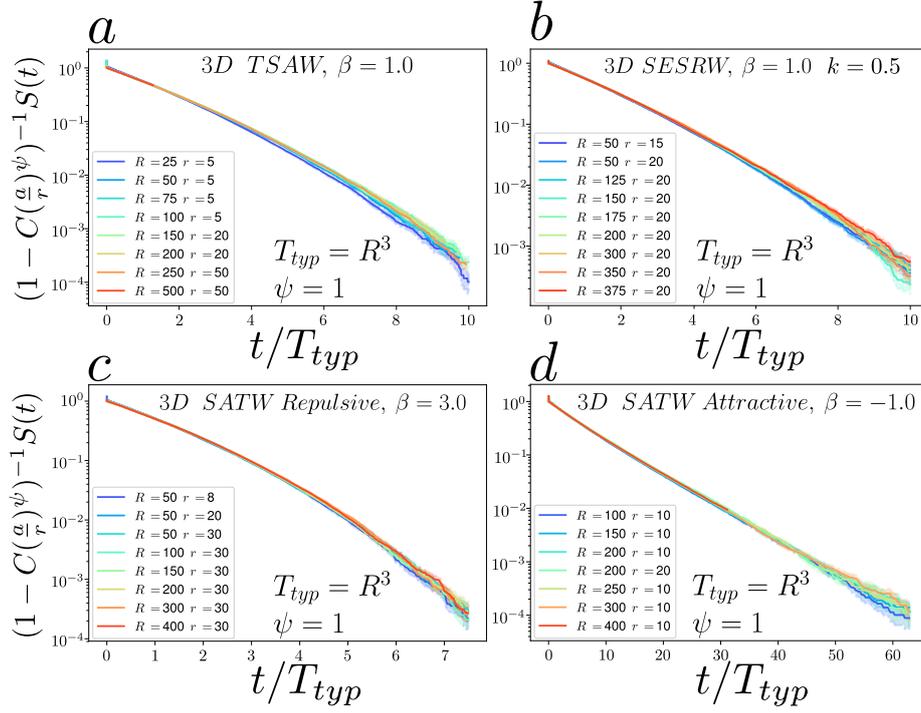


FIG. IV.8 Comportement d'échelle de la distribution du FPT selon les paramètres géométriques pour les explorations non compactes. La dépendance de la probabilité de survie selon les différents paramètres géométriques est déduite de (IV.16). La convergence des différentes simulations numériques après la normalisation prédite dans (IV.16) capture la dépendance de la distribution du FPT selon les différents paramètres géométriques. Les simulations sont réalisées dans des boîtes 3D de taille  $R$  avec des conditions aux bords réfléchissantes (la constante  $C$  est mesurée numériquement et elle dépend de  $a/a_0$  lorsque  $a \sim a_0$ ). **a** TSAW 3D avec  $\beta = 1.0$ . **b** 3D SESRW avec  $\beta = 1.0$  et  $k = 0.5$ . 3D SATW répulsive avec  $\beta = 3.0$  **c** et  $\beta = -1.0$  **d**.

En conclusion, on a obtenu que la distribution du FPT converge dans la limite des grands volumes vers une distribution qui dépend explicitement des paramètres géométriques au travers d'une unique variable  $T_{typ} = \frac{R^{d_w + \psi}}{a^\psi}$ . En revanche, les effets de vieillissement influent sur la forme de la distribution limite\*<sup>22</sup> bien que  $d > d_c$ .

Par ailleurs, notons que l'hypothèse selon laquelle le comportement des incréments est strictement diffusif à toutes les échelles de temps peut être relaxée pour des temps supérieurs à  $T_{typ}^{*23}$ . En revanche, notre approche doit être relativisée pour des comportements autopiégés.

\*<sup>22</sup> En effet, pour des marches markoviennes symétriques, la distribution est exponentielle [Levernier, 2017] (voir annexe G.6). En revanche, ce n'est plus le cas pour les marches à renforcement. Ce dernier point prendra toute son importance lorsque l'on considérera les temps de couverture des modèles répulsifs en dimension 3.

\*<sup>23</sup> En effet, puisque la probabilité que la cible soit trouvée dans un temps plus élevé que  $O(R^{d_w + \psi})$  est négligeable dans la limite des grands volumes, les effets de vieillissement spécifiques à cette échelle n'ont pas à être considéré.

On peut, à titre d'exemple, concevoir un modèle de marche de pólya fictif en dimension 3 qui serait définitivement arrêté après un temps donné par  $\ln(R)(R^3)$ . Le comportement typique du FPT obtenu reste valide, puisque l'évènement associé survient après que la cible ait été traversée. Toutefois, les moments sont alors infinis car il y a une probabilité négligeable d'être piégé en n'ayant pas trouvé la cible.

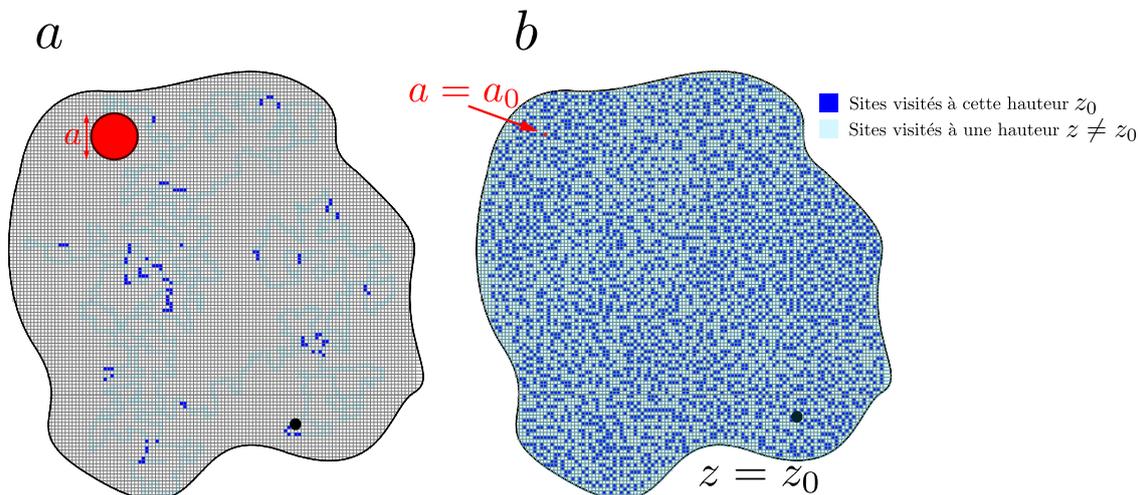


FIG. IV.9 Effet de la taille de la cible sur les explorations non compactes. **a** Pour une cible de taille  $a \gg a_0$ , le marcheur a visité un nombre relativement peu élevé de sites lorsqu'il atteint la cible. Les effets de vieillissement peuvent être négligés ce qui conduit à une distribution exponentielle du FPT en confinement. **b** Inversement, pour une cible de taille comparable à celle du réseau, le marcheur va découvrir un nombre suffisamment important de sites, et les effets de vieillissement ne sont plus négligeables.

#### IV.4 Distribution de premier passage dans un espace initialement visité

L'analyse des modèles précédents a révélé la présence d'effets de vieillissement en dimension 1 mais aussi en confinement en dimension 3. Néanmoins, notre approche souligne que pour la majorité d'entre eux, ces effets ne modifient pas l'échelle caractéristique du FPT en confinement, en particulier pour les explorations compactes où seul l'exposant de persistance dépend des propriétés de vieillissement. On cherche à étendre notre approche en ayant, au préalable, *laissé vieillir ces différents processus en confinement* avant d'introduire la cible (on choisira des temps de vieillissement initiaux  $T$  grands devant le MFPT mesuré précédemment).

Ainsi, on peut reprendre les méthodes développées pour les explorations compactes et non compactes, en remplaçant les exposants  $d_w$ ,  $\theta$  et  $\psi$  par leurs équivalents vieillis  $d_{w_c}$ ,  $\theta_c$  et  $\psi_c$

$$G_c(\eta, R, r, a) \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{r}{R}\right)^{d_{w,c}\theta_c} h_c(\eta), \quad (\text{IV.18})$$

et

$$G_c(\eta, R, r, a) \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} = \left(1 - C \left(\frac{a}{R}\right)^{\psi_c}\right) h_c(\eta) \quad (\text{IV.19})$$

Par conséquent, on obtient un MFPT linéaire selon le volume confiné pour les marches SATW, SESRW, répulsives en loi de puissance. Notons que spécifiquement au modèle SESRW en dimension 1, on observe  $d_{w_c} \neq d_w$ . Similairement, on s'attend à des explorations non compactes en dimension 3 caractérisées par  $T_{typ} = R^{d_{w_c} + \psi_c} / a^{\psi_c}$  (figure IV.10). Dès lors, on observe que les effets de vieillissement initiaux semblent avoir un impact majeur sur les propriétés de premier passage contrairement aux explorations non compactes, qui présentent un comportement d'échelle identique. Toutefois, relevons que les distributions sont bien exponentielles contrairement aux cas  $T = 0$ . Ensuite, pour les marches TSAW, on observe  $\theta = \theta_c$ ,  $d_w = d_{w_c}$  et  $\psi_c = \psi$ , les conditions initiales ont alors un effet marginal sur les propriétés de premier passage en confinement.

On peut étendre cette analyse aux marches attractives sous-diffusives étudiées dans le chapitre précédent. L'analyse des incréments de ces modèles permet de conclure qu'ils vérifient, eux-aussi, un comportement diffusif dans la limite  $T \gg R^{d_w} \gg t$ . On propose que les propriétés de premier passage des marches attractives sous-diffusives dans un volume déjà vieilli, présentent les exposants  $d_{w_c} = 2$  et  $\theta_c = 1/2$  en dimension 1, et une distribution en confinement  $T_{typ} = R^{d_{w_c} + \psi_c} / a^{\psi_c}$  avec  $\psi_c = 1$  en dimension 3.

## IV.5 Applications aux modèles étudiés et possibles extensions

Dans cette partie, on résumera les résultats obtenus pour les différents modèles étudiés puis on commentera leurs implications.

### IV.5.1 Applications aux modèles à renforcement

Modèle SATW répulsif et attractif et marche à renforcement en loi de puissance :

Commençons par la dimension 1 (compact), ces modèles présentent des incréments vieillissants et diffusifs à toutes les échelles de temps, corrélés à un exposant de persistance anormal (l'exposant de persistance de la marche répulsive en loi de puissance est donnée figure IV.12). Ils admettent une distribution de premier passage en confinement déterminée par (IV.11) avec  $T_{typ} = R^{d_w}$  et un temps moyen donné par  $\langle T \rangle = R^{d_w(1-\theta)} r^{d_w\theta}$ , non linéaire selon  $R$  (pour  $\theta > 1$  et dans la limite des grands volumes). En dimension 3 (non compact), ces modèles présentent des incréments diffusifs stationnaires en milieu infini, et vieillissants en confinement tout en restant diffusifs (IV.3). Ces modèles réalisent des explorations non compactes, caractérisées par  $\psi = 1$  en milieu infini, et présentent une distribution de premier passage (IV.17) dirigée par  $T_{typ} = R^{d_w + \psi} / a^\psi$ . Notons que ce comportement est aussi partagé pour les modèles faiblement attractifs, diffusifs en dimension supérieure à 2.

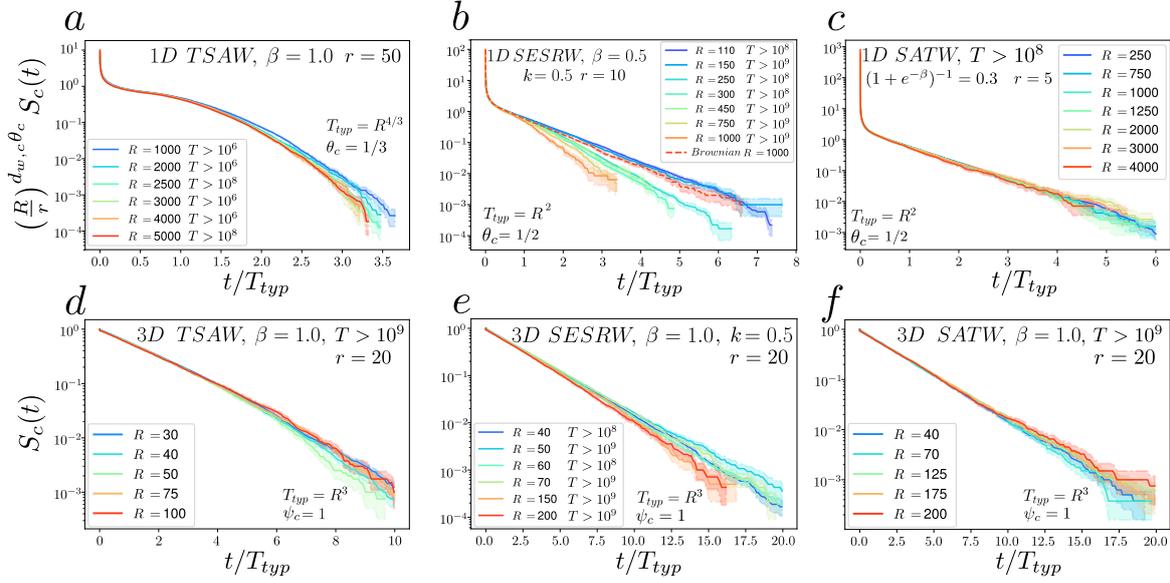


FIG. IV.10 Comportement d'échelle de la distribution du FPT selon les paramètres géométriques pour des conditions initiales vieilles. Ici,  $S(t)$  est la probabilité de survie du marcheur aléatoire commençant à chercher la cible après avoir exploré le volume confiné jusqu'à un temps  $T$ . Son comportement d'échelle selon les paramètres géométriques est déduit de (IV.9) et (IV.16) pour des explorations compactes et non compactes respectivement en reprenant les exposants  $\theta_c$  et  $\psi_c$  et  $d_{w,c}$ . La convergence des simulations numériques après leur normalisation respective capture la dépendance de la distribution du FPT selon les différents paramètres géométriques. Les simulations sont réalisées dans des boîtes 1D, 3D de taille  $R$ , avec des conditions aux limites réfléchissantes à  $r$  et  $a$  fixés. Cas compacts : **a** 1D TSAW avec  $\beta = 1.0$ ; **b** 1D SESRW avec  $\beta = 1.0$  et  $k = 0.5$ , la distribution limite attendue et donnée par une marche aléatoire simple est ajoutée à titre de comparaison (courbe en pointillé); 1D SATW répulsif avec  $\beta = 3.0$  **c**. Cas non compacts : **d** 3D TSAW avec  $\beta = 1.0$ ; **e** 3D SESRW avec  $\beta = 1.0$  et  $k = 0.5$ ; **f** 3D SATW avec  $\beta = 1.0$ .

#### Marches sous-exponentielles SESRW :

En dimension 1 (compact), celles-ci présentent un comportement asymptotiquement superdiffusif aux temps longs, et un comportement diffusif dans la limite  $T \gg t$ , y compris en confinement ((IV.1)). L'exposant de persistance est donc anormal et ces marcheurs admettent une distribution de premier passage en confinement déterminée par (IV.11) avec  $T_{typ} = R^{d_w}$  ( $d_w = (k + 2)/(k + 1)$ ), et un temps moyen non linéaire selon  $R$ , donné par  $\langle T \rangle = R^{d_w(1-\theta)} r^{d_w\theta}$ . En dimension 3 (non compact), ces marches présentent des incréments diffusifs stationnaires en milieu infini, et vieillissants en confinement tout en restant diffusifs (IV.3). Ces modèles présentent une exploration transiente caractérisée par  $\psi = 1$  en milieu infini, et une distribution dirigée par (IV.17) avec  $T_{typ} = R^{d_w+\psi}/a^\psi$ .

### Marches TSAW :

En dimension 1 (compact), on retrouve un comportement superdiffusif  $d_w = 3/2$  et des incréments superdiffusifs qui présentent des effets de vieillissement à toutes les échelles de temps (IV.2). Étonnamment, l'exposant de persistance reste donné par  $\theta = 1 - d/d_w$ , ce qui conduit à un temps moyen linéaire selon  $R$  en confinement ((IV.11) avec  $T_{typ} = R^{d_w}$  et  $\langle T \rangle = R$ ). En dimension 3 (non compact), ces marches présentent des incréments diffusifs stationnaires en milieu infini, et vieillissants en confinement tout en restant diffusifs (IV.3). Ces modèles présentent donc une exploration transiente caractérisée par  $\psi = 1$  en milieu infini et une distribution dirigée par (IV.17) avec  $T_{typ} = R^{d_w + \psi}/a$ .

On suggère maintenant d'étendre nos résultats à des marches affiliées qui n'ont pas encore été évoquées dans ce chapitre.

### Marches à renforcement super exponentielles :

Pour celles-ci, en dimension 1 (compact), le comportement asymptotique attendu est donné par  $d_w = (1+k)/(2+k)$ . Ensuite, on propose que le comportement des marches super exponentielles soit donné par

$$\langle [X(t+T) - X(T)]^2 \rangle_{t,T} = \begin{cases} 2D_L t^{\frac{2(k+1)}{(k+2)}} & \text{pour } t \gg T \\ D_s t^{2/d_w - \alpha} & \text{pour } t \ll T, \end{cases}$$

où  $\alpha < 0$  reste encore indéterminé. Ces effets de vieillissement altèrent la valeur de l'exposant de persistance, et par conséquent, le temps moyen en confinement  $\langle T \rangle = R^{d_w(1-\theta)} r^{d_w \theta}$  ((IV.11) avec  $T_{typ} = R^{d_w}$ ). En dimension 3 (non compact), ces marches présentent un comportement diffusif. De par les nombreux parallèles que l'on peut tirer avec le modèle TSAW, on s'attend à ce que ces marches présentent des effets de vieillissement diffusifs à toutes les échelles de temps\*<sup>24</sup> (IV.3). Ainsi, ces modèles présentent une exploration transiente caractérisée par  $\psi = 1$  en milieu infini et une distribution dirigée par (IV.17) avec  $T_{typ} = R^{d_w + 1}/a$ . Ces différents résultats restent à être vérifiés numériquement, la seule potentielle interrogation reposant sur le comportement en confinement en dimension 1 qui n'influe pas sur la statistique du FPT proposée.

---

\*<sup>24</sup> La variance du temps local de la TSAW étant stationnaire, ce résultat peut être étendu aux marches super exponentielles qui vont alors présenter un comportement diffusif

### IV.5.2 Commentaires

- Tout d’abord, notre analyse montre que les effets de renforcement peuvent avoir des conséquences profondes sur la dynamique de ces modèles ; ils peuvent induire un vieillissement (quantifié par  $D(T, t)$  et  $d_w$ ) et des exposants de persistance et de transience non triviaux  $\theta$  et  $\psi$ . Nous avons montré que le confinement géométrique peut fortement modifier la dynamique de ces marches, contraste frappant en comparaison des modèles non markoviens généralement étudiés. Au-delà d’imposer des conditions limites localement réfléchissantes, la dynamique des incréments peut être modifiée (dans le cas non compact), ainsi que les exposants de persistance (dans le cas compact).
- Pour des conditions initiales non-vieillies ( $T = 0$ ), on a montré que la distribution du FPT en confinement peut être asymptotiquement prédite à partir de la connaissance du processus en espace infini (via les exposants  $d_w, \theta, \psi$ ). Le confinement géométrique modifie la dynamique du processus et change les exposants correspondants  $d_{w,c}, \theta_c, \psi_c$  (après vieillissement), mais cela ne se produit qu’à des échelles de temps plus grandes que le FPT typique. En revanche, pour des conditions initiales vieilles, les exposants qui déterminent la distribution du FPT sont ceux définis en confinement  $d_{w,c}, \theta_c, \psi_c$ , et peuvent être différents des exposants classiques  $d_w, \theta, \psi$ .
- Par ailleurs, on observe que dans le cas compact, un processus qui vieillit présente, le plus souvent, un MFPT non linéaire avec le volume confinant. Alors que les effets de vieillissement ne semblent pas altérer le temps caractéristique des excursions, l’exposant de persistance est, en général, différent de  $1 - d/d_w$  et  $\langle T \rangle$  ne varie pas comme  $R^d$ . Pour les explorations non compactes, les effets de vieillissement peuvent entraîner une dépendance non linéaire du MFPT, lorsque le comportement des incréments aux temps courts ( $T \gg t$ ) n’est plus donné par  $t^{d_w}$  (en particulier, pour les processus effectuant un comportement  $t^{2d_w - \alpha}$  indépendant de  $T$  aux temps courts<sup>\*25</sup>). Par conséquent, pour des processus non-strictement invariants d’échelle, l’impact des effets de vieillissement sur les propriétés de premier passage en confinement peut être double. Une modification de la géométrie de la trajectoire et des effets de vieillissement sur le temps typique mis pour réaliser de nombreuses excursions dans le volume confinant.
- Ensuite, notons que la dépendance du FPT selon la distance initiale  $r$  est non négligeable pour les explorations compactes et marginale pour les explorations non compactes. Cette propriété est connue pour les processus markoviens et strictement invariants d’échelle et on peut donc l’étendre pour les marches à renforcement. Par ailleurs, le comportement d’échelle de  $T_{typ}$  et la forme fonctionnelle de (IV.16) restent valides lorsque  $r = O(1)$  et seule la dépendance selon  $p_0$  reste indéterminée.
- En outre, remarquons que pour les processus compacts, le comportement d’échelle du MFPT est différent de celui de  $T_{typ}$  alors que  $T_{typ}$  permet pourtant de décrire l’ensemble de la distribution aux temps longs. Cette observation reste générale aux explorations compactes [Levernier et al., 2018], et elle provient du comportement en loi de puissance dans la limite  $t \ll R^{d_w}$ .

---

<sup>\*25</sup> On présentera l’exemple de la marche ERW dont le comportement aux temps courts est diffusif et pour lequel le marcheur effectue une exploration caractérisée par un exposant  $\psi_c \neq \psi$ .

- Ces résultats nous permettent d'évaluer l'efficacité de l'exploration spatiale des marches à renforcement, et en particulier de discuter de l'impact des effets de mémoire sur la cinétique de recherche de cibles en espace confiné.

Si aucune information préalable sur la position de la cible n'est disponible ( $r$  inconnue), l'observable pertinente pour quantifier la cinétique de recherche est le FPT moyenné selon  $r$ ,  $\langle \bar{T} \rangle$ . Pour les processus compacts, nos résultats amènent à  $\langle \bar{T} \rangle \propto R^{d_w}$ . La cinétique de l'exploration est améliorée pour  $d_w$  faible. Dans ce cas, les effets de mémoire des marches TSAW  $1d$  et SESRW  $1d$  l'accélèrent significativement (car elles présentent un exposant superdiffusif  $d_w < 2$ ). Pour les processus non compacts, on a obtenu  $\langle \bar{T} \rangle \propto R^d$ , et cette échelle est indépendante des effets de mémoire.

Si la distance de départ  $r$  de la cible est connue, pour les processus compacts, les exposants  $d_w, \theta$  apparaissent comme des paramètres clés qui contrôlent le poids respectif des trajectoires directes et indirectes, ainsi que l'échelle de temps typique des trajectoires qui trouvent la cible après avoir touché les bords. Pour les processus aléatoires à incréments stationnaires, il a été proposé que les deux exposants ne soient pas indépendants et satisfassent  $\theta = 1 - d/d_w$  [Bray et al., 2013; Levernier et al., 2018; Meroz et al., 2011]; dans ce cas, augmenter le poids des trajectoires directes en augmentant  $d_w$  se fait au prix d'une augmentation de l'échelle de temps des trajectoires indirectes. C'est également le cas de la marche TSAW  $1d$ , pour laquelle on a trouvé numériquement que  $\theta = 1 - d/d_w$ . En revanche, dans le cas des marches SESRW et SATW, on a observé que  $\theta \neq 1 - d/d_w$ . Les effets de renforcement sont favorables pour  $r$  grand puisqu'ils diminuent l'échelle de temps des trajectoires indirectes qui touchent les bords avant la cible. Elles réduisent cependant le poids des trajectoires directes et sont préjudiciables pour  $r \ll R$ . À l'inverse, les effets de renforcement attractif (SATW) peuvent cependant augmenter significativement le poids des trajectoires directes via  $\theta$ , et sont donc favorables pour  $r \ll R$ . Enfin, dans le cas non compact, nos résultats (IV.17) montrent que la statistique FPT est caractérisée par la seule échelle de temps  $R^d$  (pour  $r \gg a$ ). Comme dans le cas du FPT moyenné selon la position initiale, les effets de mémoire ne modifient que le coefficient de diffusion effectif, et ils n'ont pas d'impact sur le comportement d'échelle de la distribution du FPT.

- Pour finir, rappelons que notre approche s'applique également pour des modèles dont les propriétés de vieillissement peuvent être anormales, voire indéterminées, lorsque celles-ci apparaissent à des échelles typiques largement supérieures au temps de premier passage. On peut, à titre d'exemple, évoquer le modèle introduit dans [Grassberger, 2017b], qui développe une variation de la marche TSAW pour laquelle le marcheur peut déposer des signaux de renforcement sur les sites voisins sans avoir à les visiter. L'analyse menée dans [Grassberger, 2017b] a mis en lumière l'apparition de comportements piégés dans la limite des temps très longs mais on peut supposer que notre approche reste valide puisque ces comportements semblent se manifester au-delà du temps typique isolé précédemment.

## IV.6 Conclusion

Ce chapitre complète le précédent en étendant notre étude à l'analyse des modèles à renforcement répulsif en espace infini et en confinement.

En premier lieu, pour les explorations compactes les incréments ne sont pas profondément altérés par l'introduction d'un volume confinant. Inversement, pour les explorations non compactes, on note l'émergence d'effets de vieillissement qui ne sont pas observés en espace infini.

Ensuite, notre analyse souligne l'importance de la croissance de la variance du temps local en confinement. En effet, son étude permet d'en déduire les effets de vieillissement en milieu confiné, et par conséquent de s'assurer de la statistique du FPT en confinement.

Par ailleurs, cette étude souligne encore l'importance de l'exposant de persistance pour les explorations compactes en confinement. D'autre part, on a pu reproduire un raisonnement identique pour des explorations compactes dans des espaces initialement visités et vieillis qui sont caractérisés par des exposants caractéristiques distincts.

De manière générale, notre approche complète les résultats déjà existants pour les processus invariants d'échelle. Premièrement, notre analyse s'étend à des effets de vieillissement dont le comportement aux temps courts est indépendant de  $T$ . Ensuite, notre approche a permis de décrire la statistique du FPT dans la limite des grands volumes pour  $R \gg r \gg a$  mais aussi pour des cibles de taille fixée  $a = O(a_o)$ , ou pour des distances initiales de la taille typique du réseau  $r = O(1)$ . Par ailleurs, on retrouve une propriété générique aux explorations compactes, pour lesquelles la statistique du FPT en confinement est particulièrement sensible à la distance initiale à la cible  $r$  et indépendante de la taille de celle-ci dans la limite  $r \gg a$ . Ce constat est inversé pour les explorations non compactes qui dépendent explicitement de  $a$  et dont le poids des trajectoires directes est identifié et asymptotiquement négligeable selon  $r$ .

Enfin, on peut noter que la forme de la distribution du FPT en confinement est particulièrement sensible aux types d'exploration et aux effets de vieillissement. Pour les processus compacts, la distribution présente une décroissance en loi de puissance suivie d'une queue exponentielle. Inversement, lorsque la cible est d'une taille proche de la taille du réseau, les effets de vieillissement des explorations non compactes doivent être pris en compte, bien que ces marches évoluent dans un réseau de dimension supérieure à la dimension critique. En particulier pour les explorations non compactes, la distribution est une exponentielle pure pour les marcheurs markoviens alors que les effets de renforcement altèrent la forme de la distribution.

## IV.7 Extension : comportements des incréments, comparaison avec les modèles invariants d'échelle

Les résultats que nous avons établis pour le vieillissement des incréments des modèles à renforcement contrastent avec ceux prédits dans le cas des processus invariants d'échelle. Développons cette observation. Tout d'abord, considérons le cas des processus strictement invariants d'échelle. Pour de tels modèles, l'invariance stricte d'échelle impose le comportement aux temps courts  $T \gg t$  suivant

$$\langle [X(t+T) - X(T)]^2 \rangle_{T \gg t} \sim t^{2/d_w - \alpha} T^\alpha, \quad (\text{IV.20})$$

puisque  $D_L/D_s$  est sans unités. Il est possible de concevoir des exemples de processus sur réseau pour lesquels on retrouve un comportement proche de (IV.20). Pour cela, considérons un autre exemple de marche aléatoire sur réseau, introduit dans [Boyer et al., 2014]. Rappelons que ce modèle aussi appelé Monkey Walk, présenté dans le chapitre 2, peut être défini comme suit en dimension 1. Le marcheur évolue sur un réseau discret et à chaque pas de temps :

- a une probabilité  $1 - q$  de sauter sur un site choisi uniformément parmi les plus proches voisins
- et a une probabilité complémentaire de sauter sur un site précédemment visité à un instant  $t' \in [0, t]$ .  $t'$  est tiré selon un noyau dépendant du temps  $p_t(t') = N(t)(t - t' + 1)^{-\beta}$ , où  $N(t)$  est une constante de normalisation.

Concentrons-nous sur le cas  $2 > \beta > 1$ <sup>\*26</sup> pour lequel il a été déterminé que la marche Monkey walk présentait un comportement anormal, caractérisé par un exposant de marche sous-diffusif  $d_w = 2/(\beta - 1)$ . Nous avons vérifié numériquement que les incréments de cette marche prenaient la forme  $D_s t^{\frac{2}{d_w} - \alpha} T^\alpha$ , où  $\alpha$  peut être mesuré numériquement<sup>\*27</sup> (figure IV.11). Ainsi, en autorisant le marcheur à parcourir de larges distances en un unique saut, on retrouve un comportement analogue aux processus invariants d'échelle.

En revanche, pour un processus défini sur réseau, le rapport  $D_L/D_s$  peut aussi induire des échelles différentes. Ainsi, aux temps courts, le comportement des incréments selon les variables  $t$  et  $T$  n'est plus contraint. Considérons, l'exemple de la marche éléphant, étudiée dans le chapitre 2, pour laquelle le comportement des incréments peut être déterminé explicitement. Rappelons que la marche ERW, introduite dans [Schütz et al., 2004], peut être définie comme suit en dimension 1. À chaque pas de temps  $t$ , le marcheur effectue un saut  $\sigma$  sur site chois parmi les plus proches voisins. Pour cela on tire  $\sigma$ , selon un poids uniforme, dans l'ensemble des sauts réalisés par le marcheur précédemment,  $\{\sigma_i\}_{i < t}$ , où  $\sigma_i = \pm 1$ . Le marcheur peut imiter ce saut  $\sigma_t = \sigma$  avec une probabilité  $\beta$ , où effectuer le saut opposé,  $\sigma_t = -\sigma$ , avec une probabilité complémentaire,  $1 - \beta$ . On généralise ce modèle en dimension supérieure en définissant le modèle comme la somme de  $d$  marches ERW  $1d$  indépendantes.

<sup>\*26</sup> Pour  $\beta > 2$ , le marcheur est diffusif [Boyer et al., 2014], et nous avons observé numériquement qu'il présente des incréments stationnaires. Pour  $\beta < 1$ , le processus présente un comportement anormalement sous-diffusif caractérisé par une croissance logarithmique du MSD sortant du cadre de notre étude.

<sup>\*27</sup> On suggère par ailleurs, que ce comportement reste indépendant de la dimension du réseau.

Considérons le cas  $\beta > 3/4$  pour lequel, le processus réalise un comportement super-diffusif aux temps longs [Schütz et al., 2004]. Il est possible de déterminer exactement le comportement des incréments, ce qui est réalisé en annexe D. On y démontre que les incréments sont caractérisés par le comportement de vieillissement suivant

$$\begin{aligned} \langle [X(t+T) - X(T)]^2 \rangle = t^{4\beta-2} & \left[ \frac{2}{(4\beta-3)\Gamma(4\beta-2)} \left(\frac{T}{t}\right)^{4\beta-2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t}{T}\right)^{4\beta-2} - \left(1 + \frac{t}{T}\right)^{2\beta-1}\right) \right. \\ & \left. + t^{3-4\beta} \left(\frac{1}{3-4\beta} - \frac{2}{3-4\beta} \frac{T}{t} \left(\left(1 + \frac{t}{T}\right)^{2\beta-1} - 1\right)\right) \right] + o(t, T). \end{aligned} \quad (\text{IV.21})$$

Il apparaît que  $T$  représente un seuil critique pour le comportement des incréments. Dans la limite  $T \gg t$ , le premier terme est négligeable, et on retrouve un comportement diffusif. Autrement dit, les effets non-markoviens sont négligeables. Inversement pour  $t \gg T$ , les corrélations entre les pas successifs réalisés entre  $T$  et  $t+T$  sont suffisantes afin de générer un comportement anormal (prédit par le premier terme)<sup>\*28</sup>.

Notons que pour la marche ERW, les incréments ne divergent pas avec  $T$  contrairement à ce qui a été observé pour les processus invariants d'échelle. Ce constat peut être étendu à l'ensemble des marches à renforcement pour lesquelles les sauts en temps discret sur les sites plus proches voisins bornent le comportement des incréments aux temps courts. Ainsi, on a observé *deux comportements distincts des incréments* dans la limite  $T \gg t$ . Afin, de déterminer le FPT en confinement de tels modèles notre approche devra tenir compte de ces différentes possibilités.

On peut émettre une dernière comparaison entre les modèles ERW et Monkey Walk non compacts. Alors que les premiers présentent un exposant de transience donné par  $\psi = d - d_w$  indépendamment du vieillissement, les seconds présentent un exposant  $\psi$  anormal altéré par les effets de vieillissement.

## IV.8 Extension : Détermination du comportement d'échelle du FPT en confinement pour des vieillissements en loi de puissance

Considérons des modèles comme la marche ERW et la marche Monkey walk qui présentent des effets de vieillissement qui altèrent le comportement d'échelle du marcheur dans la limite  $T \gg t$ . On cherche à déterminer le comportement d'échelle de la distribution du FPT dans le cas non compact (le cas compact est identique à celui développée précédemment pour les marches à renforcement et dans [Levernier et al., 2018]).

---

<sup>\*28</sup> Le cas  $\beta = 3/4$  présente un comportement marginalement diffusif que nous ne considérerons pas dans cette thèse.

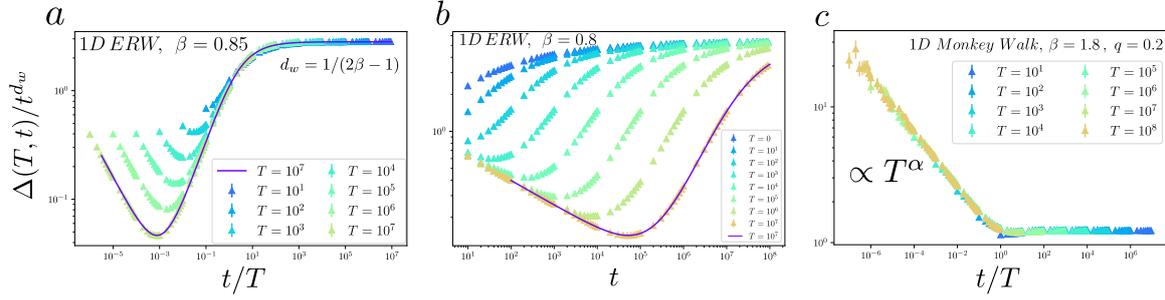


FIG. IV.11 *Propriétés de vieillissement des marches ERW et Monkey walk. a,b* Vieillissement des incréments  $\langle [X(t+T) - X(T)]^2 \rangle = \Delta(T, t)$  de la marche ERW superdiffusive (courbes normalisées par le comportement asymptotique attendu,  $d_w = 1/(2\beta - 1)$ ) et valeurs théoriques obtenues dans (IV.21) (lignes pleines). Chaque courbe est tracée pour une valeur fixée de  $T$ . **b** Notons que le comportement aux temps courts  $t \ll T$  est diffusif, et que les incréments sont asymptotiquement indépendants de  $T$  dans cette limite, ce qui se traduit par un décalage selon l'axe horizontal **a** (tracé pour la variable  $t/T$ ). Inversement pour la marche Monkey walk **c**, les incréments présentent des effets de vieillissement dont le comportement aux temps courts diverge selon la variable  $T$ , comportement similaire aux processus invariants d'échelle.

Comportement aux temps courts indépendants de  $T$  :

Tout d'abord, débutons par l'analyse des modèles présentant un comportement aux temps courts  $D_s t^{-\alpha}$ , et ce, indépendamment de  $T$ . Autrement dit,  $T$  agit comme une échelle de coupure entre deux comportements. L'impact des effets de vieillissement se répercutent sur le comportement de  $N_{typ}$  et sur les temps caractéristiques des excursions  $t_n$  et  $\tau_n$ . Néanmoins, ces deux effets peuvent être étudiés séparément.

Commençons par l'analyse de la géométrie de la trajectoire après un nombre élevé d'excursions. L'équation (IV.13) est propre aux modèles à renforcement. Pour des modèles vieillissants quelconques, le comportement des termes  $p_k$  doit être déterminé spécifiquement pour chacun des modèles. Plus précisément, on propose que l'exposant  $\psi_c$ , associé à  $N_{typ} \sim \left(\frac{R}{a}\right)^{\psi_c}$  soit déterminé par le comportement du marcheur dans la limite  $T \gg t$  en confinement (comportement souvent identique à celui réalisé en espace infini).

À titre d'exemple, considérons le modèle ERW pour  $\beta > 3/4$  en dimension supérieure à 3. Il est clair que le marcheur présente un comportement diffusif dès que celui-ci a réalisé un nombre élevé d'excursions. En conséquence, il apparaît que  $\psi_c = d - d_w$ , et est directement obtenu de l'analyse des incréments en milieu infini.

Ensuite, déterminons le comportement de  $T_{typ}$ . Alors que le comportement de  $N_{typ}$  peut être spécifique à chaque modèle, l'analyse de  $t_n$  et  $\tau_n$  est commune à l'ensemble de ces modèles. On cherche à sommer les temps typiques des excursions en prenant en compte les effets de vieillissement.

Pour cela on introduit  $N$  tel que les  $N$  premières excursions soient données par  $R^2 \sim \tau_n^{2/d_w}$  et que les excursions supérieures à  $N$  soient données par  $R^2 \sim \tau_n^{2/d_w - \alpha}$ . On peut alors réécrire  $t_n$  sous la forme suivante

$$t_n = R^{\frac{d_w}{1-\alpha d_w/2}} \left( \sum_{i=1}^N u_i R^{\frac{-\alpha d_w^2/2}{1-\alpha d_w/2}} + \sum_{i=N+1}^{n-1} g_i \right).$$

Considérons le cas  $\alpha > 0$ , le premier terme est alors négligeable (car  $2/d_w - \alpha > 0$ ). Dès lors, après un nombre élevé d'excursions on obtient

$$t_n \sim n R^{\frac{d_w}{1-\alpha d_w/2}}.$$

Le reste de l'approche reste similaire à celle développée précédemment et on obtient pour  $N_{typ} \sim \left(\frac{R}{a}\right)^{\psi_c}$

$$T_{typ} = \frac{R^{\psi_c + \frac{d_w}{1-\alpha d_w/2}}}{a^{\psi_c}}. \quad (\text{IV.22})$$

Ensuite, pour  $\alpha < 0$  on revient à l'expression de  $t_n$ . Comme  $N$  est fini, on doit comparer  $N_{typ}$  à  $R^{\frac{-\alpha d_w^2/2}{1-\alpha d_w/2}}$ . Pour  $N_{typ} \sim \left(\frac{R}{a}\right)^{\psi_c}$ , si  $\psi_c > \frac{-\alpha d_w^2/2}{1-\alpha d_w/2}$ ,  $t_n$  est toujours dirigé par le second terme et le comportement d'échelle (IV.22) est encore vérifié. Ensuite, pour  $\psi_c < \frac{-\alpha d_w^2/2}{1-\alpha d_w/2}$  le temps passé dans les premières excursions domine la somme infinie et le temps typique est alors indépendant du nombre élevé d'excursions

$$T_{typ} \sim R^{d_w}.$$

Ces résultats peuvent donc être réadaptés pour des géométries d'exploration plus complexes.

#### Comportement aux temps courts en $T^\alpha$ :

Enfin, concluons notre approche en considérant les marches qui présentent des effets de vieillissement aux temps courts  $D_s t^{-\alpha} T^\alpha$ . Ce comportement a été largement étudié dans l'analyse des processus strictement invariants d'échelle [Levernier et al., 2018] pour lesquels le temps caractéristique est donné par

$$T_{typ} = R^{d_w} (R/a)^{\psi(1-\alpha d_w/2)} \quad (\text{IV.23})$$

Pareillement, pour des processus quelconques dont la géométrie de l'exploration est altérée dans la limite  $T \gg t$ , l'exposant  $\psi$  peut être remplacé par son équivalent  $\psi_c$ . Considérons l'exemple des marches Monkey walk qui réalisent une exploration non compacte. Ces marches semblent présenter des propriétés de vieillissement identiques en milieu confiné ou en espace infini. Ensuite, la géométrie de l'exploration ne semble pas être impactée par le confinement. Brièvement, la divergence selon  $T^\alpha$  traduit la présence de grands sauts sur des sites visités longtemps auparavant, mais ces sauts sont aussi présents dans le comportement aux temps longs  $t \gg T$ . On peut donc raisonnablement penser que la valeur de  $\psi$  anormale obtenue  $\psi \neq d - d_w$  dépend déjà des grands sauts y compris en espace confiné.

Part conséquent, on propose que l'exposant de transience reste valide y compris après un grand nombre d'excursions ( $p_k$  reste déterminée par  $\psi$  pour  $k \gg 1$ ), le temps caractéristique (IV.23) reste valide, ce qui est vérifié numériquement figure IV.12. De plus, on propose que l'introduction du confinement n'impacte pas le comportement des incréments aux temps courts. Cette proposition reste valide tant que la taille des grands sauts ne dépasse pas la taille du confinement (autrement dit pour  $T_{typ}^\alpha \ll R^2$ ). On conclut cette partie en résumant les résultats obtenus pour les marches ERW et Monkey walk.

#### Marches ERW diffusives et superdiffusives :

Commençons par considérer les marches éléphants ERW diffusives à toutes les échelles de temps, et qui présentent des effets de vieillissement indépendamment de la dimension ( $\beta < 3/4$ ). Pour les explorations compactes ( $d = 1$ ), on retrouve un exposant de persistance anormal ( $\theta = 3/2 - 2\beta$ ) qui contrôle le MFPT en confinement  $\langle T \rangle = R^{d_w(1-\theta)} r^{d_w\theta}$  (pour  $\beta \geq 1/4$ ), généralement non linéaire selon  $R$ . La distribution de premier passage est donnée par (IV.11) avec  $T_{typ} = R^{d_w}$ .

En dimension 3, pour  $\beta < 3/4$ , nous avons vu que les effets de vieillissement n'induisaient pas une modification de l'exposant de transience (chapitre 2). Ensuite, après de multiples excursions, le marcheur redevient équivalent à une simple marche aléatoire symétrique. En effet, dans la limite  $T \gg R^{d_w}$ , les écarts entre les nombres de pas effectués dans les différentes directions sont bornés par  $R^{d_w} \ll T$ . Ainsi, les effets non markoviens vont devenir négligeables, et on retrouve alors un comportement diffusif identique à celui vérifié en milieu infini pour tout paramètre  $\beta$ . En conséquence, on s'attend à ce que la distribution du FPT en confinement reste dirigée par (IV.17) avec  $T_{typ} = R^{d_w+\psi}/a^\psi$ .

Ensuite, considérons les marches ERW superdiffusives en dimension 3 ( $3/4 < \beta$ ) pour lesquelles nous avons observé un comportement diffusif aux temps courts ( $T \gg t$ ) (IV.21), y compris en confinement. En dimension 1, exceptionnellement les explorations ne sont pas compactes et sortent du cadre de notre étude<sup>\*29</sup>. En dimension 3, on propose que l'exposant de transience en milieu infini soit donné par  $\psi = d - d_w$ , ce qui est vérifié numériquement<sup>\*30</sup>. En revanche, la géométrie des explorations est modifiée dans la limite  $T \gg t$ , avec un exposant  $\psi_c = 1$  (puisque le marcheur est de nouveau diffusif). Dès lors, en reprenant (IV.22), la distribution du FPT en confinement est caractérisée par  $T_{typ} = \frac{R^{\psi_c + \frac{d_w}{1 - \alpha d_w/2}}}{a^{\psi_c}} = R^3/a$ , avec  $\psi_c = 1$  et  $d_w/(1 - \alpha d_w/2) = 2$ . Cependant le préfacteur de la distribution du FPT en confinement (IV.17) reste déterminé par  $\psi$ .

---

<sup>\*29</sup> Le marcheur ERW pour  $\beta > 1/2$  est fortement biaisé par le choix de son premier pas résultant en une position moyenne divergente pour un choix de premier pas non symétrique [Schütz et al., 2004]. Pour le cas superdiffusif, le marcheur ne trouve alors plus la cible avec une probabilité 1. Néanmoins, ce comportement reste sensiblement différent des explorations non compactes décrites auparavant.

<sup>\*30</sup> En suivant un raisonnement similaire à celui détaillé pour la marche ERW diffusives dans le chapitre 2, on propose que le marcheur trouve la cible pour des temps caractéristiques donnés par  $r^{d_w}$ . Ainsi, malgré l'apparition d'effets de vieillissement, on propose que ceux-ci n'influent pas sur la probabilité asymptotique de trouver la cible en espace infini.

### Marches monkey walk :

Pour finir, considérons les marches à renforcement monkey walk qui présentent un comportement diffusif stationnaire pour  $\beta \leq 2$ , et un comportement sous-diffusif ( $2 > \beta > 1$ ), caractérisé par des effets de vieillissement similaires aux processus strictement invariants d'échelle ((IV.4)).

Pour les modèles diffusifs sans vieillissement, on obtient une exploration compacte  $\theta = 1/2$  (chapitre 2), le MFPT est alors linéaire selon  $R$  et la distribution en confinement est donnée par (IV.11) avec  $T_{typ} = R^{d_w}$ . En dimension 3, les incréments restent asymptotiquement stationnaires, et on retrouve une exploration non compacte en milieu infini, caractérisée par  $\psi = d - d_w$ , ce qui induit un MFPT linéaire selon le volume et la distribution en confinement vérifie (IV.17) avec  $T_{typ} = R^{d_w + \psi} / a^\psi$  (comportement valide pour  $d \leq 3$ ).

Ensuite, pour les marcheurs sous-diffusifs tels que  $d_w = 2/(\beta - 1) > d$ , les excursions sont compactes, caractérisées par un exposant de persistance  $\theta$  anormal, dépendant de la dimension du réseau. Le raisonnement précédent s'applique et on obtient  $\langle T \rangle = R^{d_w(1-\theta)} r^{d_w \theta}$  et (IV.11) avec  $T_{typ} = R^{d_w}$ , indépendamment de  $\alpha$ . Enfin, pour des excursions transientes  $d_w = 2/(\beta - 1) < d$ , un exposant  $\psi \neq d - d_w$  anormal est obtenu en espace infini, témoin des effets de vieillissement dépendant de  $T$  aux temps courts. De plus, la géométrie des explorations semble rester inchangée en confinement. Dès lors, le comportement du FPT en confinement est identique à celui obtenu pour les processus strictement invariants d'échelle (IV.11) avec  $T_{typ} = \frac{R^{d_w + \psi(1 - \alpha d_w/2)}}{a^{(1 - \alpha d_w/2)}} = R^3/a$ .

Enfin, concluons cette étude en considérant les marches Monkey walk pour des conditions initiales vieilles en dimension 1. Comme attendu, on retrouve une dépendance forte pour l'exposant de persistance selon la condition initiale. Pour les marches ERW avec des conditions initiales vieilles, on retrouve un comportement diffusif et un comportement d'échelle de la distribution du FPT en confinement (IV.18) et (IV.19) déterminé par  $\psi_c = 1$ ,  $\theta_c = 1/2$  et  $d_{w,c} = 2$ .

## **IV.9 Extension : Distribution du FPT en confinement pour les explorations marginalement compactes**

Il reste enfin à traiter le cas des explorations marginalement compactes qui surviennent pour les marches à renforcement en dimension 2. On cherchera à développer une méthode analogue à celle détaillée pour les processus non compacts, en prenant en compte les caractéristiques propres aux explorations marginales qui sont partagées avec les explorations compactes. Cependant, les propriétés de vieillissement et du FPT impliquent des puissances logarithmiques ce qui rend le comportement d'échelle du FPT dépendant du processus (et de ces paramètres microscopiques), mais surtout difficile à mesurer avec précision. Comme cela implique des mesures numériques de puissances de termes logarithmiques, couplées à des temps de relaxation très longs, les résultats restent approximatifs. Néanmoins, on propose que notre approche s'applique toujours et on examinera explicitement deux exemples des marches SATW et TSAW.

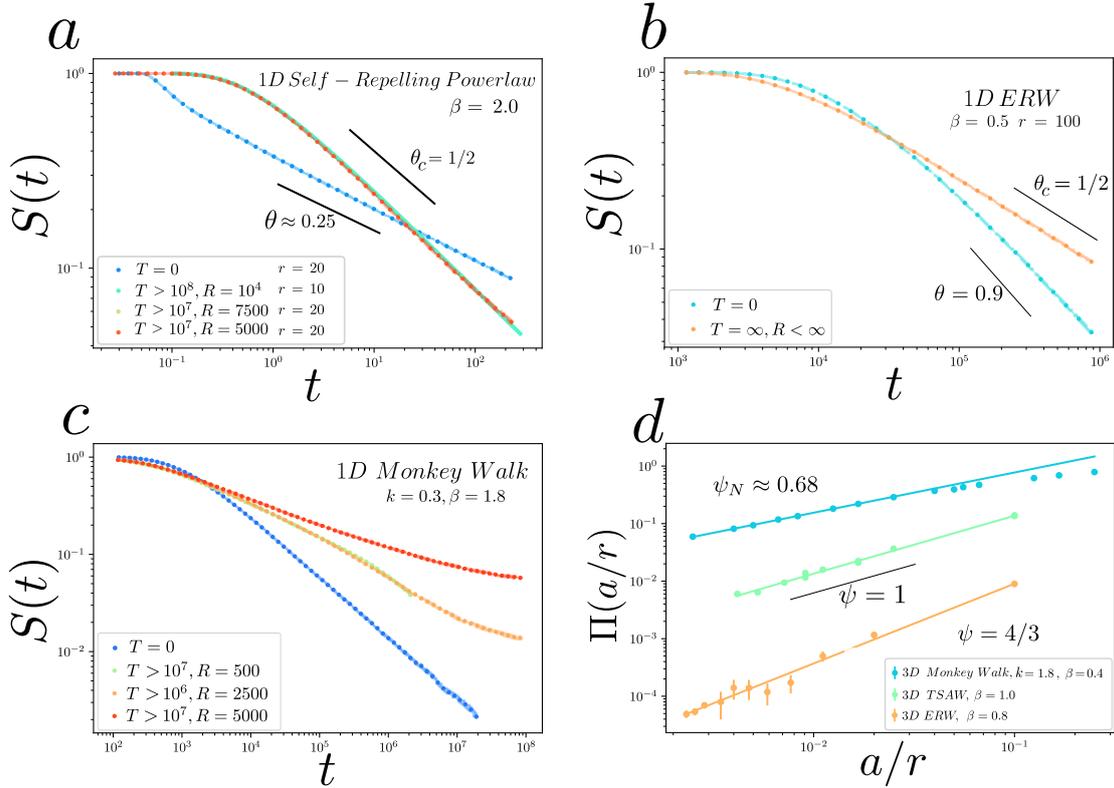


FIG. IV.12 Propriétés de premier passage en espace infini et en confinement des marches ERW, Monkey Walk et répulsives en loi de puissance. En espace infini pour les explorations compactes, les mesures de l'exposant de persistance  $\theta$ , et  $\theta_c$ , son équivalent en confinement, sont données pour la marche répulsive en loi de puissance 1D **a**; la marche ERW diffusive 1D **b**; et pour la marche Monkey Walk sous-diffusive en 1D **c**. **a** Pour la marche répulsive en loi de puissance, on observe un exposant non trivial  $\theta \approx 0.25$ , signe de la présence d'effets de vieillissement. Ce comportement est partagé par le modèle ERW **b** pour lequel  $\theta = 3/2 - 2\beta$ . Toutefois, pour des conditions initiales vieilles, **a** et **b**, on observe un exposant de persistance  $\theta = 1/2$  valeur commune aux modèles ERW, SATW et SESRW. **c** Pour la marche Monkey walk sous-diffusive, on observe des valeurs non triviales distinctes en espace infini et en confinement. Ensuite, pour une exploration non compacte en espace infini, la probabilité de survie tend vers une constante non nulle qui dépend de  $r$ . On peut alors mesurer l'exposant transience associé, **d**, pour les marches super diffusives ERW et Monkey-walk sous-diffusives. Les simulations numériques (symboles) et leur fit en loi de puissance associé (lignes continues) soulignent le comportement non trivial ( $\psi \neq 1$ ) de cet exposant pour ces deux modèles. La notation  $\psi_N$  signifie que la mesure est seulement numérique pour la marche Monkey walk. En revanche, pour la marche ERW on propose que  $\psi = d - d_w$ . L'exemple de la marche TSAW est ajouté à titre de comparaison (les détails des simulations numériques peuvent être retrouvés en annexe H.1).

### IV.9.1 Approche générale

Spécifiquement aux explorations marginalement compactes, celles-ci ont une probabilité, notée  $P(a, r) = 1$ , de toucher la cible en espace infini pour tout  $a > 0$ . Dès lors, contrairement aux explorations non compactes, le poids des trajectoires directes domine celui des trajectoires indirectes. Cependant, si le marcheur s'est éloigné à une distance  $O(R)$  de la cible sans la trouver, il aura une probabilité de toucher les bords avant la cible qui tend vers 1, y compris pour  $R \rightarrow \infty$ . Par conséquent, de manière analogue aux explorations non compactes, le marcheur va réaliser un nombre élevé d'excursions avant de trouver la cible faisant émerger un temps typique  $T_{typ}$  qui gouverne le reste de la distribution de premier passage en confinement.

Afin de mieux saisir cette dernière observation, explicitons le cas du mouvement brownien en dimension 2. En espace infini, la probabilité de survie décroît logarithmiquement  $S(t) \sim 1/\log(t)$ . De plus, la probabilité de toucher la cible avant une sphère de rayon  $R$  en partant à une distance  $r$  d'une cible de taille  $a$  se comporte comme  $P(a, r, R) = \ln(R/r)/\ln(R/a) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 1$  ([Redner, 2001]).

Afin de déterminer la distribution du FPT en confinement, on peut reprendre le raisonnement précédent en utilisant les comportements suivants pour  $p \underset{R \gg a}{\sim} \frac{1}{\ln(R/a)}$  et  $p_0 \underset{R \gg a}{\sim} \frac{\ln(R/r)}{\ln(R/a)}$ . Ce raisonnement conduit à la distribution limite suivante avec  $T_{typ} = R^{d_w}$

$$G(\eta, a, r, R) = F(t, a, r, R)R^{d_w} = h(\eta) \frac{\ln\left(\frac{r}{a}\right)}{\ln\left(\frac{R}{a}\right)} + \delta(\eta) \frac{\ln\left(\frac{R}{r}\right)}{\ln\left(\frac{R}{a}\right)}.$$

Notons que le premier terme présente un poids négligeable devant celui des excursions directes dans la limite des grands volumes. Cependant, contrairement au reste des excursions non compactes au delà de  $T_{typ}$  qui présentait une décroissance exponentielle selon  $n$ , le poids des trajectoires indirectes des explorations marginales décroît selon une échelle logarithmique. Cette propriété permet au premier terme d'imposer l'ordre dominant à tous les moments de la distribution de premier passage en confinement, y compris dans la limite des grands volumes.

Par la suite, on cherchera à étendre ce résultat pour les marches à renforcement. Tout d'abord, on doit déterminer les propriétés de transport et de vieillissement de ces modèles que l'on va résumer succinctement.

### IV.9.2 Comportement des incréments et effet de vieillissement

#### a) Comportement des incréments en espace infini

Il est clair que les modèles SATW répulsifs et en loi de puissance réalisent un comportement diffusif en dimension 2 (puisque diffusif en dimension 1). L'analyse numérique des incréments tend à souligner que ces processus présentent des effets de vieillissement diffusifs à toutes les échelles de temps, dont le préfacteur asymptotique aux temps courts ( $T \gg t$ ),  $D_s$ , est atteint à des échelles de temps inobservables en pratique.

Ensuite, pour le modèle TSAW, il est connu que les effets de renforcement génèrent une exploration marginalement diffusive caractérisée par  $\langle X^2(t) \rangle \sim t^{2/d_w} \ln(t)^\alpha$ , où  $\alpha \approx 0.5$  a été conjecturé et vérifié numériquement [Grassberger, 2017b]. Plusieurs remarques ont été émises concernant les effets de vieillissement. Elles soulignent que la relaxation vers un état stationnaire en milieu infini est particulièrement lente. En pratique, les effets de vieillissement sont donc difficilement discernables de cette convergence lente<sup>\*31</sup>.

Enfin, concluons notre analyse des propriétés de transport en considérant les marches SESRW pour lesquelles on observe un comportement marginalement diffusif  $\forall k > 0$ ,  $\langle X^2(t) \rangle \sim t^{2/d_w} \ln(t)^{\alpha_k}$  où  $\alpha_k > 0$ . D'autre part, on note la présence d'effets de vieillissement. On peut supposer que ceux-ci conduisent à un comportement diffusif dans la limite  $T \gg t$  (en pratique il est difficile de s'en assurer numériquement).

### b) Comportement des incréments en espace confiné

On souhaite émettre l'hypothèse que les incréments présentent des propriétés identiques en confinement y compris dans le régime  $T \gtrsim R^{d_w}, t \ll R^{d_w}$ . Malheureusement, la convergence extrêmement lente des incréments rend de telles comparaisons particulièrement difficiles.

Pour les marches SATW et en loi de puissance, le comportement diffusif attendu dans la limite des temps longs  $T \gg t$  est donné par  $D_s = 1/2$ . On observe un comportement diffusif à toutes les échelles de temps avec une limite asymptotique du coefficient de diffusion qui reste connue ( $D_s = 1/2^{*32}$ ). Ensuite, l'analyse numérique des incréments de la marche TSAW tend à souligner que ceux-ci semblent inchangés en confinement pour le régime  $T \gtrsim R^{d_w}, t \ll R^{d_w}$ . Enfin, concluons notre analyse des propriétés de transport en considérant les marches SESRW pour lesquelles on s'attend à un comportement diffusif  $\forall k > 0$  dans le régime  $T \gg R^{d_w}, t \ll R^{d_w}$ .

### IV.9.3 Propriétés de premier passage en milieu infini

On se tourne vers l'analyse des propriétés de premier passage en milieu infini. De manière similaire au cas de la marche ERW diffusive en dimension 2 (chapitre 2), on remarque que la dépendance logarithmique de la probabilité de ne pas trouver la cible avant les bords, notée  $P_c(a, r, R)$ , n'est plus linéaire dans la majorité des cas

$$P_c(a, r, R) \approx \frac{\ln(R/a)^\nu - \ln(R/r)^\nu}{\ln(R/a)^\nu}.$$

L'exposant  $\nu$  est mesuré numériquement et dépend du processus étudié<sup>\*33</sup>. Il atteste de l'importance des effets de vieillissement sur la statistique des trajectoires directes. À notre connaissance, l'existence de dépendance non triviale en puissances logarithmiques de la probabilité de survie n'a jamais été relevée dans la littérature.

<sup>\*31</sup> On peut supposer que ce comportement est aussi partagé par les marches super exponentielles pour lesquelles  $\alpha > 0.5$ .

<sup>\*32</sup> Reste donc à supposer que cette limite asymptotique est identique en espace infini.

<sup>\*33</sup> Une dépendance selon les paramètres microscopiques des différents modèles est attendue.

#### IV.9.4 Propriétés de premier passage en confinement

Ensuite, tournons-nous vers l'analyse de la géométrie des excursions et du comportement d'échelle des temps typiques associés en confinement. Contrairement aux explorations non compactes, lorsque le marcheur a déjà effectué un nombre important d'excursions et la plupart des sites proches de la cible ont déjà été visités (le poids des excursions directes tend vers 1 ce qui souligne ce constat). Relevons par ailleurs que lorsque le marcheur atteint les bords avant la cible, la répartition du territoire visité reste très hétérogène puisque une fraction négligeable de sites ( $R^2/\ln(R)$  par exemple pour une marche de pólya ) a été visitée alors que l'environnement autour de la cible a quant à lui été majoritairement visité<sup>\*34</sup>.

Cette observation a un impact majeur sur la dépendance des probabilités  $p_k$  selon  $R$  et  $a$ , puisque l'argument énoncé pour (IV.13) n'est plus valide. En effet, si la cible n'a pas été atteinte avant que le marcheur n'ait touché les bords du volume, celle-ci se retrouve maintenant dans un environnement inhabituel qui n'est pas caractérisé par les comportements étudiés précédemment. De manière identique aux explorations non compactes on propose de développer un approche pour une cible de taille fixée  $a$ .

##### a) Exemple des marches SATW répulsives

Commençons l'analyse des marches SATW répulsives. Comme attendu, la dépendance selon  $R$  est non triviale et l'analyse numérique des  $p_k$  suggère que

$$p_k \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \left( \frac{1}{\log(R/a)} \right)^\delta [1 + f(a, R, k)], \quad (\text{IV.24})$$

où  $\delta \approx 1.3$ , pour  $\beta = 1.5$  et  $f$  est bornée. Cette dernière observation est cruciale car le temps typique est alors directement donné par  $N_{typ} \sim \log(\frac{R}{a})^\delta$ . On peut justifier ce comportement en remarquant que l'énergie déposée sur les sites ne dépend pas du nombre de visites. Ainsi après un nombre élevé d'excursions, il paraît naturel que  $f$  reste bornée.

On peut alors reprendre l'ensemble de l'approche développée dans le cas non compact conduisant à  $T_{typ} = \log(\frac{R}{a})^\delta R^{d_w}$ . Notons que pour la marche SATW ( $\delta, \nu$ ) semblent dépendre du paramètre microscopique  $\beta$  rendant l'analyse de ce modèle plus complexe. Relevons que ce comportement est aussi vérifié pour les marches ERW, pour lesquelles on trouve logiquement  $\delta = 1$ <sup>\*35</sup>.

On obtient alors une distribution de premier passage dans la limite des grands volumes donnée par

$$G(\eta, R, r, a) = F(t, R, r, a) T_{typ} = \left( 1 - \frac{\ln(r/a)^\nu}{\ln(R/a)^\nu} \right) \delta(\eta) + \frac{\ln(r/a)^\nu}{\ln(R/a)^\nu} h(\eta),$$

avec  $T_{typ} = R^{d_w} \ln(R/a)^\delta$ .

<sup>\*34</sup> On ne parle pas ici simplement des sites plus proches voisins de la cible, mais de l'environnement autour de celle-ci sur une distance typique de taille  $r$ .

<sup>\*35</sup> La cible est alors identique aux sites précédemment visités.

### b) Exemple de la marche TSAW

Ensuite, considérons les marches TSAW marginalement diffusives. La dépendance selon  $R$  est non triviale, et l'analyse numérique des  $p_k$  suggère que

$$p_k \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \left( \frac{1}{\log(R/a)} \right)^\delta \left[ A_0 + B_0 \left( \frac{k}{\log(R/a)^\nu} \right)^\eta \right]. \quad (\text{IV.25})$$

Notons que ce comportement n'est plus valide dans la limite  $n \gg N_{typ}$  mais qu'il permet tout de même de déduire  $N_{typ}$ . Pour cela, on compare les deux termes afin d'en déduire, après sommation des  $p_k$ , la dépendance la plus faible selon  $R$ . Celle-ci dirigera la décroissance de  $S(N)$  avant que le second terme ne puisse avoir un impact sur le comportement des excursions. Dès lors, pour  $(\eta\nu + \delta)/(1 + \eta) < \delta$  on obtient  $N_{typ} \sim O(\log(R/a)^{(\eta\nu + \delta)/(1 + \eta)})$ . Inversement, pour  $(\eta\nu + \delta)/(1 + \eta) > \delta$ , le premier terme a une dépendance plus faible selon  $R$  et  $N_{typ} \sim O(\log(R/a)^\delta)$ .

Pour les marches TSAW l'analyse numérique suggère que  $\eta \approx 1.2$ ,  $\nu \approx 0.6$  et  $\delta \approx 1.5$  signifiant que  $N_{typ} \approx O(\log(R/a)^\gamma)$  ( $\gamma \approx 1$ ). Ce comportement complexe implique de multiples mesures d'exposants de termes logarithmiques et reste difficile à caractériser avec précision. En outre, les effets de renforcement augmentant avec le nombre de visites, on comprend qu'il apparaisse une dépendance complexe selon  $k$  (puisque un grand nombre de sites ont déjà été visités contrairement à la cible). Enfin, considérons l'influence du comportement marginalement diffusif sur le comportement d'échelle de  $t_n$ . On propose que dans la limite des grands volumes  $\tau_n$  et  $t_n$  soient donnés par

$$\langle [X(t_n + \tau_n) - X(t_n)]^2 \rangle \sim R^2 \ln(R)^\alpha.$$

Pour la marche TSAW, le comportement des incréments, marginalement diffusifs à toutes les échelles de temps, permet de dégager le comportement d'échelle suivant  $t_n \sim nR^{d_w} \log(R)^{-\alpha}$  (pour  $n \gg 1$  et  $R \gg a_0$ ). On obtient alors une distribution de premier passage dans la limite des grands volumes donnée par

$$G(\eta, R, r, a) = F(t, R, r, a) T_{typ} = \left( 1 - \frac{\ln(r/a)^\nu}{\ln(R/a)^\nu} \right) \delta(\eta) + \frac{\ln(r/a)^\nu}{\ln(R/a)^\nu} h(\eta),$$

$$\text{avec } T_{typ} = R^{d_w} \ln(R/a)^{\gamma - \alpha}$$

### c) Extensions pour les autres modèles répulsifs

Pour finir, énonçons brièvement les comportements observés pour les autres modèles dont on peut retrouver en annexe les différentes mesures de  $p_k$  (annexe G.5). Considérons le cas intermédiaire des marches répulsives en loi de puissance qui présentent un comportement diffusif mais dont les effets de renforcement augmentent avec le nombre de visites. À l'instar de la marche TSAW, on retrouve un comportement  $p_k$  qui présente une dépendance claire selon  $k$ , et un comportement localement divergeant pour  $k \gg 1$ .

Par ailleurs, notons que la marche SESRW semble vérifier un comportement proche de celui des marches TSAW. Néanmoins, il est difficile de prédire les différents exposants pour tous les paramètres  $(k, \beta)$ .

Ensuite, l'apparition d'un comportement diffusif aux temps courts  $R \gg T \gg t$  devrait imposer une dépendance linéaire en  $t_n \sim nR^{d_w}$  mais cette hypothèse est inobservable en pratique puisque cela demande de définir des volumes confinants gigantesques.

#### d) Conclusion du cas marginal

En conclusion, on observe des comportements anormaux complexes à prédire pour les explorations marginalement compactes puisque le temps typique qui dirige la statistique du FPT décrit des échelles pour lesquelles le marcheur a visité une partie importante des sites du volume tout en ne l'ayant pas entièrement couvert. Cette échelle de temps est difficile à caractériser pour les marches à renforcement. Toutefois, notre prédiction du comportement du FPT dans la limite des grands volumes reste valide mais elle dépend de l'analyse spécifique de chaque modèle.

Émettons quelques observations afin de compléter ce constat :

- Tout d'abord, de manière analogue aux explorations compactes et non compactes, on peut énoncer un résultat similaire pour des espaces initialement visités. On retrouve alors dans la limite des temps initiaux élevés  $T \gg R^{d_w*36}$ , un comportement majoritairement diffusif pour toutes les marches SATW, sous-exponentielles, répulsives en loi de puissance et ERW. Ensuite, on suggère que pour la marche TSAW le comportement du FPT reste inchangé.
- Ensuite, notons qu'il est possible que le premier terme domine la contribution du temps typique. Dans cette situation précise, les trajectoires directes peuvent diriger le comportement d'échelle de certains moments de la distribution. Un critère déterminé en annexe G.4 traite de cette possibilité pour des exposants  $\delta$  et  $\nu$  quelconques.
- Enfin, notons que les effets les plus complexes surviennent pour les modèles dont les effets de renforcement divergent avec le nombre de visites.
- Pour finir, on rappelle que notre analyse implique de nombreux termes logarithmiques, pour lesquels il est difficile de mesurer avec précision les exposants, et de ne pas les confondre avec des effets associés à la convergence lente de ces observables. Dès lors, notre approche ne permet pas de prédire avec exactitude la statistique du FPT mais elle permet de mieux saisir l'importance des effets de vieillissement pour les explorations marginalement compactes.

---

\*36 Notons que la limite des temps initiaux doit être pris bien supérieure à  $R^{d_w}$ .

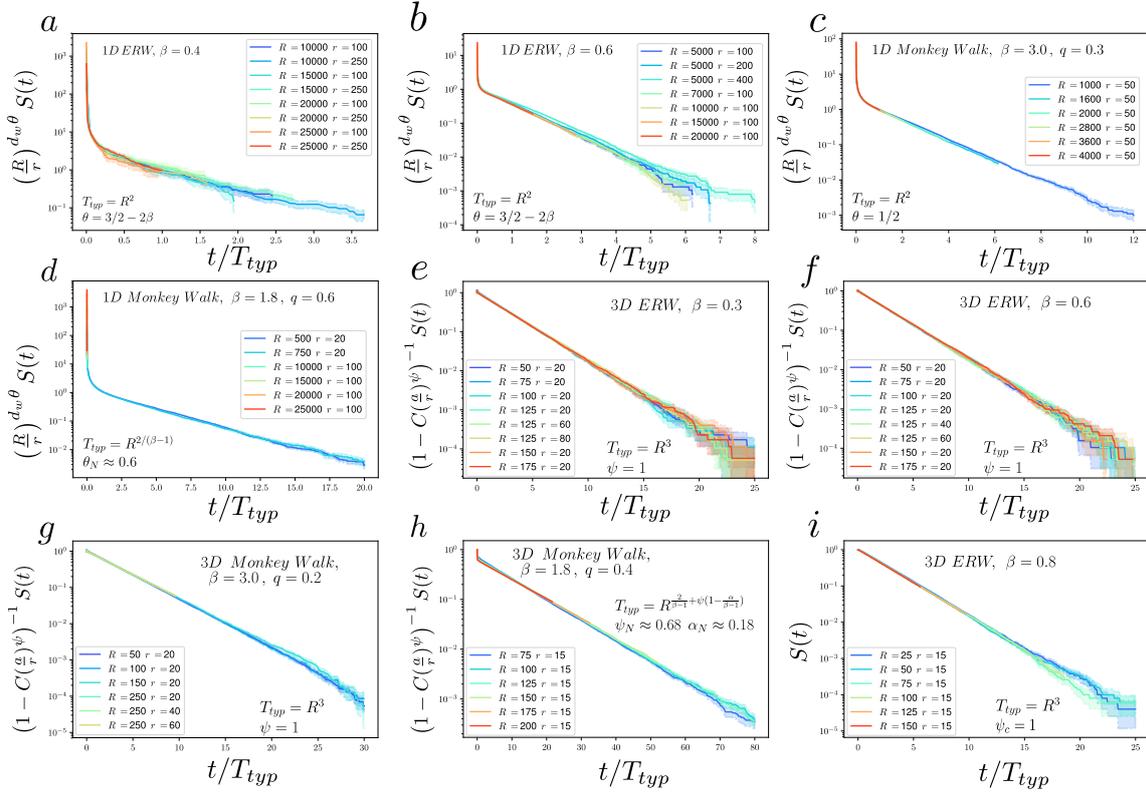


FIG. IV.13 Comportement d'échelle de la distribution de premier passage selon les paramètres géométriques pour les modèles ERW et Monkey Walk.  $S(t)$  désigne la probabilité de survie du marcheur aléatoire dont le comportement d'échelle selon les paramètres géométriques est déduit de (IV.9) et (IV.16) pour des explorations compactes et non compactes respectivement. La convergence des simulations numériques après leur normalisation respective capture la dépendance de la distribution du FPT selon les paramètres géométriques. Les simulations sont réalisées dans des boîtes 1D, 3D de taille  $R$ , avec des conditions aux limites réfléchissantes à  $a$  fixé. Cas compacts : **a** 1D ERW avec  $\beta = 0.3$ ; **b** 1D ERW avec  $\beta = 0.6$ . Notons que l'approche reste valide y compris pour l'apparition d'un biais spontané pour  $\beta > 0.5$  (décrit dans le chapitre 2). 1D Monkey walk avec  $\beta = 3.0$  **c** pour laquelle l'exposant de persistance est égal à  $1/2$  signature d'un comportement des incréments asymptotiquement stationnaire (chapitre 2, pour  $\beta \geq 2.0$ ). Inversement pour  $\beta = 1.8$  **d**), la marche Monkey walk est sous-diffusive et exprime des effets de vieillissement liés à un exposant de persistance anormal mesuré numériquement (ici  $\theta_N \approx 0.6$ ), Les notations  $\theta_N$ ,  $\psi_N$  signifient que les mesures sont seulement numériques. Cas non compacts : **e** 3D ERW avec  $\beta = 0.3$  et **f**  $\beta = 0.6$ . **g** 3D diffusive Monkey walk avec  $\beta = 3.0$ . Pour la marche Monkey walk avec  $\beta = 3.0$ , de manière analogue au cas compact, puisque les incréments sont asymptotiquement indépendants de  $T$ , cela implique un exposant de transience  $\psi = d - d_w = 1$ . Inversement, pour la marche Monkey walk sous-diffusive telle que  $d_w = 2/(\beta - 1) < d$ , un exposant  $\psi \neq d - d_w$  anormal est mesuré numériquement, conséquence de la présence d'effets de vieillissement caractérisés par (IV.4) (où  $\alpha_N$  est mesuré numériquement). Enfin, pour les marches ERW superdiffusives **i**, l'exposant de transience en confinement, après un grand nombre d'excursions, est donné par  $\psi_c = 1$ .

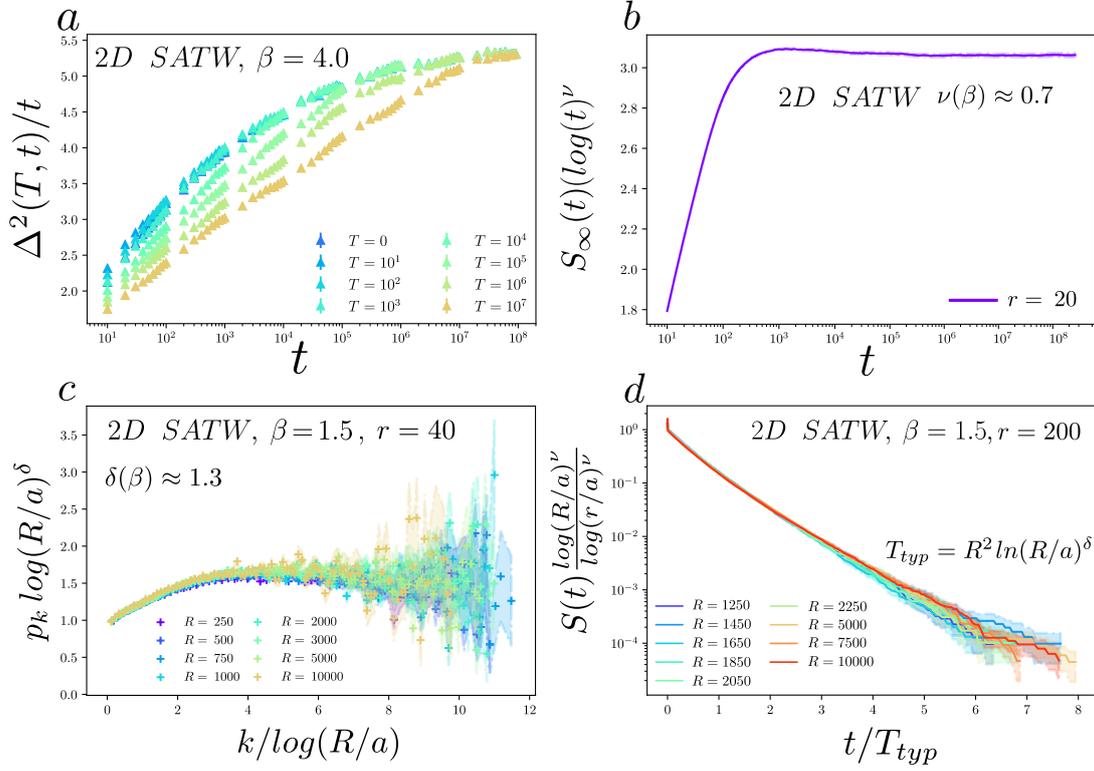


FIG. IV.14 Propriétés de vieillissement et de premier passage de la marche SATW répulsive en dimension 2. **a** Vieillissement des incréments  $\langle [X(t+T) - X(T)]^2 \rangle = \Delta(T, t)$  (normalisés par l'échelle diffusive attendue aux temps longs). Chaque courbe correspond à une valeur fixée de  $T$ . À noter que le régime asymptotique pour  $T \gg 1$  n'a pas été atteint. **b** Probabilité de survie en fonction du temps (échelle logarithmique) en espace infini (normalisée par le comportement logarithmique mesuré), on observe une puissance non triviale de la décroissance logarithmique de la probabilité de survie affiliée aux effets de vieillissement. **c** Comportement d'échelle de  $p_k$ , définie comme la probabilité de trouver la cible lors de la  $k$ ème excursion. Pour étudier la dépendance de  $k$ ,  $p_k$  est normalisée selon (IV.24). **d** Comportement d'échelle de la distribution du FPT en confinement selon les paramètres géométriques. La convergence des simulations numériques de  $S(t)$ , après normalisation, capture la dépendance de la distribution du FPT selon ces différents paramètres. Les simulations sont réalisées dans des boîtes 2D de taille  $R$  avec des conditions aux limites réfléchissantes (les détails des simulations numériques peuvent être retrouvés en annexe H.1).

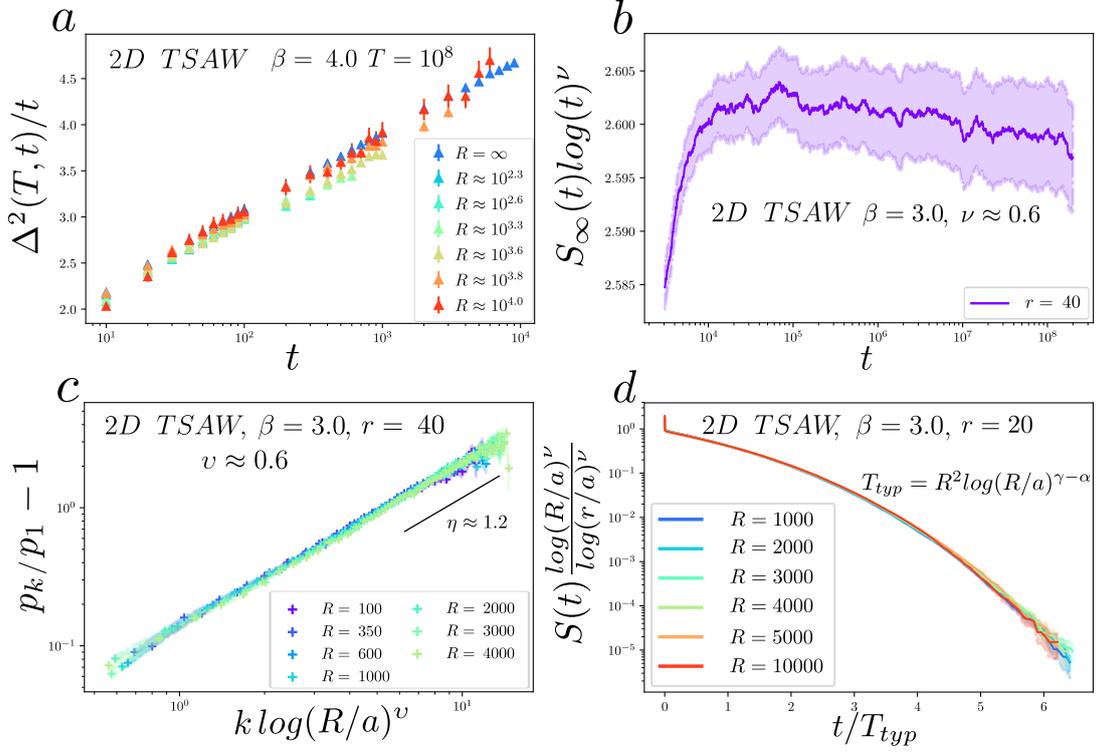


FIG. IV.15 Propriétés de vieillissement et de premier passage de la marche TSAW répulsive en dimension 2. **a** Vieillissement des incréments  $\langle [X(t+T) - X(T)]^2 \rangle = \Delta(T, t)$  (normalisés par l'échelle diffusive attendue aux temps longs) en espace confiné et infini, on observe le comportement marginal réalisé par la marche TSAW qui est caractérisé par  $\ln(t)^\alpha$  avec  $\alpha \approx 0.5$  [Grassberger, 2017b]. Chaque courbe correspond à une valeur fixée de  $T$ . À noter que la dynamique semble être la même en espace infini et en confinement dans les deux régimes  $t, T \ll R^{d_w}$  et  $T \gtrsim R^{d_w}, t \ll R^{d_w}$ . **b** Probabilité de survie en fonction du temps (échelle logarithmique) en espace infini (normalisée par le comportement logarithmique mesuré), on observe une puissance non triviale de la décroissance logarithmique de la probabilité de survie, affiliée aux effets de vieillissement. **c** Comportement d'échelle de  $p_k$ , définie comme la probabilité de trouver la cible lors de la  $k$ ème excursion. Pour étudier la dépendance de  $p_k$  selon  $k$ ,  $p_k/p_1 - 1$  est exprimée selon la variable normalisée du second terme donnée par (IV.25). Comme attendu on observe une loi de puissance caractérisée par l'exposant  $\eta$  introduit précédemment dans (IV.25). **d** Comportement d'échelle de la distribution du FPT en confinement selon les paramètres géométriques. La convergence des simulations numériques de  $S(t)$ ; après normalisation; capture la dépendance de la distribution du FPT selon ces différents paramètres. Les simulations sont réalisées dans des boîtes 2D de taille  $R$  avec des conditions aux bords réfléchissantes (les détails des simulations numériques peuvent être retrouvés en annexe H.1).



# V – Propriétés de premier passage de processus issus d’une équation GLE

## V.1 Introduction

Les chapitres précédents ont permis d’explorer les propriétés de premier passage de processus à renforcement, définis comme des équivalents dynamiques des marches auto-évitantes (SAW). Toutefois, nous n’avons pas encore abordé l’étude de la dynamique de longues chaînes polymériques pour lesquelles les effets non markoviens sont induits par les corrélations entre les différents monomères qui les constituent. Prenons l’exemple du mouvement brownien factionnaire (FBM), modèle affilié à l’étude des polymères et qui présente des effets de mémoire importants. Pour celui-ci, les propriétés de la trajectoire future du marcheur,  $x(\tau > 0)$ , dépendent explicitement de l’ensemble des positions ultérieures ( $x(t_0) < 0$ ) [Gripenberg et al., 1996; Yaglom, 1955]. Ainsi, un tel processus dépend aussi de l’historique complet de la trajectoire. En particulier, pour  $H < 1/2$  le FBM a tendance à rester aux positions antérieurement occupées, inversement pour  $H > 1/2$  le comportement opposé est observé. Néanmoins, notons que ce chapitre est, de par la nature du sujet abordé, indépendant des exemples de marches à renforcement étudiés précédemment.

Les questions de premier passage sont omniprésentes dans l’étude des chaînes polymériques, que ce soit en chimie au travers des différents temps de réaction (temps de cyclisation [Bonnet et al., 1998; Guérin et al., 2012; Wallace et al., 2001] ou de relaxation dans un amas [Milner et al., 1998]), ou en biologie (formation d’épingles d’ARN [Wang, 2004] ou de boucles d’ADN [Allemand et al., 2006] par exemple). La dynamique d’un monomère peut être généralement décrite par une équation de Langevin généralisée (GLE) y compris dans la limite où la taille de la chaîne tend vers l’infini. Cette équation a été largement étudiée dans la littérature [Burov et al., 2008; Eab et al., 2010; Fa, 2008; Lutz, 2001; Panja, 2010; Pottier, 2003; Sandev et al., 2014; Zwanzig, 1973, 2001], et on en résumera les principales propriétés connues. Plus généralement, cette équation apparaît naturellement dans le cas de systèmes possédant de multiples degrés de liberté internes. En effet, la dynamique d’un de ces degrés, potentiellement impliqué dans une réaction d’intérêt, est alors souvent non markovienne et peut présenter un régime sous-diffusif [Jeon et al., 2010; Kou et al., 2004].

Dès lors, on cherchera à déterminer les propriétés de premier passage d’un marcheur suivant une équation GLE en présence d’un piège harmonique.

Cette dernière question est d'une importance cruciale car elle peut avoir des conséquences directes sur le comportement de protéines ou de longues chaînes artificielles dans des pièges comparables (piège optique, polymère attaché à une extrémité ou confiné dans un volume par exemple). D'autre part, dans le cas où la cible est atteinte au prix d'un coût énergétique, les propriétés du FPT se rapprochent de la description de taux de franchissement de barrières énergétiques, en particulier des généralisations non markoviennes de modèle d'évasion de Kramers [Cao et al., 2015 ; Min et al., 2006], qui peuvent être observées pour des molécules complexes évoluant dans des bains corrélés [Kou et al., 2004 ; Mei et al., 2019 ; Min et al., 2005].

Jusqu'à présent, la majeure partie des travaux théoriques concernant l'évènement de premier passage s'appuie sur des approximations markoviennes ou sur des solutions théoriques de l'équation de Fokker-Planck généralisée associée en présence d'un point absorbant [Goychuk et al., 2007 ; Wilemski et al., 1974a,b]. Cependant, ces dernières approches ne fournissent pas une description des évènements de premier passage d'un polymère, pour lequel les effets non markoviens altèrent profondément le mouvement des monomères. En particulier, nous verrons que ces approches ne parviennent pas à capturer quantitativement les propriétés de premier passage pour des modèles dont les temps de corrélation sont infinis et qui présentent des effets de mémoire et de vieillissement forts. L'application directe de telles méthodes amène à conclure que le temps moyen de premier passage peut être infini pour des pièges suffisamment grands [Goychuk et al., 2007]. Pourtant, cette proposition entre en contradiction avec les résultats expérimentaux obtenus dans [Min et al., 2006], mais aussi avec les mesures numériques directes du temps de premier passage ([Singh, 2019] et les mesures que l'on présentera par la suite).

Dès lors, les résultats que l'on va détailler dans la suite sont d'autant plus importants qu'ils répondent directement à une question controversée. Ces résultats s'appuient sur une méthodologie, initialement développée dans [Guérin et al., 2012] et qui a mené à des résultats particulièrement précis dans l'étude de temps de premier passage ou de cyclisation de processus gaussiens non markoviens [Guérin et al., 2014, 2016 ; Levernier et al., 2020]. Cette approche repose sur un formalisme où les effets non markoviens induits par l'instant de premier passage, évènement où la chaîne est alors dans un état hors d'équilibre, apparaissent explicitement. Cette méthode a été principalement utilisée pour déterminer les temps moyens de premier passage pour des processus évoluant dans des volumes confinés. On propose de l'adapter à l'étude de processus à forts effets de mémoire en présence d'un piège harmonique. Par ailleurs, on proposera d'étendre notre approche à des modèles gaussiens de fonction de covariance arbitraire qui vérifient une équation GLE.

Dans un premier temps, on introduira un premier modèle générique de macromolécule dont la dynamique asymptotique est alors décrite par une équation de Langevin généralisée. Par la même, on rappellera les propriétés principales des processus issus d'un modèle de GLE en absence et en présence d'un potentiel harmonique. Ensuite, on présentera le formalisme sous-jacent aux travaux [Guérin et al., 2016 ; Levernier et al., 2020], permettant l'analyse des propriétés de premier passage de processus gaussiens. Dans ce formalisme, on développera une étude adaptée spécifiquement à la présence d'un piège harmonique. Puis, on détaillera explicitement nos résultats pour les modèles présentés précédemment. Enfin, on présentera brièvement des résultats exacts obtenus perturbativement à l'ordre 1 autour du processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

## V.2 Propriétés générales de l'équation de Langevin Généralisée

*Les travaux que l'on va présenter ici ont été réalisés en collaboration avec Thomas Guérin chercheur au laboratoire ondes et matière d'aquitaine.*

### V.2.1 La présence de multiples degrés de libertés internes conduit à une équation GLE

Commençons par présenter un modèle générique, proposé dans [Bullerjahn et al., 2020], initialement afin de décrire des modèles de liaisons covalentes mais qui s'adapte aisément à l'étude de modèles de macromolécules complexes, comme des protéines ou de longues chaînes polymériques artificielles. En effet, on montrera que les dynamiques de ces modèles vérifient une équation GLE, sur laquelle on s'attardera dans la suite de ce chapitre. Pour cela, introduisons une première coordonnée  $x(t)$ , dont on cherche à déterminer la dynamique. Celle-ci est couplée à  $N$  autres degrés de liberté internes notés  $\{y_1, \dots, y_n\}$  et évolue dans un potentiel  $V$ . La dynamique de  $x(t)$  est donnée par

$$\frac{1}{D_x \beta} \dot{x}(t) + V'(x, t) = \sum_{i=1}^n \kappa_i [y_i(t) - x(t)], \quad (\text{V.1})$$

et où les autres degrés de libertés internes vérifient

$$\frac{1}{D_i \beta} \dot{y}_i(t) = \kappa_i [x(t) - y_i(t)] + \xi_i(t), \quad (\text{V.2})$$

où  $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  sont des bruits blancs gaussiens décorrélés. Notons que jusqu'à présent, les constantes de couplages  $\kappa_i$  et de diffusion internes  $D_i$  sont laissées quelconques. En intégrant (V.2) et en remplaçant  $y_i(t)$  ainsi obtenu dans (V.1), on obtient l'équation de Langevin généralisée suivante

$$\frac{1}{D_x \beta} \dot{x}(t) + V'(x, t) + \int_0^t d\tau \eta(t - \tau) \dot{x}(\tau) = \xi(t), \quad (\text{V.3})$$

où le noyau de mémoire  $\eta(t)$  est donné par  $\eta(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{-t/\tau_i}$  avec  $\tau_i = (D_i \beta k_i)^{-1}$  et

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^n \left[ k_i e^{-t/\tau_i} [y_{i,0} - x_0] + D_i \beta \int_0^t k_i e^{-(t-\tau)/\tau_i} \xi_i(\tau) d\tau \right].$$

Tout d'abord, on remarque que l'équation GLE s'est révélée efficace afin de décrire les fluctuations à l'équilibre de la distance entre un donneur et un accepteur d'électrons au sein d'une protéine, et ce, sur une large gamme d'échelles de temps [Kou et al., 2004]. Par ailleurs, relevons que des noyaux de mémoire similaires apparaissent dans divers modèles de polymères [Bullerjahn et al., 2011; Panja, 2010], ou de biomolécules complexes où les noyaux  $\eta(t)$  sont déterminés par des degrés de liberté intramoléculaires [Kou et al., 2004; Makarov, 2013; Min et al., 2006; Satija et al., 2019; Yang et al., 2003]. Plus précisément, pour la majorité de ces modèles, on retrouve une décomposition du noyau de friction similaire à (V.3) en une multitude de temps de relaxation, dont les paramètres  $k_i$   $D_i$ , de chaque degré de liberté, sont spécifiques aux différents modèles.

Pour un nombre élevé de degrés de liberté, un comportement asymptotique du noyau  $\eta(t)$ , qui dépend du modèle initial de macromolécules, peut être déterminé. Notons que les composantes inertielles sont généralement négligées ( $m_x = 0$ , dans la limite suramortie), ce qui conduit à une forme similaire à (V.3). Évoquons de manière non exhaustive quelques exemples de modèles de polymères pour lesquels il a été montré qu'ils vérifient une équation GLE (figure V.1).

- Commençons par le modèle de Rouse [Rouse, 1953], modèle classique de l'étude des polymères. La chaîne polymérique peut être laissée évoluer librement [Guérin et al., 2013; Panja, 2010; Vandebroek et al., 2017] ou attachée à une extrémité [Cao et al., 2015; Levernier et al., 2020]. Pour des temps inférieurs au temps de relaxation associé à la dynamique de la chaîne entière, communément appelé *Rouse time*  $\tau_1 \sim N^2$  (où  $N$  est le nombre de monomères formant la chaîne), on observe un comportement sous-linéaire du noyau de friction  $\eta(t) \sim t^{-1/2}$ . Par conséquent, le déplacement quadratique moyen présente aussi un comportement anormal  $\langle X^2(t) \rangle \sim t^{1/2}$  (indépendamment de la condition aux extrémités de la chaîne\*<sup>1</sup> [Cao et al., 2015; Panja, 2010; Vandebroek et al., 2017]).
- On peut aussi mentionner le modèle de polymère appelé *wormlike chain* (WLC), adapté à la description de polymères semiflexibles, pour lequel on observe deux régimes asymptotiques distincts ( $\eta(t) \sim t^{-3/4}$  et  $\eta(t) \sim t^{-1/2}$  [Bullerjahn et al., 2011]).
- Enfin, on peut aussi relever les travaux menés dans [Panja, 2010; Panja et al., 2009] qui abordent aussi le comportement de polymères autoévitant. En particulier, le comportement  $\eta(t) \sim t^{\frac{-2\nu}{1+2\nu}}$  a été conjecturé pour des polymères de Rouse autoévitant (où  $\nu$  est l'exposant de Flory).

Malgré des différences microscopiques profondes, ces modèles partagent tous un noyau de friction dont le comportement est une loi de puissance, autrement dit, pour lesquels les effets de mémoire ne sont pas assujettis à un temps de relaxation caractéristique. Rappelons que ces différents exemples de noyaux de friction présentent une décroissance exponentielle au-delà du temps de relaxation associé à la dynamique de la molécule entière. Toutefois, dans la limite d'une chaîne de taille infinie, ce temps diverge, ce qui nécessite de caractériser la dynamique de l'équation GLE lorsque le noyau de friction est donné par une loi de puissance  $\eta(|t - t'|) \sim t^{-\alpha}$  où  $\alpha < 1$ .

Par la suite, on s'intéressera à l'équation GLE suivante dans la limite suramortie

$$\int_0^t \eta(t - t') \dot{x}(t) dt' + V(x)' = \xi(t), \quad (\text{V.4})$$

où  $\xi(t)$  est un bruit gaussien corrélé vérifiant la relation de fluctuation dissipation\*<sup>2</sup>

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = k_B T \eta(|t - t'|).$$

\*<sup>1</sup> On explicitera par la suite une relation claire entre le comportement du MSD et celui du noyau de friction

\*<sup>2</sup> Notons que cette relation peut être retrouvée pour l'exemple proposé ci-dessus (V.1) pour des conditions initiales à l'équilibre.

Avant de rappeler les propriétés génériques de cette équation, rappelons que celle-ci couvre un cadre plus général que l'étude des polymères. Elle permet de décrire, par exemple, la réponse diélectrique pour des particules piégées dans des potentiels paraboliques [Cole et al., 1941] ou des modèles de croissance de cellules cancéreuses [Wang et al., 2007]. En outre, celle-ci permet de décrire le mouvement d'objets plongés dans des bains viscoélastiques [Bao et al., 2003, 2006; Goychuk, 2009; Mason et al., 1995]. On présentera brièvement les propriétés de transport associées aux modèles GLE, en l'absence et en présence d'un piège harmonique. On étudiera  $x(t)$  pour différents comportements de  $\eta(|t - t'|)$ .

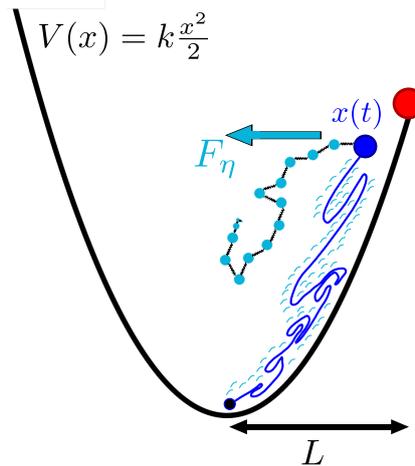


FIG. V.1 Schéma représentatif d'une chaîne polymérique dont la dynamique de l'un de ces monomères,  $x(t)$ , est décrite par une équation de Langevin généralisée. Le couplage entre les différents monomères évoluant dans un bain thermique, génère une force de rappel  $F_\eta$  complexe qui est décrite par un noyau de friction  $\eta$ , soulignant le comportement fortement non markovien de tels modèles. Dans ce chapitre, on cherchera à déterminer les propriétés de premier passage à une cible introduite à une distance  $L$  lorsque  $x(t)$  évolue dans un potentiel harmonique  $V(x) = k^2 x/2$ .

## V.2.2 Propriétés de l'équation GLE en l'absence de piège harmonique

On va dans un premier temps, présenter le cas  $V = 0$  afin de mieux appréhender les conséquences de l'ajout d'un potentiel harmonique. On va ensuite présenter les différents modèles de noyaux de friction qui vont être abordés dans le cas harmonique. Tout d'abord, relevons que l'équation (V.4) est linéaire, y compris en présence d'un potentiel harmonique. Dès lors, le processus  $x(t)$  est *gaussien*, signifiant que celui-ci est complètement caractérisé par sa covariance et sa position moyenne. On s'appuiera sur cette dernière propriété afin de mettre en valeur un cadre général qui permet de retrouver, commodément, les propriétés de l'équation GLE largement détaillées dans la littérature [Burov et al., 2008; Eab et al., 2010; Fa, 2008; Sandev et al., 2014]. Avant de considérer des exemples spécifiques de noyaux de friction, on peut mentionner des propriétés essentielles dans notre analyse de l'équation GLE. Pour cela, on considère la transformée de Laplace de (V.4)

$$\tilde{x}(s) = \frac{\tilde{\xi}(s)}{s\tilde{\eta}(s)},$$

où  $\tilde{x}(s)$ ,  $\tilde{\xi}(s)$ ,  $\tilde{\eta}(s)$  sont données par la transformée  $\tilde{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ . Le processus a été initialement pris en  $x_0 = 0$  sans perte de généralité. Ensuite, on propose de réexprimer la relation de fluctuation dissipation dans l'espace de Laplace

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\xi}(s)\tilde{\xi}(s') \rangle &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(st+s't')} \eta(|t-t'|) k_B T dt dt' \\ &= k_B T \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(s+s')t+s't'} \eta(t') dt' dt + k_B T \int_0^{+\infty} \int_{t'}^{+\infty} e^{-(st+s't')} \eta(t-t') dt dt' \\ &= k_B T \frac{\tilde{\eta}(s) + \tilde{\eta}(s')}{s + s'}. \end{aligned}$$

Cette dernière relation permet de réexprimer directement la covariance de  $x(t)$  en fonction du noyau de friction

$$\langle \tilde{x}(s)\tilde{x}(s') \rangle = \frac{k_B T}{ss'(s+s')\tilde{\eta}(s')} + \frac{k_B T}{ss'(s+s')\tilde{\eta}(s)}. \quad (\text{V.5})$$

Il est alors possible d'appliquer ce résultat général afin de déterminer la dynamique de  $x(t)$  selon différents noyaux de friction.

Noyau non corrélé  $\eta(t) = \lambda\delta(t)$  :

Considérons tout d'abord, un bruit blanc non corrélé ( $\eta(t) = \lambda\delta(t)$ ). En s'appuyant sur (V.5) pour  $\tilde{\eta}(s) = \lambda$ , on trouve après inversion

$$\langle x(t)x(t') \rangle = \frac{k_B T}{\lambda} \int_0^{t'} \int_0^t \delta(|t-t'|) dt dt' = 2 \frac{k_B T}{\lambda} \min(t, t').$$

En l'absence de bruits corrélés, on retrouve logiquement une équation de Langevin linéaire décrivant un mouvement brownien.

Noyau avec une corrélation exponentielle simple :

Poursuivons notre analyse en considérant un noyau de friction formé de la combinaison entre un terme exponentiel et un dirac

$$\eta(t) = A\delta(t) + B e^{-t/\tau} \quad (\text{V.6})$$

En posant  $D = \frac{2k_B T}{A+B\tau}$ ,  $\lambda = \frac{A+B\tau}{A\tau}$ ,  $D_o = \frac{2k_B T B \tau^2}{(A+B\tau)^2}$ , on obtient, après simplification de la transformée de Laplace de (V.6) (les détails sont donnés en annexe I.2), l'expression suivante du noyau de friction

$$\tilde{\eta}(s) = 2k_B T \frac{\lambda + s}{(D + D_o\lambda)s + D\lambda}.$$

En reprenant alors (V.5), et après inversion de la transformée de Laplace, on obtient

$$2\langle x(t)x(t') \rangle = D(t + t' - |t - t'|) + D_o(1 - e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t'} + e^{-\lambda|t-t'|}).$$

On reconnaît alors la fonction de corrélation d'un processus gaussien de moyenne nulle dont on peut montrer que les incréments sont stationnaires. Ainsi, l'ajout d'une composante exponentielle dans le noyau de friction conduit à un modèle non markovien minimal. Celui-ci décrit un dimère formé du couplage entre une molécule  $x(t)$  et une variable cachée inobservable en pratique. Aussi, ce processus sera appelé par la suite processus *bi-diffusif*. Expérimentalement, on peut observer de telles dynamiques en mesurant la position d'un traceur dans un bain nématique [Turiv et al., 2013], ou pour des solutions contenant des polymères souples ou rigides [Ochab-Marcinek et al., 2011].

Noyau de friction en loi de puissance :

On considère un noyau de friction en loi de puissance  $\eta(t) = \frac{\eta_\alpha}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha}$ . Malgré la divergence de  $\eta$  en 0, on remarque que l'intégrale du noyau de friction reste finie (pour  $0 < \alpha < 1$ ). En s'appuyant une nouvelle fois sur (V.5), la transformée de Laplace  $\tilde{\eta}(s) = \eta_\alpha s^{\alpha-1}$  conduit à

$$\begin{aligned} \langle \tilde{x}(s)\tilde{x}(s') \rangle &= \frac{k_B T}{\eta_\alpha} \left( \frac{1}{s s'^\alpha (s + s')} + \frac{1}{s^\alpha s' (s + s')} \right) \\ &= \frac{k_B T}{\eta_\alpha} \left[ \frac{1}{s s'^{\alpha+1}} + \frac{1}{s' s^{\alpha+1}} - \left( \frac{1}{s'^{\alpha+1} (s + s')} + \frac{1}{s^{\alpha+1} (s + s')} \right) \right]. \end{aligned}$$

On reconnaît que le dernier terme est donné par la double transformée de Laplace de  $\frac{|t-t'|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ , ce qui permet d'extraire la fonction de covariance

$$\langle x(t)x(t') \rangle = \frac{k_B T}{\eta_\alpha \Gamma(\alpha + 1)} [t^\alpha + t'^\alpha + |t' - t|^\alpha].$$

En conséquence, le processus  $x(t)$  est un mouvement brownien fractionnaire d'exposant de Hurst  $H = \alpha/2$  que l'on retrouve dans de nombreux domaines [Burnecki et al., 2012 ; Cutland et al., 1995 ; Mandelbrot et al., 1968]. Dans le cas limite  $\alpha \rightarrow 1$ , on retrouve un mouvement brownien décrit par le noyau  $\eta(t) = \lambda \delta(t)$ . Cette dernière observation souligne encore les connexions entre les modèles de polymères et l'équation GLE, y compris en l'absence de potentiel. En outre, cela apporte un nouvel angle d'observation du noyau en loi de puissance, puisque l'équation GLE permet donc de généraliser l'équivalent d'un mouvement brownien fractionnaire en présence d'un potentiel.

### V.2.3 Propriétés de transport de l'équation GLE en présence d'un potentiel harmonique

Considérons à présent le cas d'un potentiel harmonique  $V(x) = kx^2/2$  centré en 0. De manière analogue au cas  $V = 0$ , on peut isoler des propriétés générales vérifiées par  $x(t)$ , et cela indépendamment de noyau de friction. Désormais, le processus vérifie la relation suivante en Laplace

$$\tilde{x}(s) = \frac{\tilde{\xi}(s) + x_0 \tilde{\eta}(s)}{s \tilde{\eta}(s) + k}, \quad (\text{V.7})$$

où la position initiale peut être fixée ou tirée aléatoirement. Tout d'abord, relevons qu'en présence d'un piège harmonique le processus converge généralement vers la distribution stationnaire, notée  $p_s(x) = e^{-\frac{k}{2k_B T} x^2} / \sqrt{2\pi k_B T/k}$ , et cela indépendamment du noyau de friction et de la distribution initiale. Supposons dans un premier temps, que le processus est initialement dans l'état stationnaire. En s'appuyant sur (V.5), on obtient pour la fonction de covariance

$$\langle \tilde{x}(s) \tilde{x}(s') \rangle = \frac{k_B T \tilde{\eta}(s) + K_B T \tilde{\eta}(s')}{(s + s')(s \tilde{\eta}(s) + k)(s' \tilde{\eta}(s') + k)} + \frac{\langle x(0)^2 \rangle \tilde{\eta}(s) \tilde{\eta}(s')}{(s \tilde{\eta}(s) + k)(s' \tilde{\eta}(s') + k)}. \quad (\text{V.8})$$

Pour une distribution initiale stationnaire  $k_B T = k \langle x(0)^2 \rangle$ , (V.8) conduit à

$$\langle \tilde{x}(s) \tilde{x}(s') \rangle = \frac{\langle x(0) \tilde{x}(s) \rangle + \langle x(0) \tilde{x}(s') \rangle}{s + s'}.$$

Dès lors, pour une distribution initiale stationnaire, on retrouve une fonction de covariance seulement fonction de la variable  $|t - t'|$ , signifiant que le processus possède des incréments stationnaires, et cela indépendamment du noyau de friction. On peut alors définir la fonction de covariance  $\theta$ ,  $\langle x(t)x(t') \rangle = \frac{k_B T}{k} \theta(t - t')$ . Notons que  $\theta(0) = 1$  et  $\theta(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$  puisque le processus converge vers une distribution stationnaire.

En reprenant alors (V.7) en multipliant par  $x(0)$  puis en moyennant successivement sur le bruit et la position initiale (supposée tirée dans l'état stationnaire), on obtient alors une relation explicite entre  $\theta$  et  $\eta$

$$\tilde{\theta}(s) = \frac{\tilde{\eta}(s)}{s \tilde{\eta}(s) + k}. \quad (\text{V.9})$$

Considérons à présent le cas d'une distribution initiale fixée à l'équilibre. En s'appuyant sur les formules de projections des processus gaussiens conditionnels (formules détaillées en annexe I.1), on obtient alors les relations suivantes

$$\langle x(t) \rangle_{x_0} = x_0 \frac{\langle x(t)x(t) \rangle}{\langle x(0)x(0) \rangle} = x_0 \theta(t),$$

et pour la fonction de covariance conditionnelle

$$\text{Cov}(x(t)x(t') | x(0) = x_0) = \frac{k_B T}{k} \theta(|t' - t|) - \frac{k_B T}{k} \theta(t)\theta(t').$$

Enfin, notons que pour une position initiale  $x_0$  fixée, les incréments sont alors donnés par

$$\langle [x(t+T) - x(T)]^2 \rangle_0 = l_T^2 (2 - 2\theta(t) - [\theta(T) - \theta(t+T)]^2) + x_0^2 [\theta(T) - \theta(t+T)]^2, \quad (\text{V.10})$$

et présentent des effets de vieillissement.

Ainsi, la détermination *d'une unique fonction*  $\theta$ , qui est donnée par la fonction de covariance pour la distribution initiale stationnaire, permet de déterminer les incréments mais aussi la position moyenne et la fonction de covariance pour une distribution initiale fixée. Appliquons ce dernier résultat aux différents noyaux de friction présentés précédemment. En outre, ces différents résultats soulignent le rôle clé que jouent les caractéristiques propres aux processus gaussiens dans la détermination des propriétés des modèles issus d'une équation GLE.

Noyau non corrélé  $\eta(t) = \lambda\delta(t)$  :

On reprend (V.7) pour un noyau de friction  $\tilde{\eta}(s) = \lambda$  et qui conduit après inversion à

$$\theta(t) = e^{-kt/\lambda}$$

On retrouve logiquement la fonction de covariance d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck [Ricciardi et al., 1988 ; Van Kampen, 1992] qui présente une décroissance exponentielle de la fonction de covariance.

Noyau avec une corrélation exponentielle simple :

En reprenant le noyau de friction donné dans (V.6), la transformée de Laplace de la fonction de covariance s'écrit alors

$$\langle \tilde{x}(s)x(0) \rangle = \langle x(0)^2 \rangle \frac{A(s + \tau^{-1}) + B}{k(s + \tau^{-1}) + As(s + \tau^{-1}) + Bs}. \quad (\text{V.11})$$

En définissant  $\Delta = (B + A\tau^{-1} + k)^2 - 4Ak\tau^{-1}$ , on remarque que  $\Delta > 0$  pour tout paramètre  $(D, D_0, \lambda)$ . Après plusieurs étapes de calcul (détaillées en annexe I.2), la transformée de (V.11) peut être inversée, ce qui permet de déterminer la fonction de covariance d'un processus bi-diffusif en présence d'un potentiel harmonique

$$\theta(|t-t'|) = e^{-\frac{(A+k)\tau^{-1}+B}{2A}|t-t'|} ch \left[ \frac{\sqrt{\Delta}}{2A}|t-t'| \right] + \frac{\tau^{-1}(A-k) + B}{\sqrt{\Delta}} e^{-\frac{(A+k)\tau^{-1}+B}{2A}|t-t'|} sh \left[ \frac{\sqrt{\Delta}}{2A}|t-t'| \right]. \quad (\text{V.12})$$

Noyau de friction en loi de puissance :

Concluons cette revue en considérant les noyaux en loi de puissance pour lesquels  $\eta(t) = \frac{\eta_\alpha}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha}$ . En reprenant la transformée de Laplace de la fonction de covariance

$$\langle \tilde{x}(s)x(0) \rangle = \langle x_0^2 \rangle \frac{\eta_\alpha s^{\alpha-1}}{\eta_\alpha s^\alpha + k},$$

on reconnaît la transformée de Laplace d'une fonction de Mittag-Leffler, notée  $E_\alpha$  [Haubold et al., 2011 ; Mainardi, 2014]. Son inversion conduit à l'identification de  $\theta$  [Goychuk et al., 2007 ; Min et al., 2006]

$$\theta(t) = E_\alpha \left( - \left[ \frac{t}{\tau_T} \right]^\alpha \right). \quad (\text{V.13})$$

Ce modèle sera appelé par la suite **processus fortement corrélé ou processus A**. Prenons le temps de commenter le comportement asymptotique de  $\theta(t)$ . On prendra sans perte de généralités  $\tau_T = 1$ ,  $\langle x_0^2 \rangle = l_T^2 = 1$  qui définissent complètement les échelles de temps et d'espace de ce modèle. Dans la limite des temps courts, on retrouve un comportement en loi de puissance  $\theta(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1 - \frac{t^\alpha}{\tau_T^\alpha \Gamma(1+\alpha)}$  [Mainardi, 2014]. De manière similaire, dans la limite des temps longs, on retrouve aussi un comportement en loi de puissance

$$\theta(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{t^{-\alpha}}{\tau_T^{-\alpha} \Gamma(1-\alpha)}. \quad (\text{V.14})$$

En conséquence, la convergence de  $x(t)$  vers sa distribution stationnaire est particulièrement lente et les effets de mémoire aux temps longs sont algébriques. Cette dernière observation prendra toute son importance lorsque l'on se tournera vers les propriétés de premier passage. Ainsi, on a présenté les différents modèles issus d'une équation GLE, en mettant en valeur l'importance des effets de mémoire induits par le noyau de friction. Les propriétés de transport de ces différents modèles gaussiens étant connues, on propose de déterminer les propriétés de premier passage dans le cas harmonique. Avant de développer notre approche, on propose de faire une synthèse des précédents travaux autour des propriétés de premier passage de l'équation GLE en précisant les hypothèses sous-jacentes.

#### V.2.4 Approximation de Wilemski-Fixman et équation de Fokker-Planck généralisée en présence d'un point absorbant

Tout d'abord, abordons les travaux menés dans [Goychuk et al., 2007], qui proposent une résolution exacte de la distribution de premier passage. Ceux-ci s'appuient sur l'équation de Fokker-Planck généralisée vérifiée par la densité de probabilité  $P(x, t)$  en présence d'une cible absorbante en  $L$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D(t) \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{\frac{V(x)}{k_B T}} \frac{\partial}{\partial x} e^{\frac{V(x)}{k_B T}} P(x, t) \right) \text{ et } P(L, t) = 0, \quad (\text{V.15})$$

où  $2D(t) = \langle x(t)^2 \rangle$ . Notons que  $\langle x(t)^2 \rangle$  dépend aussi des conditions initiales. L'intégration de  $P(x, t)$  sur l'ensemble de l'espace permet alors de remonter à la probabilité de survie et donc au FPT. Pourtant, l'emploi de cette approche, bien que très engageant, reste incertain, puisque l'équation de Fokker-Planck en présence d'une cible ne décrit plus la dynamique de  $x(t)$ . Certes, cette équation est exacte dans le cas de processus gaussiens en l'absence de cible, mais l'équation (V.15) ne permet pas de capturer les effets de mémoire complexes, intrinsèques aux marcheurs n'ayant pas encore trouvé la cible. Néanmoins, relevons que l'équation de Fokker Planck généralisée mène cependant à des résultats exacts dans le contexte de franchissement de barrière.

Les travaux de Goychuk et al. [2007] proposent de s'appuyer sur cette approximation afin de décrire le comportement de marcheurs vérifiant (V.13), qui expriment pourtant des effets de mémoire présentant une décroissance algébrique.

Nous verrons que le processus fortement corrélé  $\mathbf{A}$  est un exemple clair pour lesquels les propriétés de premier passage ne sont pas capturées par cette approximation.

En effet, l'analyse développée dans Goychuk et al. [2007], amène à conclure que la probabilité de survie  $S(t)$  présente une décroissance aux temps longs en loi de puissance, ce qui impose que le temps moyen de premier passage (MFPT) est infini. Ce résultat s'oppose partiellement aux mesures expérimentales réalisées dans [Kou et al., 2004; Makarov, 2013; Min et al., 2006; Satija et al., 2019; Yang et al., 2003]. Celles-ci concernent des temps de franchissement de barrières, observables différentes du temps de premier passage, mais qui devraient présenter des propriétés similaires.

Ensuite, évoquons l'approximation de Wilemski-Fixman [Wilemski et al., 1974a,b]. Celle-ci repose aussi sur une approximation pseudomarkovienne afin de déterminer le temps de premier passage. Pour cela, on reprend l'équation de renewal introduite dans le chapitre 1

$$p(x = L, t | x_0 = 0) = \int_0^t F(\tau) p(x = L, t | FPT = \tau) d\tau, \quad (\text{V.16})$$

obtenue en partitionnant sur l'instant de premier passage  $\tau$ , où  $p(L, t | FPT = \tau)$  est la probabilité de trouver le marcheur en  $x = L$ , sachant que le temps de premier passage est exactement  $\tau$ . L'approximation de Wilemski-Fixman consiste à proposer que le comportement du marcheur dans le futur du FPT (ici  $p(x = L, t | FPT = \tau)$ ) est donné par celui du marcheur initialement à l'équilibre en  $L$  à  $\tau$ . Après plusieurs étapes de calcul, on peut alors exprimer une relation vérifiée par le temps moyen de premier passage

$$\langle T \rangle_{WF} p_s(L) = \int_0^\infty [p(x = L, t | x_0 = L) - p(x = L, t | x_0 = 0)] dt,$$

où  $p_s(L)$  est la distribution stationnaire évaluée en  $L$  et

$$p(x = L, t | x_0 = z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi l_T^2 [1 - \theta(t)^2]}} e^{-\frac{(L - z\theta(t))^2}{2l_T^2 [1 - \theta(t)^2]}}.$$

Pour des noyaux en loi de puissance ( $1 > \alpha > 0$ ), l'intégrale diverge (cette propriété sera détaillée plus loin dans la suite). Cette approximation prédit donc également un temps moyen de premier passage infini ce qui est en contradiction avec les mesures numériques. Ainsi, les approches que l'on qualifie de pseudo-markoviennes sont insuffisantes pour décrire les propriétés de premier passage des modèles (V.13). En outre, relevons que des méthodes similaires développées dans [Cao et al., 2015] peuvent être envisagées. Celles-ci amènent généralement à des résultats proches de l'approximation de Wilemski-Fixman<sup>\*3</sup>. Enfin, notons que de nombreux travaux [Min et al., 2006] qui concernent le temps de franchissement d'une barrière ont été développés pour des modèles issus d'une équation GLE. Ces méthodes qui reposent sur des généralisations non-markoviennes des modèles d'évasion de Kramers, obtiennent des taux de transition finis pour le passage de telles barrières. Toutefois, ces résultats ne peuvent pas être directement appliqués au MFPT, puisque ces deux observables restent distincts<sup>\*4</sup>. En conséquence, on va ici proposer d'adapter les approches développées dans [Guérin et al., 2016; Levernier et al., 2020] initialement pour des processus gaussiens en l'absence de potentiel ou présentant des temps de relaxation finis.

## V.3 Temps moyen de premier passage associé à l'équation GLE

Tout d'abord, on adapttera la méthode développée dans [Guérin et al., 2016], en soulignant les hypothèses sur laquelle elle repose et les spécificités qui sont engendrées par le choix du noyau de friction algébrique (**processus A**).

### V.3.1 Approche générale

Considérons un processus unidimensionnel  $x(t)$  que l'on suppose continu (absence de sauts), rugueux ( $\langle \dot{x}^2 \rangle = \infty$ ) et qui admet une distribution stationnaire aux temps longs (propriété vérifiée en présence d'un piège harmonique). Introduisons deux propagateurs dépendant des conditions initiales. Tout d'abord, on définit  $p_0(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n | x_0)$ , la probabilité d'observer le marcheur en  $(x_1, \dots, x_n)$  aux temps respectifs  $(t_1, \dots, t_n)$ , sachant que le processus était initialement en  $x_0$  à  $t$  (pour  $t = 0$  la notation  $t$  est allégée). Ici, la position  $x_0$  est choisie fixée. De manière similaire, on peut définir l'équivalent de la loi à  $N$  points  $p_s$ , où la position initiale du marcheur  $x_s$  est tirée selon la distribution stationnaire\*<sup>5</sup>. Introduisons ensuite, une cible à une distance  $L$  du centre du piège harmonique, et notons  $F(t)$  la distribution de premier passage associée (dont la dépendance selon  $L$  et les conditions initiales ne sont pas rendues explicites par souci de simplicité). On propose de reprendre alors l'équation dite de renewal (V.16), pour laquelle on va, contrairement aux approximations markoviennes, conserver explicitement la dépendance en l'instant de premier passage dans le dernier terme. Pour exprimer le temps moyen de premier passage, on cherche à intégrer (V.16) selon  $t$  mais les différentes intégrales divergent. Afin d'y remédier, on soustrait la limite asymptotique commune des propagateurs de (V.16) qui est donnée par la distribution stationnaire évaluée en  $L$  ( $p_s(L)$ ), ce qui conduit à

$$p_0(x = L, t | x_0) - p_s(L) = -p_s(L) \int_t^\infty F(\tau) + \int_0^t F(\tau) [p(x = L, t | FPT = \tau) - p_s(L)] d\tau,$$

où on a utilisé  $\int_0^\infty F(\tau) d\tau = 1$  (puisque la cible est trouvée avec une probabilité 1 en présence d'un piège harmonique). Définissons alors la quantité  $q_\pi(x = L, t) = \int_0^\infty F(\tau) p(x = L, t + \tau | FPT = \tau) d\tau$ , qui décrit la probabilité de trouver le marcheur en  $L$  à  $t$ , après l'évènement de premier passage (figure V.2). Celle-ci peut être vue comme une condition initiale hors d'équilibre dont les différences avec  $p_{x_0=L}(x = L, t | x_0)$ , sont induites par les propriétés de l'évènement de premier passage. Le principe de cette approche consiste à déterminer au mieux les propriétés de  $q_\pi(x = L, t)$ . En regroupant le deuxième terme de gauche et celui de droite, on obtient

---

\*<sup>3</sup> Une étude comparative, plus complète, peut être trouvée dans [Levernier et al., 2020] pour des modèles de polymères de taille finie. En conséquence, de manière identique à [Levernier et al., 2020], on s'attend à ce que ces méthodes conduisent aussi à un MFPT infini. Enfin, une adaptation de l'étude développée dans [Bullerjahn et al., 2020] en l'absence de force extérieure est une approche crédible. Toutefois, relevons que celle-ci s'appuie sur une décomposition discrète du noyau de friction en termes exponentiels, point de départ de notre étude.

\*<sup>4</sup> Relevons par exemple, que le passage de la barrière dépend fortement de la forme du potentiel proche du point de passage et que ces méthodes sont principalement développées pour un nombre de degrés de liberté internes fini (ce qui n'est pas le cas pour le processus A)

\*<sup>5</sup> Notons que le marcheur est supposé à l'équilibre en  $t$  dans les deux conditions.

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_0^t F(\tau) [p(x=L, t|FPT = \tau) d\tau - p_s(L)] d\tau dt - \int_0^\infty p_0(x=L, t|x_0) - p_s(L) dt \quad (\text{V.17}) \\
&= \int_0^\infty \int_\tau^\infty F(\tau) [p(x=L, t|FPT = \tau) d\tau - p_s(L)] dt d\tau - \int_0^\infty [p_0(x=L, t|x_0) - p_s(L)] dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty F(\tau) [p(x=L, u + \tau|FPT = \tau) d\tau - p_s(L)] d\tau du - \int_0^\infty [p_0(x=L, t|x_0) - p_s(L)] dt \\
&= \int_0^\infty [q_\pi(L, t) - p_0(x=L, t|x_0)] dt.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, notons que  $\int_0^\infty dt p_s(L) \int_t^\infty d\tau F(\tau) = p_s(L) \langle T \rangle$  où on a supposé que le MFPT est fini\*<sup>6</sup>. On obtient une relation exacte vérifiée par le MFPT

$$p_s(L) \langle T \rangle = \int_0^\infty [q_\pi(L, t) - p_0(x=L, t|x_0)] dt \quad (\text{V.18})$$

Dès lors, le comportement dans le futur du FPT permet de déterminer explicitement le MFPT. Toutefois, il est nécessaire de caractériser  $q_\pi(L, t)$ , ce qui est en pratique une tâche difficile. De manière analogue, on définit le processus associé  $x_\pi(t)$  et la loi à  $N$  points  $p_\pi(x_1, t_1; x_2, t_2 \dots; x_N, t_N) = \int_0^\infty p_\pi(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau \dots; x_N, t_N + \tau | FPT = \tau) F(\tau) d\tau$ . Dans le cas d'un processus gaussien, on fait les hypothèses suivantes afin d'évaluer  $q_\pi(L, t)$ . Tout d'abord, on suppose que **le processus  $x_\pi(t)$  est un processus gaussien (notée hypothèse 1)**. Ainsi, la caractérisation de la valeur moyenne  $\langle x_\pi(t) \rangle = m_\pi(t) = L - \mu_\pi(t)$  et de la covariance  $\sigma_\pi(t, t')$  du processus dans le futur du FPT suffit alors pour évaluer  $q_\pi(L, t)$ .

Ensuite, on suppose que **la covariance  $\sigma_\pi(t, t')$  est égale à la covariance du processus initialement en  $L$  à l'équilibre stationnaire (notée hypothèse 2)**. Prenons le temps de commenter ces hypothèses qui joueront un rôle crucial dans la suite de notre approche. Tout d'abord, relevons qu'elles ont été également proposées dans les travaux [Guérin et al., 2016; Levernier et al., 2020] pour des processus gaussiens en l'absence de potentiel, et qu'elles se sont révélées particulièrement pertinentes. Par ailleurs, ces travaux relèvent que l'approximation de covariance stationnaire (hypothèse 2) est rarement exacte pour des processus non markoviens\*<sup>7</sup>. Toutefois, l'analyse numérique des trajectoires issues d'une équation GLE souligne que cette approche reste pertinente y compris en présence de forts effets de mémoire (figures V.7, V.8 et V.9).

Dès lors, afin de déterminer le MFPT selon (V.18), il reste à déterminer  $\mu_\pi(t)$ . Pour cela, on propose de reprendre les étapes de (V.17) pour la loi à deux points  $p_0(x, t_1 + t; L, t)$

$$p_0(x, t_1 + t; L, t) = \int_0^{+\infty} F(\tau) p(x, t_1 + t; L, t | FPT = \tau) d\tau.$$

De manière identique, en soustrayant la loi asymptotique à deux points  $p(x, t_1 + t; L, t)$  et en intégrant sur  $t$ , on obtient une équation intégrale vérifiée par  $m_\pi(t)$ .

\*<sup>6</sup> Nous verrons dans la suite, de multiples confirmations numériques et théoriques infirmant que le MFPT est bien fini pour le modèle **A**.

\*<sup>7</sup> Il a été notamment prouvé que cette approximation n'est plus valide perturbativement à l'ordre 2 autour du mouvement brownien en l'absence de potentiel [Guérin et al., 2016].

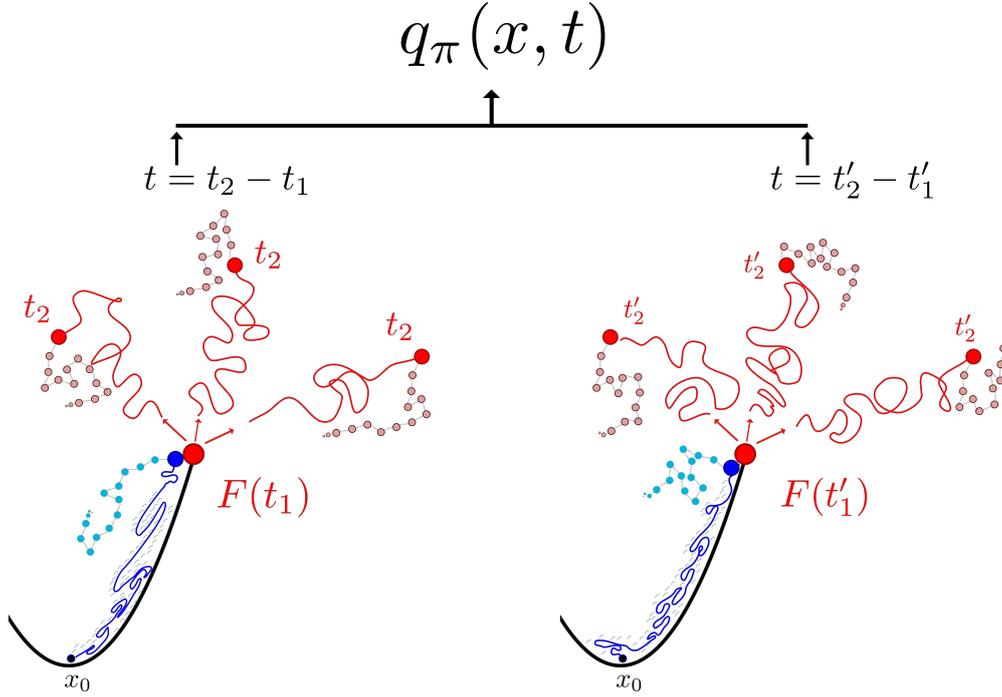


FIG. V.2 Schéma représentatif de la définition de  $q_\pi(x, t)$ , la distribution du temps de premier passage dans le futur du FPT. Les trajectoires évaluées après l'évènement de premier passage, ici  $t_1$  et  $t'_1$ , forment après leur pondération selon  $F(t_1)$  et  $F(t'_1)$ , une condition initiale hors d'équilibre selon la variable  $t$ . En effet, suite à l'instant de premier passage, les degrés de liberté internes, ici générés par les interactions de  $x(t)$  avec les autres monomères, sont dans des configurations souvent hors d'équilibre. Ces effets conduisent à un comportement dans le futur du FPT particulièrement complexe que l'on va chercher à caractériser.

$$m_s(\tau|L, 0)p_s(L)\langle T \rangle = \int_0^\infty [m_\pi(\tau + t|L, t)q_\pi(L, t) - m_0(\tau + t|L, t)p_0(L, t)] dt,$$

où  $m_s$  et  $m_0$  sont les moyennes associées respectivement aux conditions initiales stationnaires, ou fixées en  $x_0$ . En utilisant les formules de projection propres aux processus gaussiens, on obtient pour  $x_0 = 0$  l'équation intégrale suivante pour  $\mu_\pi(t)$

$$0 = \int_0^\infty \left[ \mu_\pi(t + \tau) - \mu_\pi(t) \frac{\theta(\tau) - \theta(t)\theta(t + \tau)}{1 - \theta(t)^2} - L[1 - \theta(\tau)] \right] q_\pi(L, t) \quad (\text{V.19}) \\ - \left[ L \frac{\theta(\tau) - \theta(t)\theta(\tau + t)}{1 - \theta(t)^2} - L[1 - \theta(\tau)] \right] p_0(L, t) dt,$$

où  $\theta(t)$  est la fonction introduite précédemment dans (V.9) (le cas d'une position initiale tirée selon la distribution initiale stationnaire sera discuté plus loin dans la suite). Cette équation détermine entièrement la position moyenne dans le futur du FPT.

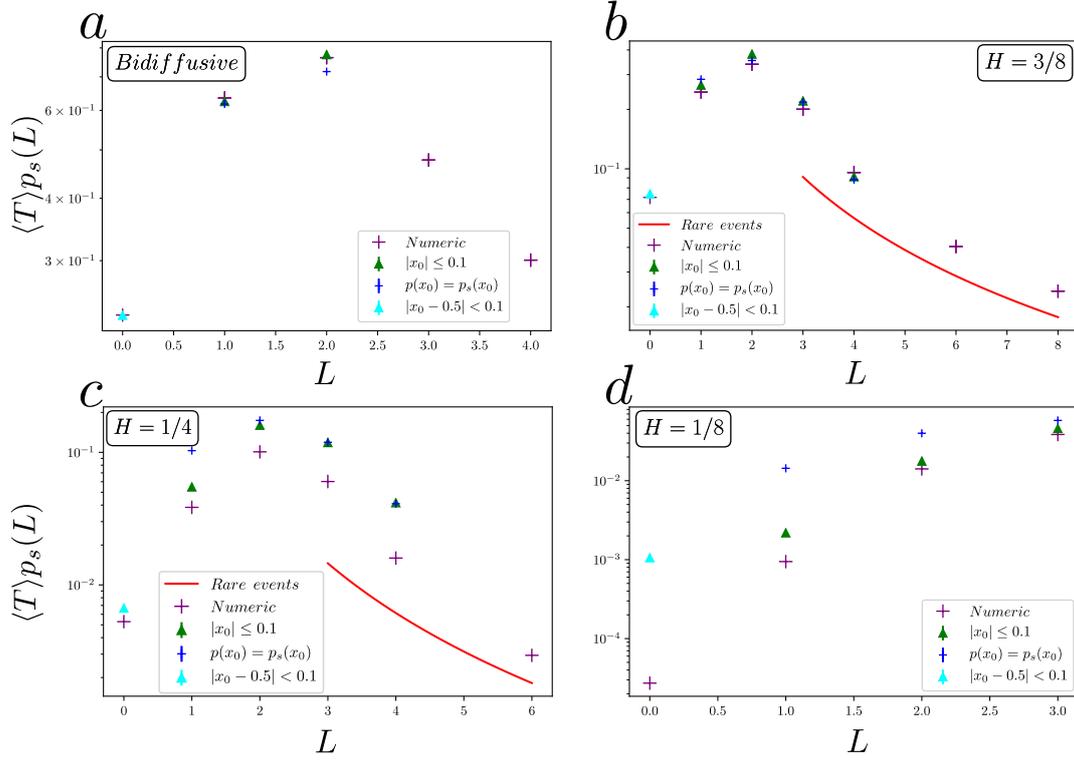


FIG. V.3 Temps moyen de premier passage des processus dérivés d'une équation GLE. Le temps moyen de premier passage, normalisé par la distribution stationnaire  $p_s(L)$ , est représenté, pour un processus bi-diffusif dans un piège harmonique **a** (dont la fonction de covariance est donnée par (V.12), pour  $A = B = \tau = 1$ ), et pour des processus fortement corrélés (V.13) ( $H = 3/8$  **b**,  $H = 1/4$  **c** et  $H = 1/8$  **d** à  $x_0$  fixé). Les mesures de (V.20), en s'appuyant sur l'intégration numérique de (V.19) (croix violettes pour  $x_0 \neq 0$ , et bleues pour  $x_0 = 0$  et  $L = 0$ ), sont comparées aux mesures du MFPT obtenues par simulation (les détails sont fournis en annexes H.2 et H.3). La limite des événements rares qui sera proposée dans la suite est représentée pour  $H = 3/8$  et  $H = 1/4$  (lignes rouges pleines).

Toutefois elle reste difficile à résoudre pour  $\theta(t) = E_\alpha(-t^\alpha/\tau_T^\alpha)$ . Afin d'évaluer  $\mu_\pi(t)$ , et par voie de fait le MFPT, on propose de résoudre cette équation numériquement\*<sup>8</sup> (figure V.4). Ainsi, on propose que le MFPT d'un processus issu d'une équation GLE soit donné par

$$p_s(L)\langle T \rangle = \int_0^\infty \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi l_T^2 [1 - \theta(t)^2]}} e^{-\frac{\mu_\pi(t)^2}{2l_T^2 [1 - \theta(t)^2]}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi l_T^2 [1 - \theta(t)^2]}} e^{-\frac{(L - x_0 \theta(t))^2}{2l_T^2 [1 - \theta(t)^2]}} \right] dt. \quad (\text{V.20})$$

où  $\mu_\pi(t)$  est obtenu numériquement de (V.19).

\*<sup>8</sup> Notons que cette équation dépend explicitement de  $L$  et  $x_0$  et qu'elle doit être résolue pour chaque couple de paramètres  $(x_0, L$  et  $\alpha)$

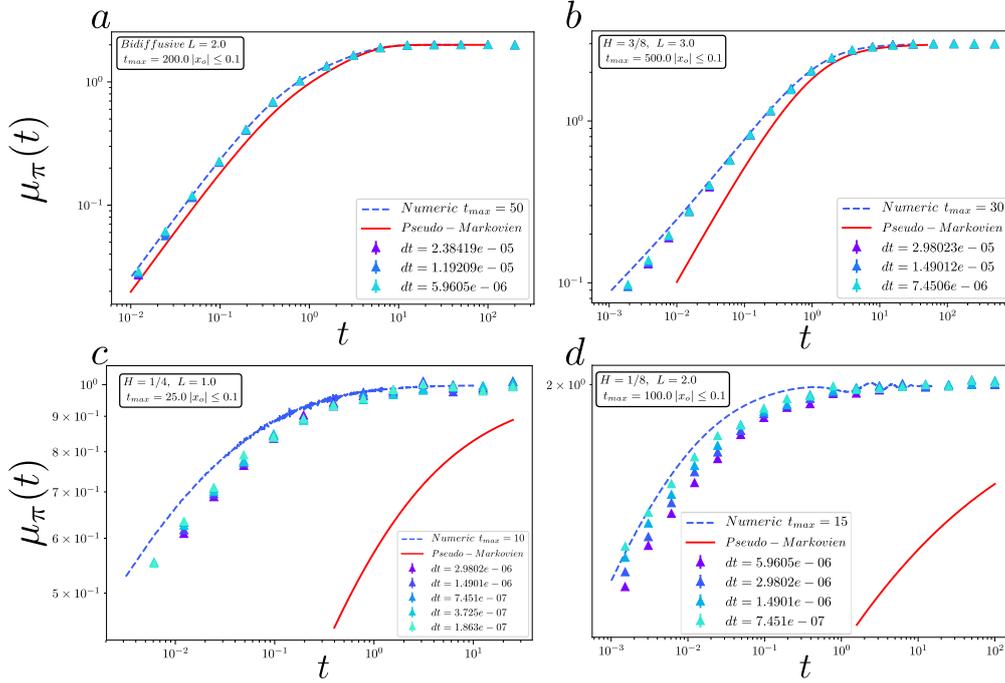


FIG. V.4 Application de l'approche non markovienne pour la position moyenne dans le futur du MFPT  $\langle x_\pi(t) \rangle = L - \mu_\pi(t)$  pour : un processus bi-diffusif dans un piège harmonique **a** (dont la fonction de covariance est donnée par (V.12)), et pour des processus fortement corrélés ((V.13)), avec  $H = 3/8$  **b**,  $H = 1/4$  **c** et  $H = 1/8$  **d**. L'écart à la position moyenne dans le futur du MFPT,  $\mu_\pi(t) = L - \langle x_\pi(t) \rangle$ , est mesuré numériquement pour des trajectoires générées selon différents pas de temps  $dt$ . Ces mesures sont comparées à l'intégration numérique de l'équation (V.19) (lignes pointillées). L'approximation pseudo-markovienne donnée par  $\mu(t) = L[1 - \theta(t)]$ , est fournie à titre d'exemple (lignes rouges pleines). Les choix des temps de coupure des simulations numériques et de l'intégration numérique ( $t_{max}$ ) sont justifiés en annexe H.3.

Avant de se tourner vers l'application directe de cette approche, relevons que pour un processus strictement markovien,  $q_\pi(L, t) = p_{x_0=L}(L, t)$ , ce qui permet de retrouver les résultats exacts connus pour les processus markoviens. Ensuite, notons que l'approximation de Wilemski-Fixman consiste à supposer que  $q_\pi(L, t) = p_{x_0=L}(L, t)$ . La comparaison directe du comportement de  $q_\pi(L, t)$  et  $p_{x_0=L}(L, t)$ , nous renseignera donc quant à la pertinence de notre étude, comparée aux précédentes tentatives.

### V.3.2 Applications aux processus dérivant d'une équation GLE

Tout d'abord, considérons le cas des processus fortement corrélés **A** pour lesquels  $\theta(t) = E_\alpha(-t^\alpha)$ . Le temps moyen de premier passage mesuré à partir des trajectoires simulées et la prédiction de (V.20) sont comparés figure V.3. Relevons que notre approche fournit des résultats particulièrement précis pour  $1 > \alpha > 1/2$  (respectivement  $1/2 > H > 1/4$ ). D'autre part, notre approche produit des résultats convaincants pour  $\alpha < 1/2$ . Toutefois, on relève que le pré-facteur exact n'est alors plus prédit par (V.20) et (V.19).

Les hypothèses 1 et 2 énoncées ci-dessus sont testées figures V.7, V.8, V.9 et sont pertinentes. Ce résultat est d'une saisissante précision en comparaison des prédictions décrites précédemment, et qui conduisaient à un temps moyen infini pour  $L$  suffisamment élevé.

Citons l'exemple de la valeur  $L = 2$ , pour  $H = 1/4$  qui devrait admettre un MFPT infini selon [Goychuk et al., 2007], proposition en désaccord avec notre analyse des trajectoires simulées.

D'autre part, les travaux [Goychuk et al., 2007] proposent que la distribution asymptotique du FPT soit donnée par une loi de puissance. Or, ce comportement n'est pas observé numériquement (les détails des simulations peuvent être retrouvés en annexe H.2). Notre analyse numérique suggère que la distribution du FPT prend la forme d'une distribution exponentielle étirée (figure V.6), forme compatible avec l'observation d'un temps moyen de premier passage fini.

Enfin, rappelons que dans le cas du processus fortement corrélé  $\mathbf{A}$ , les incréments donnés par (V.10) présentent des effets de vieillissement algébriques. Ainsi, notre approche conduit à des résultats précis, y compris pour de tels processus qui présentent de forts effets de vieillissement.

#### a) Comportement aux temps longs de la position moyenne dans le futur du FPT

Prenons le temps de commenter la différence importante entre la mesure du MFPT extrait de (V.20) et l'approximation de Wilemski-Fixman. Pour cela, commençons par l'approximation de Wilemski-Fixman pour laquelle  $q_\pi(L, t) = p_{x_0=L}(L, t)$ . On obtient alors le comportement asymptotique suivant pour  $q_\pi(L, t)$  aux temps longs

$$\frac{p_{x_0=L}(L, t)}{p_s(L)} = \frac{1}{\sqrt{1-\theta(t)^2}} e^{-\frac{L^2[1-\theta(t)]^2}{2l_T^2[1-\theta(t)^2]} + \frac{L^2}{2l_T^2}} = 1 + \frac{L^2}{l_T^2} \frac{\tau_T^\alpha}{t^\alpha \Gamma(1-\alpha)} + O(t^{-2\alpha}),$$

où on s'est appuyé sur le comportement asymptotique de  $\theta(t)$  ((V.14) et l'on rappelle que  $l_T$  et  $\tau_T$  sont respectivement la longueur et le temps caractéristique du processus). De manière similaire, le second rapport de (V.20) conduit au comportement suivant

$$\frac{p_{x_0=x_0}(L, t)}{p_s(L)} = 1 + \frac{Lx_0}{l_T^2} \frac{\tau_T^\alpha}{t^\alpha \Gamma(1-\alpha)} + O(t^{-2\alpha}).$$

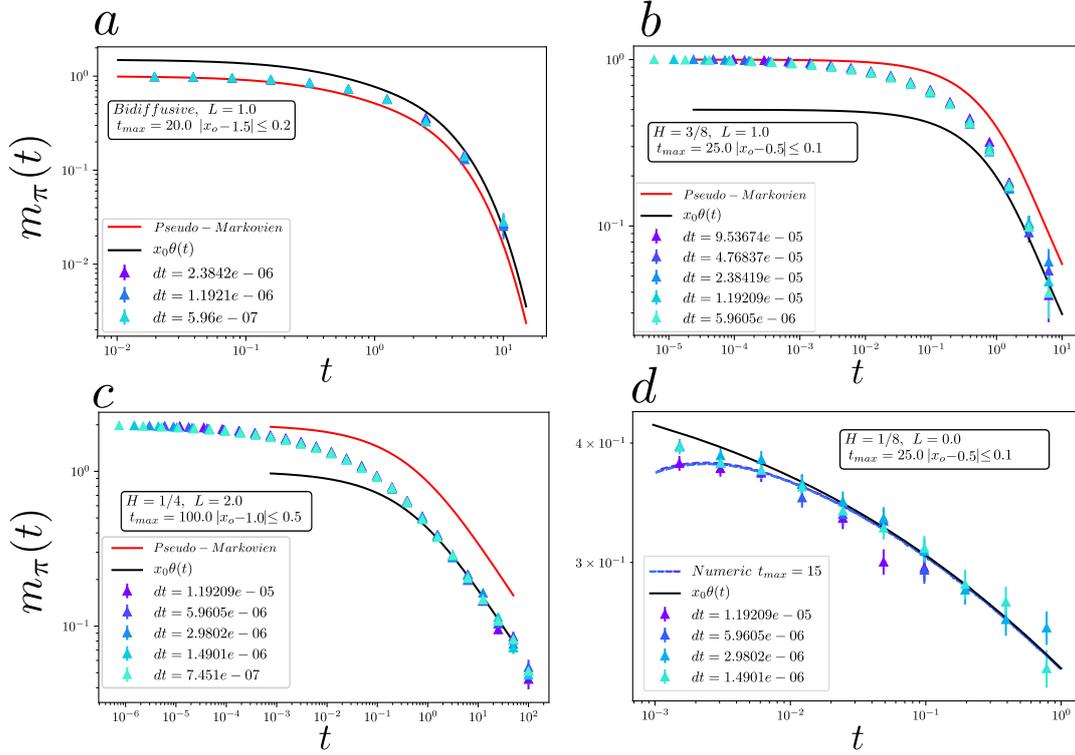


FIG. V.5 Comportement asymptotique de la position moyenne dans le futur du MFPT.  $\langle x_\pi(t) \rangle = m_\pi(t)$  est représentée pour un processus bi-diffusif en présence d'un piège harmonique **a**, (V.12), et pour des processus fortement corrélés, (V.13), avec  $H = 3/8$  **b**,  $H = 1/4$  **c**,  $H = 1/8$  **d** à  $L$  et  $x_0$  fixés.  $m_\pi(t)$  est mesurée numériquement pour des trajectoires générées selon différents pas de temps  $dt$ , et est comparée au comportement asymptotique prédit par (V.21) (lignes pleines noires). L'intégration numérique de l'équation (V.19) pour  $x_0 \neq 0$  (**d** lignes pointillées) conduit à un résultat identique, confirmant la validité de la résolution numérique de (V.19). L'approximation pseudo-markovienne donnée par  $m(t) = L\theta(t)$  est représentée à titre d'exemple (lignes rouges pleines). Les choix des temps de coupure des simulations numériques et de l'intégration numériques ( $t_{max}$ ) sont justifiés en annexe H.3.

Ainsi, pour tout  $x_0 \neq L$  dans l'hypothèse de Wilemski-Fixman, le comportement asymptotique du terme dans l'intégrale (V.20) est de l'ordre de  $O(t^{-\alpha})$ . Cela implique que l'intégrale diverge, signifiant que le MFPT est infini. Par conséquent, puisque le MFPT est fini et afin d'assurer la convergence de (V.20) le comportement aux temps longs de  $L - \mu_\pi(t)$  doit nécessairement vérifier

$$L - \mu_\pi(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} x_0 \theta(t). \quad (\text{V.21})$$

Or, l'intégration numérique de (V.19) et l'analyse des trajectoires simulées confirment que ce comportement est bien observé et cela pour différentes valeurs de  $x_0$  (figure V.18, V.3.1). Notons que des comportements aux temps longs similaires avaient été obtenus pour des processus gaussiens en l'absence de potentiel harmonique [Guérin et al., 2016].

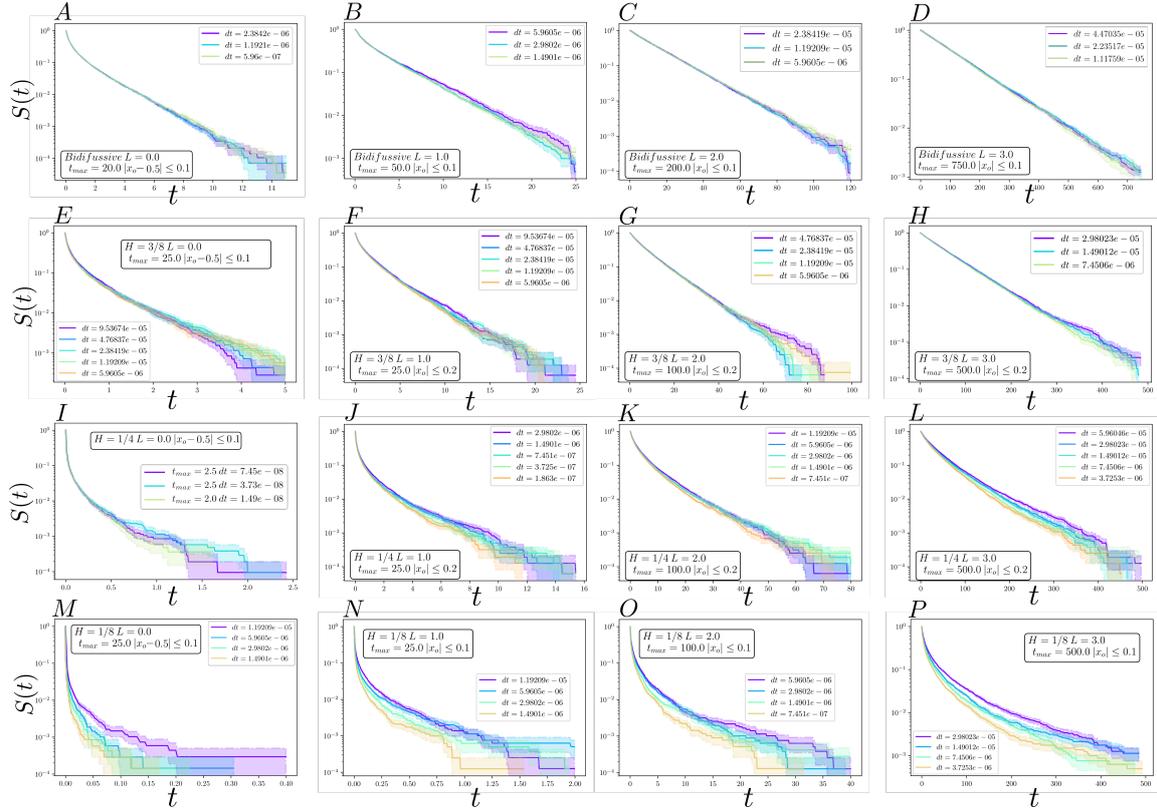


FIG. V.6 Probabilité de survie du processus bi-diffusif et des processus fortement corrélés en présence d'un piège harmonique. Les probabilités de survie sont mesurées à partir des trajectoires simulées pour différentes cibles. Ces trajectoires exactes sont générées selon différents pas de temps discrets  $dt$ , jusqu'à des temps de coupure donnés par  $t_{max}$ . Le détail des simulations peut être retrouvé en annexe H.2. L'intégration des distributions représentées ci-dessus conduit aux mesures numériques du MFPT données dans la figure V.3, pour le processus bi-diffusif **a-d** et les processus fortement corrélés avec  $H = 3/8$  **e-h**, pour  $H = 1/4$  **i-l** et pour  $H = 1/8$  **m-p**. Notons que la convergence de la distribution selon  $dt$ , et ce, pour des temps de coupure suffisamment élevés, nous renseigne quant à la précision de nos différentes mesures. Enfin, relevons que les distributions observées ne présentent pas une décroissance algébrique contrairement à ce qui avait été proposé dans [Goychuk et al., 2007].

## b) Comportement asymptotique du MFPT dans la limite des événements rares

Intéressons-nous ensuite à la limite  $L \gg l_T$ , où la cible est alors particulièrement éloignée du centre du piège. On cherche ici à déterminer le comportement asymptotique vérifié par le MFPT dans la limite où l'évènement de premier passage est rare ( $L \gg x_0$ ). Dans le cas où la cible est rarement visitée, les comportements de  $p_{x_0=x_0}(L, t)$  et  $q_\pi(L, t)$  diffèrent fortement dans la limite des temps courts. En effet, après l'instant de premier passage, le marcheur a une probabilité de se trouver sur la cible plus grande qu'un marcheur initialement au centre du piège. On propose que le comportement asymptotique du MFPT soit dominé par la contribution des temps courts de l'intégrale (V.19), où  $p_{x_0=x_0}(L, t)$  est négligeable et  $\theta(t)$  est approximée par son comportement asymptotique aux temps courts.

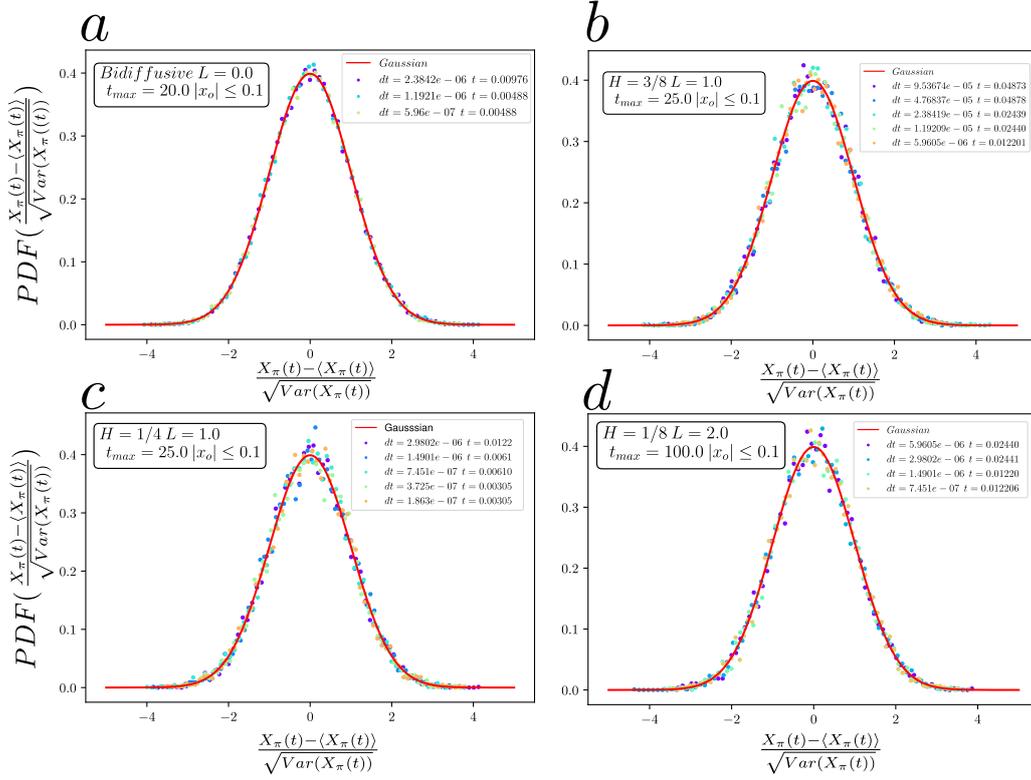


FIG. V.7 Contrôle de l'hypothèse 1 pour le processus bi-diffusif **a**, et les processus fortement corrélés **b-d** en présence d'un piège harmonique. La densité de probabilité du processus dans le futur du premier passage est représentée, selon la variable normalisée  $(X_{\pi}(t) - \langle X_{\pi}(t) \rangle) / \sqrt{\text{Var}(X_{\pi}(t))}$ , pour des trajectoires générées selon différents pas de temps  $dt$ . Les distributions sont évaluées à différents temps  $t$  dans le futur du FPT. On retrouve une distribution gaussienne (lignes pleines rouges) en accord avec l'hypothèse gaussienne 1 pour le comportement du marcheur dans le futur du FPT.

Autrement dit, on propose que le comportement asymptotique du MFPT vérifie

$$p_s(L)\langle T \rangle \approx \int_0^{O(t_D)} e^{-\frac{\mu(t)^2 \tau_b^\alpha \Gamma(1+\alpha)}{4t_T^2 t^\alpha}} \frac{dt}{\sqrt{\frac{2t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)\tau_b^\alpha}}},$$

où  $\mu(t)$  vérifie l'équation intégrale suivante

$$0 = \int_0^\infty \left[ \mu(t+\tau) - \mu(t) \frac{\tau^\alpha - t^\alpha - (t+\tau)^\alpha}{2t^\alpha} + \frac{L\tau^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)\tau_b^\alpha} \right] e^{-\frac{\mu(t)^2 \tau_b^\alpha \Gamma(1+\alpha)}{4t_T^2 t^\alpha}} \frac{dt}{\sqrt{\frac{2t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)\tau_b^\alpha}}}. \quad (\text{V.22})$$

Notons que cette équation a été aussi obtenue dans [Levernier et al., 2020]. Après plusieurs étapes de calcul, celle-ci conduit au comportement asymptotique du MFPT suivant

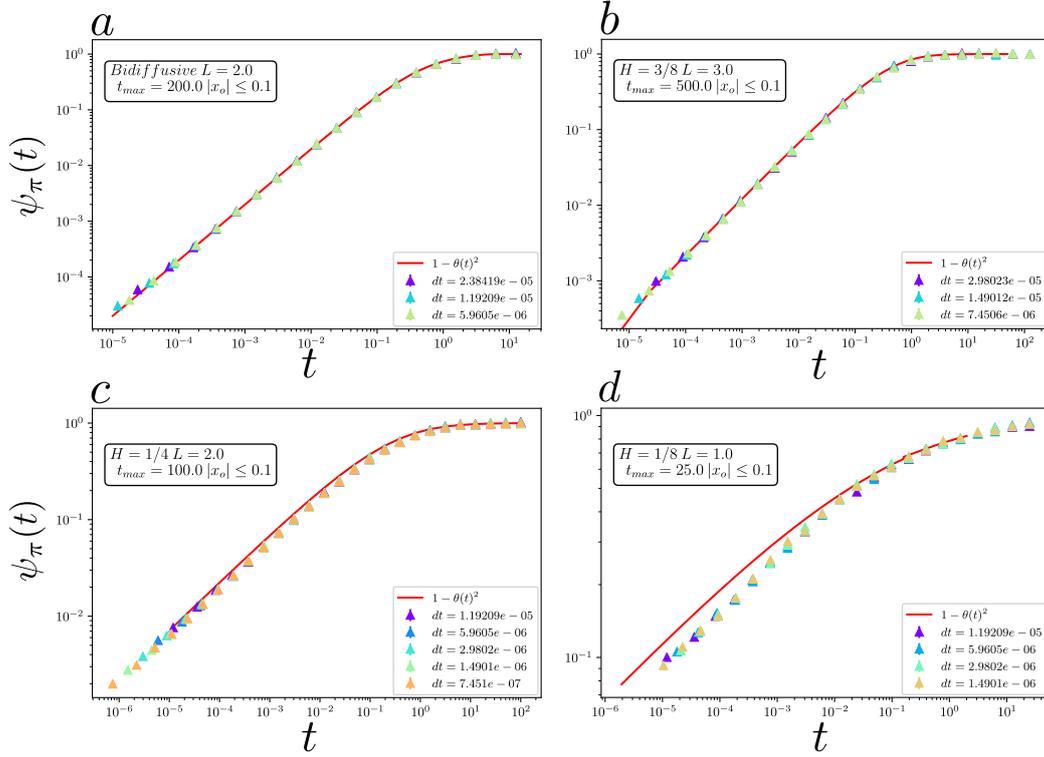


FIG. V.8 Contrôle de l'hypothèse 2 aux temps courts pour le processus bi-diffusif **a**, et les processus fortement corrélés **b-d** en présence d'un piège harmonique. La variance dans le futur du FPT, notée  $\psi_\pi(t)$ , est mesurée pour des trajectoires générées selon différents pas de temps  $dt$ . La variance théorique pour un processus initialement à l'équilibre en  $L$  à  $t = 0$ , est représentée pour ces différents exemples (lignes rouges pleines avec  $l_T = 1$ ). Dès lors, l'hypothèse 2 proposant que  $\psi_\pi(t) \approx 1 - \theta(t)^2$  semble pertinente, y compris dans la limite où  $H$  est faible (ici pour  $H = 1/8$  **d**).

$$\langle T \rangle p_s(L) \sim \frac{A_H}{\kappa^{2H} \left(\frac{L}{l_T}\right)^{\frac{1}{H}-1}}, \quad (\text{V.23})$$

avec  $\kappa = \frac{2}{\Gamma(1+\alpha)\tau_\alpha^\alpha}$ ,  $H = \alpha/2$  et  $A_H = 2^{1/2H}/\mathcal{H}_{2H}$  où  $\mathcal{H}_{2H}$  sont connues sous le nom de constantes de Pickands\*<sup>9</sup> [Pickands, 1969]. Ce comportement asymptotique est représenté à titre indicatif, pour  $H = 1/4$  et  $H = 3/4$  figure V.3. Le comportement asymptotique prédit par (V.23) semble pertinent mais l'exactitude de celui-ci reste difficile à contrôler pour des cibles éloignées, puisque des mesures numériques précises du MFPT sont, en pratique, inaccessibles pour  $L > 4$ .

\*<sup>9</sup> Les détails conduisant à ce résultat peuvent être trouvés dans [Levernier et al., 2020]. La constante de Pickand est obtenue via  $\int_0^\infty dt e^{-f^2(t)/(2t^{2H})}/(2\pi t^{2H})^{1/2}$  où  $f$  est solution de (V.22) pour  $\Gamma(1+\alpha)\tau_\alpha^\alpha = 2$  et  $l_T = 1$

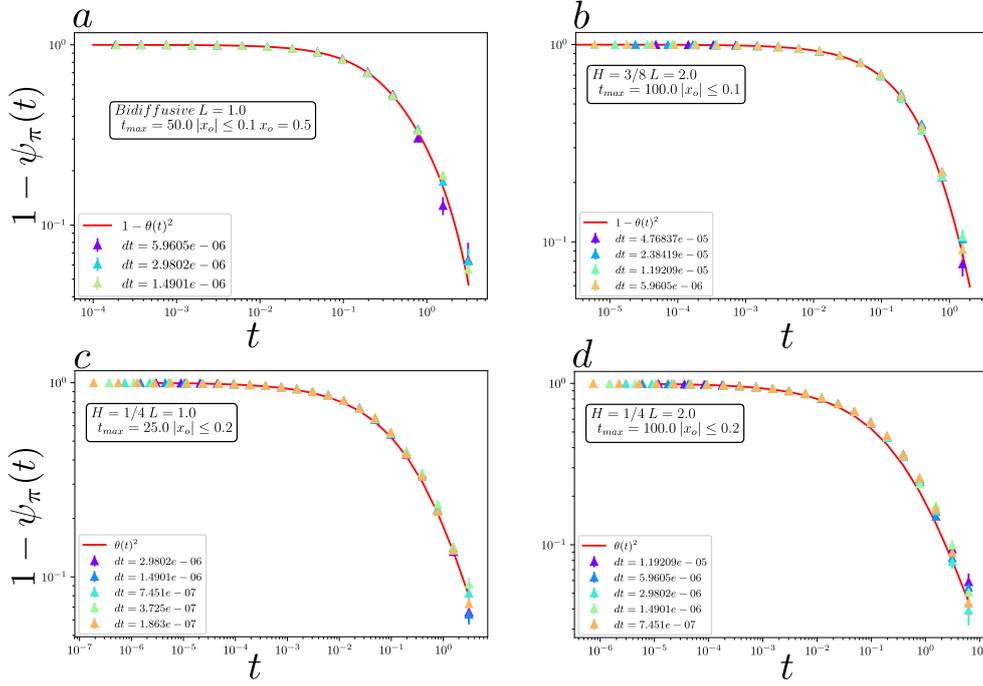


FIG. V.9 Contrôle de l'hypothèse 2 aux temps longs pour le processus bi-diffusif **a**, et les processus fortement corrélés **b-d** en présence d'un piège harmonique. Le comportement asymptotique de la variance dans le futur du FPT, variance notée  $\psi_\pi(t)$ , est mesuré pour des trajectoires générées selon différents pas de temps  $dt$ . La variance théorique pour un processus initialement à l'équilibre en  $L$  à  $t = 0$ , est représentée pour ces différents exemples (lignes rouges pleines avec  $l_T = 1$ ). Dès lors, l'hypothèse 2, qui suppose que  $\psi_\pi(t) \approx 1 - \theta(t)^2$  semble pertinente, y compris dans la limite où  $H$  est faible (ici par exemple pour  $H = 1/8$  **d**).

### c) Effet des conditions initiales sur le comportement du marcheur dans le futur du FPT

Dans les parties précédentes, le comportement du MFPT dans le cas d'une distribution initiale fixée a été évalué mais on peut également considérer le cas d'une position initiale où  $x_0$  est tirée selon la distribution stationnaire  $p_s(x)$ . Tout d'abord, remarquons que le MFPT est aussi fini pour une distribution stationnaire\*<sup>10</sup>. Il est possible d'adapter (V.20) en considérant une distribution initiale stationnaire, ce qui conduit à

$$p_s(L)\langle T \rangle = \int_0^\infty [q_{\pi,s}(L, t) - p_s(L)] dt, \quad (\text{V.24})$$

où  $q_\pi(x, t, x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty F(T, L|x(0) = x_0) p(x, t + \tau|FPT = \tau, x(0) = x_0) p_s(x_0) d\tau dx_0$ . D'autre part, l'hypothèse de covariance stationnaire doit être revisitée. Pour cela, considérons la covariance dans le futur du FPT pour une distribution initiale stationnaire  $\sigma_{\pi,s}(t, t)$  qui peut se déduire du cas  $x_0$  fixé

\*<sup>10</sup> Le MFPT est fini de par le comportement asymptotique de  $\langle T \rangle p_s(L)$  observé pour  $x_0$  fixé.

$$\begin{aligned}
\sigma_{\pi,s}(t, t) &= \int dx_0 p_s(x_0) \langle x(t)x(t') | x_0 \rangle - \int dx_0 p_s(x_0) \langle x(t') | x_0 \rangle_\pi \int dx_0 p_s(x_0) \langle x(t) | x_0 \rangle_\pi \quad (\text{V.25}) \\
&= \int dx_0 p_s(x_0) [\sigma_\pi(t, t' | x_0) + \langle x(t) | x_0 \rangle_\pi \langle x(t') | x_0 \rangle_\pi] - \int dx_0 p_s(x_0) \langle x(t') | x_0 \rangle_\pi \int dx_0 p_s(x_0) \langle x(t) | x_0 \rangle_\pi \\
&= \sigma_\pi(t, t') + \int dx_0 p_s(x_0) \langle x(t) | x_0 \rangle_\pi \langle x(t') | x_0 \rangle_\pi - \int dx_0 p_s(x_0) \langle x(t') | x_0 \rangle_\pi \int dx_0 p_s(x_0) \langle x(t) | x_0 \rangle_\pi,
\end{aligned}$$

puisque  $\sigma_\pi(t, t' | x_0)$  est indépendante de  $x_0$  dans l'approximation de covariance stationnaire (hypothèse 2 et où la notation  $x(0) = x_0$  a été allégée en  $x_0$ ). Un argument similaire peut être explicité pour la position moyenne dans le futur du FPT où  $m_{\pi,s}(t) = \int dx_0 p_s(x_0) \langle x(t) | x_0 \rangle$ .

Dès lors, notre approche s'étend dans le cas d'une distribution initiale stationnaire, sans que l'on puisse, toutefois, déterminer une forme explicite de  $m_{\pi,s}(t)$  et  $\sigma_{\pi,s}(t, t')$ . Dans la limite des temps longs, en injectant le comportement asymptotique de  $\langle x(t) | x_0 \rangle_\pi$  donné par (V.21) et (V.25), on obtient le comportement asymptotique de la covariance dans le cas stationnaire pour  $t, t' \rightarrow \infty$

$$\sigma_{\pi,s}(t, t') \underset{t, t' \gg \tau_D}{\sim} \theta(|t - t'|) + \theta(t)\theta(t').$$

En particulier, cela implique que la variance du propagateur  $q_{\pi,s}(L, t)$  de (V.24), converge plus rapidement que dans le cas d'une position initiale fixée, comportement partagé par  $m_{\pi,s}(t) = o(\theta(t))$ . Les deux comportements asymptotiques ainsi obtenus, confirment encore une fois que le temps moyen de premier passage est fini.

Avant de conclure, remarquons que notre approche s'adapte aussi aux modèles dont les noyaux de friction présentent une décroissance exponentielle. L'analyse du noyau de friction associé au processus bi-diffusif en est un exemple évocateur. Les hypothèses proposées précédemment restent pertinentes, et on propose que le temps moyen du processus bi-diffusif en présence d'un piège harmonique soit aussi donné par (V.20) et (V.19) pour  $\theta(t)$  vérifiant (V.12) (proposition vérifiée figures V.3, V.4, V.5, V.6, V.7, V.8 et V.9).

En conséquence, notre approche apporte une estimation précise du temps moyen de premier passage pour des processus issus d'une équation GLE et cela indépendamment du noyau de friction. Les hypothèses 1 et 2 restent pertinentes pour une large gamme de processus gaussiens (à l'exception de processus fortement sous-diffusifs lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ ).

## V.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a couvert les propriétés de transport et de premier passage, de processus issus d'une équation de Langevin généralisée en présence d'un piège harmonique. Cette équation intervient dans de nombreux processus physiques, qui peuvent s'identifier à une particule évoluant dans un bain de friction complexe. Elle couvre donc des exemples bien plus larges que la physique des polymères. Par ailleurs, ce modèle peut résulter du couplage d'un traceur, dont on cherche à caractériser la dynamique, avec de nombreux degrés de liberté internes qui sont inobservables en pratique. Ce formalisme s'inscrit logiquement dans l'étude de la physique des polymères et plus généralement celle des molécules complexes pour lesquels les multiples couplages entre les différents constituants sont sources d'effets de mémoire importants. Lorsque le nombre de constituants diverge (pour des chaînes de taille infinie), ces différentes interactions constituent alors un noyau de friction global, qui présente alors une décroissance algébrique.

Une première observation que l'on a émise concerne l'importance des propriétés gaussiennes de ces modèles. En particulier, celles-ci permettent de déterminer commodément les propriétés de transport de ces modèles, y compris en présence d'un piège harmonique. Nous avons pris le temps d'illustrer ce constat à travers l'analyse de différents exemples. En particulier, nous avons alors pu déterminer l'ensemble de leurs propriétés à partir d'une unique fonction  $\theta(t)$ , dont la transformée de Laplace peut être aisément déduite de l'équation GLE.

On a ensuite entrepris la caractérisation des propriétés de premier passage de ces modèles. Celles-ci ont nécessité le développement d'une approche propre aux processus gaussiens qui n'avait pas encore été abordée dans cette thèse. Cette approche a été testée sur deux exemples introduits précédemment, dont les effets de mémoire présentaient des comportements asymptotiques très différents.

Les résultats numériques sont particulièrement convaincants et contrastent avec ceux obtenus par les méthodes communément proposées dans la littérature. Rappelons que celles-ci conduisent pour des processus fortement corrélés à un MFPT infini dans la limite des événements rares ( $L \gg l_T$ ). À l'inverse, notre approche prédit un MFPT fini, ce qui est confirmé numériquement par l'analyse des propriétés asymptotiques des marcheurs dans le futur du FPT. Ensuite, relevons que notre étude capture les différences essentielles entre les approximations pseudo-markoviennes et les résultats numériques observés qui conduisent à une erreur conséquente dans l'estimation du MFPT.

En conséquence, on propose d'étendre notre approche à des modèles gaussiens issus d'une équation GLE pour des noyaux de friction arbitraire en présence d'un piège harmonique (dans la limite où le MFPT reste fini). Rappelons que notre approche repose sur deux hypothèses que l'on retrouve dans les analyses récentes de processus gaussiens en l'absence de potentiel, et où elles s'étaient avérées pertinentes. La première suppose que le processus dans le futur du FPT est gaussien, permettant une mesure directe du MFPT à partir de la simple analyse de la position moyenne et de la fonction de covariance des marcheurs dans le futur du FPT.

Par ailleurs, elle conduit à l'identification d'équations autoconsistantes vérifiées par ces derniers ce qui rend possible la détermination numérique, voire exacte, de leurs comportements et donc du MFPT. La seconde consiste à supposer que la covariance du processus dans le futur du FPT est analogue à celle du processus initialement à l'équilibre sur la cible. En pratique, cette hypothèse pourrait être relaxée et une équation intégrale analogue à celle obtenue pour la position moyenne dans le futur du FPT peut être déterminée pour la fonction de covariance. Toutefois, la résolution numérique de celle-ci reste inenvisageable en pratique, de par la non-linéarité de la fonction de covariance. Enfin, la suite de ce chapitre questionne la validité de l'hypothèse 2 perturbativement autour du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. On en conclut que la théorie est exacte à l'ordre 1.

## V.5 Extension : théorie de perturbation

Dans la suite, on va déterminer perturbativement à l'ordre 1 selon  $\epsilon$ , le temps de premier passage d'un processus fortement corrélé (V.13) pour lequel  $2\alpha = H = 1/2 + \epsilon$ . La fonction de covariance stationnaire associée se réécrit sous la forme  $\theta(t) = e^{-t} + \epsilon\theta_1(t)$  (où  $\theta_1$  est donnée par le développement perturbatif de la fonction de Mittag-Leffler de (V.13)). Tout d'abord, considérons la fonction de covariance pour une position initiale fixée qui est alors également caractérisée par  $\theta_1(t)$

$$\begin{aligned}\sigma(t, t') &= \theta(|t - t'|) - \theta(t)\theta(t') \\ &= e^{-|t-t'|} - e^{-t-t'} + \epsilon(\theta_1(|t - t'|) - e^{-t}\theta_1(t') - \theta_1(t)e^{-t'}).\end{aligned}\quad (\text{V.26})$$

Afin d'étudier la validité de l'hypothèse 2, reprenons l'équation à l'origine de notre étude que l'on peut adapter aisément pour la loi à  $N$  points

$$\begin{aligned}p_s(L, t, x_1, t_1 + t, \dots; x_N, t_N + t) \langle T \rangle &= \int_0^\infty dt \left[ q_\pi(L, t; x_1, t_1 + t, \dots; x_N, t_N + t) \right. \\ &\quad \left. - p_s(L, t; x_1, t_1 + t, \dots; x_N, t_N + t) \right].\end{aligned}\quad (\text{V.27})$$

On va dans un premier temps, choisir une condition initiale stationnaire pour  $x_0$  ( $p_s(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ ). Néanmoins notons que ces différentes étapes peuvent être reproduites pour une position initiale fixée. En reprenant (V.27) dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , on obtient une équation en termes de chemin  $y(\tau)$  pour une condition initiale  $y(0) = L$  selon laquelle

$$\langle T \rangle p_s(L) P_{stat}([y(\tau)|y(0) = L]) = \int_0^\infty (\Pi[y[\tau], t] - \Pi_s[y[\tau], t]) dt$$

où  $P_{stat}([y(\tau)|y(0) = L])$  est la probabilité de suivre le chemin  $y(\tau)$  dans l'état stationnaire ;  $\Pi_0[y[\tau]]$  la probabilité de suivre le chemin  $[y]$  à  $t + \tau$  (respectivement, la probabilité que  $x(\tau + t) = y(\tau) \forall \tau > 0$ , conditionnellement à ce que le processus soit initialement dans l'état stationnaire à  $t = 0$ ) et finalement  $\Pi[y[\tau]]$ , la probabilité de suivre  $[y]$  dans le futur du FPT à  $t$  (respectivement, la probabilité que  $x(FPT + \tau + t) = y(\tau) \forall \tau > 0$  conditionnellement à ce que le processus soit initialement dans l'état stationnaire à  $t = 0$  à l'équilibre). On définit alors la fonctionnelle  $F([k])$

$$F([k]) = \int D[y] e^{i \int_0^\infty d\tau k(\tau) y(\tau)} \left[ \langle T \rangle p_s(L) P_{stat}([y(\tau)|y(0) = L]) - \int_0^\infty \Pi[y[\tau], t] - \Pi_s[y[\tau], t] dt \right],$$

qui s'annule pour toutes fonctions  $[k]$ . En supposant que le processus dans le futur du FPT est un processus gaussien, les formules d'intégration propres aux processus gaussiens conduisent à

$$\begin{aligned}
F([k]) = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{(m_\pi(t)-L)^2}{2\gamma(t,t)}}}{\sqrt{2\pi\gamma(t,t)}} & \left[ e^{i \int_0^\infty d\tau k(\tau) A_\pi(t,\tau) - \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty k(\tau)k(\tau') B_\pi(t,\tau,\tau')} \right. \\
& \left. - e^{i \int_0^\infty d\tau k(\tau) m_s(\tau) - \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty k(\tau)k(\tau') \sigma_s(\tau,\tau')} \right] \\
- \frac{e^{-\frac{L^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} & \left[ e^{i \int_0^\infty d\tau k(\tau) A_s(t,\tau) - \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty k(\tau)k(\tau') B_s(t,\tau,\tau')} \right. \\
& \left. - e^{i \int_0^\infty d\tau k(\tau) m_s(\tau) - \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty k(\tau)k(\tau') \sigma(\tau,\tau')} \right],
\end{aligned}$$

où  $\langle T \rangle p_s(L)$  a été remplacé en utilisant (V.20). Explicitons les multiples notations introduites ci-dessus. La distribution des chemins  $\Pi$  est caractérisée dans l'état stationnaire par la position moyenne et la covariance dans l'état stationnaire notées  $m_s(t)$  et  $\sigma_s(t, t')$ . On définit de manière similaire dans le futur du FPT  $m_\pi(t)$  et  $\gamma(t, t')$ . Enfin les quantités  $A_s$  et  $B_s$  décrivent respectivement la position moyenne et la covariance du marcheur, initialement à l'équilibre stationnaire, conditionnellement à ce qu'il ait été en  $L$  à  $t$ . De même pour  $A_\pi$  et  $B_\pi$  dans le futur du FPT conditionnellement à ce qu'il ait été sur la cible en  $L$  à  $t^{*11}$ . Notons que  $\gamma$ ,  $m_\pi(t)$ ,  $A_\pi$  et  $B_\pi$  dépendent aussi du choix de la condition initiale. En utilisant les formules de projections propres aux processus gaussiens,  $A_\pi$ ,  $B_\pi$ ,  $A$  et  $B$  peuvent être exprimées selon  $\gamma$ ,  $m_\pi(t)$ ,  $\sigma(t, t)$  et  $m_0(t)$  :

$$\begin{cases} A_\pi = m(t + \tau) + (L - m(t)) \frac{\gamma(t+\tau, t)}{\gamma(t, t)}, & B_\pi(t, \tau, \tau') = \gamma(t + \tau, t + \tau') - \frac{\gamma(t, t+\tau)\gamma(t, t+\tau')}{\gamma(t, t)} \\ A_s = L\theta(\tau), & B_s(t, \tau, \tau') = \theta(|\tau - \tau'|) - \theta(\tau)\theta(t, t + \tau') \end{cases}$$

La fonctionnelle  $F([k])$  s'annule à l'ordre  $\epsilon^0$ , conséquence directe des propriétés markoviennes du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Le développement à l'ordre  $\epsilon$  conduit à

$$F([k]) = \epsilon \left( \int d\tau k(\tau) Q_{1s}(t, \tau) + \int \int d\tau dt k(\tau) k(\tau') Q_{2s}(t, \tau, \tau') \right), \quad (\text{V.28})$$

où  $Q_{2s}$  et  $Q_{1s}$  vérifient pour une condition initiale stationnaire

$$\begin{aligned}
Q_{1s} = iB_0 \int_0^\infty dt \frac{e^{-L^2 \frac{(1-e^{-t})^2}{2(1-e^{-2t})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t})}} & \left( m_1(t + \tau) - m_1(t)e^{-\tau} - L\sigma_1(t, t + \tau) \frac{(e^{-t} - 1)}{1 - e^{-2t}} \right. \\
& \left. + L\sigma_1(t, t)e^{-\tau} \frac{(e^{-t} - 1)}{1 - e^{-2t}} - m_{s1}(\tau) \right)
\end{aligned}$$

---

\*11 Notons que indépendamment de la position initiale le processus est supposé être initialement à l'équilibre.

et

$$Q_{2s} = \frac{-1}{2} B_0 \int_0^\infty dt \frac{e^{-L^2 \frac{(1-e^{-t})^2}{2(1-e^{-2t})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t})}} \left( \gamma_1(t+\tau, t+\tau') - \gamma_1(t, t+\tau)e^{-\tau'} - \gamma_1(t, t+\tau')e^{-\tau} \right. \\ \left. + e^{-\tau-\tau'} \gamma_1(t, t) - \sigma_1(\tau, \tau') \right),$$

où  $B_0 = e^i \int_0^\infty d\tau k(\tau) L e^{-\tau} - \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty d\tau' d\tau k(\tau') k(\tau) e^{-|\tau-\tau'|} - e^{-\tau-\tau'}$  est un préfacteur strictement positif. Ici, on a défini les expansions à l'ordre  $\epsilon$ ,  $\sigma_1$ ,  $\gamma_1$ ,  $m_1$  et  $m_{s1}$  de  $\sigma$ ,  $\gamma$ ,  $m$ , et  $m_s$  respectivement. Pour que la fonctionnelle (V.28) puisse s'annuler pour toute fonction  $k$ , les deux intégrales doivent nécessairement s'annuler. Commençons par  $Q_{2s}$ , on déduit  $\sigma_1$  de (V.26)

$$\sigma_1(t, t') = \theta_1(|t - t'|) - e^{-t} \theta_1(t') - \theta_1(t) e^{-t'}.$$

En utilisant cette expression, on remarque que :

$$\sigma_1(t+\tau, t+\tau') - \sigma_1(t, t+\tau)e^{-\tau'} - \sigma_1(t, t+\tau')e^{-\tau} + e^{-\tau-\tau'} \sigma_1(t, t) - \sigma_1(\tau, \tau') = 0,$$

ce qui implique que  $Q_{2s}$  s'annule pour  $\gamma_1(\tau, \tau') = \sigma_1(\tau, \tau')$ . Ainsi, on trouve que l'hypothèse principale 2 (hypothèse selon laquelle la covariance dans le futur du FPT est égale à la covariance du processus débutant à  $L$  à l'équilibre), est exacte à l'ordre 1. On revient ensuite à  $Q_{1s}$  où désormais  $\gamma_1 = \sigma_1$ . Afin d'obtenir une théorie exacte à l'ordre 1, l'expansion  $m_1(t)$  doit être solution de l'équation intégrale suivante

$$\int_0^\infty K(t) (m_1(t+\tau) + m'_1(t+\tau)) dt = H(\tau), \quad (\text{V.29})$$

où  $K(t)$  est donnée par

$$K(t) = \frac{e^{-L^2 \frac{(1-e^{-t})^2}{2(1-e^{-2t})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t})}},$$

et  $H_s(\tau)$

$$H_s(\tau) = \int_0^\infty \frac{e^{-L^2 \frac{(1-e^{-t})^2}{2(1-e^{-2t})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t})}} \left( \frac{L[\sigma'_1(t, t+\tau) + \sigma_1(t, t+\tau)](e^{-t} - 1)}{1 - e^{-2t}} + m_{s1}(\tau) + m_{s1}(\tau') \right) dt.$$

Il est alors possible d'extraire  $m_1$  de (V.29). Le détail de notre approche peut être retrouvé en annexe J. On obtient finalement une expression explicite pour  $m_1(t)$

$$m_1(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{F_{st}(x)}{p_s(L)} \frac{e^{-L^2 \frac{(1-e^{-t_1})^2}{2(1-e^{-2t_1})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t_1})}} \frac{L e^{-t_1} (1 - e^{-t_1})}{1 - e^{-2t_1}} \\ \left[ (\theta'_1(x + t_1 + t) - \theta'_1(t_1 + x) e^{-t} + \theta'_1(x + t) - e^{-t} \theta'_1(x)) \right] dx dt_1,$$

où  $F_{st}(x)$  est la distribution de premier passage d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour une distribution initiale stationnaire. L'expression de  $m_1(t)$  peut être ensuite utilisée afin de déterminer le développement perturbatif du MFPT à l'ordre 1 selon  $\epsilon$  pour une condition initiale stationnaire

$$\mathcal{F}_s(L) = \int_0^\infty \frac{e^{-L^2 \frac{(1-e^{-t})^2}{2(1-e^{-2t})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t})}} \left( \frac{L(1-e^{-t})}{1-e^{-2t}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{F_{st}(x)}{p_s(L)} \frac{e^{-L^2 \frac{(1-e^{-t_1})^2}{2(1-e^{-2t_1})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t_1})}} \frac{Le^{-t_1}(1-e^{-t_1})}{1-e^{-2t_1}} \right. \\ \left. \left[ (\theta'_1(x+t_1+t) - \theta'_1(t_1+x)e^{-t} + \theta'_1(x+t) - e^{-t}\theta'_1(x)) \right] dx dt_1 \right. \\ \left. - 2\theta_1(t)e^{-t} \left[ \frac{L^2(1-e^{-t})^2}{2(1-e^{-2t})^2} - \frac{1}{2(1-e^{-2t})} \right] \right) dt.$$

Notons qu'une approche similaire peut être développée pour une distribution initiale fixée selon  $x_0$  (le cas  $x_0 = 0$  peut être retrouvé en annexe J.5). Ensuite, remarquons que le résultat exact ainsi obtenu dépend de la distribution de premier passage d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck initialement dans l'état stationnaire. À notre connaissance, il n'existe pas d'expression explicite de celle-ci et on se propose donc de déterminer  $m_1(t)$  et  $\mathcal{F}_s(L)$  numériquement (les détails de notre étude peuvent être retrouvés en annexes J.2, J.3 et J.4). Remarquons que les comportements de  $m_1(t)$  et  $\sigma_1(t, t)$  peuvent être obtenus à partir du développement perturbatif de la fonction de Mittag-Leffler. Celui-ci peut être déterminé pour des processus fortement corrélés mais aussi pour des fonctions de covariance quelconque. Ainsi, nous avons confirmé la validité de notre approche perturbativement à l'ordre 1 autour du processus d'Ornstein-Uhlenbeck.



# VI – Relations entre temps de premier passage et géométrie du territoire visité

## VI.1 Introduction

Les résultats que nous avons établis précédemment ont largement abordé les propriétés de transport et de premier passage des marches à renforcement. Le chapitre 2 a notamment révélé l'impact des effets de vieillissement sur les propriétés asymptotiques de premier passage en espace infini. Cette analyse a souligné l'importance du territoire visité dans la compréhension des événements de premier passage. Dans ce chapitre, on cherchera à affiner cette observation en étudiant les connexions possibles entre événement de premier passage et géométrie du territoire visité.

Avant tout, remarquons que peu de travaux abordent la question de la géométrie du territoire visité à l'instant du premier passage. Cela est dû à la complexité intrinsèque des propriétés de premier passage, qu'il est déjà difficile de déterminer, sans également considérer le territoire couvert pour le marcheur. Pourtant, la géométrie du territoire visité présente des propriétés spécifiques, dont la compréhension a non seulement un intérêt théorique propre, mais peut se révéler pertinente dans de multiples situations physiques [Berezhkovskii et al., 1989; Hughes, 1995; Larralde et al., 1992; Weiss, 1994]. De plus, nous verrons que plusieurs résultats peuvent être établis, y compris pour des processus non markoviens.

Ainsi, dans un premier temps, on se penchera sur la détermination de la loi jointe du temps de premier passage et du territoire visité. Puis on s'intéressera à la géométrie générale du territoire visité en l'absence d'évènement de premier passage. Plus particulièrement, on cherchera à caractériser la position relative du centre du territoire visité par rapport à la position initiale du marcheur. On verra par la suite que ces deux problèmes sont intimement liés aux observables de premier passage étudiées au cours des chapitres précédents.

Ensuite, l'étude des propriétés des marches à renforcement en confinement a révélé l'émergence d'effets de vieillissement en dimension supérieure ou égale à 3, lorsqu'une partie non négligeable du volume a été visitée (chapitre 4). Nous avons montré que ces effets ne modifient pas le temps caractéristique de la distribution de premier passage dans la limite des grands volumes.

Toutefois, nous verrons que ceux-ci jouent un rôle crucial dans le comportement d'échelle d'une autre observable, communément appelée *temps de couverture*. Celui-ci est défini comme le temps nécessaire au marcheur pour couvrir l'intégralité du domaine confinant. Sa détermination reste un problème classique de la théorie des marches aléatoires. Par ailleurs, cette observable a des applications claires pour un large éventail d'exemples, et ce, à diverses échelles, telles que la recherche de séquences spécifiques d'ADN par les protéines, jusqu'aux mouvements d'animaux en quête de nourriture et aux robots nettoyeurs qui doivent couvrir intégralement une zone. Afin de déterminer le comportement asymptotique de la distribution du temps de couverture, on propose de reprendre l'approche développée dans [Chupeau et al., 2015] et de l'adapter aux marches à renforcement.

L'étude de ces questions sera poursuivie après la rédaction de cette thèse et différentes perspectives d'extensions seront mentionnées dans ce chapitre.

## VI.2 Statistiques jointes des explorations temporelles et spatiales des marcheurs aléatoires en dimension 1

*Les travaux que l'on va présenter ici peuvent être retrouvés dans [Klinger et al., 2021a] et ont été réalisés en collaboration avec Jérémie Klinger doctorant au laboratoire de physique théorique de la matière condensée à Sorbonne Université Paris.*

### VI.2.1 Connexions entre territoire exploré et problème de premier passage

Comme nous l'avons observé, la quantification de l'efficacité d'une exploration réalisée par des marcheurs aléatoires reste une question clé, et est impliquée dans de nombreux problèmes physique. Les applications sont nombreuses et couvrent des exemples qui vont des particules réactives diffusantes en présence de sites catalytiques, des organismes vivants en quête de nourritures, aux robots nettoyeurs ou démineurs explorant un territoire délimité [Bénichou et al., 2011 ; Hughes, 1995 ; Viswanathan et al., 2008]. Dans ce contexte, on peut définir deux classes importantes d'observables :

- Les problèmes de temps de premier passage de sites ciblés, largement abordés dans cette thèse, jouent un rôle clé dans la caractérisation de la *cinétique* des modèles d'exploration [Bray et al., 2013 ; Metzler et al., 2014 ; Redner, 2001]. En particulier, l'étude des temps de premier passage dans des domaines confinés s'est révélée pertinente afin d'évaluer l'efficacité de différents processus de recherche de cible [Bénichou et al., 2014 ; Cheviakov et al., 2010 ; Condamin et al., 2007a ; Schuss et al., 2007]. Dans ce contexte, des observables connexes, comme le temps de couverture d'un domaine [Brummelhuis, 1991 ; Brummelhuis et al., 1991 ; Chupeau et al., 2015] ou le temps d'occupation d'un sous-domaine ont également été considérées [Burov et al., 2007 ; Bénichou et al., 2005 ; Condamin et al., 2008 ; Weiss et al., 1996].
- Une deuxième catégorie d'observables, peu abordée dans cette thèse, s'intéresse plus particulièrement à la *géométrie* du territoire exploré par les marcheurs. En particulier, le nombre de sites distincts visités après  $n$  pas (ou l'équivalent continu communément appelé saucisse de Wiener), qui quantifie le territoire global couvert par le marcheur

aléatoire, a été la source de nombreuses études qui couvrent un large spectre d'applications [Berezhkovskii et al., 1989; Hughes, 1995; Larralde et al., 1992; Weiss, 1994]. Parmi les extensions notables, on peut citer le nombre de sites distincts visités par  $p$  marcheurs indépendants [Larralde et al., 1992], le cas des géométries fractales [D.Ben-Avraham et al., 2000; Zschokke, 1986], ou le cas des temps d'arrêt aléatoires [Dayan et al., 1992; Kearney et al., 2005; Klinger et al., 2021b; Krapivsky et al., 2010]. Certaines des caractéristiques de la géométries du territoire visité sont parfois étudiées indépendamment du temps que met le marcheur à découvrir un nombre de sites donnés. La probabilité de *splitting*, définie comme la probabilité d'atteindre  $x$  avant 0 en dimension 1 pour un marcheur initialement en  $x_0$  [Majumdar et al., 2010], mais aussi la dimension fractale du territoire visité ou de son périmètre en sont des exemples [Ordemann et al., 2001].

Bien qu'il soit clair que ces deux classes d'observables sont intimement liées, les propriétés que l'on qualifie sommairement de *cinétiques* et *géométriques* de l'exploration ont été principalement discutées indépendamment (avec les exceptions notables de [Randon-Furling et al., 2007; Wiese, 2020]). Qualitativement, le temps de premier passage d'une cible d'un processus stochastique générique contient une information sur le territoire visité avant d'atteindre celle-ci. Sommairement, *de grandes valeurs de temps de premier passage impliquent de grandes valeurs du territoire visité*. Cependant, une analyse approfondie de cette connexion fait encore défaut.

On va plus précisément chercher à caractériser les propriétés de la loi *jointe* du *temps de premier passage* vers une cible et du *nombre de sites distincts visités* lorsque celle-ci est atteinte. Cette loi jointe quantifie le couplage évoqué auparavant et elle donne accès à une caractérisation plus fine des trajectoires de recherche d'une cible. En particulier, la distribution de cette nouvelle observable donne lieu à deux distributions conditionnelles qui permettent de répondre aux questions suivantes :

- Quel est le territoire visité par un marcheur aléatoire sachant qu'il a atteint une cible à un temps donné ?
- Combien de temps faut-il à ce marcheur pour atteindre une cible sachant qu'il a visité un nombre donné de sites distincts antérieurement ?

Ces quantités peuvent avoir des applications dans de multiples situations où seule une information partielle – cinétique ou géométrique – sur les trajectoires est accessible. Reformulé grossièrement, (i) dis-moi quand tu es arrivé, je te dirai quelle surface tu as parcourue, et (ii) dis-moi quelle surface tu as parcourue, je te dirai quand tu es arrivé.

### VI.2.2 Définition de la loi jointe

On cherchera à déterminer la distribution jointe\*<sup>1</sup>  $\sigma(s, n|s_0)$  du FPT  $n$  au site cible 0 et du nombre  $s$  de sites distincts visités par des marches  $1d$  partant de  $s_0$ . Notons que l'on peut définir de manière équivalente la loi jointe pour des processus continus  $\sigma(x, t|x_0)$  (figure VI.1).

Par ailleurs, afin de rendre plus explicite l'importance de  $\sigma(s, n|s_0)$  sur les questions énoncées ci-dessus, définissons  $G_{sp}(s|n, s_0)$ , la probabilité conditionnelle que le nombre de sites distincts visités soit égal à  $s$ , sachant que le marcheur atteint la cible en 0 après  $n$  pas

$$G_{sp}(s|n, s_0) = \frac{\sigma(s, n|s_0)}{\sum_{s'=s_0}^{\infty} \sigma(s', n|s_0)} \equiv \frac{\sigma(s, n|s_0)}{F_0(n|s_0)}, \quad (\text{VI.1})$$

où  $F_0(n|s_0)$  est la distribution de premier passage usuelle. Ensuite, introduisons,  $G_{tm}(n|s, s_0)$ , la distribution conditionnelle du FPT, sachant que  $s$  sites distincts ont été visités avant que la cible en 0 soit atteinte

$$G_{tm}(n|s, s_0) = \frac{\sigma(s, n|s_0)}{\sum_{n'=0}^{\infty} \sigma(s, n'|s_0)} \equiv \frac{\sigma(s, n|s_0)}{\mu_0(s|s_0)}, \quad (\text{VI.2})$$

où  $\mu_0(s|s_0)$  est la distribution du maximum  $s$  avant d'atteindre 0. Les connexions entre la loi jointe et les distributions usuelles, associées respectivement aux problèmes du FPT et de géométrie, apparaissent explicitement au travers de ces deux définitions. Dès lors, la loi jointe contient également toute l'information de ces observables, et ce, pour les deux catégories de problèmes. D'autre part, elle permet de rendre explicites les connexions entre territoire exploré et problème de premier passage.

Tout d'abord, notons qu'il est possible d'obtenir des expressions exactes de  $\sigma(s, n|s_0)$  pour plusieurs exemples phares de processus markoviens, tels que les marches aléatoires simples symétriques et biaisées, les marches aléatoires persistantes [Hughes, 1995 ; Weiss, 1994] ou des marches aléatoires capables de se réinitialiser [De Bruyne et al., 2020 ; Evans et al., 2011 ; Evans et al., 2020]. L'approche générale qui permet d'obtenir ces différents résultats est développée dans [Klinger et al., 2021a] et s'applique à des processus markoviens discrets ou continus (en espace et temps), évoluant dans un domaine semi-infini ou fini.

Dans ce chapitre, on s'intéressera spécifiquement aux processus non markoviens. Tout d'abord, de manière analogue au chapitre 4, on va déterminer un comportement d'échelle vérifié par  $\sigma(s, n|s_0)$  dans la limite  $s, n$  grands. Ce comportement d'échelle capture alors la dépendance générale de  $\sigma$ , selon les différents paramètres  $s_0$ ,  $s$  et  $n$ . Le résultat obtenu sera vérifié sur différents exemples de processus non markoviens, dont les mouvements browniens fractionnaires évoqués dans le chapitre précédent. Ensuite, on s'attardera sur deux applications de ce résultat. Premièrement, on s'intéressera à l'efficacité d'une réaction catalytique générique [Rosenstock, 1961], pour laquelle on peut dériver la probabilité qu'une particule diffusante, ait réagi avec une cible distribuée selon une loi de Poisson dans un domaine avant d'en sortir à un temps  $n$ . Nous verrons que cette probabilité de réaction est contrôlée de manière critique par le temps de sortie  $n$  du domaine. En second lieu, on se penchera sur l'importance de la distribution jointe,  $\sigma(s, n|s_0)$ , sur les propriétés de premier passage des marches à renforcement [Amit et al., 1983 ; Pemantle, 2007]. Plus précisément, on montrera que l'on peut déduire de la loi jointe le comportement exact aux temps longs de la distribution de premier passage de la marche SATW [Sapozhnikov, 1994] dont on avait déterminé l'exposant de persistance en dimension 1 dans le chapitre 2.

---

\*1 Cette loi ne doit pas être confondue avec la distribution jointe du maximum et du temps pour atteindre celui-ci, obtenue pour un mouvement brownien dans [Randon-Furling et al., 2007]

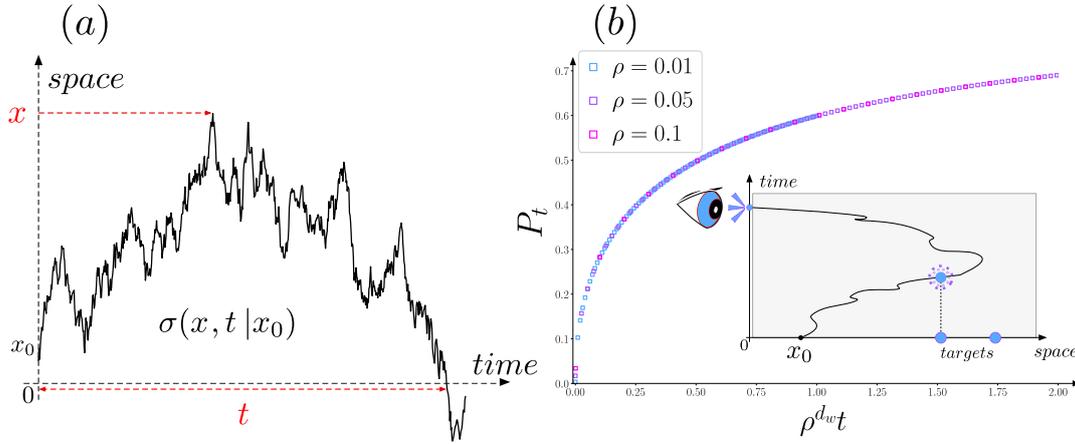


FIG. VI.1 Définition de la loi jointe et ses applications. **a** Partant de  $x_0$ , le marcheur aléatoire (ici un mouvement brownien) atteint 0 pour la première fois au temps  $t$ , après avoir exploré jusqu'à une distance  $x$  de l'origine. La loi jointe  $\sigma(x, t | x_0)$  est la densité de probabilité associée à ces deux événements. **b** Considérons un chercheur aléatoire évoluant dans un domaine inobservable (ici grisé) qui contient des cibles distribuées selon une loi de Poisson de densité  $\rho$ . Ayant pour seule information le temps  $t$  de retour, il est possible de déterminer la probabilité  $P_t$  de rencontrer l'une de ces cibles selon la variable adimensionnée  $\rho^{d_w} t$ .

### VI.2.3 Comportement d'échelle de la loi jointe

Intéressons-nous au comportement de la loi jointe dans la limite  $n$  et  $s$  grands. On cherche à déterminer un comportement d'échelle général vérifié par des processus symétriques quelconques. Puisque l'on s'intéresse à des limites de temps et d'espaces grands, on adoptera un formalisme continu décrit par les variables  $x$ ,  $x_0$  et  $t$ . Commençons par définir  $F_{\underline{0},x}(t|x_0)$  la densité de probabilité d'atteindre 0 avant  $x$  pour la première fois à l'instant  $t$ . Puisque les marcheurs ayant atteint 0 avant  $x$  ont nécessairement couvert un territoire de taille inférieure à  $x$ , l'intégration de la loi jointe de  $x_0$  jusqu'à  $x$  est égale à  $F_{\underline{0},x}(t|x_0)$ , ce qui conduit à

$$\sigma(x, t | x_0) = D_x F_{\underline{0},x}(t | x_0), \quad (\text{VI.3})$$

où  $D_x$  est l'opérateur différentiel selon  $x$ . Afin de déterminer le comportement d'échelle de  $F_{\underline{0},x}(t|x_0)$  à partir de (VI.3), on propose de réadapter le raisonnement développé pour les explorations compactes en présence d'une cible (chapitre 4) et dont des approches similaires peuvent être retrouvées dans [Levernier et al., 2018 ; Majumdar, 2010]. Pour cela, rappelons que le temps typique pour atteindre la position  $x$  est donné par  $T_{typ} \propto x^{d_w}$  (où  $d_w$  est la dimension de la marche). Pour des temps plus faibles que  $T_{typ}$ , les marcheurs qui atteignent  $x$  avant 0 ne contribuent pas à la probabilité  $F_{\underline{0},x}(t|x_0)$ . Celle-ci se comporte donc comme la densité de temps de premier passage  $F_{\underline{0}}(t|x_0)$  avec une unique cible en 0.

On suppose ensuite que  $F_{\underline{0}}(t|x_0)$  présente une décroissance algébrique dans la limite des temps longs, caractérisée par l'exposant de persistance  $\theta$  du processus [Bray et al., 2013]

$$F_{\underline{0}}(t|x_0) \sim k(x_0)t^{-(\theta+1)},$$

où  $k(x_0) \propto x_0^{d_w\theta}$  pour  $x_0 \gg 1$ . De manière similaire, au chapitre précédent, les marcheurs qui interagissent avec  $x$  et qui composent  $F_{\underline{0},x}(t|x_0)$  sont alors décrits par la variable  $T_{typ}$ .

Autrement dit, on peut introduire une fonction de coupure différentiable  $g(\frac{t}{T_{typ}})$ , telle que  $g(y)$  s'annule pour  $y$  grand et  $F_{\underline{0},x}(t|x_0) \sim F_{\underline{0}}(t|x_0)g(\frac{t}{x^{d_w}})$ . En injectant ce comportement dans (VI.3), on obtient alors le comportement d'échelle de la loi jointe attendu dans la limite  $x \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$  pour  $\tau = t/x^{d_w}$  fixé

$$\sigma(x, t|x_0) \sim \frac{h(x_0)}{x^{d_w(\theta+1)+1}} f(\tau), \quad (\text{VI.4})$$

où  $h(x_0) \propto k(x_0) \propto x_0^{d_w\theta}$  pour  $x_0 \gg 1$ , et  $f$  est une fonction normalisée ( $\int_0^\infty f(\tau)d\tau = 1$ ) qui dépend du processus. Prenons le temps de commenter ce résultat :

- Tout d'abord, l'intégration de l'équation (VI.4) selon la variable  $t$  permet d'obtenir la distribution du maximum avant d'atteindre 0, notée  $\mu_0(x|x_0) = h(x_0)x^{-(d_w\theta+1)}$ . Ensuite, relevons que ce résultat est en accord avec la prédiction émise dans [Majumdar, 2010] qui se concentre sur le comportement asymptotique de la probabilité de *splitting*  $\pi_{0,x}(x_0)$ , définie comme la probabilité d'atteindre  $x$  avant 0.
- D'autre part, il est possible de donner une interprétation physique simple de  $f(\tau)$ . En reprenant la probabilité conditionnelle (VI.2), on obtient  $G_{tm}(t|x, x_0) \sim \frac{1}{x^{d_w}} f(\tau)$ . Ainsi,  $f(\tau)$  est la la distribution conditionnelle (VI.2) à  $x$  fixé, réexprimée selon la variable  $\tau$ . Cette dernière observation justifie l'indépendance de  $f$  selon  $x_0$ .
- De plus, de manière analogue à la distribution de premier passage en confinement pour des explorations compactes, les effets de vieillissement n'apparaissent pas explicitement dans le comportement d'échelle de  $f$ . En revanche, ceux-ci peuvent altérer la valeur de l'exposant de persistance comme ce qui a été largement examiné dans le chapitre 2.
- Enfin, notons que les marcheurs qui atteignent  $x$  avant 0 puis reviennent en 0 sont nécessairement décrits par la variable  $T_{typ} \sim x^{d_w}$ . Ce résultat est obtenu avec un raisonnement similaire à celui développé pour le cas des explorations compactes en confinement dans le chapitre 4. Il s'étend donc sans difficulté aux modèles à renforcement\*<sup>2</sup>. On retrouve l'observation qualitative énoncée précédemment qui associe grand temps et grand territoire visité, y compris en présence d'une cible absorbante.

---

\*<sup>2</sup> À l'exception des marches à renforcement attractif sous-diffusives qui présentent une décroissance de la probabilité de survie plus forte que n'importe quelle loi de puissance.

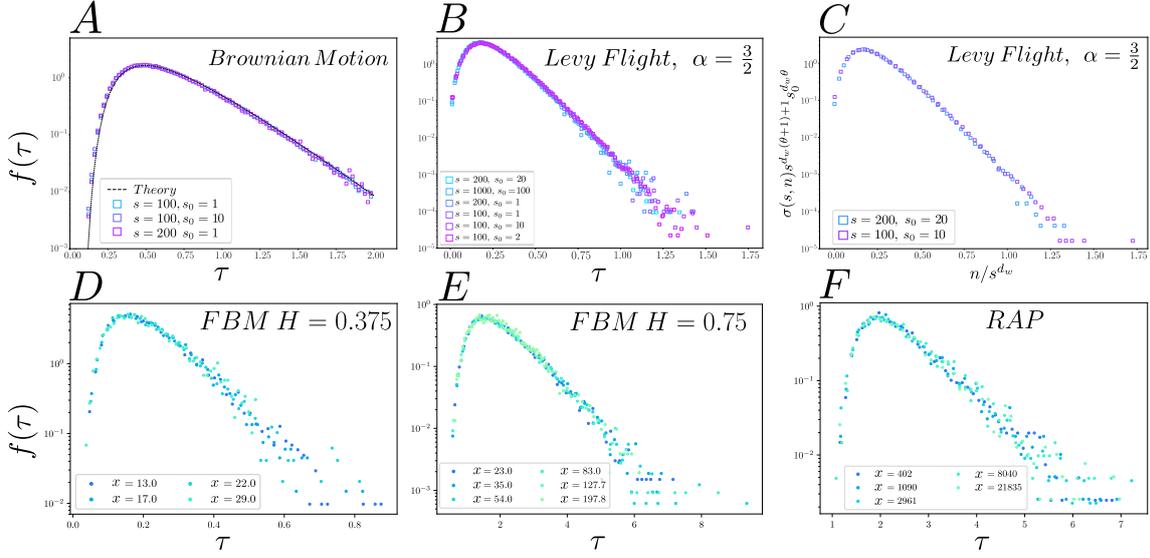


FIG. VI.2 **A,B** Loi conditionnelle selon la variable redimensionnée,  $\tau = t/x^{d_w}$ , pour le mouvement brownien de coefficient de diffusion  $\frac{1}{2}$  et la marche de Riemann d'exposant de Lévy  $\frac{3}{2}$ . Chaque distribution est représentée pour une valeur fixée de  $s$  et converge pour les grandes valeurs de  $n$  vers une fonction dépendante du processus, mais indépendante de  $x_0$ . **C** Convergence des distributions de la loi jointe  $\sigma(s, n|s_0)$  prédit par (VI.4) **D, E, F** convergence de la loi conditionnelle pour le Random Acceleration Process à partir de  $x_0 = 1$  et de deux mouvements browniens fractionnaires à partir de  $x_0 = 1$ .

La relation (VI.4) est confirmée numériquement (figure VI.2) pour des exemples représentatifs, à la fois des processus markoviens (marches aléatoires simples<sup>\*3</sup> et marches de Riemann qui sont les équivalents des vols de Lévy en espace et temps discrets [Hughes, 1995]), et des processus non markoviens (mouvement brownien fractionnaire [Mandelbrot et al., 1968] et un processus dérivé de l'intégration d'un mouvement brownien appelé Random Acceleration Process [Bicout et al., 2000]<sup>\*4</sup>).

Un raisonnement similaire peut être mené afin d'obtenir la seconde distribution conditionnelle définie dans (VI.1). On propose ici, de la déduire directement de (VI.4). À ce titre, on modifie (VI.4) de la manière suivante :

$$\sigma(x, t|s_0) \sim \frac{h(x_0)}{t^{\theta+1+1/d_w}} \left( \frac{t}{x^{d_w}} \right)^{1+\theta+1/d_w} f \left( \frac{t}{x^{d_w}} \right).$$

En définissant maintenant  $g(u) = u^{-(d_w(\theta+1)+1)} f(u^{-d_w})$  et  $\phi(u) = \frac{g(u)}{\int_0^\infty g(x) dx}$  on obtient alors

<sup>\*3</sup> Notons que, dans le cas de marches aléatoires simples,  $f(\tau)$  peut être déterminée explicitement ce qui amène après plusieurs étapes de calcul à  $f_{BM}(\tau) = 2D\pi^2 \sum_{k=1}^\infty e^{-(k\pi)^2 D\tau} k^2 [2(k\pi)^2 D\tau - 3]$  [Klinger et al., 2021a]. D'autre part cette distribution conditionnelle asymptotique est valable pour toute marche aléatoire markovienne symétrique satisfaisant le théorème central limite.

<sup>\*4</sup> Les définitions de ces processus et les détails des simulations peuvent être retrouvés en annexe H.4.

$$\sigma(x, t|s_0) \sim \frac{h(x_0)}{t^{\theta+1}} \left[ \int_0^\infty g(u) du \right] \frac{1}{t^{\frac{1}{d_w}}} \phi \left( \frac{x}{t^{\frac{1}{d_w}}} \right),$$

où  $\phi$  est normalisée, ce qui permet d'en déduire la distribution conditionnelle attendue

$$G_{sp}(x|t, s_0) \sim \frac{1}{t^{\frac{1}{d_w}}} \phi \left( \frac{x}{t^{\frac{1}{d_w}}} \right),$$

où la densité de la variable dimensionnée  $\chi = x/t^{1/d_w}$  peut être déduite de  $f$  selon

$$\phi(\chi) = \frac{\chi^{-d_w(\theta+1)-1} f(\chi^{-d_w})}{\int_0^\infty u^{-d_w(\theta+1)-1} f(u^{-d_w}) du},$$

ce qui est vérifiée figure VI.3. On va ensuite examiner des applications directes de ces propriétés.

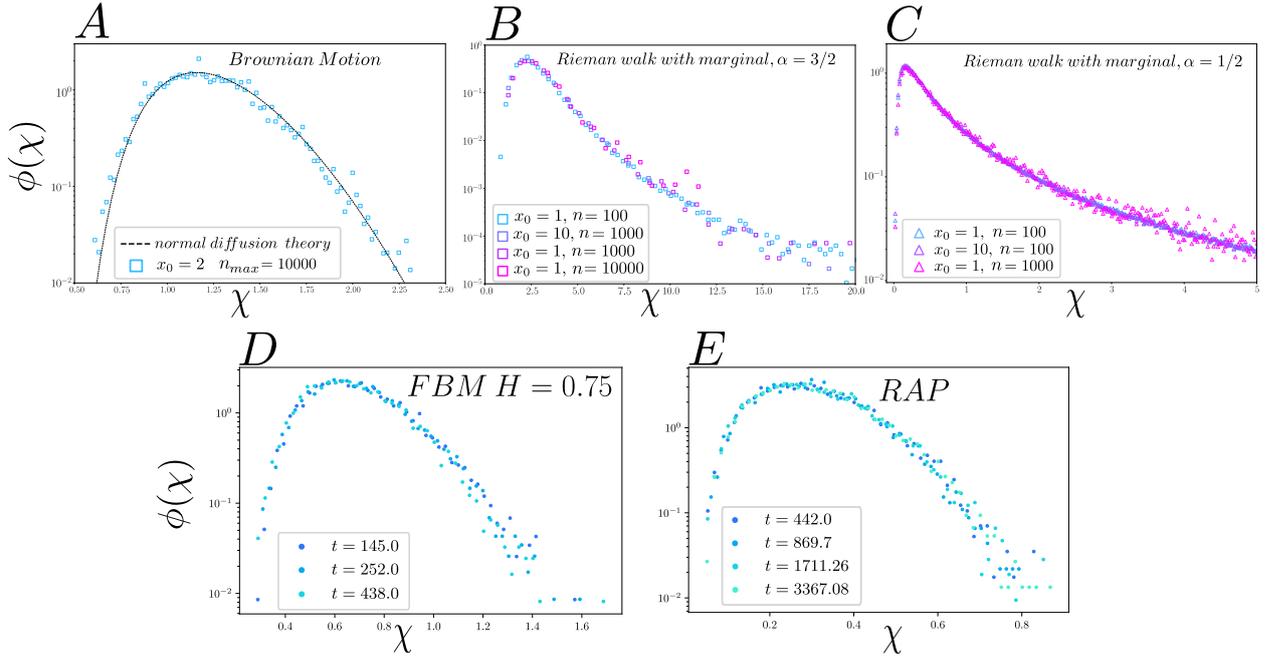


FIG. VI.3 Loi conditionnelle réexprimée selon la variable redimensionnée  $\chi = s/n^{\frac{1}{d_w}}$  pour, **A**, un mouvement brownien de coefficient de diffusion  $\frac{1}{2}$ , **B**, une marche de Riemann d'exposant de Lévy  $\frac{3}{2}$  et, **C**, une marche de Riemann d'exposant de Lévy  $\frac{1}{2}$ . Chaque distribution est tracée pour un nombre de pas fixé  $n$  et converge à grand  $s$  vers une fonction indépendante de  $x_0$  mais qui reste dépendante du processus étudié. De même, la loi conditionnelle selon la variable redimensionnée  $\chi = x/t^{\frac{1}{d_w}}$  pour un temps de premier passage  $t$  fixé converge à grand  $x$  pour, **D**, un processus FBM ( $H = 0.75$ ) et un RAP **E**.

### VI.2.4 Applications directes de la loi jointe

#### a) Problème conditionnel de Rosenstock

Les résultats ci-dessus fournissent une solution explicite à une version conditionnelle du célèbre problème de Rosenstock [Hughes, 1995 ; Rosenstock, 1961] que l'on va définir brièvement. À cet égard, considérons une particule réactive diffusante (qui suit une loi d'évolution potentiellement non-markovienne) qui entre dans un réacteur chimique  $1d$  en  $x_0$ , et ressort en  $0$ . Ce réacteur contient des sites catalytiques ponctuels, distribués selon une loi de Poisson de paramètre de densité  $\rho$ . Ces sites initialisent alors une réaction lorsque la particule réactive les atteint (figure VI.1). Dès lors, l'efficacité de cette réaction catalytique, certes schématique, peut être quantifiée par la probabilité,  $P_t$ , pour que connaissant le temps de sortie  $t$ , la particule ait réagi avec un site catalytique avant de sortir du domaine. Cette probabilité peut être aisément déduite de la loi jointe

$$P_t = \int_0^\infty (1 - e^{-\rho x}) G_{sp}(x|t, x_0) dx.$$

Ainsi, la connaissance de  $\sigma(x, t|x_0)$  et donc de  $G_{sp}$  permet une détermination explicite de  $P_t$ . Par ailleurs, il est important de noter que le comportement d'échelle de  $G_{sp}$  obtenu antérieurement, implique que la probabilité de réaction ne dépend que de la variable d'échelle  $t\rho^{d_w}$  (pour  $t \gg x_0^{d_w}$ ), ce qui caractérise la dépendance de  $P_t$  vis-à-vis du temps de sortie du domaine (figure VI.1).

#### b) Importance de la loi jointe dans le cadre des marches à renforcement

D'autre part, la loi jointe a une importance toute particulière lorsque l'on considère les modèles à renforcement. Qualitativement, puisque la dynamique de ces marches est notamment contrôlée par le territoire visité antérieurement, une compréhension plus fine de celui-ci a nécessairement une importance sur la détermination des différentes lois d'évolution de ces marches.

L'exemple le plus évocateur reste celui de la marche SATW (self-attracting random walk) que l'on a rencontré à de multiples reprises au cours de cette thèse. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, la connaissance simultanée de la position du marcheur et du territoire visité à l'instant  $t$  permet de retrouver une loi d'évolution markovienne. Dans cette partie, on se concentrera sur le cas  $1d$ , pour lequel le marcheur effectue une marche symétrique simple à l'intérieur du territoire visité et, a une probabilité  $\beta$  de découvrir un nouveau site lorsque que celui-ci est au bord du territoire visité.

Puisque la dynamique de cette marche est complètement déterminée par le territoire visité, l'évaluation exacte de la distribution du temps de premier passage nécessite la connaissance de tous les instants auxquels les différents sites ont été découverts. Cependant, dans le cas où  $s_0 = 1$  (la cible est en  $0$ ), il n'existe qu'un nombre fini de sites qui peuvent avoir été visités avant la cible, et dont l'ordre de découverte est sans équivoque (à savoir  $\llbracket 2, s \rrbracket$ ). Cela nous permet d'écrire la loi jointe comme une convolution temporelle sur les découvertes successives de ces différents sites.

On redéfinit alors  $F_{0,s}(n|s_0)$  comme la probabilité d'atteindre  $s$  avant 0 pour la première fois au pas  $n$ , sachant que les sites  $\llbracket 1, s-1 \rrbracket$  ont déjà été visités<sup>\*5</sup>. La fonction génératrice de  $\sigma(s, n|1)$  peut être alors déduite de  $F_{0,s}(n|s_0)$

$$\tilde{\sigma}(s, \xi|1) = \frac{\xi}{2} \left( \prod_{s'=3}^s \tilde{F}_{0,s'}(\xi|s'-1) \right) \tilde{F}_{0,s+1}(\xi|s).$$

Dès lors, la connaissance de  $\tilde{F}_{0,s}(\xi|s_0)$  permet d'obtenir une expression exacte de  $\tilde{\sigma}$  (l'approche complète est détaillée en annexe K). Pour des valeurs élevées de  $s$  et  $n$ , tout en conservant  $\tau = \frac{n}{s^2}$  fixé, on obtient l'expression suivante de la loi jointe

$$\sigma(s, n|s_0) = h(s_0) s^{-\frac{1-\beta}{\beta}-3} f_{SATW}(\tau), \quad (\text{VI.5})$$

où  $h(1) = \frac{\Gamma(-2+2/\beta)(1-\beta)}{\Gamma(-1+1/\beta)\beta}$  et  $h(s_0) \propto s_0^{\frac{1-\beta}{\beta}}$  pour des valeurs élevées de  $s_0$ <sup>\*6</sup>. Enfin la distribution conditionnelle de la marche SATW peut être définie via sa transformée de Laplace, notée  $\tilde{f}_{SATW}(p)$  qui prend une forme extrêmement simple

$$\tilde{f}_{SATW}(p) = \int_0^\infty e^{-pu} f_{SATW}(u) du = \left( \frac{\sqrt{2p}}{\sinh(\sqrt{2p})} \right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (\text{VI.6})$$

Notons que cette expression a été obtenue dans un autre contexte dans [Serlet, 2013]. La distribution de premier passage pour  $s_0 = 1$  peut être finalement déduite de  $\sigma(s, n|1)$  et vérifie le comportement asymptotique suivant

$$F_{\underline{0}}(n|s_0 = 1) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(\frac{2}{\beta} - 1)}{\Gamma(\frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2})} 2^{-\frac{1+\beta}{2\beta}} n^{-\frac{1-\beta}{2\beta}-1}. \quad (\text{VI.7})$$

Les détails conduisant à ce résultat peuvent être retrouvés en annexe K.5. Par ailleurs les simulations sont en accord avec nos différentes prédictions (figure VI.4). Notons que la décroissance selon  $n^{-\frac{1-\beta}{2\beta}-1}$  est en accord avec la valeur de l'exposant de persistance déterminée dans le chapitre 2<sup>\*7</sup>.

Ensuite, prenons le temps de commenter le résultat obtenu pour la fonction conditionnelle (VI.6). Celle-ci est exactement déterminée pour  $s_0 = 1$  mais l'analyse numérique de  $f_{SATW}(\tau)$  souligne que le comportement de la *fonction conditionnelle* est indépendant de  $s_0$  pour  $s$  suffisamment grand ( $s \gg s_0$ ).

Justifions brièvement ce constat. Tout d'abord, rappelons que  $f(\tau)$ , décrit la probabilité conditionnelle que le marcheur, qui est allé jusqu'au site  $s$ , avant de découvrir la cible en 0, a réalisé cet évènement en un temps  $n$ .

<sup>\*5</sup> Plus précisément, le marcheur est en  $s_0$  à  $n = 0$  et les sites  $\llbracket 1, s-1 \rrbracket$  ont déjà été visités.

<sup>\*6</sup> Puisque la marche SATW est diffusive,  $d_w = 2$ , et  $\theta = \frac{1-\beta}{2\beta}$  selon le chapitre 2, on observe bien que la loi jointe vérifie le comportement d'échelle proposé dans (VI.4).

<sup>\*7</sup> D'autre part, rappelons que l'approche menée dans le chapitre 2 reposait sur le comportement d'échelle  $n/s^{d_w}$  de la fonction conditionnelle  $f_{SATW}(t)$ , qui peut être déduit de (VI.6).

Puisque le marcheur doit nécessairement visiter  $s$  avant de revenir en 0, le temps nécessaire pour découvrir les sites entre 0 et  $s_0$  est négligeable<sup>\*s</sup>. Relevons que ce raisonnement ne s'adapte pas pour la probabilité de *splitting* qui reste sensible à la position initiale  $y$  compris dans la limite  $s \gg 1$ . Cela se traduit par la dépendance en  $h(x_0)$  dans l'expression (VI.5) qui n'est donc pas explicitement déterminée pour la marche SATW.

L'analyse de la loi jointe nous a permis de déterminer explicitement le préfacteur de la marche SATW qui est un processus fortement non markovien. L'approche que l'on a développée ne s'adapte pas directement aux autres modèles à renforcement. Néanmoins, on peut relever que la détermination d'un comportement typique de  $F_{0,\underline{s}}(n|s_0)$  à grands  $n, s$  pourrait être suffisant afin d'en déduire des expressions génériques des probabilités conditionnelles  $f$ .

Dans cette première partie, on a introduit une nouvelle observable qui tient simultanément compte du temps de premier passage vers une cible et du nombre de sites distincts visités lorsque celle-ci est atteinte. On a observé que la dépendance de la distribution jointe selon les variables spatiales et temporelles peut être capturée par une forme générale, qui reste valable pour des processus de recherche non markoviens. Cette distribution jointe peut avoir des applications dans diverses situations lorsque seulement une information partielle - cinétique ou géométrique - sur les trajectoires est accessible. En outre, elle semble être un outil technique utile qui peut, par exemple, permettre de déterminer les propriétés de premier passage des modèles à renforcement.

Dans la suite, on va s'intéresser à une autre propriété commune du territoire visité, qui semble partagée par de nombreux modèles de marches aléatoires.

## VI.3 Asymétrie du territoire visité

La partie précédente nous a permis de déterminer la taille typique du territoire couvert par le marcheur en présence d'une cible absorbante. Néanmoins, la question de la géométrie et de la cinétique de ce territoire en l'absence d'une cible n'a pas encore été abordée dans cette thèse. En dimension 1, la géométrie de celui-ci est simple et complètement caractérisée par deux paramètres : le nombre de sites distincts visités  $N$ , et le centre du territoire visité que l'on note  $x_{span} = (x_+ + x_-)/2$  (où  $x_+$  et  $x_-$  sont les deux extrémums atteints par le marcheur).

---

<sup>\*s</sup> Qualitativement, afin d'obtenir une modification sensible de  $f(\tau)$ , il faut considérer les trajectoires typiques suivantes. Dans un premier temps, le marcheur découvre un territoire de l'ordre de  $s_1 = O(s) < s$ . Puis celui-ci revient proche de la cible et découvre des sites entre  $s_0$  et 0, sans pour autant l'atteindre. Puis dans un second temps, le marcheur retourne découvrir les sites entre  $s_1$  et  $s$ , pour enfin revenir et atteindre la cible en 0. Le retournement supplémentaire en  $s_1$  génère alors un temps supplémentaire de l'ordre de  $O(s^{d_w})$  qui n'est plus négligeable. Pourtant, de telles trajectoires ont un poids négligeable, puisque leurs probabilités associées admettent un terme multiplicatif additionnel de l'ordre de  $O(s^{-1})$ . De manière analogue, pour des événements de "retournement" qui surviennent à un nombre de sites visités  $s'$  tels que  $s' \ll s$ , l'impact sur le temps caractéristique pour atteindre  $s$  puis de revenir en 0 est aussi négligeable. Dès lors,  $f(\tau)$  est bien asymptotiquement indépendante de la distance initiale entre le marcheur et la cible  $s_0$ .

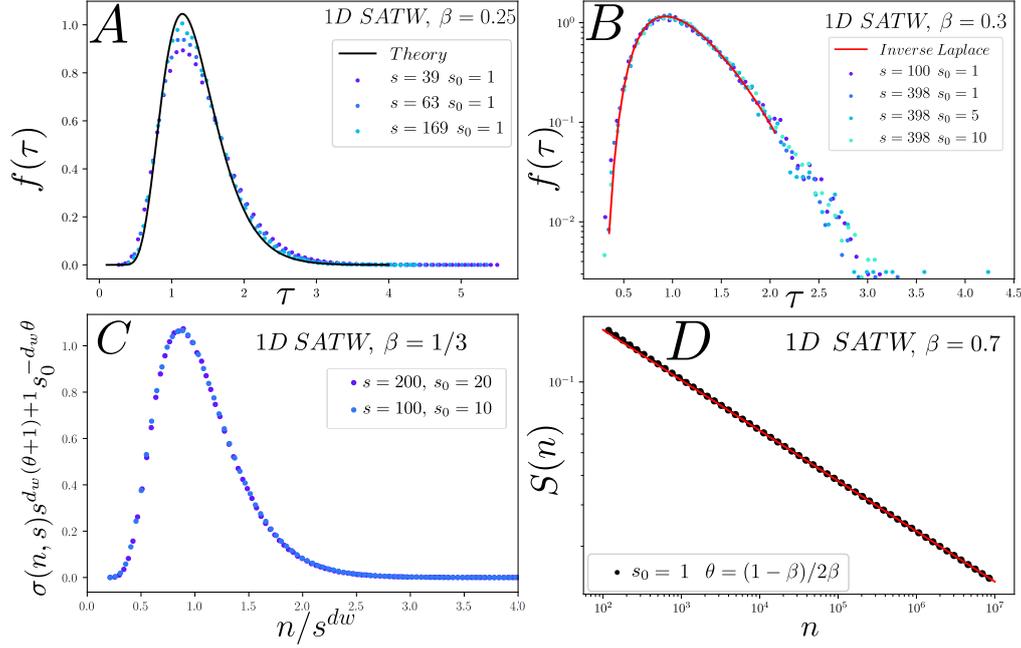


FIG. VI.4 **A** Loi conditionnelle de la variable redimensionnée  $\tau$ , comparée à la prédiction analytique donnée dans [Klinger et al., 2021a] (pour  $\beta = 1/4$ ). On peut relever la convergence pour des valeurs élevées de  $s$ . **B** Loi conditionnelle de la variable redimensionnée  $\tau$  comparée à l'inversion numérique de Laplace numérique ( $\beta = 0.3$ ). Chaque distribution est tracée pour une distance fixée  $s$  et converge à grands temps vers une fonction adimensionnée dépendante de  $\beta$ . Il est important de noter que cette fonction est indépendante de  $s_0$ . **C** Convergence de la loi jointe selon l'échelle prédite par (VI.4) ( $\beta = \frac{1}{3}$ ). On note que la convergence est indépendante de  $s$  et  $s_0$ . **D** Probabilité de survie asymptotique pour un marcheur initialement en  $s_0 = 1$  ( $\beta = 0.7$ ). Celle-ci est comparée à la prédiction analytique (VI.7).

Une analyse dimensionnelle évidente suffit pour retrouver que le nombre moyen de sites distincts visités croît asymptotiquement selon  $t^{1/d_w}$ . Ce comportement a été confirmé à de maintes reprises dans la littérature, et ce, pour de nombreux exemples de processus de recherche [Palleschi et al., 1989; Weiss, 1994; Weiss et al., 1986; Wiese, 2020]. D'autre part, la position du centre du territoire visité a aussi été source de différents travaux. C'est cette dernière observable que l'on va chercher à déterminer dans la suite.

Qualitativement, celle-ci quantifie l'asymétrie du territoire visité relativement à la position initiale du marcheur, autrement dit : si le marcheur a découvert des sites majoritairement dans une direction donnée ou, de manière très systématique, des deux côtés de la position initiale (ici prise en 0). Notons que les travaux de [Lévy, 1940] abordent cette question sous le prisme du temps passé par le marcheur dans l'un des demi-axes positifs. Puisque l'on s'intéresse ici seulement à la géométrie du territoire visité, celui-ci est intimement lié aux problèmes d'exploration et on cherchera à souligner cette connexion.

Pour cela, on va dans un premier temps considérer l'exemple de la marche SATW. On cherche à déterminer la position du centre du territoire visité  $x_{span}$  au moment où  $N$  sites distincts ont été visités. Autrement dit, on cherche à déterminer la position de  $x_{span}$  à un temps d'arrêt aléatoire,  $\tau$ , défini comme le temps que met le marcheur à découvrir  $N$  sites distincts. On montrera que la distribution asymptotique du centre du territoire visité  $x_{span}$  est alors entièrement déterminée par l'exposant de persistance (ou de manière identique par l'exposant de *splitting*)

$$p(x_{span}, N) = \frac{C}{2N} \left( 1 - \left[ \frac{x_{span}}{2N} \right]^2 \right)^{d_w \theta - 1} \quad \text{avec} \quad C = \frac{\Gamma(d_w \theta + 1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(d_w \theta)}.$$

On discutera ensuite de la généralisation de ce résultat à différents processus de recherche.

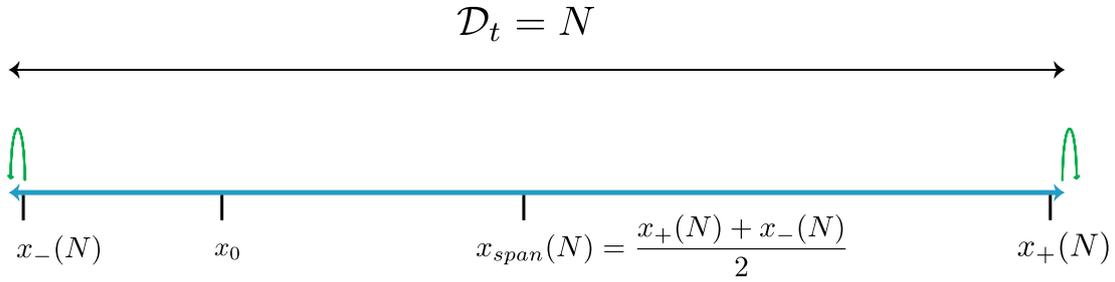


FIG. VI.5 Illustration du territoire visité et des différentes notations. En dimension 1, la position du centre du territoire visité,  $x_{span}$ , est donnée par la moyenne des deux extrémités ( $x_+$  et  $x_-$ ). Ici, on s'intéresse à la position de  $x_{span}$  lorsque le territoire visité atteint la taille  $N$  pour la première fois (le temps associé à la réalisation de cet évènement n'est pas considéré dans notre étude).

### VI.3.1 Distribution du centre du territoire visité pour le modèle SATW

On considère une marche aléatoire symétrique évoluant sur un réseau discret, dont on cherche à caractériser la distribution du centre du territoire visité lorsque  $N(\tau)$  sites distincts ont été visités. Cela implique que  $x_+ - x_- = N(\tau) - 1$ , et que le couple  $(x_+, x_-)$  est alors entièrement déterminé par  $x_{span}(N)$  (figure VI.5)

$$\begin{cases} x_+ + x_- = 2x_{span} \\ x_+ - x_- = N - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_+ = \frac{2x_{span} + N - 1}{2} \\ x_- = \frac{2x_{span} - N + 1}{2} \end{cases}.$$

Notons que l'on a ici simplifié la notation  $N(\tau)$  en  $N$ . Les différentes réalisations de  $x_{span}(N)$  surviennent à des temps différents, mais on ne tient pas compte de ces écarts, ce qui diffère des travaux menés dans [Wiese, 2020]. Ensuite, on souhaite évaluer la probabilité que le marcheur découvre le prochain site respectivement en  $x_+$  ( $x_+ \rightarrow x_+ + 1$ ) ou en  $x_-$  ( $x_- \rightarrow x_- - 1$ ). Ces deux évènements modifient la position du centre du territoire visité de  $\pm 1/2$ . Ainsi, la position  $x_{span}$  peut être assimilée à une marche aléatoire qui effectue des sauts de tailles  $1/2$  et dont les probabilités de transition sont données par  $P(x_{span} = k + 1/2, N + 1 | x_{span} = k, N)$  et  $P(x_{span} = k - 1/2, N + 1 | x_{span} = k, N)$ .

Pour un processus quelconque, il est particulièrement difficile de déterminer ces probabilités de transition, notamment pour des processus fortement non markoviens. Prenons l'exemple d'une réalisation d'une trajectoire conduisant à  $(x_{span} = k, N)$  à un instant  $\tau$ . Le comportement du marcheur dans le futur de  $\tau$ , et ce, jusqu'à la découverte du prochain site, va dépendre de la trajectoire passée et notamment de  $\tau$ . Lorsque l'on considère toutes les réalisations de trajectoires conduisant à  $(x_{span} = k, N)$ , il devient alors laborieux de déterminer explicitement ces probabilités de transition.

Pourtant, dans la limite asymptotique  $N$  grand, on propose que ces probabilités de transition puissent être évaluées très simplement. Pour cela, il est important de conditionner ces probabilités selon le côté où a été découvert le dernier site visité. On définit deux états  $\pm$ , selon que le dernier site découvert se trouve respectivement du côté gauche ( $-$ ) ou du côté droit ( $+$ ) du territoire visité. Ces deux états vont conditionner la probabilité que le marcheur découvre le prochain site du même côté que celui-ci, noté  $P(+, x_{span} = k + 1/2, N + 1 | +, x_{span} = k, N)$  (respectivement  $P(-, x_{span} = k - 1/2, N + 1 | -, x_{span} = k, N)$ ) ou avec une probabilité complémentaire, bien plus faible, de changer de côté\*<sup>9</sup>  $P(-, x_{span} = k - 1/2, N + 1 | +, x_{span} = k, N)$  (respectivement  $P(+, x_{span} = k + 1/2, N + 1 | -, x_{span} = k, N)$ ).

Dans la limite où  $N$  est suffisamment élevé, ces deux probabilités de transition et leurs probabilités complémentaires présentent un comportement asymptotique qui déterminera entièrement la distribution de  $x_{span}$ . Considérons dans un premier temps, le cas de la marche SATW. Pour celle-ci, les probabilités de transition sont exactement connues et données par

$$P(\pm, x_{span} = k \pm 1/2, N + 1 | \pm, x_{span} = k, N) = 1 - \frac{1 - \beta}{2 + \beta(N - 3)}.$$

Dans la limite asymptotique  $N \gg 1$ , on obtient le comportement asymptotique des différentes probabilités de transition

$$\begin{cases} P(+, x_{span} = k + 1/2, N + 1 | +, x_{span} = k, N) \sim 1 - \frac{\phi}{N} \\ P(-, x_{span} = k - 1/2, N + 1 | +, x_{span} = k, N) \sim \frac{\phi}{N} \end{cases}$$

où  $\phi = \frac{1-\beta}{\beta} = d_w \theta$ . Dans la limite continue, en définissant  $x_{span} = 2x$  et  $N = \tau$ , l'évolution de  $x(\tau)$  est assimilable à un processus dont la dynamique est déterminée par une équation, communément appelée de télégraphe, dont le coefficient de transition dépend du temps

$$\begin{cases} \frac{\partial p_+(x, \tau)}{\partial \tau} = -v \frac{\partial p_+(x, \tau)}{\partial x} - \frac{\phi}{\tau} (p_+(x, \tau) - p_-(x, \tau)) \\ \frac{\partial p_-(x, \tau)}{\partial \tau} = v \frac{\partial p_-(x, \tau)}{\partial x} - \frac{\phi}{\tau} (p_-(x, \tau) - p_+(x, \tau)) \end{cases} \quad \text{avec } v = 1.$$

En introduisant  $p = p_+ + p_-$  et  $j = p_+ - p_-$ , on obtient une équation différentielle du second ordre vérifiée par  $p(x, \tau)$  selon  $\tau$  et  $x$

$$\frac{\partial^2 p(x, \tau)}{\partial \tau^2} = v^2 \frac{\partial^2 p(x, \tau)}{\partial x^2} - \frac{2\phi}{\tau} \frac{\partial p(x, \tau)}{\partial \tau}. \quad (\text{VI.8})$$

---

\*<sup>9</sup> Notons que jusqu'à alors, nous n'avons fait aucune hypothèse quant au comportement de ces probabilités de transition. Remarquons simplement que la symétrie de la marche impose  $P(+, x_{span} = k + 1/2, N + 1 | +, x_{span} = k, N) = P(-, x_{span} = -k - 1/2, N + 1 | -, x_{span} = -k, N)$

Dans la limite  $\tau$  grand, on cherche une solution invariante d'échelle  $\frac{f(z)}{\tau}$  avec  $z = x/\tau$ , tout en conservant la condition de normalisation  $\int_{-\tau}^{\tau} \frac{f(x/\tau)}{\tau} dx = 1$ . On obtient alors la distribution mentionnée précédemment

$$p(x, \tau) = \frac{C}{\tau} \left(1 - \left[\frac{x}{\tau}\right]^2\right)^{\phi-1} \quad \text{avec} \quad C = \frac{\Gamma(\phi + 1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\phi)}. \quad (\text{VI.9})$$

Notons que cette solution avait été obtenue dans un autre contexte [Barna et al., 2010]. Les différentes étapes conduisant à ce résultat peuvent être retrouvées en annexe L. Dressons plusieurs remarques autour de ce résultat :

- Tout d'abord, relevons que ce résultat est obtenu dans la limite où  $x_{span} = O(N)$ , et  $(2x_{span} + N)/2$  et  $(2x_{span} - N)/2$  sont grands devant toutes les échelles caractéristiques du processus.
- Ensuite, le second terme de l'équation (VI.8) admet un comportement divergeant lorsque  $\tau \rightarrow 0$ , ce qui n'est pas représentatif des probabilités de transition lorsque les premiers sites sont découverts. En effet, pour  $N \sim O(1)$ , le comportement asymptotique de  $P(-, x_{span} = k - 1/2, N + 1 | +, x_{span} = k, N)$  n'est plus valide. Pourtant, on soutient que la solution obtenue (où l'on a pris un dirac centrée en 0 comme condition initiale) reste valide. La stabilité de la solution (VI.8) selon des perturbations aux temps courts reste à examiner. Relevons que la comparaison figure VI.6 des distributions simulées de la marche SATW et des prédictions théoriques reste concluante.
- Enfin, relevons que l'analyse de la distribution du centre du territoire visité a été aussi examinée dans [Wiese, 2020] pour un mouvement brownien. Néanmoins, celle-ci est déterminée selon le temps réel  $t$ , et non en fonction du nombre de sites distincts visités, ce qui amène à des résultats différents.

### VI.3.2 Extension pour des modèles de marches aléatoires symétriques

Les résultats obtenus pour la marche SATW semblent prometteurs, et on va désormais discuter de sa généralisation à d'autres modèles de marches aléatoires symétriques. Tout d'abord, remarquons que cette approche repose essentiellement sur le comportement asymptotique de la probabilité  $P(-, x_{span} = k - 1/2, N + 1 | -, x_{span} = k, N)$ . Pour une marche SATW, cette probabilité est connue exactement mais on relève que son comportement asymptotique peut être déduit des propriétés de premier passage étudiées précédemment.

Pour cela, reprenons la probabilité dite de *splitting*, définie comme la probabilité  $Q(-x_0, x)$  que le marcheur initialement en 0 atteigne le site  $x$  avant  $-x_0$ . Dans la limite où  $x \gg x_0$ , cette probabilité suit une décroissance algébrique  $(x_0/x)^\phi$ , où  $\phi$  est communément appelé exposant de *splitting*. Dans le cas de la marche SATW,  $\phi$  peut être déduit du chapitre 2, ce qui conduit à  $\phi = (1 - \beta)/\beta$ . Or, c'est cet exposant qui détermine le comportement asymptotique de  $P(+, x_{span} = k + 1/2, N + 1 | +, x_{span} = k, N)$ . En effet, dans le cas de la SATW, il apparaît clairement que *pour tout*  $k$

$$P(+, x_{span} = k + 1/2, N + 1 | +, x_{span} = k, N) = \frac{Q(-1, N)}{Q(-1, N - 1)} \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} 1 - \frac{\phi}{N},$$

Considérons désormais un marcheur quelconque, la relation  $P(+, x_{span} = k + 1/2, N + 1 | +, x_{span} = k, N) = \frac{Q(-1, N)}{Q(-1, N)}$  n'est plus exactement vérifiée *pour tout*  $k$ . On conjecture que pour de nombreux modèles le comportement asymptotique de  $P(+, x_{span} = k + 1/2, N + 1 | +, x_{span} = k, N)$  reste déterminé par  $1 - \frac{\phi}{N}$  et cela indépendamment de  $k$ . Tout d'abord, relevons que cette hypothèse est bien vérifiée par les processus markoviens. Ensuite, celle-ci se justifie aisément pour  $k - N/2 = O(1)$  ( $|x_-| \ll N$ ), puisque l'exposant de splitting reste donné par  $\phi$  pour  $x_0 \ll N$  (la découverte d'un nombre négligeable de sites entre  $-x_0$  et 0 ne modifie pas le comportement de  $P(+, x_{span} = k + 1/2, N + 1 | +, x_{span} = k, N)$ ). Notons que ce dernier résultat peut être étendu aux processus continus en interpolant les positions respectives de  $x_+$  et  $x_-$  à l'entier le plus proche. Enfin, pour des marches présentant des comportements persistants finis (comme par exemple une marche qui effectuerait des sauts de taille 2), notons que notre approche peut être réadaptée en prenant un incrément  $l_p$  tel que  $N + l_p/2$  et  $k + l_p/2$ . Néanmoins, il reste à justifier le cas  $k - N/2 \sim O(N)$  et tester cette conjecture pour d'autres modèles de marches aléatoires, en particulier les processus dont les incréments sont stationnaires. Ce travail reste à faire et l'identification de contre exemples pourrait être aussi riche en perspectives.

Pour finir, remarquons que l'analyse du comportement d'échelle de (VI.4), dans le cadre de la loi jointe, permet d'isoler une relation explicite entre  $\theta$  et  $\phi$

$$\theta = \phi d_w. \quad (\text{VI.10})$$

Notons que cette relation a été proposée pour des processus strictement invariants d'échelle [Zoja et al., 2009]. Dès lors, l'analyse (VI.4) l'étend à des processus non strictement invariants d'échelle. Ainsi, dans l'hypothèse où  $P(-, x_{span} = k - 1/2, N + 1 | +, x_{span} = k, N) \sim \phi/N$  indépendamment de  $k$ , la distribution de  $x_{span}(N)$  est entièrement déterminée par  $\phi$ , et donc d'après (VI.10) par l'exposant de persistance.

Ainsi, on a déterminé la position du territoire visité de la marche SATW en fonction de nombre de sites distincts visités. Étonnamment, la distribution de celui-ci est entièrement caractérisée par l'exposant de persistance et la généralisation de ce constat pour un grand nombre de modèles de marches aléatoires semble prometteuse.

## VI.4 Connexion entre temps de couverture et temps de premier passage

Dans cette dernière partie, on va s'intéresser aux propriétés des processus d'exploration *exhaustifs* au sens où ils nécessitent une exploration complète du domaine, et pas seulement d'une unique cible à l'intérieur de celui-ci. Cette différence conduit à l'introduction d'une nouvelle observable clé dans la quantification de ce type d'exploration. Celle-ci, communément appelée *temps de couverture*, est définie comme le temps nécessaire à un marcheur aléatoire pour visiter tous les sites d'un domaine donné (figure VI.7). Ces problèmes d'exploration ont un large spectre d'applications qui va de l'étude des cellules du système immunitaire à la recherche d'agents pathogènes [Heuzé et al., 2013], aux animaux en quête de nourriture [Bénichou et al., 2011 ; Viswanathan et al., 2008] et à l'exploration de robots [Masson, 2013 ; Vergassola et al., 2007 ; Zhang et al., 2015].

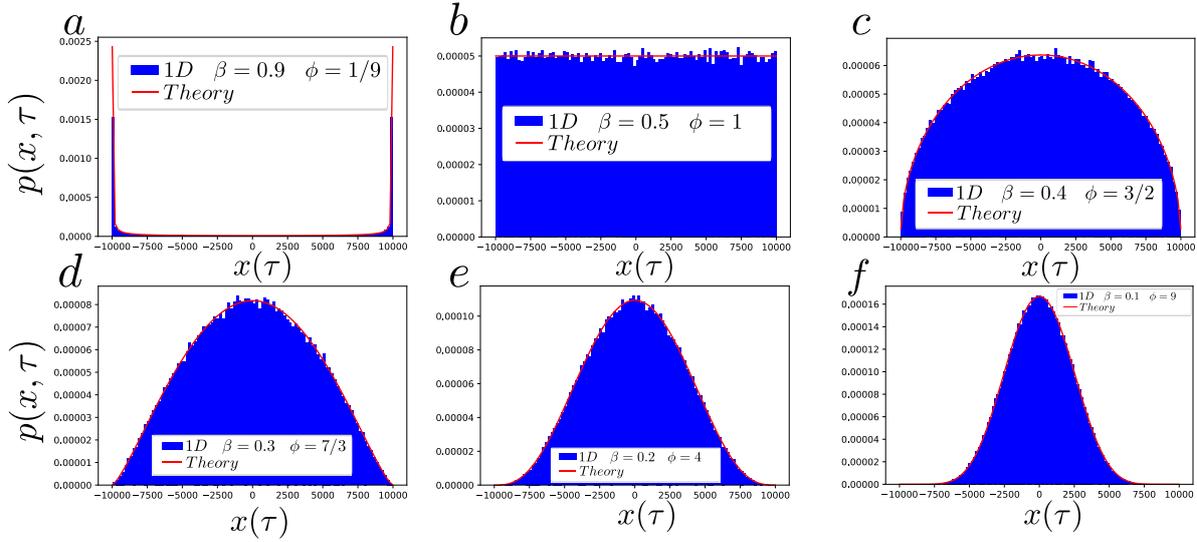


FIG. VI.6 Distribution du centre du territoire visité pour le modèle SATW pour différentes valeurs de  $\phi = (1 - \beta)/\beta$ . Les courbes théoriques (lignes rouges pleines) prédites par (VI.9) sont comparées aux distributions simulées en bleu. Pour les cas attractifs,  $\beta < 1/2$ , on remarque que le maximum de la distribution est donné par la position initiale, contrairement aux cas répulsifs, où les maximum sont atteints pour les valeurs extrêmes du rapport  $|x|/\tau$ . La transition,  $\beta = 1/2$ , pour laquelle la marche SATW est assimilable à une simple marche symétrique, est donnée par une distribution uniforme.

Plus spécifiquement au cas des modèles à renforcement, le temps de couverture de la marche TSAW dans des réseaux complexes a largement été étudié en vue d'une amélioration significative des procédures d'algorithmes de recherche [Arruda et al., 2017; Avin et al., 2008; Campos et al., 2021; Grassberger, 2017a; Herrero, 2019; Meyer et al., 2021].

Dans un premier temps, on présentera les différents résultats qui ont été obtenus dans la littérature en soulignant les propriétés sur lesquelles ils reposent. En particulier, on insistera sur les connexions que le temps de couverture entretient avec les propriétés de premier passage. Puis, on développera une approche spécifique aux marches à renforcement qui tiendra compte de leurs propriétés de vieillissement.

#### VI.4.1 Résultats connus pour les processus markoviens

Commençons par considérer l'exemple instructif des simples marches aléatoires symétriques qui a largement été examiné au cours de ces dernières années [Aldous, 1983; Grassberger, 2017a; Yokoi et al., 1990]. En dimension 1, les résultats proposés dans [Yokoi et al., 1990] ont permis d'obtenir le temps moyen de couverture, et ce, indépendamment de la condition au bord du domaine. En dimension supérieure, le comportement dominant du temps moyen de couverture a été initialement proposé dans [Aldous, 1983], puis vérifié numériquement [Nemirovsky et al., 1990]. Notons que le cas particulier de la dimension 2 a été largement abordé dans [Aldous, 1983; Brummelhuis et al., 1992; Dembo et al., 2004] où un premier préfacteur du comportement dominant du temps moyen de couverture a été

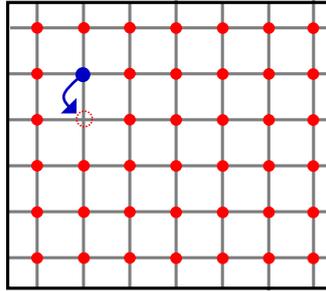


FIG. VI.7 Schéma représentatif de l'observable du temps de couverture. Celui-ci est défini comme le temps que met le marcheur à visiter l'intégralité des sites du volume. Le temps moyen de couverture est donc le maximum des temps de premier passage associés aux différents sites du volume.

déterminé analytiquement [Dembo et al., 2004], avant d'être affiné dans [Belius, 2013 ; Grassberger, 2017a]. Enfin, on peut mentionner les travaux singuliers [Brummelhuis et al., 1991, 1992] qui se concentrent sur la structure fractale des derniers sites visités.

Comparativement, relativement peu de travaux analytiques ont été menés dans le cadre de marcheurs non markoviens, en raison de la complexité intrinsèque de ce type d'exploration. La majorité des approches restent numériques, et proposent le plus souvent des études comparatives de l'efficacité de divers marches à recouvrir différents types de réseaux euclidiens et plus généralement fractals. Dans ce contexte, les modèles à renforcement, et en particulier la marche TSAW, ont suscité un intérêt grandissant de par leur efficacité à couvrir des réseaux en dimension 1, 2 et pour certains types de réseaux fractals [Avin et al., 2008 ; Campos et al., 2021 ; Grassberger, 2017b]. Le temps moyen de couverture de la marche TSAW en dimension 3, n'a pas, à notre connaissance, encore été déterminé. Ce constat est lié aux propriétés diffusives de ce modèle en dimension 3 qui, à première vue, ne semblent pas conduire à un comportement non trivial du temps de couverture. Pourtant, on va dans la suite de notre analyse, démontrer que les propriétés de ces marches restent non triviales et ce, au-delà de la dimension critique ( $d_c = 2$ ). L'analyse des fluctuations du nombre moyen de visites de chaque site (chapitre 4 et annexe G.1) en est un parfait exemple.

Avant d'aborder le cas des marches à renforcement, on va rappeler les premiers résultats fondamentaux pour notre étude qui ont été obtenus pour des processus non markoviens [Chupeau et al., 2015].

#### VI.4.2 Distribution du temps de couverture et extension aux marcheurs non markoviens

Jusqu'à présent, nous avons peu commenté les travaux qui concernent la distribution du temps de couverture. Celle-ci a été largement examinée dans [Chupeau et al., 2015]. Cette étude propose des résultats analytiques généraux vérifiés y compris pour des processus non markoviens. Avant d'aborder le cas des marches à renforcement, on va reprendre l'analyse développée dans [Chupeau et al., 2015], en soulignant les propriétés sur lesquelles on va se reposer dans la suite.

Tout d'abord, relevons que l'analyse du temps de couverture dans [Chupeau et al., 2015] repose sur une propriété subtile mais fondamentale des explorations non compactes. Pour celles-ci, *les évènements de premier passage des différents sites du réseau peuvent être considérés comme indépendants*\*<sup>10</sup>. Remarquons que cet argument est aussi présent dans l'analyse de la simple marche aléatoire symétrique [Belius, 2013] (en dimension supérieure ou égale à 3). Ce constat est d'une importance primordiale lorsque l'on considère le temps de couverture. En effet, puisque l'on cherche à décrire le temps nécessaire pour découvrir le dernier site, le temps de couverture est également le maximum des temps de premier passage de tous les sites du domaine. Dès lors, si ces évènements sont indépendants et présentent une décroissance plus rapide qu'une loi de puissance (ce qui est généralement le cas en confinement), la distribution du temps de couverture est directement donnée par une loi de Gumbel [Gumbel, 1958] dont la densité de probabilité est donnée par

$$f_G(t) = e^{-z-e^{-z}}.$$

Ce résultat a été confirmé numériquement pour des marches aléatoires simples [Chupeau et al., 2015] et il s'étend naturellement à divers exemples de processus non markoviens qui réalisent des explorations non compactes en dimension 3 (comme les vols et les marches de Lévy introduits dans le chapitre 2, ou les processus intermittents\*<sup>11</sup> vérifiés numériquement dans [Chupeau et al., 2015]). Notons que cette étude repose sur l'hypothèse que les distributions de premier passage sont exactement données par une fonction exponentielle  $\langle T \rangle^{-1} e^{-t/\langle T \rangle}$ . Nous verrons que cette propriété est loin d'être anodine lorsque l'on considère le comportement d'échelle du temps de couverture selon la taille du domaine ( $N$  sites). Or, l'analyse de la distribution du temps de premier passage des marches à renforcement a révélé que celle-ci présentait une forme qui n'était plus strictement exponentielle (lorsque la cible est de taille comparable à celle du réseau, chapitre 4). Cet effet est corrélé à l'apparition d'effets de vieillissement lorsqu'une partie macroscopique du domaine a déjà été visitée par le marcheur. Or, c'est à ces échelles de temps que le dernier site est découvert par le marcheur. Dès lors, on va devoir tenir compte du comportement asymptotique de la distribution de premier passage à des échelles de temps comparables à celle du temps de couverture. Par la suite, on se concentrera essentiellement sur les marches à renforcement qui réalisent des explorations non compactes. Le cas marginal pourra être examiné dans de futurs travaux.

### VI.4.3 Temps de couverture des marches à renforcement

#### a) Approche générale

Afin de déterminer la distribution du temps de couverture, on caractérisera, dans un premier temps, le comportement de la probabilité de survie associée à un unique site du réseau, à l'échelle caractéristique du temps de couverture. Rappelons que l'on s'intéresse à la limite des grands volumes pour laquelle la dépendance selon la position de départ reste marginale.

---

\*<sup>10</sup> Cet argument est asymptotiquement valide pour des sites séparés par des distances suffisamment élevées.

\*<sup>11</sup> À chaque instant, le marcheur peut, effectuer un saut sur un des sites adjacents à un taux  $\rho$ , ou se relocaliser sur n'importe quel site du domaine avec un taux  $\lambda$ .

D'autre part, on considèrera des conditions aux bords pèriodiques, ce qui rend le temps de couverture indèpendant de la position initiale  $r$ . Dès lors, on va chercher à dèterminer la distribution de la probabilitè de survie moyennèe sur l'ensemble des sites de dèpart<sup>\*12</sup>.

Ensuite, remarquons que l'analyse menèe dans le chapitre 4, n'a pas dèterminè le comportement de la probabilitè de survie à des èchelles caractèristiques grandes devant celle du FPT (dont le rapport diverge avec  $R$ ). C'est le cas du temps typique de couverture notè  $T_{C,Typ}$  qui est gènèralement de l'ordre de  $T_{C,Typ} \propto \ln^\delta(R)T_{Typ}$ , où  $T_{Typ}$  est le temps typique de premier passage dèterminè dans le chapitre 4 et  $\delta > 0$  [Belius, 2013; Chupeau et al., 2015]. On va donc reprendre l'analyse des propriètès de premier passage en se concentrant sur les deux exemples èvocateurs de la marche SATW et TSAW.

### b) Distribution exponentielle vieillie, exemple de la marche SATW

Commençons par examiner le cas de la marche SATW pour laquelle les effets de renforcement ne dèpendent pas du nombre de visites (pour  $n_i(t) > 1$ ). Pour celle-ci, on propose que la probabilitè de survie, associèe à un unique site, reste exponentielle, y compris à l'èchelle caractèristique du temps de couverture. Motivons cette affirmation en rappelant qu'à l'èchelle du temps de couverture, le marcheur èvolue principalement dans un territoire dèjà visitè<sup>\*13</sup>. Le comportement exponentiel de la probabilitè de survie est vèrifiè numèriquement figure VI.8. Néanmoins, le marcheur a vieillì lors de son exploration, ce qui se traduit par une variation substantielle de son coefficient de diffusion effectif<sup>\*14</sup>. Cet effet altère le comportement asymptotique de la probabilitè de survie qui prend la forme suivante

$$S(t) \underset{t \sim T_{C,Typ}}{\sim} S_c e^{-t/\langle T \rangle} \quad (\text{VI.11})$$

où  $\langle T \rangle$  est le temps moyen de premier passage moyennè sur l'ensemble des sites de dèpart. Contrairement aux modèles prèsentés dans [Chupeau et al., 2015], on observe que  $S_c \neq 1$  ( $S_c < 1$  pour le cas rèpulsif et inversement  $S_c > 1$  pour les marches SATW attractives diffusives). Notons que la valeur de  $S_c$  dèpend du temps caractèristique de couverture (qui dèfinit la limite à laquelle la distribution est èvaluèe). Dèfinissons alors la cumulative de la densitè de probabilitè du temps de couverture  $Q_c(t)$  que l'on approxime dans la limite des grands volumes par

$$Q_c(t) = \int_0^t \dots \int_0^t P(FPT(x_1) < t, \dots, FPT(x_N) < t) dx_1 \dots dx_N \underset{t \sim T_{C,Typ}}{\sim} [1 - S(t)]^N \quad (\text{VI.12})$$

où  $N = (R/2)^d$  est le nombre de sites du volume.

<sup>\*12</sup> Relevons que celle-ci reste, dans la limite des grands volumes, asymptotiquement èquivalente à la probabilitè de survie pour  $R \gg r \gg 1$ .

<sup>\*13</sup> Les sites non visitès ayant un effet marginal sur les propriètès de premier passage, on propose que celle-ci reste similaire à celle d'un mouvement brownien èvoluant dans un volume confinè [Chupeau et al., 2015]

<sup>\*14</sup> On renvoie le lecteur au chapitre 4 où l'analyse des incréments de ces dèfèrents modèles est dètallèe. On a notamment montrè que le coefficient de diffusion effectif des incréments dèpendait du temps d'observation  $T$ , pour  $T \gg R^{d_w}$ .

Notons que l'on s'est déjà reposé sur l'approximation selon laquelle les évènements de premier passage sont indépendants. Après le changement de variable  $\tau = t/\langle T \rangle$  et en injectant le comportement proposé dans (VI.11), on obtient la forme suivante

$$\begin{aligned} Q_c(t) &\sim \left[1 - S_c e^{-t/\langle T \rangle}\right]^N = \exp\left[N \ln\left(1 - S_c e^{-t/\langle T \rangle}\right)\right] \\ &\sim \exp\left(-N S_c e^{-t/\langle T \rangle}\right) = \exp\left[\exp\left[-\frac{t}{\langle T \rangle} + \ln(N) + \ln(S_c)\right]\right]. \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction cumulative d'une distribution de Gumbel selon la variable  $\tau = \frac{t - \langle T \rangle [\ln(N) - \ln(S_c)]}{\langle T \rangle}$ . Dès lors, on retrouve une distribution similaire aux cas markoviens mais dont le temps typique est diminué d'un second terme  $-\ln(S_c)$ . Ainsi, les effets de vieillissement modifient légèrement le temps typique de couverture communément attendu pour les processus markoviens. Relevons que le préfacteur  $S_c$  dépend des effets de vieillissement et qu'il varie donc selon  $\beta^{*15}$ . Enfin, notons que cet effet est sous-dominant comparé au terme d'ordre  $\ln(N)$ . On va par la suite, considérer un exemple où les propriétés de vieillissement modifient le comportement d'échelle du temps de couverture.

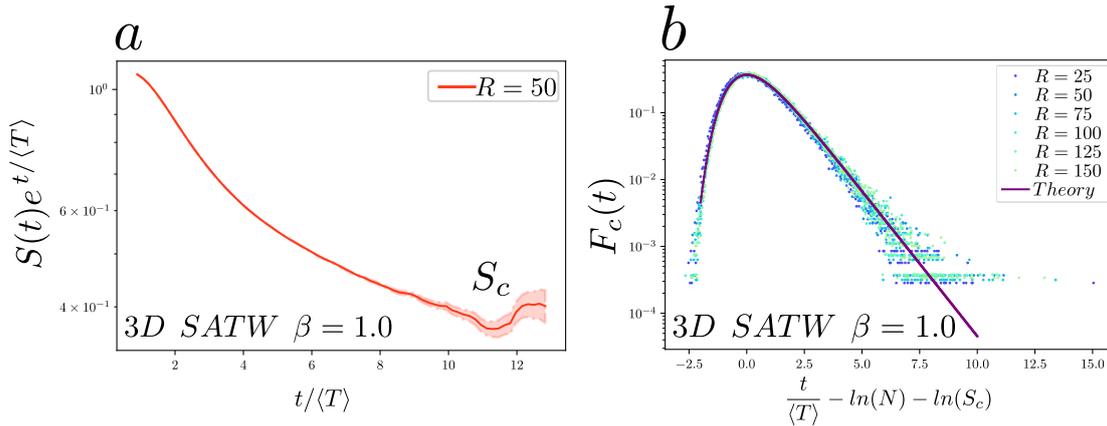


FIG. VI.8 Connexions entre propriétés de premier passage et temps de couverture pour la marche SATW en dimension 3. Ici,  $\beta = 1.0$  définit le poids, associé aux sites ayant déjà été visités qui est proportionnel à  $e^{-\beta}$ . **a** Comportement asymptotique de la queue de la probabilité de survie associée à l'évènement de premier passage d'un unique site. La probabilité de survie, tracée selon la variable normalisée  $t/\langle T \rangle$  et multipliée par  $e^{t/\langle T \rangle}$ , présente une légère dépendance temporelle (tracée pour  $r = 28$ ,  $R = 50$ ). Cette dépendance est inhérente aux effets de vieillissement qui modifient le préfacteur, noté  $S_c$ , de la probabilité de survie à l'échelle typique du temps de couverture. **b** Comportement asymptotique de la densité de probabilité du temps de couverture. La mesure numérique de la distribution du temps de couverture est tracée pour différents volumes. Celles-ci convergent vers la distribution de Gumbel selon la variable d'échelle  $\tau = \frac{t - \langle T \rangle [\ln(N) - \ln(S_c)]}{\langle T \rangle}$ , où  $S_c$  est le préfacteur obtenu en **a** (les valeurs mesurées sont  $\langle T \rangle \approx 0.895N$  et  $S_c \approx 0.85$  pour  $\beta = 1.0$ ). Ainsi, les effets de vieillissement modifient légèrement les propriétés du temps de couverture.

\*15 On rappelle que l'on a choisi ici la notation selon laquelle  $\beta$  définit le poids associé aux sites ayant déjà été visités, alors proportionnel à  $e^{-\beta}$

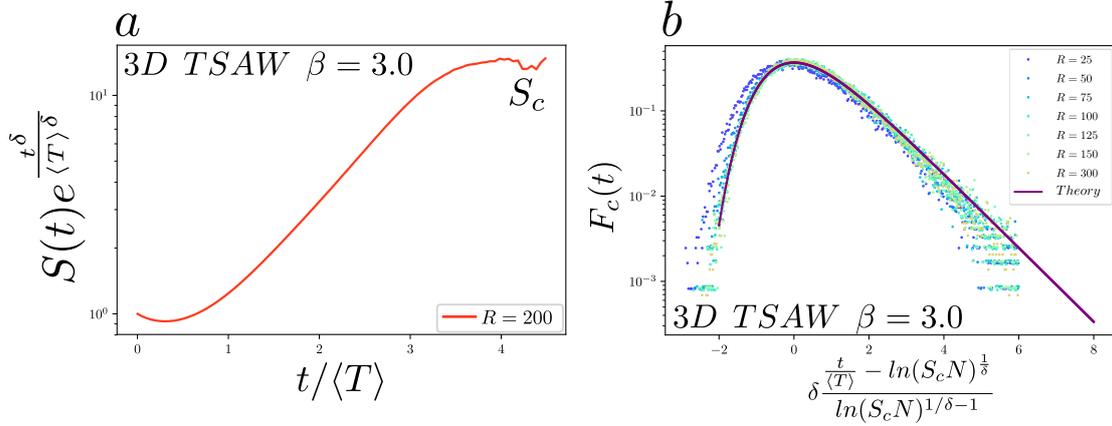


FIG. VI.9 Connexions entre propriétés de premier passage et temps de couverture pour la marche TSAW en dimension 3. **a** Comportement asymptotique de la queue de la probabilité de survie associée à l'évènement de premier passage d'un unique site du volume. La probabilité de survie, tracée selon la variable normalisée  $t/\langle T \rangle$  et multipliée par  $e^{\frac{t}{\langle T \rangle} \delta}$ , converge lentement vers un plateau  $S_c$  (ici tracée pour  $r = 56, R = 100$  et  $\delta \approx 1.86$  est déterminé manuellement). Ainsi, la queue de la distribution de la probabilité de survie présente une décroissance exponentielle étirée selon  $t^\delta/\langle T \rangle^\delta$  avec  $\delta > 1$ . Ce comportement émerge à des échelles de temps où la cible fait partie des derniers sites qui n'ont pas été visités par le marcheur. **b** Comportement asymptotique de la densité de probabilité du temps de couverture. La mesure numérique de cette distribution est tracée pour différents volumes. Celle-ci converge vers la loi Gumbel selon la variable d'échelle  $\tau = \delta \frac{\frac{t}{\langle T \rangle} - \ln(S_c N)^{\frac{1}{\delta}}}{\ln(S_c N)^{\frac{1}{\delta} - 1}}$  où  $S_c$  le préfacteur obtenu dans **a** (les valeurs mesurées sont  $\langle T \rangle \approx 0.567N$  et  $S_c \approx 16$  pour  $\beta = 3.0$ ). Notons que dans la limite des grands volumes, la dépendance selon  $S_c$  devient négligeable comparée au terme dominant  $\ln(N)$ .

### c) Distribution exponentielle étirée, exemple de la marche TSAW

Considérons ensuite, le cas de la marche TSAW, pour laquelle le poids associé à chaque site dépend du nombre de visites ( $\propto e^{-\beta n_i}$ ). L'analyse du chapitre 4 a révélé que cette marche était asymptotiquement diffusive, y compris lorsque le volume est totalement couvert. Pourtant, les fluctuations du nombre de visites de chacun des sites du réseau sont asymptotiquement indépendantes du temps (les détails peuvent être retrouvés en annexe G.1). Cet effet traduit la capacité de la marche à couvrir de manière extrêmement homogène le territoire sur lequel le marcheur évolue. Or cette propriété est d'une importance cruciale lorsque l'on considère le temps de couverture. En effet, on s'intéresse, ici, aux évènements de premier passage<sup>\*16</sup> *rare*s, au sens où la cible est l'un des derniers sites visités du réseau. Qualitativement, à l'échelle du temps typique de couverture le nombre moyen de visites de chaque site diverge selon  $\ln(N)^{1/\delta}$  avec  $\delta > 1$ <sup>\*17</sup>. Néanmoins, par définition la cible n'a pas encore été visitée. Cette différence majeure entre le potentiel associé à la cible (et son environnement local) et l'environnement global du territoire visité, se traduit par une modification du comportement asymptotique de la probabilité de survie. L'analyse numérique de celle-ci révèle qu'elle prend la forme d'une distribution exponentielle étirée  $e^{-t^\delta/\langle T \rangle^\delta}$  (figure VI.9).

Ce comportement contraste avec les résultats précédemment obtenus pour d'autres processus non markoviens [Chupeau et al., 2015], pour lesquels la queue de la distribution de premier passage était exponentielle. On va maintenant étudier l'impact de ce comportement sur la distribution du temps de couverture. Pour cela, on reprend la cumulative (VI.12) selon la variable  $t/\langle T \rangle$ . On va suivre une approche similaire aux méthodes détaillées dans [Majumdar et al., 2020] (initialement développées pour l'analyse d'évènements rares génériques

$$Q_c(\tau) \sim [1 - S_c e^{-\tau^\delta}]^N = \exp [N \ln (1 - S_c e^{-\tau^\delta})] = \exp \left( \exp [-\tau^\delta + \ln(S_c N)] \right).$$

Afin de déterminer le comportement asymptotique de  $Q_c(\tau)$ , on propose le changement de variable suivant  $\tau = a_N + b_N z$  où  $a_N \gg 1$  et  $b_N z \ll a_N$  ce qui sera vérifié a posteriori

$$\begin{aligned} Q_c(z) &\sim \exp \left( \exp \left[ -(a_N + b_N z)^\delta + \ln(S_c N) \right] \right) \\ &\sim \exp \left( \exp \left[ -\delta \frac{b_N}{a_N^{1-\delta}} z - a_N^\delta + \ln(S_c N) \right] \right). \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant  $a_N = \ln(N)^{\frac{1}{\delta}}$  et  $b_N = \frac{\ln(N)^{\frac{1}{\delta}-1}}{\delta}$ , on retrouve que la fonction cumulative selon la variable  $\tau = \delta \frac{t/\langle T \rangle - \ln(S_c N)^{1/\delta}}{\ln(S_c N)^{\frac{1}{\delta}-1}}$  converge vers une distribution de Gumbel ce qui est vérifié figure VI.9. Dès lors, l'échelle typique du temps de couverture est désormais donnée par  $\langle T \rangle \ln(N)^{1/\delta}$  ( $\delta \approx 1.86$  pour  $\beta = 3.0$ ). Commentons les résultats obtenus :

- On a observé que le comportement du temps de couverture de la marche TSAW reste non trivial au-delà de la dimension critique alors que le marcheur est asymptotiquement diffusif. Cela souligne encore l'importance des effets de vieillissement sur les propriétés d'exploration de ces marches. Ainsi, le caractère diffusif de ces modèles ne doit pas être méjugé et des différences importantes avec les modèles markoviens apparaissent, lorsqu'un nombre conséquent de sites a été visité.
- Ensuite, ce comportement est sûrement partagé par les autres modèles de marches à renforcement pour lesquels le potentiel diverge avec le nombre de visites. Ainsi, une extension de ce travail sera nécessaire, en particulier, afin de déterminer le comportement du temps de couverture des marches répulsives en loi de puissance ( $V(n(t)) \sim -\beta \log(t)$ ).
- Pour finir, relevons que l'exposant  $\delta$  peut varier selon le paramètre microscopique  $\beta$ . De manière analogue, les préfacteurs  $S_c$  dépendent aussi de  $\beta$ . Jusqu'à présent, cette analyse numérique reste principalement une illustration des propriétés non triviales du temps de couverture induites par les effets de vieillissement. Ainsi, les valeurs mesurées  $\delta$ ,  $S_c$ ,  $\langle T \rangle$  sont pour l'instant numériques et restent donc approximatives. Une extension naturelle de ces travaux consisterait à déterminer le comportement dominant exact de ces différents modèles à partir du comportement asymptotique des propriétés de premier passage.

---

\*<sup>16</sup> Évènements que l'on rappelle, négligeables dans la limite des grands volumes, lorsque l'on considère les échelles typiques du FPT.

\*<sup>17</sup> Le temps typique du temps de couverture diverge généralement selon  $\langle T \rangle \ln(N)^{1/\delta}$ . Puisque le temps moyen de premier passage est linéaire selon le volume, on obtient un nombre moyen de visites sur chacun des sites de l'ordre de  $\ln(N)^{1/\delta}$ . Ensuite, la valeur de  $\delta$  est mesurée numériquement (figure VI.9) et on s'attend à ce qu'elle soit supérieure à 1 ( $\delta = 1$  pour la marche SATW).

## VI.5 Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'évoquer différents observables connexes aux évènements de premier passage. Pour cela, on s'est appuyé sur les différentes observations émises dans les chapitres 2 et 4, afin d'exploiter les connexions entre les temps de premier passage et la géométrie du territoire visité. Les résultats obtenus semblent particulièrement prometteurs et les différentes analyses développées nécessitent d'être étendues dans des considérations futures. On peut résumer ici les trois axes principaux qui ont été successivement abordés.

Tout d'abord, on s'est intéressé à la question du territoire visité à l'instant de premier passage. On s'est penché sur la caractérisation jointe du territoire visité et de l'instant de premier passage en dimension 1. Cette nouvelle observable, nommée *loi jointe*, permet de retrouver les différentes propriétés usuellement considérées dans les problématiques de géométrie du territoire visité mais aussi de premier passage. Nous avons vu que sa caractérisation est nécessaire dans différentes applications qui nécessitent une compréhension plus fine du territoire visité, le problème de Rosenstock conditionnel [Hughes, 1995 ; Rosenstock, 1961] en est un parfait exemple. D'autre part, on a montré que cette observable vérifie un comportement d'échelle asymptotique, entièrement déterminé par les exposants caractéristiques du MSD et de la probabilité de survie. Ce résultat s'étend à de nombreux processus non markoviens, non strictement invariants d'échelle dont les modèles à renforcement étudiés dans cette thèse. Enfin, la loi jointe nous a permis de déterminer le préfacteur asymptotique de la probabilité de survie dans le cas du modèle SATW. Une extension de cette approche pour d'autres modèles à renforcement peut être envisagée.

Ensuite, on s'est intéressé à la forme du territoire visité en l'absence de cible, et en particulier à la position du centre du territoire visité relativement à la position initiale du marcheur. On a déterminé que la distribution associée, lorsque un nombre donné de sites distincts ont été visités, était entièrement déterminée par l'exposant de persistance. Ce résultat a été obtenu pour les processus markoviens et pour la marche SATW, mais sa généralisation à d'autres modèles semble possible.

Enfin, on s'est intéressé à une dernière observable, le temps de couverture. Nous avons remarqué que celui-ci revêt un intérêt tout particulier lorsque l'on considère les modèles à renforcement. En effet, les effets de vieillissement sont suffisants pour impacter le comportement d'échelle du temps de couverture dont on a pu déterminer la distribution. Ainsi, ces marches présentent des propriétés d'exploration particulièrement intéressantes, y compris au-delà de la dimension critique, propriété peu commentée. Enfin, une extension de cette approche peut être envisagée en dimension 2 pour les explorations marginalement compactes.

# Conclusion

Quelles sont les différences entre la première réalisation d'un évènement et les réalisations à venir de celui-ci ? Plus particulièrement, quel est le temps écoulé avant que cette première réalisation ne survienne ? Les quantifications que mettent en jeu les réponses à ces questions jouent un rôle important, et ce, dans de nombreux domaines de recherche que ce soit la physique et les mathématiques appliquées, mais aussi l'économie, la biologie et la chimie. En effet, il n'est pas rare qu'une étude d'un modèle ou d'une réalisation expérimentale dépende, à un instant donné, d'un tel évènement de premier passage. De plus, l'étude des méthodes d'exploration d'un milieu partiellement connu, dont le temps de premier passage est un élément essentiel, reste fondamentale dans la compréhension des mouvements réalisés par des êtres vivants microscopiques et macroscopiques (repensez à votre "supermarché préféré" ou à votre première fois dans un supermarché américain). Dès lors, le développement d'outils à même de réaliser de telles quantifications est une nécessité.

Dans cette thèse, on s'est intéressé à la question plus spécifique du temps nécessaire à un marcheur aléatoire pour que celui-ci trouve une cible pour la première fois dans un domaine infini ou confiné.

Il convient de noter que ce cadre est plus restrictif que les exemples donnés précédemment. Néanmoins, loin d'être une obstination de chercheur en manque d'équations fortes, il reste fondamental. D'une part, parce que ce cadre descriptif reste judicieux dans l'étude de nombreuses situations réelles (comme la recherche de séquences d'ADN, les temps de réaction contrôlés par le transport de réactifs). Y compris dans des contextes plus complexes comme des mouvements cellulaires et de bactéries où les résultats obtenus restent pertinents dans la description de certaines propriétés observées. D'autre part, parce que ce cadre permet le développement d'outils techniques et de méthodes de résolution importantes qui ont un large spectre d'applications.

Cette thèse s'est donc essentiellement consacrée à l'extension des travaux de premier passage à une catégorie complexe de marches aléatoires dans laquelle les marcheurs interagissent avec l'intégralité de la trajectoire passée. Cette dernière propriété en fait des processus fortement non markoviens, dont l'étude est réputée particulièrement difficile, puisque ceux-ci ont une mémoire infinie de leur trajectoire passée.

En ce sens, il convient de noter que certains des résultats obtenus dans cette thèse ne reposent pas sur une démonstration exacte, mais capturent avec précision les propriétés d'exploration spécifiques de ces marches.

Enfin, ce travail, met en exergue la relation fondamentale qu'entretient le temps de premier passage avec les propriétés de vieillissement de ces marches (plus facilement mesurables par un observateur externe) qui s'étend bien au-delà du cadre spécifique des modèles à renforcement.

Le premier point sur lequel on a insisté concerne cette relation pour les processus diffusifs en dimension 1. On a établi que pour un processus diffusif dont les effets de vieillissement sont évanescents, l'exposant de persistance associé à la probabilité de survie en espace infini est égal à  $1/2$ . Inversement, pour un processus dont les effets de vieillissement perdurent à toutes les échelles de temps, les propriétés de premier passage sont généralement non triviales (un exposant de persistance différent de  $1/2$  est attendu). Notre analyse est complétée par la détermination de plusieurs exposants de persistance de processus non markoviens, dont celui de la marche self-attracting random walk (SATW) qui est un modèle incontournable des marches à renforcement. Les perspectives de cette analyse en dimension supérieure ou égale à 2 ont été évoquées en fin de chapitre.

Ensuite, on a entamé une analyse exhaustive des modèles à renforcement pour lesquels les interactions du marcheur avec sa trajectoire passée restent locales. On a cherché à caractériser conjointement, pour ces différentes marches, les propriétés de vieillissement et de premier passage, avec ou en l'absence de confinement.

Tout d'abord, on s'est intéressé aux modèles attractifs pour lesquels les sites les plus visités antérieurement sont préférés par le marcheur. On a établi que ceux-ci se répartissaient selon trois catégories.

La première identifiée dans la littérature mathématique concerne les marcheurs dont les effets de renforcement sont suffisamment forts, tant et si bien que ceux-ci conduisent le marcheur à se piéger dans sa propre trajectoire où il ne visitera qu'un nombre fini de sites du réseau. Afin d'identifier les propriétés qui conduisent à ce comportement, on a développé une approche qui fournit un argument (mathématiquement non rigoureux) permettant d'unifier les résultats mathématiques établis au cas par cas, et donc d'apporter un critère plus général. La seconde catégorie concerne les processus attractifs dont les effets de renforcement conduisent à un comportement asymptotiquement sous-diffusif du marcheur. On a montré que les modèles qui vérifient ce comportement (modèles pour la plupart encore peu étudiés) présentent des propriétés de vieillissement similaires. L'analyse de ces propriétés de vieillissement, nous a permis de déterminer que ces marches présentaient une distribution de premier passage dont la décroissance asymptotique était plus forte qu'une loi de puissance en espace infini. L'analyse du comportement en confinement est alors triviale dans la limite des grands volumes. Enfin, la dernière catégorie concerne les marcheurs qui restent asymptotiquement diffusifs et possèdent des propriétés similaires aux marches répulsives.

Pour finir, on a relevé l'importance des effets de renforcement dans l'analyse de trajectoires cellulaires réelles. Ces effets confèrent des propriétés de vieillissement aux trajectoires cellulaires, dont les conséquences peuvent être cruciales, bien que généralement négligées dans les expériences de migration cellulaire.

Une seconde étape a consisté à caractériser le comportement des marches répulsives en confinement. Pour cela, on a généralisé les résultats précédemment obtenus pour les processus strictement invariants d'échelle. Ces résultats s'appliquent aux trois catégories d'exploration communément définies dans la littérature : compactes, non compactes et marginalement compactes. Pour chacune de ces catégories, on a caractérisé les propriétés de vieillissement de ces modèles en espace infini et confiné, afin d'en déduire les propriétés de premier passage en confinement. On a alors établi la dépendance de la distribution de premier passage selon les différents paramètres géométriques (taille du volume confinant, taille de la cible et distance initiale du marcheur à la cible). De manière analogue, on a déterminé la dépendance de la distribution de premier passage selon ces mêmes paramètres pour des conditions initiales vieilles, au sens où le marcheur évolue dans un milieu qui a déjà été visité au préalable.

Pour les distributions non compactes, on retrouve que la distance initiale à la cible joue un rôle mineur. Les effets de vieillissement ne modifient pas le temps caractéristique de la distribution du temps de premier passage en confinement, mais altèrent la forme de celle-ci. Ce résultat contraste avec les explorations compactes pour lesquelles des temps caractéristiques variables selon les modèles ont été obtenus. La position initiale reste alors un paramètre important qui influe sur le comportement d'échelle asymptotique de la distribution. En outre, le comportement d'échelle de celle-ci dépend fortement des conditions initiales vieilles. Enfin, notre approche a été étendue à des exemples de processus non markoviens pour lesquels le marcheur interagit avec l'historique complet de la trajectoire de manière non locale. Cette dernière généralisation permet d'étendre notre approche à des processus non strictement invariants d'échelle, dont les effets de vieillissement diffèrent des comportements couramment observés dans la littérature des marches aléatoires.

Un autre axe de recherche a ensuite été abordé. On s'est intéressé à l'étude des propriétés de premier passage d'un processus dont l'évolution suit une équation de Langevin généralisée (GLE) en présence d'un potentiel harmonique. Cette équation émerge naturellement de l'étude de modèles de polymères, et plus généralement de particules interagissant avec un nombre infini de degrés de liberté internes. Ces multiples interactions conduisent à un comportement complexe qui présente des effets de mémoire infinis (au sens d'une décroissance algébrique des fonctions de corrélation). On a alors réadapté les travaux menés en l'absence de potentiel harmonique afin d'exhiber une relation exacte vérifiée par le temps moyen de premier passage. À l'aide d'hypothèses essentielles, dont la pertinence a été commentée, on a pu prédire avec une remarquable précision les valeurs du temps moyen de premier passage de différents processus vérifiant une équation GLE. La précision de ces résultats contraste fortement avec ceux obtenus par les méthodes de résolution usuelles qui conduisent le plus souvent à un temps moyen infini. Cela souligne l'importance du caractère hors d'équilibre de l'évènement de premier passage dont les effets de mémoire associés peuvent être infinis (on a notamment observé une décroissance algébrique des corrélations induites spécifiquement par le FPT). Enfin, nous avons établi que notre approche restait exacte perturbativement à l'ordre 1 autour du processus d'Ornstein Uhlenbeck.

Le dernier chapitre se concentre sur les liens qu'entretiennent les propriétés de premier passage avec d'autres observables caractéristiques de l'étude des propriétés d'exploration des marches aléatoires. Dans un premier temps, on a défini une nouvelle observable qui caractérise la statistique jointe de l'instant de premier passage et du territoire visité à l'instant où celui-ci survient. On a alors établi une relation d'échelle universelle vérifiée par cette loi (dans la limite des grands temps et grandes distances) qui a été vérifiée sur plusieurs processus markoviens et non markoviens. En outre, on a montré que cette observable s'avère pertinente lorsqu'une information partielle sur la trajectoire est connue. D'autre part, celle-ci semble être un outil technique judicieux dans l'étude des marches à renforcement et notamment du modèle SATW. Puis, on s'est intéressé à la position relative du centre du territoire visité en fonction de la position initiale du marcheur. On a déterminé la distribution de celui-ci pour la marche SATW, et la généralisation de ce résultat semble prometteuse. Pour finir, on s'est intéressé aux propriétés du temps de couverture (défini comme le temps requis au marcheur afin de visiter l'intégralité des sites du volume) des marches à renforcement. Pour le cas des explorations non compactes, on a déterminé la distribution asymptotique du temps de couverture, en soulignant l'importance des connexions qu'elle entretient avec le comportement de la distribution de premier passage à une cible. En particulier, on a démontré que les effets de vieillissement observés en confinement entraînent un comportement non trivial du temps de couverture observé pour les modèles à renforcement en dimension supérieure ou égale à 3.

Ces différents résultats présentent une première analyse approfondie de l'étude des propriétés de premier passage et de vieillissement des marches à renforcement. En outre, ceux-ci avancent plusieurs extensions qui émergent naturellement des propriétés intrinsèques de ces marches, et les perspectives qu'elles impliquent ont été évoquées à plusieurs reprises. Énumérons certains points fondamentaux qui restent importants à éclaircir.

Les exposants de persistance en espace infini de la plupart de ces modèles en dimension 1 ne sont pas déterminés analytiquement. Ensuite, les formes des distributions de premier passage en confinement ne sont pas connues exactement, et leur comportement à des échelles de temps telles que celle du temps de couverture reste à déterminer. De même, l'analyse des explorations marginalement compactes a souligné l'existence de nombreux exposants non triviaux dont la compréhension et la caractérisation précise restent à faire. On peut aussi relever que dans le cas des marches attractives, les valeurs des transitions entre le comportement sous-diffusif vieillissant et diffusif asymptotiquement stationnaire ne sont pas connues, y compris pour le modèle SATW. Une analyse de celles-ci comme de la dépendance qu'elles entretiennent avec le comportement du potentiel à un petit nombre de visites reste à faire.

De plus, l'analyse des fluctuations du nombre de visites de chaque site révèle que ces marches couvrent de manière très homogène les milieux dans lesquels elles évoluent, y compris lorsqu'elles réalisent un comportement diffusif. Un approfondissement de cette dernière propriété semble prometteur. Plus généralement, l'analyse des propriétés de premier passage, de vieillissement et du temps de couverture de ces marcheurs dans des géométries fractales seront sources de futurs travaux.

Pour finir, ce travail a souligné que le territoire visité par les marcheurs à renforcement pouvait prendre de multiples formes, de la boule homogène compacte à celles couramment obtenues par des modèles de marches symétriques markoviennes classiques. Afin de permettre la génération de formes différentes, il serait intéressant d'étudier un marcheur qui, par exemple, alternerait successivement entre un comportement attractif ou répulsif. Ces changements d'état du marcheur pourraient être paramétrés afin d'optimiser son exploration du territoire dans lequel il évolue. L'exemple des fourmis, capables de réaliser différents comportements d'exploration, reste évocateur. Cette perspective évoque naturellement celle de l'étude des effets collectifs de multiples marcheurs attractifs ou répulsifs, ouvrant ainsi différents questionnements tels que : Peut-on voir apparaître un comportement collectif induit par les effets de renforcement, et ce, sous quelles conditions ? Par exemple, un effet persistant couplé à un effet de renforcement, peut-il mener à l'émergence d'un mouvement collectif ? Par ailleurs, l'étude des effets de renforcement et de leur importance dans les propriétés des trajectoires réelles, réalisées par des cellules ou des insectes, n'en est qu'aux prémices ; et l'on espère que ce travail en a souligné l'intérêt. Enfin, l'étude des modèles dont les effets de renforcement seraient non locaux est un vaste sujet d'autant que les propriétés de transport et d'exploration de ces marches restent largement inexplorées. Tant de sujets passionnants dont ce travail n'est qu'un aperçu.



## **A – Tableaux récapitulatifs des propriétés des marches à renforcement**

TABLE A.1 Propriétés de vieillissement et de premier passage en espace infini

Processus	$d_I$	Paramètres	$d_w$	Vieillessement en espace infini	Exploration	Exposant
SATW répulsive	1 3	$\beta \in [1/2, 1]$ $h > 0$	2	Deux préfacteurs distincts aux temps courts et aux temps longs décrits par $t/T$ Stationnaire	Compacte Marginale Stationnaire	$\theta = (1 - \beta)/2\beta$ $\psi = d_I - d_w$
SATW attractive	2 3	$\beta \in [0, 1/2]$ $h < h_c < 0$ $h < h_c < 0$ $h < h_c < 0$ $h > h_c > 0$	2 Inc 3 4 am 2	Deux préfacteurs distincts aux temps courts et aux temps longs décrits par $t/T$ Coupure selon $t/T$ aux temps courts avec $\alpha = -1/3$ Coupure selon $t/T$ aux temps courts avec $\alpha = -1/2$ Stationnaire	Compacte Transiente	Décroissance exponentielle Décroissance exponentielle $\psi = d_I - d_w$
ERW	1,2,3	$\beta \in [1/2, 3/4]$ $\beta \in [3/4, 1]$ $\beta = 3/4$	2 ESCR $1/(2\beta - 1)$ ESCR Marginalement diffusive 2 Marginalement diffusive	Deux préfacteurs distincts aux temps courts et aux temps longs décrits par $t/T$ Coupure selon $t/T$ aux temps courts avec $\alpha = 4\beta - 3$ Deux préfacteurs distincts aux temps courts et aux temps longs décrits par $t/T$ Vieillessement transient	Compacte, Marginale, Transiente Transiente (ID cas spécifique) Compacte Marginale Stationnaire	$\theta = 3/2 - 2\beta$ , $\psi = 1$ $\psi = d_I - d_w$ $\psi = d_I - d_w$ $\theta = 1/3^*$
TSAW	1 3	$\beta > 0$	$(k + 2)/(k + 1)$ 2 Marginalement diffusive	Coupure selon $t/T$ aux temps courts avec $\alpha = \frac{1}{2k}$ Stationnaire	Compacte Marginale Transiente	$\theta_N \neq 1 - d_I/d_w$ $\psi = d_I - d_w$
SESRW	1 3	$\beta > 0, k \in [0, 1]$	2	Stationnaire	Compacte Marginale Transiente	$\theta = 1 - d_I/d_w$ $\psi = d_I - d_w$
Monkey walk $q > 2$	3	$q > 2$	2	Stationnaire	Compacte Marginale Transiente	$\theta = 1 - d_I/d_w$ $\psi = d_I - d_w$
Monkey walk $1 < q < 2$	3	$1 < q < 2$	$2/(q - 1)$	Loi de puissance selon $T$ avec $\alpha_N$	Compacte Marginale Transiente	$\theta = 1 - d_I/d_w$ $\psi = d_I - d_w$
Persistant	1 3	$\beta > 0$	1	Deux préfacteurs distincts aux temps courts et aux temps longs décrits par $t/T$	Compacte ( $d_w = d_I$ )	$\theta_N \approx 1 - \beta$ $\psi = d_I - d_w$
TSAW et SESRW attractives	1,2,3	$\beta < 0$	1 Piège	Deux préfacteurs distincts aux temps courts et aux temps longs décrits par $t/T$	Compacte Marginale Transiente	$\theta_N \approx 0/25$ $\psi = d_I - d_w$
Loi de puissance répulsive (PSRW)	1 3	$\beta > 0$	2	Stationnaire	Compacte Marginale Transiente	$\theta = d_I - d_w$ $\psi = d_I - d_w$
Loi de puissance attractive	1,2,3	$k \leq -1$ $-1 < k < k_c \approx -1/2$ $k_c \approx -1/2 < k < 0$	Piège Croissance extrêmement lente Sous-diffusive	Deux préfacteurs distincts aux temps courts et aux temps longs décrits par $t/T$ Coupure selon $t/T$ , diffusif aux temps courts	Inconnue Compacte Marginale Transiente	Décroissance exponentielle $\psi = d_I - d_w$
Marche asymptotiquement libre	1 3	$V(t) = \ln(A + \beta t^{-\beta})$	2	Deux préfacteurs distincts aux temps courts et aux temps longs décrits par $t/T$ Stationnaire	Compacte Marginale Transiente	$\psi = d_I - d_w$

TABLE A.2 Comparaison des propriétés de vieillissement en espace confiné ou infini

Processus	$d_f$	Paramètres	Vieillessement en espace infini	Vieillessement en espace confiné
SATW répulsive	1	$\beta \in [1/2, 1[$	Deux préfacteurs distincts aux temps courts et aux temps longs décrits par $t/T$	Stationnaire avec $D_s$
	2	$h > 0$	Stationnaire	Stationnaire avec un coefficient de diffusion distinct
	3			
SATW attractive	1	$\beta \in ]0, 1/2[$	Deux préfacteurs distincts aux temps courts et aux temps longs décrits par $t/T$	Stationnaire avec $D_s$
	2	$h < h_c < 0$ $0 > h > h_c$	Coupure selon $t/T$ aux temps courts avec $\alpha = -1/3$	$D_c \neq D_s$ où $D_c = D_s$
	3	$h < h_c < 0$ $0 > h > h_c$	Inconnu Coupure selon $t/T$ aux temps courts avec $\alpha = -1/2$ Stationnaire	Stationnaire avec $D_s$ Stationnaire avec un coefficient de diffusion distinct
ERW	1,2,3	$\beta \in ]0, 1/2[$ $\beta \in ]1/2, 3/4[$ $\beta \in ]3/4, 1[$	Deux préfacteurs distincts aux temps courts et aux temps longs décrits par $t/T$ Coupure selon $t/T$ aux temps courts avec $\alpha = 4\beta - 3$	Stationnaire avec $D_s$
TSAW	1	$\beta > 0$	Deux préfacteurs distincts aux temps courts et aux temps longs décrits par $t/T$	Stationnaire avec $D_s$
	2		Vieillessement transiant	Marginalement diffusive
	3		Stationnaire	Stationnaire avec un coefficient de diffusion distinct
SESRW	1	$\beta > 0, k \in ]0, 1[$	Coupure selon $t/T$ aux temps courts avec $\alpha = \frac{k}{2+k}$	Stationnaire avec $D_s$
	2		Diffusif aux temps courts $T \gg t$	Stationnaire avec $D_s$
	3		Stationnaire	Stationnaire avec un coefficient de diffusion distinct
Monkey walk $q \geq 2$	1,2,3	$q > 2$	Stationnaire	Stationnaire avec $D_c$
Monkey walk $q < 2$	1,2,3	$2 > q > 1$	Loi de puissance selon $T$ avec $\alpha_N$	Loi de puissance selon $T$ avec $\alpha_N$
Persistent	1	$\beta > 0$	Deux préfacteurs distincts aux temps courts et aux temps longs décrits par $t/T$	Stationnaire avec $D_s$
TSAW et SESRW attractive	1,2,3	$\beta < 0$	Piégée	Piégée
PSRW	1	$\beta > 0, k > 0$	Deux préfacteurs distincts aux temps courts et aux temps longs décrits par $t/T$	Stationnaire avec $D_s$
	2		Diffusive	Inconnu
	3		Stationnaire	Stationnaire avec un coefficient de diffusion distinct
Loi de puissance attractive	1,2,3	$k \leq -1$ $-1 < k < k_c \approx -1/2$ $k_c \approx -1/2 < k < 0$	Piégée Croissance extrêmement lente Coupure selon $t/T$ , diffusif aux temps courts	Piégée Inconnu Stationnaire avec $D_s$
Marche asymptotiquement libre	1	$V(t) = \ln(A + \beta t^{-k})$	Deux préfacteurs distincts aux temps courts et aux temps longs décrits par $t/T$	Stationnaire avec $D_s$
	2		Stationnaire	Stationnaire avec un coefficient de diffusion distinct
	3		Stationnaire	Stationnaire avec un coefficient de diffusion distinct

TABLE A.3 Explorations non compactes

Processus	$d_f$	Paramètres	Vieillessement en espace infini	Vieillessement en espace confiné	Exposant de transience	Exposant de transience après vieillissement en confinement
SATW répulsive	3	$h > 0$	Stationnaire	Stationnaire avec un coefficient de diffusion distinct	$\psi = d_f - d_w$	$\psi_c = \psi$
SATW attractive	3	$0 > h > h_c$	Stationnaire	Stationnaire avec un coefficient de diffusion distinct	$\psi = d_f - d_w$	$\psi_c = \psi$
ERW	3	$\beta \in ]0, 1/2[$	Deux préfacteurs distincts aux temps courts et aux temps longs décrits par $t/T$	Stationnaire avec $D_s$	$\psi = d_f - d_w$	$\psi_c = \psi$
		$\beta \in ]1/2, 3/4[$			$\psi = d_f - d_w$	$\psi_c = d_f - d_w$
		$\beta \in ]3/4, 1[$			$\psi = d_f - d_w$	$\psi_c = d_f - d_w + \alpha$
TSAW	3	$\beta > 0$	Stationnaire	Stationnaire avec un coefficient de diffusion distinct	$\psi = d_f - d_w$	$\psi_c = \psi$
SESRW	1	$\beta > 0, k \in ]0, 1[$	Stationnaire	Stationnaire avec un coefficient de diffusion distinct	$\psi = d_f - d_w$	$\psi_c = \psi$
Monkey walk $q \geq 2$	1	$q > 2$	Stationnaire	Stationnaire avec un coefficient de diffusion distinct	$\psi = d_f - d_w$	$\psi_c = \psi$
Monkey walk $q < 2$	3	$2 > q > 1$	Loi de puissance $T$ avec $\alpha_N$	Loi de puissance selon $T$ avec $\alpha$	$\psi = f(k, \beta)$	$\psi_c = \psi$
PSRW	3	$\beta > 0, k > 0$	Stationnaire	Stationnaire avec un coefficient de diffusion distinct	$\psi = d_f - d_w$	$\psi_c = \psi_c$
Marche asymptotiquement libre	1	$V(t) = \ln(A + \beta t^{-k})$	Stationnaire	Stationnaire avec un coefficient de diffusion distinct	$\psi = d_f - d_w$	$\psi_c = \psi_c$

TABLE A.4 Explorations compactes

Processus	$d_f$	Paramètres	Vieillessement en espace infini	Vieillessement en espace confiné $T \gg t$	Exposant de persistance	$\theta_c$ avec $T \gg t$
SATW répulsive	1	$\beta \in [1/2, 1[$	Deux préfacteurs distincts aux temps courts et aux temps longs décrits par $t/T$	Stationnaire avec $D_s$	$\theta = f(\beta)$	$\theta_c = 1/2$
SATW attractive	1	$\beta \in ]0, 1/2[$	Deux préfacteurs distincts aux temps courts et aux temps longs décrits par $t/T$	Stationnaire avec $D_s$	$\theta = f(\beta)$	$\theta_c = 1/2$
		$0 > h > h_c$			Inconnu	Marginale
		$h < h_c < 0$			Stationnaire avec $D_s$	Marginale
ERW	1	$\beta \in ]0, 1/2[$	Deux préfacteurs distincts aux temps courts et aux temps longs décrits par $t/T$	Stationnaire avec $D_s$	$\theta = \infty$	Transiente $\psi = d_f - d_w$
		$\beta \in ]1/2, 3/4[$			$\theta = \infty$	
		$\beta \in ]3/4, 1[$			$\theta = \infty$	
TSAW	1	$\beta > 0$	Deux préfacteurs distincts aux temps courts et aux temps longs décrits par $t/T$	Stationnaire avec $D_s$	$\theta = f(\beta)$	$\theta_c = 1/2$
SESRW	1	$\beta > 0, k \in ]0, 1[$	Coupure selon $t/T$ aux temps courts avec $\alpha = \frac{k}{2+k}$	Stationnaire avec $D_s$ and avec $\alpha = \frac{k}{2+k}$	$\theta = 1 - d_f/d_w$ (exception)	$\theta = \theta_c$ (exception)
Monkey walk $q \geq 2$	1	$q > 2$	Stationnaire	Stationnaire avec un coefficient de diffusion distinct	$\theta = f(\beta, k)$	$\theta_c = 1/2$
Monkey walk $q < 2$	1,2,3	$2 > q > 1$	Loi de puissance selon $T$ avec $\alpha_N$	Loi de puissance selon $T$ avec $\alpha_N$	$\theta = 1 - d_f/d_w$	$\theta_c = \theta_c$
Persistent	1	$\beta > 0$	Deux préfacteurs distincts aux temps courts et aux temps longs décrits par $t/T$	Stationnaire avec $D_s$	$\theta = f(\beta, k)$ exception	Transiente
PSRW	1	$\beta > 0, k > 0$	Deux préfacteurs distincts aux temps courts et aux temps longs décrits par $t/T$	Stationnaire avec $D_s$	$\theta = f(\beta)$	$\theta_c = 1/2$
Loi de puissance attractive	1,2,3	$k \leq -1$	Piégée	Piégée	$\theta$ non défini	$\theta$ non défini
		$-1 < k < k_c \approx -1/2$	Croissance extrêmement lente	Inconnu	$\theta = \infty$	$\theta_c = \infty$
		$k_c \approx -1/2 < k < 0$	Coupure selon $t/T$ , diffusif aux temps courts	Stationnaire avec $D_s$	$\theta = \infty$	$\theta_c = 1/2$
Marche asymptotiquement libre	1	$V(t) = \ln(A + \beta t^{-k})$	Deux préfacteurs distincts aux temps courts et aux temps longs décrits par $t/T$	Stationnaire avec $D_s$	$\theta = f(\beta)$	$\theta_c = 1/2$



# B – Exposant de persistance de la marche SATW en dimension 1

## B.1 Comportement d'échelle de la borne inférieure $P_s(N)$

On cherche, ici, à déterminer pour la marche SATW 1D le comportement asymptotique de la probabilité, notée  $P_s(N)$ , que l'ensemble des sites visités soit donné par  $\mathcal{D}_t = [x_0, x_0 + N - 1]$ . Autrement dit,  $P_s(N)$  est la probabilité que les  $N$  premiers sites visités aient été découverts à partir du même bord du territoire visité noté  $x_+$ . On définit  $p_+(n, N)$  comme la probabilité de *splitting* classique qu'un marcheur, qui commence au site  $n + x_0$ , atteigne le site  $N + x_0$  avant de toucher le site  $x_0 - 1$ . Il est alors clair que  $P_s(N)$  vérifie la relation de récurrence suivante

$$P_s(N + 1) = p_+(N - 1, N)P_s(N). \quad (\text{B.1})$$

L'observation centrale sous-entendue par (B.1) est que connaissant la taille réelle de  $D_t$ , l'excursion future à l'intérieur du territoire visité est indépendante du passé. À l'exception des bords du territoire visité, le marcheur effectue une marche aléatoire classique symétrique. Ainsi, pour  $0 < n < N$  on obtient

$$p_+(n, N) = \frac{1}{2}p_+(n + 1, N) + \frac{1}{2}p_+(n - 1, N). \quad (\text{B.2})$$

La solution de (B.2) est donnée par

$$p_+(n) = \lambda + \mu n, \quad (\text{B.3})$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  peuvent être déduits des conditions aux bords

$$\begin{cases} p_+(0, N) = (1 - \beta) p_+(1, N) \\ p_+(N - 1, N) = \beta + (1 - \beta) p_+(N - 2, N). \end{cases}$$

Ce qui amène à

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1 - \beta}{2 + \beta(N - 3)} \\ \mu = \frac{\beta}{2 + \beta(N - 3)}. \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

La combinaison de (B.3) avec (B.4) et (B.1) amène à la relation de récurrence exacte donnée dans le texte principal

$$P_s(N+1) = \left(1 - \frac{1-\beta}{2+\beta(N-3)}\right) P_s(N). \quad (\text{B.5})$$

Remarquons que cette relation est également valable pour  $N = 1$ . Le comportement d'échelle de la série harmonique conduit à la forme asymptotique donnée dans le texte principal pour  $N \rightarrow \infty$

$$P_s(N+1) = 2^{-1} \exp\left(\sum_{i=1}^N \ln\left(1 - \frac{1-\beta}{2+\beta(i-3)}\right)\right) \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} A_0 N^{-\frac{1-\beta}{\beta}},$$

où  $A_0$  est une constante.

## B.2 Relation de récurrence pour les événements $P_s$ et $P_t$

On définit  $P_s(N, M)$  comme la probabilité que  $M - N - 1$  sites aient été visités successivement du même côté alors que le marcheur commence dans un domaine visité de taille  $N + 1$ . De manière similaire à (B.1), on peut écrire une relation de récurrence vérifiée pour  $P_s(N, M)$ .

$$P_s(N, M+1) = \left(1 - \frac{1-\beta}{2+\beta(M-3)}\right) P_s(N, M). \quad (\text{B.6})$$

En utilisant encore une fois le comportement asymptotique de la série harmonique pour  $N \rightarrow \infty$ , on obtient finalement de (B.6)

$$P_s(N, M) = \exp\left\{-\frac{1-\beta}{\beta} \sum_{i=N+1}^{M-1} \frac{1}{j} + \sum_{i=N+1}^{M-1} O\left(\frac{1}{j^2}\right)\right\} \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \frac{N^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{M^{\frac{1-\beta}{\beta}}}.$$

En définissant  $P_t(N)$  comme la probabilité qu'un changement de côté se produise lorsque le nombre de sites distincts visités est de  $N$ , on remarque que  $P_t(N)$  est directement donnée par l'équation de *splitting* de (B.5), ce qui amène à

$$P_t(N) = \frac{1-\beta}{2+\beta(N-3)} \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1-\beta}{\beta N}. \quad (\text{B.7})$$

## B.3 Comportement d'échelle de la borne supérieure

On rappelle que pour l'obtention de la borne supérieure de  $S(N)$ , on cherche à majorer les termes obtenus après la partition selon les changements de côtés  $\{a_1, \dots, a_k\}$

$$P(\{a_1, \dots, a_k\}) = A_K \left(1 + O\left(\frac{1}{a_1}\right)\right) N^{-\frac{1-\beta}{\beta}} (a_1 a_2 \times \dots \times a_k)^{-1},$$

où on a défini la constante  $A_K = 2^{-1} A_0 \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^k$ . Pour obtenir  $P(N, k)$ , il faut alors sommer sur toutes les séquences  $\{a_1, \dots, a_k\}$ . Dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , les sommes sont approximées par des intégrales. De plus, on doit tenir compte du fait que la cible n'a pas été visitée.

À cause de cette contrainte, le marcheur ne peut pas visiter plus de  $x_0$  sites du côté (noté  $-$ ) de la cible; cela va restreindre les domaines d'intégration des variables  $a_i$  et conduire à une borne supérieure de  $P(N, k)$ , et donc de la probabilité de survie. En pratique, quatre cas doivent être analysés en fonction de la direction du premier pas (noté  $\pm$ ) et de la parité de  $k$ .

### B.3.1 Comportement de $P_-(N, 2p)$

En additionnant toutes les séquences  $\{a_1, \dots, a_k\}$  qui satisfont la contrainte de ne pas visiter la cible, on obtient

$$P_-(N, 2p) < \frac{A_{2p}}{N^{\frac{1-\beta}{\beta}}} \int_1^{x_0} \int_{a_1}^N \int_{a_2}^{\min(x_0+a_2, N)} \int_{a_3}^N \dots \int_{a_{2p-2}}^{\min(x_0+a_{2p-2}, N)} \int_{N-x_0}^N (1 + O(a_1^{-1})) \left( \prod_{i=1}^{2p} a_i \right)^{-1} da_1 \dots da_{2p}.$$

Remarquons que la borne inférieure de la dernière intégrale est donnée par  $N - x_0$  puisque après le dernier changement de côté, le marcheur ne peut découvrir plus de  $x_0$  sites successifs sans avoir traversé la cible. Cela limite la plage d'intégration de la variable  $a_{2p}$ . Pour obtenir une borne supérieure suffisante pour  $P_-(N, 2p)$ , il est en fait possible de relâcher toutes les contraintes sur les variables  $a_i$  pour  $i \leq 2p - 1$ , ce qui conduit à

$$P_-(N, 2p) < \frac{A_{2p}}{N^{\frac{1-\beta}{\beta}}} \int_1^N \int_1^N \dots \int_1^N \int_{N-x_0}^N (1 + O(a_1^{-1})) \left( \prod_{i=1}^{2p} a_i \right)^{-1} da_1 da_2 \dots da_{2p}. \quad (\text{B.8})$$

Toutes les intégrales sont maintenant découplées, ce qui amène à

$$P_-(N, 2p) < \frac{A_{2p}(1 + o(1))}{N^{\frac{1-\beta}{\beta}}} \ln\left(\frac{N}{N-x_0}\right) \ln(N)^{2p-1}, \quad (\text{B.9})$$

à partir de laquelle on en déduit finalement la limite supérieure

$$P_-(N, 2p) = O(N^{-\frac{1-\beta}{\beta}}) \quad (\text{B.10})$$

### B.3.2 Comportement de $P_+(N, 2p)$

En sommant toutes les séquences  $\{a_1, \dots, a_k\}$  qui satisfont la contrainte selon laquelle la cible n'a pas encore été atteinte, on obtient dans ce cas

$$P_+(N, 2p) < \frac{A_{2p}}{N^{\frac{1-\beta}{\beta}}} \int_1^N \int_{a_1}^{\min(a_1+x_0, N)} \int_{a_2}^N \dots \int_{a_{2p-2}}^N \int_{a_{2p-1}}^{\min(a_{2p-1}+x_0, N)} (1 + O(a_1^{-1})) \left( \prod_{i=1}^{2p} a_i \right)^{-1} da_1 da_2 \dots da_{2p}.$$

On relaxe ensuite les conditions de minimum dans les limites supérieures des intégrales pour obtenir

$$P_+(N, 2p) < \frac{A_{2p}}{N^{\frac{1-\beta}{\beta}}} \int_{1/N}^1 \int_{a_1}^{a_1+x_0/N} \int_{a_2}^1 \dots \int_{a_{2p-2}}^1 \int_{a_{2p-1}}^{a_{2p-1}+x_0/N} (1 + O(N^{-1}a_1^{-1})) \left( \prod_{i=1}^{2p} a_i \right)^{-1} da_1 da_2 \dots da_{2p}. \quad (\text{B.11})$$

On traite ensuite itérativement les intégrales deux par deux en utilisant (pour  $p > 1$ )

$$\int_{a_{2p-2}}^1 \int_{a_{2p-1}}^{a_{2p-1}+x_0/N} \frac{1}{a_{2p-1}a_{2p}} da_{2p-1} da_{2p} < \int_{a_{2p-2}}^1 \frac{x_0}{Na_{2p-1}^2} da_{2p-1} < \frac{x_0}{Na_{2p-2}}.$$

En appliquant ces étapes à l'équation (B.11), on obtient

$$P_+(N, 2p) < \frac{A_{2p}}{N^{\frac{1-\beta}{\beta}}} \int_{1/N}^1 \int_{a_1}^{a_1+x_0/N} \int_{a_2}^1 \dots \int_{a_{2p-4}}^1 \int_{a_{2p-3}}^{a_{2p-3}+x_0/N} (1 + O(N^{-1}a_1^{-1})) \left( \prod_{i=1}^{2p-3} a_i \right)^{-1} \frac{x_0}{Na_{2p-2}^2} da_1 \dots da_{2p-2}.$$

En itérant ces étapes, on obtient finalement

$$P_+(N, 2p) < \frac{A_{2p}}{N^{\frac{1-\beta}{\beta}}} \int_{1/N}^1 \frac{1 + O(\frac{1}{Na_1})}{p-1!} \frac{x_0^p}{N^p a_1^{p+1}} da_1,$$

qui satisfait

$$P_+(N, 2p) < \frac{A_{2p}}{N^{\frac{1-\beta}{\beta}}} \int_1^N \frac{1 + O(\frac{1}{a_1})}{p-1!} \frac{x_0^p}{a_1^{p+1}} da_1 = O(N^{-\frac{1-\beta}{\beta}}).$$

À noter que le terme  $p = 0$  est exactement la borne inférieure  $P_s(N)$  dont l'échelle est donnée par (B.5).

### B.3.3 Comportement de $P_+(N, 2p + 1)$

On reproduit les étapes décrites ci-dessus et on obtient alors

$$P_+(N, 2p + 1) < \frac{A_{2p+1}}{N^{\frac{1-\beta}{\beta}}} \int_1^N \int_{a_1}^{\min(a_1+x_0, N)} \dots \int_{a_{2p-1}}^{\min(a_{2p-1}+x_0, N)} \int_{N-x_0}^N (1 + O(a_1^{-1})) \left( \prod_{i=1}^{2p+1} a_i \right)^{-1} da_1 \dots da_{2p+1}.$$

De même que pour (B.8), la limite inférieure de la dernière intégrale est donnée par  $N - x_0$ . En appliquant les mêmes étapes (B.9) et (B.10), on obtient le comportement d'échelle attendu

$$P_+(N, 2p + 1) = O(N^{\frac{1-\beta}{\beta}}).$$

### B.3.4 Comportement de $P_-(N, 2p + 1)$

On reproduit les étapes décrites ci-dessus et on obtient

$$P_-(N, 2p + 1) < \frac{A_{2p+1}}{N^{\frac{1-\beta}{\beta}}} \int_1^{x_0} \int_{a_1}^N \int_{a_2}^{\min(a_2+x_0, N)} \dots \int_{a_{2p-1}}^N \int_{a_{2p}}^{\min(a_{2p}+x_0, N)} (1 + O(a_1^{-1})) \left( \prod_{i=1}^{2p+1} a_i \right)^{-1} da_1 \dots da_{2p+1}.$$

On reproduit la même relation de récurrence que celle obtenue dans (B.11) ce qui conduit à

$$P_-(N, 2p + 1) < \frac{A_{2p+1}}{N^{\frac{1-\beta}{\beta}}} \int_{1/N}^{x_0/N} \frac{1 + O(\frac{1}{Na_1})}{p!} \frac{x_0^p}{N^p a_1^{p+1}} da_1.$$

Pour  $p \geq 1$  on trouve finalement

$$P_-(N, 2p + 1) = O(N^{-\frac{1-\beta}{\beta}}).$$

On conclut enfin cette partie en analysant le cas impair  $p = 0$ . On trouve alors

$$P_+(N, 1) = A_1 \frac{1}{N^{\frac{1-\beta}{\beta}}} \int_{N-N_0}^N (1 + O(\frac{1}{a_1})) \frac{1}{a_1} da_1 = o(N^{-\frac{1-\beta}{\beta}}),$$

et

$$P_-(N, 1) = \frac{A_1}{N^{\frac{1-\beta}{\beta}}} \int_1^{N_0} (1 + O(\frac{1}{a_1})) \frac{1}{a_1} da_1 = O(N^{-\frac{1-\beta}{\beta}}).$$

Enfin, tous les  $P(N, k)$  sont bornées par  $O(N^{-\frac{1-\beta}{\beta}})$ , et il en est de même pour  $S(N)$ , comme énoncé dans le texte principal.

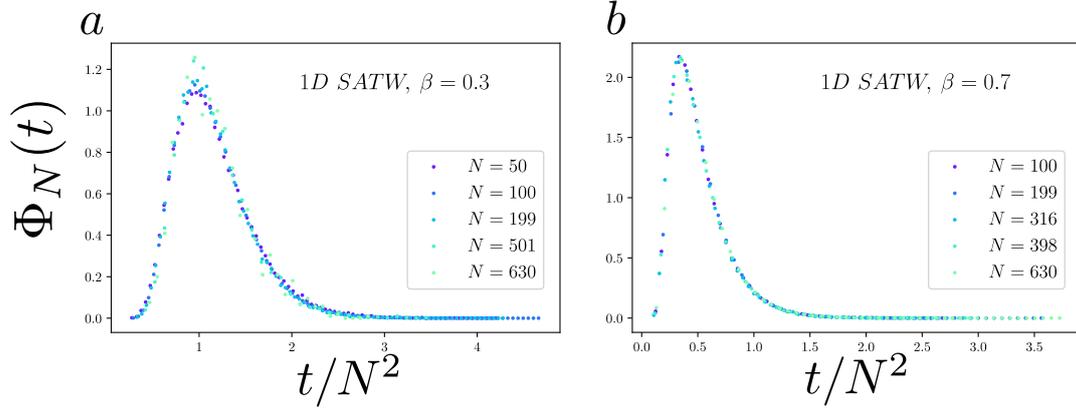


FIG. B.1 *Distribution conditionnelles du FPT sachant que la cible est le Nème site découvert pour  $\beta = 0,3$  a et  $\beta = 0,7$  b. Les distributions sont générées et décrites en fonction de la variable normalisée  $t/N^2$  pour des marcheurs initialement à une distance  $x_0 = 20$ . L'échelle attendue dans  $N^2$  est obtenue dans la limite  $N \gg x_0$ .*

#### B.4 Comportement d'échelle de la probabilité de survie en fonction du temps

On cherche ici à extraire le comportement asymptotique de la probabilité de survie  $S(t)$ , en s'appuyant sur celui déterminé pour  $S(N)$ . Pour ce faire, on reprend la partition donnée dans le texte principal

$$F(t) = \sum_{N=0}^{\infty} F(N, t) = \sum_{N=0}^{\infty} \Phi_N(t) F(N),$$

où  $\Phi_N(t)$  est la probabilité que la cible soit trouvée au temps  $t$  sachant que  $N - 1$  sites ont été visités auparavant et  $F(N)$  est la probabilité que la cible soit le  $N$ ème site découvert. On suppose que  $\Phi_N(t)$  est invariante d'échelle selon  $t/N^2$  (hypothèse discutée dans le chapitre 6). En rappelant que  $\Phi_N(t)$  est normalisée selon  $t$ , on écrit

$$\Phi_N(t) = \frac{1}{N^2} f\left(\frac{t}{N^2}\right),$$

ce qui est confirmé par les simulations numériques (figure B.1). Ce comportement permet alors une détermination exacte de  $\theta$  pour la marche SATW.

## C – Exposant de persistance de la marche PSATW

Ici, on cherche à déterminer analytiquement l'exposant de persistance d'une généralisation de la marche SATW qui présente un caractère persistant. Le modèle est défini comme suit : lorsque le marcheur se trouve à l'intérieur de la zone visitée, il effectue une simple marche persistante caractérisée par deux états  $\pm$  qui indiquent la direction du dernier pas. À chaque pas de temps  $t$ , le marcheur a une probabilité  $Q = e^k/(e^{-k} + e^k)$  de reproduire le pas effectué au temps  $t - 1$ . Lorsque le marcheur se trouve sur un des bords du domaine visité, cette probabilité est modifiée et devient  $Q_1 = e^k/(e^{-k-u} + e^k)$ .

Comme dans le cas de la marche SATW, on définit  $p_{\pm}(n, N)$  comme la probabilité de *splitting* pour un marcheur qui commence au site  $n$  d'atteindre le site  $-1$  avant le site  $N$  sachant que  $N$  sites ont déjà été visités et que le marcheur est initialement dans l'état  $\pm$  respectivement. Pour  $n \leq N - 2$  et  $n \geq 2$ , il est clair que  $p_{\pm}(n, N)$  vérifie la relation de double récurrence

$$\begin{cases} p_{-}(n, N) = Qp_{-}(n - 1, N) + (1 - Q)p_{+}(n + 1, N) \\ p_{+}(n, N) = Qp_{+}(n + 1, N) + (1 - Q)p_{-}(n - 1, N). \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

En recombinaison (C.1), on obtient les équations différentielles du second ordre suivantes

$$\begin{cases} \frac{p_{-}(n-1, N) - Qp_{-}(n-2, N)}{1-Q} = \frac{Q}{1-Q}(p_{-}(n, N) - Qp_{-}(n-1, N)) + (1-Q)p_{-}(n-1, N) \\ \frac{p_{+}(n+1, N) - Qp_{+}(n+2, N)}{1-Q} = \frac{Q}{1-Q}(p_{+}(n, N) - Qp_{+}(n+1, N)) + (1-Q)p_{+}(n+1, N). \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Les solutions de (C.2) sont données par

$$p_{\pm}(n, N) = \lambda_{\pm} + \mu_{\pm}n.$$

et (C.2) amène à

$$\mu_{-}n + \lambda_{-} = Q(\mu_{-}(n - 1) + \lambda_{-}) + (1 - Q)(\mu_{+}(n + 1) + \lambda_{+}). \quad (\text{C.3})$$

On en déduit de (C.3)

$$\begin{cases} \mu_{-} = \mu_{+} \\ \lambda_{-} = -\frac{Q}{1-Q}\mu_{-} + \mu_{+} + \lambda_{+}. \end{cases}$$

On utilise enfin les conditions aux bords  $(0, N-1)$  pour obtenir  $\mu_{\pm}, \lambda_{\pm}$ .

$$\begin{cases} p_-(0, N) = Q_1 + (1 - Q_1)p_+(1, N) \\ p_+(N-1, N) = (1 - Q_1)p_-(N-2, N), \end{cases}$$

ce qui amène à

$$\begin{cases} \lambda_- = Q_1 + (1 - Q_1)(\lambda_+ + \mu_+) \\ \lambda_+ + (N-1)\mu_+ = (1 - Q_1)[\lambda_- + \mu_-(N-2)]. \end{cases}$$

On obtient finalement

$$\begin{cases} \mu_{\pm} = \frac{Q_1(1-Q)}{2Q_1-2Q-Q_1Q-Q_1(1-Q)N} \\ \lambda_- = 1 + \frac{Q(1-Q_1)}{2Q_1-2Q-Q_1Q-Q_1(1-Q)N} \\ \lambda_+ = 1 - \frac{Q_1-Q-Q_1Q}{2Q_1-2Q-Q_1Q-Q_1(1-Q)N}, \end{cases}$$

ce qui détermine entièrement la probabilité de *splitting* pour tout  $n$ . Le comportement asymptotiquement selon  $N$  de  $p_-(0, N)$  est alors donné par

$$p_-(0, N) = 1 + \frac{Q(1-Q_1)}{2Q_1-2Q-Q_1Q-Q_1(1-Q)N} \sim 1 - \frac{Q(1-Q_1)}{Q_1(1-Q)N},$$

ce qui peut être réécrit selon la variable  $u$

$$1 - p_-(0, N) \sim \frac{e^{-u}}{N}.$$

Remarquons que le régime asymptotique est indépendant du paramètre persistant  $k$ . Cette expression est similaire à l'équation (B.7) obtenue à partir du modèle SATW si l'on fixe  $\beta = 1/(1 + \exp(-u))$ . Toutes les étapes techniques peuvent alors être reproduites et conduisent à la détermination suivante de l'exposant de persistance qui est indépendant de  $k$

$$\theta = \frac{e^{-u}}{2} = \frac{1-\beta}{2\beta}.$$

# D – Incrémentes de la marche ERW en dimension 1

On commence par rappeler les deux relations clés sur lesquelles on se reposera dans notre analyse du modèle ERW [Schütz et al., 2004]

$$\langle \sigma_{t+1} | \sigma_1 \dots \sigma_t \rangle = \frac{2\beta - 1}{t} (X(t) - X(0)), \quad (\text{D.1})$$

$$\langle X(t)^2 \rangle = \frac{t}{3 - 4\beta} \left( 1 - \frac{\Gamma(t + 4\beta - 2)}{\Gamma(t + 1)\Gamma(4\beta - 2)} \right), \quad (\text{D.2})$$

où  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t\}$  est l'ensemble des sauts du marcheur effectués jusqu'au temps  $t$ . Notons que (D.1) souligne que la connaissance de la position actuelle du marcheur et du temps  $t$  sont suffisantes pour décrire la future évolution du processus (sachant que le processus est initialement en  $X(0)$ ). Le modèle est non-markovien de par la dépendance des probabilités de transition selon  $t$  et  $X(0)$ .

Dans cette annexe, on déterminera une relation de récurrence vérifiée par les incréments du modèle. Introduisons  $p(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{T+t+1})$  la probabilité associée au chemin  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{T+t+1}\}$ . En utilisant

$$X(t + T + 1) = X(t + T) + \sigma_{T+t+1},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \langle [X(t + 1 + T) - X(T)]^2 \rangle &= \langle \sigma_{T+t+1}^2 + [X(t + T) - X(T)]^2 + 2\sigma_{T+t+1}[X(t + T) - X(T)] \rangle \\ &= 1 + \langle [X(t + T) - X(T)]^2 \rangle + 2\langle \sigma_{T+t+1} \sum_{t'=T+1}^{t+T} \sigma'_{t'} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Remarquons que le dernier terme, noté (a) par la suite, contient les corrélations entre le dernier pas et la trajectoire complète depuis le temps  $T$ . On réécrit (a) en rendant explicite la partition selon l'ensemble des évènements passés  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{t+T}\}$

$$(a) = 2 \sum_{\{\sigma_1, \dots, \sigma_{t+T}\}} p(\sigma_1, \dots, \sigma_{t+T}) \left( \sum_{t'=T+1}^{t+T} \sigma'_{t'} \right) \langle \sigma_{T+t+1} | \sigma_1 \dots \sigma_{t+T} \rangle. \quad (\text{D.4})$$

En utilisant (D.1) et en supposant sans perte de généralité que le marcheur commence en 0, (D.4) conduit à la relation suivante

$$\begin{aligned} (a) &= 2 \frac{2\beta - 1}{t + T} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_{t+T}} p(\sigma_1, \dots, \sigma_{t+T}) (X(t+T) - X(T)) X(t+T) \\ &= 2 \frac{2\beta - 1}{t + T} (\langle X(t+T)^2 \rangle - \langle X(t+T)X(T) \rangle). \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Ensuite, déterminons  $\langle X(t+T)X(T) \rangle$  au moyen d'une seconde relation de récurrence conditionnellement à la position du marcheur au temps  $T$

$$\begin{aligned} \langle X(t+T+1)|X(T) \rangle &= \sum_{\sigma_{T+1}, \dots, \sigma_{t+T}} p(\sigma_{T+1}, \dots, \sigma_{t+T}|X(T)) \langle \sigma_{t+T+1} + X(T+t) | X(T), \sigma_{T+1} \dots \rangle \\ &= \sum_{\sigma_{T+1}, \dots, \sigma_{t+T}} p(\sigma_{T+1}, \dots, \sigma_{t+T}|X(T)) (X(T+t) + \langle \sigma_{t+T+1} | X(T), \sigma_{T+1} \dots \rangle). \end{aligned}$$

En utilisant (D.1) pour le second terme à l'intérieur de la somme conduit à

$$\begin{aligned} \langle X(t+T+1)X(T)|X(T) \rangle &= \sum_{\sigma_{T+1}, \dots, \sigma_{t+T}} X(T)X(T+t) \left(1 + \frac{2\beta - 1}{T+t}\right) p(\sigma_{T+1}, \dots, \sigma_{t+T}|X(T)) \\ &= \left(1 + \frac{2\beta - 1}{T+t}\right) \langle X(t+T)X(T)|X(T) \rangle. \end{aligned}$$

En itérant cette relation, on obtient après avoir moyenné sur  $X(T)$

$$\langle X(t+T)X(T) \rangle = \langle X(T)^2 \rangle \prod_{i=0}^{t-1} \left(1 + \frac{2\beta - 1}{T+i}\right). \quad (\text{D.6})$$

On peut alors revenir à (D.3). En injectant (D.6) dans (D.5) et en remplaçant finalement le terme au carré dans (D.2), cela amène à

$$\begin{aligned} \langle [X(t+1+T) - X(T)]^2 \rangle &= 1 + \langle [X(t+T) - X(T)]^2 \rangle + 2 \frac{2\beta - 1}{3 - 4\beta} \left(1 - \frac{\Gamma(t+T+4\beta-2)}{\Gamma(t+T+1)\Gamma(4\beta-2)}\right) \dots \\ &\quad - 2 \frac{2\beta - 1}{3 - 4\beta} \frac{T}{t+T} \left(1 - \frac{\Gamma(T+4\beta-2)}{\Gamma(T+1)\Gamma(4\beta-2)}\right) \prod_{i=0}^{t-1} \left(1 + \frac{2\beta - 1}{T+i}\right). \end{aligned}$$

Enfin l'itération de (D) conduit finalement à la solution explicite des incréments

$$\begin{aligned} \langle [X(t+T) - X(T)]^2 \rangle &= \frac{t}{3 - 4\beta} - \frac{2(2\beta - 1)}{3 - 4\beta} \sum_{t'=1}^{t-1} \frac{\Gamma(T+t'+4\beta-2)}{\Gamma(T+t'+1)\Gamma(4\beta-2)} \dots \\ &\quad - \frac{2(2\beta - 1)T}{3 - 4\beta} \left(1 - \frac{\Gamma(T+4\beta-2)}{\Gamma(T+1)\Gamma(4\beta-2)}\right) \sum_{t'=1}^{t-1} \left(\frac{1}{T+t'} \prod_{i=0}^{t'-1} \left(1 + \frac{2\beta - 1}{T+i}\right)\right) - \frac{2(2\beta - 1)}{3 - 4\beta}. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Comme attendu, ceux-ci ne dépendent pas de la condition initiale du premier pas. On cherche donc à exhiber le comportement dominant pour les cas  $\beta < 3/4$  et  $\beta > 3/4$ .

Cas  $\beta < 3/4$  :

Le rapport des deux fonctions gammas décroît, impliquant que le second terme de (D) est négligeable comparé à  $t$ . Cela conduit à la relation

$$\frac{1}{t} \sum_{t'=1}^{t-1} \frac{2(2\beta-1)}{3-4\beta} \frac{\Gamma(T+t'+4\beta-2)}{\Gamma(T+t'+1)} = o_t(1). \quad (\text{D.8})$$

En outre, le préfacteur du troisième terme présente un comportement asymptotiquement linéaire selon  $T$

$$\frac{T}{3-4\beta} \left(1 - \frac{\Gamma(T+4\beta-2)}{\Gamma(T+1)\Gamma(4\beta-2)}\right) \underset{T \rightarrow \infty}{\sim} \frac{T}{3-4\beta}. \quad (\text{D.9})$$

Ensuite on peut dériver le comportement asymptotique de la somme à l'intérieur du troisième terme. Dans un premier temps, on détermine le produit asymptotique suivant

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{t'-1} \left(1 + \frac{2\beta-1}{T+i}\right) &= \exp\left(\sum_{i=0}^{t'-1} \ln\left(1 + \frac{2\beta-1}{T+i}\right)\right) \\ &= \left(\frac{T+t'}{T}\right)^{2\beta-1} (1 + O(T^{-1})). \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Ensuite, (D.10) détermine le comportement asymptotique du troisième terme

$$\sum_{t'=1}^{t-1} \frac{\prod_{i=0}^{t'-1} \left(1 + \frac{2\beta-1}{T+i}\right)}{T+t'} = \frac{(T+t)^{2\beta-1} - T^{2\beta-1}}{(2\beta-1)T^{2\beta-1}} (1 + O(T^{-1})) = \frac{1}{2\beta-1} \left(\left(1 + \frac{t}{T}\right)^{2\beta-1} - 1\right) (1 + O(T^{-1})). \quad (\text{D.11})$$

Finalement, on rassemble les différents résultats (D.11), (D.9) et (D.8) dans (D.7) ce qui conduit à l'expression finale

$$\langle [X(t+T) - X(T)]^2 \rangle = \frac{t}{3-4\beta} - \frac{2t}{3-4\beta} \frac{T}{t} \left(\left(1 + \frac{t}{T}\right)^{2\beta-1} - 1\right) + o(t).$$

Cas  $\beta > 3/4$  :

Dans cette limite, le rapport des deux fonctions  $\Gamma$  est donné par

$$\frac{\Gamma(t'+4\beta-2)}{\Gamma(t'+1)} \underset{t' \rightarrow \infty}{\sim} t'^{4\beta-3}. \quad (\text{D.12})$$

Par conséquent, en combinant (D.12) au comportement de (D.11), on obtient la seconde composante du troisième terme qui n'est plus négligeable

$$\frac{2(2\beta-1)T}{(3-4\beta)\Gamma(4\beta-2)} \frac{\Gamma(T+4\beta-2)}{\Gamma(T+1)} \sum_{t'=1}^{t-1} \frac{\prod_{i=0}^{t'-1} \left(1 + \frac{2\beta-1}{T+i}\right)}{T+t'} = \frac{2}{(3-4\beta)\Gamma(4\beta-2)} T^{4\beta-2} \left(\left(1 + \frac{t}{T}\right)^{2\beta-1} - 1\right).$$

Pour finir, considérons le second terme pour lequel on utilise une comparaison série intégrale valide dans la limite  $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} 2 \frac{2\beta - 1}{(3 - 4\beta)\Gamma(4\beta - 2)} \sum_{t'=1}^{t-1} \frac{\Gamma(T + t' + 4\beta - 2)}{\Gamma(T + t' + 1)} &= 2 \frac{2\beta - 1}{(3 - 4\beta)\Gamma(4\beta - 2)} \sum_{t'=1}^{t-1} (t + T')^{4\beta-2} (1 + o_T(1)) \\ &= \frac{1}{(3 - 4\beta)\Gamma(4\beta - 2)} T^{4\beta-2} \left( \left(1 + \frac{t}{T}\right)^{4\beta-2} - 1 \right). \end{aligned}$$

En rassemblant les différents termes, on obtient le comportement des incréments

$$\begin{aligned} \langle [X(t + T) - X(T)]^2 \rangle &= T^{4\beta-2} \frac{2}{(3 - 4\beta)\Gamma(4\beta - 2)} \left( \left(1 + \frac{t}{T}\right)^{2\beta-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{t}{T}\right)^{4\beta-2} \right) \\ &\quad + t \left( \frac{1}{3 - 4\beta} - \frac{2}{3 - 4\beta} \frac{T}{t} \left( \left(1 + \frac{t}{T}\right)^{2\beta-1} - 1 \right) \right) + o(t, T). \end{aligned}$$

Pour finir, on réécrit les incréments sous la forme attendue

$$\begin{aligned} \langle [X(t + T) - X(T)]^2 \rangle &= \frac{2t^{4\beta-2}}{(4\beta - 3)\Gamma(4\beta - 2)} \left( \frac{T}{t} \right)^{4\beta-2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{t}{T}\right)^{4\beta-2} - \left(1 + \frac{t}{T}\right)^{2\beta-1} \right) \\ &\quad + t \left( \frac{1}{3 - 4\beta} - \frac{2}{3 - 4\beta} \frac{T}{t} \left( \left(1 + \frac{t}{T}\right)^{2\beta-1} - 1 \right) \right) + o(t, T). \end{aligned}$$

# E – Propriétés spécifiques aux marches à renforcement attractif

## E.1 Remarques autour de la différence entre les conventions sur sites et sur liens

Notons que les différences relevées dans le chapitre 3 justifient le choix de nombreux travaux analytiques y compris dans l'analyse des processus répulsifs en dimension 1. En effet, considérons le site  $s_i$  dont les deux liens  $i$  et  $i + 1$  sont caractérisés par leur poids respectif dans la convention sur lien. En partitionnant la trajectoire sur les différents retours du marcheur sur  $s_i$ , on obtient un modèle de croissance *markovien* pour  $w(i)$  et  $w(i + 1)$ . Afin de rendre cette dernière observation plus explicite, notons  $t_k$  l'instant du  $k$ ème retour en  $s_i$ . Connaissant le couple  $\{w(i, t_k), w(i + 1, t_k)\}$ , on obtient pour les probabilités d'incrément

$$\begin{aligned} p(w_i(t_{k+1}) + 1, w_{i+1}(t_{k+1}) | w_i(t_k) + 1, w_{i+1}(t_k)) &= 1 - p(w_i(t_{k+1}), w_{i+1}(t_{k+1} + 1) | w_i(t_k) + 1, w_{i+1}(t_k)) \\ &= \frac{w_i(t_k)}{w_i(t_k) + w_{i+1}(t_k)}. \end{aligned}$$

Cette observation est primordiale dans les preuves analytiques menées pour les processus à renforcement sur liens. Notons que dans ce cas précis, la convention sur lien est indispensable afin de mener un tel raisonnement puisqu'on profite de l'indépendance relative entre  $(w_i, w_{i+1})$  et les temps respectifs passés sur les sites  $s_{i-1}$  et  $s_{i+1}$ .

## E.2 Comportement des marches attractives piégées

Dans cette partie, on propose de reprendre la preuve énoncée dans le chapitre 3 afin de compléter les différents arguments qui ont été énoncés dans le texte principal.

### E.2.1 Définition de la probabilité de s'extraire du piège

On se tourne ensuite vers la probabilité de s'extraire du piège  $V_0$ . Pour cela, on définit  $S_{\tau, V_0}(t)$ , la probabilité d'être piégé depuis  $\tau$  jusqu'à  $t$ . Parallèlement, on définit  $F_{V_0}(t) dt$  la probabilité de s'extraire de  $V_0$  entre  $t$  et  $t + dt$ . Notons que  $S_{\tau, V_0}$  et  $F_{V_0}$  sont liées par la relation suivante dans la limite continue

$$\begin{aligned}
S_{V_0}(t, \tau) &= \prod_{i=0}^{\frac{t-\tau}{dt}} (1 - F_{V_0}(\tau + idt)dt) \\
&= \exp\left(-\int_{\tau}^t F_{V_0}(t')dt'\right)
\end{aligned}$$

On cherche à exprimer  $F_{V_0}(t')$  en fonction de  $P(x \in \partial_- V_0, t')$ . On considérera que le marcheur s'est extrait de  $V_0$  lorsque celui-ci sort de  $\partial_- V_0$ . Pour la convention sur site, les marcheurs présents sur  $\partial_- V_0$  sont toujours attirés par les sites voisins appartenant à  $\partial_+ V_0$ . Dès lors, la probabilité de s'échapper de  $V_0$  n'est donc plus simplement proportionnelle à  $P(x \in \partial_- V_0, t')$  puisqu'il faut faire deux sauts successifs pour s'extraire de  $V_0$ . Par conséquent, on propose que pour la convention sur site

$$F_{V_0}(t') \propto P(x \in \partial_- V_0, t') e^{f(\frac{t'}{V_0} + o_{\partial_+}(t')) + f(o(t))}.$$

On a supposé que le temps local moyen des sites en contact avec  $\partial_- V_0$  est de l'ordre  $o(t)$ . Le terme d'ordre  $f(\frac{t'}{V_0} + o_{\partial_+}(t'))$  traduit la probabilité de réaliser le second saut alors que le marcheur est toujours en contact avec un site de  $\partial_+ V_0$ . Cela conduit pour  $S_{V_0}(t, \tau)$  à

$$S_{V_0}(t, \tau) \sim \exp\left(-\int_{\tau}^t e^{2f(\frac{t'}{V_0} + o_{\partial_+}(t')) - f(o_{\partial_-}(t')) - f(O(1))} dt'\right)$$

### E.2.2 Complément pour le cas $-\ln(t)/2 > f(t) > -\ln(t)$

On peut supposer que le temps moyen passé  $\partial_- V_0$  diverge selon une fonction  $g(t)$  plus faible qu'une loi de puissance. Si l'on reprend le comportement d'échelle de  $P(x \in \partial_- V_0, t)$  dans le texte principal, on remarque que  $P(x \in \partial_- V_0, t)$  est au moins de l'ordre de  $O(t^\beta)$ . Ainsi, pour  $\beta > -1$  le temps moyen diverge au minimum comme une loi de puissance ce qui est contradictoire.

### E.2.3 Cas linéaire $f(t) \sim -\ln(t)$

Considérons le cas critique linéaire,  $f(t) \sim -\ln(t)$ . En reprenant les arguments précédents, on remarque qu'ils ne permettent pas d'imposer une condition particulière sur le comportement de  $\tilde{T}_{\partial_- V_0}(t) \sim t^{\gamma+1}$ . En particulier, le comportement linéaire est une solution stable de  $\gamma = -\beta\gamma$ . Autrement dit, il peut exister un volume  $V_0$  visité infiniment souvent pour lequel il est difficile de déterminer le comportement asymptotique  $\tilde{T}_{\partial_- V_0}(t) \sim t^{\gamma+1}$ .

On peut avancer quelques éléments justifiant que  $\tilde{T}_{\partial_- V_0}(t)$  n'est pas de l'ordre de  $O(t)$ . On reprend

$$P(x_{\partial_-}, t') \sim P(x_{\partial_+}, t) e^{-f(o(t', x_{\partial_- V_0}))} \sum_{x_i \in V_{+,+}} e^{-f(\frac{t'}{V} + o(t', x_i))}$$

avec  $t \sim \tau \gg 1$

$$P(x \in \partial_- V_0, t) \sim \frac{\tilde{T}_{\partial_- V_0}(t)}{\tau + t + \tilde{T}_{\partial_- V_0}(t)} \quad (\text{E.1})$$

Supposons que  $\tilde{T}_{\partial_- V_0}(\tau) \sim O(1)$ , autrement dit un écart significatif de l'ordre de  $\tau$  s'est formé entre les temps locaux des deux frontières. En remplaçant  $\tilde{T}_{\partial_- V_0}(t)$  par  $O(1)$  et en intégrant (E.1), on obtient que  $P(x \in \partial_- V_0, 2\tau) \sim \ln(\tau)$ . En reproduisant le même raisonnement en remplaçant cette fois-ci  $\tilde{T}_{\partial_- V_0}(t)$  par  $O(\ln(t))$ , on obtient pour  $t_1 \gg \tau$  que  $P(x \in \partial_- V_0, t) \sim \ln^2(t_1)$ . En procédant successivement pour  $t_i \gg t_i - 1$ , on propose que  $P(x \in \partial_- V_0, t_i) \sim \ln^{i+1}(t_i)$ . Ce petit raisonnement semble indiquer que  $\tilde{T}_{\partial_- V_0}(\tau)$  ne va jamais être de l'ordre d'une loi de puissance. On pourrait penser à un comportement du type  $\tilde{T}_{\partial_- V_0}(t) \sim \ln(t)^{\ln(t)}$ . Pour le cas linéaire, il existe un temps passé dans  $\partial_- V_0$  divergeant mais négligeable par rapport à  $t$ . La probabilité de s'échapper de  $V_0$  tend vers une constante qui reste strictement positive. Ainsi, on comprend que pour le cas linéaire, le marcheur finit piégé dans la convention sur site, ce résultat pouvant s'étendre aux poids faiblement linéaires.

#### E.2.4 Moyennes sur les ensembles $\partial_{\pm} V_0$

Tout au long de notre analyse, nous avons déterminé le comportement dominant des différentes observables moyennées sur l'ensemble des sites appartenant à  $\partial_{\pm} V_0$ . Notons que l'on peut développer l'ensemble des arguments énoncés ci-dessus en considérant un unique site appartenant à  $\partial_- V_0$ . On peut alors déterminer la probabilité de s'extraire de  $V_0$  en passant par ce site, puis dans un second temps, moyenner sur l'ensemble des sites de  $\partial_- V_0$ , conduisant à un résultat identique.

#### E.2.5 Répartition du nombre de visites dans $\partial_{\pm} V_0$

Au cours de notre démonstration, on a supposé que le terme dominant du temps local des sites appartenant à  $V_0$  était constant ( $A(x) = 1$ ). En pratique les différents travaux mathématiques tendent à montrer que pour des poids super-linéaires,  $V_0$  est constitué de deux sites. Dans la limite où le poids est linéaire ou faiblement linéaire, il a été montré en dimension 1 que le nombre de sites de  $V_0$  pouvait évoluer avec des fractions du temps passé qui ne sont pas uniformes. Néanmoins, on propose que notre démonstration reste valide. Succinctement, pour des potentiels tels que  $f(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} -t'^{\beta}$ , l'apparition d'une asymétrie dans le nombre de visites entre plusieurs sites de  $V_0$  conduirait à une rupture et à l'exclusion des sites les moins visités. Ainsi, la fraction du temps passé dans  $V_0$  est uniforme pour ce choix de potentiel et notre hypothèse reste valide. Ensuite, pour des potentiels dont le comportement asymptotique est donné par des comportements du type  $f(t') \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} -\beta \ln(t')$ , l'ensemble des arguments énoncés précédemment peuvent être reproduits avec  $A(x_i) \neq 1$ . De tout évidence, les rapports des poids entre les différents sites de  $V_0$  restent de l'ordre de  $O(1)$  et ils ne modifient pas les comportements asymptotiques déterminés le long de cette démonstration.

### E.2.6 Retours réguliers du marcheur en $V_0$

En outre, on pourrait s'interroger sur l'éventualité d'un retour régulier du marcheur en  $V_0$ . En particulier, pour des explorations compactes, le marcheur va nécessairement revenir dans des pièges précédemment constitués. On pourrait concevoir que le marcheur soit constamment rappelé en  $V_0$  explorant un territoire fini. Reformulé différemment, notre approche ne semble pas avoir considéré l'existence de pièges dont une partie des sites ne serait pas visité une fraction linéaire du temps. Un examen plus attentif révèle que cette éventualité peut être réfutée en utilisant les arguments énoncés précédemment.

Pour cela, supposons que le marcheur visite un nombre fini de sites compris dans un volume  $V_1$  dans lequel est inclus  $V_0$ , le piège où le marcheur passe une fraction du temps  $t - o(t)$ . On s'intéresse au cas  $\int_0^\infty e^{f(t)} dt = \infty$ , pour lequel nous avons conclu que le processus s'échappe de  $V_0$  infiniment souvent. On rappelle que  $P(x \in \partial_- V_0, t) \sim t$ . Ainsi, dans la limite  $t \gg 1$ , on comprend aisément que  $V_0$  peut être reconsidéré en incluant  $\partial_- V_0$ . On peut donc définir une nouvelle frontière extérieure qui de manière similaire va être visitée infiniment souvent. Ainsi, cette frontière va à son tour présenter un comportement linéaire en  $t$ . En reprenant successivement le même raisonnement jusqu'à confondre  $V_1$  à  $V_0$ , on retrouve bien que le marcheur a une probabilité nulle de rester confiné en  $V_1$ .

### E.2.7 Choix de la variable $\tau > 0$

Par ailleurs, rappelons que le choix de la variable  $\tau > 0$  est laissé quelconque dans les arguments précédents. Tout d'abord, notons que pour  $\tau > 0$ , le marcheur a une probabilité finie d'osciller à l'intérieur d'un volume  $V_0$ . En prenant la limite  $\tau \gg 1$ , cette probabilité devient de plus en plus faible mais reste finie. On peut choisir  $\tau \gg 1$  de manière à ce que les comportements asymptotiques de  $P(x \in \partial_- V_0, t)$ ,  $P(x \in \partial_+ V_0, t)$  et l'hypothèse d'équilibre quasi stationnaire soient valides.

### E.2.8 Extension de l'approche pour des espaces non-euclidiens

Ensuite, notons que l'approche proposée ne dépend pas de la dimension de l'espace dans lequel évolue le marcheur. La seule condition reste que le nombre de voisins de chaque site reste borné. En effet, les arguments énoncés restent valides indépendamment du nombre de voisins que possèdent les sites appartenant à  $V_0$  et  $\partial_\pm V_0$  puisqu'on se concentre sur les comportements dominants des temps locaux. Afin de mieux appréhender l'effet de la dimension du réseau, observons que plus le nombre de voisins par site augmente, plus le temps nécessaire pour former un piège est long. En effet, pour construire un piège, le marcheur doit, dans un premier temps, sauter successivement sur les mêmes sites alors que ceux-ci ont été peu visités auparavant. Il est évident que cet événement est plus long à se réaliser lorsque le nombre de voisins augmente. Dès lors, pour  $d \gg 1$  et pour des effets de renforcement aux temps courts faibles, le marcheur va pouvoir découvrir un nombre important de sites avant qu'il ne finisse piégé. Cette dernière observation rend difficile l'extension du théorème de Davis pour des graphes quelconques. On peut, par exemple, penser à des arbres dont le nombre de voisins diverge, le marcheur pourrait alors suivre une trajectoire pour laquelle, le nombre de voisins augmentant, il serait impossible de former un piège avec une probabilité 1.

### E.3 Arguments en faveur de $\theta = \infty$ pour une marche attractive sous-diffusive

On reprend les arguments nécessaires à la caractérisation du FPT en confinement pour une marche à renforcement sous-diffusive.

#### E.3.1 Validité des hypothèses

On rappelle que pour déterminer le temps caractéristique nécessaire afin de trouver la cible, on a négligé l'impact de la croissance du périmètre extérieur sur les propriétés de premier passage entre  $T$  et  $t + T$ . Dès lors, on assimilera le périmètre extérieur, noté  $\delta\mathcal{D}_{T,e}$ , à une barrière réfléchissante.

Le comportement de la distribution de premier passage d'une marche de pólya évoluant dans un volume confinant de taille typique  $R$  est connue [Levernier et al., 2018] et présente notamment une décroissance exponentielle caractérisée par un temps caractéristique  $R^d$  dans la limite des grands volumes. Pour aller plus loin, il est connu que le comportement du temps de couverture, défini comme le temps mis par le marcheur pour visiter tous les sites d'un volume confinant, est donné par  $R^d \ln(R)$  [Chupeau et al., 2015]. Ainsi, en définissant la taille typique de  $\mathcal{D}_T$  notée  $R(T) = T^{d_w}$ , on propose qu'après un temps typique  $T^{d/d_w} \ln(T)$ , la cible ait été visitée presque sûrement.

Par conséquent, entre  $T$  et  $T + T^{d/d_w} \ln(T)$ , si la cible est incluse dans le périmètre intérieur de  $\mathcal{D}_T$ , la probabilité de survie présente une décroissance plus forte qu'une loi de puissance puisqu'on a obtenu  $S(T + T^{d/d_w} \ln(T))/S(T) = o(1)$ . Afin de vérifier la consistance de nos hypothèses, on remarque que le nombre relatif de sites découverts entre  $T$  et  $T + T^{d/d_w} \ln(T)$  est donné par

$$\frac{\mathcal{D}(T + T^{d/d_w} \ln(T)) - \mathcal{D}(T)}{\mathcal{D}(T)} \sim (1 + T^{-(d_w-d)/d_w} \ln(T))^{d/d_w} - 1 = o(1).$$

De manière analogue, on peut noter que la croissance de la distance typique du volume confinant est négligeable

$$R(T + T^{d/d_w} \ln(T)) \sim T^{1/d_w} (1 + T^{-(d_w-d)/d_w} \ln(T))^{1/d_w} \sim T^{1/d_w} + o(T^{1/d_w}).$$

Ainsi, il paraît légitime de négliger la croissance du périmètre extérieur de  $\delta\mathcal{D}_{T,e}$  et d'approximer la décroissance de la probabilité de survie conditionnelle à celle d'une marche de pólya dans un volume confinant. Ensuite, notons que l'on a négligé les effets de renforcement dans la zone visitée. Pour finir, puisque la cible n'a pas été visitée, les effets de renforcement des sites voisins de la cible doivent être pris en compte afin de déterminer le comportement de la probabilité de survie conditionnelle. En reprenant les résultats du temps de premier passage obtenus pour des cibles imparfaites, selon lesquels la probabilité de survie reste exponentielle, on propose que le comportement précédent ne soit pas modifié par la présence d'effets de renforcement générés par les sites voisins de la cible.

### E.3.2 Approche complémentaire

Afin de compléter ce raisonnement, on propose de développer une seconde approche qui reprend les principaux éléments énoncés précédemment.

On suppose que la cible n'a pas encore été atteinte au temps  $T \gg r^{d_w}$ . Comme le territoire visité  $\mathcal{D}_T$  peut être assimilé à un volume régulier de dimension  $d$ , on suppose que la cible est enfermée dans un volume fini  $V_T$  de sites non visités de rayon typique  $a_T$ , partageant une frontière  $\mathcal{B}_T$  de taille typique  $a_T^{d-1}$  avec  $\mathcal{D}_T$ . Notons que  $V_T$  n'est pas forcément entouré de sites visités et il n'est donc pas nécessairement à l'intérieur de  $\mathcal{D}_T$ ; notons en outre que pour  $T \gg 1$ , on a  $a_T \ll R(T)$ . Suivant l'argument donné ci-dessus, le volume  $V_T$  des sites non visités va se réduire au cours du temps lors des visites successives du marcheur aléatoire à la frontière  $\mathcal{B}_T$ . On peut montrer que le temps moyen de retour  $\tau_V$  à la frontière  $\mathcal{B}_T$  satisfait [Bénichou et al., 2005]

$$\tau_V \propto \frac{|\mathcal{D}_T|}{|\mathcal{B}_T|} \propto \frac{R^d}{a_T^{d-1}}.$$

L'évolution temporelle de  $V_t$  peut donc être exprimée comme suit

$$\frac{d|V_t|}{dt} \propto \frac{da^d}{dt} \propto -\frac{1}{\tau_V} \propto -\frac{a^{d-1}}{R^d}.$$

Par conséquent, le volume  $V_T$  des sites non visités est finalement entièrement exploré dans une échelle de temps  $T_V \propto a_T R^d$ . En effet, la variation relative  $\Delta R$  de  $R$  pendant cette durée est négligeable dans la limite de  $T \gg 1$  puisque

$$\frac{\Delta R}{R} \propto \frac{T_V}{T} \propto \frac{R^d}{R^{d_w}} \propto \frac{1}{R}.$$

Enfin, si la cible est enfermée dans un volume  $V_T$ , elle est finalement trouvée dans une échelle de temps  $T_V \propto a_T R^d$ . En utilisant  $a_T \ll R(T)$  et  $d_w = d + 1$ , on obtient l'estimation suivante

$$\left| \frac{dS}{dt} \right| \propto \frac{S}{T_V} \gg \frac{S}{R^{d_w}} \propto \frac{S}{t}.$$

Cette analyse montre finalement que  $t^\alpha S(t) \rightarrow 0$  pour tout  $\alpha > 0$ , comme trouvé numériquement et énoncé dans le texte principal.

## E.4 Comparaisons des modèles continus et discrets de la marche PSATW

On propose de comparer les incréments obtenus dans le cas de la marche PSATW discrète et de son équivalent continu décrit dans le chapitre 3. L'effet des fluctuations des vitesses cellulaires et de la variabilité cellule/cellule est illustré dans la figure E.1. Dans le modèle à temps discret et en l'absence de variabilité selon  $k$ , un maximum local des incréments est observé; il correspond à des événements de retournement à la limite du domaine visité qui se produisent simultanément.

En prenant en compte les fluctuations des vitesses cellulaires et la variabilité cellule/cellule, les fluctuations de ces temps de retournement augmentent et le maximum des incréments disparaît.

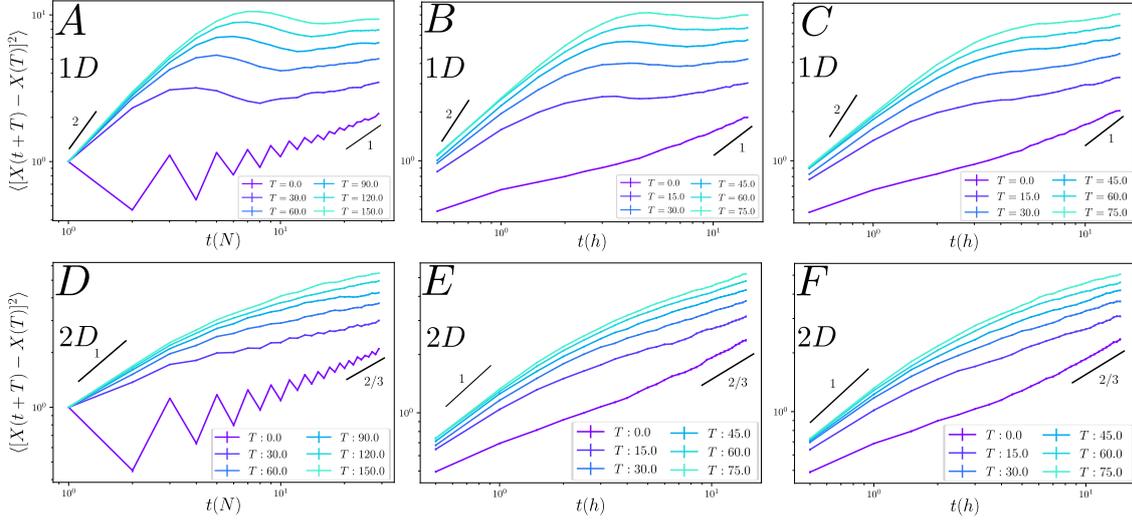


FIG. E.1 *Incréments de la marche PSATW en temps discret, de la marche PSATW en temps continu et de la marche PSATW en temps continu avec des paramètres aléatoires  $k, \beta$ . Chaque courbe correspond à une valeur fixée de  $T$  en dimension 1 (a, c) et 2 (d, f). a, d : PSATW en temps discret ( $t$  est donné en nombre de pas) avec des paramètres fixés  $k, \beta$ . b, e : PSATW en temps continu avec des paramètres fixés  $k, \beta$ . Les temps d'attente sont tirés à partir d'une distribution exponentielle de moyenne  $\langle T \rangle = 0.6h$ . c, d : le paramètre  $k$  (et donc  $\beta = -2(k + 1)$ ) est tiré à partir d'une loi normale avec  $\langle k \rangle = 0.5$  et un écart-type  $\sigma = 0.5$ .*



# F – Propriétés des marches à renforcement en espace infini

## F.1 Arguments en faveur de $\psi = d - d_f$ pour des processus présentant des incréments stationnaires

On rappelle les arguments proposés dans [Levernier, 2017] afin de justifier la valeur de l'exposant de transience pour des processus à incréments stationnaires.

Ces arguments concernent l'ensemble des processus répulsifs à renforcement auxquels on ajoute les modèles ERW, Monkey Walk et les modèles attractifs diffusifs. En dimension 3, l'absence de vieillissement induit que les propriétés de premier passage peuvent être déterminées à partir d'une équation de type renewal. Introduisons un marcheur évoluant sur un réseau de dimension  $d$ , de taille  $a_0$ , et initialement à une distance  $r$  d'une cible (définie par un unique site du réseau). On propose que dans la limite  $r \gg a_0$ , l'équation de renewal vérifie

$$P(x = 0, t | x_0 = r, 0) = \int_0^t F(t', 0 | x_0 = r, 0) P(0, t | x_0 = 0, FPT = t') dt'.$$

En se reposant sur les propriétés stationnaires des incréments, on propose que  $P(0, t | x_0 = 0, FPT = t') = f(a_0, t - t')$ . En intégrant alors cette équation sur  $t$  de 0 à  $+\infty$ , on obtient l'expression suivante de la probabilité d'avoir touché la cible au moins une fois, notée  $p$ ,

$$p = \frac{\int_0^\infty P(x = 0, t | x_0 = r, 0) dt}{\int_0^\infty f(a_0, t) dt}.$$

Dans la limite des grands volumes  $r \gg 1$ , on propose que  $P(x = 0, t | x_0 = r, 0) \sim t^{-d/d_w} \Pi(r/t^{1/d_w})$ . Ce qui amène finalement à

$$p = \left( \frac{a_0}{r} \right)^{d-d_w} \quad (\text{F.1})$$

La dépendance selon  $a_0$  est déduite afin d'obtenir un résultat sans unités. Remarquons que le comportement de  $p$  reste indépendant de la forme explicite de  $\Pi$ , quand bien même, la limite de celle-ci est supposée gaussienne pour les processus à renforcement répulsif en dimension 3 [Levernier, 2017]. On obtient une première vérification du comportement de l'exposant de transience en fonction de la dimension du réseau

$$\psi = d - d_w$$

En particulier en dimension 3, l'ensemble des processus à renforcement répulsif présente un exposant identique  $\psi = 1$ , ce qui a été vérifié numériquement. Ce résultat peut s'étendre aux marches faiblement attractives diffusives en dimension supérieure à 2. Ensuite, en remarquant que la marche Monkey walk présente aussi des incréments asymptotiquement stationnaires pour  $\beta > 2$  (chapitre 2), on propose qu'elle effectue une exploration transiente en dimension 3 caractérisée par  $\psi = 1$ .

Notons que l'on suppose que le comportement (F.1) est vérifié dans la limite  $r \gg t_p^{d_w}$ , où  $t_p$  est l'échelle caractéristique de relaxation des différents modèles. Enfin, pour une cible de taille  $a$  formée de plusieurs sites du réseau, on propose que la relation (F.1) prenne la forme suivante dans la limite  $r \gg a \gg a_0$

$$p = \left(\frac{a}{r}\right)^{d-d_w}.$$

Autrement dit, le résultat devient indépendant de la taille typique du réseau.

## F.2 Mesure de la probabilité de survie de la marche ERW en dimension 2

Dans cette partie, on présente les mesures numériques qui permettent l'analyse de la probabilité de survie de la marche ERW en dimension 2 en espace confiné et infini (ces mesures appuient les extensions menées dans les chapitres 2 et 4. Tout d'abord, on s'intéresse à la probabilité de survie de la marche ERW en présence d'un volume confinant de taille  $R \gg r$ . Dans le cas du mouvement Brownien, la probabilité de toucher la cible avant les bords d'une sphère de taille  $R$  se comporte comme  $P(a, r, R) = \ln(R/r)/\ln(R/a)$ . Dans le cas de la marche ERW, une analyse numérique souligne que la dépendance du logarithme n'est plus linéaire

$$P(a, r, R) \approx \frac{\ln(R/a)^\nu - \ln(R/r)^\nu}{\ln(R/a)^\nu},$$

où  $\nu \neq 1$  et dépend de  $\beta$ . Ce comportement a été observé pour un volume confiné carré mais on propose qu'il reste valide indépendamment de la forme du volume confinant dans la limite des grands volumes  $R \gg r \gg 1$ . Notons que ces mesures ont été obtenues pour une cible formée d'un carré de 9 sites mais on propose que ce comportement reste valide dans la limite  $R \gg r \gg a \gg 1$ .

Ce comportement est obtenu d'après l'analyse de la probabilité de survie des marcheurs, tout en imposant que ceux-ci s'arrêtent lorsqu'ils touchent les bords du volume confinant. Cette probabilité de survie jointe est notée  $S(t, |x| < R)$ . Autrement dit,  $S(t, |x| < R)$  décroît jusqu'à une valeur seuil où tous les marcheurs survivants ont atteint les bords du volume confinant avant la cible. Il est alors possible de normaliser la probabilité de survie afin de déterminer le comportement asymptotique de la probabilité de toucher la cible avant les bords d'une sphère de taille  $R$ . En effet, en supposant que les marcheurs survivants touchent les bords avant la cible à un temps typique  $R^{d_w}$  on propose simplement que

$$P(a, r, R) \approx 1 - S(R^{d_w}) \sim \frac{\ln(R/a)^\nu - \ln(R/r)^\nu}{\ln(R/a)^\nu}$$

À notre connaissance, un tel comportement n'a pas été relevé dans la littérature. Cet exemple suggère que les effets de vieillissement sont liés à cette décroissance non linéaire, dans le cas des explorations marginalement compactes et ils ont un impact majeur sur les probabilités de premier passage en confinement. Enfin, ce résultat permet de prédire le comportement asymptotique de la probabilité de survie en l'absence de confinement, en étudiant le comportement de  $S(t)$  pour  $t \ll R^{d_w}$ .

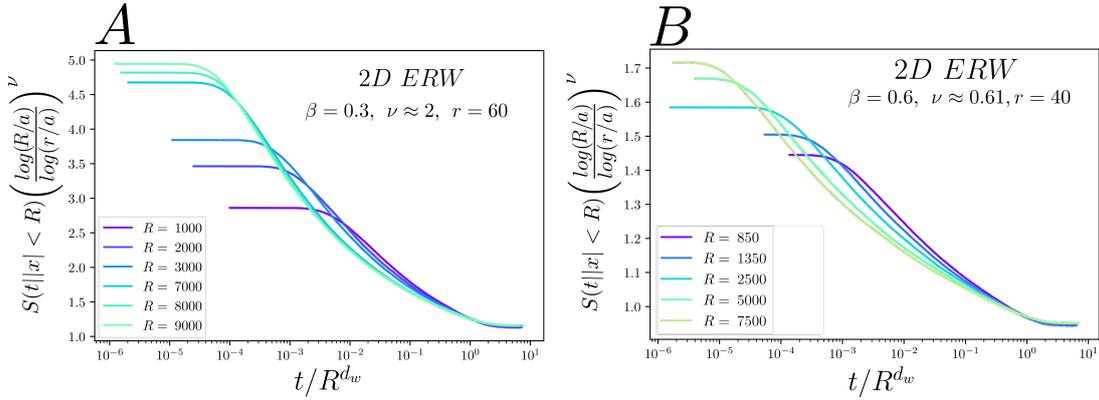


FIG. F.1 Probabilité de premier passage de la marche ERW en dimension supérieure à 1 en espace confiné. **A**, **B** Probabilité de survie de la marche éléphant pour  $\beta = 0.3$  et  $\beta = 0.6$  en espace confiné. Ici, on s'intéresse aux marcheurs qui trouvent la cible avant de toucher les bords. Autrement dit, la probabilité de survie jointe  $S(t, |x| < R)$  décroît jusqu'à une valeur seuil où tous les marcheurs survivants ont atteint les bords avant la cible. En supposant que les marcheurs survivants atteignent les bords du volume confinant selon un temps typique  $R^{d_w}$ , il est alors possible de normaliser la valeur asymptotique de  $S(t, |x| < R)$  afin d'obtenir  $P(a, r, R)$ . Par ailleurs, la normalisation de  $t/R^{d_w}$  permet de nous assurer que la convergence de  $S(t, |x| < R)$  a lieu sur des échelles de temps de l'ordre de  $t/R^{d_w}$ .

### F.3 Revue des exposants de persistance des différents modèles étudiés

Les exposants de persistance des marches SATW, des marches répulsives en loi de puissance et ERW ayant déjà été déterminés au cours du chapitre 2, on rappelle les exposants mesurés pour les autres modèles. Il est clair que l'on s'attend à un exposant  $\theta$  non trivial pour les marches à renforcement sous exponentiel et super exponentiel puisqu'elles présentent des comportements asymptotiques distincts pour  $T \gg t$  et  $T \ll t$ . Cette première conjecture est vérifiée numériquement. D'autre part, on suggère que pour la marche SESRW,  $\theta$  est indépendant du paramètre  $\beta$  et qu'il est entièrement déterminé par l'exposant  $k$  de la loi exponentielle.

La marche TSAW présente un comportement vieillissant super-diffusif à toute échelle de temps. Les observations menées dans le chapitre 2 conduisent à penser que les effets de vieillissement de la marche TSAW sont suffisants pour induire un comportement anormal  $\theta \neq 1 - 1/d_w$ . Pourtant, notre analyse numérique semble indiquer que  $\theta$  est égal à  $\theta = 1 - 1/d_w$ . Notons que ce comportement atypique n'entre pas en contradiction avec la conjecture émise dans le chapitre 2.

Enfin, on conclut cette revue en considérant le dernier exemple de la marche Monkey-walk sous-diffusive ( $1 < \beta < 2$ ). Pour un paramètre  $\beta$  tel que  $d_w = \frac{2}{\beta-1} > d$ , on observe une exploration compacte y compris pour des dimensions supérieures à 1. Les exposants de persistance associés présentent un comportement anormal, résultat justifié par les propriétés de vieillissement évoquées dans le texte principal. Enfin, pour  $d_w = \frac{2}{\beta-1} < d$ , on observe une exploration transiente caractérisée par un exposant  $\psi \neq d_f - d_w$  anormal également impacté par le vieillissement propre aux processus invariants d'échelle.

# G – Propriétés des marches à renforcement en confinement

## G.1 Croissance du temps local dans un espace confiné

Tout au long de cette thèse, on a observé que certains des modèles à renforcement attractif et répulsif présentaient des comportements diffusifs dans la limite  $T \gg t$ , caractérisés par une constante de diffusion  $D_s = \frac{1}{2}$ . Autrement dit, après un nombre élevé de visites, les probabilités de transition entre les différents sites du réseau redeviennent uniformes. Ainsi, les écarts relatifs entre les nombres de visites de chacun des sites sont trop faibles pour altérer le comportement.

Par conséquent, afin de justifier ce comportement, il faut caractériser la variance du temps local, temps passé sur chacun des sites du réseau. Dans ce sens, un travail important a été mené par [Freund et al., 1993] dans lequel la croissance du temps local de la marche TSAW a été mesurée pour un tore en dimension 1 et 2. Il y a été observé que la variance du temps local est asymptotiquement indépendante du temps.

Par la suite, on cherche à étendre ce résultat pour les différents exemples de modèle à renforcement répulsif en dimension quelconque. Les résultats asymptotiques que l'on va déterminer concernent les marches évoluant à l'intérieur d'un volume confinant mais on propose qu'ils puissent s'adapter également pour des explorations compactes en milieu infini. De tout évidence, les analyses numériques des incréments menées en confinement et en milieu infini présentent des comportements identiques. On peut alors légitimement supposer que la variance du temps local à l'intérieur du territoire visité présente aussi des propriétés similaires. D'autre part, on propose que ce raisonnement s'étende aussi aux modèles attractifs sous-diffusifs dans la limite  $T \gg t$ .

Pour ce faire, on considérera d'abord un marcheur évoluant dans un volume périodique régulier de taille  $N$  sites. En moyennant sur toutes les positions de départ possibles, on obtient que le nombre de visites moyen est donné par

$$\bar{n}(t) = t/N$$

Dans la suite, on propose de déterminer le comportement d'échelle de  $\delta n_i = n_i(t) - \bar{n}(t)$  pour un tore de dimension infinie signifiant que tous les sites sont entièrement connectés entre eux (hypothèse similaire à un modèle de champ moyen).

Cependant, on propose que ces résultats restent valables dans des géométries confinées de toute dimension (y compris pour des bords réfléchissants) et également pour des explorations compactes. En d'autres termes, ces résultats restent valides même lorsque  $\bar{n}$  varie sur des échelles spatiales suffisamment élevées.

### G.1.1 Modèle de croissance de la variance du nombre de visites

Dans notre modèle infiniment connecté, on propose que l'ensemble des  $n_i$  présente un comportement asymptotique imposé par un équilibre quasi-stationnaire. Plus précisément, on propose que les croissances respectives des temps  $n_i$  soient données par

$$dn_i(t) = dB_i(t) - \sum_{i' \in N} \frac{dB_{i'}}{N} + \frac{e^{-V(n_i(t))}}{\sum_{i' \in N} e^{-V(n_{i'}(t))}} dt, \quad (\text{G.1})$$

où  $(B_1(t), \dots, B_V(t))$  dénotent des mouvements browniens indépendants de variance  $\sigma t$ . Par ailleurs, notons que la condition déterministe de normalisation à chaque instant  $t$ ,  $\sum_{i' \in V} \theta_{i'}(t) = t$  est directement vérifiée par le système (G.1) indépendamment de la réalisation du bruit  $(B_1(t), \dots, B_N(t))$ .

On cherche à déterminer la dérivée de la variance du temps local. En s'appuyant sur (G.1) dans la convention d'Ito on obtient

$$\begin{aligned} d \left[ (n_i(t) - \frac{t}{N})^2 \right] &= \frac{-2dt}{N} (n_i(t) - \frac{t}{N}) + 2dn_i(t)(n_i(t) - \frac{t}{N}) + dn_i(t)^2 \\ &= \frac{-2dt}{N} (n_i(t) - \frac{t}{N}) + 2dn_i(t)(n_i(t) - \frac{t}{N}) + 2\sigma(1 - \frac{1}{N})dt \\ &= \frac{-2dt}{N} (n_i(t) - \frac{t}{N}) + 2\sigma(1 - \frac{1}{N})dt.. \\ &\quad + 2 \left( dB_i(t) - \sum_{i' \in N} \frac{dB_{i'}}{N} + \frac{e^{-V(n_i(t))}}{\sum_{i' \in N} e^{-V(n_{i'}(t))}} dt \right) \left[ n_i(t) - \frac{t}{N} \right] \end{aligned}$$

En moyennant puis en sommant sur tous les sites du volume, on obtient alors la relation suivante

$$\sum_{i \in N} \left\langle \frac{d}{dt} \left[ (n_i(t) - \frac{t}{N})^2 \right] \right\rangle = \left\langle \frac{\sum_{i \in N} \delta n_i(t) e^{-V(n_i(t))}}{\sum_{i \in N} e^{-V(n_i(t))}} \right\rangle + 2N\sigma(1 - \frac{1}{N}). \quad (\text{G.2})$$

On cherche ensuite à déterminer une borne supérieure afin de caractériser le comportement typique de  $\delta n_{i'}(t)$ .

### G.1.2 Majoration de la dérivée de la croissance locale

On s'intéresse maintenant au comportement du troisième terme de (G.2). Pour une réalisation spécifique du bruit  $\{dB_i(t'), \forall i \in N, \forall t' \leq t\}$ , on définit  $n_{min}(t)$ , le minimum du temps local évalué parmi les différents sites et de manière similaire

$$n_{min}(t) = \delta n_{min}(t) + \frac{t}{N}.$$

On peut alors reprendre (G.2) et en déduire une borne supérieure en s'appuyant explicitement sur  $n_{min}(t)$

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i \in N} \delta n_i(t) e^{-V(n_i(t))}}{\sum_{i \in N} e^{-V(n_i(t))}} &\leq \frac{\sum_{i \in N} \delta n_i(t) e^{-V(n_i(t))}}{N e^{-n_{min}(t)}} & (G.3) \\ &\leq \delta n_{min}(t) N^{-1} + N^{-1} e^{V(n_{min}(t)) - V(\frac{t}{N})} \sum_{N \setminus \{\delta n_{min}\}} \delta n_i(t) e^{-V(n_i(t)) + V(\frac{t}{N})} \end{aligned}$$

Ensuite, en rappelant que pour un modèle répulsif,  $V$  est une fonction asymptotiquement positive croissante, on obtient

$$\delta n_i(t) e^{-V(n_i(t)) + V(t/N)} \leq \delta n_i(t), \quad (G.4)$$

où on a utilisé  $\forall x \geq 0 : e^{-x} \leq 1$  et  $\forall x, a \leq 0, a e^{-x} \leq a$ . Enfin en s'appuyant sur la condition  $\sum_{i \in V} \tilde{\theta}_i(t) = 0$ , (G.4) conduit à

$$\frac{\sum_{i \in N} \delta n_i(t) e^{-V(n_i(t))}}{\sum_{i \in N} e^{-V(n_i(t))}} \leq N^{-1} \delta n_{min}(t) (1 - e^{V(n_{min}(t)) - V(t/N)})$$

En injectant ce résultat dans la dérivée de la variance locale, on obtient

$$N \frac{d}{dt} \left[ \left\langle \left( n(t) - \frac{t}{N} \right)^2 \right\rangle \right] \leq 2Ncst + \frac{2}{N} \langle \delta n_{min}(t) - \delta n_{min}(t) e^{V(\delta n_{min}(t)) - V(t/N)} \rangle, \quad (G.5)$$

où cette dernière est, de ce fait, indépendante de  $i$ .

#### a) Applications aux marches à renforcement

Il est alors possible de déterminer le comportement  $\delta n(t)$  et  $\delta n_{min}$ . Pour cela, on suppose maintenant que la variance diverge selon un comportement donné par une fonction  $g(t)$  quelconque. Ensuite, afin d'obtenir une divergence de  $g(t)$ , sa dérivée doit être asymptotiquement positive aux temps longs. Comme  $\sum_{i \in N} \delta n_i(t) = 0$ , le minimum choisi  $\delta n_{min}$  est toujours négatif, impliquant que  $V(\delta n_{min}(t)) - V(t/N) \leq 0$  pour des modèles asymptotiquement répulsifs. Comme  $N$  est fini, on remplacera  $\delta n_{min}$  par son comportement typique, noté  $\langle \delta n_{min}(t) \rangle \sim -A \sqrt{\langle \delta n(t)^2 \rangle} \sim -A \sqrt{g(t)}$ . On peut alors déterminer le comportement de  $g(t)$  pour les différentes marches.

Marche TSAW :

Dans un premier temps, on considère le cas de la marche TSAW pour laquelle  $V(n_i(t)) = \beta n_i(t)$ . L'équation précédente (G.5) devient pour une fonction divergente  $g(t)$

$$\begin{aligned} N \frac{d}{dt} \left[ \left\langle \left( n(t) - \frac{t}{N} \right)^2 \right\rangle \right] &\leq 2Ncst + \frac{2}{N} \langle \delta n_{min}(t) - \delta n_{min}(t) e^{\beta \delta n_{min}(t)} \rangle \\ &\leq -\frac{2A\sqrt{g(t)}}{N} + o(\sqrt{g(t)}). \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient une dérivé négative aux temps longs pour une fonction divergente  $g(t)$ , ce qui est contradictoire avec notre hypothèse première. Dès lors, on a prouvé que la variance du temps local ne peut pas diverger et devient asymptotiquement indépendante du temps passé dans le volume confinant. Ainsi, on propose que la variance du temps local de la marche TSAW soit donnée par

$$\left\langle n^2(t) - \frac{t^2}{N^2} \right\rangle \sim g(N)$$

Notons que ce résultat peut s'étendre aisément aux modèles super exponentiels.

Marches SESRW :

Ensuite, on se concentre sur les marches sous-exponentielles SESRW pour lesquelles  $V(n_i(t)) = \beta n_i(t)^k$ . L'équation précédente devient alors

$$N \frac{d}{dt} \left[ \left\langle \left( n(t) - \frac{t}{N} \right)^2 \right\rangle \right] \leq 2Ncst + \frac{2}{N} \langle \delta n_{min}(t) - \delta n_{min}(t) e^{(\frac{t}{N} + \delta n_{min}(t))^k - (\frac{t}{N})^k} \rangle.$$

Dans un premier temps, on suppose que  $\sqrt{g(t)} \ll t$ , on obtient alors que

$$\begin{aligned} N \frac{d}{dt} \left[ \left\langle \left( n(t) - \frac{t}{N} \right)^2 \right\rangle \right] &\leq 2Ncst - \frac{2}{N} A \sqrt{g(t)} \left( 1 - e^{-Ak(\frac{t}{N})^k \frac{\sqrt{g(t)}N}{t}} \right) \\ &\leq 2Ncst - \frac{2}{N} A^2 k g(t) \frac{t^{k-1}}{N^{k-1}}. \end{aligned}$$

Si  $g(t) \gg (\frac{t}{N})^{1-k}$ , on retrouve une dérivée négative ce qui est contradictoire. Par la suite, on cherchera à montrer que  $g(t) \sim (\frac{t}{N})^{1-k}$ , l'inégalité précédente n'est alors plus suffisante.

### G.1.3 Minoration de la dérivée de la croissance de la variance locale

On souhaite obtenir une minoration de la dérivée de la variance locale. Pour cela, on introduit le temps local maximal au temps  $t$ , noté  $n_{max}(t)$ , et on reprend (G.3)

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i \in N} \delta n_i(t) e^{-V(\theta_i(t))}}{\sum_{i \in N} e^{-V(\theta_i'(t))}} &\geq \frac{\sum_{i \in N} \delta n_i(t) e^{-V(\theta_i(t))}}{N e^{-\theta_{max}(t)}} & (G.6) \\
&\geq N^{-1} e^{V(\delta n_{max}(t)) - V(\frac{t}{N})} \sum_N \delta n_i(t) e^{-V(\theta_i(t)) + V(\frac{t}{N})} \\
&\geq N^{-1} e^{V(\delta n_{max}(t)) - V(\frac{t}{N})} \left( \sum_{\{\delta n_i(t) > 0\}} \delta n_i(t) e^{-V(\theta_i(t)) + V(\frac{t}{N})} .. \right. \\
&\qquad \qquad \qquad \left. + \sum_{\{\delta n_i(t) < 0\}} \delta n_i(t) e^{-V(\theta_i(t)) + V(\frac{t}{N})} \right) \\
&\geq N^{-1} \Delta N_{>}(t) \left( 1 - e^{-V(\theta_{min}(t)) + V(\theta_{max}(t))} \right),
\end{aligned}$$

où on a défini

$$\Delta n_{>}(t) = \sum_{\{\delta n_i(t) > 0\}} \delta n_i(t).$$

En revenant à (G.6) et après avoir moyenné sur toutes les réalisations du bruit, on obtient

$$N \frac{d}{dt} \left[ \langle (n(t) - \frac{t}{N})^2 \rangle \right] \geq 2Ncst + \frac{2}{N} \langle \Delta N_{>}(t) (1 - e^{-V(n_{min}(t)) + V(n_{max}(t))}) \rangle. \quad (G.7)$$

De manière analogue au cas précédent, on suppose que les variables  $\Delta N_{>}(t)$ ,  $n_{min}(t)$  et  $n_{max}(t)$  présentent un comportement similaire, déterminé par  $\sqrt{g(t)}$  (puisque  $N$  fini). On les remplace par leur valeur typique moyennée  $N_{>}\sqrt{g(t)}$ ,  $m\sqrt{g(t)}$ ,  $M\sqrt{g(t)}$ .

#### a) Applications aux marches à renforcement

On reprend (G.7) en utilisant le développement des variables  $\Delta N_{>}(t)$ ,  $n_{min}(t)$  et  $n_{max}(t)$

$$N \frac{d}{dt} \left[ \langle (n(t) - \frac{t}{N})^2 \rangle \right] \geq 2Ncst + \frac{2N_{>}}{N} \sqrt{g(t)} \left( 1 - e^{-\beta(\frac{t}{N})^k \left( 1 - m \frac{N\sqrt{g(t)}}{t} \right)^k + \beta(\frac{t}{N})^k \left( 1 - M \frac{N\sqrt{g(t)}}{t} \right)^k} \right).$$

En utilisant que  $g(t) \ll t$  on obtient

$$N \frac{d}{dt} \left[ \langle (n(t) - \frac{t}{N})^2 \rangle \right] \geq 2Ncst - \frac{2kN_{>}}{N^k} \frac{g(t)}{t^{1-k}} (M - m). \quad (G.8)$$

En comparant (G.8) avec l'équation précédente, on obtient que  $\frac{g(t)}{t^{1-k}} = O(1)$ . Ainsi, on propose que la variance du temps local soit donnée pour la marche SESRW

$$\langle n^2(t) - \frac{t^2}{N^2} \rangle \sim t^{1-k}.$$

Enfin, complétons notre approche en considérant les marches répulsives en loi de puissance. Comme le potentiel de ces marches est plus faible que ceux obtenus dans le cas des marches SESRW, on en déduit que le comportement de la variance locale des marches répulsives en loi de puissance croît plus rapidement que ceux obtenus dans le cas des marches SESRW. En prenant la limite  $k \rightarrow 0$  on obtient

$$\langle \theta^2(t) \rangle \sim t^a,$$

avec  $a > 1$ . En outre, en se rappelant que la variance du temps local de la marche de pólýa croît comme  $O(t)$ , on en déduit que  $a = 1$  ce qui est confirmé par notre analyse numérique en dimension 3. Par conséquent, on propose que pour les marches répulsives en loi de puissance

$$\langle \theta^2(t) - \frac{t^2}{V^2} \rangle \sim t.$$

Notons que tous les résultats ont été obtenus en supposant que la distribution stationnaire était uniforme. Pourtant, on propose que les comportements proposés restent valides dans la limite des grands volumes. On peut dresser plusieurs observations supportant cette hypothèse :

- Il apparaît clairement que les relations d'équilibre entre les différents sites restent indépendantes des effets spécifiques induits aux bords. Notre approche a été développée pour un volume confinant mais on peut supposer qu'elle puisse décrire des sous-volumes dans lesquels la moyenne est asymptotiquement uniforme. Comme notre approche s'appuie sur des sites infiniment connectés, on peut supposer que les équilibres locaux obtenus restent valides pour des moyennes locales qui ne sont plus exactement uniformes. La différence principale reviendrait à soustraire à  $n_i$ , le temps moyen exact passé sur le site  $i$ , qui est inconnu pour des conditions non-périodiques.
- Ensuite nos différents résultats ont été testés en dimension 3 pour des conditions aux bords périodiques et réfléchissantes dans la limite  $N \gg 1$ . Pour des conditions périodiques nos résultats s'appliquent directement alors que pour des conditions aux bords réfléchissantes, les comportements prédits sont observés tant que les écarts induits par la moyenne du temps passé sur les sites aux bords restent négligeables.

Appliquons ce résultat aux effets de vieillissement en confinement dans la limite où le volume a été visité un nombre suffisant de fois. Considérons les modèles sous-exponentiels pour lesquels on a déterminé que  $\langle n^2(T) - \frac{T^2}{N^2} \rangle \sim T^{1-k}$ . On peut alors injecter ce comportement typique dans les probabilités de transition, on obtient alors

$$\frac{e^{-(\frac{T}{N} + \delta n_i(T))^k}}{\sum_{j \in pv} e^{-(\frac{T}{N} + \delta n_j(T))^k}} \sim \frac{1}{\sum_{i \in pv} e^{-(\frac{T}{N})^{k-1} k N \delta n_j(T) + (\frac{T}{N})^{k-1} k N \delta n_i(T)}} \sim \frac{1}{\sum_{i \in pv}},$$

où on a utilisé  $\delta n_i(T) \sim T^{\frac{1-k}{2}}$ . Ainsi, on a montré que pour des modèles sous-exponentiels, le marcheur présente un comportement diffusif dans la limite  $T \gg 1$ . On a donc justifié le comportement diffusif observé numériquement en dimension 1 et 3 pour les marches SESRW. En outre, cette analyse s'étend à tous les modèles répulsifs présentant un comportement  $f$

sous-linéaire tels que les modèles en loi de puissance ou la SATW. Notons que notre argument confirme que les écarts relatifs entre les sites ne peuvent pas être négligés pour la marche TSAW et les modèles super-linéaires.

Enfin, on propose que ce résultat puisse s'étendre aux explorations compactes en milieu infini. Pour finir, complétons que ce comportement a aussi été observé pour les modèles attractifs sous-diffusifs dans le chapitre précédent. On propose que ce comportement diffusif à l'intérieur de  $\mathcal{D}_T$  est aussi obtenu pour des raisons similaires, mais ce constat est plus difficilement justifiable.

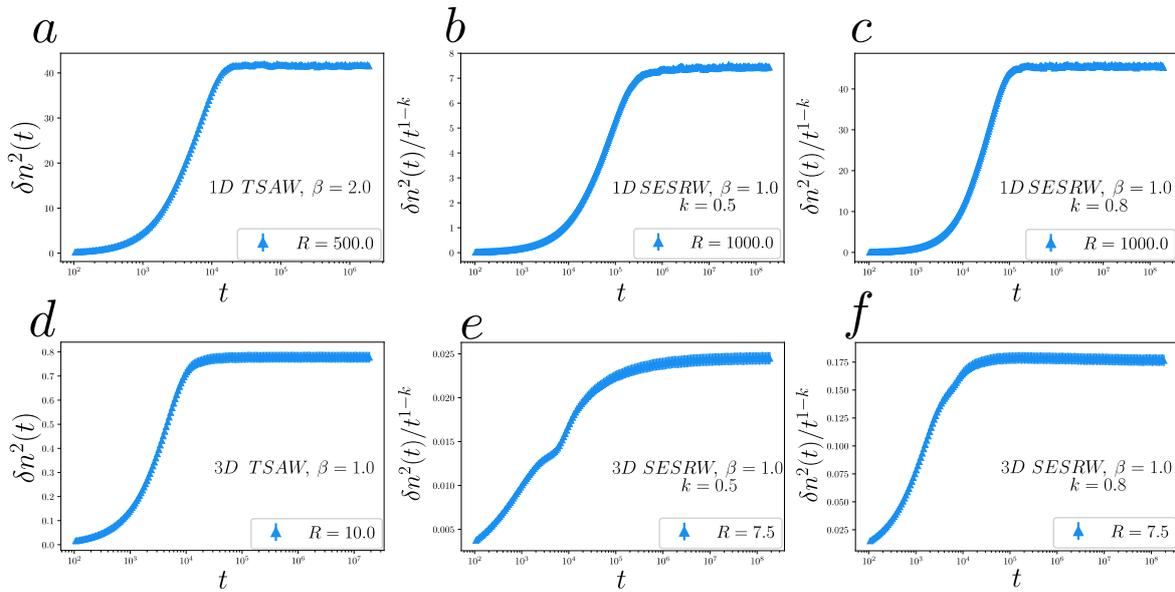


FIG. G.1 *Fluctuations du nombre de visites sur chaque site du réseau pour les marches à renforcement. Le comportement d'échelle attendu de la variance du nombre de visites à chaque site est testé pour des réseaux périodiques en dimensions 1 et 3. Pour la marche TSAW en dimension 1 a et 3 d, les fluctuations  $\delta n^2$  sont asymptotiquement indépendantes de  $t$  comme proposée dans [Freund et al., 1993]. Ensuite, pour la marche SESRW, les échelles asymptotiques de  $\delta n^2$  sont données par  $t^{1-k}$  indépendamment de la dimension. On teste notre proposition en dimension 1, pour  $k = 0.5$  b et  $k = 0.8$  c et en dimension 3 avec  $k = 0.5$  e et  $k = 0.8$  f. Les courbes normalisées par le comportement asymptotique attendu convergent vers un plateau aux grands temps lorsque le volume a été entièrement couvert.*

## G.2 Contributions des différentes échelles de temps en confinement pour les explorations non compactes

Dans cette section, on cherche à vérifier que les contributions des temps caractéristiques sont négligeables dans la limite des grands volumes. Pour plus de simplicité, on a remplacé  $\psi$  par sa valeur 1 obtenue pour la plupart des modèles étudiés dans cette thèse.

Dans un premier temps, on introduit  $n_c = c\left(\frac{R}{a}\right)^\gamma$  avec  $\gamma < 1$ . On cherche une limite supérieure à la contribution des évènements qui occurrent avant l'échelle typique déterminée dans le chapitre 4. Cette contribution est donnée par

$$\sum_{n=1}^{n_c} \frac{(1-p_0)p}{(1-p)} e^{n \ln(1-p)} \Phi_n(t, R, a, a_0)$$

On cherche à exhiber une borne valide à toute échelle de temps en s'appuyant sur le fait que  $\Phi_n(t, R, a, a_0)$  est une distribution conditionnelle. Pour cela, on intègre sur  $t$  les contributions de toutes les excursions entre 0 et  $n_c$

$$A = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{n_c} \Phi_n(t, R, a, a_0) \frac{(1-p_0)p}{1-p} e^{n \ln(1-p)} = \sum_{n=1}^{n_c} \frac{p}{1-p} e^{n \ln(1-p)}.$$

En introduisant  $p = C\frac{a}{R} + o\left(\frac{1}{R}\right)$ , on trouve que

$$A < \sum_{n=1}^{n_c} \frac{C\frac{a}{R} + o\left(\frac{1}{R}\right)}{\left(1 - C\frac{a}{R} + o\left(\frac{1}{R}\right)\right)} e^{-C\frac{an}{R} + o\left(\frac{n}{R}\right)} < C\frac{a}{R} \left(1 + C\frac{a}{R} + o\left(\frac{a}{R}\right)\right) + \int_1^{c\left(\frac{R}{a}\right)^\gamma} C\frac{a}{R} \left(1 + o\left(\frac{1}{R}\right)\right) e^{-C\frac{an}{R} + o\left(\frac{n}{R}\right)} dn,$$

ce qui amène à

$$A < C\frac{a}{R} \left(1 + C\frac{a}{R} + o\left(\frac{a}{R}\right)\right) + \left[ -e^{-Cu\frac{a}{R} + o\left(\frac{a}{R}\right)} \left(1 + o\left(\frac{1}{R}\right)\right) \right]_1^{c(R/a)^\gamma},$$

puis

$$A < C\frac{a}{R} \left(1 + C\frac{a}{R} + o\left(\frac{a}{R}\right)\right) + \left(1 + o\left(\frac{1}{R}\right)\right) \left[ e^{-C\frac{a}{R} + o\left(\frac{a}{R}\right)} - e^{-C\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\gamma} + o\left(\frac{1}{R^{1-\gamma}}\right)} \right],$$

et

$$A < C\frac{a}{R} \left(1 + C\frac{a}{R} + o\left(\frac{a}{R}\right)\right) + \left(1 + o\left(\frac{1}{R}\right)\right) \left[ -C\frac{a}{R} + o\left(\frac{a}{R}\right) + C\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\gamma} - o\left(\frac{1}{R^{1-\gamma}}\right) \right],$$

pour enfin arriver à la majoration attendue

$$A < O\left(\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\gamma}\right) + o\left(\frac{a}{R}\right).$$

Ainsi, pour  $\gamma < 1$ , la contribution de ces évènements tend vers 0 dans la limite des grands  $R$ . Ce résultat peut s'étendre de manière analogue à des échelles caractéristiques  $n_c = C\frac{R}{a} \ln\left(\frac{R}{a}\right)^{-\alpha} \frac{R}{a}$  où  $\alpha < 0$ . Ensuite, on se tourne vers les temps caractéristiques dominants comparés à  $R/a$ . On définit alors  $n_c = C\left(\frac{R}{a}\right)^\gamma \ln\left(\frac{R}{a}\right)^\alpha$ , de la même manière, on cherche à exhiber une borne supérieure de

$$\sum_{n=n_c}^{+\infty} \frac{(1-p_0)p}{(1-p)} e^{n \ln(1-p)} \Phi_n(t, R, a, a_0).$$

On définit alors

$$A = \int_0^{+\infty} \sum_{n=n_c}^{+\infty} \frac{(1-p_0)p}{1-p} e^{n \ln(1-p)} = \sum_{n=n_c}^{+\infty} \frac{p}{1-p} e^{n \ln(1-p)},$$

ce qui conduit à

$$A < C \frac{a}{R} \left(1 + o\left(\frac{1}{R}\right)\right) e^{C\left(\frac{R}{a}\right)^\gamma \ln\left(\frac{R}{a}\right)^\alpha \left(-C\frac{a}{R} + o\left(\frac{1}{R}\right)\right)} + \int_{(R/a)^\gamma \ln\left(\frac{R}{a}\right)^\alpha}^{\infty} C \frac{a}{R} \left(1 + o\left(\frac{1}{R}\right)\right) e^{n\left[-C\frac{a}{R} + o\left(\frac{1}{R}\right)\right]} dn,$$

puis

$$A < C \frac{a}{R} \left(1 + o\left(\frac{1}{R}\right)\right) e^{C\left(\frac{R}{a}\right)^\gamma \ln\left(\frac{R}{a}\right)^\alpha \left[-C\frac{a}{R} + o\left(\frac{1}{R}\right)\right]} + \left(1 + o\left(\frac{1}{R}\right)\right) e^{C\left(\frac{R}{a}\right)^\gamma \ln\left(\frac{R}{a}\right)^\alpha \left[-C\frac{a}{R} + o\left(\frac{1}{R}\right)\right]}.$$

Pour  $\gamma > 1$ , la contribution tend exponentiellement vite vers 0 dans la limite des grands volumes. Ce résultat reste valide pour  $\gamma = 1$  et  $\alpha > 0$ . Dans la limite des grands volumes, les marches trouvent donc la cible après un nombre d'excursions typique  $N_{typ} = O(R/a)$ .

Ce résultat peut être étendu pour des explorations transientes où  $\psi \neq 1$  et pour des explorations marginales où  $p \sim \frac{1}{\ln\left(\frac{R}{a}\right)}$ . En outre, cette démonstration reste valide pour des séries non géométriques dont le comportement typique reste déterminé par  $a/R$ . Cette décroissance exponentielle déterminée précédemment dans la limite des grands  $n$  nous assure que la contribution des événements rares est négligeable. Cette observation devient cruciale quand on s'intéresse à la détermination des moments du FPT.

Pour des décroissance en loi de puissance, la contribution des événements rares peut dominer celle de  $N_{typ}$  dans les moments d'ordre supérieur de la distribution, ce qui n'est plus le cas pour des décroissances exponentielles. Par conséquent, sous l'hypothèse que le marcheur n'admet pas de comportement piégé. On est capable de prédire le comportement des moments de la distribution du FPT en confinement. Autrement dit, les événements rares, à l'exception des comportements piégés, n'influent pas sur le comportement dominant des moments de la distribution de premier passage.

### G.3 Explorations compactes pour $\theta > 1$ et effet des termes sous-dominants

Tout d'abord, considérons la limite  $R \gg r$  pour un processus compact caractérisé par un exposant de persistance  $\theta > 1$ . Au cours du chapitre 4, le résultat suivant a été déterminé pour la distribution de premier passage et cela indépendamment de la valeur de  $\theta$

$$G(\eta, r, R, a_0) = F(t, r, R, a_0) R^{d_w} = h\left(\frac{a_0}{r}\right) \left(\frac{r}{R}\right)^{d_w \theta} \left(g(\eta) \frac{1}{\eta^{\theta+1}} + \frac{1}{\eta} f(\eta)\right) + \left(1 - h\left(\frac{a_0}{r}\right)\right) \delta(\eta),$$

En revanche, pour  $\theta > 1$ , la fonction  $g(\eta)\frac{1}{\eta^{\theta+1}}$  n'est plus intégrable en 0. Cette observation souligne que le temps moyen de premier passage ne dépend pas de  $R$  dans la limite des grands volumes. Les excursions qui trouvent directement la cible avant les bords dominent le moment d'ordre 1.

Afin d'illustrer cette dernière observation, on introduit une longueur de coupure  $r^{d_w}$  aux temps courts afin de signifier que la décroissance en loi de puissance reste valide pour  $R^{d_w} > t > r^{d_w}$ . La contribution pour le MFPT des temps  $t < R^{d_w}$  est donnée par  $p_0 \frac{r^{d_w \theta}}{t^\theta}$

$$\langle T \rangle \approx \int_{r^{d_w}}^{R^{d_w}} S_0 \frac{r^{d_w \theta}}{t^\theta} dt + \left( \frac{r}{R} \right)^{d_w \theta} \int_{R^{d_w}}^{\infty} f \left( \frac{t}{R^{d_w}} \right) dt.$$

Cela amène à

$$\langle T \rangle \approx -(\theta - 1) S_0 \left[ \frac{r^{d_w \theta}}{t^{\theta-1}} \right]_{r^{d_w}}^{R^{d_w}} + \left( \frac{r^{d_w \theta}}{R^{d_w(\theta-1)}} \right) \int_1^{\infty} f(\eta) d\eta.$$

Après développement, on obtient finalement

$$\langle T \rangle \approx S_0 \frac{(\theta - 1)r^{d_w \theta}}{r^{d_w(\theta-1)}} - S_0 \frac{(\theta - 1)r^{d_w \theta}}{R^{d_w(\theta-1)}} + \left( \frac{r^{d_w \theta}}{R^{d_w(\theta-1)}} \right) \int_1^{\infty} f(\eta) d\eta.$$

Pour  $\theta > 1$ , les termes dépendant de  $R$  deviennent négligeables. Ainsi, le moment d'ordre 1 dépend de la distribution du temps de premier passage aux temps courts. Afin de déterminer exactement le temps moyen, il est alors nécessaire d'ajouter la contribution des temps  $t \sim r^{d_w}$ . On obtient alors que le comportement dominant du temps moyen en confinement (dans la limite des grands volumes) est exactement égal au temps moyen déterminé en milieu infini.

Enfin, ce raisonnement peut être étendu pour les moments d'ordres supérieurs  $n$  :

- Si  $n > \theta$  le  $n^{\text{ème}}$  moment est donné par  $R^{d_w(n-\theta)} r^{d_w \theta}$ .
- Si  $n < \theta$  le  $n^{\text{ème}}$  moment est donné par  $r^{n d_w}$ .

En conséquence, pour  $\theta > 1$  et  $R \gg r \gg 1$ , la distribution du FPT peut être décrite par le temps caractéristique  $R^{d_w}$ . En revanche, les moments inférieurs à  $\theta$  seront indépendants de  $R$ . Inversement, pour des moments supérieurs à  $\theta$ , on retrouve un comportement déterminé par le temps caractéristique  $R^{d_w}$ . Ensuite, considérons les termes sous-dominants de la distribution de premier passage conditionnellement à ce que la cible soit trouvée avant les bords. Ces termes sont compris dans la définition de la fonction  $h_1$  introduite dans le chapitre 4

$$F_b(t, r, R, a_0) \sim g\left(\frac{t}{R^{d_w}}\right) \frac{r^{d_w}}{t^{\theta+1}} \left[ 1 + h_1(t/r^{d_w}) \right]$$

En réécrivant  $h_1(t/r^{d_w})$  en fonction de  $\eta$ , on obtient une forme  $h_1(\eta \frac{r^{d_w}}{R^{d_w}})$ . Dans la limite des grands volumes, on propose de réécrire  $h_1(\eta \frac{r^{d_w}}{R^{d_w}})$  sous la forme d'un dirac  $C\delta(\eta)$  où  $C$  est indépendante de  $r$  et  $R$  dans la limite  $R \gg r \gg 1$ .

Ce résultat est direct pour les termes sous-dominants dont le comportement est dirigé par un temps caractéristique  $r^{d_w}$  puisqu'ils apparaissent à une échelle de temps négligeable par rapport à  $R^{d_w}$ . Ensuite, pour les termes sous-dominants présentant une décroissance en loi de puissance  $\theta + 1 + \alpha$  ( $\alpha > 0$ ), l'expression selon la variable  $\eta$  fait explicitement apparaître un poids en  $R^{-\alpha d_w}$ . Ces termes sont donc négligeables dans la limite des grands volumes pour  $\theta \leq 1$ .

Ainsi les termes sous-dominants modifieront le comportement de la distribution du FPT seulement sur des échelles de temps négligeables comparées à  $R^{d_w}$ . En revanche, on peut noter qu'ils ont une influence sur la constante de normalisation du FPT et apparaissent indirectement dans la fonction  $g$  et sa réécriture dans le comportement final selon la variable  $\eta$ .

## G.4 Contribution des trajectoires directes pour les explorations marginales

Ici, on cherche à déterminer les contraintes que doivent vérifier les exposants des termes logarithmiques isolés dans le texte principal pour les explorations marginales. Ces termes décrivent le comportement d'échelle asymptotique de la distribution du FPT en confinement et on cherche à déterminer les contraintes afin que le temps moyen de premier passage en confinement reste déterminé par les trajectoires indirectes. Pour cela, on reprend la forme exhibée pour les explorations marginales

$$G(\eta, R, r, a) = F(t, R, r, a)T_{typ} = \left(1 - \frac{\ln(r/a)^\nu}{\ln(R/a)^\nu}\right) \delta(\eta) + \frac{\ln(r/a)^\nu}{\ln(R/a)^\nu} h(\eta),$$

avec  $T_{typ} = R^{d_w} \ln(R/a)^\delta$ . De manière identique aux explorations compactes, puisque les exposants  $\nu$  et  $\delta$  sont à priori inconnus, la contribution des excursions directes peut dominer celui des excursions indirectes et contrôler le comportement asymptotique du MFPT en confinement. On se concentrera sur la contribution des trajectoires directes pour laquelle on définit le temps moyen conditionnel  $\langle T \rangle_t$ . À l'instar des explorations compactes dont le temps typique afin de toucher les bords est de l'ordre de  $R^{d_w}$ , on propose que la contribution des trajectoires directes soit donnée par l'intégration de la probabilité de survie en espace infini jusqu'à  $R^{d_w}$ . Cela amène à

$$p_0 \langle T \rangle_t \sim \int_{r^{d_w}}^{R^{d_w}} -t \frac{d}{dt} S(t, a, R, r) dt \sim C \int_{r^{d_w}}^{R^{d_w}} \frac{\ln^\nu(r/a)}{\ln^{1+\nu}(t/a^{d_w})} dt,$$

où la borne inférieure est déterminée par le temps caractéristique associé à la distance initiale  $r^{d_w}$ . À l'aide d'une intégration par partie, on fait émerger le comportement d'échelle des trajectoires directes

$$p_0\langle T \rangle_t \sim C l n^\nu(r/a) \left( \left[ \frac{t}{l n^{\nu+1}(t)} \right]_2^{(\frac{R}{a})^{d_w}} + (\nu+1) \int_2^{(\frac{R}{a})^{d_w}} \frac{1}{l n^{\nu+2}(t)} dt \dots \right. \\ \left. + \left[ \frac{-t}{l n^\nu(t+1)} \right]_2^{(\frac{r}{a})^{d_w}} - \int_2^{(\frac{r}{a})^{d_w}} \frac{1}{l n^{\nu+2}(t)} dt \right)$$

On note que les deux derniers termes sont indépendants de  $R$  et ils peuvent être négligés. Ensuite, on peut montrer que le second terme est lui aussi négligeable à l'aide de la récurrence suivante

$$\int_2^{\frac{R}{a}^{d_w}} \frac{1}{l n^{\nu+2}(t)} dt = \frac{\frac{R}{a}^{d_w}}{l n^{\nu+2}(\frac{R}{a}^{d_w})} + (\nu+2) \frac{\frac{R}{a}^{d_w}}{l n^{3+\nu}(\frac{R}{a}^{d_w})} + O\left(\frac{\frac{R}{a}^{d_w}}{l n^{4+\nu}(\frac{R}{a}^{d_w})}\right).$$

On obtient finalement que

$$p_0\langle T \rangle_t \sim C R^{d_w} \frac{l n^\nu(\frac{r}{a})}{l n^{\nu+1}(\frac{R}{a})}.$$

Pour finir, on peut comparer ce terme à celui obtenu pour les trajectoires indirectes donné par

$$(1 - p_0)\langle T \rangle_b \sim C_b R^{d_w} l n^\nu\left(\frac{r}{a}\right) l n^{\delta-\nu}\left(\frac{R}{a}\right).$$

où  $\delta$  est donné par le temps typique obtenu en confinement  $T_{typ} = R^{d_w} l n^\delta(R/a)$ . On obtient donc la relation que doit vérifier l'exposant  $\delta$  afin que le MFPT soit contrôlé par les excursions indirectes

$$\delta > -1.$$

Ce qui est vérifié, à notre connaissance, par l'ensemble des modèles étudiés dans cette thèse.

## G.5 Comportement d'échelle de la probabilité de trouver la cible lors de la kème excursion pour les explorations non compactes et marginales

On fournit ici les mesures numériques de  $p_k$  définie comme la probabilité de trouver la cible lors de la kème excursion. Le comportement asymptotique de  $p_k$  est ici donné pour les explorations non compactes et marginales.

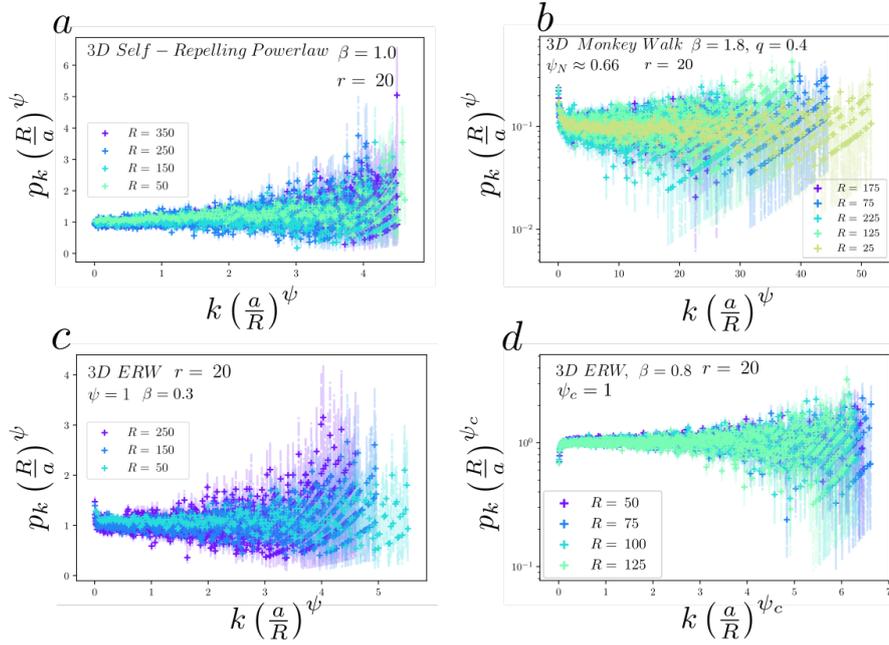


FIG. G.2 Comportement d'échelle de  $p_k$  définie comme la probabilité de trouver la cible lors de la  $k$ ème excursion pour les explorations non compactes. Afin d'étudier la dépendance selon  $k$ ,  $p_k$  est normalisée selon le comportement prédit dans le chapitre 4 pour une marche répulsive en loi de puissance 3D **a** ( $\beta = 1$ ), pour une marche Monkey sous-diffusive **b**, pour une marche ERW diffusive et enfin pour une marche ERW superdiffusive **d**. On note que le comportement d'échelle de  $p_k$  reste déterminé par l'exposant  $\psi$  mesuré en espace infini à l'exception de la marche ERW superdiffusive pour laquelle le comportement est déterminé par  $\psi_c$ , l'équivalent de  $\psi$  en confinement après un grand nombre d'excursions.

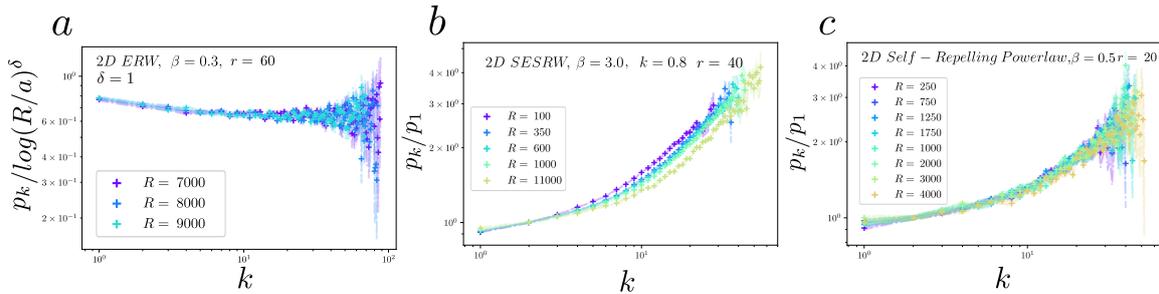


FIG. G.3 Comportement d'échelle de  $p_k$  définie comme la probabilité de trouver la cible lors de la  $k$ ème excursion pour les explorations marginales. **a**  $p_k$  est asymptotiquement indépendante de  $k$  pour la marche ERW, on retrouve que  $p_k \sim \log(R/a)^{-1}$  de manière identique au mouvement brownien. Inversement, pour les marches SESRW **b** et les marches répulsives en loi de puissance **c**, on retrouve une dépendance non triviale de  $p_k$  selon  $k$  qui diverge pour  $k \gg 1$  (de manière analogue à la marche TSAW). Notons que pour la marche SESRW, **b**, la variable  $p_k$  présente une dépendance complexe selon une variable  $k \log(R/a)^\nu$  où  $\nu$  peut être mesuré numériquement (ici la cible est un carré de taille  $a = 1$ ).

## G.6 Distribution en confinement pour des modèles à incréments stationnaires

Ici, on propose de rappeler les arguments évoqués dans [Levernier, 2017] supportant la forme exponentielle de la distribution du FPT obtenue pour les processus à incréments stationnaires non-compacts. Notons que ce résultat à été démontré pour des processus markoviens à incréments stationnaires [Bénichou et al., 2014].

Pour cela on reprend la partition effectuée pour les explorations non compactes dans le texte principal

$$F(t, a, r, R, a_0) = p_0 \Phi_o(t) + (1 - p_0) \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) P(n) \quad (\text{G.9})$$

L'absence de vieillissement nous permet de supposer que les durées des excursions sont indépendantes, de moyenne  $\tau$  et de variance  $\sqrt{\sigma}$  finies et que la probabilité  $p_k$  de probabilité de trouver la cible lors de la  $k$ ème excursion est indépendante de  $k$ . On peut alors appliquer le théorème central limite pour  $\Phi_n(t)$

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n \sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{t - n\tau}{\sqrt{n}\sigma} \right)^2}$$

Ensuite comme  $p_k = p$ , il vient  $P(n) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} p \exp(np)$ . En revenant à la limite continue de (G.9) on obtient après le changement de variable  $u = np$

$$F(t, a, r, R, a_0) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} p_0 \Phi_o(t) + (1 - p_0) \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi u \sigma^2/p}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{t - \tau u/p}{\sigma \sqrt{u/p}} \right)^2} e^{-u} du$$

En réintroduisant la variable  $\eta = t/T_{typ}$  avec  $T_{typ} = \tau/p$ , on obtient

$$G(\eta, R, r, a) \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} p_0 \delta(\eta) + \frac{(1 - p_0) \tau \sqrt{p}}{p \sqrt{\sigma^2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} e^{-\frac{p T_{typ}^2}{2\sigma^2} \left( \frac{\eta - u}{\sqrt{u}} \right)^2} e^{-u} du$$

En réécrivant explicitement les dépendances selon  $R$  volumes de  $p = \rho R/a$ ,  $\tau = \nu R^{d_w}/a$ ,  $\sigma^2 = s R^{d_w}/a$ , cela conduit à

$$G(\eta, R, r, a) \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} p_0 \delta(\eta) + (1 - p_0) \sqrt{\frac{R \nu^2}{a \rho s^2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} e^{-\frac{R \nu^2}{2 a \rho s^2} \left( \frac{\eta - u}{\sqrt{u}} \right)^2} e^{-u} du$$

Dans la limite où  $R \gg 1$ , l'intégrale peut être assimilée à un dirac centré en  $\eta$  ce qui amène finalement à

$$G(\eta, R, r, a) \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} p_0 \delta(\eta) + (1 - p_0) e^{-\eta}$$

# H – Mesures numériques

## H.1 Mesures numériques des exposants caractéristiques des propriétés de premier passage

On va ici décrire brièvement les méthodes développées afin de mesurer les différents exposants introduits dans le texte principal. Les valeurs des exposants énoncés sont toujours compris dans l'écart-type retourné par nos mesures numériques. En dimension 1, la cible est un unique site du réseau. En dimension supérieure ou égale à 2, la cible est donnée par un cube d-dimensionnel de taille  $a$ .

### H.1.1 Mesures numériques de l'exposant de persistance

On suppose que la probabilité de survie vérifie le comportement asymptotique suivant

$$S(t) = S_0 t^{-\theta} + o(t^{-\theta}).$$

Afin d'éviter toute hypothèse sur le second terme, on cherche à se reposer uniquement sur les grands temps  $t$  afin de réaliser notre fit polynomial. La fenêtre de celui-ci résulte d'un compromis entre la nécessité de garder au moins plus d'une décade pour réaliser le fit aux temps longs tout en ne gardant que les temps pour lesquels on a encore une bonne précision (afin d'éviter une majorité de points peu fiables). Pour ces raisons, la fenêtre a été choisie manuellement après plusieurs essais afin de s'assurer de la robustesse de notre mesure. L'estimateur de  $S(t)$  et son écart-type  $\sigma_{\hat{S}}$  sont donnés par

$$\hat{S}(t) = \frac{\#\{X(t), \forall t X(t) < r\}}{N}, \quad \sigma_{\hat{S}}^2 = \frac{\hat{S}(t)[1 - \hat{S}_1(t)]}{N - 1},$$

où  $N$  est le nombre total de marcheurs aléatoires générés. Il convient de noter que tous les points de mesure à différents  $t$  ne sont pas indépendants les uns des autres. Ainsi, pour que l'hypothèse d'indépendance reste pertinente, les points mesurés doivent être choisis à des temps espacés les uns des autres. Afin de tester la précision de notre approche, on a comparé la mesure numérique obtenue de l'exposant de persistance de la marche SATW à la valeur théorique obtenue dans [Barbier–Chebbah et al., 2020].

Pour des conditions initiales vieilles, le marcheur est laissé libre jusqu'à ce qu'il revienne à sa position initiale pour un temps supérieur au temps d'observation  $T$  fixé. Ensuite, la cible est ajoutée et  $\theta$  est mesuré numériquement avec des méthodes identiques à celles détaillées ci-dessus.

### H.1.2 Mesures numériques de l'exposant de transience

Afin de vérifier les mesures numériques de  $\psi$  et  $\psi_c$ , on cherche tout d'abord à mesurer la probabilité de trouver la cible  $\Pi$ . Dans un second temps, on mesure le comportement asymptotique de  $\Pi$  à  $a$  fixé dans la limite  $r$  grand qui permet de déterminer  $\psi$ . Pour ce faire, on suppose que la probabilité de survie à  $t$  grand est donnée par le comportement asymptotique suivant

$$S_\infty(t, a, r) = S_\infty(a, r) + At^{-c}.$$

On génère  $N$  marcheurs aléatoires que l'on laisse évoluer jusqu'à un temps  $t_{max}$ , la population restante des marcheurs qui n'ont pas encore atteint la cible, forme un premier estimateur  $\hat{S}(a, r, t_{max})$

$$\hat{S}_1(t_{max}) = \frac{\#\{X(t), \forall t | X(t) - r | > a\}}{N}.$$

Une première approximation de  $\Pi$  est donc donnée par  $1 - \hat{S}_1(a, r, t_{max}) \approx \Pi$ . Néanmoins, on doit s'assurer que la contribution de  $At^{-c}$  est négligeable. Afin de contrôler cette dernière approximation, on réalise un fit polynomial de la différence  $S(t, a, r) - \hat{S}_1(t_{max})$  qui permet d'obtenir des mesures approchées des paramètres  $(A, c)$ . On utilise ensuite ces deux mesures pour construire une seconde observable appelée  $\hat{S}_2(a, r, t_{max})$  définie par

$$\hat{S}_2(t_{max}) = \hat{S}_1(t_{max}) - \hat{A}t_{max}^{\hat{c}},$$

où  $\hat{A}, \hat{c}$  sont donnés par le fit polynomial de  $S(t, a, r) - \hat{S}_1(t_{max})$ . La différence entre les deux mesures,  $\hat{S}_2$  et  $\hat{S}_1$ , contrôle la validité de notre mesure. Enfin, dans un second temps, on réalise un second fit polynomial des observables  $1 - \hat{S}_2(a, r, t_{max})$  et  $1 - \hat{S}_1(a, r, t_{max})$  multipliées par le régime asymptotique attendu  $(a/r)^\psi$ . Les écart-types retournés servent de contrôle pour les mesures  $\psi$ . L'hypothèse principale reste que tous les termes sous-dominants de  $O(a/r)$  peuvent être négligés dans la limite  $r$  grand. La même méthode est reproduite pour des conditions initiales vieilles, générées avec un marcheur aléatoire ayant parcouru un volume confiné jusqu'à un temps d'observation  $T$ . Un unique espace vieilli a été généré mais la position de la cible est tirée au hasard à une distance initiale fixée  $r$  pour chaque marcheur aléatoire. Pour finir, on fournit l'écart-type des deux estimateurs

$$\sigma_{\hat{S}_1}^2 = \frac{\hat{S}_1(t_{max})[1 - \hat{S}_1(t_{max})]}{N - 1},$$

et

$$\sigma_{\hat{S}_2}^2 = \sigma_{\hat{S}_1}^2 + [t_{max}^{-\hat{c}} \sigma_{\hat{A}}]^2 + (\hat{A}t_{max}^{-\hat{c}} \log(t_{max}) \sigma_{\hat{c}})^2 + 2\text{Cov}(\hat{c}, \hat{A}) \hat{A}t_{max}^{-2\hat{c}} \log(t_{max}),$$

où les écarts types de  $\hat{A}, \hat{c}$  et  $\text{Cov}(\hat{c}, \hat{A})$  sont donnés par le fit polynomial. La principale approximation reste que l'on suppose que les estimateurs  $\hat{A}$  et  $\hat{c}$  sont mesurés indépendamment de  $t_{max}$ . Ainsi, le fit doit être réalisé sur une fenêtre temporelle choisie loin de  $t_{max}$ . On peut noter une seconde approximation qui suppose que les points utilisés afin de déterminer  $\hat{A}, \hat{c}$  ne sont pas indépendants les uns des autres. Afin de pallier à cette dernière observation, les points utilisés pour le fit sont espacés le plus possible pour obtenir un nombre de points moins importants mais indépendants.

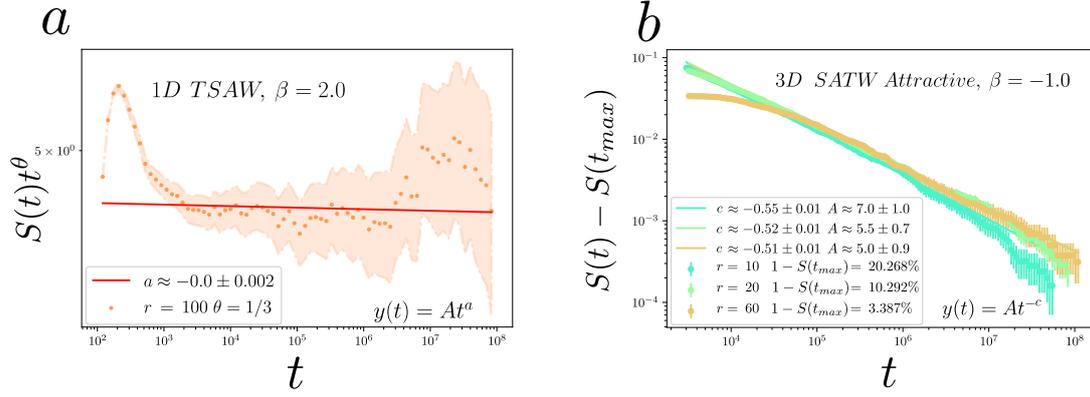


FIG. H.1 Mesures numériques de l'exposant de persistance et de l'exposant de transience. **a** La valeur attendue  $\theta = 1/3$  est testée pour le TSAW en dimension 1. On s'assure que la valeur de  $\theta$ , proposée dans le texte principal, est comprise dans la marge d'erreur donnée par l'écart-type du fit en loi de puissance de la probabilité de survie (ligne pleine rouge). **b** Mesure numérique du terme sous-dominant de la probabilité de survie pour une exploration non compacte. Ici, la convergence de la probabilité de survie tend vers la probabilité de trouver la cible, notée  $\Pi$ , qui est donnée en première approximation par  $S(t) - S(t_{max})$  (ici représentée pour une marche SATW attractive diffusive en 3D). Dès lors, le fit de cette convergence (ligne pleine) nous permet de prédire la probabilité que les marcheurs restants trouvent la cible à des temps supérieurs à  $t_{max}$ . Les valeurs proposées de  $\psi = \psi_c = 1$  peuvent être testées pour ces deux mesures différentes de  $\Pi$  données par  $1 - \hat{S}_1(t_{max})$  et  $1 - \hat{S}_1(t_{max}) + \hat{A}t_{max}^{\hat{a}}$ .

### H.1.3 Mesures numériques des exposants associés aux explorations marginales

Les exposants  $\delta$ ,  $\nu$  et  $\eta$  ont été mesurés numériquement à partir du fit en loi de puissance de  $S(t)$  selon la variable  $\ln(t)$ ; de  $p_1(R)$  selon la variable  $\ln(R)$ ; et  $p_k(R)$  selon  $k \ln(R/a)^\nu$  ( $\nu$  est choisi manuellement pour que toutes les courbes se superposent). On ne conserve que la première décimale de ces différentes mesures afin de souligner que celles-ci sont imprécises et qu'elles reposent sur l'hypothèse d'une convergence suffisamment rapide le long de  $R$  (afin de négliger les termes sous-dominants).

## H.2 Simulations numériques de processus gaussiens dérivés d'une équation GLE

Dans cette partie, on va décrire la méthode utilisée pour simuler les différents processus gaussiens étudiés dans le texte principal et en particulier ceux issus d'une équation GLE. Pour cela, on utilise un algorithme basé sur les méthodes dites de matrice circulante, ou méthode de Davis, développé à l'origine dans [Davies et al., 1987] et décrit dans [Dieker, 2013]. La version spécifique de l'algorithme utilisée dans cette thèse est une version généralisée, détaillée dans [Dietrich et al., 1997], afin de traiter un cas général où la matrice circulante n'est pas nécessairement définie positive. Cet algorithme permet de générer une trajectoire exacte d'un processus gaussien stationnaire.

Chaque trajectoire est générée en  $O(N \ln(N))$  opérations où  $N$  est le nombre de points de la trajectoire. Plus précisément, on considère un processus stationnaire général dont la matrice de covariance est donnée par

$$c_{pq} = \langle y(p \, dt)y(q \, dt) \rangle = \theta(|(p - q) \, dt|),$$

où  $dt$  est un pas de temps constant. L'algorithme consiste à intégrer la matrice de covariance de taille  $N$  dans une matrice de Toeplitz et symétrique  $S$  de  $2N * 2N$  dont la première ligne est donnée par

$$\begin{cases} s_i & = c_i \text{ for } 0 \leq i \leq N \\ s_{2N-i} & = c_i \text{ for } 1 \leq i < N. \end{cases}$$

Puisque cette matrice est circulante, les valeurs propres de  $S$ , notées  $\lambda_j$ , peuvent être obtenues efficacement via la transformée de Fourier Rapide FFT de la première ligne qui conduit à

$$\lambda_j = \sum_{k=0}^N e^{i2\pi kj/2N} \theta(|k|dt) + \sum_{k=1}^{N-1} e^{i2\pi(2N-k)j/2N} \theta(|k|dt),$$

ce qui se simplifie en

$$\lambda_j = \theta(0) + (-1)^j \theta(dtN) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \cos(2\pi kj/2N) \theta(|k|dt).$$

Si les valeurs propres sont toutes positives, il est alors possible de générer des trajectoires indépendantes du processus gaussien de covariance stationnaire  $\theta(|t - t'|)$ . Pour cela, on suit les étapes ci-dessous

- Tout d'abord, on génère deux vecteurs de taille  $2N$ , constitués  $(U, V)$  par des variables aléatoires normales, réelles et indépendantes. Ensuite, on calcule la transformée de Fourier rapide du vecteur  $Y$  donné par

$$y_j = \lambda_k \frac{u_j + iv_j}{\sqrt{2N}}$$

- Les parties réelle et imaginaire du résultat final forment deux réalisations indépendantes du processus gaussien selon la grille d'échantillonnage  $\{x(0), x(dt), \dots, x(Ndt)\}$ .

Cet algorithme ne peut que générer des processus dont la covariance est stationnaire. Ainsi, dans un premier temps, on simule des trajectoires dont la distribution initiale stationnaire. Ensuite, pour une cible initiale de taille fixée, on sélectionne uniquement les trajectoires pour lesquelles  $|x_0 - x(0)| < dx$  avec  $dx$  choisi faible, tout en gardant un nombre suffisant de réalisations.

La validité de notre approche est testée en comparant les incréments mesurés numériquement aux valeurs exactes attendues. Ces comparaisons sont réalisées pour un noyau de friction en loi de puissance en espace libre et en présence d'un potentiel harmonique.

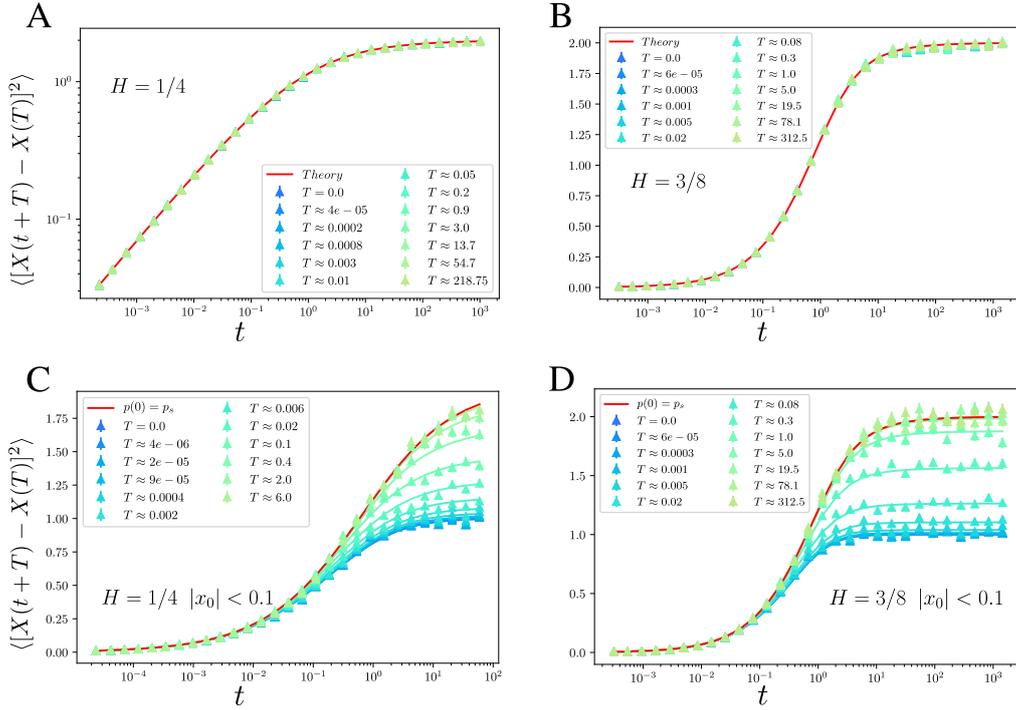


FIG. H.2 Vérifications numériques de l'algorithme de matrice circulante. Les incréments obtenus par simulation sont comparés aux courbes théoriques pour  $H = 1/4$ ,  $H = 3/8$ . Chaque courbe correspond à une valeur fixée de  $T$ . Ensuite, une seconde étape consiste à garder les trajectoires proches de  $x_0 = 0$ . À nouveau les incréments obtenus sont comparés à leur valeur théorique.

### H.3 Méthode de résolution numérique de l'équation intégrale vérifiée par la position moyenne du marcheur dans le futur du premier passage

Dans cette partie, on va détailler les méthodes de résolution numérique des différentes équations intégrales vérifiées par la position moyenne du marcheur dans le futur du temps de premier passage,  $m_\pi = L - \mu_\pi$ . On cherche à résoudre numériquement cette équation pour les différents noyaux de friction présentés dans le chapitre 5. Le comportement complexe de la fonction de covariance  $\theta(t)$  impose de résoudre une équation différente pour chaque couple de paramètre  $\alpha = 2H$  et  $L$ . La position initiale est ici fixée à  $x_0 = 0$ , mais une méthode identique peut être également développée pour  $x_0 \neq 0$ . Pour cela, on définit l'interpolation numérique de  $\mu_\pi$ , notée  $\tilde{\mu}_\pi(t, s)$ , et la correction  $\tilde{e}(t, s)$  qui vérifient les deux relations d'évolution selon le temps fictif  $s$

$$\tilde{e}(\tau, s + ds) = \int^{\infty} \left[ \tilde{\mu}_{\pi}(t + \tau, s) - \tilde{\mu}_{\pi}(t) \frac{\theta(\tau) - \theta(t)\theta(t + \tau)}{1 - \theta(t)^2} - L(1 - \theta(\tau)) \right] q_{\pi}(L, t) \\ - \left[ L \frac{\theta(\tau) - \theta(t)\theta(\tau + t)}{1 - \theta(t)^2} - L(1 - \theta(\tau)) \right] p(L, t) dt,$$

et

$$\tilde{\mu}_{\pi}(t, s + ds) = \tilde{\mu}_{\pi}(t, s) - \tilde{e}(\tau, s) ds.$$

La condition initiale est donnée par l'approximation markovienne de la position moyenne  $L - \mu_{\pi}$

$$\tilde{\mu}_{\pi}(t, 0) = L\theta(t).$$

Afin de résoudre cette intégration numérique, l'intégrale sur  $\tau$  est évaluée sur un espace discrétisé jusqu'à un temps de coupure  $t_{max}$  (les positions sont espacées non uniformément selon une loi de puissance d'exposant  $-3$ ). On laisse ensuite  $\tilde{\mu}_{\pi}(t, s)$  converger lentement à des temps fictifs élevés  $s$ . La convergence de  $\tilde{\mu}_{\pi}(t, s)$  est aussi évaluée via la convergence de la valeur du MFPT  $T(s)$

$$T(s)p_s(L) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\tilde{\mu}(s)^2}{2(1-\theta(t)^2)}}}{\sqrt{2\pi(1-\theta(t)^2)}} - \frac{e^{-\frac{L^2(1-\theta(t))^2}{2(1-\theta(t)^2)}}}{\sqrt{2\pi(1-\theta(t)^2)}} dt,$$

qui atteint un plateau dans la limite des grands  $s$ . D'autre part, les différents paramètres ( $ds$ ,  $N$  et  $t_{max}$ ), respectivement le pas d'intégration du temps fictif, le nombre de points formant l'espace discrétisé et le temps de coupure, ont été testés afin de nous assurer de la robustesse de notre approche. Les différentes intégrations conduisent à une courbe limite identique qui est alors utilisée pour une mesure approchée de  $\langle T \rangle$ .

## H.4 Simulations numériques des lois jointes pour les processus FBM et RAP

### H.4.1 Mouvement Brownien Fractionnaire

L'algorithme utilisé afin de générer les trajectoires 1D des mouvements browniens fractionnaires est basé sur la méthode de la matrice circulante, et il est détaillé dans [Davies et al., 1987 ; Dietrich et al., 1997 ; Wood et al., 1994]. Celui-ci permet de générer des trajectoires exactes pour un pas de temps constant  $\Delta t \approx 1.2 * 10^{-4}$ , jusqu'à un temps maximal, ici choisi égal à  $t_{max} = 4000$ . En raison de la propriété d'invariance d'échelle du FBM, on a fixé  $x_0 = 1$  sans perte de généralité. Comme ce processus est défini en espace et en temps continu, la mesure numérique exacte de la loi conditionnelle évaluée pour un  $x$  fixé (ou respectivement pour un FPT  $t$  fixé) doit être approximée.

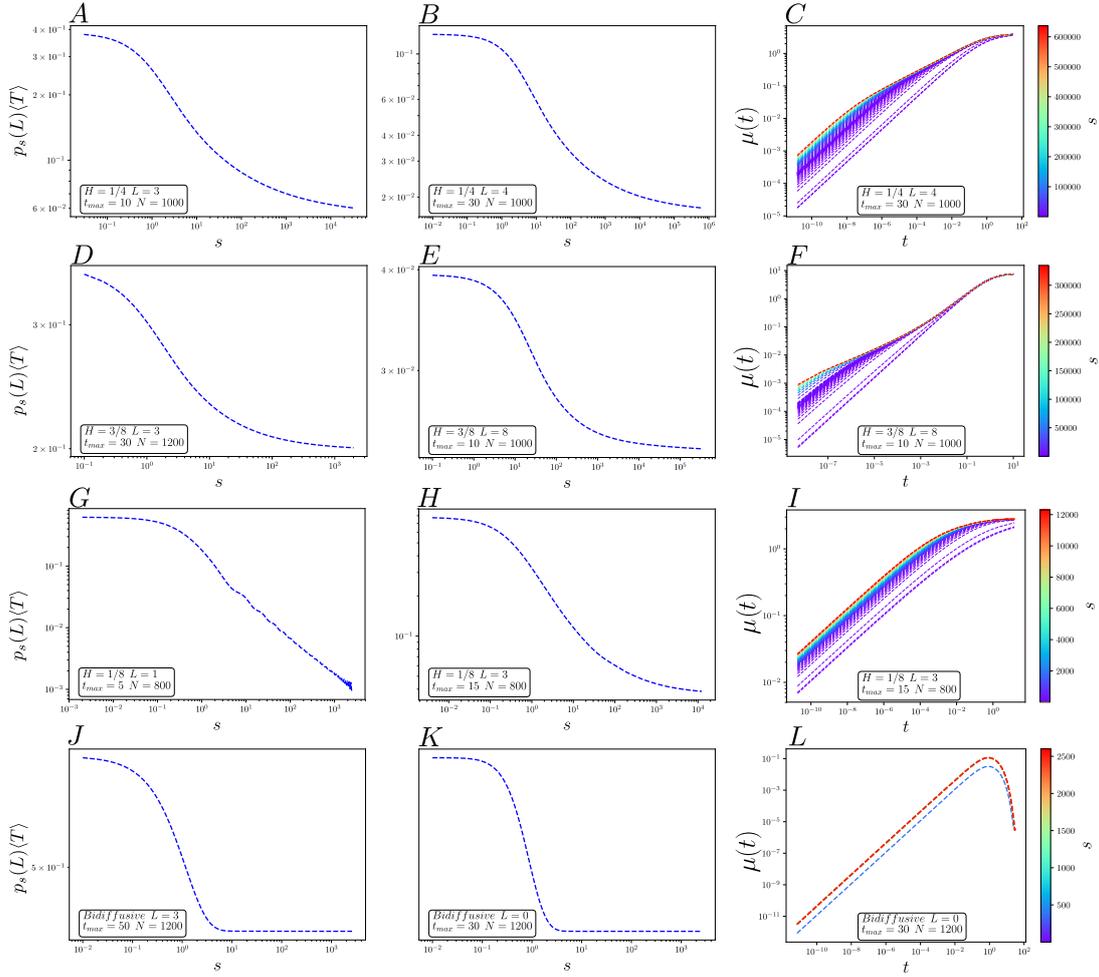


FIG. H.3 Résolution numérique de l'équation intégrale vérifiée par la position moyenne du marcheur dans le futur du FPT. Cette équation est résolue pour un noyau en loi de puissance avec  $H = 1/4$  (**a-c**),  $H = 3/8$  (**d-f**) et  $H = 1/8$  (**g-h**) et pour un processus bi-diffusif évoluant dans un piège harmonique (**j-l**). Chaque résolution numérique est réalisée pour des paramètres  $L$ ,  $t_{max}$ ,  $N$  fixés. La convergence de  $\mu(t)$ , solution numérique de l'équation intégrale d'intérêt, est vérifiée simultanément selon  $t$  (**c,f,i,l**) pour différentes valeurs du temps fictifs  $s$ , mais aussi en s'assurant que la mesure ainsi obtenue du temps moyen de premier passage a atteint un plateau (**a,b,d,e,g,h,j,k**). Notons que dans la limite des processus sous diffusifs ( $H$  faible), il est difficile de s'assurer de la convergence de  $\mu(t)$  car le plateau n'est pas atteint avant l'apparition d'un régime instable induit par les différentes approximations (discrétisation en temps et en espace et temps de coupure de l'intégrale selon  $t_{max}$ )

Afin d'évaluer  $f(\tau)$  à  $t$  fixé, on a conservé toutes les trajectoires pour lesquelles le FPT était inclus dans l'intervalle  $[t - dt, t + dt]$ .  $dt$  est choisi aussi minimal que possible tout en gardant un nombre de réalisations suffisamment élevé ( $> 2000$ ). De même pour  $\Phi(x)$  pour laquelle on garde les trajectoires telles que  $x \in [x - dx, x + dx]$ .

On récapitule ici les intervalles choisis pour chaque courbe donnée dans le texte principal. Figure de la loi conditionnelle  $f$ ,  $H = 0.375$  :  $[(x = 13.0, dx = 0.5), (x = 17.0, dx = 0.7), (x = 22.0, dx = 1), (x = 29.0, dx = 2)]$ .  $H = 0,75$  :  $[(x = 23, dx = 0.5), (x = 33.8, dx = 1.5), (x = 54.0, dx = 3), (x = 83, dx = 4), (x = 127.7, dx = 5)$  et  $(x = 197.8, dx = 8)]$ . Figure de la seconde conditionnelle  $\phi$ ,  $H = 0.75$  :  $[(t = 145.0, dt = 4), (t = 252.0, dt = 12)$  et  $(t = 438.0, dt = 16)]$ .

## H.4.2 Random Acceleration Process

### a) Définition

On considère ici un processus unidimensionnel  $X(t)$ , désigné sous le nom de *Random Acceleration Process* (RAP) dans la littérature. Celui-ci est défini par

$$\frac{d^2}{dt^2}X(t) = \xi(t),$$

où  $\xi(t)$  est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance  $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = K\delta(t-t')$ , avec  $K$  une constante ici prise égale à 1. De toute évidence, ce processus est non-markovien. Il a été démontré que celui-ci présente un régime super-diffusif caractérisé par  $\langle X^2(t) \rangle \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} t^3$ . En outre, il est connu que ce processus réalise une exploration compacte en dimension 1, caractérisée par un exposant de persistance  $\theta = 1/4$  [Bray et al., 2013]. Malgré la présence d'effets de vieillissement tels que

$$\langle [X(t + \tau) - X(\tau)]^2 \rangle \propto t^2\tau,$$

on soutient que le comportement d'échelle de la loi jointe proposé dans le texte principal reste valide.

### b) Simulations numériques

Les trajectoires du RAP sont générées au moyen de l'algorithme introduit dans [Bicout et al., 2000], qui permet d'obtenir des trajectoires exactes selon un pas de temps discret. Puisque la vitesse croît selon  $t$  comme  $\sqrt{t}$ , on réduit le pas de temps à chaque itération afin de garder petit l'intervalle d'espace couvert entre deux pas de temps successifs. Pour ce faire, on définit le pas de temps  $\Delta t = \frac{0.05}{n^{1/3}}$  où  $n$  est le nombre de pas. En raison de la propriété d'invariance d'échelle du RAP, on fixe  $x_0 = 1$  sans perte de généralité. Comme pour le FBM, on utilise les trajectoires pour lesquelles  $t$  (de même que  $x$ ) est inclus dans des intervalles choisis de manière appropriée. On récapitule ici l'intervalle choisi pour chaque courbe représentée dans le texte principal. Figure de la loi conditionnelle  $f$ , *RAP* :  $[(x = 402, dx = 5), (x = 1090, dx = 15), (x = 2961, dx = 50), (x = 8040, dx = 80)$  et  $(x = 21835, dx = 500)]$ . Figure de la seconde conditionnelle  $\phi$ , *RAP* :  $[(t = 442, dt = 5), (t = 869.7, dt = 10), (t = 1711.26, dt = 50)$  et  $(t = 3367.08, dt = 80)]$ .

# I – Propriétés des processus gaussiens vérifiant une équation GLE

## I.1 Formules de projection des vecteurs gaussiens

Cette annexe présente les formules de projection concernant les processus gaussiens dont l'évolution est conditionnée à un événement passé. Ces résultats ont été essentiellement utilisés afin de déterminer les propriétés de transport de processus vérifiant une équation GLE pour une position initiale fixée, mais aussi pour déterminer les équations intégrales relatives aux positions moyennes et aux covariances des processus dans le futur du FPT (chapitre 5). On présentera ici ces résultats spécifiquement pour le cas des processus gaussiens mais on peut trouver une démonstration plus générale dans [Eaton 1983].

Considérons un processus gaussien  $X(t)$  de moyenne  $m(t)$  et de covariance  $\gamma(t, t')$  et définissons le processus conditionnel  $Y(\tau) = (X(t_0 + \tau) | X(t_0) = X_0)$  qui restreint les trajectoires de  $X$  à celles pour lesquelles  $X(t_0) = X_0$ . Alors le processus  $Y(t)$  est lui-même gaussien de moyenne  $m_1(t)$  et de covariance  $\gamma_1(t, t')$

$$m_1(t) = m(t_0 + t) - \frac{\gamma(t_0, t_0 + t)}{\gamma(t_0, t_0)}(m(t_0) - X_0),$$

et

$$\gamma_1(t, t') = \gamma_1(t_0 + t, t_0 + t') - \frac{\gamma(t_0, t_0 + t)\gamma(t_0, t_0 + t')}{\gamma(t_0, t_0)}.$$

## I.2 Noyau de friction d'un processus bi-diffusif

On propose de déterminer le noyau de friction d'un processus bi-diffusif défini comme un processus gaussien à incréments stationnaires, de moyenne nulle et de fonction de covariance

$$2\langle x(t)x(t') \rangle = D(t + t' - |t - t'|) + D_o \left( 1 - e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t'} + e^{-\lambda |t - t'|} \right). \quad (\text{I.1})$$

En prenant la transformée de Laplace de (I.1) on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st-s't'} D(t+t' - |t-t'|) dt dt' &= 2D \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st-s't'} \min(t, t') dt' dt \\ &= \frac{2D}{(s+s')ss'}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st-s't'} e^{-\lambda|t-t'|} dt dt' &= \int_0^\infty \int_{t'}^\infty e^{-st-s't'} e^{-\lambda(t-t')} dt dt' + \int_0^\infty \int_t^\infty e^{-st-s't'} e^{-\lambda(t'-t)} dt dt' \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda+s} e^{(-s'+\lambda-s-\lambda)t'} dt' + \int_0^\infty \frac{1}{\lambda+s'} e^{(-s+\lambda-s'-\lambda)t} dt \\ &= \frac{1}{s+s'} \left( \frac{1}{\lambda+s'} + \frac{1}{\lambda+s} \right), \end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$2\langle \tilde{x}(s)\tilde{x}(s') \rangle = \frac{2D}{(s+s')ss'} + \frac{D_o}{ss'} \left( 1 - \frac{s}{s+\lambda} - \frac{s'}{s'+\lambda} \right) + \frac{D_o}{s+s'} \left( \frac{1}{\lambda+s'} + \frac{1}{\lambda+s} \right). \quad (\text{I.2})$$

En rappelant la relation générale entre la covariance et le noyau de friction obtenue dans le texte principal

$$\langle \tilde{x}(s)\tilde{x}(s') \rangle = \frac{k_B T}{ss'(s+s')\tilde{\eta}(s')} + \frac{k_B T}{ss'(s+s')\tilde{\eta}(s)}, \quad (\text{I.3})$$

en comparant (I.2) (après avoir recombéné les deux derniers termes selon leur dénominateur) et (I.3), on en déduit la transformée de Laplace du noyau de friction

$$2k_B T \left( \frac{1}{\tilde{\eta}(s)} + \frac{1}{\tilde{\eta}(s')} \right) = 2D + D_o \left( s - s \frac{(s+s')}{\lambda+s} + \frac{ss'}{s+\lambda} \right) + D_o \left( s' - s' \frac{(s+s')}{\lambda+s'} + \frac{ss'}{s'+\lambda} \right),$$

ce qui se simplifie en

$$2k_B T \left( \frac{1}{\tilde{\eta}(s)} + \frac{1}{\tilde{\eta}(s')} \right) = 2D + D_o \frac{\lambda s}{\lambda+s} + D_o \frac{\lambda s'}{s'+\lambda}.$$

On obtient alors le noyau de friction à l'origine d'un processus bi-diffusif

$$\tilde{\eta}(s) = 2k_B T \frac{\lambda+s}{(D+D_o\lambda)s + D\lambda},$$

où on définit  $\tau^{-1} = \frac{D\lambda}{(D+D_o\lambda)}$ . Ensuite, on décompose le noyau de friction en deux termes

$$\tilde{\eta}(s) = \frac{2k_B T}{(D+D_o\lambda)} \frac{\lambda+s}{s+\tau^{-1}} = \frac{2k_B T}{(D+D_o\lambda)} \left( 1 + \frac{\lambda-\tau^{-1}}{s+\tau^{-1}} \right),$$

ce qui conduit après inversion à

$$\eta(t) = \frac{2k_B T}{(D + D_o \lambda)} \delta(t) + \frac{2k_B T(\lambda - \tau^{-1})}{(D + D_o \lambda)} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

En conséquence, le noyau de friction suivant

$$\eta(t) = A\delta(t) + B e^{-t/\tau}$$

conduit à un processus bi-diffusif dont les coefficients sont donnés par  $D = \frac{2k_B T}{A+B\tau}$ ,  $\lambda = \frac{A+B\tau}{A\tau}$  et  $D_o = \frac{2k_B T B \tau^2}{(A+B\tau)^2}$ .

On cherche ensuite à déterminer l'équivalent du processus bi-diffusif en présence d'un potentiel harmonique. On reprend la relation en Laplace de l'équation GLE en présence d'un piège harmonique.

$$\tilde{x}(s) = \frac{\tilde{\xi}(s) + x_0 \tilde{\eta}(s)}{s \tilde{\eta}(s) + k}.$$

En s'appuyant sur  $\langle \tilde{\xi}(s)x(0) \rangle = 0$  on obtient

$$\langle \tilde{x}(s)x(0) \rangle = \langle x(0)^2 \rangle \frac{A(s + \tau^{-1}) + B}{k(s + \tau^{-1}) + As(s + \tau^{-1}) + Bs}$$

où on définit  $\Delta = (B + A\tau^{-1} + k)^2 - 4Ak\tau^{-1} > 0 \forall B > 0$ . Après factorisation on cherche à inverser la transformée de Laplace de la fonction de covariance

$$\frac{\langle x(t)x(0) \rangle}{\langle x(0)^2 \rangle} = \frac{A(s + \tau^{-1}) + B}{A(s + \frac{A\tau^{-1} + B + k\tau^{-1} - \sqrt{\Delta}}{2A})(s + \frac{A\tau^{-1} + B + k\tau^{-1} + \sqrt{\Delta}}{2A})}.$$

Pour cela, on inverse dans un premier temps le terme d'ordre 0 en  $s$  du numérateur

$$\begin{aligned} T_0 &= \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{A\tau^{-1} + B}{A} \frac{1}{(s + \frac{A\tau^{-1} + B + k\tau^{-1} - \sqrt{\Delta}}{2A})(s + \frac{A\tau^{-1} + B + k\tau^{-1} + \sqrt{\Delta}}{2A})} \right) \\ &= \frac{A\tau^{-1} + B}{A} \int_0^t e^{-\frac{(A+k)\tau^{-1} + B + \sqrt{\Delta}}{2A} t'} e^{-\frac{(A+k)\tau^{-1} + B - \sqrt{\Delta}}{2A} (t-t')} dt' \\ &= \frac{A\tau^{-1} + B}{\sqrt{\Delta}} e^{-\frac{(A+k)\tau^{-1} + B - \sqrt{\Delta}}{2A} t} \left[ 1 - e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{A} t} \right] \\ &= 2 \frac{A\tau^{-1} + B}{\sqrt{\Delta}} e^{-\frac{(A+k)\tau^{-1} + B}{2A} t} sh \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2A} t \right) \end{aligned}$$

Ensuite, on inverse de manière similaire le terme d'ordre 1 en  $s$

$$\begin{aligned}
T_1 &= \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{s}{\left(s + \frac{A\tau^{-1} + B + k\tau^{-1} - \sqrt{\Delta}}{2A}\right) \left(s + \frac{A\tau^{-1} + B + k\tau^{-1} + \sqrt{\Delta}}{2A}\right)} \right) \\
&= \frac{d}{dt} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{\left(s + \frac{A\tau^{-1} + B + k\tau^{-1} - \sqrt{\Delta}}{2A}\right) \left(s + \frac{A\tau^{-1} + B + k\tau^{-1} + \sqrt{\Delta}}{2A}\right)} \right) + 0 \\
&= 2A \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \frac{d}{dt} \left( e^{-\frac{(A+k)\tau^{-1} + B}{2A}t} sh \left[ \frac{\sqrt{\Delta}}{2A}t \right] \right) + 0 \\
&= e^{-\frac{(A+k)\tau^{-1} + B}{2A}t} ch \left[ \frac{\sqrt{\Delta}}{2A}t \right] - \frac{(A+k)\tau^{-1} + B}{\sqrt{\Delta}} e^{-\frac{(A+k)\tau^{-1} + B}{2A}t} sh \left[ \frac{\sqrt{\Delta}}{2A}t \right]
\end{aligned}$$

En combinant les différents termes, on obtient

$$\frac{\langle x(t)x(0) \rangle}{\langle x(0)^2 \rangle} = e^{-\frac{(A+k)\tau^{-1} + B}{2A}t} ch \left[ \frac{\sqrt{\Delta}}{2A}t \right] + \frac{A\tau^{-1} + B - k\tau^{-1}}{\sqrt{\Delta}} e^{-\frac{(A+k)\tau^{-1} + B}{2A}t} sh \left[ \frac{\sqrt{\Delta}}{2A}t \right]$$

# J – Théorie des perturbations autour du processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Dans cette partie, on va reprendre le développement perturbatif présenté dans le chapitre 5. On détaillera la résolution de l'équation intégrale vérifiée par la position moyenne dans le futur du FPT. De plus, on détaillera les méthodes numériques d'intégration qui permettent d'évaluer les perturbations du temps moyen de premier passage et de la position moyenne dans le futur du FPT.

## J.1 Résolution de l'équation intégrale vérifiée par la position moyenne dans le futur du FPT

Rappelons que l'équation  $Q_{2s}$  impose que la fonction de covariance dans le futur du FPT soit identique à celle du processus initialement en  $L$  à l'équilibre,  $\gamma_1 = \sigma_1$ . On reprend donc l'équation  $Q_{1s}$  que l'on avait obtenue dans le chapitre 6

$$\int_0^\infty K(t)(m_1(t+\tau) + m'_1(t+\tau))dt = H(\tau), \quad (\text{J.1})$$

où  $K(t)$  est donné par

$$K(t) = \frac{e^{-L^2 \frac{(1-e^{-t})^2}{2(1-e^{-2t})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t})}}, \quad (\text{J.2})$$

et  $H_s(\tau)$

$$H_s(\tau) = \int_0^\infty \frac{e^{-L^2 \frac{(1-e^{-t})^2}{2(1-e^{-2t})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t})}} \left( \frac{L(\sigma'_1(t, t+\tau) + \sigma_1(t, t+\tau))(e^{-t} - 1)}{1 - e^{-2t}} + m_{s1}(\tau) + m_{s1}(\tau') \right) dt.$$

La transformée de Laplace de la solution formelle de l'équation (J.1) peut être obtenue et vérifiée

$$[m'_1(s) + m_1(s)] = \frac{\tilde{H}_s(s)}{\tilde{K}(-s)}.$$

En utilisant la formule de Mellin-Bromwich, on obtient une équation différentielle d'ordre 1 formelle vérifiée par  $m'_1(t)$

$$m_1'(t) + m_1(t) = \int_{-i\infty+\gamma}^{i\infty+\gamma} e^{st} \frac{\tilde{H}_s(s)}{s\tilde{K}(-s)} ds.$$

On peut alors intégrer cette solution selon  $t$ , en utilisant la condition initiale  $m_1(0) = 0$  et la définition de la transformée de Laplace de  $\tilde{H}_s(s)$ . On obtient alors

$$m_1(t) + \int_0^t m_1(t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwt} - 1}{iw\tilde{K}(-iw)} \frac{dw}{2\pi} \int_0^{\infty} H_s(x) e^{-iwx} dx.$$

On peut alors intervertir les ordres d'intégration et le changement  $w \rightarrow -w$  ce qui conduit à

$$m_1(t) + \int_0^t m_1(t') dt' = \int_0^{\infty} H_s(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iw(x-t)} - e^{iwx}}{-iw\tilde{K}(iw)} \frac{dw}{2\pi}, \quad (\text{J.3})$$

qui fait apparaître explicitement la transformée inverse de Laplace de  $sK^{-1}(s)$  selon les variables  $x - t$  et  $x$ . Afin d'expliciter la fonction inverse de  $sK^{-1}(s)$ , on s'appuie sur l'équation de renewal du processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour une cible introduite en  $L$  et avec un marcheur initialement dans l'état stationnaire  $p_s(x(0) = x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ . Cette équation permet d'isoler le FPT d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck

$$\frac{e^{-L^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = \int_0^t \frac{e^{-L^2 \frac{(1-e^{-t})^2}{2(1-e^{-2t})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t})}} F(L, t' | x_0, 0) dt',$$

ce qui amène à la relation suivante en Laplace

$$\frac{p_{st}(L)}{s} = \tilde{F}_{st}(s, L) \tilde{K}(s),$$

où on a défini  $F_{st}(t)$  comme la distribution de premier passage d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck initialement dans l'état stationnaire à  $t = 0$ . Dès lors, on obtient la transformée de Laplace inverse de  $sK^{-1}(s)$

$$\mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s\tilde{K}(s)} \right) (t) = p_s(L)^{-1} F_{st}(L, t). \quad (\text{J.4})$$

On peut alors reprendre (J.3) et l'injection de (J.4) conduit à

$$m_1(t) + \int_0^t m_1(t') dt' = -p_s(L)^{-1} \int_0^{\infty} H_s(x) [F_{st}(x-t)\Theta(x-t) - F_{st}(x)] dx,$$

où  $\Theta$  est la fonction de Heaviside. On peut alors résoudre l'équation différentielle linéaire vérifiée par  $m_1(t)$  avec  $m_1(0) = 0$ , ce qui amène à

$$\int_0^t m_1(t') dt' = - \int_0^t e^{t'-t} p_s(L)^{-1} \int_0^{\infty} H_s(x) [F_{st}(x-t)\Theta(x-t) - F_{st}(x)] dx dt'.$$

Après simplification, on obtient

$$m_1(t)p_s(L) = \int_0^\infty e^{-t}H_s(x)F_{st}(x) - \int_0^\infty H_s(x+t)F_{st}(x) + \int_0^\infty \int_0^t H_s(x+t')F_{st}(x)e^{t'-t}dxdt'.$$

Finalement, une intégration par partie des derniers termes conduit à

$$m_1(t)p_s(L) = \int_0^\infty \int_0^t H'_s(x+t')F_{st}(x)e^{t'-t}dxdt'.$$

Ensuite, en remarquant que

$$H_s(x) = b(x, L) + b'(x, L), \quad (\text{J.5})$$

où

$$b(x, L) = \int_0^\infty \frac{e^{-L^2 \frac{(1-e^{-t})^2}{2(1-e^{-2t})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t})}} \left( \frac{L\sigma_1(t, t+x)(e^{-t}-1)}{1-e^{-2t}} + m_{s1}(x) \right).$$

cela permet d'exprimer  $m_1(t)$

$$m_1(t)p_s(L) = \int_0^\infty [b'(t+x) - b'(x)e^{-t}]F_{st}(x)dx.$$

Ainsi,  $m_1(t)$  et  $\sigma_1$  sont complètement caractérisées par l'expansion à l'ordre 1 de la fonction de covariance  $\theta$ . En rappelant le développement perturbatif de la fonction de covariance et de la position moyenne d'un processus initialement en  $L$ , on obtient

$$\begin{cases} \sigma_1(t, t+x) &= \theta_1(x) - e^{-t-x}\theta_1(t) - \theta_1(t+x)e^{-t} \\ m_{s1}(t) &= L\theta_1(t). \end{cases} \quad (\text{J.6})$$

Cela conduit après simplification à une expression explicite de  $m_1(t)$

$$m_1(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{F_{st}(x)}{p_s(L)} \frac{e^{-L^2 \frac{(1-e^{-t_1})^2}{2(1-e^{-2t_1})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t_1})}} \frac{Le^{-t_1}(1-e^{-t_1})}{1-e^{-2t_1}} \dots \left[ \theta'_1(x+t_1+t) - \theta'_1(t_1+x)e^{-t} + \theta'_1(x+t) - e^{-t}\theta'_1(x) \right] dxdt_1. \quad (\text{J.7})$$

Pour finir, en utilisant (J.7) et (J.6), on peut déterminer le développement perturbatif à l'ordre 1 du temps moyen de premier passage pour un processus initialement dans l'état stationnaire

$$\begin{aligned} \epsilon p_s(L)\langle T_1 \rangle &= p_s(L)\langle T \rangle - p_s(L)\langle T_{OU} \rangle = \epsilon \int_0^\infty \frac{e^{-L^2 \frac{(1-e^{-t})^2}{2(1-e^{-2t})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t})}} \dots \\ &\quad \left( m_1(t) \frac{L(1-e^{-t})}{1-e^{-2t}} + \sigma_1(t, t) \left[ \frac{L^2(1-e^{-t})^2}{2(1-e^{-2t})^2} - \frac{1}{2(1-e^{-2t})} \right] \right) dt, \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'expression de  $\epsilon \mathcal{F}_s(L) = \epsilon p_s(L) \langle T_1 \rangle$  présentée dans le chapitre 5

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s(L) = \int_0^\infty \frac{e^{-L^2 \frac{(1-e^{-t})^2}{2(1-e^{-2t})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t})}} & \left( \frac{L(1-e^{-t})}{1-e^{-2t}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{F_{st}(x)}{p_s(L)} \frac{e^{-L^2 \frac{(1-e^{-t_1})^2}{2(1-e^{-2t_1})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t_1})}} \frac{Le^{-t_1}(1-e^{-t_1})}{1-e^{-2t_1}} \dots \right. \\ & \left[ \theta'_1(x+t_1+t) - \theta'_1(t_1+x)e^{-t} + \theta'_1(x+t) - e^{-t}\theta'_1(x) \right] dx dt_1 \dots \\ & \left. - 2\theta_1(t)e^{-t} \left[ \frac{L^2(1-e^{-t})^2}{2(1-e^{-2t})^2} - \frac{1}{2(1-e^{-2t})} \right] \right) dt. \end{aligned} \quad (\text{J.8})$$

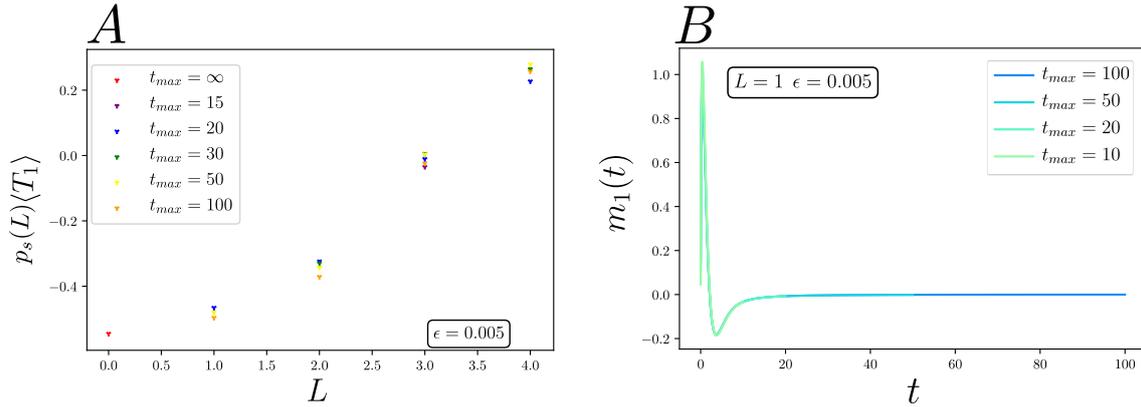


FIG. J.1 Théorie de perturbation pour un processus vérifiant une équation GLE avec  $H = 1/2 + \epsilon$ . **a** Développement perturbatif à l'ordre 1 du temps moyen de premier passage. Les valeurs de  $\langle T_1 \rangle$  obtenues numériquement par l'intégration de (J.8) sont données pour différents temps de coupure  $t_{max}$  et  $\epsilon = 0.005$ . **b** Développement perturbatif de la position moyenne du processus dans le futur du MFPT obtenu par intégration numérique de (J.7).  $m_1(t)$  est ici donné pour différents temps de coupure  $t_{max}$  et  $\epsilon = 0.005$ .

Tout d'abord, justifions que toutes les intégrales sont bien définies. Le second terme entre crochet (issu du développement de  $\sigma(t, t)$ ) présente une décroissance exponentielle selon  $t$  et son intégration est bien définie pour toutes valeurs de  $L$ . Le premier terme est composé de trois intégrales, on remarque que ce premier terme est proportionnel à  $e^{-t_1}$  assurant la convergence le long de  $t_1$ . De plus, celui-ci est proportionnel à  $F_{st}(x)$  qui est intégrable puisque le MFPT d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck est fini. Enfin, ce terme est composé de quatre sous-termes, dont deux décroissent exponentiellement selon  $t$  et deux dont le comportement asymptotique est similaire à  $\theta'_1(t) \sim t^{-2}$ , qui est aussi intégrable.

## J.2 Évaluation numérique des perturbations $m_1(t)$ et $\langle T_1 \rangle$

On propose ensuite d'évaluer numériquement le MFPT. Dans un premier temps, il faut caractériser la distribution de premier passage d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour une distribution initiale stationnaire. Pour ce faire, on résout numériquement l'équation de Fokker-Planck en présence d'une cible absorbante introduite en  $L$ , méthode valide pour un processus markovien. L'intégrale de la densité résultante est égale à  $S(t)$  et sa dérivée à  $F_{st}(t)$ . Afin de tester notre approche, la probabilité de survie obtenue est comparée à la solution exacte obtenue par la méthode des images pour  $L = 0$ ,  $F(t) = \frac{2}{\pi} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}$ . Pour  $L \neq 0$ , le résultat obtenu est comparé à l'inversion numérique de la transformée de Laplace  $\mathcal{L}(\tilde{F}_{st}(s))^{-1}$ . Plus précisément, la transformée de Laplace  $\tilde{F}_{st}(s)$  peut être déduite des propriétés d'intégration de l'équation de renewal d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck [Vestraeten, 2015] conduisant à

$$\tilde{F}_{st}(s) = \frac{e^{-L^2/2}}{\Gamma(s)D_{-s}(L)D_{-s}(L)},$$

où  $D_{-s}(L)$  est la fonction cylindrique parabolique.

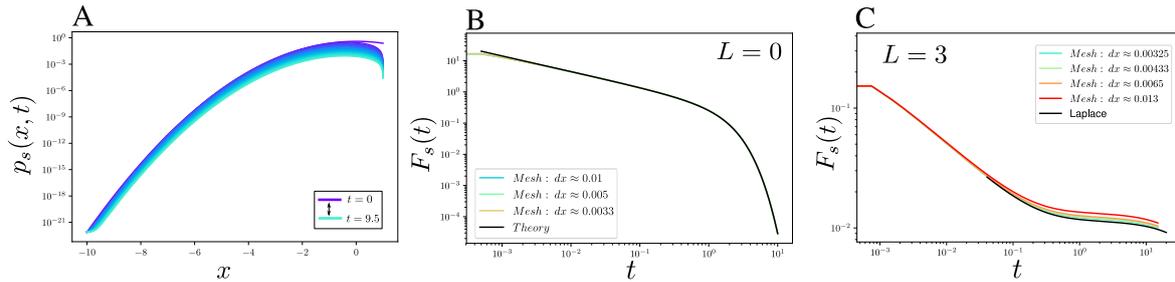


FIG. J.2 *Distribution de premier passage d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour une distribution initiale stationnaire. a* Résolution numérique de la densité de probabilité d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck en présence d'une cible absorbante, ici  $L = 1$ . Le processus est initialement dans l'état stationnaire et une seconde solution est obtenue pour les marcheurs initialement en  $x(0) > L$ . La solution est obtenue par la résolution numérique de l'équation de Fokker-Planck en présence d'une cible absorbante. *b* L'intégration de la densité ainsi obtenue pour différents pas de discrétisation  $d_x$  permet de déduire la probabilité de premier passage en  $L$ . Afin de tester notre approche, la probabilité de survie est comparée à la solution exacte déduite de la méthode des images pour  $L = 0$  (ligne pleine noire). *c* Pour  $L \neq 0$ , le résultat est comparé à l'inversion numérique de la transformée de Laplace  $\mathcal{L}(\tilde{F}_{st}(s))^{-1}$  (ligne pleine noire).

Puisque la distribution de premier passage peut être obtenue numériquement pour des pas de temps discrets  $dt$ , on propose que les différentes intégrales soient approximées par leur discrétisation avec un pas de temps  $dt$ . D'autre part, la mesure numérique de la dérivée de la perturbation à l'ordre 1 de la fonction de Mittag-Leffler est approximée par

$$\theta'_1(t, \epsilon) \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\theta(t, \epsilon) - e^t}{\epsilon},$$

où la valeur de  $\epsilon$  est choisie la plus petite que possible. Il est alors possible de déduire une mesure numérique de  $m_1(t)$  via l'équation (J.7). Afin de vérifier la consistance de notre approche, le comportement de  $m_1(t)$  est comparé pour différents paramètres  $\epsilon$ ,  $dx$  et  $t_{max}$ .  $t_{max}$  est choisi suffisamment grand pour que la décroissance exponentielle de  $F_{st}(x)$  soit atteinte. Pour des raisons pratiques, les deux autres intégrales sont évaluées jusqu'à  $3t_{max}$  avec un pas de temps identique.

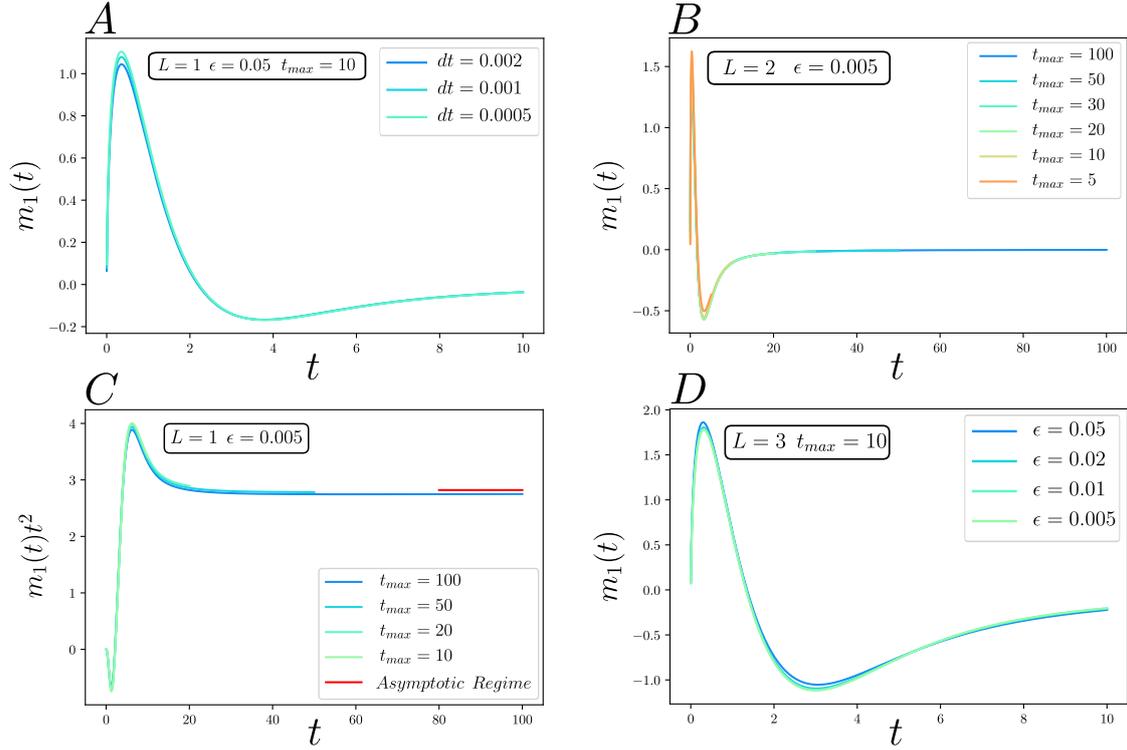


FIG. J.3 Perturbation de la position moyenne dans le futur du FPT, notée  $m_1(t)$ , obtenue par intégration numérique. Les résultats obtenus selon différents paramètres ( $dx$ ,  $t_{max}$  et  $\epsilon$ ) sont comparés figures **a-d**. Notons que les courbes ainsi obtenues par intégration conduisent à des résultats analogues avec  $dt \rightarrow 0$  pour  $L = 1$  **a**, selon différents  $t_{max}$  pour  $L = 2$  **b** et selon différents  $\epsilon$  pour  $L = 3$  **d**. Ensuite, le comportement asymptotique de  $m_1(t)$  proposé dans (J.9) (courbe rouge) est comparable aux résultats obtenus par intégration numérique **c**, y compris pour des temps de coupures  $t_{max}$  élevés, nous assurant de la robustesse de notre approche.

### J.3 Validité de l'approche perturbative pour les noyaux en loi de puissance

Pour finir, prenons le temps de commenter la validité de l'approche perturbative dans le cas de noyau de friction en loi de puissance. Pour cela, on rappelle que le comportement asymptotique de la fonction de Mittag-Leffler est donné par

$$\theta(t, 1 - \epsilon) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{t^{-1+\epsilon}}{\Gamma(\epsilon)} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \epsilon t.$$

Ainsi la perturbation à l'ordre 1 de la fonction de Mittag-Leffler peut être obtenue aux temps longs pour tout  $\epsilon > 0$ . D'autre part, remarquons que l'ordre 0 devient négligeable (comparé à l'ordre 1) pour des temps supérieurs à un temps caractéristique,  $t_\epsilon$ , défini par  $\exp[-t_\epsilon]t_\epsilon = \epsilon$ . Toutefois, pour  $\epsilon \rightarrow 0$ , la limite du régime de validité peut être étendue à  $\infty$ .

#### J.4 Comportement asymptotique de $m_1(t)$

On propose ici de déterminer le comportement asymptotique de  $m_1(t)$ . Pour cela, on néglige les termes proportionnels à  $e^{-t}$ . Ensuite, on injecte le comportement asymptotique de la dérivée de la perturbation de la fonction de Mittag-leffler à l'ordre 1 donnée par  $\theta_1(t)' = -t^{-2}$ , conduisant à

$$m_1(t) = - \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{F_{st}(x)}{p_s(L)} \frac{e^{-L^2 \frac{(1-e^{-t_1})^2}{2(1-e^{-2t_1})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t_1})}} \frac{Le^{-t_1}(1-e^{-t_1})}{1-e^{-2t_1}} \left[ (x+t+t_1)^{-2} + (x+t)^{-2} \right] dx dt_1.$$

Ensuite, on note que les deux décroissances selon les variables  $t_1$  et  $x$  sont exponentielles, on suppose ainsi que pour  $t \gg t_{1,typ}, x_{typ}$ , (définies comme les temps de relaxations typiques des fonctions de  $t_1$  et  $x$ ),  $m_1(t)$  vérifie

$$m_1(t) \sim -t^{-2} \int_0^\infty \frac{e^{-L^2 \frac{1}{1+e^{-t_1}}}}{\sqrt{1-e^{-2t_1}}} \frac{2Le^{-t_1}}{1+e^{-t_1}} dt_1. \quad (J.9)$$

#### J.5 Théorie perturbative pour une position initiale fixée

On propose ici d'étendre notre approche dans le cas d'une distribution initiale fixée ( $x_0 = 0$ ). On peut reprendre les différentes étapes énoncées dans le cas stationnaire qui conduisent à deux équations vérifiées par  $\gamma_1(t, t')$  et  $m_1(t)$ . Celles-ci, notées  $Q_2$  et  $Q_1$ , sont légèrement différentes et elles doivent également s'annuler (puisque de manière identique la fonctionnelle est nulle pour toute fonction  $k[\tau]$ ). Pour  $Q_2$ , on obtient

$$Q_2(t, \tau, \tau') = -\frac{1}{2} B_0 \int_0^\infty dt \left[ \frac{e^{-L^2 \frac{(1-e^{-t})^2}{2(1-e^{-2t})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t})}} \left( \gamma_1(t+\tau, t+\tau') - \gamma_1(t, t+\tau) e^{-\tau'} \right. \right. \\ \left. \left. - \gamma_1(t, t+\tau') e^{-\tau} + e^{-\tau-\tau'} \gamma_1(t, t) - \sigma_1(\tau, \tau') \right) \right. \\ \left. - \frac{e^{-\frac{L^2}{2(1-e^{-2t})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t})}} \left( \sigma_1(t+\tau, t+\tau') - \sigma_1(t, t+\tau) e^{-\tau'} \right. \right. \\ \left. \left. - \sigma_1(t, t+\tau') e^{-\tau} + e^{-\tau-\tau'} \sigma_1(t, t) - \sigma_1(\tau, \tau') \right) \right].$$

Tout d'abord, on remarque que la solution  $\gamma_1 = \sigma_1$  reste également valable pour  $x_0 = 0$ . En outre, puisque  $Q_2$  ne dépend pas de la valeur spécifique de  $x_0$  alors la solution  $\gamma_1 = \sigma_1$  est également partagée pour toute valeur de  $x_0$ . Ensuite, on se tourne vers l'équation intégrale  $Q_1$  pour  $x_0 = 0$

$$Q_1(t, \tau) = iB_0 \int_0^\infty dt \left[ \frac{e^{-L^2 \frac{(1-e^{-t})^2}{2(1-e^{-2t})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t})}} \left( m_1(t+\tau) - m_1(t)e^{-\tau} - L\sigma_1(t, t+\tau) \frac{(e^{-t}-1)}{1-e^{-2t}} \right) \right. \\ \left. + L\sigma_1(t, t)e^{-\tau} \frac{(e^{-t}-1)}{1-e^{-2t}} - m_{s1}(\tau) \right) - \frac{e^{-\frac{L^2}{2(1-e^{-2t})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t})}} \left( \frac{L\sigma_1(t, t+\tau)}{1-e^{-2t}} - \frac{Le^{-\tau}\sigma_1(t, t)}{1-e^{-2t}} - m_{s1}(\tau) \right) \right].$$

Par conséquent, la solution  $m_1$  vérifie une équation intégrale similaire

$$\int_0^\infty K(t)[m_1(t+\tau) + m'_1(t+\tau)]dt = H(\tau),$$

où  $H(\tau)$  est défini par

$$H(\tau) = \int_0^\infty K(t) \left( \frac{L(\sigma'_1(t, t+\tau) + \sigma_1(t, t+\tau))(e^{-t}-1)}{1-e^{-2t}} + m_{s1}(\tau) + m_{s1}(\tau') \right) \\ + \frac{e^{-\frac{L^2}{2(1-e^{-2t})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t})}} \left( \frac{L(\sigma_1(t, t+\tau) + \sigma'_1(t, t+\tau))}{1-e^{-2t}} - m'_{s1}(\tau) - m_{s1}(\tau) \right) dt,$$

et où  $K(\tau)$  reste identique au cas stationnaire (J.2). En suivant les étapes similaires à celles présentées précédemment, on obtient alors

$$m_1(t)p_s(L) = \int_0^\infty \int_0^t H'(x+t')F_{st}(x)e^{t'-t}dxdt'.$$

Après plusieurs étapes de calcul, on extrait finalement la fonction  $b$  introduite dans (J.5)

$$b(\tau) = \int_0^\infty K(t) \left( \frac{L\sigma_1(t, t+\tau)(e^{-t}-1)}{1-e^{-2t}} + m_{s1}(\tau) \right) + \frac{e^{-\frac{L^2}{2(1-e^{-2t})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t})}} \left( \frac{L(\sigma_1(t, t+\tau))}{1-e^{-2t}} - m_{s1}(\tau) \right) dt,$$

ce qui permet d'expliciter la position moyenne dans le futur de l'évènement de premier passage

$$\begin{aligned}
m_1(t) = & \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{F_{st}(x)}{p_s(L)} \frac{e^{-L^2 \frac{(1-e^{-t_1})^2}{2(1-e^{-2t_1})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t_1})}} \frac{Le^{-t_1}(1-e^{-t_1})}{1-e^{-2t_1}} \dots \\
& \left[ \theta'_1(x+t_1+t) - \theta'_1(t_1+x)e^{-t} + \theta'_1(x+t) - e^{-t}\theta'_1(x) \right] dx dt_1 \dots \\
& + \frac{F_{st}(x)}{p_s(L)} \frac{e^{-\frac{L^2}{2(1-e^{-2t_1})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t_1})}} \frac{Le^{-t_1}}{1-e^{-2t_1}} \dots \\
& \left[ e^{-t_1}\theta'_1(x+t) - e^{-t-t_1}\theta'_1(x) - \theta'_1(x+t_1+t) + \theta'_1(t_1+x)e^{-t} \right] dx dt_1 \dots
\end{aligned}$$

Dès lors,  $m_1(t)$  et  $\sigma_1$  sont entièrement caractérisées par le développement perturbatif de  $\theta$  à l'ordre 1 selon  $\epsilon$ . Enfin, l'expression explicite de  $m_1(t)$  peut être utilisée pour déterminer le développement perturbatif du temps moyen de premier passage à l'ordre 1

$$\begin{aligned}
\epsilon \mathcal{F}(L) = & p_s(L)\langle T \rangle - p_s(L)\langle T_{OU} \rangle \\
= & \epsilon \int_0^\infty \frac{e^{-L^2 \frac{(1-e^{-t})^2}{2(1-e^{-2t})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t})}} \left( m_1(t) \frac{L(1-e^{-t})}{1-e^{-2t}} + \sigma_1(t, t) \left[ \frac{L^2(1-e^{-t})^2}{2(1-e^{-2t})^2} - \frac{1}{2(1-e^{-2t})} \right] \right) \dots \\
& - \frac{e^{-\frac{L^2}{2(1-e^{-2t})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t})}} \sigma_1(t, t) \left[ \frac{L^2}{2(1-e^{-2t})^2} - \frac{1}{2(1-e^{-2t})} \right] dt
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant les expressions obtenues de  $m_1$  et  $\sigma_1$ , et après plusieurs étapes de calcul, on obtient finalement

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(L) = & \int_0^\infty \frac{e^{-L^2 \frac{(1-e^{-t})^2}{2(1-e^{-2t})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t})}} \left( \frac{L(1-e^{-t})}{1-e^{-2t}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{F_{st}(x)}{p_s(L)} \left\{ \dots \right. \right. \\
& \frac{e^{-L^2 \frac{(1-e^{-t_1})^2}{2(1-e^{-2t_1})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t_1})}} \frac{Le^{-t_1}(1-e^{-t_1})}{1-e^{-2t_1}} \left[ \theta'_1(x+t_1+t) - \theta'_1(t_1+x)e^{-t} + \theta'_1(x+t) - e^{-t}\theta'_1(x) \right] dx dt_1 \dots \\
& \left. \left. + \frac{e^{-\frac{L^2}{2(1-e^{-2t_1})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t_1})}} \frac{Le^{-t_1}}{1-e^{-2t_1}} \left[ e^{-t_1}\theta'_1(x+t) - e^{-t-t_1}\theta'_1(x) - \theta'_1(x+t_1+t) + \theta'_1(t_1+x)e^{-t} \right] dx dt_1 \right\} \dots \right. \\
& \left. - 2\theta_1(t)e^{-t} \left[ \frac{L^2(1-e^{-t})^2}{2(1-e^{-2t})^2} - \frac{1}{2(1-e^{-2t})} \right] \right) \dots \\
& + \frac{e^{-\frac{L^2}{2(1-e^{-2t})}}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t})}} 2\theta_1(t) \left[ \frac{L^2}{2(1-e^{-2t})^2} - \frac{1}{2(1-e^{-2t})} \right] dt.
\end{aligned}$$



# K – Détermination de la loi jointe de la marche SATW pour $s_0 = 1$

On va dans cette annexe déterminer les différentes relations vérifiées par la loi jointe et qui ont été énoncées dans le texte principal pour la marche SATW avec  $s_0 = 1$ .

## K.1 Probabilité de *splitting* de la marche SATW pour $s_0 = 1$

On cherche ici à déterminer la probabilité, dite de *splitting*  $\pi_{0,\underline{s}}$ , que le marcheur initialement sur le site 1 atteigne le site  $s$  avant de toucher le site 0. Pour cela, il est possible de reprendre les résultats obtenus dans l'annexe 1 pour la marche SATW que l'on réexprime dans ce système de notations

$$\pi_{0,\underline{s}} = \prod_{s'=1}^{s-1} \left( 1 - \frac{1-\beta}{2+\beta(s'-3)} \right) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(-2+2/\beta)}{\Gamma(-1+1/\beta)} s^{-\frac{1-\beta}{\beta}}. \quad (\text{K.1})$$

Remarquons que la distribution du maximum peut être déduite de (K.1)

$$\mu(s|1) = \pi_{0,\underline{s}} \left( 1 - \pi_{0,\underline{s+1}}(s) \right), \quad (\text{K.2})$$

ce qui amène à

$$\mu(s|1) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(-2+2/\beta)}{\Gamma(-1+1/\beta)} \frac{1-\beta}{\beta} s^{-\frac{1-\beta}{\beta}-1}. \quad (\text{K.3})$$

## K.2 Fonction génératrice de la loi jointe

On détermine la fonction génératrice de la distribution jointe, notée  $\sigma(s, n|s_0)$ , du maximum  $s$  atteint au cours de l'exploration et du FPT au temps  $n$  en 0, pour un marcheur initialement en  $s_0$ . Pour ce faire, on effectue une partition sur les temps de découverte des premiers  $s$  sites. On définit  $F_{0,\underline{s}}(n|s_0)$  la probabilité d'atteindre le site  $s$  avant 0 pour la première fois au pas de temps  $n$ , en partant de  $s_0$ , sachant que les sites  $\{1, \dots, s-1\}$  ont déjà été visités. On obtient pour les fonctions génératrices

$$\tilde{\sigma}(s, \xi|1) = \frac{\xi}{2} \left( \prod_{s'=3}^s \tilde{F}_{0,\underline{s}'}(\xi|s'-1) \right) \tilde{F}_{0,\underline{s+1}}(\xi|s),$$

où on s'est appuyé sur la propriété que connaissant le nombre actuel de sites découverts, le temps nécessaire pour découvrir le prochain site est indépendant de la trajectoire passée. Pour  $1 < s_0 < n$ , on remarque qu'à l'intérieur du territoire formé par les sites visités, le marcheur est assimilable à une simple marche aléatoire impliquant la relation de récurrence suivante pour  $F_{0,\underline{s}}(n|s_0)$

$$\tilde{F}_{0,\underline{s}}(\xi|s_0) = \frac{\xi}{2}\tilde{F}_{0,\underline{s}}(\xi|s_0 + 1) + \frac{\xi}{2}\tilde{F}_{0,\underline{s}}(\xi|s_0 - 1).$$

La résolution de l'équation de récurrence conduit à

$$\tilde{F}_{0,\underline{s}}(\xi|s_0) = \lambda r_1^{s_0} + \mu r_2^{s_0},$$

avec

$$\begin{cases} r_1 &= \frac{1}{\xi} - \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \\ r_2 &= \frac{1}{\xi} + \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}. \end{cases}$$

on en déduit maintenant  $\lambda$  et  $\mu$  à partir des conditions aux bords du territoire visité

$$\begin{cases} \tilde{F}_{0,\underline{s}}(\xi|1) = \xi(1 - \beta)\tilde{F}_{0,\underline{s}}(\xi|2) \\ \tilde{F}_{0,\underline{s}}(\xi|s - 1) = \beta\xi + (1 - \beta)\xi\tilde{F}_{0,\underline{s}}(\xi|s - 2). \end{cases}$$

Après plusieurs étapes de calcul, on obtient finalement

$$\tilde{F}_{0,\underline{s}}(\xi|s - 1) = \beta\xi \frac{r_1^{s-3}(r_1 - (1 - \beta)\xi) - r_2^{s-3}(r_2 - (1 - \beta)\xi)}{r_1^{s-4}(r_1 - (1 - \beta)\xi)^2 - r_2^{s-4}(r_2 - (1 - \beta)\xi)^2}. \quad (\text{K.4})$$

Pour finir, on peut déterminer les cas spécifiques  $s = 2, 3$ .

$$\begin{cases} \tilde{F}_{0,\underline{2}}(\xi|1) = \frac{\xi}{2} \\ \tilde{F}_{0,\underline{3}}(\xi|2) = \frac{\beta\xi}{1 - (1 - \beta)^2 \xi^2} \end{cases}$$

Enfin, on détermine la dernière excursion avant de trouver la cible

$$\tilde{F}_{0,s+1}(\xi|s) = \beta\xi \frac{(1 - (1 - \beta)r_2\xi) - (1 - (1 - \beta)r_1\xi)}{r_1^{s-3}(r_1 - (1 - \beta)\xi)^2 - r_2^{s-3}(r_2 - (1 - \beta)\xi)^2}.$$

En combinant ces différents termes, on retrouve la transformée de Laplace de la jointe

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(\xi, s|1) &= \frac{\beta^{s-1}\xi^s}{2(1 - (1 - \beta)^2\xi^2)} \left( \prod_{i=0}^{s-4} \frac{r_1^{i+1}(r_1 - (1 - \beta)\xi) - r_2^{i+1}(r_2 - (1 - \beta)\xi)}{r_1^i(r_1 - (1 - \beta)\xi)^2 - r_2^i(r_2 - (1 - \beta)\xi)^2} \right) \cdot \quad (\text{K.5}) \\ &\quad \times \frac{(1 - (1 - \beta)r_2\xi) - (1 - (1 - \beta)r_1\xi)}{r_1^{s-3}(r_1 - (1 - \beta)\xi)^2 - r_2^{s-3}(r_2 - (1 - \beta)\xi)^2}. \end{aligned}$$

### K.3 Comportement à grand temps et grande distance de la transformée de Laplace de la distribution conditionnelle du maximum atteint à l'instant du premier passage

Dans cette partie, on cherche à déterminer le comportement asymptotique de la distribution du temps de premier passage conditionnée par le maximum atteint  $s$ . Pour ce faire, on doit tout d'abord obtenir le comportement asymptotique des différents termes de (K.5), divisés par leur probabilité de *splitting* associées, probabilités qui ont été obtenues précédemment dans (K.2) et (K.3).

Commençons par considérer une excursion donnée de la loi jointe (K.4), dont on cherche à extraire la loi conditionnelle d'une seule excursion. Pour cela, on divise la loi d'une unique excursion par la probabilité de *splitting* associée

$$\begin{aligned} \pi_{0,\underline{i+4}}(i+3)^{-1} \tilde{F}_{0,\underline{i+4}}(\xi|i+3) &= \frac{1}{1 - \frac{1-\beta}{\beta i+2}} \beta \xi \frac{r_1^{i+1}(r_1 - (1-\beta)\xi) - r_2^{i+1}(r_2 - (1-\beta)\xi)}{r_1^i(r_1 - (1-\beta)\xi)^2 - r_2^i(r_2 - (1-\beta)\xi)^2} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1-\beta}{\beta i+2}} \left( \beta \xi \frac{r_1(r_1 - (1-\beta)\xi) - \frac{r_2^i}{r_1^i} r_2(r_2 - (1-\beta)\xi)}{(r_1 - (1-\beta)\xi)^2 - \frac{r_2^i}{r_1^i} (r_2 - (1-\beta)\xi)^2} \right). \end{aligned} \tag{K.6}$$

On change maintenant  $\xi$  en  $e^{-u}$ , en prenant la transformée de Laplace discrète de la loi conditionnelle (K.6) pour  $i$  fixé. En vue de déterminer le comportement asymptotique à grand temps et grande distance de (K.6), on peut émettre deux observations :

- On cherche à déterminer la limite jointe  $u \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$ . Ainsi, on souhaite extraire la dépendance la plus faible (c'est-à-dire l'exposant minimal  $a$ ) de la variable couplée  $iu^a$  qui émergera. En effet, celle-ci dirigera le comportement asymptotique de la loi jointe.
- Par définition de la loi conditionnelle, les développements en série à grand  $i$  de  $\tilde{F}_{0,\underline{i+4}}(\xi|i+3)$  et  $\pi_{0,\underline{i+4}}(i+3)$  s'annulent dans la limite  $u \rightarrow 0$  à  $i$  fixé.

Par conséquent, on propose de réécrire (K.6) comme

$$\pi_{0,\underline{i+4}}(i+3)^{-1} \tilde{F}_{0,\underline{i+4}}(\xi|i+3) = \left( 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\beta}{\beta} \left( -\frac{2}{\beta} \right)^{k-1} i^{-k} \right)^{-1} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} u^{ka} A_k(iu^a) \right), \tag{K.7}$$

avec  $A_k(iu^a) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1-\beta}{\beta} \left( -\frac{2}{\beta} \right)^{k-1} (iu^a)^{-k}$ . On propose de déduire l'exposant  $a$  à partir du développement à l'ordre le plus bas selon  $u$  de  $\left( \frac{r_2}{r_1} \right)^i$  qui apparaît dans (K.6)

$$\begin{aligned} \frac{r_2^i}{r_1^i} &= \exp \left( i \ln \left( 1 - 2\sqrt{2u} + 4u - 3\sqrt{2u^3/2} \right) \right) \\ &= \exp \left( -2\sqrt{2u}i - iO(u^{3/2}) \right). \end{aligned} \tag{K.8}$$

En remarquant que la dépendance  $i$  n'apparaît que dans le rapport ci-dessus, on en conclut que  $a = 1/2$ . Dans la suite, on négligera tous les termes de la forme  $iO(u^{3/2})$  puisqu'ils seront toujours négligeables par rapport à  $i\sqrt{u}$  lorsque  $u \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$ . En injectant (K.8) dans le terme le plus à droite de (K.6), on obtient après quelques étapes de calcul

$$\left( \beta e^{-u} \frac{r_1(r_1 - (1 - \beta)e^{-u}) - \frac{r_2^i}{r_1^i} r_2(r_2 - (1 - \beta)e^{-u})}{(r_1 - (1 - \beta)e^{-u})^2 - \frac{r_2^i}{r_1^i} (r_2 - (1 - \beta)e^{-u})^2} \right) = 1 - \frac{1 - \beta}{\beta} \frac{\sqrt{2u}}{\tanh(i\sqrt{2u})} + O(u)H(i^2u). \quad (\text{K.9})$$

L'ajout du développement (K.9) dans (K.7) conduit à

$$\pi_{0,\underline{i+4}}(i+3)^{-1} \tilde{F}_{0,\underline{i+4}}(\xi|i+3) = \left( 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \beta}{\beta} \left( -\frac{2}{\beta} \right)^{k-1} i^{-k} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{1 - \beta}{\beta} \frac{\sqrt{2u}}{\tanh(i\sqrt{2u})} + O(u)H(i^2u) \right)$$

Dans la limite  $i\sqrt{u} \rightarrow 0$ , le dernier terme présente un développement en série selon  $i$  pour lequel chaque terme s'annule avec ceux du développement en série de la probabilité de *splitting* associée. Enfin, pour  $i \xrightarrow{ui^2 : \text{fixed}} \infty$ , on remarque que le dernier terme est négligeable devant  $\sqrt{u}$ . On obtient donc

$$\pi_{0,\underline{i+4}}(i+3)^{-1} \tilde{F}_{0,\underline{i+4}}(\xi|i+3) = 1 + \frac{1 - \beta}{\beta i} \left( 1 - \frac{\sqrt{2ui}}{\tanh(i\sqrt{2u})} \right) + R(u, i),$$

où on a inclus les termes supplémentaires de l'expansion des deux séries  $O(u)H_1(ui^2) + O(i^{-2})$  à l'intérieur de la variable notée  $R(u, i)$  ( $H_1(ui^2)$  en tenant compte du produit en croix des termes d'ordre 1). On notera que  $R(u, i) \xrightarrow{ui^2 \rightarrow 0} 0$  mais aussi  $R(u, i) \xrightarrow{ui^2 \sim O(1)} O(i^{-2}) + o(\sqrt{u})$ . En d'autres termes, le dernier terme est négligeable pour  $ui^2 \sim O(1)$  et  $i \rightarrow \infty$ . En considérant le produit complet dans (K.5), on obtient dans la limite des grands temps en Laplace

$$P(S) = \frac{\left( \beta \prod_{i=0}^{s-4} \frac{r_1^{i+1}(r_1 - (1 - \beta)e^{-u}) - r_2^{i+1}(r_2 - (1 - \beta)e^{-u})}{r_1^i(r_1 - (1 - \beta)e^{-u})^2 - r_2^i(r_2 - (1 - \beta)e^{-u})^2} \right)}{\prod_{i=0}^{s-4} \left( 1 - \frac{1 - \beta}{2 + \beta i} \right)} \exp \left[ \int_{i=0}^s \ln \left( 1 + \frac{1 - \beta}{i\beta} \left( 1 - \frac{\sqrt{2ui}}{\tanh(i\sqrt{2u})} \right) \right) di \right],$$

$us^2 \sim O(1), u \rightarrow 0$

où on a légitimement exprimé la somme selon une intégrale puisque tous les termes avec  $i^2 \ll u$  sont négligeables. On a également négligé  $R(u, i)$  puisque la contribution de  $O(i^{-2})$  est le reste d'une série convergente commençant à un nombre typique donné par  $O(\sqrt{u}^{-1})$ . On remarque la simplification suivante après avoir exprimé  $i = i'/s$

$$\frac{1-\beta}{\beta} \int_0^1 \frac{1}{i'} \left( 1 - \frac{i' \sqrt{2us^2}}{\tanh(i' \sqrt{2us^2})} \right) di' = \frac{1-\beta}{\beta} \ln \left( \frac{\sqrt{2us^2}}{\sinh(2us^2)} \right).$$

On trouve finalement dans la limite des grands  $s$ , à  $s^2u$  fixé

$$P(S) \underset{us^2 \sim \tilde{O}(1), u \rightarrow 0}{\sim} \left( \frac{\sqrt{2us^2}}{\sinh(\sqrt{2us^2})} \right)^{\frac{1-\beta}{\beta}}. \quad (\text{K.10})$$

On considère enfin la dernière excursion de (K.5), lorsque le marcheur trouve la cible sans découvrir aucun autre nouveau site. Le comportement asymptotique de cette dernière excursion, normalisée par sa propre probabilité de *splitting*, est le suivant

$$\frac{2 + \beta(s-3)}{1-\beta} \frac{\beta e^{-u}(1-\beta)(r_1 e^{-u} - r_2 e^{-u})}{r_1^{s-3}(r_1 - (1-\beta)e^{-u})^2 - r_2^{s-3}(r_2 - (1-\beta)e^{-u})^2} \underset{us^2 \sim \tilde{O}(1), u \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{2us^2}}{\sinh(\sqrt{2us^2})} \quad (\text{K.11})$$

Enfin, on considère les deux premières excursions de (K.5), qui normalisées par leur probabilité de *splitting* associées, n'expriment aucune dépendance selon la variable  $su^2$

$$2 \frac{(1-1-\beta)^2 e^{-u}}{\beta} \frac{\beta e^{-u}}{2(1-(1-\beta)^2 e^{-2u})} = 1 + O(u) \quad (\text{K.12})$$

La combinaison de (K.12), (K.11) et (K.10) conduit à l'expression asymptotique de la transformée de Laplace de la distribution conditionnelle  $f_{SATW}(\tau)$ , qui a été obtenue dans un autre contexte [Serlet, 2013]

$$\tilde{f}_{SATW}(p) = \left( \frac{\sqrt{2p}}{\sinh(\sqrt{2p})} \right)^{1/\beta}$$

Les inversions numériques de la transformée de Laplace pour le modèle SATW sont obtenues en utilisant la méthode proposée dans Stehfest (voir [Stehfest, 1970]). Différentes méthodes numériques ont également été testées en parfait accord avec notre prédiction.

## K.4 Limite continue de la distribution conditionnelle aux grands temps et aux grandes distances

On souhaite apporter quelques précisions sur le passage du cas discret à une limite continue grand temps/grande distance. Rappelons que la transformée de Laplace discrète s'écrit

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}(u|s, 1) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-un} \sigma(n|s, 1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-un} \frac{\phi(n/s^2)}{n} \\
&= \int_0^{\infty} e^{-un} \phi(n/s^2) \frac{dn}{n} \\
&= \int_0^{\infty} e^{-us^2\tau} \phi(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \\
&= \mathcal{L}\left(\frac{\phi(\tau)}{\tau}\right)(us^2).
\end{aligned}$$

Ainsi, en définissant  $f_{SATW}(\tau)$  comme la transformée de Laplace inverse de

$$\tilde{f}_{SATW}(u) = \left( \frac{\sqrt{2u}}{\sinh(\sqrt{2u})} \right)^{\frac{1}{\beta}},$$

on obtient finalement pour la loi conditionnelle

$$G_{tm}(n|s, 1) = f_{SATW}(n/s^2) s^{-2},$$

ou de manière équivalente en exprimant la distribution conditionnelle le long de la variable redimensionnée  $\tau = n/s^2$

$$G_{tm}(\tau|s, 1) = f_{SATW}(\tau)$$

## K.5 Comportement asymptotique de la probabilité de survie de la marche SATW

On cherche à déterminer le comportement de la probabilité de survie notée  $F_{\underline{0}}(n|s_0 = 1)$ . On effectue une partition sur le nombre de sites distincts découverts avant d'atteindre la cible

$$F_{\underline{0}}(n|s_0 = 1) = \sum_{s=1}^{\infty} \sigma(n, s|1) = \sum_{s=1}^{\infty} \mu(s|1) G_{tm}(n|s, 1).$$

Dans la limite  $s$  grand et en considérant (K.3) pour  $\mu(s|1)$ , cela conduit à

$$F_{\underline{0}}(n|s_0 = 1) \sim \frac{\Gamma(-2 + 2/\beta)}{\Gamma(-1 + 1/\beta)} \frac{(1-\beta)}{\beta} n^{-\frac{1-\beta}{2\beta}-1} \sum_{s=1}^{\infty} G_{tm}(n|s, 1) \frac{n^{\frac{1-\beta}{2\beta}+1}}{s^{\frac{1-\beta}{\beta}+1}}.$$

En rappelant que  $G_{tm}(n|s, 1)$  est invariant dans la limite des grands  $n$ , négligeable pour  $n \gg s^2$  et  $n \ll s^2$ , on réécrit  $G_{tm}(n|s, 1) = \frac{f(n/s^2)}{s^2}$  dans la limite continue  $\tau = n/s^2$ , ce qui conduit à

$$F_{\underline{0}}(n|s_0 = 1) \sim \frac{\Gamma(-2 + 2/\beta)(1 - \beta)}{\Gamma(-1 + 1/\beta)} \frac{(1 - \beta)}{2\beta} A(\beta) n^{-\frac{1-\beta}{2\beta}-1}$$

où on a défini  $A(\beta)$  comme

$$A(\beta) = \int_0^\infty f_{SATW}(\tau) \tau^{\frac{1-\beta}{2\beta}} .d\tau$$

On propose maintenant de déterminer le préfacteur de la distribution de temps de premier passage dans le cas où  $n = \frac{1}{\beta}$  est un entier impair. Observons que dans ce cas,  $\tau^{\frac{1-\beta}{2\beta}} = \tau^m$  avec  $m = \frac{n-1}{2}$  un entier quelconque. De plus, pour toute fonction donnée  $g$

$$\int_0^\infty g(\tau) \tau^m d\tau = (-1)^m \frac{d^m}{d^m s} \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau) d\tau \Big|_{s=0} = (-1)^m \frac{d^m}{d^m s} \mathcal{L}(g(\tau))(s) \Big|_{s=0}.$$

En injectant l'expression de  $f_{SATW}$  on obtient

$$\begin{aligned} A(\beta) &= (-1)^m \frac{d^m}{d^m s} \mathcal{L} \left[ \mathcal{L}^{-1} \left[ \left( \frac{\sqrt{2s}}{\sinh(\sqrt{2s})} \right)^n \right] (\tau) \right] (s) \Big|_{s=0} \\ &= (-1)^m \frac{d^m}{d^m s} \left( \frac{\sqrt{2s}}{\sinh(\sqrt{2s})} \right)^n \Big|_{s=0}. \end{aligned}$$

On définit maintenant les *polynômes de Norlund* ou *polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur* par leur fonction génératrice [Adelberg, 1998]

$$\left[ \frac{t}{e^t - 1} \right]^l e^{xt} = \sum_{n=0}^\infty B_n^l(x) \frac{t^n}{n!}.$$

On obtient par identification

$$A \left( \frac{1}{2m+1} \right) = B_{2m+1}^{2m+1} \left( \frac{2m+1}{2} \right) \frac{2^{3m} m!}{2m!},$$

et en utilisant les propriétés connues des *polynômes de Norlund* [Adelberg, 1998], cela amène à

$$A \left( \frac{1}{2m+1} \right) = (2m-1)!!$$

On propose le résultat suivant pour une valeur arbitraire de  $\beta$

$$A(\beta) = \frac{2^{\frac{1-\beta}{2\beta}} \Gamma(\frac{1}{2\beta})}{\sqrt{\pi}}$$

qui conduit au résultat final énoncé dans le texte principal

$$F_{\underline{0}}(n|s_0 = 1) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(\frac{2}{\beta} - 1)}{\Gamma(\frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2})} 2^{-\frac{1+\beta}{2\beta}} n^{-\frac{1-\beta}{2\beta}-1}.$$



## L – Distribution asymptotique du centre du territoire visité

On cherche à déterminer la solution de l'équation différentielle du second ordre vérifiée par  $p(x, \tau)$  selon  $\tau$  et  $x$ .

$$\frac{\partial^2 p(x, \tau)}{\partial \tau^2} = v^2 \frac{\partial^2 p(x, \tau)}{\partial x^2} - \frac{2\phi}{\tau} \frac{\partial p(x, \tau)}{\partial \tau}$$

Dans la limite  $\tau$  grand, on cherche une solution invariante d'échelle  $\frac{f(z)}{\tau}$  avec  $z = x/\tau$  tout en gardant à l'esprit la condition de normalisation  $\int_{-\tau}^{\tau} \frac{f(x/\tau)}{\tau} dx = 1$ . La condition de normalisation pour la solution invariante d'échelle  $\frac{f(z)}{\tau}$  permet l'identification de  $\beta$

$$\int_{-\tau}^{\tau} \frac{f(x^{d_w}/\tau)}{\tau^\beta} dx = 1 \quad (\text{L.1})$$

et ce, pour tout  $\tau$ , ce qui impose  $\beta = 1/d_w$ . Ensuite, on injecte la forme invariante d'échelle dans (L.1) ce qui conduit à

$$\begin{aligned} & \frac{1/d_w(1/d_w + 1)}{\tau^{1/d_w+2}} f\left(\frac{x^{d_w}}{\tau}\right) + \frac{(1/d_w + 2)x^{d_w}}{\tau^{1/d_w+3}} f'\left(\frac{x^{d_w}}{\tau}\right) + \frac{1/d_w x^{d_w}}{\tau^{1/d_w+3}} f''\left(\frac{x^{d_w}}{\tau}\right) + \frac{x^{2d_w}}{\tau^{4+1/d_w}} f'''\left(\frac{x^{d_w}}{\tau}\right) = \\ & \frac{d_w(d_w - 1)x^{d_w-2}}{\tau^{1/d_w+1}} f'\left(\frac{x^{d_w}}{\tau}\right) + \frac{d_w^2 x^{2(d_w-1)}}{\tau^{1/d_w+2}} f''\left(\frac{x^{d_w}}{\tau}\right) + 2\phi \frac{1/d_w}{\tau^{1/d_w+2}} f\left(\frac{x^{d_w}}{\tau}\right) + 2\phi \frac{x^{d_w}}{\tau^{1/d_w+3}} f'\left(\frac{x^{d_w}}{\tau}\right). \end{aligned}$$

Ce qui peut être reexprimé selon la variable redimensionnée  $z$

$$\begin{aligned} & \frac{1/d_w(1/d_w + 1)}{\tau^2} f(z) + \frac{(1/d_w + 2)z}{\tau^2} f'(z) + \frac{1/d_w z}{\tau^2} f''(z) + \frac{z^2}{\tau^2} f'''(z) = \\ & d_w(d_w - 1)z x^{-2} f'(z) + \frac{d_w^2 x^{2(d_w-1)}}{\tau^2} f''(z) + 2\phi \frac{1/d_w}{\tau^2} f(z) + 2\phi \frac{z}{\tau^2} f'(z). \end{aligned}$$

La seule solution invariante d'échelle stable est donnée par  $d_w = 1$ , ce qui conduit à

$$2f(z) + 4zf'(z) + z^2 f''(z) = f''(z) + 2\phi f(z) + 2\phi z f'(z).$$

On obtient alors après simplification

$$(z^2 - 1)f''(z) + (4z - 2\phi)f'(z) + (2 - 2\phi)f(z) = 0.$$

On reconnaît l'équation différentielle suivante

$$(z^2 - 1)f(z))'' - (2\phi z f(z))' = 0,$$

qui conduit après simplification à

$$(z^2 - 1)f(z))' - (2\phi z f(z)) = A.$$

En utilisant la symétrie de la solution en  $z = 0$ , on obtient  $A = 0$ .

$$f'(z)/f(z) = \frac{2(1 - \phi)z}{1 - z^2},$$

et on obtient alors après intégration

$$\ln(f(z)) = (\phi - 1) \ln(1 - z^2) + C,$$

ce qui permet d'en déduire la forme attendue

$$f(z) = C(1 - z^2)^{\phi-1}$$

où  $C$  est déterminée par la condition de normalisation.

# Bibliographie

- Adelberg, A. (1998). « Higher Order Bernoulli Polynomials and Newton Polygons ». In : *Applications of Fibonacci Numbers : Volume 7*. Sous la dir. de G. E. Bergum, A. N. Philippou et A. F. Horadam. Dordrecht : Springer Netherlands, p. 1-8 (cf. p. 269).
- Agliari, E. et R. Burioni (2009). « Random walks on deterministic scale-free networks: Exact results ». In : *Physical Review E* 80.3 (cf. p. 28).
- Agliari, E., R. Burioni et G. Uguzzoni (juin 2012). « The true reinforced random walk with bias ». In : *New Journal of Physics* 14.6, p. 063027 (cf. p. 16).
- Aldous, D. (1983). « On the time taken by random walks on finite groups to visit every state ». In : *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* 62.3, p. 361-374 (cf. p. 185).
- Allegrini, P., J. Bellazzini, G. Bramanti, M. Ignaccolo, P. Grigolini et J. Yang (juill. 2002). « Scaling breakdown: A signature of aging ». In : *Physical Review E* 66.1, p. 015101 (cf. p. 37).
- Allegrini, P., G. Aquino, P. Grigolini, L. Palatella, A. Rosa et B. J. West (juin 2005). « Correlation function and generalized master equation of arbitrary age ». In : *Physical Review E* 71.6, p. 066109 (cf. p. 37).
- Allemand, J.-F., S Cocco, N Douarche et G Lia (mars 2006). « Loops in DNA: an overview of experimental and theoretical approaches ». In : *Eur Phys J E Soft Matter* 19.3, p. 293-302 (cf. p. 25, 139).
- Amit, D. J., G. Parisi et L. Peliti (fév. 1983). « Asymptotic behavior of the "true" self-avoiding walk ». In : *Physical Review B* 27.3, p. 1635-1645 (cf. p. 2, 10, 11, 13, 15, 94, 172).
- Andersen, E. S. (1954). « On the fluctuations of sums of random variables II ». In : *Mathematica Scandinavica* 2, p. 195-223 (cf. p. 35, 37).
- Arruda, H. F. de, F. N. Silva, L. d. F. Costa et D. R. Amancio (déc. 2017). « Knowledge acquisition: A Complex networks approach ». In : *Information Sciences* 421, p. 154-166 (cf. p. 2, 23, 185).
- Attieh, Y., A. G. Clark, C. Grass, S. Richon, M. Pocard, P. Mariani, N. Elkhatib, T. Betz, B. Gurchenkov et D. M. Vignjevic (sept. 2017). « Cancer-associated fibroblasts lead tumor invasion through integrin-beta3-dependent fibronectin assembly ». In : *Journal of Cell Biology* 216.11, p. 3509-3520 (cf. p. 2, 81).
- Avin, C. et B. Krishnamachari (jan. 2008). « The power of choice in random walks: An empirical study ». In : *Computer Networks. (1) Performance of Wireless Networks* 52.1, p. 44-60 (cf. p. 2, 23, 94, 185, 186).
- Bao, J.-D. et Y.-Z. Zhuo (sept. 2003). « Ballistic Diffusion Induced by a Thermal Broadband Noise ». In : *Physical Review Letters* 91.13, p. 138104 (cf. p. 143).
- Bao, J.-D., Y.-Z. Zhuo, F. A. Oliveira et P. Hänggi (déc. 2006). « Intermediate dynamics between Newton and Langevin ». In : *Physical Review E* 74.6, p. 061111 (cf. p. 143).
- Barbier-Chebbah, A., O. Benichou et R. Voituriez (sept. 2021). « Self-interacting random walks : aging, exploration and first-passage times ». In : *arXiv :2109.13127 [cond-mat, q-bio]* (cf. p. 91).
- Barbier-Chebbah, A., O. Benichou et R. Voituriez (déc. 2020). « Anomalous persistence exponents for normal yet aging diffusion ». In : *Physical Review E* 102.6, p. 062115 (cf. p. 33, 241).
- Barkai, E. et Y.-C. Cheng (mars 2003). « Aging continuous time random walks ». In : *The Journal of Chemical Physics* 118.14, p. 6167-6178 (cf. p. 5, 37).

- Barna, I. F. et R. Kersner (août 2010). « Heat conduction: a telegraph-type model with self-similar behavior of solutions ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* 43.37, p. 375210 (cf. p. 183).
- Basdevant, A.-L., B. Schapira et A. Singh (juin 2014). « Localization of a vertex reinforced random walk on  $Z$  with sub-linear weight ». In : *Probability Theory and Related Fields* 159.1, p. 75-115 (cf. p. 61).
- Beffara, V., S. Friedli et Y. Velenik (jan. 2010). « Scaling Limit of the Prudent Walk ». In : *Electronic Communications in Probability* 15, p. 44-58 (cf. p. 12).
- Belius, D. (2013). « Gumbel fluctuations for cover times in the discrete torus ». In : *Probability Theory and Related Fields* 157.3-4, p. 635-689 (cf. p. 186-188).
- Berbert, J. M. et W. F. Fagan (déc. 2012). « How the interplay between individual spatial memory and landscape persistence can generate population distribution patterns ». In : *Ecological Complexity* 12, p. 1-12 (cf. p. 59).
- Berezhkovskii, A. M., Y. A. Makhnovskii et R. A. Suris (1989). « Wiener sausage volume moments ». In : *Journal of Statistical Physics* 57.1-2, p. 333-346 (cf. p. 29, 169, 171).
- Berthier, L. et G. Biroli (juin 2011). « Theoretical perspective on the glass transition and amorphous materials ». In : *Reviews of Modern Physics* 83.2, p. 587-645 (cf. p. 26).
- Bicout, D. J. et T. W. Burkhardt (sept. 2000). « Absorption of a randomly accelerated particle: gambler's ruin in a different game ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and General* 33.39, p. 6835-6841 (cf. p. 5, 25, 102, 175, 248).
- Blumenthal, R. M., R. K. Gettoor et D. B. Ray (1961). « On the distribution of first hits for the symmetric stable processes. ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 99.3, p. 540-554 (cf. p. 35).
- Bonnet, G., O. Krichevsky et A. Libchaber (juill. 1998). « Kinetics of conformational fluctuations in DNA hairpin-loops ». In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 95.15, p. 8602-8606 (cf. p. 139).
- Borsi, L, B Carnemolla, P Castellani, C Rosellini, D Vecchio, G Allemanni, S. E. Chang, J Taylor-Papadimitriou, H Pande et L Zardi (mars 1987). « Monoclonal antibodies in the analysis of fibronectin isoforms generated by alternative splicing of mRNA precursors in normal and transformed human cells. » In : *Journal of Cell Biology* 104.3, p. 595-600 (cf. p. 82).
- Bouchaud, J.-P. et A. Georges (nov. 1990). « Anomalous diffusion in disordered media: Statistical mechanisms, models and physical applications ». In : *Physics Reports* 195.4, p. 127-293 (cf. p. 33).
- Boyer, D. et J. C. R. Romo-Cruz (oct. 2014). « Solvable random walk model with memory and its relations with Markovian models of anomalous diffusion ». In : *Physical Review E* 90.4 (cf. p. 2, 17, 54, 123).
- Boyer, D., M. C. Crofoot et P. D. Walsh (mai 2012). « Non-random walks in monkeys and humans ». In : *Journal of The Royal Society Interface* 9.70, p. 842-847 (cf. p. 59).
- Boyer, D. et P. D. Walsh (déc. 2010). « Modelling the mobility of living organisms in heterogeneous landscapes: does memory improve foraging success? » In : *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 368.1933, p. 5645-5659 (cf. p. 2, 23, 59).
- Bray, A. J., S. N. Majumdar et G. Schehr (juin 2013). « Persistence and first-passage properties in nonequilibrium systems ». In : *Advances in Physics* 62.3, p. 225-361 (cf. p. 5, 9, 23, 32, 33, 35-37, 92, 99, 100, 121, 170, 174, 248).
- Brummelhuis, M. J. A. M. (1991). « Applications of Random Walks : Tracer Diffusion, Lattice Covering, and Damage Spreading ». PhD Thesis (cf. p. 170).
- Brummelhuis, M. J. A. M. et H. J. Hilhorst (1991). « Covering of a finite lattice by a random walk ». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 176.3, p. 387-408 (cf. p. 170, 186).
- (1992). « How a random walk covers a finite lattice ». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 185.1-4, p. 35-44 (cf. p. 185, 186).
- Bullerjahn, J. T., S. Sturm, L. Wolff et K. Kroy (nov. 2011). « Monomer dynamics of a wormlike chain ». In : *EPL (Europhysics Letters)* 96.4, p. 48005 (cf. p. 141, 142).

- Bullerjahn, J. T., S. Sturm et K. Kroy (fév. 2020). « Non-Markov bond model for dynamic force spectroscopy ». In : *The Journal of Chemical Physics* 152.6, p. 064104 (cf. p. 141, 150).
- Burkhardt, T. W. (juill. 2007). « The random acceleration process in bounded geometries ». In : *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* 2007.07, P07004-P07004 (cf. p. 5).
- Burnecki, K., E. Kepten, J. Janczura, I. Bronshtein, Y. Garini et A. Weron (nov. 2012). « Universal Algorithm for Identification of Fractional Brownian Motion. A Case of Telomere Subdiffusion ». In : *Biophysical Journal* 103.9, p. 1839-1847 (cf. p. 145).
- Burov, S. et E. Barkai (2007). « Occupation Time Statistics in the Quenched Trap Model ». In : *Physical Review Letters* 98.25, p. 250601-4 (cf. p. 170).
- (sept. 2008). « Fractional Langevin equation: Overdamped, underdamped, and critical behaviors ». In : *Physical Review E* 78.3, p. 031112 (cf. p. 139, 143).
- Bénichou, O., M. Copepy, M. Moreau, P. H. Suet et R. Voituriez (mars 2005). « Averaged residence times of stochastic motions in bounded domains ». In : *EPL (Europhysics Letters)* 70.1, p. 42 (cf. p. 70, 170, 220).
- Bénichou, O., T. Guérin et R. Voituriez (2015). « Mean first-passage times in confined media: from Markovian to non-Markovian processes ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* 48.16, p. 163001 (cf. p. 5, 23).
- Bénichou, O., C. Loverdo, M. Moreau et R. Voituriez (2011). « Intermittent search strategies ». In : *Reviews of Modern Physics* 83.1, p. 81-129 (cf. p. 170, 184).
- Bénichou, O. et R. Voituriez (2008). « Narrow-Escape Time Problem: Time Needed for a Particle to Exit a Confining Domain through a Small Window ». In : *Physical Review Letters* 100.16, p. 168105-4 (cf. p. 107).
- (2014). « From first-passage times of random walks in confinement to geometry-controlled kinetics ». In : *From first-passage times of random walks in confinement to geometry-controlled kinetics* 539.4, p. 225-284 (cf. p. 4, 23, 28, 91, 170, 240).
- Börger, L., B. D. Dalziel et J. M. Fryxell (2008). « Are there general mechanisms of animal home range behaviour? A review and prospects for future research ». In : *Ecology Letters* 11.6, p. 637-650 (cf. p. 59).
- Campos, D., J. Cristín et V. Méndez (juin 2021). « Minimization of spatial cover times for impaired self-avoiding random walks: the mirage effect ». In : *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* 2021.6, p. 063404 (cf. p. 23, 103, 185, 186).
- Cao, J., J. Zhu, Z. Wang et A. E. Likhtman (nov. 2015). « Large deviations of Rouse polymer chain: First passage problem ». In : *The Journal of Chemical Physics* 143.20, p. 204105 (cf. p. 25, 140, 142, 149).
- Carmona, P., F. Petit et M. Yor (1998). « Beta variables as time spent in  $[0, \infty]$  by certain perturbed brownian motions ». In : *Journal of the London Mathematical Society* 58.1, p. 239-256 (cf. p. 16).
- Chaumont, L. et R. A. Doney (mars 1999). « Pathwise uniqueness for perturbed versions of Brownian motion and reflected Brownian motion ». In : *Probability Theory and Related Fields* 113.4, p. 519-534 (cf. p. 16).
- (jan. 2000a). « Some calculations for doubly perturbed Brownian motion ». In : *Stochastic Processes and their Applications* 85.1, p. 61-74 (cf. p. 16, 38).
- Chaumont, L., R. A. Doney et Y. Hu (mars 2000b). « Upper and lower limits of doubly perturbed Brownian motion ». In : *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics* 36.2, p. 219-249 (cf. p. 16).
- Chechkin, A. V., R. Metzler, V. Y. Gonchar, J. Klafter et L. V. Tanatarov (oct. 2003). « First passage and arrival time densities for Lévy flights and the failure of the method of images ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and General* 36.41, p. L537-L544 (cf. p. 4).
- Chen, J. et G. Kozma (juin 2014). « Vertex-reinforced random walk on  $\mathbb{Z}$  with sub-square-root weights is recurrent ». In : *Comptes Rendus Mathématique* 352.6, p. 521-524 (cf. p. 61).

- Cheviakov, A. F., M. J. Ward et R. Straube (jan. 2010). « An Asymptotic Analysis of the Mean First Passage Time for Narrow Escape Problems: Part II: The Sphere ». In : *Multiscale Modeling & Simulation* 8.3, p. 836-870 (cf. p. 170).
- Chupeau, M., O. Bénichou et R. Voituriez (2015). « Cover times of random searches ». In : *Nat Phys* 11.10, p. 844-847 (cf. p. 78, 170, 186-188, 191, 219).
- Cole, K. S. et R. H. Cole (avr. 1941). « Dispersion and Absorption in Dielectrics I. Alternating Current Characteristics ». In : *The Journal of Chemical Physics* 9.4, p. 341-351 (cf. p. 143).
- Coletti, C. F., R. Gava et G. M. Schütz (mai 2017). « Central limit theorem and related results for the elephant random walk ». In : *Journal of Mathematical Physics* 58.5, p. 053303 (cf. p. 48, 50).
- Condamin, S., O. Bénichou, V. Tejedor, R. Voituriez et J. Klafter (2007a). « First-passage times in complex scale-invariant media. » In : *Nature* 450.7166, p. 77-80 (cf. p. 28, 78, 91, 170).
- Condamin, S., O. Bénichou et J. Klafter (juin 2007b). « First-Passage Time Distributions for Subdiffusion in Confined Geometry ». In : *Physical Review Letters* 98.25, p. 250602 (cf. p. 33).
- Condamin, S., O. Bénichou et M. Moreau (déc. 2005). « First-Passage Times for Random Walks in Bounded Domains ». In : *Physical Review Letters* 95.26, p. 260601 (cf. p. 24).
- (fév. 2007c). « Random walks and Brownian motion: A method of computation for first-passage times and related quantities in confined geometries ». In : *Physical Review E* 75.2, p. 021111 (cf. p. 4, 24).
- Condamin, S., V. Tejedor, R. Voituriez, O. Bénichou et J. Klafter (avr. 2008). « Probing microscopic origins of confined subdiffusion by first-passage observables ». In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 105.15, p. 5675-5680 (cf. p. 170).
- Coombs, D., R. Straube et M. Ward (jan. 2009). « Diffusion on a Sphere with Localized Traps: Mean First Passage Time, Eigenvalue Asymptotics, and Fekete Points ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 70.1, p. 302-332 (cf. p. 4).
- Cotar, C. et D. Thacker (juill. 2017). « Edge- and vertex-reinforced random walks with super-linear reinforcement on infinite graphs ». In : *The Annals of Probability* 45.4, p. 2655-2706 (cf. p. 61).
- Cremer, J., T. Honda, Y. Tang, J. Wong-Ng, M. Vergassola et T. Hwa (nov. 2019). « Chemotaxis as a navigation strategy to boost range expansion ». In : *Nature* 575.7784, p. 658-663 (cf. p. 59).
- Cutland, N. J., P. E. Kopp et W. Willinger (1995). « Stock Price Returns and the Joseph Effect : A Fractional Version of the Black-Scholes Model ». In : *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications*. Sous la dir. d'E. Bolthausen, M. Dozzi et F. Russo. Progress in Probability. Basel : Birkhäuser, p. 327-351 (cf. p. 145).
- Daoud, M., J. P. Cotton, B. Farnoux, G. Jannink, G. Sarma, H. Benoit, C. Duplessix, C. Picot et P. G. de Gennes (nov. 1975). « Solutions of Flexible Polymers. Neutron Experiments and Interpretation ». In : *Macromolecules* 8.6, p. 804-818 (cf. p. 10).
- Davies, R. B. et D. S. Harte (mars 1987). « Tests for Hurst effect ». In : *Biometrika* 74.1, p. 95-101 (cf. p. 243, 246).
- Davis, B. (juin 1990). « Reinforced random walk ». In : *Probability Theory and Related Fields* 84.2, p. 203-229 (cf. p. 11, 17, 61).
- (oct. 1996). « Weak limits of perturbed random walks and the equation  $Y_t = B_t + \alpha \sup\{Y_s : s \leq t\} + \beta \inf\{Y_s : s \leq t\}$  ». In : *Annals of Probability* 24.4, p. 2007-2023 (cf. p. 16).
- Davis, B. et S. Volkov (juin 2002). « Continuous time vertex-reinforced jump processes ». In : *Probability Theory and Related Fields* 123.2, p. 281-300 (cf. p. 13).
- Dayan, I et S. Havlin (1992). « Number of distinct sites visited by a random walker in the presence of a trap ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and General* 25.9, p. L549-L553 (cf. p. 171).
- D. Ben-Avraham et S. Havlin (2000). *Diffusion and reactions in fractals and disordered systems*. Cambridge University Press (cf. p. 171).
- De Bruyne, B., J. Randon-Furling et S. Redner (juill. 2020). « Optimization in First-Passage Resetting ». In : *Physical Review Letters* 125.5, p. 050602 (cf. p. 172).
- Dembo, A., Y. Peres, J. Rosen et O. Zeitouni (2004). « Cover Times for Brownian Motion and Random Walks in Two Dimensions ». In : *Annals of Mathematics* 160.2, p. 433-464 (cf. p. 185, 186).

- Derkachov, S. E., J. Honkonen, E. Karjalainen et A. N. Vasil'ev (mai 1989). « Renormalisability and renormalisation of the 'true' self-avoiding random walks ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and General* 22.9, p. L385-L391 (cf. p. 15).
- Derrida, B., V. Hakim et V. Pasquier (1995). « Exact First-Passage Exponents of 1D Domain Growth: Relation to a Reaction-Diffusion Model ». In : *Physical Review Letters* 75.4, p. 751-754 (cf. p. 33).
- Derrida, B., V. Hakim et R. Zeitak (1996). « Persistent Spins in the Linear Diffusion Approximation of Phase Ordering and Zeros of Stationary Gaussian Processes ». In : *Physical Review Letters* 77.14, p. 2871-2874 (cf. p. 33).
- Dhar, A., A. Kundu, S. N. Majumdar, S. Sabhapandit et G. Schehr (mars 2019). « Run-and-tumble particle in one-dimensional confining potentials: Steady-state, relaxation, and first-passage properties ». In : *Physical Review E* 99.3, p. 032132 (cf. p. 36).
- Dieker, T. (jan. 2013). « Simulation of Fractional Brownian Motion ». In : (cf. p. 243).
- Dietrich, C. R. et G. N. Newsam (juill. 1997). « Fast and Exact Simulation of Stationary Gaussian Processes through Circulant Embedding of the Covariance Matrix ». In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 18.4, p. 1088-1107 (cf. p. 243, 246).
- Dinh, A.-T., T. Theofanous et S. Mitragotri (sept. 2005). « A model for intracellular trafficking of adenoviral vectors ». In : *Biophys J* 89.3, p. 1574-88 (cf. p. 25).
- Doi, M., S. F. Edwards et S. F. Edwards (1988). *The Theory of Polymer Dynamics*. Clarendon Press (cf. p. 37).
- Doney, R. A. (1998). « Some calculations for perturbed brownian motion ». In : *Séminaire de probabilités de Strasbourg* 32, p. 231-236 (cf. p. 38).
- Donà, E., J. D. Barry, G. Valentin, C. Quirin, A. Khmelinskii, A. Kunze, S. Durdu, L. R. Newton, A. Fernandez-Minan, W. Huber, M. Knop et D. Gilmour (nov. 2013). « Directional tissue migration through a self-generated chemokine gradient ». In : *Nature* 503.7475, p. 285-289 (cf. p. 59).
- Doostmohammadi, A., S. P. Thampi et J. M. Yeomans (juill. 2016). « Defect-Mediated Morphologies in Growing Cell Colonies ». In : *Phys Rev Lett* 117.4, p. 048102 (cf. p. 25).
- Dumaz, L. et B. Tóth (avr. 2013). « Marginal densities of the "true" self-repelling motion ». In : *Stochastic Processes and their Applications* 123.4, p. 1454-1471 (cf. p. 15).
- Durrett, R. T. et L. C. G. Rogers (sept. 1992). « Asymptotic behavior of Brownian polymers ». In : *Probability Theory and Related Fields* 92.3, p. 337-349 (cf. p. 13).
- Dussutour, A., V. Fourcassié, D. Helbing et J.-L. Deneubourg (2004). « Optimal traffic organization in ants under crowded conditions ». In : *Nature* 428.6978, p. 70-73 (cf. p. 2).
- d'Alessandro, J., A. Barbier-Chebbah, V. Cellerin, O. Benichou, R. M. Mège, R. Voituriez et B. Ladoux (juill. 2021). « Cell migration guided by long-lived spatial memory ». In : *Nature Communications* 12.1, p. 4118 (cf. p. 2, 81).
- Eab, C. H. et S. C. Lim (juill. 2010). « Fractional generalized Langevin equation approach to single-file diffusion ». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 389.13, p. 2510-2521 (cf. p. 139, 143).
- Ernst, D., M. Hellmann, J. Köhler et M. Weiss (avr. 2012). « Fractional Brownian motion in crowded fluids ». In : *Soft Matter* 8.18, p. 4886-4889 (cf. p. 4, 5).
- Evans, M. R. et S. N. Majumdar (2011). « Diffusion with Stochastic Resetting ». In : *Physical Review Letters* 106.16, p. 160601 (cf. p. 172).
- Evans, M. R., S. N. Majumdar et G. Schehr (2020). « Stochastic resetting and applications ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* 53.19, p. 193001 (cf. p. 172).
- Fa, K. S. (sept. 2008). « Study of a generalized Langevin equation with nonlocal dissipative force, harmonic potential and a constant load force ». In : *The European Physical Journal B* 65.2, p. 265-270 (cf. p. 139, 143).
- Fa, K. S. et E. K. Lenzi (jan. 2005). « Anomalous diffusion, solutions, and first passage time: Influence of diffusion coefficient ». In : *Physical Review E* 71.1, p. 012101 (cf. p. 4, 25).
- Falcón-Cortés, A., D. Boyer, L. Giuggioli et S. N. Majumdar (oct. 2017). « Localization Transition Induced by Learning in Random Searches ». In : *Physical Review Letters* 119.14, p. 140603 (cf. p. 23).

- Family, F. et M. Daoud (fév. 1984). « Experimental realization of true self-avoiding walks ». In : *Physical Review B* 29.3, p. 1506-1507 (cf. p. 15).
- Flory, P. J. (mars 1949). « The Configuration of Real Polymer Chains ». In : *The Journal of Chemical Physics* 17.3, p. 303-310 (cf. p. 10).
- (1953). *Principles of Polymer Chemistry*. Cornell University Press (cf. p. 2, 10).
- Flyvbjerg, H. (2021). « Past attractions set future course ». In : *Nature Physics* (cf. p. 2).
- Foster, J. G., P. Grassberger et M. Paczuski (fév. 2009). « Reinforced walks in two and three dimensions ». In : *New Journal of Physics* 11.2, p. 023009 (cf. p. 17, 70, 71).
- Freund, H. et P. Grassberger (déc. 1992). « The red queen's walk ». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 190.3, p. 218-237 (cf. p. 13).
- (jan. 1993). « How uniformly a random walker covers a finite lattice ». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 192.3, p. 465-470 (cf. p. 94, 97, 227, 233).
- Gennes, P. G. d. (1979). *Scaling Concepts in Polymer Physics*. Ithaca (cf. p. 10).
- Giuggioli, L., J. R. Potts et S. Harris (2011). « Animal Interactions and the Emergence of Territoriality ». In : *PLOS Computational Biology* 7.3, e1002008- (cf. p. 2).
- Godec, A. et R. Metzler (jan. 2013). « Finite-Time Effects and Ultraweak Ergodicity Breaking in Superdiffusive Dynamics ». In : *Physical Review Letters* 110.2, p. 020603 (cf. p. 37).
- Goss, S., S. Aron, J. L. Deneubourg et J. M. Pasteels (déc. 1989). « Self-organized shortcuts in the Argentine ant ». In : *Naturwissenschaften* 76.12, p. 579-581 (cf. p. 2, 3).
- Goychuk, I. et P. Hänggi (nov. 2007). « Anomalous Escape Governed by Thermal  $1/f$  Noise ». In : *Physical Review Letters* 99.20, p. 200601 (cf. p. 4, 140, 147-149, 155, 157).
- Goychuk, I. (oct. 2009). « Viscoelastic subdiffusion: From anomalous to normal ». In : *Physical Review E* 80.4, p. 046125 (cf. p. 143).
- Grassberger, P. (juill. 2017a). « How fast does a random walk cover a torus? » In : *Physical Review E* 96.1, p. 012115 (cf. p. 185, 186).
- (août 2017b). « Self-Trapping Self-Repelling Random Walks ». In : *Physical Review Letters* 119 (cf. p. 2, 5, 12, 15, 26, 95, 103, 121, 131, 137, 186).
- Grebenkov, D. S. (déc. 2018). « Imperfect Diffusion-Controlled Reactions ». In : *Chemical Kinetics*. World Scientific, p. 191-219 (cf. p. 55).
- Gripenberg, G. et I. Norros (1996). « On the Prediction of Fractional Brownian Motion ». In : *Journal of Applied Probability* 33.2, p. 400-410 (cf. p. 139).
- Gumbel, E. J. (mars 1958). *Statistics of Extremes*. Columbia University Press (cf. p. 187).
- Guzzi Bagnato, G. de, J. R. F. Ronqui et G. Travieso (sept. 2018). « Community detection in networks using self-avoiding random walks ». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 505, p. 1046-1055 (cf. p. 23).
- Guérin, T., O. Bénichou et R. Voituriez (2012). « Non-Markovian polymer reaction kinetics ». In : *Nat Chem* 4.7, p. 568-573 (cf. p. 6, 139, 140).
- (mars 2013). « Reactive conformations and non-Markovian reaction kinetics of a Rouse polymer searching for a target in confinement ». In : *Physical Review E* 87.3, p. 032601 (cf. p. 6, 142).
- Guérin, T., M. Dolgushev, O. Bénichou, R. Voituriez et A. Blumen (2014). « Cyclization kinetics of Gaussian semiflexible polymer chains ». In : *Physical Review E* 90.5, p. 052601- (cf. p. 6, 24, 140).
- Guérin, T., N. Levernier, O. Bénichou et R. Voituriez (juin 2016). « Mean first-passage times of non-Markovian random walkers in confinement ». In : *Nature* 534.7607, p. 356-359 (cf. p. 6, 7, 23, 24, 140, 149-151, 156).
- Hanggi, P. et P. Talkner (1985). « First-passage time problems for non-Markovian processes ». In : *Physical Review A* 32.3, p. 1934-1937 (cf. p. 5).
- Haubold, H. J., A. M. Mathai et R. K. Saxena (mai 2011). « Mittag-Leffler Functions and Their Applications ». In : *Journal of Applied Mathematics* 2011, e298628 (cf. p. 147).
- Haynes, C. P. et A. P. Roberts (oct. 2008). « Global first-passage times of fractal lattices ». In : *Phys. Rev. E* 78.4, p. 041111 (cf. p. 4).
- Herrero, C. P. (jan. 2019). « Self-avoiding walks and connective constants in clustered scale-free networks ». In : *Physical Review E* 99.1, p. 012314 (cf. p. 23, 185).

- Heuzé, M. L., P. Vargas, M. Chabaud, M. Le Berre, Y.-J. Liu, O. Collin, P. Solanes, R. Voituriez, M. Piel et A.-M. Lennon-Duménil (nov. 2013). « Migration of dendritic cells: physical principles, molecular mechanisms, and functional implications ». In : *Immunol Rev* 256.1, p. 240-254 (cf. p. 184).
- Holmes, D. F., C.-Y. C. Yeung, R. Garva, E. Zindy, S. H. Taylor, Y. Lu, S. Watson, N. S. Kalson et K. E. Kadler (oct. 2018). « Synchronized mechanical oscillations at the cell–matrix interface in the formation of tensile tissue ». In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 115.40, E9288-E9297 (cf. p. 82).
- Horváth, I., B. Tóth et B. Vető (août 2012). « Diffusive limits for “true” (or myopic) self-avoiding random walks and self-repellent Brownian polymers in  $d \geq 3$  ». In : *Probability Theory and Related Fields* 153.3, p. 691-726 (cf. p. 15, 16).
- Hu, X., L. Hong, M. Dean Smith, T. Neusius, X. Cheng et J. C. Smith (fév. 2016). « The dynamics of single protein molecules is non-equilibrium and self-similar over thirteen decades in time ». In : *Nature Physics* 12.2, p. 171-174 (cf. p. 26).
- Hughes, B. D. (1995). *Random Walks and Random Environments*. Oxford Press (cf. p. 4, 92, 169-172, 175, 177, 192).
- Jeon, J.-H. et R. Metzler (fév. 2010). « Fractional Brownian motion and motion governed by the fractional Langevin equation in confined geometries ». In : *Physical Review E* 81.2, p. 021103 (cf. p. 139).
- Kearney, M. J. et S. N. Majumdar (avr. 2005). « On the area under a continuous time Brownian motion till its first-passage time ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and General* 38.19, p. 4097-4104 (cf. p. 171).
- Kim, Y., S. Park et S.-H. Yook (oct. 2016). « Network exploration using true self-avoiding walks ». In : *Physical Review E* 94.4, p. 042309 (cf. p. 23).
- Klinger, J., A. Barbier-Chebbah, R. Voituriez et O. Bénichou (sept. 2021a). « Joint statistics of space and time exploration of  $1d$  random walks ». In : *arXiv :2109.13752 [cond-mat]* (cf. p. 170, 172, 175, 180).
- Klinger, J., R. Voituriez et O. Bénichou (2021b). « Distribution of the span of one-dimensional confined random processes before hitting a target ». In : *Physical Review E* 103.3, p. 032107- (cf. p. 171).
- Korabel, N. et E. Barkai (mai 2011). « Anomalous infiltration ». In : *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* 2011.05, P05022 (cf. p. 35, 37).
- Kou, S. C. et X. S. Xie (oct. 2004). « Generalized Langevin Equation with Fractional Gaussian Noise: Subdiffusion within a Single Protein Molecule ». In : *Physical Review Letters* 93.18, p. 180603 (cf. p. 4, 25, 139-141, 149).
- Kozak, J. J. et V. Balakrishnan (jan. 2002). « Analytic expression for the mean time to absorption for a random walker on the Sierpinski gasket ». In : *Phys. Rev. E* 65.2, p. 021105 (cf. p. 4).
- Kranz, W. T., A. Gelimson, K. Zhao, G. C. L. Wong et R. Golestanian (2016). « Effective Dynamics of Microorganisms That Interact with Their Own Trail ». In : *Physical Review Letters* 117.3, p. 038101- (cf. p. 2).
- Kranz, W. T. et R. Golestanian (juin 2019). « Trail-mediated self-interaction ». In : *The Journal of Chemical Physics* 150.21, p. 214111 (cf. p. 2).
- Krapivsky, P. L., S. N. Majumdar et A. Rosso (juill. 2010). « Maximum of  $N$  independent Brownian walkers till the first exit from the half-space ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* 43.31, p. 315001 (cf. p. 171).
- Krug, J., H. Kallabis, S. N. Majumdar, S. J. Cornell, A. J. Bray et C. Sire (sept. 1997). « Persistence exponents for fluctuating interfaces ». In : *Physical Review E* 56.3, p. 2702-2712 (cf. p. 26, 33, 37, 92, 100, 102).
- Krüsemann, H., A. Godec et R. Metzler (avr. 2014). « First-passage statistics for aging diffusion in systems with annealed and quenched disorder ». In : *Physical Review E* 89.4, p. 040101 (cf. p. 33).

- Lacroix-A-Chez-Toine, B. et F. Mori (nov. 2020). « Universal survival probability for a correlated random walk and applications to records ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* 53.49, p. 495002 (cf. p. 36).
- Larralde, H., P. Trunfio, S. Havlin, H. E. Stanley et G. H. Weiss (jan. 1992). « Territory covered by  $N$  diffusing particles ». In : *Nature* 355.6359, p. 423-426 (cf. p. 169, 171).
- Lee, S. B. (mai 1992). « Numerical test of Flory formulas for true self-avoiding walks on fractal lattices ». In : *Physical Review A* 45.10, p. 7098-7103 (cf. p. 14, 22).
- Lee, S. B. et K. Y. Woo (déc. 1995). « True self-avoiding walks on fractal lattices above the upper marginal dimension ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and General* 28.24, p. 7065-7077 (cf. p. 14, 22).
- Lehman, R. S. et G. H. Weiss (sept. 1958). « A Study of the Restricted Random Walk ». In : *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 6.3, p. 257-278 (cf. p. 11).
- Levernier, N., O. Bénichou, T. Guérin et R. Voituriez (août 2018). « Universal first-passage statistics of aging processes ». In : *Physical Review E* 98.2, p. 022125 (cf. p. 6, 29, 32, 91, 100-102, 108-110, 120, 121, 124, 126, 173, 219).
- Levernier, N., O. Bénichou, R. Voituriez et T. Guérin (mars 2020). « Kinetics of rare events for non-Markovian stationary processes and application to polymer dynamics ». In : *Physical Review Research* 2.1, p. 012057 (cf. p. 24, 140, 142, 149-151, 158, 159).
- Levernier, N., M. Dolgushev, O. Bénichou, R. Voituriez et T. Guérin (juill. 2019). « Survival probability of stochastic processes beyond persistence exponents ». In : *Nature Communications* 10.1, p. 2990 (cf. p. 23, 36, 37).
- Levernier, N. (juill. 2017). « Temps de premier passage de processus non-markoviens ». Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI (cf. p. i, 115, 223, 240).
- Limic, V. (juill. 2003). « Attracting edge property for a class of reinforced random walks ». In : *The Annals of Probability* 31.3 (cf. p. 61).
- Limic, V. et P. Tarrès (sept. 2007). « Attracting edge and strongly edge reinforced walks ». In : *The Annals of Probability* 35.5, p. 1783-1806 (cf. p. 61).
- Lutz, E. (oct. 2001). « Fractional Langevin equation ». In : *Physical Review E* 64.5, p. 051106 (cf. p. 139).
- Lévy, P. (1940). « Sur certains processus stochastiques homogènes ». In : *Compositio Mathematica* 7, p. 283-339 (cf. p. 180).
- Madras, N. et G. Slade (2013). *The Self-Avoiding Walk*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Basel (cf. p. 10).
- Mainardi, F. (2014). « On some properties of the Mittag-Leffler function  $\mathbf{E}_{-\alpha}(-t^{\alpha})$ , completely monotone for  $\mathbf{t} > 0$  with  $\mathbf{0} < \alpha < 1$  ». In : *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B* 19.7, p. 2267 (cf. p. 147, 148).
- Majumdar, n., n. Sire, n. Bray et n. Cornell (sept. 1996). « Nontrivial Exponent for Simple Diffusion ». In : *Physical Review Letters* 77.14, p. 2867-2870 (cf. p. 33).
- Majumdar, S. N. (1999). « Persistence in nonequilibrium systems ». In : *Current Science* 77.3, p. 370-375 (cf. p. 33).
- (oct. 2010). « Universal first-passage properties of discrete-time random walks and Lévy flights on a line: Statistics of the global maximum and records ». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*. Proceedings of the 12th International Summer School on Fundamental Problems in Statistical Physics 389.20, p. 4299-4316 (cf. p. 173, 174).
- Majumdar, S. N. et A. J. Bray (sept. 1998). « Persistence with Partial Survival ». In : *Physical Review Letters* 81.13, p. 2626-2629 (cf. p. 33).
- Majumdar, S. N., A. Pal et G. Schehr (jan. 2020). « Extreme value statistics of correlated random variables: A pedagogical review ». In : *Physics Reports*. Extreme value statistics of correlated random variables : A pedagogical review 840, p. 1-32 (cf. p. 191).
- Majumdar, S. N., A. Rosso et A. Zoia (2010). « Hitting Probability for Anomalous Diffusion Processes ». In : *Physical Review Letters* 104.2 (cf. p. 171).

- Makarov, D. E. (jan. 2013). « Interplay of non-Markov and internal friction effects in the barrier crossing kinetics of biopolymers: Insights from an analytically solvable model ». In : *The Journal of Chemical Physics* 138.1, p. 014102 (cf. p. 141, 149).
- Malakar, K., V. Jemseena, A. Kundu, K. V. Kumar, S. Sabhapandit, S. N. Majumdar, S. Redner et A. Dhar (avr. 2018). « Steady state, relaxation and first-passage properties of a run-and-tumble particle in one-dimension ». In : *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* 2018.4, p. 043215 (cf. p. 4, 5, 25, 36).
- Mandelbrot, B. B. et J. W. Van Ness (oct. 1968). « Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications ». In : *SIAM Review* 10.4, p. 422-437 (cf. p. 145, 175).
- Masoliver, J., K. Lindenberg et B. J. West (1986). « First-passage times for non-Markovian processes: Correlated impacts on bound processes ». In : *Physical Review A* 34.3, p. 2351-2363 (cf. p. 5).
- Mason, T. G. et D. A. Weitz (fév. 1995). « Optical Measurements of Frequency-Dependent Linear Viscoelastic Moduli of Complex Fluids ». In : *Physical Review Letters* 74.7, p. 1250-1253 (cf. p. 4, 5, 143).
- Masson, J.-B. (juill. 2013). « Olfactory searches with limited space perception ». In : *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 110.28, p. 11261-11266 (cf. p. 184).
- Mei, R., Y. Xu et J. Kurths (août 2019). « Transport and escape in a deformable channel driven by fractional Gaussian noise ». In : *Physical Review E* 100.2, p. 022114 (cf. p. 140).
- Meroz, Y., I. M. Sokolov et J. Klafter (2011). « Distribution of first-passage times to specific targets on compactly explored fractal structures ». In : *Physical Review E* 83.2, p. 020104- (cf. p. 121).
- Metzler, R., G. Oshanin et S. Redner (2014). *First passage problems : recent advances*. World Scientific, Singapore (cf. p. 9, 33, 170).
- Meyer, H. et H. Rieger (août 2021). « Optimal Non-Markovian Search Strategies with  $n$ -Step Memory ». In : *Physical Review Letters* 127.7, p. 070601 (cf. p. 23, 185).
- Milner, S. T. et T. C. B. McLeish (juill. 1998). « Reptation and Contour-Length Fluctuations in Melts of Linear Polymers ». In : *Physical Review Letters* 81.3, p. 725-728 (cf. p. 139).
- Min, W., G. Luo, B. J. Cherayil, S. C. Kou et X. S. Xie (mai 2005). « Observation of a Power-Law Memory Kernel for Fluctuations within a Single Protein Molecule ». In : *Physical Review Letters* 94.19, p. 198302 (cf. p. 4, 140).
- Min, W. et X. S. Xie (jan. 2006). « Kramers model with a power-law friction kernel: Dispersed kinetics and dynamic disorder of biochemical reactions ». In : *Physical Review E* 73.1, p. 010902 (cf. p. 140, 141, 147, 149).
- Mitterwallner, B. G., L. Lavacchi et R. R. Netz (oct. 2020a). « Negative friction memory induces persistent motion ». In : *The European Physical Journal E* 43.10, p. 67 (cf. p. 4).
- Mitterwallner, B. G., C. Schreiber, J. O. Daldrop, J. O. Rädler et R. R. Netz (2020b). « Non-Markovian data-driven modeling of single-cell motility ». In : *Physical Review E* 101.3, p. 032408- (cf. p. 4).
- Molchan, G. M. (août 1999). « Maximum of a Fractional Brownian Motion: Probabilities of Small Values ». In : *Communications in Mathematical Physics* 205.1, p. 97-111 (cf. p. 26, 33, 99).
- Montroll, E. W. (avr. 1969). « Random Walks on Lattices. III. Calculation of First-Passage Times with Application to Exciton Trapping on Photosynthetic Units ». In : *Journal of Mathematical Physics* 10.4, p. 753-765 (cf. p. 4).
- Mori, F., P. Le Doussal, S. N. Majumdar et G. Schehr (mars 2020). « Universal Survival Probability for a  $d$ -Dimensional Run-and-Tumble Particle ». In : *Physical Review Letters* 124.9, p. 090603 (cf. p. 35).
- Nemirovsky, A. M., H. O. Mártin et M. D. Coutinho-Filho (1990). « Universality in the lattice-covering time problem ». In : *Physical Review A* 41.2, p. 761-767 (cf. p. 185).
- Noh, J. D. et H. Rieger (2004). « Random Walks on Complex Networks ». In : *Physical Review Letters* 92.11, p. 118701-4 (cf. p. 24).
- Obukhov, S. P. et L. Peliti (avr. 1983). « Renormalisation of the 'true' self-avoiding walk ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and General* 16.5, p. L147-L151 (cf. p. 15).

- Ochab-Marcinek, A. et R. Holyst (août 2011). « Scale-dependent diffusion of spheres in solutions of flexible and rigid polymers: mean square displacement and autocorrelation function for FCS and DLS measurements ». In : *Soft Matter* 7.16, p. 7366-7374 (cf. p. 145).
- Ordemann, A., G. Berkolaiko, S. Havlin et A. Bunde (fév. 2000). « Swelling-collapse transition of self-attracting walks ». In : *Physical Review E* 61.2, R1005-R1007 (cf. p. 17, 70).
- Ordemann, A., E. Tomer, G. Berkolaiko, S. Havlin et A. Bunde (sept. 2001). « Structural properties of self-attracting walks ». In : *Physical Review E* 64.4, p. 046117 (cf. p. 17, 69-72, 171).
- Ottinger, H. C. (mai 1985). « The generalised true self-avoiding walk-a model with continuously variable exponent  $\nu$  ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and General* 18.7, p. L363-L367 (cf. p. 2, 16, 19).
- Palleschi, V. et M. R. Torquati (oct. 1989). « Mean first-passage time for random-walk span: Comparison between theory and numerical experiment ». In : *Physical Review A* 40.8, p. 4685-4689 (cf. p. 180).
- Paluch, E., M. Piel, J. Prost, M. Bornens et C. Sykes (juill. 2005). « Cortical actomyosin breakage triggers shape oscillations in cells and cell fragments ». In : *Biophys J* 89.1, p. 724-33 (cf. p. 82).
- Panja, D. (fév. 2010). « Generalized Langevin equation formulation for anomalous polymer dynamics ». In : *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* 2010.02, p. L02001 (cf. p. 139, 141, 142).
- Panja, D. et G. T. Barkema (oct. 2009). « Rouse modes of self-avoiding flexible polymers ». In : *The Journal of Chemical Physics* 131.15, p. 154903 (cf. p. 142).
- Pankov, R., E. Cukierman, B.-Z. Katz, K. Matsumoto, D. C. Lin, S. Lin, C. Hahn et K. M. Yamada (mars 2000). « Integrin Dynamics and Matrix Assembly: Tensin-Dependent Translocation of  $\alpha 5 \beta 1$  Integrins Promotes Early Fibronectin Fibrillogenesis ». In : *Journal of Cell Biology* 148.5, p. 1075-1090 (cf. p. 81, 82).
- Peliti, L. et L. Pietronero (juin 1987). « Random walks with memory ». In : *La Rivista del Nuovo Cimento (1978-1999)* 10.6, p. 1-33 (cf. p. 13).
- Pemantle, R. (2007). « A survey of random processes with reinforcement ». In : *Probability Surveys* 4, p. 1-79 (cf. p. 2, 13, 172).
- Perman, M. et W. Werner (juill. 1997). « Perturbed Brownian motions ». In : *Probability Theory and Related Fields* 108.3, p. 357-383 (cf. p. 16).
- Peyret, G., R. Mueller, J. d'Alessandro, S. Begnaud, P. Marcq, R.-M. Mège, J. M. Yeomans, A. Doostmohammadi et B. Ladoux (août 2019). « Sustained Oscillations of Epithelial Cell Sheets ». In : *Biophysical Journal* 117.3, p. 464-478 (cf. p. 82).
- Pickands, J. (1969). « Asymptotic Properties of the Maximum in a Stationary Gaussian Process ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 145, p. 75-86 (cf. p. 159).
- Pottier, N. (jan. 2003). « Aging properties of an anomalously diffusing particule ». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 317.3, p. 371-382 (cf. p. 139).
- Prasad, M. A., D. P. Bhatia et D. Arora (juin 1996). « Diffusive behaviour of self-attractive walks ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and General* 29.12, p. 3037-3040 (cf. p. 17, 38, 43, 93).
- Randon-Furling, J. et S. N. Majumdar (oct. 2007). « Distribution of the time at which the deviation of a Brownian motion is maximum before its first-passage time ». In : *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* 2007.10, P10008-P10008 (cf. p. 171, 172).
- Redner, S. et K. Kang (nov. 1983). « Asymptotic Solution of Interacting Walks in One Dimension ». In : *Physical Review Letters* 51.19, p. 1729-1732 (cf. p. 13).
- Redner, S. (août 2001). *A Guide to First-Passage Processes by Sidney Redner* (cf. p. 4, 9, 23, 33, 35, 130, 170).
- Ricciardi, L. M. et S. Sato (mars 1988). « First-passage-time density and moments of the ornstein-uhlenbeck process ». In : *Journal of Applied Probability* 25.1, p. 43-57 (cf. p. 147).
- Rieger, H. (fév. 1996). « Aging in disordered systems ». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications. Dynamics of Complex Systems* 224.1, p. 267-278 (cf. p. 26).
- Rosenstock, H. B. (juin 1961). « Random Walks with Spontaneous Emission ». In : *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 9.2, p. 169-188 (cf. p. 172, 177, 192).

- Rouse, P. E. (juill. 1953). « A Theory of the Linear Viscoelastic Properties of Dilute Solutions of Coiling Polymers ». In : *The Journal of Chemical Physics* 21.7, p. 1272-1280 (cf. p. 142).
- Sadjadi, Z., M. R. Shaebani, H. Rieger et L. Santen (juin 2015). « Persistent-random-walk approach to anomalous transport of self-propelled particles ». In : *Physical Review E* 91.6, p. 062715 (cf. p. 36).
- Sakiyama, T. et Y.-P. Gunji (mars 2018). « Optimal random search using limited spatial memory ». In : *Royal Society Open Science* 5.3, p. 171057 (cf. p. 23, 59).
- Sandev, T. et Z. Tomovski (jan. 2014). « Langevin equation for a free particle driven by power law type of noises ». In : *Physics Letters A* 378.1, p. 1-9 (cf. p. 139, 143).
- Sapozhnikov, V. B. (mars 1994). « Self-attracting walk with  $\nu < 1/2$  ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and General* 27.6, p. L151-L153 (cf. p. 13, 16, 38, 172).
- Satija, R. et D. E. Makarov (jan. 2019). « Generalized Langevin Equation as a Model for Barrier Crossing Dynamics in Biomolecular Folding ». In : *The Journal of Physical Chemistry B* 123.4, p. 802-810 (cf. p. 141, 149).
- Schulz, J. H. P., E. Barkai et R. Metzler (jan. 2013). « Aging Effects and Population Splitting in Single-Particle Trajectory Averages ». In : *Physical Review Letters* 110.2, p. 020602 (cf. p. 37).
- (fév. 2014). « Aging Renewal Theory and Application to Random Walks ». In : *Physical Review X* 4.1, p. 011028 (cf. p. 37).
- Schuss, Z., A. Singer et D. Holcman (oct. 2007). « The narrow escape problem for diffusion in cellular microdomains ». In : *Proc Natl Acad Sci U S A* 104.41, p. 16098-103 (cf. p. 4, 170).
- Schwab, S. R. et J. G. Cyster (déc. 2007). « Finding a way out: lymphocyte egress from lymphoid organs ». In : *Nature Immunology* 8.12, p. 1295-1301 (cf. p. 59).
- Schütz, G. M. et S. Trimper (oct. 2004). « Elephants can always remember: Exact long-range memory effects in a non-Markovian random walk ». In : *Physical Review E* 70.4, p. 045101 (cf. p. 17, 46, 48, 123, 124, 127, 211).
- Sellke, T. (jan. 2008). « Reinforced random walk on the d-dimensional integer lattice ». In : *Markov Processes and Related Fields* 2 (cf. p. 61).
- Serlet, L. (jan. 2013). « Hitting times for the perturbed reflecting random walk ». In : *Stochastic Processes and their Applications* 123.1, p. 110-130 (cf. p. 178, 267).
- Shaebani, M. R. et H. Rieger (2019). « Transient Anomalous Diffusion in Run-and-Tumble Dynamics ». In : *Frontiers in Physics* 7, p. 120 (cf. p. 36).
- Silva, A. T., E. K. Lenzi, L. R. Evangelista, M. K. Lenzi, H. V. Ribeiro et A. A. Tateishi (août 2011). « Exact propagator for a Fokker-Planck equation, first passage time distribution, and anomalous diffusion ». In : *Journal of Mathematical Physics* 52.8, p. 083301 (cf. p. 49, 50).
- Sims, D. W., A. M. Reynolds, N. E. Humphries, E. J. Southall, V. J. Wearmouth, B. Metcalfe et R. J. Twitchett (juill. 2014). « Hierarchical random walks in trace fossils and the origin of optimal search behavior ». In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 111.30, p. 11073-11078 (cf. p. 23, 59).
- Singh, R. (déc. 2019). « Comment on “Anomalous Escape Governed by Thermal  $1/f$  Noise” ». In : *Physical Review Letters* 123.23, p. 238901 (cf. p. 140).
- Stehfest, H. (jan. 1970). « Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [D5] ». In : *Communications of the ACM* 13.1, p. 47-49 (cf. p. 267).
- Stevens, A. et H. G. Othmer (août 1997). « Aggregation, Blowup, and Collapse: The ABC's of Taxis in Reinforced Random Walks ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 57.4, p. 1044-1081 (cf. p. 61, 69, 75, 81).
- Tarrès, P. (juill. 2004). « Vertex-reinforced random walk on  $\mathbb{Z}$  eventually gets stuck on five points ». In : *The Annals of Probability* 32.3B, p. 2650-2701 (cf. p. 61).
- Toth, B. (oct. 1995). « The "True" Self-Avoiding Walk with Bond Repulsion on  $\mathbb{Z}$ : Limit Theorems ». In : *The Annals of Probability* 23.4, p. 1523-1556 (cf. p. 13, 15, 19).
- Turiv, T., I. Lazo, A. Brodin, B. I. Lev, V. Reiffenrath, V. G. Nazarenko et O. D. Lavrentovich (déc. 2013). « Effect of Collective Molecular Reorientations on Brownian Motion of Colloids in Nematic Liquid Crystal ». In : *Science* (cf. p. 4, 5, 25, 145).

- Tweedy, L., D. A. Knecht, G. M. Mackay et R. H. Insall (mars 2016). « Self-Generated Chemoattractant Gradients: Attractant Depletion Extends the Range and Robustness of Chemotaxis ». In : *PLOS Biology* 14.3, e1002404 (cf. p. 2, 59).
- Tóth, B. (1994). « 'True' self-avoiding walks with generalized bond repulsion on  $\mathbb{Z}$  ». In : (cf. p. 16, 19).
- Tóth, B. (juill. 1996). « Generalized Ray-Knight theory and limit theorems for self-interacting random walks on  $\mathbb{Z}^1$  ». In : *The Annals of Probability* 24.3, p. 1324-1367 (cf. p. 13, 16, 17, 69, 74).
- (2001). « Self-Interacting Random Motions ». In : *European Congress of Mathematics*. Progress in Mathematics. Basel : Birkhäuser, p. 555-564 (cf. p. 2, 13, 16, 21, 46, 69, 75, 77, 93).
- Tóth, B. et B. Vető (jan. 2011). « Continuous time 'true' self-avoiding random walk on  $\mathbb{Z}$  ». In : *ALEA. Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics [electronic only]* 8 (cf. p. 13).
- Tóth, B. et W. Werner (juill. 1998). « The true self-repelling motion ». In : *Probability Theory and Related Fields* 111.3, p. 375-452 (cf. p. 13).
- Van Kampen, N. (1992). *Stochastic Processes in Physics and Chemistry, Third Edition*. North-Holland personal library (cf. p. 4, 147).
- Vandebroek, H. et C. Vanderzande (avr. 2017). « On the Generalized Langevin Equation for a Rouse Bead in a Nonequilibrium Bath ». In : *Journal of Statistical Physics* 167.1, p. 14-28 (cf. p. 142).
- Veestraeten, D. (2015). « On the inverse transform of Laplace transforms that contain (products of) the parabolic cylinder function ». In : *Integral Transforms and Special Functions* 26.11, p. 859-871 (cf. p. 257).
- Vergassola, M., E. Villermaux et B. I. Shraiman (jan. 2007). « 'Infotaxis' as a strategy for searching without gradients ». In : *Nature* 445.7126, p. 406-409 (cf. p. 184).
- Viswanathan, G. M., E. P. Raposo et M. G. E. da Luz (sept. 2008). « Lévy flights and superdiffusion in the context of biological encounters and random searches ». In : *Physics of Life Reviews* 5.3, p. 133-150 (cf. p. 170, 184).
- Volkov, S. (fév. 2001). « Vertex-reinforced random walk on arbitrary graphs ». In : *The Annals of Probability* 29.1, p. 66-91 (cf. p. 61).
- (déc. 2006). « Phase Transition in Vertex-Reinforced Random Walks on  $\mathbb{Z}$  with Non-linear Reinforcement ». In : *Journal of Theoretical Probability* 19.3, p. 691-700 (cf. p. 61).
- Wallace, M. I., L Ying, S Balasubramanian et D Klenerman (mai 2001). « Non-Arrhenius kinetics for the loop closure of a DNA hairpin ». In : *Proc Natl Acad Sci U S A* 98.10, p. 5584-9 (cf. p. 25, 139).
- Wang, C.-J., Q. Wei et D.-C. Mei (mai 2007). « Mean first-passage time of a tumor cell growth system subjected to a colored multiplicative noise and a white additive noise with colored cross-correlated noises ». In : *Modern Physics Letters B* 21.13, p. 789-797 (cf. p. 143).
- Wang, J. (oct. 2004). « The Complex Kinetics of Protein Folding in Wide Temperature Ranges ». In : *Biophysical Journal* 87.4, p. 2164-2171 (cf. p. 139).
- Weigel, A. V., B. Simon, M. M. Tamkun et D. Krapf (avr. 2011). « Ergodic and nonergodic processes coexist in the plasma membrane as observed by single-molecule tracking ». In : *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 108.16, p. 6438-6443 (cf. p. 26).
- Weiss, G. H. (1994). *Aspects and Applications of the Random Walk*. Amsterdam, Netherlands : North-Holland (cf. p. 169, 171, 172, 180).
- Weiss, G. H. (août 2002). « Some applications of persistent random walks and the telegrapher's equation ». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 311.3, p. 381-410 (cf. p. 36).
- Weiss, G. H. et P. P. Calabrese (déc. 1996). « Occupation times of a CTRW on a lattice with anomalous sites ». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 234.1, p. 443-454 (cf. p. 170).
- Weiss, G. H., E. A. DiMarzio et R. J. Gaylord (fév. 1986). « First passage time densities for random walk spans ». In : *Journal of Statistical Physics* 42.3, p. 567-572 (cf. p. 180).
- Werner, W. (1995). « Some remarks on perturbed reflecting brownian motion ». In : *Séminaire de probabilités de Strasbourg* 29, p. 37-43 (cf. p. 16).

- Wiese, K. J. (jan. 2020). « Span Observables: “When is a Foraging Rabbit No Longer Hungry?” » In : *Journal of Statistical Physics* 178.2, p. 625-643 (cf. p. 171, 180, 181, 183).
- Wiese, K. J., S. N. Majumdar et A. Rosso (juin 2011). « Perturbation Theory for Fractional Brownian Motion in Presence of Absorbing Boundaries ». In : *Physical Review E* 83.6, p. 061141 (cf. p. 33).
- Wilemski, G. et M. Fixman (fév. 1974a). « Diffusion-controlled intrachain reactions of polymers. I Theory ». In : *The Journal of Chemical Physics* 60.3, p. 866-877 (cf. p. 4, 5, 140, 149).
- (fév. 1974b). « Diffusion-controlled intrachain reactions of polymers. II Results for a pair of terminal reactive groups ». In : *The Journal of Chemical Physics* 60.3, p. 878-890 (cf. p. 140, 149).
- Wolf, K., Y. I. Wu, Y. Liu, J. Geiger, E. Tam, C. Overall, M. S. Stack et P. Friedl (août 2007). « Multi-step pericellular proteolysis controls the transition from individual to collective cancer cell invasion ». In : *Nature Cell Biology* 9.8, p. 893-904 (cf. p. 2, 81).
- Wood, A. T. A. et G. Chan (déc. 1994). « Simulation of Stationary Gaussian Processes in  $[0, 1]^d$  ». In : *Journal of Computational and Graphical Statistics* 3.4, p. 409-432 (cf. p. 246).
- Yaglom, A. M. (1955). « Correlation theory of processes with random stationary  $\mathbb{R}^n$  increments ». In : *Matematicheskii Sbornik* 37(79), p. 141-196 (cf. p. 139).
- Yang, H., G. Luo, P. Karnchanaphanurach, T.-M. Louie, I. Rech, S. Cova, L. Xun et X. S. Xie (oct. 2003). « Protein Conformational Dynamics Probed by Single-Molecule Electron Transfer ». In : *Science* 302.5643, p. 262-266 (cf. p. 141, 149).
- Yang, S.-J. (jan. 2005). « Exploring complex networks by walking on them ». In : *Physical Review E* 71.1, p. 016107 (cf. p. 23).
- Yokoi, C. S. O., A. Hernández-Machado et L. Ramírez-Piscina (1990). « Some exact results for the lattice covering time problem ». In : *Physics Letters A* 145.2-3, p. 82-86 (cf. p. 185).
- Zaburdaev, V., S. Denisov et J. Klafter (juin 2015). « Lévy walks ». In : *Reviews of Modern Physics* 87.2, p. 483-530 (cf. p. 35, 37).
- Zhang, J., W.-H. Guo et Y.-L. Wang (nov. 2014). « Microtubules stabilize cell polarity by localizing rear signals ». In : *Proc Natl Acad Sci U S A* 111.46, p. 16383-16388 (cf. p. 82).
- Zhang, S., D. Martinez et J.-B. Masson (2015). « Multi-Robot Searching with Sparse Binary Cues and Limited Space Perception ». In : *Frontiers in Robotics and AI* 2, p. 12 (cf. p. 184).
- Zhang, Z. et Y. Lin (déc. 2010). « An alternative approach to determining average distance in a class of scale-free modular networks ». In : *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* 2010.12, P12017 (cf. p. 28).
- Zoia, A., A. Rosso et S. N. Majumdar (2009). « Asymptotic Behavior of Self-Affine Processes in Semi-Infinite Domains ». In : *Physical Review Letters* 102.12, p. 120602-4 (cf. p. 50, 55, 184).
- Zschokke, I., éd. (1986). *Optical Spectroscopy of Glasses*. Physics and Chemistry of Materials with C : Springer Netherlands (cf. p. 171).
- Zwanzig, R. (nov. 1973). « Nonlinear generalized Langevin equations ». In : *Journal of Statistical Physics* 9.3, p. 215-220 (cf. p. 4, 139).
- (mai 2001). *Nonequilibrium Statistical Mechanics*. Oxford, New York : Oxford University Press (cf. p. 139).





---

**Sujet : Observables de premier passage de marches aléatoires à renforcement**

---

**Résumé :** Cette thèse cherche à quantifier le temps de premier passage sur une cible (FPT) d'une classe de marches aléatoires pour lesquelles le marcheur est doté d'effets de mémoire à longue portée qui émergent de l'interaction de celui-ci avec le territoire qu'il a visité à des temps antérieurs. La première partie est consacrée à l'étude des liens entre vieillissement et exposant de persistance. Nous y présentons des exemples de processus vieillissants, asymptotiquement diffusifs, et qui sont caractérisés par des exposants de persistance anormaux. Dans une seconde partie, nous établissons que les marches à renforcement attractif se répartissent selon différentes catégories pour lesquelles nous avons caractérisé leurs propriétés de vieillissement et de premier passage. Nous soulignons l'importance de tels effets de renforcement dans l'analyse de trajectoires cellulaires réelles. Dans une troisième partie, nous montrons que ces effets de mémoire à longue portée peuvent induire un vieillissement et des exposants de persistance et de transience non triviaux à la fois dans des géométries infinies et confinées. Nous quantifions notamment la dépendance de la distribution du FPT en confinement envers les différents paramètres géométriques. Dans une quatrième partie, nous entamons l'étude des propriétés de premier passage d'un marcheur suivant une équation de Langevin généralisée en présence d'un potentiel harmonique. À partir de la position du marcheur dans le futur du FPT, nous prédisons les valeurs du temps moyen de premier passage. Enfin, nous abordons la question de la distribution jointe du temps de premier passage et du nombre de sites distincts visités à l'instant du FPT.

**Mots clés :** Temps de premier passage, Marches aléatoires, Marches aléatoires à renforcement, Non Markovien, Temps de couverture, Vieillissement, Exposant de persistance, Physique Statistique

---

**Subject : First Passage Time of Self-Reinforced Walks**

---

**Abstract:** This thesis seeks to quantify the time to first passage over a target (FPT) of a class of random walks for which the walker is endowed with long-range memory effects that emerge from the interaction of the walker with the territory he has visited at previous times. The first part is devoted to the study of the links between aging and persistence exponent. We present examples of aging processes that are asymptotically diffusive and that are characterized by anomalous persistence exponents. In a second part, we establish that the attractively reinforced walks fall into different categories for which we have characterized their aging and first-pass properties. We highlight the importance of such reinforcement effects in the analysis of real cell trajectories. In a third part, we show that these long-range memory effects can induce non-trivial aging, persistence and transience exponents in both infinite and confined geometries. In particular, we quantify the dependence of the FPT distribution in confinement on different geometric parameters. In a fourth part, we study the first-pass properties of a walker following a generalized Langevin equation in the presence of a harmonic potential. From the position of the walker in the future of the FPT, we predict the values of the mean time of first passage. Finally, we address the question of the joint distribution of the first-pass time and the number of distinct sites visited at the FPT time.

**Keywords :** First passage Time, Random walks, Self-reinforced random walks, Non Markovian, Covering Time, Aging, Persistent Exponent, Statistical Physics