



Modélisation numérique robuste et fiable de la fissuration des roches et des interfaces

Maxime Gantier

► To cite this version:

Maxime Gantier. Modélisation numérique robuste et fiable de la fissuration des roches et des interfaces. Physique [physics]. Université Grenoble Alpes [2020-..], 2021. Français. NNT : 2021GRALI089 . tel-03572621

HAL Id: tel-03572621

<https://theses.hal.science/tel-03572621>

Submitted on 14 Feb 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : 2MGE : Matériaux, Mécanique, Génie civil,
Electrochimie

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

Maxime GANTIER

Thèse dirigée par **Pierre BÉSUELLE**, Directeur de Recherches,
Université Grenoble-Alpes, et
codirigée par **Éric LORENTZ**, HDR, EDF R&D

préparée au sein du **Laboratoire Sols, Solides, Structures et Risques**
dans l'**École Doctorale I-MEP2 – Ingénierie – Matériaux, Mécanique, Environnement, Energétique, Procédés, Production**

Modélisation numérique robuste et fiable de la fissuration des roches et des interfaces

Thèse soutenue le 17 novembre 2021,
devant le jury composé de :

Mr, Frédéric, DUFOUR

Professeur, Grenoble INP, Président du jury

Mr, Panagiotis, KOTRONIS

Professeur, Ecole Centrale de Nantes, Rapporteur

Mr, Corrado, MAURINI

Professeur, Sorbonne Université, Rapporteur

Mme, Angela, MADEO

Professeure, TU Dortmund, Membre

Mr, Pierre, BÉSUELLE

Directeur de recherche, CNRS, Directeur de thèse

Mr, Éric, LORENTZ

HDR, EDF R&D, Co-directeur de thèse

Mr, Simon, RAUDE

Ingénieur chercheur, EDF R&D, Invité

Mr, Denis, CAILLERIE

Professeur émérite, Grenoble INP, Invité



Résumé

L'argile du Callovo-Oxfordien (COx) est étudiée au laboratoire de recherche souterrain de Meuse/Haute-Marne comme formation hôte de référence pour le stockage géologique des déchets radioactifs de haute et moyenne activité à vie longue en France. Les propriétés mécaniques adoucissantes de cette roche peuvent conduire à une rupture par apparition de bandes de localisation dans lesquelles la déformation se concentre. Ces modes de déformation font émerger des longueurs caractéristiques que la mécanique des milieux classiques ne permet pas de prendre en compte. En effet, l'incapacité à contrôler la largeur des bandes de cisaillement conduit à une mauvaise estimation de l'énergie dissipée par le phénomène de localisation. Dans le cadre de simulations éléments finis classiques, la réponse dépend de la taille du maillage et la déformation se concentre dans un seul élément. Le milieu de second gradient de dilatation, précédemment développé et implémenté dans le logiciel éléments finis *Code_Aster*, permet d'obtenir des solutions localisées indépendantes du maillage, notamment pour des lois de comportements élasto-plastiques associées et dilatantes, grâce à l'introduction d'une longueur caractéristique.

Dans le cadre de cette thèse, ces résultats ont été étendus aux lois de comportement élasto-plastiques non associées. Cependant, en régime de déformation ultime, le comportement asymptotique quasi-incompressible de ce type de lois conduit à un phénomène de verrouillage numérique. A cet effet, la formulation de l'élément fini du milieu de second gradient de dilatation est modifiée en s'inspirant de la formulation mixte à trois champs pour les matériaux quasi-incompressibles. L'influence des fonctions de formes de l'élément est également étudiée.

Le rôle de la longueur interne dans le milieu de second gradient de dilatation est ensuite étudié dans le cadre d'un problème analytique simplifié. L'influence de ce paramètre sur des quantités macroscopiques comme la réponse force-déplacement ou l'énergie consommée sont précisément caractérisés. Ensuite, à partir d'essais biaxiaux numériques, nous montrons que le modèle est capable de reproduire le comportement post-localisation de la roche. Un jeu de paramètres matériaux est identifié à partir d'essais expérimentaux de laboratoire. Il est démontré que, sous certaines conditions, la longueur interne peut être choisie comme un paramètre numérique tout en préservant les quantités macroscopiques importantes, comme la réponse force-déplacement ou l'énergie dissipée.

Enfin, les conditions aux limites supplémentaires introduites par le modèle de second gradient de dilatation sont étudiées, de même que les conditions d'interface. Dans le cadre d'un problème analytique, leur impact sur la réponse de la structure est mis en évidence et des recommandations sont formulées quant au choix des conditions aux limites qui nous semblent les plus adaptées.

Abstract

The Callovo-Oxfordian (COx) claystone is investigated at the Meuse/Haute-Marne underground research laboratory as the reference host formation for geological disposal of high and intermediate activity long-lived radioactive waste in France. The softening behaviour of the COx claystone is known to lead to bifurcation from a diffuse state to localized shear bands. The length scales of macroscopic mechanical fields and microstructures are no longer separated so that local macroscopic constitutive laws are no longer valid neither on a physical ground nor on a mathematical one. In particular, they result in unrealistic solutions where the strain localizes in narrow bands the size of which is uncontrolled hence leading to erroneous plastic dissipation at fracture. From a computational point of view, these issues are exhibited as a spurious mesh dependency where strain localizes in narrow bands of one element width. A second gradient dilatation model for dilatant geomaterial behaviour has been developed and implemented in the open-source FEM software *Code_Aster*, resulting in mesh independent localized solutions for associated elastoplastic behaviour laws.

In this work, this result is partly extended to non-associated behaviour. However, the quasi-incompressible asymptotic behaviour leads to stress oscillations known as volumetric locking in the post-localisation regime. Our formulation is then amended similarly to the closely related 3-fields finite elements for quasi-incompressible materials. It is shown that this new formulation is able to treat volumetric locking. The influence of element shape functions is also investigated.

The internal length dependency of macroscopic relevant quantities such as force displacement curves or dissipated energy are also investigated in the framework of an analytical problem. Then, it is shown that the model is able to reproduce post-localization behaviour of claystone in numerical simulations of biaxial tests. A set of behaviour law parameters is calibrated using experimental results. It is shown that the internal length parameter can be seen as a numerical parameter. Macroscopic quantities such as force displacement curves or dissipated energy can stay constant for different values of the internal length.

Finally, higher order boundary conditions introduced in the second gradient dilatation model are studied.

Remerciements

Avant toute chose, je tiens à remercier Frédéric Dufour et Panagiotis Kotronis d'avoir accepté le rôle de rapporteurs, Angela Madeo et Corrado Maurini pour avoir accepté d'examiner ma thèse et leur participation au jury. Leurs questions et remarques quant au contenu du manuscrit et de la soutenance m'ont beaucoup apporté.

Je tiens ensuite à remercier tout particulièrement mon encadrement de thèse. Pierre Bésuelle, pour sa disponibilité et sa bienveillance. Eric Lorentz pour les nombreuses heures passées avec moi devant un tableau, et les longues conversations qui en découlaient. Simon Raude et Denis Caillerie pour tous les conseils prodigues.

Ce travail n'aurait pas été possible sans vous tous !

Mes remerciements vont ensuite à l'équipe T6C dans son ensemble, pour les bons moments passés à EDF Saclay autour d'un café. Je pense tout particulièrement à toute l'équipe de doctorants, dont le soutien et l'écoute permanents m'ont été d'une grande aide !

Mes pensées vont ensuite à mes amis qui m'ont soutenu pendant ses trois ans. En particulier, à toute l'équipe de doctorants (et maintenant de docteurs !) de l'escrime, qui ont vécu et partagé avec moi toutes les galères mais aussi et surtout toutes les satisfactions du travail de thèse.

Finalement, je tiens à remercier mes parents ainsi que mon frère et ma soeur pour leur soutien pendant ses trois années de travail !

Table des matières

Introduction	7
1 Etude bibliographique	11
1.1 Le phénomène de localisation de la déformation	11
1.1.1 Mise en évidence expérimentale pour les géomatériaux	11
1.1.2 Approche théorique	13
1.1.3 Nécessité d'introduire une longueur interne	15
1.2 Les méthodes de régularisation	18
1.2.1 Formulations à variables régularisées	18
1.2.2 Milieux enrichis par la microstructure	22
1.3 Les milieux continus de second gradient	27
1.3.1 Formulation continue des modèles de second gradient	27
1.3.2 Formulation numérique des modèles de second gradient	31
1.3.3 Exemples d'application	32
2 Le modèle de second gradient de dilatation	39
2.1 Un modèle de second gradient adapté aux matériaux dilatants	41
2.1.1 Formulation continue	41
2.1.2 Formulation numérique du modèle de second gradient de dilatation	46
2.2 Applications aux essais biaxiaux et modification de la formulation numérique	54
2.2.1 Présentation de l'essai biaxial	55
2.2.2 Méthodes numériques pour le franchissement d'instabilités . .	58
2.2.3 Méthodes numériques pour le traitement de la quasi-incompressibilité	68
2.2.4 Evolution de la largeur de bande au cours du chargement . . .	83
2.3 Bilan du chapitre	95
3 Influence et identification de la longueur interne dans le modèle de second gradient de dilatation	96
3.1 Introduction	97

TABLE DES MATIÈRES

3.2	La longueur interne du modèle de second gradient de dilatation dans le cadre d'un problème analytique simplifié	101
3.2.1	Recherche d'une solution analytique	101
3.2.2	Hypothèses	102
3.2.3	Mise en équation et résolution	104
3.2.4	Résolution analytique dans la bande de localisation	108
3.2.5	Application numérique avec une loi de comportement de type Drucker Prager non associée	111
3.2.6	Changement d'échelle avec le modèle de second gradient de dilatation	121
3.2.7	Retour sur les hypothèses du problème du barreau	128
3.3	Etudes numériques avec le modèle de second gradient de dilatation .	132
3.3.1	Largeur de bande de localisation : étude de sensibilité aux paramètres matériaux	133
3.3.2	Identification des paramètres matériaux à partir d'essais expérimentaux	137
3.3.3	Application du résultat d'invariance aux essais biaxiaux	145
3.4	Bilan du chapitre	152
4	Conditions aux limites et conditions d'interface du modèle de second gradient de dilatation	153
4.1	Introduction	153
4.2	Conditions aux limites d'ordre supérieur	156
4.2.1	Présentation du problème	156
4.2.2	Résolution analytique	157
4.2.3	Impact de la condition aux limites d'ordre supérieur sur la forme de la solution	161
4.3	Conditions d'interface	164
4.3.1	Interface entre deux matériaux élasto-plastiques	165
4.3.2	Interface entre un matériau élastique et un matériau élasto-plastique	170
4.3.3	Proposition d'un autre comportement d'interface	174
4.4	Bilan du chapitre	178
Conclusion et perspectives	179	
Annexe 1 : Loi de Drucker Prager non associée	182	
Annexe 2 : Résolution analytique du problème du barreau, conditions aux limites et d'interfaces	186	

TABLE DES MATIÈRES

Annexe 3 : Modèle de second gradient de dilatation en grandes déformations logarithmiques	190
Références	195

Introduction

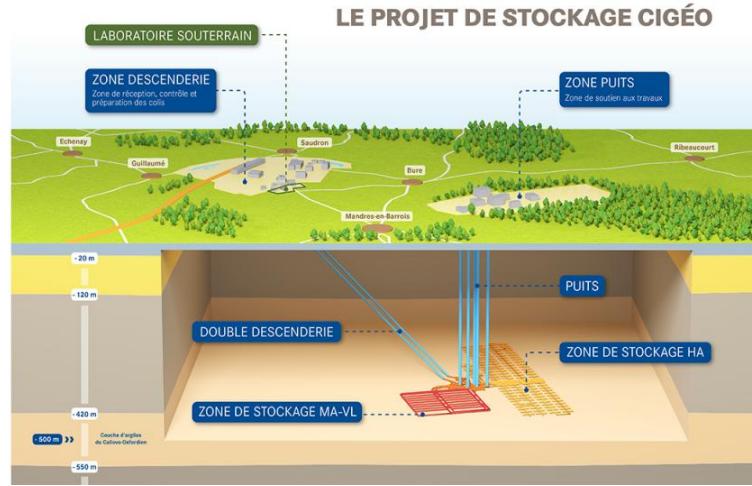
Contexte

Avec le vote en 2006 de la loi relative à la gestion des déchets radioactifs, la France a fait le choix du stockage géologique profond pour les déchets les plus radioactifs, à savoir ceux de haute activité et de moyenne activité à vie longue. L'ANDRA (Agence Nationale pour la gestion des Déchets RAdioactifs) conduit des études sur les propriétés de l'argilite du site de Meuse/Haute Marne (projet Cigéo), dans la perspective de stocker les déchets dans des galeries à 500 m de profondeur, comme illustré en figure 1. L'argilite du Callovo-Oxfordien forme une barrière naturelle à long terme qui limite la dispersion des substances radioactives dans l'environnement. EDF, à l'origine de la majeure partie de ces déchets, apporte son concours à l'ANDRA pour évaluer la pertinence technique et économique des différents concepts envisagés.

Parmi les différentes problématiques, la bonne étanchéité de la roche hôte est tributaire de l'extension de fissures qui se développent au voisinage des galeries et des alvéoles de stockage. Elles résultent potentiellement de l'excavation puis des effets thermo-hydro-mécaniques engendrés par la chaleur des déchets lors des premières dizaines d'années du stockage. Pour caractériser ces fissures, des simulations numériques sont indispensables, en complément des analyses expérimentales qui donnent accès aux propriétés de l'argilite *in situ*. Elles s'appuient sur des modèles de comportement et d'endommagement de la roche dont la mise en œuvre robuste et fiable constitue l'objet de cette thèse. La robustesse désigne ici la capacité du modèle à fournir un résultat dans des conditions compatibles avec la réalité industrielle tandis que la fiabilité renvoie à la pertinence de ce résultat et notamment sa stabilité vis-à-vis des conditions de l'étude.

Parmi les principales caractéristiques des lois de comportement évoquées ci-dessus, l'écrouissage négatif (i.e. baisse de la capacité de résistance du matériau) pose de nombreux problèmes, à la fois mathématiques et numériques. En effet, couplées aux équations d'équilibre et aux conditions limites de la structure, de tels modèles de

FIGURE 1 – Schéma de principe du projet Cigéo. Source : ANDRA



comportement conduisent à une perte d'unicité et d'existence de solutions régulières, généralement sous la forme d'une localisation excessive des champs mécaniques (déformation et endommagement). La mécanique des milieux continus classique n'est pas adaptée pour traiter ce type de problème : en particulier, elle ne permet pas d'introduire une longueur interne, caractéristique de l'échelle spatiale de la localisation. En conséquence, toute simulation numérique conduit à une dépendance pathologique du résultat au maillage qui fournit, de manière inappropriée, l'échelle interne du modèle : la largeur de bande tend vers 0 avec le raffinement du maillage. L'énergie dissipée par le mécanisme de localisation de la déformation devient alors nulle. Expérimentalement, on observe un phénomène de concentration des déformations dans une bande de faible épaisseur. A cause de cette faible largeur de bande, l'échelle spatiale des champs macroscopiques n'est plus séparée de celle de la microstructure, une hypothèse pourtant fondamentale dans la construction de lois de comportement classiques. Il s'avère donc nécessaire d'introduire une longueur caractéristique dans la modélisation et ainsi retrouver des résultats de calculs qui convergent vers une solution physiquement raisonnable avec le raffinement du maillage.

Enjeux scientifiques

Pour la modélisation des roches, le choix qui prévaut à EDF R&D consiste à contrôler le mécanisme de localisation via l'approche de milieu de second gradient dans une version simplifiée (FERNANDES, 2009) : le modèle de second gradient de dilatation. La description de la microstructure est ainsi enrichie par un terme de gradient de déformation volumique et sa quantité duale, la double contrainte de di-

latance. Cette formulation a d'ores et déjà fait ses preuves mais plusieurs questions restent en suspens, questions qui seront abordées dans la thèse pour compléter la compréhension et le degré de maîtrise qu'on peut avoir de ce type de modélisation. Afin de se focaliser sur le modèle de second gradient de dilatation, les aspects thermique et hydraulique du problème ne seront pas abordés dans cette thèse. Enfin, il est nécessaire que les ingénieurs d'EDF puissent s'approprier les résultats de cette thèse pour leurs calculs numériques. Les calculs et développements qui seront présentés ont donc été réalisés avec *Code_Aster* (www.code-aster.org), le logiciel libre de simulation éléments finis en mécanique développé par EDF R&D.

La première étape consiste à choisir et calibrer les paramètres des lois de comportement afin de prédire correctement le comportement pré-pic, l'apparition des bandes de cisaillement avec une largeur déterminée, ainsi que la réponse post-pic. Une seconde étape renvoie à l'échelle physique de ces bandes de localisation, de l'ordre de la dizaine de microns pour les roches considérées (DESBOIS et al., 2017). Cette échelle est incompatible avec les capacités de calcul actuelles. C'est pourquoi on cherchera à déterminer des invariants de la fissuration quelle que soit l'échelle considérée (extension des fissures, énergie dissipée ...), dans l'esprit de ce qui a été réalisé dans (BOURDIN, FRANCFORST & MARIGO, 2008) pour certains milieux fragiles et (LORENTZ, 2017) pour le béton. L'objectif serait alors de modéliser l'ouvrage avec une échelle de localisation non représentative de la réalité physique tout en préservant certaines propriétés macroscopiques telles que l'extension des fissures, leur trajet et leur effet sur la réponse mécanique de l'ouvrage.

Introduire des termes en gradient de la déformation volumique s'accompagne de conditions aux limites supplémentaires. Usuellement, on choisit des conditions aux limites naturelles, ce qui revient à ne rien imposer explicitement pour ces termes supplémentaires. Mais ce choix de conditions aux limites a un impact, qu'on espère restreint à une couche limite. Il s'agit donc de quantifier cet impact et de s'assurer que la couche limite en question est bien négligeable (c'est à dire sans effet notable sur les invariants évoqués précédemment). Le choix de ces conditions aux limites supplémentaires pose aussi problème dans le cas d'une interface entre un matériau de second gradient et un matériau classique (interface roche/béton dans un calcul d'excavation par exemple).

Plan du mémoire

Le chapitre 1 présente une revue bibliographique structurée en trois grandes parties. Dans un premier temps, il s'agira de présenter brièvement les principales caractéristiques du comportement de l'argilite, et plus généralement des géomatériaux,

afin de mettre en évidence la nécessité d'introduire une longueur interne dans la modélisation. Dans un deuxième temps, plusieurs méthodes de régularisation largement utilisées dans la littérature seront présentées et comparées. Dans un troisième temps, nous nous intéresserons plus en détail aux modèles de second gradient et présenterons quelques applications de ces modèles à la modélisation du comportement de structures.

Le chapitre 2 est composé de deux parties bien distinctes. La première partie présente le modèle de second gradient de dilatation tel que développé dans (FERNANDES, 2009) ainsi que la formulation numérique historique de ce modèle. La seconde partie s'appuie sur des simulations numériques d'essais biaxiaux afin de mettre en évidence les limites de la formulation numérique historique du modèle de second gradient de dilatation et propose une nouvelle formulation numérique plus adaptée à la simulation du comportement des géomatériaux.

Le chapitre 3 vise à mieux comprendre le rôle de la longueur interne dans le modèle de second gradient de dilatation. Dans un premier temps, nous nous appuierons sur une solution analytique d'un problème simplifié afin d'expliciter la relation entre largeur de bande de localisation et paramètres matériaux pour la loi de comportement utilisée. Une fois cette relation mieux connue, nous montrerons qu'il est possible de l'utiliser afin de faciliter l'identification des paramètres matériaux et nous mettrons en évidence l'existence d'invariants quelle que soit l'échelle de la bande de localisation considérée. Nous montrerons comment ces invariants peuvent être utilisés pour s'affranchir de l'échelle physique de la localisation. Dans un second temps, nous montrerons comment ces résultats analytiques peuvent être étendus aux essais biaxiaux numériques et faciliter l'identification des paramètres matériaux.

Dans le chapitre 4, nous reviendrons sur le problème analytique précédent. Nous utiliserons ce problème simplifié pour mettre en évidence l'influence des conditions aux limites et d'interface d'ordre supérieur propres au modèle de second gradient de dilatation sur la réponse d'une structure. Nous montrerons quelles conditions aux limites et d'interface nous semblent à privilégier, sur la base de considérations physiques.

Chapitre 1

Etude bibliographique

Table des matières

1.1	Le phénomène de localisation de la déformation	11
1.1.1	Mise en évidence expérimentale pour les géomatériaux . .	11
1.1.2	Approche théorique	13
1.1.3	Nécessité d'introduire une longueur interne	15
1.2	Les méthodes de régularisation	18
1.2.1	Formulations à variables régularisées	18
1.2.2	Milieux enrichis par la microstructure	22
1.3	Les milieux continus de second gradient	27
1.3.1	Formulation continue des modèles de second gradient . . .	27
1.3.2	Formulation numérique des modèles de second gradient . .	31
1.3.3	Exemples d'application	32

1.1 Le phénomène de localisation de la déformation

1.1.1 Mise en évidence expérimentale pour les géomatériaux

Le comportement mécanique des roches est communément caractérisé par deux types de réponses :

- Le comportement dit « instantané », étudié par des essais œdométriques, de compression triaxiale ou biaxiale, d'extension triaxiale ou simple, essais brésiliens, etc. – qui permettent d'identifier la réponse d'un matériau à une sollicitation « rapide » et supposée indépendante du temps.
- Le comportement dit « différé », étudié par des essais de fluage, de relaxation, ou encore des essais de sensibilité à la vitesse de chargement, qui permettent

de caractériser la réponse d'un matériau à une sollicitation plus « lente », à des échelles de temps qui peuvent avoir une incidence sur les propriétés du matériau en question.

La rupture des géomatériaux est généralement associée à un champ de déformation qui se localise dans une ou plusieurs zones de fortes déformations. Ce phénomène, appelé localisation de la déformation, se traduit par l'apparition de bandes de localisation et de fissures au sein de l'échantillon et conduit à la diminution de la résistance du matériau. Dans le cas d'un essai de compression triaxiale, la réponse de l'échantillon (force-déplacement ou contrainte-déformation) en régime fragile laisse apparaître sommairement quatre phases (PATERSON & WONG, 2005) :

- Pour de faibles déformations, cette réponse est élastique ; une déformation croissante engendre une augmentation réversible (linéaire ou non) de contrainte au sein de l'échantillon. La limite supérieure de cette première phase constitue la limite élastique du matériau ; les déformations volumiques sont contractantes.
- La contrainte continue ensuite d'augmenter jusqu'à un maximum qui constitue la « résistance maximale » du matériau. Cette phase est généralement irréversible. Une transition s'opère dans le comportement volumique qui devient progressivement dilatant (nucléation et propagation de fissures, apparition de bandes de localisation au sein de l'échantillon).
- Toute augmentation de déformation au-delà de ce maximum engendre une diminution de contrainte liée au développement instable de discontinuités au sein de l'échantillon. Le comportement volumique reste dilatant.
- Pour de « grandes » déformations, le matériau atteint un état résiduel dans lequel toute déformation se fait à volume quasi-constant. La contrainte au sein de l'échantillon n'évolue quasiment plus.

Au delà de la réponse globale de l'échantillon, on constate l'apparition de bandes de localisation qui influencent fortement son comportement. Il est nécessaire de pouvoir caractériser précisément la manière dont se développent ces bandes de localisation afin de mettre ensuite au point des modèles numériques robustes et permettant une prise en compte explicite de ces bandes. On cherche à déterminer l'instant auquel ces bandes de localisation apparaissent, leur nombre, leur orientation, leur épaisseur ... etc.

Dans le cas de l'argilite du Callovo-Oxfordien, ces observations expérimentales à l'échelle de la microstructure peuvent par exemple se faire par corrélation d'images numériques appliquée à des photographies prises en cours de chargement mécanique, puis complétées par des analyses par microscope électronique à balayage dans les zones d'intérêt (DESBOIS et al., 2017). Un exemple de l'application d'une telle technique à un échantillon soumis à des essais de compression biaxiale (déformation plane) est visible en figure 1.2. Dans le régime adoucissant, une bande de localisation

FIGURE 1.1 – Contrainte déviatorique en fonction de la déformation axiale. Essai triaxial pour un échantillon d'argilite. Source : (DESBOIS et al., 2017)

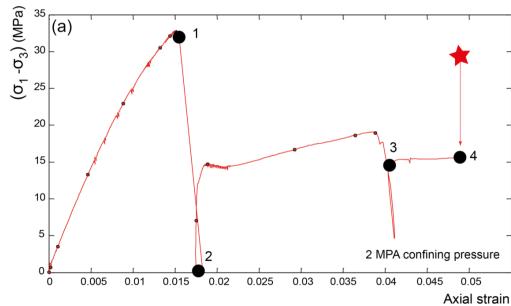
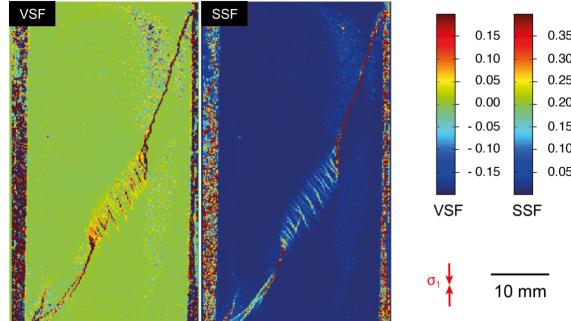


FIGURE 1.2 – Incréments de déformation volumique (VSF) et de cisaillement (SSF) entre les points 1 et 2 (figure ci-contre). Source : (DESBOIS et al., 2017)



dilatante apparaît, avec une structure plus ou moins complexe (réseau de bandes conjuguées dans la zone centrale).

Parmi les grandeurs d'intérêt évoquées précédemment (nombre de bandes, orientation ... etc), l'épaisseur de la bande de localisation joue un rôle important. Plusieurs études concernant cette épaisseur montrent qu'elle dépend des propriétés de la microstructure. Par exemple, dans le cas des matériaux granulaires, la largeur de cette bande de localisation oscille entre 10 et 30 fois le diamètres des grains (VARDOULAKIS, 1980) (ROSCOE, 1970). Cette épaisseur est liée à des longueurs caractéristiques du matériau et conditionne par ailleurs la réponse de l'échantillon (BÉSUELLE & RUDNICKI, 2004).

1.1.2 Approche théorique

Il est possible d'étudier l'apparition de ces bandes de localisation dans le cadre de la mécanique des milieux continus. On cherche ici à mettre en évidence les conditions qui permettent leur apparition dans un milieu infini. Ce critère a été établi par (RICE, 1976) et (RUDNICKI & RICE, 1975).

On reprend ici les principales idées évoquées dans (RICE, 1976). On cherche à savoir sous quelles conditions une bifurcation vers une solution prenant la forme d'une bande de localisation peut exister dans un milieu infini initialement homogène et soumis à un chargement.

On note $\underline{\sigma}_0$ la contrainte et \underline{u}_0 le déplacement à l'infini. Supposons l'existence d'une bande de cisaillement de normale \underline{n} . On note $\underline{\sigma}_1$ et \underline{u}_1 les champs de contraintes et de déplacement à l'intérieur de cette bande de localisation. La condition cinématique à l'interface s'écrit alors, en supposant que la bande de localisation conserve

CHAPITRE 1. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

une orientation fixe :

$$\underline{\nabla \dot{u}}_1 = \underline{\nabla \dot{u}}_0 + \underline{g} \otimes \underline{n} \quad (1.1)$$

Avec \underline{g} un vecteur quelconque. La condition statique d'équilibre à l'interface de la bande de localisation s'écrit quant à elle :

$$\underline{\dot{\sigma}}_1 \cdot \underline{n} = \underline{\dot{\sigma}}_0 \cdot \underline{n} \quad (1.2)$$

On appelle \mathbb{H} le tenseur du quatrième ordre de la loi constitutive en vitesse, qui peut dépendre de la contrainte, de l'histoire du chargement, ou encore de la direction de déformation. Pour simplifier les développements, nous considérons une loi élasto-plastique à une surface d'écoulement. Si le comportement est identique dans la bande de localisation et à l'extérieur de cette bande de localisation (même tenseur \mathbb{H} de part et d'autre de l'interface), on a alors les relations suivantes entre les taux de contraintes et de gradient de déplacement :

$$\underline{\dot{\sigma}}_0 = \mathbb{H} : \underline{\nabla \dot{u}}_0 \quad (1.3)$$

$$\underline{\dot{\sigma}}_1 = \mathbb{H} : \underline{\nabla \dot{u}}_1 \quad (1.4)$$

Ce système d'équations (condition statique, condition cinématique et lois de comportements) conduit à la condition suivante :

$$(\underline{n} \cdot \mathbb{H} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{g} = 0 \quad (1.5)$$

Cette dernière équation fait intervenir le tenseur $\underline{n} \cdot \mathbb{H} \cdot \underline{n}$, parfois appelé tenseur acoustique, et admet une solution \underline{g} non nulle à la condition suivante :

$$\det(\underline{n} \cdot \mathbb{H} \cdot \underline{n}) = 0 \quad (1.6)$$

Dans le cas où la bande de localisation est en charge plastique et le reste du milieu en décharge élastique, on peut montrer que ce critère s'écrit :

$$\det(\underline{n} \cdot \mathbb{H} \cdot \underline{n}) < 0 \quad (1.7)$$

Ce critère de bifurcation, qui correspond à la perte d'ellipticité des équations, est appelé critère de Rice : c'est la condition d'apparition d'une bande de localisation dans un milieu infini. Cette condition peut être particularisée pour chaque comportement (voir par exemple (BÉSUELLE & RUDNICKI, 2004) pour une application aux géomatériaux). Il convient de remarquer que ce critère est obtenu dans le cas d'un milieu infini. Dans le cas d'un problème fini soumis à des conditions aux limites, ce

critère devient un critère local qu'il est nécessaire de vérifier pour qu'une solution localisée puisse apparaître. Pour autant, ce n'est qu'une condition nécessaire.

Par ailleurs, dans le cadre d'une loi de comportement associée en petites déformations, ce critère ne peut pas être atteint pour un écrouissage positif. La bifurcation n'est donc possible que pour un comportement adoucissant ou plastique parfait. Pour une loi de comportement non associée, ce critère peut être atteint y compris pour un écrouissage positif.

1.1.3 Nécessité d'introduire une longueur interne

Ce phénomène de bifurcation vers une solution localisée est en accord avec les observations expérimentales. Il est donc nécessaire que les modèles numériques utilisés pour modéliser des essais en laboratoire ou des structures plus complexes puissent rendre compte correctement de ce phénomène. Expérimentalement, on constate que la déformation se concentre dans de fines bandes de localisation, dont la largeur est du même ordre de grandeur que l'échelle de la microstructure¹. Or, la séparation de ces deux échelles, macroscopique et microscopique, est une hypothèse fondamentale pour l'application des techniques usuelles d'homogénéisation. Les lois de comportement classiques, dérivées de ces techniques d'homogénéisation, ne sont donc plus représentatives.

En présence d'une loi de comportement adoucissante, le problème mathématique devient mal posé. Afin d'illustrer ce problème dans le cas d'un exemple simple, on peut considérer une poutre de longueur L soumise à un chargement monotone et dont le comportement est décrit par une loi bilinéaire élastoplastique adoucissante (voir figure 1.3). La résolution détaillée de ce problème est disponible dans (FOREST & LORENTZ, 2004), nous en reprenons ici les conclusions.

Lorsque le chargement critique est atteint (voir figures 1.3 et 1.4), la contrainte ne peut plus augmenter. En chaque point matériel, deux trajets de chargement sont possibles : décharge élastique ou charge plastique adoucissante. On suppose ici qu'il y a endommagement d'une zone de longueur l . On peut alors démontrer que la réponse globale de la structure dépend de cette longueur l (voir figure 1.4). Surtout, cette longueur l reste indéterminée : il existe une infinité de solutions indépendantes, le problème est mal posé.

Plus généralement, dans le cadre de simulations éléments finis, on constate que

1. Si les longueurs caractéristiques d'un sable sont relativement aisées à établir, elles peuvent être multiples dans d'autres matériaux comme par exemple les roches argileuses pour lesquelles on peut distinguer : échelle des plaquettes argileuses et des amas, échelle des agrégats d'argile ou échelle des inclusions minérales etc ...

FIGURE 1.3 – Loi de comportement élastoplastique bilinéaire adoucissante

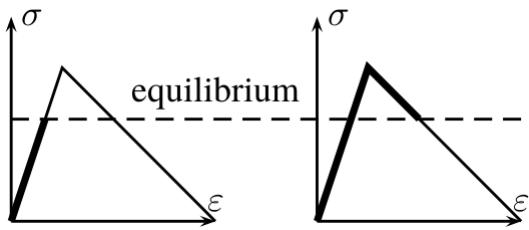


FIGURE 1.4 – Réponse globale de la poutre soumise à un chargement monotone

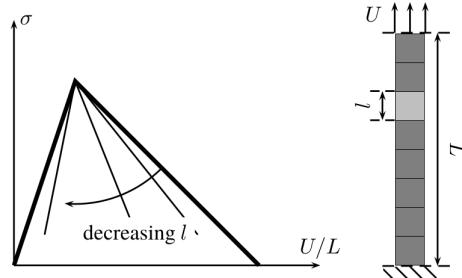
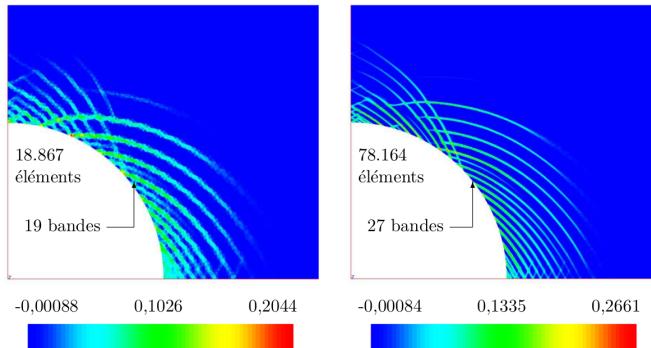


FIGURE 1.5 – Variation de la porosité aux points de Gauss pour une loi de comportement hydromécanique classique. Deux discrétisations conduisent à deux résultats différents



Variation de la porosité après 15 mois de consolidation

l'utilisation de lois de comportements usuelles conduit à la localisation de la déformation dans une bande dont la largeur correspond à celle d'un élément (PIJAUDIER-CABOT & BAŽANT, 1987). Cette largeur de bande tend donc vers 0 lorsqu'on raffine le maillage et conduit à une réponse globale de la structure dépendant du maillage. Cette dépendance au maillage se retrouve aussi bien dans le cadre de simulations numériques de structures simples (comme la poutre 1D précédemment évoquée) que de structures plus complexes. Par exemple, (FERNANDES, 2009) illustre cette dépendance au maillage dans le cas de simulations d'excavation de galerie (voir figure 1.5). Dans le régime post-localisation, le nombre de bandes de localisation ainsi que la réponse de la structure dépendent du maillage choisi.

Au vu de ces exemples, il est donc nécessaire d'enrichir les modèles de comportement classiques de mécanique ce qui permettra de rétablir une objectivité de la modélisation vis-à-vis du maillage et de correctement modéliser le phénomène de

CHAPITRE 1. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

localisation de la déformation. Dans ce but, différentes méthodes de régularisation ont été proposées et conduisent d'une façon ou d'une autre à l'introduction d'une longueur interne dans le modèle.

1.2 Les méthodes de régularisation

Dans la partie précédente, nous avons montré qu'il était nécessaire d'introduire une longueur interne dans la modélisation. Cette longueur interne doit permettre de rétablir le caractère bien posé du problème et de caractériser l'épaisseur de la bande de localisation à l'échelle macroscopique. Plusieurs méthodes de régularisation ont été proposées et sont disponibles dans la littérature.

Dans cette partie, nous présenterons quelques-unes de ces méthodes de régularisation, que nous classifierons en deux grandes catégories :

- Les formulations à variables régularisées. Dans ces formulations, il s'agit de décrire le comportement d'un point matériel en prenant en compte un effet de voisinage spatial non local pour l'une des grandeurs intervenant dans la description du comportement, par exemple la déformation. Cet effet de voisinage peut être pris en compte par une méthode basée sur une approche non locale intégrale (PIJAUDIER-CABOT & BAŽANT, 1987), sur une approche à gradient implicite (PEERLINGS et al., 1996) ou sur une approche à gradient explicite (PEERLINGS et al., 2001).
- Les milieux enrichis à microstructure. Il s'agit d'étendre la théorie des milieux continus : dans ce type de modèle, la microstructure est dotée d'une cinématique. On parle parfois de milieux d'ordre supérieur. Ce type de modèle a d'abord été utilisé par Cosserat (COSSERAT & COSSERAT, 1909) au début du XXème siècle pour les milieux micro-polaires, puis par (MINDLIN, 1963) et (TOUPIN, 1962) dans les années 60. (GERMAIN, 1973) propose un cadre théorique général pour formuler ce type de modèle.

Une partie distincte reviendra sur les modèles de second gradient, que l'on peut voir comme un cas particulier de milieux enrichis à microstructure. Ce type de modèle peut être vu comme une simplification du cadre général proposé par Germain, auquel des conditions cinématiques supplémentaires sont imposées : on suppose égalité de la microdéformation et de la déformation macroscopique (voir par exemple (CHAMBON, CAILLERIE & MATSUCHIMA, 2001)). Nous insisterons particulièrement sur ce type de milieux : le modèle de second gradient de dilatation (FERNANDES, 2009) se classe dans cette catégorie de modèle.

1.2.1 Formulations à variables régularisées

Pour ce type de modèle, on introduit une longueur caractéristique en dessous de laquelle l'interaction entre un point matériel et son voisinage est prise en compte. On définit alors une variable non locale à partir d'une variable locale. Le choix de cette variable locale peut se porter par exemple sur la force motrice de l'endommagement (PIJAUDIER-CABOT & BAŽANT, 1987) ou sur par exemple la déformation

équivalente (PEERLINGGS et al., 2001). Dans la suite, on illustrera les différentes approches possibles en se basant sur une variable locale quelconque appelée e , \bar{e} étant son pendant non local.

Plusieurs opérateurs peuvent être utilisés pour cette définition de la variable non locale : soit par l'utilisation d'une intégrale, soit par l'utilisation de gradients de la variable locale. On note enfin que ce type d'approche conduit à modifier la loi constitutive qui contient alors des termes intégraux ou de gradient.

1.2.1.1 Approche non locale intégrale

Cette approche a dans un premier temps été développée par dans le cadre de l'élasticité (ERINGEN & EDELEN, 1972), puis par (PIJAUDIER-CABOT & BAŽANT, 1987) dans le cadre de l'endommagement. L'interaction entre un point matériel et son voisinage est ici prise en compte grâce au produit de convolution entre la variable locale e et une fonction poids, que l'on appellera ici w :

$$\bar{e}(\underline{x}) = \frac{\int_{\Omega} w(\underline{x} - \underline{y}) e(\underline{y}) d\Omega(\underline{y})}{\int_{\Omega} w(\underline{x} - \underline{y}) d\Omega(\underline{y})} \quad (1.8)$$

Le choix de la fonction poids w se porte le plus souvent sur une fonction de type Gausienne, telle que proposée par (ERINGEN & EDELEN, 1972). Cette fonction poids fait intervenir un paramètre de longueur interne l_c qui représente la distance d'interaction entre deux points matériels :

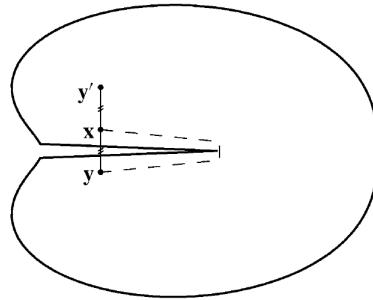
$$w(\underline{x} - \underline{y}) = \exp\left(-\frac{(\underline{x} - \underline{y})^2}{2l_c^2}\right) \quad (1.9)$$

Cette méthode a par exemple été appliquée aux géomatériaux et à un comportement de type Drucker-Prager par (BRINKGREVE & J., 1996).

Mais ce type de modèle pose un certain nombre de difficultés d'ordre numérique. Comme l'illustre (PEERLINGGS et al., 2002) (voir figure 1.6), l'interaction entre un point matériel \underline{x} et son voisinage pose problème lorsque le point d'intérêt se situe au bord d'une fissure : l'interaction est la même avec un point \underline{y}' situé du même côté des lèvres de la fissure qu'avec un point \underline{y} situé de l'autre côté. Afin de limiter ces interactions non physiques au travers d'éventuelles fissures, (GIUSEPPE et al., 2018) considère que l'endommagement (et donc la présence d'une fissure) induit une courbure de l'espace de Riemann dans lequel les distances entre deux points d'interaction sont calculées.

De la même manière, un point situé au bord du domaine d'étude verrait sa zone d'interaction réduite par rapport à un point situé au coeur du domaine d'étude, ce qui conduirait à perturber la valeur de la variable non locale. La fonction poids

FIGURE 1.6 – Interaction entre points matériels situés de part et d'autre d'une fissure.
Source : (PEERLINGS et al., 2002)



doit alors être modifiée pour tenir compte de la présence des conditions aux limites (KRAYANI, PIJAUDIER-CABOT & DUFOUR, 2009).

Par ailleurs, l'interaction entre un point matériel et ses voisins peut conduire à un accroissement significatif de la largeur de bande de la matrice tangente, et donc du temps de calcul. De plus, le calcul numérique de l'expression 1.8 nécessite de connaître des informations aux points de Gauss d'éléments voisins : l'intégration de la loi de comportement dans chaque élément n'est plus indépendante des éléments voisins, ce qui vient impacter fortement l'architecture du code éléments finis.

1.2.1.2 Modèles à gradient explicite et implicite

Ces modèles ont été initialement développés par (AIFANTIS, 1984), qui propose d'introduire le Laplacien de la variable d'écrouissage dans la fonction seuil en théorie de la plasticité. Par la suite, deux méthodes seront proposées pour introduire la variable non locale dans les équations de comportement (loi d'évolution des variables d'état ou directement dans l'expression de la fonction seuil) : de manière explicite ou de manière implicite. Dans les deux cas, les équations du comportement ainsi modifiées introduisent une longueur interne dans la modélisation.

Par exemple, dans le cas de la variable e utilisée jusqu'ici, les relations suivantes sont imposées entre la variable locale e et la variable non locale \bar{e} :

$$\bar{e} = e + c\nabla^2 e \text{ (Gradient explicite, tronqué au second ordre)} \quad (1.10)$$

$$\bar{e} - c\nabla^2 \bar{e} = e \text{ (Gradient implicite)} \quad (1.11)$$

CHAPITRE 1. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Dans les deux cas, le paramètre c , homogène à une longueur au carré, permet de fixer la longueur interne.

(PEERLINGS et al., 1996) montre que l'approche à gradient (explicite ou implicite) découle en réalité de l'approche non locale intégrale présentée précédemment. En considérant une fonction poids w isotrope, ces travaux montrent que l'approche non locale intégrale présentée précédemment revient à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\bar{e} = e + c\nabla^2e + d\nabla^4e + \dots \quad (1.12)$$

Les paramètres c, d, \dots se déduisent alors de la fonction poids w et sont homogènes à des puissances carrées de longueur : ils permettent de caractériser la longueur interne. En appliquant l'opérateur ∇^2 à l'équation 1.12, on peut retrouver la relation implicite 1.11. (PEERLINGS et al., 2001) démontre de manière exacte cette équivalence entre l'approche non locale intégrale et les modèles à gradient implicite en choisissant comme fonction poids w une fonction de Green.

Cependant, l'implémentation des modèles à gradient explicite pose quelques problèmes d'ordre numérique. Tout d'abord, la troncature de l'expression 1.12 est inévitable pour toute implémentation numérique. Or, (PEERLINGS et al., 2001) montre que le caractère régularisant de la formulation explicite n'est vérifié que si l'ensemble de l'expression 1.12 est utilisé. Toute troncature rend donc la formulation faiblement régularisante. Le choix de l'ordre de la troncature lui-même peut aussi poser problème : l'ajout d'un terme du quatrième ordre à l'expression 1.10 peut par exemple modifier la réponse de la structure (ASKES, PAMIN & BORST, 2000).

Bien qu'initialement développée dans le cadre de la rupture fragile (PEERLINGS et al., 1996), ce type de modèle à gradient a ensuite aussi été appliqué aux géomatériaux. Par exemple, (ZHANG & SCHREFLER, 2000) applique un modèle à gradient implicite au comportement de milieux granulaires partiellement saturés.

Une troisième approche consiste à introduire directement dans l'énergie libre un terme de gradient. On parle de modèle GEE (Gradient Enhanced Energy) (voir par exemple (LORENTZ, 1999) ou encore (ZHANG, LORENTZ & BESSON, 2018)). L'énergie libre d'Helmotz s'écrit alors :

$$F(\underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}^p, \underline{\alpha}, e) = \int_{\Omega} \left(\Phi(\underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}^p, \underline{\alpha}) + \frac{1}{2} c \underline{\nabla e} \cdot \underline{\nabla e} \right) d\Omega \quad (1.13)$$

Ici, Φ représente l'énergie libre volumique usuelle, elle dépend des déformations $\underline{\varepsilon}$, des déformations plastiques $\underline{\varepsilon}^p$ ainsi que des variables internes $\underline{\alpha}$. e peut être une variable d'état (variable interne ou déformation). Le terme en $\underline{\nabla e}^2$ permet alors de contrôler la localisation.

1.2.2 Milieux enrichis par la microstructure

Ces modèles étendent la théorie des milieux continus et introduisent une cinématique de la microstructure des matériaux. On parle parfois de milieux d'ordre supérieur.

De manière générale, il s'agit d'enrichir la cinématique du milieu par des déformations microscopiques. Plusieurs choix concernant ces déformations microscopiques peuvent être faits. Par exemple, les frères Cosserat (COSSERAT & COSSERAT, 1909) choisissent d'introduire des rotations de la microstructure comme cinématique enrichie. Ces travaux seront généralisés dans un premier temps par (MINDLIN, 1963) et (TOUPIN, 1962). (GERMAIN, 1973) proposera ensuite un cadre théorique général avec une approche utilisant le principe des puissances virtuelles pour ce type de milieux enrichis.

Ces modèles n'ont pas été initialement pensés comme une méthode de régularisation pour les problèmes de localisation. Pour autant, l'introduction de degrés de libertés supplémentaires liés à la microstructure conduit à l'utilisation de gradients d'ordre supérieur et permet effectivement d'introduire une longueur interne dans la modélisation. Par exemple, les milieux de Cosserat sont adaptés à la modélisation des problèmes de bandes de cisaillement pour les milieux granulaires (MÜHLHAUS & VARDOLAKIS, 1987).

Ce type de modèle diffère des formulations à variables régularisées présentées dans la partie précédente 1.2.1. Là où les formulations à variables régularisées viennent modifier et enrichir de termes de gradient les lois de comportement, les milieux à microstructure viennent modifier les équations d'équilibre du problème. Des contraintes d'ordre supérieur, duales des déformations de la microstructure, sont alors introduites. Il faut donc être prudent dans l'interprétation physique des contraintes et des efforts intérieurs.

Dans cette partie, on présente dans un premier temps le cadre général de la théorie de Germain, puis dans un second temps on présente sa simplification dans le cas des milieux de Cosserat et des milieux microdilatants. On se limitera au cadre des petites déformations.

1.2.2.1 Théorie de Germain

(GERMAIN, 1973) propose d'enrichir la cinématique du milieu en considérant des degrés de libertés supplémentaires liés à la microstructure.

La cinématique macroscopique est décrite par un champ de déplacement \underline{u} . En plus de ce champ de déplacement, on considère à l'échelle microscopique un champ $\underline{\underline{f}}$, parfois appelé déformation microstructurale. C'est un tenseur d'ordre 2, non symétrique, qui vise à décrire à la fois les déformations et les rotations de la microstructure. Ce champ $\underline{\underline{f}}$ se décompose en une partie symétrique de microdéformation

$\underline{\underline{d}}$ et une partie anti-symétrique de microrotation $\underline{\underline{r}}$:

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{f}} + \underline{\underline{f}}^T) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{r}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{f}} - \underline{\underline{f}}^T) \quad (1.14)$$

Nous insistons sur la différence fondamentale entre ces champs microscopiques et leurs équivalents macroscopiques. Dans le cadre de cette théorie, la déformation microstructurale $\underline{\underline{f}}$ est totalement indépendante du champ de déplacement macroscopique : c'est une variable du problème, au même titre que ce champ de déplacement macroscopique. A l'inverse, les champs de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et de rotation $\underline{\underline{R}}$ macroscopiques sont eux obtenus par dérivation du champ de déplacement macroscopique :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla u}} + \underline{\underline{\nabla u}}^T) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{R}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla u}} - \underline{\underline{\nabla u}}^T) \quad (1.15)$$

En négligeant les efforts extérieurs de volume, (GERMAIN, 1973) montre que l'application du principe des puissances virtuelles conduit à la formulation variationnelle suivante, pour tout champ cinématiquement admissible $(\underline{u}^*, \underline{\underline{f}}^*)$:

$$\int_{\Omega} \left(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla u}}^* + \underline{\underline{\tau}} : (\underline{\underline{f}}^* - \underline{\underline{\nabla u}}^*) + \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\nabla f}}^* \right) dV = \int_{\partial\Omega} \left(t \cdot \underline{u}^* + \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{f}}^* \right) dS \quad (1.16)$$

L'équation 1.16 fait apparaître des termes de contraintes d'ordre supérieur. La microcontrainte $\underline{\tau}$ est duale de la déformation relative $\underline{\underline{f}}^* - \underline{\underline{\nabla u}}^*$, la double contrainte $\underline{\underline{\Sigma}}$ duale du gradient de la déformation microstructurale. La double force $\underline{\underline{T}}$ conduit à une condition aux limites d'ordre supérieur.

Cette formulation variationnelle (forme faible) conduit aux équations d'équilibre suivantes (forme forte) :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\tau}}) = 0 \\ \operatorname{div}(\underline{\underline{\Sigma}}) - \underline{\underline{\tau}} = 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

Les conditions aux limites s'écrivent quant à elles (avec \underline{n} la normale sortante de la surface $\partial\Omega$) :

$$\begin{cases} \underline{t} = (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\tau}}) \cdot \underline{n} \\ \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n} \end{cases} \quad (1.18)$$

Ces équations d'équilibre doivent être complétées par des équations de comportement, qui relient respectivement les variables statiques $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{\tau}}$ et $\underline{\underline{\Sigma}}$ à l'historique des variables cinématiques \underline{u} , $\underline{\underline{f}} - \underline{\underline{\nabla u}}$ et $\underline{\underline{f}}$.

Par ailleurs, en 3D, ce type de modèle (parfois appelé modèle micromorphe) conduit à l'introduction de 9 degrés de libertés supplémentaires en chaque point

CHAPITRE 1. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Nom du milieu	Nombre de ddls supplémentaires	décomposition des micro-transformations f_{ij}		
		micro-rotations r_{ij}	micro-deformations pure d_{ij}	
			hydrostatique χ	déviatorique d_{ij}^{dev}
Microdilatation	1	non	oui	non
Micropolaire	3	oui	non	non
Microstretch	4	oui	oui	non
Microstrain	6	non	oui	oui
Micromorphique	9	oui	oui	oui

FIGURE 1.7 – Classification des milieux à microstructures en fonction des degrés de libertés supplémentaires considérés. Sources : (FOREST & SIEVERT, 2006) et (FERNANDES, 2009)

matériel, soit 12 degrés de libertés au total (les 9 composantes du tenseur $\underline{\underline{f}}$ et les 3 composantes du vecteur \underline{u}). Cela conduit à une augmentation significative du temps de calcul dans le cadre de modélisations éléments finis. Des simplifications de la cinématique de la microstructure peuvent alors être envisagées. Il s'agit alors de ne considérer que certaines composantes du tenseur $\underline{\underline{f}}$. Les composantes retenues doivent alors être pertinentes au regard du comportement étudié. Par exemple, si la dilatation volumique joue un rôle important dans le comportement du matériau étudié, il est envisageable de ne considérer que la partie hydrostatique du tenseur $\underline{\underline{f}}$.

(FOREST & SIEVERT, 2006) proposent une classification de ces différents modèles (voir figure 1.7), en fonction des degrés de libertés de la microstructure, du milieu micromorphique (9 degrés de liberté de microstructure) au milieu microdilatant (1 degré de liberté de microstructure).

Il s'agit de simplifier la formulation 1.16 en ne considérant que certains degrés de libertés supplémentaires. Par exemple, on peut ne considérer que la partie symétrique $\underline{\underline{d}}$ (introduite à l'équation 1.14) du tenseur $\underline{\underline{f}}$ et obtenir un modèle dit "microstrain" (voir par exemple (FOREST, 2009)). A l'inverse on peut choisir de ne considérer que les microrotations (la partie antisymétrique $\underline{\underline{r}}$ du tenseur $\underline{\underline{f}}$ introduite en équation 1.14). On obtient alors les milieux de Cosserat (ou milieux micropolaires) sur lesquels nous reviendrons plus longuement dans la partie suivante 1.2.2.2.

Par ailleurs, le tenseur $\underline{\underline{d}}$ peut être décomposé en une partie déviatorique $\underline{\underline{d}}^{dev}$ et une partie volumique θ :

$$\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{d}}^{dev} + \theta \underline{\underline{1}} \quad (1.19)$$

En ne considérant par exemple que la partie volumique θ , on obtient un modèle de milieu microdilatant sur lequel nous reviendrons en partie 1.2.2.3.

1.2.2.2 Les milieux de Cosserat

(COSSERAT & COSSERAT, 1909) propose une théorie de milieux continus élastiques où, en chaque point matériel, la cinématique est enrichie de degrés de libertés supplémentaires correspondant aux microrotations de la microstructure. (GERMAIN, 1973) et (MÜHLHAUS & VARDOLAKIS, 1987) montrent que ces milieux de Cosserat sont un cas particulier du cadre général des milieux à microstructure pour lesquels on suppose que le tenseur de microdéformation pure $\underline{\underline{d}}$ défini en équation 1.14 est nul. Seules les composantes antisymétriques de microrotations $\underline{\underline{r}}$ sont non nulles et on a : $\underline{\underline{f}} = \underline{\underline{r}}$.

Pour ce type de milieux, le principe des puissances virtuelles s'écrit alors, pour tout champ cinématiquement admissible $(\underline{\underline{u}}^*, \underline{\underline{r}}^*)$:

$$\int_{\Omega} \left(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla u}}^* + \underline{\underline{\tau}} : (\underline{\underline{r}}^* - \underline{\underline{\nabla u}}^*) + \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\nabla r}}^* \right) dV = \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{t}} \cdot \underline{\underline{u}}^* + \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{r}}^*) dS \quad (1.20)$$

Cette expression peut se réécrire sous la forme suivante, pour tout champ cinématiquement admissible $(\underline{\underline{u}}^*, \underline{\underline{r}}^*)$:

$$\int_{\Omega} \left((\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\tau}}) : \underline{\underline{\nabla u}}^* + \underline{\underline{\tau}} : (\underline{\underline{r}}^* - \underline{\underline{R}}^*) + \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\nabla r}}^* \right) dV = \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{t}} \cdot \underline{\underline{u}}^* + \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{r}}^*) dS \quad (1.21)$$

Dans le cadre d'un comportement élastoplastique (MÜHLHAUS & VARDOLAKIS, 1987) montre que ce type de milieux permet effectivement d'introduire une longueur interne dans la modélisation et d'obtenir des solutions régularisées. (DE BORST, 1991) étend ces résultats à des simulations éléments finis d'essais biaxiaux et montre que ces milieux peuvent facilement être implémentés numériquement en conservant un formalisme proche de celui des milieux continus classiques.

Cependant, (SLUYS, 1994) montre que, dans le cadre d'un essai biaxial numérique, la microrotation doit être prépondérante dans la déformation plastique pour que la solution obtenue soit effectivement régularisée. Les milieux de Cosserat sont donc plus adaptés pour la modélisation des milieux granulaires que pour la modélisation des roches.

Par ailleurs, (CALVETTI, COMBE & LANIER, 1997) montre dans le cadre d'essais biaxiaux expérimentaux que, pour certains milieux granulaires, la microrotation est en moyenne égale à la rotation macroscopique du milieu : on a $\underline{r} = \underline{\underline{R}}$. Ce résultat peut alors conduire à une simplification de l'expression 1.21 de manière à obtenir un modèle de Cosserat de second gradient.

1.2.2.3 Les milieux microdilatants

Les milieux microdilatants constituent une autre variation des milieux à microstructure. Contrairement aux milieux de Cosserat, où la microrotation joue un rôle prépondérant, c'est la microdilatation qui est ici prise en compte comme degré de liberté supplémentaire lié à la microstructure.

En reprenant le formalisme des milieux à microstructure exposé en équation 1.16, le principe des puissances virtuelles pour un milieu microdilatant s'exprime, pour tout champ cinématiquement admissible (\underline{u}^* , $\underline{\theta}^*$) :

$$\int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla u}}^* + \kappa (\varepsilon_V^* - \theta^*) + \underline{S} \cdot \underline{\nabla \theta}^*) \, dV = \int_{\partial\Omega} (\underline{t} \cdot \underline{u}^* + T \theta^*) \, dS \quad (1.22)$$

La cinématique du milieu est enrichie de la variation microvolumique θ (définie à l'équation 1.19), en plus du déplacement \underline{u} . On note $\varepsilon_V = \text{tr}(\varepsilon)$. On introduit alors les contraintes duales à cette cinématique : la contrainte macroscopique classique $\underline{\underline{\sigma}}$, la contrainte microscopique de dilatation κ (duale de la déformation volumique relative $\varepsilon_V - \theta$) et la double contrainte \underline{S} (duale du gradient de la déformation volumique microscopique $\underline{\nabla \theta}$).

(FOREST & SIEVERT, 2006) propose un cadre général pour les milieux microdilatants. Dans ce cadre-là, les relations entre les trois tenseurs des contraintes généralisées et les déformations généralisées duals peuvent être aussi bien élastiques qu'élastoplastiques. En pratique, les relations entre contrainte microscopique et déformation relative d'une part, et double contrainte et gradient de la déformation volumique microscopique d'autre part, sont souvent choisies élastiques linéaires (voir par exemple (COWIN & NUNZIATO, 1983)).

Ce type de milieu a notamment l'avantage d'introduire un nombre très réduit de degrés de libertés supplémentaires (voir figure 1.7 pour une comparaison des différents milieux à microstructure à ce sujet).

1.3 Les milieux continus de second gradient

Cette partie a pour objet de présenter le formalisme des modèles de second gradient tels que développés par (CHAMBON, CAILLERIE & EL HASSAN, 1998) (CHAMBON, CAILLERIE & MATSUCHIMA, 2001). Ces modèles de second gradient peuvent être vus comme une catégorie de modèles à microstructure tels que ceux présentés en partie 1.2.2 pour lesquels des conditions cinématiques internes supplémentaires sont imposées : on suppose que la déformation macroscopique et la microdéformation sont égales.

Les modèles de second gradient permettent d'introduire une longueur interne dans la modélisation et d'obtenir des solutions régularisées. Comme nous le verrons, ils ont été largement utilisés dans la littérature, que ce soit pour la modélisation du comportement des roches ou pour d'autres matériaux (matériaux granulaires, bétons ...).

Dans un premier temps, nous présenterons le formalisme théorique de ces modèles de second gradient. Nous prêterons une attention particulière aux modèles monophasiques qui font l'objet de cette thèse, même si des modèles de second gradient biphasiques seront rapidement évoqués. Dans un second temps, nous nous intéresserons aux formulations numériques développées pour ce type de modèle. Enfin, nous présenterons quelques exemples d'application de ces modèles de second gradient.

1.3.1 Formulation continue des modèles de second gradient

A partir du formalisme développé en partie 1.2.2 pour les milieux à microstructure, nous supposons que la microdéformation est égale au gradient macroscopique :

$$\underline{\underline{f}} = \underline{\underline{\nabla u}} \quad (1.23)$$

En l'absence d'effort volumique, on peut montrer (voir (CHAMBON, CAILLERIE & MATSUCHIMA, 2001)) que le principe des puissances virtuelles peut se mettre sous la forme suivante, pour tout champ cinématiquement admissible u^* :

$$\int_{\Omega} \left(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla u^*}} + \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\nabla^2 u^*}} \right) dV = \int_{\partial\Omega} (\underline{p} \cdot \underline{u}^* + \underline{P} \cdot \underline{D}\underline{u}^*) dS \quad (1.24)$$

Dans cette expression, σ est la contrainte de 1er gradient (la contrainte de Cauchy usuelle), Σ la double contrainte, $\underline{D}\underline{u}^*$ la dérivée normale de u^* (parfois notée $\frac{\partial u}{\partial n}$). Quant aux conditions aux limites \underline{p} et \underline{P} (la double force), elles s'écrivent (avec div_t la divergence surfacique) :

$$\begin{cases} \underline{p} = (\underline{\underline{\sigma}} - \text{div}(\underline{\underline{\Sigma}})) \cdot \underline{n} - \text{div}_t(\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n} - ((\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}) \otimes \underline{n}) \\ \underline{P} = (\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n} \end{cases} \quad (1.25)$$

On constate que l'hypothèse 1.23 conduit à une modification des conditions aux limites des milieux à microstructure. En effet, les quantités \underline{u}^* et $\underline{\nabla u}^*$ ne sont pas indépendantes. La puissance des efforts extérieures fait donc intervenir le déplacement virtuel \underline{u}^* et sa dérivée normale $\underline{D}\underline{u}^* = \underline{\nabla u}^*\cdot\underline{n}$, qui sont bien deux vecteurs indépendants le long de l'interface.

En l'absence d'effort volumique, l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}} - \operatorname{div}(\underline{\underline{\Sigma}})) = 0 \quad (1.26)$$

Ce jeu d'équations doit encore être complété par des relations de comportement reliant les contraintes généralisées et l'historique des déformations généralisées. L'hypothèse de séparer les grandeurs classique des termes d'enrichissement est généralement faite. Ainsi, pour la relation de comportement décrivant l'évolution de la contrainte de 1^{er} gradient $\underline{\underline{\sigma}}$, n'importe quelle loi de comportement usuelle peut théoriquement être utilisée.

Concernant la loi d'évolution de la double contrainte $\underline{\underline{\Sigma}}$, (CHAMBON, CAILLERIE & TAMAGNINI, 2004) propose une théorie élastoplastique de second gradient pour l'analyse de la localisation de la déformation dans les géomatériaux. Cette théorie se base sur une décomposition additive du gradient de la déformation. Cependant, c'est en général un comportement linéaire élastique isotrope qui est retenu pour le comportement de second gradient (voir par exemple (CHAMBON, CAILLERIE & MATSUCHIMA, 2001)) : la loi de comportement de second gradient est découpée de la loi de comportement de premier gradient.

En suivant les travaux de (MINDLIN, 1965) sur la théorie de l'élasticité des milieux de second gradient, on peut montrer que pour les matériaux isotropes 2D, cette loi de comportement élastique s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{111} \\ \Sigma_{112} \\ \Sigma_{121} \\ \Sigma_{122} \\ \Sigma_{211} \\ \Sigma_{212} \\ \Sigma_{221} \\ \Sigma_{222} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12345} & 0 & 0 & a_{23} & 0 & a_{12} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{145} & a_{145} & 0 & a_{25} & 0 & 0 & a_{12} \\ 0 & a_{145} & a_{145} & 0 & a_{25} & 0 & 0 & a_{12} \\ a_{23} & 0 & 0 & a_{34} & 0 & a_{25} & a_{25} & 0 \\ 0 & a_{25} & a_{25} & 0 & a_{34} & 0 & 0 & a_{23} \\ a_{12} & 0 & 0 & a_{25} & 0 & a_{145} & a_{145} & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 & a_{25} & 0 & a_{145} & a_{145} & 0 \\ 0 & a_{12} & a_{12} & 0 & a_{23} & 0 & 0 & a_{12345} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

Les constantes matériau définies dans l'équation 1.27 peuvent s'écrire en fonction

de 5 constantes matériau a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 (homogènes à une force) :

$$\begin{cases} a_{12345} = 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \\ a_{23} = a_2 + 2a_3 \\ a_{12} = a_1 + \frac{1}{2}a_2 \\ a_{145} = \frac{1}{2}a_1 + a_4 + \frac{1}{2}a_5 \\ a_{25} = \frac{1}{2}a_2 + a_5 \\ a_{34} = 2(a_3 + a_4) \end{cases} \quad (1.28)$$

Cependant, manipuler les 5 constantes matériau de second gradient présentées en équation 1.28 peut s'avérer délicat. (MATSUSHIMA, CHAMBON & CAILLERIE, 2002) propose donc de simplifier le comportement de second gradient en ne considérant qu'une seule constante matériau D . Ce comportement de second gradient s'écrit généralement sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{111} \\ \Sigma_{112} \\ \Sigma_{121} \\ \Sigma_{122} \\ \Sigma_{211} \\ \Sigma_{212} \\ \Sigma_{221} \\ \Sigma_{222} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{D}{2} & \frac{D}{2} & 0 \\ 0 & \frac{D}{2} & \frac{D}{2} & 0 & -\frac{D}{2} & 0 & 0 & \frac{D}{2} \\ 0 & \frac{D}{2} & \frac{D}{2} & 0 & -\frac{D}{2} & 0 & 0 & \frac{D}{2} \\ 0 & 0 & 0 & D & 0 & -\frac{D}{2} & -\frac{D}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{D}{2} & -\frac{D}{2} & 0 & D & 0 & 0 & 0 \\ \frac{D}{2} & 0 & 0 & -\frac{D}{2} & 0 & \frac{D}{2} & \frac{D}{2} & 0 \\ \frac{D}{2} & 0 & 0 & -\frac{D}{2} & 0 & \frac{D}{2} & \frac{D}{2} & 0 \\ 0 & \frac{D}{2} & \frac{D}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

Ce comportement simplifié de second gradient est ensuite largement repris dans la littérature (voir par exemple (EL MOUSTAPHA, 2014) pour une identification des paramètres matériau à partir d'essais expérimentaux de grès des Vosges ou (JOUAN, 2015) pour une application de ce modèle à la localisation des déformations dans le béton).

Le modèle de second gradient est appliqué par (CHAMBON, CAILLERIE & EL HASSAN, 1998) dans le cas du problème unidimensionnel d'une barre en traction et d'un comportement de premier gradient bilinéaire. Les auteurs montrent analytiquement que le modèle de second gradient permet bien d'introduire une longueur interne dans la modélisation et mettent en évidence plusieurs solutions possibles à ce problème de traction. Dans ce cas-là, la longueur caractéristique peut alors se mettre

CHAPITRE 1. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

sous la forme suivante :

$$L_c = 2\pi \sqrt{\frac{D}{|h|}} \text{ avec } h \text{ le module d'écrouissage de premier gradient} \quad (1.30)$$

Ces résultats sont confirmés dans le cas 2D d'une bande infinie de cisaillement en considérant pour le comportement de premier gradient une loi de type Mohr-Coulomb (CHAMBON, CAILLERIE & MATSUCHIMA, 2001) et dans (KOTRONIS et al., 2008) pour un comportement adoucissant linéaire. (CHAMBON, CAILLERIE & MATSUCHIMA, 2001) montre que dans cette situation 2D simplifiée, la longueur caractéristique peut s'écrire comme une fonction de la rigidité de second gradient et des composantes du module tangent élastoplastique de premier gradient.

(BÉSUELLE, CHAMBON & COLLIN, 2006) étudient une bande de cisaillement dans le cas de comportements de premier et second gradient découplés. Les auteurs montrent que dans ce cas, l'analyse de la bifurcation se réduit à l'étude de la partie premier gradient du comportement. La condition nécessaire de bifurcation pour ce type de milieu se ramène alors à celle obtenue pour un milieu continu classique par (RICE, 1976) :

$$\det(\underline{n} \cdot \underline{\mathbb{H}} \cdot \underline{n}) \leq 0 \quad (1.31)$$

avec $\underline{\mathbb{H}}$ le module tangent de la loi de comportement de premier gradient et \underline{n} le vecteur normal à la bande de cisaillement. Cependant, pour un milieu de second gradient, l'épaisseur théorique de la bande de localisation lorsque cette condition est initialement satisfaite est infinie, ce qui induit un effet de la taille du problème considéré sur la possibilité d'initiation de la localisation. Tout comme pour un milieu classique, l'apparition d'une bande de localisation peut donc être retardée : il ne s'agit que d'une condition nécessaire.

A noter que nous avons choisi ici de présenter un formalisme en petites déformations pour ces modèles de second gradient, mais que ce type de modèle peut aussi s'appliquer au cas des grandes déformations (voir par exemple (CHAMBON, CAILLERIE & TAMAGNINI, 2004)).

Par ailleurs, le formalisme de second gradient peut aussi être étendu à la poromécanique. (COLLIN, CHAMBON & CHARLIER, 2006) propose un modèle de second gradient adapté aux milieux poreux saturés, où le second gradient n'intervient que dans le comportement mécanique. (SCIARRA, DELL'ISOLA & COUSSY, 2007) propose un cadre théorique plus général, où le gradient de la pression fluide intervient dans l'expression de l'énergie libre.

1.3.2 Formulation numérique des modèles de second gradient

On rappelle ici la formulation continue pour un modèle de second gradient :

$$\int_{\Omega} \left(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla u^*}} + \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\nabla^2 u^*}} \right) dV = \int_{\partial\Omega} (\underline{p} \cdot \underline{u^*} + \underline{P} \cdot \underline{D}\underline{u^*}) dS \quad (1.32)$$

Cette approche introduit la dérivée seconde des champs \underline{u} et \underline{u}^* . Il est donc nécessaire que les éléments finis utilisés assurent la continuité de la dérivée du déplacement à l'interface entre deux éléments. Cela implique l'utilisation d'éléments finis de Hermite.

(CHAMBON, CAILLERIE & EL HASSAN, 1998) utilisent de tels éléments pour un modèle de second gradient unidimensionnel de barre en traction. Cependant, l'utilisation de ces éléments dans les cas 2D et 3D conduit à une augmentation significative du nombre de degrés de libertés par éléments (ODEN, 2006).

Une solution possible est d'imposer la contrainte d'égalité 1.23 entre microdéformation et gradient macroscopique de manière faible, à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange $\underline{\lambda}$ (voir par exemple (CHAMBON, CAILLERIE & TAMAGNINI, 2004) et (SHU, KING & FLECK, 1999)). Le principe des puissances virtuelles s'écrit alors, pour tout champ cinématique admissible $(\underline{u}^*, \underline{f}^*, \underline{\lambda}^*)$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla u^*}} + \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\nabla f^*}} - \underline{\lambda} \left(\underline{\underline{f}}^* - \underline{\underline{\nabla u^*}} \right) + \underline{\lambda}^* \left(\underline{\underline{f}} - \underline{\underline{\nabla u}} \right) \right) dV \\ = \int_{\partial\Omega} (\underline{p} \cdot \underline{u^*} + \underline{P} \cdot \underline{D}\underline{u^*}) dS \end{aligned} \quad (1.33)$$

On remarque que dans cette formulation relâchée du modèle de second gradient, le multiplicateur de Lagrange λ joue un rôle similaire à celui de la microcontrainte τ dans le modèle à microstructure (voir équation 1.16).

Cette approche a notamment l'avantage de permettre d'utiliser des fonctions d'interpolations usuelles de classe C^0 pour les inconnues nodales $(\underline{u}, \underline{f}, \underline{\lambda})$. Les fonctions d'interpolation pour les multiplicateurs de Lagrange peuvent être choisies constantes par éléments. Ce choix peut conduire à l'apparition d'oscillations des contraintes et des déformations aux points de Gauss au sein d'un même élément (voir par exemple (JOUAN, 2015)). Ajouter un terme de pénalisation dans la formulation 1.33 est une solution proposée par exemple par (FERNANDES, CHAVANT & CHAMBON, 2008) dans le cadre d'un modèle de second gradient adapté au comportement des géomatériaux ou par (JOUAN, 2015) dans le cadre d'une application du modèle de second gradient au comportement du béton. Avec cette nouvelle formulation, et en notant r le coefficient de pénalisation, le principe des puissances virtuelles s'écrit alors, pour tout champ cinématique admissible $(\underline{u}^*, \underline{f}^*, \underline{\lambda}^*)$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla u^*}} + \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\nabla f^*}} - \underline{\underline{\lambda}} \left(\underline{\underline{f^*}} - \underline{\underline{\nabla u^*}} \right) + \underline{\underline{\lambda^*}} \left(\underline{\underline{f}} - \underline{\underline{\nabla u}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{r}{2} \left(\underline{\underline{f^*}} - \underline{\underline{\nabla u^*}} \right) : \left(\underline{\underline{f}} - \underline{\underline{\nabla u}} \right) \right) dV = \int_{\partial\Omega} (\underline{p} \cdot \underline{u^*} + \underline{P} \cdot \underline{D u^*}) dS \end{aligned} \quad (1.34)$$

Cette dernière formulation permet effectivement d'éviter toute oscillation des champs aux points de Gauss, mais nécessite l'introduction d'un paramètre numérique supplémentaire (le coefficient de pénalisation r). Une valeur trop élevée de ce paramètre peut conduire à une matrice de rigidité mal conditionnée (FERNANDES, 2009). La valeur de ce paramètre numérique doit donc être préalablement calibrée.

De récents travaux (PLÚA, 2018) montrent qu'il est aussi possible d'utiliser des éléments isogéométriques plutôt que des éléments finis pour implémenter un modèle de second gradient. Là où la méthode éléments finis utilise des fonctions d'interpolation C^0 , la méthode des éléments isogéométriques utilise des fonctions d'interpolation de continuité d'ordre supérieur (fonctions NURBS). Ainsi, il est possible de faire intervenir directement la dérivée seconde du champ de déplacement dans la formulation numérique. Cette méthode a ainsi l'avantage de ne pas faire intervenir de degrés de libertés supplémentaires liés aux champs $\underline{\underline{f}}$ et $\underline{\underline{\lambda}}$ (voir équation 1.33). Cependant, l'utilisation des éléments isogéométriques est encore peu répandue dans l'industrie et ne rentre pas dans le cadre fixé par les contraintes industrielles de cette thèse. Ce type de discréétisation ne sera donc pas retenu dans le cadre de nos travaux, qui se limitent à l'utilisation d'éléments finis.

1.3.3 Exemples d'application

Les modèles de second gradient sont utilisés pour une large gamme d'applications, dont on ne prétend pas faire ici une liste exhaustive. Cependant, on donnera ici quelques exemples de modèles de second gradient appliqués à des structures pantographiques, à la modélisation du comportement du béton, et à la modélisation du comportement des géomatériaux.

1.3.3.1 Structures pantographiques

On appelle structure pantographique un assemblage discret de fibres connectées entre elles par des pivots, où le système complet est composé de sous-systèmes périodiques et similaires au système pris dans son ensemble (voir par exemple figures 1.8, 1.9 et 1.10). Ce type de structure est étudié dans le cadre du développement de certains métamatériaux innovants (DELL'ISOLA et al., 2015).

CHAPITRE 1. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

FIGURE 1.8 – Exemple de sous-système pantographique. Source : (DELL'ISOLA et al., 2015)

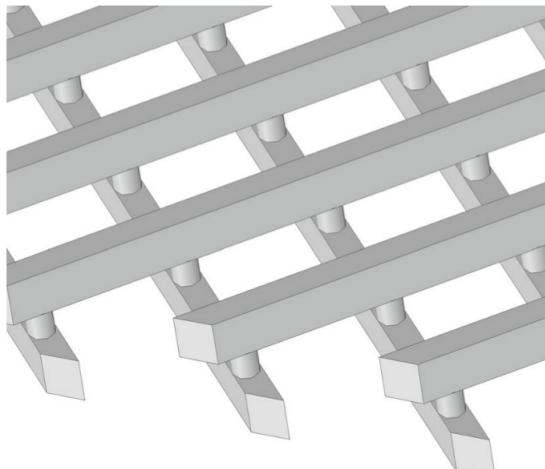


FIGURE 1.9 – Exemple de modèle discret. Source : (DELL'ISOLA et al., 2016)

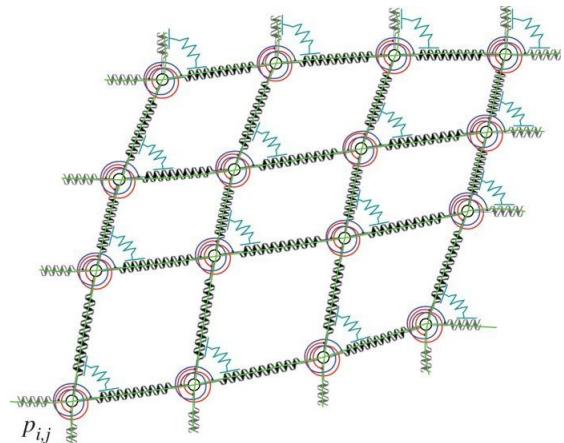
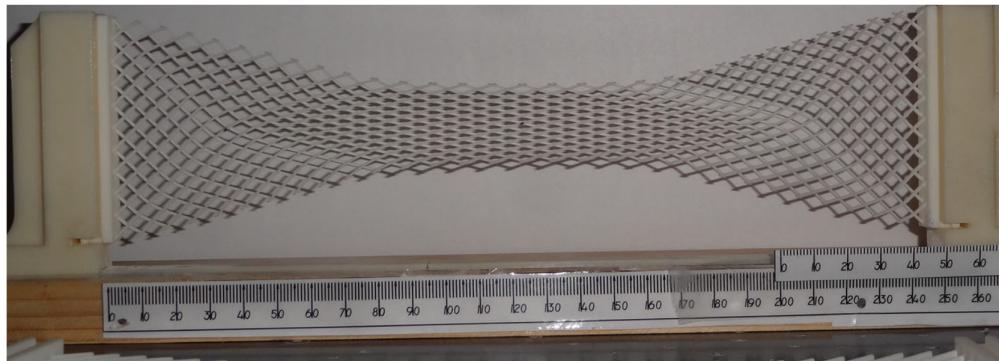


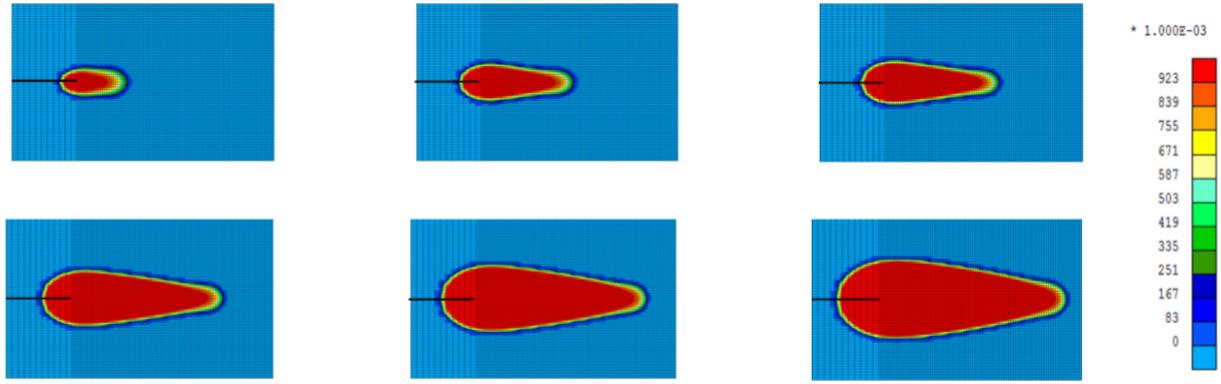
FIGURE 1.10 – Exemple de structure pantographique déformée. Source : (DELL'ISOLA et al., 2015)



Ces structures peuvent être modélisées par un système discret de ressorts à l'échelle microscopique, mais il a été démontré qu'elles peuvent aussi être considérée comme un milieu d'ordre supérieur à l'échelle macroscopique (PLACIDI et al., 2016). (DELL'ISOLA et al., 2016) et (BARCHIESI et al., 2019) montrent que les modèles de second gradient sont adaptés à la description du comportement macroscopique de ces structures. Leur approche est similaire à celle proposée par (TRIANTAFYLLOIDIS & BARDEHAGEN, 1993) pour des assemblages 1D de ressorts.

(PLACIDI, ANDREAUS & GIORGIO, 2017) s'appuie sur une technique d'homogénéisation pour identifier les paramètres de la loi de second gradient. La comparaison

FIGURE 1.11 – Essai de fissuration en mode I : profil d’endommagement pour une simulation numérique d’éprouvette en béton. Source : (JOUAN, 2015)



des simulations numériques réalisées à partir du modèle discret et du modèle continu de second gradient permet de valider l’utilisation du modèle continu de second gradient pour ce type de structure.

1.3.3.2 Modélisation du comportement du béton

(KOTRONIS et al., 2007) utilisent un modèle de second gradient similaire à celui présenté en équation 1.24 pour modéliser la rupture en traction 1D d’éprouvettes en béton. Pour la loi de comportement de premier gradient, le choix est fait d’utiliser une loi d’endommagement scalaire. Plusieurs comportements de second gradient sont proposés et il est démontré que le modèle de second gradient permet bien d’introduire une longueur interne et d’obtenir des simulations numériques indépendantes du maillage. Dans le cas d’un comportement de second gradient linéaire et découpé de la loi de premier gradient (similaire à celui présenté en équation 1.27), les auteurs observent un élargissement incontrôlé de la bande de localisation : à rupture, le modèle prédit que toute l’éprouvette est en charge plastique, en contradiction avec les observations expérimentales. Les auteurs proposent alors d’utiliser un comportement de second gradient couplé à la loi de premier gradient, où la loi de comportement de second gradient dépend de la variable d’endommagement issue de la loi de comportement de premier gradient.

(JOUAN, KOTRONIS & COLLIN, 2014) utilisent un modèle de second gradient pour la simulation numérique d’essais réalisés sur des éprouvettes de béton où l’apparition de fissures de mode I est observée. En utilisant des lois de comportement de premier et de second gradient découpés, les auteurs montrent que le modèle de second gradient ne permet pas de représenter correctement des situations où l’endommagement est

proche de 1. Notamment, ils constatent que la zone en charge plastique continue de s'élargir (voir figure 1.11) et que des efforts résiduels liés à la forme des équations d'équilibre des modèles de second gradient sont toujours présents. Pour résoudre ces problèmes, les auteurs proposent une transition vers une description discrète de la fissuration passée un certain seuil d'endommagement. Pour cela, ils utilisent un modèle de zone cohésive (BARENBLATT, 1962).

1.3.3.3 Modélisation du comportement de géomatériaux

Les modèles de second gradient ont été assez largement utilisés comme méthode de régularisation dans le cadre de la modélisation du comportement localisé des géomatériaux.

(BÉSUELLE & CHAMBON, 2006) mettent en évidence la non unicité des solutions par l'existence de plusieurs modes de localisation. Dans le cadre de simulations numériques d'un seul et même problème aux conditions aux limites (essai biaxial), les auteurs montrent qu'il est possible d'obtenir plusieurs faciès de localisation en utilisant simplement une initialisation aléatoire de l'algorithme de Newton utilisé pour la résolution du problème numérique. Dans (BÉSUELLE, CHAMBON & COLLIN, 2006), il est montré par ailleurs que le nombre de bandes de localisation a un impact direct sur la réponse de l'échantillon (voir figures 1.12 et 1.13). Les auteurs font un rapprochement entre la non unicité des solutions numériques d'un problème aux limites avec la non-reproductibilité observée expérimentalement, au sens où les structures de localisation observées sur des échantillons d'un même matériau soumis aux mêmes sollicitations ne sont pas nécessairement identiques. Cette difficulté est directement liée aux types d'essais réalisés : la géométrie et les conditions aux limites sont homogènes.

Toujours dans le cadre d'essai biaxiaux avec un modèle de second gradient, (EL MOUSTAPHA, 2014) propose une méthode d'identification des paramètres d'une loi de comportement de type élasto-plastique (loi Plasol) pour le comportement de premier gradient. Le bon accord obtenu entre résultats expérimentaux et résultats numériques montre que les modèles de second gradient permettent de reproduire correctement la réponse contrainte-déformation, le comportement volumique ainsi que l'orientation des bandes de localisation.

On trouve aussi une littérature abondante présentant des simulations numériques d'excavation basées sur des modèles de second gradient. Ces simulations visent à caractériser la zone endommagée par l'excavation lors du creusement de galeries en milieu géologique profond, ainsi que la propagation de ces fissures au cours du temps. Le comportement de second gradient, similaire à celui présenté en équation 1.27, y est généralement découpé du comportement de premier gradient. Le comportement

CHAPITRE 1. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

FIGURE 1.12 – Illustration de plusieurs modes de localisations obtenus pour un essai biaxial : points de Gauss en charge plastique. Source : (BÉSUELLE, CHAMBON & COLLIN, 2006)

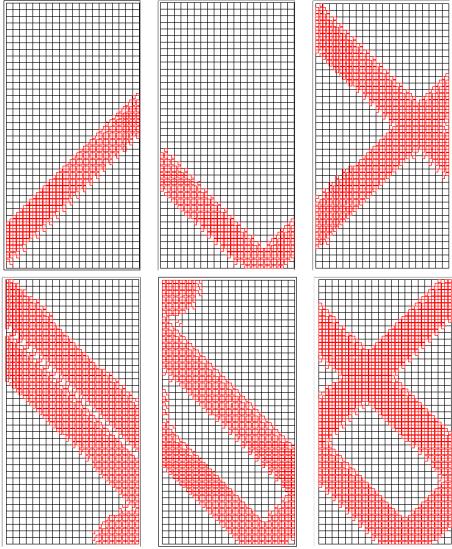
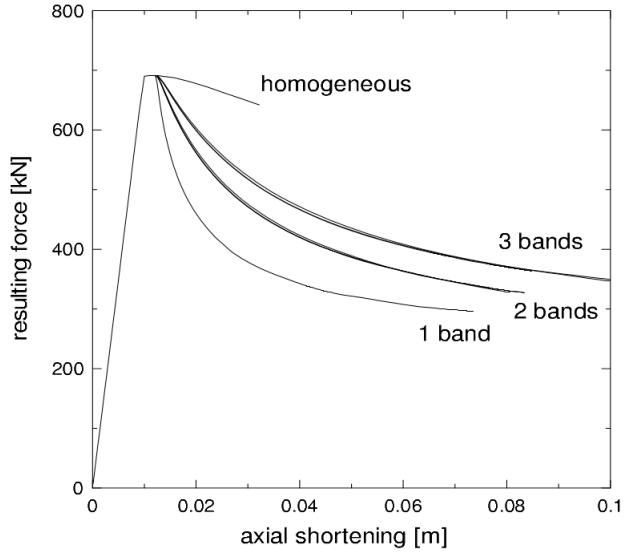


FIGURE 1.13 – Influence du nombre de bande de localisation sur la réponse de l'échantillon pour un essai biaxial. Source : (BÉSUELLE, CHAMBON & COLLIN, 2006)

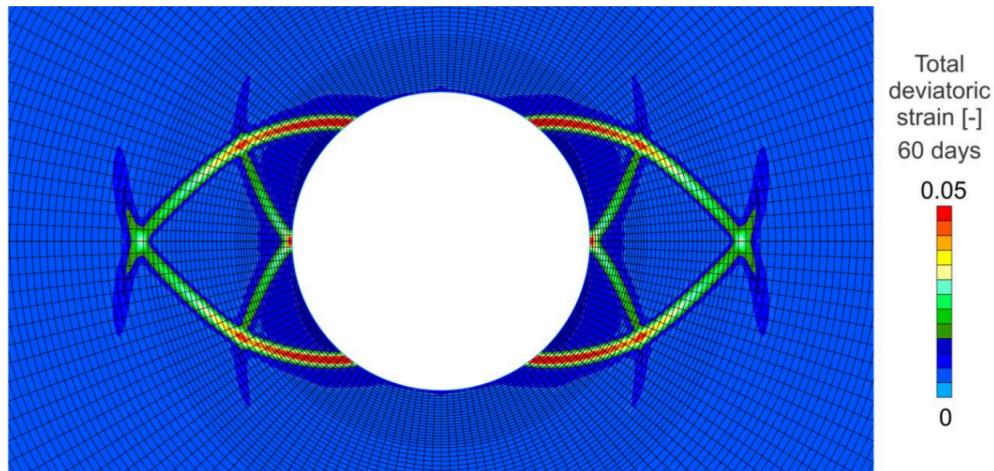


de premier gradient peut quant à lui être mécanique (voir par exemple (SIEFFERT, AL HOLO & CHAMBON, 2009)) ou hydromécanique (voir par exemple (PARDOEN, LEVASSEUR & COLLIN, 2015) et (SALEHNIA et al., 2015)). Ces travaux montrent que le modèle de second gradient est adapté pour la modélisation des bandes de localisation qui apparaissent autour de la galerie. La convergence de la galerie obtenue numériquement est alors en bon accord avec les mesures expérimentales in-situ (PARDOEN & COLLIN, 2017).

Comme pour les essais biaxiaux, (SIEFFERT, AL HOLO & CHAMBON, 2009) et (MARINELLI, 2013) mettent en évidence l'existence de plusieurs modes de localisation pour ce type de problème d'excavation. Il reste donc difficile de déterminer précisément le profil de ces bandes de localisation ainsi que l'évolution de leur extension au cours du temps sans observations expérimentales suffisamment précises pour choisir le mode de localisation le plus adapté.

Une autre difficulté liée à ce type de modèle tient au nombre important de degrés de libertés supplémentaires introduits par la formulation numérique éléments finis du problème. Cela est acceptable pour des modélisations 2D (en déformations planes) pour la simulation d'excavation de galerie. Cette approche 2D peut être satisfaisante lorsqu'il s'agit de modéliser une section de la galerie, mais n'est pas applicable lors-

FIGURE 1.14 – Bandes de localisation autour d'une galerie. Source : (PARDOEN & COLLIN, 2017)



qu'on s'intéresse par exemple au croisement de deux galeries. Dans ce cas-là, une approche 3D serait nécessaire, mais conduirait à un nombre de degrés de libertés trop important et difficilement compatible avec les capacités de calcul actuelles. Il est donc nécessaire de chercher à réduire le nombre de degrés de libertés utilisés par ce type de modèle de second gradient.

Une solution visant à utiliser un nombre réduit de degrés de liberté est proposée par (FERNANDES, 2009) : le modèle de second gradient de dilatation. Là où le modèle de second gradient utilise le gradient de la déformation, le modèle de second gradient de dilatation s'inspire des modèles microdilatants présentés en partie 1.2.2.3 et ne fait intervenir que le gradient de la déformation volumique. Ce modèle, adapté à la modélisation de matériaux dilatants, peut être vu comme une simplification du modèle de second gradient présenté de ce chapitre moyennant un choix particulier des paramètres matériaux de second gradient. En ne faisant intervenir que le gradient de la déformation volumique, le modèle de second gradient de dilatation conduit à une diminution significative du nombre de degrés de libertés supplémentaires dans la formulation numérique éléments finis du problème.

Ce modèle a déjà fait ses preuves pour la simulation numérique d'essais biaxiaux et d'excavation. Tout comme le modèle de second gradient, il présente l'avantage de pouvoir être utilisé aussi bien pour la simulation numérique de problèmes mécaniques (voir par exemple (FERNANDES, DUCOIN & CHAMBON, 2011)) ou hydromécaniques (voir par exemple (PLASSART et al., 2013)) avec diverses lois de comportement sans

CHAPITRE 1. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

nécessiter de développements numériques spécifiques à chaque modélisation.

C'est ce modèle de second gradient de dilatation qui sera retenu dans la suite de ces travaux de thèse. Les développements théoriques qui permettent d'établir les équations constitutives de ce modèle simplifié à partir du modèle de second gradient seront présentées en détail au chapitre 2.

Chapitre 2

Le modèle de second gradient de dilatation

Table des matières

2.1	Un modèle de second gradient adapté aux matériaux dilatants	41
2.1.1	Formulation continue	41
2.1.2	Formulation numérique du modèle de second gradient de dilatation	46
2.2	Applications aux essais biaxiaux et modification de la formulation numérique	54
2.2.1	Présentation de l'essai biaxial	55
2.2.2	Méthodes numériques pour le franchissement d'instabilités	58
2.2.3	Méthodes numériques pour le traitement de la quasi-incompressibilité	68
2.2.4	Evolution de la largeur de bande au cours du chargement	83
2.3	Bilan du chapitre	95

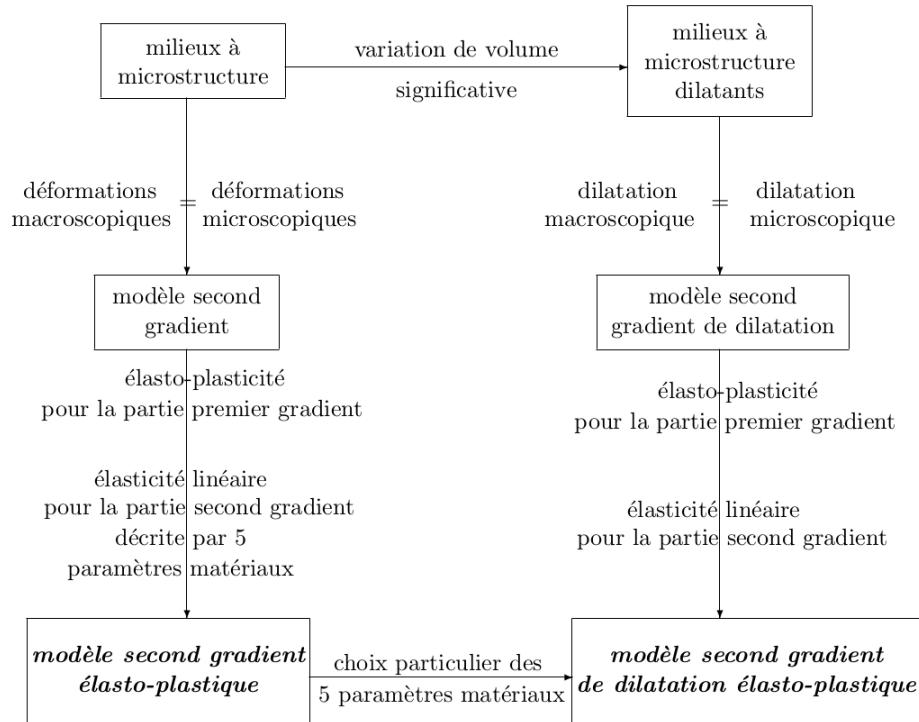
La première partie de ce chapitre (partie 2.1) sera consacrée à la présentation du modèle de second gradient de dilatation. Dans un premier temps, la mise en place des équations de ce modèle est détaillée de deux manières : soit à partir des milieux de second gradient, soit à partir des milieux à microstructure dilatants. Pour cette démonstration, nous reprenons pour l'essentiel le cheminement présenté par (FERNANDES, 2009). Dans un second temps, seront présentées les lois constitutives qui seront utilisées dans la suite de la thèse. Enfin, la formulation numérique du modèle de second gradient de dilatation telle que développée dans (FERNANDES, 2009) sera présentée.

La seconde partie de ce chapitre (partie 2.2) est quant à elle consacrée à la simulation numérique d'essais biaxiaux. Dans un premier temps, il s'agira de mettre

CHAPITRE 2. LE MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

en place des méthodes numériques pour le franchissement d'instabilités (snap-back). Dans un second temps, certaines limites du modèle développé dans (FERNANDES, 2009) seront mises en évidence et des modifications de la formulation numérique seront proposées afin d'y remédier. Enfin, les propriétés régularisantes du modèle de second gradient de dilatation seront étudiées et comparées dans le cas d'une loi de comportement associée dilatante et dans le cas d'une loi de comportement non associée.

FIGURE 2.1 – Le modèle de second gradient de dilatation peut être obtenu de deux manières à partir des milieux à microstructure. Source : (FERNANDES, 2009)



2.1 Un modèle de second gradient adapté aux matériaux dilatants

2.1.1 Formulation continue

Dans sa formulation continue, le modèle de second gradient de dilatation peut être vu de deux manières (voir figure 2.1) :

- comme un modèle à microstructure dilatant, auquel il serait imposé une contrainte supplémentaire d'égalité entre microdilatation et dilatation macroscopique.
- comme un modèle de second gradient simplifié, auquel il serait imposé des conditions supplémentaires sur les paramètres de la loi de comportement de second gradient.

Afin de mieux comprendre le lien entre ces différents modèles, nous présenterons ces deux raisonnements, issus de la thèse de Roméo Fernandes (FERNANDES, 2009).

2.1.1.1 Un modèle microdilatant contraint

On rappelle ici l'expression de la puissance virtuelle des milieux à microstructure dilatants en l'absence d'effort volumique (voir partie 1.2.2.3). Pour tout champ cinématiquement admissible (\underline{u}^* , $\underline{\theta}^*$), on a :

$$\int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\nabla} \underline{u}^* + \kappa (\varepsilon_V^* - \theta^*) + \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\nabla} \underline{\theta}^*) \, dV = \int_{\partial\Omega} (\underline{t} \cdot \underline{u}^* + T \theta^*) \, dS \quad (2.1)$$

La cinématique du milieu est enrichie de la variation microvolumique θ , en plus du déplacement \underline{u} . On note $\varepsilon_V = \text{tr}(\varepsilon)$. On introduit alors les contraintes duales à cette cinématique : la contrainte macroscopique classique $\underline{\underline{\sigma}}$, la contrainte (scalaire) microscopique de dilatation κ (duale de la déformation volumique relative $\varepsilon_V - \theta$) et la double contrainte (vectorielle) $\underline{\underline{S}}$ (duale du gradient de la déformation volumique microscopique $\underline{\nabla} \theta$).

Les équations d'équilibre, obtenues par application du théorème de la divergence et intégration par partie de l'équation 2.1, s'écrivent quant à elles :

$$\begin{cases} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{\nabla} \kappa = 0 \\ \kappa + \text{div}(\underline{\underline{S}}) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Les conditions aux limites sur $\partial\Omega$ se mettent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \underline{t} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} + \kappa \underline{n} \\ T = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{n} \end{cases} \quad (2.3)$$

A partir de cette formulation des milieux à microstructure dilatants, on choisit d'introduire une contrainte mathématique d'égalité entre déformation volumique macroscopique ε_V et déformation volumique microscopique θ . Cette hypothèse est similaire à celle réalisée pour établir les équations du modèle de second gradient à partir des milieux à microstructure (voir partie 1.3). Elle s'écrit :

$$\theta = \varepsilon_V \quad (2.4)$$

(FERNANDES, 2009) montre alors que l'expression des puissances virtuelles se met sous la forme suivante, pour tout champ cinématiquement admissible \underline{u}^* :

$$\int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\nabla} \underline{u}^* + \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\nabla} \text{div}(\underline{u}^*)) \, dV = \int_{\partial\Omega} (\underline{p} \cdot \underline{u}^* + P \underline{n} \cdot \underline{D}\underline{u}^*) \, dS \quad (2.5)$$

$\underline{D}\underline{u}$ représente la dérivée normale du champ de déplacement \underline{u} . Pour rappel, cette dérivée normale est définie de la manière suivante :

$$D\underline{u}_i = \frac{\partial \underline{u}_i}{\partial x_j} n_j \quad (2.6)$$

La dérivée tangentielle de \underline{u} , que l'on notera $\frac{Du_i}{Dx_j}$ suivant la direction n_j s'écrit :

$$\frac{Du_i}{Dx_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - n_j Du_i \quad (2.7)$$

La force de surface \underline{p} et la double force P sont les efforts extérieurs pour le modèle de second gradient de dilatation, dont les expressions sont les suivantes :

$$\begin{cases} p_i = \sigma_{ij}n_j - n_i n_j DS_j - \frac{DS_j}{Dx_j} n_i - \frac{DS_j n_j}{Dx_i} + \frac{Dn_p}{Dx_p} S_j n_j n_i \\ P = S_j n_j \end{cases} \quad (2.8)$$

Ces efforts extérieurs \underline{p} et P sont duaux, respectivement, du champ de déplacement \underline{u} et de sa dérivée normale $D\underline{u}$. Le déplacement \underline{u} et sa dérivée tangentielle n'étant pas indépendants, seule la dérivée normale $D\underline{u}$ intervient dans ces conditions aux limites.

Par ailleurs, une hypothèse simplificatrice est généralement faite sur la double force P : elle est supposée nulle $P = 0$. D'après (CHAMBON & MOULLET, 2004), une double force non nulle conduit à l'apparition d'une couche limite qui peut être négligée. C'est cette hypothèse simplificatrice qui sera retenue dans la suite de la thèse. Sa pertinence et les limites de sa validité seront discutées dans le dernier chapitre, consacré à l'influence des conditions aux limites dans le modèle de second gradient de dilatation.

Cette hypothèse $P = 0$ conduit par ailleurs à une simplification de la condition aux limites portant sur la force de surface \underline{p} . Les conditions aux limites du modèle de second gradient de dilatation s'écrivent alors :

$$\begin{cases} p_i = \sigma_{ij}n_j - \frac{\partial S_j}{\partial x_j} n_i \\ P = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

En l'absence d'efforts volumiques, on peut montrer que les équations d'équilibre du problème s'écrivent :

$$\underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) - \underline{\nabla}(\underline{\text{div}} \underline{S}) = 0 \quad (2.10)$$

Le raisonnement présenté ici permet ainsi d'obtenir la formulation continue du modèle de second gradient de dilatation à partir des milieux à microstructure dilatants. Ce raisonnement est similaire à celui permettant d'établir les équations régissant les modèles de second gradient à partir des milieux à microstructure (voir partie 1.3).

2.1.1.2 Un modèle de second gradient simplifié

Le modèle de second gradient de dilatation peut aussi être interprété comme un modèle de second gradient pour lequel des contraintes supplémentaires sur les paramètres de la loi de comportement de second gradient seraient respectées. On rappelle ici l'expression des puissances virtuelles dans le cas d'un modèle de second gradient, pour tout champ \underline{u}^* cinématiquement admissible :

$$\int_{\Omega} \left(\underline{\sigma} : \underline{\nabla} \underline{u}^* + \underline{\Sigma} : \underline{\nabla}^2 \underline{u}^* \right) dV = \int_{\partial\Omega} (\underline{p} \cdot \underline{u}^* + \underline{P} \cdot \underline{D}\underline{u}^*) dS \quad (2.11)$$

En comparant les expressions 2.5 et 2.11, (FERNANDES, 2009) montre que si les doubles contraintes vérifient les relations suivantes, alors le modèle de second gradient se simplifie en second gradient de dilatation :

$$\begin{cases} S_1 \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_{111} = 2\Sigma_{212} = 2\Sigma_{221} = 2\Sigma_{313} = 2\Sigma_{331} \\ S_2 \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_{222} = 2\Sigma_{112} = 2\Sigma_{121} = 2\Sigma_{323} = 2\Sigma_{332} \\ S_3 \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_{333} = 2\Sigma_{113} = 2\Sigma_{131} = 2\Sigma_{223} = 2\Sigma_{232} \\ \Sigma_{122} = \Sigma_{123} = \Sigma_{132} = \Sigma_{133} = 0 \\ \Sigma_{211} = \Sigma_{213} = \Sigma_{231} = \Sigma_{233} = 0 \\ \Sigma_{311} = \Sigma_{312} = \Sigma_{321} = \Sigma_{322} = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

En effet, dans le cas où les relations 2.12 sont vérifiées, alors on a :

$$\int_{\Omega} \underline{\Sigma} : \underline{\nabla}^2 \underline{u}^* dV = \int_{\Omega} \underline{S} \cdot \underline{\operatorname{div}}(\underline{\nabla} \underline{u}^*) dV \quad (2.13)$$

Dans le cas bidimensionnel (2D) où les lois de comportements de premier et de second gradient sont découplées et où les doubles contraintes $\underline{\Sigma}$ dépendent des dérivées secondes du déplacement de manière isotrope et linéaire, (MINDLIN, 1965) montre que la loi de comportement de second gradient se met sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{111} \\ \Sigma_{112} \\ \Sigma_{121} \\ \Sigma_{122} \\ \Sigma_{211} \\ \Sigma_{212} \\ \Sigma_{221} \\ \Sigma_{222} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12345} & 0 & 0 & a_{23} & 0 & a_{12} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{145} & a_{145} & 0 & a_{25} & 0 & 0 & a_{12} \\ 0 & a_{145} & a_{145} & 0 & a_{25} & 0 & 0 & a_{12} \\ a_{23} & 0 & 0 & a_{34} & 0 & a_{25} & a_{25} & 0 \\ 0 & a_{25} & a_{25} & 0 & a_{34} & 0 & 0 & a_{23} \\ a_{12} & 0 & 0 & a_{25} & 0 & a_{145} & a_{145} & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 & a_{25} & 0 & a_{145} & a_{145} & 0 \\ 0 & a_{12} & a_{12} & 0 & a_{23} & 0 & 0 & a_{12345} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Les constantes matériau définies dans l'équation 2.14 peuvent s'écrire en fonction de 5 constantes matériau a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 (homogènes à une force) :

$$\begin{cases} a_{12345} = 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \\ a_{23} = a_2 + 2a_3 \\ a_{12} = a_1 + \frac{1}{2}a_2 \\ a_{145} = \frac{1}{2}a_1 + a_4 + \frac{1}{2}a_5 \\ a_{25} = \frac{1}{2}a_2 + a_5 \\ a_{34} = 2(a_3 + a_4) \end{cases} \quad (2.15)$$

On assure les relations 2.12 en imposant les égalités suivantes :

$$\begin{cases} a_{12345} = 2a_{12} \\ a_{23} = 0 \\ a_{12} = 2a_{145} \\ a_{25} = 0 \\ a_{34} = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Ce dernier jeu d'équation 2.16 conduit à réécrire la loi de comportement de second gradient de la manière suivante, en fonction d'une seule constante matériau a_1 :

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{111} \\ \Sigma_{112} \\ \Sigma_{121} \\ \Sigma_{122} \\ \Sigma_{211} \\ \Sigma_{212} \\ \Sigma_{221} \\ \Sigma_{222} \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Les relations imposées aux doubles contraintes en équation 2.12 conduisent à l'égalité 2.13 si la loi de comportement de second gradient de dilatation s'écrit (en 2D) :

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = 3a_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial x_2} \end{pmatrix} \text{ avec } \varepsilon_V = \text{tr}(\varepsilon) = \text{div}(\underline{u}) \quad (2.18)$$

C'est cette forme de la loi de comportement de second gradient de dilatation, reliant double contrainte et gradient de la déformation volumique, qui sera retenue par la suite. Cette loi de comportement linéaire et isotrope s'exprime donc en fonction d'un seul paramètre de rigidité de second gradient a_1 .

De manière générale, (FERNANDES, 2009) montre que la loi de comportement linéaire isotrope de second gradient de dilatation se met sous la forme suivante, avec n la dimension du problème (2 en 2D, 3 en 3D) :

$$\underline{S} = (n + 1)a_1 \underline{\nabla \varepsilon_V} \quad (2.19)$$

2.1.2 Formulation numérique du modèle de second gradient de dilatation

Cette section vise à présenter la formulation numérique du modèle de second gradient de dilatation telle que développée dans (FERNANDES, 2009). On rappellera brièvement les résultats concernant la formulation faible du modèle de second gradient de dilatation et le choix des fonctions de forme.

On rappelle ci-dessous l'expression du principe des puissances virtuelles pour un milieu de second gradient de dilatation, pour tout champ \underline{u}^* cinématiquement admissible :

$$\int_{\Omega} \left(\underline{\sigma} : \underline{\nabla u^*} + \underline{S} \cdot \underline{\nabla \operatorname{div}(u^*)} \right) dV = \int_{\partial\Omega} (p \cdot \underline{u}^* + P_n \cdot \underline{D u^*}) dS \quad (2.20)$$

Cette approche introduit la dérivée seconde des champs \underline{u} et \underline{u}^* . Cette approche introduit la dérivée seconde des champs \underline{u} et \underline{u}^* . Il est donc nécessaire que les éléments finis utilisés assurent la continuité de la dérivée du déplacement à l'interface entre deux éléments. Cela implique l'utilisation d'éléments finis de Hermite.

Cette difficulté numérique n'est pas spécifique aux milieux de second gradient de dilatation : elle est similaire à celle rencontrée dans le cadre des milieux de second gradient et évoquée en partie 1.3.2. De la même manière, il est donc possible de relâcher la condition d'égalité entre déformation volumique macroscopique ε_V et déformation volumique microscopique θ . Cette condition d'égalité peut alors être imposée de manière faible à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange λ . C'est l'approche choisie par exemple par (MATSUSHIMA, CHAMBON & CAILLERIE, 2002) et (SHU, KING & FLECK, 1999) pour les milieux de second gradient. Pour un milieu de second gradient de dilatation, (FERNANDES, 2009) choisit que pour tout champ cinématiquement admissible $(\underline{u}^*, \lambda^*, \theta^*)$, on ait :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla u^*}} + \underline{S} \cdot \underline{\nabla \theta^*} - \lambda^* (\varepsilon_V - \theta) + \lambda (\varepsilon_V^* - \theta^*)) \ dV \\ = \int_{\partial\Omega} (\underline{p} \cdot \underline{u^*} + P_n \cdot \underline{D u^*}) \ dS \end{aligned} \quad (2.21)$$

La formulation mixte 2.21 ne faisant intervenir que la dérivée première des inconnues nodales, il est possible d'utiliser des fonctions d'interpolation de classe C^0 . Par ailleurs, on peut dès à présent constater l'intérêt du modèle de second gradient de dilatation : les inconnues nodales supplémentaires introduites dans cette formulation faibles (λ et θ) sont ici des quantités scalaires. Pour un modèle de second gradient classique, ces inconnues nodales sont des tenseurs d'ordre 2. Le modèle de second gradient de dilatation permet donc de réduire significativement le nombre de degrés de libertés supplémentaires.

(FERNANDES, 2009) propose d'utiliser une formulation augmentée pour le modèle de second gradient de dilatation. Pour tout champ cinématiquement admissible $(\underline{u}^*, \lambda^*, \theta^*)$, on a alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla u^*}} + \underline{S} \cdot \underline{\nabla \theta^*} - \lambda^* (\varepsilon_V - \theta) + \lambda (\varepsilon_V^* - \theta^*) + r(\varepsilon_V - \theta)(\varepsilon_V^* - \theta^*)) \ dV \\ = \int_{\partial\Omega} (\underline{p} \cdot \underline{u^*} + P_n \cdot \underline{D u^*}) \ dS \end{aligned} \quad (2.22)$$

Cette dernière formulation 2.22 nécessite d'introduire un paramètre numérique supplémentaire : un coefficient d'augmentation r dont la valeur numérique doit être préalablement calibrée. Par ailleurs, (FERNANDES, 2009) montre que la formulation augmentée 2.22 permet de s'affranchir d'éventuelles oscillations des contraintes et des déformations aux points de Gauss au sein d'un même élément, pour différentes fonctions d'interpolation.

En effet, en choisissant une formulation mixte, il est nécessaire de s'assurer que les fonctions d'interpolations choisies pour les inconnues nodales $\underline{u}, \theta, \lambda$ permettent d'imposer de manière satisfaisante l'égalité entre ε_V et θ . Ce choix de fonction d'interpolation et de formulation faible sera discuté en détail en partie 2.2.3. Pour le moment, on retient les conclusions de (FERNANDES, 2009), où différentes fonctions d'interpolation et différents éléments géométriques (triangulaires ou quadrangulaires) sont comparées sur la base de critères de performances numériques :

- précision de l'égalité entre ε_V et θ .
- convergence de l'algorithme de Newton
- temps CPU consommé moyen.

FIGURE 2.2 – Interpolation numérique (degrés de libertés) de l’élément triangulaire (\underline{u} P2 - θ P1 - λ P0).

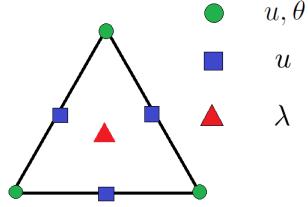
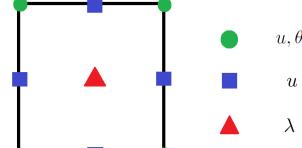


FIGURE 2.3 – Interpolation numérique (degrés de libertés) de l’élément quadrangulaire (\underline{u} Q2 - θ Q1 - λ Q0).



On retient que l’élément triangulaire (\underline{u} P2 - θ P1 - λ P0) permet d’obtenir les meilleures performances au vu des critères ci-dessus. Dans cet élément, l’interpolation du champ de déplacement \underline{u} est quadratique, celle du champ de déformation microscopique θ est linéaire et celle du multiplicateur de Lagrange est constante par éléments.

De la même manière, (FERNANDES, 2009) propose un élément quadrangulaire (\underline{u} Q2 - θ Q1 - λ Q0) où le déplacement \underline{u} est interpolé par des fonctions quadratiques de type Serendipity.

Ces deux éléments, triangulaire et quadrangulaire, sont représentés en figures 2.2 et 2.3.

2.1.2.1 Relations constitutives

Pour les relations constitutives, nous reprenons l’hypothèse généralement faite qui consiste à séparer les grandeurs classiques des termes d’enrichissement.

Pour la loi de comportement de second gradient, on rappelle la forme retenue en partie 2.1.1.2 pour une modélisation 2D :

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_1 & 0 \\ 0 & 3a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Cette loi de comportement de second gradient est linéaire isotrope. Les doubles contraintes de dilatation S sont liées au gradient de la déformation volumique par un seul et unique paramètre matériau a_1 , appelé rigidité de second gradient.

Pour la partie classique des relations de comportement (partie premier gradient), nous faisons le choix de modéliser le comportement des roches par une loi élasto-plastique de type Drucker Prager (DRUCKER & PRAGER, 1952). L’objectif est d’utiliser une loi de comportement qui soit à la fois représentative du comportement des roches (avec en particulier une dépendance de la surface d’écoulement au premier

invariant du tenseur des contraintes), avec un nombre de paramètres réduits, à l'implémentation numérique robuste, et suffisamment simple dans son expression afin de permettre la recherche de solutions analytiques à un problème simplifié de modèle de second gradient (voir chapitre 3).

Bien que relativement simple, cette loi de comportement permet notamment de rendre compte du comportement adoucissant des roches dans le régime post-pic. Cela se traduit par l'utilisation d'un écrouissage négatif dans la fonction de charge. Deux comportements de Drucker Prager différents seront utilisés : une loi associée et une loi non associée. Dans les deux cas, le comportement élastique est choisi isotrope linéaire et sera décrit par le module de Young E et le coefficient de Poisson ν .

Comportement de Drucker Prager associé

La fonction de charge s'exprime de la manière suivante :

$$F(\underline{\sigma}, \kappa) = \sigma_{eq} + atr(\underline{\sigma}) - R(\kappa) \quad (2.24)$$

Dans cette expression, σ_{eq} représente la contrainte équivalente de Von Mises, définie de la manière suivante : $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\underline{\sigma}^D : \underline{\sigma}^D}$, où $\underline{\sigma}^D$ est la partie déviatorique du tenseur des contraintes.

Le paramètre a est relié à l'angle de frottement ϕ de la manière suivante :

$$a = \frac{2 \sin\phi}{3 - \sin\phi} \quad (2.25)$$

La variable d'écrouissage κ correspond à la déformation plastique déviatorique cumulée. Sa dérivée temporelle $\dot{\kappa}$ s'exprime ainsi :

$$\dot{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\underline{\varepsilon}}_p^D : \dot{\underline{\varepsilon}}_p^D} \quad (2.26)$$

L'écrouissage porte sur la fonction $R(\kappa)$. Cette fonction est choisie décroissante et peut prendre différentes formes. Dans le cas de la loi de comportement associée, nous nous limiterons à un écrouissage linéaire :

$$R(\kappa) = \begin{cases} (\sigma_0 - \sigma_u)(1 - \frac{\kappa}{\kappa_c}) + \sigma_u & \text{pour } \kappa < \kappa_c \\ \sigma_u & \text{pour } \kappa \geq \kappa_c \end{cases} \quad (2.27)$$

Cette expression 2.27 fait intervenir trois nouveaux paramètres matériaux :

- la résistance initiale du matériau σ_0
- l'état de contrainte ultime σ_u
- la déformation ultime du matériau κ_c

FIGURE 2.4 – Réponse contrainte-déformation axiale pour un essai triaxial. Loi associée avec écrouissage linéaire.

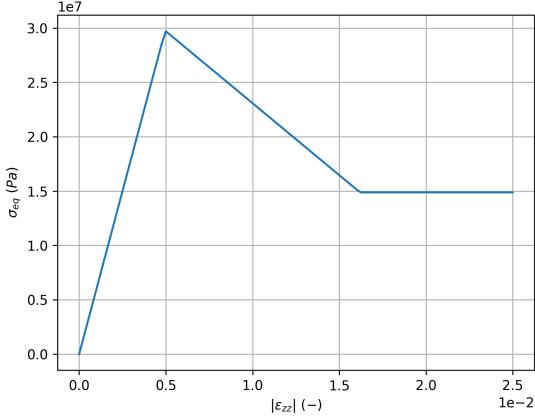
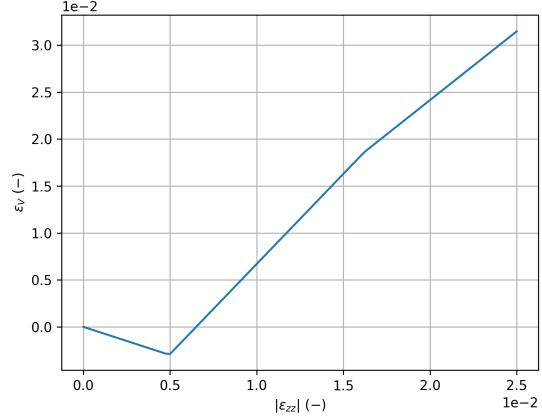


FIGURE 2.5 – Evolution de la déformation volumique pour un essai triaxial. Loi associée avec écrouissage linéaire.



La loi d'écoulement étant choisie ici associée, elle s'exprime sous la forme suivante (avec $\underline{\underline{\varepsilon}}_p$ la déformation plastique) :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (2.28)$$

Dans le cas où $\sigma_{eq} \neq 0$, on peut montrer que le multiplicateur plastique λ est égal au taux de déformation plastique déviatorique cumulée. On a alors $\Lambda = \dot{\lambda}$.

Le comportement présenté ci-dessus est illustré en figures 2.4 et 2.5 dans le cas d'un essai triaxial à pression de confinement nulle (essai de compression uniaxiale) et sur point matériel. Après un régime élastique linéaire, la réponse contrainte déviatoire - déformation axiale suit une décroissance linéaire avant d'atteindre un plateau correspondant à l'état ultime du matériau (figure 2.4). Le comportement volumique est dans un premier temps contractant et devient dilatant dans le régime plastique. Dans le régime ultime, la déformation volumique croît à l'infini avec la déformation axiale (figure 2.5).

Cette loi de comportement est similaire à celle utilisée dans (FERNANDES, 2009) et l'implémentation numérique est disponible dans le logiciel éléments finis *Code_Aster* (documentation R7.01.16). Son utilisation sera limitée au présent chapitre pour illustrer certaines propriétés du modèle de second gradient de dilatation.

Ce type de comportement associé est connu pour surestimer les déformations plastiques volumiques (VERMEER & DE BORST, 1984). Or, reproduire de manière satisfaisante le comportement volumique des roches est particulièrement important dans le cadre d'un modèle de second gradient de dilatation. En effet, le modèle s'appuie sur le gradient de cette même déformation volumique pour contrôler la

largeur de bande et régulariser la solution. L'utilisation d'une loi de comportement non associée, pour laquelle la déformation volumique plastique peut être bornée, semble donc nécessaire.

Comportement de Drucker Prager non associé

La fonction de charge utilisée reste similaire à celle présentée en équation 2.24 pour une loi associée. La fonction d'écrouissage $R(\kappa)$ peut prendre diverses formes : linéaire (identique à la version associée, voir équation 2.27) ou exponentielle. Dans sa forme exponentielle, cette fonction d'écrouissage s'écrit :

$$R(\kappa) = (\sigma_0 - \sigma_u) \exp\left(-\frac{\kappa}{\kappa_c}\right) + \sigma_u \quad (2.29)$$

Ce comportement non associé se distingue de la loi associée précédente par l'existence d'un potentiel plastique, différent de la fonction de charge. Ce potentiel plastique, noté $G(\underline{\sigma}, \kappa)$, s'écrit :

$$G(\underline{\sigma}, \kappa) = \sigma_{eq} + b(\kappa) \text{tr}(\underline{\sigma}) \quad (2.30)$$

La loi d'écoulement s'écrit alors (avec $\dot{\underline{\varepsilon}}_p$ la déformation plastique) :

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_p = \Lambda \frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}} \quad (2.31)$$

Dans le cas non associé, on choisit de faire porter aussi l'écrouissage sur la fonction $b(\kappa)$, et donc sur l'angle de dilatance. Comme pour la fonction d'écrouissage $R(\kappa)$, deux fonctions, linéaire et exponentielle, sont envisageables.

$$b(\kappa) = \begin{cases} b_0 \left(1 - \frac{\kappa}{\kappa_c}\right) & \text{pour } \kappa < \kappa_c \\ 0 & \text{pour } \kappa \geq \kappa_c \end{cases} \quad (\text{Ecrouissage linéaire}) \quad (2.32)$$

$$b(\kappa) = b_0 \exp\left(-\frac{\kappa}{\kappa_c}\right) \quad (\text{Ecrouissage exponentiel}) \quad (2.33)$$

Dans les deux cas, b_0 est un paramètre matériau lié à l'angle de dilatance initial ψ_0 par la relation suivante :

$$b_0 = \frac{2 \sin \psi_0}{3 - \sin \psi_0} \quad (2.34)$$

Cette loi non associée est illustrée en figure 2.6 et 2.7 dans le cadre d'un essai triaxial à pression de confinement nulle et sur point matériel, pour des écrouissages linéaire et exponentiel. La principale différence avec le comportement associé se trouve dans l'évolution de la déformation volumique. Dans le cas non associé, l'écrouissage

FIGURE 2.6 – Réponse contrainte équivalente-déformation axiale pour un essai triaxial. Loi non associée.

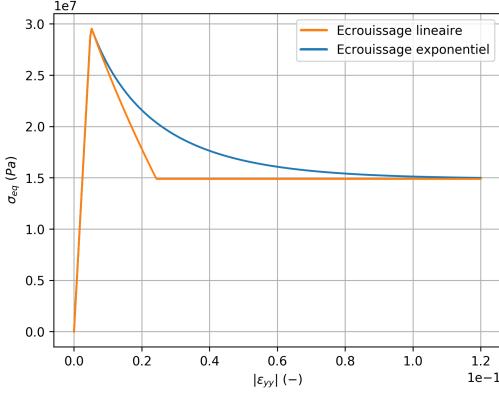
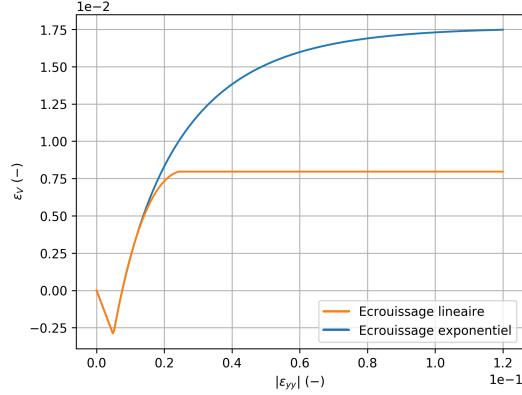


FIGURE 2.7 – Evolution de la déformation volumique pour un essai triaxial. Loi non associée.



E	ν	σ_0	σ_u	κ_c	ϕ	ψ_0
6 GPa	0.2	20 MPa	10 MPa	0.025 ou 0.1	25°	15°

TABLE 2.1 – Valeurs retenues pour les paramètres matériau

de la fonction $b(\kappa)$ permet de borner la déformation volumique dans le régime ultime (figure 2.7).

Dans le cas où l'angle de dilatance ψ est constant et égal à l'angle de frottement ϕ , on retrouve le cadre de la loi associée présentée dans le paragraphe précédent.

Cette loi de comportement non associée a été introduite dans le logiciel éléments finis *Code_Aster* au cours de la thèse.

Paramètres matériaux

Les valeurs des paramètres matériaux utilisés dans ce chapitre 2 sont présentés dans le tableau 2.1. Ces valeurs de paramètres matériaux ne correspondent pas à une roche en particulier, mais sont de l'ordre de grandeur de ceux d'une roche tendre. L'interprétation des résultats de ce chapitre se limitera donc aux aspects numériques. Une identification des paramètres matériaux à partir de résultats expérimentaux sera présentée au chapitre 3.

L'identification de la valeur du paramètre a_1 , qui pilote notamment la largeur de

r	a_1
$10^3 \cdot \frac{\sigma_0 - \sigma_u}{\kappa_c}$	$5 \cdot 10^2$ N

TABLE 2.2 – Valeurs retenues pour les paramètres numériques

CHAPITRE 2. LE MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

la bande de localisation, sera discuté en détail au chapitre 3.

2.2 Applications aux essais biaxiaux et modification de la formulation numérique

Le principal objectif de cette partie est de présenter comment le modèle de second gradient de dilatation peut être utilisé pour obtenir des simulations numériques robustes.

Dans un premier temps (partie 2.2.1), on présentera le principe de l'essai biaxial, qui servira d'essai numérique de référence, ainsi que la réponse de l'échantillon dans le cas d'un essai homogène. Dans un second temps, on présente plusieurs aspects numériques du modèle de second gradient de dilatation afin de mieux comprendre comment ce modèle peut être appliqué dans le cas d'essais biaxiaux localisés :

- Des méthodes numériques de continuation qui seront utilisées pour franchir les instabilités (snap-back) observées (partie 2.2.2). Il s'agit de garantir la convergence des algorithmes de résolution.
- Une formulation numérique pour le modèle de second gradient de dilatation qui soit adaptée aux lois de comportement non associées (partie 2.2.3).

Les méthodes de continuation qui seront présentées en partie 2.2.2 ne permettent de suivre qu'une branche de solution bifurquée, mais ne permettent pas de capter toutes les solutions localisées possibles. Afin de pouvoir comparer les résultats obtenus entre eux, nous avons ici fait le choix de sélectionner une branche de solution particulière en introduisant un défaut matériel dans l'échantillon.

Une fois ces aspects numériques traités, le caractère régularisant du modèle de second gradient de dilatation sera mis en évidence, aussi bien pour des lois de comportement associées que non associées (partie 2.2.4).

FIGURE 2.8 – Essai biaxial et conditions aux limites

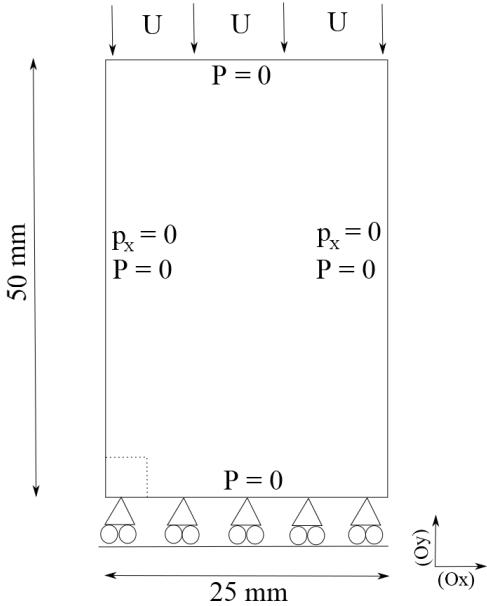
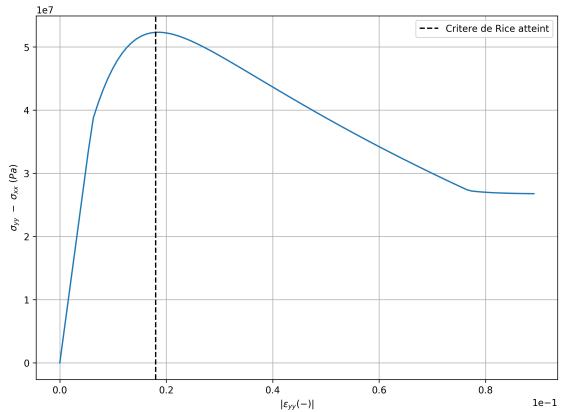


FIGURE 2.9 – Réponse contrainte-déformation pour un essai biaxial homogène (loi de comportement non associée à écrouissage linéaire)



2.2.1 Présentation de l'essai biaxial

2.2.1.1 Principe

La géométrie de l'essai biaxial de référence considéré est présenté en figure 2.8. L'échantillon considéré a une hauteur de 50mm et une largeur de 25mm. L'essai est réalisé en conditions de déformations planes.

La partie inférieure de l'échantillon est fixée verticalement : le déplacement selon l'axe (Oy) y est nul. Afin de bloquer les mouvements de corps rigides, le déplacement selon l'axe (Ox) est bloqué au centre de la partie inférieure de la structure.

L'extrémité supérieure de l'échantillon est soumise à un chargement imposé en déplacement, noté U . Une pression de confinement est appliquée aux faces latérales de l'échantillon. Dans ce chapitre 2, la pression de confinement est choisie nulle : cela implique que la condition aux limites p_x est prise nulle sur les faces latérales. La double force externe P , condition aux limites d'ordre supérieur spécifique au modèle de second gradient, est quant à elle choisie nulle sur toutes les faces de la structure. L'influence de cette hypothèse sera étudiée plus précisément dans le dernier chapitre de la thèse.

Par ailleurs, un défaut sera introduit dans la structure sous la forme d'une imperfection de 2.5 mm de côté au coin inférieur droit de l'échantillon. Dans cette imperfection, les paramètres matériau σ_0 et σ_u seront réduits de 5%. L'introduc-

FIGURE 2.10 – Maillage triangulaire grossier

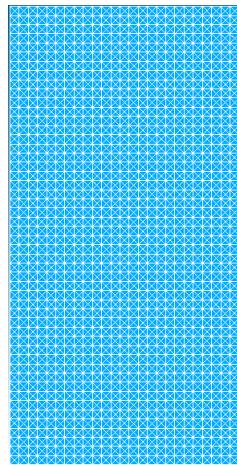
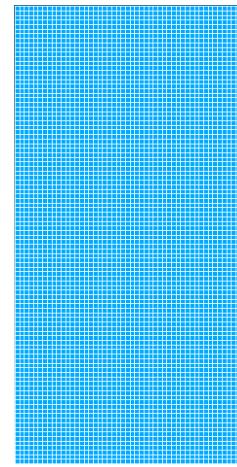


FIGURE 2.11 – Maillage quadrangulaire grossier



tion de ce défaut permettra d'obtenir des solutions bifurquées non homogènes, mais sélectionnera nécessairement une branche de solution particulière.

2.2.1.2 Maillages

Six maillages différents seront utilisés par la suite, trois maillages structurés triangulaires et trois maillages structurés quadrangulaires.

Les deux maillages les plus grossiers sont visibles en figures 2.10 et 2.11 et possèdent chacun 5 000 éléments.

Les deux maillages intermédiaires sont composés de 20 000 éléments, les deux maillages fins sont composés de 80 000 éléments.

2.2.1.3 Essai biaxial homogène

On présente en figures 2.9 et 2.12 les réponses contrainte-déformation axiale et volumique pour un essai biaxial sur un échantillon homogène dont le comportement est modélisé avec la loi de comportement non associée à écrouissage linéaire. Cet essai étant homogène, la partie second gradient de dilatation du comportement n'est pas sollicitée.

En figure 2.9, on note la présence d'un écrouissage positif structurel, dû à l'hypothèse de déformations planes. Dans le cas d'une loi de comportement de Drucker Prager, (LAGIOIA & PANTEGHINI, 2014) montre qu'un comportement adoucissant ou plastique parfait en déformations planes ne peut être observé que pour certaines valeurs critiques de l'angle de Lode. Ces valeurs critiques de l'angle de Lode n'étant pas atteintes à la fin du régime élastique, l'échantillon exhibe un écrouissage plastique

FIGURE 2.12 – Réponse volumique pour un essai biaxial homogène (loi de comportement non associée à écrouissage linéaire)

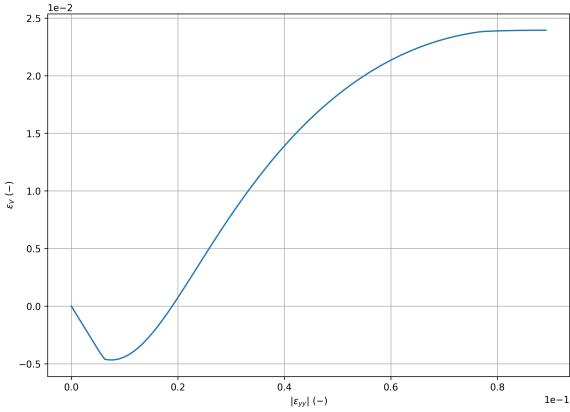
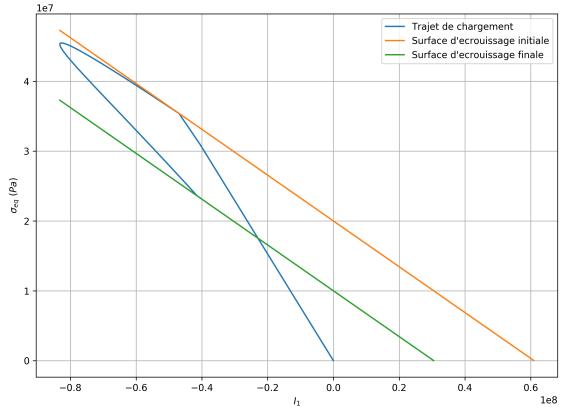


FIGURE 2.13 – Trajet de chargement pour un essai biaxial homogène (loi de comportement non associée à écrouissage linéaire)



durcissant structurel. Dans le plan contrainte équivalente - trace des contraintes, cela se traduit par une rotation du trajet de chargement une fois le seuil d'élasticité initial atteint (voir figure 2.13).

Le critère local de Rice (RICE, 1976) est calculé en chaque point de Gauss grâce à un post-traitement disponible dans *Code_Aster* (FERNANDES, 2012). Ce critère correspond à la perte d'ellipticité des équations, c'est une condition nécessaire d'apparition d'une bande de localisation dans un milieu infini. Lorsqu'il s'agit d'un problème aux limites, les conditions aux limites peuvent retarder l'apparition d'une bande de localisation. On rappelle les résultats de (BÉSUELLE, CHAMBON & COLLIN, 2006) concernant ce critère de Rice étendu aux modèles de second gradient utilisés ici : la bifurcation de la solution vers un état non-homogène localisé est uniquement due au comportement de premier gradient. Le critère de Rice peut donc être calculé en utilisant uniquement le tenseur acoustique défini à partir de la matrice de rigidité de premier gradient (voir partie 1.3.1). Néanmoins, une longueur caractéristique apparaît, faisant intervenir le module de rigidité de la loi second gradient. Si le déterminant du tenseur acoustique est nul, la largeur de bande est infinie, raison pour laquelle la localisation peut être retardée dans un problème de dimension finie.

L'échantillon étant ici homogène, ce critère est atteint au même instant en chaque point. Cet instant se situe avant le maximum de la réponse contrainte-déformation de l'échantillon, ce qui est attendu dans le cas d'une loi de comportement non associée (FOREST & LORENTZ, 2004).

2.2.2 Méthodes numériques pour le franchissement d'instabilités

2.2.2.1 Les techniques de pilotage

Dans le cas de solutions bifurquées, des réponses structurelles instables peuvent apparaître : le taux de restitution d'énergie élastique peut alors être supérieur au taux de dissipation d'énergie dans la zone plastique (CRISFIELD, 1986). Cela conduit à une instabilité structurelle connue sous le nom de "snap-back" : sur les courbes force-déplacement, on constate une diminution conjointe de la force et du déplacement. Cette propriété conduit à des difficultés de convergence supplémentaires : il ne peut y avoir d'évolution continue de l'état mécanique avec une évolution continue et monotone du chargement. Notamment, il n'est pas possible de piloter l'évolution du chargement (en déplacement par exemple) de manière monotone.

Si le franchissement du point singulier (ou parfois appelé point critique) est difficile pour un algorithme de Newton usuel, il est nécessaire d'utiliser des techniques numériques de franchissement d'instabilité. Parmi ces techniques numériques, on compte notamment les techniques dites de pilotage ou de longueur d'arc. A noter, que ces méthodes ne peuvent être utilisées que pour des modèles où le temps ne joue pas de rôle physique, ce qui exclut les problèmes dynamiques ou visqueux. Plusieurs de ces techniques sont disponibles dans *Code_Aster* et sont présentées dans (KAZYMYRENKO, 2013). Ces méthodes visent à contrôler le chargement en ajoutant une inconnue supplémentaire, le facteur de chargement non monotone noté β , et une équation de contrainte supplémentaire. De manière générale, cette équation de pilotage peut se mettre sous la forme suivante :

$$P(\underline{\Delta U}, \beta) = \Delta\tau \quad (2.35)$$

Avec P la fonction de pilotage qui contrôle l'évolution du facteur de chargement β , $\underline{\Delta U}$ l'incrément du champ de déplacement (généralisé) et $\Delta\tau$ un paramètre numérique de contrôle. Ce paramètre renvoie à la progression le long d'une branche de solution. La forme de la fonction de pilotage P dépend de la technique de pilotage utilisée. Dans *Code_Aster*, les méthodes suivantes sont disponibles :

- pilotage par degré de liberté imposé (BATOZ & DHATT, 1979). Le chargement et son évolution sont contrôlés grâce à un degré de liberté d'un point de la structure. Il est donc supposé que ce degré de liberté ait une évolution monotone.
- pilotage par longueur d'arc (CRISFIELD, 1981), où on contrôle la norme de l'incrément de déplacement. Cette méthode est particulièrement adaptée aux instabilités de type géométrique (flambement).

- pilotage par incrément de déformation (BADEL, 2001). Cette méthode impose une valeur maximale de l'incrément de déformation au cours du pas de temps. En choisissant une borne pour l'incrément de déformation, on contrôle l'évolution des points de Gauss les plus chargés, ainsi que la perte de stabilité.
- pilotage par prédiction élastique (LORENTZ & BADEL, 2004). Cette méthode s'applique aux lois de comportement à seuil et contrôle le chargement en fixant la valeur maximale de la prédiction élastique de ce seuil. Cela impose donc qu'au moins un point de Gauss soit en charge plastique, ce qui permet d'éliminer d'éventuelles branches de solutions présentant uniquement une décharge élastique.

D'après (KAZYMYRENKO, 2013), les méthodes de pilotage par incrément de déformation et par prédiction élastique sont les plus adaptées pour le type de problème qui nous intéresse. Le pilotage par prédiction élastique nécessitant des développements spécifiques à chaque loi de comportement et ne s'étant pas montré plus robuste au cours de nos tests, c'est le pilotage par incrément de déformation qui sera retenu par la suite. Dans ce cas, la fonction de pilotage s'écrit de la manière suivante :

$$P(\underline{\Delta U}, \beta) = \max_g \frac{\underline{\varepsilon}_g^-}{\|\underline{\varepsilon}_g^-\|} : \Delta \underline{\varepsilon}_g(\beta) \quad (2.36)$$

Ici, l'indice g balaie tous les points de Gauss de la structure, l'indice $-$ fait référence à l'état de déformation au début du pas de temps courant et $\Delta \underline{\varepsilon}_g$ correspond à l'incrément de déformation.

On présente en figure 2.14 les résultats obtenus pour une loi de comportement associée lorsque la technique de pilotage évoquée précédemment est activée ou non.

Sans technique de pilotage, le franchissement de l'instabilité au moment de la bifurcation vers une branche de solution localisée se fait de manière brutale (voir figure 2.15) en un seul incrément. Cela nécessite potentiellement un grand nombre d'itérations de l'algorithme de Newton pour cet incrément temporel. Par ailleurs, pour certains jeux de paramètres matériaux, il ne nous a pas été possible d'obtenir une solution convergée.

L'activation de la méthode de pilotage permet de suivre la branche de snap-back (voir figure 2.15). Par ailleurs, cette méthode nous a permis d'obtenir des calculs convergés avec snap-back de manière systématique (dans le cas d'une loi de comportement associée). Pour autant, lorsque la méthode sans pilotage converge, elle donne des résultats relativement similaires à ceux obtenus avec pilotage. Les différences observées sont dues à des trajets de chargements différents lors du franchissement de l'instabilité.

FIGURE 2.14 – Réponse globale de l'échantillon soumis à un essai biaxial

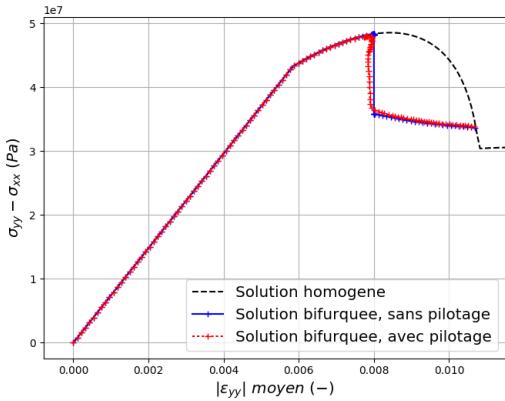
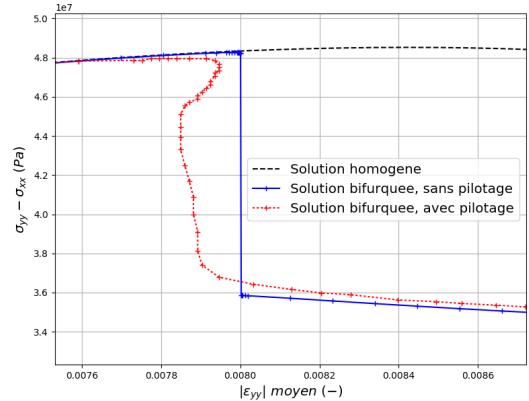


FIGURE 2.15 – Réponse globale de l'échantillon soumis à un essai biaxial : franchissement de l'instabilité



2.2.2.2 Visco-élasticité numérique

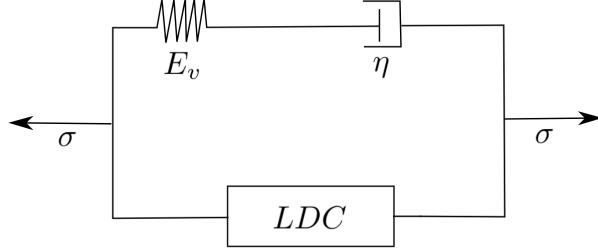
Présentation

La technique de pilotage présentée en section précédente n'a pas permis d'obtenir de solutions convergées en présence d'un snap-back pour une loi de Drucker Prager non associée. Nous proposons donc d'utiliser une autre technique numérique afin de permettre le franchissement de ces instabilités numériques et d'obtenir de manière systématique des calculs convergés.

Il s'agit ici d'utiliser un modèle visco-élastique numérique, en parallèle du comportement de 1^{er} gradient présenté en partie 2.1.2.1. L'objectif de ce modèle numérique est d'exercer une force de rappel visqueuse, afin de faciliter le franchissement de l'instabilité numérique sans venir perturber de manière excessive les résultats obtenus. Ainsi, il s'agit de franchir l'instabilité due à la bifurcation vers une solution localisée de manière progressive.

Ce type de modèle visco-élastique numérique a déjà fait ses preuves dans le cadre de la simulation numérique par une approche non-locale de la rupture ductile de l'acier (CHEN, 2019). Dans le cadre de ces travaux, certains éléments, lorsqu'ils étaient trop distordus, perturbaient la convergence des calculs. L'ajout de ce modèle visco-élastique, en parallèle du comportement, avait permis de réduire la distorsion des éléments et aidait donc à la convergence des calculs sans perturber les résultats de manière significative. Dans notre cas, cette visco-élasticité numérique sera utilisée pour franchir l'instabilité numérique au moment de la bifurcation vers la solution localisée en présence d'un snap-back. La présentation de ce modèle visco-élastique numérique (visible en figure 2.16 dans le cas 1D) reprend pour l'essentiel les travaux

FIGURE 2.16 – Modèle de viscoélasticité numérique



de (CHEN, 2019). Cette technique numérique sera ensuite validée pour le franchissement d'instabilité pour des essais biaxiaux avec une loi de comportement associée. Une fois validée, cette méthode sera appliquée à la loi de comportement non associée.

Ce modèle de visco-élasticité numérique est composé d'un ressort élastique de rigidité matricielle \mathbb{E}_v et d'un amortisseur visqueux \mathbb{D}_v . Dans la suite, l'indice LDC fera référence aux lois de comportement de Drucker-Prager de la partie 2.1.2.1, l'indice v au modèle visco-élastique numérique. On a alors les relations suivantes :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_{LDC} + \underline{\underline{\sigma}}_v, \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_{LDC} = \underline{\underline{\varepsilon}}_v, \quad \frac{d\underline{\underline{\sigma}}}{d\underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{d\underline{\underline{\sigma}}_{LDC}}{d\underline{\underline{\varepsilon}}_{LDC}} + \frac{d\underline{\underline{\sigma}}_v}{d\underline{\underline{\varepsilon}}_v} \quad (2.37)$$

On peut ensuite montrer que le taux de déformation s'écrit :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_v = \mathbb{D}_v^{-1} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_v + \mathbb{E}_v^{-1} : \underline{\underline{\sigma}}_v \quad (2.38)$$

On choisira \mathbb{E}_v et \mathbb{D}_v tels que $\mathbb{E}_v = \frac{E_v}{E_{LDC}} \mathbb{E}_{LDC}$ et $\mathbb{D}_v = \frac{\eta}{E_{LDC}} \mathbb{E}_{LDC}$, avec \mathbb{E}_{LDC} la matrice de Hooke et E_{LDC} le module de Young de la loi de comportement de Drucker Prager. On introduit alors une constante de temps notée τ_v , telle que $\tau_v = \frac{\eta}{E_v}$. Cela conduit ainsi à la relation suivante, entre taux de contrainte visqueuse et taux de déformation :

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}}_v + \frac{1}{\tau_v} \underline{\underline{\sigma}}_v = \mathbb{E}_v : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_v \quad (2.39)$$

On cherche ensuite à intégrer numériquement ce modèle viscoélastique de manière itérative. Pour cela, on suppose que l'évolution de la déformation ε_v est linéaire pour chaque pas de temps $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ (schéma d'ordre 1 en temps).

On peut alors montrer que l'incrément de contrainte visqueuse s'écrit :

$$\Delta \underline{\underline{\sigma}}_v = - \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_v}}\right) \underline{\underline{\sigma}}_v^i + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_v}}\right) \frac{\tau_v}{\Delta t} \mathbb{E}_v : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_v \quad (2.40)$$

et que la matrice tangente visqueuse s'écrit :

$$\frac{d\Delta\sigma_v}{d\Delta\varepsilon_v} = \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_v}}\right) \frac{\tau_v}{\Delta t} \mathbb{E}_v \quad (2.41)$$

Ce schéma d'intégration numérique est ensuite implémenté dans le code éléments finis *Code_Aster*. (CHEN, 2019) propose une démonstration de la convergence, de la cohérence et de la stabilité de l'intégration numérique itérative de ce modèle visco-élastique. Cette démonstration n'est pas reprise ici. Par ailleurs (CHEN, 2019) illustre analytiquement l'effet de ce modèle viscoélastique numérique dans deux situations unidimensionnelles simples : pour une loi de comportement *LDC* élastique et pour une loi élasto-plastique.

Validation et calibrage des paramètres numériques : comportement de Drucker Prager associé

On souhaite montrer que l'ajout de ce modèle visco-élastique numérique en parallèle de la loi de comportement permet effectivement de franchir les instabilités numériques de manière fiable, sans venir perturber les résultats de manière significative. Pour cela, on réalise une comparaison des réponses contraintes - déformations obtenues pour plusieurs valeurs des paramètres numériques E_v et τ_v . On compare ces réponses à celles obtenues dans le cas de solutions obtenues par pilotage en déformations ou par franchissement de l'instabilité de manière directe. Cette comparaison nécessite donc d'avoir obtenu des calculs de référence convergés. Elle se fera donc pour une loi de comportement de type Drucker Prager associée. Une fois qu'un jeu optimal de paramètres numériques (E_v , τ_v) sera déterminé, on calculera le ratio de contraintes visqueuses, défini par $\max \frac{\|\sigma_v\|}{\|\sigma\|}$ pour ce jeu de paramètres. On s'assurera ensuite que les niveaux de contraintes visqueuses atteints lors des calculs avec la loi de comportement non associée sont du même ordre.

Les paramètres matériaux utilisés sont ceux présentés en tableau 2.1. Seul le paramètre κ_c diffère : afin de tester cette méthode numérique sur un calcul présentant une instabilité, on choisit un paramètre κ_c de 0.025. On note Δt_{ini} le pas de temps initial et h le module d'écrouissage, défini par $h = \frac{\sigma_0 - \sigma_u}{\kappa_c}$. A noter que l'algorithme de Newton global peut être amené à redécouper le pas de temps de manière automatique en l'absence de convergence, le pas de temps s'écrit alors Δt .

Les simulations numériques d'essais biaxiaux sont réalisées pour des valeurs de E_v et τ_v telles que $\frac{\tau_v}{\Delta t_{ini}} = [10^{-3}; 10^{-2}; 10^{-1}; 1.0]$ et $\frac{E_v}{h} = [0.1; 1.0; 2.0; 10.0]$.

L'effet des paramètres numériques de viscoélasticité sur la réponse contrainte-déformation d'un essai biaxial est visible en figure 2.17. La réponse obtenue pour le calcul de référence y est aussi visible. On constate bien que les effets visqueux dimi-

nuent avec les ratios $\frac{E_v}{h}$ et $\frac{\tau_v}{\Delta t_{ini}}$ et que la solution obtenue converge vers les solutions de référence lorsque ces deux ratios tendent vers 0. Au contraire, une augmentation de ces ratios conduit à une surestimation de la contrainte ainsi qu'à un retard de la bifurcation vers une solution localisée.

Par la suite, les paramètres visqueux numériques seront calibrés de sorte à avoir : $\frac{E_v}{h} = 1.0$ et $\frac{\tau_v}{\Delta t_{ini}} = 10^{-3}$. Au vu des figures 2.17 et 2.18, ces valeurs permettent d'obtenir une solution qui reste peu perturbée par le modèle viscoélastique numérique :

- Avant le franchissement de l'instabilité, l'algorithme de Newton ne rencontre pas de difficultés de convergence et il n'est donc pas nécessaire de redécouper le pas de temps. On a : $\frac{\tau_v}{\Delta t} = \frac{\tau_v}{\Delta t_{ini}} \ll 1$. Au vu des équations 2.40 et 2.41, ainsi que de la figure 2.17, le comportement visqueux ne perturbe pas la solution de référence : les incrément de contrainte visqueuse sont négligeables.
- Au moment du franchissement de l'instabilité, l'algorithme de Newton rencontre des difficultés de convergence et procède à un redécoupage automatique du pas de temps jusqu'à convergence ou jusqu'à une valeur limite telle que $\frac{\tau_v}{\Delta t} = 10^{-1}$ (arrêt du calcul). Le redécoupage du pas de temps conduit à une augmentation du ratio $\frac{\tau_v}{\Delta t}$. Au vu des équations 2.40 et 2.41, cela génère une contrainte visqueuse, qui permet de franchir progressivement l'instabilité, favorisant ainsi la convergence des calculs (voir figure 2.19).
- Ensuite, l'algorithme de Newton cherche régulièrement à augmenter le pas de temps afin de retrouver l'incrément initial Δt_{ini} . On a de nouveau $\frac{\tau_v}{\Delta t} = \frac{\tau_v}{\Delta t_{ini}} \ll 1$: les incrément de contraintes visqueuses sont de nouveau négligeables.

Par ailleurs, nous constaterons par la suite que ce jeu de paramètres $\frac{E_v}{h} = 1.0$ et $\frac{\tau_v}{\Delta t_{ini}} = 10^{-3}$ permet d'obtenir des solutions convergées avec la loi de comportement non associée. Pour ce jeu de paramètres, le ratio de contraintes $\max \frac{\|\sigma_v\|}{\|\sigma\|}$ est visible en figure 2.20. Ce ratio permet de quantifier la perturbation de la solution obtenue par l'ajout du modèle viscoélastique numérique. On constate que pour le jeu de paramètres optimaux retenus, ce ratio est de l'ordre de 5% au maximum, et cette valeur maximale est atteinte au cours du franchissement de l'instabilité. Par la suite, on s'assurera donc que cette valeur limite n'est pas atteinte pour les calculs réalisés avec la loi de comportement non associée.

Application : comportement de Drucker Prager non associé

On reprend ici des simulations numériques d'essais biaxiaux avec la loi de comportement non associée à écrouissage linéaire. Les paramètres matériaux sont identiques à ceux du paragraphe précédent. On retient le jeu de paramètres numériques optimaux établi précédemment : $\frac{E_v}{h} = 1.0$ et $\frac{\tau_v}{\Delta t_{ini}} = 10^{-3}$.

FIGURE 2.17 – Réponse globale de l'échantillon pour un essai biaxial en fonction des paramètres numériques de viscosité

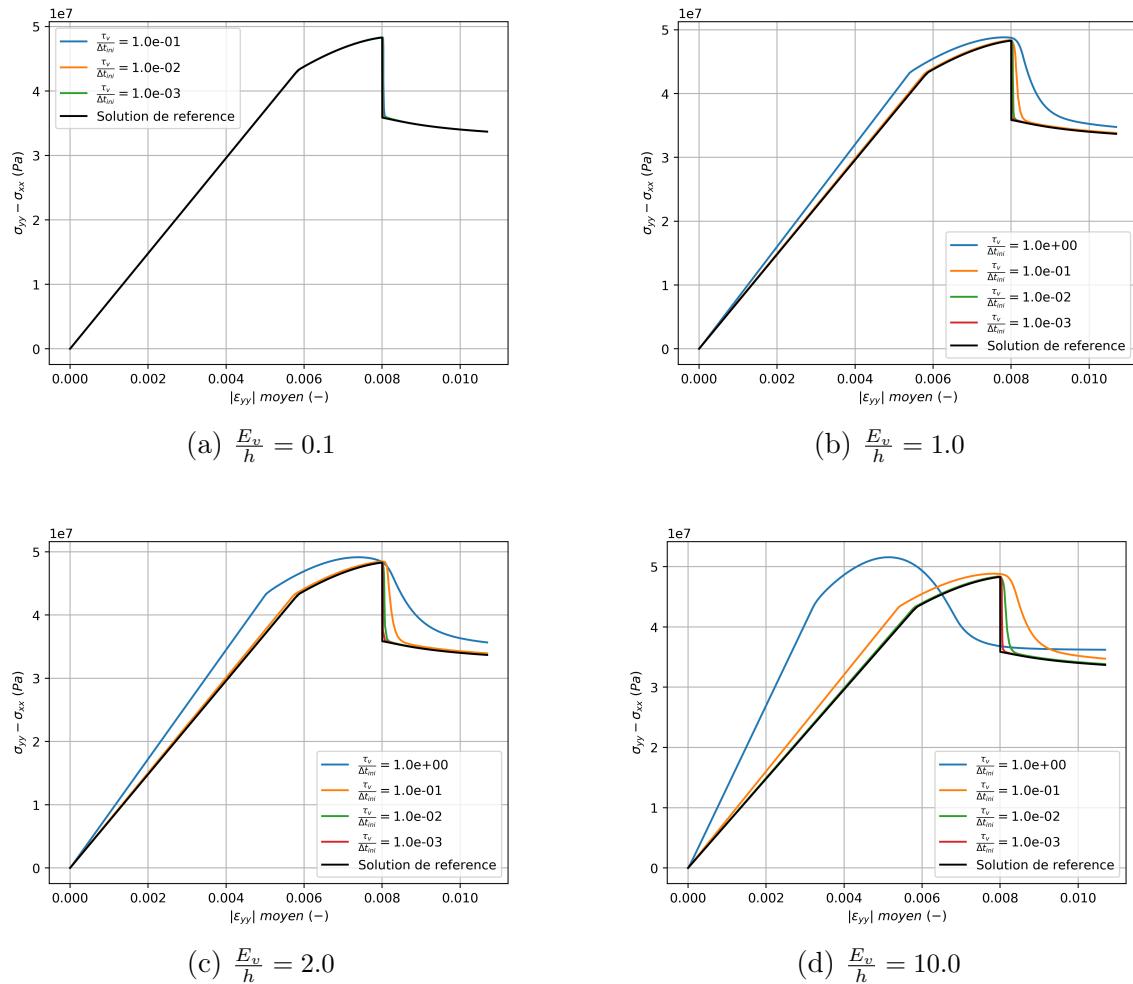


FIGURE 2.18 – Réponse globale de l'échantillon soumis à un essai biaxial pour un calcul sans viscosité et sans pilotage (solution de référence) et pour $\frac{E_v}{h} = 1.0$ et $\frac{\tau_v}{\Delta t_{ini}} = 10^{-3}$

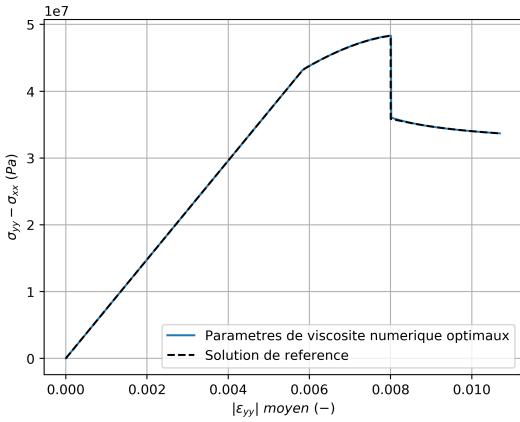


FIGURE 2.19 – Réponse globale de l'échantillon soumis à un essai biaxial : franchissement de l'instabilité pour un calcul sans viscosité et sans pilotage (solution de référence) et pour $\frac{E_v}{h} = 1.0$ et $\frac{\tau_v}{\Delta t_{ini}} = 10^{-3}$

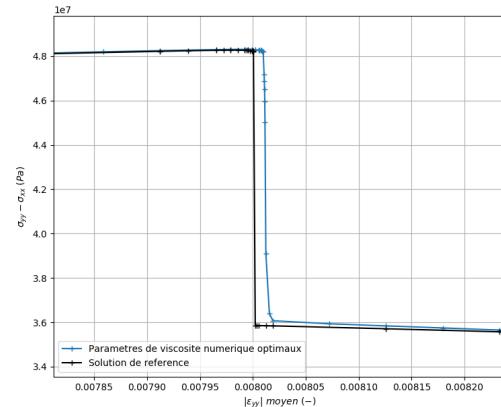


FIGURE 2.20 – Ratio $\max \frac{||\sigma_v||}{||\sigma||}$ au cours du chargement pour $\frac{E_v}{h} = 1.0$ et $\frac{\tau_v}{\Delta t_{ini}} = 10^{-3}$

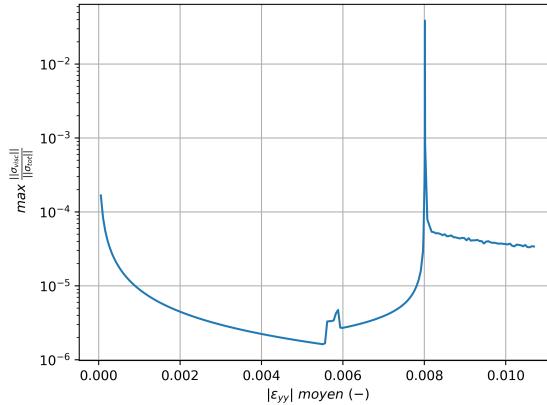


FIGURE 2.21 – Réponse globale de l'échantillon pour un essai biaxial pour plusieurs méthodes numériques (comportement non associé)

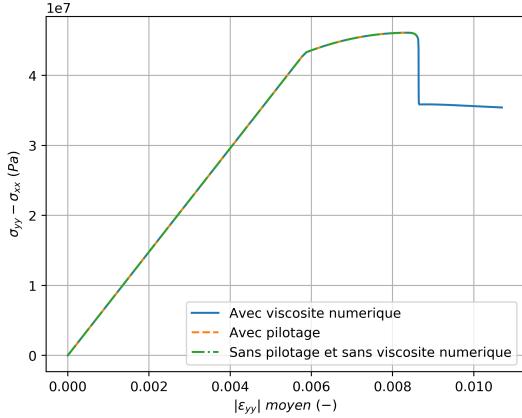
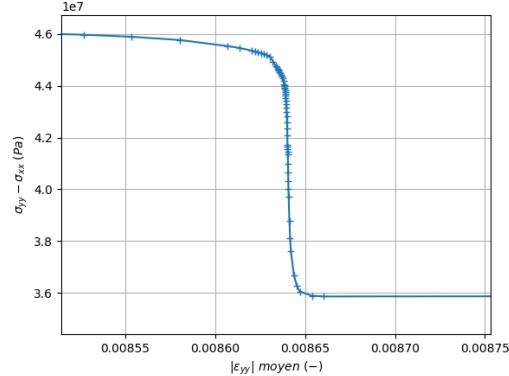


FIGURE 2.22 – Réponse globale de l'échantillon pour un essai biaxial : franchissement de l'instabilité en présence de viscosité (comportement non associé)



On présente en figure 2.21 les résultats obtenus dans trois situations : sans pilotage et sans viscosité ; avec pilotage ; avec viscosité numérique. Comme précédemment, avant l'instabilité numérique, les trois courbes se superposent, ce qui indique que la viscosité numérique ne perturbe pas la solution. Cependant, en l'absence de viscosité numérique, le calcul ne converge plus au moment de la bifurcation vers une solution localisée. En présence de viscosité numérique, une force de rappel visqueuse s'exerce et le franchissement de l'instabilité par l'algorithme de Newton se fait de manière progressive (figure 2.22), favorisant ainsi une meilleure convergence globale des calculs. On présente en figure 2.23 les niveaux de contraintes visqueuses observées au cours du calcul. On constate que le ratio $\max \frac{\|\sigma_v\|}{\|\sigma\|}$ est du même ordre que celui observé lors de la validation de cette méthode dans le cas d'une loi de comportement associée. Ce ratio est de l'ordre de 5% au maximum, tout comme c'était le cas dans le paragraphe précédent pour la loi de comportement associée.

En conclusion, le modèle viscoélastique numérique, ajouté en parallèle de la loi de comportement de 1^{er} gradient, aide à la convergence des calculs en permettant un franchissement progressif de l'instabilité lors de la bifurcation vers une solution localisée. Par ailleurs, cette technique numérique n'entraîne pas une perturbation significative de la solution obtenue.

On précise que cette méthode numérique n'est activée que pour certains jeux de paramètres matériaux. Par exemple, pour des valeurs suffisamment élevées du paramètre de déformation de la loi de comportement non associée ($\kappa_c = 0.1$ ici, faible écrouissage négatif, voir figure 2.24 pour un exemple), on n'observe pas de

FIGURE 2.23 – Ratio $\max \frac{\|\sigma_v\|}{\|\underline{\sigma}\|}$ au cours de l'essai biaxial présenté en figure 2.21

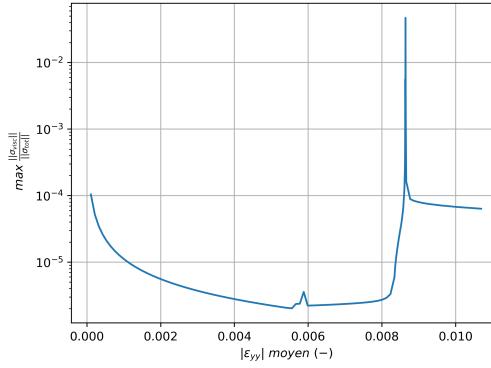
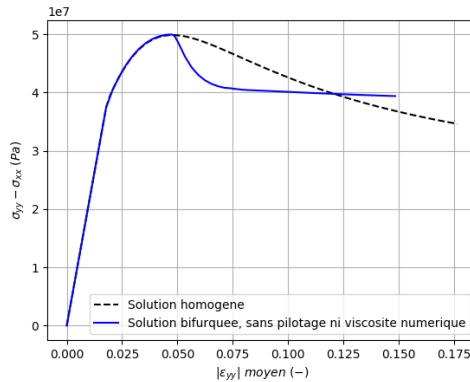


FIGURE 2.24 – Réponse globale d'un essai biaxial (loi non associée) en l'absence de snap-back



snap-back et aucun problème de convergence de l'algorithme de Newton global ne se pose. Cependant, des études de sensibilité seront réalisées au chapitre 3, ce qui nécessite une convergence robuste et systématique des calculs réalisés pour une large gamme de paramètres matériaux.

2.2.3 Méthodes numériques pour le traitement de la quasi-incompressibilité

2.2.3.1 Verrouillage volumique

Certains matériaux possèdent une propriété dite d'incompressibilité. La transformation se fait à volume constant. En petites déformations, cela se traduit par la condition suivante :

$$\operatorname{tr}(\underline{\varepsilon}) = \operatorname{div}(\underline{u}) \approx 0 \quad (2.42)$$

Par exemple, dans le cas de l'élasticité linéaire isotrope incompressible ($\nu = \frac{1}{2}$), la densité d'énergie libre fait uniquement intervenir la partie déviatorique de la déformation :

$$\phi(\underline{\varepsilon}) = \mu \underline{\varepsilon}^D : \underline{\varepsilon}^D \quad (2.43)$$

Ainsi, seule la partie déviatorique de la contrainte peut être déduite de cette densité d'énergie libre. La contrainte s'exprime donc à une constante près, noté λ :

$$\begin{cases} \underline{\sigma}^D = 2\mu \underline{\varepsilon}^D \\ \underline{\sigma} = 2\mu \underline{\varepsilon}^D + \lambda I \end{cases} \quad (2.44)$$

La condition $\operatorname{div}(\underline{u}) \approx 0$ introduit une contrainte supplémentaire sur les degrés de libertés du problème. Cette contrainte supplémentaire eut conduire à des difficultés de convergence ou à l'apparition d'oscillations de la contrainte aux points de Gauss des éléments. Ces difficultés d'ordre numérique sont connues sous le nom de verrouillage volumique. Ce phénomène de verrouillage volumique n'est pas limité au cas de l'élasticité incompressible. C'est un problème qui peut aussi se poser en élasticité linéaire isotrope lorsque le coefficient de Poisson tend vers 0.5. On parle alors de quasi-incompressibilité.

Dans le cas du comportement de Drucker-Prager non associé utilisé jusqu'à maintenant, on rappelle que la loi d'écoulement se met sous la forme suivante (pour $\sigma_{eq} \neq 0$) :

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^p = \dot{\kappa} \frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}} \quad (2.45)$$

Le taux de déformation volumique s'écrit alors :

$$\operatorname{tr}(\dot{\underline{\varepsilon}}^p) = 3\dot{\kappa} b(\kappa) \quad (2.46)$$

FIGURE 2.25 – Evolution de la déformation volumique au cours d'une essai biaxial homogène (loi de comportement Drucker Prager non associée à écrouissage linéaire)

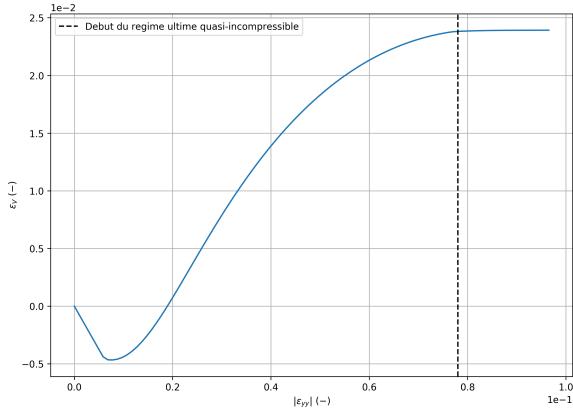
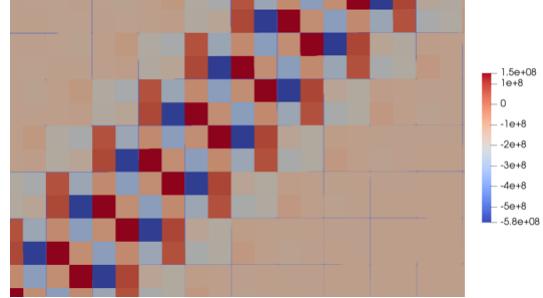


FIGURE 2.26 – Trace des contraintes au sein de la bande de localisation dans le régime ultime



La fonction $b(\kappa)$ est définie en partie 2.1.2.1. Cette fonction pilote l'évolution de la dilatance en fonction de l'écrouissage. Cette fonction est égale à 0 passée une valeur limite κ_c (ou tend vers 0 de manière asymptotique). Ainsi, pour des valeurs suffisamment élevées de l'écrouissage, on a $\text{tr}(\underline{\varepsilon}^p) \approx 0$. Cela conduit à $\text{tr}(\underline{\varepsilon}) \approx 0$, la déformation élastique étant généralement négligeable devant la déformation plastique. Ce phénomène est illustré en figure 2.25 (évolution de la déformation volumique pour un essai biaxial homogène), où on constate que la déformation volumique évolue peu dans le régime ultime du comportement matériau.

Pour des valeurs suffisamment élevées de la variable d'écrouissage κ , le comportement non associé est donc quasi-incompressible. Dans le cas de solutions bifurquées pour un essai biaxial, une fois le régime ultime atteint dans la bande de localisation, cela se traduit par un phénomène d'oscillation de la contrainte dans la bande de localisation (voir figure 2.26 pour une illustration dans le cas du calcul bifurqué présenté à la partie précédente 2.2.2.2). On note que cette condition de quasi-incompressibilité dans le régime ultime du comportement matériau modifie nécessairement le caractère régularisant du modèle de second gradient de dilatation qui est basé sur le gradient de la déformation volumique. Ce dernier point sera abordé en détail en partie 2.2.4.

Plusieurs méthodes numériques sont disponibles dans la littérature afin de relâcher la condition $\text{div}(\underline{u}) \approx 0$ et de résoudre le problème de verrouillage volumique. On présente ici quelques-unes de ces méthodes : intégrations réduite et sélective ; méthodes B-bar et F-bar ; formulations mixtes. Voir (AL-AKHRASS, 2014) pour une

comparaison plus détaillée de ces méthodes.

Intégration réduite et sélective

Les méthodes d'intégration réduite, introduites par (ZIENKIEWICZ, TAYLOR & TOO, 1971), visent à utiliser une quadrature d'ordre inférieur à celle nécessaire pour obtenir une intégration exacte dans le cas d'un problème linéaire. Ce nombre de points de Gauss réduit dans l'élément fini permet de relâcher la condition $\text{div}(\underline{u}) \approx 0$ (condition exprimée en chaque point où la loi de comportement est évaluée, c'est à dire en chaque point de Gauss). Cependant, il est connu que ce type de méthode peut conduire à une matrice de rigidité singulière et l'apparition de modes à énergie nulle.

La méthode d'intégration sélective (DOHERTY, WILSON & TAYLOR, 1969) est une adaptation de l'intégration réduite, où seuls certains termes correspondant à la contrainte d'incompressibilité sont sous-intégrés. Les termes restants sont intégrés de manière exacte. Cette technique nécessite donc de pouvoir distinguer les parties hydrostatique et déviatorique du comportement. Lorsque cette séparation est effectivement possible, la méthode d'intégration sélective donne de meilleurs résultats que l'intégration réduite.

Méthodes B-bar et F-bar

La méthode B-bar a été proposée par (HUGHES, 1980) afin de résoudre les problèmes rencontrés pour les deux méthodes précédentes. Le nom de cette méthode fait référence à la matrice $\underline{\underline{B}}$, qui relie les déformations aux déplacements dans une discrétisation éléments finis. Dans un premier temps, il s'agit de décomposer cette matrice en deux termes : un terme déviatorique $\underline{\underline{B}}^D$ et un terme hydrostatique $\underline{\underline{B}}^v$. Dans un second temps, le terme hydrostatique est remplacé, par exemple par sa moyenne sur tout l'élément fini, que l'on notera $\bar{\underline{\underline{B}}}^v$. On utilise alors la matrice $\underline{\underline{B}}$ suivante : $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}^D + \bar{\underline{\underline{B}}}^v$.

La méthode F-bar (SOUZA NETO et al., 1996) (SOUZA NETO, PERIĆ & OWEN, 2011) est une variante en grandes déformations de la méthode B-bar, qui utilise une décomposition multiplicative du gradient de la transformation (noté $\underline{\underline{F}}$) en une partie déviatorique et une partie hydrostatique.

Formulations mixtes

Cette méthode a été développée dans un premier temps dans les travaux de (HERRMANN, 1965). Il s'agit d'introduire des inconnues supplémentaires dans le problème, par exemple sous la forme de la déformation volumique θ et de la pression

λ . On impose l'égalité entre $tr(\underline{\varepsilon})$ et θ à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange. On peut alors montrer que ce multiplicateur de Lagrange est égal à la pression λ . On parle de formulation mixte à 3 champs (TAYLOR, 2000) (SIMO, TAYLOR & PISTER, 1985).

Le lagrangien du problème s'écrit alors :

$$L(\underline{u}, \theta, \lambda) = \int_{\Omega} \underline{\sigma}^D : \left(\underline{\underline{\varepsilon}}^D(\underline{u}) + \frac{1}{3} \theta \underline{\underline{I}} \right) + \lambda(div(\underline{u}) - \theta) \, dV - \int_{\partial\Omega} \underline{t} \cdot \underline{u} \, dS \quad (2.47)$$

Des méthodes à 2 champs ont aussi été développées et sont disponibles dans la littérature (voir par exemple (SUSSMAN & BATHE, 1987)). Dans tous les cas, une attention particulière doit être portée au choix des fonctions d'interpolation pour les champs $(\underline{u}, \theta, \lambda)$: ces fonctions doivent vérifier la condition LBB afin d'obtenir une formulation numérique stable (condition Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi , voir (BOFFI, BREZZI & FORTIN, 2013)).

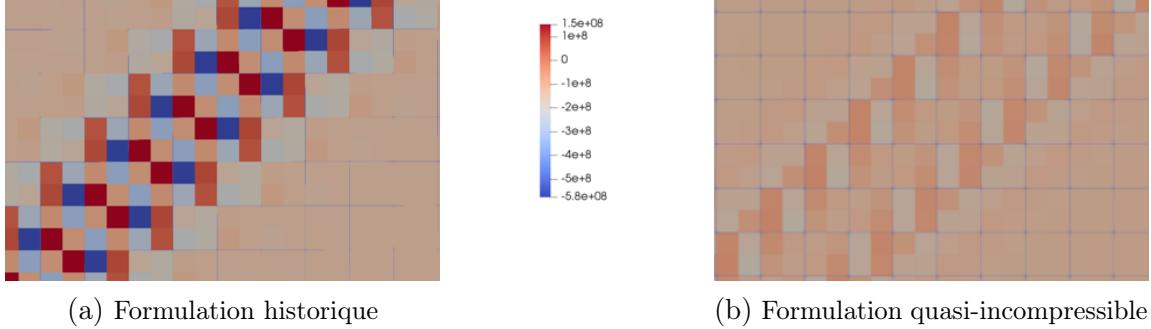
2.2.3.2 Formulation numérique quasi-incompressible du modèle de second gradient de dilatation

Au vu de la revue précédente de quelques méthodes disponibles pour le traitement de l'incompressibilité, on constate que la formulation mixte à 3 champs $\underline{u}, \theta, \lambda$ présente de nombreuses similitudes avec le modèle de second gradient de dilatation : ces deux formulations utilisent les mêmes champs. En s'inspirant de la formulation mixte à 3 champs, il est donc possible de modifier la formulation numérique du modèle de second gradient de dilatation afin de traiter le problème du verrouillage volumique. On notera aussi que ce choix est cohérent avec d'autres modèles disponibles dans *Code_Aster*. En effet, une formulation mixte pour les éléments quasi-incompressibles est déjà disponible dans *Code_Aster* (ABBAS, 2014) et un autre modèle à gradient fait le choix d'utiliser cette méthode pour la modélisation de l'endommagement ductile (ZHANG, 2016) (CHEN, 2019).

On rappelle ici la formulation relâchée du modèle de second gradient proposée par (FERNANDES, 2009). Pour tout champ cinématiquement admissible $(\underline{u}^*, \lambda^*, \theta^*)$, on a alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\underline{\sigma} : \underline{\nabla} \underline{u}^* + \underline{S} \cdot \underline{\nabla} \theta^* - \lambda^* (\underline{\varepsilon}_V - \theta) + \lambda (\underline{\varepsilon}_V^* - \theta^*) + r (\underline{\varepsilon}_V - \theta) (\underline{\varepsilon}_V^* - \theta^*)) \, dV \\ = \int_{\partial\Omega} (\underline{p} \cdot \underline{u}^* + P \underline{n} \cdot \underline{D} \underline{u}^*) \, dS \end{aligned} \quad (2.48)$$

FIGURE 2.27 – Trace des contraintes au sein de la bande de localisation dans le régime ultime



En suivant (TAYLOR, 2000) et (LORENTZ, BESSON & CANO, 2008), on propose de modifier cette formulation relâchée du problème afin de tenir compte de la quasi-incompressibilité dans le régime ultime du comportement matériau. La déformation volumique $\operatorname{div}(\underline{u}) = \varepsilon_V$ étant déjà dupliquée en une variable θ , nous proposons simplement d'utiliser cette variable θ au niveau de la loi de comportement de premier gradient. Pour tout champ cinématiquement admissible $(\underline{u}^*, \lambda^*, \theta^*)$, on a alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\underline{\underline{\sigma}} : \left(\underline{\underline{\varepsilon}}_D^* + \frac{1}{3} \theta^* \underline{\underline{I}} \right) + \underline{S} \cdot \underline{\nabla} \theta^* + \lambda^* (\varepsilon_V - \theta) + \lambda (\varepsilon_V^* - \theta^*) + r (\varepsilon_V - \theta) (\varepsilon_V^* - \theta^*) \right) dV \\ = \int_{\partial\Omega} (\underline{p} \cdot \underline{u}^* + P_n \cdot \underline{\underline{D}} \underline{u}^*) dS \end{aligned} \quad (2.49)$$

On note ici que nous faisons le choix d'utiliser par la suite une formulation symétrique du problème, à la différence de 2.48. (FERNANDES, 2009) faisait le choix d'utiliser d'une matrice non symétrique afin de préserver le caractère défini positif de la matrice de rigidité pour la résolution du système d'équations linéaire par un algorithme de Newton. Cependant, les solveurs linéaires que nous utilisons maintenant sont suffisamment robustes pour s'accommoder du terme positif sur les deux composantes en λ (ORDONEZ, 2022). Nous choisissons donc d'utiliser une formulation symétrique.

Tout comme dans le cas du modèle de second gradient de dilatation de (FERNANDES, 2009), le terme d'augmentation $r(\varepsilon_V - \theta)(\varepsilon_V^* - \theta^*)$ introduit une coercivité supplémentaire dans l'égalité entre ε_V et θ . Le caractère optionnel de ce terme sera discuté par la suite.

On montre en figure 2.27 les valeurs de la trace des contraintes dans la bande de localisation dans le régime ultime, une fois que la déformation volumique cesse

d'évoluer dans la bande de localisation. Ces illustrations sont obtenues dans le cas du calcul bifurqué présenté à la partie 2.2.2.

La figure 2.27 met en évidence le phénomène de verrouillage volumique pour la formulation historique du modèle de second gradient de dilatation : la condition d'incompressibilité appliquée en chaque point de Gauss réduit la dimension de l'espace des déplacements. Le problème est surconstraint, ce qui conduit à l'apparition d'oscillations des contraintes au sein de la bande de localisation.

Dans la formulation quasi-incompressible du modèle de second gradient de dilatation, l'introduction d'un degré de liberté supplémentaire θ dans la loi de comportement de 1^{er} gradient permet de relâcher cette contrainte d'incompressibilité. L'égalité entre θ et $\varepsilon_V = \text{tr}(\varepsilon)$ est assurée à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange λ et d'un terme d'augmentation. On constate que cette formulation présente un premier avantage par rapport à la formulation historique du modèle de second gradient de dilatation : elle permet effectivement de réduire les oscillations des contraintes au sein de la bande de localisation, dues au verrouillage volumique.

2.2.3.3 Comparaison des formulations numériques

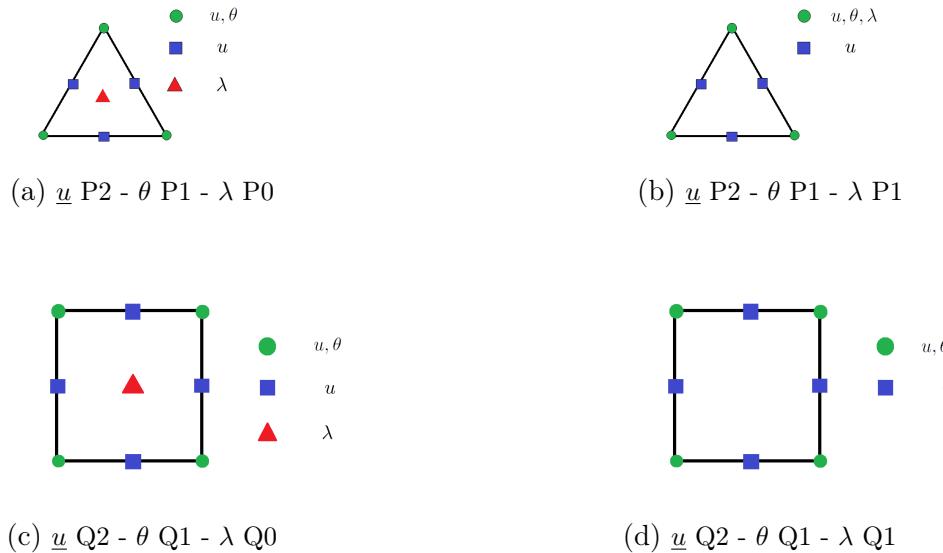
Cette partie vise à comparer les performances numériques des deux formulations du modèle de second gradient précédemment évoquées, afin de mettre en évidence un second avantage de la formulation quasi-incompressible du modèle de second gradient de dilatation.

Pour chacune des formulations, différentes discrétisations des champs $(\underline{u}, \theta, \lambda)$ seront testées, pour des éléments quadrangulaires et triangulaires. On insistera particulièrement sur le choix des fonctions de discrétisation pour le multiplicateur de Lagrange λ . L'intérêt du terme d'augmentation $r(\varepsilon_V - \theta)(\varepsilon_V^* - \theta^*)$ sera aussi discuté pour chacune des deux formulations.

Pour les deux formulations, les discrétisations suivantes seront testées et comparées (voir éléments en figure 2.28) :

- élément triangulaire (\underline{u} P2 - θ P1 - λ P0). Déplacement \underline{u} quadratique, déformation volumique θ linéaire, multiplicateur de Lagrange λ constant par élément. Cette discrétisation est présentée comme optimale pour les éléments triangulaires dans (FERNANDES, 2009).
- élément triangulaire (\underline{u} P2 - θ P1 - λ P1). Déplacement \underline{u} quadratique, déformation volumique θ et multiplicateur de Lagrange λ linéaires. Cet élément correspond à l'élément de Taylor-Hood (TAYLOR, 2000) utilisé dans la littérature des formulations mixtes incompressibles.
- élément quadrangulaire (\underline{u} Q2 - θ Q1 - λ Q0). Déplacement \underline{u} quadratique, déformation volumique θ linéaire, multiplicateur de Lagrange λ constant par

FIGURE 2.28 – Eléments et interpolations



élément. Cette discréétisation est présentée comme optimale pour les éléments quadrangulaires dans (FERNANDES, 2009).

- élément quadrangulaire (\underline{u} Q2 - θ Q1 - λ Q1). Déplacement \underline{u} quadratique, déformation volumique θ et multiplicateur de Lagrange λ linéaires.

Les maillages utilisés sont présentés en partie 2.2.1.2. Les paramètres matériau utilisés sont ceux présentés en tableau 2.1 pour une loi de comportement de Drucker Prager non associée à écrouissage exponentiel ($\kappa_c = 0.1$).

La performance numérique de chaque formulation et discréétisation est évaluée sur la base des critères suivants :

- temps CPU
 - convergence et présence d'oscillations au sein des éléments (dans le régime adoucissant et/ou verrouillage volumique dans le régime ultime)
 - nécessité d'utiliser un terme d'augmentation $r(\varepsilon_V - \theta)(\varepsilon_V^* - \theta^*)$

Au vu du grand nombre de simulations réalisées ici (deux formulations, avec ou sans terme d'augmentations, deux types de maillages, deux interpolations), on ne présentera que quelques figures représentatives des résultats obtenus.

2.2.3.4 Formulation historique du modèle de second gradient de dilatation

On présente ici les résultats obtenus pour la formulation historique du modèle de second gradient de dilatation, avec les quatres discrétisations précédemment évoquées, en l'absence et en présence d'un terme d'augmentation $r(\varepsilon_V - \theta)(\varepsilon_V^* - \theta^*)$.

On présente la déformation plastique déviatorique cumulée (variable d'écrouissage) aux points de Gauss au sein de la bande de localisation dans le régime adoucissant pour le maillage grossier : en figure 2.29 en l'absence du terme d'augmentation dans la formulation numérique ; en figure 2.30 en présence d'un terme d'augmentation dans la formulation numérique. On précise par ailleurs que pour chacune de ces configurations, on observe des oscillations de la trace des contraintes dans la bande de localisation dans le régime ultime quasi-incompressible (voir figure 2.27).

On constate qu'en l'absence du terme d'augmentation, des oscillations (ici de la déformation plastique déviatorique cumulée) peuvent apparaître aux points de Gauss d'un même élément lorsque le multiplicateur de Lagrange est pris constant par élément. En effet, l'espace de discrétisation (que l'on notera Λ ici) du multiplicateur de Lagrange joue un rôle important :

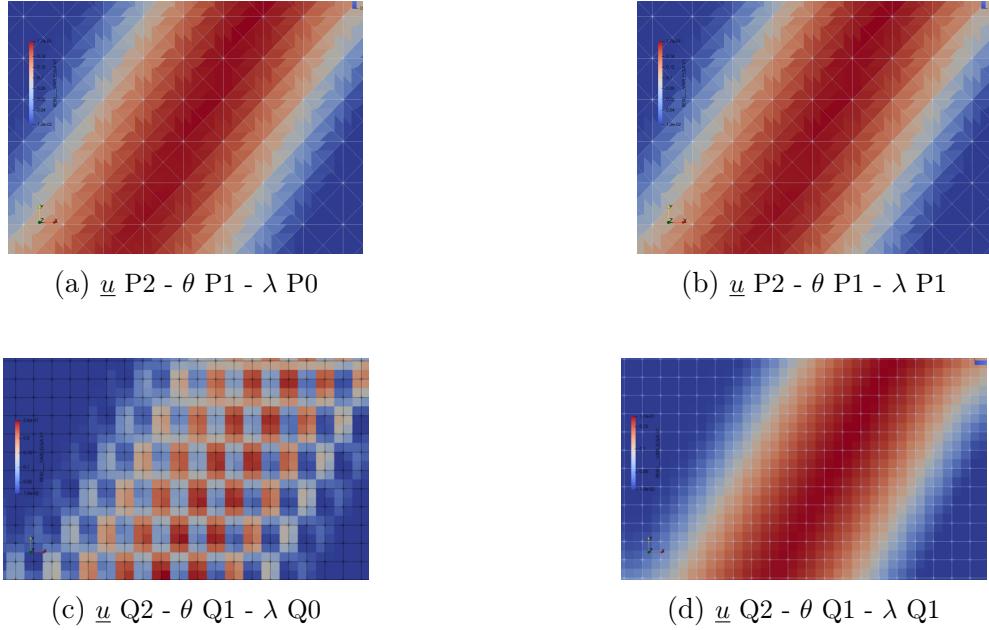
$$\forall \lambda \in \Lambda, \langle \theta - \varepsilon_V, \lambda \rangle = 0 \Rightarrow \theta = \varepsilon_V + \theta^\perp \text{ avec } \theta^\perp \in \Lambda^\perp \quad (2.50)$$

(JOUAN, 2015) montre que pour un multiplicateur de Lagrange constant par élément quadrangulaire, l'espace Λ^\perp est suffisamment riche pour que des oscillations de quantités aux points de Gauss puissent apparaître. Cela correspond à ce qui est constaté en figure 2.29c. (FERNANDES, 2009) recommande alors d'utiliser un terme d'augmentation $r(\varepsilon_V - \theta)(\varepsilon_V^* - \theta^*)$ dans la formulation numérique afin d'ajouter une coercivité supplémentaire dans l'égalité entre ε_V et θ . L'effet de ce terme d'augmentation est visible en figure 2.30c : on constate l'absence d'oscillations aux points de Gauss. Grâce à ce terme supplémentaire, l'égalité entre déformation volumique et θ est correctement imposée.

Par ailleurs, l'espace Λ retenu pour la discrétisation du multiplicateur de Lagrange λ ne doit pas être trop large afin de vérifier la condition LBB. (ERN & GUERMOND, 2013) montre que les éléments utilisés ici vérifient bien cette condition dans le cas de formulations mixtes incompressibles, (FERNANDES, 2009) complète ces résultats en démontrant leur applicabilité au modèle de second gradient de dilatation.

On présente le nombre d'itérations nécessaire à l'algorithme de Newton global pour converger à chaque incrément de chargement : en figure 2.31 pour la configuration u Q2 - θ Q1 - λ Q0 avec augmentation ; en figure 2.32 en l'absence du terme d'augmentation. On constate donc que la présence de ces oscillations pose des

FIGURE 2.29 – Déformation plastique déviatorique cumulée aux points de Gauss au sein de la bande de localisation dans le régime adoucissant : formulation historique **sans terme d'augmentation**



problèmes de convergence pour l'algorithme de Newton global et vient par ailleurs perturber la réponse de l'échantillon (voir figure 2.34). En l'absence de ces oscillations, pour une formulation numérique augmentée, on constate la convergence au maillage des réponses contrainte-déformations obtenues (voir figure 2.33).

A ce stade, on retrouve donc les recommandations de (FERNANDES, 2009) : avec la formulation historique du modèle de second gradient de dilatation, il est recommandé d'utiliser un terme d'augmentation $r(\varepsilon_V - \theta)(\varepsilon_V^* - \theta^*)$. A noter que la valeur numérique de r utilisée ici (voir tableau 2.2) a nécessité un calibrage préalable qui n'est pas présenté ici. Par ailleurs, il est connu que l'utilisation d'un tel terme d'augmentation peut conduire à un mauvais conditionnement de la matrice tangente du problème discret (FERNANDES, 2009).

Pour la formulation historique augmentée, les temps CPU en fonction du nombre d'éléments sont visibles en figure 2.35 pour les maillages quadrangulaires et en figure 2.36 pour les maillages triangulaires.

On fait remarquer que les discrétisations (\underline{u} Q2 - θ Q1 - λ Q0) et (\underline{u} Q2 - θ Q1 - λ Q1) possèdent un nombre de degrés de libertés relativement similaire. En effet, dans le cas d'un maillage régulier à l'intérieur de la structure, chaque élément

FIGURE 2.30 – Déformation plastique déviatorique cumulée aux points de Gauss au sein de la bande de localisation dans le régime adoucissant : formulation historique **avec terme d'augmentation**

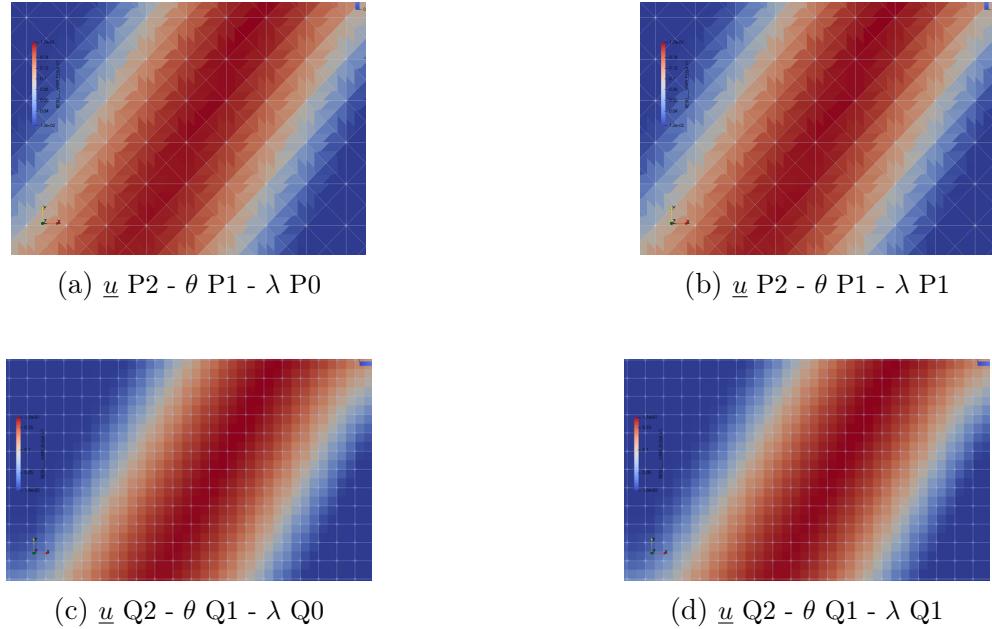


FIGURE 2.31 – Nombre d’itérations de l’algorithme de Newton par incrément de chargement. Configuration $\underline{u} Q_2 - \theta Q_1 - \lambda Q_0$ avec augmentation, maillage grossier.

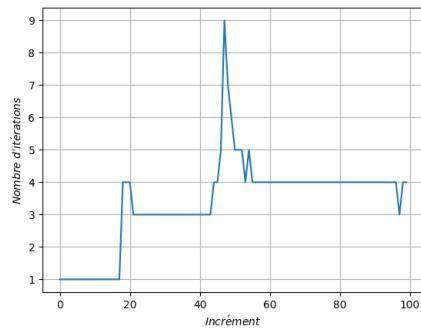


FIGURE 2.32 – Nombre d’itérations de l’algorithme de Newton par incrément de chargement. Configuration $\underline{u} Q_2 - \theta Q_1 - \lambda Q_0$ sans augmentation, maillage grossier.

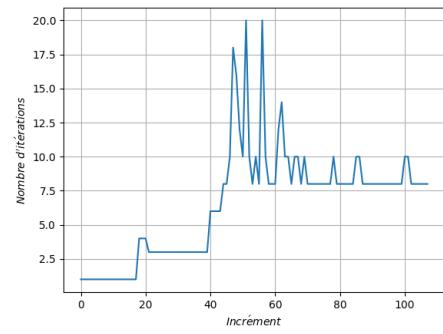


FIGURE 2.33 – Réponse contrainte-déformation axiale pour un essai biaxial. Loi non associée avec écrouissage exponentiel pour plusieurs maillages.

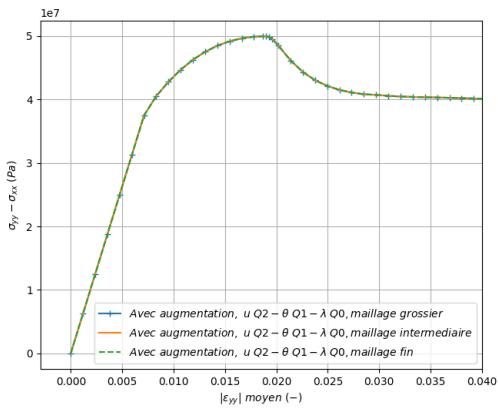


FIGURE 2.34 – Réponse contrainte-déformation axiale pour un essai biaxial. Loi non associée avec écrouissage exponentiel pour un même maillage avec ou sans terme d'augmentation.

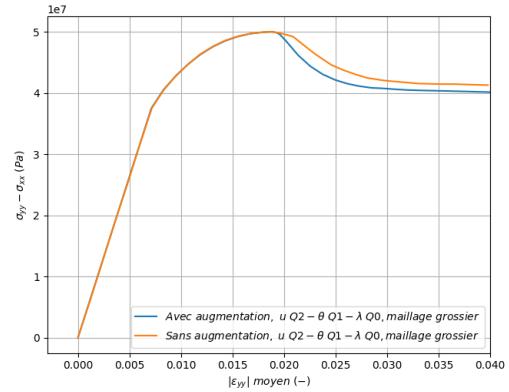


FIGURE 2.35 – Temps CPU en fonction du nombre d’éléments triangulaires pour plusieurs interpolations. Formulation historique augmentée.

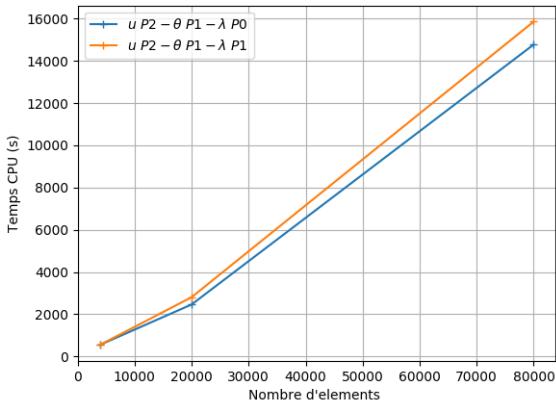
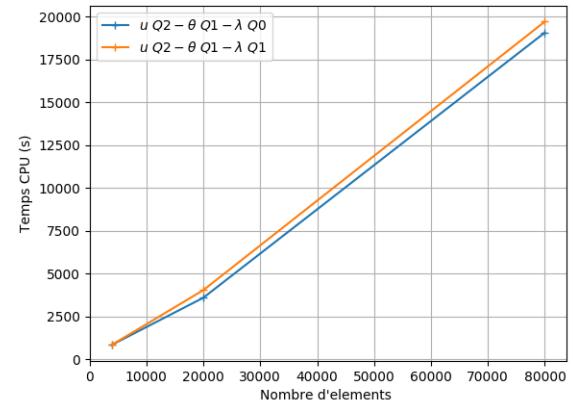


FIGURE 2.36 – Temps CPU en fonction du nombre d’éléments quadrangulaires pour plusieurs interpolations. Formulation historique augmentée.



possède en propre un degré de liberté de multiplicateur de Lagrange. Seuls les bords de la structure introduisent une différence en terme de nombre de degrés de libertés utilisés. Un raisonnement similaire s'applique aux éléments triangulaires.

Ainsi, la (faible) différence entre ces deux discrétisations en terme de temps CPU s'explique majoritairement par le remplissage de la matrice de rigidité. En effet, les modélisations (Q2-Q1-Q1) (respectivement P2-P1-P1) présentent une connectivité plus élevée que les modélisations (Q2-Q1-Q0) (respectivement P2-P1-P0), ce qui conduit à une matrice de rigidité plus remplie. On constate cependant en figures 2.35 et 2.36 que cette différence de connectivité conduit à des temps CPU pourtant relativement similaires pour les maillages testés.

En conclusion, dans le cas de la formulation historique du modèle de second gradient de dilatation, nous avons montré qu'il était nécessaire d'utiliser un terme d'augmentation afin d'éviter d'éventuelles oscillations aux points de Gauss. Une fois ce terme d'augmentation ajouté, les interpolations constantes ou linéaires pour le multiplicateur de Lagrange λ ont des performances numériques relativement similaires. Par ailleurs, nous n'avons pas constaté de différence majeure en terme de performance entre éléments quadrangulaire ou triangulaire. Cependant, (FERNANDES, 2009) montre que l'élément triangulaire a une convergence spatiale plus rapide que l'élément quadrangulaire.

2.2.3.5 Formulation quasi-incompressible du modèle de second gradient de dilatation

On s'intéresse maintenant à la nouvelle formulation que nous proposons pour le modèle de second gradient de dilatation (équation 2.49). Nous avons déjà montré que cette formulation permettait de traiter le phénomène de verrouillage volumique dans le régime ultime du comportement matériau (voir figure 2.27). Il s'agit ici de quantifier les performances numériques de cette formulation, dans les mêmes conditions que le paragraphe précédent : mêmes fonctions d'interpolation pour les champs ($\underline{u}, \theta, \lambda$) ; éléments triangulaires ou quadrangulaires ; avec ou sans terme d'augmentation.

On présente en figure 2.37 les réponses contraintes-déformations obtenues pour chaque maillage quadrangulaire d'interpolation \underline{u} Q2 - θ Q1 - λ Q0 en l'absence du terme d'augmentation. On constate qu'il y a bien convergence au maillage de la réponse globale de l'échantillon. Par ailleurs, on montre en figure 2.38 que les réponses obtenues pour l'interpolation \underline{u} Q2 - θ Q1 - λ Q0 avec ou sans terme de pénalisation sont identiques. Ce n'était pas le cas pour la formulation historique du modèle de second gradient de dilatation sans terme d'augmentation (figure 2.34).

FIGURE 2.37 – Réponse contrainte-déformation axiale pour un essai triaxial. Loi non associée avec écrouissage exponentiel pour plusieurs maillages.

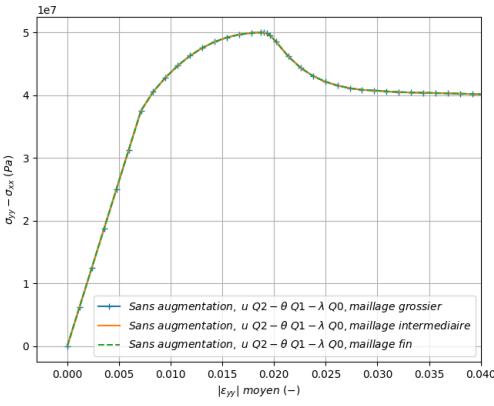


FIGURE 2.38 – Réponse contrainte-déformation axiale pour un essai triaxial. Loi non associée avec écrouissage exponentiel pour un même maillage avec ou sans terme d'augmentation.

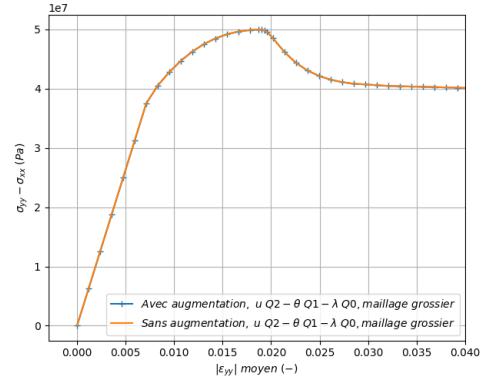
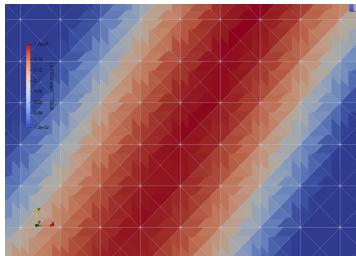
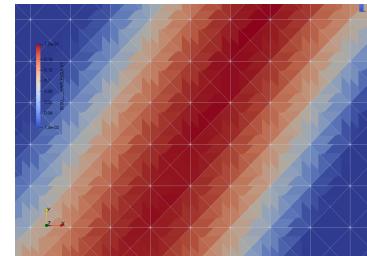


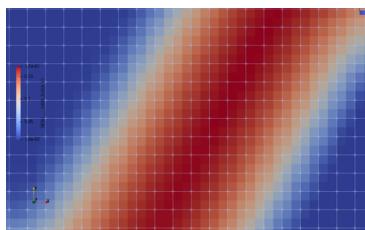
FIGURE 2.39 – Déformation plastique déviatorique cumulée aux points de Gauss au sein de la bande de localisation dans le régime adoucissant : formulation quasi-incompressible **sans terme d'augmentation**



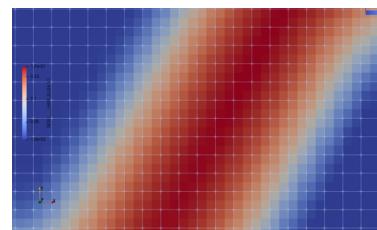
(a) $\underline{u} \text{ P2} - \theta \text{ P1} - \lambda \text{ P0}$



(b) $\underline{u} \text{ P2} - \theta \text{ P1} - \lambda \text{ P1}$



(c) $\underline{u} \text{ Q2} - \theta \text{ Q1} - \lambda \text{ Q0}$



(d) $\underline{u} \text{ Q2} - \theta \text{ Q1} - \lambda \text{ Q1}$

FIGURE 2.40 – Temps CPU en fonction du nombre d’éléments triangulaires pour plusieurs interpolations. Formulation quasi-incompressible sans augmentation.

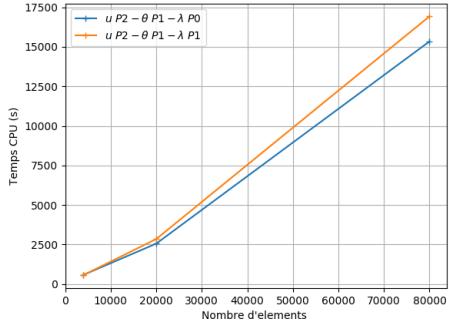
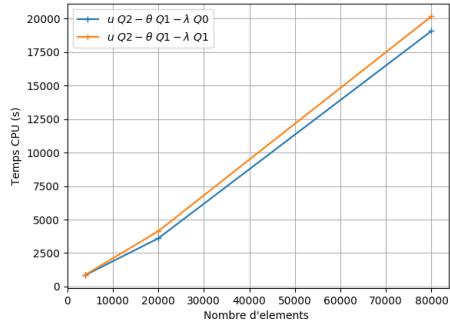


FIGURE 2.41 – Temps CPU en fonction du nombre d’éléments quadrangulaires pour plusieurs interpolations. Formulation quasi-incompressible sans augmentation.



En figure 2.39, on présente la déformation plastique déviatorique cumulée (variable d’écrouissage) au sein de la bande de localisation dans le régime adoucissant pour un maillage grossier sans terme d’augmentation.

On constate notamment que toutes les configurations présentent des résultats similaires. Contrairement à la formulation historique du modèle de second gradient de dilatation, cette formulation quasi-incompressible ne conduit pas à l’apparition d’oscillations aux points de Gauss dans le régime adoucissant. En effet, c’est directement la variable régularisée θ qui est utilisée dans la loi de comportement de 1^{er} gradient. Il apparaît donc que le terme d’augmentation $r(\varepsilon_V - \theta)(\varepsilon_V^* - \theta^*)$ n’est plus nécessaire.

On présente en figures 2.40 et 2.41 les performances numériques de la formulation quasi-incompressible du modèle de second gradient de dilatation en l’absence d’un terme de pénalisation. Tout comme pour la formulation historique, on constate que les temps CPU pour les discrétisations linéaire et constante par élément du multiplicateur de Lagrange sont relativement similaires.

Au vu de ces résultats, nous faisons le choix pour la suite du manuscrit d’utiliser la formulation quasi-incompressible du modèle de second gradient sans terme d’augmentation. Le principe des puissances virtuelles s’écrit donc, pour tout champ cinématiquement admissible $(\underline{u}^*, \lambda^*, \theta^*)$:

FIGURE 2.42 – Eléments et interpolations retenus



$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\underline{\underline{\sigma}} : \left(\underline{\underline{\varepsilon}}_D^* + \frac{1}{3} \theta^* \underline{\underline{I}} \right) + \underline{S} \cdot \underline{\nabla} \theta^* + \lambda^* (\varepsilon_V - \theta) + \lambda (\varepsilon_V^* - \theta^*) \right) dV \\ = \int_{\partial\Omega} (\underline{p} \cdot \underline{u}^* + \underline{P}_n \cdot \underline{D} \underline{u}^*) dS \end{aligned} \quad (2.51)$$

Les fonctions d'interpolation utilisées seront des fonctions (\underline{u} Q2 - θ Q1 - λ Q1) (ou (\underline{u} P2 - θ P1 - λ P1) pour les éléments triangulaires) afin de s'appuyer sur la littérature abondante des éléments incompressibles utilisant cette discréétisation.

2.2.4 Evolution de la largeur de bande au cours du chargement

Dans cette partie, on s'intéresse aux propriétés régularisantes du modèle de second gradient de dilatation. Ces propriétés seront mises en évidence dans deux situations : dans un premier temps avec la loi de comportement de Drucker Prager associée, dans un second temps avec la version non associée de cette loi de comportement.

Ces deux lois de comportement diffèrent notamment dans l'évolution de la déformation volumique au cours du chargement (voir figures 2.7 et 2.5 par exemple). La loi non associée, plus représentative du comportement des géomatériaux, présente une déformation volumique bornée, là où la loi associée conduit à un comportement dilatant y compris dans le régime ultime du comportement matériau. Cette différence est d'importance lorsque ces lois de comportement sont utilisées avec un modèle de second gradient de dilatation, basé sur le gradient de la déformation volumique.

2.2.4.1 Loi de comportement associée

Les résultats présentés dans cette sous-partie sont obtenues avec la loi de comportement de Drucker Prager associée à écrouissage linéaire présentée en partie 2.1.2.1 et les paramètres matériaux présentés en tableau 2.1 ($\kappa_c = 0.1$). Trois maillages quadrangulaires distincts, présentés en partie 2.2.1.2, seront utilisés (avec défaut matériel dans le coin inférieur gauche).

Présentation des résultats

On présente en figure 2.43 les réponses contraintes-déformations obtenues pour les trois maillages.

Les figures 2.45 et 2.44 présentent la déformation plastique déviatorique et la déformation volumique pour les trois maillages et une même valeur du chargement.

On constate que le modèle de second gradient de dilatation permet bien d'introduire une longueur interne dans la modélisation et donc de modéliser une largeur de bande de plusieurs éléments finis. Les résultats obtenus (réponse globale de l'échantillon, largeur de la bande de localisation, isovaleurs aux points de Gauss) convergent bien avec le maillage.

Méthode pour le calcul de la largeur de bande

Afin d'étudier plus précisément l'évolution de cette largeur de bande au cours du chargement, on présente ici la méthode automatique développée et utilisée pour le calcul de la largeur de bande à partir des résultats aux points de Gauss.

FIGURE 2.43 – Réponse contrainte-déformation de l'échantillon soumis à un essai biaxial pour plusieurs maillages

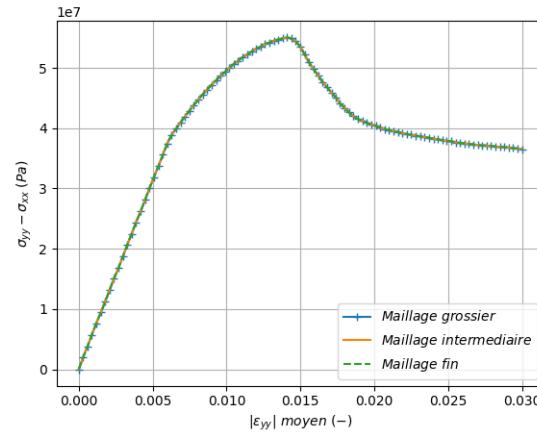


FIGURE 2.44 – Déformation volumique pour $\varepsilon_{yy} = 0.0162$ pour plusieurs maillages

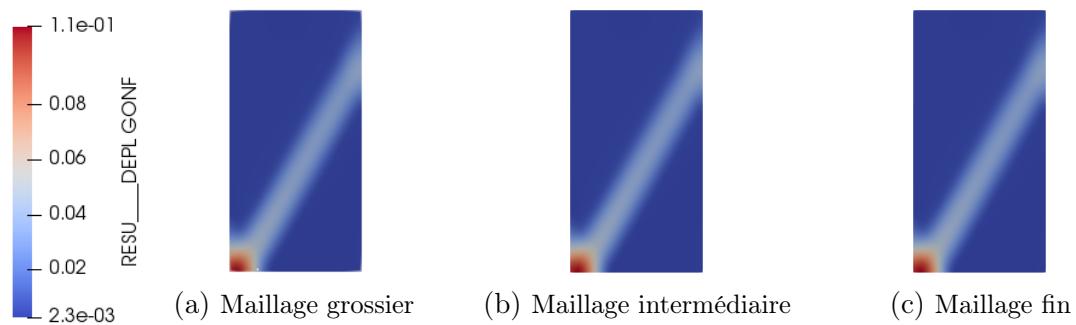


FIGURE 2.45 – Déformation plastique déviatorique pour $\varepsilon_{yy} = 0.0162$ pour plusieurs maillages

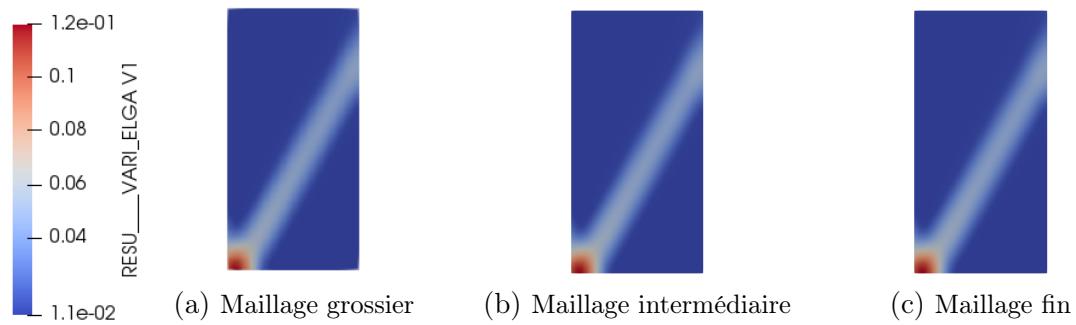
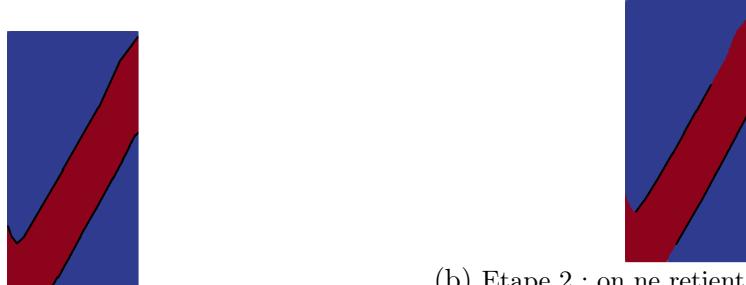


FIGURE 2.46 – Illustration de la méthode utilisée pour le calcul de la largeur de bande



(a) Etape 1 : on repère les points de Gauss au bord de la bande de localisation (en noir)

(b) Etape 2 : on ne retient que les points de Gauss dans la partie centrale de la bande de localisation (en noir)

Cette méthode se base sur l'indicateur plastique aux points de Gauss. Cet indicateur vaut 1 si le point de Gauss est en charge plastique, 0 sinon. Le principe de la méthode est le suivant :

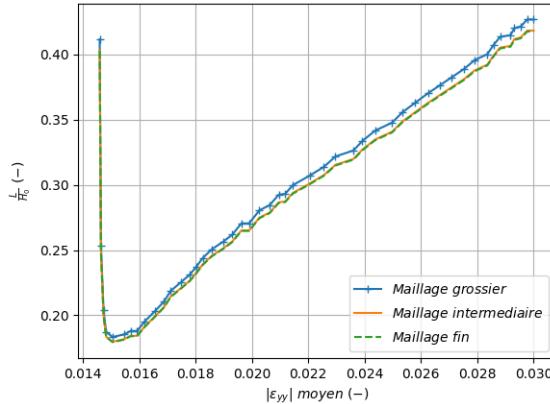
1. Dans un premier temps, on repère les points de Gauss situés aux bords de la bande de localisation (figure 2.46a).
2. On ne retient que la partie centrale de la bande de localisation. On ne tient pas compte de la partie due à la réflexion de la bande de localisation sur les conditions aux limites (figure 2.46b).
3. Pour chaque point de Gauss situé sur un bord de la bande de localisation, on cherche le point de Gauss le plus proche sur l'autre bord et on retient la distance entre ces deux points de Gauss. Cette distance est ensuite calculée pour tous les points de Gauss situés sur les bords de la bande de localisation et elle est ensuite moyennée pour obtenir la largeur de bande. Cette largeur de bande est ensuite normalisée par la hauteur de l'échantillon, notée H_0 .
4. Cette méthode est répétée pour chaque incrément de chargement une fois la bande de localisée apparue. On obtient alors l'évolution de la largeur de bande au cours du chargement (figure 2.47).

Evolution de la largeur de bande au cours du chargement

Les figures 2.49, 2.50 et 2.48 présentent respectivement la déformation volumique, la déformation plastique déviatorique cumulée et l'indicateur plastique (rouge : charge plastique, bleu décharge élastique) pour plusieurs valeurs du chargement (maillage intermédiaire).

Nous commentons ici l'évolution de la largeur de la bande de localisation présentée en figure 2.47 pour trois maillages distincts.

FIGURE 2.47 – Evolution de la largeur de bande (normalisée) au cours du chargement



Tout d'abord, cette figure met de nouveau en évidence le caractère régularisant du modèle de second gradient de dilatation : on constate bien que la largeur de bande obtenue est bien indépendante du maillage. Ensuite, nous distinguons deux régimes différents dans l'évolution de cette largeur de bande au cours du chargement :

- Dans un premier temps, la bande de localisation s'installe, la largeur de bande diminue. En effet, à l'instant où la solution bifurque, on passe d'une solution homogène où tout l'échantillon est en charge plastique à une solution localisée, où seule la bande de localisation est en charge plastique. Cette transition progressive est illustrée en figures 2.48a à 2.48d.
- Dans un second temps, une fois la bande de localisation installée, celle-ci s'élargit (figures 2.48d à 2.48f). À terme, la bande de localisation peut s'élargir jusqu'à englober tout l'échantillon.

Cet élargissement de la bande de localisation et d'endommagement des parties saines de l'échantillon n'est bien évidemment pas physique. Il s'explique par une évolution non bornée de la variable régularisée (ici la déformation volumique), y compris dans le régime ultime du comportement matériau lorsque celui-ci est totalement écrouït.

Par ailleurs, dans le cas de la loi de comportement associée, les évolutions de la déformation volumique plastique et déformation plastique déviatorique cumulée sont reliées par la loi d'écoulement de la manière suivante (voir partie 2.1.2.1) : $\dot{\epsilon}_V^p = 3a \dot{\kappa}$. a étant ici une constante, ces deux déformations évoluent de manière similaire tout au long du chargement (voir figures 2.49 et 2.50).

FIGURE 2.48 – Indicateur plastique aux points de Gauss (en rouge : charge plastique, en bleu décharge élastique) en plusieurs instants. Maillage intermédiaire

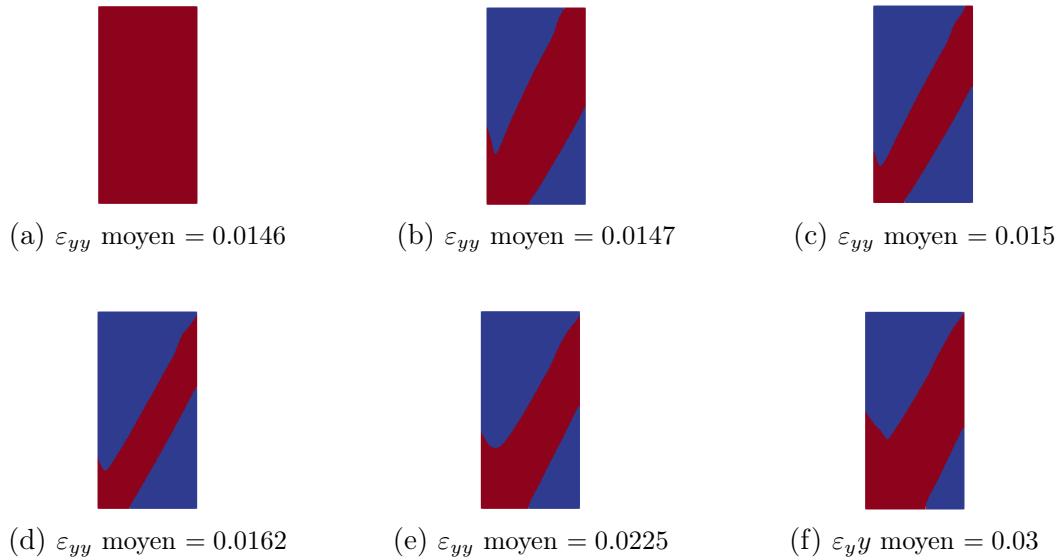


FIGURE 2.49 – Déformation volumique en plusieurs instants. Maillage intermédiaire

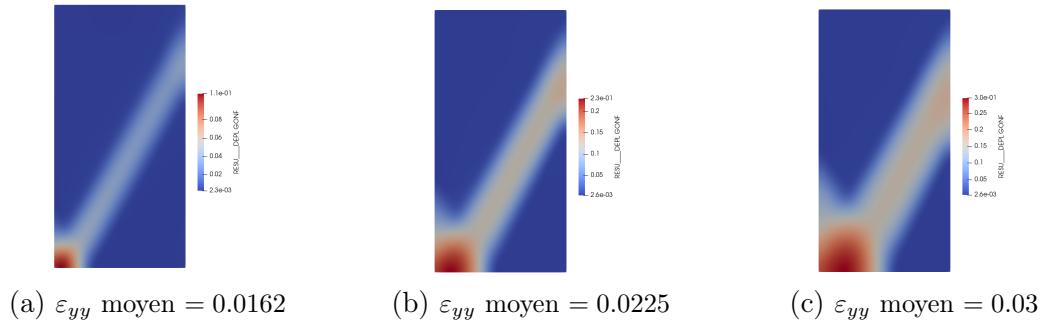


FIGURE 2.50 – Déformation plastique déviatorique cumulée en plusieurs instants. Maillage intermédiaire

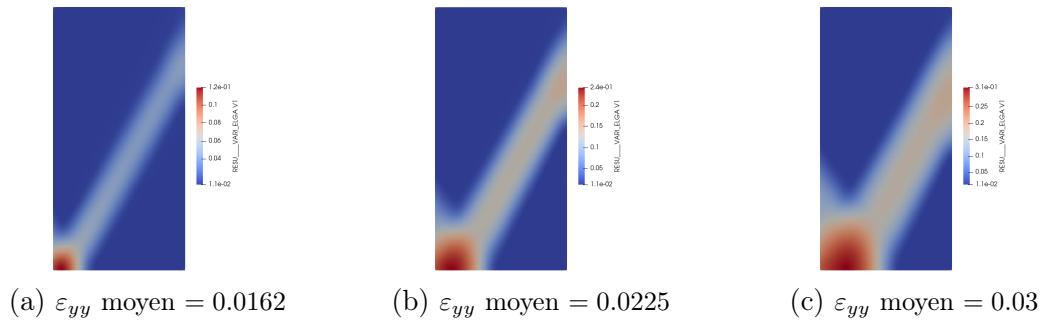
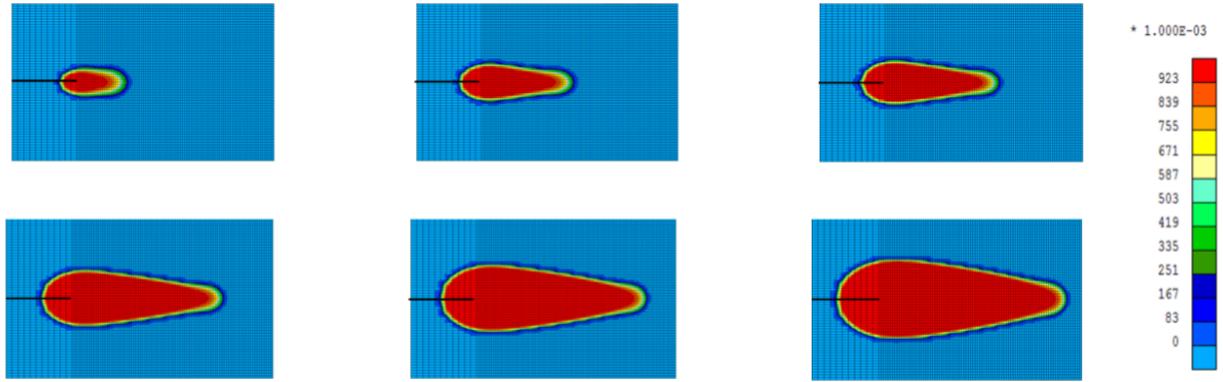


FIGURE 2.51 – Essai de fissuration en mode I : profil d’endommagement pour une simulation numérique d’éprouvette en béton. Source : (JOUAN, 2015)



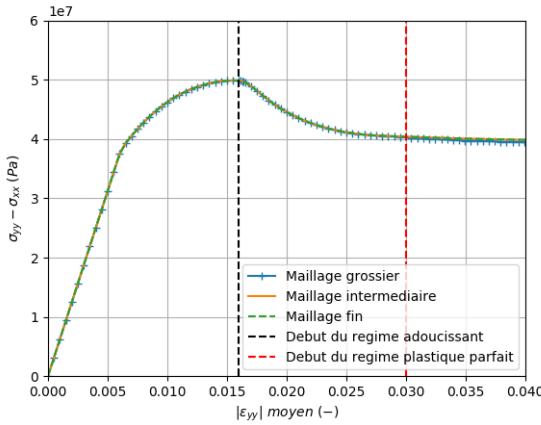
Ce phénomène d’élargissement de la bande de localisation a déjà été abordé en partie 1.3.3.2 dans le cas d’un modèle de second gradient. En effet, (JOUAN, 2015) met par exemple en évidence ce phénomène dans le cadre d’une modélisation du comportement du béton (voir figure 2.51). Ce problème n’est pas spécifique aux modèles de second gradient. Par exemple (SIMONE, ASKES & SLUYS, 2004) met évidence qu’une situation similaire peut apparaître dans le cas d’une modélisation non locale intégrale. Dans le cadre d’un modèle de second gradient, (PLÚA, 2018) propose d’utiliser un comportement de second gradient non linéaire (de type exponentiel) afin de faire évoluer la largeur de bande au cours du chargement. Cependant, cette méthode ne permet que de retarder l’élargissement de la largeur de bande.

Dans la sous partie suivante consacrée aux simulations numériques d’essais biaxiaux avec la loi de comportement non associée (par ailleurs plus représentative du comportement des géomatériaux), nous montrerons que le modèle de second gradient de dilatation permet effectivement de s’affranchir de ce problème d’élargissement de la bande de localisation lorsque la déformation volumique évolue peu dans le régime ultime du comportement matériaux.

2.2.4.2 Loi de comportement non associée

Les résultats présentés dans cette sous-partie sont obtenus avec la loi de comportement de Drucker Prager non associée à écrouissage exponentiel présentée en partie 2.1.2.1 et les paramètres matériaux présentés en tableau 2.1 ($\kappa_c = 0.1$). Trois maillages quadrangulaires distincts, présentés en partie 2.2.1.2 seront utilisés.

FIGURE 2.52 – Réponse contrainte-déformation de l'échantillon soumis à un essai biaxial pour plusieurs maillages



Présentation des résultats

On présente en figure 2.52 les réponses contraintes-déformations obtenues pour les trois maillages.

Les figures 2.53 et 2.54 présentent la déformation plastique déviatorique et la déformation volumique pour les trois maillages et une même valeur du chargement, dans le régime adoucissant. Dans le régime adoucissant de la loi de comportement non associée, la déformation volumique évolue d'une manière similaire à la loi associée étudiée dans la sous-partie précédente. Dans ce régime, les propriétés régularisantes du modèle de second gradient de dilatation sont identiques pour les deux lois de comportement. On constate que les réponses contraintes-déformations ainsi que les profils de déformations sont indépendants du maillage.

Evolution de la largeur de bande

On présente en figures 2.55 et 2.56 l'évolution du profil de déformation volumique au cours du chargement pour le maillage grossier et le maillage intermédiaire. On présente en figure 2.57 et 2.58 l'évolution du profil de déformation plastique déviatorique cumulée au cours du chargement pour le maillage grossier et le maillage intermédiaire.

On présente en figure 2.59 l'évolution de la largeur de la bande de localisation au cours du chargement. Cette évolution pour la loi de comportement non associée diffère assez largement de ce qui est observé pour la loi de comportement associée (figure 2.47). Dans les deux cas, on retrouve bien une phase pendant laquelle la bande de localisation s'installe et où sa largeur décroît (passage d'une solution homogène

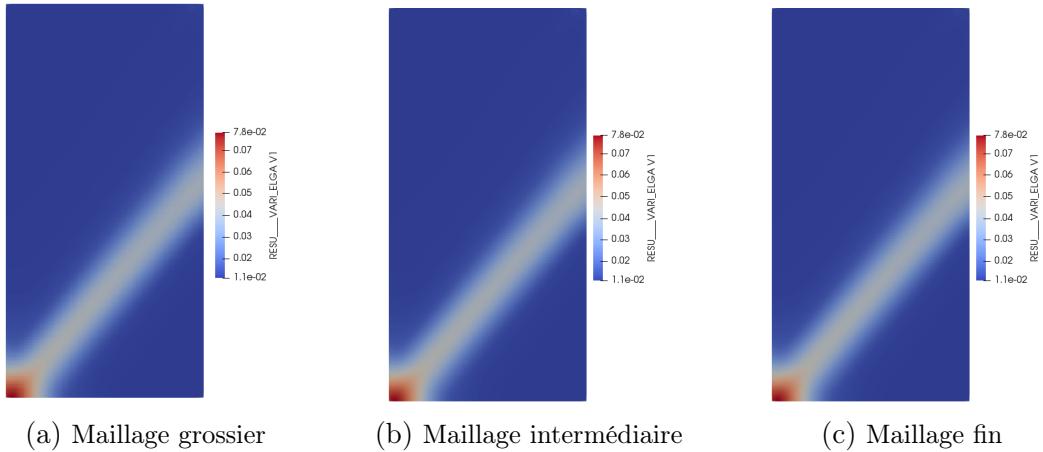
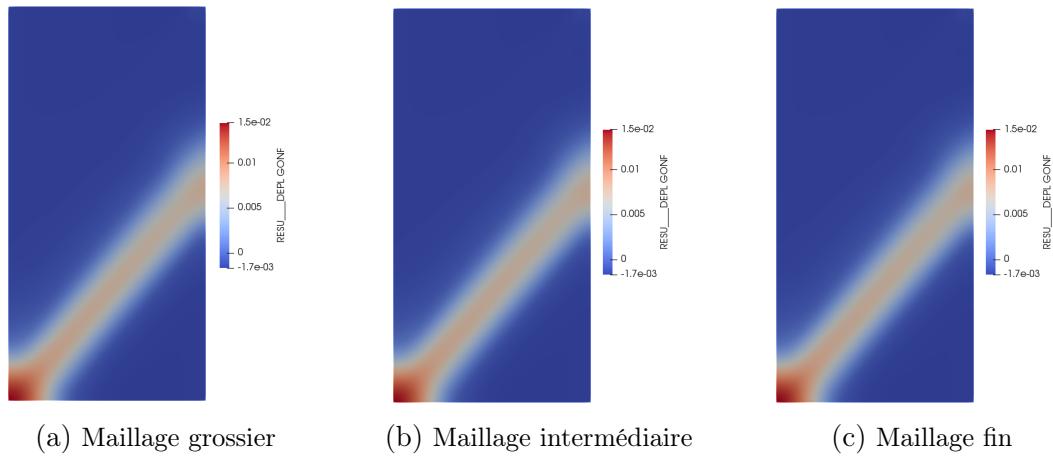
FIGURE 2.53 – Déformation plastique déviatorique pour $\varepsilon_{yy} = 0.02$ pour plusieurs maillages

 FIGURE 2.54 – Déformation volumique pour $\varepsilon_{yy} = 0.02$ pour plusieurs maillages


FIGURE 2.55 – Déformation volumique en plusieurs instants. Maillage grossier

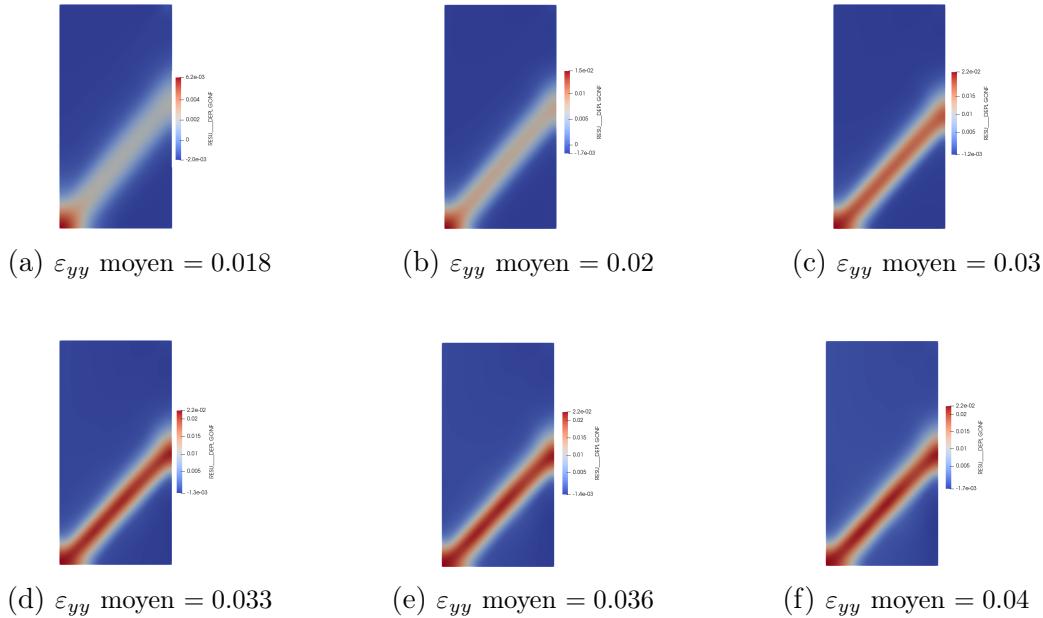


FIGURE 2.56 – Déformation volumique en plusieurs instants. Maillage intermédiaire

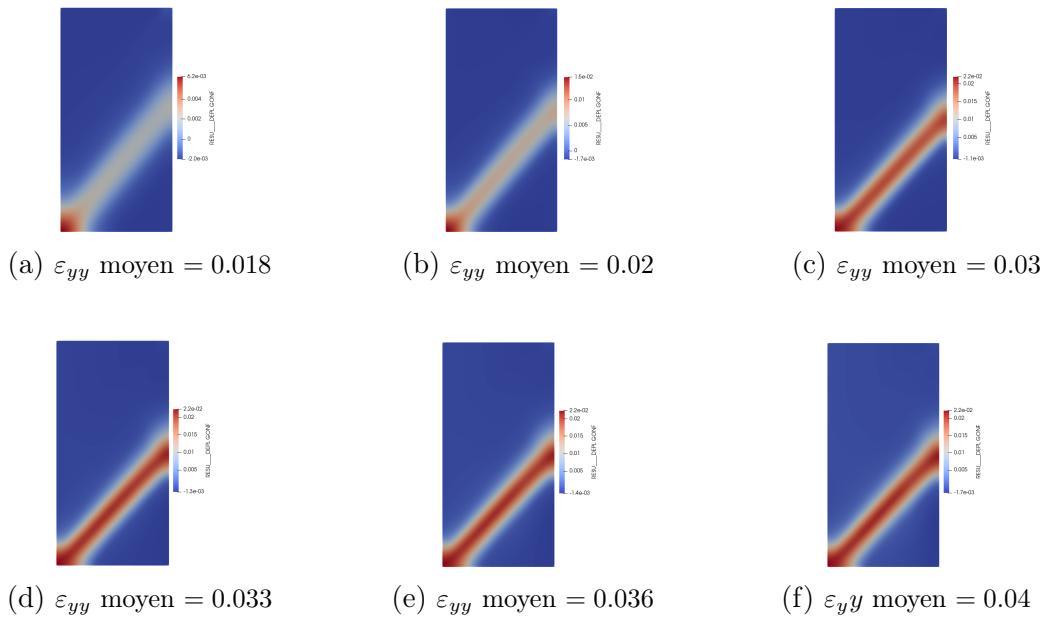


FIGURE 2.57 – Déformation déviatorique plastique cumulée en plusieurs instants. Maillage grossier

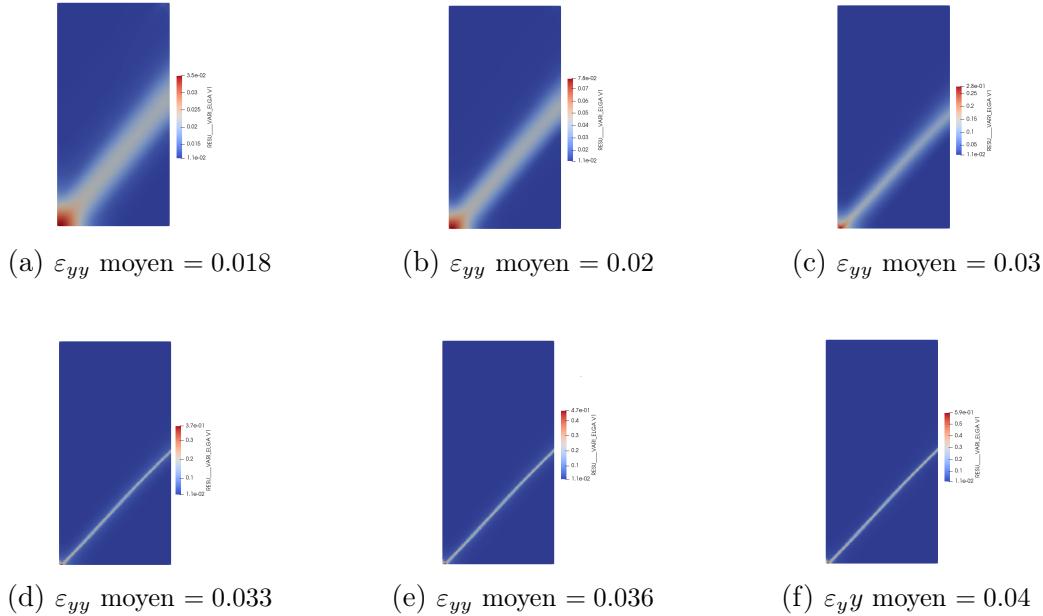


FIGURE 2.58 – Déformation déviatorique plastique cumulée en plusieurs instants. Maillage grossier

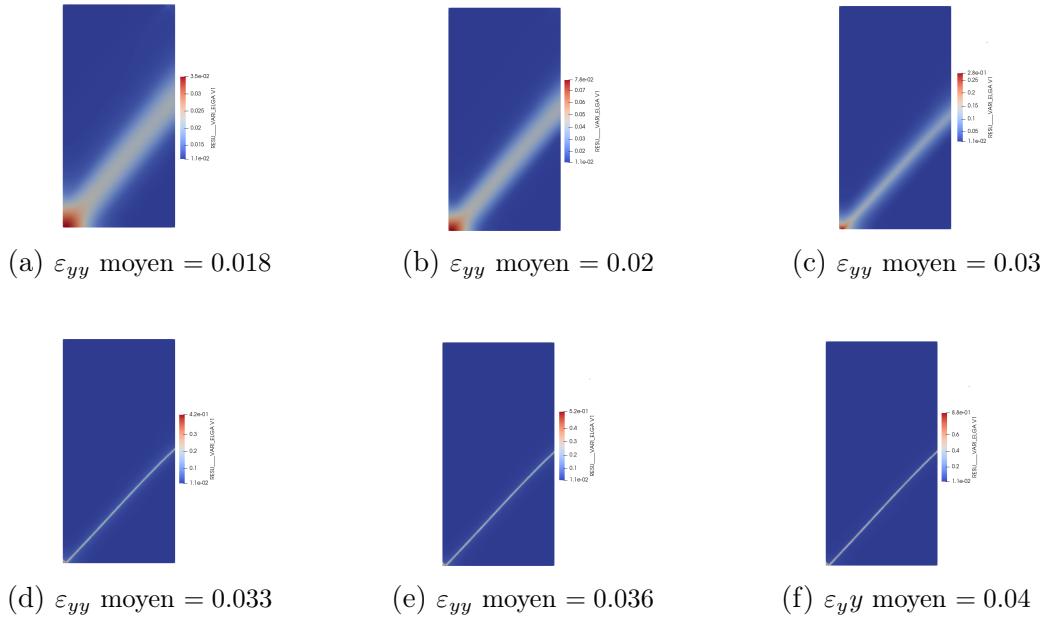
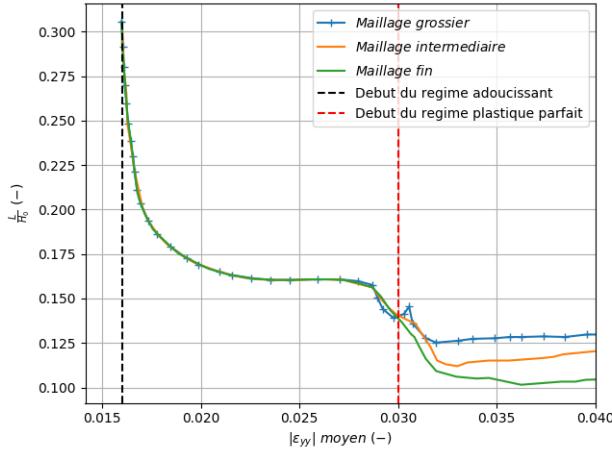


FIGURE 2.59 – Evolution de la largeur de bande pour les trois maillages (loi de comportement non associée)



en charge plastique à une solution non homogène). Mais par la suite, l'évolution de la largeur de bande de localisation dépend largement de la loi de comportement utilisée. On rappelle que cette largeur de bande ne cessait de croître dans le cas de la loi de comportement associée.

On constate que dans le cas de la loi non associée, la largeur de bande reste constante et indépendante du maillage dans le régime adoucissant dilatant. Une fois le régime plastique parfait quasi-incompressible atteint, la largeur de bande dépend du maillage. On insiste cependant sur le fait que cette largeur de bande ne s'élargit donc plus de manière incontrôlée et que la réponse globale de l'échantillon ne dépend pas du maillage (figure 2.52).

Dans le cadre de notre modèle, cette largeur de bande est contrôlée par le gradient de la déformation volumique. Or, dans le régime plastique parfait, cette déformation volumique cesse d'évoluer (voir figures 2.55d à 2.55f par exemple). En effet, la loi d'évolution de la déformation volumique plastique s'écrit de la manière suivante :

$$\dot{\varepsilon}_V^p = 3b(\kappa) \dot{\kappa} \quad (2.52)$$

Ici $b(\kappa)$ est une fonction exponentielle qui tend asymptotiquement vers 0. Dans le cas d'un écrouissage linéaire, cette fonction $b(\kappa)$ est nulle pour $\kappa > \kappa_c$ (voir partie 2.1.2.1). Dans les deux cas, la variable régularisée (déformation volumique) évolue peu pour des valeurs suffisamment élevées de la variable d'écrouissage. L'évolution de cette variable d'écrouissage est découpée de la déformation volumique.

Ainsi, dans le régime plastique parfait, la largeur de bande ainsi que l'évolution de la partie déviatorique de la déformation ne sont plus contrôlées par le modèle de second gradient de dilatation. On constate en figure 2.57d à 2.57f et 2.58d à 2.58f que les incrément de déformation plastique déviatorique se concentrent dans un seul élément et dépendent du maillage.

Cependant, le comportement étant plastique parfait dans la bande de localisation, la réponse globale de l'échantillon ne dépend pas du maillage. Le problème est bien posé : l'énergie dissipée est proportionnelle au saut de déplacement tangentiel.

Bilan

Les lois de comportement non associées, où l'angle de dilatance varie avec l'écrouissage, sont en général plus représentatives du comportement des roches. Nous avons montré que le modèle de second gradient de dilatation était adapté pour ce type de loi de comportement. Dans le régime adoucissant dilatant, le modèle de second gradient de dilatation permet de contrôler la largeur de bande : réponse globale de l'échantillon et quantités locales (déformations et contraintes dans la bande de localisation) sont bien indépendantes du maillage. Dans le régime plastique parfait, l'influence du modèle de second gradient diminue, ce qui permet d'éviter une augmentation incontrôlée de la largeur de bande, tout en conservant une réponse globale de l'échantillon indépendante du maillage.

En contrepartie, l'évolution de la déformation déviatorique et de la largeur de bande n'est plus contrôlée dans le régime plastique parfait. Ainsi, ce type de calcul ne permet pas d'obtenir des valeurs fiables de déformation déviatorique (en plasticité parfaite, cette quantité n'est pas définie, seul le saut de déplacement tangentiel est contrôlé) dans la bande de localisation dans le régime ultime . Pour autant, ce n'était pas notre objectif. En effet, dans le cadre de simulations numériques à grande échelle où la largeur de bande de localisation est choisie avant tout sur la base du maillage et de nos capacités de calcul (plutôt que sur des bases physiques), ce type de quantités locales ne peut de toute façon pas être obtenue de manière fiable. Seules des quantités globales (par exemple réponse contrainte-déformation, déformation volumique moyenne ...) peuvent être extraites de tels calculs. Ce dernier point sera abordé en détail au chapitre 3.

2.3 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons présenté le modèle de second gradient de dilatation tel que développé dans (FERNANDES, 2009) ainsi que les lois de comportement (associée et non associée) qui seront utilisées par la suite.

Nous avons proposé une méthode numérique permettant le franchissement des instabilités. Nous avons montré que l'ajout d'un terme de viscosité numérique permettait effectivement de franchir les snap-backs parfois observés lors de la simulation numérique d'essais biaxiaux. En assurant une convergence robuste de ces calculs, cette méthode permet d'envisager de lancer un grand nombre d'essais numériques pour la réalisation d'études de sensibilité, ce qui sera utile au chapitre 3.

Par la suite, nous avons présenté les modifications apportées au modèle de second gradient tel qu'il avait été développé dans (FERNANDES, 2009). La nouvelle formulation mixte du modèle de second gradient, dite formulation quasi-incompressible, permet de traiter le phénomène de verrouillage volumique. Elle est donc plus adaptée aux lois de comportement non associées où la déformation volumique évolue peu dans le régime plastique parfait. Par ailleurs, nous avons montré qu'il était possible de se passer du terme d'augmentation avec cette nouvelle formulation numérique.

Enfin, nous nous sommes intéressés au lien entre l'évolution de la déformation volumique et celle de la largeur de bande. Nous avons montré que dans le cas d'une loi de comportement non associée, le modèle de second gradient de dilatation permettait d'éviter un élargissement incontrôlable de la bande de localisation dans le régime ultime.

Le choix du paramètre a_1 (paramètre de rigidité de second gradient) n'a pour le moment pas été abordé. Or, il est connu que ce paramètre influe à la fois sur la largeur de la bande de localisation et sur la réponse post-pic du matériau. Il est donc nécessaire de proposer une méthode afin de choisir convenablement ce paramètre numérique. Le chapitre 3 y sera consacré.

Chapitre 3

Influence et identification de la longueur interne dans le modèle de second gradient de dilatation

Table des matières

3.1	Introduction	97
3.2	La longueur interne du modèle de second gradient de dilatation dans le cadre d'un problème analytique simplifié	101
3.2.1	Recherche d'une solution analytique	101
3.2.2	Hypothèses	102
3.2.3	Mise en équation et résolution	104
3.2.4	Résolution analytique dans la bande de localisation	108
3.2.5	Application numérique avec une loi de comportement de type Drucker Prager non associée	111
3.2.6	Changement d'échelle avec le modèle de second gradient de dilatation	121
3.2.7	Retour sur les hypothèses du problème du barreau	128
3.3	Etudes numériques avec le modèle de second gradient de dilatation	132
3.3.1	Largeur de bande de localisation : étude de sensibilité aux paramètres matériaux	133
3.3.2	Identification des paramètres matériaux à partir d'essais expérimentaux	137
3.3.3	Application du résultat d'invariance aux essais biaxiaux	145
3.4	Bilan du chapitre	152

3.1 Introduction

Dans le chapitre 2, nous avons montré que le modèle de second gradient de dilatation permettait d'introduire une longueur interne dans la modélisation. Cette longueur interne apparaît comme la racine carrée du ratio entre les termes de rigidité de la loi de second gradient et la loi de premier gradient. Par exemple, dans le cas d'un problème unidimensionnel, (CHAMBON, CAILLERIE & EL HASSAN, 1998) montre que pour un modèle de second gradient, cette longueur interne l se met sous la forme suivante :

$$l = c \sqrt{\frac{a_1}{|h|}} \quad (3.1)$$

Avec c une constante de proportionnalité, a_1 la rigidité de second gradient, et h le module d'écrouissage linéaire de la loi de premier gradient. De cette expression, on déduit que le module de rigidité de second gradient a un impact direct sur la largeur de bande observée. A noter que cette expression a été obtenue dans le cadre d'une loi de comportement très simple et assez différente de celle utilisée dans cette thèse. Elle ne permet donc pas d'identifier l'impact de tous les paramètres matériaux sur la longueur interne. Dans le cas général, la relation entre les paramètres des lois de comportement et la largeur de bande de localisation n'est pas bien connue.

Pour autant, nous savons d'expérience que cette expression donne des indications quant au rôle des principaux paramètres matériaux et sa pertinence est confirmée par des essais biaxiaux numériques (FERNANDES, 2009). Mais on constate que ce paramètre a_1 n'influe pas uniquement sur la longueur interne. Il a aussi un impact direct sur le comportement post-pic observé dans ces essais numériques (EL MOUSTAPHA, 2014).

L'identification du paramètre a_1 revêt donc une importance particulière, et ne peut se faire indépendamment de l'identification des autres paramètres matériaux. Cette identification peut par exemple être effectué à partir d'essais expérimentaux de type essais triaxiaux ou biaxiaux. Lors de la simulation numérique de ces essais, un autre problème se pose concernant la longueur interne. En effet, en prenant l'exemple de l'argilite du Callovo-Oxfordien, l'échelle physique des bandes de localisation observées expérimentalement est de l'ordre de la dizaine de microns pour les roches considérées (DESBOIS et al., 2017), pour des échantillons de quelques millimètres de hauteur. Nous savons par ailleurs qu'il est nécessaire d'utiliser au moins cinq éléments dans la largeur de bande, afin d'obtenir des résultats satisfaisants (FERNANDES, 2009). Au vu des échelles en jeu, cette dernière exigence conduirait à des modèles trop lourds au vu des capacités de calcul actuelles. Pour la simulation numérique de ces essais, la largeur de bande est donc toujours choisie, non pas sur

FIGURE 3.1 – Réponse contrainte-déformation d'un essai triaxial. Source : (EL MOUSTAPHA, 2014)

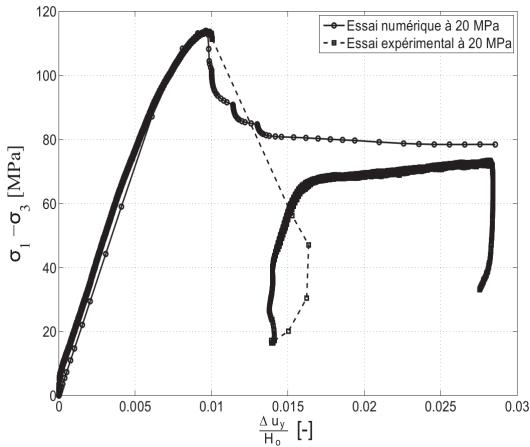
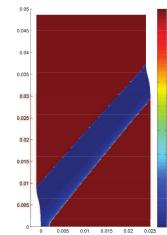
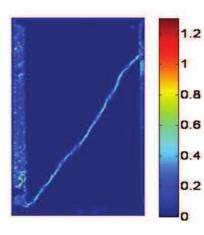


FIGURE 3.2 – Faciès de localisation. Source : (EL MOUSTAPHA, 2014)

(a) Numérique. Valeur second invariant de la déformation de l'angle de dilatance.



(b) Expérimental. Second invariant de la déformation



des bases physiques, mais sur la base du maillage utilisé.

Par exemple, (EL MOUSTAPHA, 2014) identifie un jeu de paramètres d'une loi de comportement de type Plasol et d'un modèle de second gradient sur la base d'essais triaxiaux réalisés sur des échantillons de grès des Vosges (un matériau nettement plus grossier que l'argilite). Ce jeu de paramètres permet de reproduire de manière satisfaisante la réponse contrainte-déformation de l'échantillon (voir figure 3.1), mais on constate en figures 3.2a et 3.2b que les largeurs de bande expérimentale et numérique sont très différentes.

Ainsi, la largeur de bande de localisation (et donc la rigidité de second gradient) est un paramètre *numérique* fixé en fonction du maillage et des capacités de calcul.

On note que l'utilisation d'une largeur de bande numérique, différente de la largeur physique observée pour les essais expérimentaux, nécessite d'être prudent lors de l'interprétation des résultats de simulations. Notamment, les valeurs locales de contraintes ou de déformations obtenues numériquement dans la bande de localisation ne peuvent être utilisées de manière fiable. Seules des quantités macroscopiques comme par exemple la réponse contrainte-déformation moyenne de l'échantillon de la figure 3.1 peuvent être exploitées. Le modèle ne permet pas de modéliser de manière fiable le comportement microscopique à l'intérieur de la bande de localisation (ce comportement n'étant de toute façon pas bien caractérisé expérimentalement).

Une fois un jeu de paramètres identifiés à partir d'essais expérimentaux, il s'agit de réaliser des simulations numériques de structures industrielles. Par exemple, il peut s'agir de simulations numériques d'excavation de galeries pour le stockage géologique

CHAPITRE 3. INFLUENCE ET IDENTIFICATION DE LA LONGUEUR INTERNE DANS LE MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

profond de déchets nucléaires. Cette application du modèle de second gradient est répandue dans la littérature (voir par exemple (PARDOEN & COLLIN, 2017) pour le modèle de second gradient, (CUVILLIEZ et al., 2017) (PLASSART et al., 2013) pour le modèle de second gradient de dilatation).

Pour ce type de calculs, un second problème se pose concernant le paramètre de longueur interne (ou de rigidité de second gradient). En effet, les structures que l'on cherche à modéliser sont de l'échelle du mètre ou de la dizaine de mètres. Une fois de plus, cette échelle n'est ni compatible avec l'échelle physique de la bande de localisation (environ quelques microns) ni compatible avec l'échelle utilisée pour le calibrage des paramètres matériaux (environ un millimètre). Au vu des capacités de calcul, il est envisageable d'utiliser une largeur de bande de localisation de l'ordre de quelques centimètres pour les calculs d'excavation. C'est pourquoi on cherchera à déterminer des invariants de la localisation¹, quelle que soit l'échelle considérée dans l'esprit de ce qui a été réalisé dans (BOURDIN, FRANCFORST & MARIGO, 2008) pour certains milieux fragiles ou dans (LORENTZ, 2017) pour le béton. Une fois ces invariants déterminés, il sera alors possible de modéliser l'ouvrage à une échelle de localisation non représentative de la réalité physique, tout en préservant les propriétés macroscopiques de la localisation et leur effet sur la réponse de la structure.

A notre connaissance, de tels invariants n'ont pas été exhibés dans la littérature pour les modèles de second gradient. A défaut d'avoir identifié de tels invariants, le changement d'échelle entre l'essai ayant permis d'identifier le jeu de paramètres (dont la rigidité de second gradient) et le calcul sur structure réelle se fait uniquement sur le base du maillage utilisé (voir par exemple (PARDOEN & COLLIN, 2017) ou encore (PLASSART et al., 2013)). La valeur numérique du paramètre de rigidité de second gradient obtenue pour les essais en laboratoire est alors modifiée de sorte à obtenir une largeur de bande de localisation compatible avec le maillage de la structure industrielle, mais l'impact de ce changement sur la réponse post-pic du matériau ou l'énergie dissipée par la bande de localisation n'est ni explicité ni semble-t-il pris en compte.

Dans ce chapitre 3, nous proposons d'expliciter la relation entre largeur de bande de localisation et paramètres matériaux pour la loi de comportement utilisée. Une fois cette relation mieux connue, nous montrerons qu'il est possible de l'utiliser afin de faciliter l'identification des paramètres matériaux. Enfin, nous mettrons en évidence l'existence d'invariants quelle que soit l'échelle de la bande de localisation considérée, et nous montrerons comment ces invariants peuvent être utilisés pour s'affranchir de l'échelle physique de la localisation.

1. Dans la suite, nous appellerons *invariants* des quantités macroscopiques (réponse force-déplacement, énergie dissipée par la localisation, réponse volumique moyenne etc ...) que nous chercherons à rendre indépendantes de la largeur de bande.

CHAPITRE 3. INFLUENCE ET IDENTIFICATION DE LA LONGUEUR INTERNE DANS LE MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

Pour cela, nous nous appuierons dans un premier temps sur une solution analytique d'un problème simplifié (partie 3.2), puis dans un second temps, nous montrerons comment ces résultats analytiques peuvent être étendus aux essais biaxiaux numériques (partie 3.3).

3.2 La longueur interne du modèle de second gradient de dilatation dans le cadre d'un problème analytique simplifié

3.2.1 Recherche d'une solution analytique

Plusieurs solutions analytiques concernant les modèles de second gradient sont déjà disponibles dans la littérature. Nous en proposons ici une rapide revue, où nous chercherons à évaluer la pertinence de ces solutions au vu des objectifs que nous nous sommes fixés en introduction de ce chapitre. Nous cherchons notamment une solution qui soit applicable au comportement de 1^{er} gradient de type Drucker Prager présenté au chapitre précédent et au modèle de second gradient de dilatation.

(CHAMBON, CAILLERIE & EL HASSAN, 1998) propose d'étudier un problème unidimensionnel de second gradient, avec une loi de comportement de premier gradient à écrouissage linéaire. Ce type de solution est par exemple repris dans (KOTRONIS et al., 2007). De part son caractère unidimensionnel, elle ne présente qu'une seule mesure de déformation (la dérivée du déplacement), et ne permet donc pas de distinguer déformation déviatorique et déformation volumique. Or, cette distinction est importante dans l'écriture de la loi de comportement pour les géomatériaux, d'autant plus lorsque le comportement utilisé s'appuie sur un modèle de second gradient de dilatation.

(CHAMBON, CAILLERIE & MATSUCHIMA, 2001) s'intéresse au problème d'une bande de compression et cisaillement infini. Dans le cas d'une loi de comportement de Mohr-Coulomb plane (toutes les composantes hors plan de déformations et de contraintes nulles) à écrouissage linéaire et d'un comportement de second gradient linéaire, les auteurs proposent d'écrire la solution comme une combinaison de zones en décharge élastique et en charge plastique. Une expression de la longueur caractéristique est proposée en fonction du module de rigidité de second gradient et des coefficients de la matrice tangente de premier gradient. Cependant, cette solution n'est valable que pour un écrouissage linéaire dans la phase de localisation.

On peut aussi citer l'existence d'une solution analytique pour un cylindre creux épais (COLLIN, CAILLERIE & CHAMBON, 2009). Cependant, cette solution n'est valable que pour les matériaux dont le comportement est élastique. De même, (MADEO et al., 2012) propose une solution à un problème unidimensionnel pour le modèle de second gradient, mais se limite à l'étude d'un matériau élastique.

Enfin, on peut citer l'existence de solutions unidimensionnelles semi-analytiques. Par exemple, (PLACIDI, 2015) s'intéresse à un problème 1D avec une loi d'endommagement pour la partie 1^{er} gradient et un comportement linéaire pour la partie

2^{nd} gradient. La solution est cherchée sous la forme d'une série de Fourier, dont les coefficients sont déterminés numériquement. Cependant, l'application de ce type de solution semi-analytique est plus limité. Par exemple, il n'est pas possible d'obtenir une expression explicite de la longueur caractéristique en fonction des paramètres matériaux.

Au vu de cette brève revue de la littérature, nous voyons qu'aucune des solutions analytiques disponibles pour les modèles de second gradient ne correspond à nos critères. Dans la suite, nous présentons donc une solution analytique d'un nouveau problème simplifié, qui nous semble mieux adapté à l'étude des modèles de second gradient de dilatation.

3.2.2 Hypothèses

3.2.2.1 Géométrie et chargement

On s'intéresse au problème d'un barreau 3D d'axe (Ox) et de longueur $2L$ soumis à un chargement de traction croissant à chaque extrémité². Ce barreau est centré autour en $x = 0$, et par symétrie, nous ne considérerons que la moitié $x > 0$ et $u(0) = 0$ (voir figure 3.3). Nous faisons l'hypothèse d'une transformation en petites déformations.

Nous supposons que tous les champs de contraintes et de déformations ne dépendent que de la coordonnée x . Par invariance par rotation autour de l'axe (Ox), les directions Y et Z sont supposées équivalentes. Nous cherchons donc les champs sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}(x) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy}(x) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{yy}(x) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

La forme des champs recherchés conduit à un problème quasiment unidimensionnel, mais où il est possible de distinguer déformation volumique et déformation déviatorique. On peut par ailleurs faire le rapprochement avec les hypothèses de contraintes planes. En effet, la forme des champs de l'équation 3.2 peut s'obtenir en appliquant les hypothèses de contraintes planes dans les deux directions (Oy) et (Oz). Comme pour les contraintes planes, on peut montrer que le champ de déformation ne dérive d'un déplacement qu'asymptotiquement dans le cadre de l'hypothèse des "tranches minces" (épaisseur selon y et z petite devant la longueur du barreau) (SIDOROFF, 1980).

2. Il est possible de montrer qu'en compression, et pour les hypothèses qui seront faites par la suite, seule une solution homogène est possible. D'où le choix d'un chargement en traction.

FIGURE 3.3 – Schéma de principe du problème considéré : un barreau en traction

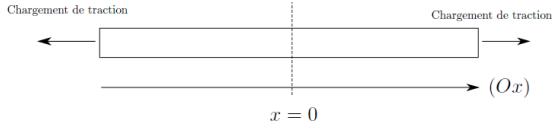
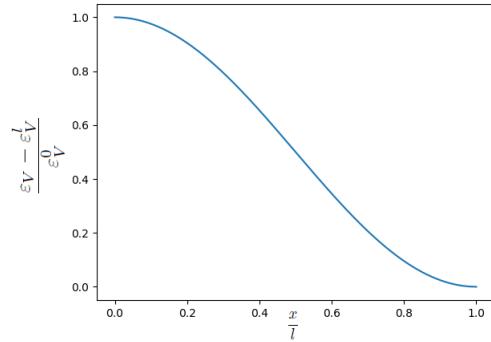


FIGURE 3.4 – Exemple de profil de déformation volumique vérifiant les conditions des équations 3.9 et 3.10



Concernant le chargement de traction, on note σ la contrainte xx à l'extrémité du barreau et U le déplacement à cette même extrémité. Pour ce chapitre 3, nous supposons que la double force P , issue de la condition au limite d'ordre supérieur du modèle de second gradient, est nulle. Cette hypothèse sera discutée et son impact quantifié dans le chapitre 4.

3.2.2.2 Comportement

Nous considérons un comportement de premier gradient élasto-plastique de type Drucker Prager. Ce comportement présente quelques différences avec celui utilisé au chapitre précédent.

Le comportement élastique est supposé linéaire isotrope incompressible. Il est caractérisé par un module de Young E et un coefficient de Poisson $\nu = \frac{1}{2}$. Cette hypothèse simplificatrice d'élasticité incompressible facilitera l'écriture des conditions aux limites dans la bande de localisation au cours de la résolution du problème. Son bien-fondé et son impact sur les conclusions que nous pourrons tirer de l'étude de ce problème analytique simplifié seront discutés en détail par la suite (partie 3.2.7).

Le comportement plastique est pris de type Drucker-Prager non associé. A noter que les fonctions d'écrouissage choisies ici diffèrent de celles utilisées dans le chapitre 2. Au chapitre 2, ces fonctions d'écrouissage étaient décroissantes, mais la condition de déformation plane conduisait à un écrouissage structurel positif puis à un écrouissage négatif (voir partie 2.2.1.3). Pour le barreau, cet écrouissage structurel n'est pas présent. Afin de traiter un problème proche des essais biaxiaux, nous considérons des fonctions d'écrouissage croissantes puis décroissantes.

Le critère se met sous la forme suivante :

$$F(\underline{\sigma}, \kappa) = \sigma_{eq} + a \operatorname{tr}(\underline{\sigma}) - R(\kappa) \quad (3.3)$$

avec $\dot{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\underline{\varepsilon}}_p^D : \dot{\underline{\varepsilon}}_p^D}$ le taux de déformation plastique déviatorique cumulée et $R(\kappa)$ la fonction d'écrouissage. Pour le moment, cette fonction R n'est pas particulisée. Elle est simplement choisie croissante (écrouissage positif, régime durcissant) pour $0 < \kappa < \kappa_R$, puis décroissante (écrouissage négatif, régime adoucissant) pour $\kappa_R < \kappa$.

Le potentiel plastique, noté $G(\underline{\sigma}, \kappa)$, s'écrit :

$$G(\underline{\sigma}, \kappa) = \sigma_{eq} + b(\kappa) \operatorname{tr}(\underline{\sigma}) \quad (3.4)$$

La loi d'écoulement s'écrit alors (avec $\dot{\underline{\varepsilon}}_p$ la déformation plastique) :

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_p = \Lambda \frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.5)$$

Pour $\sigma_{eq} \neq 0$, on peut montrer que $\Lambda = \dot{\kappa}$. La loi d'écoulement se met alors sous la forme suivante :

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_p = \dot{\kappa} \left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_{eq}^D}{\sigma_{eq}} + b(\kappa) I \right) \quad (3.6)$$

Pour le moment, on ne choisit pas une forme particulière pour la fonction $b(\kappa)$. On choisit simplement une fonction $b(\kappa)$ constante dans le régime durcissant ($0 < \kappa < \kappa_R$) et décroissante dans le régime adoucissant ($\kappa_R < \kappa$). Dans le cas où la fonction $b(\kappa)$ est choisie constante et égale au paramètre a , on retrouve une loi de comportement associée.

3.2.3 Mise en équation et résolution

3.2.3.1 Solution homogène élastique et plastique durcissante

Dans le régime élastique et le régime plastique durcissant, la solution reste homogène. La mise en équation et la résolution de ce problème homogène très simple n'est pas détaillée. On se contente de présenter quelques résultats utiles par la suite.

Dans le régime élastique, on a :

$$\sigma = E \frac{U}{L} \text{ et } \varepsilon_{xx} = -2\varepsilon_{yy} = \frac{U}{L} \quad (3.7)$$

Cette solution élastique homogène est valable tant que $\sigma < \frac{R(0)}{1+a}$.

Au pic du régime plastique durcissant, pour $\kappa = \kappa_R$, on a $\sigma = \frac{R(\kappa_R)}{1+a}$ et on peut montrer que :

$$U = L \left(\frac{R(\kappa_R)}{E(1+a)} + (\kappa_R + B(\kappa_R)) \right) \text{ avec } B(\kappa) = \int_0^\kappa b(t)dt \quad (3.8)$$

Au pic, la déformation volumique s'écrit $\varepsilon_V = 3B(\kappa_R)$. Cette déformation volumique sera notée ε_V^l par la suite.

3.2.3.2 Forme de la solution non homogène recherchée

Lorsque le régime adoucissant est atteint, la solution homogène peut bifurquer vers une solution sous la forme d'une ou plusieurs bandes de localisation. Ici, nous chercherons la solution sous la forme d'une bande de localisation, centrée en $x = 0$. Par symétrie, nous étudierons donc seulement la moitié $x > 0$ de cette bande de localisation. Nous noterons l la demi-largeur de la bande de localisation. Au delà de la (demi) largeur de bande, pour $x > l$, le comportement reste homogène en décharge élastique. Nous supposerons que cette largeur de bande est croissante. Cette hypothèse permettra de simplifier l'écriture des conditions aux limites portant sur la déformation volumique aux extrémités de la bande de localisation et sera vérifiée à posteriori.

A noter que la solution que nous exhiberons pour une bande de localisation peut facilement être manipulée pour assembler des solutions à plusieurs bandes, à la manière de ce qui a été fait dans (CHAMBON, CAILLERIE & EL HASSAN, 1998) ou (CHAMBON, CAILLERIE & MATSUCHIMA, 2001).

Nous appelons ε_V^0 la déformation volumique maximale dans la bande de localisation à un instant donné. Au vu de la forme de solution recherchée, la déformation volumique est maximale en $x = 0$. Le chargement (σ ou U) sera paramétré comme une fonction de ε_V^0 . La notation ' renvoie à la dérivée par rapport à x d'une quantité.

En $x = 0$, par symétrie, les conditions aux limites sur la déformation volumique s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_V(0) = \varepsilon_V^0 \\ \varepsilon'_V(0) = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Nous rappelons que le comportement élastique étant incompressible, la déformation volumique n'évolue plus dans la zone en décharge élastique ($x > l$). On note ε_V^l la déformation volumique (homogène) dans cette partie en décharge élastique

(cette déformation volumique non nulle résulte de la plastification homogène préalable du barreau dans le régime durcissant). Nous avons aussi supposé que la largeur de bande était croissante. En $x = l$, à l'interface entre la zone en charge plastique (bande de localisation) et la zone en décharge élastique, les conditions de continuité de la déformation volumique s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \varepsilon_V(l) = \varepsilon_V^l \\ \varepsilon'_V(l) = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Ce dernier jeu de conditions sur la déformation volumique en $x = l$ correspond à une interface parfaite entre zone en charge plastique et zone en décharge élastique.

Un exemple de profil de déformation volumique vérifiant les conditions ci-dessus est présenté en figure 3.4.

3.2.3.3 Solution non homogène

On s'intéresse ici à la mise en équation du problème dans la bande de localisation. Dans les grandes lignes, il s'agit d'exprimer toutes les inconnues du problème en fonction de la déformation volumique. Les équations du modèle de second gradient de dilatation vont nécessairement faire intervenir des gradients de cette déformation volumique, et en conservant comme inconnue principale cette déformation volumique nous préservons ainsi le caractère linéaire de ces gradients.

Nous montrerons par la suite qu'il est possible de paramétriser la contrainte et le déplacement à l'extrémité du barreau (le chargement) en fonction de la déformation volumique maximale dans la bande de localisation ε_V^0 (déformation volumique en $x = 0$). Cette déformation volumique présente aussi l'avantage d'être une quantité croissante, contrairement au chargement en présence d'éventuels snap-backs.

Hors de la bande de localisation, le comportement est élastique. L'évolution est donc incompressible et le comportement homogène. Les calculs concernant cette partie de solution homogène étant très simples, ils ne sont pas présentés ici.

Équations d'équilibre

Par la suite, on notera σ la contrainte à l'extrémité du barreau (et donc dans la zone en décharge élastique). On notera τ la contrainte de 1^{er} gradient dans la bande de localisation. S renvoie à la double contrainte de dilatance : les champs ne dépendant que de la coordonnée x , seule la composante x de cette double contrainte est non nulle.

On rappelle l'équation d'équilibre pour un milieu de second gradient de dilatation dans le cadre général (voir partie 2.1.1.1) :

$$\underline{\operatorname{div}}(\underline{\tau}) - \nabla(\operatorname{div} \underline{S}) = 0 \quad (3.11)$$

Dans le cas du problème du barreau, cette équation se simplifie :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau(x) - \frac{\partial S(x)}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.12)$$

L'intégration de cette équation et la condition de continuité à l'interface bande de localisation-zone en décharge élastique conduit à l'équation suivante :

$$\tau(x) - \frac{\partial S(x)}{\partial x} = \sigma \quad (3.13)$$

Comportement de second gradient

La relation de comportement de second gradient relie double contrainte de dilatance et gradient de la déformation volumique. Dans le cas du barreau 3D, cette relation se met sous la forme suivante :

$$S = 4a_1 \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial x} \quad (3.14)$$

Comportement de premier gradient

Dans la bande de localisation en charge plastique, le critère est atteint. Au vu de la forme du tenseur des contraintes retenu, on a alors notamment :

$$|\tau| + a \tau - R(\kappa) = 0 \quad (3.15)$$

En traction, on a $\tau > 0$. On a donc :

$$\tau = \frac{R(\kappa)}{1 + a} \quad (3.16)$$

On utilise maintenant la partie volumique de la loi d'écoulement 3.6 pour exprimer la déformation déviatorique plastique en fonction de la déformation volumique. L'élasticité étant incompressible, on a $\varepsilon_V^p = \varepsilon_V$. La loi d'écoulement volumique s'écrit donc :

$$\dot{\varepsilon}_V = 3 b(\kappa) \dot{\kappa} \quad (3.17)$$

En notant $B(\kappa) = \int_0^\kappa b(t) dt$, il vient :

$$\varepsilon_V = 3 B(\kappa) \quad (3.18)$$

$$\kappa = B^{-1}\left(\frac{1}{3}\varepsilon_V\right) \quad (3.19)$$

On peut donc exprimer la contrainte de premier gradient dans la bande de localisation en fonction de la déformation volumique :

$$\tau(\varepsilon_V) = \frac{1}{1+a} R\left(B^{-1}\left(\frac{1}{3}\varepsilon_V\right)\right) \quad (3.20)$$

Bilan

Nous avons exprimé la double contrainte de dilatance et la contrainte de premier gradient en fonction de la déformation volumique. En introduisant ces deux expressions dans l'équation d'équilibre, il vient :

$$\tau(\varepsilon_V) - 4a_1 \varepsilon''_V = \sigma \text{ avec } \tau(\varepsilon_V) = \frac{1}{1+a} R\left(B^{-1}\left(\frac{1}{3}\varepsilon_V\right)\right) \quad (3.21)$$

Cette équation en ε_V est complétée par le jeu de conditions aux limites sur ε_V précédemment explicité :

$$\begin{cases} \varepsilon_V(0) = \varepsilon_V^0 \\ \varepsilon'_V(0) = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_V(l) = \varepsilon_V^l \\ \varepsilon'_V(l) = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Deux de ces conditions aux limites permettront de déterminer la largeur de bande ainsi que la contrainte totale σ .

3.2.4 Résolution analytique dans la bande de localisation

Ici, nous pourrions par exemple particulariser les fonctions d'écrouissage $R(\kappa)$ et $b(\kappa)$ et expliciter $B^{-1}(\kappa)$. Pour certaines formes de fonctions d'écrouissage, nous pourrions alors résoudre directement l'équation 3.21. Nous présentons ici une méthode plus générale, qui ne nécessite pas de choisir une forme particulière pour $R(\kappa)$ et $b(\kappa)$.

En multipliant l'équation 3.21 par ε'_V , il vient :

$$\varepsilon'_V \cdot (\tau(\varepsilon_V) - 4a_1 \varepsilon''_V - \sigma) = 0 \quad (3.24)$$

En intégrant l'équation précédente, on fait apparaître une intégrale première :

$$T(\varepsilon_V) - 2a_1\varepsilon'_V - \sigma\varepsilon_V = C \quad (3.25)$$

On note $T(\varepsilon_V)$ la primitive de $\tau(\varepsilon_V)$ s'annulant en ε_V^l . C est une constante, pour le moment indéterminée. A ce stade, nous utilisons les conditions aux limites sur ε_V des équations 3.22 et 3.23. En $x = 0$, ces conditions conduisent à :

$$T(\varepsilon_V^0) - \sigma\varepsilon_V^0 = C \quad (3.26)$$

En $x = l$, ces conditions conduisent à :

$$-\varepsilon_V^l\sigma = C \quad (3.27)$$

On aboutit alors à :

$$\sigma = \frac{T(\varepsilon_V^0)}{\varepsilon_V^0 - \varepsilon_V^l}$$

(3.28)

$$C = T(\varepsilon_V^0) \left(1 - \frac{\varepsilon_V^0}{\varepsilon_V^0 - \varepsilon_V^l} \right) \quad (3.29)$$

On note que l'équation 3.28 permet de paramétriser la contrainte σ (contrainte à l'extrémité du barreau et dans la zone élastique) en fonction de la déformation volumique maximale dans la bande de localisation ε_V^0 . En introduisant ces deux dernières relations dans l'intégrale première, il vient :

$$\varepsilon'_V = \frac{1}{2a_1} \left(T(\varepsilon_V) - T(\varepsilon_V^0) \frac{\varepsilon_V - \varepsilon_V^l}{\varepsilon_V^0 - \varepsilon_V^l} \right) \quad (3.30)$$

A ce stade, nous voyons qu'une solution non homogène n'est possible que si $T(\varepsilon_V) - T(\varepsilon_V^0) \frac{\varepsilon_V - \varepsilon_V^l}{\varepsilon_V^0 - \varepsilon_V^l} > 0$. Or, $\tau(\varepsilon_V)$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[\varepsilon_V^l, \varepsilon_V^0]$ (écrouissage négatif, la contrainte diminue avec la déformation plastique). La fonction $T(\varepsilon)$ est donc une fonction strictement concave sur l'intervalle $[\varepsilon_V^l, \varepsilon_V^0]$:

$$\frac{T(\varepsilon_V) - T(\varepsilon_V^l)}{\varepsilon_V - \varepsilon_V^l} > \frac{T(\varepsilon_V^0) - T(\varepsilon_V^l)}{\varepsilon_V^0 - \varepsilon_V^l} \quad (3.31)$$

On rappelle que $T(\varepsilon_V)$ a été choisie comme la primitive de $\tau(\varepsilon_V)$ s'annulant en ε_V^l . Une solution non homogène est donc bien possible. On inverse l'équation 3.30 et on retient la solution $\varepsilon'_V < 0$ (voir profil de déformation volumique figure 3.4) :

$$\frac{\partial x}{\partial \varepsilon_V} = -\sqrt{2a_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_V^0 - \varepsilon_V^l}{T(\varepsilon_V)(\varepsilon_V^0 - \varepsilon_V^l) - T(\varepsilon_V^0)(\varepsilon_V - \varepsilon_V^l)}} \quad (3.32)$$

En séparant les variables et en intégrant, il vient :

$$x(\varepsilon_V, \varepsilon_V^0) = \sqrt{2a_1} \int_{\varepsilon_V^l}^{\varepsilon_V^0} \sqrt{\frac{\varepsilon_V^0 - \varepsilon_V^l}{T(t)(\varepsilon_V^0 - \varepsilon_V^l) - T(\varepsilon_V^0)(t - \varepsilon_V^l)}} dt \quad (3.33)$$

Cette dernière expression nous donne implicitement le profil de déformation volumique dans la bande de localisation en fonction de la déformation volumique maximale dans la bande de localisation ε_V^0 . Par ailleurs, on peut en déduire l'expression de la largeur de bande de localisation $l(\varepsilon_V^0) = x(\varepsilon_V^l, \varepsilon_V^0)$.

$$l(\varepsilon_V^0) = \sqrt{2a_1} \int_{\varepsilon_V^l}^{\varepsilon_V^0} \sqrt{\frac{\varepsilon_V^0 - \varepsilon_V^l}{T(t)(\varepsilon_V^0 - \varepsilon_V^l) - T(\varepsilon_V^0)(t - \varepsilon_V^l)}} dt \quad (3.34)$$

Cette dernière équation permet donc de calculer la largeur de bande en fonction de la déformation volumique maximale dans la bande de localisation ε_V^0 .

A noter que cette expression est relativement générale : elle est valable pour toute fonction d'écrouissage $R(\kappa)$ et $b(\kappa)$ à la condition d'avoir une largeur de bande croissante. Nous illustrons plus loin que cette propriété est bien vérifiée pour quelques fonctions particulières.

A ce stade, il ne reste plus qu'à exprimer l'ouverture de la bande de localisation (que nous noterons δ et qui correspond au saut de déplacement de part et d'autre de la bande de localisation). On a :

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} u(l) = \int_0^l \varepsilon_{xx}(x) dx \quad (3.35)$$

Par ailleurs, on peut montrer que la déformation axiale ε_{xx} s'exprime de la manière suivante :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\tau}{E} + \kappa + B(\kappa) \quad (3.36)$$

En fonction de la déformation volumique, cette dernière expression devient :

$$\varepsilon_{xx}(\varepsilon_V) = \frac{\tau(\varepsilon_V)}{E} + B^{-1}\left(\frac{1}{3}\varepsilon_V\right) + \frac{1}{3}\varepsilon_V \quad (3.37)$$

Par un changement de variable, on aboutit alors à l'expression suivante de l'ouverture de la bande de localisation :

$$\delta(\varepsilon_V^0) = \sqrt{2a_1} \int_{\varepsilon_V^l}^{\varepsilon_V^0} \left(\frac{\tau(t)}{E} + B^{-1}\left(\frac{1}{3}t\right) + \frac{1}{3}t \right) \sqrt{\frac{\varepsilon_V^0 - \varepsilon_V^l}{T(t)(\varepsilon_V^0 - \varepsilon_V^l) - T(\varepsilon_V^0)(t - \varepsilon_V^l)}} dt \quad (3.38)$$

Une fois le déplacement à l'extrémité de la bande de localisation connu, on peut calculer le déplacement U à l'extrémité du barreau :

$$U(\varepsilon_V^0) = \delta(\varepsilon_V^0) + (L - l) \frac{T(\varepsilon_V^0)}{E(\varepsilon_V^0 - \varepsilon_V^l)} \quad (3.39)$$

Le second terme de la somme dans l'équation précédente correspond simplement à l'élongation de la zone homogène élastique. On rappelle que L désigne la longueur totale du demi-barreau.

Bilan

Les quantités d'intérêt du problème (contrainte et déplacement à l'extrémité du barreau ou de la bande de localisation) ont été exprimées en fonction de la déformation volumique maximale dans la bande de localisation ε_V^0 . Nous sommes aussi capables de calculer le profil de déformation volumique dans la bande de localisation, et donc le profil d'autres champs (contrainte de premier gradient, déformation plastique déviatorique ...).

Tous ces champs sont paramétrés par la déformation volumique maximale ε_V^0 , qui varie entre sa valeur initiale ε_V^l au pic et une valeur limite qui dépend de la forme de l'écrouissage retenue. Cette valeur limite est une fonction des paramètres matériau et peut être asymptotique :

$$\varepsilon_V^{lim} = \lim_{\kappa \rightarrow +\infty} 3B(\kappa) \quad (3.40)$$

3.2.5 Application numérique avec une loi de comportement de type Drucker Prager non associée

En pratique, une fois les fonctions d'écrouissages particularisées, l'évaluation numérique des expressions du paragraphe précédent peuvent se faire de différentes manières. Il est possible d'évaluer numériquement les différentes fonctions intervenant dans les expressions du déplacement, de la largeur de bande etc ... puis de calculer numériquement ces différentes intégrales (quadratures numériques). Pour certaines fonctions d'écrouissage, il est possible de trouver des primitives et donc de simplifier au maximum les expressions présentées au paragraphe précédent. C'est notamment le cas pour les fonctions d'écrouissage utilisées ici.

Nous ne détaillerons pas tous les calculs permettant de simplifier les équations 3.33 à 3.39, ces calculs étant longs mais ne présentant pas de difficultés particulières. Cependant, nous comparerons les résultats obtenus grâce aux calculs de primitives à ceux obtenus par intégration numérique de ces mêmes expressions 3.33 à 3.39.

Nous illustrerons ces résultats dans deux situations :

TABLE 3.1 – Paramètres matériaux utilisées pour l'évaluation numérique

E	ν	σ_0	σ_R	σ_u	κ_R	κ_c	ϕ	ψ_0	a_1
6 GPa	0.5	20 MPa	25 MPa	10 MPa	0.0025	0.1	25°	15°	5.10^2 N

- Une fonction $R(\kappa)$ à écrouissage positif linéaire, puis à écrouissage négatif parabolique. Une fonction $b(\kappa)$ constante puis linéaire décroissante.
- Une fonction $R(\kappa)$ à écrouissage positif linéaire, puis à écrouissage négatif exponentiel. Une fonction $b(\kappa)$ constante puis exponentielle décroissante.

On rappelle que l'écrouissage positif est présent afin de traiter un problème proche des essais biaxiaux, où un écrouissage positif structurel est observé. En conséquence, le comportement dans ce régime durcissant est volontairement choisi très simple. Dans les deux cas, les paramètres matériaux utilisés dans cette section sont ceux présentés en tableau 3.1. La longueur L du barreau est prise égale à 50 mm.

3.2.5.1 Loi de comportement non associée à écrouissage parabolique

Les fonctions d'écrouissage utilisées sont les suivantes :

$$R(\kappa) = \begin{cases} \sigma_0 \left(1 + \frac{\sigma_R - \sigma_0}{\sigma_0} \frac{\kappa}{\kappa_R}\right) & \text{pour } \kappa < \kappa_R \\ \frac{\sigma_R - \sigma_u}{\kappa_c - \kappa_R} (\kappa - \kappa_R)^2 - 2 \frac{\sigma_R - \sigma_u}{\kappa_u - \kappa_R} (\kappa - \kappa_R) + \sigma_R & \\ \sigma_u & \text{pour } \kappa > \kappa_c \end{cases} \quad (3.41)$$

$$b(\kappa) = \begin{cases} b_0 & \text{pour } \kappa < \kappa_R \\ b_0 \left(1 - \frac{\kappa - \kappa_R}{\kappa_c - \kappa_R}\right) & \text{pour } \kappa_R < \kappa < \kappa_c \\ 0 & \text{pour } \kappa > \kappa_c \end{cases} \quad (3.42)$$

Ce comportement est caractérisé par un régime durcissant dilatant pour $\kappa < \kappa_R$, un régime adoucissant dilatant pour $\kappa_R < \kappa < \kappa_c$ et un régime plastique parfait incompressible pour $\kappa > \kappa_c$.

σ_0 désigne ici la limite d'élasticité initiale, σ_R cette limite au pic, σ_u la contrainte résiduelle. b_0 correspond à la dilatance initiale.

Les fonctions R et b ci-dessus sont illustrées en figure 3.5 et 3.6.

On présente ci-dessous les expressions des différentes quantités d'intérêt du problème en fonction des paramètres matériaux. Ces expressions simplifiées sont obtenues en introduisant les fonctions $R(\kappa)$ et $b(\kappa)$ dans les expressions intégrales 3.33 à 3.39. Elles sont valables dans le régime adoucissant dilatant.

Expression de la largeur de bande l (constante au cours du chargement) :

CHAPITRE 3. INFLUENCE ET IDENTIFICATION DE LA LONGUEUR INTERNE DANS LE MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

FIGURE 3.5 – Fonction d’écrouissage $R(\kappa)$

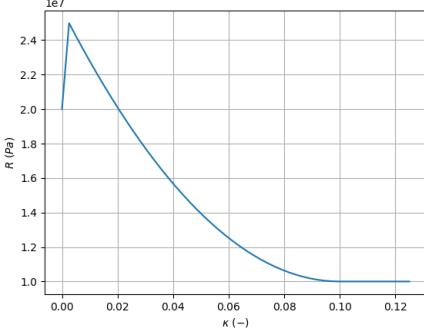
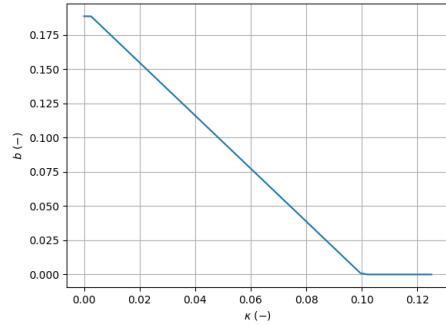


FIGURE 3.6 – Fonction de dilatance $b(\kappa)$



$$l = \sqrt{6\pi} \sqrt{\frac{(1+a) b_0 a_1 (\kappa_C - \kappa_R)}{\sigma_R - \sigma_u}} \quad (3.43)$$

Expression de la contrainte σ :

$$\sigma(\varepsilon_V^0) = \frac{1}{1+a} \left(\sigma_R - \frac{(\sigma_R - \sigma_u)(\varepsilon_V^0 - 3b_0\kappa_R)}{3(\kappa_c - \kappa_R)b_0} \right) \quad (3.44)$$

Expression de l’ouverture de la bande de localisation δ :

$$\delta(\sigma) = l \left(\frac{\sigma}{E} + \kappa_R(1+b_0) \right) + l(\kappa_C - \kappa_R) \left(1 + \frac{b_0}{2}\bar{\sigma} - \frac{2}{\pi}E(2\bar{\sigma}) \right) \quad (3.45)$$

On note $\bar{\sigma} = \frac{1+a}{\sigma_R - \sigma_u} \left(\frac{\sigma_R}{1+a} - \sigma \right)$. La fonction E est une intégrale elliptique de 2^{nde} espèce (ABRAMOWITZ & STEGUN, 1964). Cette fonction spéciale est définie de la manière suivante :

$$E(2\bar{\sigma}) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - 4\bar{\sigma}^2 t^2}{1 - t^2}} dt \quad (3.46)$$

Expression du déplacement U à l’extrémité du barreau :

$$U(\sigma) = L \left(\frac{\sigma}{E} + \kappa_R(1+b_0) \right) + l(\kappa_c - \kappa_R) \left(1 + \frac{b_0}{2}\bar{\sigma} - \frac{2}{\pi}E(2\bar{\sigma}) \right) \quad (3.47)$$

Profil de déformation volumique dans la bande de localisation :

$$\varepsilon_V(x, \varepsilon_V^0) = 3b_0\kappa_R + (\varepsilon_V^0 - 3b_0\kappa_R) \cos^2\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \quad (3.48)$$

CHAPITRE 3. INFLUENCE ET IDENTIFICATION DE LA LONGUEUR INTERNE DANS LE MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

FIGURE 3.7 – Réponse contrainte - élongation du barreau. 1 : régime élastique incompressible homogène. 2 : régime durcissant dilatant homogène. 3 : régime adoucissant dilatant non homogène. 4 : régime plastique parfait incompressible

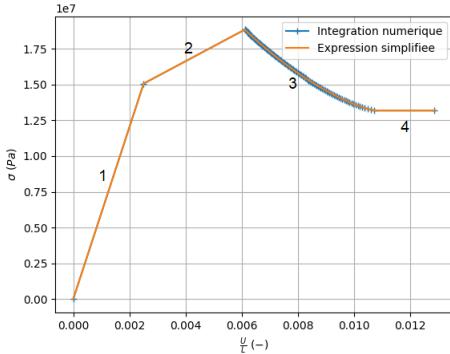
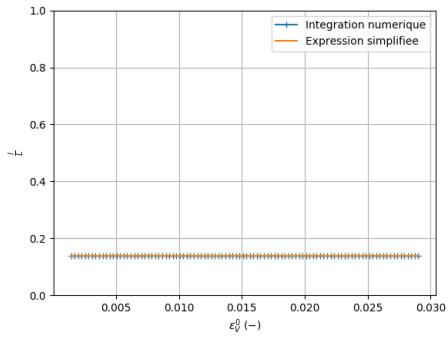


FIGURE 3.8 – Largeur de bande au cours du régime adoucissant dilatant

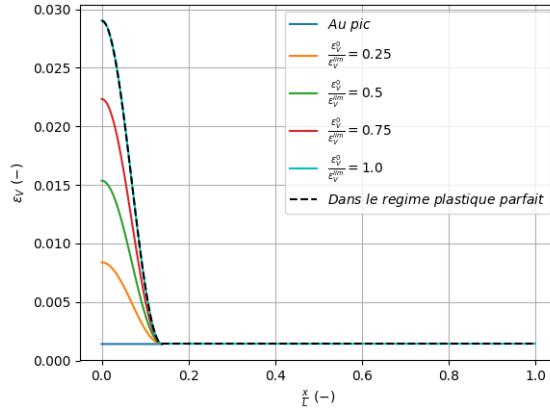


Les expressions ci-dessus, valables dans le régime adoucissant, sont à compléter dans les régimes élastique et durcissant homogènes. Ces calculs, qui ne présentent pas de difficultés, ne sont pas présentés ici. Les résultats obtenus pour cette loi de comportement à écrouissage parabolique appliquée au problème du barreau sont illustrés dans les figures 3.7 à 3.9.

La figure 3.7 présente la réponse du barreau (contrainte σ à l’extrémité en fonction de l’elongation $\frac{U}{L}$). Les différents régimes du comportement y sont mis en évidence.

La figure 3.8 présente la largeur de la bande de localisation dans le régime adoucissant dilatant. On constate que cette largeur de bande est constante dans ce régime. Par ailleurs, cette expression est cohérente avec les expressions obtenues pour d’autres problèmes analytiques. Par exemple, on retrouve une expression de la largeur de bande en $\sqrt{\frac{a_1}{h}}$ (voir (CHAMBON, CAILLERIE & EL HASSAN, 1998)) avec h le module d’écrouissage $h = \frac{\kappa_u - \kappa_c}{\sigma_R - \sigma_u}$. Cependant, l’expression que nous obtenons ici est bien plus complète : elle donne des informations sur la sensibilité de la largeur de bande à tous les paramètres matériaux de la loi de comportement plastique. On fait remarquer que cette largeur de bande n’est plus définie dans le régime ultime plastique parfait ($\kappa > \kappa_c$). Cette phase étant incompressible, la largeur de bande n’est plus définie pour un modèle de second gradient de dilatation. Pour $\kappa > \kappa_c$, les incrémentations de déformation se concentrent en $x = 0$. Ce résultat est cohérent avec les conclusions du chapitre 2 concernant l’évolution de la largeur de bande pour le modèle de second gradient de dilatation utilisé avec une loi de comportement non

FIGURE 3.9 – Evolution du profil de déformation volumique dans le régime post-pic



associée.

La figure 3.9 présente l'évolution du profil de déformation volumique dans la bande de localisation au cours du régime adoucissant et du régime plastique parfait. Dans le régime adoucissant, la largeur de bande est constante et la forme du profil indépendante du chargement. Hors de la bande de localisation, la déformation volumique n'évolue plus dans le régime post-pic : elle reste homogène et égale à sa valeur au pic $\varepsilon_V^l = 3b_0\kappa_R$. Dans le régime plastique parfait incompressible, la déformation volumique n'évolue plus dans tout le barreau.

Pour tous ces résultats, on constate que les résultats obtenus grâce aux expressions 3.43 à 3.47 correspondent bien à ceux obtenus par intégration numérique des expressions 3.33 à 3.39.

3.2.5.2 Loi de comportement non associée à écrouissage exponentiel

Les fonctions d'écrouissage utilisées sont les suivantes :

$$R(\kappa) = \begin{cases} \sigma_0 \left(1 + \frac{\sigma_R - \sigma_0}{\sigma_0} \frac{\kappa}{\kappa_R}\right) & \text{pour } \kappa < \kappa_R \\ (\sigma_R - \sigma_U) \exp\left(-\frac{\kappa - \kappa_R}{\kappa_C - \kappa_R}\right) + \sigma_u & \text{pour } \kappa > \kappa_R \end{cases} \quad (3.49)$$

$$b(\kappa) = \begin{cases} b_0 & \text{pour } \kappa < \kappa_R \\ b_0 \exp\left(-\frac{\kappa - \kappa_R}{\kappa_C - \kappa_R}\right) & \text{pour } \kappa > \kappa_R \end{cases} \quad (3.50)$$

Ce comportement est caractérisé par un régime durcissant dilatant pour $\kappa < \kappa_R$ et un régime adoucissant dilatant pour $\kappa_R < \kappa$. Le paramètre κ_c correspond à la déformation caractéristique dans ce régime adoucissant. A la différence de l'écrouis-

CHAPITRE 3. INFLUENCE ET IDENTIFICATION DE LA LONGUEUR INTERNE DANS LE MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

FIGURE 3.10 – Fonction d’écrouissage $R(\kappa)$

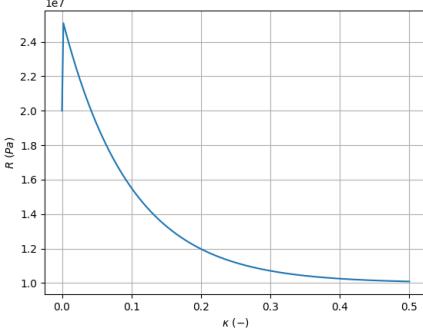
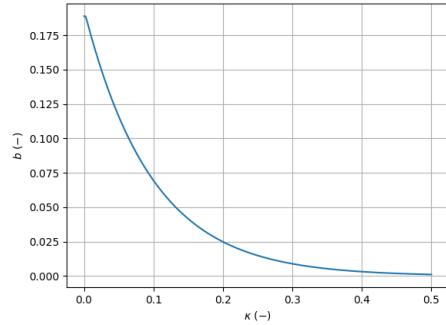


FIGURE 3.11 – Fonction de dilatance $b(\kappa)$



sage parabolique du paragraphe précédent, on tend ici asymptotiquement vers un comportement plastique parfait incompressible.

σ_0 désigne ici la limite d’élasticité initiale, σ_R cette limite au pic, σ_u la contrainte résiduelle. b_0 correspond à la dilatance initiale.

Les fonctions R et b ci-dessus sont illustrées en figure 3.10 et 3.11. Le comportement adoucissant est ici similaire à celui utilisé au chapitre 2 pour la loi de comportement non associée à écrouissage exponentiel dans le cadre des essais biaxiaux numériques.

Présentation des résultats

On présente ci-dessous les expressions des différentes quantités d’intérêt du problème en fonction des paramètres matériaux. Ces expressions simplifiées sont obtenues en introduisant les fonctions $R(\kappa)$ et $b(\kappa)$ dans les expressions intégrales 3.33 à 3.39. Elles sont valables dans le régime adoucissant dilatant et on constate qu’elles sont très similaires à celles obtenues dans le cas d’un écrouissage parabolique au paragraphe précédent.

Expression de la largeur de bande l :

$$l = 2\sqrt{3}\pi \sqrt{\frac{(1+a) b_0 a_1 (\kappa_c - \kappa_R)}{\sigma_R - \sigma_u}} \quad (3.51)$$

Expression de la contrainte σ :

$$\sigma(\varepsilon_V^0) = \frac{1}{1+a} \left(\sigma_R - \frac{(\sigma_R - \sigma_u)(\varepsilon_V^0 - 3b_0\kappa_R)}{6(\kappa_c - \kappa_R)b_0} \right) \quad (3.52)$$

Expression de l’ouverture de la bande de localisation δ . On note $\bar{\sigma} = \frac{1+a}{\sigma_R - \sigma_u} \left(\frac{\sigma_R}{1+a} - \sigma \right)$.

CHAPITRE 3. INFLUENCE ET IDENTIFICATION DE LA LONGUEUR INTERNE DANS LE MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

FIGURE 3.12 – Réponse contrainte - élongation du barreau. 1 : régime élastique incompressible homogène. 2 : régime durcissant dilatant homogène. 3 : régime adoucissant dilatant non homogène.

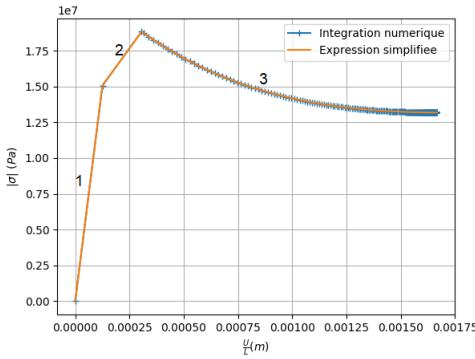
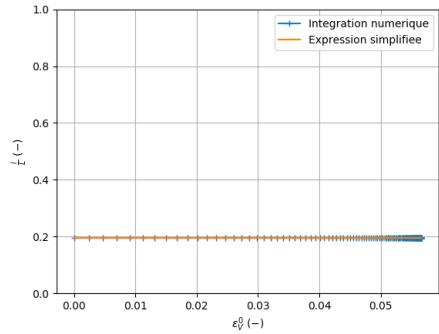


FIGURE 3.13 – Largeur de bande au cours du régime adoucissant dilatant



$$\delta(\sigma) = l \left(\frac{\sigma}{E} + \kappa_R (1 + b_0) \right) + l(\kappa_C - \kappa_R) \left(b_0 \bar{\sigma} + 2 \ln \left(\frac{2}{\sqrt{1 - 2\bar{\sigma}} + 1} \right) \right) \quad (3.53)$$

Expression du déplacement U à l'extrémité du barreau :

$$U(\sigma) = L \left(\frac{\sigma}{E} + \kappa_R (1 + b_0) \right) + l(\kappa_C - \kappa_R) \left(b_0 \bar{\sigma} + 2 \ln \left(\frac{2}{\sqrt{1 - 2\bar{\sigma}} + 1} \right) \right) \quad (3.54)$$

Profil de déformation volumique dans la bande de localisation :

$$\varepsilon_V(x, \varepsilon_V^0) = 3b_0 \kappa_R + (\varepsilon_V^0 - 3b_0 \kappa_R) \cos^2 \left(\frac{\pi x}{2l} \right) \quad (3.55)$$

La figure 3.12 présente la réponse du barreau (contrainte σ à l'extrémité en fonction de l'élongation $\frac{U}{L}$). Les différents régimes du comportement y sont mis en évidence.

La figure 3.13 présente la largeur de la bande de localisation dans le régime adoucissant dilatant. On constate que cette largeur de bande est constante.

Les figures 3.14 et 3.15 présentent les profils de déformation volumique ε_V et de déformation plastique déviatorique κ dans le barreau. Dans le régime dilatant, le profil de κ est obtenu à partir de l'expression 3.55 et de la relation $\kappa = B^{-1}(\frac{1}{3}\varepsilon_V)$.

On constate que lorsque la déformation volumique n'évolue quasiment plus (entre $\varepsilon_V^{lim} = 0.99$ et $\varepsilon_V^{lim} = 0.9999$ par exemple), la déformation plastique déviatorique se

FIGURE 3.14 – Evolution du profil de déformation volumique dans le régime post-pic

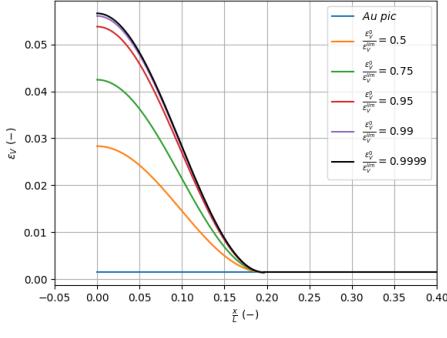
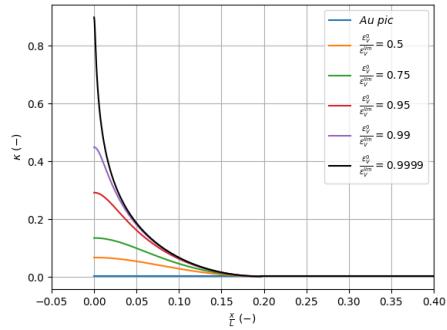


FIGURE 3.15 – Evolution du profil de déformation plastique déviatorique dans le régime post-pic



concentre autour de $x = 0$. Ainsi, même si la largeur de bande reste constante (équation 3.51), le modèle de second gradient de dilatation contrôle de moins en moins bien la localisation des incrément de déformation déviatorique au fur et à mesure que la dilatance tend vers 0. Cela rejoint les observations faites au chapitre 2, où nous avions montré à partir d'essais biaxiaux numériques que pour des valeurs de κ trop élevées le modèle de second gradient de dilatation ne permettait plus de contrôler la largeur de bande. Les incrément de déformation plastique déviatorique se concentraient dans un seul élément dans le régime plastique incompressible asymptotique.

Contrainte résiduelle

Ce modèle analytique du barreau permet aussi de mettre en évidence une spécificité des modèles de second gradient : la présence d'une double contrainte résiduelle. En effet, à partir de l'expression 3.52, on peut montrer que la contrainte σ tend asymptotiquement vers une valeur limite σ^{lim} :

$$\sigma^{lim} = \frac{\sigma_u + \sigma_R}{2(1+a)} \quad (3.56)$$

En particulier, lorsque $\sigma_u = 0$ (contrainte résiduelle de la loi de premier gradient nulle), on a $\sigma^{lim} = \frac{\sigma_R}{2(1+a)}$. Ainsi, il existe nécessairement une contrainte résiduelle à l'extrémité du barreau. On rappelle que l'équation d'équilibre dans la bande de localisation s'écrit : $\tau(x) - \frac{\partial S(x)}{\partial x} = \sigma$. On constate que même si la contrainte de 1^{er} gradient τ est nulle dans la bande de localisation, la double contrainte S peut induire une contrainte totale σ non nulle.

En modifiant les équations d'équilibre d'un problème de mécanique classique, les modèles de second gradient introduisent une double contrainte. Dans le cas des géomatériaux, qui exhibent effectivement une contrainte résiduelle ($\sigma \neq 0$) dans leur

régime ultime, la présence de cette double contrainte résiduelle ne pose pas de problème. Mais lorsque le modèle de second gradient est utilisé pour modéliser d'autres matériaux, comme le béton par exemple, la présence de cette double contrainte résiduelle conduit à des résultats parfois difficiles à interpréter (voir par exemple (JOUAN, 2015)).

Une analyse similaire peut être menée en considérant l'énergie de second gradient.

Energie de 2nd gradient

On définit l'énergie (surfique) de second gradient e_{2nd} définie de la manière suivante :

$$e_{2nd} = \int_0^L \frac{1}{2} \cdot 4a_1 \left(\frac{\partial \varepsilon_V}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3.57)$$

Dans le cas du problème du barreau, l'élasticité est incompressible. La déformation volumique est donc entièrement d'origine plastique. La contribution énergétique du modèle de second gradient de dilatation n'est donc pas récupérable sur un cycle de charge/décharge.

Dans le cas d'un problème numérique plus réaliste, comme par exemple les essais biaxiaux réalisés au chapitre 2, la réponse serait plus nuancée. Cependant, on peut considérer que l'essentiel du gradient de déformation volumique est d'origine plastique. Cette question sera abordée plus en détail en partie 3.2.7.

L'essentiel de l'énergie de second gradient (la totalité ici) est donc bloquée, et n'est pas récupérable sur un cycle de charge / décharge.

Energie consommée dans le régime adoucissant

On définit l'énergie (surfique) consommée totale comme le travail des forces extérieures sur un cycle de charge / décharge (voir figure 3.16) :

$$W_{ext} = \int \sigma dU \quad (3.58)$$

Nous nous intéressons plus particulièrement à l'énergie consommée par le phénomène de localisation, c'est-à-dire l'énergie consommée dans le régime adoucissant. Cette énergie se calcule comme la différence de l'énergie consommée totale à laquelle on soustrait l'énergie consommée dans le régime durcissant pré-pic homogène (voir figure 3.17).

On peut montrer que cette énergie consommée dans le régime adoucissant se met sous la forme suivante :

CHAPITRE 3. INFLUENCE ET IDENTIFICATION DE LA LONGUEUR INTERNE DANS LE MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

FIGURE 3.16 – Cycle de charge décharge pour calculer l'énergie consommée totale

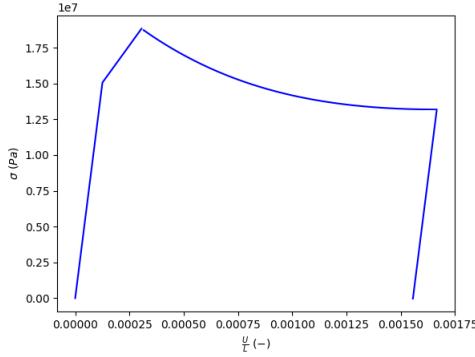
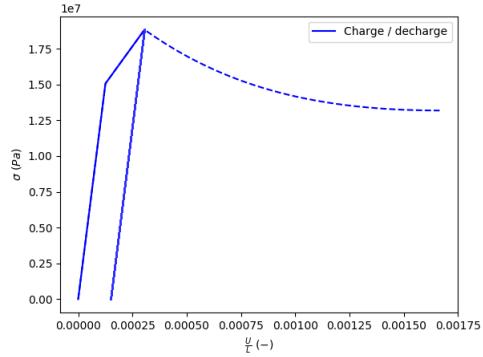


FIGURE 3.17 – Cycle de charge décharge pour calculer l'énergie consommée dans le régime plastique homogène



$$W_{cons}^{loc}(\sigma) = l(\kappa_c - \kappa_R) \left(\frac{2}{1+a} \sigma_R \ln\left(\frac{2}{\sqrt{1-2\bar{\sigma}}+1}\right) + \dots \right. \\ \left. \dots \frac{\sigma_R - \sigma_u}{1+a} (-1 + \bar{\sigma} + \sqrt{1-2\bar{\sigma}}) + \frac{b_0(1+a)}{\sigma_R - \sigma_u} \left(\frac{\sigma_R}{2(1+a)^2} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right) \quad (3.59)$$

On rappelle que $\bar{\sigma} = \frac{1+a}{\sigma_R - \sigma_u} \left(\frac{\sigma_R}{1+a} - \sigma \right)$.

Cette énergie correspond à l'énergie consommée par la bande de localisation dans le régime adoucissant.

3.2.6 Changement d'échelle avec le modèle de second gradient de dilatation

Dans cette partie, il s'agit d'exploiter les résultats analytiques de la partie précédente afin d'étudier l'influence de la largeur de bande du modèle de second gradient de dilatation. Nous nous limiterons au comportement de 1^{er} gradient du paragraphe précédent (écrouissage exponentiel), mais nous illustrerons par la suite qu'un raisonnement similaire peut s'appliquer à une large gamme de fonctions d'écrouissage et/ou de fonctions de charge.

Au paragraphe précédent, nous avons montré que la largeur de bande l de localisation peut se mettre sous la forme suivante :

$$l = 2\sqrt{3}\pi \sqrt{\frac{(1+a) b_0 a_1 (\kappa_c - \kappa_R)}{\sigma_R - \sigma_u}} \quad (3.60)$$

Cette expression permet de relier de manière explicite la largeur de bande l aux paramètres de la loi de comportement de 1^{er} gradient et à la rigidité de second gradient a_1 . Dans la suite, nous ne ferons plus référence qu'à cette largeur de bande, le paramètre a_1 correspondant pouvant être calculé à partir de cette expression.

3.2.6.1 Invariants

Dans cette section, nous mettrons en évidence que certaines quantités d'intérêt macroscopiques du problème, que nous appellerons invariants, peuvent être rendues indépendantes de la largeur de bande, dans l'esprit de ce qui a par exemple été fait dans (LORENTZ, 2017) pour un modèle non local d'endommagement du béton.

On rappelle l'expression du déplacement à l'extrémité du barreau U en fonction de la contrainte totale σ :

$$U(\sigma) = L \left(\frac{\sigma}{E} + \kappa_R (1 + b_0) \right) + l (\kappa_C - \kappa_R) g(\sigma_R, \sigma_U, a, b_0, \sigma) \quad (3.61)$$

Avec $g((\sigma_R, \sigma_U, a, b_0)) = b_0 \bar{\sigma} + 2 \ln \left(\frac{2}{\sqrt{1-2\bar{\sigma}}+1} \right)$ et $\bar{\sigma} = \frac{1+a}{\sigma_R - \sigma_u} \left(\frac{\sigma_R}{1+a} - \sigma \right)$.

On remarque donc que l'expression de l'elongation du barreau se décompose comme la somme de 2 termes :

- Un premier terme qui correspond à l'elongation élastique et au régime plastique durcissant. Ce terme fait uniquement intervenir des paramètres matériau de la loi de comportement qui caractérisent le comportement pré-pic.
- Un second terme où on trouve le produit $l (\kappa_C - \kappa_R)$ en facteur d'une fonction g indépendante de la largeur de bande l et des déformations κ_R et κ_c .

L'énergie consommée par la bande de localisation se met elle-aussi sous une forme similaire (voir équation 3.59) :

$$W_{\text{cons}}^{\text{loc}}(\sigma) = l(\kappa_c - \kappa_R) f(\sigma_R, \sigma_U, a, b_0, \sigma) \quad (3.62)$$

De la même manière, on peut montrer que la déformation volumique moyenne du barreau générée dans le régime adoucissant se met sous la forme suivante :

$$\overline{\varepsilon_V^{\text{loc}}}(\sigma) = \frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon_V(x) dx - \varepsilon_V^l = l(\kappa_c - \kappa_R) j(\sigma_R, \sigma_U, a, b_0, \sigma) \quad (3.63)$$

Ici, dans le cadre d'un problème analytique simplifié, la largeur de bande peut prendre n'importe quelle valeur sans que cela n'ait de conséquences sur le temps de calcul. Mais dans le cadre de simulations numériques éléments finis d'essais biaxiaux, cette largeur de bande doit être choisie en fonction du maillage et des capacités de calcul. La largeur de bande est donc un paramètre *numérique*.

Les trois expressions ci-dessus (équations 3.61, 3.62 et 3.63) montrent qu'il est possible de choisir la largeur de bande de manière arbitraire tout en conservant invariantes l'élongation du barreau, l'énergie consommée dans le régime adoucissant ainsi que la déformation volumique moyenne. Pour cela, il suffit de conserver constant le produit $l(\kappa_c - \kappa_R)$. La largeur de bande étant un paramètre numérique, on voit ici que la déformation $\kappa_c - \kappa_R$, qui pilote l'écrouissage dans le régime adoucissant, s'interprète aussi comme un paramètre numérique. A noter que la déformation κ_R influe sur le comportement pré-pic, il est donc nécessaire de ne modifier que le paramètre κ_C .

Les invariants sont illustrés en figures 3.18 à 3.20, où on constate que ces quantités d'intérêt peuvent être rendues indépendantes de la largeur de bande.

Cependant, les quantités locales (comme par exemple le profil de déformation volumique dans la bande de localisation ou l'ouverture de cette bande de localisation) dépendront de la largeur de bande et ne sont pas des invariants (voir figures 3.21 et 3.22). Cela illustre pourquoi l'utilisation d'une largeur de bande numérique ne permet pas d'extraire de manière fiable des valeurs locales de contraintes ou de déformations dans la bande de localisation. Seules des quantités macroscopiques peuvent être obtenues à partir de ce type de calcul.

A noter que le résultat d'invariance que nous mettons en évidence ici pour le modèle de second gradient de dilatation est très proche de celui obtenu par (BAŽANT, 2002) dans le cadre de modèles à bande de fissuration pour la modélisation de l'endommagement du béton. Dans les deux cas, la pente de l'écrouissage du comporte-

CHAPITRE 3. INFLUENCE ET IDENTIFICATION DE LA LONGUEUR INTERNE DANS LE MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

FIGURE 3.18 – Réponse contrainte-élongation du barreau pour plusieurs largeurs de bande à $l(\kappa_c - \kappa_R)$ constant

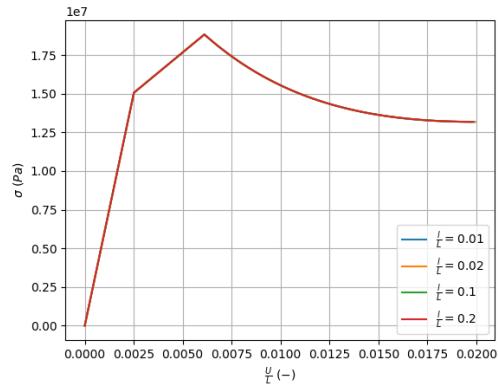


FIGURE 3.19 – Energie consommée dans la bande de localisation pour plusieurs largeurs de bande à $l(\kappa_c - \kappa_R)$ constant

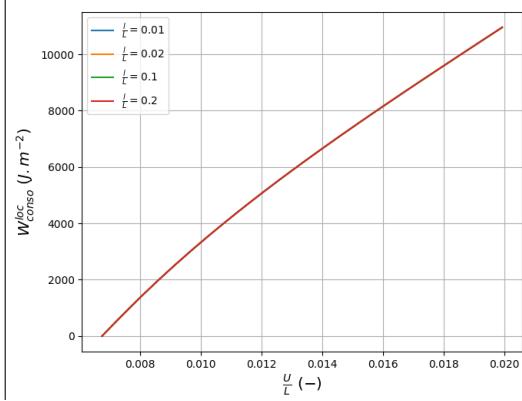


FIGURE 3.20 – Déformation volumique moyenne générée dans le régime adoucissant pour plusieurs largeurs de bande à $l(\kappa_c - \kappa_R)$ constant

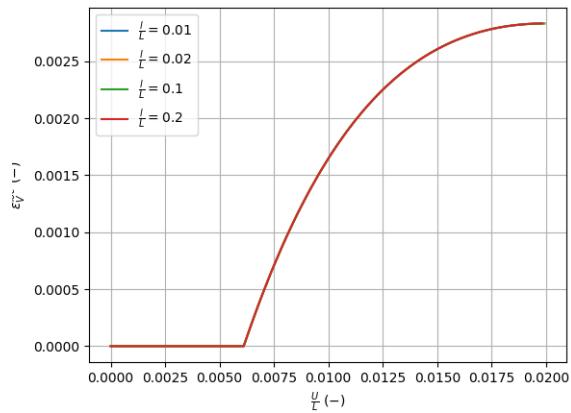


FIGURE 3.21 – Profil de déformation volumique dans la bande de localisation pour plusieurs largeurs de bande à $l(\kappa_c - \kappa_R)$ constant ($\frac{U}{L} = 0.02$)

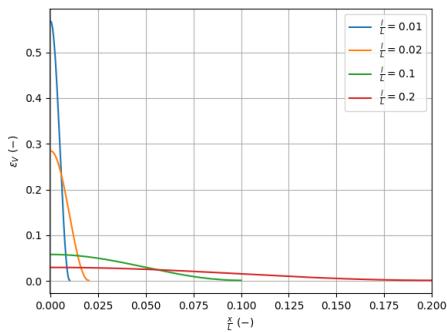
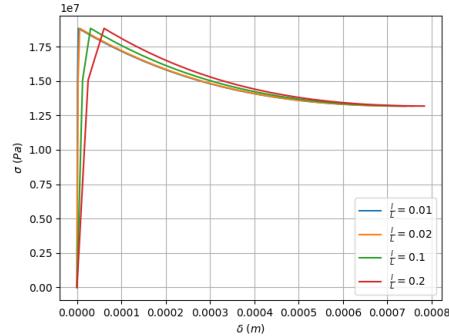


FIGURE 3.22 – Réponse contrainte-ouverture de la bande de localisation pour plusieurs largeurs de bande à $l(\kappa_c - \kappa_R)$ constant



ment post-pic doit être adaptée en fonction de la largeur de bande pour maintenir constante l'énergie consommée par la bande de localisation.

3.2.6.2 Convergence vers un modèle cohésif

On rappelle ici l'expression de l'ouverture de la bande de localisation en fonction de la contrainte totale σ (avec $\bar{\sigma} = \frac{1+a}{\sigma_R - \sigma_u} (\frac{\sigma_R}{1+a} - \sigma)$) :

$$\delta(\sigma) = l \left(\frac{\sigma}{E} + \kappa_R (1 + b_0) \right) + l(\kappa_C - \kappa_R) \left(b_0 \bar{\sigma} + 2 \ln \left(\frac{2}{\sqrt{1 - 2\bar{\sigma}} + 1} \right) \right) \quad (3.64)$$

On remarque que lorsque la largeur de bande tend vers 0 à $l(\kappa_C - \kappa_R) = \gamma^{ref}$ constant, le modèle converge vers un modèle cohésif :

$$\delta^{czm}(\sigma) = \gamma^{ref} \left(b_0 \bar{\sigma} + 2 \ln \left(\frac{2}{\sqrt{1 - 2\bar{\sigma}} + 1} \right) \right) \quad (3.65)$$

La figure 3.23 met en évidence ce phénomène de convergence vers une loi cohésive lorsque l tend vers 0. Cette figure met aussi en évidence les propriétés de cette loi cohésive asymptotique : parfaite adhérence ($\delta = 0$ pour $\sigma < \frac{\sigma_R}{1+a}$) ; décroissance de la contrainte avec le saut de déplacement vers une valeur asymptotique non nulle $\frac{\sigma_u + \sigma_R}{2(1+a)}$.

Les liens entre milieu de second gradient et modèle cohésif ont par ailleurs déjà été mis en évidence dans la littérature. On peut notamment citer les travaux de (GOURGIOTIS & GEORGIADIS, 2009) où les auteurs s'intéressent au problème d'une

FIGURE 3.23 – Réponse contrainte-ouverture de la bande de localisation pour plusieurs largeurs de bande à $l(\kappa_c - \kappa_R)$ constant : convergence vers un modèle cohésif

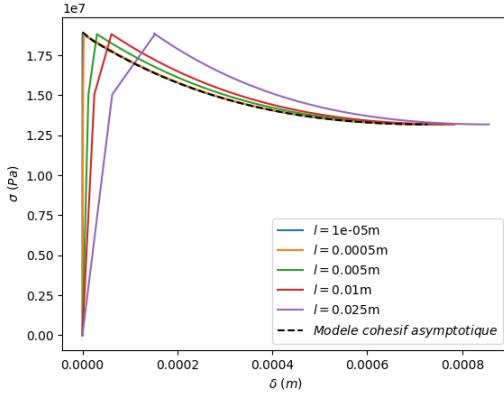
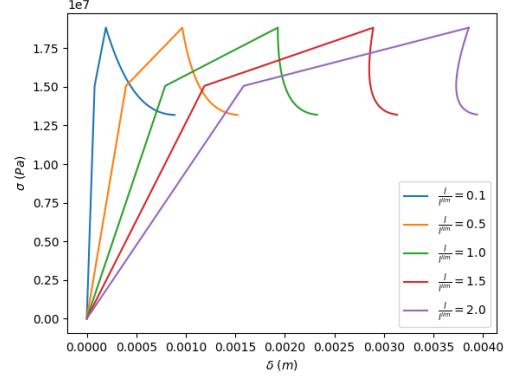


FIGURE 3.24 – Réponse contrainte-ouverture de la bande de localisation pour plusieurs largeurs de bande à $l(\kappa_c - \kappa_R)$ constant : largeur de bande limite



fissure en déformations planes et montrent qu'un milieu de second gradient purement élastique linéaire permet de modéliser une zone cohésive.

(BAŽANT, 2002) relève qu'il est nécessaire que la réponse contrainte σ -ouverture de la bande de localisation δ n'exhibe pas de snap-back afin de conserver une réponse objective.

A partir de l'expression 3.64, il est possible de calculer une valeur limite de la largeur de bande l^{lim} au-delà de laquelle un snap-back apparaît. La condition d'existence d'un snap-back dans la bande de localisation s'écrit :

$$\exists \sigma \in \left[\frac{\sigma_R}{1+a}, \frac{\sigma_u + \sigma_R}{2(1+a)} \right], \frac{\partial \delta}{\partial \sigma}(\sigma) < 0 \quad (3.66)$$

Cette condition conduit à l'expression suivante pour κ_c^{lim} :

$$\kappa_c^{lim} = \kappa_R + \frac{\sigma_R - \sigma_C}{E(1+a)(1+b_0)} \quad (3.67)$$

La largeur de bande limite s'écrit ensuite :

$$l^{lim} = \frac{\gamma^{ref}}{(\kappa_c^{lim} - \kappa_R)} \quad (3.68)$$

On constate effectivement en figure 3.24 que pour des largeurs de bandes supérieures à l^{lim} la réponse de la bande de localisation exhibe effectivement un snap-back.

Le changement d'échelle de largeur de bande numérique précédemment évoqué n'est donc possible pour certaines plages de valeurs. Les paramètres matériaux utilisés ici (voir tableau 3.1) sont représentatifs pour une roche tendre, mais n'ont pas fait l'objet d'un recalage. Dans la suite du chapitre 3 (partie 3.3.2) nous identifierons un jeu de paramètres l^{ref} et κ_c^{ref} à partir de résultats expérimentaux. Nous serons alors en mesure de calculer une valeur numérique fiable pour cette (demi) largeur de bande limite.

3.2.6.3 Changement d'échelle

On rappelle ici brièvement les problématiques industrielles liées au choix du paramètre de largeur de bande, évoquées plus en détail dans l'introduction du chapitre (partie 3.1) :

- Le paramètre de largeur de bande, ainsi que les autres paramètres matériaux de la loi de comportement de premier gradient, sont identifiés à partir d'essais expérimentaux. Ces essais expérimentaux, d'une échelle de l'ordre de quelques centimètres, sont modélisés numériquement avec des largeurs de bande de l'ordre du millimètre.
- Cette largeur de bande est incompatible avec les calculs industriels de type excavation de galerie où nous souhaiterions utiliser des largeurs de bande de l'ordre de quelques centimètres, échelle plus compatible avec nos capacités de calcul.

Pour le problème du barreau où nous disposons d'une solution analytique, cette difficulté de changement d'échelle ne se pose pas. Mais ce problème simple va nous permettre d'illustrer comment il est possible d'utiliser une largeur de bande numérique compatible avec les calculs industriels tout en conservant l'énergie consommée par la bande de localisation.

Ici, nous supposons qu'une bande de localisation qui se propagerait dans un essai de laboratoire et une bande de localisation qui se propagerait dans une structure bien plus grande (comme par exemple autour une galerie d'excavation) consommeraient la même quantité d'énergie. C'est une hypothèse : expérimentalement, pour des matériaux comme l'argilite du Callovo-Oxfordien, des données expérimentales précises sont seulement disponibles à l'échelle des essais de laboratoire. Si cette hypothèse venait tout de même à être remise en question, la méthode présentée ici pourrait être très facilement adaptée.

On rappelle que l'énergie consommée par la bande de localisation se met sous la forme suivante (voir équation 3.59) :

CHAPITRE 3. INFLUENCE ET IDENTIFICATION DE LA LONGUEUR INTERNE DANS LE MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

FIGURE 3.25 – Réponse contrainte-ouverture de la bande de localisation pour plusieurs longueurs de barreau à $l(\kappa_c - \kappa_R)$ et ratio $\frac{l}{L}$ constants

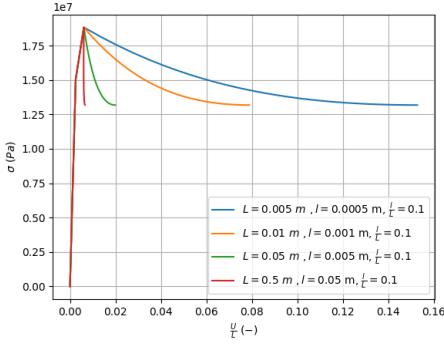
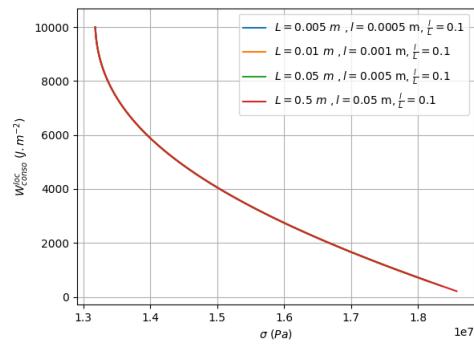


FIGURE 3.26 – Energie consommée dans la bande de localisation pour plusieurs longueurs de barreau à $l(\kappa_c - \kappa_R)$ et ratio $\frac{l}{L}$ constants



$$W_{\text{cons}}^{\text{loc}}(\sigma) = l(\kappa_c - \kappa_R) f(\sigma_R, \sigma_U, a, b_0, \sigma) \quad (3.69)$$

Sur le principe de ce qui a été fait en partie 3.2.6.1, nous voyons qu'il est possible de maintenir cette énergie invariante tout en modifiant la largeur de bande l et la longueur du barreau L .

Nous montrons en figure 3.25 et 3.26 les résultats obtenus pour plusieurs barreaux de longueurs variables, mais où le ratio $\frac{l}{L}$ (largeur de bande normalisée par la longueur du barreau) et le produit $l(\kappa_c - \kappa_R)$ restent constants. On constate en figure 3.26 que l'énergie consommée est bien conservée pour toutes ces structures. Par ailleurs, en conservant le ratio $\frac{l}{L}$ constant, on s'assure que dans la situation d'un calcul éléments finis, le nombre de degrés de libertés nécessaires à la modélisation reste constant.

Il est donc bien possible de passer d'une structure de petite taille à une structure plus grande tout en conservant une largeur de bande compatible avec nos capacités de calculs et en conservant invariante l'énergie dissipée par la bande de localisation.

On note que plus la largeur de bande utilisée est élevée, plus le snap-back est marqué. En effet, à travers ce changement d'échelle, nous maintenons constante l'énergie consommée, mais l'énergie élastique restituée augmente avec la taille de la structure.

Il faut noter que nous avons ici supposé que l'énergie consommée par le phénomène de localisation était indépendant de la taille de l'échantillon expérimental. C'est une hypothèse : expérimentalement, pour un matériau comme l'argilite du Callovo-Oxfordien par exemple, seuls des essais de laboratoire à petite échelle sont disponibles.

FIGURE 3.27 – Essai biaxial, profil de déformation volumique élastique au début du régime plastique parfait

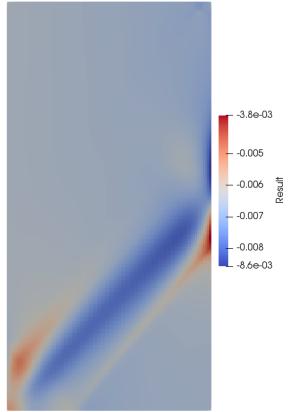
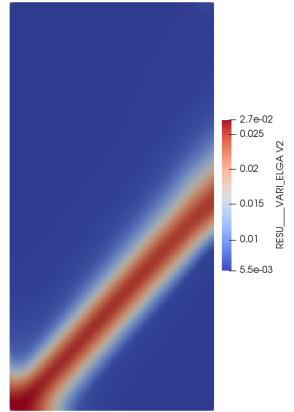


FIGURE 3.28 – Essai biaxial, profil de déformation volumique plastique au début du régime plastique parfait



3.2.7 Retour sur les hypothèses du problème du barreau

3.2.7.1 Comportement élastique incompressible

L'hypothèse d'élasticité incompressible ($\nu = \frac{1}{2}$) est l'une des hypothèses les plus fortes que nous avons dû faire pour mener à bien les calculs analytiques du problème du barreau. Cette hypothèse n'est bien sûr pas représentative du comportement des roches, où on a généralement $\nu \approx 0.2$.

Cependant, cette hypothèse s'appuie sur le caractère prépondérant de la déformation volumique plastique (et de son gradient) dans la bande de localisation. En figures 3.27 et 3.28, on peut voir le profil de déformation volumique élastique et de déformation volumique plastique dans le cas d'un essai biaxial modélisé avec la loi de comportement non associée à écrouissage exponentiel ($\nu = 0.2$). On constate bien que cette déformation volumique élastique est négligeable devant la déformation volumique plastique.

Par la suite (partie 3.3), nous montrerons dans le cadre d'essais biaxiaux que les résultats obtenus pour ce problème à élasticité incompressible sont bien généralisables au cas $\nu \neq \frac{1}{2}$.

3.2.7.2 Forme de la solution recherchée

Pour le problème du barreau, nous avons cherché une solution en contraintes et en déformations sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}(x) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy}(x) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{yy}(x) \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

Comme expliqué en partie 3.2.2.1, cette forme de champs correspond à l'application d'une hypothèse de contraintes planes dans les deux directions hors-axe du barreau. Le problème que nous résolvons est donc plus représentatif d'une géométrie de fil, où les deux dimensions hors axes sont faibles devant la longueur du barreau.

Un problème alternatif a aussi été résolu, où la solution est recherchée sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(x) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy}(x) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{yy}(x) \end{pmatrix} \text{ et } \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

Cette forme de solution est plus proche des déformations planes. Le principe de résolution du problème reste similaire à celui présenté en détail dans ce chapitre.

On peut montrer que, pour des valeurs représentatives de l'angle de dilatance, cette forme de solution conduit à $\sigma_{eq} = 0$ dans le régime plastique. On parle de solution plastique singulière : le trajet de chargement passe par le sommet du cône de Drucker Prager dans le plan $(tr(\sigma), \sigma_{eq})$. Ce caractère singulier de la solution pose problème : l'évolution de la déformation volumique n'est alors plus pilotée par la fonction $b(\kappa)$, et la déformation volumique n'est plus bornée. Par ailleurs, nous savons que pour les essais biaxiaux, la solution n'est pas singulière. Cette forme de solution n'a donc pas été retenue. On peut cependant montrer que les résultats d'invariance obtenus précédemment sont toujours valables (voir par exemple la figure 3.29, écrouissage négatif uniquement).

Plus généralement, le problème du barreau vient solliciter la bande de localisation en traction uniquement (mode I). Dans le cas de modélisations plus réalistes (essais biaxiaux, excavations de galerie etc ...), la bande de localisation sera soumise à des modes de chargement plus complexes. Il reste donc à voir si le résultat d'invariance que nous avons obtenu de manière exacte en mode I sera toujours valable pour ces chargements plus complexes.

3.2.7.3 Extension à d'autres lois de comportements

Dans nos travaux, la loi de comportement utilisée a toujours été une loi de comportement de type Drucker Prager. On peut montrer que les résultats d'invariance sont toujours valables dans le cas de fonction de charge plus complexes.

CHAPITRE 3. INFLUENCE ET IDENTIFICATION DE LA LONGUEUR INTERNE DANS LE MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

FIGURE 3.29 – Réponse contrainte-ouverture de la bande de localisation pour plusieurs largeurs de bande à $l\kappa_c$ constant. Forme de solution alternative, loi de comportement Drucker Prager à écrouissage négatif

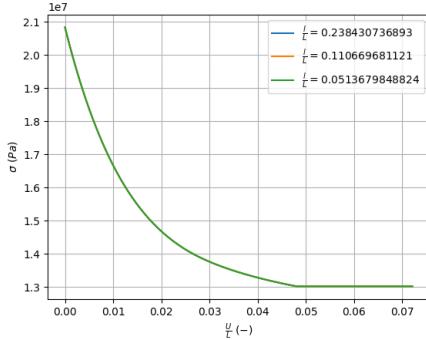
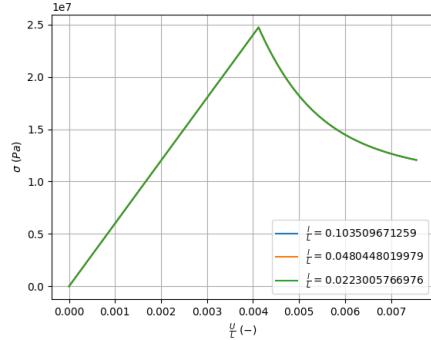


FIGURE 3.30 – Réponse contrainte-ouverture de la bande de localisation pour plusieurs largeurs de bande à $l\kappa_c$ constant. Loi de comportement Hoek et Brown à écrouissage négatif



Par exemple, on propose un critère de type Hoek et Brown (HOEK, CARRANZA-TORRES & CORKUM, 2002). La forme de ce critère est similaire à celle disponible dans *Code_Aster* (voir (PLESSIS, 2014)).

La fonction de charge s'écrit sous la forme suivante, avec σ_I, σ_{II} et σ_{III} les contraintes principales :

$$F(\underline{\underline{\sigma}}, \kappa) = (\sigma_{III} - \sigma_I) - \sqrt{-\sigma_{III} \cdot m \sigma_0 + S(\kappa) \sigma_0^2} \quad (3.72)$$

Le potentiel plastique est de type Drucker Prager :

$$G(\underline{\underline{\sigma}}, \kappa) = \sigma_{eq} + b(\kappa) \operatorname{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \quad (3.73)$$

La variable d'écrouissage reste la déformation déviatorique plastique cumulée. L'écrouissage porte sur les fonctions $S(\kappa)$ et $b(\kappa)$. La première est choisie parabolique, la seconde linéaire.

Par une méthode de résolution similaire à celle détaillée en partie 3.2.3 pour une fonction de charge de type Drucker Prager, il est possible d'aboutir à une solution analytique pour le problème du barreau. Cette solution n'est pas détaillée ici. On constate en figure 3.30 que les résultats d'invariance obtenus dans le cas d'une fonction de charge de type Drucker Prager restent valables pour un critère de type Hoek et Brown. On peut donc supposer que ces résultats ont une portée plus générale.

3.2.7.4 Bande de localisation ou solution diffuse ?

Dans le cas de géomatériaux, l'apparition de la bande de localisation sera précédée d'un régime plastique durcissant. Il est donc nécessaire de pouvoir distinguer le régime

CHAPITRE 3. INFLUENCE ET IDENTIFICATION DE LA LONGUEUR INTERNE DANS LE MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

plastique homogène (ou diffus) du régime post-pic adoucissant localisé pour pouvoir appliquer les résultats d'invariance précédents, sans quoi la réponse de la structure dans le régime diffus s'en trouverait impactée.

Pour le barreau, cette distinction se faisait très simplement : la bande de localisation apparaissait dès le début du régime post-pic. L'initiation de la bande de localisation coïncidait donc avec le régime adoucissant de la loi de comportement.

Nous avons vu au chapitre 2 que dans le cas d'un essai biaxial, cette distinction entre les deux régimes (homogène/diffus et localisé) ne coïncidait pas avec la loi de comportement. Cette loi de comportement est adoucissante, mais un écrouissage positif structurel dû aux déformations planes conduit à un régime plastique initial homogène. De manière plus générale, on peut imaginer des situations où, dans le régime adoucissant de la loi de comportement, la solution reste diffuse et aucune localisation de la déformation n'est observée. Ainsi, pour appliquer les résultats de changement d'échelle précédemment démontrés, il est nécessaire de pouvoir distinguer ces deux régimes diffus et localisé. Pour étendre les résultats analytiques au cas de structures plus réalistes (essais biaxiaux), on choisit donc de s'appuyer sur le critère de Rice, condition locale nécessaire d'apparition d'une bande de localisation dans un milieu infini.

Cette solution reste imparfaite : le critère de Rice n'est qu'une condition nécessaire, et ne tient pas compte d'éventuelles conditions aux limites ou hétérogénéités qui retarderaient, voire empêcheraient, l'apparition de la bande de localisation.

3.3 Etudes numériques avec le modèle de second gradient de dilatation

Dans cette partie du chapitre 3, il s'agit d'exploiter tous les résultats précédents obtenus dans le cadre d'une solution analytique à un problème plus réaliste et plus complexe : les essais biaxiaux numériques.

Dans un premier temps, il s'agira de montrer que l'expression de la largeur de bande en fonction des paramètres matériaux obtenue pour le problème du barreau reste valable pour les essais biaxiaux (partie 3.3.1).

Dans un second temps, nous utiliserons cette expression de la largeur de bande pour l'identification d'un jeu de paramètre matériaux (pour une certaine largeur de bande numérique) à partir d'essais expérimentaux (partie 3.3.2).

Enfin, nous montrerons que les résultats d'invariance mis en évidence pour le problème analytique sont toujours valables pour les essais biaxiaux. Pour cela, nous prendrons comme calcul de référence le jeu de paramètres précédemment identifié à partir de résultats expérimentaux et nous montrerons qu'il est possible d'utiliser d'autres largeurs de bande tout en conservant invariants les quantités d'intérêt de l'essai (réponse contrainte-déformation, déformation volumique moyenne, énergie dissipée) (partie 3.3.3).

Remarque Dans le cas du barreau, nous nous limitions à l'étude de la moitié $x > 0$ pour des raisons de symétrie. Dans la suite, les quantités telles que la largeur de bande se voient appliquer un facteur 2.

Par ailleurs, dans cette partie, nous utiliserons la loi de comportement de type Drucker Prager non associée à écrouissage exponentiel présentée et utilisée au chapitre 2. On rappelle ci-dessous les principales équations constitutives de cette loi de comportement.

Fonction de charge :

$$F(\underline{\sigma}, \kappa) = \sigma_{eq} + a \operatorname{tr}(\underline{\sigma}) - R(\kappa) \quad (3.74)$$

Potentiel d'écoulement :

$$G(\underline{\sigma}, \kappa) = \sigma_{eq} + b(\kappa) \operatorname{tr}(\underline{\sigma}) \quad (3.75)$$

Fonction d'écrouissage :

$$R(\kappa) = (\sigma_0 - \sigma_u) \exp\left(\frac{-\kappa}{\kappa_c}\right) + \sigma_u \quad (3.76)$$

TABLE 3.2 – Gamme de paramètres testés pour l'étude de sensibilité

	E	ν	σ_0	$\frac{\sigma_u}{\sigma_0}$	κ_c	ϕ	ψ_0	a_1
Valeur minimale	4 GPa	0.1	10 MPa	0.25	0.025	20°	5°	1.10^2 N
Valeur maximale	8 GPa	0.3	25 MPa	0.75	0.1	30°	20°	1.10^3 N

Fonction de dilatance :

$$b(\kappa) = b_0 \exp\left(-\frac{\kappa}{\kappa_c}\right) \quad (3.77)$$

Cette loi de comportement est très proche de celle utilisée en partie 3.2 pour le problème analytique dans la phase adoucissante. La différence vient de l'absence d'écrouissage positif. On rappelle que cet écrouissage positif très simple avait été pris en compte en partie 3.2 dans le but de représenter grossièrement l'écrouissage positif structurel dans les essais biaxiaux.

3.3.1 Largeur de bande de localisation : étude de sensibilité aux paramètres matériaux

On rappelle l'expression de la largeur de bande en fonction des paramètres matériaux obtenue pour un écrouissage exponentiel pour le problème du barreau en l'absence d'écrouissage positif dans la loi de comportement ($\kappa_R = 0$ et $\sigma_R = \sigma_0$) :

$$l = 4\sqrt{3}\pi \sqrt{\frac{(1+a) b_0 a_1 \kappa_c}{\sigma_0 - \sigma_u}} \quad (3.78)$$

Ici, nous souhaitons montrer que cette expression reste valable pour les essais biaxiaux. Pour cela, nous allons réaliser une étude de sensibilité de la largeur de bande aux paramètres matériaux. La gamme de valeurs testées pour chaque paramètre est présentée dans le tableau 3.2. Pour toutes ces variables, on suppose une distribution uniforme dans cette plage de valeurs et on les suppose indépendantes.

Le logiciel OpenTurns (BAUDIN et al., 2015) est utilisé pour générer un plan d'expériences à partir de ces hypothèses et d'une méthode d'échantillonage par hypercube latin. Un plan d'expériences constitué de 500 jeux de paramètres à tester est obtenu. On présente en figure 3.31 et 3.32 les jeux de paramètres tirés dans les plans (E, ν) et (a_1, σ_0) .

C'est ici que les travaux présentés au chapitre 2 concernant la robustesse de la convergence des calculs (viscosité numérique, partie 2.2.2) prennent tout leur sens. Face à un nombre de calculs aussi important, il est indispensable de s'assurer de leur convergence de manière systématique.

CHAPITRE 3. INFLUENCE ET IDENTIFICATION DE LA LONGUEUR INTERNE DANS LE MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

FIGURE 3.31 – Jeux de paramètres testés pour l'étude de sensibilité dans le plan (E, ν)

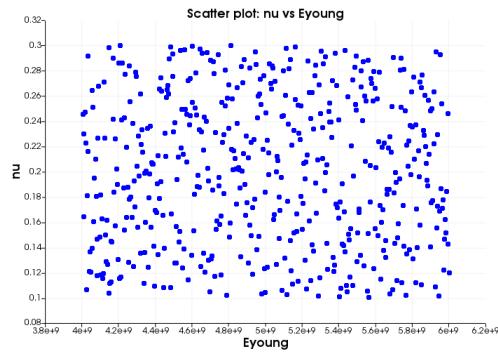


FIGURE 3.32 – Jeux de paramètres testés pour l'étude de sensibilité dans le plan (a_1, σ_0)

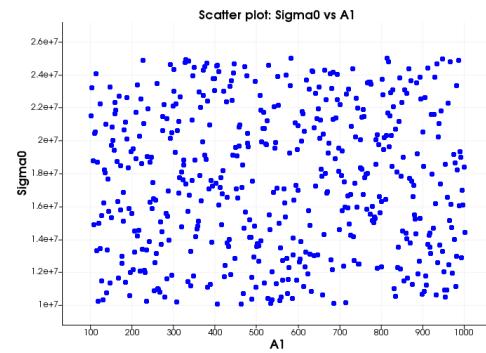
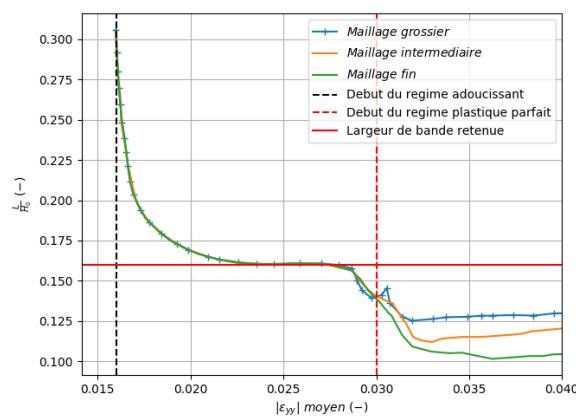


FIGURE 3.33 – Exemple de calcul de largeur de bande retenue



CHAPITRE 3. INFLUENCE ET IDENTIFICATION DE LA LONGUEUR INTERNE DANS LE MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

De même, nous avons présenté au chapitre 2 une méthode automatique pour le calcul de la largeur de bande (partie 2.2.4). Cette méthode s'appuie sur l'indicateur plastique et permet de calculer cette largeur de bande tout au long de la phase non homogène du calcul. On rappelle que pour les essais biaxiaux, cette largeur de bande n'est pas constante (contrairement à la solution analytique). On distingue trois régimes d'évolution de cette largeur de bande (voir figure 3.33) :

- A l'initiation de la localisation, la bande de déformation s'installe. Il y a une transition depuis un régime plastique homogène vers un régime plastique non homogène. La largeur de bande diminue.
- Dans le régime adoucissant dilatant, la largeur de bande est constante.
- Dans le régime plastique parfait incompressible, cette largeur de bande n'est plus définie.

La largeur de bande numérique que nous allons comparer à la largeur de bande analytique est donc la largeur de bande du régime plastique adoucissant dilatant. Celle-ci est déterminée automatiquement à partir des courbes d'évolution de la largeur de bande en fonction du chargement (voir figure 3.33). Si cette largeur de bande de localisation est inférieure à cinq éléments finis, le calcul est considéré comme "non régularisé" (la largeur de bande obtenue est trop faible vis-à-vis du maillage utilisé) et la largeur de bande de ce calcul n'est pas utilisée par la suite. Sur les 500 jeux de paramètres initiaux, 44 jeux de paramètres ne sont pas exploitables.

En figure 3.34, pour chaque jeu de paramètre, la largeur de bande numérique mesurée est comparée à la largeur de bande analytique de l'expression 3.78. Une régression linéaire est ensuite effectuée. Le coefficient de corrélation de cette régression linéaire est de $R^2 = 0.96$: l'expression analytique de la largeur de bande nous donne une très bonne estimation de l'influence de chaque paramètre matériau sur la largeur de bande numérique. On note en particulier que le coefficient de Poisson (qui pilote la déformation volumique élastique) n'a finalement que peu d'impact sur la largeur de bande numérique. On en déduit que l'hypothèse d'incompressibilité élastique ($\nu = \frac{1}{2}$) que nous avions faite pour le modèle analytique avait peu d'impact.

Cependant, la pente de la régression linéaire est différente de 1. Cela signifie que la constante ($4\sqrt{3}\pi$) obtenue dans le cas analytique de l'essai de traction du barreau ne correspond pas à celle de l'essai biaxial.

A titre de comparaison, on présente en figure 3.35 cette même largeur de bande numérique en fonction de l'expression de la largeur de bande tirée de la littérature pour les modèles de second gradient $l \propto \sqrt{\frac{a_1}{h}}$, avec h le module d'écrouissage défini par $h = \frac{\sigma_0 - \sigma_u}{\kappa_c}$. On constate clairement l'avantage de notre expression analytique, plus

CHAPITRE 3. INFLUENCE ET IDENTIFICATION DE LA LONGUEUR INTERNE DANS LE MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

FIGURE 3.34 – Largeur de bande numérique en fonction de la largeur de bande analytique

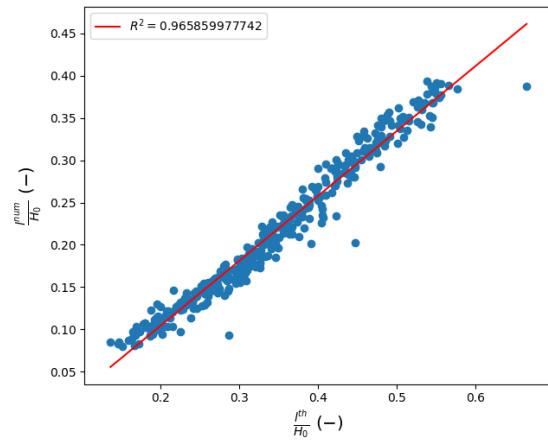
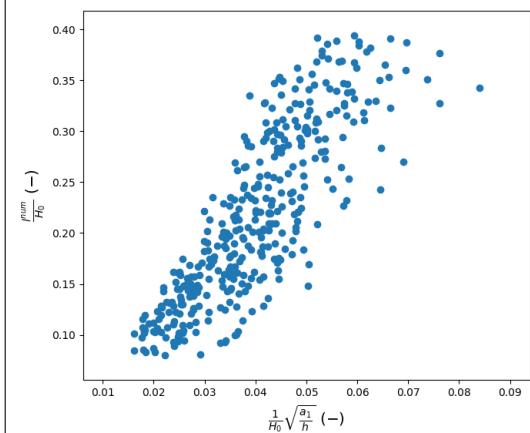


FIGURE 3.35 – Largeur de bande numérique en fonction de $\sqrt{\frac{a_1}{h}}$



complète et capable de prendre en compte l'impact de tous les paramètres matériaux sur cette largeur de bande.

On retient que l'expression 3.78 de la largeur de bande donne une très bonne approximation de la largeur de bande numérique en fonction des paramètres matériaux. Dans la suite, nous pourrons donc utiliser cette expression analytique pour évaluer simplement et rapidement cette largeur de bande numérique.

FIGURE 3.36 – Schéma de principe de l'essai biaxial

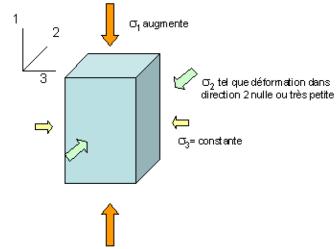
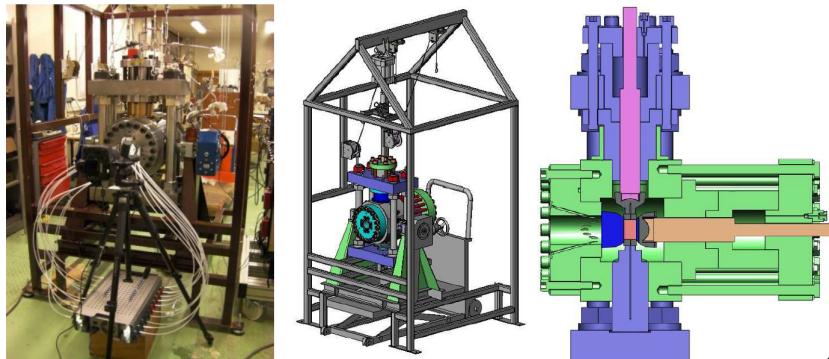


FIGURE 3.37 – Appareil triaxial : photo et schémas de principe



3.3.2 Identification des paramètres matériaux à partir d'essais expérimentaux

Dans cette partie, il s'agit d'exploiter des résultats expérimentaux d'essais biaxiaux réalisés sur des échantillons d'argilite du Callovo-Oxfordien. Ces essais ont été réalisés par le laboratoire 3SR pour le compte de l'ANDRA en 2015. A partir de leurs résultats, nous identifierons un jeu de paramètres matériaux pour la loi de comportement de Drucker Prager non associée à écrouissage exponentiel.

Il s'agit avant tout de proposer une méthode pour faciliter l'identification de ces paramètres de la loi de comportement et de montrer comment les résultats précédents peuvent faciliter cette identification. La loi de comportement utilisée étant relativement simple, nous ne nous attendons pas à reproduire fidèlement l'ensemble des résultats expérimentaux. L'objectif est avant tout méthodologique.

3.3.2.1 Présentation des résultats expérimentaux

Les échantillons d'argilite du Callovo-Oxfordien utilisés sont de dimension 50 x 30 x 25 mm. Ils sont issus d'un forage vertical dans la galerie GED du laboratoire souterrain de Meuse/Haute-Marne.

L'appareil expérimental utilisé est une cellule triaxiale vraie développée au laboratoire 3SR (figure 3.37). Cet appareil permet notamment d'effectuer des essais où les trois contraintes principales sont imposées et indépendantes, à la différence de la plupart des appareils où les essais sont réalisés en condition d'axisymétrie avec deux contraintes principales égales. Cette cellule triaxiale est donc adaptée à la réalisation d'essais biaxiaux (voir figure 3.36) : il est possible de réguler la contrainte principale intermédiaire de sorte à maintenir un niveau de déformation hors plan nul. Par ailleurs, la présence d'un hublot permet de suivre l'évolution d'une des faces dans

FIGURE 3.38 – Réponse contrainte - déformation de l'échantillon

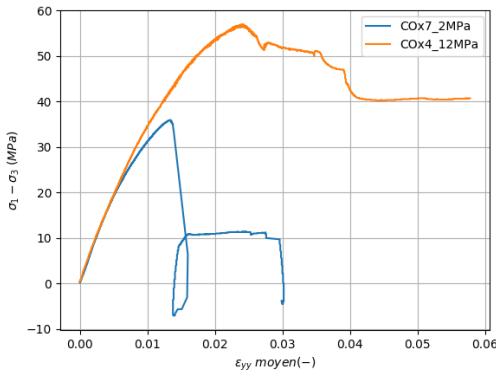
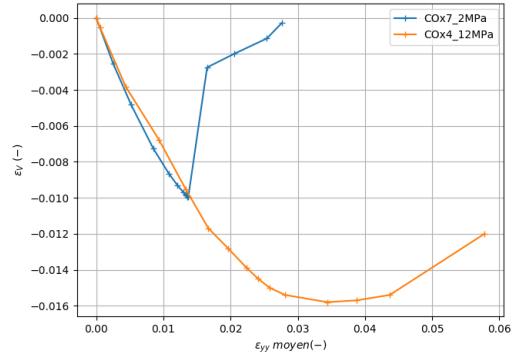


FIGURE 3.39 – Essai biaxial, profil de déformation volumique plastique au début du régime plastique parfait



l'axe de déformations planes.

Dans un premier temps, une pression isotrope est appliquée à l'échantillon afin d'atteindre le niveau de confinement souhaité pour l'essai (2 ou 12 MPa dans notre cas). Dans un second temps, une compression en conditions de déformations planes est appliquée. Pour cette seconde étape, le champ de déformation dans le plan orthogonal à la direction de déformation plane est suivi en simultané par corrélation d'image.

Les réponses contrainte-déformation et de déformation volumique moyenne des échantillons pour des pressions de confinement de 2 et 12 MPa sont présentées en figures 3.38 et 3.39. Pour l'essai à 2 MPa, on constate notamment la présence d'une instabilité dans le régime post-pic, où l'appareil triaxial a perdu le contrôle en déplacement de l'essai. Cette instabilité est en lien avec la rigidité de la cellule de chargement.

3.3.2.2 Méthode d'identification des paramètres matériaux

On rappelle la liste des paramètres matériaux à identifier :

- module de Young E et coefficient de Poisson ν . Ces deux constantes peuvent être facilement identifiées dans le régime élastique des figures 3.38 et 3.39. Cette identification peut être réalisée rapidement sur des essais biaxiaux homogènes : $E = 4 \text{ GPa}$ et $\nu = 0.18$ (voir figures 3.40 et 3.41).
- la limite d'élasticité σ_0 . Cette limite d'élasticité pourrait aussi être identifiée à partir d'essais numériques homogènes. Cependant, la transition entre le régime élastique et le régime plastique durcissant n'est pas facilement identifiable sur

CHAPITRE 3. INFLUENCE ET IDENTIFICATION DE LA LONGUEUR INTERNE DANS LE MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

FIGURE 3.40 – Exemple de réponse contrainte - déformation obtenue pour un essai biaxial homogène dans le but d’identifier les paramètres (E, ν)

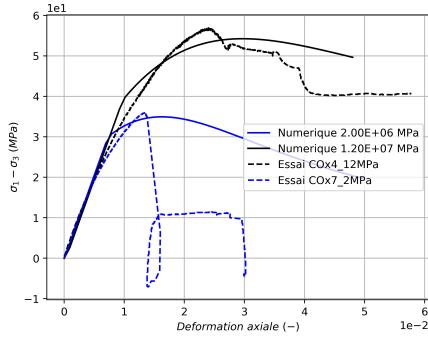
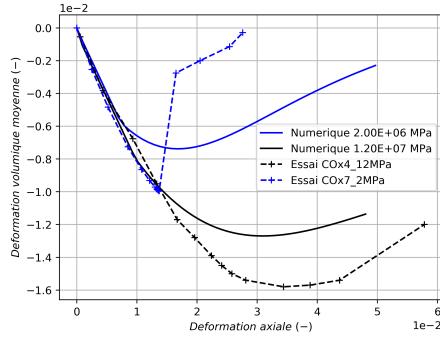


FIGURE 3.41 – Exemple de l’évolution de la déformation volumique obtenue pour un essai biaxial homogène dans le but d’identifier les paramètres (E, ν)



les courbes expérimentales. Ce paramètre sera donc identifié par la suite sur des essais non homogènes.

- la contrainte résiduelle σ_u , l’angle de frottement ϕ , l’angle de dilatance initial ψ_0 et la déformation caractéristique κ_c (ce dernier paramètre κ_c est un paramètre numérique, que nous identifions pour une largeur de bande donnée) . Tous ces paramètres qui pilotent le régime post-pic seront identifiés par la suite à partir d’essais non homogènes.
- la rigidité de second gradient a_1 . Ce paramètre sera éliminé grâce à l’expression analytique de la largeur de bande. En effet, les essais numériques non homogènes se feront pour une même largeur de bande l fixée à 5 mm ($\frac{l}{H_0} = 0.1$). Connaissant les autres paramètres matériaux et l , le paramètre a_1 est déterminé.

Cinq paramètres $(\sigma_0, \sigma_u, \phi, \psi_0, \kappa_c)$ doivent donc encore être identifiés à partir d’essais biaxiaux numériques non homogènes. Ces essais numériques seront réalisés avec le maillage fin quadrangulaire présenté en partie 2.2.1.2. L’identification de ces paramètres s’appuiera sur une étude de sensibilité, la création et la validation d’un métamodèle à partir de cette étude de sensibilité, puis l’optimisation d’un jeu de paramètres à partir du métamodèle.

Dans un premier temps, il s’agit d’identifier sur chaque courbe un nombre réduit de grandeurs à partir desquelles il est possible de la décrire de manière satisfaisante pour chaque pression de confinement, aussi bien pour les données expérimentales pour que les essais numériques. Par exemple, en figure 3.42 pour la réponse contrainte-déformation, nous choisissons comme grandeurs d’intérêt la contrainte et la déformation au pic, la contrainte ultime, ainsi que la déformation lorsque la contrainte atteint

FIGURE 3.42 – Quantités d’intérêt retenues pour la réponse contrainte-déformation (essai biaxial)

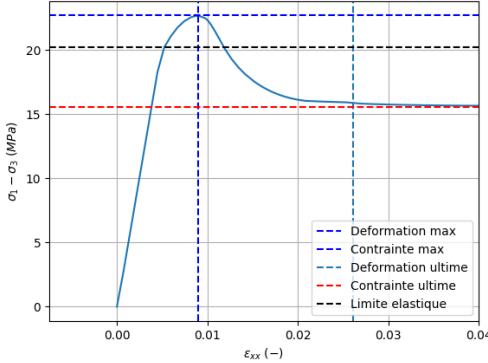


TABLE 3.3 – Gamme de paramètres pour la création du métamodèle

	σ_0	σ_u	κ_c	ϕ	ψ_0
Valeur minimale	10 MPa	1 MPa	0.02	22°	2.5°
Valeur maximale	18 MPa	7 MPa	0.15	35°	10°

102% de la contrainte ultime (celle-ci étant asymptotique). Ces quatre grandeurs d’intérêt permettent de décrire de manière simple la réponse contrainte-déformation dans le régime plastique. Un raisonnement similaire est appliqué à la courbe expérimentale de déformation volumique.

Dans un second temps, une étude paramétrique de chacune de ces grandeurs d’intérêt pour les cinq paramètres restant à identifier est étudiée. Pour cela, on s’appuie une fois de plus sur le logiciel OpenTurns (BAUDIN et al., 2015). Pour une gamme de valeurs de paramètres présentées en tableau 3.3 et une distribution uniforme, on génère un plan d’expérience de 500 calculs. Pour chacun de ces jeux de paramètres, un calcul éléments finis non homogène sur structure maillée est réalisé. De ces résultats, on extrait ensuite les quantités d’intérêt évoquées précédemment pour chaque pression de confinement (contrainte et déformation au pic, contrainte ultime, etc ...).

Dans un troisième temps, le logiciel OpenTurns est utilisé afin de générer un métamodèle (surface de réponse) à partir de l’étude paramétrique précédente : 80% des calculs réalisés sont utilisés pour générer le métamodèle, 20% pour le valider (répartition aléatoire). En figures 3.43 et 3.44, on présente par exemple la validation du métamodèle pour la contrainte au pic et la contrainte ultime pour une pression de confinement de 12 MPa. Des résultats similaires sont obtenus pour chaque grandeur

CHAPITRE 3. INFLUENCE ET IDENTIFICATION DE LA LONGUEUR INTERNE DANS LE MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

FIGURE 3.43 – Validation du métamodèle pour la contrainte maximale (pression 12MPa). En abscisse, la valeur observée (normalisée) pour les essais biaxiaux, en ordonnée la valeur prédite par le métamodèle.

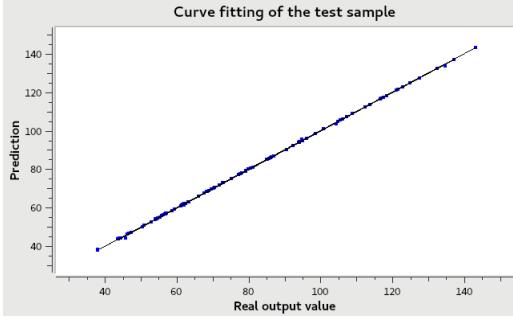


FIGURE 3.44 – Validation du métamodèle pour la contrainte ultime (pression 12MPa). En abscisse, la valeur observée (normalisée) pour les essais biaxiaux, en ordonnée la valeur prédite par le métamodèle.

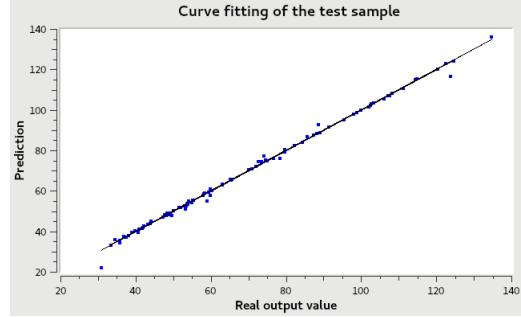


TABLE 3.4 – Jeu optimal de paramètres obtenu pour la loi de comportement de Drucker Prager à écrouissage exponentiel

E	ν	σ_0	σ_u	κ_c	ϕ	ψ_0
4 GPa	0.18	15.8 MPa	2.0 MPa	0.064	22.0°	8.2°

d'intérêt. On constate donc que pour un jeu de paramètre donné, le métamodèle est bien capable de prédire les grandeurs d'intérêt dont nous nous servons pour décrire les courbes expérimentales.

Enfin, nous utilisons ce métamodèle pour optimiser le jeu de paramètres matériau. Le logiciel d'optimisation ADAO (ARGAUD, 2021) est utilisé. L'algorithme d'optimisation s'appuie sur le métamodèle précédemment validé. Le jeu optimal de paramètres obtenu est présenté au tableau 3.4.

3.3.2.3 Présentation des résultats numériques et comparaison

Les réponses macroscopiques (contrainte et déformation volumique moyenne en fonction de la déformation axiale moyenne) obtenues pour le jeu optimal de paramètres pour les essais biaxiaux à pression de confinement 2 MPa et 12 MPa sont présentées en figures 3.45 et 3.46. Ces réponses sont obtenues pour des essais numériques non homogènes sur structure maillée.

On constate que les contraintes et les déformations au pic sont prédites de manière satisfaisantes pour les deux pressions de confinement. Cependant, la contrainte ultime est assez largement surestimée pour une pression de confinement de 2 MPa, là

CHAPITRE 3. INFLUENCE ET IDENTIFICATION DE LA LONGUEUR INTERNE DANS LE MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

FIGURE 3.45 – Réponse contrainte-déformation pour le jeu de paramètre identifié et un essai biaxial non homogène

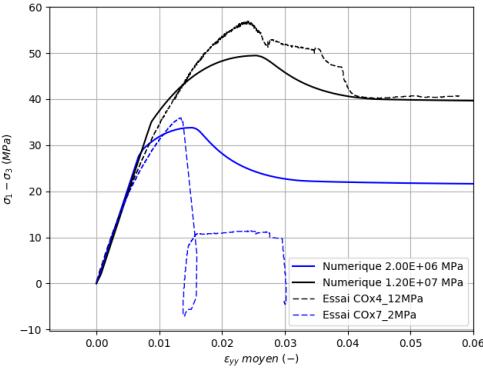
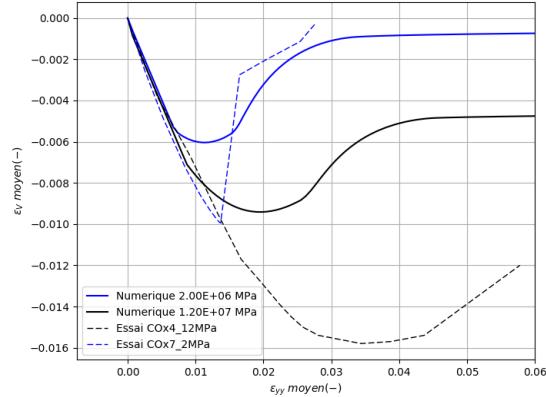


FIGURE 3.46 – Evolution de la déformation volumique moyenne pour le jeu de paramètre identifié et un essai biaxial non homogène



où elle est correctement estimée pour une pression de 12 MPa. Le critère de Drucker Prager dépendant linéairement de la trace des contraintes (et donc de la pression de confinement), il n'est pas possible de concilier ces deux contraintes ultimes pour une loi de comportement aussi simple. C'est entre autres pour tenir compte d'une dépendance non linéaire à la pression de confinement que des lois de comportement plus complexes type Hoek et Brown ou Hoek et Brown généralisée ont été développées (voir par exemple (HOEK, CARRANZA-TORRES & CORKUM, 2002) ou (RAUDE, 2015)).

Par ailleurs, la loi de comportement que nous utilisons ici ne présente pas de régime plastique contractant. Il n'y a donc pas de transition entre le régime élastique contractant et le régime plastique dilatant. Cela conduit à une sous-estimation de la déformation volumique moyenne au cours du chargement (voir figure 3.46).

On rappelle cependant que l'objectif était ici avant tout méthodologique, la loi de comportement utilisée étant relativement simple.

Pour ce calcul, on rappelle que la largeur de bande analytique était fixée à 5 mm. La largeur de bande numérique relevée est de 7 mm. On présente en figure 3.48 les profils de déformation volumique déviatorique pour une pression de 2 MPa. Ces profils peuvent être comparés à ceux obtenus expérimentalement et présentés en figure 3.47.

Expérimentalement, on constate parfois (ce n'est pas le cas sur ces échantillons) l'initiation d'un réseau de bandes de localisation dans le régime pré-pic. Ces bandes de localisation sont peu marquées et ne sont pas reproductibles numériquement : nos

CHAPITRE 3. INFLUENCE ET IDENTIFICATION DE LA LONGUEUR
INTERNE DANS LE MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

FIGURE 3.47 – Profils de déformation déviatorique (observations expérimentales)

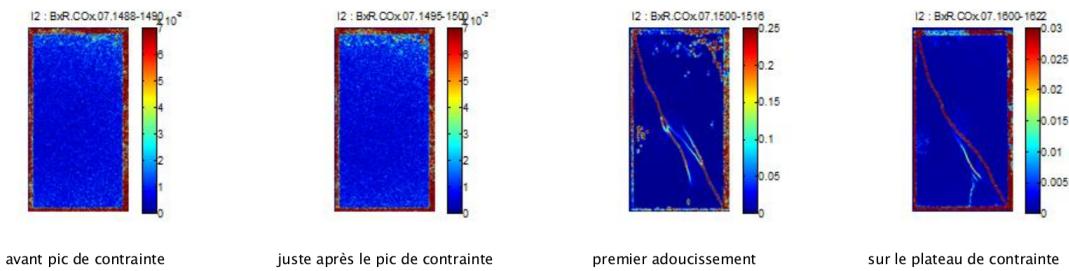
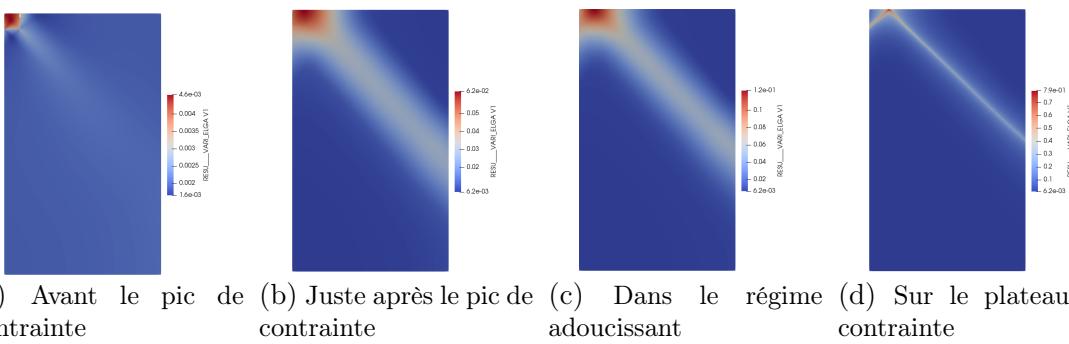


FIGURE 3.48 – Profils de déformation déviatorique. Essai biaxial numérique, pression de confinement de 2 MPa



CHAPITRE 3. INFLUENCE ET IDENTIFICATION DE LA LONGUEUR INTERNE DANS LE MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

modèles ne permettent de modéliser des bandes de localisation que dans le régime post-pic.

Dans ce régime post-pic, on constate une fois de plus que la largeur de bande que nous utilisons est numérique et assez différente des observations expérimentales. Pour autant, nous avons pu constater en figure 3.45 que cette largeur de bande numérique permet tout de même d'obtenir des réponses macroscopiques de l'échantillon globalement en accord avec les observations expérimentales.

3.3.3 Application du résultat d'invariance aux essais biaxiaux

Dans la partie précédente, nous avons identifié, pour une largeur de bande de référence l^{ref} , un jeu de paramètres matériaux. Il s'agit maintenant de montrer que les résultats d'invariance obtenus pour le problème du barreau restent valables dans le cas d'un essai biaxial pour d'autres largeurs de bande l .

Notamment, il suffirait d'adapter la pente de l'écrouissage post-pic en maintenant $l(\kappa_c - \kappa_R)$ constant pour conserver des réponses macroscopiques invariantes.

3.3.3.1 Loi de comportement et critère de Rice

Dans le cas du barreau, le paramètre κ_R était un paramètre de déformation de la loi de comportement qui caractérisait la transition entre écrouissage positif (solution homogène) et écrouissage négatif (solution non homogène avec bande de localisation).

Pour un essai biaxial, où un écrouissage positif structurel a été mis en évidence, cette distinction entre solution homogène (ou diffuse) et solution non homogène avec bande de localisation ne peut pas se faire aussi simplement au niveau de la loi de comportement. Plus généralement, ce problème se pose pour tout type de structure qui présenterait un écrouissage structurel ou dans laquelle l'apparition de la bande de localisation ne coïnciderait pas avec le pic de la loi de comportement et serait retardée (par les conditions aux limites par exemple). Pour les lois de comportement non associées, la localisation ne s'initie d'ailleurs pas au pic de contrainte.

Comme évoqué en partie 3.2.7.4, nous proposons de nous appuyer sur le critère de Rice pour distinguer solution diffuse et solution localisée. On rappelle les résultats de (BÉSUELLE, CHAMBON & COLLIN, 2006) concernant le critère de bifurcation dans un milieu infini de second gradient. Les auteurs montrent que le critère de Rice appliqué au module tangent \mathbb{H} de la partie 1^{er} gradient du comportement reste le critère à considérer pour caractériser l'apparition d'une bande de localisation de normale \underline{n} :

$$\det(\underline{n} \cdot \mathbb{H} \cdot \underline{n}) \leq 0 \quad (3.79)$$

Comme pour un milieu classique, cette condition n'est qu'une condition nécessaire locale qui ne tient pas compte d'éventuelles conditions aux limites qui conduiraient à retarder l'apparition de la bande de localisation (voire à l'empêcher).

Cependant, dans le cas d'un essai biaxial, nous pouvons constater en figure 3.49 que ce critère est atteint au pic de la réponse contrainte-déformation. Par ailleurs, ce critère local est atteint pour tous les points de Gauss de la structure au même instant. Il y a bifurcation d'une solution diffuse vers une solution non homogène avec bande de localisation dès que ce critère est atteint. Le critère de Rice est donc adapté pour distinguer régime plastique diffus et régime plastique avec bande de localisation pour des essais biaxiaux.

La solution analytique pour le problème du barreau nous a permis de classer les différents paramètres qui pilotent la réponse de la structure en deux catégories :

- Les paramètres indépendants de la largeur de bande. On retrouve tous les paramètres du régime pré-pic (module de Young E , coefficient de Poisson ν , limite d'élasticité σ_0), ainsi que la contrainte ultime σ_u . Le paramètre de déformation κ_c^{ref} qui pilote la réponse pré-pic est aussi indépendant de la largeur de bande. Ces paramètres sont des paramètres physiques.
- Les paramètres qui dépendent de la largeur de bande : la largeur de bande elle-même et le paramètre de déformation qui pilote la loi de comportement dans le régime post-pic. Ces deux paramètres sont des paramètres numériques.

Le paramètre κ_c^{ref} a été obtenu pour un calcul de référence, réalisé pour une largeur de bande numérique de référence l^{ref} (partie 3.3.2.2). Il s'agit maintenant de montrer que nous pouvons adapter les lois de comportement de 1^{er} et de 2nd gradient de manière à obtenir une réponse macroscopique de la structure qui soit indépendante de la largeur de bande l .

Le critère de Rice va nous permettre de distinguer le paramètre de déformation qui pilote le comportement pré-pic de celui qui pilote le comportement post-pic, y compris en présence d'un écrouissage structurel. Nous proposons donc de modifier les lois de comportement de 1^{er} et de 2nd gradient de la manière suivante :

- Tant que le critère de Rice n'a pas été atteint au point de Gauss où les lois de comportement sont intégrées, ces deux lois de comportement sont identiques à celles présentées précédemment. Elles sont pilotées par les paramètres indépendants de la largeur de bande ainsi que par la déformation caractéristique κ_c^{ref} et la largeur de bande l .
- Une fois le critère de Rice atteint au point de Gauss où les lois de comportement sont intégrées, celles-ci sont pilotées par les paramètres indépendants de la largeur de bande, la largeur de bande l , ainsi que par la déformation $\kappa_c - \kappa_R$ qui dépend de la largeur de bande. La quantité κ_R est une quantité locale qui correspond à la valeur de la variable d'écrouissage quand le critère de Rice a été atteint pour ce point de Gauss. La valeur de κ_c est quant à elle calculée telle que $l(\kappa_c - \kappa_R) = l^{ref}(\kappa_c^{ref} - \kappa_R^{ref})$.

Ainsi, les fonctions d'écrouissage de la loi de comportement de 1^{er} gradient s'écrivent de la manière suivante :

$$R(\kappa) = \begin{cases} (\sigma_0 - \sigma_u) \exp\left(-\frac{\kappa}{\kappa_c^{ref}}\right) + \sigma_u & \text{pour } \kappa < \kappa_R \\ (\sigma_0 - \sigma_u) \exp\left(-\frac{\kappa_R}{\kappa_c^{ref}}\right) \exp\left(-\frac{\kappa - \kappa_R}{\kappa_c - \kappa_R}\right) + \sigma_u & \text{pour } \kappa > \kappa_R \end{cases} \quad (3.80)$$

FIGURE 3.49 – Exemple de réponse contrainte-déformation pour un essai biaxial non homogène

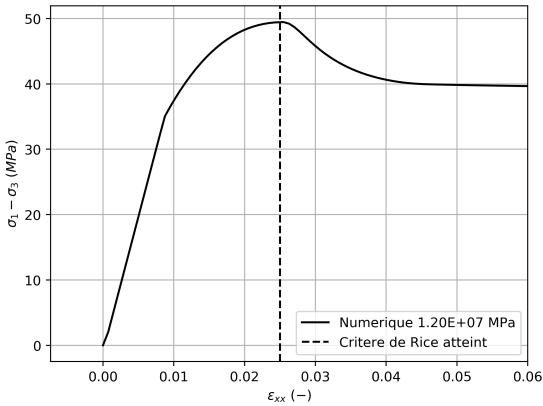
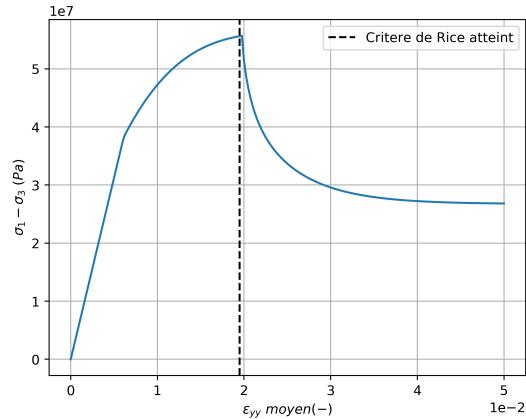


FIGURE 3.50 – Exemple de réponse contrainte déformation pour un essai biaxial homogène avec la loi de comportement dépendant du critère de Rice



$$b(\kappa) = \begin{cases} b_0 \exp\left(-\frac{\kappa}{\kappa_c^{ref}}\right) & \text{pour } \kappa < \kappa_R \\ b_0 \exp\left(-\frac{\kappa_R}{\kappa_c^{ref}}\right) \exp\left(-\frac{\kappa-\kappa_R}{\kappa_c-\kappa_R}\right) & \text{pour } \kappa > \kappa_R \end{cases} \quad (3.81)$$

Nous assurons ainsi la continuité de la fonction de charge ainsi que de la direction d'écoulement. On présente en figure 3.50 les résultats obtenus pour un essai biaxial homogène avec une telle loi de comportement. La solution étant homogène, la largeur de bande n'est pas définie. Il s'agit donc simplement d'illustrer cette loi de comportement : on constate une rupture de pente dans la réponse contrainte-déformation, à l'instant où le critère de Rice est atteint.

De la même manière, la loi de comportement de second gradient dépend du critère de Rice. La rigidité de second gradient est fixée à partir de la largeur de bande numérique l de la manière suivante (voir expression analytique 3.78) :

$$a_1 = \begin{cases} \frac{l^2(\sigma_0-\sigma_u)}{48\pi^2(1+a)b_0\kappa_c^{ref}} & \text{pour } \kappa < \kappa_R \\ \frac{l^2(\sigma_0-\sigma_u)}{48\pi^2(1+a)b_0\kappa_c} & \text{pour } \kappa > \kappa_R \end{cases} \quad (3.82)$$

3.3.3.2 Invariants

L'identification des paramètres de comportement de la partie 3.3.2 a permis de déterminer un premier jeu de paramètre, en particulier une déformation caractéristique κ_c^{ref} pour une largeur de bande donnée l^{ref} (les autres paramètres étant

CHAPITRE 3. INFLUENCE ET IDENTIFICATION DE LA LONGUEUR INTERNE DANS LE MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

FIGURE 3.51 – Réponse contrainte-déformation d'un essai biaxial pour une loi de comportement dépendante du critère de Rice. Résultats obtenus pour plusieurs largeurs de bande à $l (\kappa_c - \kappa_R)$ constant.

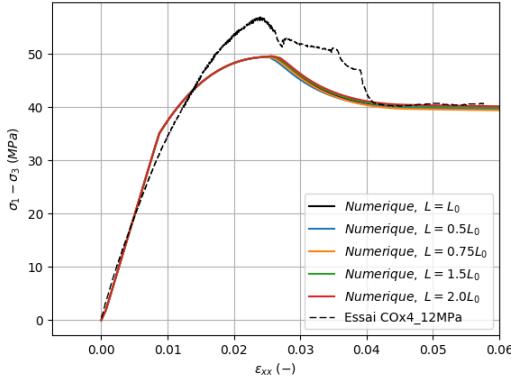
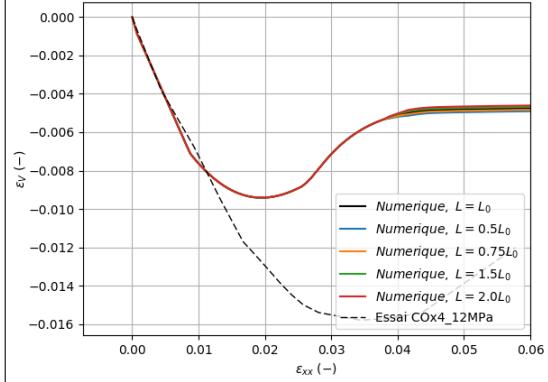


FIGURE 3.52 – Déformation volumique moyenne d'un essai biaxial pour une loi de comportement dépendante du critère de Rice. Résultats obtenus pour plusieurs largeurs de bande à $l (\kappa_c - \kappa_R)$ constant.



indépendants de la largeur de bande).

Il s'agit maintenant de relancer les calculs d'essais biaxiaux pour des paramètres de largeur de bande différents et montrer que la loi de comportement dépendante du critère de Rice permet effectivement d'obtenir des réponses macroscopiques qui soient indépendantes de la largeur de la bande, à la manière de ce qui a été fait en partie 3.2.6.1 pour le problème analytique du barreau.

On présente ici les résultats obtenus pour des essais biaxiaux à une pression de confinement de 12 MPa.

En figure 3.51, les résultats sont obtenus pour les lois de comportement de la partie 3.3.3.1, dépendantes du critère de Rice. Pour chaque largeur de bande, le paramètre de déformation est calculé de sorte à conserver le produit $l (\kappa_c - \kappa_R)$ constant une fois le critère de Rice atteint. La réponse pré-pic reste donc indépendante de la largeur de bande. La pente de l'écrouissage de la loi de comportement dans le régime post-pic est quant à elle adaptée à la largeur de bande, en suivant le résultat d'invariance obtenu pour le problème du barreau. Pour plusieurs largeurs de bande, allant de 0.5 l^{ref} à 2 l^{ref} , on constate que les réponses contrainte-déformation et l'évolution de la déformation volumique moyenne (figure 3.52) sont globalement indépendantes de la largeur de bande.

On retrouve donc bien les résultats d'invariance mis en évidence sur le problème analytique du barreau. La largeur de bande est un paramètre numérique, qui peut

être fixée en fonction du maillage. Pour des largeurs de bandes différentes, la pente de l'écrouissage dans le régime où la solution exhibe une bande de localisation doit être adaptée en fonction de cette largeur de bande, de sorte à maintenir le produit $l(\kappa_c - \kappa_R)$ constant. Ce résultat était exact dans le cas du problème du barreau (bande de localisation sollicitée en mode I, élasticité incompressible). Il est seulement approché ici : les réponses macroscopiques des échantillons numériques sont globalement indépendantes de la largeur de bande, mais on peut tout de même observer certaines différences d'une largeur de bande à l'autre (voir figure 3.51). Dans la mesure où la bande de localisation est sollicitée par des chargements plus complexes (modes I et II), il était prévisible que le résultat d'invariance soit seulement une approximation pour des structures plus complexes que le problème analytique.

Par ailleurs, si la loi de comportement dépendante du critère de Rice a donné ici des résultats satisfaisants, c'est avant tout grâce à la nature homogène des conditions aux limites et de la géométrie de l'essai biaxial. La solution peut bifurquer vers une bande de localisation dès que le critère de Rice est vérifié, et celui-ci est vérifié au même instant pour tout l'échantillon. Cependant, il faut s'attendre à ce que ce ne soit pas le cas pour des structures plus complexes, où l'apparition d'une bande de localisation pourrait être retardée. Dans tous les cas, un critère est nécessaire pour distinguer le régime pré-pic de la solution en bande de localisation.

Dans d'autres cas, il est supposé que la bande de localisation apparaît dès l'initiation de la plasticité (ou de l'endommagement, voir par exemple (LORENTZ, 2017)). Cette hypothèse est adaptée pour des matériaux comme le béton (qui sont sollicités en traction), mais n'est pas raisonnable pour les roches (sollicitées en compression).

3.3.3.3 Changement d'échelle

On rappelle ici brièvement les problématiques industrielles liées au choix du paramètre de largeur de bande, évoquées plus en détail dans l'introduction du chapitre (partie 3.1) :

- Le paramètre de largeur de bande, ainsi que les autres paramètres matériau de la loi de comportement de premier gradient, sont identifiés à partir d'essais expérimentaux. Ces essais expérimentaux, d'une échelle de l'ordre de quelques centimètres, sont modélisés numériquement avec des largeurs de bande de l'ordre du millimètre.
- Cette largeur de bande est incompatible avec les calculs industriels de type excavation de gallerie où nous souhaiterions utiliser des largeurs de bande de l'ordre de quelques centimètres, échelle plus compatible avec nos capacités de calcul.

CHAPITRE 3. INFLUENCE ET IDENTIFICATION DE LA LONGUEUR INTERNE DANS LE MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

FIGURE 3.53 – Ratio d'énergie consommée en fonction du facteur d'échelle

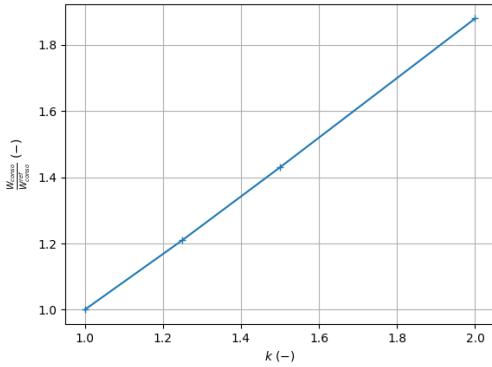
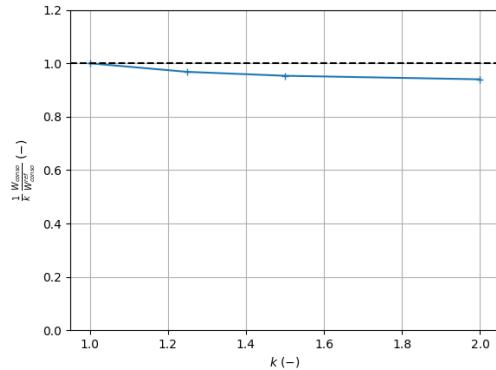


FIGURE 3.54 – Ratio d'énergie consommée normalisée par le facteur d'échelle en fonction du facteur d'échelle



Pour le problème du barreau, nous avons montré en partie 3.2.6.3 qu'il était bien possible de passer d'une structure de petite taille à une structure plus grande tout en conservant une largeur de bande compatible avec nos capacités de calculs et en conservant invariante l'énergie *surfacique* dissipée par la bande de localisation. Nous allons donc chercher à retrouver ce résultat pour des essais biaxiaux.

On rappelle que l'échantillon de référence a pour dimension 50mm x 30mm. Nous allons considérer une série d'échantillons de hauteur $k \cdot 50$ mm et de largeur $k \cdot 30$ mm, où k est un facteur d'échelle compris entre 1.25 et 2 ($k \in [1.25, 1.5, 2]$). Chacun des maillages contient un nombre identique d'éléments finis.

Pour chacun de ces échantillons numériques, le paramètre de largeur de bande sera fixé à $k \cdot l^{ref}$, où l^{ref} est la largeur de bande de référence utilisée en partie 3.3.2 pour l'identification des paramètres matériels sur l'échantillon de référence.

Les lois de comportement utilisées sont celles présentées en partie 3.3.3.1 et dépendent du critère de Rice. La pente de l'écrouissage dans le régime post-pic est adaptée de sorte à conserver un produit l ($\kappa_c - \kappa_R$) constant.

L'énergie consommée par la bande de localisation dans le régime post-pic est calculée d'une manière similaire au problème du barreau : on calcule le travail des forces extérieures pour un cycle de charge-décharge à la fin du régime adoucissant. Ces énergies calculées sont ensuite normalisées par l'énergie calculée pour l'échantillon de référence ($k = 1$). On présente en figure 3.53 les énergies consommées *linéiques* normalisées à la fin du régime adoucissant pour chaque échantillon. On présente en figure 3.54 ces mêmes énergies *linéique* normalisées et divisées par le facteur

CHAPITRE 3. INFLUENCE ET IDENTIFICATION DE LA LONGUEUR INTERNE DANS LE MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

d'échelle k . On constate que cette énergie normalisée reste globalement indépendante de la taille de l'échantillon (et de la largeur de bande). L'énergie surfacique est donc globalement conservée.

Pour les applications industrielles du type excavation de galerie, il serait nécessaire d'aller jusqu'à un facteur $k = 10$. Cependant, nous n'avons pas pour le moment réussi à obtenir de calculs convergés pour des facteurs d'échelle supérieurs à 2. Ces difficultés pourraient être liés à l'apparition de snap-backs ou à l'utilisation de module d'écrouissage de plus en plus élevés (en valeur absolue).

Dans tous les cas, il existe une borne supérieure pour la largeur de bande (voir partie 3.2.6.2). Au vu des paramètres matériaux identifiés à la partie 3.3.2, cette largeur de bande limite est de l'ordre de 25 cm, ce qui est compatible avec nos puissances de calcul.

3.4 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons montré le lien entre la largeur de bande, choisie comme un paramètre numérique en fonction des capacités de calcul et du maillage, et la réponse post-pic d'une loi de comportement adoucissante pour un modèle de second gradient de dilatation.

Dans un premier temps, dans le cadre d'un problème analytique simplifié, nous avons explicité le lien entre les paramètres des lois de comportement de 1^{er} et de 2nd gradient et la largeur de la bande de localisation. Par ailleurs, à partir des expressions analytiques de quantités macroscopiques d'intérêt (réponse contrainte-déformation moyenne, déformation volumique moyenne, énergie consommée par la bande de localisation), nous avons montré qu'il était possible d'adapter la pente de l'écrouissage post-pic afin d'obtenir une réponse macroscopique qui soit indépendante de la largeur de bande numérique. De la même manière, l'énergie consommée par la bande de localisation peut être conservée (ou pilotée) à travers un changement d'échelle.

Dans un second temps, ces résultats ont été étendus à des essais biaxiaux numériques. A l'aide d'une étude de sensibilité, nous avons montré que l'expression de la largeur de bande obtenue précédemment était toujours valable pour ces essais numériques plus complexes. Cette expression analytique a été mise à profit afin d'identifier un jeu de paramètres matériau pour une largeur de bande de référence donnée. Ensuite, nous avons mis en évidence l'intérêt de s'appuyer sur le critère de Rice pour distinguer le régime pré-pic de solution homogène (ou diffuse) du régime post-pic de solution avec bande de localisation. Grâce à ce critère, nous avons montré qu'il était possible de retrouver pour les essais biaxiaux les résultats d'invariance obtenus dans le cadre du problème analytique simplifié.

Pour le modèle de second gradient de dilatation, il est donc possible de s'affranchir de l'échelle physique de la localisation tout en conservant invariantes les quantités macroscopiques du problème. Ce résultat doit encore être appliqué à des échelles compatibles avec les calculs d'excavation de galerie. Pour le moment, ce changement d'échelle n'a été réalisé que pour des facteurs allant jusqu'à 2, là où nous souhaiterions aller jusqu'à 10. Des difficultés de convergence, liées à l'apparition de snap-backs ou à des paramètres de loi de comportement de plus en plus contraignants, ne nous ont pas permis de conclure pour le moment.

Chapitre 4

Conditions aux limites et conditions d'interface du modèle de second gradient de dilatation

Table des matières

4.1	Introduction	153
4.2	Conditions aux limites d'ordre supérieur	156
4.2.1	Présentation du problème	156
4.2.2	Résolution analytique	157
4.2.3	Impact de la condition aux limites d'ordre supérieur sur la forme de la solution	161
4.3	Conditions d'interface	164
4.3.1	Interface entre deux matériaux élasto-plastiques	165
4.3.2	Interface entre un matériau élastique et un matériau élasto-plastique	170
4.3.3	Proposition d'un autre comportement d'interface	174
4.4	Bilan du chapitre	178

4.1 Introduction

Dans ce chapitre 4, nous allons nous intéresser aux conditions aux limites d'ordre supérieur introduites dans le modèle de second gradient. On rappelle ici le principe des puissances virtuelles pour la formulation continue du modèle de second gradient de dilatation. Pour tout champ cinématiquement admissible \underline{u}^* :

$$\int_{\Omega} \left(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\nabla} \underline{u}^* + \underline{S} \cdot \underline{\nabla} \text{div}(\underline{u}^*) \right) dV = \int_{\partial\Omega} (\underline{p} \cdot \underline{u}^* + P \underline{n} \cdot \underline{D}\underline{u}^*) dS \quad (4.1)$$

La force de surface \underline{p} et la double force P sont les efforts extérieurs pour le modèle de second gradient de dilatation, dont les expressions sont les suivantes :

$$\begin{cases} p_i = \sigma_{ij} n_j - n_i n_j D S_j - \frac{D S_j}{D x_j} n_i - \frac{D S_j n_j}{D x_i} + \frac{D n_p}{D x_p} S_j n_j n_i \\ P = S_j n_j \end{cases} \quad (4.2)$$

Ces efforts \underline{p} et P sont duals, respectivement, du champ de déplacement \underline{u} et de sa dérivée normale $\underline{D}\underline{u}$. Une hypothèse simplificatrice est généralement faite sur la double force P : cette double force est supposée nulle $P = 0$. D'après (CHAMBON & MOULLET, 2004), une double force non nulle conduit à l'apparition d'une couche limite qui peut être négligée. Pour autant, l'impact de cette hypothèse est finalement assez peu étudiée lorsqu'il s'agit d'utiliser les milieux de second gradient pour la simulation du comportement mécanique des roches dans le cadre d'essais biaxiaux et de calculs d'excavation de galeries.

Au vu de la loi de comportement linéaire reliant la double contrainte de dilatance au gradient de la déformation volumique, cette hypothèse simplificatrice conduit à $\frac{\partial \varepsilon_V}{\partial n} = 0$ (parfois appelée condition aux limites naturelle). L'hypothèse $P = 0$ conduit par ailleurs à une simplification de l'expression de la force de surface \underline{p} . Les conditions aux limites du modèle de second gradient de dilatation s'écrivent alors :

$$\begin{cases} p_i = \sigma_{ij} n_j - \frac{\partial S_j}{\partial x_j} n_i \\ P = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

La condition aux limites d'ordre supérieur introduite par rapport aux milieux continus de Cauchy usuels conduit à des difficultés physiques dans l'interprétation des conditions aux limites des modèles de second gradient : il est difficile de trouver une interprétation physique à l'échelle microscopique à la double force P .

Une autre difficulté liée à cette condition aux limites d'ordre supérieure surgit lors de l'étude de l'interface entre deux milieux de second gradient ou entre un milieu de second gradient et un milieu de Cauchy usuel. Il faut alors choisir quelles sont les conditions cinématiques de continuité à considérer à l'interface (continuité du déplacement ? continuité du déplacement normal ? continuité de la déformation volumique ?). Dans le cadre de simulations numériques d'excavation, cette situation surgit par exemple lorsqu'il s'agit de modéliser par un milieu de second gradient une stratification de couches géologiques aux propriétés différentes ou l'interface entre un revêtement en béton et la roche (voir par exemple (SALEHNIA et al., 2015)).

CHAPITRE 4. CONDITIONS AUX LIMITES ET CONDITIONS D'INTERFACE DU MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

Les conditions de saut à l'interface pour un milieu de second gradient sont par exemple explicitées dans (SCIARRA et al., 2008) ou (DELL'ISOLA, SCIARRA & VIDOLI, 2009) en l'absence de forces extérieures ou d'énergie surfacique. Ce jeu de conditions de continuité est obtenu en utilisant un principe variationnel dans le cadre des grandes transformations. Dans le cas d'un milieu de second gradient de dilatation, ces conditions de continuité à travers une surface S de normale \underline{n} s'écrivent :

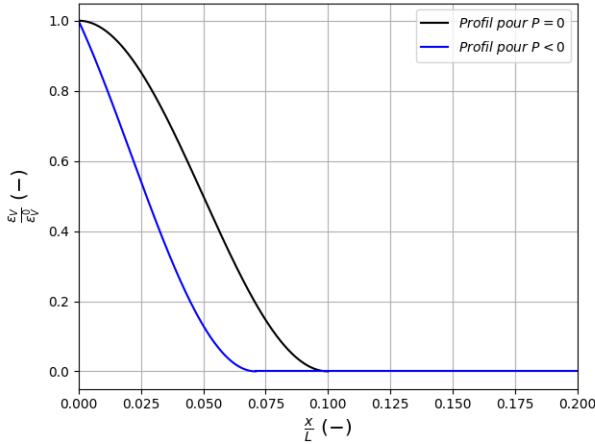
$$\begin{cases} \llbracket \underline{p} \cdot \underline{\delta u} \rrbracket = 0 \\ \llbracket \underline{P} \underline{n} \cdot \underline{D} \underline{\delta u} \rrbracket = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

L'impact du choix des conditions cinématiques de continuité sur la réponse des milieux de second gradient en présence d'une interface a notamment été étudié dans (DELL'ISOLA, MADEO & PLACIDI, 2012) ou (PLACIDI et al., 2014). A noter que le cadre d'étude retenu par ces auteurs diffère quelque peu du nôtre : ils s'intéressent à une évolution dynamique de ces milieux et se limitent à un comportement de premier gradient élastique. L'objectif est pour eux de s'appuyer sur la réflexion et la transmission d'ondes au niveau de l'interface pour mesurer expérimentalement les paramètres matériau de second gradient.

Dans notre cas d'une application des milieux de second gradient à la modélisation du comportement des roches, ce paramètre est considéré comme numérique, et ne fait donc pas l'objet d'une identification expérimentale au niveau microscopique.

Dans ce chapitre, une étude sera réalisée dans le cadre du problème analytique du barreau. Il s'agit de reprendre certaines des hypothèses faites au chapitre 2 concernant la double force P et d'étudier l'impact des conditions de continuité dans le cas où le barreau serait constitué de deux matériaux différents. Différentes conditions de continuité au niveau de l'interface entre ces deux matériaux seront testées et leur impact sur la réponse macroscopique du barreau sera mis en évidence. Pour chaque situation (interface roche / béton et interface entre deux roches aux propriétés différentes), nous discuterons de quel type d'interface semble le plus adapté, sur la base de considérations physiques.

FIGURE 4.1 – Exemples de formes de profils de déformation volumique recherchés



4.2 Conditions aux limites d'ordre supérieur

4.2.1 Présentation du problème

Afin de mettre en évidence l'impact de cette condition aux limites d'ordre supérieur, la forme de la solution recherchée diffère de celle étudiée au chapitre 3. Dans ce chapitre 3, la bande de localisation était centrée autour de $x = 0$. Ici, nous chercherons la solution sous la forme de deux demi-bandes de localisation situées chacune à l'extrémité du barreau. Afin de garder une certaine cohérence avec les notations du chapitre précédent, le barreau sera ici centré en $x = L$, et nous étudierons uniquement la moitié $0 < x < L$ pour des raisons de symétrie (voir figure 4.1).

Toutes les hypothèses faites au chapitre 3 pour ce problème du barreau sont reprises ici. En plus du chargement de traction à partir d'un état initial $\sigma = 0$, nous imposons une double force P non nulle à l'extrémité du barreau. Nous présenterons ici les résultats pour le cas $P < 0$. On supposera cette double force constante. Le cas $P > 0$ est brièvement présentée en annexe 2.

Avant même de résoudre ce problème, il est possible de discuter qualitativement de l'impact de cette double force sur la forme de la solution.

D'après l'expression 4.2 et la loi de comportement de second gradient, la double force P fixe le gradient de la déformation volumique en $x = 0$ (noté $\epsilon_V^{0'}$) : $P = 4a_1\epsilon_V^{0'}$. La quantité $\frac{1}{\epsilon_V^{0'}} = \frac{4a_1}{P}$ est homogène à une longueur. On constate donc qu'à travers la double force P on introduit une seconde longueur caractéristique dans le problème (différente et indépendante de la largeur de bande). Nous verrons que cette seconde

longueur caractéristique correspond à une couche limite et que l'impact de cette couche limite peut être négligeable ou non en fonction de la valeur de la double force.

La loi de comportement de 1^{er} gradient utilisée dans cette partie sera une loi de comportement de type Drucker Prager à écrouissage exponentiel (négatif). On en rappelle les équations constitutives ci-dessous.

Fonction de charge :

$$F(\underline{\sigma}, \kappa) = \sigma_{eq} + a \operatorname{tr}(\underline{\sigma}) - R(\kappa) \quad (4.5)$$

Potentiel d'écoulement :

$$G(\underline{\sigma}, \kappa) = \sigma_{eq} + b(\kappa) \operatorname{tr}(\underline{\sigma}) \quad (4.6)$$

Fonction d'écrouissage :

$$R(\kappa) = (\sigma_0 - \sigma_u) \exp\left(-\frac{\kappa}{\kappa_c}\right) + \sigma_u \quad (4.7)$$

Fonction de dilatance :

$$b(\kappa) = b_0 \exp\left(-\frac{\kappa}{\kappa_c}\right) \quad (4.8)$$

4.2.2 Résolution analytique

La résolution analytique de ce problème suit le même principe que celle présentée au chapitre précédent. Seules les conditions aux limites aux extrémités de la bande de localisation se voient modifiées par la présence de la double force P . On rappelle que cette double force est choisie négative et constante.

Les expressions 4.2 appliquées au problème du barreau donnent :

$$\begin{cases} \sigma = p_x = \tau(0) - \frac{\partial S}{\partial x}(0) \\ P = S(0) \end{cases} \quad (4.9)$$

La loi de comportement de second gradient donne ainsi une relation entre la double force P et le gradient de déformation volumique à l'extrémité du barreau :

$$P = 4a_1 \varepsilon_V^{0'} \quad (4.10)$$

Tout comme au chapitre 3 (partie 3.2.3), l'équation d'équilibre peut se mettre sous la forme suivante (avec B la primitive de b s'annulant en 0) :

$$\tau(\varepsilon_V) - 4a_1 \varepsilon_V'' = \sigma \text{ avec } \tau(\varepsilon_V) = \frac{1}{1+a} R(B^{-1}(\frac{1}{3} \varepsilon_V)) \quad (4.11)$$

CHAPITRE 4. CONDITIONS AUX LIMITES ET CONDITIONS D'INTERFACE DU MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

Les conditions aux limites en déformation volumique aux extrémités de la bande de localisation s'écrivent quant à elles :

$$\begin{cases} \varepsilon_V(0) = \varepsilon_V^0 \\ \varepsilon'_V(0) = \varepsilon_V^{0'} \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_V(l) = 0 \\ \varepsilon'_V(l) = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

La méthode de résolution utilisée est identique à celle présentée au chapitre 3. Après quelques manipulations, on aboutit aux expressions suivantes pour les quantités d'intérêt du problème. A ce stade, ces expressions sont valables pour toute fonction d'écrouissage et seront ensuite particularisées à l'écrouissage exponentiel.

La contrainte totale σ s'écrit :

$$\sigma = \frac{T(\varepsilon_V^0) - 2a_1\varepsilon_V^{0'}}{\varepsilon_V^0} \quad (4.14)$$

Le profil de déformation volumique s'écrit de manière implicite comme suit :

$$x(\varepsilon_V, \varepsilon_V^0, \varepsilon_V^{0'}) = \sqrt{2a_1} \int_{\varepsilon_V}^{\varepsilon_V^0} \sqrt{\frac{\varepsilon_V^0}{T(t)\varepsilon_V^0 - T(\varepsilon_V^0)t + 2a_1\varepsilon_V^{0'2}t}} dt \quad (4.15)$$

La largeur de bande s'écrit quant à elle :

$$l(\varepsilon_V^0, \varepsilon_V^{0'}) = \sqrt{2a_1} \int_0^{\varepsilon_V^0} \sqrt{\frac{\varepsilon_V^0}{T(t)\varepsilon_V^0 - T(\varepsilon_V^0)t + 2a_1\varepsilon_V^{0'2}t}} dt \quad (4.16)$$

L'ouverture de la bande de localisation δ s'écrit :

$$\delta(\varepsilon_V^0, \varepsilon_V^{0'}) = \sqrt{2a_1} \int_0^{\varepsilon_V^0} \left(\frac{\tau(t)}{E} + B^{-1}\left(\frac{1}{3}t\right) + \frac{1}{3}t \right) \sqrt{\frac{\varepsilon_V^0}{T(t)\varepsilon_V^0 - T(\varepsilon_V^0)t + 2a_1\varepsilon_V^{0'2}t}} dt \quad (4.17)$$

Le déplacement U à l'extrémité du barreau s'écrit :

$$U(\varepsilon_V^0, \varepsilon_V^{0'}) = \delta(\varepsilon_V^0, \varepsilon_V^{0'}) + (L - l) \frac{T(\varepsilon_V^0) - 2a_1\varepsilon_V^{0'}}{E\varepsilon_V^0} \quad (4.18)$$

En pratique, une fois les fonctions d'écrouissages particularisées, l'évaluation numérique des expressions précédentes peut se faire de différentes manières. Il est possible d'évaluer numériquement les différentes fonctions intervenant dans les expressions du déplacement, de la largeur de bande etc ... puis de calculer numériquement ces différentes intégrales (quadratures numériques). Pour certaines fonctions

CHAPITRE 4. CONDITIONS AUX LIMITES ET CONDITIONS D'INTERFACE
DU MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

TABLE 4.1 – Paramètres matériaux utilisées pour l'évaluation numérique

E	ν	σ_0	σ_u	κ_c	ϕ	ψ_0	a_1
6 GPa	0.5	20 MPa	10 MPa	0.1	25°	15°	5.10 ² N

d'écrouissage, il est possible de trouver des primitives et donc de simplifier au maximum les expressions présentées au paragraphe précédent. Nous présentons ci-dessous les expressions simplifiées obtenues dans le cas d'un écrouissage exponentiel pour certaines quantités (largeur de bande et profil de déformation). Les autres quantités (ouverture de bande et déplacement) sont obtenues par intégration numérique des expressions précédentes.

Par la suite, on notera l_n la largeur de bande obtenue dans le cas des conditions aux limites dites naturelles ($P = 0$, voir chapitre 3). Ici, on a :

$$l_n = l(\varepsilon_V^0, \varepsilon_V^{0'} = 0) = 2\sqrt{3}\pi \sqrt{\frac{(1+a)b_0 a_1 \kappa_c}{\sigma_0 - \sigma_u}} \quad (4.19)$$

On définit aussi le paramètre adimensionné α de la manière suivante :

$$\alpha = \frac{l_n \varepsilon_V^{0'}}{\pi \varepsilon_V^0} = \frac{l_n P}{4\pi a_1 \varepsilon_V^0} \quad (4.20)$$

Dans le cas $P < 0$, ce paramètre α est négatif et croissant au cours du chargement. Les expressions ci-dessus se simplifient. La largeur de bande s'écrit :

$$l(\varepsilon_V^0, \varepsilon_V^{0'}) = \frac{2l_n}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right) \quad (4.21)$$

On vérifie bien que pour $P = 0$ (c'est à dire $\alpha = 0$), on a bien $l = l_n$. Par ailleurs, la largeur de bande, qui était une constante dans le cas $P = 0$, est ici une fonction du chargement. On vérifiera plus tard que cette largeur de bande est bien une fonction croissante du chargement.

Le profil de déformation volumique s'écrit :

$$\varepsilon_V(x, \varepsilon_V^0, \varepsilon_V^{0'}) = \varepsilon_V^0 (\alpha^2 + 1) \sin^2 \left(\arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \right) - \frac{\pi x}{2l_n} \right) \quad (4.22)$$

Ici aussi, pour $P = 0$ ($\alpha = 0$), on retrouve bien un profil similaire à celui obtenu au chapitre 3.

FIGURE 4.2 – Evolution de la largeur de bande en fonction de la déformation volumique maximale dans la bande de localisation

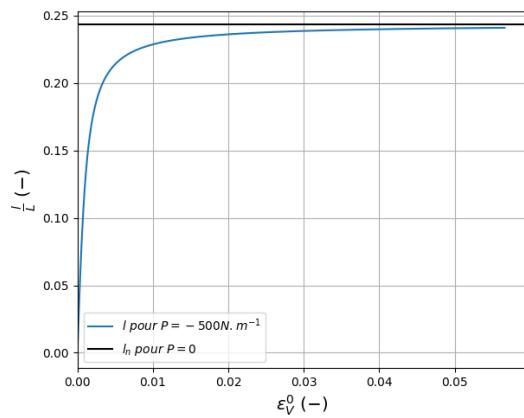
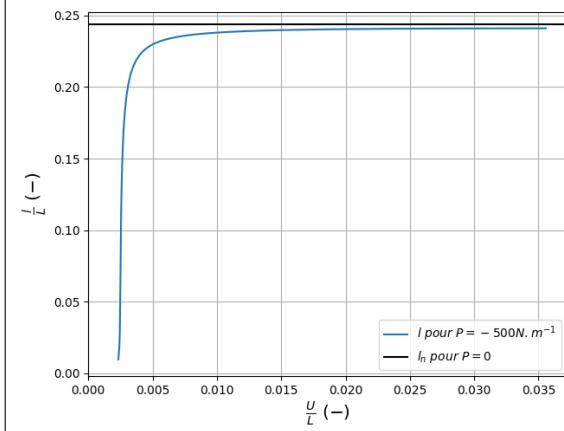


FIGURE 4.3 – Evolution de la largeur de bande en fonction du déplacement à l'extrémité du barreau



Pour les paramètres matériaux du tableau 4.1 et $P = -500 \text{ N.m}^{-1}$, on présente l'évolution de la largeur de bande en fonction du déplacement U en figure 4.2 et en fonction de la déformation volumique maximale dans la bande de localisation en figure 4.3. Cette largeur de bande est comparée à la largeur de bande l_n obtenue dans le cas $P = 0$. On constate que la largeur de bande tend progressivement vers la largeur de bande l_n : il y a un régime transitoire.

Quelques exemples de profil de déformation volumique au cours du chargement sont présentés en figure 4.4. Comme pour la largeur de bande, il existe un régime transitoire au cours duquel la forme de ce profil de déformation volumique évolue.

Initialement, à faible chargement (pour des valeurs faibles de ε_V^0), on a $|\alpha| \gg 1$. La double force n'est pas négligeable devant la force (car elle est imposée constante alors que la force est supposée croissante). La forme du profil de déformation volumique est assez différente de celle obtenue dans le cas $P = 0$. La couche limite induite par la double force non nulle n'est pas négligeable. Au contraire, pour des valeurs plus élevées du chargement (et donc des valeurs plus élevées de ε_V^0), on a $|\alpha| \ll 1$. L'impact de la couche limite induite par la double force devient négligeable.

En figure 4.5, la réponse contrainte - déplacement du barreau est présentée et comparée au cas $P \neq 0$. Une différence notable entre ces deux situations se situe dans le régime élastique. En effet, en imposant $P \neq 0$, on crée un gradient de déformation volumique au niveau de la condition aux limites. On a donc nécessairement une déformation volumique non nulle. L'élasticité étant incompressible, une zone plastique s'initie dès le début du chargement au niveau de cette condition aux limites.

FIGURE 4.4 – Profils de déformation volumique dans la bande de localisation au cours du chargement

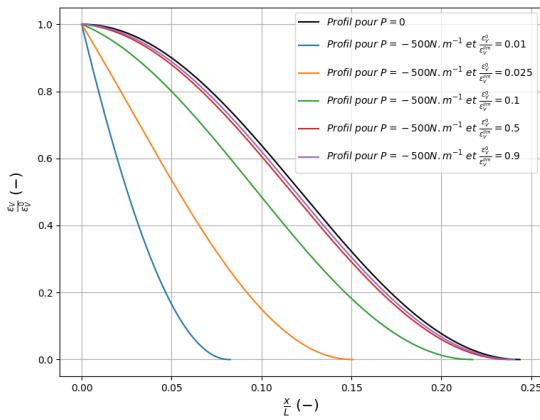
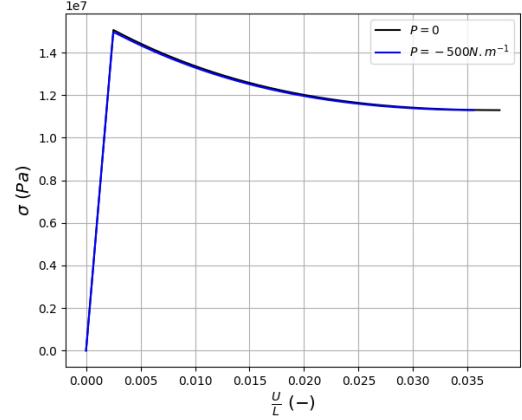


FIGURE 4.5 – Réponse contrainte déplacement du barreau



On constate en figure 4.5 que cette zone plastique a une influence sur la contrainte au pic, mais pour la valeur de P choisie ici l'impact de la double force sur la réponse contrainte-déplacement est très limité. L'impact de la double force sur cette réponse sera étudié plus en détail au paragraphe suivant.

4.2.3 Impact de la condition aux limites d'ordre supérieur sur la forme de la solution

Nous avons montré que pour une valeur non nulle de P l'écart à la solution de référence $P = 0$ dépend de la valeur du paramètre adimensionné α . On rappelle l'expression de ce paramètre :

$$\alpha = \frac{l_n \varepsilon_V^{0'}}{\pi \varepsilon_V^0} = \frac{l_n P}{4\pi a_1 \varepsilon_V^0} \quad (4.23)$$

Ce paramètre est ici négatif ($P < 0$) et croissant : ε_V^0 est croissante et prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, \varepsilon_V^{lim}]$. Pour une valeur fixée de P , on peut donc définir le paramètre α^{max} (on rappelle que $\alpha < 0$ ici) :

$$\alpha^{max} = \frac{l_n \varepsilon_V^{0'}}{\pi \varepsilon_V^{lim}} = \frac{l_n P}{4\pi a_1 \varepsilon_V^{lim}} \quad (4.24)$$

On présente en figure 4.6 l'évolution de la largeur de bande au cours du chargement pour plusieurs valeurs de ce paramètre α^{max} (et donc de P). La figure 4.7

FIGURE 4.6 – Evolution de la largeur de bande au cours du chargement pour plusieurs valeurs de α^{max}

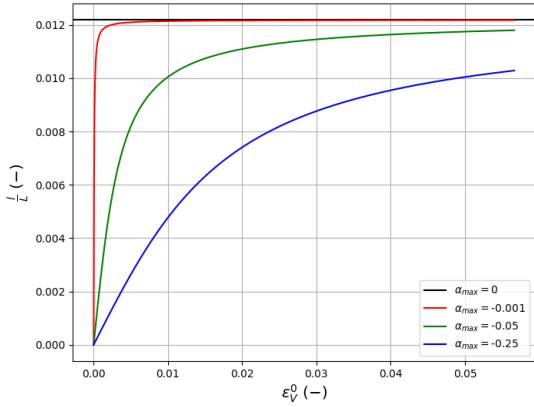
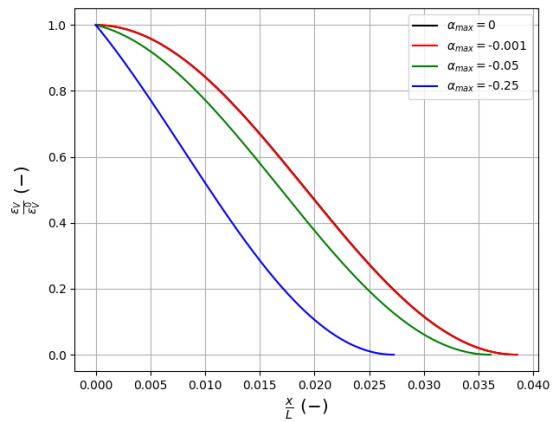


FIGURE 4.7 – Profils de déformation volumique dans la bande de localisation pour $\frac{\varepsilon_V^0}{\varepsilon_V^{lim}} = 0.5$ et plusieurs valeurs de α^{max}



présente les profils de déformation volumique pour une même valeur de la déformation volumique maximale ε_V^0 et plusieurs valeurs de α^{max} . Lorsque la valeur de α^{max} est négligeable devant 1, le régime transitoire vers la solution de référence est très rapide, la double force peut effectivement être négligée.

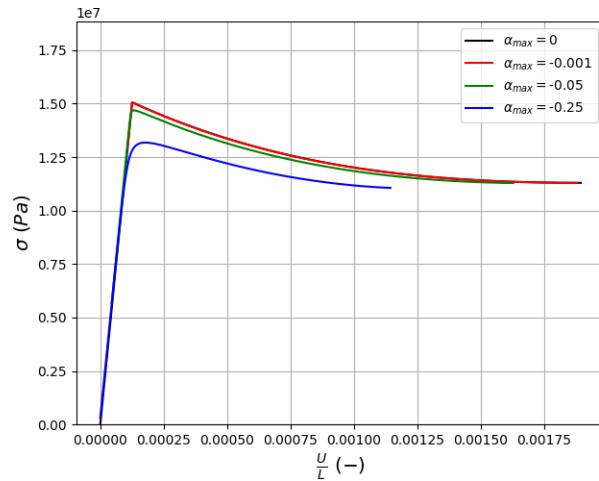
Les réponses contrainte - déplacement sont présentées en figure 4.8 pour plusieurs valeurs de α^{max} (et donc de P). Une fois de plus, on constate que l'influence de la double force est bien négligeable lorsque α^{max} est négligeable devant 1. Au contraire, lorsque α^{max} n'est plus négligeable, la double force vient impacter des quantités telles que la contrainte au pic ou la contrainte ultime.

Cette double force ne peut donc pas être totalement négligée. Certes, cette double force introduit bien une couche limite (indépendante de la largeur de bande) dans le modèle, mais selon la valeur de la double force, cette couche limite peut avoir un impact significatif sur la réponse de la structure.

Cette double force est directement liée au gradient de la déformation volumique au niveau de la condition aux limites dans la bande de localisation. Il serait donc nécessaire de pouvoir caractériser expérimentalement ce gradient de déformation dans la bande de localisation afin de pouvoir choisir la condition aux limites la plus appropriée dans les essais numériques. Cependant, cet objectif semble hors d'atteinte : la déformation dans la bande de localisation n'est pas une quantité que les moyens expérimentaux utilisés actuellement permettent de mesurer (voir par exemple (DESBOIS et al., 2017)).

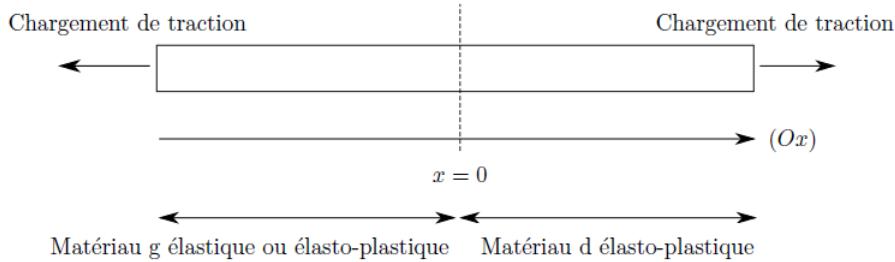
CHAPITRE 4. CONDITIONS AUX LIMITES ET CONDITIONS D'INTERFACE DU MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

FIGURE 4.8 – Réponse contrainte-déplacement pour plusieurs valeurs de α^{max}



Dans tous les cas, cette double force non nulle impacte aussi bien des quantités locales (comme la déformation dans la bande de localisation) que des quantités macroscopiques globales (la réponse contrainte-déplacement du barreau). Pour les essais numériques et l'identification de paramètres matériaux, l'influence de la double force sur les quantités locales est finalement peu pertinente : comme nous l'expliquions au chapitre 3, nous utilisons une largeur de bande numérique (différente de la largeur de bande physique). En conséquence, les quantités locales telles que la déformation dans la bande de localisation ne sont de toute façon pas des informations qui peuvent être obtenues de manière fiable à partir des simulations numériques. Les quantités macroscopiques globales sont quant à elles les grandeurs utilisées pour l'identification des paramètres matériaux et sont donc correctement représentées par un modèle à double force nulle. La prise en compte d'une double force non nulle et non négligeable conduirait simplement à un autre jeu de paramètres matériaux.

FIGURE 4.9 – Schéma de principe du problème traité



4.3 Conditions d'interface

Dans cette partie, il s'agit d'étudier l'influence des conditions de continuité à l'interface entre un matériau de second gradient et un second matériau (de second gradient ou de mécanique classique).

Pour cela, nous resterons dans le cadre du problème du barreau. Nous considérerons cette fois-ci un barreau complet, soumis à un chargement de traction de part et d'autre et centré en $x = 0$. Cette fois-ci, la moitié $x < 0$ est constitué d'un matériau g , la moitié $x > 0$ d'un matériau d (voir figure 4.9). Ce matériau d sera toujours modélisé par un comportement élasto-plastique de Drucker Prager pour la partie 1^{er} gradient et un modèle de second gradient. Le matériau g sera choisi quant à lui parmi les deux modèles suivants :

- un matériau élasto-plastique de Drucker Prager avec second gradient, avec des propriétés différentes du matériau d (partie 4.3.1)
- un matériau élastique linéaire, avec ou sans second gradient (partie 4.3.2)

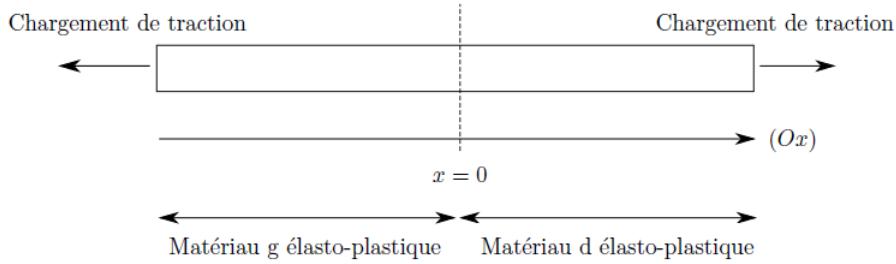
Dans le cas d'un matériau élasto-plastique, on cherche à représenter l'interface entre deux couches de roche aux propriétés différentes. Dans le cas du matériau élastique, il s'agit de représenter une interface béton - roche.

Pour le problème du barreau, les conditions de saut s'écrivent, en $x = 0$:

$$\begin{cases} \llbracket \left(\tau - \frac{\partial S}{\partial x} \right) . u \rrbracket = 0 \\ \llbracket S \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \rrbracket = 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

De ce jeu d'équations, on déduit que des hypothèses cinématiques différentes sur le champ de déplacement et son gradient conduiront à des réponses différentes à

FIGURE 4.10 – Schéma de principe du problème traité. Interface entre deux matériaux élasto-plastiques



l'interface entre les deux matériaux. Dans les sous-parties suivantes, on considérera à chaque fois que le déplacement normal u est continu, mais nous considérerons un gradient de déplacement (et donc une déformation volumique) continue ou discontinue. Le cas particulier d'une énergie d'interface dépendant du saut de déformation volumique sera étudié en partie 4.3.3.

Dans tous les cas, la résolution du problème du barreau se fait d'une manière identique à celle présentée dans la partie précédente (double force non nulle, partie 4.2). En effet, chaque branche de solution de part et d'autre de l'interface peut être traitée comme cela a été fait précédemment. Seule différence : là où la force et la double force étaient précédemment imposées par les conditions aux limites extérieures, ces quantités sont ici fixées par le système d'équation 4.25. La résolution détaillée du problème est présentée en annexe 2. On se contentera ici d'en présenter les résultats.

4.3.1 Interface entre deux matériaux élasto-plastiques

Dans cette section, on s'intéresse à l'interface entre deux matériaux élasto-plastiques de type Drucker-Prager (voir figure 4.17). Il s'agit ici de modéliser grossièrement une situation que l'on rencontre dans le cadre de calculs d'excavation de galerie, où on prend parfois en compte plusieurs stratifications de roche aux propriétés mécaniques différentes.

Les paramètres matériaux utilisés pour le matériau d élasto-plastique sont présentés au tableau 4.1. Pour le matériau g , on choisit $\kappa_c^g = \frac{\kappa_c^d}{1.25}$ et $a_1^g = \frac{a_1^d}{4}$, les autres paramètres étant égaux.

FIGURE 4.11 – Profil de déformation volumique dans le barreau : cas d'une interface avec discontinuité de la déformation volumique

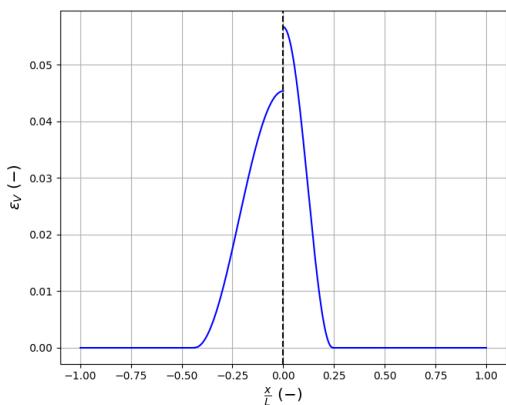
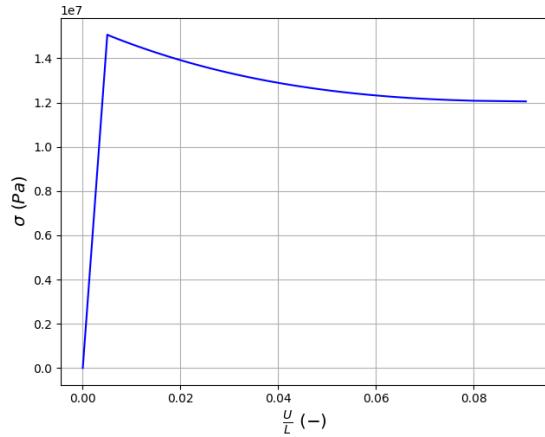


FIGURE 4.12 – Réponse contrainte déplacement du barreau : cas d'une interface avec discontinuité de la déformation volumique



4.3.1.1 Discontinuité de la déformation volumique

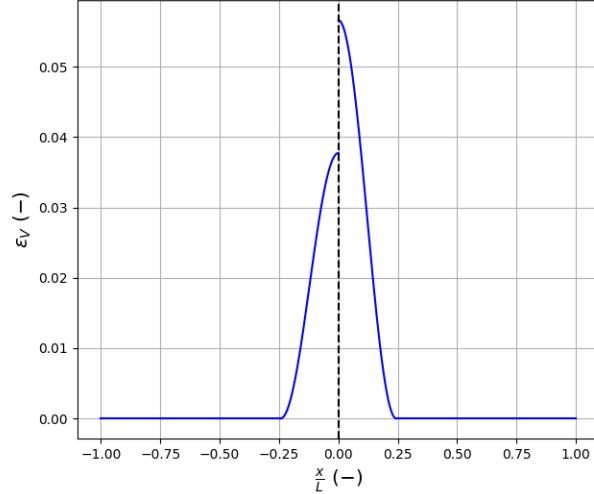
Dans le cas d'une discontinuité du gradient de déplacement à l'interface (et donc de la déformation volumique), et d'un déplacement normal continu, les conditions de saut à l'interface donnent :

$$\begin{cases} \llbracket \tau - \frac{\partial S}{\partial x} \rrbracket = 0 \\ S(x = 0^-) = S(x = 0^+) = 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

De part et d'autre de l'interface, on retrouve donc deux branches de solution similaires à celles présentées au chapitre 3. Le gradient de la déformation volumique (lié à la double contrainte S par la loi de comportement de second gradient) est nul en $x = 0$. On peut donc construire la solution de ce problème d'interface à partir de celle du chapitre 3, et les profils de déformation volumique de part et d'autre de l'interface évoluent indépendamment (figure 4.11). Seule la continuité de la contrainte totale $\sigma = \tau - \frac{\partial S}{\partial x}$ est assurée à l'interface.

Dans cette situation, dans le cadre de simulations numériques, il serait souhaitable d'avoir de part et d'autre de l'interface des largeurs de bande identiques (et donc des rigidités de second gradient différentes) comme c'est le cas en figure 4.13 ($\kappa_c^g = \frac{\kappa_c^d}{1.25}$ et $a_1^g = a_1^d * 1.25$). Cela permettrait d'avoir de part et d'autre de l'interface des mailles de dimensions identiques.

FIGURE 4.13 – Exemple de profil de déformation volumique pour des paramètres matériau différents de part et d'autre de l'interface, mais des largeurs de bande identiques



4.3.1.2 Interface parfaite

Dans le cas d'une interface parfaite, il y a continuité du déplacement et de la déformation volumique. Les conditions de saut en $x = 0$ s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \llbracket \tau - \frac{\partial S}{\partial x} \rrbracket = 0 \\ \llbracket S \rrbracket = 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

Il y a donc une continuité de la double contrainte de dilatance S à l'interface. Pour autant, pour des valeurs distinctes de rigidité de second gradient a_1^g de part et d'autre de l'interface, il n'y a pas continuité du gradient de la déformation volumique (voir par exemple figure 4.15) :

$$a_1^g \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial x}(0^-) = a_1^d \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial x}(0^+) \quad (4.28)$$

Dans cette situation, la solution complète est composée de deux branches $x < 0$ et $x > 0$, qui peuvent être traitées comme dans le cas de la double force non nulle (partie 4.2). En partie 4.2, la contrainte et la double contrainte en $x = 0$ étaient fixées par des chargements extérieurs. Ici, ces quantités sont déterminées par le système 4.27.

On présente en figures 4.14 et 4.15 les profils de déformation volumique obtenus. On peut montrer que deux solutions existent : une forme de solution où les gradients

CHAPITRE 4. CONDITIONS AUX LIMITES ET CONDITIONS D'INTERFACE DU MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

FIGURE 4.14 – Profil de déformation volumique dans le barreau : cas d'une interface parfaite

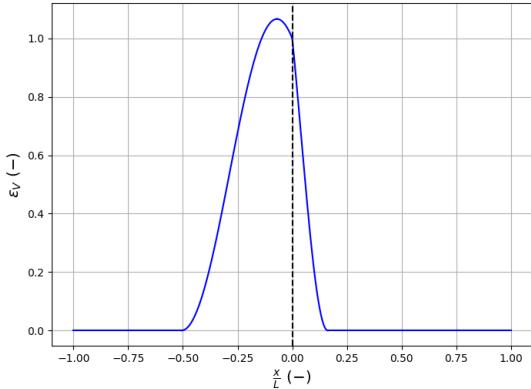
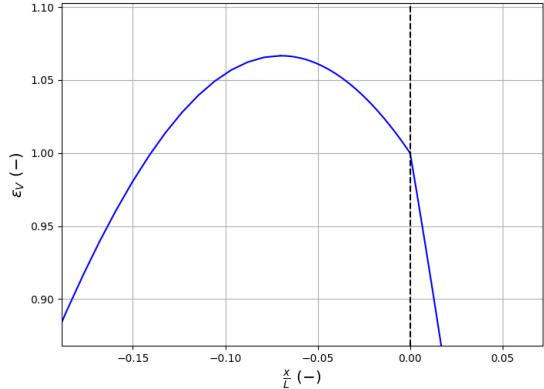


FIGURE 4.15 – Profil de déformation volumique dans le barreau : cas d'une interface parfaite. Zoom sur l'interface



de déformation volumique sont négatifs à l'interface ; une forme de solution où les gradients de déformation volumique sont positifs à l'interface. On présente ici la solution où $\frac{\partial \varepsilon_V}{\partial x}(0^\pm) < 0$.

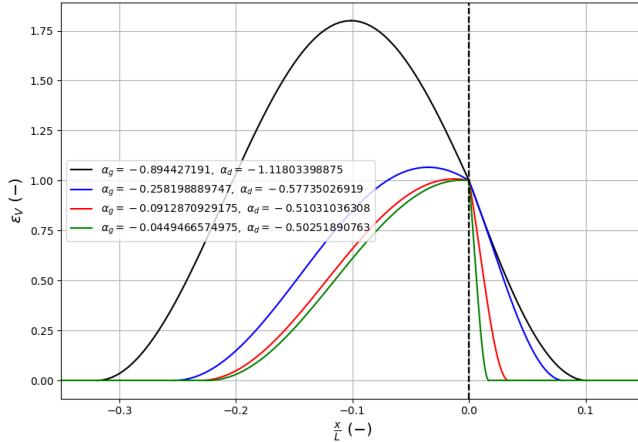
Il est possible de définir un paramètre adimensionné α_g (respectivement α_d) qui décrit l'écart à la solution de référence en l'absence d'interface (gradient de déformation nul à l'interface) pour la branche de solution $x < 0$ (respectivement $x > 0$). Comme pour le cas d'une double force, ces deux paramètres sont définis de la manière suivante :

$$\begin{cases} \alpha_g = \frac{l_n^g \varepsilon'_V(x=0^-)}{\pi \varepsilon_V(x=0)} \\ \alpha_d = \frac{l_n^d \varepsilon'_V(x=0^+)}{\pi \varepsilon_V(x=0)} \end{cases} \quad (4.29)$$

On peut montrer (voir annexe 2) que ces deux paramètres adimensionnés sont constants au cours du chargement et se mettent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \alpha_g = \frac{a_1^d}{a_1^g} \alpha_d \\ \alpha_d = \pm \sqrt{\frac{\frac{l_n^d a_1^g}{l_n^g a_1^d} - 1}{\pi(1 - \frac{a_1^d}{a_1^g})}} \end{cases} \quad (4.30)$$

FIGURE 4.16 – Profils de déformation volumique dans le barreau pour plusieurs valeurs de α_g et α_d



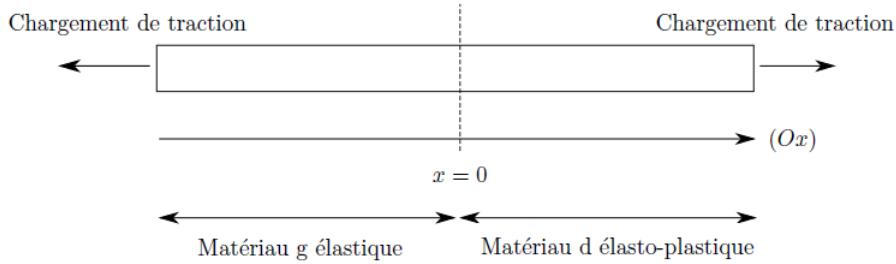
On constate en figure 4.16 que lorsque ce paramètre α^g tends vers 0 à gauche, on retrouve une forme de solution où le gradient de déformation volumique est nul à l'interface en 0^- . A l'inverse, pour des valeurs de α^g non négligeables devant 1, on retrouve des profils de déformation volumique similaires à ceux obtenus pour des doubles forces non négligeables, avec un gradient de déformation volumique au niveau de l'interface. Ce paramètre α joue donc un rôle identique au paramètre défini en partie 4.2.

4.3.1.3 Bilan

Nous avons traité le cas d'une interface entre deux matériaux élastoplastiques de second gradient pour deux hypothèses spécifiques au modèle de second gradient de dilatation : continuité ou discontinuité de la déformation volumique. Il s'agit ici de représenter l'interface entre deux roches aux propriétés mécaniques différentes.

Avec continuité de la déformation volumique, nous imposons aussi une continuité de la double contrainte de dilatance S au niveau de l'interface. C'est une hypothèse assez forte, dans la mesure où cette quantité spécifique aux modèles de second gradient n'a pas d'interprétation physique bien établie. Le modèle de second gradient est un reflet à l'échelle macroscopique d'une réalité microstructurale qui conduit à une interaction entre points matériels. Dans le cas d'une évolution brutale des paramètres matériaux (comme c'est le cas ici), nous pouvons considérer que ces effets d'interaction entre points matériels sont rompus de part et d'autre de l'interface.

FIGURE 4.17 – Schéma de principe du problème traité. Interface entre un matériau élastique et un matériau élastoplastique



Seules les seules liaisons cinématiques à l'interface seraient donc celles portant sur le déplacement.

Pour ce type d'interface entre deux matériaux, nous recommandons donc plutôt de considérer une discontinuité de la déformation volumique. Pour une modélisation éléments finis d'un modèle de second gradient, où les noeuds portent comme degrés de liberté cette déformation volumique, cela implique de dédoubler les noeuds à l'interface et d'appliquer des conditions cinématiques de continuité pour les degrés de libertés de déplacement uniquement.

4.3.2 Interface entre un matériau élastique et un matériau élasto-plastique

Dans cette section, on s'intéresse à l'interface entre un matériau élastique et un matériau élasto-plastique de type Drucker-Prager (voir figure 4.17). Il s'agit ici de modéliser grossièrement une situation que l'on rencontre dans le cadre de calculs d'excavation de galerie, où il existe une interface entre un revêtement en béton (élastique) et une roche.

Les paramètres matériaux utilisés pour le matériau d élasto-plastique sont présentés au tableau 4.1. Pour le matériau élastique g , on choisit $E = 30 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$ et $a_1^g = 5.10^4 \text{ N}$.

4.3.2.1 Discontinuité de la déformation volumique

Dans le cas d'une discontinuité potentielle du gradient de déplacement (et donc de la déformation volumique), et d'un déplacement normal continu, les conditions de

FIGURE 4.18 – Profil de déformation volumique dans le barreau : cas d'une interface avec discontinuité de la déformation volumique

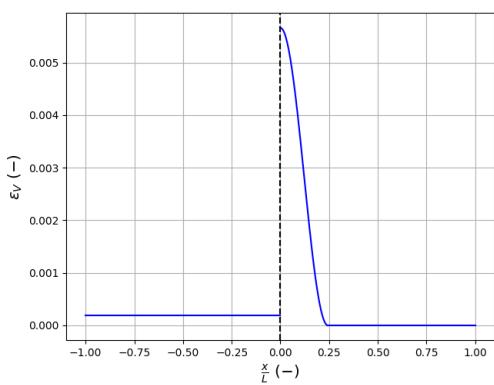
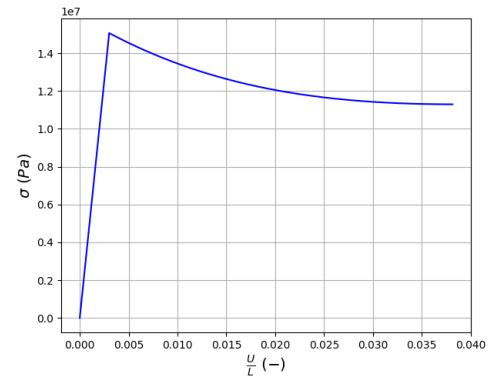


FIGURE 4.19 – Réponse contrainte déplacement du barreau : cas d'une interface avec discontinuité de la déformation volumique



saut à l'interface donnent :

$$\begin{cases} \llbracket \tau - \frac{\partial S}{\partial x} \rrbracket = 0 \\ S(x = 0^-) = S(x = 0^+) = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

Dans cette situation, on peut montrer que la solution dans le matériau élastique est nécessairement homogène. Le modèle de second gradient n'est donc pas sollicité dans la moitié $x < 0$ du barreau (gradients nuls).

Dans la moitié $x > 0$, une demi-bande de localisation se développe une fois le régime adoucissant du matériau élasto-plastique atteint (voir figure 4.18). La réponse contrainte-déplacement est présentée en figure 4.19. Les moitiés de profils de déformation volumique sont similaires à ceux obtenus dans le cas d'une double force nulle (chapitre 3).

4.3.2.2 Interface parfaite

Dans le cas d'une interface parfaite (continuité de la matière, comme s'il n'y avait pas d'interface), il y a continuité du déplacement et de la déformation volumique. Les conditions de saut en $x = 0$ s'écrivent alors :

CHAPITRE 4. CONDITIONS AUX LIMITES ET CONDITIONS D'INTERFACE DU MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

FIGURE 4.20 – Profil de déformation volumique dans le barreau : cas d'une interface parfaite. $a_1^g = 5.10^4 N$

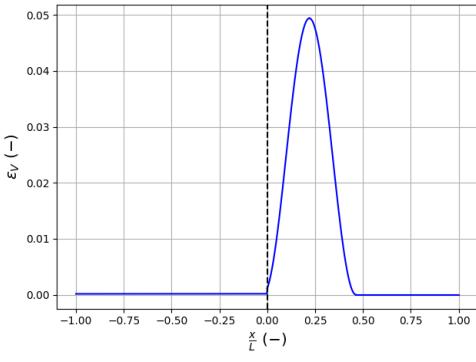
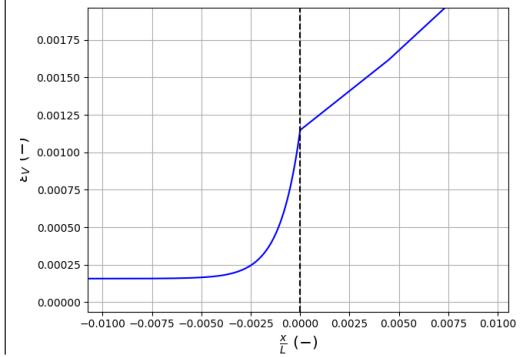


FIGURE 4.21 – Profil de déformation volumique dans le barreau : cas d'une interface parfaite. Zoom autour de l'interface. $a_1^g = 5.10^4 N$



$$\begin{cases} \llbracket \tau - \frac{\partial S}{\partial x} \rrbracket = 0 \\ \llbracket S \rrbracket = 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

Il y a donc une continuité de la double contrainte de dilatance S à l'interface. Pour autant, pour des valeurs distinctes de rigidité de second gradient a_1 de part et d'autre de l'interface, il n'y a pas continuité du gradient de la déformation volumique (voir par exemple figure 4.21) :

$$a_1^g \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial x}(0^-) = a_1^d \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial x}(0^+) \quad (4.33)$$

Dans le matériau élasto-plastique (à droite), une bande de localisation se développe une fois le régime plastique atteint (voir figure 4.20). Dans le matériau élastique, on constate l'apparition d'une couche limite au niveau de l'interface (voir figure 4.21) qui permet d'assurer la continuité entre une solution élastique non homogène et la solution localisée de l'autre côté de l'interface. La largeur de cette couche limite dépend de la valeur numérique du paramètre de rigidité de second gradient choisi pour ce matériau élastique.

Quand la valeur de a_1^g tend vers 0 (situation illustrée en figures 4.22 et 4.23), la solution obtenue tend vers le cas d'une discontinuité de la déformation volumique à l'interface. Côté matériau élastique, la solution tend vers une solution homogène : la couche limite tend vers 0. Côté matériau plastique on retrouve une solution avec une demi-bande de localisation et un gradient de déformation volumique nul en 0^+ .

FIGURE 4.22 – Profil de déformation volumique dans le barreau : cas d'une interface parfaite. $a_1^g = 5 N$

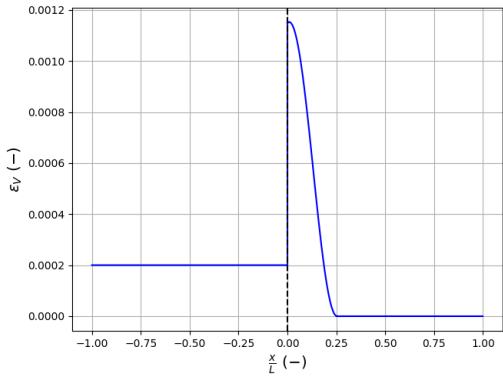
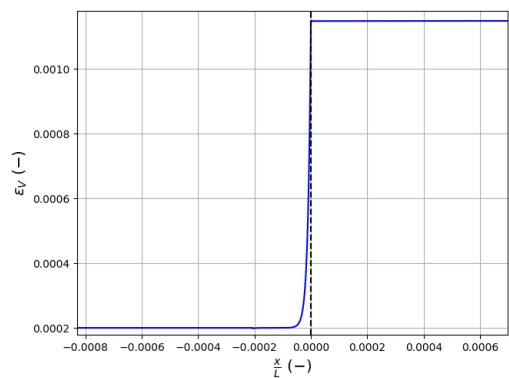


FIGURE 4.23 – Profil de déformation volumique dans le barreau : cas d'une interface parfaite. Zoom autour de l'interface. $a_1^g = 5 N$



4.3.2.3 Bilan

Dans le cadre de ce problème simplifié du barreau, nous avons étudié l'impact des hypothèses de continuité spécifiques au modèle de second gradient de dilatation sur la réponse de la structure et la forme des solutions obtenues.

Le cas d'une déformation volumique continue à l'interface a été étudié. On constate que cela conduit à un niveau de déformation particulièrement élevé dans le béton et au développement d'une bande de localisation quasiment complète dans la roche. Il semble cependant peu probable qu'une hypothèse aussi forte de continuité de la déformation entre ces deux matériaux soit réaliste.

Il semble donc plus raisonnable de supposer une discontinuité de la déformation volumique pour ce type d'interface. Cependant, nous avons vu qu'une bande de localisation qui se développerait le long de l'interface ne consisterait en réalité qu'en une demi-bande de localisation. Cette demi-bande de localisation consomme donc deux fois moins d'énergie qu'une bande de localisation qui se propagerait uniquement dans la roche, loin de l'interface. On peut effectivement s'attendre à ce qu'une interface roche béton vienne fragiliser la structure (voir par exemple (STAVROPOULOU, 2017) pour une étude expérimentale détaillée de l'interface argile-béton), mais ici ce type de conditions d'interface vient fragiliser numériquement la structure en divisant par deux l'énergie consommée par une fissure d'interface : la propagation d'une fissure le long de l'interface est favorisée. Ce facteur 2 est arbitraire, il serait donc souhaitable de proposer un modèle qui puisse rendre compte d'un comportement d'interface

FIGURE 4.24 – Profil de déformation volumique dans le barreau

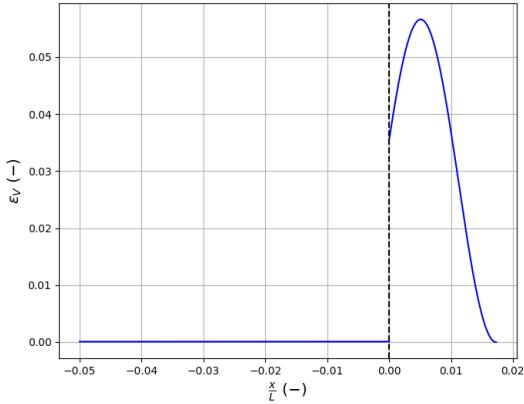
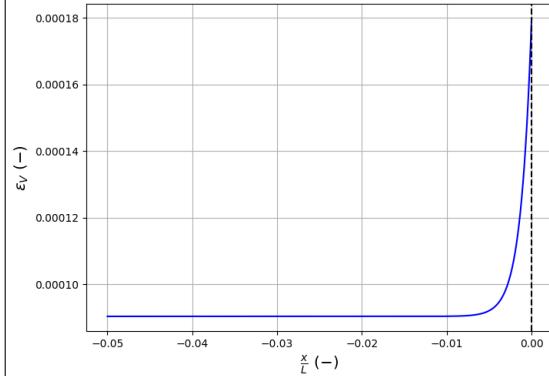


FIGURE 4.25 – Profil de déformation volumique dans le matériau élastique



différent.

4.3.3 Proposition d'un autre comportement d'interface

On s'intéresse ici au cas particulier d'une interface dotée d'une énergie d'interface dépendante du saut de déformation volumique. On suppose que cette énergie d'interface est caractérisée par une constante k et qu'elle est quadratique.

Les conditions de continuité à l'interface en $x = 0$ s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \llbracket \tau - \frac{\partial S}{\partial x} \rrbracket = 0 \\ S = k \llbracket \varepsilon_V \rrbracket \end{cases} \quad (4.34)$$

Ce type de comportement d'interface autorise donc une discontinuité de la déformation volumique, tout en ayant une double contrainte de dilatance (et donc un gradient de la déformation volumique) non nul à l'interface.

Côté matériau élastique ($x < 0$) la solution reste proche d'une solution homogène. Une couche limite autour de $x = 0$ est présente (voir figure 4.25). La largeur de cette couche limite dépend de la valeur du paramètre de rigidité de second gradient à gauche a_1^g . Côté matériau plastique ($x > 0$), une bande de localisation s'installe une fois le régime plastique adoucissant atteint (voir figure 4.24).

Dans le cas limite où la rigidité d'interface k tend vers 0 (figures 4.26 et 4.27), on retrouve la situation d'une interface avec discontinuité de la déformation volumique étudiée en partie 4.3.2. Côté matériau élastique, la solution tend vers une

CHAPITRE 4. CONDITIONS AUX LIMITES ET CONDITIONS D'INTERFACE DU MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

FIGURE 4.26 – Profil de déformation volumique dans le barreau. k tend vers 0

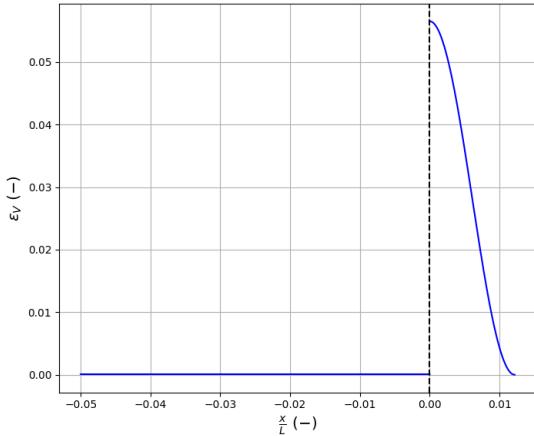
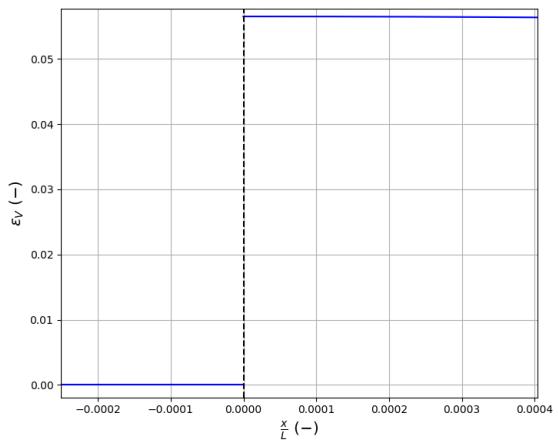


FIGURE 4.27 – Profil de déformation volumique dans le matériau élastique. Zoom sur l'interface. k tend vers 0



solution homogène. Côté matériau élasto-plastique, on retrouve une demi-bande de localisation.

Dans le cas limite où la rigidité d'interface k tend vers l'infini (figures 4.28 et 4.29), on retrouve la situation d'une interface parfaite où on impose la continuité de la déformation volumique à l'interface : une bande de localisation complète se développe dans le matériau élastoplastique.

Le choix d'une valeur numérique pour la rigidité d'interface k peut se faire sur des bases physiques, si ce comportement d'interface permet de modéliser un éventuel revêtement entre la roche et le béton dans le cadre de simulations numériques d'excavation de galerie. Mais de manière plus générale, ce paramètre k peut être choisi de manière à ne pas fragiliser numériquement cette interface roche-béton. Dans la sous-partie précédente, nous avions montré que dans le cas d'une discontinuité de déformation volumique à l'interface, une demi-bande de localisation se développait dans la roche. Cette bande de localisation consomme deux fois moins d'énergie qu'une bande de localisation qui se propagerait uniquement dans la roche. L'interface vient donc fragiliser la structure et la propagation d'une bande de localisation le long de l'interface est favorisée.

Avec ce comportement d'interface particulier, nous pourrions calibrer k de sorte à ce que l'énergie consommée par une bande de localisation qui se développerait le long d'interface soit identique à celle consommée par une bande de localisation qui se propagerait dans la roche. Cela a été fait en figure 4.30, où une valeur numérique

CHAPITRE 4. CONDITIONS AUX LIMITES ET CONDITIONS D'INTERFACE DU MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

FIGURE 4.28 – Profil de déformation volumique dans le barreau. k tend vers l'infini

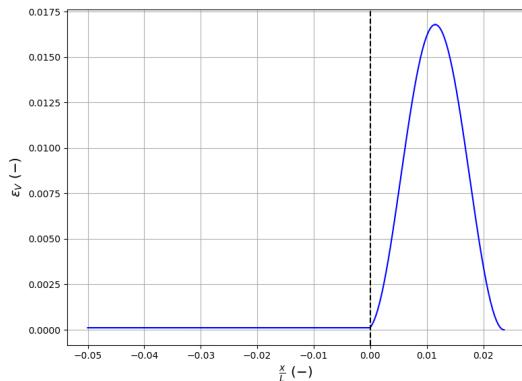
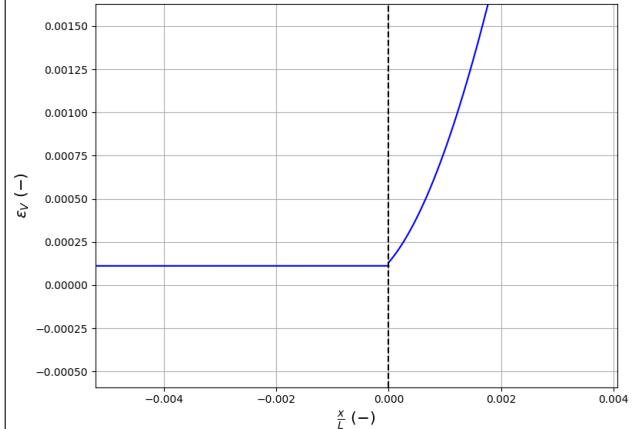


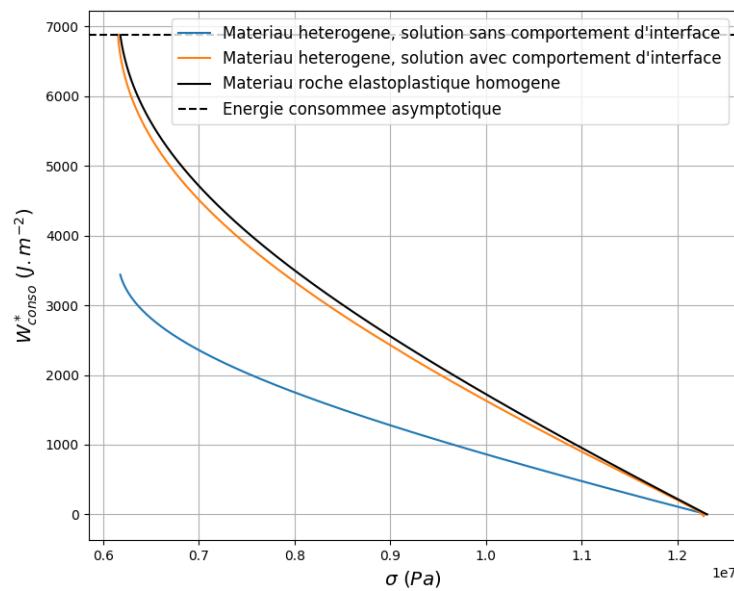
FIGURE 4.29 – Profil de déformation volumique dans le matériau élastique. Zoom sur l'interface. k tend vers l'infini



de k a été choisie par optimisation numérique de sorte à ce que ces deux énergies consommées ultimes soient égales.

CHAPITRE 4. CONDITIONS AUX LIMITES ET CONDITIONS D'INTERFACE
DU MODÈLE DE SECOND GRADIENT DE DILATATION

FIGURE 4.30 – Energie consommée par la bande de localisation. En noir, une bande de localisation qui se propagerait dans un matériau de type roche homogène (pas d'interface).



4.4 Bilan du chapitre

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à l'influence de la double force et de la condition aux limites d'ordre supérieur introduite dans le modèle de second gradient de dilatation. Dans la littérature des modèles de second gradient appliqués aux géomatériaux, cette double force est généralement prise nulle. De part la loi de comportement de second gradient, cela conduit à un gradient de déformation volumique nul aux bords.

A travers le problème du barreau, nous avons montré que cette double force introduisait une seconde longueur caractéristique dans le problème, et que cette longueur caractéristique était indépendante de la largeur de bande. Nous avons mis en évidence l'existence d'un paramètre adimensionné permettant de quantifier l'impact de la double force sur la forme du profil de déformation volumique dans la bande de localisation, et sur la réponse macroscopique du barreau. Caractériser expérimentalement le profil de déformation volumique dans la bande de localisation à partir d'échantillons expérimentaux permettrait donc d'identifier les conditions aux limites à appliquer pour les simulations numériques. Cependant, dans la mesure où nos calculs numériques visent simplement à reproduire des quantités macroscopiques de l'échantillon (et pas de quantités locales dans la bande de localisation), l'impact de ce changement de conditions aux limites serait finalement limité.

Dans un second temps, nous nous sommes intéressés aux conditions d'interface spécifiques au modèle de second gradient de dilatation. Ces conditions d'interface portent sur la continuité ou la discontinuité de la déformation volumique à l'interface entre deux matériaux aux propriétés différentes : deux matériaux élastoplastiques (modélisation d'une interface entre deux couches de roches aux propriétés différentes) ou matériau élastoplastique et matériau élastique (modélisation d'une interface béton-roche).

Dans les deux situations, l'hypothèse de la continuité de la déformation volumique à l'interface nous a paru être une hypothèse trop forte et peu réaliste d'un point de vue physique. Il est donc recommandé d'autoriser une discontinuité de cette déformation volumique (et donc de la double contrainte de dilatance) pour ce type d'interfaces.

Conclusion et perspectives

Le phénomène de localisation de la déformation dans une bande de faible épaisseur requiert le développement d'approches capables d'introduire une longueur interne dans le continuum. Le choix d'EDF R&D a porté sur le modèle de second gradient de dilatation pour la modélisation des roches. Dans cette thèse, nous avons donc mis en évidence un certain nombre de propriétés intéressantes de ce milieu continu enrichi, afin de conforter ce choix.

Dans un premier temps, nous avons apporté des modifications au modèle de second gradient de dilatation tel que présenté dans (FERNANDES, 2009). La nouvelle formulation mixte de l'élément fini associé, que nous avons appelée formulation quasi-incompressible, est mieux adaptée aux lois de comportement non associées, où la déformation volumique évolue n'évolue quasiment plus dans le régime plastique parfait. Cette formulation numérique présente aussi l'avantage de ne pas nécessiter de terme d'augmentation. La robustesse des calculs numériques avec ce modèle s'en trouve renforcée.

Une nouvelle implémentation de la version non associée de la loi de Drucker-Prager, ainsi que l'utilisation d'une viscosité numérique, ont permis de grandement améliorer la convergence des calculs.

Nous avons aussi montré que le modèle de second gradient de dilatation était adapté à ce type de loi de comportement et permettait notamment d'éviter un élargissement incontrôlable de la bande de localisation dans le régime ultime du comportement.

Dans un second temps, nous nous sommes intéressés à l'influence de la longueur interne introduite par le modèle de second gradient de dilatation.

A l'aide de la solution analytique d'un problème simplifié, nous avons explicité le lien entre paramètres matériaux, rigidité de second gradient et largeur de bande de localisation. Toujours dans le cadre de ce problème simplifié, nous avons montré qu'il était possible de choisir cette largeur de bande comme un paramètre numérique. Moyennant une modification de la pente de l'écrouissage post-pic, les quantités d'intérêt macroscopiques (réponse contrainte-déformation moyenne, déformation

volumique moyenne, énergie consommée) sont effectivement indépendantes de cette largeur de bande. De la même manière, l'énergie consommée par la bande de localisation peut être rendue invariante à travers un changement d'échelle. Ainsi, le paramètre de déformation de la loi de comportement de premier gradient (qui pilote la pente de l'écrouissement) devient aussi un paramètre numérique, au même titre que la largeur de bande.

Ces résultats ont ensuite été étendus aux simulations numériques d'essais biaxiaux. Nous avons montré que l'expression analytique de la largeur de bande obtenue pour le problème simplifié restait valable pour les essais biaxiaux. Cette expression a ensuite été utilisée afin de faciliter l'identification d'un jeu de paramètres matériaux pour une largeur de bande donnée à partir de résultats expérimentaux d'essais biaxiaux. Nous avons ensuite montré qu'il était possible de s'appuyer sur le critère de Rice pour distinguer les régimes homogène (ou diffus) et localisé afin de retrouver dans le cas d'essais biaxiaux les résultats d'invariance précédemment évoqués.

Enfin, dans le cadre du problème simplifié du barreau, nous avons étudié l'influence de la double force et de la condition aux limites d'ordre supérieure introduite dans le modèle de second gradient de dilatation. Nous avons montré que cette double force, usuellement choisie nulle, permet d'introduire une seconde longueur caractéristique (indépendante de la largeur de bande) dans le problème.

L'étude de cette double force a permis de montrer qu'elle impactait aussi bien les grandeurs locales (profil de déformation dans la bande par exemple) que les grandeurs macroscopiques (réponse contrainte déformation moyenne par exemple). Nous avons montré que le choix de conditions aux limites naturelles ($P = 0$) usuellement fait dans la littérature pouvait impacter significativement la réponse de la structure. Cependant, en l'absence d'observations expérimentales permettant de caractériser cette double force, cette hypothèse simplificatrice reste recommandée.

Nous avons aussi montré que le modèle de second gradient de dilatation pouvait conduire à une sous-estimation de l'énergie consommée par la bande de localisation si celle-ci se propage le long d'une interface. Nous avons ensuite suggéré une modification du comportement de l'interface afin de ne pas favoriser numériquement la propagation de telles bandes de localisation.

Avant de pouvoir être pleinement appliqués à des calculs industriels, les résultats de cette thèse doivent encore être complétés et approfondis.

Notamment, les résultats d'invariance obtenus par simulation numériques sur essai biaxial doivent encore être étendus à des longueurs internes compatibles avec la réalité industrielle et les capacités de calcul actuelles. Actuellement, ce changement d'échelle a été validé pour un facteur 2, là où nous cherchions à atteindre un facteur 10. Les techniques d'aide à la convergence utilisées pour ce type de calcul doivent

donc être mises à profit afin d'y parvenir. Il sera alors possible de tester la méthode proposée sur des calculs industriels de type excavation de gallerie.

Par ailleurs, les résultats présentés dans la thèse ont été obtenus avec une loi de comportement de type Drucker Prager. Cette loi de comportement, relativement simple, reste représentative du comportement général d'un géomatériaux. Mais les lois de comportement usuellement utilisées à EDF R&D pour les calculs d'excavation sont bien plus complexes (voir par exemple la loi LKR (RAUDE, 2015)). Obtenir un résultat analytique avec une telle loi de comportement nous paraît hors d'atteinte. Cependant, il nous semble possible de retrouver les principales conclusions de la thèse concernant la longueur interne du modèle de second gradient à partir de simulations numériques d'essais biaxiaux.

Enfin, le modèle de second gradient de dilatation tel que présenté dans cette thèse et disponible dans *Code_Aster* se limite aux petites déformations. Or, dans une bande de localisation, les niveaux de déformations atteints peuvent être relativement élevés et remettre en question cette hypothèse. Il serait donc nécessaire de développer un modèle de second gradient de dilatation pour les grandes déformations. A ce titre, une ouverture sur une adaptation du modèle au formalisme des grandes déformations logarithmiques est présentée en annexe 3.

Annexe 1 : Loi de Drucker Prager non associée

Dans cette annexe, on décrit les développements théoriques qui ont conduit à l'implémentation de la version non associée de la loi de Drucker Prager.

Equations du problème

Cette loi de comportement est décrite par une fonction de charge F telle que :

$$F(\underline{\sigma}, \kappa) = \sigma_{eq} + atr(\underline{\sigma}) - R(\kappa) \quad (4.35)$$

Le potentiel d'écoulement s'écrit quant à lui :

$$G(\underline{\sigma}, \kappa) = \sigma_{eq} + b(\kappa)tr(\underline{\sigma}) \quad (4.36)$$

On rappelle la définition de κ , la déformation déformation plastique déviatorique cumulée :

$$\dot{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\underline{\varepsilon}}_p^D : \dot{\underline{\varepsilon}}_p^D} \quad (4.37)$$

Les calculs sont menés dans un cas relativement général, pour n'importe quelles fonctions $R(\kappa)$ et $b(\kappa)$ décroissantes.

La relation contrainte déformation s'écrit :

$$\underline{\sigma} = \mathbb{E} : (\underline{\varepsilon}_e - \underline{\varepsilon}_p) \quad (4.38)$$

Le taux de déformation plastique s'écrit :

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_p = \Lambda \underline{\underline{M}}(\underline{\sigma}) \text{ avec } \Lambda \geq 0, F \geq 0, \Lambda F = 0 \quad (4.39)$$

Λ désigne ici le multiplicateur plastique et $\underline{\underline{M}}(\underline{\sigma})$ la direction d'écoulement. Cette direction d'écoulement appartient au sous-différentiel de $\underline{\sigma}$, appelé $N(\underline{\sigma})$. Ce sous-différentiel est défini de la manière suivante :

$$N(\underline{\sigma}) = \left\{ \underline{M} ; \forall \underline{\sigma}' \text{ tel que } G(\underline{\sigma}') \leq G(\underline{\sigma}), (\underline{\sigma}' - \underline{\sigma}) : \underline{M} \leq 0 \right\} \quad (4.40)$$

Interprétation de la direction d'écoulement

Dans le cas où le potentiel d'écoulement est dérivable en $\underline{\sigma}$ (c'est à dire $\sigma_{eq} \neq 0$), la direction d'écoulement s'écrit :

$$\underline{M} = \underline{\nabla G}(\sigma) = \frac{3}{2} \frac{\underline{\sigma}^D}{\sigma_{eq}} + b \underline{I} \quad (4.41)$$

Dans ce cas, on peut aussi montrer que $\Lambda = \dot{\kappa}$:

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_p = \Lambda \left(\frac{3}{2} \frac{\underline{\sigma}^D}{\sigma_{eq}} + b \underline{I} \right) \quad (4.42)$$

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_p^D = \Lambda \frac{3}{2} \frac{\underline{\sigma}^D}{\sigma_{eq}} \quad (4.43)$$

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_p^D : \dot{\underline{\varepsilon}}_p^D = \frac{3}{2} \Lambda^2 \quad (4.44)$$

$$\dot{\kappa} = \Lambda \quad (4.45)$$

Dans le cas où le potentiel d'écoulement n'est pas dérivable en $\underline{\sigma}$ (c'est à dire $\sigma_{eq} = 0$), $\underline{M} \in N(\underline{\sigma})$ si et seulement si :

$$\max_{\underline{\sigma}'} (\underline{\sigma}' - \underline{\sigma}) : \underline{M} \leq 0 \quad (4.46)$$

De là, en utilisant le fait que $G(\underline{\sigma}') \leq G(\underline{\sigma})$, on aboutit à :

$$2b(\kappa)M_{eq} - tr(\underline{M}) \leq 0 \quad (4.47)$$

Intégration implicite du comportement

On définit le prédicteur élastique à l'incrément $n+1$:

$$\underline{\sigma}^e \stackrel{def}{=} \mathbb{E} : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_p^n) \quad (4.48)$$

Cas élastique

Si $F(\underline{\underline{\sigma}}^e, \kappa^n) \leq 0$, alors $\Lambda = 0$ est une solution.

On a $\Delta\varepsilon_p = \varepsilon_p^{n+1} - \varepsilon_p^n = 0$ et $\Delta\kappa = \kappa^{n+1} - \kappa^n = 0$

Cas plastique singulier

On se place dans le cas où $\sigma_{eq} = 0$ (cas singulier) et $F = 0$ (cas plastique).

On utilise $\sigma_{eq} = 0$:

$$\underline{\underline{\sigma}}^D = 0 \Rightarrow 2\mu(\underline{\underline{\varepsilon}}^D - \underline{\underline{\varepsilon}}_p^D) = 0 \quad (4.49)$$

On a donc $\underline{\underline{\varepsilon}}^D = \underline{\underline{\varepsilon}}_p^D$. D'où $\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_p = \frac{1}{2\mu}\underline{\underline{\sigma}}_D^e$. On a finalement :

$$\Delta\kappa = \sqrt{\frac{1}{3\mu}\underline{\underline{\sigma}}_D^e : \underline{\underline{\sigma}}_D^e} \quad (4.50)$$

On utilise $F = 0$:

$$tr(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{R(\kappa)}{a} \quad (4.51)$$

Or, on a $tr(\underline{\underline{\sigma}}) = tr(\underline{\underline{\sigma}}^e) - 3K\Delta tr(\underline{\underline{\varepsilon}}_p)$. D'où :

$$\Delta tr(\underline{\underline{\varepsilon}}_p) = \frac{1}{3K}(tr(\underline{\underline{\sigma}}^e) - \frac{R(\kappa)}{a}) \quad (4.52)$$

On connaît donc les incrément de déformations plastiques volumique et déviatoire. Au vu de la condition obtenue précédemment pour la direction d'écoulement du cas singulier, cette solution est valable si :

$$2b(\kappa)\Delta\varepsilon_{eq} - \Delta tr(\underline{\underline{\varepsilon}}_p^p) \leq 0 \quad (4.53)$$

$$\frac{b(\kappa)\sigma_{eq}^e}{3\mu} \leq \frac{1}{9K}(tr(\underline{\underline{\sigma}}^e) - \frac{R(\kappa)}{a}) \quad (4.54)$$

Cas plastique régulier

On se place dans le cas où $\sigma_{eq} \neq 0$ (cas régulier) et $F = 0$ (cas plastique).

On a :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^e - K\Delta tr(\underline{\underline{\varepsilon}}_p)\underline{\underline{I}} - 2\mu\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_p^D \quad (4.55)$$

Au vu de la direction d'écoulement dans le cas régulier, on a :

$$\Delta tr(\underline{\underline{\varepsilon}}_p) = 3\Lambda b(\kappa) \quad (4.56)$$

$$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_p^D = \frac{3}{2} \Lambda \frac{\underline{\underline{\sigma}}^D}{\sigma_{eq}} \quad (4.57)$$

On peut donc exprimer les composantes sphérique et déviatorique de σ en fonction du prédicteur élastique et du multiplicateur plastique :

$$tr(\underline{\underline{\sigma}}) = tr(\underline{\underline{\sigma}}^e) - 3Kb\Lambda \quad (4.58)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^D = \underline{\underline{\sigma}}_D^e - 3\mu \frac{\underline{\underline{\sigma}}^D}{\sigma_{eq}} \Lambda \quad (4.59)$$

En particulier, cette dernière équation permet d'exprimer σ_{eq} :

$$\sigma_{eq} = \sigma_{eq}^e - 3\mu\Lambda \quad (4.60)$$

Or, on sait que $\Delta\kappa = \Lambda$. En insérant ces expressions dans l'équation $F = 0$, il vient :

$$\sigma_{eq}^e - 3\mu\Lambda + 3a (tr(\underline{\underline{\sigma}}^e) - 9K\Lambda b(\kappa^n + \Lambda)) - R(\kappa^n + \Lambda) = 0 \quad (4.61)$$

La résolution de cette dernière équation permet de déterminer l'inconnue Λ , et donc de déterminer toutes les inconnues du problème incrémental.

Par ailleurs, on peut montrer que le problème incrémental admet une unique solution si la fonction $f(\Lambda) \stackrel{def}{=} \sigma_{eq}^e - 3\mu\Lambda + 3a (tr(\underline{\underline{\sigma}}^e) - 9K\Lambda b(\kappa^n + \Lambda)) - R(\kappa^n + \Lambda)$ est décroissante. Dans l'intégration numérique de la loi de comportement, on s'assure que cette condition est vérifiée à chaque incrément. On s'assure ainsi de la robustesse de la loi de comportement.

Annexe 2 : Résolution analytique du problème du barreau, conditions aux limites et d'interfaces

Dans cette annexe, on présente la résolution du problème simplifié du barreau dans deux situations :

- lorsqu'on étudie l'influence des conditions aux limites d'ordre supérieur avec $P > 0$.
- lorsqu'on étudie différentes conditions d'interface entre deux matériaux différents en $x = 0$.

La méthode de résolution présentée ici permet d'aboutir aux résultats présentés au chapitre 4. Le détail des calculs n'était pas présenté dans ce chapitre 4 par souci de concision.

Conditions aux limites : $P > 0$

Afin de mettre en évidence l'impact de cette condition aux limites d'ordre supérieur, la forme de la solution recherchée diffère de celle étudiée au chapitre 3. Dans le chapitre 3, la bande de localisation était centrée autour de $x = 0$. Ici, nous chercherons la solution sous la forme de deux demi-bandes de localisation situées chacune à l'extrémité du barreau. Afin de garder une certaine cohérence avec les notations du chapitre précédent, le barreau sera ici centré en $x = L$, et nous étudierons uniquement la moitié $0 < x < L$ pour des raisons de symétrie.

Concernant le comportement, les hypothèses sont identiques à celles de la partie 4.2.

Cependant, à la différence de la partie 4.2, où $P < 0$, on cherche ici une solution avec $P > 0$. La loi de comportement de second gradient ainsi que les expressions des conditions aux limites du modèle de second gradient permettent d'écrire :

$$P = 4a_1\varepsilon_V^{0'} \quad (4.62)$$

FIGURE 4.31 – Exemple de profil de déformation volumique dans la bande de localisation dans le cas $P > 0$

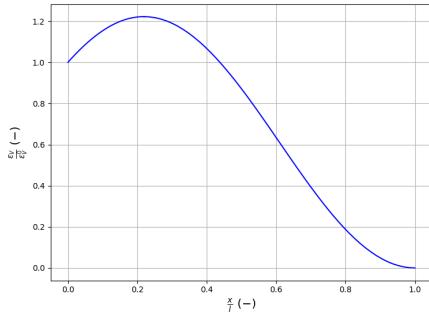
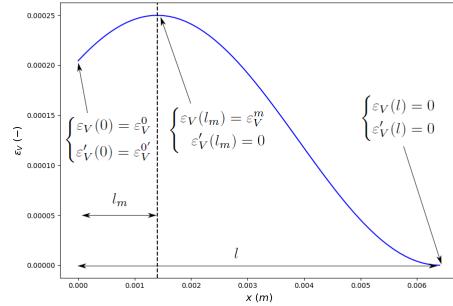


FIGURE 4.32 – Exemple de profil de déformation volumique dans la bande de localisation dans le cas $P > 0$. Conditions aux limites sur la déformation volumique dans chaque branche de solution.



Le gradient de la déformation volumique est donc positif en $x = 0$. On cherchera donc une solution sous la forme de celle présentée en figure 4.31.

Tout comme au chapitre 3, l'équation d'équilibre peut se mettre sous la forme suivante :

$$\tau(\varepsilon_V) - 4a_1 \varepsilon_V'' = \sigma \text{ avec } \tau(\varepsilon_V) = \frac{1}{1+a} R(B^{-1}(\frac{1}{3}\varepsilon_V)) \quad (4.63)$$

Les conditions aux limites en déformation volumique aux extrémités de la bande de localisation s'écrivent quant à elles (comme en partie 4.2) :

$$\begin{cases} \varepsilon_V(0) = \varepsilon_V^0 \\ \varepsilon'_V(0) = \varepsilon_V^{0'} \end{cases} \quad (4.64)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_V(l) = 0 \\ \varepsilon'_V(l) = 0 \end{cases} \quad (4.65)$$

La méthode de résolution reste très similaire à celles du chapitre 3 et de la partie 4.2. Tout comme au chapitre 3, il est possible d'exprimer le gradient de la déformation volumique de la manière suivante :

$$\varepsilon_V'^2 = \frac{1}{2a_1} \left(T(\varepsilon_V) - T(\varepsilon_V^0) \frac{\varepsilon_V}{\varepsilon_V^0} + 2a_1 \varepsilon_V^{0'2} \frac{\varepsilon_V}{\varepsilon_V^0} \right) \quad (4.66)$$

Au chapitre 3 et en partie 4.2, nous ne conservions que la solution $\varepsilon'_V < 0$, au vu de la forme des solutions que nous recherchions. Ici, il est nécessaire de prendre en

compte les deux branches de solutions. En effet, en figure 4.32, on constate que pour $x \in [0, l_m]$, $\varepsilon'_V > 0$ et pour $x \in [l_m, l]$, on a $\varepsilon'_V < 0$.

Pour $x \in [0, l_m]$, la forme des solutions obtenues est similaire à celle présentée en partie 4.2. On est alors capable d'exprimer ε_V^m en fonction de ε_V^0 . Pour $x \in [l_m, l]$, la forme des solutions est identique à celle obtenue au chapitre 3. On est alors capable de calculer la largeur de bande l ainsi que toutes les quantités pertinentes du problème.

Conditions d'interface

On présente ici brièvement la méthode de résolution utilisée dans le cas où on impose une condition d'interface parfaite entre deux matériaux différents. Cette méthode est valable qu'il s'agisse d'une interface entre un matériau élastique et un matériau élastoplastique ou entre deux matériaux élastoplastiques.

On se place ici dans la situation de l'interface entre deux matériaux élastoplastiques. Les conditions de saut à l'interface s'écrivent :

$$\begin{cases} \llbracket \tau - \frac{\partial S}{\partial x} \rrbracket = 0 \\ \llbracket S \rrbracket = 0 \end{cases} \quad (4.67)$$

A partir des relations de comportements (1^{er} et 2^{nd} gradients), ces relations peuvent se mettre sous la forme suivante (voir partie 4.2) :

$$\begin{cases} \frac{T^g(\varepsilon_V^0) - 2a_1^g \varepsilon_V^{g'2}}{\varepsilon_V^0} - \frac{T^d(\varepsilon_V^0) - 2a_1^d \varepsilon_V^{d'2}}{\varepsilon_V^0} = 0 \\ 4a_1^g \varepsilon_V^{g'} - 4a_1^d \varepsilon_V^{d'} = 0 \end{cases} \quad (4.68)$$

Ces deux équations permettent d'exprimer les deux gradients de déformations volumiques de part et d'autres de l'interface en fonction de la déformation volumique à l'interface ε_V^0 .

$$\begin{cases} \varepsilon_V^{d'} = \pm \sqrt{\frac{T^d(\varepsilon_V^0) - T^g(\varepsilon_V^0)}{2a_1^d \left(1 - \frac{a_1^d}{a_1^g}\right)}} \\ \varepsilon_V^{d'} = \frac{a_1^d}{a_1^g} \varepsilon_V^{g'} \end{cases} \quad (4.69)$$

On voit que ces solutions ne peuvent exister que si les paramètres matériaux sont tels que ($\forall \varepsilon_V^0$) :

$$\begin{cases} T^d(\varepsilon_V^0) \leq T^g(\varepsilon_V^0) \\ a_1^d \geq a_1^g \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} T^d(\varepsilon_V^0) \geq T^g(\varepsilon_V^0) \\ a_1^d \leq a_1^g \end{cases} \quad (4.70)$$

Une fois les gradients de déformations volumiques à l'interface connus en fonction de la déformation volumique à l'interface, on se retrouve dans une situation similaire à celles d. On peut construire les branches de solutions de part et d'autre de l'interface à l'aide des solutions obtenues dans les cas $P > 0$ et $P < 0$ selon le signe du gradient à l'interface (et par symétrie).

Annexe 3 : Modèle de second gradient de dilatation en grandes déformations logarithmiques

Présentation du modèle en grandes déformations logarithmiques

Il s'agit d'adapter le modèle de second gradient de dilatation au formalisme des grandes déformations logarithmiques. On présente brièvement ce formalisme tel que présenté dans (MIEHE, APEL & LAMBRECHT, 2002).

Dans ce formalisme, le tenseur de déformations logarithmiques, appelé $\underline{\underline{E}}$, est défini de la manière suivante :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \ln(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}) = \frac{1}{2} \ln(\underline{\underline{C}}) \quad (4.71)$$

Ici, le tenseur $\underline{\underline{F}}$ est le gradient de la transformation et $\underline{\underline{C}}$ est le tenseur des déformations de Cauchy-Green. Au tenseur des déformations logarithmiques E , on associe son dual, le tenseur des contraintes $\underline{\underline{T}}$, défini de la manière suivante (pour tout $\dot{\underline{\underline{F}}}$) :

$$\underline{\underline{T}} : \dot{\underline{\underline{E}}} = \underline{\underline{S}} : \frac{1}{2} \dot{\underline{\underline{C}}} \quad (4.72)$$

Ici, le tenseur $\underline{\underline{S}}$ est le second tenseur de Piola-Kirchoff.

Cette définition logarithmique du tenseur des déformations présente l'avantage de conserver une relation additive entre déformation totale, déformation élastique, et déformation plastique. En effet, on a :

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}^e + \underline{\underline{E}}^p \quad (4.73)$$

Ici, $\underline{\underline{E}}^e$ représente la déformation logarithmique élastique, et $\underline{\underline{E}}^p$ la déformation logarithmique plastique. Pour plus de détails concernant ce formalisme de grandes

déformations et son implémentation dans *Code_Aster*, le lecteur est invité à se référer à (ABBAS, 2016). Cette formulation présente l'avantage de ne pas nécessiter de développements spécifiques aux grandes déformations pour l'implémentation d'une loi de comportement.

Nous souhaitons ici adapter le modèle de second gradient de dilatation à ce formalisme de grandes déformations logarithmiques. En grandes déformations, la variation de volume J est définie de la manière suivante :

$$J = \det(\underline{\underline{F}}) \quad (4.74)$$

En grandes déformations logarithmiques, la déformation volumique $\text{tr}(\underline{\underline{E}})$ s'écrit :

$$\text{tr}(\underline{\underline{E}}) = \ln(J) \quad (4.75)$$

Nous proposons donc d'adapter le modèle de second gradient de dilatation de sorte à faire intervenir, non pas le gradient de la déformation volumique linéarisé ε_V , mais le gradient de la déformation volumique logarithmique ($\text{tr}(\underline{\underline{E}}) = \ln(J)$). Tout comme en petites déformations, c'est une formulation relâchée qui est utilisée : cette déformation volumique logarithmique est dédoublée par une variable θ et l'égalité entre θ et $\ln(J)$ est imposée par le biais d'un multiplicateur de Lagrange λ .

Par ailleurs, tout comme en petites déformations, on propose une formulation quasi-incompressible du modèle, où la variable θ intervient dans le calcul du tenseur relâché des déformations logarithmique pour l'énergie libre de premier gradient.

Le Lagrangien du problème s'écrit alors de la manière suivante (en 2D) :

$$L(\underline{\underline{E}}, \theta, \lambda) = \int_{\Omega} \Phi(\underline{\underline{E}}^D, \theta) + \frac{3}{2} a_1 \nabla \theta^2 + \lambda(\ln J - \theta) \, d\Omega \quad (4.76)$$

Ici, Φ représente l'énergie libre relâchée de premier gradient. Le terme en $\nabla \theta^2$ représente l'énergie de second gradient. Le terme $\lambda(\ln J - \theta)$ permet d'imposer l'égalité entre θ et $\ln(J)$.

Cette formulation en grandes déformations du modèle de second gradient de dilatation a été implémentée dans *Code_Aster*. Dans la suite de cette annexe, nous illustrerons quelques résultats obtenus avec ce modèle.

Application : loi de comportement de Drucker Prager associée

On illustre ici le modèle de second gradient de dilatation en grandes déformations logarithmiques dans le cas où le comportement de premier gradient est représenté

FIGURE 4.33 – Réponse contrainte-déformation moyenne pour un essai biaxial localisé en petites et grandes déformations (loi associée)

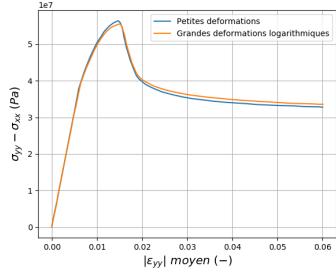
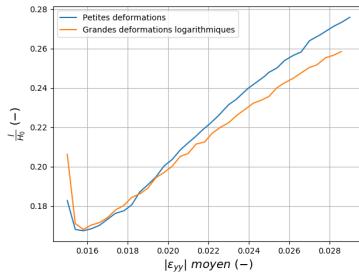


FIGURE 4.34 – Evolution de la largeur de bande de localisation au cours du chargement en petites et grandes déformations (loi associée)



par une loi de type Drucker Prager associée (voir partie 2.1.2.1). On compare les résultats obtenus pour un essai biaxial numérique dans le cas d'un formalisme de petites déformations et ceux obtenus pour le formalisme en grandes déformations.

Les réponses contrainte-déformation moyennes des échantillons sont présentées en figure 4.33. On constate qu'on obtient des réponses globalement très similaires, même si le niveau de déformation atteint dans la bande de localisation (environ 50%, voir figures 4.35 et 4.36) dépasse très largement le seuil usuel de petites déformations (5%).

En figures 4.35 et 4.36, on compare les profils de déformation plastique dévia-torique cumulée (variable d'écrouissage) pour les deux formalismes. Ces profils sont obtenus à la fin du chargement de la figure 4.33 et sont représentés sur la configuration initiale. La loi de comportement étant associée et la déformation volumique non bornée, la bande de localisation s'élargit de manière incontrôlée dans les deux cas (voir figure 4.34 et chapitre 2 pour plus de détails à ce sujet). On constate cependant que l'angle de la bande de localisation n'est pas tout à fait le même en petites et grandes déformations.

Application : loi de comportement de Drucker Prager non associée

On illustre ici le modèle de second gradient de dilatation en grandes déformations logarithmiques dans le cas où le comportement de premier gradient est représenté par une loi de type Drucker Prager non associée (voir partie 2.1.2.1).

FIGURE 4.35 – Profil de déformation plastique déviatorique cumulée à la fin du chargement : petites déformations

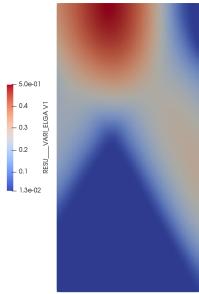


FIGURE 4.37 – Réponse contrainte-déformation moyenne pour un essai biaxial localisé grandes déformations (loi non associée)

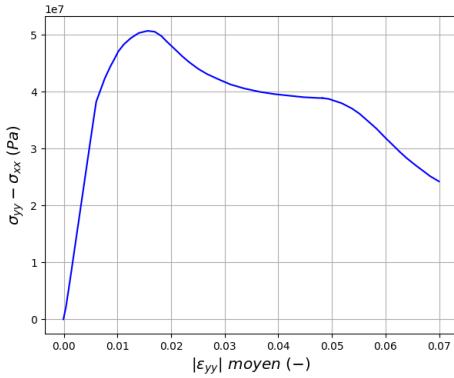


FIGURE 4.36 – Profil de déformation plastique déviatorique cumulée à la fin du chargement : grandes déformations logarithmiques

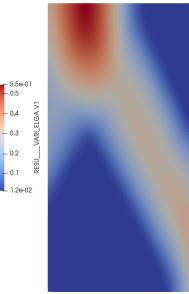
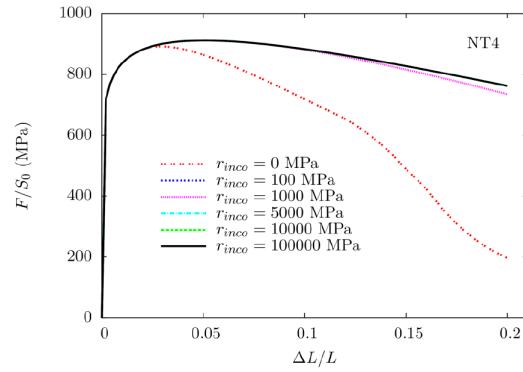


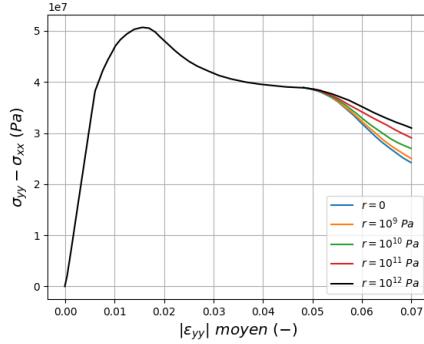
FIGURE 4.38 – Réponse contrainte - élongation d'éprouvettes en acier modélisées avec la loi de comportement GTN non locale. Source : (CHEN, 2019).



Un exemple de réponse contrainte-déformation moyennes d'un essai biaxial numérique non homogène est présenté en figure 4.37. Dans le régime plastique ultime (quasi-incompressible), on constate une perte de rigidité et une chute brutale de la contrainte.

(CHEN, 2019) observe par exemple un phénomène identique avec un modèle non local en grandes déformations logarithmiques et une formulation mixte similaire à celle utilisée ici pour le traitement de l'incompressibilité. Il s'agit de simulation numériques d'essais sur des éprouvettes en acier (comportement plastique incompressible) : on constate une perte de rigidité à l'initiation de la localisation (voir figure 4.38, courbe $r_{inco} = 0 \text{ MPa}$). (CHEN, 2019) explique cette perte de rigidité par un mauvais traitement numérique de l'incompressibilité.

FIGURE 4.39 – Réponse contrainte-déformation moyenne pour un essai biaxial localisé grandes déformations (loi non associée) pour plusieurs valeurs du coefficient de pénalisation



Dans le cadre de l'élasticité incompressible en grandes déformations, (AURICCHIO et al., 2013) montre que les formulations mixtes couramment utilisées en petites déformations pour les matériaux quasi-incompressibles ne sont pas toujours adaptées lorsqu'il s'agit de traiter des problèmes en grandes déformations.

(CHEN, 2019) observe qu'ajouter un terme d'augmentation (coefficient de pénalisation r_{inco}) dans les formulations mixtes permet de régler le problème de perte de rigidité (voir figure 4.38). Ce coefficient ne doit cependant pas être trop élevé, sous peine de rencontrer de nouveaux problèmes de verrouillage volumique.

Pour le modèle de second gradient de dilation, nous avons donc proposé de rajouter ce terme d'augmentation (qui n'était pas nécessaire en petites déformations, comme nous l'avions montré au chapitre 2). Le Lagrangien augmenté du problème s'écrit alors de la manière suivante :

$$L(\underline{\underline{E}}, \theta, \lambda) = \int_{\Omega} \Phi(\underline{\underline{E}}^D, \theta) + \frac{3}{2} a_1 \nabla \theta^2 + \lambda (\ln(J) - \theta) + \frac{r}{2} (\ln(J) - \theta)^2 \, d\Omega \quad (4.77)$$

Ici, r est le coefficient de pénalisation. Les réponses contraintes-déformations moyennes obtenues pour plusieurs valeurs de ce coefficient r sont présentées en figure 4.39.

On constate que l'ajout du terme d'augmentation a effectivement un effet sur la perte de rigidité, mais ne permet pas de résoudre totalement le problème. Il n'a par ailleurs pas été possible d'utiliser des coefficients de pénalisation plus élevés (conditionnement de la matrice de rigidité trop mauvais).

Références

- ABBAS, M. (2014). « Eléments finis traitant de la quasi-incompressibilité [R03.06.08] ». In : *Documentation Code Aster*.
- (2016). « Modèle de grandes déformations GDEF LOG [R05.03.24] ». In : *Documentation Code Aster*.
- ABRAMOWITZ, M. et IA. STEGUN (1964). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. T. 55. US Government printing office.
- AIFANTIS, EC. (1984). « On the Microstructural Origin of Certain Inelastic Models ». In : *Journal of Engineering Materials and Technology* 106.4, p. 326-330.
- AL-AKHRASS, D. (2014). « Méthodes éléments finis mixtes robustes pour gérer l'incompressibilité en grandes déformations dans un cadre industriel ». Thèse de doct. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01077894>.
- ARGAUD, JP. (2021). « ADAO, a module for Data Assimilation and Optimization ». In : <http://www.salome-platform.org/>.
- ASKES, H., J. PAMIN et R. de BORST (2000). « Dispersion analysis and element-free Galerkin solutions of second-and fourth-order gradient-enhanced damage models ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 49.6, p. 811-832.
- AURICCHIO, F., LB. DA VEIGA, C. LOVADINA, A. REALI, RL. TAYLOR et P. WRIGGERS (2013). « Approximation of incompressible large deformation elastic problems : some unresolved issues ». In : *Computational Mechanics* 52.5, p. 1153-1167.
- BADEL, PB. (2001). « Contributions à la simulation numérique de structures en béton armé ». Thèse de doct. Paris 6.
- BARCHIESI, E., SR. EUGSTER, L. PLACIDI et F. DELL'ISOLA (2019). « Pantographic beam : a complete second gradient 1D-continuum in plane ». In : *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 70.5, p. 1-24.
- BARENBLATT, GI. (1962). « The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture ». In : *Advances in applied mechanics*. T. 7. Elsevier, p. 55-129.

RÉFÉRENCES

- BATOZ, JL. et G. DHATT (1979). « Incremental displacement algorithms for nonlinear problems ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14.8, p. 1262-1267.
- BAUDIN, M., A. DUTFOY, B. IOOSS et AL. POPELIN (2015). « Open TURNS : An industrial software for uncertainty quantification in simulation ». In : *arXiv preprint arXiv :1501.05242*.
- BAŽANT, ZP. (2002). « Concrete fracture models : testing and practice ». In : *Engineering fracture mechanics* 69.2, p. 165-205.
- BÉSUELLE, P. et R. CHAMBON (2006). « Modeling the post-localization regime with local second gradient models : non-uniqueness of solutions and nonpersistent shear bands ». In : *Modern Trends in Geomechanics*. Springer, p. 209-221.
- BÉSUELLE, P., R. CHAMBON et F. COLLIN (2006). « Switching deformation modes in post-localization solutions with a quasibrittle material ». In : *Journal of Mechanics of materials and structures* 1.7, p. 1115-1134.
- BÉSUELLE, P. et JW. RUDNICKI (2004). « Localization : shear bands and compaction bands ». In : *INTERNATIONAL GEOPHYSICS SERIES*. 89, p. 219-322.
- BOFFI, D., F. BREZZI et M. FORTIN (2013). *Mixed finite element methods and applications*. T. 44. Springer.
- BOURDIN, B., GA. FRANCFORST et JJ. MARIGO (2008). « The variational approach to fracture ». In : *Journal of elasticity* 91.1-3, p. 5-148.
- BRINKGREVE, R. et Bastiaan J. (1996). « Geomaterial models and numerical analysis of softening. » In :
- CALVETTI, F., G. COMBE et J. LANIER (1997). « Experimental micromechanical analysis of a 2D granular material : relation between structure evolution and loading path ». In : *Mechanics of Cohesive-frictional Materials : An International Journal on Experiments, Modelling and Computation of Materials and Structures* 2.2, p. 121-163.
- CHAMBON, R., D. CAILLERIE et N. EL HASSAN (1998). « One-dimensional localisation studied with a second grade model ». In : *European Journal of Mechanics-A/Solids* 17.4, p. 637-656.
- CHAMBON, R., D. CAILLERIE et T. MATSUCHIMA (2001). « Plastic continuum with microstructure, local second gradient theories for geomaterials : localization studies ». In : *International Journal of Solids and Structures* 38.46-47, p. 8503-8527.
- CHAMBON, R., D. CAILLERIE et C. TAMAGNINI (2004). « A strain space gradient plasticity theory for finite strain ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193.27-29, p. 2797-2826.
- CHAMBON, R. et JC. MOULLET (2004). « Uniqueness studies in boundary value problems involving some second gradient models ». In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 193.27-29, p. 2771-2796.

RÉFÉRENCES

- CHEN, Y. (2019). « Modeling of ductile fracture using local approach : reliable simulation of crack extension ». Thèse de doct. Université Paris sciences et lettres.
URL : <https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-02439257>.
- COLLIN, F., D. CAILLERIE et R. CHAMBON (2009). « Analytical solutions for the thick-walled cylinder problem modeled with an isotropic elastic second gradient constitutive equation ». In : *International Journal of Solids and Structures* 46.22-23, p. 3927-3937.
- COLLIN, F., R. CHAMBON et R. CHARLIER (2006). « A finite element method for poro mechanical modelling of geotechnical problems using local second gradient models ». In : *International journal for numerical methods in engineering* 65.11, p. 1749-1772.
- COSSERAT, E. et F. COSSERAT (1909). *Théorie des corps déformables*. A. Hermann et fils.
- COWIN, SC. et JW. NUNZIATO (1983). « Linear elastic materials with voids ». In : *Journal of Elasticity* 13.2, p. 125-147.
- CRISFIELD, MA. (1981). « A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through” ». In : *Computational methods in nonlinear structural and solid mechanics*. Elsevier, p. 55-62.
- (1986). « Snap-through and snap-back response in concrete structures and the dangers of under-integration ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 22.3, p. 751-767.
- CUVILLIEZ, S., I. DJOUADI, S. RAUDE et R. FERNANDES (2017). « An elastoviscoelastic constitutive model for geomaterials : Application to hydromechanical modelling of claystone response to drift excavation ». In : *Computers and Geotechnics* 85, p. 321-340.
- DE BORST, R. (1991). « Simulation of strain localization : a reappraisal of the Cosserat continuum ». In : *Engineering computations*.
- DELL'ISOLA, F., A. MADEO et L. PLACIDI (2012). « Linear plane wave propagation and normal transmission and reflection at discontinuity surfaces in second gradient 3D continua ». In : *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 92.1, p. 52-71.
- DELL'ISOLA, F., G. SCIARRA et S. VIDOLI (2009). « Generalized Hooke's law for isotropic second gradient materials ». In : *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 465.2107, p. 2177-2196.
- DELL'ISOLA, F., I. GIORGIO, M. PAWLICKOWSKI et NL. RIZZI (2016). « Large deformations of planar extensible beams and pantographic lattices : heuristic homogenization, experimental and numerical examples of equilibrium ». In : *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 472.2185, p. 20150790.

RÉFÉRENCES

- DELL'ISOLA, F., T. LEKSZYCKI, M. PAWLIKOWSKI, R. GRYGORUK et L. GRECO (2015). « Designing a light fabric metamaterial being highly macroscopically tough under directional extension : first experimental evidence ». In : *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 66.6, p. 3473-3498.
- DESBOIS, G., N. HÖHNE, JL. URAI, P. BÉSUELLE et G. VIGGIANI (2017). « Deformation in cemented mudrock (Callovo-Oxfordian Clay) by microcracking, granular flow and phyllosilicate plasticity : insights from triaxial deformation, broad ion beam polishing and scanning electron microscopy ». In : *Solid Earth* 8.2, p. 291-305.
- DOHERTY, WP., EL. WILSON et RL. TAYLOR (1969). *Stress analysis of axisymmetric solids utilizing higher-order quadrilateral finite elements*. University of California, Structural Engineering Laboratory.
- DRUCKER, DC. et W. PRAGER (1952). « Soil mechanics and plastic analysis or limit design ». In : *Quarterly of applied mathematics* 10.2, p. 157-165.
- EL MOUSTAPHA, K. (2014). « Identification de lois de comportement enrichie pour les géomatériaux en présence d'une localisation de la déformation ». Thèse de doct. Université de Grenoble.
- ERINGEN, AC. et DGB. EDELEN (1972). « On nonlocal elasticity ». In : *International journal of engineering science* 10.3, p. 233-248.
- ERN, A. et JL. GUERMOND (2013). *Theory and practice of finite elements*. T. 159. Springer Science & Business Media.
- FERNANDES, R. (2009). « Modélisation numérique objective des problèmes couplés hydromécaniques dans le cas des géomatériaux ». Thèse de doctorat dirigée par Chambon, René et Chavant, Clément Mécanique Grenoble 1 2009. Thèse de doct., 1 vol. (167 p.) URL : <http://www.theses.fr/2009GRE10007>.
- (2012). « Intégration des comportements mécaniques élasto-plastiques de Drucker-Prager, associé et non-associé et post-traitements [R07.01.16] ». In : *Documentation Code Aster*.
- FERNANDES, R., C. CHAVANT et R. CHAMBON (2008). « A simplified second gradient model for dilatant materials : theory and numerical implementation ». In : *International Journal of Solids and Structures* 45.20, p. 5289-5307.
- FERNANDES, R., B. DUCOIN et R. CHAMBON (2011). « 2D and 3D Modelling of Geomaterials Using a Second Gradient Dilatation Model ». In : *Advances in Bifurcation and Degradation in Geomaterials*. Springer, p. 209-218.
- FOREST, S. (2009). « Micromorphic approach for gradient elasticity, viscoplasticity, and damage ». In : *Journal of Engineering Mechanics* 135.3, p. 117-131.
- FOREST, S. et E. LORENTZ (2004). « Localization phenomena and regularization methods ». In : *Local approach to fracture* 1, p. 311-371.
- FOREST, S. et R. SIEVERT (2006). « Nonlinear microstrain theories ». In : *International Journal of Solids and Structures* 43.24, p. 7224-7245.

RÉFÉRENCES

- GERMAIN, P. (1973). « The method of virtual power in continuum mechanics. Part 2 : Microstructure ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 25.3, p. 556-575.
- GIUSEPPE, R., C. GIRY, F. GATUINGT et R. DESMORAT (2018). « From diffuse damage to strain localization from an Eikonal Non-Local (ENL) Continuum Damage model with evolving internal length ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 331, p. 650-674. ISSN : 0045-7825. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.12.006>.
- GOURGIOTIS, PA. et HG. GEORGIADIS (2009). « Plane-strain crack problems in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity ». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 57.11, p. 1898-1920.
- HERRMANN, LR. (1965). « Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem. » In : *AIAA journal* 3.10, p. 1896-1900.
- HOEK, E., C. CARRANZA-TORRES et B. CORKUM (2002). « Hoek-Brown failure criterion-2002 edition ». In : *Proceedings of NARMS-Tac* 1.1, p. 267-273.
- HUGHES, TJR. (1980). « Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 15.9, p. 1413-1418.
- JOUAN, G. (2015). « Modélisation numérique de la localisation des déformations dans le béton avec un modèle de second gradient ». Thèse de doct. Université de Liège, Liège, Belgique. URL : <https://orbi.uliege.be/handle/2268/170795>.
- JOUAN, G., P. KOTRONIS et F. COLLIN (2014). « Using a second gradient model to simulate the behaviour of concrete structural elements ». In : *Finite Elements in Analysis and Design* 90, p. 50-60.
- KAZYMYRENKO, K. (2013). « Méthode de pilotage du chargement [R05.03.80] ». In : *Documentation Code Aster*.
- KOTRONIS, P., S. AL HOLO, P. BÉSUELLE et R. CHAMBON (2008). « Shear softening and localization : Modelling the evolution of the width of the shear zone ». In : *Acta geotechnica* 3.2, p. 85-97.
- KOTRONIS, P., F. COLLIN, P. BÉSUELLE, R. CHAMBON et J. MAZARS (2007). « Local second gradient models and damage mechanics : 1d post-localization studies in concrete specimens ». In : *Bifurcations, Instabilities, Degradation in Geomechanics*. Springer, p. 127-142.
- KRAYANI, A., G. PIJAUDIER-CABOT et F. DUFOUR (2009). « Boundary effect on weight function in nonlocal damage model ». In : *Engineering Fracture Mechanics* 76.14, p. 2217-2231.
- LAGIOIA, R. et A. PANTEGHINI (2014). « The influence of the plastic potential on plane strain failure ». In : *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 38.8, p. 844-862.

RÉFÉRENCES

- LORENTZ, E. (1999). « Lois de comportement à gradients de variables internes : construction, formulation variationnelle et mise en oeuvre numérique ». Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.
- (2017). « A nonlocal damage model for plain concrete consistent with cohesive fracture ». In : *International Journal of Fracture* 207.2, p. 123-159.
- LORENTZ, E. et P. BADEL (2004). « A new path-following constraint for strain-softening finite element simulations ». In : *International journal for numerical methods in engineering* 60.2, p. 499-526.
- LORENTZ, E., J. BESSON et V. CANO (2008). « Numerical simulation of ductile fracture with the Rousselier constitutive law ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197.21-24, p. 1965-1982.
- MADEO, A., D. GEORGE, T. LEKSZYCKI, M. NIERENBERGER et Y. RÉMOND (2012). « A second gradient continuum model accounting for some effects of micro-structure on reconstructed bone remodelling ». In : *Comptes Rendus Mécanique* 340.8, p. 575-589.
- MARINELLI, F. (2013). « Comportement couplé des géo-matériaux : deux approches de modélisation numérique ». Thèse de doct. Université de Grenoble.
- MATSUSHIMA, T., R. CHAMBON et D. CAILLERIE (2002). « Large strain finite element analysis of a local second gradient model : application to localization ». In : *International journal for numerical methods in engineering* 54.4, p. 499-521.
- MIEHE, C., N. APEL et M. LAMBRECHT (2002). « Anisotropic additive plasticity in the logarithmic strain space : modular kinematic formulation and implementation based on incremental minimization principles for standard materials ». In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 191.47-48, p. 5383-5425.
- MINDLIN, RD. (1963). *Microstructure in linear elasticity*. Rapp. tech. Columbia Univ New York Dept of Civil Engineering et Engineering Mechanics.
- (1965). « Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity ». In : *International Journal of Solids and Structures* 1.4, p. 417-438.
- MÜHLHAUS, HB. et I. VARDOULAKIS (1987). « The thickness of shear bands in granular materials ». In : *Geotechnique* 37.3, p. 271-283.
- ODEN, JT. (2006). *Finite elements of nonlinear continua*. Courier Corporation.
- ORDONEZ, A. (2022). « Solveur linéaire haute performance pour la thermo-hydro-mécanique avec régularisation par second gradient de dilatation ». Thèse de doct. Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique.
- PARDOEN, B. et F. COLLIN (2017). « Modelling the influence of strain localisation and viscosity on the behaviour of underground drifts drilled in claystone ». In : *Computers and Geotechnics* 85, p. 351-367.
- PARDOEN, B., S. LEVASSEUR et F. COLLIN (2015). « Using local second gradient model and shear strain localisation to model the excavation damaged zone in

RÉFÉRENCES

- unsaturated claystone ». In : *Rock Mechanics and Rock Engineering* 48.2, p. 691-714.
- PATERSON, MS. et T. WONG (2005). *Experimental rock deformation-the brittle field*. Springer Science & Business Media.
- PEERLINGS, RHJ., R. de BORST, WAM. BREKELMANS et JHP. DE VREE (1996). « Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials ». In : *International Journal for numerical methods in engineering* 39.19, p. 3391-3403.
- PEERLINGS, RHJ., R. DE BORST, WAM. BREKELMANS et MGD. GEERS (2002). « Localisation issues in local and nonlocal continuum approaches to fracture ». In : *European Journal of Mechanics-A/Solids* 21.2, p. 175-189.
- PEERLINGS, RHJ., MGD. GEERS, R. DE BORST et WAM. BREKELMANS (2001). « A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua ». In : *International Journal of solids and Structures* 38.44-45, p. 7723-7746.
- PIJAUDIER-CABOT, G. et Z. P. BAŽANT (1987). « Nonlocal damage theory ». In : *Journal of engineering mechanics* 113.10, p. 1512-1533.
- PLACIDI, L. (2015). « A variational approach for a nonlinear 1-dimensional second gradient continuum damage model ». In : *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 27.4, p. 623-638.
- PLACIDI, L., U. ANDREAUS et I. GIORGIO (2017). « Identification of two-dimensional pantographic structure via a linear D4 orthotropic second gradient elastic model ». In : *Journal of Engineering Mathematics* 103.1, p. 1-21.
- PLACIDI, L., E. BARCHIESI, E. TURCO et NL. RIZZI (2016). « A review on 2D models for the description of pantographic fabrics ». In : *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 67.5, p. 1-20.
- PLACIDI, L., G. ROSI, I. GIORGIO et A. MADEO (2014). « Reflection and transmission of plane waves at surfaces carrying material properties and embedded in second-gradient materials ». In : *Mathematics and Mechanics of Solids* 19.5, p. 555-578.
- PLASSART, R., R. FERNANDES, A. GIRAUD, D. HOXHA et F. LAIGLE (2013). « Hydromechanical modelling of an excavation in an underground research laboratory with an elastoviscoplastic behaviour law and regularization by second gradient of dilation ». In : *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 58, p. 23-33.
- PLESSIS, S. (2014). « Loi de comportement de HOEK-BROWN modifiée [R07.01.18] ». In : *Documentation Code Aster*.
- PLÚA, C. (2018). « Development of a Numerical Strategy for 2nd Gradient Continuum Porous Media based on Iso-Geometric Finite Element. Application to Partially Saturated Media ». Thèse de doct. Université de Grenoble et Università degli studi (Florence, Italie).

RÉFÉRENCES

- RAUDE, S. (2015). « Prise en compte des sollicitations thermiques sur les comportements instantané et différé des géomatériaux ». Thèse de doct. Université de Lorraine.
- RICE, JR. (1976). *Localization of plastic deformation*. Rapp. tech. Brown Univ., Providence, RI (USA). Div. of Engineering.
- ROSCOE, KH. (1970). « The influence of strains in soil mechanics ». In : *Geotechnique* 20.2, p. 129-170.
- RUDNICKI, JW. et JR. RICE (1975). « Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials ». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 23.6, p. 371-394.
- SALEHNIA, F., F. COLLIN, XL. LI, A. DIZIER, X. SILLEN et R. CHARLIER (2015). « Coupled modeling of Excavation Damaged Zone in Boom clay : Strain localization in rock and distribution of contact pressure on the gallery's lining ». In : *Computers and Geotechnics* 69, p. 396-410.
- SCIARRA, G., F. DELL'ISOLA, N. IANIRO et A. MADEO (2008). « A variational deduction of second gradient poroelasticity I : general theory ». In : *Journal of Mechanics of Materials and Structures* 3.3, p. 507-526.
- SCIARRA, G., F. DELL'ISOLA et O. COUSSY (2007). « Second gradient poromechanics ». In : *International Journal of Solids and Structures* 44.20, p. 6607-6629.
- SHU, JY., WE. KING et NA. FLECK (1999). « Finite elements for materials with strain gradient effects ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 44.3, p. 373-391.
- SIDOROFF, F. (1980). *Mécanique des milieux continus*.
- SIEFFERT, Y., S. AL HOLO et R. CHAMBON (2009). « Loss of uniqueness of numerical solutions of the borehole problem modelled with enhanced media ». In : *International Journal of Solids and Structures* 46.17, p. 3173-3197.
- SIMO, JC., RL. TAYLOR et KS. PISTER (1985). « Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity ». In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 51.1-3, p. 177-208.
- SIMONE, A., H. ASKES et LJ. SLUYS (2004). « Incorrect initiation and propagation of failure in non-local and gradient-enhanced media ». In : *International journal of solids and structures* 41.2, p. 351-363.
- SLUYS, LJ. (1994). « Wave propagation, localisation and dispersion in softening solids. » Thèse de doct. Technische Universiteit Delft.
- SOUZA NETO, EA. de, D. PERIĆ, M. DUTKO et DRJ. OWEN (1996). « Design of simple low order finite elements for large strain analysis of nearly incompressible solids ». In : *International Journal of Solids and Structures* 33.20-22, p. 3277-3296.
- SOUZA NETO, EA. de, D. PERIĆ et DRJ. OWEN (2011). *Computational methods for plasticity : theory and applications*. John Wiley & Sons.

RÉFÉRENCES

- STAVROPOULOU, E. (2017). « Comportement différé des interfaces argilite/béton : caractérisation et modélisation ». Thèse de doct. Université Grenoble Alpes.
- SUSSMAN, T. et KJ. BATHE (1987). « A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis ». In : *Computers & Structures* 26.1-2, p. 357-409.
- TAYLOR, RL. (2000). « A mixed-enhanced formulation tetrahedral finite elements ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 47.1-3, p. 205-227.
- TOUPIN, R. (1962). « Elastic materials with couple-stresses ». In : *Archive for rational mechanics and analysis* 11.1, p. 385-414.
- TRIANTAFYLLODIS, N. et S. BARDENHAGEN (1993). « On higher order gradient continuum theories in 1-D nonlinear elasticity. Derivation from and comparison to the corresponding discrete models ». In : *Journal of Elasticity* 33.3, p. 259-293.
- VARDOULAKIS, I. (1980). « Shear band inclination and shear modulus of sand in biaxial tests ». In : *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics* 4.2, p. 103-119.
- VERMEER, PA. et R. DE BORST (1984). « Non-associated plasticity for soils, concrete and rock ». In : *HERON*, 29 (3), 1984.
- ZHANG, HW. et BA. SCHREFLER (2000). « Gradient-dependent plasticity model and dynamic strain localisation analysis of saturated and partially saturated porous media : one dimensional model ». In : *European Journal of Mechanics-A/Solids* 19.3, p. 503-524.
- ZHANG, Y. (2016). « Modélisation et simulation numérique robuste de l'endommagement ductile ». Thèse de doct. Université Paris sciences et lettres. URL : <https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-01354272>.
- ZHANG, Y., E. LORENTZ et J. BESSON (2018). « Ductile damage modelling with locking-free regularised GTN model ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 113.13, p. 1871-1903.
- ZIENKIEWICZ, OC., RL. TAYLOR et JM. TOO (1971). « Reduced integration technique in general analysis of plates and shells ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 3.2, p. 275-290.