



HAL
open science

Étude de l'influence gravitationnelle d'une impulsion lumineuse

Paul Azar

► **To cite this version:**

Paul Azar. Étude de l'influence gravitationnelle d'une impulsion lumineuse. Astrophysique [astro-ph]. Université de Bordeaux, 2021. Français. NNT : 2021BORD0263 . tel-03572133

HAL Id: tel-03572133

<https://theses.hal.science/tel-03572133>

Submitted on 14 Feb 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES PHYSIQUES ET DE
L'INGÉNIEUR

par **Paul Lageyre**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : ASTROPHYSIQUE, PLASMAS, NUCLÉAIRE

**Étude de l'influence gravitationnelle d'une impulsion
lumineuse**

Date de soutenance : 10 Novembre 2021

Devant la commission d'examen composée de :

| | | |
|------------------------|---|--------------|
| Stefan WEBER | Directeur de Département, ELI-Beamlines | Rapporteur |
| Nicola TAMANINI | Directeur de Recherche CNRS, L2IT | Rapporteur |
| Caterina RICONDA | Prof. des Universités, LULI/Sorbonne Université ... | Présidente |
| Philippe BOUYER | Directeur de Laboratoire, LP2N | Examineur |
| Xavier RIBEYRE | Directeur de Recherche CEA, CELIA/CEA CESTA | Directeur |
| Emmanuel D'HUMIÈRES | Prof. des Universités, CELIA/Univ. Bordeaux | Co-directeur |
| Lionel CANIONI | Prof. des Universités, CELIA/Univ. Bordeaux | Invité |

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES PHYSIQUES ET DE
L'INGÉNIEUR

par **Paul Lageyre**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : ASTROPHYSIQUE, PLASMAS, NUCLÉAIRE

**Étude de l'influence gravitationnelle d'une impulsion
lumineuse**

Date de soutenance : 9 Novembre 2021

Devant la commission d'examen composée de :

| | | |
|------------------------|---|--------------|
| Stefan WEBER | Directeur de Département, ELI-Beamlines | Rapporteur |
| Nicola TAMANINI | Directeur de Recherche CNRS, L2IT | Rapporteur |
| Caterina RICONDA | Prof. des Universités, LULI/Sorbonne Université ... | Présidente |
| Philippe BOUYER | Directeur de Laboratoire, LP2N | Examinateur |
| Xavier RIBEYRE | Directeur de Recherche CEA, CELIA/CEA CESTA | Directeur |
| Emmanuel D'HUMIÈRES | Prof. des Universités, CELIA/Univ. Bordeaux | Co-directeur |
| Lionel CANIONI | Prof. des Universités, CELIA/Univ. Bordeaux | Invité |

Résumé En 2016, la première détection directe d'ondes gravitationnelles a eu lieu grâce aux efforts combinés des nombreux scientifiques du LIGO. Depuis, les interféromètres géants de LIGO et VIRGO détectent régulièrement ces ondes gravitationnelles générées par des phénomènes astrophysiques cataclysmiques comme la fusion de deux trous noirs ou d'étoiles à neutrons. Afin de mieux comprendre le mécanisme à l'origine de ces ondes, c'est à dire la relativité générale, des expériences en laboratoire ont été imaginées. Ces expériences essaient de recréer une accélération de masse suffisante pour pouvoir créer une déformation gravitationnelle détectable. Cependant, l'accélération de masse n'est pas le seul mécanisme susceptible de générer des déformations gravitationnelles en laboratoire, ou dans l'espace.

En 1962, Gertsenshtein montre qu'il est possible d'avoir la génération d'ondes gravitationnelles par interaction d'une onde électromagnétique avec un champ magnétique statique. En nous penchant sur cette démonstration, nous avons pu observer que toute onde électromagnétique produit une déformation gravitationnelle. Nous nous intéressons dans cette thèse à un tel type de déformation gravitationnelle. Nous la traitons en modélisant une impulsion lumineuse par un cylindre de densité d'énergie homogène, se déplaçant à la vitesse de la lumière c .

Nous mettons en place une méthode de résolution des équations d'Einstein linéarisées basée sur la fonction de Green du d'Alembertien, qui nous mène à une détermination analytique exacte de la déformation gravitationnelle générée par un cylindre de lumière sur son axe de propagation. Les solutions ainsi trouvées sont valides même en régime instationnaire, et nous permettent donc d'en savoir plus sur l'établissement de certains potentiels gravitationnels. Nous déterminons ainsi le mode d'établissement du potentiel gravitationnel d'un objet statique de densité d'énergie constante qui apparaîtrait subitement dans l'espace, mais aussi la forme et l'amplitude des déformations gravitationnelles générées par une impulsion lumineuse. Ces calculs sont confirmés par comparaison avec la solution de la métrique de Schwarzschild qui nous donne les mêmes résultats loin des objets étudiés. Découpant notre étude en celle d'un cylindre de densité d'énergie constante et celle d'un cylindre de densité d'énergie oscillante, nous menons une étude variationnelle sur les différentes grandeurs caractéristiques d'une telle émission lumineuse. Nous portons ainsi notre intérêt sur le rapport entre longueur et largeur de l'impulsion lumineuse, le temps de propagation de cette dernière, mais aussi sa longueur d'onde, son intensité et sa puissance. Par ces considérations, nous estimons et essayons d'optimiser le rendement d'une expérience de génération de déformation gravitationnelle en laboratoire à l'aide d'un laser de puissance.

En ouverture de cette thèse, nous proposons divers calculs qui pourraient développer et étayer les résultats de notre recherche. Nous finissons en montrant l'intérêt de l'étude de ces déformations générées uniquement par une partie électromagnétique. Non seulement en laboratoire, où nous détaillons les diverses pistes poursuivies à ce jour pour détecter les déformations gravitationnelles de très haute fréquence que nous étudions, mais aussi en astrophysique, où des phénomènes électromagnétiques extrêmement intenses peuvent avoir lieu, comme les sursauts gamma.

Mots-clés Relativité générale, calcul analytique, astrophysique de laboratoire, ondes gravitationnelles, laser intense, fonction de Green, expérience de génération-détection de déformation gravitationnelle, étude variationnelle.

Laboratoire d'accueil Centre Lasers Intenses et Applications (C.E.L.I.A.), 43 rue Pierre Noailles, domaine du Haut Carré, 33400 TALENCE.

Title Study on the gravitational influence of a light pulse.

Abstract In 2016, the first direct detection of gravitational waves took place thanks to the combined efforts of the many scientists of LIGO. Since then, the giant interferometers of LIGO and VIRGO regularly detect these gravitational waves generated by cataclysmic astrophysical phenomena such as the merger of two black holes or neutron stars. In order to better understand the mechanism at the origin of these waves, i.e. general relativity, laboratory experiments have been imagined. These experiments aim to create enough mass acceleration to produce a measurable gravitational deformation. However, mass acceleration is not the only mechanism that can generate gravitational deformations in the laboratory, nor in space.

In 1962, Gertsenshtein shows that it is possible to have the generation of gravitational waves by interaction of an electromagnetic wave with a static magnetic field. By investigating this demonstration, we could observe that any electromagnetic wave produces a gravitational deformation. In this thesis we are interested in such a type of gravitational deformation. We address it by modeling a light pulse by a cylinder of homogeneous energy density, moving at the speed of light c .

We implement a method for solving the linearized Einstein equations based on the D'Alembertian Green's function, which leads us to an exact analytical determination of the gravitational deformation generated by a cylinder of light on its propagation axis. The solutions thus found are valid even in the unsteady regime, and thus allow us to know more about the setup of some gravitational potentials. We thus determine the mode of establishment of the gravitational potential of a static object of constant energy density which would suddenly appear in space, but also the shape and the amplitude of the gravitational deformations generated by a light pulse. These calculations are confirmed by comparison with the solution of the Schwarzschild metric which gives us the same results far from the studied objects. Breaking our study into that of a cylinder of constant energy density and that of a cylinder of oscillating energy density, we conduct a variational study on the different quantities characteristic of such a light emission. We are thus interested in the relationship between length and width of the light pulse, its propagation time, but also its wavelength, its intensity and its power. Through these considerations, we estimate and try to optimize the performance of a laboratory gravitational deformation generation experiment using a power laser.

As an opening to this thesis, we propose various calculations that could develop and support the results of our research. We conclude by showing the interest of the study of these deformations generated only by an electromagnetic part. Not just in the laboratory, where we detail the various paths followed to date to detect the very high frequency gravitational deformations we are studying, but also in astrophysics, where extremely intense electromagnetic phenomena can take place, such as gamma-ray bursts.

Keywords General relativity, analytic calculus, astrophysics in the laboratory, gravitational waves, high-intensity laser, Green's function, experiment of generation and detection of gravitational deformations, variational study.

Remerciements

Comme pour tout travail long et en équipe, une bonne séance de remerciements s'impose. Il me semble convenable de la commencer par mon jury de thèse qui a permis à cette thèse de se conclure en beauté.

Merci donc en premier à Caterina Riconda, qui a eu la gentillesse de répondre présente malgré notre demande tardive et son emploi du temps chargé. Cela a été un plaisir de vous avoir comme présidente de mon jury de thèse, tant du fait de votre professionnalisme et de votre gentillesse que pour avoir réussi à trouver où se cachait Stefan Weber. Merci ensuite à mes rapporteurs, Stefan Weber et Nicola Tamanini pour leur lecture attentive de ma thèse et les rapports positifs (voire dithyrambique, dans le cas de Stefan Weber) que vous avez fait de mon manuscrit. Merci encore à Nicola Tamanini d'avoir pris le temps de discuter avec moi des détails théoriques de ma thèse, avant et après la soutenance. Avoir les petits détails gênants de sa thèse pointés fait toujours un peu mal, mais c'est en ayant conscience de ces derniers qu'on peut s'améliorer, et éclaircir son propos. Cette thèse s'est d'ailleurs elle-même beaucoup construite autour d'un détail négligé dans certains articles. Merci enfin à Philippe Bouyer pour sa bienveillance et ses questions à la soutenance, et à Lionel Canioni pour son enthousiasme et sa curiosité vis-à-vis de mon sujet de thèse.

Je me dois aussi de profondément remercier mon directeur de thèse Xavier Ribeyre et mon co-directeur de thèse Emmanuel d'Humières. Xavier, cela a été un plaisir de travailler avec toi pendant ces presque quatre années, si l'on compte mon stage de M2. Nous nous sommes pris la tête sur plein de petits détails, mais je pense que nous avons réussi à sortir quelque chose de physiquement cohérent et intéressant au bout du compte. Merci pour ta présence lors de mes moments de doute et pour tes grandes qualités humaines en général. Le fait de savoir que je pouvais toujours venir t'exposer le problème du moment ou juste venir faire une remarque de physique, et être accueilli avec le sourire, m'a permis d'avancer sereinement dans cette thèse.

Merci aussi à toi Emmanuel, pour tes passages fréquents dans le bureau, ta bonne humeur et ta capacité à synthétiser et diriger nos élucubrations. Tous les petites remarques comme : "tu nous fait un résumé la semaine prochaine?" et "où en est la rédaction de ton article?" m'ont permis de somme toute finir ma thèse dans les temps.

Je remercie aussi les autres permanents du CELIA que j'ai pu côtoyer au fil des années et des rencontres. Merci à Jean-Luc Feugeas et à Philippe Nicolaï pour leurs "Bonjour!" avec un grand sourire à chaque fois qu'on se croisait ainsi qu'à leur inépuisable sympathie. Merci à Vladimir Tikhonchuk pour sa gentillesse, son accueil, et cette petite remarque qu'il m'avait faite quand je cherchais un stage et une thèse au CELIA, même si je ne rappelle plus des mots exacts : "ça me ferait plaisir de vous revoir parmi nous au CELIA". J'espère que le travail et la bonne humeur que j'ai pu apporter ici sont à la hauteur de vos espérances et je vous remercie encore pour votre soutien. Merci à Rodrigue et Fabien pour les parties de mots croisés, avant que le COVID nous sépare. Merci aussi à Fabrice Catoire pour sa bonne humeur au café/thé ainsi qu'à son aide et sa participation aux discussions sur comment résoudre ces fichues équations d'Einstein. Merci à Guillaume Duchateau, mon premier directeur de stage au CELIA, dont la bonne humeur et la force tranquille m'ont inspiré. Merci de t'être agacé de mon côté têtue sur certains points, je pense que cela a aussi épargné à Xavier et Manu quelques

prises de têtes, même si nous n'avons pas pu toutes les éviter. J'essaie d'avoir une vue plus ouverte sur le travail et les problèmes grâce à toi. Je remercie aussi beaucoup les membres du service administratif. Merci beaucoup à Sophie Heurtebise pour avoir toujours géré avec beaucoup de gentillesse mes amendements de contrats et mes questions administratives. Merci énormément à Sonia Senut, dont la bonne humeur contagieuse m'a souvent remonté le moral au moment où il était le plus bas, ainsi qu'à Céline Oum pour sa constante sympathie et ces petites discussions qu'on pouvait avoir le matin quand j'arrivais au labo. Vous êtes les rayons de soleil de ce labo. Merci enfin à Pierre, qui demeurait dans le bureau en face du mien pendant la première partie de ma thèse avant d'aller se trouver un petit coin confortable à l'autre bout du labo, ainsi qu'à Rachel, Benoît, Jean-Luc Dubois, Christophe et Dimitri Batani, toujours très aimables. Merci aussi (et peut-être surtout) à Alexis, qui n'a jamais protesté en me trouvant toujours fourré dans le bureau de ses deux doctorants, ainsi que pour sa bienveillance, avec celle de Joao, lors de ma recherche d'un emploi après cette thèse. Enfin, merci beaucoup aux responsables informatiques, Richard et Gaëtan, qui sont des personnes adorables et admirables. Réussir à supporter et à reconstruire à vos quatre bras le réseau informatique déliquéscent du CELIA est un exploit qui n'a jamais su entacher votre sympathie.

Ouf! On en a fini avec les permanents, mais ce n'est pas fini, car cette thèse et l'ambiance au labo n'aurait pas été la même sans nombre des compagnons que j'ai pu avoir au cours de ces presque 4 années. Commençons par les anciens. Je voudrais remercier Jonathan qui m'a toujours fait me sentir très à l'aise au labo et avec qui j'ai pu passer des super moments. Le combo guitare-kazoo était un pari osé, mais réussi! Merci aussi à Jocelain, toujours prêt à organiser une nouvelle sortie au bar, ou une petite partie de Dragon Ball FighterZ entre midi et deux, et qui savait aussi procurer de solides conseils de travail. Merci à Kévin Ehrhardt pour sa culture scientifique et sa sympathie, et Kévin Gaudfrin pour sa constante bonne humeur. Merci à Alex, c'était sympa de revoir une tête connue au labo et à Stéphane qui a un peu joué le rôle du grand frère après avoir été mon compagnon de stage. En parlant de Stéphane et de son bureau, je passe aussi le coucou à Alessandro Ruocco qui bosse sec en Angleterre et à sa copine Sally, ainsi qu'à David Blackman, a nice bloke I had the privilege to meet, et Catherine, la championne du karaoké au Swing Marine, qui sont à San Diego. Pedro, rompi-coglioni, j'ai appris que tu te mariais sous peu avec Zaira, si ce n'est déjà fait, plein de bonheur à vous deux. Merci à Gabriele, avec qui j'ai pu partager la passion de la cuisine et l'horreur des pâtes mal cuites. Un grand coucou aussi à Étienne Bloch, Antoine Comby, Simon notre québécois favori, Antoine Chrisment, Mario, Guillaume Walter, Donetsi, Paloma, Vincent, Sandra et Nicolas Goy, je vous souhaite plein de réussite pour la suite. Passons maintenant à la grande famille des couloirs A et B : Lena, do your best for the writing and good luck for what comes after. Alexandre, j'espère que tes remarques acerbes résisteront aux assauts de travail de Christophe. Corisande, je te souhaite aussi bon courage pour la fin de ta thèse et encore plein de parties de Briscola. Alessandro "allergico informatico" Tentori, mon professeur particulier d'italien, je te souhaite plein de bonnes choses à toi et à Gloria, mais vous avez l'air de déjà vous débrouiller très bien tous les deux. Buona fortuna e grazie per la conversazione! Merci aussi à mon ancien collègue de bureau Erwan, avec qui on a passé de super moments, entre imitations de Michel Serrault en César et animation de CELIA FM, la radio de la route du funk! Un gros M à Julien Bonvalet pour la fin de ta rédaction et ta soutenance, et encore merci pour tous les petits conseils et les bons moments que l'on a pu avoir ensemble. J'apporte toujours beaucoup d'importance à tes conseils du fait de ta plus grande expérience avec les choses de la vie. Merci à Dimitri Khaghani, j'ai toujours apprécié ton infinie gentillesse et ta sensibilité, tant humaine que politique. Merci à son voisin de bureau Léo, avec qui nous partageons le même directeur de thèse. Franchement, je ne sais pas ce que j'aurais fait sans tes conseils, ta bonne humeur, mais aussi ton modèle de thèse! On fait la révolution ensemble quand tu reviens sur Bordeaux? Collègue révolutionnaire impose, Guilhem, je te remercie pour toutes les bêtises

que tu nous racontais et pour ton amour de l'humour, c'était un plaisir de venir dans ton bureau. Luke, I hope you enjoy your life in Rochester. Thanks for the hot sauce and the funny quips. Christos, best of luck for your thesis and thanks for your smile. Donald, the OG guy from Creta, thanks for the hearing loss and the crazy shenanigans. Gabriel, my man! I hope you're having a fun time in Valladolid, thanks for being such a nice dude and for helping me out in my post doc research. Edoardo *bastardo*, thank you for being an awesome friend and the one guy I was confident I could send weird memes to. Merci à Arnaud, que j'ai eu le plaisir d'avoir dans mon bureau lors de mon premier stage, et non bien plus loin lors de ma thèse, et qui est somme toute, un homme de culture, là où cela compte. Merci aux compagnons du premier jour de thèse, dont j'ai fait du bureau mon quartier général, Thibault, dit Tibus ou Tibal Goudault, et Victorien, dit Viku. Merci pour les discussions et les conseils. On a fait plein de chouettes choses ensemble, peut-être pas assez, mais c'était important de toujours vous savoir là, prêts à parler et à écouter. Adri aussi, toujours présent, merci pour le coups de main et les bêtises, même si je perdais souvent à jouer à l'idiot avec toi. Paulo, on s'en est raconté des choses devant des bars, merci d'avoir toujours été là à donner ton avis. Enfin merci aux petits nouveaux, dont certains ne sont plus si nouveaux que ça : Diego, le démon qui remet les gens à jouer à Pokémon et Dofus, Romain, mon sympathique confrère weeb, et Thomas, conseiller ès course à pied. Merci aux amis de plus longue date qui m'ont suivi pendant ma thèse : Bothas, Bastien, Antoine, Simon, Arthur, Isabeau, Camille B. et Camille C., Bohn-Bohn et Lagouanelle, même si pour certains on s'est perdu un peu de vue, j'espère qu'on se recroisera bientôt! Et merci à Arthur grâce auquel j'ai passé de super vacances et week-ends en planche à voile sur le lac de Lacanau.

Pendant cette thèse, j'ai aussi eu la chance de pouvoir accéder à des repas peu chers et de qualité au restaurant du CNRS, et je voudrais en profiter pour remercier le personnel du restaurant, notamment Quentin, le breton, Roland, le fier basque et Mohammed, le super respo poisson, pour leur bonne humeur et leur sympathie. On ne parle pas assez souvent de vous, mais vous allez me manquer. Je vais en profiter aussi pour remercier le personnel du Yamato Talence, qui était un peu notre seconde cantine, grâce à la formule maintenant consacrée d'Adri : "p'tit jap'?".

Il se peut que l'on arrive au moment où vous et moi fatiguez d'écrire ou de lire des remerciements, et je les conclurai donc en remerciant ma famille et ses amis : Merci à Patricia, Philippe, Jam, Brigitte et Claire de m'avoir encouragé le long de cette thèse. À ma grand-mère, Mamimette, qui fut présente dans les premiers moments difficiles. Merci à mon beau-papa José, qui sait ronchonner quand je fais une chose compliquée de quelque chose de simple. Et finalement, merci énormément à ma maman, qui a toujours été là pour me soutenir. Je n'ai pas toujours été facile à vivre pendant ces études et cette thèse, et je suis très heureux d'avoir pu me reposer sur toi quand les choses n'allaient pas bien. Mais plus encore je suis heureux d'avoir pu célébrer cette thèse et profiter des bons moments avec toi.

"Rien ne va plus vite que la lumière, à l'exception peut-être des mauvaises nouvelles qui obéissent à leurs lois spécifiques. Les Krafkhrizes d'Hépileh Psi ont certes essayé de construire des astronefs propulsés par les mauvaises nouvelles mais leur fonctionnement laissait à désirer, sans compter qu'ils étaient extrêmement mal accueillis chaque fois qu'ils débarquaient à un endroit où on ne les attendait pas vraiment."

Douglas Adams, *Le Guide du Voyageur Galactique, tome 5 : Globalement Inoffensive*

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Introduction | 1 |
| 1 Théorie | 7 |
| 1.1 Rappels de relativité générale | 7 |
| 1.1.1 Notions de géométrie différentielle | 7 |
| 1.1.2 Équations d'Einstein | 12 |
| 1.2 Perturbations gravitationnelles | 15 |
| 1.2.1 Ondes gravitationnelles | 15 |
| 1.2.2 Génération par accélération de masse | 18 |
| 1.2.3 Génération par un champ électromagnétique | 19 |
| 1.2.4 L'effet Gertsenshtein | 21 |
| 2 Densité d'énergie constante stationnaire | 25 |
| 2.1 Résolution 4D par fonction de Green | 25 |
| 2.1.1 Fonction de Green du d'Alembertien | 25 |
| 2.1.2 Validation de la méthode : sphère massive et métrique de Schwarzschild | 28 |
| 2.2 Application à l'apparition à $t=0$ d'un cylindre de densité d'énergie immobile | 30 |
| 2.2.1 Établissement du calcul analytique de la perturbation gravitationnelle engendrée | 30 |
| 2.2.2 Methode de calcul d'intégrales à fonction de Heaviside couplées | 32 |
| 2.2.3 Visualisation de la solution analytique | 38 |
| 2.2.4 Étude de la solution | 41 |
| 3 Modèle d'impulsion lumineuse | 45 |
| 3.1 Calcul de la perturbation gravitationnelle dans le cas du cylindre mobile | 45 |
| 3.2 Résultats et analyse | 49 |
| 3.2.1 Étude à énergie et intensité constante | 49 |
| 3.2.2 Déformation gravitationnelle générée à puissance laser constante | 55 |
| 3.2.3 Influence de la distance de Rayleigh sur la déformation maximale | 60 |
| 3.3 Conclusion sur l'étude d'un cylindre de densité d'énergie constante | 62 |
| 4 Régimes oscillants | 65 |
| 4.1 Influence sur la métrique espace-temps du terme source sinusoïdal | 65 |

| | | |
|-------------------|---|-----------|
| 4.1.1 | Calcul analytique de la perturbation gravitationnelle générée par la partie oscillante | 65 |
| 4.1.2 | Étude de l'influence du rapport d'aspect | 68 |
| 4.1.3 | Rôle de la longueur d'onde dans la déformation gravitationnelle | 74 |
| 4.2 | Modélisation complète de la déformation gravitationnelle générée par une onde électromagnétique | 79 |
| Conclusion | | 85 |
| | Conclusion générale | 85 |
| | Perspectives | 86 |
| | Détection | 90 |

Introduction

Depuis les travaux de Newton et de Galilée, la gravité se comprenait comme une force à distance attractive et instantanée entre deux objets possédant une masse. Cette force diminuant comme la distance au carré entre deux masses permet de décrire de manière précise la chute d'une masse supposée ponctuelle sur Terre ou encore la trajectoire des objets célestes. Ce modèle de la gravitation se heurte cependant à certaines observations astronomiques telle celle du déplacement du périhélie de Mercure.

Le périhélie de Mercure se déplace en effet un peu à chaque rotation autour du Soleil, créant ainsi un décalage régulier en angle. Ce décalage était déjà expliqué qualitativement par l'application de la théorie Newtonienne par l'influence gravitationnelle des autres astres ainsi que la forme légèrement non-sphérique du Soleil. Cependant dès le XIX^{ème} siècle, on observe une différence non négligeable entre le décalage prédit par la théorie de Newton et celui observé. Cette différence est suffisamment importante pour que les scientifiques de l'époque recherchent une supposée planète entre le soleil et l'orbite de Mercure, Vulcain, dont l'influence sur Mercure aurait été à l'origine de ce décalage.

Albert Einstein propose en 1915 par le biais de sa théorie de la relativité générale une résolution de ce problème physique, à l'époque vieux de 60 ans (EINSTEIN 1915). Contrairement à la théorie Newtonienne, la relativité générale voit l'influence gravitationnelle comme la conséquence d'une déformation de l'espace-temps générée par un objet massif (ou énergétique). Ainsi dans un tel espace-temps, un objet suit le chemin de moindre action, ce qui correspond pour un observateur extérieur à la trajectoire elliptique de Mercure autour du Soleil. Un décalage du périhélie de mercure vient se rajouter à cette trajectoire du fait de la déformation de l'espace-temps générée par le Soleil, décalage qui vient expliquer la différence observée entre le décalage prévu par la théorie Newtonienne et le décalage observée. Il s'agit du premier test expérimental de la Relativité Générale.

La théorie de la Relativité Générale introduit comme solution possible dans l'espace-temps des déformations propagatives, les ondes gravitationnelles, elles aussi théorisées par EINSTEIN (1916). L'importance physique de cette solution aux équations d'Einstein a été longuement discuté, notamment si ces ondes se révélaient ne pas transporter d'énergie et donc n'être que des solutions mathématiques. La communauté scientifique ne s'accorde sur l'intérêt physique des ondes gravitationnelles qu'à partir de la conférence de Chapel Hill (BERGMANN 1957) en 1957.

Peu après arrivent les premières tentatives de détection d'ondes gravitationnelles telle celle de WEBER (1960) en 1960, où des capteurs étaient couplés à de grandes masses cylindriques dans l'espoir de voir une influence d'une onde gravitationnelle sur ces masses. Malheureusement, la détection des ondes gravitationnelles allait demander une bien plus grande précision, et il fut montré que les observations de Weber étaient liées à des bruits parasites. Ce n'est qu'en 1974 que HULSE et TAYLOR (1975) arrivent à la preuve indirecte de la génération d'ondes gravitationnelles par l'observation de la précession d'une étoile à neutrons et d'un pulsar l'un autour de l'autre. Lors de la fusion de ces deux étoiles à neutrons, la différence entre la fréquence de précession théorique et celle observée correspondait à la perte d'énergie associée à l'émission d'une onde gravitationnelle. Cette découverte leur valut le prix Nobel de physique en 1993.

Il fallut attendre la fin de l'année 2015 pour enfin avoir une observation directe d'une onde gravitationnelle. Cette observation a été rendue possible par la conception d'interféromètres géants et extrêmement précis, tels le LIGO aux États-Unis (dont une vue aérienne est présentée Figure 1b) ou le VIRGO en Italie. Ces détecteurs de pointe ont ainsi détecté la coalescence de deux trous noirs d'une masse chacun d'environ trente masses solaires et distants de plusieurs centaines de Mpc (Mega parsecs) ABBOTT et al. (2016). La déformation gravitationnelle détectée, c'est à dire la déformation relative de la longueur des bras de ces interféromètres était alors seulement de l'ordre de 10^{-22} . Ces ondes gravitationnelles générées par l'accélération de masses importantes présentent un profil singulier du fait du phénomène de coalescence dont elles sont issues : leur fréquence et leur intensité augmente. Leur fréquence étant dans la gamme de l'audible (c'est à dire de l'ordre du kHz), il est possible d'entendre ces signaux à travers un haut-parleur, ce qui justifie encore plus le nom de "chirp" (gazouillement en français) de ce signal. La Figure 1c qui présente ces signaux met cependant en évidence la nécessité d'un rapport signal sur bruit autour de l'unité, ce qui limite l'observation de telles ondes gravitationnelles, bien que ces interféromètres en détectent maintenant très régulièrement, même associées à des phénomènes relativement moins cataclysmiques comme la coalescence d'étoiles à neutrons ABBOTT et al. (2017).

Durant le siècle qui sépare la prédiction des ondes gravitationnelles de leur observation, de nombreuses méthodes de génération d'ondes gravitationnelles en laboratoire ont été étudiées. En effet, un tel type de source présenterait l'avantage d'être plus reproductible et adaptable aux observations désirées que ne l'est l'observation de phénomènes astrophysiques très intenses. La détection de déformations gravitationnelles limitées dans le temps serait donc pour la communauté scientifique une chance de mieux comprendre les subtilités de la force de gravitation et de confirmer, ou compléter, sa description par la relativité générale. Deux pistes sont privilégiées pour la génération en laboratoire d'une déformation gravitationnelle suffisamment grande pour être détectée. Elles nécessitent toutes deux des sources puissantes afin de générer une déformation importante de l'espace-temps.

La première est l'accélération explosive d'une quantité de matière, qui générerait une déformation de l'espace-temps par le biais de l'accélération quadrupolaire de masse. Cette déformation peut être envisagée par le biais d'un laser impactant une cible (RIBEYRE et TIKHONCHUK 2012, KADLECOVÁ et al. 2017) ou de manière plus extrême par l'explosion d'une bombe nucléaire (CHAPLINE, NUCKOLLS et WOOD 1974). À noter que les résultats présentés dans les papiers traitant de l'accélération de masse par laser sont bien plus faibles que ce qui a pu être observé par LIGO et VIRGO (10^{-40} dans le papier de KADLECOVÁ et al. (2017) contre $10^{-22} \sim 10^{-23}$ au LIGO), mais traitent d'ondes gravitationnelles émises à de bien plus grande fréquences que celles détectées par LIGO où d'autres détecteurs de dimensions et de sensibilités différentes pourront être utilisés. Il est admis que pour des rayonnements gravitationnels à des fréquences de l'ordre du GHz, une déformation gravitationnelle de l'ordre de 10^{-32} serait détectable (LI et al. 2009). La seconde piste est la génération d'une déformation gravitationnelle par une onde électromagnétique, dont la cohérence est un avantage dans la production d'une déformation importante (GRISHCHUK 2003b).

L'observation en astrophysique par DYSON, EDDINGTON et DAVIDSON (1920) de la déviation d'un rayon de lumière au voisinage du Soleil constitue l'un des tests importants de la relativité générale. Ce test confirme l'influence qu'a la variation du potentiel gravitationnel sur la trajectoire de la lumière dans l'espace. Du point de vue de la relativité générale, cela confirme que la déformation de l'espace-temps générée par un objet massif (en l'occurrence le Soleil ici) change bien la trajectoire de la lumière qui suit alors la géodésique dans ce nouvel espace-temps. De manière inexacte mais intuitive, dans un point de vue Newtonien, on pourrait dire que le Soleil exerce une influence sur la lumière par le biais de la force de gravitation, ce qui impliquerait, par réciprocité de l'action, que la lumière a elle-même une influence sur la gravité. Décrite de manière plus exacte, la lumière transporte de l'énergie et

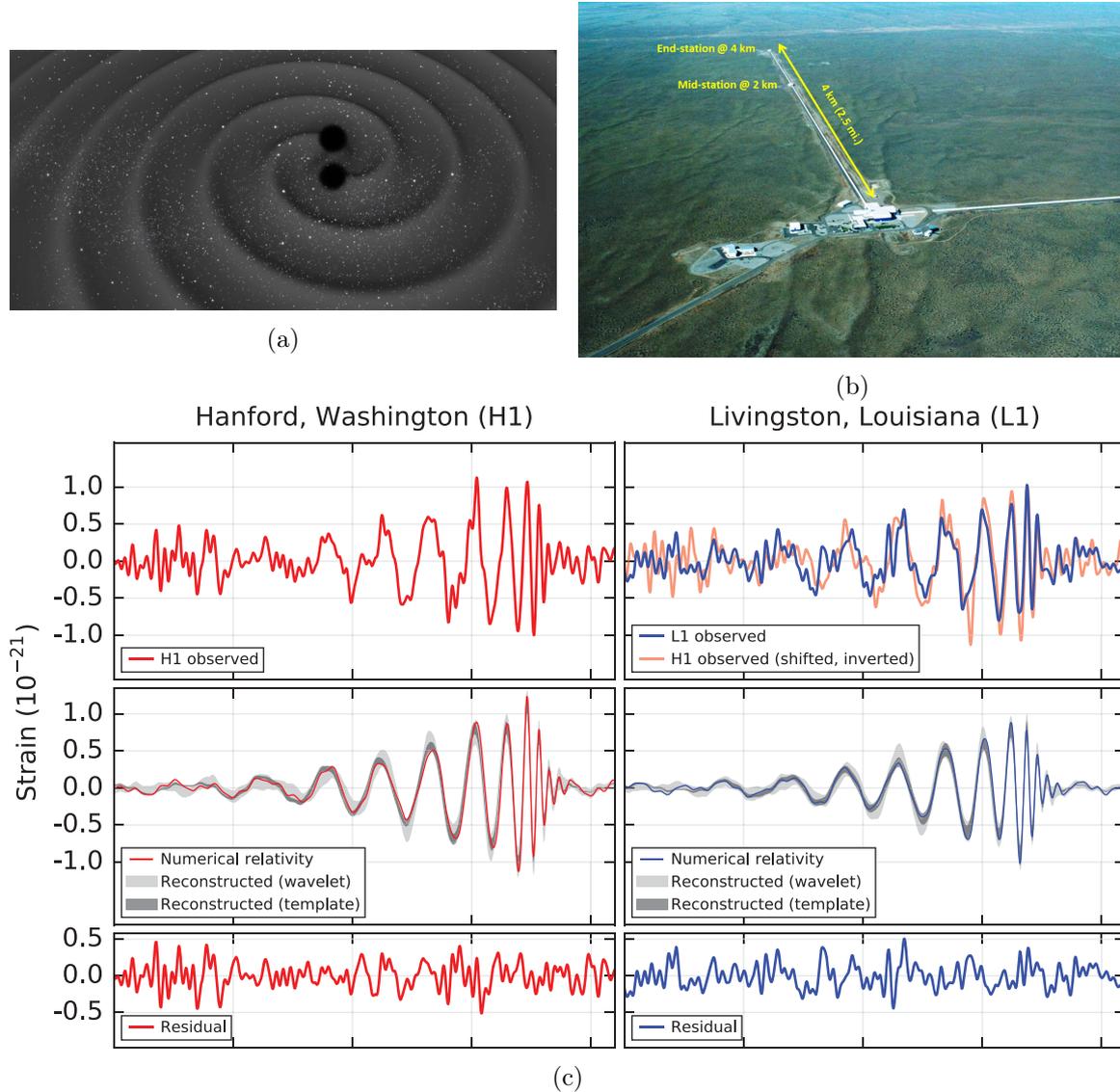


FIGURE 1 – a) Vue d’artiste de deux trous noirs en train de fusionner, à l’origine des ondes gravitationnelles observées par LIGO et VIRGO (©C. Carreau/ESA). b) Vue aérienne d’un des deux interféromètres géants du LIGO à Hanford dans l’état de Washington (©Caltech/MIT/LIGO Lab). c) Signaux gravitationnels observés et reconstruits pour les deux interféromètres du LIGO lors de la première observation de l’onde gravitationnelle générée par la coalescence de deux trous noirs (ABBOTT et al. 2016).

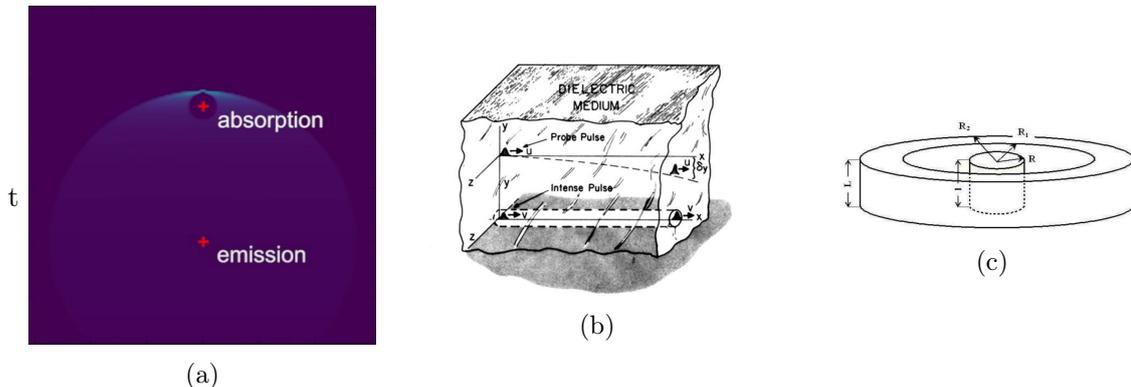


FIGURE 2 – a) Profil de la déformation gravitationnelle générée par l'émission et l'absorption d'une impulsion lumineuse, telle qu'elle est calculée par RÄTZEL, WILKENS et MENZEL (2016). b) Montage expérimental proposé par SCULLY (1979) dans le but d'observer la déviation, par une impulsion intense se propageant à la vitesse v , d'un faisceau sonde allant à une vitesse inférieure $u < v$. c) Design expérimental présenté par GRISHCHUK (2003a) d'une cavité électromagnétique résonnante dont les dimensions seraient ajustées afin de favoriser la génération et la détection d'ondes gravitationnelles stationnaires.

doit donc d'après la relativité générale générer localement son propre champ gravitationnel, c'est à dire une déformation de l'espace-temps. Les premiers à s'intéresser à cette déformation gravitationnelle sont TOLMAN, EHRENFEST et PODOLSKY (1931) qui étudient la déformation générée par un pinceau de lumière de finesse infinitésimale sur l'espace-temps environnant. Cette étude de la déformation gravitationnelle par un faisceau de lumière d'extension spatiale nulle a plus récemment été reprise et complétée par RÄTZEL, WILKENS et MENZEL (2016), qui se sont intéressés à la déformation gravitationnelle apparaissant à la création et à l'absorption d'une impulsion lumineuse (une représentation faite par Rätzel est présentée Figure 2a, mais l'absence d'une extension spatiale pour cette impulsion empêche l'étude complète de la déformation gravitationnelle ainsi générée.

D'autres études se sont penchées sur ce cas particulier de la génération de déformation gravitationnelle par une onde électromagnétique. SCULLY (1979) présente une autre possibilité d'observation de l'influence de la perturbation gravitationnelle générée par une impulsion lumineuse : en faisant se propager une impulsion de haute intensité dans un milieu et une impulsion sonde simultanément dans un autre milieu où la vitesse de propagation de la lumière est plus faible, il serait possible que le faisceau sonde soit dévié par la perturbation gravitationnelle produite par l'impulsion lumineuse intense. L'angle de déviation serait alors minime mais pourrait être observable, comme présenté Figure 2b.

Parallèlement, GERTSENSHTEIN (1962) montre qu'il est possible de créer une onde gravitationnelle à la même fréquence qu'une onde électromagnétique source en faisant interagir cette dernière avec un champ magnétique constant. L'effet Gertsenshtein a été étudié plus en détail dans le papier de KOLOSNITSYN et RUDENKO (2015) qui entreprennent d'estimer l'amplitude d'une telle déformation gravitationnelle générée avec les équipements laser actuels.

Enfin, GRISHCHUK (2003a) propose quant à lui une méthode de génération stationnaire d'une déformation gravitationnelle par l'établissement d'un fort champ électromagnétique oscillant dans une cavité résonnante (présentée Figure 2c) qui pourrait permettre par sa conception de très fortes variations du champ électromagnétique et donc une génération importante d'ondes gravitationnelles. Les calculs entrepris par Grishchuk à cette occasion montrent qu'il serait possible d'obtenir une déformation gravitationnelle plus importante de quelques ordres de grandeur avec une méthode de génération par onde électromagnétique plutôt que par accélération de masse.

Dans cette thèse nous étudierons de plus près les phénomènes mis en jeu dans la génération de perturbations gravitationnelles par la lumière, et étudierons la déformation générée à l'intérieur même de l'impulsion lumineuse afin de trouver quels paramètres expérimentaux sont importants à considérer pour la réalisation d'une expérience de génération et détection d'une onde gravitationnelle, qui pourrait alors créer un analogue gravitationnel à l'expérience d'émission et de détection d'onde électromagnétique de FRANCK et HERTZ (1914).

Dans un premier temps, nous présenterons les diverses équations de base nécessaires à la compréhension et l'abordage du problème. Dans le premier chapitre nous rappellerons certains points de relativité générale et de géométrie différentielle reliés à notre étude afin d'en faciliter la compréhension. Ensuite, nous continuerons en présentant les conditions imposées dans la simplification des équations d'Einstein dans le cadre d'un développement perturbatif, qui nous mènera d'une part à la démonstration de l'existence des ondes gravitationnelles dans le vide et d'autre part nous permettra d'appliquer les équations d'Einstein à des cas d'accélération de masse ou de variation de champ électromagnétique.

Dans un second temps, nous nous concentrerons sur la résolution 3D d'un problème particulier : l'émission d'une déformation gravitationnelle dans l'axe d'une impulsion lumineuse intense. Dans le chapitre 2, nous présenterons la méthode de résolution par fonction de Green des équations d'Einstein linéarisées et prouverons son efficacité à décrire la solution d'établissement du potentiel gravitationnel d'une sphère immobile dans l'espace apparaissant au temps $t = 0$. S'ensuivra l'étude de la perturbation générée par un cylindre de densité d'énergie constante, immobile dans l'espace et apparaissant au temps $t = 0$. Afin de faire face aux difficultés engendrées, nous compléterons cette étude par l'introduction d'une méthode de résolution algorithmique de l'intégrale produite. Dans le chapitre 3, nous appliquerons la méthode introduite précédemment à un cylindre de densité d'énergie constante se déplaçant à la vitesse de la lumière c qui représente la partie constante générée dans le terme source des équations d'Einstein. Dans le chapitre 4, nous nous intéresserons cette fois à la partie oscillante du terme source, avant de combiner les deux solutions précédentes afin d'obtenir la solution globale à notre problème.

Nous concluons en présentant les développements futurs de cette thèse ainsi que certains des chemins que je n'ai pas eu le temps d'explorer pendant ces 3 années. Notamment, nous appliquerons les résultats présentés dans cette thèse à des designs expérimentaux en laboratoire ainsi qu'à un phénomène astrophysique de grande densité d'énergie électromagnétique : le sursaut gamma.

Chapitre 1

Théorie

Résumé : Nous proposons dans cette partie de revoir les principaux points théoriques constituant la relativité générale, ainsi que les principes physiques fondamentaux à l'étude de la déformation gravitationnelle générée par une impulsion lumineuse que nous mènerons tout le long de cette thèse. Ainsi, nous mettrons en évidence les quelques difficultés techniques et équations importantes présentes en relativité générale, avant de nous intéresser de plus près aux petites déformations gravitationnelles. Cela nous mènera aux équations d'Einstein linéarisées que nous utiliserons dans cette thèse ainsi qu'au détail de plusieurs sources possibles pour les déformations gravitationnelles, dont la lumière, ainsi qu'à leurs particularités.

1.1 Rappels de relativité générale

Afin d'aborder sereinement le problème que nous posons dans cette thèse, il est nécessaire de bien introduire les outils mathématiques sur lesquels nous nous appuyerons dans le formalisme de la relativité générale. Ainsi, nous ferons un tour des détails mathématiques essentiels à la compréhension de la relativité générale, avant d'explicitier les équations d'Einstein qui régissent les liens entre espace-temps et densité d'énergie en relativité générale.

1.1.1 Notions de géométrie différentielle

Les éléments de géométrie différentielle présentés ici nous permettent de nous représenter dans un espace dont nous avons l'habitude, l'espace euclidien, la géométrie de l'espace-temps en relativité générale, et donc finalement les caractéristiques qui en font un espace différent de celui dans lequel nous faisons habituellement nos calculs.

Ces caractéristiques définissent ainsi l'influence de la géométrie de l'espace-temps sur le déplacement des corps massifs ou de la lumière, c'est-à-dire l'influence gravitationnelle.

Dans l'ensemble de cette thèse, nous utiliserons les notations d'Einstein, où les sommes sont exprimées de manière implicite comme la présence du même indice une fois en position contravariante (indice haut, voir page 9) et une fois en position covariante (indice bas), de telle manière que l'on peut lire de manière équivalente :

$$A^\mu B_\mu = \sum_\mu A^\mu B_\mu$$

Où l'indice μ parcourt toutes les valeurs qu'il est autorisé à prendre.

La métrique : outil de représentation de l'espace-temps courbe

Dans la physique non relativiste, l'espace est représenté comme séparé du temps et suivant la géométrie euclidienne : deux points sont éloignés d'une distance égale à la norme du vecteur entre ces deux points, qui est calculée de la même façon peu importe l'endroit de l'espace où l'on se situe.

Physiquement cela peut se traduire par le fait que le chemin le plus court entre deux points est une ligne droite, que l'intégration ne dépend pas du chemin et qu'un mouvement non accéléré suit une trajectoire rectiligne.

Par rapport à cette définition, la relativité générale considère un espace-temps, c'est à dire un espace à 4 dimensions où dimensions spatiales et temporelle sont présentes. Cet espace peut être déformé, c'est à dire que les propriétés énoncées dans le cas de l'espace euclidien usuel ne sont plus respectées. Dans un tel espace un mouvement non accéléré suit le chemin de moindre distance appelé géodésique, qui ne correspond plus forcément à une ligne droite entre deux points.

Cependant il serait compliqué de faire tous nos calculs directement dans un tel espace puisqu'ils sont adaptés à un espace plan isotrope. On définit donc le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ comme une application permettant de représenter la dynamique d'un espace courbé sur l'espace plan euclidien usuel. Grâce à ce tenseur, qui est symétrique, on peut écrire localement le carré de l'intervalle entre deux points infinitésimalement proches comme :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.1)$$

Où \mathbf{x} est le vecteur position et $\mu, \nu \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ sont les indices des composantes x^μ de \mathbf{x} associées aux vecteurs de base \mathbf{e}_μ correspondant au temps et aux dimensions spatiales tels que $x^0 = ct$ et $x^1, x^2, x^3 = x, y, z$ en notations usuelles.

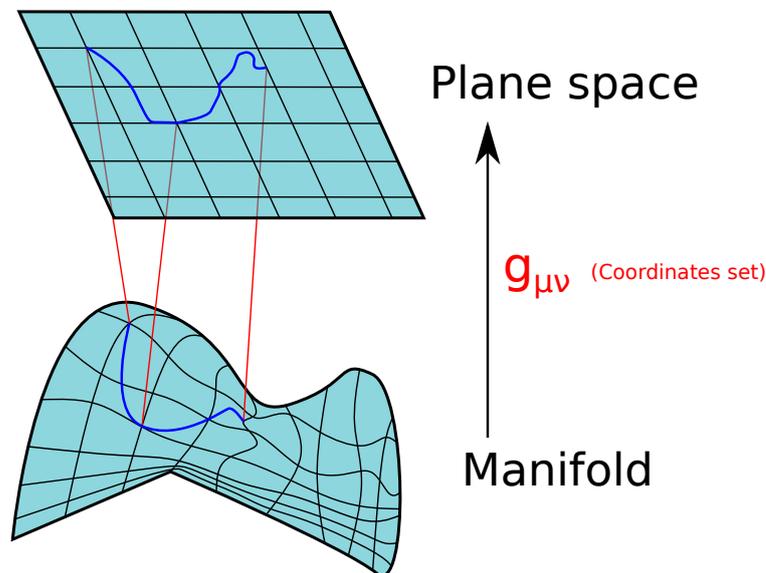


FIGURE 1.1 – Illustration du rôle de la métrique dans la représentation dans l'espace euclidien d'un trajet en espace courbe

Une représentation du domaine de départ et de l'ensemble d'arrivée de la métrique est représentée Figure 1.1. L'espace plan décrivant le cas non relativiste, ou du moins non accéléré, est représenté sur l'espace euclidien par la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$

telle que nous avons :

$$ds^2 = -c dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.2)$$

Ainsi, selon cette description l'intervalle parcouru par un rayon de lumière sera toujours de norme nulle $ds^2 = 0$ et celui parcouru par un point de vitesse inférieure à celle de la lumière de norme négative $ds^2 < 0$ (il s'agit ici d'une convention liée à la signature que nous avons choisie pour la métrique de Minkowski).

Contravariance et Covariance

Une notion à laquelle il faut faire particulièrement attention en géométrie différentielle est la différence entre éléments covariants et contravariants. Cette notion a été discrètement présente ci-dessus, nous l'explicitons ici.

La covariance ou la contravariance d'un élément décrit la façon dont un tel élément se transforme sous un changement de base. Un élément covariant se transforme comme ce changement de base alors qu'un élément contravariant se transforme à l'inverse (BOUDENOT 1989).

Un élément covariant sera noté A_μ , quand un élément contravariant sera noté A^μ .

Un exemple direct d'élément covariant sont les vecteurs de base, qui par définition suivent le changement de base, d'où leur notation \mathbf{e}_μ .

Pour comprendre comment covariance et contravariance s'appliquent aux objets que nous étudions, nous prendrons les exemples du vecteur et de l'opérateur dérivée.

Un vecteur est un objet invariant par changement de base, mais sa décomposition en vecteurs de base ne l'est quant à elle naturellement pas. On peut écrire la décomposition d'un tel vecteur comme :

$$\mathbf{A} = A^\mu \mathbf{e}_\mu \quad (1.3)$$

Où A^μ sont les composantes du vecteur \mathbf{A} associées aux vecteurs de base \mathbf{e}_μ .

Si l'on venait appliquer une transformation \mathcal{P} à cette base de vecteurs, la base viendrait à changer tandis que les composantes du vecteur viendraient compenser ce changement de manière à ce que l'on décrive toujours le même vecteur \mathbf{A} . En effet :

$$\mathbf{A} = \mathcal{P}^{-1} A^\mu \mathbf{e}_\mu \mathcal{P} = A^\mu \mathbf{e}_\mu \quad (1.4)$$

À l'inverse, la dérivée exprime la variation d'une grandeur par rapport à un vecteur de base, d'où :

$$\partial_{\mathcal{P}\mathbf{e}_\mu} = \frac{\partial}{\mathcal{P}^{-1}\partial x^\mu} = \mathcal{P} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \mathcal{P}\partial_{\mathbf{e}_\mu} \quad (1.5)$$

On peut finalement voir les grandeurs covariantes A_μ associées au vecteur \mathbf{A} comme le résultat du produit scalaire usuel du vecteur avec les vecteurs de base \mathbf{e}_μ , tels que :

$$A_\mu = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_\mu \quad (1.6)$$

Cette grandeur covariante est reliée aux composantes contravariantes du vecteur par la métrique $g_{\mu\nu}$ suivant la relation :

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \quad (1.7)$$

Corollairement on notera l'inverse de la métrique $g_{\mu\nu}^{-1} = g^{\mu\nu}$, l'opérateur permettant de passer d'un élément covariant à l'élément contravariant associé.

La différence entre la composante contravariante (1.3) et la composante covariante (1.6) est illustrée dans l'exemple d'une base de deux vecteurs non orthogonaux Figure 1.2.

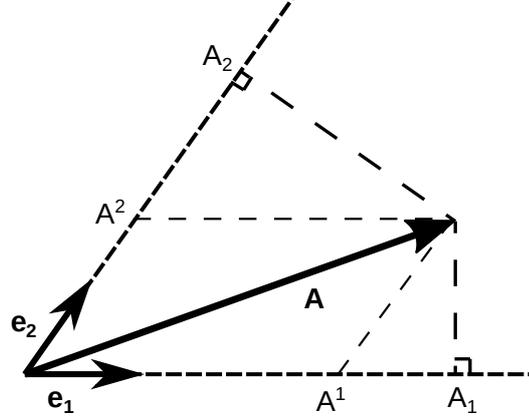


FIGURE 1.2 – Représentation des composantes contravariantes A^μ et covariantes A_μ du vecteur \mathbf{A} sur la base non orthogonale de vecteurs $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Les composantes contravariantes A^μ représentent la décomposition en vecteurs de base de \mathbf{A} tandis que les composantes covariantes A_μ sont le résultat de la projection orthogonale de \mathbf{A} sur les axes définis par les vecteurs de base.

Courbure de l'espace-temps et tenseur de Riemann

Sur un espace-temps non-plan la dérivée aussi se retrouve modifiée. En effet si nous prenions un point sur cet espace-temps et que nous appliquions la dérivée usuelle, nous calculerions la différence de valeur d'une fonction entre deux points infinitésimalement proches sur le même plan. L'un de ces points ne se trouverait donc plus dans notre espace-temps mais dans un plan tangent à ce dernier. Afin de corriger ce problème, on introduit une correction dans l'expression de la dérivée d'une grandeur, qui dépend de la variation des vecteurs de base près du point étudié. Cette nouvelle dérivée, dite "dérivée covariante", appliquée à un vecteur \mathbf{u} , s'écrit alors comme :

$$\nabla_{\mathbf{e}_\mu} u^\nu \mathbf{e}_\nu = \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu} \mathbf{e}_\nu + u^\nu \frac{\partial \mathbf{e}_\nu}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial u^\rho}{\partial x^\mu} + u^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\rho \right) \mathbf{e}_\rho \quad (1.8)$$

Où les $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ sont les symboles de Christoffel qui expriment la projection sur un vecteur de base \mathbf{e}_ρ de la variation d'un vecteur de base \mathbf{e}_ν dans la direction d'un autre vecteur de base \mathbf{e}_μ . Ces symboles s'écrivent en fonction des dérivées de la métrique $g_{\mu\nu}$ de l'espace-temps, tels que :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (1.9)$$

On peut aussi écrire la dérivée covariante selon un vecteur quelconque \mathbf{v} :

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = v^\mu \nabla_{\mathbf{e}_\mu} \mathbf{u} \quad (1.10)$$

Ces outils permettent de définir la notion de transport parallèle sur l'espace-temps, qui permet d'étudier l'évolution d'un champ de vecteurs sur un chemin. le concept de ce transport est de créer un équivalent à la translation selon un chemin d'un couple point-vecteur sur un espace-temps non plan. L'étude d'un exemple d'un tel transport Figure 1.3,

nous permet d'observer que l'on peut revenir au même point en prenant un chemin par transport parallèle et ne pas retrouver le même vecteur. Cette différence est bien sûr due à la non-planarité de l'espace-temps, et plus particulièrement à sa courbure.

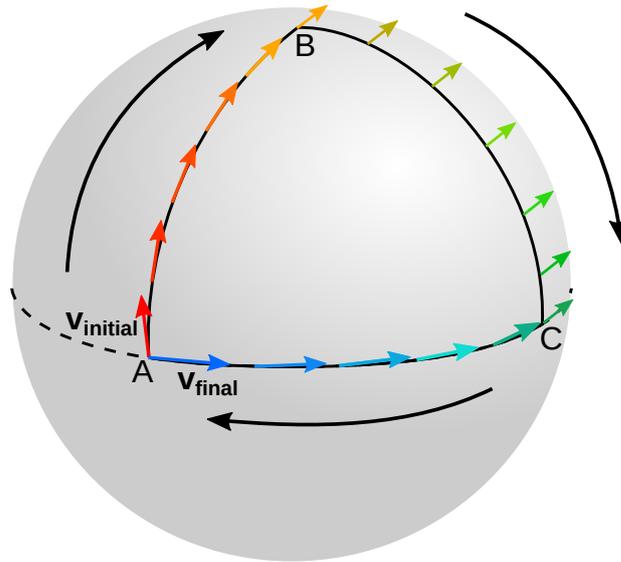


FIGURE 1.3 – Transport parallèle d'un vecteur $\mathbf{v}_{\text{initial}}$ le long d'un chemin fermé $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ sur une sphère, exemple d'espace non plan. Le vecteur revient au même point de départ A mais change de direction et devient donc le vecteur $\mathbf{v}_{\text{final}} \neq \mathbf{v}_{\text{initial}}$

Localement, on pourra définir la courbure comme le commutateur des dérivées secondes covariantes appliquées aux vecteurs de base, que l'on peut compiler dans le tenseur de Riemann $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$. De manière plus concrète cette courbure représente la déviation du vecteur transporté après un trajet sur un contour fermé de longueur infinitésimale, c'est à dire la déviation imposée à un vecteur lors du choix d'une direction par rapport à une autre sur chaque point du chemin d'un point de départ à un point d'arrivée.

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} \mathbf{e}^\mu = [\nabla_\sigma, \nabla_\rho] \mathbf{e}^\nu \quad (1.11)$$

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\lambda\rho} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} \Gamma^\lambda_{\nu\rho} \quad (1.12)$$

$$g_{\mu\lambda} R^\lambda_{\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} \quad (1.13)$$

Ce tenseur a été retenu pour la description de la courbure de l'espace-temps du fait de ces particularités et notamment du fait de sa dépendance linéaire sur la dérivée seconde du tenseur métrique, qui permet d'en faire un analogue de l'opérateur laplacien dans l'équation de Poisson en physique Newtonienne ($\Delta U = 4\pi G\rho$ où U est le potentiel gravitationnel, analogue newtonien au tenseur métrique).

Einstein cherche à relier une grandeur décrivant la déformation de l'espace-temps avec le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ de dimension 2. Le tenseur de Riemann correspond en terme de description à un tenseur dépendant linéairement de la dérivée seconde de la métrique qui exprime une propriété géométrique physiquement sensée, mais est de dimension 4. Une solution intuitive pour réduire la dimension d'un tel tenseur est alors la contraction de certains ses indices entre eux, ce qui revient à faire une trace partielle dudit tenseur. Du fait de ses propriétés antisymétriques, seule une contraction est non nulle, et donne le tenseur de Ricci défini comme suit :

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} \quad (1.14)$$

D'où

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \quad (1.15)$$

Le tenseur de Ricci se définit ainsi car il est la seule contraction non nulle du tenseur de Riemann. Il représente donc une partie des informations du tenseur de Riemann et possède le nombre de dimensions idoïne pour être intégré dans l'équation d'Einstein.

Ce tenseur peut encore être contracté en prenant sa trace $R^\mu{}_\mu = R$ qui définit le scalaire de courbure.

1.1.2 Équations d'Einstein

Après avoir décrit les outils permettant d'exprimer la géométrie de l'espace-temps et mis en évidence certaines subtilités apparaissant dans les grandeurs et les calculs en géométrie différentielle, il est temps de relier les déformations de l'espace-temps, c'est-à-dire la force gravitationnelle, avec les sources qui les génèrent.

Nous présenterons ainsi les équations d'Einstein reliant courbure de l'espace-temps et densité d'énergie avant de comparer cette loi de la gravitation avec la loi de la gravitation universelle newtonienne, démontrant ainsi que la relativité générale permet bien de retrouver la théorie Newtonienne en considérant certaines approximations. La relativité générale permet ainsi de décrire de manière plus précise les phénomènes gravitationnels tout en préservant la validité des calculs Newtoniens, au premier ordre du moins.

Expression des équations

Les équations d'Einstein relient la déformation de la géométrie de l'espace-temps à la densité d'énergie présente ou se déplaçant dans le système étudié. Cette densité d'énergie est dénotée par le tenseur $T_{\mu\nu}$ et peut aussi bien rendre compte de la présence de masse que de la présence d'autres types d'énergie telles l'énergie électromagnétique.

Ces équations dénotent un lien de proportionnalité, donc une relation linéaire, entre le tenseur d'Einstein, directement relié au tenseur de Ricci, et le tenseur énergie impulsion.

$$G_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu} \quad (1.16)$$

où $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ est le tenseur d'Einstein, et χ est un scalaire nommé constante d'Einstein.

Si l'on décide de séparer dans le tenseur énergie-impulsion les différentes contributions que nous voyons dans cette thèse, on pourra réécrire les équations d'Einstein comme :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \chi (T_{\mu\nu}^{mat} + T_{\mu\nu}^{em}) \quad (1.17)$$

Où $T_{\mu\nu}^{mat}$ et $T_{\mu\nu}^{em}$ sont respectivement le tenseur énergie-impulsion lié à la matière massive et au champ électromagnétique. Leurs formules de calcul seront explicitées au sous-chapitre suivant.

On peut aussi réécrire les équations (1.17), en observant qu'en contractant les indices, on obtient la relation :

$$R = -\chi T \quad (1.18)$$

Où T est la trace de $T_{\mu\nu}$, puisque $Tr(g_{\mu\nu}) = g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \delta_{\mu}^{\mu} = 4$ où δ_{ν}^{μ} est le symbole de Kronecker.

On obtient alors la réécriture des équations d'Einstein comme

$$R_{\mu\nu} = \chi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) \quad (1.19)$$

Démonstration de la valeur de la constante d'Einstein χ

La constante d'Einstein χ exprime la proportionnalité entre déformation de la métrique et densité d'énergie ou de matière. Afin de trouver la valeur exacte de cette constante, il faut donc revenir au cas le plus simple d'influence gravitationnelle : la force Newtonienne d'attraction gravitationnelle.

$$\mathbf{F}_{grav} = m\mathbf{g} \quad ; \quad \mathbf{g} = \frac{GM}{r^2}\mathbf{e}_r \quad ; \quad \mathbf{g} = -\nabla U \quad (1.20)$$

Où m est la masse du point sur lequel la force est appliquée, U est le potentiel gravitationnel classique : $U = \frac{GM}{r}$ et M est la masse de l'astre attracteur, c'est à dire, pour une sphère de rayon r et de masse volumique ρ : $M = \frac{4\pi}{3}\rho r^3$

On observera alors la propriété suivante de l'accélération gravitationnelle qui nous donnera l'équation de Poisson du potentiel gravitationnel :

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = \nabla \cdot \left(-\frac{GM}{r^2}\mathbf{e}_r \right) = -\frac{1}{r^2}\partial_r \left(r^2\frac{GM}{r^2} \right) \quad (1.21)$$

$$= -4\pi G\rho \quad (1.22)$$

$$= \nabla \cdot (-\nabla U) = -\Delta U \quad (1.23)$$

d'où l'équation de Poisson gravitationnelle :

$$\Delta U = 4\pi G\rho \quad (1.24)$$

On va maintenant essayer de retrouver cette équation dans le cas de la relativité générale, avec l'équation d'Einstein.

Pour cela, nous nous intéressons à l'expression du Lagrangien L_m d'une masse m dans un potentiel gravitationnel U en relativité restreinte, où nous prendrons la vitesse relative $v \ll c$, afin d'exprimer le développement limité de L_m (TOURRENC 1992).

$$L_m = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - mU \approx -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - mU \quad (1.25)$$

Il s'agit ici du Lagrangien en physique Newtonienne auquel on a soustrait mc^2 , ce qui ne pose pas de problème vu que le Lagrangien est défini à une constante près.

On peut écrire le comportement d'une particule test dans un potentiel gravitationnel comme la minimisation de l'action S_m , dont L_m est la dérivée par rapport au temps :

$$\delta S_m = 0 \quad ; \quad S_m = \int L_m dt = -mc \int \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{U}{c} \right) dt \quad (1.26)$$

On peut aussi écrire l'action comme intégrale sur un chemin :

$$S_m = -mc \int ds \quad (1.27)$$

Donc par identification dans l'intégrale,

$$ds = \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{U}{c} \right) dt \quad \Rightarrow \quad ds^2 = \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{U}{c} \right)^2 dt^2 \approx (c^2 - v^2 + 2U) dt^2 \quad (1.28)$$

Or, je peux réécrire la vitesse comme la dérivée de la position en 3 dimensions x^i ce qui donne pour son carré :

$$v^2 = \sum_{i=1,2,3} \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad v^2 dt^2 = \sum_i (dx^i)^2 \quad (1.29)$$

Ainsi, il est possible d'écrire le carré ds^2 de l'intervalle selon une forme comparable à celle présentée en relativité générale :

$$ds^2 = (c^2 + 2U) dt^2 - \sum_i (dx^i)^2 = \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) (cdt)^2 - \sum_i (dx^i)^2 \quad (1.30)$$

$$ds^2 = g_{00} (dx^0)^2 + \sum_i g_{ii} (dx^i)^2 \quad ; \quad dx^0 = cdt \quad (1.31)$$

Ainsi, et d'après (1.24),

$$g_{00} = 1 + \frac{2U}{c^2} \quad (1.32)$$

$$\Delta g_{00} = \frac{2}{c^2} \Delta U = \frac{8\pi G}{c^2} \rho \quad (1.33)$$

On remarquera ici que l'on travaille avec une métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ opposée à celle que nous utilisons dans la suite. Le signe devant cette métrique est une simple convention, qui permet de simplifier les calculs.

Notons d'autre part que pour une masse immobile, c'est à dire $T_{00} = \rho c^2$, $T_{\mu\nu} = 0$ pour μ ou $\nu \neq 0$, l'équation d'Einstein (1.19) en $\mu = 0$; $\nu = 0$ s'écrit :

$$R_{00} = \chi \left(T_{00} - \frac{1}{2} T_{00} \right) \quad (1.34)$$

Et sachant que l'on peut écrire dans l'approximation d'un régime stationnaire non relativiste

$$R_{00} \approx \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{00} \approx \frac{1}{2} \partial_\alpha \partial^\alpha g_{00} \approx \frac{1}{2} \Delta g_{00} \quad (1.35)$$

On obtient l'équation suivante

$$\Delta g_{00} = \chi \rho c^2 \quad (1.36)$$

D'où par identification des équations (1.33) et (1.36) :

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (1.37)$$

Nous allons à présent nous intéresser à certaines conséquences des équations d'Einstein sur la génération de petites déformations gravitationnelles.

1.2 Perturbations gravitationnelles

Puisque les bases de la relativité générale sont posées, nous nous intéressons maintenant aux multiples formes que peut prendre le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$. Nous verrons d'abord comment l'espace-temps peut se comporter en l'absence de toute source, avant de nous intéresser successivement à la matière puis aux champs électromagnétiques, dont la lumière. Les petites déformations gravitationnelles ainsi engendrées par la lumière constituent le cœur de cette thèse et seront étudiées de plus près encore dans les chapitres suivants.

1.2.1 Ondes gravitationnelles

Maintenant que nous avons rappelé les lois physiques et mathématiques régissant l'espace-temps en relativité générale, nous nous intéressons aux solutions physiques que décrivent les équations d'Einstein (1.17). Les ondes gravitationnelles sont, avec la démonstration de la vitesse de précession du périhélie de mercure trois ans plus tôt (EINSTEIN 1915), l'un des premiers résultats non triviaux de la relativité générale. Ces ondes de déformation de l'espace-temps se propageant à la vitesse de la lumière constituent la base de notre étude, puisque la propagation à la même vitesse d'une onde électromagnétique et de l'onde gravitationnelle pourrait permettre la génération cohérente d'une onde gravitationnelle importante.

Pour vérifier mathématiquement l'existence d'ondes gravitationnelles comme solutions des équations d'Einstein, nous allons prendre ces équations et nous placer dans le vide, c'est à dire ici à $T_{\mu\nu} = (0)_{4 \times 4}$, sans masse ni champ électromagnétique :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad (1.38)$$

Afin de faciliter les calculs, nous considérons les ondes gravitationnelles comme une perturbation de la métrique plate de Minkowski (MAGGIORE 2008) :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1.39)$$

où $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ est la perturbation de la métrique.

On peut alors utiliser la méthode perturbative pour écrire les équations d'Einstein linéarisées, en commençant par développer $R_{\mu\nu}$ à l'ordre 1 en $h_{\mu\nu}$:

$$2R_{\alpha\beta} = \partial_\gamma \left(g^{\gamma\delta} (\partial_\alpha h_{\beta\delta} + \partial_\beta h_{\alpha\delta} - \partial_\delta h_{\alpha\beta}) \right) - \partial_\alpha \left(g^{\gamma\delta} (\partial_\alpha h_{\gamma\delta} + \partial_\gamma h_{\alpha\delta} - \partial_\delta h_{\alpha\gamma}) \right) \quad (1.40)$$

$$= \eta^{\gamma\gamma} \partial_\gamma \partial_\alpha h_{\beta\gamma} - \eta^{\gamma\gamma} \partial_\gamma^2 h_{\beta\gamma} - \eta^{\gamma\gamma} \partial_\beta \partial_\alpha h_{\gamma\gamma} + \eta^{\gamma\gamma} \partial_\beta \partial_\gamma h_{\alpha\gamma} \quad (1.41)$$

et donc,

$$R = g^{\alpha\alpha} R_{\alpha\alpha} = g^{\alpha\alpha} g^{\gamma\gamma} (\partial_\gamma \partial_\alpha h_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma^2 h_{\alpha\alpha}) \quad (1.42)$$

D'où, d'après l'équation (1.17) :

$$2R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R = \frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} = \eta^{\gamma\gamma}(\partial_\gamma\partial_\mu h_{\nu\gamma} + \partial_\nu\partial_\gamma h_{\mu\gamma} - \partial_\gamma^2 h_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\mu h_{\gamma\gamma}) - \eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\alpha}\eta^{\gamma\gamma}(\partial_\gamma\partial_\alpha h_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma^2 h_{\alpha\alpha}) \quad (1.43)$$

On pose alors $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^\mu{}_\mu$, avec $h^\mu{}_\mu$ la trace du tenseur $h_{\mu\nu}$, d'où les équations d'Einstein linéarisées :

$$-\partial^\gamma\partial_\gamma\bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\bar{h}_{\alpha\beta} + \partial^\alpha\partial_\nu\bar{h}_{\mu\alpha} + \partial^\alpha\partial_\mu\bar{h}_{\nu\alpha} = \frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.44)$$

Cependant l'équation est encore complexe à résoudre et aurait besoin d'une autre simplification. Or nous pouvons encore réduire les degrés de liberté du système en fixant une condition de jauge. Nous fixons ici la jauge de Lorentz :

$$-\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (1.45)$$

Nous obtenons alors les équations d'Einstein simplifiées :

$$-\square\bar{h}_{\mu\nu} = -\partial^\gamma\partial_\gamma\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.46)$$

Ce qui donne dans le vide, c'est à dire pour $T_{\mu\nu} = 0$:

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (1.47)$$

La forme D'Alembertien = constante admet comme solution les ondes planes progressives harmoniques. Les équations d'Einstein dans le vide permettent donc l'existence d'une déformation périodique et progressive de la métrique, c'est à dire, une solution correspondant aux ondes gravitationnelles.

On s'intéresse maintenant à la forme exacte de la solution des équations d'Einstein pour les déformations gravitationnelles. On va pouvoir réduire l'expression de l'onde gravitationnelle à son expression la plus simple grâce à une analyse du nombre de valeurs indépendantes dans $\bar{h}_{\mu\nu}$.

Tout d'abord, le tenseur $\bar{h}_{\mu\nu}$ est symétrique, et donc seules 10 de ses 16 composantes sont indépendantes. Ensuite, la jauge de Lorentz (1.45) vient poser 4 autres conditions sur les éléments du tenseur $\bar{h}_{\mu\nu}$, réduisant le nombre de composantes indépendantes à 6.

Enfin, même avec cette jauge fixée, l'équation (1.47) reste invariante selon la transformation de coordonnées $x^\mu = x^\mu + \chi^\mu$ tant que χ^μ vérifie la condition $\square\chi^\mu = 0$.

On se retrouve donc avec un changement de variables qui nous permet de prendre $\bar{h}_{\mu\nu}$ de trace nulle tel que :

$$\bar{h}^\mu{}_\mu = \bar{h} = h = 0 \quad (1.48)$$

et

$$\bar{h}^{0i} = 0, i \in \{x, y, z\} \quad (1.49)$$

On a alors $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ pour cette jauge qui nous donne un tenseur $h_{\mu\nu}$ aux composantes uniquement transverses et de trace nulle (d'où son nom de jauge TT : transverse-traceless).

Ne reste plus donc que deux composantes indépendantes. De plus l'équation (1.47) admet les ondes progressives comme solution, on peut donc écrire la solution des équations d'Einstein linéarisées dans un système vide comme :

$$h_{\mu\nu}(t, x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_+ & h_\times \\ 0 & 0 & h_\times & -h_+ \end{pmatrix} f(x, y, z, t) \quad (1.50)$$

où $f(x, y, z, t) = \cos(kx - \omega t)$ ou $f(x, y, z, t) = \frac{1}{r} \cos(kr - \omega t)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Pour les choix de jauge qui ont été faits plus haut, et en considérant une onde se propageant selon l'axe \mathbf{Ox} . On remarquera que cette solution identifie la vitesse de groupe d'une onde gravitationnelle à celle de la lumière, et dans ce cadre la relation de dispersion pour une onde gravitationnelle dans le vide est la même que pour la lumière : $k = \frac{\omega}{c}$

Il est aussi intéressant de remarquer que la manière dont les deux composantes indépendantes h_+ et h_\times sont représentées dans le tenseur $h_{\mu\nu}$ permet de dire que les ondes gravitationnelles possèdent une polarisation quadrupolaire, soit en $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$, soit en $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1$, illustrée figure 1.4.

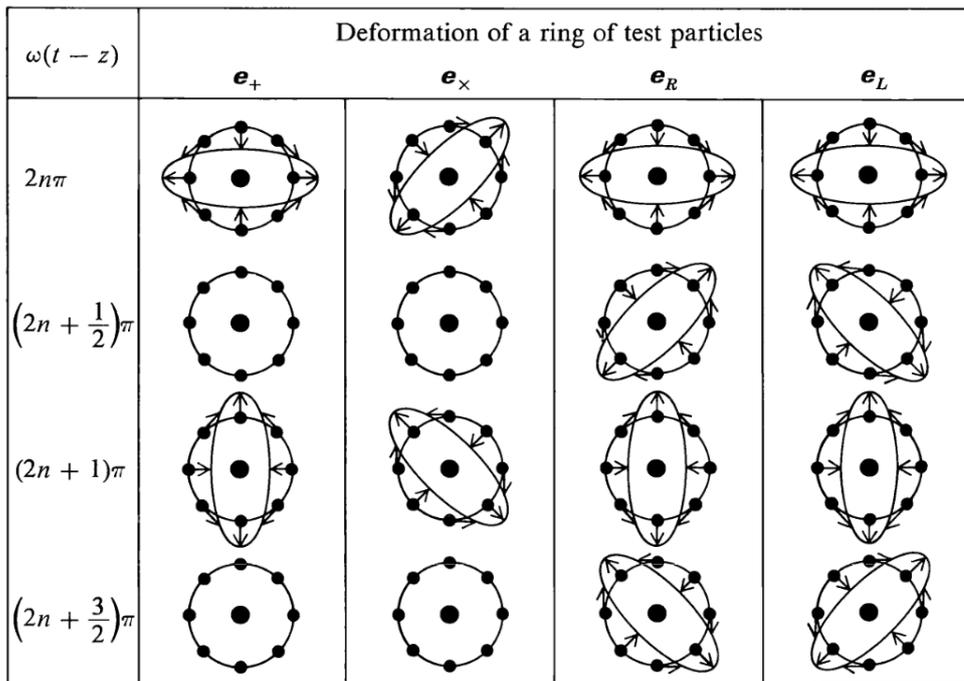


FIGURE 1.4 – Déformation d'un anneau de particules au passage d'une onde gravitationnelle. \mathbf{e}_+ désigne la polarisation quadrupolaire associée à h_+ , \mathbf{e}_\times celle à h_\times , \mathbf{e}_R et \mathbf{e}_L sont des polarisations circulaires, composition de h_+ et h_\times (Extrait du *Gravitation* de MISNER, THORNE et WHEELER 2008).

Il est à noter que la jauge présentée équations (1.48) et (1.49) n'est valable qu'en l'absence de sources. L'expression des sources n'est en effet pas invariante en général par ce changement de coordonnées. Par souci de clarté de lecture, nous noterons toujours dans la suite $\bar{h}_{\mu\nu}$ sous la forme $h_{\mu\nu}$ qui restera équivalente dans le cas où la source $T_{\mu\nu}$ restera de trace nulle, ce qui est le cas pour le champ électromagnétique.

1.2.2 Génération par accélération de masse

Il a été montré que nous pouvions détecter des ondes gravitationnelles lors d'accélération de masse produites par des objets astrophysiques extrêmement massifs. Mais est-il possible de produire et de détecter des ondes gravitationnelles dans le cadre d'une expérience de laboratoire ?

Certaines expériences présentent des idées pour générer des ondes gravitationnelles grâce aux lasers. Elles procèdent soit en essayant de reproduire un déplacement quadrupolaire de masse (RIBEYRE et TIKHONCHUK 2012), soit de manière moins conventionnelle en faisant appel à l'effet Gertsenshtein (GERTSENSHTEIN 1962) développé un peu plus bas.

Il est possible par interaction laser-matière d'accélérer de la matière sur un très court laps de temps. Ceci peut être réalisé soit en générant un front d'ablation en tirant sur une cible, soit en accélérant des ions déjà créés avec un laser intense (RIBEYRE et TIKHONCHUK 2012, GELFER et al. 2016, KADLECOVÁ et al. 2017).

La génération d'ondes gravitationnelles par déplacement de masse suit les équations d'Einstein linéarisées. Un ensemble de masses observé de suffisamment loin (à une distance R), et se déplaçant à des vitesses non-relativistes, génère un potentiel de gravitation ϕ , développable de la manière suivante, d'après LANDAU et LIFSHITZ 2009 :

$$\phi = -G \left(\frac{m}{R} + \frac{1}{6} D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j} \frac{1}{R} + \dots \right) \quad (1.51)$$

Où $m = \int_V \mu dV$ est la masse totale du système, μ la densité de masse et D_{ij} ($i, j \in \{x, y, z\}$) est le tenseur moment quadrupolaire du système, exprimé de la façon suivante :

$$D_{ij} = \int_V \mu (x_i x_j - \frac{1}{3} r^2 \delta_{ij}) \quad (1.52)$$

On peut alors exprimer la perturbation gravitationnelle de la manière suivante, en fonction de la dérivée seconde temporelle du moment (EINSTEIN 1916) :

$$h_{ij}(\mathbf{R}, t) = -\frac{2G}{Rc^4} \ddot{D}_{ij}(t - R/c) \quad (1.53)$$

Pour des considérations énergétiques, nous étudions ici le cas d'une masse uniformément accélérée dans la direction Oz , comme illustré par la figure 1.5. On notera qu'ici on ne s'intéresse qu'aux composantes transverses de la déformation gravitationnelle, qui sont les seules à subsister lors de la fixation de la jauge TT. Ainsi, par exemple, la perturbation h_{zz} sera nulle pour une onde gravitationnelle se propageant sur l'axe des z . L'accélération constante a nous donne donc pour les coordonnées z de notre masse,

$$z = \frac{a}{2} t^2 \quad (1.54)$$

On calcule donc maintenant le tenseur moment quadrupolaire D_{zz} d'une telle masse, que l'on reliera à la différence d'énergie cinétique ΔE_k , puis la déformation gravitationnelle h_{zz} :

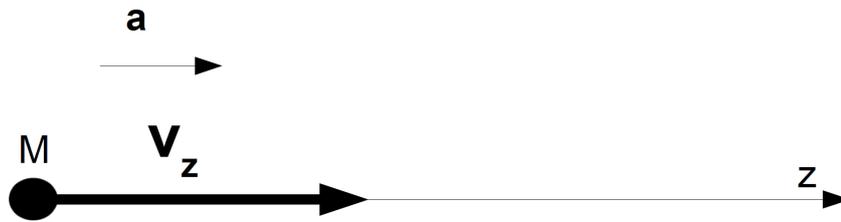


FIGURE 1.5 – Un ensemble de masses M , de masse totale m , est accéléré uniformément avec une accélération a dans la direction \mathbf{z} .

$$D_{zz} = m \left(z^2 - \frac{1}{3} z^2 \right) = \frac{2}{3} m z^2 \quad (1.55)$$

$$\dot{D}_{zz} = \frac{4}{3} m z \dot{z} \quad \ddot{D}_{zz} = \frac{4}{3} m (\dot{z}^2 + z \ddot{z}) \quad (1.56)$$

$$\ddot{D}_{zz} = \frac{4}{3} m \left(a^2 t^2 + \frac{1}{2} a t^2 a \right) = 2 m a^2 t^2 \quad (1.57)$$

et

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 = \frac{1}{2} m a^2 t^2, \quad \text{donc :} \quad (1.58)$$

$$\ddot{D}_{zz} = 4 \Delta E_k \quad (1.59)$$

D'où, d'après l'équation (1.53) :

$$|h_{zz}| = \frac{2G}{c^4} \frac{4 \Delta E_k}{R} \quad (1.60)$$

Il est important de remarquer qu'il y a une perte d'énergie significative lors de l'interaction laser-matière, car une grande partie de l'énergie déposée par le laser chauffe la matière. De plus, l'accélération de matière ainsi provoquée est majoritairement dipolaire et cette partie ne participe pas à la génération d'ondes gravitationnelles, qui ne sont générées que par un processus d'ordre quadrupolaire ou supérieur.

1.2.3 Génération par un champ électromagnétique

On s'intéresse alors dans cette partie à la génération d'ondes gravitationnelles produites par le champ électromagnétique lui-même. En effet, si une masse est capable de dévier la trajectoire d'un rayon lumineux, alors par principe d'action-réaction le rayon lumineux doit être capable d'une action sur la masse. Cela doit se traduire par la participation de termes purement électromagnétiques dans l'équation d'Einstein. Or, le tenseur énergie-impulsion inclut des termes provenant du seul champ électromagnétique, tels qu'ils ont été décrits par LANDAU et LIFSHITZ 2009, et ici réécrits en unités SI :

$$T_{\mu}^{\nu} = \frac{\partial A_l}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial A_l / \partial x^{\nu})} - \delta_{\mu}^{\nu} \Lambda \quad (1.61)$$

$$\text{avec } \Lambda = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \quad (1.62)$$

Où $F_{\mu\nu}$ est le tenseur électromagnétique défini par rapport au potentiel covecteur A_μ comme :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.63)$$

Que l'on peut écrire, dans sa forme invariante par rapport à la signature de la métrique F^μ_ν pour la métrique de Minkowski que nous prenons $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ comme :

$$F^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.64)$$

et ainsi :

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.65)$$

D'où après un développement de l'équation (1.61),

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} (F^{\mu\rho} F^\nu_\rho - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}) = -\sigma^{\mu\nu} \quad (1.66)$$

Où, pour $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $\sigma_{\mu\nu}$ est le tenseur des contraintes de Maxwell en 4×4 dimensions, qui s'exprime sous la forme suivante en unités SI :

$$-\sigma_{00} = \epsilon_0 \frac{E^2 + c^2 B^2}{2} \quad \text{densité d'énergie électromagnétique} \quad (1.67)$$

$$-\sigma_{0k} = -\sigma_{k0} = \frac{\epsilon_{ijk} E_i B_j}{c\mu_0} \quad \text{flux d'énergie dans la direction } x^k \text{ (} k = 1, 2, 3 \text{)} \quad (1.68)$$

$$\sigma_{ij} = \epsilon_0 E_i E_j + \frac{B_i B_j}{\mu_0} - \delta_{ij} \epsilon_0 \frac{E^2 + c^2 B^2}{2} \quad \text{le tenseur des contraintes de Maxwell en 3D (} i, j = 1, 2, 3 \text{)} \quad (1.69)$$

Ici, E et B sont respectivement le champ électrique et le champ magnétique induit.

Nous avons donc toute une partie du terme source des équations d'Einstein qui s'exprime uniquement en fonction du champ électromagnétique. Cette propriété est remarquée par TOLMAN, EHRENFEST et PODOLSKY 1931 en 1931, puis par GERTSENSHTEIN 1962 en 1962 qui montre la possibilité de générer des ondes gravitationnelles en envoyant des photons dans un champ magnétique statique.

La technologie laser a fait d'énormes progrès depuis 1962 et les ondes gravitationnelles ont été observées récemment, suscitant un regain d'intérêt pour l'étude de ces ondes. L'effet

Gertsenshtein sera donc la première situation que nous explorerons, afin de donner une base relativement simple à notre étude, sur laquelle nous allons pouvoir nous appuyer pour essayer d'optimiser l'amplitude de l'onde gravitationnelle que nous devrions observer.

1.2.4 L'effet Gertsenshtein

Pour un milieu où la seule source est le champ électromagnétique, on rappelle les équations d'Einstein linéarisées :

$$\square h_{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} \sigma_{\mu\nu} \quad (1.70)$$

On rappelle que l'on peut écrire l'équation ci-dessus car le tenseur énergie impulsion électromagnétique est de trace nulle, et donc :

$$\square h_{\mu\nu} = \square \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T_{\mu}^{\mu} \quad (1.71)$$

On exprime donc maintenant le champ électromagnétique présent dans l'espace que l'on étudie :

Dans l'espace, le champ magnétique statique \mathbf{B}_0 est orienté dans la direction \mathbf{e}_y . On ajoute maintenant la contribution de l'onde plane progressive monochromatique se déplaçant vers les x positifs à la vitesse de la lumière. Le champ électromagnétique total s'exprime alors par :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}} &= \tilde{E}_0 \cos(\omega t - kx) \mathbf{e}_z \\ \tilde{\mathbf{B}} &= B_0 - \tilde{B}_0 \cos(\omega t - kx) \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (1.72)$$

Cette situation est présentée schématiquement figure 1.6.

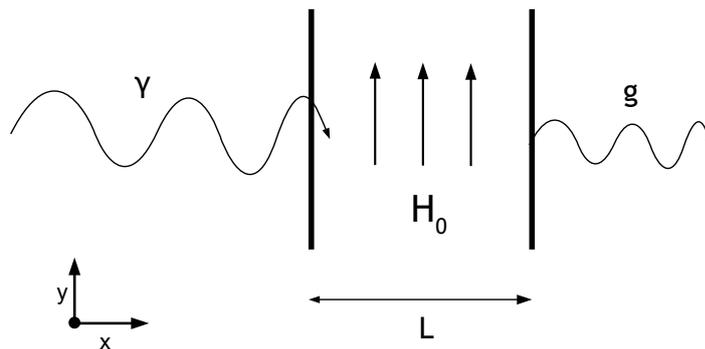


FIGURE 1.6 – Une onde plane électromagnétique se propage dans la direction \mathbf{x} , en présence d'un champ statique B_0 selon la direction \mathbf{y} . Il en ressort une onde gravitationnelle, en plus de l'onde électromagnétique entrante.

On obtient alors pour le terme source des équations d'Einstein décrit par l'équation (1.69), ainsi que pour $cB_0 = E_0$:

$$\sigma_{00} = \sigma_{11} = -\frac{\epsilon_0}{2} \left(c^2 B_0^2 + \tilde{E}_0^2 - 2cB_0\tilde{E}_0 \cos(\omega t - kx) + \tilde{E}_0^2 \cos(2\omega t - 2kx) \right) \quad (1.73)$$

$$\sigma_{01} = \sigma_{10} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(2cB_0\tilde{E}_0 \cos(\omega t - kx) - \tilde{E}_0^2 - \tilde{E}_0 \cos(2\omega t - 2kx) \right) \quad (1.74)$$

$$\sigma_{22} = -\sigma_{33} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(c^2 B_0^2 - 2cB_0\tilde{E}_0 \cos(\omega t - kx) \right) \quad (1.75)$$

Puisque le développement perturbatif des équations d'Einstein (1.46) est linéaire, on obtient trois composantes différentes dans l'expression de la déformation gravitationnelle $h_{\mu\nu}$ engendrée, liées aux trois termes différents présentés ci-dessus. Deux de ces composantes se trouvent dans la direction longitudinale à la propagation de l'onde électromagnétique. Cela constitue une différence intéressante par rapport à l'expression d'une déformation gravitationnelle dans le vide équation (1.50), qui n'admettait pas de déformation longitudinale par la sélection d'une base de coordonnées particulière. On obtient donc maintenant la forme suivante pour l'expression de la déformation gravitationnelle $h_{\mu\nu}$:

$$h_{\mu\nu}(t, x) = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & 0 & 0 \\ h_{01} & h_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_+ & h_\times \\ 0 & 0 & h_\times & -h_+ \end{pmatrix} \quad (1.76)$$

où $\square h_{00} = \sigma_{00}$, $\square h_{01} = \sigma_{01}$, $\square h_+ = \sigma_{22}$ et $\square h_\times = 0$.

La déformation gravitationnelle transverse h_+ et h_\times générée par l'interaction du champ magnétique B_0 avec l'onde plane électromagnétique est l'effet Gertsenshtein, mis en évidence par GERTSENSHTEIN 1962. Cet effet constitue une preuve analytique importante de l'interaction entre champs électromagnétique et gravitationnel en relativité générale.

Revenant à l'expression (1.76), on remarquera que, si $B_0 = 0$, nous n'avons plus la génération d'une déformation gravitationnelle transverse mais seulement longitudinale. Il est important de noter que bien que le changement de coordonnées opéré dans la section 1.2.1 n'est plus valable et que nous n'avons donc plus la trace de $h_{\mu\nu}$ égale à 0, la condition de jauge de Lorentz (1.45) s'applique toujours aux composantes de $h_{\mu\nu}$.

Reprenons le calcul de h_{00} d'après (1.70) et (1.73) :

$$\square h_{00} = -\frac{8\pi G\epsilon_0}{c^4} \left(c^2 B_0^2 + \tilde{E}_0^2 - 2cB_0\tilde{E}_0 \cos(\omega t - kx) + \tilde{E}_0^2 \cos(2\omega t - 2kx) \right) \quad (1.77)$$

Cette équation peut être résolue en 1+1D (une dimension spatiale et une temporelle), et constitue une extension de l'étude d'abord menée par KOLOSNITSYN et RUDENKO 2015, qui s'était intéressés aux termes transverses à la propagation de l'onde électromagnétique.

On étudie donc la solution de l'équation différentielle dans les cas où la source est une constante ou une fonction sinusoidale. Nous mettrons pour l'instant de côté le terme constant pour nous intéresser au terme oscillant. Il est possible d'étudier ces termes séparément puis de les ajouter pour former la solution totale car l'équation d'Einstein est linéaire. Nous noterons h_{osc} la solution de l'équation suivante :

$$\square h_{osc} = \frac{16\pi G\epsilon_0}{c^4} cB_0\tilde{E}_0 \cos(\omega t - kx) \quad (1.78)$$

Les solutions de cette équation sont les solutions homogènes multipliées par un polynôme d'ordre 2 au maximum : $h_{osc} = (A + Bx + Cx^2) \cos(\omega t - kx + \phi)$

On introduit cette solution dans l'équation :

$$(2B+2Cx)k \sin(\omega t - kx + \phi) - 2Ck^2 \cos(2\omega t - 2kx + \phi) = -\frac{16\pi G\epsilon_0}{c^4} cB_0 \tilde{E}_0 \cos(\omega t - kx) \quad (1.79)$$

Ce qui nous donne donc comme solution : $B = -\frac{8G\epsilon_0}{kc^4} cB_0 \tilde{E}_0$, $\phi = \pi/2$, $C = 0$, et A quelconque.

On obtient donc dans ce cas, pour $A = 0$:

$$h_{osc} = \frac{8G\epsilon_0}{kc^4} cB_0 \tilde{E}_0 x \sin(\omega t - kx) \quad (1.80)$$

On observe ici que la valeur de h augmente si on augmente la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ de l'onde plane (du fait du terme en $1/k$) ou l'amplitude de l'onde électromagnétique \mathbf{E}_0 . Si l'on pose L_0 la longueur selon x de la cavité où le champ B_0 est présent, on peut donc obtenir un maximum de déformation :

$$h_{max} = \frac{8G\epsilon_0}{kc^4} cB_0 \tilde{E}_0 L_0 \sin(\omega t - kx) \quad (1.81)$$

C'est en substance l'équivalent du résultat présenté par KOLOSITSYN et RUDENKO 2015 pour un terme de déformation gravitationnelle longitudinale.

De la même manière on obtient pour le terme de fréquence double dans l'équation (1.77), h_{double} tel que $\square h_{double} = -\frac{8\pi G\epsilon_0}{c^4} \tilde{E}_0^2 \cos(2\omega t - 2kx)$:

$$h_{double} = -\frac{2G\epsilon_0}{kc^4} \tilde{E}_0^2 x \sin(2\omega t - 2kx) \quad (1.82)$$

Cependant nous avons omis le problème des conditions aux limites pour le calcul d'une telle perturbation. Ainsi, le terme en x aurait très bien pu être en $(x - a)$ avec a un réel quelconque sans que cela gêne la démonstration. Il faut donc par souci de réalisme au moins considérer que l'onde plane que nous prenons à une extension temporelle finie. Notons la $\tau = L/c$ où L est la longueur du faisceau de lumière dans la direction x . Il est alors possible de poser A à un certain temps t auquel l'équation (1.82) est valide. Cependant dès le temps suivant, si l'on considère que l'enveloppe spatiale en x de notre onde plane se propage à la vitesse c comme c'est physiquement le cas pour une impulsion lumineuse, alors la solution n'est plus fonction de $x \cos(k(x - ct))$ mais de $(x - ct) \cos(k(x - ct))$. Or cette dernière fonction est de D'Alembertien nul et ne peut donc pas être solution de l'équation d'Einstein pour h_{osc} . Il semblerait donc que la méthode présentée dans l'article de KOLOSITSYN et RUDENKO 2015 ne fonctionne pas dès lors que l'on s'intéresse au faisceau de lumière en lui-même et non à son interaction avec le champ magnétique statique B_0 , du fait que la source se déplace elle-même à la vitesse de la lumière. L'étude de KOLOSITSYN et RUDENKO 2015 présente cependant des résultats intéressants dans le cadre de la génération de perturbation gravitationnelle par une cavité électromagnétique interagissant avec une onde électromagnétique. Il faut cependant faire remarquer que ce résultat ne prend pas en compte ce qui se passe en dehors de la cavité électromagnétique et ne donne donc pas de justification de comment cette déformation qui reste a priori de valeur constante en 1+1D en dehors de la cavité a donc une valeur différente avant, et après la cavité même à des distances infinies de la cavité, quand on s'attendrait plutôt à avoir $h_{\mu\nu} = 0$ à ces endroits.

Le calcul 1+1D échoue de plus à rendre compte du phénomène d'atténuation en $1/r$ de l'amplitude des ondes sphériques et des ondes gravitationnelles en particulier qui est somme toute en partie à l'origine de l'intérêt que nous portons à la réalisation d'une expérience

de génération de déformation gravitationnelle en laboratoire. Il en suit que seule une résolution des équations d'Einstein linéarisées (1.46) dans leur dimension d'origine, c'est à dire en 1+3D, peut apporter une solution satisfaisante à l'étude de la déformation générée par une impulsion de lumière seule dans l'espace-temps. Nous nous intéresserons aux méthodes de résolution d'une telle équation dans le chapitre suivant, et porterons notamment notre attention sur une autre partie ignorée dans les termes du tenseur énergie-impulsion électromagnétique qui est le terme constant apparaissant par linéarisation du terme source électromagnétique en $\tilde{E}_0^2 \cos^2(k(x - ct)) = \tilde{E}_0^2/2 + \tilde{E}_0^2/2 \times \cos(2k(x - ct))$.

Chapitre 2

Densité d'énergie constante stationnaire

2.1 Résolution 4D par fonction de Green

Résumé : Dans le chapitre précédent, nous avons mis en évidence l'existence d'équations dans la théorie de la relativité générale reliant l'énergie possédée et transportée par une onde électromagnétique et la déformation de l'espace-temps. Nous avons de plus montré que la résolution des équations d'Einstein ainsi exposées posait problème en 1+1D, ou du moins était incomplète puisque le modèle 1+1D ne peut prendre en compte deux paramètres essentiels au calcul de la déformation gravitationnel générée en laboratoire ou dans l'espace. En 1+1D l'extension spatiale d'une impulsion lumineuse est infinie, et les perturbations se propagent dans une seule direction. Au contraire, en 1+3D, l'impulsion lumineuse possède une extension spatiale finie, les perturbations gravitationnelles générées se propagent de manière sphérique et s'atténuent donc avec la distance sur laquelle elles se sont propagées.

Dans ce chapitre, nous présentons une méthode de résolution des équations d'Einstein pour un cas simple : un cylindre de densité d'énergie constante. Cet exemple constitue une étape importante dans la modélisation de la déformation gravitationnelle générée par une impulsion lumineuse. Il nous permet de mettre en place et de confirmer notre méthode de calcul sur des objets simples tels une sphère et un cylindre immobile et d'ainsi comparer nos résultats avec la métrique de SCHWARZSCHILD 1916 associée à des masses ponctuelles équivalentes à l'énergie, électromagnétique ou de masse, portée par les objets étudiés. Cette méthode sera portée par l'utilisation de la fonction de Green du d'Alembertien, qui est présent dans les équations d'Einstein, ainsi que par l'utilisation d'une méthode algorithmique pour résoudre l'intégrale ainsi obtenue. La solution analytique exacte ainsi obtenue nous permettra notamment d'étudier le régime d'établissement des déformations gravitationnelles.

2.1.1 Fonction de Green du d'Alembertien

Contrairement au cas 1+1D où nous pouvions trouver, moyennant observation du terme source, une solution évidente des équations d'Einstein linéarisées (1.46), le cas 1+3D complexifie suffisamment les équations, par l'apparition des opérateurs ∂_y^2 et ∂_z^2 dans le d'Alembertien pour rendre toute recherche de ce type extrêmement ardue, pour ne pas dire futile.

Nous devons donc nous reposer sur une autre méthode de résolution de l'équation. Les méthodes de résolution par transformée de Fourier, variation de la constante, ou approximation paraxiale se soldent par un échec comme ce fut le cas en 1+1D. Nous devons donc passer par la fonction de Green du d'Alembertien qui nous permettrait de calculer la déformation gravitationnelle produit par une source quelconque à tout moment, en échange

d'une complexité élevée au niveau du calcul d'intégrales, puisque nous avons les propriétés suivantes pour la fonction de Green du d'Alembertien $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$:

$$\square G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(ct - ct') \quad (2.1)$$

$$\square h(\mathbf{r}, t) = Source(\mathbf{r}, t) \quad (2.2)$$

$$h = \int \int \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r}' \int_{\mathbb{R}} dt' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') Source(\mathbf{r}', t') \quad (2.3)$$

Calculons donc la fonction de green à partir de l'équation (2.1) :

$$\square G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = \Delta G - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(ct - ct') \quad (2.4)$$

$$\text{(Transformée de Fourier en espace)} \quad -q^2 \bar{G} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \bar{G} = e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} \delta(ct - ct') \quad (2.5)$$

On a la solution de l'équation homogène $\partial_t^2 \bar{G}_0 + q^2 c^2 \bar{G}_0 = 0$ sous la forme :

$$\bar{G}_0 = C_1 e^{iqct} + C_2 e^{-iqct} \quad (2.6)$$

C_1 et C_2 constantes par rapport à t .

On trouve alors la solution particulière par méthode de variation de la constante, ce qui nous donne, pour l'équation 2.5, le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t C_1 e^{iqct} + \partial_t C_2 e^{-iqct} = 0 \\ \partial_t C_1 (iqce^{iqct}) - \partial_t C_2 (iqce^{-iqct}) = -c^2 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} \delta(ct - ct') \end{cases} \quad (2.7)$$

$\partial_t C_1$ et $\partial_t C_2$ sont donc solutions d'un système de Cramer :

$$\partial_t C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-iqct} \\ -c^2 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} \delta(ct - ct') & -iqce^{-iqct} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{iqct} & e^{-iqct} \\ iqce^{iqct} & -iqce^{-iqct} \end{vmatrix}} = -\frac{c}{2iq} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} e^{-iqct} \delta(ct - ct') \quad (2.8)$$

$$\partial_t C_2 = \frac{\begin{vmatrix} e^{iqct} & 0 \\ iqce^{-iqct} & -c^2 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} \delta(ct - ct') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{iqct} & e^{-iqct} \\ iqce^{iqct} & -iqce^{-iqct} \end{vmatrix}} = \frac{c}{2iq} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} e^{iqct} \delta(ct - ct') \quad (2.9)$$

Il reste alors à prendre la primitive de C_1 et C_2 sur t

$$\mathbf{Attention} : \int dt \delta(ct - ct') = \int \frac{1}{c} d(ct) \delta(ct - ct') = \frac{1}{c} H(ct - ct') + Cte \quad (2.10)$$

D'où, si l'on considère un potentiel retardé, i.e $\bar{G}(t < t') = 0$:

$$C_1 = -\frac{1}{2iq} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} e^{-iqct'} H(t - t') \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{1}{2iq} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} e^{iqct'} H(t - t') \quad (2.11)$$

Autrement, en considérant un potentiel avancé, i.e $\bar{G}(t > t') = 0$:

$$C_1 = \frac{1}{2iq} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} e^{-iqct'} (1 - H(t - t')) \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{1}{2iq} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} e^{iqct'} (H(t - t') - 1) \quad (2.12)$$

Ainsi, pour une situation respectant le principe de causalité, on aura un potentiel retardé, de fonction de Green associée :

$$\bar{G} = H(t - t') \frac{1}{q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} \frac{(e^{iqc(t-t')} - e^{-iqc(t-t')})}{2i} \quad (2.13)$$

$$\bar{G} = H(t - t') \frac{1}{q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} \sin(qc(t - t')) \quad (2.14)$$

D'où,

$$G = H(t - t') \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V \frac{d\mathbf{q}}{q} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}' - \mathbf{r})} \sin(qc(t - t')) \quad (2.15)$$

$$= H(t - t') \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\infty} q^2 dq \frac{1}{q} \sin(qc(t - t')) e^{iq|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos\theta} \quad (2.16)$$

(Changement de variable $u \mapsto \cos\theta$)

$$= H(t - t') \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} q dq \sin(qc(t - t')) \underbrace{\int_{-1}^1 d(\cos\theta) e^{iq|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos\theta}}_{\frac{e^{iq|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - e^{-iq|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{iq|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}} \quad (2.17)$$

$$= H(t - t') \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \int_0^{\infty} 2dq \sin(qc(t - t')) \sin(q|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (2.18)$$

Étudions cette dernière intégrale plus en détail.

$$\int_0^{\infty} 2dq \sin(qc(t - t')) \sin(q|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \int_0^{\infty} dq \left[\cos(q(c(t - t') - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)) - \cos(q(c(t - t') + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)) \right] \quad (2.19)$$

$$\int_0^{\infty} dq \cos(q(c(t - t') - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)) = \pi \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \cos(q(c(t - t') - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)) \quad (2.20)$$

$$= \pi \delta(c(t - t') - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (\text{Transformée de Fourier inverse}) \quad (2.21)$$

S'ensuit,

$$\int_0^{\infty} 2dq \sin(qc(t - t')) \sin(q|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \pi [\delta(c(t - t') - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) - \delta(c(t - t') + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)] \quad (2.22)$$

Et donc finalement,

$$G = H(t - t') \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left(\delta(c(t - t') - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) - \delta(\underbrace{c(t - t') + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}_{>0}) \right) \quad (2.23)$$

$$G = H(t - t') \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(c(t - t') - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (2.24)$$

Nous avons ainsi accès, grâce à la fonction de Green calculée ci-dessus, à l'expression de la solution des équations d'Einstein linéarisées (1.46) sous forme d'une expression intégrale comme exprimée équation (2.3). Par mesure de précaution et afin d'avoir une idée de la méthode de calcul à utiliser pour déterminer la solution sous forme analytique à partir de cette expression, nous allons utiliser la fonction de Green dans le calcul de la déformation gravitationnelle générée par un objet connu.

2.1.2 Validation de la méthode : sphère massive et métrique de Schwarzschild

En 1916, soit seulement un an après la présentation de la théorie de la relativité générale, SCHWARZSCHILD 1916 met en évidence la déformation gravitationnelle générée par une masse ponctuelle. La masse ponctuelle ne figure pas un objet physique, mais approche de manière très convenable le cas d'une boule de masse volumique constante. Nous allons donc appliquer la méthode de résolution par fonction de Green à une boule de densité d'énergie constante, ce qui est en tout point similaire au cas d'une boule de masse volumique constante. La comparaison du résultat ainsi obtenu avec l'expression de la métrique de Schwarzschild nous permettra alors de confirmer ou d'infirmer l'efficacité de cette méthode pour exprimer la déformation gravitationnelle générée par un objet possédant une certaine densité d'énergie.

Nous considérons ici la boule de densité d'énergie constante apparaissant au temps $t = 0$ dans un espace préalablement vide de toute matière ou champ ($T_{\mu\nu}^{em} = T_{\mu\nu}^{mat} = 0$). On reprend l'expression de la solution de Green pour une source quelconque (2.3) et on prend comme expression pour la source une boule de rayon R et de densité d'énergie ρc^2 :

$$h = \frac{\chi}{4\pi} \rho c^2 \int_{-\pi}^{\pi} d\phi' \int_0^{\pi} \sin \theta' d\theta' \int_0^{\infty} dr' H\left(t - \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}{c}\right) H(R - r') \frac{r'^2}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \quad (2.25)$$

On pose $\mathbf{r} = (r, 0, 0)$, ce qui donne encore la solution générale, par symétrie sphérique.

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta \quad (2.26)$$

$$h = \frac{\chi}{2} \rho c^2 \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^\infty \frac{r'^2}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}} \times H\left(ct - \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}\right) h(R - r') dr' \quad (2.27)$$

(Changement de variable $u \mapsto \cos \theta'$)

$$h = -\frac{\chi}{2} \rho c^2 \int_{-1}^1 du \int_0^\infty dr' \frac{r'^2}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'u}} H\left(ct - \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'u}\right) H(R - r') \quad (2.28)$$

Pour faciliter le calcul on considérera en lieu et place du Heaviside dépendant de θ la condition forte $H(ct - r - r')$

$$= \frac{\chi}{2} \rho c^2 \int_0^\infty dr' \frac{r'^2}{rr'} \left(\sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr'} - \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'} \right) H(ct - r - r') H(R - r') \quad (2.29)$$

$$= \frac{\chi}{2} \rho c^2 \int_0^\infty dr' \frac{r'}{r} \left(H(r - r') 2r' + H(r' - r) 2r \right) H(ct - r - r') H(R - r') \quad (2.30)$$

$$= \frac{\chi}{2r} \rho c^2 \left(H(ct - r - R) \int_0^R dr' r' \left(H(r - r') 2r' + H(r' - r) 2r \right) + H(R + r - ct) H(ct - r) \int_0^{ct-r} dr' r' \left(H(r - r') 2r' + H(r' - r) 2r \right) \right) \quad (2.31)$$

Intéressons nous de plus près à une de ces intégrales, dont nous spécifions ici l'expression pour $r \leq R$, l'intégration pour $r > R$ étant triviale :

$$\int_0^R dr' r' \left(H(r - r') 2r' + H(r' - r) 2r \right) = \int_0^r 2r'^2 dr' + \int_r^R 2rr' dr' \quad (2.32)$$

$$= \frac{2}{3} r^3 + rR^2 - r^3 = rR^2 - \frac{r^3}{3} \quad (2.33)$$

On obtient donc finalement :

$$h = \frac{\chi}{2r} \rho c^2 \left[H(ct - r - R) \left(H(r - R) \frac{2}{3} R^3 + H(R - r) \left(rR^2 - \frac{r^3}{3} \right) \right) + H(R + r - ct) H(ct - r) \left(H(2r - ct) \frac{2}{3} (ct - r)^3 + H(ct - 2r) \left(r(ct - r)^2 - \frac{r^3}{3} \right) \right) \right] \quad (2.34)$$

C'est à dire à t grand et $r > R$ (on rappelle que $\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$) :

$$h = \frac{\chi R^3}{3r} \rho c^2 = \frac{8\pi G \rho R^3}{3rc^2} = \frac{2}{c^2} \frac{GM}{r} \quad (2.35)$$

Ce qui correspond exactement au résultat attendu par la métrique de Schwarzschild :

$$ds^2 = g_{00}dt_0^2 + \dots = (-1 + h_{00})dt_0^2 + \dots \quad (2.36)$$

$$\text{avec} \quad h_{00} = \frac{2\phi}{c^2} \quad (2.37)$$

$$\phi = \frac{GM}{r} = \frac{G \frac{4}{3}\pi\rho R^3}{r} \quad (2.38)$$

$$h_{00} = \frac{8\pi G\rho R^3}{3rc^2} \quad (2.39)$$

Nous pouvons donc confirmer les résultats établis par SCHWARZSCHILD 1916 grâce à l'expression (2.3), et pouvons notamment utiliser cette méthode de calcul pour déterminer la déformation gravitationnelle générée par des sources définies par une distribution de densité d'énergie. Nous pouvons donc maintenant aborder le cœur de l'étude abordée par cette thèse et nous intéresser à la déformation gravitationnelle générée par une impulsion lumineuse, que nous modéliserons ici comme un cylindre de lumière.

2.2 Application à l'apparition à $t=0$ d'un cylindre de densité d'énergie immobile

Résumé : Fort de la preuve que le calcul par fonction de Green de la déformation gravitationnelle générée par une source de densité d'énergie localisée dans l'espace s'avère correct dans un cas simple, on s'approche progressivement du calcul pour une impulsion lumineuse. Cette impulsion pouvant être décrite approximativement comme un cylindre de densité d'énergie constante se déplaçant à la vitesse de la lumière, la première étape de calcul sera donc de passer de la sphère immobile que nous avons section 2.1.2, à un cylindre immobile de même densité d'énergie.

J'entreprendrai donc dans cette section le calcul de la déformation gravitationnelle générée par un cylindre statique, de densité d'énergie constante \mathcal{A} , apparaissant dans un espace-temps préalablement plat au temps $t = 0$. Ce calcul nécessitera la mise en place d'une méthode de calcul, basée sur une logique algorithmique, des intégrales de fonctions définies par des fonctions de Heaviside couplées. Cela sera suivi d'une visualisation et d'une analyse de la solution analytique obtenue qui aura pour but de vérifier la cohérence du résultat avec la théorie Newtonienne à longue distance, ainsi que d'apporter une meilleure vision de l'établissement d'une déformation gravitationnelle.

2.2.1 Établissement du calcul analytique de la perturbation gravitationnelle engendrée

Nous procédons donc au calcul de la déformation gravitationnelle provoquée par l'apparition au temps $t = 0$ d'un cylindre immobile de densité d'énergie \mathcal{A} . Cette dernière peut représenter la densité d'énergie d'un champ électromagnétique, ou encore la densité d'énergie de masse ρc^2 , la densité de masse d'un objet multipliée par le carré de la vitesse de la lumière. On peut donc considérer ce cas physiquement comme l'apparition d'un cylindre massif de densité massique uniforme ($\mathcal{A} = \rho c^2$), ou l'établissement soudain d'un champ électromagnétique dans une région cylindrique de l'espace ($\mathcal{A} = w$), sans besoin d'une distinction quelconque du point de vue de l'influence gravitationnelle. Ce cas s'apparente au cas précédemment étudié de l'établissement de la métrique de Schwarzschild pour l'apparition d'une sphère massive. On représente la situation théorique physique présente figure 2.1. Nous prendrons ici un cylindre de rayon R et de hauteur L de telle manière que l'axe Oz soit l'axe de symétrie du cylindre. Le cylindre commence donc sur cet axe en $z = 0$ et se termine

en $z = L$. Ce cylindre apparaît à l'instant $t = 0$ dans un espace-temps préalablement plan, c'est-à-dire possédant la métrique de Minkowsky $\eta_{\mu\nu}$. Il vient engendrer une déformation de cet espace-temps, déformation qui doit être, aux temps longs et loin de la source, celle décrite par la physique Newtonienne pour un objet de densité de masse équivalente $\rho = \mathcal{A}/c^2$.

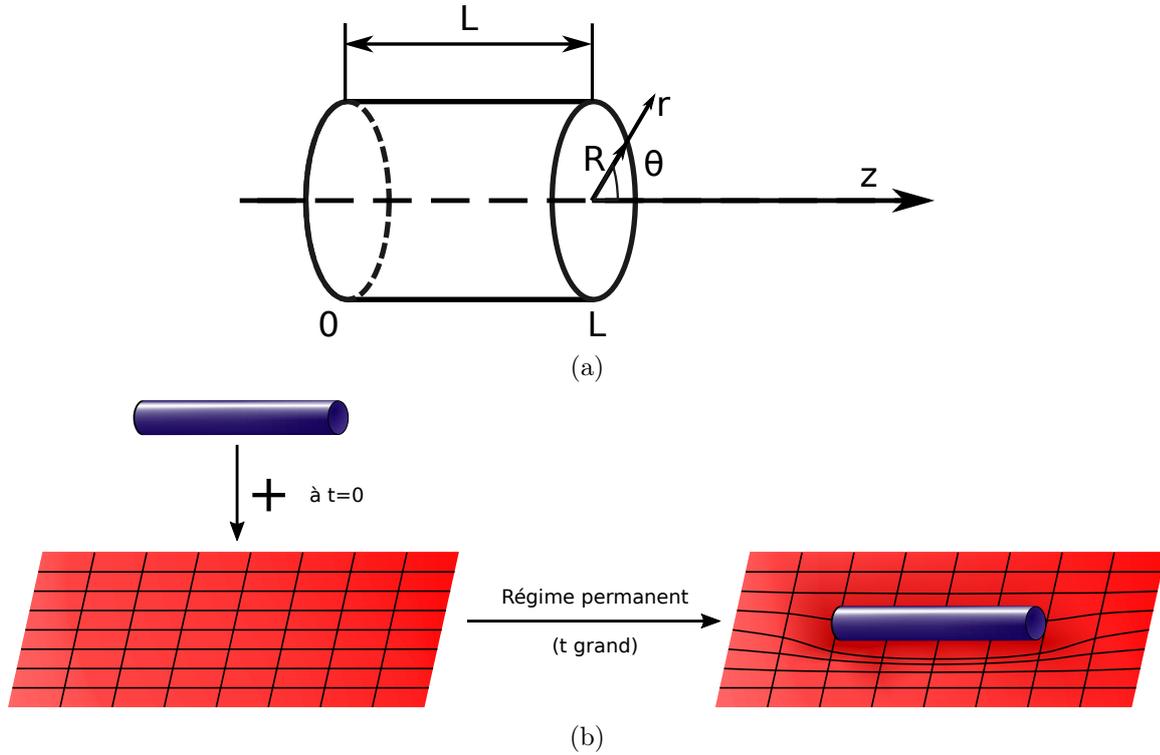


FIGURE 2.1 – a) Représentation schématique du cylindre de densité d'énergie statique étudié et b) Présentation de l'expérience de pensée modélisant l'établissement du potentiel gravitationnel dudit cylindre à $t=0$ et $t \gg 0$

On résout donc ici l'équation d'Einstein linéarisée (1.46) pour la composante de la métrique h_{00} . Par la suite la perturbation h_{00} sera notée h par souci de clarté. On rappelle l'expression générale de la solution de l'équation de d'Alembert aux petites déformations de la métrique, pour un système de coordonnées cylindriques :

$$h(ct, z, r, \theta) = \frac{2\chi}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{\infty} dr' \int_0^{2\pi} d\theta' \text{Source} \left(ct - \sqrt{(z - z')^2 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}, z', r', \theta' \right) \times \frac{r'}{\sqrt{(z - z')^2 + (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta')}} \quad (2.40)$$

Où le terme source peut s'écrire sur le volume du cylindre : $\text{Source}(ct, z, r, \theta) = \mathcal{A}$ la densité d'énergie. À noter que l'angle θ n'apparaît pas dans l'expression de droite de l'équation car le système possède une symétrie cylindrique, d'où $h(ct, z, r, \theta) = h(ct, z, r, 0)$. Par simplicité je propose $h(ct, z, r, \theta) = h(ct, z, r)$.

Par souci de simplicité et afin de rendre l'intégration analytique de cette fonction possible, on calculera uniquement l'influence gravitationnelle du cylindre sur l'axe Oz c'est à dire l'axe de symétrie de rotation du cylindre. Nous avons $r = 0$, et notons donc :

$$h(ct, z, r = 0, \theta) = h(ct, z)$$

L'expression pour la perturbation devient :

$$h(ct, z) = \frac{\chi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{\infty} dr' \int_0^{2\pi} d\theta' Source \left(t - \sqrt{(z - z')^2 + r'^2}, z', r', \theta' \right) \times \frac{r'}{\sqrt{(z - z')^2 + r'^2}} \quad (2.41)$$

Pour un cylindre de densité homogène on a comme densité volumique :

$$Source(ct, z, r) = \mathcal{A}H(ct)H(z)H(L - z)H(R - r) \quad (2.42)$$

Où \mathcal{A} est la densité d'énergie supposée constante à l'intérieur du cylindre.

D'où :

$$h(ct, z) = \mathcal{A}\chi \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{\infty} dr' H \left(ct - \sqrt{(z - z')^2 + r'^2} \right) H(z')H(L - z')H(R - r') \times \frac{r' dr'}{\sqrt{(z - z')^2 + r'^2}} \quad (2.43)$$

La primitive de la fonction intégrande sans Heaviside peut s'écrire facilement comme :

$$\int \frac{r' dr'}{\sqrt{(z - z')^2 + r'^2}} = \sqrt{(z - z')^2 + r'^2} \quad (2.44)$$

Cependant, une difficulté se présentant au calcul de l'intégrale équation (2.43) est la présence d'une fonction de Heaviside supplémentaire par rapport au nombre de fonctions Heaviside nécessaires pour définir les bornes de l'intégration : $H \left(ct - \sqrt{(z - z')^2 + r'^2} \right)$.

Cette fonction de Heaviside dépend de plus de z' et de r' , ce qui rajoute un niveau de complexité au calcul. Il nous faut donc étudier une méthode de résolution des intégrales dans lesquelles on peut avoir de nombreuses fonctions de Heaviside couplées.

2.2.2 Méthode de calcul d'intégrales à fonction de Heaviside couplées

Les calculs sus-cités nous mettent face à des intégrandes composées de fonctions multipliées par plusieurs distributions de Heaviside, dont certaines dépendent de plusieurs variables d'intégration ou entrent en compétition entre elles pour la détermination des bornes d'intégrations. Il y a plusieurs manières d'aborder ce problème : celle que je choisirai de présenter ici suit un modèle algorithmique.

Nous avons l'expression suivante :

$$h(ct, z) = \int_0^L dz' \int_0^R dr' f(r', z') H(ct - \sqrt{r'^2 + z'^2}) \quad (2.45)$$

Nous ne nous intéressons pour l'instant pas à l'expression exacte de $f(r', z')$, puisque cette dernière n'apporte rien à la démonstration ci-présentée. Nous nommons F_r une primitive de la fonction f sur r' et F_{rz} une primitive double de f sur r' et z' . Afin de résoudre l'intégrale il faut comprendre la signification de ces distributions de Heaviside : elles ne représentent rien de plus qu'une condition liant t , r' , et z' ensemble ; par exemple ici : $ct - \sqrt{r'^2 + (z' - z)^2} \geq 0$.

Elle est similaire sous cette forme à d'autres conditions d'intégration, comme $r' \leq R$ ou $z' \geq 0$. Ainsi nous pouvons écrire à nouveau l'expression (2.45) comme :

$$h(ct, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' H(z') H(L - z') \int_{-\infty}^{\infty} dr' f(r', z') H(ct - \sqrt{r'^2 + (z' - z)^2}) H(r') H(R - r') \quad (2.46)$$

Pour avoir la première intégration, les conditions suivantes doivent être satisfaites par r' :

- $r' \geq 0$
- $r' \leq R$
- $ct - \sqrt{r'^2 + (z' - z)^2} \geq 0$

On doit expliciter la dernière condition pour que la dépendance en r' soit linéaire, ç.à.d avoir une inégalité de la forme $r' \geq A$ ou $r' \leq B$.

$$ct - \sqrt{r'^2 + (z' - z)^2} \geq 0 \quad (2.47)$$

$$ct \geq \sqrt{r'^2 + (z' - z)^2}, \quad ct \text{ et } \sqrt{r'^2 + (z' - z)^2} \geq 0, \quad (2.48)$$

(le signe ne change pas à la mise au carré)

$$c^2 t^2 \geq r'^2 + (z' - z)^2 \quad (2.49)$$

$$r'^2 \leq c^2 t^2 - (z' - z)^2 \quad (2.50)$$

Ce qui nous amène à deux conclusions, nous avons une nouvelle borne inférieure et supérieure pour r' , et on doit avoir $c^2 t^2 - (z' - z)^2 \geq 0$ puisque naturellement $r'^2 \geq 0$.

On doit donc maintenant comparer les différentes bornes inférieures et supérieures, et faire une disjonction de cas si aucun ordre clair ne peut être établi entre elles.

Cela nous donne ici les cas suivants :

En conditions impératives pour l'intégration :

- $ct - z + z' \geq 0$
- $ct + z - z' \geq 0$

En conditions sur les bornes :

- $c^2 t^2 - (z' - z)^2 \geq R^2 \longrightarrow r'$ admet comme borne supérieure R
ou
 $R^2 > c^2 t^2 - (z' - z)^2 \longrightarrow r'$ admet comme borne supérieure $\sqrt{c^2 t^2 - (z' - z)^2}$
- $-\sqrt{c^2 t^2 - (z' - z)^2} \leq 0 \longrightarrow r'$ admet comme borne inférieure 0

L'opération logique "et" est considérée comme une multiplication des Heavisides, tandis que l'opération "ou" est interprétée comme une addition des deux Heavisides. Ces conditions, transcrites dans l'expression de l'intégrale précédente donnent, en notant $F_r(r, z)$, l'expression d'une primitive de f sur la variable r' , l'équation suivante :

$$h(ct, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' [H(z') H(L - z') H(ct + z - z') H(ct - z + z')] \times \left(H(\sqrt{c^2 t^2 - (z' - z)^2} - R) F_r(R, z') + H(R - \sqrt{c^2 t^2 - (z' - z)^2}) F_r(\sqrt{c^2 t^2 - (z' - z)^2}, z') - F_r(0, z') \right) \quad (2.51)$$

Il faut donc maintenant répéter l'algorithme précédent avec les bornes en z' , ce qui implique de traduire les conditions que l'on a actuellement sous une forme où z' apparaît uniquement de manière linéaire.

$$\text{Exemple : } ct - \sqrt{R^2 + (z' - z)^2} \geq 0 \Rightarrow c^2t^2 \geq R^2 + (z' - z)^2 \Rightarrow (z' - z)^2 \leq c^2t^2 - R^2$$

Ce dernier résultat nous donne 3 conditions différentes qui doivent être vérifiées en même temps :

- $c^2t^2 - R^2 \geq 0$
- $z' \geq z - \sqrt{c^2t^2 - R^2}$
- $z' \leq z + \sqrt{c^2t^2 - R^2}$

Ces conditions seront notées sous forme de Heaviside comme :

$$H(c^2t^2 - R^2)H(z' - z + \sqrt{c^2t^2 - R^2})H(z + \sqrt{c^2t^2 - R^2} - z') \quad (2.52)$$

Conditions qu'il faudra alors comparer avec les autres conditions déjà présentes dans l'intégrale.

L'algorithme d'intégration de fonctions définies par parties peut alors être résumé par le diagramme Figure 2.2. On commence par réunir les conditions d'intégration, et les fonctions auxquelles elles sont associées. On peut alors commencer l'algorithme pour l'intégration sur une variable. En voyant l'intégrale comme l'évaluation de la primitive de l'intégrande entre deux bornes, on peut déduire les deux éléments importants dans la résolution analytique d'une intégrale. D'un côté, on doit isoler les primitives des fonctions intégrées, et de l'autre savoir entre quelles bornes ces primitives seront évaluées. Trouver les primitives se fait de manière plutôt classique et nous ne nous attarderons donc pas sur le sujet. En revanche, dans le cas de fonctions définies grâce à des fonctions de Heaviside, la détermination des bornes d'intégration nécessite de linéariser les conditions inscrites dans les fonctions de Heaviside. En effet, les bornes sont une manière d'écrire les conditions linéaires sur la variable d'intégration : $borne_{sup} \geq variable \geq borne_{inf}$. Il faut donc pouvoir isoler cette variable dans les conditions, c'est à dire linéariser la condition par rapport à cette variable. Suite à cette étape, on se retrouve donc avec une liste de conditions et de bornes associées aux primitives précédemment calculées. Mais certaines de ces conditions peuvent être en compétition. Il faut donc comparer sur tous les domaines possibles les bornes pour savoir quelle borne supérieure est la plus petite et délimite donc la limite supérieure de l'intégration. De la même manière la plus grande borne inférieure délimite la limite inférieure de l'intégration. Que se passe-t-il cependant si la borne supérieure est inférieure à la borne inférieure ? Les bornes d'intégrations, écrites comme conditions ne permettent pas l'existence de ce genre de cas, car cela viendrait à écrire $variable \geq borne_{inf} > borne_{sup} \geq variable$ ce qui mène à un résultat absurde. Les intégrales présentant cette particularité dans ce type de résolution sont donc nulles car elles n'existent sur aucun domaine d'intégration.

Quand les bornes sont déterminées, il n'est pas toujours possible de les ordonner juste grâce à leur expression analytique. Il faut donc dans ce cas introduire de nouvelles conditions formulées elles aussi par des fonctions de Heaviside qui posent le cadre dans lequel l'intégrale accolée est celle réellement calculée.

Une fois toutes ces étapes faites, on arrive enfin à une expression pour l'intégration sur la variable considérée, créant donc une nouvelle fonction définie par parties pour certaines nouvelles conditions. Si besoin est de continuer l'intégration de cette fonction sur une autre variable, on prendra les nouvelles fonctions et leurs conditions associées comme point de départ du nouveau calcul et l'on réappliquera les procédés mentionnés plus haut et illustrés par l'exemple de calcul en début de cette section.

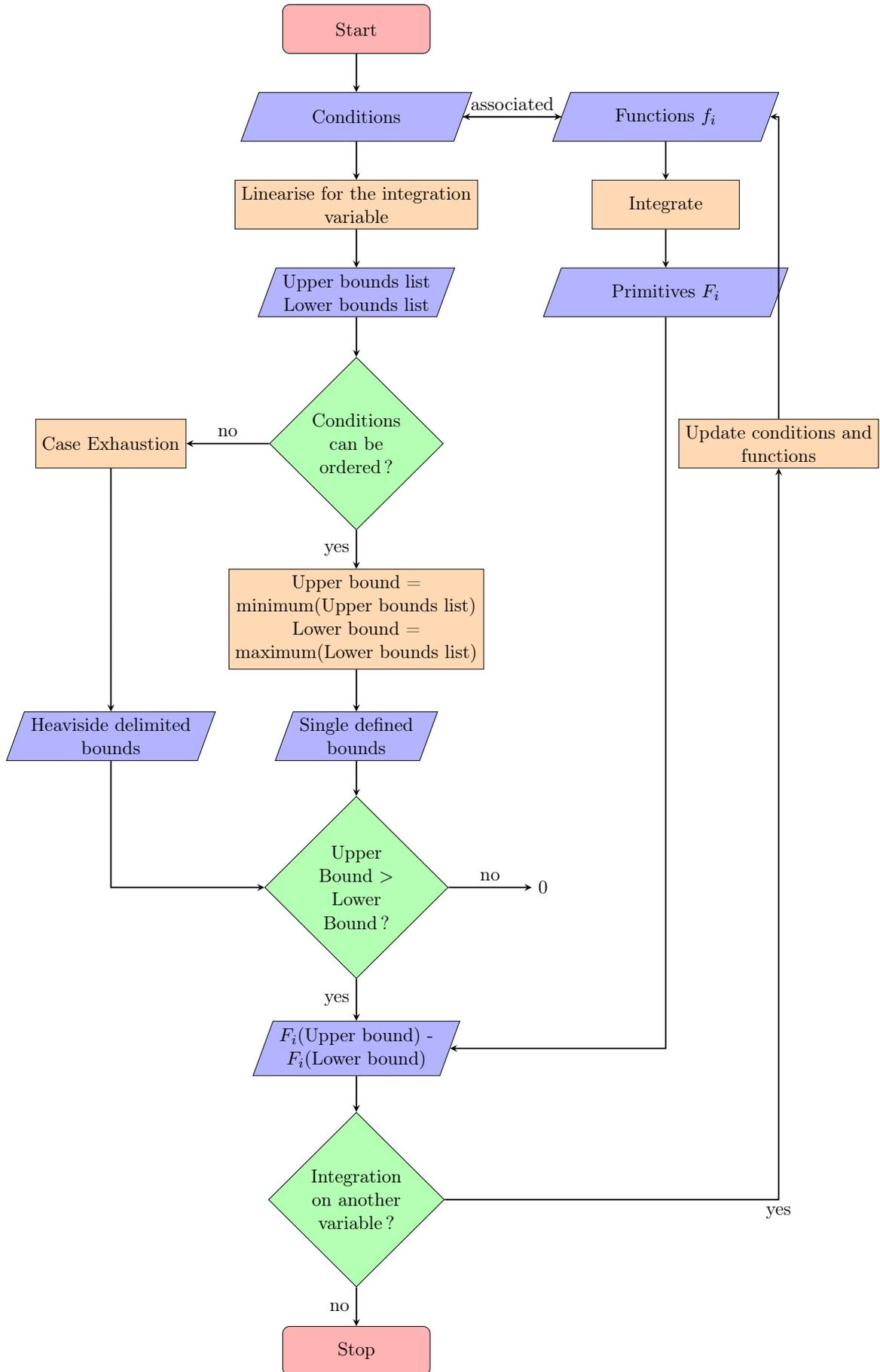


FIGURE 2.2 – Algorithme de résolution des bornes d'intégration d'une fonction sur un intervalle réel borné.

Cet algorithme pourra servir de méthode de calcul analytique pour toutes les intégrations présentant des fonctions de Heaviside couplées étudiées dans ce document. L'avantage de cette procédure est que l'on peut clairement séparer le processus de calcul de l'intégrale en de nombreux plus petits morceaux, ce qui rend la tâche globale moins pénible et plus facile à exporter, même partiellement, vers des procédures informatiques.

En reprenant le calcul de la déformation gravitationnelle générée par le cylindre statique equation (2.43) et en identifiant l'expression de l'intégrale avec l'équation (2.45), nous pouvons nous baser sur l'expression (2.51) pour poursuivre l'intégration. Nous obtenons donc finalement :

$$h(ct, z) = \mathcal{A}\chi \int_{-\infty}^{\infty} dz' H(z') H(L - z') H(z' - (z - ct)) H((z + ct) - z') \underbrace{\left[-\sqrt{(z - z')^2} \right]}_{\text{borne inf d'intégration}} + \underbrace{H\left(\sqrt{c^2 t^2 - (z - z')^2} - R\right) \sqrt{(z - z')^2 + R^2} + H\left(R - \sqrt{c^2 t^2 - (z - z')^2}\right) ct}_{\text{borne sup d'intégration}} \quad (2.53)$$

- La partie en $\sqrt{(z - z')^2}$: borne inférieure d'intégration, décrit tous les cas présents dans la limite d'extension de la source (z' entre 0 et L) et de causalité ($\sqrt{(z' - z)^2 + r'^2} \leq ct$).
- La partie en ct : borne supérieure d'intégration, décrit les contributions de l'intégration qui ne rencontrent pas le bord radial du cylindre dans la limite de causalité.
- La partie en $\sqrt{R^2 + (z - z')^2}$: borne supérieure d'intégration, décrit les contributions de l'intégration qui rencontrent le bord radial du cylindre.

L'interprétation de ce résultat en termes d'aires d'intégration de la source est illustrée sur la figure 2.3. La première figure (2.3a) représente le cylindre à un temps t_1 après son apparition, pour lequel $ct_1 < R$ avec R le rayon du cylindre). Dans ces conditions, seul le deuxième terme dans la borne supérieure d'intégration de l'équation (2.53) existe. La déformation gravitationnelle générée à un tel temps est donc l'intégration pondérée par l'inverse de la distance au point d'observation des termes sources sur la boule de rayon ct_1 .

La seconde figure (2.3b) nous donne une image de la situation à un temps plus grand t_2 tel que $ct_2 > R$. Ainsi l'intégration ne se fait plus sur l'intégralité de la boule de rayon ct_2 , car le rayon de cette boule est devenu plus grand que le rayon R du cylindre. L'intersection entre la boule et le cylindre source n'est donc plus la boule dans son intégralité. À z' fixé, on prend donc dans l'intégrale les points appartenant au disque de rayon R correspondant à la section du cylindre en z' si le rayon donné par la boule est plus grand (zone verte de la figure 2.3b). Dans le cas contraire le disque est réduit au rayon donné par la boule c'est à dire $\sqrt{c^2 t_2^2 - (z - z')^2}$ (zone rouge de la même figure (2.3b)).

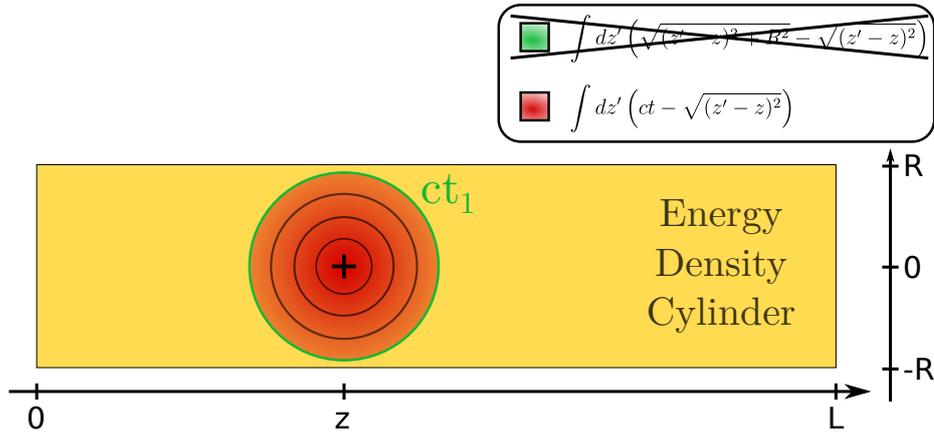
On a donc maintenant 3 intégrandes différentes de primitives respectives :

$$\int dz' \sqrt{(z - z')^2} = \frac{z'(z' - 2z)}{2} \text{sign}(z' - z) + z^2 H(z' - z) \quad (2.54)$$

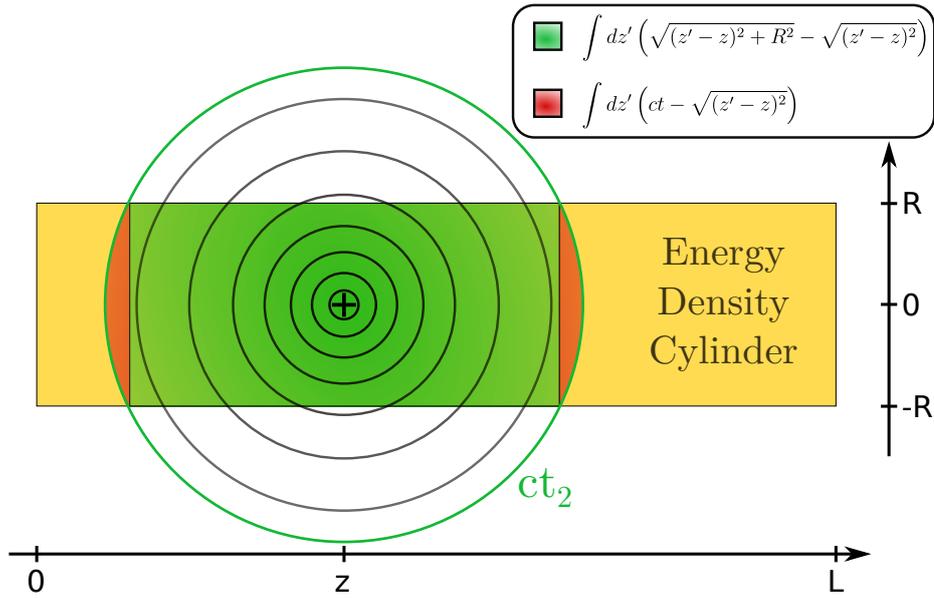
$$\int dz' \sqrt{R^2 + (z - z')^2} = \frac{1}{2} \left((z' - z) \sqrt{R^2 + (z - z')^2} + R^2 \text{arcsch} \left(\frac{z' - z}{R} \right) \right) \quad (2.55)$$

$$\int dz' ct = z' ct \quad (2.56)$$

Le terme dépendant de la fonction de Heaviside dans l'équation (2.54) exprime qu'un terme en z^2 apparaît dans l'intégration de $\sqrt{(z - z')^2} dz'$ si $(z' - z)$ change de signe dans l'intervalle d'intégration.



(a) À $ct_1 \leq R$, la distance maximale d'un point contributeur à la déformation au point $(z, 0)$ est située à une distance ct_1 , peu importe la direction d'où vient la contribution.



(b) Pour $ct_2 > R$, la distance maximale d'un point contributeur à la déformation au point $(z, 0)$ dépend de si le cône de lumière croise la limite radiale de la source. En effet, dans la direction radiale, la source s'arrête en $r = \pm R$. La distance maximale reste donc ct pour $|z' - z|$ suffisamment proche de ct , mais est limitée à $\sqrt{(z' - z)^2 + R^2} < ct_2$ pour des $|z' - z|$ plus petits.

FIGURE 2.3 – Aire des contributions à la déformation gravitationnelle au point $(z, r=0)$ aux temps t_1 et t_2 , $ct_1 < R < ct_2$. La distance minimale à z pour z' fixé reste toujours $|z' - z|$.

La figure 2.3a montre qu'on peut s'attendre à une forte croissance en $c^2 t^2$ aux petits temps, avant d'arriver sur un régime limité par l'extension radiale R du cylindre, qui reste à déterminer du fait de sa complexité et de son extension, avec une contribution en $c^2 t^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{c^2 t^2}}\right)$ tendant vers une constante aux temps longs.

On obtient alors une solution analytique générale. On vérifiera entre autres lors de l'intégration que la borne inférieure est bien inférieure à la borne supérieure, sans quoi le domaine d'intégration est l'ensemble vide pour la condition concernée.

L'expression complète de la perturbation $h(ct, z)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
 h(ct, z) = & \mathcal{A} \chi \left[- \left(H(ct-z)H(z+ct-L) \left[\frac{a(a-2z)}{2} \text{sign}(a-z) + z^2 H(a-z) \right]_{a=0}^{a=L} \right. \right. \\
 & + H(z-ct)H(z+ct-L)H(L-(z-ct)) \left[\frac{a(a-2z)}{2} \text{sign}(a-z) + z^2 H(a-z) \right]_{z-ct}^L \\
 & + H(ct-z)H(L-z-ct)H(z+ct) \left[\frac{a(a-2z)}{2} \text{sign}(a-z) + z^2 H(a-z) \right]_0^{z+ct} \\
 & \left. \left. + H(z-ct)H(L-z-ct) \left[\frac{a(a-2z)}{2} \text{sign}(a-z) + z^2 H(a-z) \right]_{z-ct}^{z+ct} \right) \right. \\
 & + \frac{1}{2} H(ct-R) \left(H(\sqrt{c^2 t^2 - R^2} - z)H(z + \sqrt{c^2 t^2 - R^2} - L) \left[(a-z)\sqrt{R^2 + (z-a)^2} + R^2 \text{arcsch} \left(\frac{a-z}{R} \right) \right]_0^L \right. \\
 & + H(z - \sqrt{c^2 t^2 - R^2})H(z + \sqrt{c^2 t^2 - R^2} - L) \left[(a-z)\sqrt{R^2 + (z-a)^2} + R^2 \text{arcsch} \left(\frac{a-z}{R} \right) \right]_{z-\sqrt{c^2 t^2 - R^2}}^L \\
 & + H(\sqrt{c^2 t^2 - R^2} - z)H(L - z - \sqrt{c^2 t^2 - R^2}) \left[(a-z)\sqrt{R^2 + (z-a)^2} + R^2 \text{arcsch} \left(\frac{a-z}{R} \right) \right]_0^{z+\sqrt{c^2 t^2 - R^2}} \\
 & \left. \left. + H(z - \sqrt{c^2 t^2 - R^2})H(L - z - \sqrt{c^2 t^2 - R^2}) \left[(a-z)\sqrt{R^2 + (z-a)^2} + R^2 \text{arcsch} \left(\frac{a-z}{R} \right) \right]_{z-\sqrt{c^2 t^2 - R^2}}^{z+\sqrt{c^2 t^2 - R^2}} \right) \right. \\
 & + 2 \left\{ H(z-ct)H(L-(z-\sqrt{c^2 t^2 - R^2})) + H(L-z-ct)H(z+\sqrt{c^2 t^2 - R^2}) \right\} c^2 t^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{c^2 t^2}} \right) \\
 & + 2H(ct-z)H(L-(z-\sqrt{c^2 t^2 - R^2}))H(z-\sqrt{c^2 t^2 - R^2}) ct(z-\sqrt{c^2 t^2 - R^2}) \\
 & \left. \left. + 2H(z+ct-L)H(z+\sqrt{c^2 t^2 - R^2})H(L-z-\sqrt{c^2 t^2 - R^2}) ct(L-z-\sqrt{c^2 t^2 - R^2}) \right) \right. \\
 & + H(R-ct) \left(H(z-ct)H(L-z-ct)2c^2 t^2 + H(z-ct)H(z+ct-L)H(L-z+ct)ct(L-z+ct) \right. \\
 & \left. \left. + H(ct-z)H(z+ct)H(L-z-ct)ct(z+ct) + H(ct-z)H(z+ct-L)Lct \right) \right] \tag{2.57}
 \end{aligned}$$

On obtient donc finalement une solution analytique explicite et exacte de la déformation gravitationnelle générée par un cylindre immobile de densité d'énergie constante \mathcal{A} sur son axe z , ainsi que de son établissement en fonction du temps. Ce calcul a pu se faire grâce à l'établissement d'une méthode de résolution des intégrales de fonctions de Heaviside couplées, construite sur une logique algorithmique. Cette méthode sera d'ailleurs réutilisée pour les calculs section 3.1.

La solution analytique présentée équation (2.57) a l'avantage d'être exacte mais le clair désavantage de ne pas être lisible en tant que telle, du fait des nombreuses conditions sur les intégrations exprimées sous forme de fonctions de Heaviside. Il faut donc mettre en place une solution pour visualiser cette fonction, visualisation que nous confierons à un programme informatique, l'ordinateur étant bien plus apte à la comparaison des valeurs de bornes ainsi qu'à l'évaluation de conditions en différents points de l'espace-temps (ct, z) .

2.2.3 Visualisation de la solution analytique

Les résultats du calcul analytique peuvent être représentés grâce à une procédure Python. En effet, la solution analytique en tant que telle n'a rien de bien lisible, ni d'interprétable (voir Equ.2.57). Pour éviter de se perdre dans les différents termes et les différentes conditions qu'il faudrait écrire (ce qui complexifierait l'écriture du programme de visualisation), on laisse au programme Python le soin de s'occuper de la dernière partie de l'algorithme comme présenté figure 2.4.

Afin de simplifier le travail de la machine ainsi que le nôtre, on fournit au programme les différentes bornes d'intégration possibles pour les fonctions présentes dans l'intégrale, ainsi que les primitives de ces fonctions. Cette partie est décrite dans la partie nommée "by hand" dans la figure 2.4. Le travail du programme Python se limite alors à déterminer en chaque point quelle borne supérieure est la plus petite, quelle borne inférieure est la plus grande, si la borne inférieure est bien inférieure à la borne supérieure, et que l'intégration existe sur cette partie de l'espace. Comprenez par là, qu'il n'y a pas de condition extérieure à l'intégrale qui réduit ce terme à 0 pour ces coordonnées. Cette partie est décrite dans la partie nommée "Python" dans la figure 2.4. Il est bien important ici de vérifier que la borne d'intégration inférieure est inférieure à la borne supérieure, car les fonctions de Heaviside impliquent une solution nulle dans ce cas, au contraire du cas normal, où l'on s'attendrait à une valeur opposée.

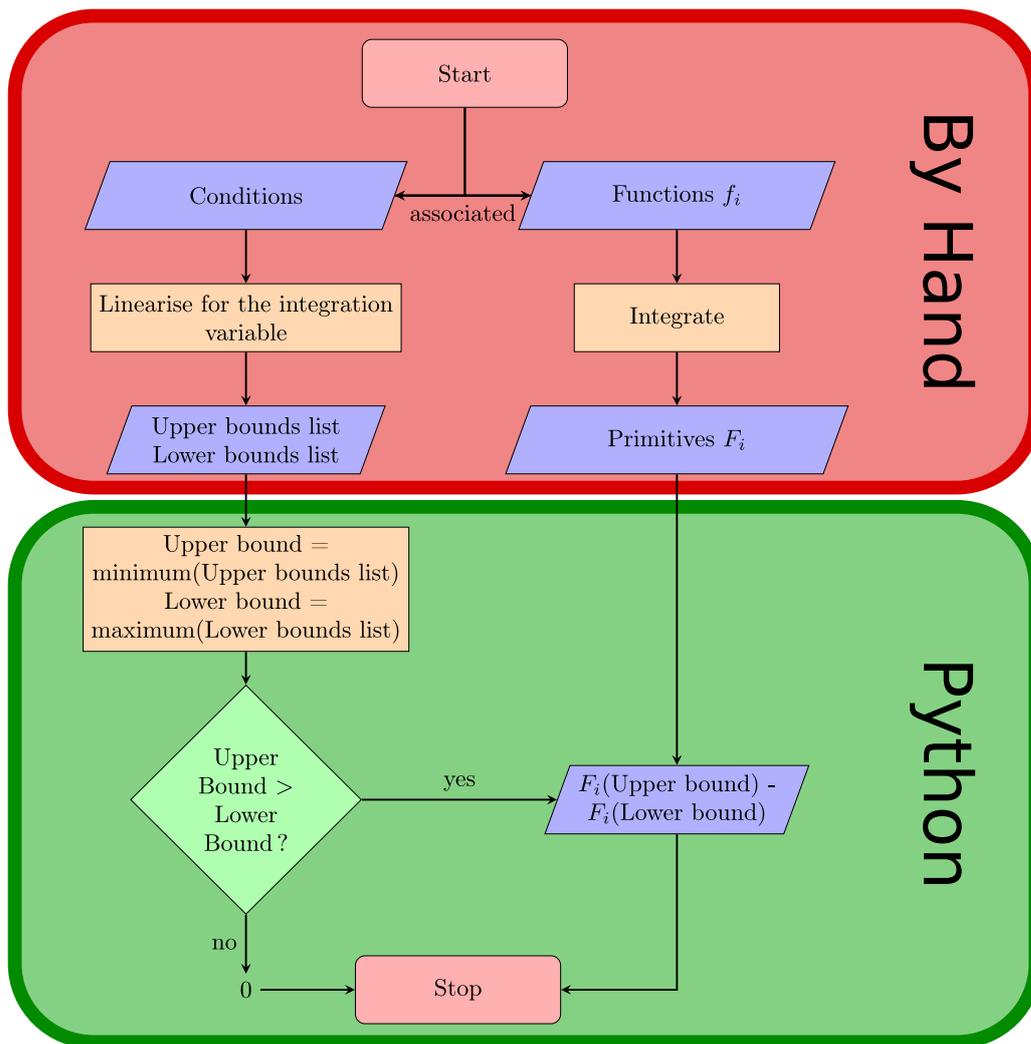


FIGURE 2.4 – Schéma en blocs de la deuxième itération de l'algorithme, où l'on réalise la première partie à la main comme précédemment et termine la deuxième partie avec l'aide de Python.

On obtient alors de ce programme la valeur de la solution en tout point et pour tout paramètre. On commence donc par s'intéresser à la représentation de ce résultat sur le plan (O,z,ct) , pour des valeurs d'énergie et d'intensité constantes. Afin de modéliser ce que pourrait donner un laser actuel de puissance de classe PetaWatt, nous prenons les valeurs suivantes : $\mathcal{A} \times c = I = 10^{22} \text{ W/cm}^2$, $E = 525 \text{ J}$, ce qui correspond ici aux dimensions

suivantes pour le cylindre statique : $L = 20\mu\text{m}$, $R = 5\mu\text{m}$. La solution est présentée sur la figure 2.5.

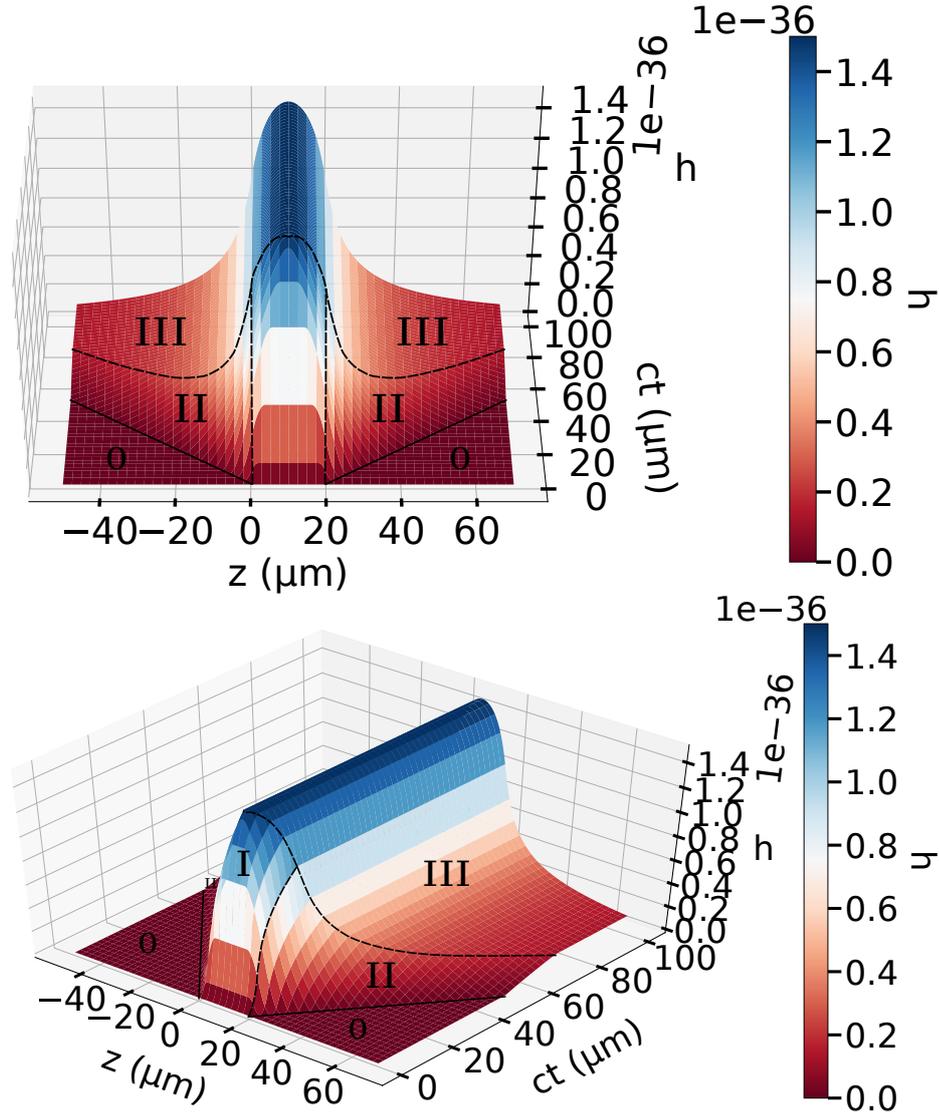


FIGURE 2.5 – Représentations 3D de la solution sur le plan (O,z,ct) pour une intensité du laser $I = 10^{22} \text{ W/cm}^2$ et des dimensions du cylindre de lumière $L = 20\mu\text{m}$, $R = 5\mu\text{m}$. Les chiffres indiquent les régimes de la solution. Zone I : le régime d'établissement à l'intérieur de la source, zone II : le régime d'établissement à l'extérieur de la source, zone III : le régime permanent.

La solution pour la perturbation gravitationnelle $h(ct, z)$ se compose d'un régime statique permanent pour des temps longs (zone III), et d'un régime transitoire où la perturbation croît en intensité jusqu'à atteindre le régime stationnaire (zones I et II). À l'intérieur de la source (zone I), la croissance de la déformation gravitationnelle se fait de manière accélérée dans un premier temps. Cette croissance correspond aux contributions de sources proches du point d'observation, qui se répartissent dans une boule de rayon ct , comme présenté sur la figure 2.3a. À partir d'un temps tel que $ct = R$ on passe dans le second régime de croissance de la perturbation générée à l'intérieur de la source, c'est à dire la situation présentée sur la figure 2.3b. Les contributions se font moins nombreuses et plus lointaines, d'où le ralentissement de la croissance de la perturbation. Cette croissance se termine quand les déformations générées par tous les points sources ont pu atteindre le point d'observation

(zone III).

À l'extérieur de la source la croissance se fait de manière un peu plus complexe aux abords de la source. Cependant, plus on s'éloigne de la source et plus le régime permanent de déformation (la zone III) est atteint au travers d'une phase de croissance de la déformation linéaire en temps. En effet loin de la source dans la zone II, on peut observer que la pente est constante, c'est à dire que la déformation gravitationnelle croît linéairement en fonction du temps, jusqu'à atteindre sa valeur permanente, statique (zone III).

Le potentiel statique ainsi établi zone III est le potentiel gravitationnel du cylindre de densité d'énergie statique. Ce potentiel est le strict analogue du potentiel qui serait généré par un objet massif de forme cylindrique le long de son axe. Ce potentiel se comporte d'ailleurs à longue distance en $1/z$, c'est à dire comme le potentiel gravitationnel d'un objet massif à longue distance. En effet prenons par exemple z grand négatif, afin d'avoir un développement clairement lisible du potentiel gravitationnel loin de la source. Notons qu'il est possible ici de faire le développement pour z grand positif, mais que ce choix ferait apparaître plus souvent la constante L dans le calcul, ce qui pourrait nuire à sa lisibilité. Nous obtenons alors par développement limité la grandeur :

$$\begin{aligned}
 & h(z, L, R)/\chi\mathcal{A} \\
 & = \\
 & -L(L-2z) + (L-z)\sqrt{R^2 + (z-L)^2} + R^2 \operatorname{arcsh}\left(\frac{L-z}{R}\right) + z\sqrt{R^2 + z^2} - R^2 \operatorname{arcsh}\left(\frac{-z}{R}\right) \\
 & = \\
 & -L(L-2z) + (L-z)^2 \sqrt{\frac{R^2}{(z-L)^2} + 1} - z^2 \sqrt{\frac{R^2}{z^2} + 1} + R^2 \left(\operatorname{arcsh}\left(\frac{L-z}{R}\right) - \operatorname{arcsh}\left(\frac{-z}{R}\right) \right) \\
 & \approx \\
 & 2Lz - L^2 + (L-z)^2 \left(\frac{R^2}{2(z-L)^2} + 1 \right) - z^2 \left(\frac{R^2}{2z^2} + 1 \right) + R^2 \underbrace{\left(\operatorname{arcsh}\left(\frac{L-z}{R}\right) - \operatorname{arcsh}\left(\frac{-z}{R}\right) \right)}_{\text{équivalent à une série de Laurent en } \frac{L}{|z|} \text{ pour } |z| \text{ grand}} \\
 & \approx \\
 & \begin{array}{c} \nearrow 0 \\ -L(L-2z) + (L-z)^2 - z^2 + \frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{2} + R^2 \frac{L}{-z} \\ = \\ \frac{LR^2}{-z} \end{array} \\
 & \tag{2.58}
 \end{aligned}$$

Attention, ici le potentiel ainsi généré est bien positif, car $-z$ est positif! On retrouve donc bien un potentiel similaire au potentiel gravitationnel en $1/r$ qu'il était possible d'observer dans le cas de la sphère massive section 2.1.2. On retrouve donc une nouvelle fois le potentiel classique avec le bénéfice supplémentaire de connaître ici comment un tel potentiel s'établit dans et à l'extérieur de la source dans le cas d'une subite création de masse à cet endroit.

2.2.4 Étude de la solution

Partant de cette visualisation de la déformation gravitationnelle, nous pouvons étudier l'influence de la forme du cylindre sur le profil en z ainsi que sur le maximum de la déformation générée par le cylindre. Afin de rendre les mesures comparables, je prendrai toujours une intensité constante $I = 10^{22} \text{W/cm}^2$, mais aussi une énergie constante $E = 525 \text{J}$ pour le cylindre. Le volume du cylindre sera donc constant dans les cas étudiés, puisque $E = V_{cyl} \times I/c$.

J'introduirai donc un rapport d'aspect L/R que je ferai varier pour représenter la variation de L , longueur du cylindre et R , rayon du cylindre, à volume constant.

La figure 2.6 montre les profils pour deux temps différents (ct) du profil sur l'axe z de la déformation gravitationnelle $h(z)$, générée par des cylindres de différents rapport d'aspect L/R , lors de l'établissement du régime stationnaire. On peut remarquer une phase d'établissement pour laquelle h croît linéairement de part et d'autre de 0 pour les cylindres de longueur L plus petites (figure 2.6a). Ce profil correspond à ce que l'on pouvait observer dans la zone II de la figure 2.5 et correspond au régime d'établissement linéaire de la perturbation sur ces bordures externes, loin de la source. Concernant les cylindres de plus grandes valeurs de L , la perturbation gravitationnelle h présente une transition plus adoucie entre la zone où la source est présente et l'extérieur de la source. Puisque l'on observe des points plus près du cylindre relativement à la longueur L de ce cylindre. Dans tous les cas, la perturbation doit être égale à 0 pour $|z - L/2| \geq ct + L/2$ par principe de causalité, ce qui explique la chute à 0 de la perturbation gravitationnelle h sur la figure 2.6a. Pour chaque rapport d'aspect L/R , h présente une pente différente pour l'établissement linéaire du potentiel à l'extérieur de la source. La perturbation h ne peut atteindre son maximum qu'à partir du moment où toutes les parties du cylindre ont pu avoir une influence sur le point d'observation choisi, c'est à dire pour $t \geq \sqrt{L^2 + R^2}$ si le point d'observation se situe dans le cylindre, ou plus longtemps s'il se trouve à l'extérieur. Cela permet en particulier d'expliquer l'établissement au départ linéaire, des perturbations pour lesquelles $R^2 \gg L^2$, car on se situe très vite sur le graphe à des distances grandes devant L . On observe donc le régime de croissance caractéristique de la zone II présentée figure 2.5. Du fait de l'établissement de la solution vers une perturbation constante, mais cette fois à l'intérieur du cylindre, on observe un plateau pour le cas où $L \gg R$. En effet, il faut le temps $t \geq \sqrt{L^2/4 + R^2}$ pour que la perturbation générée dans une extrémité du cylindre atteigne le centre du cylindre.

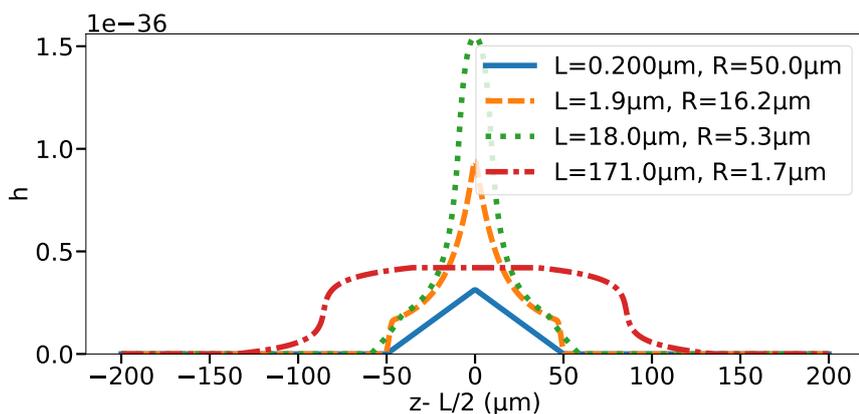
À des temps plus longs, la perturbation a le temps de s'établir totalement sur ce segment de l'axe z . On observe donc sur la figure 2.6b la déformation gravitationnelle dans son régime permanent. Cette illustration permet de faire la comparaison avec la figure 2.6a et de mettre en évidence l'établissement de la solution, mais aussi de voir que tous les rapports d'aspects ne mènent pas au même maximum de perturbation gravitationnelle au centre du cylindre.

Cela est dû à l'extension du cylindre tant dans la direction longitudinale L que dans la direction transversale R , qui viennent déterminer la répartition de la déformation gravitationnelle dans l'espace. À intensité et à énergie constante, et donc à volume du cylindre constant, on peut donc dégager un maximum de la perturbation sur l'axe des rapports d'aspect L/R . Ce dernier est localisé Figure 2.7, pour un rapport d'aspect $L/R \approx 1.77$. Ce maximum ne pouvant être expliqué uniquement par un argument géométrique, nous nous arrêterons là dans l'étude du cas statique, qui nous donne déjà un résultat fiable. Dans notre exemple le maximum de la perturbation h est de 1.6×10^{-36} pour $L/R \sim 1.77$ avec $I = 10^{22}$ W/cm² et $E = 525$ J. Par exemple, pour un cas réaliste, nous pouvons prendre $L = 18\mu\text{m}$, c'est à dire un temps d'émission de 60fs et un rayon $R = 5.3\mu\text{m}$.

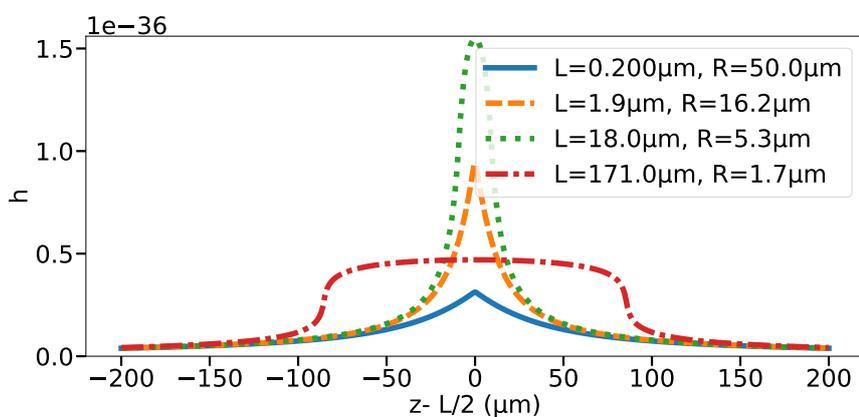
Dans cette section, j'ai pu introduire une méthode fiable de calcul analytique et de visualisation de la déformation gravitationnelle générée par un cylindre statique, une source définie comme une densité d'énergie constante délimitée par des fonctions de Heaviside. Cette méthode algorithmique de calcul nous permet de gérer le calcul des fonctions de Heaviside couplées entre elles et pourra donc être réutilisée pour calculer l'influence gravitationnelle d'un objet plus complexe.

D'autre part, la visualisation de la déformation gravitationnelle générée par un cylindre statique de densité d'énergie constante nous permet de mettre en évidence l'importance du rapport d'aspect du cylindre dans l'obtention d'une déformation maximale sur l'axe du cylindre.

Armés des observations faites et des outils développés dans cette section, nous prolon-



(a)



(b)

FIGURE 2.6 – Coupe au temps a) pour $ct = 50 \mu\text{m}$ b) pour $ct = 1 \text{ mm}$ des figures analogues à la figure 2.5, représentant la perturbation gravitationnelle h générée par un cylindre d'intensité $I = 10^{22} \text{ W/cm}^2$ et d'énergie $E = 525 \text{ J}$ pour différents rapports d'aspect L/R

gerons cette étude par le cas plus réel d'un cylindre de lumière en mouvement à la vitesse de la lumière c .

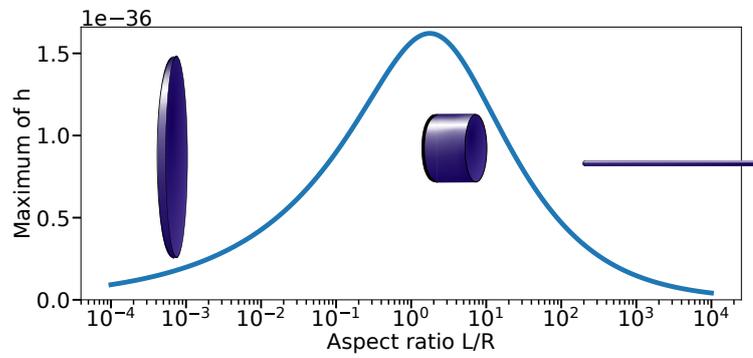


FIGURE 2.7 – Maximum d'amplitude de la déformation gravitationnelle h générée par un cylindre de densité d'énergie constante $\mathcal{A} = 3.3 \times 10^{11} \text{ W/cm}^3$ et d'énergie constante $E = 525 \text{ J}$ en fonction du rapport d'aspect L/R du cylindre.

Chapitre 3

Modèle d'impulsion lumineuse

Résumé : Une méthode de calcul algorithmique a été présentée précédemment et a permis de résoudre l'expression analytique de la déformation gravitationnelle générée par un cylindre statique de densité d'énergie constante. Associée à une visualisation informatique, cette expression nous a permis de confirmer la possibilité de calculer à chaque temps la déformation gravitationnelle générée par le cylindre sur son axe. L'étape suivante naturelle consiste maintenant à calculer la perturbation gravitationnelle générée par ce cylindre, maintenant en mouvement à la vitesse de la lumière c . Cette nouvelle situation sera utilisée comme modèle d'une impulsion lumineuse générée par laser.

Dans ce chapitre, j'aborderai le calcul analytique de cette nouvelle situation physique en mettant en évidence les difficultés et les avantages inhérents à l'étude d'une source se déplaçant à la même vitesse que la perturbation qu'elle génère. Ce calcul sera suivi d'une visualisation de la déformation gravitationnelle engendrée, menant à une étude de cette déformation selon les différentes variables susceptibles d'influencer la valeur maximale de la déformation générée. Le but de cette section sera donc de mettre en évidence les singularités dans la mise en place d'une telle déformation ainsi que de trouver les paramètres principaux sur lesquels jouer pour optimiser le rendement d'une expérience de génération de perturbation gravitationnelle par une impulsion laser.

3.1 Calcul de la perturbation gravitationnelle dans le cas du cylindre mobile

On réitère ici la méthode présentée précédemment dans la section 2.2 pour un cylindre statique. Afin de plus correctement modéliser une impulsion lumineuse, on la représente par un cylindre de lumière se déplaçant à la célérité de la lumière c , et non plus comme un cylindre immobile dans l'espace-temps. On a donc toujours un cylindre de densité énergétique constante \mathcal{A} , mais dont les nouvelles bornes en z vont dépendre linéairement du temps. Ce problème est illustré sur la figure 3.1.

Ce cylindre se déplace dans la direction des z positifs de telle façon que le cylindre de lumière se situe au temps t entre $z = ct$ et $z = ct + L$. On considérera qu'il garde toujours le même rayon R . Le cylindre apparaît à $t = 0$, dans un espace-temps plan décrit par la métrique de Minkowsky $\eta_{\mu\nu}$ comme dans le cas statique section 2.2. On étudie alors la génération de la perturbation gravitationnelle h en fonction du temps.

Dans le cas statique la déformation gravitationnelle se propageait autour de l'objet source à la vitesse de la lumière c pour mener à l'établissement d'une perturbation gravitationnelle constante. Nous pouvons donc nous attendre ici à ne pas voir de perturbation devant le cylindre de lumière, puisqu'il va à la même vitesse que la perturbation qu'il génère.

Une première analogie grossière serait de comparer le cas d'une "déformation longitudinale se propageant à la même vitesse que l'objet qui la génère" avec le cas déjà connu "un objet se déplaçant à la vitesse du son dans un milieu". La correspondance s'arrêtera là, puisque la déformation gravitationnelle ne se déplace pas dans un milieu matériel, mais cette ressemblance peut donner une première image de la situation physique étudiée. Cette analogie met entre autres en avant la particularité d'un cas où source et perturbation se propagent exactement à la même vitesse par rapport à un cas simplement mobile à une vitesse quelconque, ainsi que l'intérêt qu'aurait un tel phénomène dans l'obtention d'une déformation gravitationnelle importante. Une illustration de la différence entre le cas statique et le cas mobile à la vitesse de la lumière est proposée figure 3.1b.

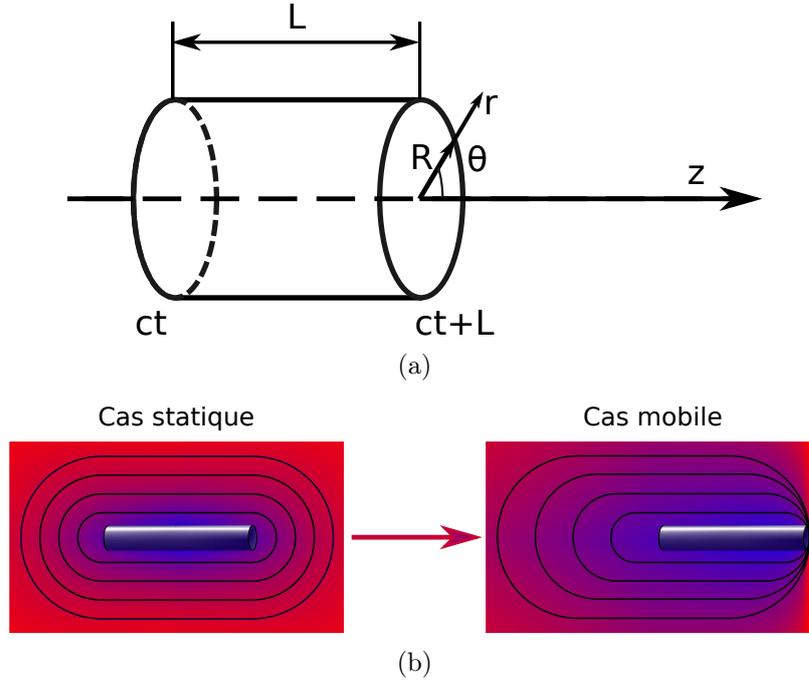


FIGURE 3.1 – a) Représentation schématique du cylindre de densité d'énergie uniforme se déplaçant à la vitesse de la lumière et b) Illustration des différences attendues entre la déformation gravitationnelle générée par le cylindre statique précédemment étudié et celle générée par une impulsion lumineuse de même forme cylindrique.

La source générant la perturbation s'écrit donc maintenant sous la forme :

$$Source(ct, z, r) = \mathcal{A} H(ct) H(z - ct) H(ct + L - z) H(R - r) \quad (3.1)$$

Où \mathcal{A} est la densité d'énergie constante à l'intérieur du cylindre.

Physiquement, un tel cylindre représente l'énergie se déplaçant avec la propagation d'une impulsion lumineuse de polarisation circulaire dans l'espace. En effet, pour une telle onde, les termes $T_{00} = T_{03} = T_{30} = T_{33}$ du tenseur énergie-impulsion électromagnétique ne présentent pas d'oscillation puisque seule la direction des champs électrique et magnétique varie au cours du temps, et non leur amplitude comme c'est le cas pour une onde électromagnétique de polarisation linéaire.

Quels changements peut-on alors attendre lors du passage du cas statique au cas où le cylindre se déplace à la vitesse de la lumière ?

Remarque : Dans tout autre cas où le cylindre se déplace à une vitesse $v < c$, on aurait pu appliquer une transformée de Lorentz au cas statique afin de prendre en compte la nouvelle vitesse relative du cylindre. En effet, dans son référentiel propre, le cylindre est immobile, et admet donc alors comme solution pour la perturbation générée la solution statique dans ce référentiel. Il suffirait alors d'appliquer la transformée de Lorentz inverse à cette solution pour avoir la solution dans le référentiel du laboratoire puisque les lois de l'électromagnétisme et de la relativité générale sont invariantes par transformation de Lorentz.

Cependant, si une plume inattentive s'essaie à appliquer cette stratégie au cylindre se déplaçant à c , il apparaît vite un imprévu : la transformée de Lorentz ne peut être utilisée, car elle diverge pour $v = c$. Prenons par exemple le cas d'un référentiel dont la translation se traduirait par l'expression $x' = x - ct$ en mécanique classique. Alors :

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - x/c) \\ x' = \gamma(x - ct) = -ct' \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\text{Où } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

On observe donc deux problèmes : pour $v = c$, t' et x' ne sont plus deux grandeurs indépendantes, et γ diverge vers $+\infty$.

On ne peut pas avoir recours à la transformée de Lorentz, il est donc impératif de reprendre la résolution du problème par produit de convolution du terme $Source(ct, z, r)$ par la fonction de Green du D'Alembertien.

On reprend l'expression de la solution donnée par l'expression (2.41), et l'on introduit maintenant le terme source (3.1) correspondant à un cylindre de lumière de densité énergétique constante \mathcal{A} , se déplaçant à la célérité c de la lumière. On prendra toujours $ct \geq 0$. On obtient donc sur l'axe du cylindre (i.e $r = 0$) :

$$h(ct, z) = \mathcal{A} \chi \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{\infty} H(ct - \rho_0) H(z' - ct + \rho_0) H(L + ct - z' - \rho_0) H(R - r') \frac{r' dr'}{\rho_0}, \quad (3.3)$$

où $\rho_0(r', z', z) = \sqrt{(z - z')^2 + r'^2}$.

On obtient donc 5 conditions d'intégration sur r' , certaines en compétition avec d'autres. Comment réécrire ces conditions de manière à pouvoir déterminer laquelle l'emporte en quel point ? Pour résoudre ce problème on linéarise les conditions par rapport à r' . L'avantage ici est que nous savons que r' est strictement positif, on peut donc même comparer des conditions linéaires en r'^2 , sous réserve de quelques précautions.

Afin de simplifier les calculs, on écrira les équations dans les coordonnées comobiles au cylindre de lumière. Un point fixe en Z dans un tel système correspond à un point se déplaçant à la vitesse de la lumière vers les z positifs dans le référentiel de l'observateur :

$$(ct, z, z') \mapsto (ct, Z, \tilde{z}) \text{ tels que : } \begin{cases} Z = z - ct \\ \tilde{z} = z' - z \end{cases} \quad (3.4)$$

On a donc maintenant $\rho_0(r', \tilde{z}) = \sqrt{\tilde{z}^2 + r'^2}$ et $ct - z' = ct - z + z - z' = -Z - \tilde{z}$. On peut donc réécrire l'équation (3.3) comme :

$$h(ct, z) = \mathcal{A} \chi \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{z} \int_0^{\infty} H(ct - \rho_0) H(\tilde{z} + Z + \rho_0) H(L - Z - \tilde{z} - \rho_0) H(R - r') \frac{r' dr'}{\rho_0} \quad (3.5)$$

Ce qui nous donne finalement les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Borne supérieure : } c^2 t^2 \geq \tilde{z}^2 + r'^2 \\ \text{Borne supérieure : } (L - Z - \tilde{z})^2 \geq \tilde{z}^2 + r'^2 \text{ et } L - Z - \tilde{z} \geq 0 \\ \text{Borne supérieure : } r' \leq R \\ \text{Borne inférieure : } (-Z - \tilde{z})^2 \leq \tilde{z}^2 + r'^2 \text{ et } -Z - \tilde{z} \geq 0 \\ \text{Borne inférieure : } r' \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.6)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r'^2 \leq (ct - \tilde{z})(ct + \tilde{z}) \\ r'^2 \leq (L - Z)(L - Z - 2\tilde{z}) \text{ et } L - Z - \tilde{z} \geq 0 \\ r' \leq R \\ r'^2 \geq -Z(-Z - 2\tilde{z}) \text{ et } -Z - \tilde{z} > 0 \\ r' \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.7)$$

On remarquera aussi que comme les conditions linéaires en r' sont tout le temps appliquées (on ne fait pas encore de disjonction de cas ici), on obtient des conditions qui vont venir s'appliquer en général. Notons que comme $r'^2 \geq 0$, on a :

$$(ct - \tilde{z})(ct + \tilde{z}) \geq 0 \text{ et } (L - Z)(L - Z - 2\tilde{z}) \geq 0 \text{ et } L - Z - \tilde{z} \geq 0 \quad (3.8)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{z} \geq -ct \text{ et } \tilde{z} \leq ct \text{ et } L - Z \geq 0 \text{ et } \tilde{z} \geq \frac{L - Z}{2} \quad (3.9)$$

On peut donc maintenant intégrer sur r' dans l'expression (3.3). La perturbation gravitationnelle s'écrit alors :

$$\begin{aligned} h(ct, z) = \mathcal{A}\chi \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{z} H(\tilde{z} + ct) H(ct - \tilde{z}) H(L - Z) H(L - Z - \tilde{z}) \times \\ \times \left[\begin{array}{l} \text{borne} \\ \text{supérieure} \\ \text{d'intégration} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} H(c^2 t^2 - (L - Z - \tilde{z})^2) H(c^2 t^2 - \tilde{z}^2 - R^2) ct \\ + H((L - Z - \tilde{z})^2 - c^2 t^2) H((L - Z - \tilde{z})^2 - \tilde{z}^2 - R^2) (L - Z - \tilde{z}) \\ + H(c^2 t^2 - R^2) H((L - Z - \tilde{z})^2 - R^2) \sqrt{R^2 + \tilde{z}^2} \\ \\ \underbrace{- H(-Z) H(-Z - 2\tilde{z}) (-Z - \tilde{z}) - (H(Z) + H(-Z) H(Z + 2\tilde{z})) |\tilde{z}|}_{\text{borne inférieure d'intégration}} \end{array} \right. \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

On prépare maintenant la deuxième étape d'intégration pour le programme python. Cela veut dire, comme le souligne la figure 2.4, calculer les primitives des différentes intégrandes en présence, ainsi que déterminer les différentes bornes d'intégration possibles pour chacune d'entre elles :

- **Intégrandes :**

$$\int d\tilde{z} ct = \tilde{z} ct \quad (3.11)$$

$$\int d\tilde{z} (L - Z - \tilde{z}) = \frac{\tilde{z}}{2} (2L - 2Z - \tilde{z}) \quad (3.12)$$

$$\int d\tilde{z} \sqrt{R^2 + \tilde{z}^2} = \frac{1}{2} \left(\tilde{z} \sqrt{R^2 + \tilde{z}^2} + R^2 \operatorname{arcsch} \left(\frac{\tilde{z}}{R} \right) \right) \quad (3.13)$$

$$\int d\tilde{z} - (-Z - \tilde{z}) = \frac{\tilde{z}}{2} (2Z + \tilde{z}) \quad (3.14)$$

$$\int d\tilde{z} - |\tilde{z}| = -\tilde{z}^2 \operatorname{sign}(\tilde{z}) \quad (3.15)$$

- **Conditions et bornes :** On introduit les notations suivantes afin de rendre plus aisée la lecture des conditions présentées Table 3.1 :

$$Z_R = \frac{-Z}{2} + \frac{R^2}{2Z} ; Z_{RL} = \frac{L - Z}{2} - \frac{R^2}{2(L - Z)} ; ct_R = \sqrt{c^2 t^2 - R^2} \quad (3.16)$$

| Fonction Intégrande | Conditions | Bornes Inférieures | Bornes Supérieures |
|--|-----------------------|----------------------|-------------------------|
| Conditions et bornes globales (s'appliquent à tous) | $L - Z \geq 0$ | $-ct$ | $ct; \frac{L - Z}{2}$ |
| ct | $ct \geq R$ | $-Z - ct$ | $L - Z - ct; -ct_R$ |
| | | $-Z - ct; ct_R$ | $L - Z - ct$ |
| | $ct < R$ | $-Z - ct$ | $L - Z - ct$ |
| $(L - Z - \tilde{z})$ | \emptyset | $L - Z - ct; Z_{RL}$ | \emptyset |
| $\sqrt{R^2 + \tilde{z}^2}$ | $ct \geq R$ | $-Z; -ct_R$ | $ct_R; Z_{RL}$ |
| | $ct \geq R; Z \geq 0$ | $-ct_R$ | $ct_R; -Z; Z_R; Z_{RL}$ |
| | $ct \geq R; Z < 0$ | $-ct_R; Z_R$ | $ct_R; -Z; Z_{RL}$ |
| $-(-Z - \tilde{z})$ | $Z < 0$ | $-ct - Z; Z_R$ | $-\frac{Z}{2}$ |
| $- \tilde{z} $ | $Z \geq 0$ | \emptyset | 0 |
| | \emptyset | $0; -\frac{Z}{2}$ | \emptyset |

TABLE 3.1 – Tableau regroupant les conditions et les bornes des intégrales associées aux différentes intégrandes. Le symbole \emptyset signifie l'absence d'une condition ou borne locale. Les seules conditions ou bornes s'appliquant dans ce cas sont donc les conditions ou bornes globales.

En fournissant ces informations au programme Python, on obtient la représentation graphique de la perturbation gravitationnelle h générée par une impulsion lumineuse modélisée par un cylindre de lumière se déplaçant à c , de densité d'énergie constante \mathcal{A} .

3.2 Résultats et analyse

3.2.1 Étude à énergie et intensité constante

Afin d'encore modéliser ce qui pourrait être obtenu avec un laser de puissance actuel, nous prenons à nouveau comme caractéristiques $I = \mathcal{A} \times c = 10^{22} \text{W/cm}^2$, $E = 525 \text{J}$, ce qui correspond toujours aux dimensions $R = 5 \mu\text{m}$ et $L = 20 \mu\text{m}$. Le programme python nous donne alors la visualisation présentée figure 3.2.

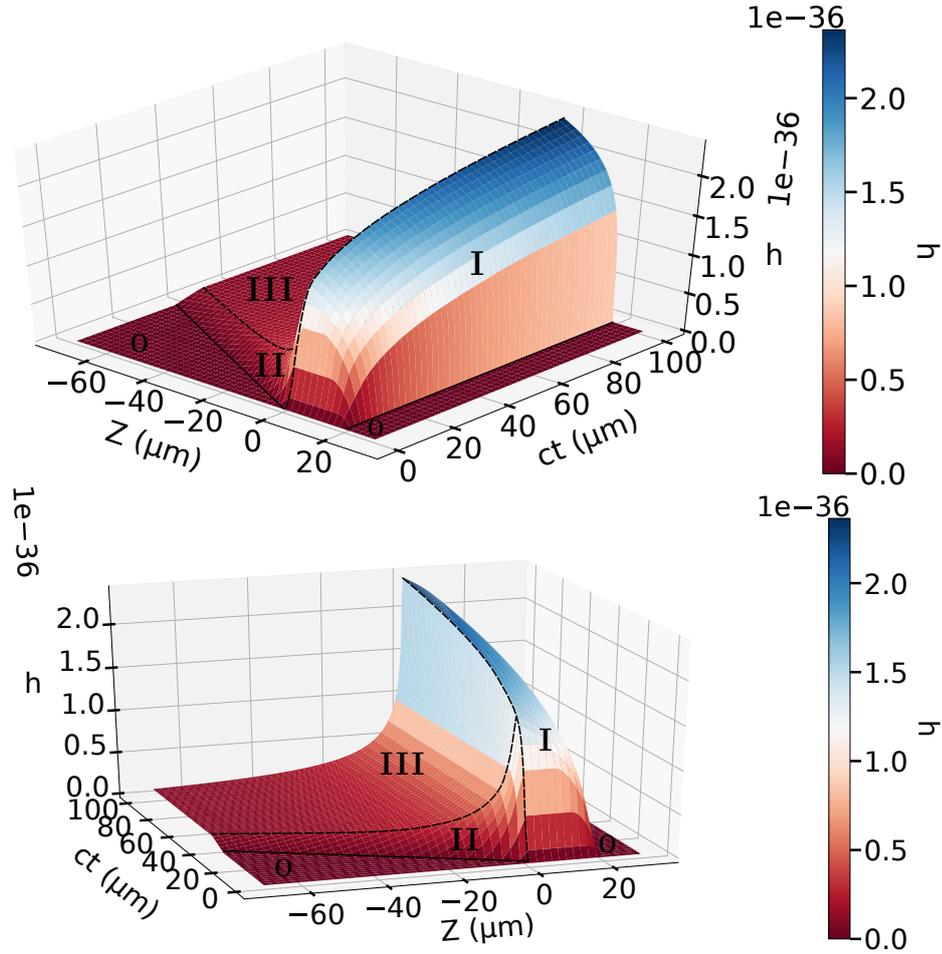


FIGURE 3.2 – Représentation 3D de la solution sur le plan comobile (O,Z,ct) pour une intensité du laser $I = 10^{22} \text{W/cm}^2$ et des dimensions du cylindre de lumière $L = 20 \mu\text{m}$, $R = 5 \mu\text{m}$.

Les chiffres indiquent les régimes de la solution : I/ le régime de croissance à l'intérieur de la source, II/ le régime d'établissement à l'extérieur de la source, III/ le régime quasi-statique à l'extérieur de la source.

La perturbation gravitationnelle générée par un cylindre de lumière se déplaçant à la vitesse c présente un profil caractéristique en forme de "vague", au lieu du profil symétrique que l'on avait dans le cas statique. En effet, le fait de nous placer dans le repère comobile implique que, par causalité, aucune perturbation ne peut être présente "devant" la source, c'est à dire pour $Z > L$. Le maximum se situe à la coordonnée comobile $Z = 0$ de manière assez logique. En effet, toute perturbation générée dans la source à une coordonnée comobile Z_1 ne saurait être observée à un temps ultérieur en un point de coordonnée comobile $Z_2 > Z_1$, car l'inverse impliquerait qu'une perturbation se soit déplacée plus vite que la vitesse de la lumière ! En effet, on pourrait noter dans ce cas la vitesse de propagation de la perturbation comme $\frac{Z_2 - Z_1}{t_2 - t_1} = \frac{z_2 + ct_2 - z_1 - ct_1}{t_2 - t_1} = c + \underbrace{\frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}}_{>0} > c$,

ce qui contredit les équations d'Einstein.

On conserve cependant toujours une forme de potentiel en $1/Z$ dans la "traînée" de cette vague (zone III), c'est à dire finalement dans la direction opposée à notre direction de propagation. Ce potentiel passe toujours par un régime d'établissement linéaire en son bord (zone II) comme cela était déjà le cas pour le cylindre statique figure 2.5 pour la même zone II.

Dans les différences que l'on peut encore observer entre le cas statique et ce nouveau cas mobile, la croissance de la perturbation dans la source, au lieu d'atteindre un régime stationnaire au bout d'un certain temps, semble continuer de croître en zone I.

En effet, une croissance logarithmique semble maintenant apparaître après la première phase de croissance que nous pouvions déjà observer dans le cas statique. Cette croissance peut être facilement isolée dans les différents termes de contribution à la perturbation, pour peu que l'on fasse certaines suppositions. Nous nous intéresserons ici à l'étude de cette croissance logarithmique au maximum en Z de la perturbation c'est à dire pour $Z = 0$, à des temps longs tels que $ct \gg R$ et $R \gg L$. Dans un tel domaine, on peut isoler comme seule contribution à la perturbation les termes suivants :

$$h = \chi \mathcal{A} \left(\left[\frac{1}{2} \tilde{z} (2L - \tilde{z}) \right]_{\frac{L}{2} - \frac{R^2}{2L}}^{\frac{L}{2}} + ct [\tilde{z}]_{-ct}^{-\sqrt{c^2 t^2 - R^2}} \right) \quad (3.17)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\tilde{z} \sqrt{R^2 + \tilde{z}^2} + R^2 \operatorname{arcsch} \left(\frac{\tilde{z}}{R} \right) \right]_{-\sqrt{c^2 t^2 - R^2}}^{\frac{L}{2} - \frac{R^2}{2L}} + \frac{1}{2} [\tilde{z}^2]_{-ct}^0 - \frac{1}{2} [\tilde{z}^2]_0^{\frac{L}{2}}$$

$$h = \frac{\chi \mathcal{A}}{2} \left(\frac{R^2}{2} + R^2 \left[\operatorname{arcsch} \left(\frac{L}{2R} - \frac{R}{2L} \right) + \operatorname{arcsch} \left(\sqrt{\frac{c^2 t^2}{R^2} - 1} \right) \right] + ct \left(ct - \sqrt{c^2 t^2 - R^2} \right) \right) \quad (3.18)$$

On prend maintenant la condition $ct \gg R$, ce qui nous permet de faire un développement limité sur le dernier terme de l'équation précédente. On rappelle que $ct > 0$.

$$ct \left(ct - \sqrt{c^2 t^2 - R^2} \right) = c^2 t^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{c^2 t^2}} \right)$$

$$\approx c^2 t^2 \left(1 - \left(1 - \frac{R^2}{2c^2 t^2} \right) \right) \quad (\text{Développement limité})$$

$$\approx \frac{R^2}{2} \quad (3.19)$$

On pourra de plus remarquer, pour la lisibilité du résultat, que :

$$\operatorname{arcsch} \left(\sqrt{\frac{c^2 t^2}{R^2} - 1} \right) = \ln \left(\sqrt{\frac{c^2 t^2}{R^2} - 1} + \sqrt{\frac{c^2 t^2}{R^2} - 1 + 1} \right)$$

$$= \ln \left(\frac{ct}{R} + \sqrt{\frac{c^2 t^2}{R^2} + 1} \right)$$

$$= \operatorname{arcch} \left(\frac{ct}{R} \right) \quad (3.20)$$

D'où,

$$h = \frac{\chi \overbrace{\mathcal{A} R^2}^{P/\pi c}}{2} \left[1 + \operatorname{arcsch} \left(\frac{L}{2R} - \frac{R}{2L} \right) + \operatorname{arcch} \left(\frac{ct}{R} \right) \right] \quad (3.21)$$

Où P est la puissance de l'onde électromagnétique. On finit ce développement limité en utilisant l'autre hypothèse, $R \gg L$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcsch}\left(\frac{L}{2R} - \frac{R}{2L}\right) + \operatorname{arcch}\left(\frac{ct}{R}\right) &\approx \operatorname{arcsch}\left(-\frac{R}{2L}\right) + \operatorname{arcch}\left(\frac{ct}{R}\right) \\
&\approx \ln\left(-\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + 1}\right) + \ln\left(\frac{ct}{R} + \sqrt{\frac{c^2t^2}{R^2} - 1}\right) \\
&\approx \ln\left[-\frac{R}{2L}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4L^2}{R^2}}\right) \frac{ct}{R}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{R^2}{c^2t^2}}\right)\right] \\
\text{(Développement limité)} \quad &\approx \ln\left[-\frac{ct}{2L}\left(-\frac{2L^2}{R^2}\right)\left(2 - \frac{R^2}{2c^2t^2}\right)^0\right] \\
&\approx \ln\left(\frac{2Lct}{R^2}\right) \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Et donc finalement, pour $ct \gg R$ et $R \gg L$,

$$h \approx \frac{\chi^P}{2\pi c} \left(1 + \ln\left(\frac{2Lct}{R^2}\right)\right) \tag{3.23}$$

Avant de revenir à l'observation de cette croissance de la déformation gravitationnelle en fonction du temps, nous allons de nouveau nous intéresser à l'impact de la forme du cylindre sur l'amplitude à un temps donné de cette déformation. Le but étant finalement, ici, de trouver quelle est la configuration optimale pour générer une déformation la plus importante possible.

Pour cela, on va étudier le profil de cette déformation sur l'axe du cylindre à plusieurs temps et pour plusieurs rapports d'aspect, à l'instar de ce qui a été fait dans le cas statique figure 2.6. Ces observations sont présentées figure 3.3, et donnent à montrer le même profil de vague, bien que ce profil se retrouve écrasé pour les plus petits rapports d'aspects du fait de leur faible valeur de L .

Avec ces nouvelles observations, on peut confirmer qu'il existe une période d'établissement linéaire de la perturbation aux bords de l'émission de cette perturbation, comme observé figure 3.2. Mais nous pouvons voir aussi que le profil arrière en $1/Z$ ne met pas le même temps à s'établir pour chacun des cylindres, puisqu'il n'est pas encore distinguable pour le cylindre de plus petit rapport d'aspect au temps tel que $ct = 50\mu\text{m}$. Encore une fois, cette observation correspond à l'observation faite dans le cas statique, où les cylindres possédant une grande différence entre longueur et rayon mettaient logiquement plus de temps à établir complètement ce profil. Enfin, chose somme toute la plus importante, nous observons que, bien que le deuxième cylindre étudié semble aux premiers temps être le cylindre générant la plus grande perturbation, ce dernier finit par être rattrapé et même dépassé par le cylindre de plus petit rapport d'aspect L/R . Cela représente une différence importante vis à vis du cas statique, puisque le rapport d'aspect donnant le maximum de déformation semble maintenant dépendre du temps alloué à la perturbation pour croître.

Ce "dépassement" s'explique en regardant de plus près la croissance du maximum de perturbation en fonction du temps pour ces mêmes quatre rapports d'aspect, comme présenté figure 3.4.

On observe que chaque maximum de déformation gravitationnelle semble évoluer en temps selon deux modes de croissance : dans un premier temps, la perturbation voit une accélération de sa croissance (au sens large, cette croissance est au minimum linéaire), puis s'ensuit une seconde période, aux temps plus longs, où la croissance devient logarithmique.

Ce temps est cependant différent pour chaque rapport d'aspect et semble intervenir de

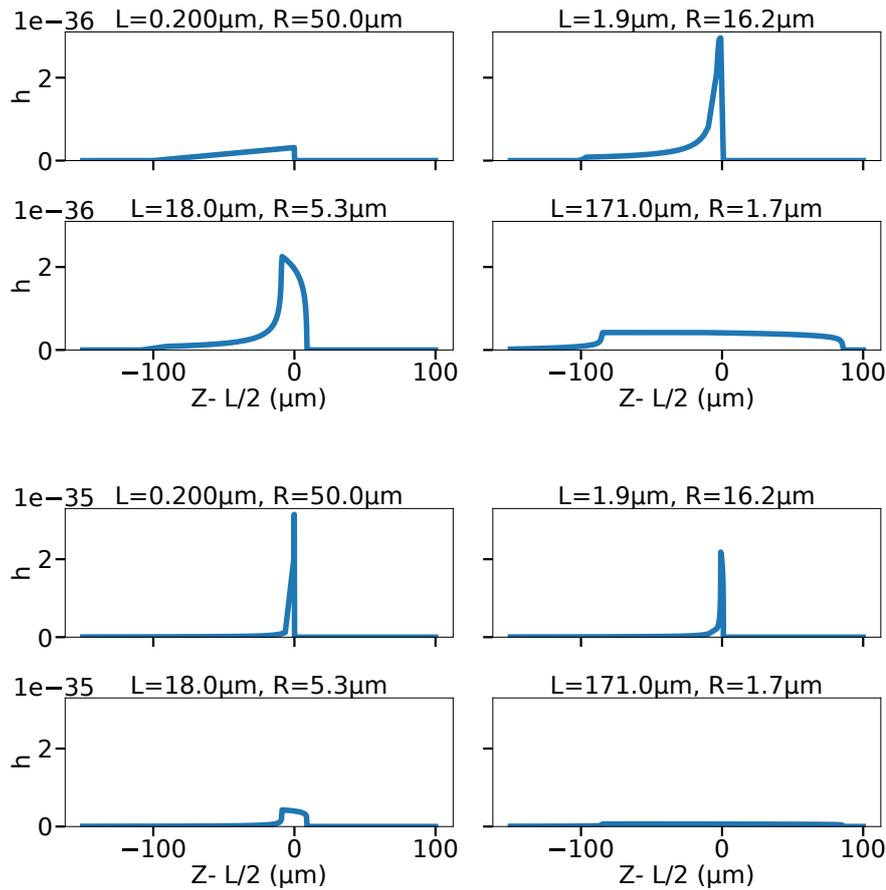


FIGURE 3.3 – Coupe au temps a) $ct = 50\mu\text{m}$ b) $ct = 5\text{mm}$ de la perturbation gravitationnelle générée par un cylindre d'intensité $I = 10^{22}\text{W}/\text{cm}^2$ et d'énergie $E = 525\text{J}$ pour différents rapports d'aspect.

plus en plus tard au fur et à mesure que le rapport d'aspect diminue. Ainsi, le cylindre de lumière de deuxième plus grand rapport d'aspect ($L = 18\mu\text{m}$, $R = 5.3\mu\text{m}$), génère dans un premier temps le plus haut maximum. Mais le ralentissement de sa croissance aux temps plus longs fait qu'à $ct = 50\mu\text{m}$ le plus grand maximum de déformation est possédé par un autre cylindre de lumière ($L = 1.9\mu\text{m}$, $R = 16.2\mu\text{m}$). Par la même logique, le cylindre de lumière de plus petit rapport d'aspect finit par rattraper, en maximum de perturbation générée, le cylindre précédent. On doit donc s'attendre à voir le rapport d'aspect optimal du cylindre de lumière, c'est à dire celui qui donne la plus grande perturbation gravitationnelle sur l'axe, se déplacer vers les petits rapports d'aspects.

Cette hypothèse est confirmée par le tracé du maximum de perturbation à un temps donné en fonction du rapport d'aspect figure 3.5.

Cette figure montre à nouveau un décalage vers les petites valeurs du rapport d'aspect optimal à mesure que le temps laissé à la perturbation pour se créer augmente. On peut aussi observer à cette occasion que le maximum de déformation augmente avec le temps. Cela s'explique en partie par le fait que le cylindre de lumière s'étant propagé sur plus de temps, il a émis pendant plus de temps, et une partie de ces contributions viennent s'additionner au résultat observé à un temps plus court. Mais pas seulement. En effet, cet argument permet de justifier la croissance en amplitude maximum observée pour un rapport d'aspect, et non l'augmentation du maximum général pour tout rapport d'aspect. Il semble donc que le fait de prendre un cylindre de lumière de plus grand rayon, et donc de plus

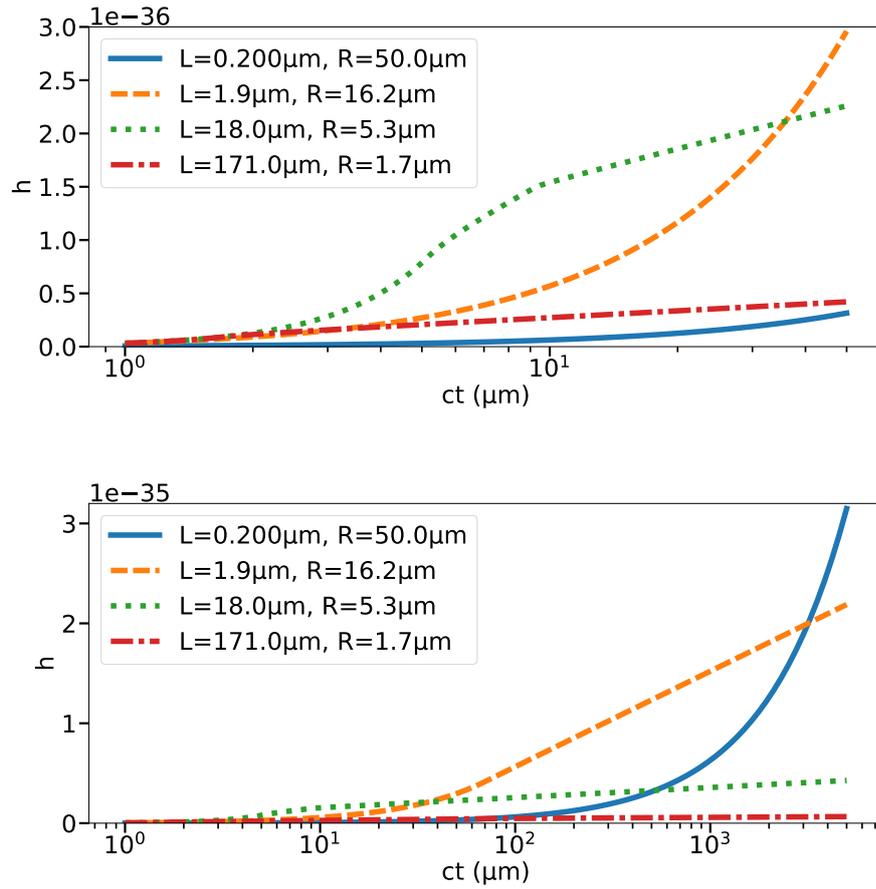


FIGURE 3.4 – Croissance du maximum de la perturbation gravitationnelle générée par un cylindre d'intensité $I = 10^{22} \text{W/cm}^2$ et d'énergie $E = 525 \text{J}$ en fonction du temps pour des cylindres de différents rapports d'aspect. Les courbes vont jusqu'au temps a) $ct = 50 \mu\text{m}$ b) $ct = 5 \text{mm}$.

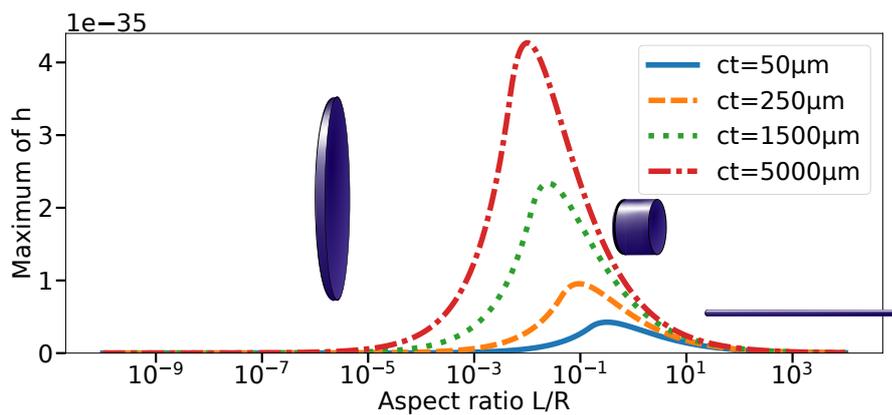


FIGURE 3.5 – Maximum d'amplitude à temps fixé de la perturbation gravitationnelle générée par une impulsion lumineuse cylindrique d'intensité $I = 10^{22} \text{W/cm}^2$ et d'énergie $E = 525 \text{J}$ en fonction du rapport d'aspect L/R dudit cylindre. Une vision grossière de la forme du cylindre en fonction du rapport d'aspect est aussi présentée en parallèle.

faible longueur à intensité et énergie constante, favorise la génération d'une perturbation gravitationnelle plus importante. Cela peut s'expliquer par le fait qu'une telle "galette de lumière" possède à des temps longs plus de points sources, et donc de points émetteurs aux premiers temps, proches du point d'observation en $Z = 0$ au temps où l'on fait l'observation. La somme de ces contributions serait alors suffisante pour contrebalancer la diminution en $1/\rho$ de l'amplitude d'un rayonnement gravitationnel, du moins par rapport à un modèle où le cylindre serait plus étendu dans sa longueur.

Ainsi, dans un cadre idéal où l'on pourrait faire se propager une impulsion lumineuse comme un cylindre de densité d'énergie sur un temps indéfini, l'intensité joue un rôle important puisque l'amplitude croît linéairement avec cette dernière. Cependant une manière de maximiser la déformation gravitationnelle à intensité constante est aussi de laisser la perturbation croître en laissant la lumière se propager le plus longtemps possible, à la condition expresse d'ajuster le rapport d'aspect du cylindre à la distance parcourue pour avoir le meilleur rendement. La déformation gravitationnelle, au contraire du cas statique continuant en effet de croître même à temps long, la croissance logarithmique en temps de la perturbation gravitationnelle après sa période d'établissement permet d'obtenir des amplitudes de déformations en théorie aussi grandes que l'on veut. En pratique, l'amplitude de cette déformation sera limitée par la longueur sur laquelle on pourra expérimentalement focaliser le faisceau.

Le front de cette déformation possède cette forme si particulière de vague, ce qui assure une forte variation instantanée de la métrique lorsque la déformation gravitationnelle atteindrait l'observateur. Or les variations de la métrique sont responsables de certains des effets observables dans des potentiels de gravité, comme la déviation de la lumière. Le profil de la déformation possède donc lui aussi des propriétés intéressantes pour la mesure d'une perturbation gravitationnelle générée en laboratoire.

Cependant, dans un environnement expérimental, plus qu'à intensité et énergie fixes, c'est à la puissance maximale d'un laser qu'on se réfère. L'influence de R sur l'amplitude de la perturbation pourrait alors être plus détrimentaire, comme on pourra l'observer ci-dessous.

3.2.2 Déformation gravitationnelle générée à puissance laser constante

La plupart des installations laser proposent des lasers dont la puissance maximale est fixée (DANSON et al. 2019). Il nous faut donc observer la dépendance de la déformation gravitationnelle en puissance pour différents rapports d'aspect. En l'occurrence, à puissance constante, L ne vient pas faire varier l'intensité du faisceau, puisque $P = \pi R^2 I$. Nous représenterons cependant la déformation à différents L , pour vérifier si le changement de rapport d'aspect a une influence sur la déformation observée. L'équation (3.23) semble de plus montrer qu'au temps long pour $R \gg L$ la solution pourrait être proportionnelle à IR^2 et donc à la puissance P . Si cette proportionnalité est avérée dans un cadre plus global, nous nous retrouverions avec un paramètre à ajuster, la puissance, ne nécessitant pas la focalisation extrême du faisceau laser et donc les complications survenant avec des faisceaux de lumière de très haute intensité, comme l'apparition d'effets d'électrodynamique quantique.

À temps fixé le maximum de perturbation gravitationnelle semble diminuer lorsque le rayon croît, comme présenté figure 3.6. Ce résultat peut paraître de prime abord contradictoire par rapport au résultat de l'équation (3.23), mais il faut prendre en compte deux différences ici. Les tracés se font à temps constant, c'est le rayon R du cylindre qui varie. Or, l'équation comporte un terme $\ln(4L/R^2)$ qui diminue au fur et à mesure que R augmente. Mais il existe aussi un rayon R à partir duquel nous n'avons plus $ct \gg R$ et où le développement limité n'est plus valable.

On observe aussi un changement de pente marqué entre deux domaines de décroissance

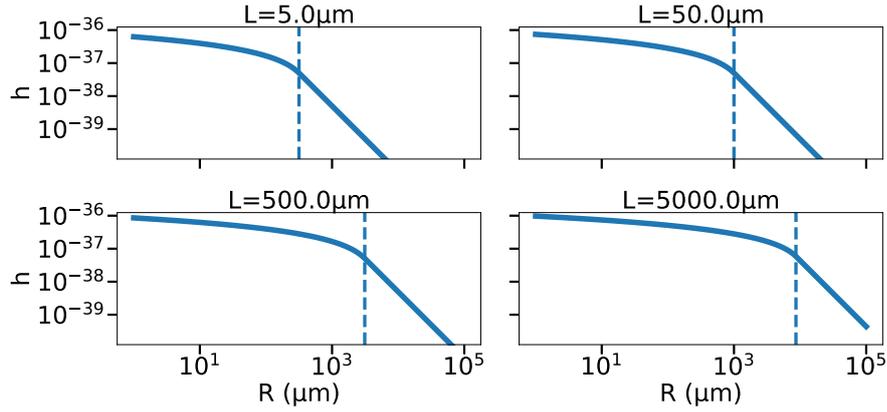


FIGURE 3.6 – Maximum d’amplitude de la perturbation gravitationnelle d’une impulsion lumineuse cylindrique de longueur L fixe et de puissance constante $P = 1\text{PW}$ en fonction du rayon R du cylindre. La ligne en pointillé montre pour chaque cas l’abscisse de changement de régime de décroissance.

du résultat en valeurs logarithmique. Le premier domaine de décroissance est une décroissance faible mais qui s’accélère, tandis que le second présente une décroissance linéaire importante en échelle logarithmique, qui correspond en fait à une décroissance en $1/R^2$ de la perturbation, ce qui peut être directement relié au fait que l’intensité peut s’écrire $I = P/\pi R^2$. Cette limite entre deux domaines de décroissance est une conséquence physique du rapport entre le temps t donné aux émissions gravitationnelles pour essayer d’atteindre le point d’observation, et le rayon R du cylindre.

En effet, à l’instar du cylindre statique, il est normal d’observer une décroissance de h proportionnelle à celle de l’intensité si les points les plus éloignés du cylindre (ceux en $r = R$) se trouvent plus loin que la distance ct que peut parcourir l’émission gravitationnelle en ce temps. En ce sens, prendre un cylindre de plus ou moins grand rayon ne fait que changer l’intensité, et donc la densité d’énergie des points dont l’émission a eu le temps d’arriver au point d’observation. Ici cependant, la limite ne se situe pas en $R = ct$ mais en une autre valeur, qui peut en fait être déduite par la même logique. La justification demande cependant d’avoir une bonne compréhension géométrique du calcul de h et du phénomène physique qui se cache derrière.

Potentiels retardés, avancés, et sphère des contributions Pour cela, on décrit la méthode de calcul par la fonction de Green de la perturbation gravitationnelle. À chaque temps, le cylindre de lumière, le terme source, dans l’équation d’onde pour la déformation gravitationnelle, peut être décomposé comme la somme des sources ponctuelles qui le composent. Chacune de ces sources ponctuelles émet une onde sphérique (leur potentiel retardé) dont le rayon augmente en $c\Delta t$ et l’amplitude diminue en $\frac{1}{c\Delta t}$ aux temps ultérieurs. La perturbation gravitationnelle observée est alors la somme de toutes les ondes provoquant une déformation de la métrique espace-temps au point précis où l’on observe, ainsi qu’au temps précis où l’on observe.

Comme montré figure 3.7, l’ensemble de ces contributions peut aussi être visualisé non pas en partant de tous les points d’émission, mais du point d’observation. Dans ce cas, la solution est la somme continue (c’est à dire l’intégrale) sur le temps de l’intersection des sphères centrées au point d’observation avec le volume du cylindre, où les sources existent vraiment. Ces sphères sont le potentiel avancé du point d’observation, dont le rayon augmente en $-c\Delta t$ et l’amplitude diminue en $-1/c\Delta t$ quand on remonte le temps. On peut alors appeler

la sphère décrite par le potentiel avancé "sphère des contributions", car il s'agit de la sphère sur laquelle, au temps postérieur où l'on intègre, des sources ont pu contribuer à la solution observée.

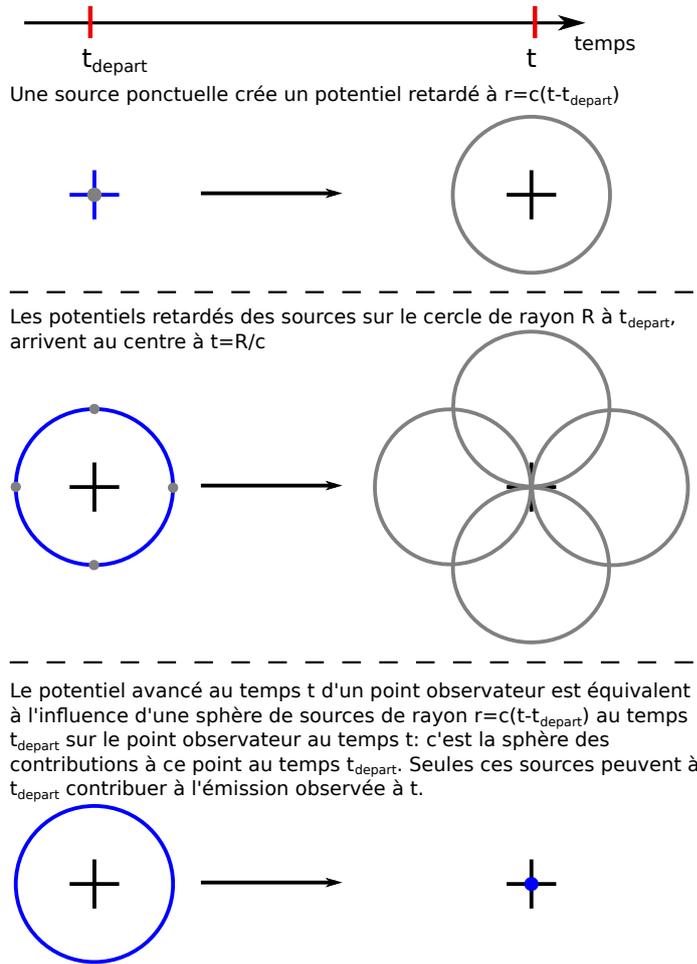


FIGURE 3.7 – Schéma explicatif de l'équivalence entre systèmes {Sources - Potentiel retardé} et {Point d'observation - Potentiel avancé}.

Application au cas du cylindre mobile Dans le cas du cylindre mobile, ce changement de perspective nous permet de dégager l'intervalle de temps critique $\Delta t_{cr}(L, R)$, dépendant des dimensions du cylindre, à partir duquel la croissance devient logarithmique en temps. Cette expression du temps critique nous donne aussi, par équivalence et à L donné, le rayon à partir duquel la décroissance de l'amplitude de la perturbation passe en $\frac{1}{R^2}$ à puissance et temps fixés.

Prenons ainsi le cylindre de lumière à un temps t_1 quelconque. La déformation gravitationnelle que nous observons à ce temps précis au point $Z = 0$ est le produit de convolution aux temps antérieurs de la fonction de Green avancée avec le cylindre de lumière source. Ce produit est l'intégrale sur le temps des intersections du cylindre de lumière avec la sphère de contribution au point ($Z = 0, t = t_1$) aux temps antérieurs à t_1 , chaque élément d'intégration étant pondéré par l'inverse du rayon de la sphère de contribution. La figure 3.8 apporte une illustration de ce phénomène :

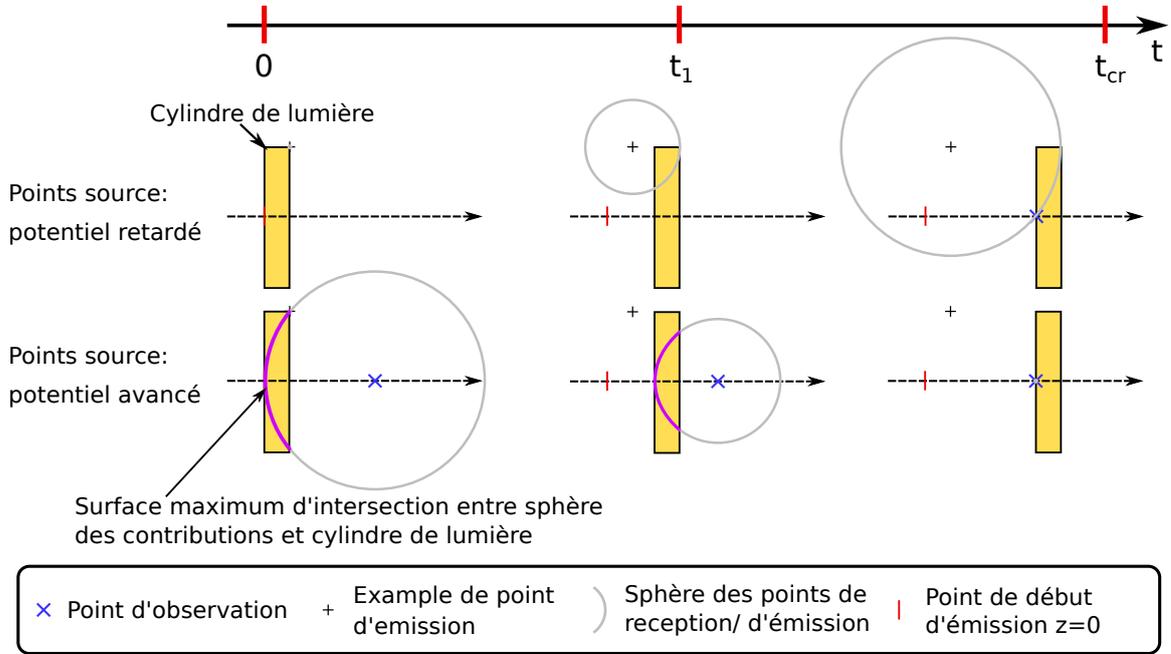


FIGURE 3.8 – Schéma de la contribution à la déformation gravitationnelle observée au point d'observation pour un point source et mise en évidence du temps critique à partir duquel la surface des sources contribuant à la déformation n'augmente plus.

C'est à dire en termes mathématiques :

$$h(Z = 0, t = t_1) = \frac{\chi \mathcal{A}}{2\pi} \int_{t_1}^0 \frac{1}{c(t_1 - t')} dt' \int_{S_{c(t_1 - t') \cap C_t}} d^2 S \quad (3.24)$$

Ainsi, dès que l'aire de la surface de contribution croît plus lentement en valeur absolue que $c(t_1 - t')$, la croissance de la valeur de h ralentit.

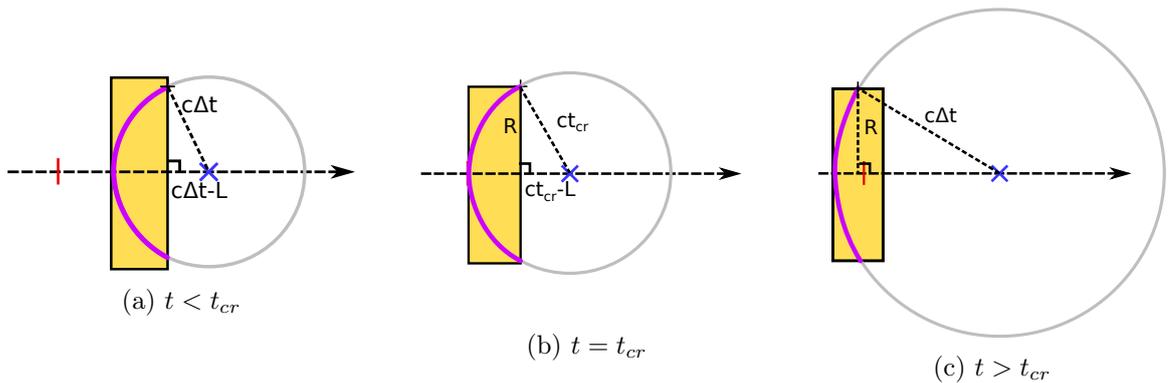


FIGURE 3.9 – Surfaces des sources contribuant à la déformation gravitationnelle perçue au point d'observation à trois temps a) avant le temps critique t_{cr} b) à t_{cr} c) et après t_{cr} .

On considère les situations avant et après avoir atteint cet intervalle de temps critique t_{cr} afin de démontrer ce changement de régime de croissance. On pourra noter que pour $c\Delta t > L$ et $R > L$, on peut préciser l'expression d'une partie de l'intégration en temps dans l'équation (3.24).

On notera la contribution à $h(Z = 0, t = t_1)$ dans l'intégration du point $t = a$ à $t = b$ comme : $h_{00}(Z = 0, t = t_1) \Big|_a^b$

$$\begin{aligned}
 h(Z = 0, t = t_1) \Big|_0^{t_1 - L/c} &= \frac{\chi \mathcal{A}}{2\pi} \int_L^{t_1} \frac{1}{c\Delta t'} d\Delta t' \int_0^{2\pi} c^2 \Delta t'^2 d\phi \int_0^{\theta(\Delta t')} \sin \theta' d\theta' \\
 &= \frac{\chi \mathcal{A}}{2\pi} \int_L^{t_1} 2\pi c \Delta t' [1 - \cos \theta(t')] d\Delta t' \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

La figure 3.9a nous présente la situation avant que l'intervalle de temps critique soit atteint dans l'intégration, c'est à dire $\Delta t < \Delta t_{cr}$. Dans cet intervalle de temps, on peut écrire $\cos \theta = \frac{c\Delta t - L}{c\Delta t}$, i.e. $1 - \cos \theta = \frac{L}{c\Delta t}$

D'où,

$$h(Z = 0, t = t_1) \Big|_{t_1 - \Delta t}^{t_1 - L/c} = \frac{\chi \mathcal{A}}{2\pi} \int_L^{\Delta t} 2\pi L d\Delta t' = \chi \mathcal{A} L (\Delta t - L) \quad (3.26)$$

La croissance en temps du maximum de la perturbation gravitationnelle est donc linéaire sur cette partie.

La figure 3.9c nous présente quant à elle la situation après que l'intervalle de temps critique soit atteint dans l'intégration, c'est à dire $\Delta t > \Delta t_{cr}$. Dans cet intervalle de temps, on peut écrire :

$$\sin \theta = \frac{R}{c\Delta t'}, \text{ i.e. } 1 - \cos \theta = 1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{c^2 \Delta t'^2}} \quad (3.27)$$

D'où, par développement limité pour $ct \gg R$,

$$\begin{aligned}
 h(Z = 0, t = t_1) \Big|_{t_1 - \Delta t}^{t_1 - \Delta t_{cr}} &= \frac{\chi \mathcal{A}}{2\pi} \int_{\Delta t_{cr}}^{\Delta t} 2\pi c \Delta t' \left(1 - 1 + \frac{R^2}{2c^2 \Delta t'^2} \right) d\Delta t' \\
 &= \frac{\chi \mathcal{A}}{2\pi} \int_{\Delta t_{cr}}^{\Delta t} \pi \frac{R^2}{c\Delta t'} d\Delta t' \\
 &= \frac{\chi \mathcal{A}}{2} R^2 \ln(c(\Delta t - \Delta t_{cr})) \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

La croissance en temps du maximum de la perturbation gravitationnelle est donc logarithmique sur cette partie.

Le temps critique peut finalement être calculé dans ce cas par un simple théorème de Pythagore présenté figure 3.9b.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 c^2 \Delta t_{cr}^2 &= R^2 + \overbrace{c^2 t_{cr}^2 - 2Lct_{cr} + L^2}^{(ct_{cr} - L)^2} \\
 c\Delta t_{cr} &= \frac{R^2 + L^2}{2L} \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

Si l'on prend un cylindre créé au temps $t = 0$, il faudra alors attendre le temps $t_1 = \Delta t_{cr}$ avant de pouvoir observer une croissance logarithmique. Cette croissance sera observable à puissance constante puisque l'équation (3.28) montre un résultat proportionnel à la puissance

$P = cAR^2$ pour la croissance logarithmique. On peut alors observer sur les figures si ce temps coïncide. On choisira pour la figure 3.10 des dimensions du cylindre à puissance P et énergie E constantes telles que $ct \gg R$ et $R \gg L$ afin de pouvoir bien observer cette croissance logarithmique, au prix de longueurs de cylindres qui ne correspondent pas ici à une situation physique.

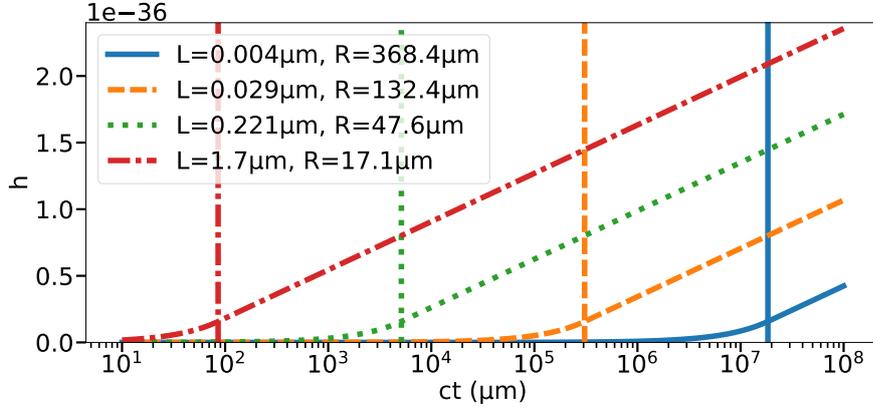


FIGURE 3.10 – Amplitude de la déformation gravitationnelle à puissance constante $P = 1\text{PW}$, en fonction du temps pour différents rapports d’aspect du cylindre source. Les lignes verticales pointent le temps critique t_{cr} pour chacun des cylindres étudiés.

Les lignes verticales tracées à $t = \Delta t_{cr}$ pour chaque cylindre étudié délimitent bien le régime de croissance accélérée du régime de croissance logarithmique présent après le temps critique. Afin d’obtenir de bons résultats pour la déformation gravitationnelle, il faudra donc faire en sorte que chaque faisceau puisse générer sa déformation gravitationnelle pendant au moins l’intervalle de temps critique. Cela peut sembler, surtout au vu de la figure précédente, compliquer la mise en œuvre d’une expérience pour les faisceaux de grand diamètre et de petite longueur d’émission, mais cette interprétation ne prend pas en compte la nature du faisceau lumineux étudié.

3.2.3 Influence de la distance de Rayleigh sur la déformation maximale

Dans une situation se rapprochant plus du réel, un faisceau lumineux ne reste pas cylindrique indéfiniment. Il peut seulement être considéré cylindrique sur le double de sa distance de Rayleigh, c’est à dire, deux fois la distance qu’il faut pour qu’un faisceau focalisé diffracte et voit son rayon doubler. Cette distance dépend naturellement d’à quel point le faisceau est focalisé, ainsi que de sa longueur d’onde, selon la formule désignée :

$$z_r = \frac{\pi R^2}{\lambda} \quad (3.30)$$

Où z_r est la longueur de Rayleigh, R le rayon minimal du faisceau, et λ la longueur d’onde de la lumière ici focalisée.

Cette grandeur introduit donc une limite supérieure sur le temps de propagation du cylindre de lumière, qui est donc de $t_r = 2z_r/c$. Il y a donc un lien direct entre le temps de propagation maximal et le rayon R du cylindre. Si l’on considère que l’on veut la perturbation la plus grande possible du champ gravitationnel, on peut donc considérer que tout cylindre de lumière que l’on étudie génère une perturbation gravitationnelle sur le plus long temps possible, c’est à dire t_r . On peut alors réétudier les résultats à puissance constante, en

fonction de R , tels que le cylindre de lumière a généré une déformation gravitationnelle sur $2z_r$.

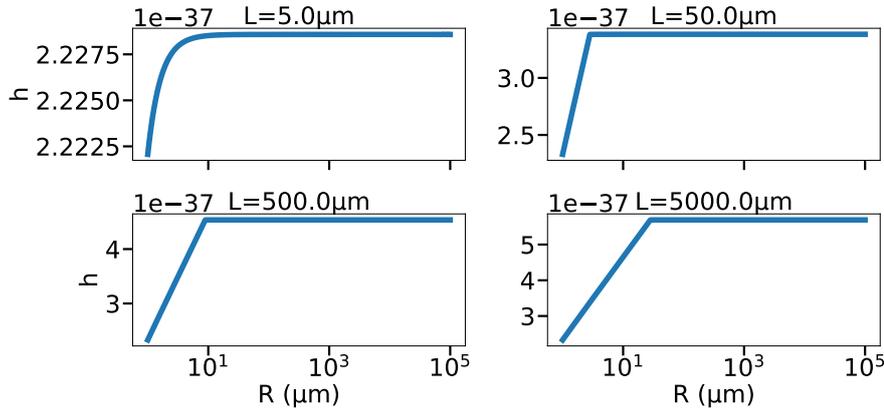


FIGURE 3.11 – Maximum d'amplitude à L fixé de la déformation gravitationnelle à puissance constante $P = 1\text{PW}$ en fonction du rayon R du cylindre et au temps $ct = 2z_R$. On prend la longueur d'onde associée au laser émettant ce cylindre $\lambda = 1\mu\text{m}$.

Ce nouveau calcul qui prend plus en compte la situation expérimentale, présenté figure 3.11, montre que l'augmentation du rayon du cylindre est loin d'être nuisible à l'obtention d'une déformation gravitationnelle importante, comme on le pensait précédemment.

Tant que la rayon R est suffisamment grand devant la longueur L du cylindre, la déformation gravitationnelle générée par un cylindre de lumière est en effet constante à puissance constante.

En effet, dans ce cas, on se retrouve dans le cas de figure déjà calculé où $R \gg L$ et $c\Delta t \gg R$. En effet, $2z_R/R$ dépend du rapport R/λ . Ce rapport est, dans tous les cas étudiés, grand devant 1 car $\lambda \leq 2L$, signifiant qu'une impulsion laser est considérée comme ayant une extension temporelle L toujours plus grande que la moitié de sa longueur d'onde λ . Il s'agit d'une limite inhérente aux lasers. Ceci nous permet cependant de reprendre l'expression de la croissance logarithmique de la déformation gravitationnelle aux temps longs, présentée en équation (3.23), en y appliquant la nouvelle expression du temps $c\Delta t = 2z_R$

$$\begin{aligned} h &\approx \frac{\chi AR^2}{2} \left(1 + \ln \left(\frac{2Lc\Delta t}{R^2} \right) \right) \\ &\approx \frac{\chi P}{2\pi c} \left(1 + \ln \left(\frac{4L\pi R^2}{\lambda R^2} \right) \right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$h \approx \frac{\chi P}{2\pi c} \left(1 + \ln \left(\frac{4\pi L}{\lambda} \right) \right) \quad (3.31)$$

Cette dernière expression est, à puissance P constante, indépendante de R et dépendante de manière logarithmique du rapport L/λ . Ces résultats confirment et enrichissent les informations présentées figure 3.11, et confirment le lien de proportionnalité entre la puissance de l'impulsion lumineuse et la déformation gravitationnelle qu'elle génère.

Cela veut dire notamment, que la grandeur physique déterminante pour la déformation gravitationnelle est la puissance P de notre faisceau lumineux.

En pratique, ce résultat très important nous permet de nous affranchir du besoin d'un faisceau lumineux très focalisé, et donc des effets quantiques apparaissant à haute intensité ($I > 10^{23} \text{W/cm}^2$). Cela permet aussi d'avoir des tailles d'expérience qu'il est possible de calibrer à la méthode de détection employée.

3.3 Conclusion sur l'étude d'un cylindre de densité d'énergie constante

L'étude de la déformation gravitationnelle générée par la partie constante du tenseur énergie impulsion électromagnétique $T_{\mu\nu}^{em}$ d'une impulsion lumineuse nous donne plusieurs résultats importants.

La perturbation gravitationnelle générée par un cylindre de densité d'énergie constante se déplaçant à la vitesse de la lumière c présente un profil singulier. Non seulement ce profil en forme de vague selon z nous donne de bons espoirs pour l'étude de la détection de la déformation par un faisceau sonde ou un objet similaire, puisque la déviation lumineuse dépend de la variation de la métrique, mais cette déformation croît indéfiniment en fonction du temps. Cette croissance en temps suit plusieurs régimes compris d'un régime de croissance accélérée en $c^2 t^2$ au plus petit temps suivi d'un régime intermédiaire qui mène à un régime de croissance logarithmique aux temps longs.

L'étude de la compatibilité entre le temps de croissance alloué à la déformation et la configuration de l'impulsion lumineuse utilisée constitue toute la subtilité dans la recherche de l'observation expérimentale d'un tel phénomène. La croissance a beau finir par devenir logarithmique, il sera peut être possible de gagner un facteur multiplicatif non négligeable en fonction des paramètres possibles pour une expérience laser.

Enfin, la valeur de déformation gravitationnelle h trouvée pour un faisceau d'une puissance $P = 1 \text{PW}$ est de l'ordre de 2×10^{-37} , ce qui reste encore minuscule mais présente un progrès par rapport à la génération d'une perturbation gravitationnelle par accélération de matière. En effet l'étude de ces résultats et leur comparaison avec la génération de déformation gravitationnelle par accélération de matière semble corroborer les évaluations de GRISHCHUK (2003a) sur la différence significative en ordre de grandeur entre les déformations gravitationnelles générées par des champs électromagnétiques et celles générées par accélération de masse. Pour rappeler les résultats des expériences théorisées pour la génération par l'accélération de masse, le papier de RIBEYRE et TIKHONCHUK (2012) présente les différentes méthodes possibles de génération de déformation gravitationnelle par ablation de masse par laser intense. Ils donnent ici une évaluation de la valeur d'une telle déformation pour chacune des différentes expériences réalisées pour des puissances de l'ordre du PW et des énergies de l'ordre du MJ. Pour ces valeurs, ils trouvent une déformation de l'ordre :

$$h_m \approx 10^{-40} \sim 10^{-39} \quad (3.32)$$

Le principal facteur limitant à ces résultats est la distance à laquelle le dispositif d'observation doit se tenir du fait de la nature explosive de l'accélération de masse. RIBEYRE et TIKHONCHUK (2012) positionnent dans ce papier un tel dispositif de détection à 10 m de la source, une distance énorme par rapport à celles envisagées pour l'étude de la génération par lumière intense.

Les résultats de KADLECOVÁ et al. (2017) confirment cette évaluation en trouvant pour l'expérience étudiée :

$$h_m \approx 5 \times 10^{-40} \quad (3.33)$$

Ces résultats sont à mettre en perspective avec le résultat présenté dans cette thèse, ce qui nous donne un rapport d'ordre de grandeur entre la déformation générée par accélération de masse et celle générée par lumière intense de :

$$\frac{h}{h_m} \approx 400 \tag{3.34}$$

Les expériences de génération de perturbation gravitationnelle par accélération de masse sont considérées à une puissance légèrement plus basse (0.5 PW pour le cas massif contre 1 PW pour le cas électromagnétique), mais à des énergies nettement plus importantes (0.5 MJ pour le cas massif contre ~ 160 J pour le cas électromagnétique où $L=50 \mu\text{m}$). L'étude de la déformation gravitationnelle générée par un faisceau collimaté semble donc avantageuse par rapport à l'étude de celle générée par accélération de masse.

Ces résultats viennent compléter ceux théorisés par GRISHCHUK 2003b qui présentait, pour un montage théorique profitant de la résonance entre ondes électromagnétiques et gravitationnelles, une perturbation gravitationnelle de l'ordre de $h \approx 10^{-36}$. Grischuk prédisait cependant un rapport encore plus drastique entre la génération par émetteur massif et celle par émetteur électromagnétique puisqu'il estimait ce rapport à $h/h_m = 10^{10}$.

À noter la différence qualitative entre la nature de la déformation gravitationnelle créée par accélération de masse par rapport à celle créée par un faisceau de lumière que nous avons étudié ici :

Quand la première est de nature chaotique du fait de la nature intense et arbitraire du processus d'éjection et de propulsion de masse par la création d'un plasma, la seconde est directement générée par un laser, c'est à dire un objet aux propriétés géométriques bien déterminables tant dans sa forme que dans sa direction. Les lasers non plus ne sont pas sans leur part chaotique mais nous estimons les phénomènes aléatoires comme l'effet de Speckle plus négligeable dans l'établissement d'une déformation homogène. GRISHCHUK (2003a) met aussi en avant dans son article cette facilité d'établissement d'une source gravitationnelle cohérente, par rapport à une génération par accélération de masse, dont la cohérence serait difficile à établir et maintenir.

L'obtention d'une déformation gravitationnelle de l'ordre de $h = 10^{-37}$ pour un laser de puissance $P = 1$ PW nous permet donc d'envisager une source de déformation gravitationnelle qui, bien qu'encore de faible effet, se présente comme cohérente, plus facile d'observation et surtout plus adaptable au domaine de fréquence de détection que la génération par accélération de matière.

Avant d'aborder la détection d'une telle onde cependant, nous devons maintenant nous appliquer à la résolution de la partie du problème de la génération de déformation gravitationnelle par la lumière que nous avons mis de côté : le caractère oscillant de la densité d'énergie électromagnétique.

Chapitre 4

Régimes oscillants

Résumé : Nous avons pu déterminer au chapitre précédent la déformation gravitationnelle générée par un cylindre de densité d'énergie constante se déplaçant à la vitesse de la lumière c , assimilable à l'énergie transportée par une impulsion lumineuse de polarisation circulaire. Afin de compléter cette étude et d'avoir une idée de la déformation gravitationnelle qui pourrait être aussi générée par une impulsion lumineuse de polarisation linéaire, nous nous intéressons dorénavant à la déformation générée par un cylindre de densité d'énergie oscillante, telle qu'elle peut apparaître dans le tenseur énergie-impulsion électromagnétique. Nous pourrions au terme de l'étude de la partie oscillante sommer ces résultats, pour une fréquence double, avec ceux obtenus pour la partie constante afin d'obtenir une modélisation de la déformation gravitationnelle générée par une impulsion lumineuse de polarisation rectiligne, puisque cette dernière s'écrit comme la somme d'une partie constante et oscillante de fréquence double à celle de l'impulsion électromagnétique dans le tenseur énergie impulsion. Notre but sera ici encore, outre l'observation des caractéristiques intéressantes de la déformation gravitationnelle générée, de déterminer quels paramètres doivent être étudiés afin de générer une déformation gravitationnelle d'amplitude maximale.

4.1 Influence sur la métrique espace-temps du terme source sinusoïdal

Nous nous penchons tout d'abord sur le cas d'un cylindre porteur d'une oscillation en densité d'énergie. Après avoir adapté au cas présent la méthode de calcul analytique appliquée chapitre 3, nous étudierons les particularités liées à la déformation gravitationnelle ainsi générée. Nous essaierons notamment de déterminer quelle influence a la longueur d'onde λ sur la déformation gravitationnelle, afin de déterminer si elle constitue un paramètre important dans la détermination de paramètres expérimentaux.

4.1.1 Calcul analytique de la perturbation gravitationnelle générée par la partie oscillante

Nous reprenons le cas de figure présenté dans le chapitre précédent au détail près que nous n'étudions plus un cylindre de densité d'énergie constante se déplaçant à la vitesse de la lumière, mais un cylindre dont les moments associés à la densité d'énergie sont uniquement représentés par un terme oscillant tel qu'on peut maintenant écrire le terme source dans les équations d'Einstein linéarisées (1.46) :

$$Source(ct, z, r) = \mathcal{A} \cos(k(z - ct)) H(ct)H(z - ct)H(ct + L - z)H(R - r) \quad (4.1)$$

Ce terme, isolé, peut correspondre au cas physique de l'effet GERTSENSHTEIN 1962 dans une des directions transverses à la propagation de l'onde électromagnétique, si l'on considère la taille de la zone dans laquelle le champ magnétique constant est présent comme grande devant le temps de propagation et la taille de l'impulsion lumineuse étudiée. Les résultats et calculs présentés ci-dessous sont donc un développement du cas étudié par KOLOSNITSYN et RUDENKO 2015 au cas réel en 1+3D. Outre l'approximation que notre impulsion lumineuse est un cylindre, ici nous faisons aussi l'approximation que la phase de notre terme oscillant est la même sur toute une tranche du cylindre à z constant.

On introduit donc à nouveau cette expression dans l'équation générale (2.41) pour la résolution de notre équation d'Einstein :

$$h(ct, z, 0) = \mathcal{A}\chi \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{\infty} H(ct - \rho_0)H(z' - ct + \rho_0)H(L + ct - z' - \rho_0)H(R - r') \times \frac{\cos(k(z' - ct + \rho_0)) r' dr'}{\rho_0} \quad (4.2)$$

où $\rho_0(r', z', z) = \sqrt{(z - z')^2 + r'^2}$.

Les distributions de Heaviside étant exactement les mêmes qu'en section 3.1, nous nous concentrons uniquement ici sur le calcul des primitives provenant de l'intégration du terme $\cos(k(z' - ct + \rho_0)) r'/\rho_0$. En l'occurrence nous pouvons observer que :

$$\partial_{r'} \sin\left(k\left(z' - ct + \sqrt{(z - z')^2 + r'^2}\right)\right) = \frac{kr'}{\sqrt{(z - z')^2 + r'^2}} \cos\left(k\left(z' - ct + \sqrt{(z - z')^2 + r'^2}\right)\right) \quad (4.3)$$

Ce qui donne pour la primitive de l'intégrande de l'équation (4.2) dans le repère comobile au cylindre de lumière présenté en (3.4) :

$$\int \frac{r' dr'}{\sqrt{\tilde{z}^2 + r'^2}} \cos\left(k\left(Z + \tilde{z} + \sqrt{\tilde{z}^2 + r'^2}\right)\right) = \frac{1}{k} \sin\left(k\left(Z + \tilde{z} + \sqrt{\tilde{z}^2 + r'^2}\right)\right) \quad (4.4)$$

En reprenant l'équation (4.2) et en rappelant la première intégration pour les distributions de Heaviside présentée équation (3.10), nous obtenons donc :

$$h(t, z, 0) = \frac{\mathcal{A}\chi}{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{z} H(\tilde{z} + ct)H(ct - \tilde{z})H(L - Z)H(L - Z - \tilde{z}) \times \left[\begin{array}{l} \text{borne} \\ \text{supérieure} \\ \text{d'intégration} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} H(c^2t^2 - (L - Z - \tilde{z})^2)H(c^2t^2 - \tilde{z}^2 - R^2) \sin(k(Z + \tilde{z} + ct)) \\ + H((L - Z - \tilde{z})^2 - c^2t^2)H((L - Z - \tilde{z})^2 - \tilde{z}^2 - R^2) \sin(k(Z + \tilde{z} + L - Z - \tilde{z})) \\ + H(c^2t^2 - R^2)H((L - Z - \tilde{z})^2 - R^2) \sin(k(Z + \tilde{z} + \sqrt{R^2 + \tilde{z}^2})) \end{array} \right. \right. \\ \left. \left. - \underbrace{H(-Z)H(-Z - 2\tilde{z}) \sin(k(Z + \tilde{z} - Z - \tilde{z})) - (H(Z) + H(-Z)H(Z + 2\tilde{z})) \sin(k(Z + \tilde{z} + |\tilde{z}|))}_{\text{borne inférieure d'intégration}} \right] \quad (4.5)$$

Afin d'utiliser la procédure python présentée section 2.2.3, nous avons besoin de déterminer les primitives des intégrandes en présence ainsi que les bornes d'intégrations auxquelles elles sont associées. Nous connaissons déjà ces bornes, puisque l'expression des distributions de Heaviside associées ne diffère pas de celle présentée section 3.1 et est donc résumée dans la table 3.1.

Ne reste donc plus qu'à étudier les primitives des 5 intégrandes en présence, en les présentant

dans l'ordre dans lequel elle sont évoquées dans la table 3.1, afin d'éviter toute confusion. Nous avons donc les primitives suivantes :

$$\int d\tilde{z} \sin(k(Z + \tilde{z} + ct)) = -\frac{1}{k} \cos(k(Z + \tilde{z} + ct)) \quad (4.6)$$

$$\int d\tilde{z} \sin(kL) = \frac{\tilde{z}}{k} \sin(kL) \quad (4.7)$$

$$\int d\tilde{z} \sin(k(Z + \tilde{z} + \sqrt{R^2 + \tilde{z}^2})) = \frac{1}{2k} (-\cos(k(Z + Re^u)) - kRe^{-u} \sin(k(Z + Re^u)) + k^2 R^2 (\cos(kZ) \text{Ci}(kR e^u) - \sin(kZ) \text{Si}(kR e^u))) \quad (4.8)$$

où $u = \text{arcsinh}(\tilde{z}/R)$, Ci et Si les fonctions cosinus intégral et sinus intégral telles que :

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt \text{ et } \text{Ci}(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt, \quad x > 0$$

$$\int d\tilde{z} \sin(k(Z + \tilde{z} - Z - \tilde{z})) = 0 \quad (4.9)$$

$$\int d\tilde{z} \sin(k(Z + \tilde{z} + |\tilde{z}|)) = \begin{cases} \tilde{z} \leq 0 & \tilde{z} \sin(kZ) \\ \tilde{z} \geq 0 & -\frac{1}{2k} [\cos(k(Z + 2\tilde{z})) - \cos(kZ)] \end{cases} \quad (4.10)$$

Il ne reste plus alors qu'à fournir ces nouvelles informations au programme python utilisé pour le calcul du cas mobile à densité d'énergie constante pour obtenir la représentation de la perturbation gravitationnelle h générée par un terme électromagnétique purement oscillant d'amplitude de densité d'énergie \mathcal{A} .

Preuve de l'équation (4.8) :

$$\int \sin(k(Z + \tilde{z} + \sqrt{R^2 + \tilde{z}^2})) d\tilde{z} = \int \sin\left(k\left(Z + R \sinh(u) + R\sqrt{\sinh^2(u) + 1}\right)\right) R \cosh(u) du \quad (4.11)$$

$$\left(\begin{array}{l} \sinh(u) = \tilde{z}/R, \quad du \cosh(u) = d\tilde{z}/R \\ \sinh^2(u) + 1 = \cosh^2(u) \text{ et } \sinh(u) + \cosh(u) = e^u \end{array} \right)$$

$$= \int R \cosh(u) \sin(k(Z + R(\sinh(u) + \cosh(u)))) du \quad (4.12)$$

$$= \frac{R}{2} \int (e^u + e^{-u}) \sin(k(Z + R e^u)) du \quad (4.13)$$

On calcule les deux termes additionnés séparément :

$$\int e^u \sin(k(Z + R e^u)) = -\frac{1}{kR} \cos(k(Z + R e^u)) \quad (4.14)$$

$$\int e^{-u} \sin(k(Z + R e^u)) = -e^{-u} \sin(k(Z + R e^u)) + \int kR \cos(k(Z + R e^u)) du \quad (4.15)$$

$$= -e^{-u} \sin(k(Z + R e^u)) + \int kR (\cos(kZ) \cos(kR e^u) - \sin(kZ) \sin(kR e^u)) du \quad (4.16)$$

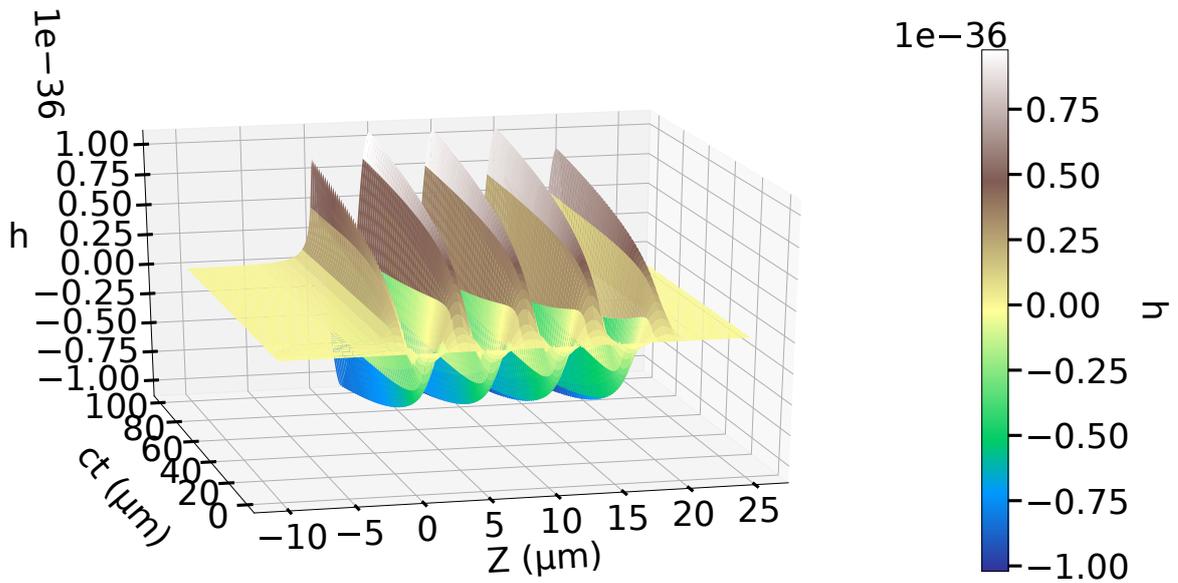
$$= -e^{-u} \sin(k(Z + R e^u)) + kR \int \cos(kZ) \frac{kR e^u \cos(kR e^u)}{kR e^u} du - \sin(kZ) \frac{kR e^u \sin(kR e^u)}{kR e^u} du \quad (4.17)$$

$$= -e^{-u} \sin(k(Z + R e^u)) + kR (\cos(kZ) \text{Ci}(kR e^u) - \sin(kZ) \text{Si}(kR e^u)) \quad (4.18)$$

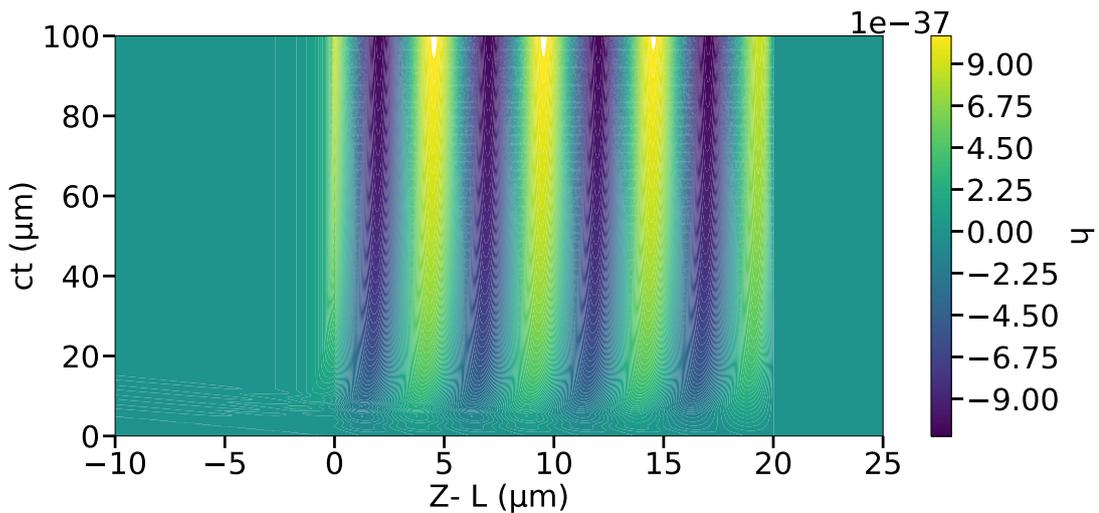
D'où, en additionnant les termes (4.14) et (4.18) et en multipliant par $R/2$, la primitive présentée équation (4.8).

4.1.2 Étude de l'influence du rapport d'aspect

Grâce aux calculs présentés section précédente, nous pouvons maintenant représenter un exemple de déformation gravitationnelle générée par une composante purement oscillante du tenseur énergie-impulsion électromagnétique. Nous prendrons ici les données habituelles à cette thèse pour ce genre de représentation, c'est à dire les caractéristiques d'un laser de puissance tel que $I = \mathcal{A} \times c = 10^{22} \text{W/cm}^2$, $E = 525 \text{J}$, correspondant aux dimensions $R = 5 \mu\text{m}$ et $L = 20 \mu\text{m}$. Du fait de la nature oscillatoire de notre source, nous introduisons aussi la longueur d'onde de la source $\lambda = 5 \mu\text{m}$. Le résultat donné par la procédure python est présenté Figure 4.1.



(a)



(b)

FIGURE 4.1 – Représentation a) 3D, b) 2D avec carte colorimétrique, de la solution sur le plan comobile (O, Z, ct) pour une intensité du laser $I = 10^{22} \text{W/cm}^2$, une longueur d'onde de $\lambda = 5 \mu\text{m}$ et des dimensions du cylindre de lumière $L = 20 \mu\text{m}$, $R = 5 \mu\text{m}$.

Nous observons certaines différences avec la solution présentée Figure 3.2. Notamment, on peut observer sur la Figure 4.1b qu'on ne retrouve plus la "traînée" de "détente" de la déformation gravitationnelle située en aval du cylindre puisque la déformation elle-même est nulle aux bords du cylindre, comme observé Figure 4.1a. De plus, l'observation conjointe de ces deux figures nous indique deux résultats importants pour la valeur de la déformation à l'intérieur du cylindre.

Tout d'abord la déformation gravitationnelle reproduit à l'intérieur du cylindre l'oscillation électromagnétique source (au décalage de phase près nécessaire à la condition $h(z=0, t) = h(z=L, t) = 0$). Cela signifie entre autres que pour un cas purement oscillant, on peut avoir un h négatif. Ensuite l'amplitude de la perturbation gravitationnelle semble croître en temps selon un régime compliqué à identifier aux temps courts, mais qui semble tendre vers un régime de croissance logarithmique, finalement très similaire à celui présenté dans le chapitre 3, Figure 3.2.

Du fait de l'amplitude globalement constante de l'oscillation de la déformation gravitationnelle dans le cylindre, nous considérerons cette dernière comme la différence du maximum par le minimum de déformation gravitationnelle générée dans le cylindre, divisée par deux.

Avec le calcul de la déformation gravitationnelle générée par un terme source purement oscillant dans l'équation d'Einstein, vient l'introduction d'une nouvelle variable dans notre problème, la fréquence spatiale de l'oscillation étudiée k reliée à la longueur d'onde λ ($k = 2\pi/\lambda$). Deux options très distinctes s'offrent donc à nous pour l'étude de la déformation ainsi générée : considérer la solution à longueur d'onde fixe et étudier l'influence du changement de rapport d'aspect L/R sur l'amplitude et la forme de la déformation gravitationnelle ainsi générée, ou poser la longueur d'onde comme un diviseur de la longueur de l'onde émise et ainsi se placer à un nombre constant de périodes à l'intérieur du cylindre, peu importe son rapport d'aspect.

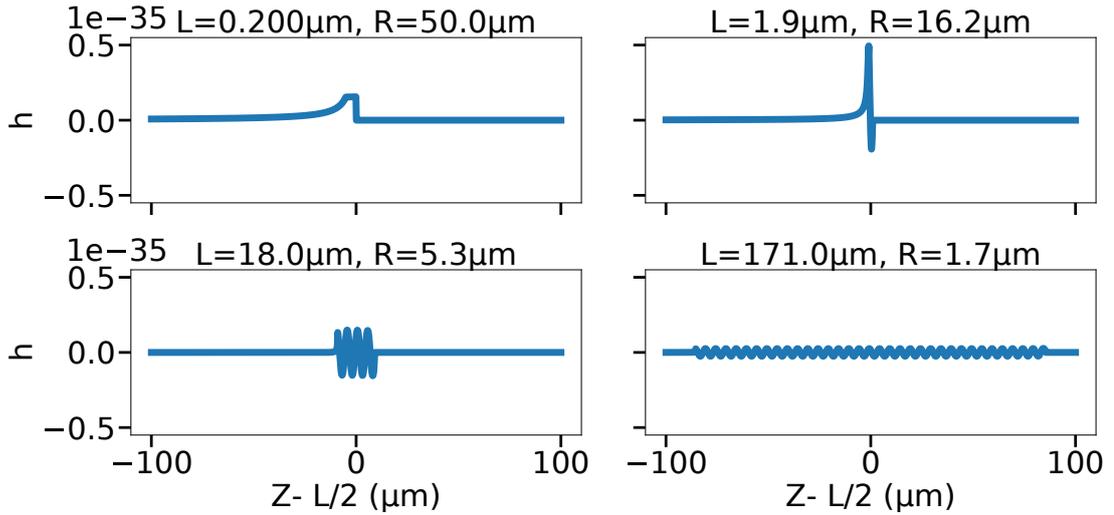
Nous mènerons notre étude selon la première approche ci-dessous, avant de poursuivre par l'approche à nombre de périodes constant dans un second temps.

Cas à longueur d'onde constante

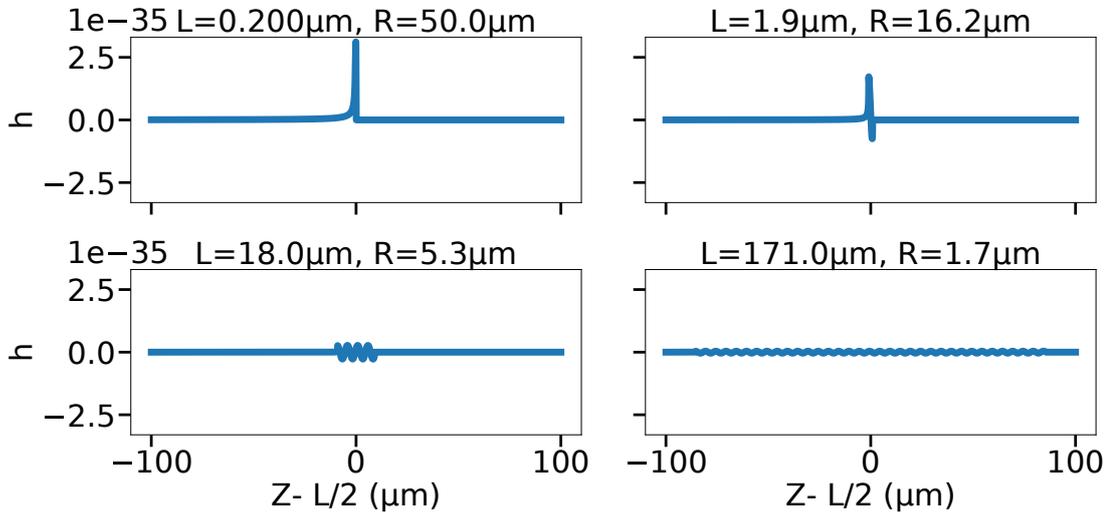
Afin de comprendre l'influence du rapport d'aspect du cylindre délimitant la source électromagnétique oscillante sur la déformation gravitationnelle générée, nous représentons le profil de la déformation gravitationnelle selon l'axe (O, z) à deux temps différents Figure 4.2. Il est important de rappeler que nous restons à intensité et énergie constantes ($I = 10^{22} \text{W/cm}^2$, $E = 525 \text{J}$), et que donc seul la forme du cylindre change, cylindre dont le volume reste constant.

Nous observons que cette figure présente plusieurs formes bien distinctes de déformation gravitationnelle en fonction du rapport entre la longueur du cylindre L et la longueur d'onde de l'oscillation source λ . Ainsi pour L suffisamment grand devant λ on retrouve ce que l'on observait déjà Figure 4.1a : la déformation gravitationnelle reproduit en forme l'oscillation électromagnétique qui lui donne naissance. Lorsque l'on réduit la valeur de L et que $L < \lambda$, mais que la longueur du cylindre n'est pas encore négligeable, nous observons que la moyenne de la déformation gravitationnelle n'est plus nulle. La déformation comporte encore une partie négative, spécificité intéressante du cas oscillant par rapport au cas constant du chapitre 3, mais cette partie négative n'est plus égale en valeur minimale à l'opposée de la valeur maximale de déformation. La conclusion logique de cette évolution est le cas pour lequel la longueur du cylindre est négligeable devant la longueur d'onde $L \ll \lambda$, où nous retrouvons à peu près la forme de la déformation générée par le cylindre de densité d'énergie constante, comme elle peut être observée Figure 3.3. Nous étudierons de plus près la limite constante du cas oscillatoire plus bas.

Une similitude que nous pouvons cependant observer avec le cas de densité d'énergie



(a)



(b)

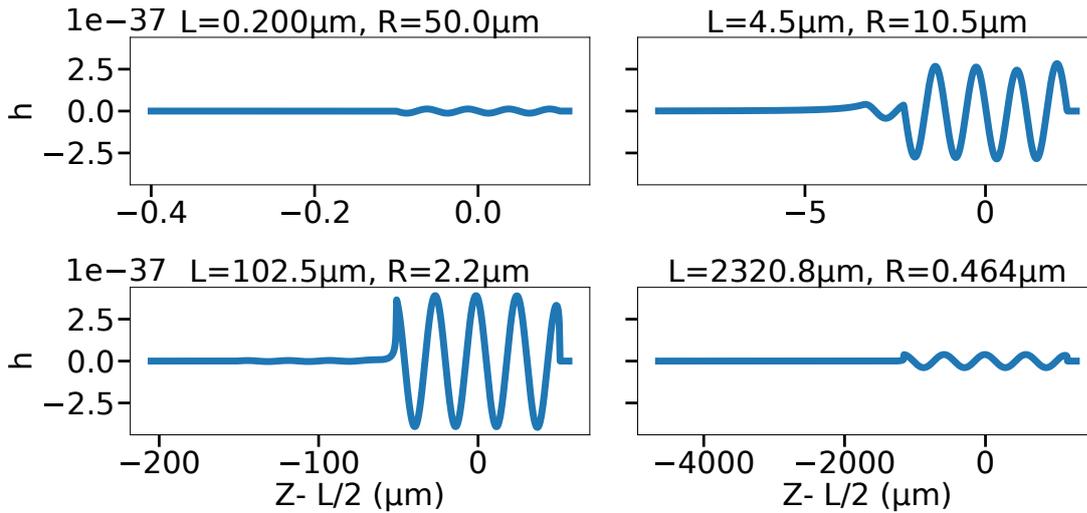
FIGURE 4.2 – Coupe au temps a) $ct = 250\mu\text{m}$ b) $ct = 5\text{mm}$ de la perturbation gravitationnelle générée par un cylindre d'intensité $I = 10^{22}\text{W}/\text{cm}^2$, de longueur d'onde d'oscillation $\lambda = 5\mu\text{m}$, et d'énergie $E = 525\text{J}$ pour différents rapports d'aspect.

constante est le déplacement avec le temps du maximum de déformation vers les petits rapports d'aspect. De manière strictement analogue au cas présenté Figure 3.3, le deuxième plus petit rapport d'aspect présente d'abord au plus petit temps le maximum de déformation gravitationnelle avant d'être rattrapé aux temps plus long par le cas de plus petit rapport d'aspect.

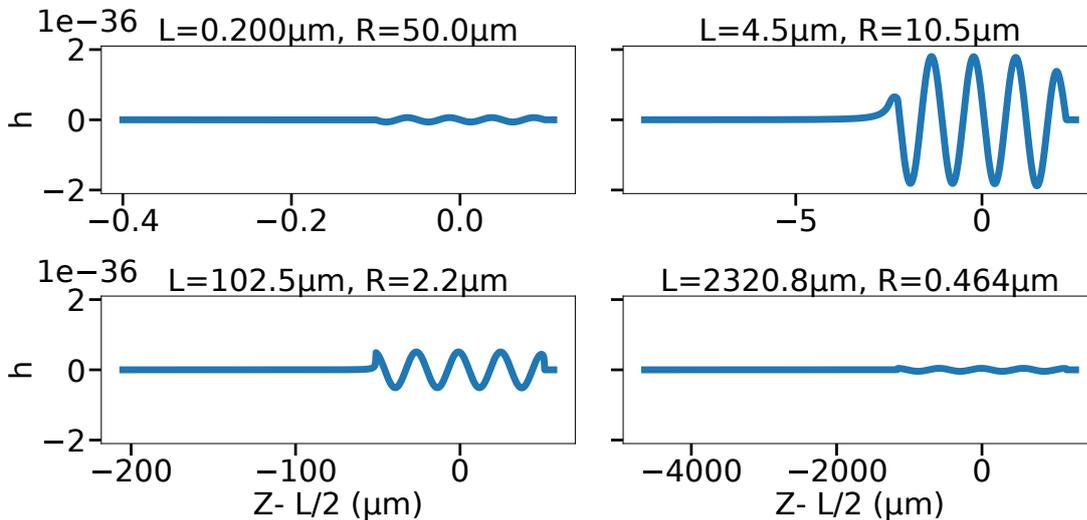
Néanmoins, il faut compléter cette comparaison par l'étude de déformations gravitationnelles de forme comparable. Nous allons donc nous intéresser plus en profondeur aux changements dans la déformation gravitationnelle générée par un terme purement oscillant pour une variation conjuguée du rapport d'aspect et de la longueur d'onde de l'oscillation de manière à ce que le cylindre de densité d'énergie oscillante comporte toujours le même nombre de période en son sein.

Cas à nombre constant de période dans le cylindre

Nous nous intéressons dans un premier temps au cas de figure d'un cylindre possédant un nombre d'oscillation faible mais non négligeable $4\lambda = L$. Cette étude nous permettra d'observer l'influence du rapport d'aspect sur l'amplitude de la déformation gravitationnelle générée par une source électromagnétique purement oscillante d'une part, et d'autre part de respecter (largement) le critère de Shannon dans le tracé des graphes, c'est à dire de préserver les graphes tracés d'inexactitudes inhérentes à un nombre de points insuffisants pour évaluer une fonction oscillante. Les graphes issus de cette étude sont présentés Figure 4.3.



(a)



(b)

FIGURE 4.3 – Coupe au temps a) $ct = 50\mu\text{m}$ b) $ct = 250\mu\text{m}$ de la perturbation gravitationnelle générée par un cylindre d'intensité $I = 10^{22}\text{W}/\text{cm}^2$, présentant 4 périodes d'oscillations ($4\lambda = L$), et d'énergie $E = 525\text{J}$ pour différents rapports d'aspect.

On n'observe pas de différence significative sur la forme de la solution pour les différents cylindres associés à leurs échelles respectives, la différence se trouve vraiment dans

l'amplitude d'oscillation des différentes déformations gravitationnelles. On peut ainsi observer Figure 4.3b que, pour $ct = 50\mu\text{m}$, le deuxième plus grand rapport d'aspect présente la plus importante déformation, tandis que pour un temps ultérieur tel que $ct = 250\mu\text{m}$, ce maximum s'est déplacé vers un plus petit rapport d'aspect. Ce caractère de déplacement du maximum de déformation gravitationnelle vers les petits rapports d'aspects semble donc bien être présent ici, à l'instar de ce que l'on avait pu observer Figure 3.3 pour le cas d'un cylindre de densité d'énergie constante se déplaçant à la vitesse c de la lumière.

L'étude à nombre de périodes d'oscillation constant est aussi l'occasion de comparer la méthode de calcul présentée dans ce chapitre à celle présentée pour le cylindre mobile de densité d'énergie constante chapitre 3. En effet on peut approcher l'expression (3.1) décrivant la source électromagnétique associée au cylindre de densité d'énergie constante par celle du cylindre de densité d'énergie oscillante (4.1). En prenant la longueur d'onde de l'oscillation λ très grande devant la longueur L du cylindre, le terme en $\cos(k(x-ct))$, où $k = 2\pi/\lambda \rightarrow 0$, tend vers 1. Afin de vérifier la véracité du calcul pour le cas oscillatoire, nous pouvons donc prendre le rapport $L/\lambda \ll 1$, afin de vérifier que ce calcul donne bien les mêmes résultats que dans le cas du cylindre mobile de densité d'énergie constante. Le tracé de ces résultats est présenté Figure 4.4 et comparé avec la Figure 3.3.

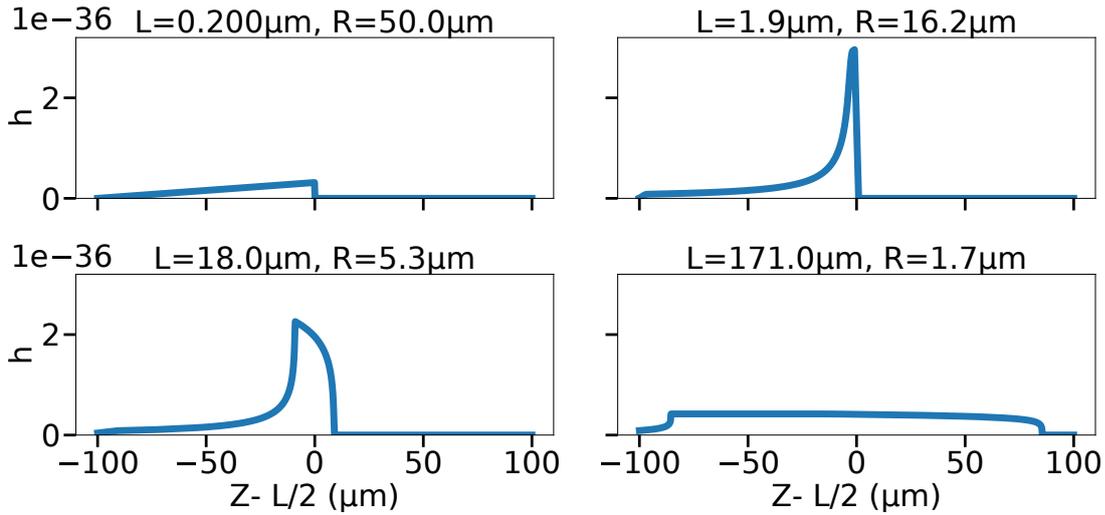
Les valeurs et formes des graphes présentés sur ces deux figures sont exactement les mêmes pour les mêmes paramètres d'entrée. Nous pouvons donc confirmer que la résolution du cas du cylindre de densité d'énergie purement oscillante correspond exactement dans la limite des très basses fréquences à la résolution du cas du cylindre de densité d'énergie constante, ce qui vient renforcer notre confiance dans la fiabilité de cette résolution.

Reprenant notre étude de l'effet du rapport d'aspect sur l'amplitude de la déformation nous étudions maintenant l'évolution du maximum de l'amplitude crête à crête de la déformation gravitationnelle en fonction du temps pour différents rapports d'aspect toujours à rapport L/λ constant. Nous prendrons pour cette étude le rapport $L/\lambda = 1$. Les graphes de l'évolution de ces amplitudes crête à crête en fonction du temps sont présentés Figure 4.5.

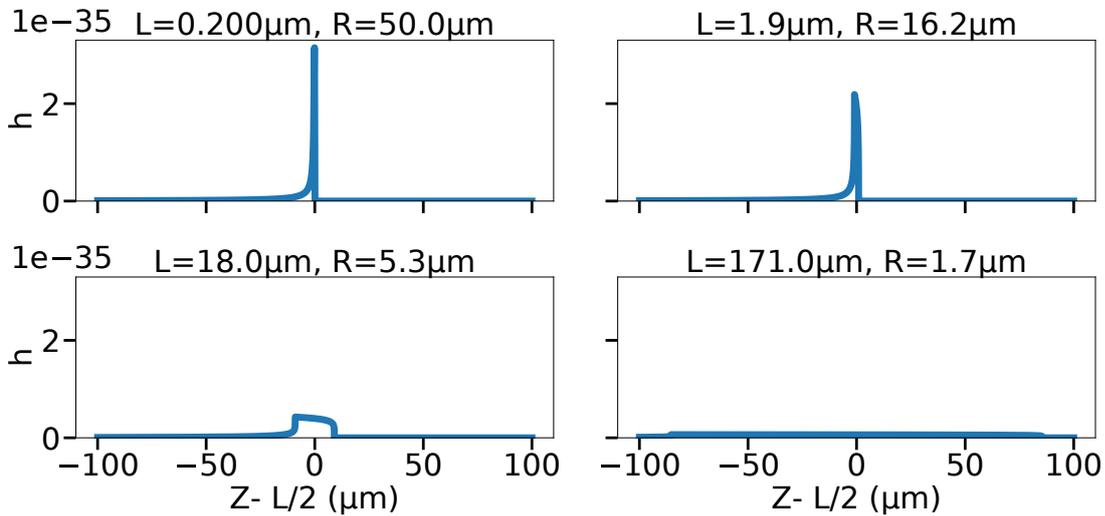
De manière encore très similaire au cas présenté Figure 3.4, nous observons que chaque rapport d'aspect a son maximum d'amplitude crête à crête croissant dans un premier temps de manière accélérée avant de passer un point d'inflexion à partir duquel sa croissance en fonction du temps tend vers une fonction logarithmique. Ce point d'inflexion étant de nouveau positionné dans le temps de manière différente pour chaque rapport d'aspect, nous observons encore que ce changement de régime de croissance apparaît de plus en plus tard quand le rapport d'aspect du cylindre source se réduit. Ainsi, les plus petits rapports d'aspect (c'est à dire les cylindres de forme "galette") se retrouvent aux temps longs présenter des maximum plus importants, et dont la pente de croissance logarithmique est plus grande que celle de plus grands rapports d'aspect (c'est à dire les cylindres de forme "pinceau") dont le maximum se trouvait être plus important à des temps plus courts, à l'instar du deuxième plus petit rapport d'aspect présenté Figure 4.5a qui est dépassé par le plus petit rapport d'aspect Figure 4.5b.

Il convient donc d'étudier de plus près l'évolution avec le temps de l'amplitude d'oscillation crête à crête. Pour cela, on trace la valeur de cette amplitude pour un large intervalle de rapports d'aspect et ce pour différents temps, comme présenté Figure 4.6. On prendra $\lambda = 2L$ pour ce graphe.

Cette figure présente de nouveau de grandes similitudes avec le cas du cylindre de densité constante Figure 3.5. Nous observons une augmentation de la valeur du maximum à mesure que le temps se fait plus grand, ainsi qu'un déplacement de ce maximum vers les petits rapports d'aspect. Remarquons cependant que le maximum ne se situe pas au même rapport d'aspect dans les cas du cylindre de densité d'énergie constante Figure 3.5 et celui de densité oscillante Figure 4.6. Cette différence est en particulier observable pour le temps tel que $ct = 1500\mu\text{m}$, où le premier cas a son maximum de l'ordre de $L/R = 0.01$ tandis que le



(a)

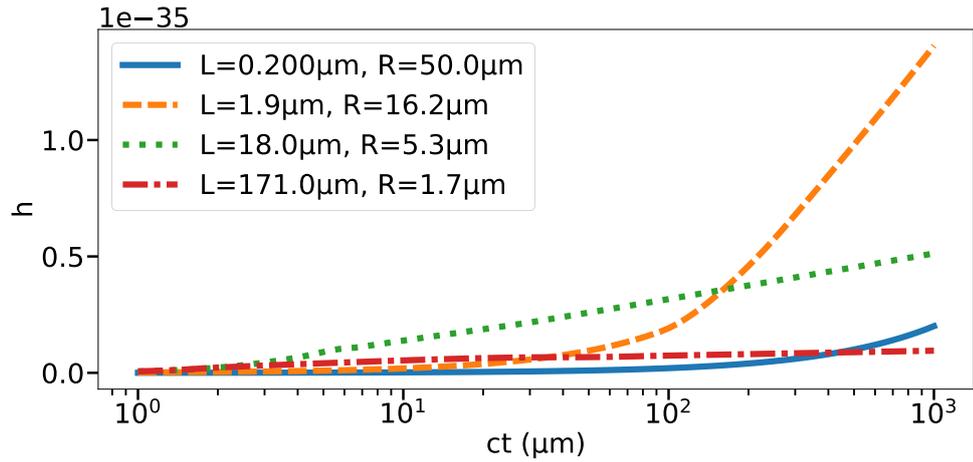


(b)

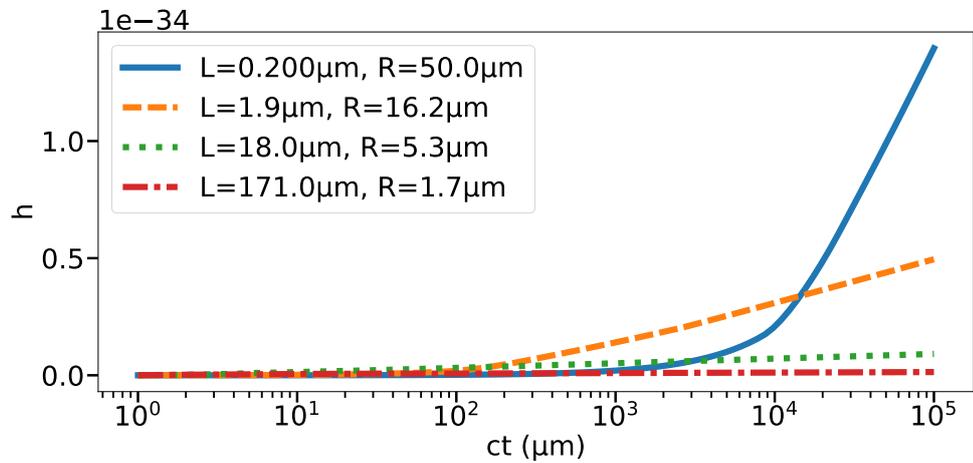
FIGURE 4.4 – Coupe au temps a) $ct = 50\mu\text{m}$ b) $ct = 5000\mu\text{m}$ de la perturbation gravitationnelle générée par un cylindre d'intensité $I = 10^{22}\text{W}/\text{cm}^2$, présentant une oscillation négligeable ($\lambda \gg L$), et d'énergie $E = 525\text{J}$ pour différents rapports d'aspect.

second se situe plus vers $L/R = 0.1$. Cela implique en particulier que la somme d'une densité constante et oscillante trouvera son maximum entre ces deux valeurs de rapport d'aspect et sera inférieure à la somme de deux maxima précédent.

La différence majeure entre les cas des cylindres de densités d'énergie constante et oscillante tient donc à la forme de la déformation selon l'axe Z , en vague pour le cas constant, selon la forme de l'oscillation du terme source pour le cas oscillant, ainsi qu'à la dépendance de ce dernier cas en la longueur d'onde de l'oscillation source.



(a)



(b)

FIGURE 4.5 – Maximum d’amplitude crête à crête de la perturbation gravitationnelle générée par un cylindre d’intensité $I = 10^{22} \text{W/cm}^2$, présentant une période d’oscillation ($\lambda = L$), et d’énergie $E = 525 \text{J}$ pour différents rapports d’aspect. Ces maxima sont tracés jusqu’au temps tel que a) $ct = 1000 \mu\text{m}$, b) $ct = 10^5 \mu\text{m}$.

4.1.3 Rôle de la longueur d’onde dans la déformation gravitationnelle

Afin d’avoir une idée plus exacte de cette dépendance de la déformation gravitationnelle en la longueur d’onde de la source oscillante, nous étudions de nouveau l’évolution de l’amplitude crête à crête maximum de la déformation gravitationnelle en fonction du rapport d’aspect L/R du cylindre, en regardant cette fois-ci ce profil pour différents rapports entre la longueur d’onde de l’oscillation λ et la longueur du cylindre L à temps fixé, ce qui différencie cette étude de celle menée sur la Figure 4.6. Ces nouveaux résultats sont exposés Figure 4.7.

L’étude de cette figure, nous permet de distinguer deux phénomènes. Tout d’abord, nous pouvons observer que plus le rapport L/λ est petit, plus le maximum d’oscillation crête à crête semble être élevé pour tout rapport d’aspect. Ensuite, la position du maximum de la courbe des maximum en fonction du rapport d’aspect semble se déplacer vers les petits rapports d’aspect quand le rapport L/λ diminue, c’est à dire quand le maximum augmente en valeur. Nous trouvons donc ici des résultats extrêmement similaires au comportement

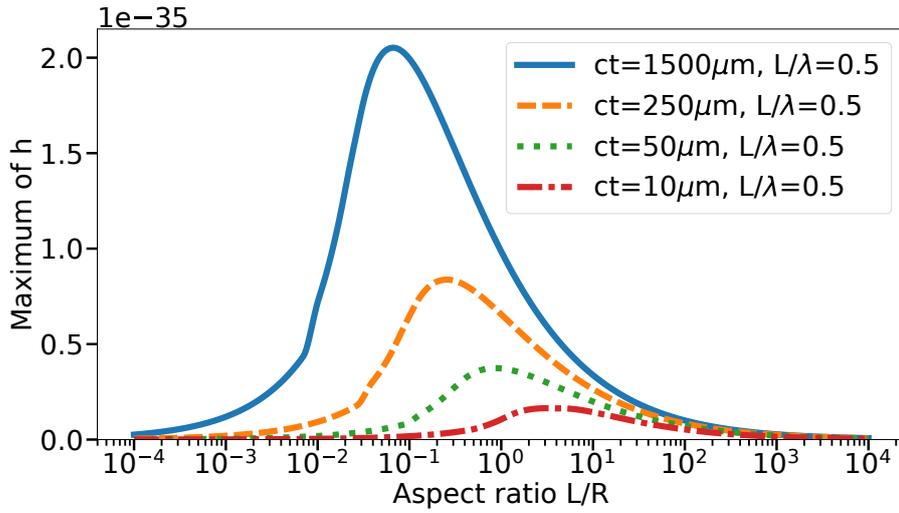


FIGURE 4.6 – Maximum d’amplitude crête à crête de la déformation gravitationnelle générée par un terme oscillant d’intensité $I = 10^{22} \text{W/cm}^2$ et d’énergie $E = 525 \text{J}$ en fonction du rapport d’aspect L/R du cylindre dans lequel la densité d’énergie oscille. Ce maximum est tracé pour différents temps tels que $ct \in \{10, 50, 250, 5000\} \mu\text{m}$, et à rapport de longueur d’onde sur longueur du cylindre L constant de telle sorte que $\lambda = 2L$.

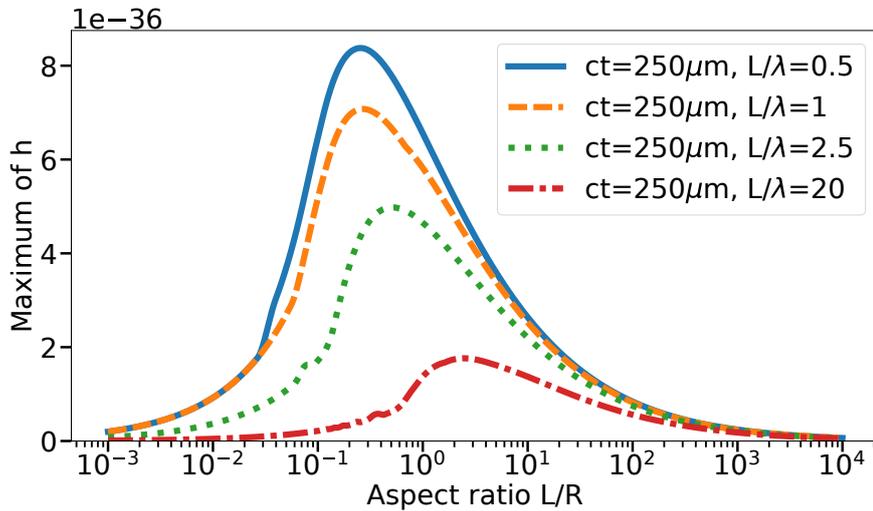


FIGURE 4.7 – Maximum d’amplitude crête à crête de la déformation gravitationnelle générée par un terme oscillant d’intensité $I = 10^{22} \text{W/cm}^2$ et d’énergie $E = 525 \text{J}$ en fonction du rapport d’aspect L/R du cylindre dans lequel la densité d’énergie oscille. Ce maximum est tracé pour différents rapports de longueur d’onde λ sur longueur du cylindre L tels que $\lambda \in \{L/20, 2L/5, L, 2L\}$, et temps constant de telle sorte que $ct = 250 \mu\text{m}$.

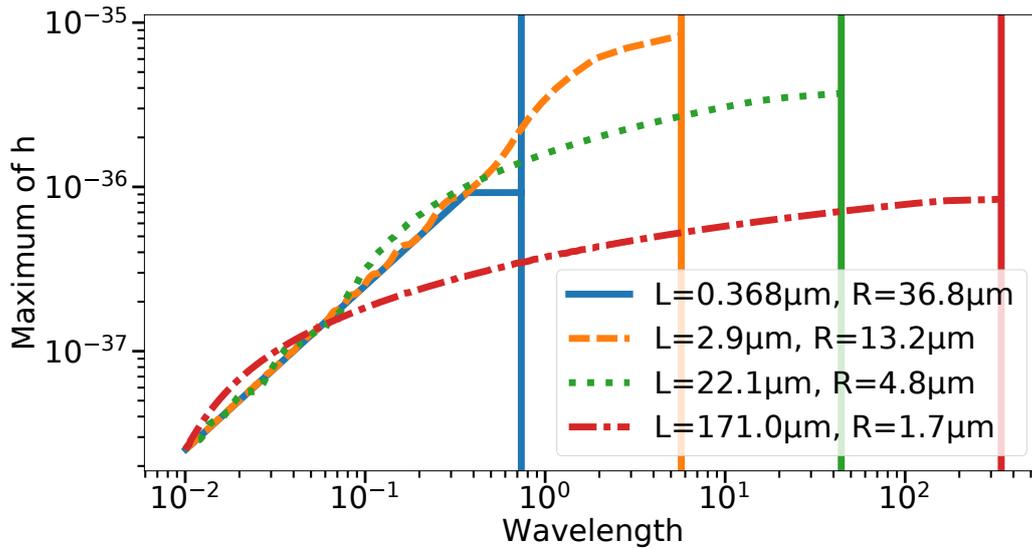


FIGURE 4.8 – Maximum d’amplitude crête à crête de la déformation gravitationnelle générée par un terme oscillant d’intensité $I = 10^{22}\text{W/cm}^2$ et d’énergie $E = 525\text{J}$ en fonction de sa longueur d’onde λ . Ce maximum est tracé pour différents rapports d’aspect tels que $L/R \in \{0.01, 0.22, 4.6, 100\}$, et temps constant de telle sorte que $ct = 250\mu\text{m}$. Les traits verticaux représentent, pour chaque rapport d’aspect, la limite $\lambda = 2L$ au delà de laquelle le résultat n’a plus de correspondance physique.

observable Figure 4.6, au détail près que nous regardons cette fois-ci des graphes pour des rapports L/λ plutôt que des temps de plus en plus grands.

Afin de confirmer les deux observations faites sur la Figure 4.7, nous étudions maintenant le maximum d’amplitude crête à crête de la déformation gravitationnelle en fonction de la longueur d’onde λ pour différents rapports d’aspect à temps fixé. Nous présentons l’évolution de ces maxima Figure 4.8. Chacun de ces graphes s’arrête pour une longueur d’onde égale au double de la longueur L du cylindre : $\lambda = 2L$, puisque ces grandeurs constituent la limite physique à laquelle les impulsions lumineuses que nous connaissons actuellement sont soumises. Cette limite est notée, outre par l’arrêt du tracé du graphe, par la présence d’un trait vertical pour chacun des rapports d’aspect étudiés.

Nous observons deux régimes de croissance distincts sur cette figure, le premier, à grands L/λ , est linéaire. L’amplitude maximale crête à crête augmente alors linéairement avec l’augmentation de la valeur de la longueur d’onde λ de l’oscillation du terme source. Les cas de plus petits rapports d’aspect ne connaissent que ce régime de croissance. Les cas de plus grands rapports d’aspect présentent cependant un second régime de croissance décélérée s’établissant depuis le régime de croissance linéaire via un régime transitoire qui semble présenter des oscillations dans la dérivée seconde de l’amplitude crête à crête maximale tracée. Il semble que ce régime s’établisse pour de plus en plus petits λ au fur et à mesure que le rapport d’aspect du cylindre augmente, ce qui peut probablement s’expliquer par la diminution progressive du rayon de ces cylindres. Il convient même de noter que dans un certain sens, les résultats à grands rapports d’aspects et longueurs d’ondes n’ont pas de signification physique en l’état, puisque le rayon R d’une impulsion lumineuse doit être supérieur ou égal à la moitié de la longueur d’onde de l’oscillation $\lambda/2$, de la même manière que L y est soumis. Le maximum semble être atteint dans cette figure pour des cas où l’on se situe en régime transitoire, à noter que la position de ce maximum, qui se situe toujours à $\lambda = 2L$, se déplace vers les petits rapports d’aspects quand le temps de propagation augmente, comme exposé figure 4.6.

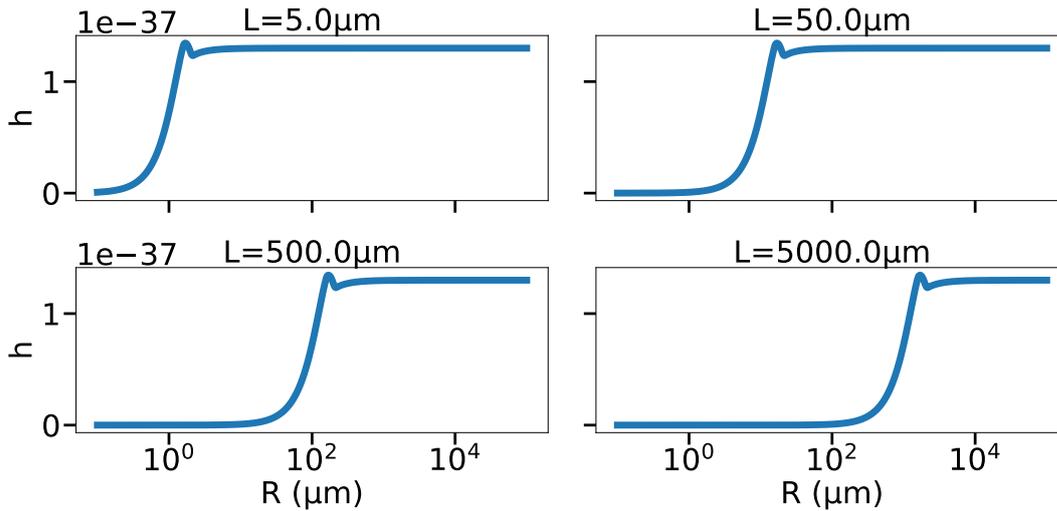


FIGURE 4.9 – Maximum d’amplitude crête à crête de la déformation gravitationnelle générée à puissance constante $P = 1\text{PW}$ par un terme oscillant en fonction du rayon R de son cylindre porteur. Le temps maximum de propagation pour l’établissement du maximum est considéré comme le double de la distance de Rayleigh, où un faisceau laser peut encore être considéré comme cylindrique. Ce maximum est tracé pour différentes longueurs L du cylindre source, ainsi qu’à nombre d’oscillations constant $L/\lambda = 5$.

Ces observations semblent donc suggérer qu’en présence de moins de périodes d’oscillation dans le cylindre source (c’est à dire L/λ plus petit) la déformation gravitationnelle engendrée sera plus importante. Cela impliquerait, en particulier, que la limite des grandes longueurs d’onde par rapport à la longueur du cylindre (c’est à dire le cas d’un cylindre de densité d’énergie constante) serait plus grande ou égale au maximum de déformation pouvant être généré par un cylindre de densité d’énergie oscillante. Ainsi, dans le cadre d’une onde électromagnétique délimitée par un cylindre (c’est à dire la somme du cas d’un cylindre de densité d’énergie constante avec le cas d’un cylindre de densité d’énergie oscillante) la déformation générée serait toujours positive puisque la contribution négative apportée par le terme oscillant serait, en valeur absolue, plus faible que la contribution apportée par le terme constant. Nous confirmerons cette prédiction en section 4.2.

Ne reste donc plus qu’à étudier l’influence de la longueur de Rayleigh, qui limite le temps de propagation de notre source électromagnétique sous forme cylindrique, sur la perturbation maximum pouvant être engendrée par ce terme oscillant. Nous repassons ainsi, de la même manière qu’en section 3.2.2, à l’étude à puissance constante du maximum de déformation gravitationnelle généré. En fixant, comme précédemment, $c\Delta t = 2z_r$, nous obtenons par l’équation (3.30) le temps maximum de propagation sous forme cylindrique du terme source en fonction du rayon du cylindre :

$$c\Delta t = \frac{2\pi R^2}{\lambda} = kR^2 \quad (4.19)$$

Ce temps maximum pour chaque R nous permet de tracer Figure 4.9 la déformation gravitationnelle maximale pouvant être générée en fonction du cylindre à puissance constante.

Nous observons, encore de manière très similaire au cas du cylindre de densité d’énergie constante section 3.2.2, qu’après un intervalle de rayon initial dont la taille dépend de L , la variation de la taille du rayon du cylindre source n’affecte plus la valeur du résultat obtenu à puissance constante. Ainsi, la valeur du maximum de déformation gravitationnelle

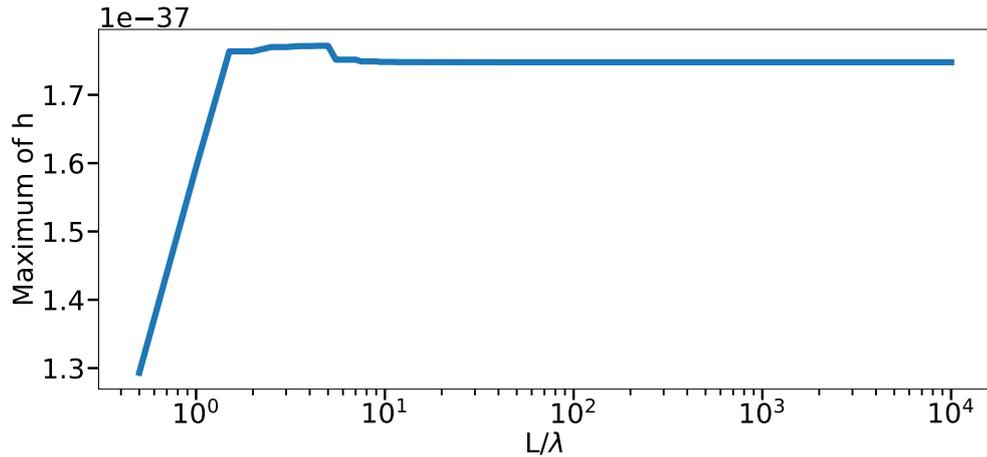


FIGURE 4.10 – Maximum d’amplitude crête à crête de la déformation gravitationnelle générée à puissance constante $P = 1\text{PW}$ par un terme oscillant en fonction du nombre d’oscillations L/λ dans son cylindre porteur. Le temps maximum de propagation pour l’établissement du maximum est considéré comme le double de la distance de Rayleigh, où un faisceau laser peut encore être considéré comme cylindrique.

ne dépend pas du rayon R du cylindre source pour peu que R soit suffisamment grand par rapport à L , c’est à dire que, dans une situation optimale pour la génération d’une perturbation gravitationnelle, la valeur de l’amplitude de la déformation ne dépend pas de l’intensité mais de la puissance de la source électromagnétique.

Ce résultat permet, en conjonction avec le résultat issu de l’étude de la Figure 3.11, d’affirmer que pour un faisceau de lumière dont la forme cylindrique est limitée à deux fois la distance de Rayleigh z_r , la valeur maximale de la déformation gravitationnelle dépend de la puissance de l’impulsion électromagnétique et non de son intensité.

Notons cependant que la distance de Rayleigh dépend aussi de la longueur d’onde de l’onde électromagnétique étudiée. Cela représente un détail important pour l’étude d’une source oscillante, car nous avons montré Figure 4.8 que la valeur maximale de l’amplitude de déformation gravitationnelle à intensité constante dépend elle aussi de la longueur d’onde du terme source oscillant. Notamment, nous pouvons déjà observer Figure 4.9 que la valeur du "plateau" auquel arrive le maximum d’amplitude de déformation gravitationnelle est indépendante de la valeur de L , la longueur du cylindre source. Cela vient du fait que l’on trace ces courbes à nombre de périodes d’oscillation constant, c’est à dire que le rapport L/λ reste constant. La croissance de λ , qui vient réduire la valeur de la longueur de Rayleigh z_r compenserait donc la croissance de L . Nous traçons alors le maximum de déformation gravitationnelle, c’est à dire la valeur du "plateau" mesurable Figure 4.9, en fonction du nombre de périodes d’oscillations dans le terme source oscillant. Nous obtenons le graphe présenté Figure 4.10.

Nous observons qu’à part une légère infériorité du maximum de déformation gravitationnelle pour les premières valeurs de nombre de périodes L/λ , l’amplitude de la déformation gravitationnelle reste globalement constante pour les nombres de périodes étudiés. Nous pouvons donc aussi en déduire qu’en plus d’être dépendant de la puissance et non de l’intensité de la source, l’amplitude maximale de déformation gravitationnelle est indépendante de la longueur d’onde de la source électromagnétique considérée, si l’on considère le maximum de distance de génération d’une telle déformation gravitationnelle comme le double de la distance de Rayleigh z_r .

Pour résumer ici l'étude poursuivie ci-dessus, nous avons pu mettre en évidence à intensité et énergie constante la croissance de l'amplitude maximum d'oscillation de la déformation gravitationnelle, tant en temps qu'en longueur d'onde relative à la longueur L du cylindre contenant l'oscillation électromagnétique source. Nous avons de plus mis en évidence la forme particulière de cette déformation qui globalement reproduit sous forme d'oscillation gravitationnelle l'oscillation présente dans le tenseur énergie-impulsion de l'onde électromagnétique source. Enfin, avec l'implémentation de la distance de Rayleigh comme limite physique de notre modélisation d'un laser comme une source cylindrique, nous montrons que le rendement optimal physique pour la déformation gravitationnelle oscillante est uniquement dépendant de la puissance du laser source, et est donc indépendant d'à quel point la source serait focalisée mais aussi, de manière plus étonnante, de la longueur d'onde du laser. Ce dernier résultat introduit une différence entre la déformation générée par une densité d'énergie oscillante et une densité d'énergie constante, puisque la dernière présentait une dépendance en la longueur d'onde du faisceau directement liée à l'expression de la longueur de Rayleigh (3.30).

Nous nous intéresserons donc dans la partie suivante à la combinaison de ces deux termes telle qu'elle peut être présente dans le cas d'une onde électromagnétique polarisée linéairement se propageant dans le vide.

4.2 Modélisation complète de la déformation gravitationnelle générée par une onde électromagnétique

Les deux études précédentes nous donnent les résultats préalables à l'étude du cas de la déformation gravitationnelle longitudinale générée par une impulsion laser dans le vide sur son axe. Nous prendrons pour cela une impulsion électromagnétique polarisée rectilignement que l'on considérera de forme cylindrique se déplaçant à la vitesse de la lumière dans le sens des z positifs.

On prend le champ électromagnétique de cette impulsion comme uniforme à z fixé, de telle manière qu'à l'intérieur du cylindre on puisse noter les composantes du champ électromagnétiques comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 \cos(k(z - ct))\mathbf{e}_x \\ \mathbf{B} &= B_0 \cos(k(z - ct))\mathbf{e}_y, \quad c\mathbf{B}_0 = \mathbf{E}_0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

où $k = 2\pi/\lambda$ est le vecteur d'onde de l'oscillation électromagnétique. Ce qui nous donne d'après l'équation (1.69) les termes suivants pour les composantes du tenseur énergie impulsion électromagnétique associé :

$$T_{00} = T_{33} = T_{03} = T_{30} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} (1 + \cos(2k(z - ct))) \quad (4.21)$$

Les autres composantes étant nulles.

Nous écrivons alors $h = h_{00} = h_{33} = h_{03} = h_{30}$, tel que

$$\square h = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} (1 + \cos(2k(z - ct))) \quad (4.22)$$

Armés des méthodes de résolution présentées dans les sections précédentes 3.1 et 4.1.1, nous pouvons présenter les résultats suivants pour l'étude de la déformation longitudinale gravitationnelle générée par une impulsion lumineuse.

Nous reprenons ici pour l'étude à intensité et énergie constantes les caractéristiques habituelles d'un laser de puissance tel que $I = \mathcal{A} \times c = 10^{22} \text{W/cm}^2$, $E = 525 \text{J}$, correspondant

aux dimensions $R = 5\mu\text{m}$ et $L = 20\mu\text{m}$. Nous posons de plus la longueur d'onde de la source $\lambda = 10\mu\text{m}$ et présentons le résultat donné par la procédure python Figure 4.11.

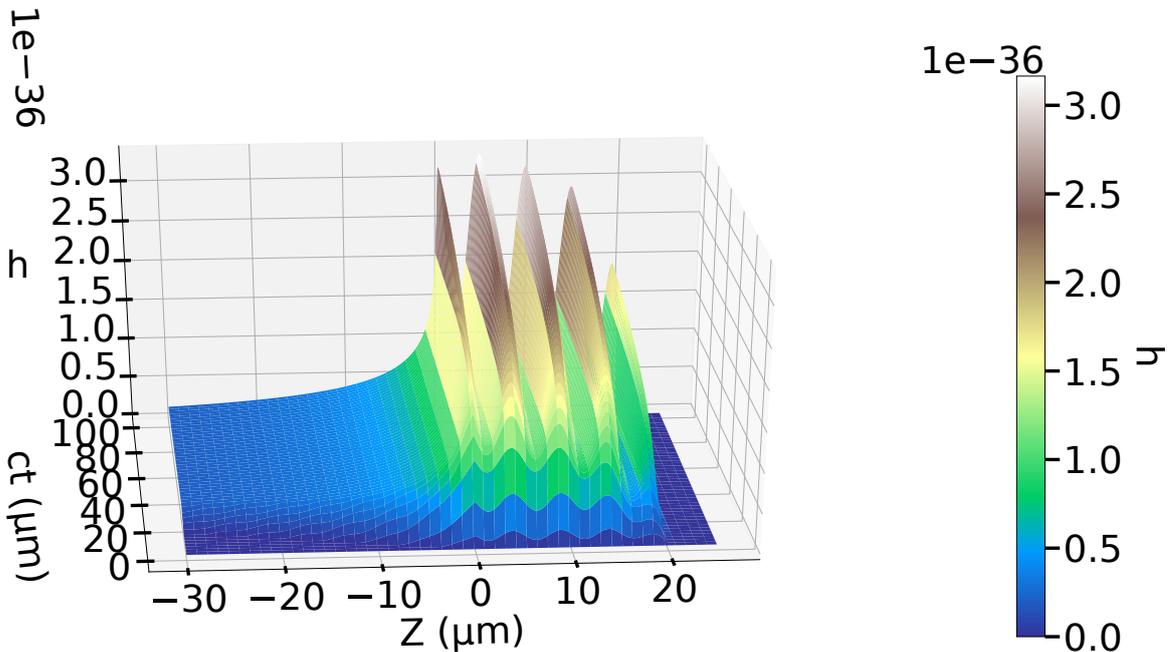
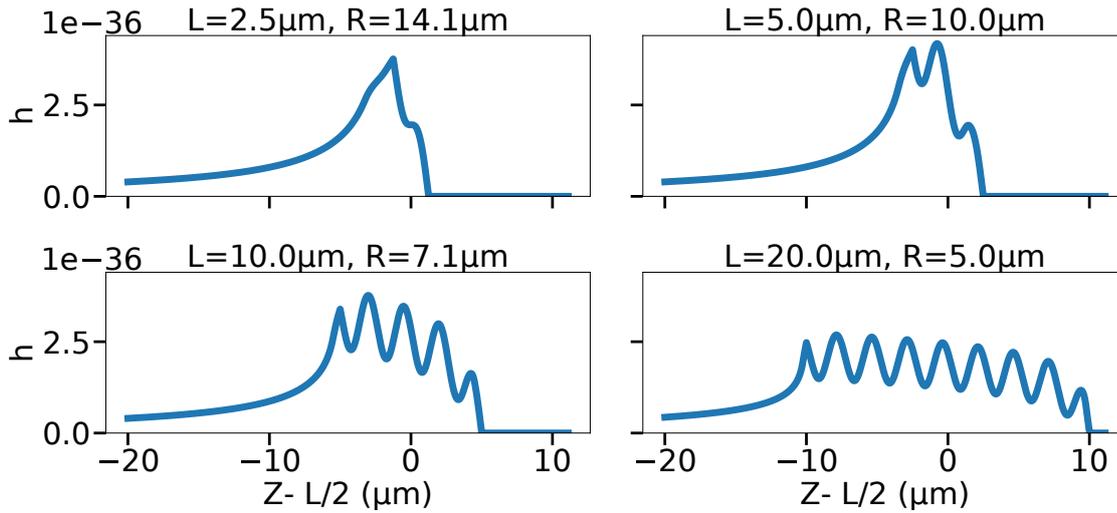


FIGURE 4.11 – Représentation 3D de la déformation gravitationnelle sur le plan comobile (O,Z,ct) pour une intensité du laser $I = 10^{22}\text{W}/\text{cm}^2$, une longueur d'onde de $\lambda = 10\mu\text{m}$ et des dimensions du cylindre de lumière $L = 20\mu\text{m}$, $R = 5\mu\text{m}$.

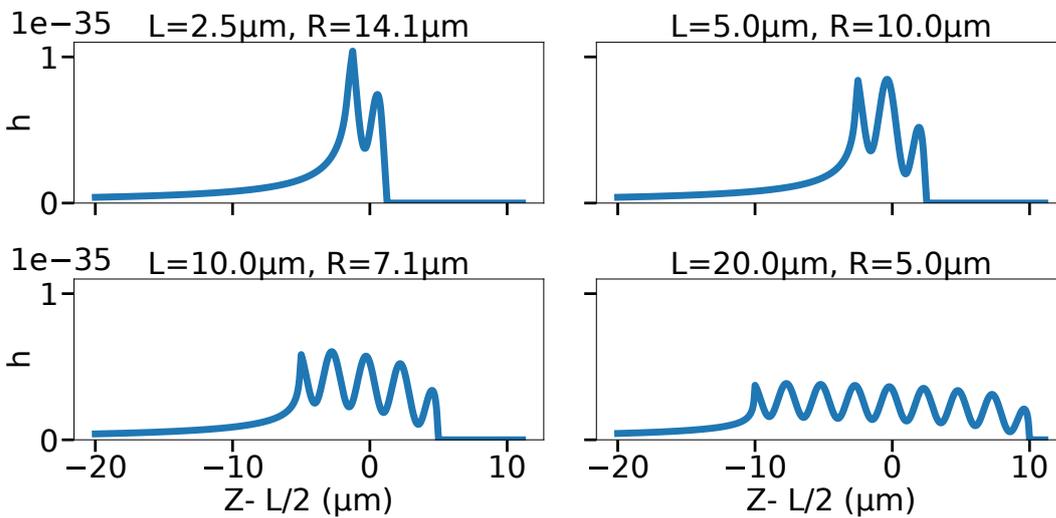
Cet exemple nous montre bien la combinaison de la solution du cylindre de densité d'énergie constante avec la solution pour une partie oscillante de fréquence double par rapport à l'oscillation de l'impulsion électromagnétique de départ. Ce doublement de fréquence est en effet visible dès l'équation (4.21), où la mise au carré du champ électromagnétique dans le tenseur énergie impulsion engendre l'apparition d'un terme constant et le doublement de la fréquence de base. Ce doublement de fréquence est un cas spécifique à l'apparition de la densité d'énergie d'une source oscillante dans les termes sources de l'équation d'Einstein. On peut entre autres remarquer que ce doublement de fréquence est aussi présent, et très certainement non négligeable dans le cas de l'effet Gertsenshtein comme nous l'observons déjà en section 1.2.4.

La combinaison des solutions constantes et oscillantes de densité d'énergie dans un cylindre se déplaçant à la vitesse de la lumière pose la question de l'influence de la longueur d'onde sur la forme et l'amplitude du résultat gravitationnel étudié. Nous observons donc à un temps fixé la forme de la déformation gravitationnelle générée pour différents rapports d'aspect et à longueur d'onde fixée $\lambda = 5\mu\text{m}$ de manière à ce que le rapport $2L/\lambda$ soit entier, c'est à dire qu'il y ait un nombre entier ou demi-entier de périodes d'oscillation sur la longueur L du cylindre source. Les résultats sont présentés Figure 4.12, où nous avons pris les rapports d'aspects tels que nous avons les rapports $L/\lambda \in \{0.5, 1, 2, 4\}$.

Nous observons, de manière naturelle, une croissance en temps similaire aux cas seulement oscillant (Figure 4.2) et seulement constant (Figure 3.3). De la même manière nous observons un décalage du maximum de déformation vers les petits rapports d'aspects avec le temps. Nous observons encore deux détails importants en comparant les Figures 4.12a et 4.12b. En effet la déformation semble légèrement changer de forme au fur et à mesure que l'on laisse du temps à sa génération. Ainsi, les oscillations prennent de l'amplitude par rapport à la partie de la déformation gravitationnelle générée par la source électromagnétique de densité d'énergie constante, jusqu'à une certaine limite, puisque nous avons vu précédemment que la déformation générée par la partie oscillante de la source électromagnétique



(a)



(b)

FIGURE 4.12 – Coupe au temps a) $ct = 250\mu\text{m}$ b) $ct = 5\text{mm}$ de la perturbation gravitationnelle générée par un cylindre d'intensité $I = 10^{22}\text{W}/\text{cm}^2$, de longueur d'onde d'oscillation $\lambda = 5\mu\text{m}$, et d'énergie $E = 525\text{J}$ pour différents rapports d'aspect L/R tels que $L/\lambda \in \{0.5, 1, 2, 4\}$.

tique n'excédait pas la valeur de celle générée par la partie constante à paramètres égaux. L'exemple le plus flagrant est observable sur le plus petit rapport d'aspect présenté en haut sur les deux figures. Sur la Figure 4.12a, la déformation générée par la partie oscillante ne représente qu'une perturbation par rapport à la déformation gravitationnelle générée par la partie constante de la source, alors que l'oscillation Figure 4.2a fait apparaître un minimum local au milieu de la déformation, et donc une oscillation à proprement parler. Nous observons dans le même temps un décalage du maximum vers $Z = 0$ avec le temps de telle manière que le maximum pour un cylindre comportant au moins une période d'oscillation complète (c'est à dire pour les trois rapports d'aspect les plus grands), ne se situe plus sur le deuxième maximum local, comme c'est le cas aux temps courts Figure 4.12a, mais sur le premier maximum comme cela est observable Figure 4.12b.

Intéressons nous de nouveau à la détermination du rapport d'aspect optimal pour obtenir le maximum de déformation gravitationnelle. Nous passerons sous silence l'évolution en temps du profil du maximum de déformation en fonction du rapport d'aspect du cylindre source puisqu'il est en tout point similaire à ceux que nous avons déjà étudiés Figure 3.5 et 4.6. Nous avons cependant mis en évidence au paragraphe précédent l'influence du nombre de périodes d'oscillation sur la forme de la déformation gravitationnelle générée et en particulier la position du point de déformation gravitationnelle maximale. L'étude du maximum de déformation gravitationnelle par rapport au rapport d'aspect pour différents nombres d'oscillations sur la longueur du cylindre peut donc nous apporter de nouvelles informations par rapport à celles extraites de la Figure 4.7.

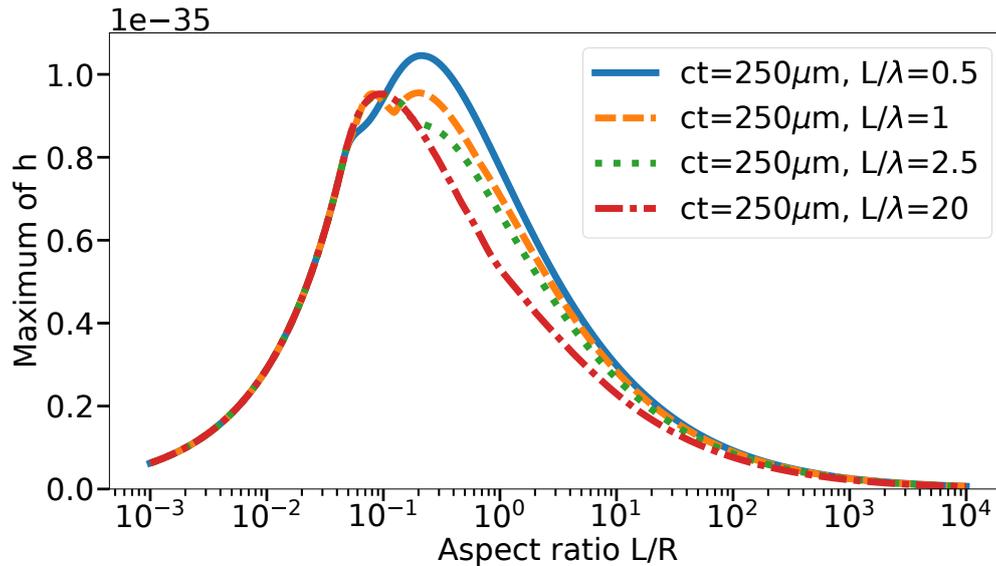


FIGURE 4.13 – Maximum de la déformation gravitationnelle générée par une impulsion lumineuse de forme cylindrique en fonction de son rapport d'aspect L/R . Ce maximum est tracé pour différents rapports de longueur d'onde λ sur longueur du cylindre L tels que $L/\lambda \in \{0.5, 1, 2.5, 10\}$, et temps constant de telle sorte que $ct = 250\mu\text{m}$.

La Figure 4.13 présente deux résultats intéressants. Il semble tout d'abord que de manière générale une impulsion source ne présentant qu'une demi période d'oscillation donne de meilleurs résultats pour la génération du plus grand maximum possible de déformation gravitationnelle. Il est néanmoins important de noter que ce gain est faible, mais pas sans importance du fait de l'amplitude relative de la partie oscillante observée Figure 4.7. D'autre part, nous remarquons que le maximum ne dépend pas particulièrement de la valeur du rapport L/λ , mais que nous observons un deuxième maximum local dans le cas des petits rapports L/λ . Ce résultat laisse supposer qu'il existe deux zones de rapport d'aspect particulières : la première, des plus petits rapports d'aspect, maximise la déformation générée par la partie constante de la source électromagnétique, quand la seconde maximise la déformation générée par la partie oscillante. Ce deuxième maximum correspond au maximum global pour $L/\lambda = 0.5$ et $L/\lambda = 1$. Il pourra alors être intéressant en fonction du type de déformation que l'on voudra étudier, de sélectionner l'un ou l'autre des rapports d'aspect associés au maximums de déformation gravitationnelle.

Afin de compléter l'étude de la déformation gravitationnelle générée par une telle source, nous nous penchons de nouveau sur le cas d'une source de puissance constante $P = 1\text{PW}$ où l'on peut considérer l'impulsion électromagnétique de forme cylindrique sur l'extension temporelle égale à la longueur de Rayleigh $ct = z_R$. L'étude de la déformation ainsi générée pour un nombre fixe de périodes d'oscillations sur la longueur de la source est présentée Figure 4.14.

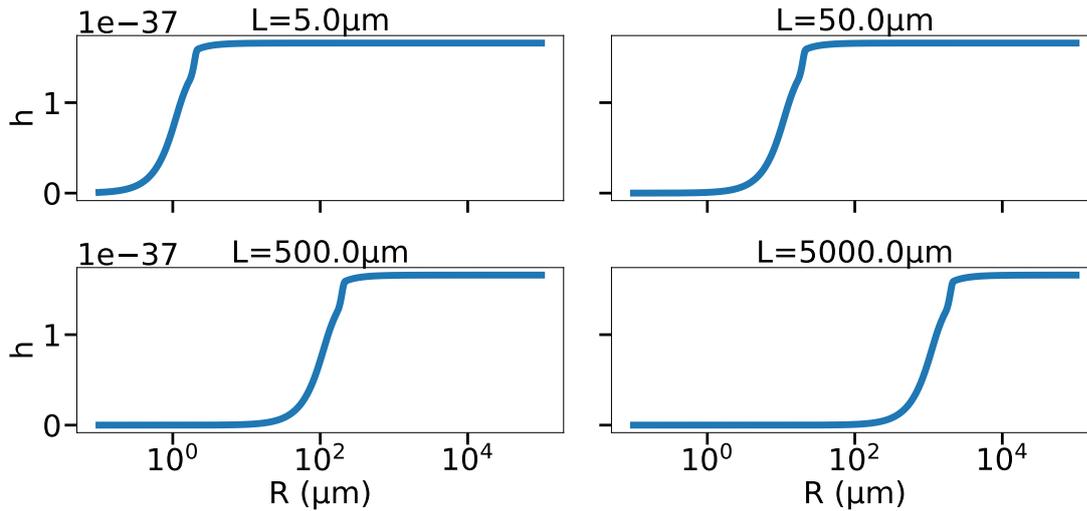


FIGURE 4.14 – Maximum de déformation gravitationnelle générée à puissance constante $P = 1\text{PW}$ par une impulsion lumineuse en fonction du rayon R de son cylindre porteur. Le temps maximum de propagation pour l'établissement du maximum est considéré comme le double de la distance de Rayleigh, où un faisceau laser peut encore être considéré comme cylindrique. Ce maximum est tracé pour différentes longueurs L du cylindre source, ainsi qu'à nombre d'oscillations constant $L/\lambda = 5$.

De même que pour la Figure 4.9, l'introduction d'une variation de la longueur d'onde proportionnelle à celle de L mène à la compensation exacte des influences des variations de L et z_R sur la valeur maximale de la déformation gravitationnelle générée. Nous pouvons de plus confirmer l'importance d'avoir un rayon du cylindre source suffisamment grand devant sa longueur L afin d'obtenir la plus importante déformation gravitationnelle possible. De manière naturelle, cette étude appelle l'étude de l'évolution du maximum de déformation gravitationnelle en fonction du nombre de périodes d'oscillation présentes dans la source électromagnétique limitée à sa forme cylindrique pour $ct = z_R$.

La Figure 4.15, dans laquelle est tracé la maximum h en fonction de L/λ pour une puissance $P = 1\text{PW}$, montre ainsi une croissance logarithmique du maximum de déformation gravitationnelle par rapport au rapport L/λ . Cela se comprend aisément puisque la croissance de ce rapport est due soit à la croissance de L , dont nous avons montré l'influence sur la partie constante à longueur d'onde constante Figure 3.11, soit à la croissance de $1/\lambda$, grandeur à laquelle z_R est proportionnelle d'après l'équation 3.30. Or dans un tel cas chacune de ces croissances revient donc soit à avoir un cylindre plus long donc transportant plus d'énergie, ou un temps d'existence du cylindre source plus long. En effet, pour la partie constante, la valeur de déformation gravitationnelle générée ne dépend pas directement de la longueur d'onde λ . Cette étude montre donc finalement l'intérêt d'avoir un cylindre de faible longueur d'onde si l'on veut avoir la plus grande déformation gravitationnelle possible, si l'on ne veut observer que la déformation gravitationnelle liée à la partie constante de la source électromagnétique. La partie oscillante est quant à elle indépendante d'une telle évolution comme nous l'avons montré Figure 4.10.

Ainsi, nous avons mis en évidence de nombreuses caractéristiques de la déformation gravitationnelle longitudinale générée par une impulsion lumineuse sur son axe de propagation, ainsi que les grandeurs essentielles à l'optimisation des paramètres d'une expérience de génération d'une telle perturbation. Entre autres, nous avons mis en évidence les amplitudes

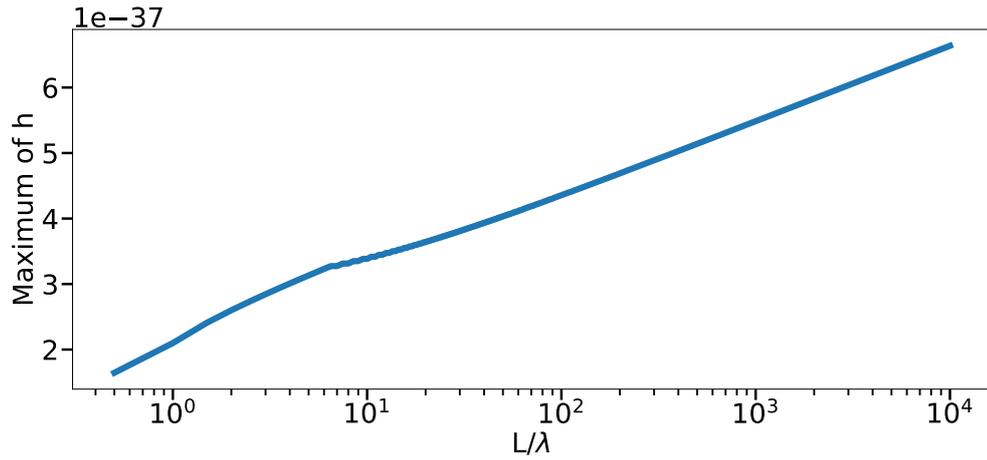


FIGURE 4.15 – Maximum d’amplitude crête à crête de la déformation gravitationnelle générée à puissance constante $P = 1\text{PW}$ par une impulsion lumineuse en fonction du nombre d’oscillations L/λ dans son cylindre porteur. Le temps maximum de propagation pour l’établissement du maximum est considéré comme le double de la distance de Rayleigh, où un faisceau laser peut encore être considéré comme cylindrique.

relatives des parties oscillantes et non-oscillantes, ainsi que l’importance du rapport L/λ , qui pour ses plus petites valeurs favorise une partie oscillante de la déformation gravitationnelle importante à intensité et énergies constantes, et pour ses plus grandes valeurs favorise la partie non-oscillante à puissance constante.

Conclusion

Conclusion générale

Dans un cadre où nous avons la preuve directe de l'existence et de la possibilité de détection de perturbations gravitationnelles propagatives oscillantes dans l'exemple des ondes gravitationnelles détectées par les interféromètres LIGO et VIRGO à des fréquences de l'ordre du kHz (ABBOTT et al. 2017), il est important d'envisager les expériences qui pourront dans le futur nous renseigner d'avantage sur le comportement exact de la relativité générale. Nous avons proposé ici de compléter l'étude des déformations gravitationnelles générées par le champ électromagnétique, premièrement envisagée par TOLMAN, EHRENFEST et PODOLSKY 1931, et reprise par GERTSENSHTEIN 1962 puis SCULLY 1979, GRISHCHUK 2003b, KOLOSNITSYN et RUDENKO 2015 et RÄTZEL 2017. L'étude d'une génération gravitationnelle cohérente à l'intérieur d'une source électromagnétique en propagation à la vitesse de la lumière est une dimension du problème qui n'avait pas encore été étudiée, bien qu'elle devrait en principe correspondre à la zone de l'espace où la déformation gravitationnelle est la plus forte.

Nous avons pu montrer dans cette thèse quel comportement suit la déformation gravitationnelle générée par un rayon lumineux de forte puissance limité dans le temps et l'espace. Nous présentons une solution 3D analytique exacte du profil de cette déformation pour une enveloppe de la source électromagnétique délimitée par des fonctions portes. Dans le cas statique, nous avons pu exposer la viabilité de la méthode de calcul par fonction de Green de la déformation gravitationnelle. Non seulement nous avons pu confirmer que, loin de la source, la déformation gravitationnelle trouvée correspond à la métrique de SCHWARZSCHILD 1916 générée par une masse ponctuelle équivalente, mais nous avons aussi pu déterminer le profil d'établissement du champ de gravitation généré par un objet étendu dans l'espace. Nous mettons aussi en évidence une telle solution dans le cas propagatif, pour des parties distinctes de la contribution, qui nous permettent de nous identifier à trois cas physiques différents :

- L'évaluation à densité d'énergie constante représente la déformation gravitationnelle longitudinale générée par une impulsion lumineuse de polarisation circulaire dans le vide.
- Celle à densité d'énergie purement oscillante modélise la déformation gravitationnelle qui pourrait être générée transversalement par une impulsion lumineuse se propageant dans un champ électromagnétique statique, telle que dans une expérience sur l'effet GERTSENSHTEIN 1962 où la taille de l'impulsion lumineuse est petite devant la zone où est établi un champ magnétique constant.
- Enfin, la combinaison de ces deux formes de solution nous donne la modélisation de la déformation sur son axe de propagation de la déformation gravitationnelle longitudinale générée par une impulsion électromagnétique de polarisation linéaire.

Nous avons pu proposer une solution analytique dans un régime instationnaire et ainsi donner une meilleure idée de l'établissement de potentiels gravitationnels tant statiques chapitre 2 que se déplaçant à la vitesse de la lumière dans les chapitres suivants. Ces résultats peuvent entre autres aider à passer outre la difficulté posée par l'étude de sources

émettant à une vitesse exactement égale à leur vitesse de déplacement. Ainsi à intensité et énergie constantes, de nombreux paramètres doivent être pris en compte de manière interdépendante afin de maximiser la génération d'une perturbation gravitationnelle : le rapport d'aspect L/R , dépendant de la longueur L et du rayon R de l'impulsion lumineuse, le temps de propagation t , la longueur d'onde λ dans le cas d'une source oscillante. À puissance constante, l'étude se révèle plus simple puisque seul au maximum le terme L/λ se révèle avoir une influence pour une source possédant une partie constante.

Nous mettons en évidence les profils liés à la génération, cohérente ou non, d'une déformation gravitationnelle par une onde électromagnétique, et appuyons ainsi sur le fait qu'il existe un lien étroit entre densité d'énergie électromagnétique et gravitation. La partie à densité d'énergie constante présente ainsi un profil singulier en forme de vague, tandis que la partie à densité d'énergie purement oscillante se rapproche d'une reproduction gravitationnelle de l'oscillation électromagnétique, soit à la fréquence de base de cette dernière, soit à sa fréquence double en fonction du phénomène physique étudié. L'un des intérêts principaux de la génération de déformation gravitationnelle que l'on peut observer dans une impulsion focalisée est sa dépendance en puissance et non en intensité de la source, pour la détermination de son amplitude. L'impulsion focalisée n'est en effet considérable comme cylindrique que sur le double de la distance de Rayleigh, elle-même dépendante de la longueur d'onde et du rayon minimal de l'impulsion. Cette dépendance en puissance permet, pour une expérience en laboratoire, de se défaire des problèmes liés à un faisceau hautement focalisé, notamment l'apparition de phénomènes d'électrodynamique quantique liés à une très haute intensité du champ électromagnétique. Enfin, la dépendance du terme constant en L/λ et l'indépendance du terme oscillant à ce même rapport, permettent d'influencer la forme de la déformation gravitationnelle en privilégiant le terme constant ou une forme hybride. Cette propriété permet donc d'influer sur les variations de la métrique à l'intérieur de l'impulsion lumineuse, qui seront plus importantes en son centre pour un rapport L/λ proche de 0.5.

La mise en évidence de ces profils de déformation gravitationnelle nous permet, par les différences et caractéristiques qu'ils présentent, d'adapter nos paramètres expérimentaux afin d'optimiser l'émission et la détection d'une onde gravitationnelle en laboratoire, mais aussi de modéliser des phénomènes astrophysiques. Nos estimations donnent pour l'instant une déformation gravitationnelle de l'ordre de $h \sim 10^{-37}$ pour un laser de puissance $P = 1\text{PW}$, qui constitue déjà une amélioration par rapport aux précédentes déformation étudiées par accélération de masse (KADLECOVÁ et al. 2017). Nous pouvons espérer avec les développements futurs de la puissance laser atteindre des résultats en puissance laser encore plus impressionnants. Dans le cas d'une source de l'ordre de l'ExaWatt (TAJIMA et MOUROU 2002), et en considérant l'amélioration des techniques de détection, il est tout à fait possible que nous observions alors des ondes gravitationnelles générées en laboratoire de l'ordre de $h \sim 10^{-34}$. La solution pour la déformation gravitationnelle générée ici, pourra donc à terme, nous espérons, servir de point de départ dans l'étude de faisabilité d'une expérience de génération et de détection de perturbation gravitationnelles, ce qui serait un analogue gravitationnel à l'expérience de FRANCK et HERTZ 1914 sur les ondes électromagnétiques. De telles observations constitueraient une première dans les recherches sur la gravitation, puisqu'elles démontreraient le rôle de la densité d'énergie, et non seulement de la masse, dans la déformation de l'espace-temps. Elles permettraient aussi l'étude avec des paramètres contrôlés de l'influence gravitationnelle et pourraient donc ouvrir la porte à d'autres expériences qui permettraient de mieux comprendre la gravitation et les phénomènes qui lui sont liés.

Perspectives

Cette solution exacte analytique pourra être complétée par une résolution hors de l'axe de propagation, notamment grâce à l'utilisation ou au développement de codes de simulations. Nous envisageons ainsi deux méthodes pour visualiser la déformation gravitationnelle

générée partout dans l'espace et non plus seulement sur l'axe de propagation du faisceau électromagnétique.

La première utiliserait la méthode de résolution par convolution de la fonction de Green du d'Alembertien avec le terme source, tel qu'elle est décrite équation (2.40). La résolution de l'équation générale sans réduction à l'axe est trop complexe pour une méthode purement analytique, mais l'intégration est très bien gérée par un code Monte-Carlo. En effet, en considérant un nombre suffisant de points choisis aléatoirement dans l'espace à 6 dimensions défini par les variables $(ct, Z, r, \tilde{z}, r', \theta')$ dont la probabilité de sélection est pondérée par l'intégrande de la partie de droite de l'équation (2.40), nous pourrions évaluer la concentration en points sur le seul espace à 3 dimension (ct, Z, r) . La méthode Monte-Carlo est expliquée plus en détail dans METROPOLIS et ULAM 1949 et LEGRAND (*Intégrales*). Ce résultat donnerait directement une représentation en histogramme de la déformation gravitationnelle dans cet espace. Nous remarquerons que θ n'apparaît pas dans la détermination de la solution car nous considérerions la même source cylindrique invariante par rotation autour de son axe z . L'intérêt de cette méthode repose sur le grand nombre de dimensions (six en tout) du problème, qui ferait de l'évaluation faite par une méthode d'intégration plus classique sur un tableau de coordonnées une montagne de données, puisqu'un tableau relativement peu détaillé comprendrait au moins 100 points par dimension, c'est à dire au moins 10^{12} points. Une procédure Monte-Carlo permettrait certainement de réduire le nombre de points nécessaires à l'intégration grâce à des méthodes d'échantillonnage adaptées.

De la même manière, une autre option serait de considérer la source électromagnétique et ses émissions au temps de départ $t=0$ et de calculer la génération et la propagation de la déformation gravitationnelle en appliquant un propagateur de Maxwell à chaque étape de temps. Ainsi il serait possible de traiter le calcul de la déformation gravitationnelle comme un code Particle In Cell (PIC) avec seulement ces mécanismes les plus basiques. Le programme ainsi construit se baserait sur la partie associée aux propagateurs Maxwelliens des travaux précédemment menés par NUTER et al. 2014. La difficulté de cette méthode repose sur le fait de trouver un équivalent à la formulation des équations de Maxwell pour une grandeur reliée à la géométrie de l'espace-temps. Le rapport entre les champs électromagnétiques et les potentiels vecteur et électrostatique laisse supposer que le couple de grandeur à poser s'exprimerait en fonction de dérivées premières de la métrique, puisque cette dernière est proportionnelle au potentiel gravitationnel.

Une première recherche nous mène à suggérer les équations gravitationnelles, similaires aux équations de Maxwell électromagnétiques, présentées dans l'encart ci-dessous.

Rappelons l'expression des équations de Maxwell en formalisme tensoriel, comme présenté dans BOUDENOT 1989 :

On pose le quadrivecteur potentiel

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\phi}{c} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Ce quadrivecteur, une fois appliqué la jauge de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$, est solution de l'équation d'onde :

$$\square A^\mu = \mu_0 j^\mu, \quad j^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\rho_0}{c} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Nous relient \mathbf{E} et \mathbf{B} au tenseur électromagnétique $F^{\mu\nu}$ par l'équation (1.63)

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t\mathbf{A} = cF^{i0}\mathbf{e}_i \quad \mathbf{B} = \nabla\mathbf{A} = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk}\mathbf{e}_i \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\} \quad (4.25)$$

Le tenseur électromagnétique est soumis aux équations de Maxwell :

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = \partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0 \quad (4.26)$$

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \mu_0 j^\mu \quad (4.27)$$

Par analogie on crée les tenseurs $K_{\mu\nu\lambda}$, $M^{\mu\nu}$ et $N^{\mu\nu}$ tels que :

$$K_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu h_{\nu\lambda} - \partial_\nu h_{\mu\lambda} \quad (4.28)$$

$$M^{\mu\nu} = K^{\mu 0\nu} \quad N^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu jk} K_{jk}^\nu \quad (4.29)$$

Ainsi, en reprenant l'équation (1.46), ainsi que la jauge de Lorentz (1.45), nous obtenons pour $K_{\mu\nu\lambda}$ les équations :

$$\partial_{[\mu} K_{\nu\lambda]}^\sigma = 0, \text{ un tenseur nul.} \quad (4.30)$$

$$\partial_\mu K_{\mu\nu\lambda} = \chi T^{\nu\lambda} \quad (4.31)$$

l'équivalent gravitationnel des équations de Maxwell sous forme tensorielle. Nous pouvons alors réécrire les équations avec les tenseurs $M^{\mu\nu}$ et $N^{\mu\nu}$, l'équivalent gravitationnel des équations de Maxwell pour \mathbf{E} et \mathbf{B} , en prenant alternativement $\nu = 0$ et $\nu = i$, $i \in 1, 2, 3$.

$$\partial_k N^{k\sigma} = 0 \quad (\text{"Maxwell-Thomson"}) \quad (4.32)$$

$$\partial_0 N^{i\sigma} + \epsilon^{ijk} \partial_j M_k^\sigma = 0 \quad (\text{"Maxwell-Faraday"}) \quad (4.33)$$

$$\partial_k M^{k\lambda} = \chi T^{0\lambda} \quad (\text{"Maxwell-Gauss"}) \quad (4.34)$$

$$\partial_0 M^{i\lambda} - \epsilon^{ijk} \partial_j N_k^\lambda = \chi T^{j\lambda} \quad (\text{"Maxwell-Ampère"}) \quad (4.35)$$

Nous pourrions nous servir de ces équations pour définir le nouveau propagateur Maxwellien pour les déformations gravitationnelles.

Les deux méthodes numériques présentées étant hautement parallélisables, elles présentent l'intérêt de pouvoir mettre en commun une quantité plus importante de ressources afin d'obtenir rapidement des résultats à partir desquels il serait possible d'extrapoler une modélisation analytique du profil transversal de la source, associée à la solution du profil de la déformation gravitationnelle sur l'axe de propagation de l'impulsion lumineuse.

Connaissant l'expression analytique exacte de la déformation gravitationnelle sur l'axe, il sera certainement possible d'extrapoler à partir de ces représentations de la déformation gravitationnelle dans l'espace 3D+1D une expression analytique approchée, qui pourra servir à déterminer la déformation gravitationnelle en un point observé plus facilement qu'avec un programme qu'il pourrait être nécessaire de refaire tourner à chaque changement de paramètres.

Nous pouvons aussi continuer l'étude de la déformation gravitationnelle générée par une impulsion par le calcul de l'influence de cette déformation sur la lumière elle-même. Ainsi, CABRAL et LOBO 2017 présentent une expression exacte des équations de Maxwell de l'électromagnétique dans une métrique quelconque. Une application directe de ces équations à l'expression de notre déformation pourrait nous renseigner sur le comportement de la lu-

mière à l'intérieur de la perturbation générée, et ainsi en retirer des informations quant aux modifications qu'un faisceau sonde pourrait subir à la traversée d'un tel champ gravitationnel.

Nous pouvons aussi envisager une étude similaire à l'exercice bien connu de la déviation de la lumière par un potentiel gravitationnel, comme on peut par exemple le trouver à la fin du Chapitre 18 du MISNER, THORNE et WHEELER 2008. Cet exercice pourrait déjà montrer l'influence que peut avoir la déformation gravitationnelle sur l'impulsion des photons interagissant avec elle, et donc sur la déviation engendrée.

Les résultats de cette thèse peuvent aussi avoir une application directe en astrophysique. Prenons l'exemple d'un phénomène électromagnétique intense : le sursaut gamma. Précisons tout d'abord ce que sont les sursauts gamma, ou Gamma Ray Bursts (GRB) en anglais. Les GRBs sont des phénomènes astrophysiques extrêmement lumineux, dont la puissance dégagée sous forme lumineuse est souvent supérieure à celle de supernovas. Ils sont caractérisés par l'émission de photons très énergétiques, dont les fréquences les placent dans les régions des rayons X et des rayons γ de faible énergie. Leur découverte, accidentelle, par des satellites de surveillance des essais nucléaires est relativement récente puisque les informations en faisant part depuis 1969 sont déclassifiées en 1973 (KLEBESADEL, STRONG et OLSON 1973). L'explication physique exacte de ces phénomènes reste ainsi encore délicate, mais le modèle de photons générés par l'accélération de matière à des vitesses relativistes et les chocs ainsi générés, semble apporter des explications à de nombreux phénomènes observables dans un tel événement astrophysique. Ces jets de matière relativiste seraient de plus générés par l'effondrement d'une grande quantité de matière sur elle-même, soit à la suite d'une supernova ou à la coalescence de deux objets très compacts comme un trou noir et une étoile à neutrons. L'émission, tant lumineuse que massive, ainsi générée aurait la particularité de se faire de manière symétrique dans une direction (PIRAN 2004), et serait donc de forme conique, contrairement à la plupart des émissions connues en astrophysique, qui se propagent de manière isotrope selon une géométrie sphérique dans l'espace loin de leur source.

Un tel phénomène se prête donc particulièrement, pour sa partie lumineuse, à l'application de notre modèle, certes grossier pour un tel phénomène, d'un cylindre de densité d'énergie se déplaçant à la vitesse de la lumière. Le GRB étant un phénomène astrophysique, on ne peut considérer la génération des photons comme des trains d'ondes cohérents et il serait donc malavisé de considérer une partie de densité d'énergie oscillante semblable à celle que nous avons étudiée précédemment. Nous nous concentrons donc ici sur le calcul de la déformation gravitationnelle générée par un cylindre de densité d'énergie constante :

Nous considérerons ici un GRB moyen, dont l'énergie moyenne des photons est de 250keV correspondant à une fréquence $\nu = 6.0 \times 10^{19}$ Hz et donc à une longueur d'onde $\lambda \approx 5.0$ pm, qui correspond à des rayons γ de faible énergie. Sa durée moyenne est de $\Delta t = 1.3$ s, ce qui donne une longueur du cylindre de lumière $L = c\Delta t \approx 4 \times 10^8$ m, que nous considérerons moins grande que son rayon qui est de l'ordre du rayon du jet relativiste. La puissance dégagée est en moyenne de 10^{51} erg/s c'est à dire $P = 10^{44}$ W (BAND et al. 1993, PIRAN 2004). Avec ces paramètres, nous reprenons l'équation de la déformation gravitationnelle maximale générée équation (3.31) afin de trouver une approximation de la déformation gravitationnelle générée par un GRB à l'endroit où il est le moins large, c'est à dire près de sa zone d'émission, et trouvons une déformation gravitationnelle de l'ordre de $h \approx 10^{-6}$.

Cette déformation est relativement significative et pourrait donc in fine être la cause de perturbations mineures hypothétiquement observables. Notons qu'à cette valeur la déformation gravitationnelle s'inscrit encore dans le cas perturbatif et ce résultat devrait donc être physiquement valide en première approximation. Nous noterons cependant que la modélisation de l'émission lumineuse d'un GRB par un cylindre de lumière de densité d'énergie constante est très grossière, tant pour la supposition d'une densité d'énergie constante que

pour la forme cylindrique de la source et que nous pouvons donc nous attendre à observer une différence non négligeable entre l'étude précise de la déformation gravitationnelle générée par l'émission électromagnétique d'un sursaut gamma et l'évaluation rapide que nous en avons fait ci-dessus. Nonobstant les réserves émises, les résultats analytiques du travail de cette thèse laissent entrevoir la possibilité de la réalisation d'expériences et d'observations importantes, tant en physique de laboratoire qu'en astrophysique sur des phénomènes cosmologiques.

D'un point de vue plus exploratoire, il serait aussi intéressant d'étudier la déformation gravitationnelle générée par deux impulsions lumineuses se croisant. En effet, l'interaction de deux ondes électromagnétiques se propageant dans des directions différentes, possiblement de longueurs d'onde différentes, générerait non seulement des déformations longitudinales comme précédemment, mais aussi des déformations gravitationnelles transverses semblables à celles générées par l'effet GERTSENSHTEIN 1962. Il s'agirait en effet dans ce cas d'étudier l'analogie d'un effet Gertsenshtein pour un champ oscillant de grande amplitude, qui permettrait de générer des termes dépendant des additions et soustraction des fréquences de bases des impulsions laser. De telles déformations gravitationnelles peuvent couvrir une gamme de fréquences bien plus large que celle des lasers de puissance dont elles seraient issues, ce qui pourrait grandement faciliter leur détection. Les calculs pour ce genre de cas physique s'annoncent cependant bien plus compliqués d'un point de vue analytique, mais doivent pouvoir faire l'objet d'études analytiques locales ou d'études numériques. L'examen d'un tel cas semble cependant important du fait de la versatilité des déformations gravitationnelles qu'il pourrait produire et donc peut être détecter.

Détection

Nous nous proposons enfin de faire une revue rapide des moyens de détection qui nous sont offerts à l'heure actuelle ou dans un futur proche afin de détecter la déformation gravitationnelle générée par un champ électromagnétique propagatif. Nous précisons qu'une telle observation constituerait une première puisqu'il n'a pour l'instant été fait d'observation que sur des ondes gravitationnelles générées par accélération de masse. La liste des idées de détecteurs ci-dessous est non-exhaustive et nous essayons de prendre en compte les explorations qui nous paraissent les plus intéressantes et pertinentes vis à vis de notre étude et des outils qui lui sont associés, les lasers de puissance. Nous retenons donc principalement ici les détecteurs qui pourraient s'avérer efficaces pour des perturbations gravitationnelles de très hautes fréquences (entre le THz et l'EHz) telles qu'elles pourraient être générées en laboratoire par un laser de puissance. On peut globalement séparer les modèles en trois grandes familles essayant toutes de détecter une déformation gravitationnelle par des mécanismes différents.

- **Déformation des distances** : À la variation de la métrique gravitationnelle correspond un changement des distances entre objets dans l'espace. Ces expériences essaient de mesurer directement la déformation gravitationnelle par la mesure de la variation de h . Ainsi, AKUTSU et al. 2008 présentent un modèle réduit d'interféromètre semblable à celui présent sur LIGO et VIRGO et veulent ainsi mesurer le décalage relatif de miroirs dû à la dilatation et contraction des distances provoquées par le passage d'une déformation gravitationnelle. Cette méthode se concentre plus sur la détection de déformations gravitationnelles astrophysiques de haute fréquence (environ 100 MHz). Suivant une procédure expérimentale fondamentalement différente, SABÍN et al. 2014 proposent quant à eux d'observer la création de phonons dans un condensat de Bose-Einstein, création due encore au déplacement anormal des atomes du condensat par le passage d'une déformation gravitationnelle. Le déplacement de masse constitue sans doute la meilleure manière d'observer de manière

directe l'effet des déformations gravitationnelles, mais son étude peut se heurter à très haute fréquence au comportement inertiel de la matière, qui peut venir jouer l'effet d'une sorte de passe-bas sur les oscillations.

Un premier résultat encourageant vient d'être publié par GORYACHEV et al. 2021, qui ont réussi à observer des ondes gravitationnelles à hautes fréquences (de l'ordre du MHz) grâce à une cavité acoustique cryogénique.

- **Déformation du temps** : Au passage d'une déformation gravitationnelle, comme montré par la présence de composantes temporelles non-nulles du tenseur de perturbation gravitationnelle $h_{\mu\nu}$ équation (1.76), l'écoulement du temps ne peut plus être considéré comme se faisant à vitesse constante. Ce même principe a prouvé l'importance de la relativité dans la mesure du temps, puisque la variation d'accélération gravitationnelle entre deux altitudes sur Terre est suffisamment importante pour mesurer une différence de fréquence d'un photon dans l'absorption-émission d'un atome, grâce à la spectroscopie Mössbauer (MÖSSBAUER 1958, VANDEGRIFT et FULTZ 1998). En nous reposant sur l'étude de MCGREW et al. 2018 montrant la précision des horloges atomiques dans l'évaluation de variations du potentiel gravitationnel, nous suggérons l'étude du retard accumulé entre une horloge atomique témoin et une horloge atomique d'expérience soumises au même potentiel gravitationnel hors expérience. L'horloge atomique d'expérience serait alors soumise à une exposition répétée à une déformation gravitationnelle générée en laboratoire, telle celle présentée en section 4.2. Il pourrait alors être possible d'amplifier le résultat d'une telle expérience en prenant une fréquence de tir élevée au détriment d'une grandeur comme la longueur du cylindre émis L qui n'accroît que logarithmiquement la valeur de la déformation gravitationnelle.
- **Interaction entre gravitation et électromagnétisme** : À la suite des travaux présentés par GERTSENSHTEIN 1962 sur la génération de déformations gravitationnelles à partir d'ondes électromagnétiques, ZEL'DOVICH 1974 analyse le mécanisme inverse de génération d'ondes électromagnétiques à partir d'ondes gravitationnelles. D'autre part, les ondes électromagnétiques sont elles aussi soumises aux variations de l'espace-temps, et le passage d'une perturbation gravitationnelle peut donc s'en ressentir sur la fréquence ou la direction d'une onde électromagnétique. Les expériences s'appuyant sur ces phénomènes se présentent comme les plus fiables à très haute fréquence puisque le champ électromagnétique ne dépend pas de la fréquence étudiée dans un milieu suffisamment vide de matière. Encore mieux, pour de hautes fréquences, c'est à dire de petites longueurs d'ondes, il est plus facile d'avoir des cavités avec de hautes valeurs de champs ou de hauts facteurs de qualité pour la conservation de l'oscillation d'un signal, puisque le champ a besoin de s'étendre sur un plus petit volume. Ainsi, BRAGINSKY et al. 1974 puis CRUISE et INGLEBY 2006 s'intéressent tout particulièrement à l'amplification et la détection de la perturbation par une déformation gravitationnelle d'une onde électromagnétique afin d'obtenir une observation de la perturbation gravitationnelle. Par ailleurs, LUPANOV 1967 se penche, avant les travaux de ZEL'DOVICH 1974, sur la génération dans une capacité électrique d'une composante oscillatoire au passage d'une onde gravitationnelle, tandis que plus récemment ZHENG et al. 2018 se penche sur le développement d'un détecteur utilisant des champs magnétiques intenses afin de provoquer lui aussi la création puis l'amplification de photons liés au passage d'une onde gravitationnelle.

Nous recommandons de plus la lecture des articles de CRUISE 2012 et SPENGLER, RÄTZEL et BRAUN 2021 pour se faire une idée des nombreuses autres expériences envisagées pour détecter des déformations gravitationnelles, tant en laboratoire que provenant d'objets célestes.

Le grand nombre de modèles d'expériences sur la détection de perturbations gravitationnelles faibles, ainsi que les progrès significatifs de la puissance des lasers au cours des 50 dernières années, nous laissent optimistes quant à la possibilité prochaine de générer et d'observer des perturbations gravitationnelles en laboratoire, montrant ainsi l'existence et l'intérêt du rôle de l'électromagnétisme dans l'établissement et l'exploration des phénomènes étudiés en relativité générale.

Bibliographie

- ABBOTT, B. P. et al. (11 fév. 2016). “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”. In : *Phys. Rev. Lett.* 116.6 (6), p. 061102. ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : 10.1103/PhysRevLett.116.061102. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102> (visité le 18/10/2019).
- ABBOTT, B. P. et al. (16 oct. 2017). “GW170817 : Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral”. In : *Phys. Rev. Lett.* 119.16 (16), p. 161101. ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : 10.1103/PhysRevLett.119.161101. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.161101> (visité le 18/10/2019).
- AKUTSU, Tomotada et al. (5 sept. 2008). “Search for a Stochastic Background of 100-MHz Gravitational Waves with Laser Interferometers”. In : *Phys. Rev. Lett.* 101.10 (10), p. 101101. ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : 10.1103/PhysRevLett.101.101101. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.101101> (visité le 04/10/2019).
- BAND, D. et al. (1^{er} août 1993). “BATSE Observations of Gamma-Ray Burst Spectra. I. Spectral Diversity”. In : *The Astrophysical Journal* 413, p. 281. ISSN : 0004-637X. DOI : 10.1086/172995. URL : <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1993ApJ...413..281B> (visité le 21/09/2021).
- BERGMANN, Peter G. (1^{er} juil. 1957). “Summary of the Chapel Hill Conference”. In : *Rev. Mod. Phys.* 29.3 (3), p. 352-354. ISSN : 0034-6861. DOI : 10.1103/RevModPhys.29.352. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.29.352> (visité le 08/10/2019).
- BOUDENOT, Jean-Claude (1989). *Electromagnetisme et Gravitation Relativistes*.
- BRAGINSKY, V. B. et al. (1974). “Electromagnetic Detectors of Gravitational Waves”. In : *Symp. - Int. Astron. Union* 64, p. 54-58. ISSN : 0074-1809. DOI : 10.1017/S0074180900236012. URL : https://www.cambridge.org/core/product/identif/50074180900236012/type/journal_article (visité le 04/10/2019).
- CABRAL, Francisco et Francisco S. N. LOBO (avr. 2017). “Gravitational Waves and Electrodynamics : New Perspectives”. In : *Eur. Phys. J. C* 77.4 (4), p. 237. ISSN : 1434-6044, 1434-6052. DOI : 10.1140/epjc/s10052-017-4791-z. URL : <http://link.springer.com/10.1140/epjc/s10052-017-4791-z> (visité le 04/10/2019).
- CHAPLINE, G. F., J. NUCKOLLS et L. L. WOOD (août 1974). “Gravitational-Radiation Production Using Nuclear Explosions”. In : *Phys. Rev. D* 10.4 (4), p. 1064-1065. DOI : 10.1103/PhysRevD.10.1064. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.1064>.
- CRUISE, A M (7 mai 2012). “The Potential for Very High-Frequency Gravitational Wave Detection”. In : *Class. Quantum Grav.* 29.9 (9), p. 095003. ISSN : 0264-9381, 1361-6382. DOI : 10.1088/0264-9381/29/9/095003. URL : <http://stacks.iop.org/0264-9381/29/i=9/a=095003?key=crossref.85e16fb18433fb81fd17992435a08195> (visité le 04/10/2019).
- CRUISE, A M et R M J INGLELEY (21 nov. 2006). “A Prototype Gravitational Wave Detector for 100 MHz”. In : *Class. Quantum Grav.* 23.22 (22), p. 6185-6193. ISSN : 0264-9381, 1361-6382. DOI : 10.1088/0264-9381/23/22/007. URL : [93](http://stacks.iop.org/0264-</p></div><div data-bbox=)

- 9381/23/i=22/a=007?key=crossref.a9472e97a417e6bd8cc13eb756a80539 (visité le 04/10/2019).
- DANSON, Colin N. et al. (2019). “Petawatt and Exawatt Class Lasers Worldwide”. In : *High Pow Laser Sci Eng* 7. ISSN : 2095-4719, 2052-3289. DOI : 10.1017/hpl.2019.36. URL : https://www.cambridge.org/core/product/identifrier/S2095471919000367/type/journal_article (visité le 01/04/2021).
- DYSON, F W, A S EDDINGTON et C DAVIDSON (1920). “A Determination of the Deflection of Light by the Sun’s Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919”. In : *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, p. 45.
- EINSTEIN, Albert (1^{er} jan. 1915). “Erklärung Der Perihelbewegung Des Merkur Aus Der Allgemeinen Relativitätstheorie”. In : *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, p. 831-839. URL : <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1915SPAW.....831E> (visité le 21/09/2021).
- (1916). “Näherungsweise Integration Der Feldgleichungen Der Gravitation”. In : *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* Jan-Juni 1916.
- FRANCK, J. et G. HERTZ (1914). “Über Zusammenstöße Zwischen Elektronen Und Den Molekülen Des Quecksilberdampfes Und Die Ionisierungsspannung Desselben”. In : *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft* 16, p. 457-467. ISSN : 1521-3722. DOI : 10.1002/phbl.19670230702. URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/phbl.19670230702> (visité le 20/09/2021).
- GELFER, Evgeny G. et al. (sept. 2016). “Gravitational Waves Generated by Laser Accelerated Relativistic Ions”. In : *Physics of Plasmas* 23.9 (9), p. 093107. ISSN : 1070-664X, 1089-7674. DOI : 10.1063/1.4962520. URL : <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.4962520> (visité le 18/10/2019).
- GERTSENSHTEIN, M. E. (1962). “Wave Resonance of Light and Gravitational Waves”. In : *Soviet Physics JETP* 14.1 (1), p. 84-85.
- GORYACHEV, Maxim et al. (12 août 2021). “Rare Events Detected with a Bulk Acoustic Wave High Frequency Gravitational Wave Antenna”. In : *Phys. Rev. Lett.* 127.7, p. 071102. ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : 10.1103/PhysRevLett.127.071102. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.071102> (visité le 23/09/2021).
- GRISHCHUK, L. P. (3 juin 2003a). *Electromagnetic Generators and Detectors of Gravitational Waves*. arXiv : gr-qc/0306013. URL : <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0306013> (visité le 04/10/2019).
- (13 mai 2003b). *Update on Gravitational-Wave Research*. arXiv : gr-qc/0305051. URL : <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0305051> (visité le 04/10/2019).
- HULSE, R. A. et J. H. TAYLOR (15 jan. 1975). “Discovery of a Pulsar in a Binary System”. In : *The Astrophysical Journal* 195, p. L51-L53.
- KADLECOVÁ, Hedvika et al. (avr. 2017). “Gravitational Wave Generation by Interaction of High Power Lasers with Matter Using Shock Waves”. In : *Eur. Phys. J. D* 71.4 (4), p. 89. ISSN : 1434-6060, 1434-6079. DOI : 10.1140/epjd/e2017-70586-y. URL : <http://link.springer.com/10.1140/epjd/e2017-70586-y> (visité le 18/10/2019).
- KLEBESADEL, Ray W., Ian B. STRONG et Roy A. OLSON (1^{er} juin 1973). “Observations of Gamma-Ray Bursts of Cosmic Origin”. In : *The Astrophysical Journal* 182, p. L85. ISSN : 0004-637X. DOI : 10.1086/181225. URL : <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1973ApJ...182L..85K> (visité le 21/09/2021).
- KOLOSITSYN, N I et V N RUDENKO (1^{er} juin 2015). “Gravitational Hertz Experiment with Electromagnetic Radiation in a Strong Magnetic Field”. In : *Phys. Scr.* 90.7 (7), p. 074059. ISSN : 0031-8949, 1402-4896. DOI : 10.1088/0031-8949/90/7/074059. URL : <http://stacks.iop.org/1402-4896/90/i=7/a=074059?key=crossref.3cadbe92056e3cc46efe4bca23f905e8> (visité le 04/10/2019).

- LANDAU, Lev D. et Evgenij M. LIFSHITZ (2009). *The Classical Theory of Fields*. 4., rev. Engl. ed., reprinted. Course of Theoretical Physics by L. D. Landau and E. M. Lifshitz; Vol. 2. Amsterdam [u.a.] : Elsevier [u.a.] 428 p. ISBN : 978-0-7506-2768-9.
- LEGRAND, Frédéric. *Intégrales*. URL : <https://www.f-legrand.fr/scidoc/docmml/numerique/montecarlo/integrales/integrales.html> (visité le 21/09/2021).
- LI, Fangyu et al. (9 sept. 2009). “Signal Photon Flux and Background Noise in a Coupling Electromagnetic Detecting System for High-Frequency Gravitational Waves”. In : *Phys. Rev. D* 80.6, p. 064013. ISSN : 1550-7998, 1550-2368. DOI : 10.1103/PhysRevD.80.064013. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.064013> (visité le 21/09/2021).
- LUPANOV, G A (jan. 1967). “A Capacitor in the Field of a Gravitational Wave”. In : *Soviet Physics JETP* 25.1, p. 76-79. URL : http://jetp.ras.ru/cgi-bin/dn/e_025_01_0076.pdf.
- MAGGIORE, Michele (2008). *Gravitational Waves*. T. 1 : Theory and Experiments. ISBN : 978-0-19-857074-5.
- MCGREW, W. F. et al. (déc. 2018). “Atomic Clock Performance Enabling Geodesy below the Centimetre Level”. In : *Nature* 564.7734 (7734), p. 87-90. ISSN : 0028-0836, 1476-4687. DOI : 10.1038/s41586-018-0738-2. URL : <http://www.nature.com/articles/s41586-018-0738-2> (visité le 04/10/2019).
- METROPOLIS, Nicholas et S. ULAM (1949). “The Monte Carlo Method”. In : *Journal of the American Statistical Association* 44.247, p. 335-341. ISSN : 0162-1459. DOI : 10.2307/2280232. JSTOR : 2280232.
- MISNER, Charles W., Kip S. THORNE et John Archibald WHEELER (2008). *Gravitation*. 27. printing. New York, NY : Freeman. 1279 p. ISBN : 978-0-7167-0334-1 978-0-7167-0344-0.
- MÖSSBAUER, Rudolf L. (1^{er} avr. 1958). “Kernresonanzfluoreszenz von Gammastrahlung in Ir191”. In : *Z. Physik* 151.2, p. 124-143. ISSN : 0044-3328. DOI : 10.1007/BF01344210. URL : <https://doi.org/10.1007/BF01344210> (visité le 21/09/2021).
- NUTER, Rachel et al. (juin 2014). “Maxwell Solvers for the Simulations of the Laser-Matter Interaction”. In : *Eur. Phys. J. D* 68.6, p. 177. ISSN : 1434-6060, 1434-6079. DOI : 10.1140/epjd/e2014-50162-y. URL : <http://link.springer.com/10.1140/epjd/e2014-50162-y> (visité le 21/09/2021).
- PIRAN, Tsvi (2004). “The Physics of Gamma-Ray Bursts”. In : *Rev. Mod. Phys.* 76.4 (4), p. 68.
- RÄTZEL, Dennis (29 mar. 2017). “Gravitational Properties of Light”.
- RÄTZEL, Dennis, Martin WILKENS et Ralf MENZEL (29 jan. 2016). “Gravitational Properties of Light—the Gravitational Field of a Laser Pulse”. In : *New J. Phys.* 18.2 (2), p. 023009. ISSN : 1367-2630. DOI : 10.1088/1367-2630/18/2/023009. URL : <http://stacks.iop.org/1367-2630/18/i=2/a=023009?key=crossref.8bda1fb4a01b617e864a74deaa6219b6> (visité le 04/10/2019).
- RIBEYRE, Xavier et Vladimir TIKHONCHUK (fév. 2012). “High Frequency Gravitational Waves Generation in Laser Plasma Interaction”. In : *The Twelfth Marcel Grossmann Meeting*. Proceedings of the MG12 Meeting on General Relativity. UNESCO Headquarters, Paris, France : WORLD SCIENTIFIC, p. 1640-1642. ISBN : 978-981-4374-51-4 978-981-4374-55-2. DOI : 10.1142/9789814374552_0292. URL : http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789814374552_0292 (visité le 18/10/2019).
- SABÍN, Carlos et al. (7 août 2014). “Phonon Creation by Gravitational Waves”. In : *New J. Phys.* 16.8 (8), p. 085003. ISSN : 1367-2630. DOI : 10.1088/1367-2630/16/8/085003. URL : <http://stacks.iop.org/1367-2630/16/i=8/a=085003?key=crossref.f880b0edd777ebb6a30e38851e708571> (visité le 04/10/2019).
- SCHWARZSCHILD, K. (1916). “Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie.” In : *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. URL : <http://archive.org/details/sitzungsberichte1916deutsch> (visité le 15/04/2021).

- SCULLY, Marlan O. (15 juin 1979). “General-Relativistic Treatment of the Gravitational Coupling between Laser Beams”. In : *Phys. Rev. D* 19.12 (12), p. 3582-3591. ISSN : 0556-2821. DOI : 10.1103/PhysRevD.19.3582. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.19.3582> (visité le 04/10/2019).
- SPENGLER, Felix, Dennis RÄTZEL et Daniel BRAUN (1^{er} juil. 2021). *Perspectives of Measuring Gravitational Effects of Laser Light and Particle Beams*. arXiv : 2104.09209 [gr-qc, physics:quant-ph]. URL : <http://arxiv.org/abs/2104.09209> (visité le 03/08/2021).
- TAJIMA, T. et G. MOUROU (7 mar. 2002). “Zettawatt-Exawatt Lasers and Their Applications in Ultrastrong-Field Physics”. In : *Phys. Rev. ST Accel. Beams* 5.3, p. 031301. ISSN : 1098-4402. DOI : 10.1103/PhysRevSTAB.5.031301. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevSTAB.5.031301> (visité le 20/09/2021).
- TOLMAN, Richard C, Paul EHRENFEST et Boris PODOLSKY (1^{er} mar. 1931). “On the Gravitational Field Produced by Light”. In : *Physical Review* 37, p. 602-615.
- TOURRENC, Philippe (1992). *Relativité et Gravitation*.
- VANDEGRIFT, Guy et Brent FULTZ (1^{er} juil. 1998). “The Mössbauer Effect Explained”. In : *American Journal of Physics* 66.7, p. 593-596. ISSN : 0002-9505. DOI : 10.1119/1.18911. URL : <https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.18911> (visité le 21/09/2021).
- WEBER, J. (1^{er} jan. 1960). “Detection and Generation of Gravitational Waves”. In : *Phys. Rev.* 117.1 (1), p. 306-313. ISSN : 0031-899X. DOI : 10.1103/PhysRev.117.306. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.117.306> (visité le 04/10/2019).
- ZEL'DOVICH, Ya B (avr. 1974). “Electromagnetic and Gravitational Waves in a Stationary Magnetic Field”. In : *Soviet Physics JETP* 38.4 (4), p. 652-654.
- ZHENG, H. et al. (14 sept. 2018). “Searching for High-Frequency Gravitational Waves by Ground High Field Magnetic Resonant Sweepings”. In : *Phys. Rev. D* 98.6 (6), p. 064028. ISSN : 2470-0010, 2470-0029. DOI : 10.1103/PhysRevD.98.064028. arXiv : 1703.06251. URL : <http://arxiv.org/abs/1703.06251> (visité le 04/10/2019).

Titre : Étude de l'influence gravitationnelle d'une impulsion lumineuse

Résumé : En 2016, la première détection directe d'ondes gravitationnelles a eu lieu grâce aux efforts combinés des nombreux scientifiques du LIGO. Depuis, les interféromètres géants de LIGO et VIRGO détectent régulièrement ces ondes gravitationnelles générées par des phénomènes astrophysiques cataclysmiques comme la fusion de deux trous noirs ou d'étoiles à neutrons. Afin de mieux comprendre le mécanisme à l'origine de ces ondes, c'est à dire la relativité générale, des expériences en laboratoire ont été imaginées. Ces expériences essaient de recréer une accélération de masse suffisante pour pouvoir créer une déformation gravitationnelle détectable. Cependant, l'accélération de masse n'est pas le seul mécanisme susceptible de générer des déformations gravitationnelles en laboratoire, ou dans l'espace.

En 1962, Gertsenshtein montre qu'il est possible d'avoir la génération d'ondes gravitationnelles par interaction d'une onde électromagnétique avec un champ magnétique statique. En nous penchant sur cette démonstration, nous avons pu observer que toute onde électromagnétique produit une déformation gravitationnelle. Nous nous intéressons dans cette thèse à un tel type de déformation gravitationnelle. Nous la traitons en modélisant une impulsion lumineuse par un cylindre de densité d'énergie homogène, se déplaçant à la vitesse de la lumière c .

Nous mettons en place une méthode de résolution des équations d'Einstein linéarisées basée sur la fonction de Green du d'Alembertien, qui nous mène à une détermination analytique exacte de la déformation gravitationnelle générée par un cylindre de lumière sur son axe de propagation. Les solutions ainsi trouvées sont valides même en régime instationnaire, et nous permettent donc d'en savoir plus sur l'établissement de certains potentiels gravitationnels. Nous déterminons ainsi le mode d'établissement du potentiel gravitationnel d'un objet statique de densité d'énergie constante qui apparaîtrait subitement dans l'espace, mais aussi la forme et l'amplitude des déformations gravitationnelles générées par une impulsion lumineuse. Ces calculs sont confirmés par comparaison avec la solution de la métrique de Schwarzschild qui nous donne les mêmes résultats loin des objets étudiés. Découpant notre étude en celle d'un cylindre de densité d'énergie constante et celle d'un cylindre de densité d'énergie oscillante, nous menons une étude variationnelle sur les différentes grandeurs caractéristiques d'une telle émission lumineuse. Nous portons ainsi notre intérêt sur le rapport entre longueur et largeur de l'impulsion lumineuse, le temps de propagation de cette dernière, mais aussi sa longueur d'onde, son intensité et sa puissance. Par ces considérations, nous estimons et essayons d'optimiser le rendement d'une expérience de génération de déformation gravitationnelle en laboratoire à l'aide d'un laser de puissance.

En ouverture de cette thèse, nous proposons divers calculs qui pourraient développer et étayer les résultats de notre recherche. Nous finissons en montrant l'intérêt de l'étude de ces déformations générées uniquement par une partie électromagnétique. Non seulement en laboratoire, où nous détaillons les diverses pistes poursuivies à ce jour pour détecter les déformations gravitationnelles de très haute fréquence que nous étudions, mais aussi en astrophysique, où des phénomènes électromagnétiques extrêmement intenses peuvent avoir lieu, comme les sursauts gamma.

Mots clés : Relativité générale, calcul analytique, astrophysique de laboratoire, ondes gravitationnelles, laser intense, fonction de Green, expérience de génération-détection de déformation gravitationnelle, étude variationnelle.

Laboratoire d'accueil : Centre Lasers Intenses et Applications (C.E.L.I.A.), 43 rue Pierre Noailles, domaine du Haut Carré, 33400 TALENCE.