



HAL
open science

Analyse et contrôle de quelques problèmes aux limites en mécanique du contact

Maxime Couderc

► **To cite this version:**

Maxime Couderc. Analyse et contrôle de quelques problèmes aux limites en mécanique du contact. Physique mathématique [math-ph]. Université de Perpignan, 2020. Français. NNT : 2020PERP0024 . tel-03574193

HAL Id: tel-03574193

<https://theses.hal.science/tel-03574193>

Submitted on 15 Feb 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de
Docteur

Délivré par

UNIVERSITE DE PERPIGNAN VIA DOMITIA

Préparée au sein de l'école doctorale ED305
Et de l'unité de recherche LAMPS

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Présentée par **Maxime COUDERC**

**Analyse et Contrôle optimal de quelques problèmes
aux limites en Mécanique du Contact**

Soutenue le 15 octobre 2020, devant le jury composé de :

| | |
|---|--------------|
| M. Samir ADLY, PR, Université de Limoges | Rapporteur |
| M. Mikaël BARBOTEU, PR, Université de Perpignan | Co-Directeur |
| M. Serge DUMONT, PR, Université de Nîmes | Examineur |
| Mme Laëtitia PAOLI, PR, Université de Saint-Étienne | Rapporteur |
| M. Mircea SOFONEA, PR, Université de Perpignan | Directeur |
| Mme Annick TRUFFERT, MCF, Université de Perpignan | Examineur |

**Analyse et contrôle optimal de
quelques problèmes aux limites en
mécanique du contact**

REMERCIEMENTS

Cette thèse a été réalisée au laboratoire de Mathématiques et de Physique (LAMPS), à l'Université de Perpignan Via Domitia. Je tiens à témoigner ici de ma plus profonde gratitude à ceux qui ont contribué à sa réalisation. Tout d'abord, j'adresse mes plus sincères remerciements à mon Directeur de thèse, Mircea Sofonea, en premier lieu d'avoir accepté de diriger cette thèse. Merci à lui pour la bienveillance dont il a fait preuve tout au long de mon cursus universitaire, de sa disponibilité malgré ses nombreuses charges, son adaptabilité vis à vis de mon handicap, qui grâce à lui n'en a pas été un, du fait de l'autonomie qu'il m'a accordé par rapport à mes contraintes. Merci également pour ses conseils, pour mes recherches, pour la rédaction des articles et du manuscrit de thèse et pour la préparation des présentations faites durant ces trois années. J'en profite enfin pour lui témoigner l'immense plaisir et l'immense honneur d'avoir travaillé avec lui, et le plus profond respect que j'ai pour l'enseignant, le scientifique et l'homme qui par son enseignement, m'as transmis la passion de la Mécanique du Contact et l'envie de la transmettre à mon tour.

Je remercie aussi Mikael Barboteu, co-directeur de cette thèse. Ses cours d'analyse numérique m'ont ouvert à la continuité de mon travail de recherche, tout comme le stage de M1 que j'ai eu grand plaisir à faire avec lui. Je le remercie également pour l'extrême bienveillance qui le caractérise ainsi que d'avoir accepté de co-diriger ma thèse et de faire partie du jury.

Mme Laetitia Paoli et Mr. Samir Adly m'ont fait l'honneur de rapporter sur mon manuscrit. Je leur en suis vivement reconnaissant.

Je remercie Mr. Serge Dumont pour l'intérêt qu'il a manifesté pour mes travaux, en tant que membre du comité de suivi individuel de ma thèse. Ses remarques bienveillantes et ses commentaires m'ont beaucoup aidé dans mon parcours.

J'aimerais également remercier Annick Truffert, la première personne m'ayant accueillie à l'UPVD, celle-là même qui m'a invité et convaincu d'y venir, et l'une de

ceux qui m'ont donné envie d'y faire mon cursus. Je la remercie également d'avoir toujours été à l'écoute tout le long de mon parcours.

Je remercie aussi tous les membres du LAMPS pour leur accueil et leur bienveillance. Je remercie plus particulièrement Robert Brouzet pour m'avoir guidé dans mes premiers pas dans l'enseignement, ainsi que Joëlle Sulian pour sa disponibilité, sa réactivité et son aide précieuse. J'ai pour certains d'entre eux, un réel respect et une profonde amitiés.

Enfin, j'aimerais remercier ma mère, elle est indissociable à mon parcours. Elle l'a porté, bonifié, m'a poussé vers le haut quand il fallait. Ce manuscrit est le fruit de son travail autant que du mien, et représente l'aboutissement de notre parcours commun. Merci pour ta confiance indéfectible, ton soutien dans les moments difficiles, et d'avoir fait de moi qui je suis aujourd'hui.

Un petit mot pour mes camarades et amis de Licence, Quentin, Ludo, Jim, Marjo, Gab, Momo et bien d'autres, vous avez fait de ces années les plus belles de ma vie.

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|---|-----------|
| Introduction | 9 |
| Notations | 15 |
| Liste des figures | 17 |
| I PREAMBULE | 19 |
| 1 Préliminaire d'analyse | 21 |
| 1.1 Opérateurs | 21 |
| 1.2 Fonctions et ensembles | 23 |
| 1.3 Problème de minimisation | 25 |
| 2 Inéquations variationnelles | 26 |
| 2.1 Inéquations variationnelles elliptiques | 26 |
| 2.2 Inéquations quasi-variationnelles elliptiques | 27 |
| 2.3 Inéquations quasi-variationnelles avec terme de mémoire | 27 |
| 3 Espaces fonctionnels et cadre physique | 29 |
| 3.1 Espaces fonctionnels | 29 |
| 3.2 Cadre physique | 30 |
| 4 Lois de comportement | 32 |
| 4.1 Lois de comportement élastiques | 32 |
| 4.2 Loi de comportement viscoélastique | 34 |
| 5 Conditions aux limites de contact | 34 |

| | | |
|--|---|-----------|
| 5.1 | Condition de contact de Signorini | 34 |
| 5.2 | Condition de compliance normale | 36 |
| 6 | Lois de frottement | 37 |
| II DESCRIPTIF DES PROBLEMES ETUDIES | | 39 |
| 1 | Contrôle optimal d'un problème de contact sans frottement avec con- trainte unilatérale | 41 |
| 1.1 | Le modèle | 41 |
| 1.2 | Formulation variationnelle | 42 |
| 1.3 | Existence, unicité et résultat de convergence | 43 |
| 1.4 | Problèmes de contrôle optimal | 45 |
| 1.5 | Un exemple unidimensionnel | 46 |
| 2 | Un problème de contact élastique avec frottement et contrainte uni- latérale | 49 |
| 2.1 | Le modèle | 49 |
| 2.2 | Existence et unicité | 50 |
| 2.3 | Résultat de dépendance continue | 52 |
| 2.4 | Un problème d'optimisation | 53 |
| 3 | Un problème dual de contact élastique avec frottement et contrainte unilatérale | 57 |
| 3.1 | Le modèle | 57 |
| 3.2 | Un problème d'optimisation abstrait | 59 |
| 3.3 | Résultats d'existence, d'unicité et de convergence | 62 |
| 3.4 | Un problème de contrôle optimal | 63 |
| 4 | Optimisation d'un problème de contact viscoélastique avec contrainte unilatérale et frottement | 67 |
| 4.1 | Le modèle | 67 |
| 4.2 | Existence et unicité | 69 |
| 4.3 | Résultats de convergence | 70 |
| 4.4 | Problèmes d'optimisation | 73 |
| Conclusions | | 75 |
| Bibliographie | | 79 |

| | |
|--|-----|
| III ARTICLES | 81 |
| 1. Optimal control of a frictionless contact problem with unilateral constraint | 83 |
| 2. An elastic frictional contact problem with unilateral constraint | 109 |
| 3. Optimization problems for elastic contact models with unilateral constraints | 129 |
| 4. Optimization problems for a viscoelastic frictional contact problem with unilateral constraints | 153 |

INTRODUCTION

Les phénomènes de contact sont abondants dans de nombreux domaines de l'industrie tels que l'aéronautique et l'automobile. On les retrouve également dans la vie quotidienne, en citant par exemple le contact entre le pneu d'une voiture et la route, le même cas se retrouvant en aéronautique avec le train d'atterrissage, le contact entre le piston et sa chemise ou encore l'enfoncement d'un corps s'asseyant dans un fauteuil. Ces trois cas sont caractéristiques de la variété des problèmes de mécanique du contact.

Ceux-ci constituent un très large panel de problèmes étudiés et pourtant encore à approfondir. Ajoutée à cela, la multitude de lois de frottement multiplie les modèles mathématiques envisageables. La complexité de ces phénomènes conduit à des modèles décrivant des problèmes physiques sous forme de systèmes d'équations aux dérivées partielles associées à des conditions aux limites. La non-linéarité des problèmes étudiés implique, à défaut d'utiliser des opérateurs linéaires, de chercher des opérateurs avec d'autres bonnes propriétés telles que la monotonie, l'hémicontinuité ou encore la pseudo-monotonie. Nous reviendrons sur les opérateurs possédant ces propriétés dans les préliminaires d'analyse plus loin dans l'introduction. D'autre part, l'analyse variationnelle est l'élément central des travaux de cette thèse et implique l'utilisation des inéquations variationnelles. Cependant, la complexité des problèmes étudiés mène à des classes d'inéquations telles que les inéquations quasi-variationnelles ou encore les inéquations quasi-variationnelles avec terme de mémoire. Nous fournirons dans une partie consacrée à l'analyse variationnelle des résultats d'existence et d'unicité pour chaque classe d'inéquations variationnelles évoquées. Enfin, en plus des opérateurs cités précédemment, un type bien particulier d'opérateurs sera utilisé, les opérateurs de mémoire. En effet, la considération de problèmes quasi-statiques ou dynamiques implique la dépendance par rapport au temps, se traduisant aussi sur les matériaux. Certains d'entre eux, impriment un effet mémoire, c'est-à-dire, la dépendance de l'état physique du matériau à un moment donné par rapport aux états antérieurs du matériau. Par exemple, considérons une croûte rigide qui se

brisera au-delà d'un seuil critique d'effort subit. On peut naturellement imaginer que l'usure de la croûte au fil du temps entraîne une modification du seuil critique.

L'étude d'un problème de mécanique de contact se divise en quatre étapes : la modélisation, l'analyse variationnelle, l'analyse numérique et la mise en oeuvre numérique. Précisons que les travaux présentés dans cette thèse ne concernent que les deux premières étapes.

Explicitons ici le déroulement de l'étude d'un problème de la mécanique du contact, de la modélisation à l'analyse variationnelle. En premier lieu, étant donné un problème physique concret, la première étape consiste, pour étudier mathématiquement ce problème, à traduire le cadre physique en un système d'équations aux dérivées partielles. Cependant, dans la plupart des cas, ce système ainsi formulé n'est pas soluble dans le sens classique. Pour y remédier, la seconde étape va consister à formuler le problème d'une autre manière, la formulation variationnelle. Cette formulation synthétise toutes les équations et conditions aux limites du problème en une seule inégalité, l'inégalité variationnelle. Notons que la complexité du problème étudié mène parfois à considérer une fonctionnelle dépendante de la solution, conduisant ainsi à formuler une inéquation quasi-variationnelle. La troisième étape vise, à défaut de déterminer directement la solution, à prouver son existence et son unicité. Par la suite, on s'intéresse au comportement de cette solution par rapport aux données du problème, notamment, pour s'assurer qu'une petite variation des données n'implique qu'une petite variation de la solution. Le procédé consiste à introduire des perturbations des données et du problème variationnel. On s'assure ensuite de la convergence de la solution perturbée vers la solution classique. La dernière étape n'est pas systématique dans l'étude d'un problème en mécanique du contact mais constitue une spécificité de cette thèse, à savoir le contrôle optimal. Il s'agit d'une classe particulière des problèmes d'optimisation. En effet, on cherche à minimiser une fonctionnelle coût que l'on définit selon un but précis, par exemple, minimiser les déformations du corps, approcher une valeur spécifique pour certaines grandeurs telles que le déplacement normal ou tangentiel, etc... La particularité étant de minimiser cette fonctionnelle en faisant varier une ou plusieurs données du problème mécanique : le coefficient de frottement, la densité des forces de traction ou encore l'interstice entre le corps et l'obstacle.

N'oublions pas que ces travaux sont précédés et nourris de plus d'un siècle de résultats issus des recherches de nombreux mathématiciens. On propose de faire ici un historique non exhaustif du développement de la théorie mathématique de la mécanique du contact.

La genèse de la mécanique du contact pris place en 1882 avec les travaux de Hertz qui font office encore aujourd'hui de solides bases pour la modélisation et l'étude des problèmes de contact impliquant des corps déformables. Il réussit à l'époque à résoudre des problèmes classiques tels que le contact entre une sphère élastique et un demi-espace élastique ou encore le contact entre deux sphères. Bien des années

après, en 1933, Signorini proposa le premier problème de contact entre un corps élastique et une fondation rigide. S'en suivit une multitude de travaux plus basée sur la théorie et les outils mathématiques. Ainsi, l'existence et l'unicité de la solution de ce problème ont été ensuite prouvés par Fichera. S'en suivent les travaux de Duvaut et Lions posant les bases de la *Théorie Mathématique de la Mécanique du Contact*, y introduisant notamment des formulations variationnelles pour des problèmes de contact avec frottement et prouvant l'existence et l'unicité de leurs solutions.

Depuis quelques dizaines d'années, les inéquations variationnelles se sont considérablement développées et sont devenues un outil mathématique puissant et extrêmement important tant bien dans l'étude mathématique que dans l'analyse numérique de nombreux problèmes aux limites non linéaires, dans le champ de la physique, de la mécanique ou encore des sciences de l'ingénieur. En est ressorti une abondante littérature, parmi laquelle on cite [1–3, 6, 7].

Dans cette thèse, les problèmes mécaniques traités induisent l'étude d'inéquations quasi-variationnelles elliptiques ainsi que des inéquations quasi-variationnelles avec opérateur de mémoire.

La théorie du contrôle optimal est une composante inter-disciplinaire des mathématiques couvrant, de ce fait, une multitude de domaines d'applications : robotique, automobile, médecine et bien d'autres. L'idée est d'effectuer une tâche tout en minimisant un certain critère. Tout l'enjeu est alors de déterminer les solutions optimales. Si des bases sur le contrôle optimal d'équations aux dérivées partielles sont posées, la littérature traitant le contrôle optimal de problèmes de mécanique du contact demeure limitée. Ceci s'explique par la contrainte inhérente à leur modélisation ainsi que la non-linéarité des conditions aux limites de contact et aux lois de comportement. Parmi les ouvrages traitant du contrôle optimal on trouve, par exemple, [5].

Dans le cas des problèmes évolutifs, le fait d'introduire la dépendance de la solution par rapport au temps implique d'utiliser des opérateurs de mémoire pour prendre en compte l'historique de la solution. Ces opérateurs sont utilisés notamment dans [8, 9].

Le but de cette thèse est de contribuer au développement de la *Théorie Mathématique de la Mécanique du Contact* en élargissant le champ des problèmes étudiés et en prouvant des résultats d'existence, d'unicité et de convergence de leurs solutions. La nouveauté du travail fourni sera portée en grande partie par sa finalité : des résultats d'existence pour des problèmes de contrôle optimal associés aux problèmes mécaniques que nous étudierons. D'autre part, des outils mathématiques tels que la convergence de Mosco seront utilisés et appliqués à la mécanique du contact, permettant de traiter une plus grande variété de problèmes.

Ainsi, nous démontrerons des résultats d'existence, d'unicité et de convergence pour un problème de contact élastique avec contrainte unilatérale et seuil critique, auquel nous ajouterons du frottement dans un second problème. Nous ferons de même avec un problème dual puis un problème évolutif visco-élastique à mémoire longue. Enfin, pour chaque problème mécanique étudié, nous nous intéresserons à

des problèmes de contrôle associés, pour lesquels nous démontrerons des résultats d'existence d'un contrôle optimal.

Cette thèse est structurée en trois parties autour de quatre articles dont trois sont déjà publiés.

La première partie comporte six sections dont le contenu est le suivant.

Dans la première section, on proposera un préliminaire d'analyse pour préciser les définitions ainsi que les propriétés des outils mathématiques nécessaires à l'étude des différents problèmes mécaniques tout au long de la thèse. Elle contiendra quelques résultats fondamentaux d'analyse dont le Théorème de Weierstrass pour les problèmes d'optimisation.

Nous consacrerons la deuxième section à l'analyse variationnelle. Nous y présenterons les différents types d'inéquations variationnelles que l'on rencontrera dans cette thèse et fourniront des résultats d'existence et d'unicité pour chacune d'elles.

Dans la troisième section, nous présenterons des considérations sur les espaces fonctionnels utilisés, puis nous nous attarderons sur le cadre physique général commun aux problèmes abordés dans cette thèse.

Dans la quatrième section, nous présenterons les lois de comportement liées aux différents problèmes mécaniques abordés dans la thèse, soient des lois de comportement élastique et viscoélastique.

Puis, dans la cinquième section, nous présenterons cette fois les conditions aux limites de contact utilisées tout le long de cette thèse. Nous y présenterons entre autre les conditions de Signorini ou encore les conditions de compliance normale. Enfin, dans la sixième et dernière section, nous compléterons le tour d'horizon des éléments constitutifs des modèles considérés dans la thèse en présentant cette fois les lois de frottement y étant associées.

Dans **la deuxième partie**, nous proposerons un résumé des articles. Nous nous concentrerons sur les cadres physiques des problèmes étudiés dans ces articles ainsi que sur la trame principale de l'étude des problèmes mécaniques, sans détailler les démonstrations s'y trouvant. Nous appuierons également la comparaison et l'évolution de la nature des problèmes étudiés, de leur modèle mathématique au problème de contrôle optimal associé.

En effet, dans le premier article, nous nous intéressons à un problème de contact entre un corps élastique et un obstacle avec une structure particulière, composée d'une fondation rigide impénétrable, recouverte d'une couche de matériau déformable, elle-même recouverte d'une croûte rigide-plastique craquant sous l'effort imposé au delà d'un certain seuil. La formulation de ce problème conduit à l'étude d'une inéquation variationnelle elliptique. Nous présenterons en fin d'article des exemples de problèmes de contrôle optimal dont la fonctionnelle coût ne dépend que de la solution et du contrôle choisi.

Dans le deuxième article, il s'agit d'un problème similaire excepté l'introduction d'une deuxième surface de contact avec une fondation rigide impénétrable recouverte d'une couche dont la pénétrabilité est modélisée par une fonction de compliance normale. Notons que le contact suivant cette seconde surface est considéré avec frottement, modélisé par la loi de Coulomb, introduite dans le préambule. Pour les problèmes de contrôle optimal de cet article, l'évolution par rapport au premier article réside dans le fait que le contrôle optimal dépend de l'ensemble dans lequel il vit. Cette différence sera notamment imagée par un exemple unidimensionnel

Pour ce qui est du troisième article, la particularité est que la formulation variationnelle du problème est faite en terme de contraintes et non de déplacement. Cela implique une démarche relativement différente pour déterminer cette formulation variationnelle, celle-ci étant également différente de celle vu dans les deux premiers articles. Enfin, au-delà de faire du contrôle optimal sur le champ de contrainte, précisons également que cette fois-ci la fonctionnelle à minimiser prend en compte toutes les données du problème et non pas uniquement le contrôle choisi.

Dans le dernier article, nous nous intéressons à un problème de contact visco-élastique évolutif, cet aspect constituant la différence majeure avec le reste de la thèse. En effet, il implique l'introduction d'opérateurs de mémoire et d'une classe particulière d'inéquations quasi-variationnelles associée à ces opérateurs. L'étude de ce problème nécessitera également quelques outils mathématiques tel que le Lemme de Gronwall, l'inégalité du sous-gradient ou encore le Théorème de convergence dominée de Lebesgue. Pour ce qui est du contrôle optimal, notons juste que nous réussissons à transposer les résultats déjà obtenus dans les cas statiques aux cas évolutifs.

La troisième partie de cette thèse contient les quatre articles qui constituent le coeur de mes travaux de recherche:

- A. Benraouda, M. Couderc and M. Sofonea, Analysis and Control of a Contact Problem with Unilateral Constraints, preprint.
- M. Couderc and M. Sofonea, An Elastic Frictional Contact Problem with Unilateral Constraint, *Mediterranean Journal of Mathematics* 15 (2018), Art 195, 18 pp., <https://doi.org/10.1007/s00009-018-1243-4>.
- M. Sofonea, Y. Xiao and M. Couderc, Optimization Problems for Elastic Contact Models with Unilateral Constraints, *Journal of Applied Mathematics and Physics. (ZAMP)* 70 (2019) Art. 1, 17 pp., <https://doi.org/10.1007/s000033-018-1046-2>.
- M. Sofonea, Y. Xiao and M. Couderc, Optimization Problems for a Viscoelastic Frictional Contact Problem with Unilateral Constraints, *Nonlinear Analysis Series B: Real World Applications* 50 (2019), 86–103.

Avant de nous lancer dans le préambule de la thèse, nous présentons d'abord les différentes notations utilisées dans ce manuscrit.

Nous considérons un domaine ouvert et borné Ω de \mathbb{R}^d ($d = 1, 2, 3$) et nous notons par :

| | |
|--|--|
| Γ | la frontière de Ω supposée régulière. |
| Γ_i ($i=1, 2, 3$) | une partie mesurable de la frontière Γ . |
| $\text{mes}(\Gamma_1)$ | la mesure de Lebesgue ($d - 1$) dimensionnelle de Γ_1 . |
| $\boldsymbol{\nu}$ | la normale unitaire sortante à Γ . |
| v_ν, \mathbf{v}_τ | les composantes normales et tangentielles du champ vectoriel \mathbf{v} . |
| $\sigma_\nu, \boldsymbol{\sigma}_\tau$ | les composantes normales et tangentielles du champ tensoriel $\boldsymbol{\sigma}$. |
| $L^p(\Omega)$ | l'espace de Lebesgue. |
| $W^{k,p}(\Omega)$ | l'espace de Sobolev. |
| $H^k(\Omega)$ | l'espace $W^{k,2}(\Omega)$. |
| Q | l'espace $\left\{ \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) : \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega), 1 \leq i, j \leq d \right\}$. |
| V | l'espace $\left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ p.p. sur } \Gamma_1 \right\}$. |
| \mathbf{Q}_∞ | l'espace $\left\{ \mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl}) : \mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{jikl} = \mathcal{E}_{klij} \in L^\infty(\Omega), 1 \leq i, j, k, l \leq d \right\}$. |

Pour une fonction f , on note par :

| | |
|-------------------------------|--|
| \dot{f}, \ddot{f} | la dérivée première et seconde de f par rapport au temps. |
| $\partial_i f$ | la dérivée partielle de f par rapport à la i ème composante x_i . |
| ∇f | le gradient de f . |
| $\boldsymbol{\varepsilon}(f)$ | la partie symétrique du gradient de f , i.e., $\boldsymbol{\varepsilon}(f) = \frac{1}{2}(\nabla f + (\nabla f)^T)$. |

Pour X un espace de Hilbert réel X nous utilisons les notations suivantes :

| | |
|-------------------------|---|
| 0_X | l'élément zéro de l'espace X . |
| I | l'opérateur identité sur X . |
| $(\cdot, \cdot)_X$ | le produit scalaire de X . |
| $\ \cdot\ _X$ | la norme de X . |
| $x_n \rightharpoonup x$ | la convergence faible de la suite $\{x_n\}$ vers l'élément x dans X . |
| $x_n \rightarrow x$ | la convergence forte de la suite $\{x_n\}$ vers l'élément x dans X . |

Soient Y et Z deux espaces de Banach réels, $K \subset Y$ et soit $[0, T]$ un intervalle de temps, $T > 0$; nous utilisons les notations suivantes :

| | |
|---------------------------------|---|
| $C([0, T]; Y)$ | l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ à valeurs dans Y . |
| $C(\mathbb{R}_+; Y)$ | l'espace des fonctions continues de \mathbb{R}_+ à valeurs dans Y . |
| $C(\mathbb{R}_+; K)$ | l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R}_+ à valeurs dans K . |
| $\mathcal{L}(Y; Z)$ | l'espace des applications linéaires et continues de Y dans Z . |
| $\mathcal{L}(Y)$ | l'espace des applications linéaires et continues de Y dans Y . |
| $\ \cdot\ _{C([0, T]; Y)}$ | la norme de $C([0, T]; Y)$. |
| $\ \cdot\ _{\mathcal{L}(Y; Z)}$ | la norme de $\mathcal{L}(Y; Z)$. |

Autre notations :

| | |
|----------------------|--|
| \mathbb{S}^d | l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur \mathbb{R}^d . |
| \mathbf{I}_d | le tenseur identité du second ordre sur \mathbb{R}^d . |
| $\ \cdot\ $ | la norme Euclidienne sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d . |
| P_K | l'opérateur de projection sur le convexe fermé et non vide K . |
| $\text{tr } \sigma$ | la trace du tenseur σ . |
| $\text{Div } \sigma$ | la divergence du tenseur σ . |
| r^+ | la partie positive de r . |
| p.p. | presque partout. |
| ssi | si et seulement si. |
| s.c.i. | semi-continue inférieurement. |
| inf | la borne inférieure. |
| sup | la borne supérieure. |
| lim inf | la limite inférieure. |
| lim sup | la limite supérieure. |

LISTE DES FIGURES

| | | |
|------|--|----|
| .1.1 | Cadre physique | 31 |
| .1.2 | Loi de comportement élastique linéaire | 33 |
| .1.3 | Loi de comportement élastique non linéaire | 34 |
| .1.4 | Condition de contact de Signorini | 35 |
| .1.5 | Condition de contact de Signorini avec interstice | 36 |
| .1.6 | Condition avec compliance normale | 37 |
| .1.7 | Condition de contact avec compliance normale et contrainte unilatérale | 38 |

PARTIE |

PREAMBULE

1 Préliminaire d'analyse

Dans cette section, nous introduisons tous les éléments et résultats d'analyse qui servent de base pour les preuves des résultats établis dans cette thèse. Le matériel présenté ici est standard et peut être trouvé dans bon nombre de livres comme, par exemple, [4, 8–10]. Premièrement, les problèmes mécaniques étudiés conduisent à l'utilisation de certains types d'opérateurs que nous évoquons ci-dessous.

1.1 Opérateurs

On considère un espace de Hilbert X muni de son produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et la norme associée $\|\cdot\|_X$.

Dans l'étude des problèmes mécaniques abordés dans la thèse, la non-linéarité des opérateurs utilisés implique l'utilisation de propriétés que l'on décrit ci-dessous.

Definition 1.1. *Un opérateur $A : X \rightarrow X$ est dit:*

(1) *fortement monotone, s'il existe $m > 0$ tel que*

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X. \quad (\text{I.1})$$

(2) *de Lipschitz, s'il existe $M > 0$ tel que*

$$\|Au - Av\|_X \leq M \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (\text{I.2})$$

(3) *hémicontinu, si pour toute suite $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ telle que $\alpha_n \rightarrow \alpha$, nous avons*

$$(A(u + \alpha_n v), w)_X \rightarrow (A(u + \alpha v), w)_X \quad \forall u, v, w \in X. \quad (\text{I.3})$$

(4) *continu, si*

$$u_n \rightarrow u \quad \text{dans } X \implies Au_n \rightarrow Au \quad \text{dans } X. \quad (\text{I.4})$$

Notamment, dans le cas d'un opérateur à la fois fortement monotone et de Lipschitz, nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Theorème 1.2. *Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors, pour tout $f \in X$ il existe un unique élément $u \in X$ tel que $Au = f$.*

Nous rencontrons dans les articles de cette thèse un type particulier d'opérateurs, à savoir les opérateurs de projection. Avant de les introduire, intéressons-nous au Théorème d'existence et d'unicité suivant.

Theorème 1.3. *Soit K un sous ensemble fermé, convexe et non vide de l'espace de Hilbert X . Alors, pour tout $f \in X$ il existe un unique élément $u \in K$ tel que*

$$\|u - f\|_X = \min_{v \in K} \|v - f\|_X. \quad (\text{I.5})$$

Ce théorème conduit à la définition suivante.

Definition 1.4. *Soit K un sous ensemble fermé, convexe et non vide de l'espace de Hilbert X . Alors, pour tout $f \in X$ l'élément $u \in K$ qui satisfait (I.5) est appelé la projection de f sur K et il est noté par $P_K f$. Par ailleurs, l'opérateur $P_K : X \rightarrow K$ est appelé l'opérateur de projection sur K .*

Un autre type d'opérateur est à considérer. Pour l'introduire, considérons la proposition suivante

Proposition 1.5. *Soient $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un espace de Hilbert et $A : X \rightarrow X$ un opérateur monotone et hémicontinu. Supposons que la suite $\{u_n\} \subset X$ converge faiblement vers l'élément $u \in X$, c'est-à-dire*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } X \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad (\text{I.6})$$

En outre, supposons que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u_n - u)_X \leq 0. \quad (\text{I.7})$$

Alors, pour tout $v \in X$, l'inégalité suivante est satisfaite:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u_n - v)_X \geq (Au, u - v)_X. \quad (\text{I.8})$$

Definition 1.6. *Un opérateur $A : X \rightarrow X$ borné tel que (I.6) et (I.7) impliquent (I.8) est appelé un opérateur pseudomonotone.*

Enfin, dans l'étude de certains problèmes quasi-statiques ou dynamiques, la notion d'opérateur de mémoire est nécessaire. Pour l'introduire nous considérons deux espaces vectoriels normés $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ et soient $C(\mathbb{R}_+; X)$, $C(\mathbb{R}_+; Y)$ les espaces des fonctions continues définies sur \mathbb{R}_+ à valeurs dans X et respectivement Y . Précisons que si X est un espace de Banach, $C(\mathbb{R}_+; X)$ peut être organisé comme un espace de Frechet, i.e. comme un espace métrique complet dans lequel la topologie correspondante est induite par une famille dénombrable de semi-normes. Enfin, on rappelle que la convergence d'une suite $\{x_n\}$ vers un élément x , dans $C(\mathbb{R}_+; X)$, est décrite comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \rightarrow x \quad \text{dans } C(\mathbb{R}_+; X) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty \text{ si et seulement si} \\ \max_{r \in [0, m]} \|x_n(r) - x(r)\|_X \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty, \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}. \end{array} \right. \quad (\text{I.9})$$

Nous introduisons la définition suivante.

Definition 1.7. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés. Un opérateur $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Y)$ est dit un opérateur de mémoire si pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $s_n > 0$ tel que

$$\|\mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t)\|_Y \leq s_n \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds \quad (\text{I.10})$$

$$\forall u_1, u_2 \in C(\mathbb{R}_+; X), \quad \forall t \in [0, n].$$

Pour les opérateurs de mémoire on a le théorème de point fixe suivant.

Theorème 1.8. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach et soit $\Lambda : C(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; X)$ un opérateur de mémoire. Alors, l'opérateur Λ admet un unique point fixe, i.e. il existe un unique élément $\eta^* \in C(\mathbb{R}_+; X)$ tel que $\Lambda\eta^* = \eta^*$.

1.2 Fonctions et ensembles

La plupart des fonctions utilisées dans les articles sont des fonctions convexes, voir des semi-normes. Pour cette raison nous rapellons les définition ci-dessous.

Definition 1.9. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace normé. Une fonction f de $X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si

$$f(tu + (1-t)v) \leq tf(u) + (1-t)f(v) \quad \forall u, v \in X, t \in [0, 1].$$

f est dite strictement convexe si l'inégalité ci-dessous est stricte pour $u \neq v$ et $t \in]0, 1[$.

Definition 1.10. $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ est appelé semi-norme si elle vérifie les propriétés suivantes

1. $j(u) \geq 0 \quad \forall u \in X$.
2. $j(\alpha u) = |\alpha|j(u) \quad \forall u \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
3. $j(u + v) \leq j(u) + j(v) \quad \forall u, v \in X$.

En outre, la notion de semi-continuité inférieure joue un rôle clé dans ce manuscrit.

Definition 1.11. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace vectoriel normé et K une partie fermée et non vide de X . Une fonction $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) si pour tout $u \in K$ et pour toute suite $\{u_n\} \subset K$ qui converge vers u dans X , nous avons

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n) \geq f(u).$$

Nous continuons avec le résultat suivant.

Proposition 1.12. Soit $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ une semi-norme sur l'espace normé $(X, \|\cdot\|_X)$. Alors, j est continue si et seulement s'il existe $m > 0$ tel que

$$j(v) \leq m\|v\|_X \quad \forall v \in X. \quad (\text{I.11})$$

La proposition 1.12 conduit au corollaire ci-dessous.

Corollaire 1.13. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace normé et j une semi-norme sur l'espace X qui satisfait l'inégalité (I.11). Alors, j est une fonction convexe et semi-continue inférieurement.

Rapellons par la suite la notion de différentielle de Gâteaux et l'inégalité du sous-gradient.

Definition 1.14. Soient $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un espace pré-Hilbertien, $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $u \in X$. On dit que j est Gâteaux différentiable en u s'il existe un élément $\nabla j(u) \in X$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{j(u + tv) - j(u)}{t} = (\nabla j(u), v)_X \quad \forall v \in X.$$

La fonction j est dite Gâteaux différentiable si elle est Gâteaux différentiable en chaque point $u \in X$. Dans ce cas l'opérateur $\nabla : X \rightarrow X$ s'appelle l'opérateur gradient de j .

Proposition 1.15. Soient $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un espace pré-Hilbertien, j une fonction convexe et Gâteaux-différentiable. Alors,

$$j(v) - j(u) \geq (\nabla j(u), v - u)_X \quad \forall u, v \in X. \quad (\text{I.12})$$

L'inégalité (I.12) est connue sous le nom de l'inégalité du sous-gradient.

Nous présentons également le Lemme de Gronwall qui sera utilisé pour montrer un résultat de convergence dans le quatrième article.

Lemme 1.16. (Lemme de Gronwall) Soient $T > 0$ et $f, g \in C([0, T])$. Supposons qu'il existe $c > 0$ tel que

$$f(t) \leq g(t) + c \int_0^t f(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$f(t) \leq g(t) + c \int_0^t g(s) e^{c(t-s)} ds \quad \forall t \in [0, T].$$

De plus, si g est non décroissante, nous avons que

$$f(t) \leq g(t) e^{ct} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (\text{I.13})$$

Avec l'utilisation fréquente des convergences faibles et fortes, la notion de sous-ensembles fermés et faiblement fermés est primordiale dans de nombreuses démonstrations tout le long de la thèse. Ainsi, nous les introduisons ci-dessous.

Definition 1.17. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace vectoriel normé. Un sous-ensemble $K \subset X$ est dit:

(i) (fortement) fermé si la limite de toute suite convergente d'éléments de K appartient à K , i.e.,

$$\{u_n\} \subset K, \quad u_n \rightarrow u \quad \text{dans } X \implies u \in K;$$

(ii) faiblement fermé si la limite faible de toute suite faiblement convergente d'éléments de K appartient à K , i.e.,

$$\{u_n\} \subset K, \quad u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } X \implies u \in K.$$

Il en résulte que tout sous-ensemble $K \subset X$ faiblement fermé est fortement fermé, la réciproque n'étant pas vraie. Toutefois, nous avons le résultat suivant.

Theorème 1.18. (Théorème de Mazur) Un sous-ensemble convexe d'un espace de Banach est (fortement) fermé si et seulement s'il est faiblement fermé.

1.3 Problème de minimisation

Dans le cadre d'un problème de contrôle optimal, nous chercherons à minimiser une fonctionnelle coût. Certaines démonstrations d'existence d'un contrôle optimal nécessiteront l'utilisation de résultats classiques d'existence pour des problèmes de minimisation. Nous en présentons ci-dessous.

Theorème 1.19 (Théorème de Weierstrass). Soient X un espace de Hilbert, K un sous-ensemble convexe, fermé et non-vide de X et soit $J : K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et s.c.i. Alors, J est bornée inférieurement et atteint son infimum sur K tant que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée

- (i) K est borné,
- (ii) J est coercive, i.e., $J(u) \rightarrow +\infty$ lorsque $\|u\|_X \rightarrow +\infty$. (I.14)

De plus, si J est strictement convexe, alors J atteint son infimum sur K en un unique point.

Le théorème de Weierstrass peut servir à démontrer le théorème suivant.

Theorème 1.20. Soient X un espace de Hilbert et K un sous-ensemble convexe, fermé et non-vide de X . Soient $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique continue, $j : K \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction convexe et s.c.i. et $f \in X$. On note par $J : K \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction donnée par

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) + j(v) - (f, v)_X, \quad \forall v \in K, \quad (\text{I.15})$$

et considérons le problème de minimisation

$$\text{Trouver } u \in K \text{ tel que } J(v) \geq J(u), \forall v \in K. \quad (\text{I.16})$$

Alors:

1) Un élément u est solution du problème de minimisation (I.16) ssi

$$u \in K, \quad a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X, \quad \forall v \in K.$$

2) Il existe une unique solution au problème de minimisation (I.16).

Nous avons fini les préliminaires d'analyse et passons à la partie concernant les inéquations variationnelles.

2 Inéquations variationnelles

Les modèles décrivant des problèmes de mécanique du contact sont formulés en terme de systèmes d'équations aux dérivées partielles, insolubles dans la plupart des cas. De part un certain procédé basé sur la formule de Green, ces systèmes sont reformulés sous la forme d'une inégalité variationnelle. Cette section y est consacrée.

2.1 Inéquations variationnelles elliptiques

Ici, nous nous intéressons aux inéquations variationnelles elliptiques de deuxième espèce, i.e., aux problèmes variationnels du type suivant: étant donné un espace de Hilbert X muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$, $K \subset X$, $A : X \rightarrow X$, $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $f \in X$, le problème consiste à trouver u tel que

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K. \quad (\text{I.17})$$

Un exemple d'une telle inéquation peut être trouvé dans le Théorème 1.20, où l'inégalité (I.16) caractérise le minimiseur de la fonctionnelle J .

Passons maintenant à un théorème d'existence et d'unicité pour l'inégalité (I.17) et, avec cet objectif, considérons les hypothèses suivantes:

$$K \text{ est un sous ensemble convexe, fermé et non vide de } X. \quad (\text{I.18})$$

$$A : X \longrightarrow X \text{ est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz.} \quad (\text{I.19})$$

$$j : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est convexe et semi-continue inférieurement.} \quad (\text{I.20})$$

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.1. *Supposons que les conditions (I.18), (I.19) et (I.20) sont vérifiées. Alors, pour tout $f \in X$, le problème (I.17) possède une solution unique $u \in K$.*

Nous présentons maintenant un autre type d'inéquations elliptiques, les inéquations quasi-variationnelles.

2.2 Inéquations quasi-variationnelles elliptiques

Dans certains problèmes, il arrive que la fonctionnelle j que l'on retrouve dans l'inéquation variationnelle dépend de la solution u . Nous parlons dans ce cas, d'inéquations quasi-variationnelles. Cela conduit à un nouveau type de problème. Considérons donc cette fois-ci $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ et le problème suivant: trouver u , tel que

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_X + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K. \quad (\text{I.21})$$

Pour prouver l'existence et l'unicité d'une telle solution, nous supposons que la fonctionnelle $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait les conditions suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Pour tout } \eta \in X, j(\eta, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ est convexe} \\ \text{et semi-continue inférieurement.} \\ \text{(b) Il existe } \alpha \geq 0 \text{ tel que} \\ j(\eta_1, v_2) - j(\eta_1, v_1) + j(\eta_2, v_1) - j(\eta_2, v_2) \\ \leq \alpha \|\eta_1 - \eta_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X \quad \forall \eta_1, \eta_2, v_1, v_2 \in X. \end{array} \right. \quad (\text{I.22})$$

Considérons aussi la condition de petitesse

$$m > \alpha. \quad (\text{I.23})$$

Sous ces hypothèses, nous avons le théorème suivant.

Théorème 2.2. *Supposons que les hypothèses (I.18), (I.19), (I.22), (I.23) sont vérifiées. Alors, pour tout $f \in X$, le problème (I.21) possède une solution unique $u \in K$.*

Nous nous intéressons enfin à un dernier type d'inéquations quasi-variationnelles qui nous servira pour les cas évolutifs, les inéquations quasi-variationnelles avec termes de mémoire.

2.3 Inéquations quasi-variationnelles avec terme de mémoire

Ici, nous présentons une autre classe d'inéquations quasi-variationnelles servant dans les cas évolutifs où l'historique du champ de déplacement doit être considéré. Elle implique l'utilisation d'opérateurs de mémoire comme définis dans le préliminaire d'analyse. Le cadre du problème est le suivant : soient X un espace de Hilbert, $K \subset X$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ une espace vectoriel normé, $A : X \rightarrow X$ et $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Y)$ deux opérateurs, $j : Y \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle et, enfin, soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$. Le problème se formule comme suit. Trouver une fonction $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ telle que

$$\begin{aligned} u(t) \in K, \quad & (Au(t), v - u(t))_X + j(\mathcal{S}u(t), u(t), v) \\ & - j(\mathcal{S}u(t), u(t), u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_X \quad \forall v \in K, \end{aligned} \quad (\text{I.24})$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Énonçons maintenant les hypothèses sous lesquelles on peut montrer l'existence et l'unicité de la solution de (I.24)

$$K \text{ est une partie convexe, fermée et non vide de } X. \quad (\text{I.25})$$

L'opérateur A est supposé fortement monotone et de Lipschitz, i.e.,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } m > 0 \text{ tel que} \\ \quad (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X \geq m \|u_1 - u_2\|_X^2 \\ \quad \forall u_1, u_2 \in X. \\ \text{(b) Il existe } M > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|Au_1 - Au_2\|_X \leq M \|u_1 - u_2\|_X \quad \forall u_1, u_2 \in X. \end{array} \right. \quad (\text{I.26})$$

On suppose également que la fonctionnelle $j : Y \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Pour tout } y \in Y, u \in X, j(y, u, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ est convexe} \\ \quad \text{et semi-continue inférieurement.} \\ \text{(b) Il existe } \alpha \geq 0 \text{ et } \beta \geq 0 \text{ tels que} \\ \quad j(y_1, u_1, v_2) - j(y_1, u_1, v_1) + j(y_2, u_2, v_1) - j(y_2, u_2, v_2) \\ \quad \leq \alpha \|y_1 - y_2\|_Y \|v_1 - v_2\|_X + \beta \|u_1 - u_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X \\ \quad \forall y_1, y_2 \in Y, \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in X. \end{array} \right. \quad (\text{I.27})$$

En outre, $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Y)$ est un opérateur de mémoire, donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ il existe } s_n > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t)\|_Y \leq s_n \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds \\ \quad \forall u_1, u_2 \in C(\mathbb{R}_+; X), \forall t \in [0, n]. \end{array} \right. \quad (\text{I.28})$$

Nous imposons également pour f la régularité suivante

$$f \in C(\mathbb{R}_+; X). \quad (\text{I.29})$$

Et, enfin, la condition de petitesse suivante doit être satisfaite

$$m > \beta. \quad (\text{I.30})$$

Ainsi, avec la notation $C(\mathbb{R}_+; K)$ pour l'ensemble des fonctions définies sur \mathbb{R}_+ à valeurs dans $K \subset X$, nous obtenons le résultat suivant.

Theorème 2.3. *Supposons que les conditions (I.25)–(I.30) sont vérifiées. Alors, l'inégalité (I.24) possède une solution unique vérifiant $u \in C(\mathbb{R}_+; K)$.*

En conclusion, tous ces résultats d'existence et d'unicité présentés ci-dessus forment une base sur laquelle repose une partie des résultats démontrés tout au long de la thèse.

3 Espaces fonctionnels et cadre physique

Dans cette partie, nous introduirons tous les éléments nécessaires à la modélisation mathématique d'un problème de contact mécanique. Dans un premier temps, nous définirons les espaces fonctionnels dans lesquels vivent les fonctions utilisées, tels que les espaces de Sobolev et de Lebesgue ainsi que quelques propriétés en résultant. Nous illustrerons par la suite le cadre physique général des problèmes de mécanique du contact vus dans cette thèse.

3.1 Espaces fonctionnels

Nous introduisons maintenant les types d'espaces fonctionnels que nous utiliserons dans cette thèse, leur produit scalaire ainsi que leur norme associée et quelques autres considérations. Ci-dessous Ω représente un domaine borné de \mathbb{R}^d ($d = 1, 2, 3$) de frontière régulière Γ .

Les espaces $L^p(\Omega)$. Considérons $p \in [1, \infty[$. Alors $L^p(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions mesurables sur Ω à valeurs réelles telles que

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Notons que c'est un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ définie ci-dessus. Il est également séparable et réflexif pour $p \neq 1$. Précisons également que pour $p = \infty$, il reste un espace de Banach muni de la norme

$$\|v\| = \sup_{x \in \Omega} \text{ess}|v(x)|.$$

Dans le cas particulier des problèmes mécaniques que nous étudions, on prend $p = 2$ et l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire que nous utiliserons et défini par

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

Nous utilisons des notations similaires pour les espaces $L^p(\Gamma_i)$ où Γ_i représente une partie mesurable de Γ .

Les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$. Les espaces de Sobolev sont intimement liés aux espaces L^p , par définition même. En effet, soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty]$. Nous définissons l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) \quad \text{tel que} \quad D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \text{avec} \quad |\alpha| \leq k \}$$

qui est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme suivante.

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = +\infty, \end{cases}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ est un multi-indice et D^α représente l'opérateur différentiel défini par

$$D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \quad \forall v \in W^{k,p}(\Omega).$$

Dans le cas particulier $p = 2$, à l'image de $L^2(\Omega)$, l'espace $W^{k,2}(\Omega)$, que l'on notera $H^k(\Omega)$, est également un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx \quad \forall u, v \in H^k(\Omega).$$

En particulier, nous utiliserons dans cette thèse l'espace $W^{1,2}(\Omega)$, soit $H^1(\Omega)$.

Énonçons maintenant un théorème fondamental qui sera utilisé de nombreuses fois dans cette thèse.

Théorème 3.1. (*Théorème de trace de Sobolev*) Soit Ω un ouvert borné et lipschitzien de \mathbb{R}^d . Alors, il existe une application linéaire et continue $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ telle que

$$\gamma v = v|_{\Gamma} \quad \text{lorsque } v \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

De plus, l'application $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est compacte, i.e., de toute suite bornée $\{v_n\}$ de $H^1(\Omega)$, il existe une sous suite $\{v_{n_p}\} \subset \{v_n\}$ telle que $\{\gamma v_{n_p}\}$ est une suite convergente dans $L^2(\Gamma)$.

Enfin, rappelons que tout au long de cette thèse nous allons utiliser des espaces spécifiques pour le champ des déplacements, le champ des contraintes et le champ des tenseurs d'élasticité. Il s'agit des espaces V , Q et \mathbf{Q}_∞ définis en page 15, dont la norme et le produit scalaire seront précisés ultérieurement.

3.2 Cadre physique

Soit $d \in \{1, 2, 3\}$. On note par \mathbb{S}^d l'ensemble des tenseurs symétriques de second ordre sur \mathbb{R}^d ou, de manière équivalente, l'espace des matrices réelles symétriques d'ordre d . On introduit pour \mathbb{S}^d et \mathbb{R}^d leur produit scalaire et norme associée

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_i v_i, \quad \|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v}, \mathbf{v})^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \mathbf{u} = (u_i), \quad \mathbf{v} = (v_i) \in \mathbb{R}^d$$

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = \sigma_{ij}\tau_{ij}, \quad \|\boldsymbol{\tau}\| = (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau})^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}), \quad \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d$$

où les indices i et j parcourent l'ensemble $\{1, 2, \dots, d\}$. Remarquons également que sauf précision contraire, ici et partout dans cette thèse, la convention de sommation sur les indices répétés est utilisée.

Nous considérons maintenant un corps occupant un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ avec une frontière Lipschitzienne Γ divisée en trois parties disjointes mesurables (ou quatre dans des cas particuliers) $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. Nous posons l'hypothèse $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$. Le corps est fixé sur Γ_1 , soumis à des forces de traction de densité \mathbf{f}_2 sur Γ_2 et en contact avec l'obstacle sur Γ_3 . Nous rappelons également que le corps Ω est soumis à des forces volumiques de densité \mathbf{f}_0 .

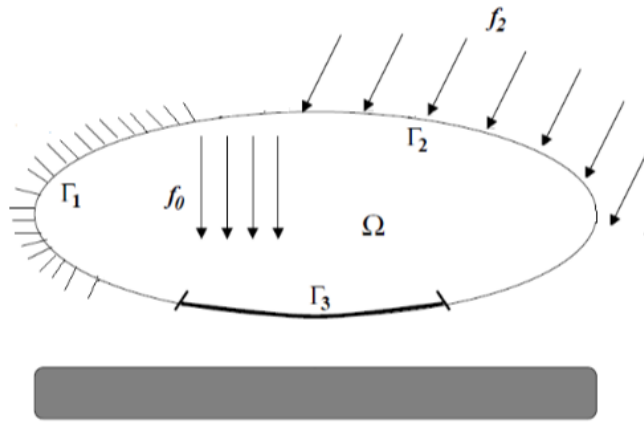


Figure .1.1 : Cadre physique

Décrivons maintenant le modèle mathématique associé au cadre physique ci-dessus. Tout d'abord, rappelons que les inconnues du problème sont le champ de déplacement $\mathbf{u} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ et le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{S}^d$. Alors, l'évolution du corps est modélisée par l'équation du mouvement de Cauchy

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+. \quad (\text{I.31})$$

Dans cette thèse, nous nous intéressons à des problèmes quasi-statiques qui décrivent des cas où le terme $\rho \ddot{\mathbf{u}}$ peut être négligé, dû au fait que le champ de vitesse est supposé ne pas ou très peu varier. Ainsi l'équation du mouvement devient l'équation d'équilibre définie par

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+. \quad (\text{I.32})$$

Pour compléter le modèle, nous devons prendre en compte les conditions aux limites sur chaque partie de Γ . Sur Γ_1 , nous avons précisé que le corps était fixé. En terme mathématique cela signifie que le champ de déplacement \mathbf{u} y est nul, i.e.,

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+. \quad (\text{I.33})$$

Cette condition représente la condition aux limites de déplacement. Sur Γ_2 , le corps est soumis à des forces de traction de densité \mathbf{f}_2 , ce qui se traduit par

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times \mathbb{R}_+. \quad (\text{I.34})$$

Cette condition représente la condition aux limites de traction.

Dans le cas statique les inconnues \mathbf{u} et $\boldsymbol{\sigma}$ ainsi que les données \mathbf{f}_0 et \mathbf{f}_2 ne dépendent pas du temps. Alors, l'équation (I.32) est vérifiée en Ω , la condition (I.31) a lieu sur Γ_1 et, enfin, la condition (I.34) a lieu sur Γ_2 .

A ce stade, nous n'avons pas encore tous les éléments pour dresser un modèle qui pourrait être résolu. En effet, des informations propres au matériau constituant le corps doivent être précisées par le biais de lois de comportement et de plus, nous devons spécifier la condition aux limites de contact sur Γ_3 . Cela fait l'objet de la section suivante.

4 Lois de comportement

Les propriétés des matériaux considérés, telles que l'élasticité ou la plasticité, sont décrites mathématiquement par des équations reliant le champ des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ et le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, appelées lois de comportement. Cette section y est dédiée.

4.1 Lois de comportement élastiques

Les lois de comportement élastiques sont divisées selon les matériaux en deux parties, les lois de comportement élastiques linéaire ou non-linéaire.

Dans le cas linéaire, dans un cadre unidimensionnel, la relation entre contrainte et déformation se fait par la loi de Hooke

$$\sigma = E \varepsilon,$$

où $E > 0$ s'appelle le *module de Young*. Cette loi est représentée dans la Figure ci-dessous.

On peut généraliser cette loi au cas multidimensionnel par

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \quad (\text{I.35})$$

où $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl})$ est un tenseur d'ordre quatre qui s'appelle *tenseur d'élasticité*. Ses composantes \mathcal{E}_{ijkl} s'appellent *coefficients d'élasticité* et elles sont indépendantes du tenseur des déformations. L'équation (I.35) s'écrit également sous la forme

$$\sigma_{ij} = \mathcal{E}_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \quad 1 \leq i, j, k, l \leq d. \quad (\text{I.36})$$

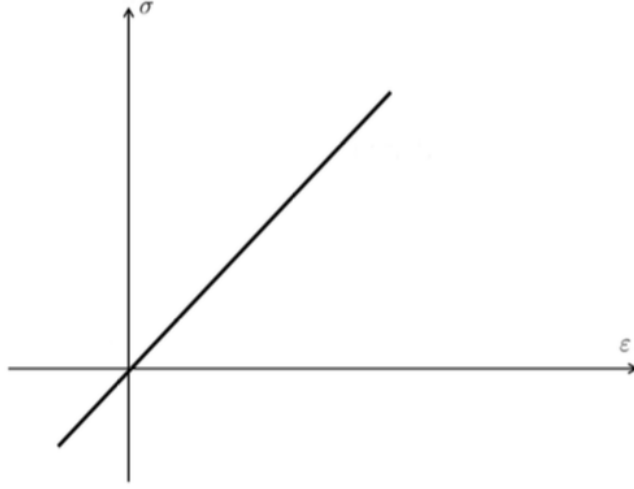


Figure .1.2 : Loi de comportement élastique linéaire

Les hypothèses usuelles sur ce tenseur sont les suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) } \mathcal{E}_{ijkl} \in L^\infty(\Omega) \quad 1 \leq i, j, k, l \leq d. \\ \text{(c) } \mathcal{E}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathcal{E}\boldsymbol{\sigma} \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d, \quad \text{p.p. dans } \Omega. \\ \text{(d) Il existe } \alpha_0 > 0 \text{ tel que} \\ \quad \mathcal{E}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} \geq \alpha_0 \|\boldsymbol{\tau}\|^2 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d, \quad \text{p.p. dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (\text{I.37})$$

Passons maintenant aux matériaux élastiques non linéaires. Dans le cas unidimensionnel, la loi de comportement s'écrit

$$\sigma = f(\varepsilon), \quad (\text{I.38})$$

où f est une fonction non linéaire à valeurs réelles. En Figure .1.3 nous montrons un exemple graphique d'une loi de comportement élastique non linéaire.

Enfin, dans le cas tridimensionnel, nous avons

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \quad (\text{I.39})$$

où $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ est l'opérateur d'élasticité, supposé non linéaire. Un exemple de cette loi est donné par

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \beta (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - P_K\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})).$$

Ici \mathcal{E} est un tenseur d'ordre quatre, β est une constante positive, K est un sous ensemble convexe, fermé et non vide de \mathbb{S}^d tel que $\mathbf{0}_{\mathbb{S}^d} \in K$ et $P_K : \mathbb{S}^d \rightarrow K$ est l'opérateur de projection sur K .

On retrouve dans le troisième article une loi similaire dans le cas dual, $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ y étant donc inversés.

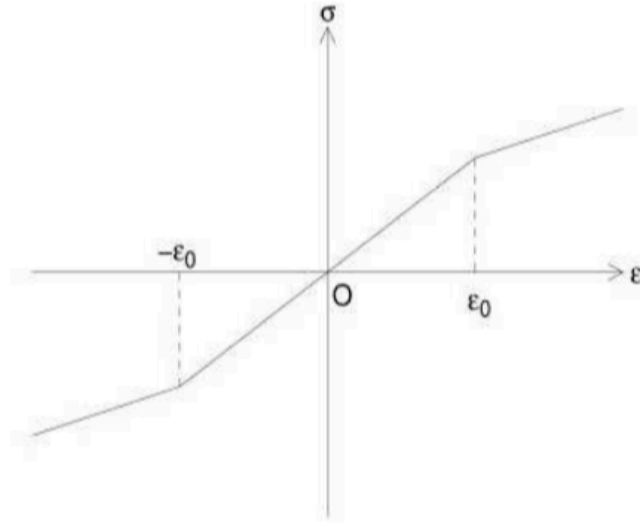


Figure .1.3 : Loi de comportement élastique non linéaire

4.2 Loi de comportement viscoélastique

Nous présentons ici une loi de comportement viscoélastique à mémoire longue, utilisée dans le quatrième article de cette thèse. Elle est donnée par

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds, \quad (\text{I.40})$$

où $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ est l'opérateur d'élasticité et \mathcal{R} est un opérateur de relaxation. Comme le montre cette relation, \mathcal{R} dépend du temps. Dans le cas linéaire, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$, qui satisfait (I.40), est donné par

$$\sigma_{ij}(t) = f_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t r_{ijkl}(t-s) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}(s)) ds,$$

où f_{ijkl} et r_{ijkl} représentent respectivement les composantes du tenseur d'élasticité et de relaxation.

5 Conditions aux limites de contact

Intéressons-nous maintenant aux conditions aux limites de contact, imposées sur la partie Γ_3 de la frontière Γ .

5.1 Condition de contact de Signorini

La condition de Signorini modélise un processus de contact entre un corps déformable et une fondation rigide impénétrable. Cette loi s'obtient de la manière suivante. La

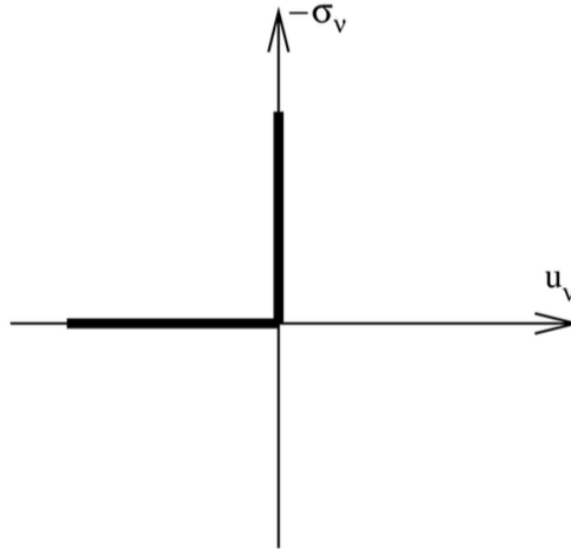


Figure .1.4 : Condition de contact de Signorini

non-pénétrabilité de la fondation se traduit par la condition

$$u_\nu \leq 0. \quad (\text{I.41})$$

Ainsi pour un point de Γ_3 vérifiant cette condition, nous avons deux cas de figure. Soit $u_\nu < 0$ et dans ce cas il n'y a pas de contact entre le corps et la fondation. Par conséquent, la fondation ne réagit pas et ainsi nous avons $\sigma_\nu = 0$. D'autre part, si $u_\nu = 0$ il y a contact et la fondation exerce une force orientée vers le corps, d'où $\sigma_\nu \leq 0$. Ainsi, nous avons la condition de compression mais aussi de complémentarité s'écrivant

$$\sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu u_\nu = 0. \quad (\text{I.42})$$

Si nous rassemblons les trois relations, nous avons

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu u_\nu = 0.$$

Alternativement, nous pouvons considérer un interstice g entre le corps et l'obstacle, et par le même raisonnement, cela se traduit par

$$u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu (u_\nu - g) = 0.$$

Dans le cas d'une fondation déformable, la pénétrabilité de celle-ci peut être modélisée par une fonction dite de compliance normale. Nous nous y intéressons ci-dessous.

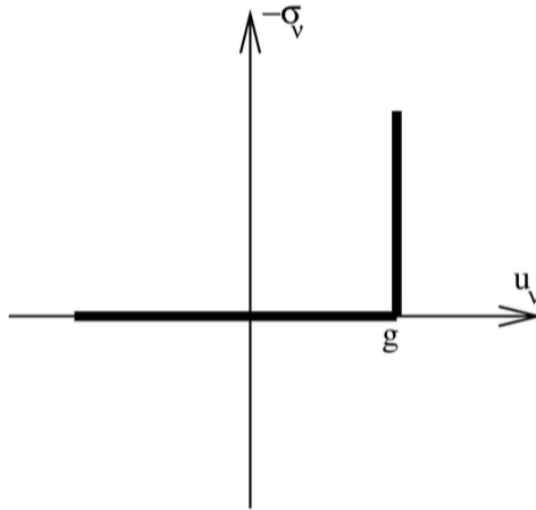


Figure 1.5 : Condition de contact de Signorini avec interstice g

5.2 Condition de compliance normale

Ici, nous considérons un contact entre un corps et une fondation déformable. Ce processus se modélise à l'aide de la condition

$$-\sigma_\nu = p(u_\nu), \quad (\text{I.43})$$

$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction décrivant la pénétrabilité de la fondation, qui s'annule pour tout argument négatif

$$p(r) = 0 \quad \text{si} \quad r \leq 0. \quad (\text{I.44})$$

Ainsi, la réaction de la fondation sur le corps est fonction de sa pénétration. La Figure 1.6 représente le contact avec compliance normale dans le cas particulier

$$p(r) = ar^+,$$

où r^+ désigne la partie positive de r , i.e. $r^+ = \max\{r, 0\}$ et où $a > 0$ désigne le coefficient directeur de la partie linéaire.

De manière alternative, nous retrouvons dans les articles une combinaison d'un processus de contact de Signorini avec interstice et d'un processus avec compliance normale. Elle s'exprime sous la forme

$$\begin{cases} u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu + p(u_\nu) \leq 0, \\ (u_\nu - g)(\sigma_\nu + p(u_\nu)) = 0, \end{cases}$$

Elle modélise le contact entre un corps déformable et une fondation rigide impénétrable recouverte d'une couche déformable autorisant néanmoins une pénétration limitée.

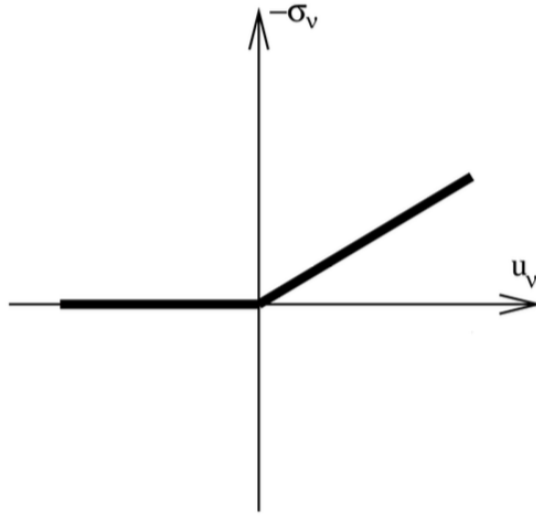


Figure .1.6 : Condition de contact avec compliance normale

6 Lois de frottement

La première condition que l'on retrouve dans l'article 1 est un processus dans lequel la surface de contact est idéalisée et ainsi nous négligeons le frottement, ce qui se traduit par l'égalité

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0}.$$

De fait, cela signifie que la contrainte tangentielle s'annule le long du processus.

Dans les autres articles, nous considérons une surface non idéalisée où le frottement est modélisé par la loi de Coulomb. Nous proposons d'en présenter sa version statique, donnée par

$$\|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq F_b, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = -F_b \frac{\mathbf{u}_\tau}{\|\mathbf{u}_\tau\|} \quad \text{si } \mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0}. \quad (\text{I.45})$$

Décrivons en détail cette loi de frottement. L'inégalité dans (I.45) indique que l'intensité de la contrainte tangentielle est bornée par une fonction appelée *seuil de frottement* qui représente la résistance maximale au frottement que la surface peut supporter. Une fois que le glissement commence, la force de frottement s'oppose à la direction du mouvement et son intensité atteint le seuil maximal, tel qu'il résulte du reste des conditions dans (I.45).

Dans les différents articles, le seuil de frottement est choisi comme suit

$$F_b = F_b(\boldsymbol{\sigma}_\nu) = \mu |\boldsymbol{\sigma}_\nu|, \quad (\text{I.46})$$

où $\mu > 0$ est le coefficient de frottement. Notons juste que d'autres choix sont possible

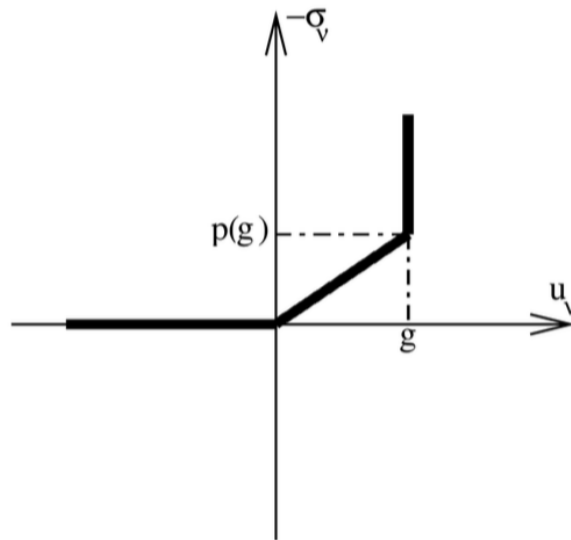


Figure .1.7 : Condition de contact avec compliance normale et contrainte unilatérale

tels que

$$F_b = F_b(x) \tag{I.47}$$

et

$$F_b = \mu |\sigma_\nu| (1 - \delta |\sigma_\nu|)_+ \tag{I.48}$$

Conclusion. Nous avons décrit tout le long du préambule tous les éléments mathématiques et physiques pour pouvoir appréhender les quatre articles constituant cette thèse. Nous proposons maintenant des résumés de ceux-ci. Toutes les lois de comportement, conditions de contact et lois de frottement sont traitées.

PARTIE II

DESCRIPTIF DES PROBLEMES ETUDIES

1 Contrôle optimal d'un problème de contact sans frottement avec contrainte unilatérale

Nous considérons un modèle mathématique décrivant l'équilibre d'un corps élastique en contact avec un obstacle rigide-plastique. Le contact est sans frottement et modélisé avec une nouvelle condition qui implique des contraintes unilatérales. Nous décrivons le problème et déterminons une formulation faible sous la forme d'une inégalité variationnelle elliptique pour le champ de déplacement. Ensuite, nous établissons l'existence et l'unicité d'une solution faible au problème et démontrons sa dépendance continue par rapport aux données. Alors, nous énonçons un problème abstrait d'optimisation pour lequel nous prouvons l'existence d'un minimiseur. La preuve est basée sur des arguments de compacité et de semi-continuité inférieure. Enfin, nous utilisons ce résultat dans l'étude de quatre problèmes de contrôle optimal associés au modèle de contact. Nous présentons également une version unidimensionnelle du problème pour laquelle l'expression analytique de la solution est obtenue. Nous illustrons notre résultat théorique dans l'étude de cet exemple élémentaire

1.1 Le modèle

On considère un corps élastique qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Sa frontière est subdivisée en trois parties disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 . Le corps est fixé sur Γ_1 , soumis à des forces volumiques sur Ω et à des forces de tractions sur Γ_2 . Enfin, le contact entre le corps et l'obstacle a lieu sur Γ_3 . Le problème de contact est modélisé comme suit.

Problème \mathcal{P} . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ tels que*

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{II.1})$$

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{II.2})$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (\text{II.3})$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2, \quad (\text{II.4})$$

$$u_\nu \leq g, \quad \left. \begin{array}{ll} \sigma_\nu = 0 & \text{si } u_\nu < 0 \\ -F < \sigma_\nu < 0 & \text{si } u_\nu = 0 \\ \sigma_\nu = -F & \text{si } 0 < u_\nu < g \\ \sigma_\nu \leq -F & \text{si } u_\nu = g \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3, \quad (\text{II.5})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (\text{II.6})$$

On s'attarde ici à décrire le modèle ligne par ligne. L'équation (II.1) représente la loi de comportement élastique du matériau composant le corps, où \mathcal{F} est l'opérateur d'élasticité. L'équation (II.2) représente l'équation d'équilibre. Le processus de contact étant statique, les termes d'inertie sont négligés. Les équations (II.3) et (II.4) définissent les conditions aux limites de déplacement et de traction. Enfin, (II.5) et (II.6) correspondent aux conditions aux limites de contact.

1.2 Formulation variationnelle

Pour établir la formulation variationnelle du problème \mathcal{P} , certains éléments restent à préciser. On définit d'abord $Y = L^2(\Omega)^d \times L^2(\Gamma_2)^d$ l'espace de Hilbert produit muni de son produit scalaire canonique $(\cdot, \cdot)_Y$, la norme associée $\|\cdot\|_Y$ et les espaces

$$V = \{ \mathbf{v} = (v_i) \in H^1(\Omega)^d : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1 \}, \quad (\text{II.7})$$

$$Q = \{ \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) : \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) \}, \quad (\text{II.8})$$

munis de leur produit scalaire canonique et leur norme associée, notés respectivement $(\cdot, \cdot)_V$, $\|\cdot\|_V$, $(\cdot, \cdot)_Q$ et $\|\cdot\|_Q$.

On considère l'opérateur $\pi : V \rightarrow Y$ défini par

$$\pi \mathbf{v} = (\mathbf{v}, \gamma_2 \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

où $\gamma_2 \mathbf{v}$ représente la trace de la fonction v sur la frontière Γ_2 . L'opérateur π est linéaire et continu et de ce fait, il existe $d_0 > 0$ tel que

$$\|\pi \mathbf{v}\|_Y \leq d_0 \|\mathbf{v}\|_V, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Notons également que π est un opérateur compact.

Dans l'étude de problème \mathcal{P} , les hypothèses sur \mathcal{F} suivantes sont supposées vraies

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) Il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) Il existe } m_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{quelque soit } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(e) } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \in Q. \end{array} \right.$$

De même, les hypothèses suivantes concernant les données du problème sont supposées vérifiées:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_0 &\in L^2(\Omega)^d, \\
\mathbf{f}_2 &\in L^2(\Gamma_2)^d, \\
F &\in L^2(\Gamma_3), F(\mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_3, \\
g &> 0.
\end{aligned}$$

Sous ces hypothèses on introduit l'ensemble $K \subset V$, l'opérateur $A : V \longrightarrow V$, la fonction $j : V \longrightarrow \mathbb{R}$ et l'élément $\mathbf{f} \in Y$ définis par

$$\begin{aligned}
K &= \{\mathbf{v} \in V : v_\nu \leq g \text{ sur } \Gamma_3\}, \\
(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V &= \int_{\Omega} \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \\
j(\mathbf{v}) &= \int_{\Gamma_3} F v_\nu^+ \, da \quad \forall \mathbf{v} \in V, \\
\mathbf{f} &= (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2),
\end{aligned}$$

où \mathbb{R}_+ représente la partie positive de \mathbb{R} . Notons que la définition de π implique de plus que

$$(\mathbf{f}, \pi\mathbf{v})_Y = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} \, da, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

En utilisant le formule de Green, les éléments définis précédemment et les conditions aux limites du problème \mathcal{P} , on obtient la formulation variationnelle du problème \mathcal{P} suivante

Problème \mathcal{P}_V . *Trouver un champ de déplacement \mathbf{u} tel que*

$$\mathbf{u} \in K, \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V + j(\mathbf{v}) - j(\mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \pi\mathbf{v} - \pi\mathbf{u})_Y \quad \forall \mathbf{v} \in K.$$

En partant du problème \mathcal{P} initial formulé en un système d'équations aux dérivées partielles, trop complexe pour en établir une solution classique, on se retrouve avec un problème formulé en une seule inégalité variationnelle. Ce problème peut-être étudié et c'est le sujet de la section suivante.

1.3 Existence, unicité et résultat de convergence

Cette section commence par un résultat d'existence et d'unicité.

Theorème 1.1. *Sous les hypothèses de la section précédente, le problème \mathcal{P}_V admet une unique solution.*

La preuve consiste à appliquer le Théorème 1.1. Ainsi, on vérifie les propriétés sur K, A et j . On applique également le Théorème de Riesz-Fréchet pour déduire $\tilde{\mathbf{f}} \in V$ tel que

$$(\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{v})_V = (\mathbf{f}, \pi \mathbf{v})_Y, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Après avoir établi l'existence et l'unicité de la solution au problème \mathcal{P}_V , on s'intéresse au comportement de la solution par rapport aux données, en particulier, on souhaite s'assurer qu'une petite perturbation des données n'implique qu'une petite perturbation de la solution. Pour ce faire, on introduit $\mathbf{f}_{0\rho}, \mathbf{f}_{2\rho}, F_\rho$ et g_ρ , des perturbations de $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F$ et g , satisfaisant les mêmes conditions de régularité. Par ailleurs, on considère $K_\rho \subset V$, $j_\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ et l'élément $\mathbf{f}_\rho \in Y$ défini par

$$\begin{aligned} K_\rho &= \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v}_\nu \leq g_\rho \text{ sur } \Gamma_3\}, \\ j_\rho(\mathbf{v}) &= \int_{\Gamma_3} F_\rho \mathbf{v}_\nu^+ da \quad \forall \mathbf{v} \in V, \\ \mathbf{f}_\rho &= (\mathbf{f}_{0\rho}, \mathbf{f}_{2\rho}). \end{aligned}$$

De fait, on considère la perturbation du problème \mathcal{P}_V suivante.

Problème \mathcal{P}_V^ρ . *Trouver un champ de déplacement \mathbf{u}_ρ tel que*

$$\mathbf{u}_\rho \in K_\rho, \quad (A\mathbf{u}_\rho, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\rho)_V + j_\rho(\mathbf{v}) - j_\rho(\mathbf{u}_\rho) \geq (\mathbf{f}_\rho, \pi \mathbf{v} - \pi \mathbf{u}_\rho)_Y \quad \forall \mathbf{v} \in K_\rho. \quad (\text{II.9})$$

De manière évidente par rapport au théorème précédent, le Problème \mathcal{P}_V^ρ admet une unique solution.

Le second résultat de cette section est le suivant

Théorème 1.2. *Supposons que*

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{0\rho} &\rightarrow \mathbf{f}_0 \text{ dans } L^2(\Omega)^d \text{ lorsque } \rho \rightarrow 0, \\ \mathbf{f}_{2\rho} &\rightarrow \mathbf{f}_2 \text{ dans } L^2(\Gamma_2)^d \text{ lorsque } \rho \rightarrow 0, \\ F_\rho &\rightarrow F \text{ dans } L^2(\Gamma_3) \text{ lorsque } \rho \rightarrow 0, \\ g_\rho &\rightarrow g \text{ lorsque } \rho \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Alors, la solution \mathbf{u}_ρ du Problème \mathcal{P}_V^ρ converge vers la solution \mathbf{u} du Problème \mathcal{P}_V , i.e.,

$$\mathbf{u}_\rho \rightarrow \mathbf{u} \text{ dans } V \text{ lorsque } \rho \rightarrow 0, \quad (\text{II.10})$$

Pour prouver ce résultat, on introduit le problème intermédiaire suivant: trouver $\tilde{\mathbf{u}}_\rho$ tel que

$$\tilde{\mathbf{u}}_\rho \in K, \quad (A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{u}}_\rho)_V + j(\mathbf{v}) - j(\tilde{\mathbf{u}}_\rho) \geq (\mathbf{f}, \pi \mathbf{v} - \pi \tilde{\mathbf{u}}_\rho)_Y \quad \forall \mathbf{v} \in K.$$

L'existence et l'unicité de sa solution $\tilde{\mathbf{u}}_\rho$ est également une conséquence de notre premier théorème. On énonce et prouve ensuite les lemmes suivants.

Lemme 1.3. *La sous-suite $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\}$ converge faiblement vers \mathbf{u} dans V , c'est-à-dire*

$$\tilde{\mathbf{u}}_\rho \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ dans } V \text{ lorsque } \rho \longrightarrow 0. \quad (\text{II.11})$$

Lemme 1.4. *La suite $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\}$ converge fortement vers \mathbf{u} dans V , c'est-à-dire*

$$\tilde{\mathbf{u}}_\rho \longrightarrow \mathbf{u} \text{ dans } V \text{ lorsque } \rho \longrightarrow 0. \quad (\text{II.12})$$

La preuve consiste ensuite à relier l'ensemble K et sa perturbation K_ρ pour utiliser leur structure spécifique afin de combiner les deux inégalités résultantes pour obtenir une troisième inégalité simplifiée et à partir de laquelle, en utilisant toutes les propriétés déjà établies, on trouve la convergence de $\{\tilde{u}_\rho\}$ vers u_ρ . Enfin, en jouant avec l'inégalité triangulaire sur les normes, on obtient la convergence souhaitée, c'est-à-dire

$$\mathbf{u}_\rho \longrightarrow \mathbf{u} \text{ dans } V \text{ lorsque } \rho \longrightarrow 0. \quad (\text{II.13})$$

Ce résultat termine notre section. Tous les résultats de celle-ci seront essentiels pour les problèmes de contrôle optimal de la section qui suit.

1.4 Problèmes de contrôle optimal

Dans cette section, on étudie un problème de contrôle optimal abstrait dont on prouve la solvabilité puis nous appliquons ce résultat abstrait à quatre problèmes bien concrets issus du modèle que nous étudions. Le cadre fonctionnel est le suivant. On considère un espace de Banach réflexif Z muni de la norme $\|\cdot\|_Z$ et soient X et W , des espaces normés munis de leur norme $\|\cdot\|_X$ et $\|\cdot\|_W$ respectivement. Supposons maintenant que U est un sous ensemble faiblement fermé de Z , i.e.,

$$\{\theta_n\} \subset U, \theta_n \rightharpoonup \theta \text{ dans } Z \implies \theta \in U. \quad (\text{II.14})$$

$T : U \longrightarrow X$ est une application compacte, i.e.

$$\{\theta_n\} \subset U, \theta_n \rightharpoonup \theta \text{ dans } Z \implies T\theta_n \longrightarrow T\theta \text{ dans } X. \quad (\text{II.15})$$

$S : X \longrightarrow W$ est un opérateur continu, i.e.

$$\{u_n\} \subset X, u_n \longrightarrow u \text{ dans } X \implies Su_n \longrightarrow Su \text{ dans } W. \quad (\text{II.16})$$

$$\phi \in W. \quad (\text{II.17})$$

$$\alpha > 0, \beta > 0. \quad (\text{II.18})$$

On construit ainsi la fonctionnelle $J : U \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$J(\theta) = \alpha \|ST(\theta) - \phi\|_W + \beta \|\theta\|_Z, \forall \theta \in U. \quad (\text{II.19})$$

Ainsi, le problème abstrait est le suivant

Problème \mathcal{Q} . *Trouver $\theta^* \in U$ tel que*

$$J(\theta^*) = \min_{\theta \in U} J(\theta).$$

Pour ce problème on a le résultat d'existence suivant.

Theorème 1.5. *Supposons que les hypothèses précédentes soient vérifiées. Alors, il existe au moins une solution $\theta^* \in U$ au Problème \mathcal{Q} .*

La preuve se fait en plusieurs étapes. On considère d'abord une suite minimisante pour J et l'on montre par l'absurde qu'elle est bornée. Puis, en définissant

$$\omega = \inf_{\theta \in U} J(\theta),$$

alors par des arguments classiques d'analyses basés sur les suites bornées et les convergences faibles, on montre que $\omega \geq J(\theta^*)$ et $\omega \leq J(\theta^*)$ d'où l'égalité et le résultat.

En appliquant ce résultat à notre modèle, on passe en revue quatre cas particuliers de contrôle optimal en variant les contrôles. Ce qui nous conduit à quatre problèmes de contrôle dont la solvabilité découle du résultat abstrait. Notons juste que pour chacun des quatre cas, il a fallu bien sûr identifier correctement les espaces Z, X et W ainsi que le sous-ensemble U et enfin les opérateurs T et S .

1.5 Un exemple unidimensionnel

On présente ici, un exemple unidimensionnel simplifié du problème \mathcal{P} dans le cas particulier où $\Omega = (0, 1), \Gamma_1 = \{0\}, \Gamma_2 = \{\emptyset\}$ et $\Gamma_3 = \{1\}$. Notons que dans ce cas, le tenseur linéarisé des déformations est donné par $\varepsilon = u'$. De plus, la tige est censée avoir un comportement d'élasticité linéaire et donc l'opérateur \mathcal{F} est défini par $\mathcal{F}\varepsilon = E\varepsilon$ où $E > 0$ représente le module de Young du matériau. Enfin, on suppose que la densité des forces volumiques ne dépend pas de la variable spatiale alors $f \in \mathbb{R}$. Ainsi le problème devient

Problème \mathcal{P}^{1d} . *Trouver un champ de déplacements $u: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et un champ de contraintes $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que*

$$\begin{aligned}
\sigma(x) &= E u'(x) \quad \text{pour } x \in (0, 1), \\
\sigma'(x) + f &= 0 \quad \text{pour } x \in (0, 1), \\
u(0) &= 0, \\
u(1) \leq g, & \left. \begin{array}{ll} \sigma(1) = 0 & \text{si } u(1) < 0 \\ -F < \sigma(1) < 0 & \text{si } u(1) = 0 \\ \sigma(1) = -F & \text{si } 0 < u(1) < g \\ \sigma(1) \leq -F & \text{si } u(1) = g \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Pour déterminer la formulation variationnelle du problème \mathcal{P}^{1d} , on utilise

$$V = \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = 0\},$$

et l'ensemble

$$K = \{u \in V : u(1) \leq g\}.$$

Puis, en définissant la fonctionnelle

$$j(v) = \int_{\Gamma_3} F v_v^+ dx,$$

et en utilisant la formule de Green ainsi que les conditions aux limites, on obtient

Problème \mathcal{P}_V^{1d} . *Trouver un champ de déplacements $u \in K$ tel que*

$$\int_0^1 E u'(v' - u') dx + \int_0^1 F v(1)^+ dx - \int_0^1 F u(1)^+ dx \geq \int_0^1 f(v - u) dx \quad \forall v \in K.$$

Cette version simplifiée du modèle permet de calculer l'expression analytique de u et σ et ainsi mettre en corrélation les différents états physiques du système avec des relations d'ordre entre les données. Par exemple, on détermine que

$$0 < u(1) \implies 0 < f - 2F \implies 0 \leq 2F < f.$$

Enfin, en attribuant des valeurs arbitraires à une partie des données, on peut construire par exemple un champ de déplacement u dépendant uniquement de g et de ce fait, construire une fonctionnelle à minimiser dépendante de u et de g . Celle-ci fait intervenir des coefficients arbitraires α et β selon lesquels le contrôle optimal change, par exemple

$$\mathcal{L}(u, g) = \begin{cases} (\beta - \alpha)g + 4\alpha & \text{si } 1 \leq g \leq 3 \\ \beta g + \alpha & \text{si } g > 3. \end{cases}$$

Dans ce cas:

a) Si $\beta > \alpha > 0$ alors le problème de contrôle optimal admet une unique solution (u^*, g^*) où $g^* = 1$ et u^* est solution du problème avec $g = g^*$.

b) Si $\beta = \alpha$ alors le problème de contrôle optimal admet une infinité de solutions de la forme (u^*, g^*) où g^* prend ses valeurs dans l'intervalle $[1, 3]$ et u^* est solution du problème avec $g = g^*$.

c) Si $0 < \beta < \alpha$ alors le problème de contrôle optimal admet une unique solution (u^*, g^*) où $g^* = 3$ et u^* est solution du problème avec $g = g^*$.

Conclusion. Dans cet article, nous avons traité un problème relativement simple dû à l'absence de frottement mais pas moins intéressant contenu de la loi de contact modélisant un processus de contact avec une fondation composite. Le but étant d'établir des résultats d'existence de contrôle optimal pour ce problème. Cet article servira de socle de base pour toute la suite de la thèse, tout particulièrement pour le deuxième article qui peut se voir comme une extension de celui-ci, tant au niveau du cadre physique du problème qu'au niveau de la complexité accrue des problèmes de contrôle optimal. En effet, bien que l'introduction des deux coefficients α et β visant à prioriser soit la minimisation de l'écart entre le déplacement normal et celui désiré ou bien la minimisation du second terme soit intéressante, les considérations sur le contrôle sont absentes.

2 Un problème de contact élastique avec frottement et contrainte unilatérale

Dans cet article, nous étudions un problème similaire au précédent. En effet, nous ajoutons ici une deuxième surface de contact avec une fondation différente. Elle est constituée d'une partie rigide impénétrable recouverte d'une couche déformable dont la pénétrabilité est modélisée par une fonction de compliance normale. Cependant l'ajout majeur est l'introduction de frottement sur cette deuxième surface de contact. En outre, on modifie également le cadre fonctionnel du problème de contrôle optimal. En effet, on introduit un ensemble pour les contrôles admissibles et, comme le montrera l'exemple unidimensionnel, la valeur du contrôle optimal dépendra cette fois de cet ensemble.

2.1 Le modèle

Le cadre physique est quasiment identique au premier modèle, excepté la frontière Γ subdivisée non plus en trois mais quatre parties $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ et Γ_4 . Ainsi, le corps est en contact avec deux obstacles sur Γ_3 et Γ_4 . Le modèle mathématique est le suivant.

Problème \mathcal{P} . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ tels que*

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{II.20})$$

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{II.21})$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (\text{II.22})$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2, \quad (\text{II.23})$$

$$\left. \begin{array}{l} u_\nu \leq g, \\ \sigma_\nu = 0 \quad \text{si } u_\nu < 0, \\ -F \leq \sigma_\nu \leq 0 \quad \text{si } u_\nu = 0, \\ \sigma_\nu = -F \quad \text{si } 0 < u_\nu < g, \\ \sigma_\nu \leq -F \quad \text{si } u_\nu = g, \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3, \quad (\text{II.24})$$

$$\left. \begin{array}{l} u_\nu \leq k, \\ \sigma_\nu + p(u_\nu) \leq 0, \\ (u_\nu - k)(\sigma_\nu + p(u_\nu)) = 0, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq \mu p(u_\nu), \\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mu p(u_\nu) \frac{\mathbf{u}_\tau}{\|\mathbf{u}_\tau\|} \quad \text{if } \mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_4. \quad (\text{II.25})$$

L'équation (II.20) décrit la loi de comportement élastique du matériau composant le corps Ω . L'équation (II.21) représente la version statique de l'équation d'équilibre du système. Les équations (II.22) et (II.23) décrivent les conditions aux limites de déplacement et de traction respectivement. La condition (II.24) reprend les mêmes conditions aux limites de contact que (II.5) sur la partie Γ_3 . Enfin (II.25) modélise les conditions aux limites de contact sur la partie Γ_4 . Elle fait intervenir un interstice $k \neq g$, mais également une fonction de compliance normale p modélisant la pénétrabilité du second obstacle. Les conditions de contact sont de type Signorini avec interstice et compliance normale. Enfin, la loi de frottement est une loi de Coulomb classique où μ représente le coefficient de frottement.

2.2 Existence et unicité

Dans l'étude du problème mécanique \mathcal{P} , on utilise les espaces V et Q , voir (II.7), (II.8). Par ailleurs, on suppose que l'opérateur \mathcal{F} satisfait les conditions suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) Il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) Il existe } m_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(e) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \in Q. \end{array} \right.$$

De plus, la fonction de compliance normale p satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } p : \Gamma_4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) Il existe } L_p > 0 \text{ tel que} \\ \quad |p(\mathbf{x}, r_1) - p(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \\ \quad \text{a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma_4. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto p(\mathbf{x}, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_4, \\ \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) } (p(\mathbf{x}, r_1) - p(\mathbf{x}, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_4. \\ \text{(e) } p(\mathbf{x}, r) = 0 \quad \text{pour tout } r \leq 0, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_4. \end{array} \right.$$

Enfin, on suppose que les données du problème satisfont les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_0 &\in L^2(\Omega)^d, \\
\mathbf{f}_2 &\in L^2(\Gamma_2)^d, \\
F &\in L^2(\Gamma_3), \quad F(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_3, \\
\mu &\in L^\infty(\Gamma_4), \quad \mu(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_4, \\
g &> 0, \quad k > 0.
\end{aligned}$$

Sous toutes ces hypothèses et pour établir la formulation variationnelle du problème \mathcal{P} , on introduit l'ensemble $K \subset V$, l'opérateur $A : V \rightarrow V$, la fonctionnelle $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ et l'élément $\mathbf{f} \in Y$ tels que

$$\begin{aligned}
K &= \{ \mathbf{v} \in V : v_\nu \leq g \text{ sur } \Gamma_3, \quad v_\nu \leq k \text{ sur } \Gamma_4 \}, \\
(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V &= \int_{\Omega} \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx + \int_{\Gamma_4} p(u_\nu)v_\nu \, da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \\
j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Gamma_3} Fv_\nu^+ \, da + \int_{\Gamma_4} \mu p(u_\nu)\|\mathbf{v}_\tau\| \, da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \\
\mathbf{f} &= (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2).
\end{aligned}$$

Encore une fois, la définition (2.7) de l'opérateur π implique que

$$(\mathbf{f}, \pi\mathbf{v})_Y = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} \, da, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

On peut maintenant établir la formulation variationnelle du Problème \mathcal{P} qui repose sur les mêmes procédés utilisés dans le chapitre I. On donne donc directement sa forme finale.

Problème \mathcal{P}_V . *Trouver un champ de déplacements u tel que*

$$\mathbf{u} \in K, \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \pi\mathbf{v} - \pi\mathbf{u})_Y \quad \forall \mathbf{v} \in K.$$

Notons qu'ici, la fonctionnelle j dépend de \mathbf{u} . On est donc en présence d'une inégalité quasi-variationnelle. L'unique solvabilité du Problème \mathcal{P}_V est donné par le théorème suivant.

Theorème 2.1. *Sous les hypothèses formulées précédemment sur les données du problème \mathcal{P} , il existe μ_0 dépendant seulement de Ω, Γ_1 et \mathbf{f} tel que le problème \mathcal{P}_V admet une unique solution si*

$$L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_4)} < \mu_0.$$

La preuve de ce théorème est une application du Théorème 2.2. On vérifie donc les hypothèses nécessaires à son application. Notons qu'il convient de bien définir μ_0 pour que celles-ci soient vérifiées. Enfin la preuve se termine par une application du théorème de Riesz-Fréchet pour vérifier la dernière propriété.

2.3 Résultat de dépendance continue

Comme dans le premier chapitre, le but de cette section est de vérifier le comportement de la solution par rapport aux données. On considère dans ce but, les perturbations $\mathbf{f}_{0n}, \mathbf{f}_{2n}, F_n, \mu_n, g_n$ et k_n de $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, \mu, g$ et k respectivement. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit l'ensemble $K_n \subset V$, la fonctionnelle $j_n : V \rightarrow \mathbb{R}$ et l'élément $\mathbf{f}_n \in Y$ tels que

$$\begin{aligned} K_n &= \{ \mathbf{v} \in V : \mathbf{v}_\nu \leq g_n \text{ sur } \Gamma_3, \quad \mathbf{v}_\nu \leq k_n \text{ sur } \Gamma_4 \}, \\ j_n(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Gamma_3} F_n \mathbf{v}_\nu^+ da + \int_{\Gamma_4} \mu_n p(\mathbf{u}_\nu) \|\mathbf{v}_\tau\| da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \\ \mathbf{f}_n &= (\mathbf{f}_{0n}, \mathbf{f}_{2n}). \end{aligned}$$

Ainsi, on considère le problème perturbé \mathcal{P}_V^n

Problème \mathcal{P}_V^n . *Trouver un champ de déplacement \mathbf{u}_n tel que*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n &\in K_n, \quad (A\mathbf{u}_n, \mathbf{v} - \mathbf{u}_n)_V + j_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}) - j_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) \\ &\geq (\mathbf{f}_n, \pi\mathbf{v} - \pi\mathbf{u}_n)_Y, \quad \forall \mathbf{v} \in K_n. \end{aligned}$$

D'après la section précédente, pour tout $n > 0$ le problème \mathcal{P}_V^n admet une unique solution.

Notre résultat principal dans cette section est le suivant

Théorème 2.2. *Supposons que*

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{0n} &\rightharpoonup \mathbf{f}_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega)^d, \\ \mathbf{f}_{2n} &\rightharpoonup \mathbf{f}_2 \quad \text{dans } L^2(\Gamma_2)^d, \\ F_n &\rightharpoonup F \quad \text{dans } L^2(\Gamma_3), \\ \mu_n &\rightarrow \mu \quad \text{dans } L^\infty(\Gamma_4), \\ g_n &\rightarrow g, \quad k_n \rightarrow k. \end{aligned}$$

Alors, la solution \mathbf{u}_n du Problème \mathcal{P}_V^n converge vers la solution \mathbf{u} du Problème \mathcal{P}_V , i.e.,

$$\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{dans } V. \tag{II.26}$$

Comme dans le chapitre précédent, on utilise un théorème intermédiaire dont l'unique solvabilité est donnée par le résultat de la section précédente. On note par $\tilde{\mathbf{u}}_n$ la solution de ce problème, puis on démontre les résultats suivants.

Lemme 2.3. *Il existe une constante $D > 0$ telle que*

$$\|\mathbf{u}_n\|_V \leq D, \quad \|\tilde{\mathbf{u}}_n\|_V \leq D \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lemme 2.4. *La suite $\{\tilde{\mathbf{u}}_n\}$ converge faiblement vers \mathbf{u} dans V , c'est-à-dire*

$$\tilde{\mathbf{u}}_n \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{dans } V.$$

Lemme 2.5. *La suite $\{\tilde{\mathbf{u}}_n\}$ converge fortement vers \mathbf{u} dans V , c'est-à-dire*

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}\|_V \longrightarrow 0.$$

Lemme 2.6. *La convergence suivante est vérifiée.*

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n\|_V \longrightarrow 0.$$

Notons l'astuce majeure de cette section (intervenant dans la démonstration du lemme ci-dessus). On cherchera plus loin à relier l'ensemble K et sa perturbation K_n , chose plus difficile ici puisque deux interstices interviennent. L'astuce consiste à définir, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n > 0$ et $\beta_n > 0$ tels que

$$\alpha_n = \min \left\{ \frac{g_n}{g}, \frac{k_n}{k} \right\}, \quad \beta_n = \min \left\{ \frac{g}{g_n}, \frac{k}{k_n} \right\},$$

ce qui résout le problème puisque pour $\tilde{\mathbf{u}}_n \in K$ et $\mathbf{u}_n \in K_n$, on vérifie facilement que

$$\alpha_n \tilde{\mathbf{u}}_n \in K_n$$

et

$$\beta_n \mathbf{u}_n \in K.$$

Muni de ces quatre lemmes, la preuve du résultat de convergence se résume à utiliser l'inégalité triangulaire sur les normes et les convergences fortes établies par les lemmes.

2.4 Un problème d'optimisation

Dans cette section, nous allons étudier plusieurs problèmes d'optimisation associés au problème \mathcal{P}_V sous la condition que μ soit fixe. Comme les possibilités de contrôle sont nombreuses, on considère d'abord un problème abstrait qui peut être construit comme suit. Soit θ , une des données $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, g$ ou k et soit η l'ensemble des données restantes. Pour assurer les conditions du résultat de la section précédente, on doit supposer que $\theta \in U$ et $\eta \in S$ où U et S sont des sous-ensembles de deux espaces de Hilbert appropriés Z et W , respectivement. Par exemple, si $\theta = \mathbf{f}_2$ alors $\eta =$

(\mathbf{f}_0, F, g, k) , $U = Z = L^2(\Gamma_2)^d$, $S = L^2(\Gamma_2)^d \times L^2(\Gamma_3) \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et $W = L^2(\Gamma_2)^d \times L^2(\Gamma_3) \times \mathbb{R}^2$.

Pour chaque couple $(\theta, \eta) \in U \times S$, on note par la suite $u = u(\theta, \eta)$ la solution de l'inégalité variationnelle associée au problème \mathcal{P}_V . De plus, pour $\theta \in W$, on considère le problème d'optimisation suivant

Problème \mathcal{Q} . *Trouver $\theta \in U$ tel que*

$$\mathcal{L}(u(\theta^*, \eta)) = \min_{\theta \in U} \mathcal{L}(u(\theta, \eta)).$$

On considère également les hypothèses suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} U \text{ est un sous-ensemble borné faiblement fermé de } Z, \text{ c'est-à-dire} \\ \{\theta_n\} \subset U, \theta_n \rightharpoonup \theta \text{ dans } Z \implies \theta \in U. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L} : V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est une fonction semi-continue inférieurement} \\ \{u_n\} \subset V, u_n \longrightarrow u \text{ dans } V \implies \liminf \mathcal{L}(u_n) \geq \mathcal{L}(u). \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S \text{ est un sous-espace faiblement fermé de } W, \\ \{\eta_n\} \subset S, \eta_n \rightharpoonup \eta \text{ dans } W \implies \eta \in S. \end{array} \right.$$

$\mathcal{L} : V \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Nous avons le résultat d'existence d'au moins une solution pour le problème \mathcal{Q} suivant.

Théorème 2.7. *Sous les hypothèses précédentes, pour chaque $\eta \in S$, il existe au moins une solution $\theta^* \in U$ au problème \mathcal{Q} .*

La preuve est principalement basée sur le Théorème de Weierstrass. La solution au problème \mathcal{Q} dépend de η . Cette dépendance est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.8. *Soit $\{\eta_n\} \subset S$, et pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit θ_n^* la solution au problème \mathcal{Q} pour $\eta = \eta_n$. De plus, supposons que*

$$\eta_n \rightharpoonup \eta \quad \text{dans } W.$$

Alors, il existe une sous-suite de la suite $\{\theta_n^\}$, que l'on notera également $\{\theta_n^*\}$, et un élément $\theta^* \in U$, tels que*

$$\theta_n^* \rightharpoonup \theta^* \text{ dans } Z.$$

Enfin, θ^ est une solution du Problème \mathcal{Q} .*

Notons que l'existence de la solution θ_n^* du problème \mathcal{Q} est garantie par le Théorème (2.7), pour chaque $n \in \mathbb{N}$. La preuve est basée sur des arguments standards d'analyse comme les propriétés des ensembles faiblement fermés, la faible et forte convergence et du calcul basé sur ces éléments.

On finit cette section avec un exemple d'application du théorème abstrait d'optimisation dans le cadre de notre modèle.

Exemple. On choisit $\theta = \mathbf{f}_2$ et donc $\eta = (\mathbf{f}_0, F, g, k)$, $Z = L^2(\Gamma_2)^d$, $W = L^2(\Omega)^d \times L^2(\Gamma_3) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Soient

$$U = \{\theta \in Z : \|\theta\|_Z \leq E\},$$

$$S = \{\eta = (\mathbf{f}_0, F, g, k) \in S : F \geq 0 \text{ sur } \Gamma_3, g_0 \leq g \leq g_1, k_0 \leq k \leq k_1\},$$

$$\mathcal{L}(v) = \int_{\Gamma_3} \|v_\nu - \phi\|^2 da, \forall v \in V,$$

où, E, g_0, g_1, k_0 et k_1 sont des constantes strictement positives telles que $g_0 \leq g_1$ et $k_0 \leq k_1$ avec $\phi \in L^2(\Gamma_3)$ donné.

Avec ces choix, les hypothèses nécessaires à l'application du théorème sont vérifiées et de plus, l'interprétation mécanique du Problème \mathcal{Q} est la suivante : avec un processus de contact adéquat à notre modèle, avec les données $(\mathbf{f}_0, F, g, k) \in S$, on cherche une traction $\theta^* = \mathbf{f}_2^* \in U$, telle que le déplacement normal correspondant de la solution sur Γ_3 soit le plus proche possible du "déplacement désiré" ϕ .

Conclusion. Pour synthétiser, il est évident que tout le travail produit sur le modèle précédent sert de base sur de nombreux aspects de l'étude de ce deuxième problème. En effet, celui-ci est clairement une extension du premier, d'une part au niveau physique, avec l'ajout d'une seconde surface de contact pénétrable et avec frottement et d'autre part, par l'évolution des problèmes de contrôle traités. Par comparaison, le premier article concerne des problèmes de contrôle optimal ne prenant en compte, ni la dépendance de u par rapport à θ et η , ni le rôle des données ne faisant pas office de contrôle. Il serait naïf de penser que dans un problème physique concret, la solution à ce problème ne dépendrait que d'une donnée, et ignorer pendant toute l'étude les paramètres qui ne font pas office de contrôle. Enfin, dans ces deux premiers chapitres, l'analyse variationnelle ne conduisait qu'à des problèmes formulés en fonction du champ de déplacement. Or, il est tout à fait possible d'avoir des problèmes variationnels formulés en termes de contraintes. C'est sur ceux-ci que portera le prochain chapitre.

3 Un problème dual de contact élastique avec frottement et contrainte unilatérale

Dans les articles précédents, nous avons étudié des problèmes dont la formulation variationnelle était faite en terme de déplacement. Nous nous intéressons dans cet article à formuler le problème variationnel en terme de contraintes. Cela implique un procédé différent pour établir cette formulation variationnelle. En outre, les problèmes d'optimisation considérés induisent une dépendance de l'ensemble où vivent les solutions par rapport aux données du problème. Ainsi, l'étude de la convergence de la solution implique l'étude de la convergence de cet ensemble. C'est pour cette étude que l'on introduit un nouvel outil mathématique, la convergence de Mosco. Enfin, le problème de contrôle optimal se complexifie puisqu'il considère la dépendance de la fonctionnelle par rapport au contrôle choisi mais aussi par rapport au reste des données.

3.1 Le modèle

Le problème qui sera étudié dans ce chapitre est le suivant.

Problème \mathcal{P} . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$, tels que*

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathcal{A}\boldsymbol{\sigma} + \beta(\boldsymbol{\sigma} - P_B\boldsymbol{\sigma}) \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{II.27})$$

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{II.28})$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (\text{II.29})$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2, \quad (\text{II.30})$$

$$u_\nu \leq g, \quad \boldsymbol{\sigma}_\nu + p \leq 0, \quad (u_\nu - g)(\boldsymbol{\sigma}_\nu + p) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3, \quad (\text{II.31})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (\text{II.32})$$

Plusieurs remarques sont à faire. Premièrement, la loi de comportement (II.27) est en fonction de $\boldsymbol{\sigma}$ au lieu de $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ comme vu jusqu'ici. De plus, plusieurs éléments interviennent : \mathcal{A} est le tenseur d'élasticité, β est un coefficient donné, B est un sous-ensemble fermé, convexe et non-vide de \mathbb{S}^d et $P_B : \mathbb{S}^d \rightarrow B$ représente l'opérateur de projection sur B . Une telle loi de comportement décrit une régularisation de la loi de Hencky dans laquelle le tenseur des contraintes est restreint à l'ensemble convexe B . Les égalités (II.28), (II.29) et (II.30) sont respectivement l'équation d'équilibre et les conditions de déplacement et de traction. La loi de contact est de type Signorini avec interstice avec la particularité d'y introduire une fonction p jouant le rôle d'une pression, voir (II.31). Enfin, le contact est supposé être sans frottement, voir (II.32).

Dans l'étude de ce problème on utilise les espaces (II.7) et (II.8). En outre, on suppose en premier lieu que le tenseur d'élasticité \mathcal{A} satisfait les conditions suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ijkl}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) } \mathcal{A}_{ijkl} = \mathcal{A}_{klij} = \mathcal{A}_{jikl} \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leq i, j, k, l \leq d. \\ \text{(c) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \mathcal{A}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} \geq m_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{\tau}\|^2 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (\text{II.33})$$

Puis, on suppose que l'ensemble B et le reste des données satisfont les hypothèses suivantes

$$\begin{aligned} B &\text{ est un sous-ensemble fermé et convexe de } \mathbb{S}^d \text{ tel que } \mathbf{0} \in B. \\ \beta &\in L^\infty(\Omega), \quad \beta(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega, \\ \mathbf{f}_0 &\in L^2(\Omega)^d, \\ \mathbf{f}_2 &\in L^2(\Gamma_2)^d, \\ p &\in L^2(\Gamma_3), \\ g &\geq 0. \end{aligned}$$

Enfin, supposons qu'il existe $\boldsymbol{\theta} \in V$ tel que

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\nu} \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

et, en particulier, $\theta_\nu = 1$.

On introduit maintenant la forme $a : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ et la fonction $j : Q \rightarrow \mathbb{R}$ définis par

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_V &= \int_{\Omega} \mathcal{A}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in Q, \\ j(\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \beta \|\boldsymbol{\sigma} - P_B \boldsymbol{\sigma}\|^2 \, dx \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in Q. \end{aligned}$$

Considérons également l'espace de Hilbert produit

$$Y = L^2(\Omega)^d \times L^2(\Gamma_2)^d \times L^2(\Gamma_3) \times \mathbb{R},$$

muni de son produit scalaire canonique noté par $(\cdot, \cdot)_Y$ et la norme associée $\|\cdot\|_Y$.

Ainsi, on considère le sous-ensemble de Y défini par

$$\Lambda = \{ \boldsymbol{\eta} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, p, g) \in Y : g \geq 0 \}.$$

Enfin pour $\boldsymbol{\eta} \in \Lambda$, on introduit les éléments

$$(\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}), \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} \, da - \int_{\Gamma_3} p v_\nu \, da \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$U(\boldsymbol{\eta}) = \{ \mathbf{v} \in V : v_\nu \leq g \text{ sur } \Gamma_3 \},$$

$$\Sigma(\boldsymbol{\eta}) = \{ \boldsymbol{\tau} \in Q : (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(g\boldsymbol{\theta}))_Q \geq (\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}), \mathbf{v} - g\boldsymbol{\theta})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U(\boldsymbol{\eta}) \},$$

$$J(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) + j(\boldsymbol{\sigma}) - (\boldsymbol{\varepsilon}(g\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\sigma})_Q \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in Q.$$

Notons les points importants de la construction de la formulation duale du problème \mathcal{P} . Premièrement, la définition de $\boldsymbol{\theta}$ est telle que $\boldsymbol{v} = g\boldsymbol{\theta}$ et $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{u} - g\boldsymbol{\theta}$ appartiennent tous deux à $U(\boldsymbol{\eta})$, ce qui nous permet de trouver que

$$\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma(\boldsymbol{\eta}).$$

Deuxièmement, j étant convexe, Gâteaux-différentiable et de sorte que

$$\nabla j(\boldsymbol{\sigma}) = \beta(\boldsymbol{\sigma} - P_B\boldsymbol{\sigma})$$

pour tout $\boldsymbol{\sigma} \in Q$, l'inégalité du sous-gradient implique

$$j(\boldsymbol{\tau}) - j(\boldsymbol{\sigma}) \geq (\beta(\boldsymbol{\sigma} - P_B\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})_Q.$$

En utilisant ces ingrédients on a prouvé que

$$J(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) - J(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\boldsymbol{\eta}),$$

d'où la formulation variationnelle suivante du problème \mathcal{P} .

Problème \mathcal{P}^V . *Étant donné $\boldsymbol{\eta} \in \Lambda$, trouver un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ tel que*

$$\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma(\boldsymbol{\eta}), \quad J(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) \leq J(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\boldsymbol{\eta}).$$

Remarquons que cette formulation variationnelle est en termes de contraintes et, de ce fait, nous l'appelons formulation variationnelle duale.

3.2 Un problème d'optimisation abstrait

Dans cette section, on présente un problème abstrait incluant le problème \mathcal{P}^V comme cas particulier. On prouvera des résultats d'existence et de convergence pour ce problème.

Le cadre fonctionnel est le suivant. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$, un espace de Banach réflexif et soit $(Y, \|\cdot\|_Y)$, un espace normé. On considère $\Lambda \subset X$, $J : X \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ et pour chaque $\eta \in \Lambda$, $K(\eta)$ est un sous-ensemble donné de X . Ainsi, le problème d'optimisation qui nous intéresse est le suivant

Problème \mathcal{O} . *Étant donné $\eta \in \Lambda$, trouver u tel que*

$$u \in K(\eta), \quad J(u, \eta) = \min_{v \in K(\eta)} J(v, \eta).$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère une perturbation $\eta_n \in \Lambda$ de η ainsi que la perturbation du problème \mathcal{O} suivante

Problème \mathcal{O}_n . *Étant donné $\eta_n \in \Lambda$, trouver u_n tel que*

$$J(u_n, \eta_n) = \min_{v \in K(\eta_n)} J(v, \eta_n)$$

Dans l'étude des Problèmes \mathcal{O} et \mathcal{O}_n , on considère les hypothèses suivantes

(Λ) Λ est un sous-ensemble faiblement fermé et non-vide de Y .

(K) $\eta \in \Lambda$, $K(\eta) \subset X$ est faiblement fermé et non-vide.

(K^*) Pour chaque $\eta \in \Lambda$, $K(\eta) = K$ avec $K \subset X$ donné.

(J_1) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toutes les suites } \{u_k\} \subset X \text{ et } \{\eta_k\} \subset \Lambda \text{ telles que} \\ u_k \rightharpoonup u \text{ in } X, \eta_k \rightharpoonup \eta \text{ dans } Y \text{ et pour tout } v \in X, \\ \text{l'inégalité ci-dessous est vérifiée:} \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} [J(v, \eta_k) - J(u_k, \eta_k)] \leq J(v, \eta) - J(u, \eta). \end{array} \right.$

(J_2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toutes les suites } \{u_k\} \subset X \text{ et } \{\eta_k\} \subset \Lambda \text{ telles que} \\ \|u_k\|_X \rightarrow \infty \text{ et } \eta_k \rightharpoonup \eta \text{ dans } Y, \text{ on a } J(u_k, \eta_k) \rightarrow \infty. \end{array} \right.$

(J_3) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toutes les suites } \{\eta_k\} \subset \Lambda \text{ telles que } \eta_k \rightharpoonup \eta \text{ dans } Y \\ \text{et tout } v \in X, \text{ on a } J(v, \eta_k) \rightarrow J(v, \eta). \end{array} \right.$

(J_4) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toutes les suites } \{v_k\} \subset X \text{ et } \{\eta_k\} \subset \Lambda \text{ telles que} \\ v_k \rightarrow v \text{ dans } X, \eta_k \rightharpoonup \eta \text{ dans } Y \text{ on a} \\ J(v_k, \eta_k) - J(v, \eta_k) \rightarrow 0. \end{array} \right.$

$$\eta_n \rightharpoonup \eta \quad \text{dans } Y. \quad (\text{II.34})$$

$$K(\eta_n) \xrightarrow{M} K(\eta) \quad \text{dans } X, \quad (\text{II.35})$$

où la notation " \xrightarrow{M} " désigne la convergence de Mosco. Cette convergence s'applique à des suites d'ensembles et tout son intérêt réside dans les deux propriétés suivantes

(M_1) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour chaque } v \in K, \text{ il existe une suite } \{v_n\} \text{ telle que} \\ v_n \in K_n \text{ pour chaque } n \in \mathbb{N} \text{ et } v_n \rightarrow v \text{ dans } X. \end{array} \right.$

(M_2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour chaque suite } \{v_n\} \text{ telle que} \\ v_n \in K_n \text{ pour chaque } n \in \mathbb{N} \text{ et } v_n \rightharpoonup v \text{ dans } X, \text{ on a } v \in K. \end{array} \right.$

En effet, on remarque que vérifier ces deux propriétés ne nécessite de travailler que sur des éléments des ensembles considérés, ou autrement dit, on montre une convergence portant sur une suite d'ensembles en ne manipulant que des suites d'éléments de ces ensembles.

Notre premier résultat est le suivant.

Theorème 3.1. *On suppose que les hypothèses (Λ) , (K) , (J_1) et (J_2) sont vérifiées. Alors, on a les conséquences suivantes.*

i) *Le Problème \mathcal{O} a au moins une solution et le Problème \mathcal{O}_n a au moins une solution pour chaque $n \in \mathbb{N}$.*

ii) *Si, de plus, les hypothèses (II.34), (II.35), (J_3) et (J_4) ou, alternativement, les hypothèses (II.34), (K^*) , (J_3) sont vérifiées alors, si $\{u_n\}$ est solution du Problème \mathcal{O}_n , pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe une sous-suite de $\{u_n\}$, et un élément $u \in X$, tel que*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } X. \quad (\text{II.36})$$

et u est une solution du Problème \mathcal{O} .

On ne s'attardera pas ici sur la preuve puisqu'elle est majoritairement calculatoire. On renvoie le lecteur à l'article correspondant. Pour notre deuxième résultat, on renforce les conditions sur les données et introduisons donc les hypothèses suivantes

(\tilde{K}) Pour tout $\eta \in \Lambda$, $K(\eta) \subset X$ est un sous-ensemble fermé, convexe et non-vidé.

(\tilde{J}) Pour tout $\eta \in \Lambda$, $J(\cdot, \eta) : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction strictement convexe.

(J^*) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } m > 0 \text{ tel que} \\ (1-t)J(u, \eta) + tJ(v, \eta) - J((1-t)u + tv, \eta) \geq m t(1-t)\|u - v\|_X^2 \\ \text{pour tout } u, v \in X, \eta \in \Lambda, t \in [0, 1]. \end{array} \right.$

On présente ainsi le deuxième théorème.

Theorème 3.2. *Supposons que les hypothèses (Λ) , (\tilde{K}) , (J_1) , (J_2) et (\tilde{J}) sont vérifiées. Alors, on a les conséquences suivantes..*

i) *Le Problème \mathcal{O} a une unique solution u et le Problème \mathcal{O}_n a une unique solution u_n , pour chaque $n \in \mathbb{N}$.*

ii) *Sous les hypothèses supplémentaires (II.34), (II.35), (J_3) , (J_4) où, alternativement sous les hypothèses (II.34), (K^*) , (J_3) , la suite $\{u_n\}$ converge faiblement vers u dans X .*

iii) *Sous les hypothèses complémentaires (II.34), (II.34), (J_3) , (J_4) , (J^*) où, alternativement sous les hypothèses (II.34), (K^*) , (J_3) , (J^*) , la suite $\{u_n\}$ converge fortement vers u dans X .*

Pareillement, on renvoie à l'article correspondant pour la démonstration.

3.3 Résultats d'existence, d'unicité et de convergence

Dans cette section, on applique les théorèmes de la section précédente pour étudier les Problèmes \mathcal{P} et \mathcal{P}_V . A cette fin, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on considère les perturbations f_{0n}, f_{2n}, p_n et g_n des données f_0, f_2, p et g telles que

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{0n} &\in L^2(\Omega)^d, \\ \mathbf{f}_{2n} &\in L^2(\Gamma_2)^d, \\ p_n &\in L^2(\Gamma_3), \\ g_n &\geq 0. \end{aligned}$$

De plus, on suppose les convergences suivantes

$$\mathbf{f}_{0n} \rightharpoonup \mathbf{f}_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega)^d, \quad (\text{II.37})$$

$$\mathbf{f}_{2n} \rightharpoonup \mathbf{f}_2 \quad \text{dans } L^2(\Gamma_2)^d, \quad (\text{II.38})$$

$$p_n \rightharpoonup p \quad \text{dans } L^2(\Gamma_3), \quad (\text{II.39})$$

$$g_n \rightarrow g. \quad (\text{II.40})$$

Si l'on note $\boldsymbol{\eta}_n = (\mathbf{f}_{0n}, \mathbf{f}_{2n}, p_n, g_n)$, on peut considérer la perturbation du Problème \mathcal{P}^V suivante.

Problème \mathcal{P}_n^V . *Étant donné $\boldsymbol{\eta}_n \in \Lambda$, trouver un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}_n$ tel que*

$$\boldsymbol{\sigma}_n \in \Sigma(\boldsymbol{\eta}_n), \quad J(\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\eta}_n) \leq J(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}_n) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\boldsymbol{\eta}_n).$$

On a le résultat d'existence, d'unicité et de convergence.

Theorème 3.3. *Sous les hypothèses concernant les données ainsi que leurs perturbations, on a*

i) *Le Problème \mathcal{P}^V a une unique solution $\boldsymbol{\sigma}$ et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le Problème \mathcal{P}_n^V a une unique solution $\boldsymbol{\sigma}_n$.*

ii) *Si de plus, les convergences (II.37)-(II.40) sont vérifiées alors la suite $\{\boldsymbol{\sigma}_n\}$ converge fortement vers $\boldsymbol{\sigma}$.*

Avant de parler de la preuve, on introduit d'abord quelques préliminaires. D'abord, les hypothèses sur le tenseur d'élasticité impliquent que la forme a est symétrique, continue et coercive. Ainsi,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_k \rightarrow \boldsymbol{\sigma} \text{ dans } Q, \quad \boldsymbol{\tau}_k \rightarrow \boldsymbol{\tau} \text{ dans } Q &\implies a(\boldsymbol{\sigma}_k, \boldsymbol{\tau}_k) \rightarrow a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}). \\ a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) &\geq m_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{\tau}\|_Q^2 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in Q. \end{aligned}$$

Cela implique que la fonction $\boldsymbol{\tau} \mapsto a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau})$ est s.c.i sur X . Enfin j étant convexe et continu, on a les implications suivantes.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_k \rightarrow \boldsymbol{\tau} \text{ dans } Q &\implies \liminf_{k \rightarrow \infty} j(\boldsymbol{\tau}_k) \geq j(\boldsymbol{\tau}), \\ \boldsymbol{\tau}_k \rightarrow \boldsymbol{\tau} \text{ dans } Q &\implies \lim_{k \rightarrow \infty} j(\boldsymbol{\tau}_k) = j(\boldsymbol{\tau}). \end{aligned}$$

La démonstration consiste à appliquer le dernier théorème de la section précédente à notre cas particulier. La preuve est essentiellement calculatoire mais attardons-nous sur les astuces qui permettent de l'achever. On définit d'abord

$$U_0 = \{\boldsymbol{v} \in V : v_\nu \leq 0, \text{ sur } \Gamma_3\}, \quad (\text{II.41})$$

$$\Sigma_0 = \{\boldsymbol{\tau} \in Q : (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_Q \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in U_0\}. \quad (\text{II.42})$$

L'astuce consiste à prendre des valeurs particulières pour \boldsymbol{v} qui impliquent des valeurs particulières pour $\boldsymbol{\tau}$, tout ceci dans le but de relier $\Sigma(\boldsymbol{\eta})$ et $\Sigma(\boldsymbol{\eta}_n)$ de la manière suivante

$$\Sigma(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta})) + \Sigma_0, \quad (\text{II.43})$$

$$\Sigma(\boldsymbol{\eta}_n) = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta}_n)) + \Sigma_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (\text{II.44})$$

Enfin, on remarque que

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\tau}_n - \boldsymbol{\tau}\|_Q^2 &= \|(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta}_n)) - (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta}))\|_V^2 \\ &= (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta}_n), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta}_n) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta}))_V - (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta}_n) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta}))_V \end{aligned}$$

La démonstration se termine en jouant sur les convergences des données par la compacité de l'opérateur trace.

3.4 Un problème de contrôle optimal

Dans cette section, on note $Y = L^2(\Omega)^d \times L^2(\Gamma_2)^d \times \mathbb{R}$, l'espace de Hilbert produit muni de son produit scalaire canonique $(\cdot, \cdot)_Y$ et la norme associée $\|\cdot\|_Y$. Un élément générique de Y sera noté $\xi = (\boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{f}_2, g)$. Ainsi, on définit Λ par

$$\Lambda = \{\xi = (\boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{f}_2, g) \in Y : g \geq 0\}. \quad (\text{II.45})$$

De plus, W est un ensemble donné tel que

$$W \subset \{p \in L^2(\Gamma_3) : p(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Gamma_3\}.$$

Soit $\xi = (\boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{f}_2, g)$ et $p \in W$. On note $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{f}_2, p, g) = \boldsymbol{\sigma}(p, \xi)$ la solution du Problème \mathcal{P}^V . Avec ces notations, on définit l'ensemble des paires admissibles au Problème \mathcal{P}^V par

$$\mathcal{V}_{ad}(\xi) = \{(\boldsymbol{\sigma}, p) : p \in W \text{ et } \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(p, \xi)\}. \quad (\text{II.46})$$

Enfin, en considérant une fonctionnelle coût $\mathcal{L} : Q \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow \mathbb{R}$, on introduit le problème de contrôle optimal suivant.

Problème \mathcal{Q} . *Étant donné $\xi \in \Lambda$, trouver $(\sigma^*, p^*) \in \mathcal{V}_{ad}(\xi)$ tel que*

$$\mathcal{L}(\sigma^*, p^*) = \min_{(\sigma, p) \in \mathcal{V}_{ad}(\xi)} \mathcal{L}(\sigma, p).$$

Pour résoudre le Problème \mathcal{Q} , on considère les hypothèses suivantes.

W est un sous-ensemble faiblement fermé et non-vide de $L^2(\Gamma_3)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toutes les suites } \{\sigma_k\} \subset Q \text{ et } \{p_k\} \subset L^2(\Gamma_3) \text{ telles que} \\ \sigma_k \rightarrow \sigma \text{ dans } Q, \quad p_k \rightarrow p \text{ dans } L^2(\Gamma_3) \text{ on a} \\ \text{(a) } \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\sigma_k, p_k) \geq \mathcal{L}(\sigma, p). \\ \text{(b) } \lim_{k \rightarrow \infty} [\mathcal{L}(\sigma_k, p_k) - \mathcal{L}(\sigma, p_k)] = 0. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } h : L^2(\Gamma_3) \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que} \\ \text{(a) } \mathcal{L}(\sigma, p) \geq h(p) \quad \forall \sigma \in Q, \quad p \in L^2(\Gamma_3). \\ \text{(b) } \|p_n\|_{L^2(\Gamma_3)} \rightarrow +\infty \implies h(p_n) \rightarrow \infty. \end{array} \right.$$

Un exemple typique d'une fonction \mathcal{L} qui satisfait les hypothèses (1.135) – (1.138) est obtenu en prenant

$$\mathcal{L}(\sigma, p) = f(\sigma) + h(p), \quad \forall \sigma \in Q, \quad p \in L^2(\Gamma_3)$$

où $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et positive et $h : L^2(\Gamma_3) \rightarrow \mathbb{R}$ est coercive et s.c.i.

On considère également la perturbation $\xi_n = (\mathbf{f}_{0n}, \mathbf{f}_{2n}, g_n) \in \Lambda$ de ξ , ce qui permet de considérer la perturbation suivante du Problème \mathcal{Q} .

Problème \mathcal{Q}_n . *Étant donné $\xi_n \in \Lambda$, trouver $(\sigma_n^*, p_n^*) \in \mathcal{V}_{ad}(\xi_n)$ tel que*

$$\mathcal{L}(\sigma_n^*, p_n^*) = \min_{(\sigma, p) \in \mathcal{V}_{ad}(\xi_n)} \mathcal{L}(\sigma, p).$$

Nous avons le résultat d'existence, d'unicité et de convergence suivant.

Theorème 3.4. *Sous les hypothèses ci-dessus, les affirmations suivantes sont vérifiées.*

i) *Le Problème \mathcal{Q} a au moins une solution (σ^*, p^*) et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le Problème \mathcal{Q}_n a au moins une solution (σ_n^*, p_n^*) .*

ii) *Si les convergences des données tiennent et (σ_n^*, p_n^*) est solution du Problème \mathcal{Q}_n , pour chaque $n \in \mathbb{N}$, alors, il existe une sous-suite de la suite $\{(\sigma_n^*, p_n^*)\}$, noté*

également $\{(\boldsymbol{\sigma}_n^*, p_n^*)\}$, et un élément $(\boldsymbol{\sigma}^*, p^*)$, tel que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_n^* &\rightarrow \boldsymbol{\sigma}^* && \text{dans } Q. \\ p_n^* &\rightarrow p^* && \text{dans } L^2(\Gamma_3).\end{aligned}$$

De plus, $(\boldsymbol{\sigma}^*, p^*)$ est solution du Problème \mathcal{Q} .

Avant de prouver ce théorème, on a besoin de quelques résultats préliminaires. Premièrement, pour chaque $\xi \in \Lambda$, on considère la fonction $J(\cdot, \xi) : L^2(\Gamma_3) \rightarrow \mathbb{R}$

$$J(p, \xi) = \mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}(p, \xi), p) \quad \forall p \in L^2(\Gamma_3),$$

ainsi que les problèmes auxiliaires suivants.

Problème \mathcal{R} . *Étant donné $\xi \in \Lambda$, trouver $p^* \in W$ tel que*

$$J(p^*, \xi) = \min_{p \in W} J(p, \xi).$$

Problème \mathcal{R}_n . *Étant donné $\xi_n \in \Lambda$, trouver $p_n^* \in W$ tel que*

$$J(p_n^*, \xi_n) = \min_{p \in W} J(p, \xi_n).$$

On note que les problèmes \mathcal{R} et \mathcal{R}_n sont équivalents aux problèmes \mathcal{Q}_n et \mathcal{Q} respectivement du point de vue de leur solution. On peut maintenant considérer la preuve de théorème. Elle consiste à appliquer les théorèmes d'optimisation abstraits des sections précédentes, où toutes les hypothèses avancées dans cette section servent à résoudre la partie calculatoire des vérifications à établir.

On termine cette section en avançant un exemple concret de problème d'optimisation. Exemple. Soit α et δ des constantes strictement positives et soit $\phi \in L^2(\Gamma_3)$. On définit

$$\begin{aligned}W &= \{p \in L^2(\Gamma_3) : p(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Gamma_3\} \\ \mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}, p) &= \alpha \int_{\Gamma_3} \|u_\nu(\boldsymbol{\sigma}) - \phi\|^2 da + \delta \int_{\Gamma_3} p^2 da\end{aligned}$$

pour tout $(\boldsymbol{\sigma}, p) \in Q \times L^2(\Gamma_3)$.

Avec ces choix, l'interprétation mécanique du Problème \mathcal{Q} est la suivante. On cherche une pression $p \in W$ agissant sur Γ_3 de telle sorte que le déplacement normal est aussi près que possible de ϕ . D'autre part, ce choix doit remplir une condition de minimalité prise en compte dans le deuxième terme de la fonctionnelle. Enfin, notons que ces choix remplissent également toutes les hypothèses nécessaires dans l'étude du Problème \mathcal{Q} .

Conclusion. Le but de cet article était d'introduire un problème d'optimisation formulé en termes de contraintes à étudier. De plus, on a pu appliquer sous réserve

d'hypothèses supplémentaires tous les résultats obtenus dans nos problèmes primaux au problème dual présenté dans cet article. Enfin, il convient de noter que l'étude présentée dans cet article implique quelques problèmes ouverts qu'on propose de décrire maintenant. Premièrement, il serait intéressant d'établir des conditions d'optimalité pour l'étude du Problème \mathcal{Q} . En effet, la non-régularité de la fonctionnelle \mathcal{L} implique un traitement par approximation via d'autres problèmes d'optimisation plus réguliers. Dans ce but, le résultat de convergence abstrait sur les paires optimales dans cet article peut-être un outil crucial. Une autre continuité intéressante serait d'étendre les résultats de ce papier à des problèmes avec frottement ou encore, de passer à des cas quasi-statique. C'est ce sur quoi porte l'article suivant.

4 Optimisation d'un problème de contact visco-élastique avec contrainte unilatérale et frottement

Dans cet article, on considère un problème avec dépendance par rapport au temps. Cela implique l'utilisation d'outils tels que les espaces de fonction à valeurs vectorielles, le lemme de Gronwall ou encore les opérateurs de mémoire. Notons également que l'on sort du cadre des problèmes de contact élastiques en étudiant ici une loi de comportement viscoélastique à mémoire longue. En outre, on réussit en fin d'article à étendre les résultats sur le contrôle optimal obtenu dans les précédents articles au cas évolutif. Le cadre physique est le suivant: on considère un corps viscoélastique qui occupe le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ avec une frontière régulière Γ . Celle-ci est divisée en trois parties mesurables et disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 . On suppose toujours que $mes(\Gamma_1) > 0$. Le corps est fixé sur Γ_1 , soumis à des forces de traction dépendantes du temps sur Γ_2 et en contact avec frottement sur Γ_3 avec l'obstacle déformable. Le processus de contact est quasi-statique et l'intervalle de temps considéré est $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

4.1 Le modèle

Le modèle mathématique que nous considérons pour décrire l'équilibre du corps dans ce cadre physique ci-dessus est le suivant.

Problème \mathcal{P} . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u} = (u_i): \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}): \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{S}^d$ et deux fonctions d'interface $\eta: \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi: \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,*

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) ds \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{II.47})$$

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0(t) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{II.48})$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (\text{II.49})$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2(t) \quad \text{sur } \Gamma_2, \quad (\text{II.50})$$

$$\left. \begin{aligned}
u_\nu(t) &\leq g, \\
\sigma_\nu(t) + \eta_\nu(t) + \xi_\nu(t) &\leq 0, \\
(u_\nu(t) - g)(\sigma_\nu(t) + \eta_\nu(t) + \xi_\nu(t)) &= 0, \\
0 \leq \eta_\nu(t) &\leq F\left(\int_0^t u_\nu^+(s) ds\right), \\
\eta_\nu(t) &= \begin{cases} 0 & \text{si } u_\nu(t) < 0, \\ F\left(\int_0^t u_\nu^+(s) ds\right) & \text{si } u_\nu(t) > 0, \end{cases} \\
\xi_\nu(t) &= p(u_\nu(t))
\end{aligned} \right\} \text{ sur } \Gamma_3, \quad (\text{II.51})$$

$$\left. \begin{aligned}
\|\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\| &\leq \mu p(u_\nu(t)), \\
-\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) &= \mu p(u_\nu(t)) \frac{\mathbf{u}_\tau(t)}{\|\mathbf{u}_\tau(t)\|} \quad \text{si } \mathbf{u}_\tau(t) \neq \mathbf{0}
\end{aligned} \right\} \text{ sur } \Gamma_3. \quad (\text{II.52})$$

Décrivons plus ce modèle. Premièrement, l'équation (II.47) représente la loi de comportement viscoélastique du matériau dans laquelle \mathcal{A} représente l'opérateur d'élasticité et \mathcal{B} représente le tenseur de relaxation. L'équation (II.48) décrit l'équilibre du corps Ω dans laquelle \mathbf{f}_0 représente la densité de forces volumiques, supposée dépendante du temps. Notons également que l'on néglige le terme d'inertie de l'équation de mouvement. Les équations (II.49) et (II.50) représentent les conditions aux limites de déplacements et de tractions respectivement où \mathbf{f}_2 désigne la densité des forces de tractions, elles aussi dépendantes du temps. La condition de contact est représentée par (II.51) dans laquelle $g > 0$, p et F sont des fonctions positives données que l'on décrira plus loin et r^+ représente la partie positive de r . Enfin, (II.52) modélise une version de la loi de Coulomb dans laquelle $\mu \geq 0$ dénote le coefficient de frottement. Notons tout de même que cette loi décrit une transition entre la version classique de la loi de Coulomb, gouvernant le contact avec la couche déformable, et la loi de Tresca, gouvernant le contact avec la fondation rigide.

Dans l'analyse de ce problème, on considère les espaces

$$\begin{aligned}
V &= \{ \mathbf{v} = (v_i) \in H^1(\Omega)^d : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1 \}, \\
Q &= \{ \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) : \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) \}.
\end{aligned}$$

munis de leur produit scalaire canonique et leur norme associée. Enfin, nous avons besoin de l'espace des tenseurs symétriques d'ordre quatre donné par

$$\mathbf{Q}_\infty = \{ \mathcal{E} = (e_{ijkl}) \mid e_{ijkl} = e_{jikl} = e_{klij} \in L^\infty(\Omega), 1 \leq i, j, k, l \leq d \}. \quad (\text{II.53})$$

Notamment, \mathbf{Q}_∞ est un espace de Banach avec la norme

$$\|\mathcal{E}\|_{\mathbf{Q}_\infty} = \max_{0 \leq i, j, k, l \leq d} \|e_{ijkl}\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Dans la section suivante, nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible du problème \mathcal{P} .

4.2 Existence et unicité

Pour l'analyse du Problème \mathcal{P} , on introduit les hypothèses suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}: \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d \text{ est telle que} \\ \text{(a) il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|^2 \\ \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ \text{(b) il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \\ \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ \text{(c) } \mathcal{A}(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d, \\ \text{(d) } \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \text{ pour tout } \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right. \quad (\text{II.54})$$

$$\mathcal{B} \in C(\mathbb{R}_+, \mathbf{Q}_{\infty}). \quad (\text{II.55})$$

On suppose que les densités de forces volumiques et de tractions satisfont

$$\mathbf{f}_0 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)^d), \quad \mathbf{f}_2 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_2)^d). \quad (\text{II.56})$$

La fonction seuil et la fonction compliance normale sont telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} F: \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ est telle que} \\ \text{(a) il existe } L_F > 0 \text{ telle que} \\ \quad |F(\mathbf{x}, r_1) - F(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_F |r_1 - r_2| \\ \quad \text{pour tout } r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \Gamma_3, \\ \text{(b) } F(\cdot, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}, \\ \text{(c) } F(\mathbf{x}, 0) = 0, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (\text{II.57})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p: \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ est telle que} \\ \text{(a) il existe } L_p > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p(\mathbf{x}, r_1) - p(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2| \\ \quad \text{pour tout } r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_3, \\ \text{(b) } (p(\mathbf{x}, r_1) - p(\mathbf{x}, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \\ \quad \text{pour tout } r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_3, \\ \text{(d) } p(\cdot, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}, \\ \text{(c) } p(\mathbf{x}, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (\text{II.58})$$

On rappelle que

$$g > 0, \quad \mu > 0 \quad (\text{II.59})$$

et on suppose enfin que la condition suivante est vérifiée:

$$\mu L_p \|\gamma\|^2 < m_{\mathcal{A}}. \quad (\text{II.60})$$

On introduit maintenant l'ensemble des champs de déplacements admissibles U défini par

$$U = \{ \mathbf{v} \in V \mid v_\nu \leq g \text{ sur } \Gamma_3 \}. \quad (\text{II.61})$$

Puis, en suivant l'approche standard basée sur la formule de Green, on trouve la formulation variationnelle du Problème \mathcal{P} qui suit.

Problème \mathcal{P}^V . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u}: \mathbb{R}_+ \rightarrow U$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité ci-dessous est vérifiée:*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) \, dx + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu(t))(v_\nu - u_\nu(t)) \, da \\ & + \int_{\Omega} \left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) \, ds \right) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) \, dx \\ & + \int_{\Gamma_3} F \left(\int_0^t u_\nu^+(s) \, ds \right) (v_\nu^+ - u_\nu^+(t)) \, da + \int_{\Gamma_3} \mu p(u_\nu(t)) (\|\mathbf{v}_\tau\| - \|\mathbf{u}_\tau(t)\|) \, da \\ & \geq \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \, da \quad \forall \mathbf{v} \in U. \end{aligned}$$

Dans l'étude de ce problème, nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 4.1. *Supposons (II.54)–(II.60). Alors, le Problème \mathcal{P}^V a une unique solution avec comme régularité $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; U)$.*

La preuve est une application du résultat abstrait donné par le Théorème 2.3, et les lemmes que l'on énonce ci-dessous.

Lemme 4.2. *Un champ de déplacement $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; U)$ est solution du Problème \mathcal{P}^V si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité ci-dessous est vérifiée :*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) \in U, \quad & (\mathbf{A}\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V + j(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) \\ & - j(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in U. \end{aligned}$$

Lemme 4.3. *Il existe un unique champ de déplacement $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; U)$ satisfaisant l'inégalité (II.62), pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.*

4.3 Résultats de convergence

Dans cette section, on considère les perturbations \mathbf{f}_{0n} , \mathbf{f}_{2n} , g_n , μ_n des données \mathbf{f}_0 , \mathbf{f}_2 , g , μ respectivement telles que

$$\mathbf{f}_{0n} \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)^d), \quad \mathbf{f}_{2n} \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_2)^d), \quad (\text{II.62})$$

$$g_n > 0, \quad \mu_n > 0, \quad (\text{II.63})$$

$$\mu_n L_p \|\gamma\|^2 < m_A. \quad (\text{II.64})$$

Puis, avec l'ensemble des champs de déplacements admissibles U_n défini par

$$U_n = \{ \mathbf{v} \in V \mid v_\nu \leq g_n \text{ sur } \Gamma_3 \}, \quad (\text{II.65})$$

on introduit la perturbation au Problème \mathcal{P}^V suivante .

Problème \mathcal{P}_n^V . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u}_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow U_n$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité ci-dessous est vérifiée :*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n(t)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n(t))) \, dx + \int_{\Gamma_3} p(u_{n\nu}(t))(v_\nu - u_{n\nu}(t)) \, da \\ & + \int_{\Omega} \left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n(s)) \, ds \right) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n(t))) \, dx \\ & + \int_{\Gamma_3} F \left(\int_0^t u_{n\nu}^+(s) \, ds \right) (v_\nu^+ - u_{n\nu}^+(t)) \, da + \int_{\Gamma_3} \mu_n p(u_{n\nu}(t)) (\|\mathbf{v}_\tau\| - \|\mathbf{u}_{n\tau}(t)\|) \, da \\ & \geq \int_{\Omega} \mathbf{f}_{0n}(t) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}_n(t)) \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_{2n}(t) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}_n(t)) \, da \quad \forall \mathbf{v} \in U_n. \end{aligned}$$

D'après le Théorème 2.3, le Problème \mathcal{P}_n^V a une unique solution $\mathbf{u}_n \in C(\mathbb{R}_+; U_n)$ et de plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, elle satisfait l'inégalité

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n(t) \in U_n, \quad & (A\mathbf{u}_n(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_n(t))_V + j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}_n(t), \mathbf{u}_n(t), \mathbf{v}) \\ & - j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}_n(t), \mathbf{u}_n(t), \mathbf{u}_n(t)) \geq (\mathbf{f}_n(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_n(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in U_n. \end{aligned}$$

Ici et dans la suite de cette section les fonctions $j_n: Y \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbf{f}_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow V$ sont définies par

$$\begin{aligned} j_n(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx + \int_{\Gamma_3} \xi \cdot v_\nu^+ \, da + \int_{\Gamma_3} \mu_n p(u_\nu) \|\mathbf{v}_\tau\| \, da \\ & \forall \mathbf{y} = (\boldsymbol{\sigma}, \xi) \in Z, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \end{aligned}$$

$$(\mathbf{f}_n(t), \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_{0n}(t) \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_{2n}(t) \cdot \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Notre principal résultat dans cette section est le suivant.

Théorème 4.4. *Supposons que (II.54)–(II.60) et (II.62)–(II.64) soient vérifiées. De plus, supposons que*

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{0n}(t) \rightharpoonup \mathbf{f}_0(t) & \text{dans } L^2(\Omega)^d, & \mathbf{f}_{2n}(t) \rightharpoonup \mathbf{f}_2(t) & \text{dans } L^2(\Gamma_2)^d, \\ \text{quand } n \rightarrow \infty, \forall t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (\text{II.66})$$

$$\begin{cases} \text{Pour chaque } m \in \mathbb{N} \text{ il existe } \tilde{N}_m \in \mathbb{N} \text{ et } \delta_m > 0 \text{ telles que} \\ \|\mathbf{f}_{0n}(t)\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \delta_m, \|\mathbf{f}_{2n}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq \delta_m \quad \forall t \in [0, m], n \geq \tilde{N}_m, \end{cases} \quad (\text{II.67})$$

$$g_n \rightarrow g, \quad \mu_n \rightarrow \mu \quad \text{dans } \mathbb{R}. \quad (\text{II.68})$$

Alors,

$$\mathbf{u}_n(t) \rightarrow \mathbf{u}(t) \quad \text{dans } V \quad \text{quand } n \rightarrow \infty, \quad (\text{II.69})$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

La preuve est basée sur l'introduction et l'étude d'un problème intermédiaire dont la solution, pour tout $n \in \mathbb{N}$, notée par $\bar{\mathbf{u}}_n$, a la régularité $\bar{\mathbf{u}}_n \in C(\mathbb{R}_+; U)$. On utilise ensuite les lemmes que nous énoncerons ci-dessous dont la démonstration est basée sur l'utilisation du Lemme de Gronwall et du Théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Lemme 4.5. *Pour chaque $m \in \mathbb{N}$ il existe $\lambda_m > 0$ et $N_m \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\|\bar{\mathbf{u}}_n(t)\|_V \leq \lambda_m \quad \forall t \in [0, m], n \geq N_m. \quad (\text{II.70})$$

Lemme 4.6. *Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ la convergence suivante est vérifiée :*

$$\bar{\mathbf{u}}_n(t) \rightharpoonup \mathbf{u}(t) \quad \text{dans } V. \quad (\text{II.71})$$

Lemme 4.7. *Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ la convergence suivante est vérifiée :*

$$\bar{\mathbf{u}}_n(t) \rightarrow \mathbf{u}(t) \quad \text{dans } V. \quad (\text{II.72})$$

Le Théorème 4.4 fournit la convergence de la solution \mathbf{u}_n vers la solution \mathbf{u} . Cependant, les hypothèses de ce théorème ne sont pas assez fortes pour garantir cette convergence dans l'espace $C(\mathbb{R}_+; V)$. Pour cette raison, nous renforçons ces hypothèses pour obtenir les résultats suivants

Théorème 4.8. *En plus des conditions (II.54)–(II.34), (II.63)–(II.64), (II.68), on suppose que $\mathbf{f}_{0n} = \mathbf{f}_0$ et $\mathbf{f}_{2n} = \mathbf{f}_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors,*

$$\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{dans } C(\mathbb{R}_+; V) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty, \quad (\text{II.73})$$

i.e., \mathbf{u}_n converge uniformément vers \mathbf{u} sur tout intervalle compact $I \subset \mathbb{R}_+$.

La preuve est basée sur des estimations déjà obtenues dans la preuve du Théorème 4.4.

4.4 Problèmes d'optimisation

Les Théorèmes 4.4 et 4.8 peuvent servir à étudier un large panel de problèmes d'optimisation associés au Problème \mathcal{P} . Dans cette section, nous traiterons quelques exemples. Premièrement, supposons que (II.54), (II.55), (II.57) et (II.58) sont vérifiées et considérons $K_0 \subset L^2(\Omega)^d$ et $K_2 \subset L^2(\Gamma_2)^d$. D'autre part, soient θ_0 et θ_2 tels que

$$\theta_0 \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \quad \theta_2 \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \quad (\text{II.74})$$

En outre, on considère deux intervalles réels K_3 et K_4 tel que

$$K_3 = [a_3, b_3] \text{ avec } 0 < a_3 \leq b_3, \quad K_4 = [\xi_4, \zeta_4] \text{ avec } 0 \leq \xi_4 \leq \zeta_4 \leq \frac{m_{\mathcal{A}}}{L_p \|\gamma\|^2}. \quad (\text{II.75})$$

On note par la suite $X = L^2(\Omega)^d \times L^2(\Gamma_3)^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ muni du produit scalaire canonique et soit $\mathcal{K} = K_0 \times K_2 \times K_3 \times K_4 \subset X$. Pour tout élément $k = (\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_2, g, \mu) \in \mathcal{K}$, on considère le Problème \mathcal{P} avec les données $\mathbf{f}_0 = \theta_0 \mathbf{b}_0$, $\mathbf{f}_2 = \theta_2 \mathbf{b}_2$, g et μ . Les hypothèses (II.74) and (II.75) nous permettent d'affirmer que les hypothèses du Théorème 4.1 sont vérifiées et ainsi ce problème admet une unique solution \mathbf{u}_k avec pour régularité $\mathbf{u}_k \in C(\mathbb{R}_+, U)$.

Considérons une fonctionnelle coût $\mathcal{L} : V \rightarrow \mathbb{R}$ et un moment arbitraire $t \in \mathbb{R}_+$. On formule le problème d'optimisation suivant.

Problème \mathcal{O}_1 . *Trouver $k^* \in \mathcal{K}$ tel que*

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_{k^*}(t)) = \min_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{L}(\mathbf{u}_k(t)).$$

Dans l'étude de ce problème, on suppose que

$$K_0 \text{ est un sous ensemble borné et faiblement fermé de } L^2(\Omega)^d. \quad (\text{II.76})$$

$$K_2 \text{ est un sous ensemble borné et faiblement fermé de } L^2(\Gamma_2)^d. \quad (\text{II.77})$$

$$\mathcal{L} : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une fonction semi-continue inférieurement.} \quad (\text{II.78})$$

Nous avons le résultat d'existence suivant.

Théorème 4.9. *Supposons (II.54), (II.55), (II.57), (II.58), (II.74)–(II.78). Alors, le Problème \mathcal{O}_1 a au moins une solution.*

La preuve consiste à appliquer une version du Théorème de Weierstrass combinée avec le Théorème 4.4.

Exemple 4.10. *On considère la fonctionnelle*

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \|\varepsilon(\mathbf{u})\|^2 dx \quad \text{pour tout } \mathbf{u} \in V. \quad (\text{II.79})$$

L'interprétation mécanique du Problème \mathcal{O}_1 avec ce choix de fonctionnelle est la suivante. Étant donné l'ensemble \mathcal{K} et un processus de contact de la forme (II.47)–(II.52), on cherche $\mathbf{f}_0 = \theta_0 \mathbf{b}_0^*$ et $\mathbf{f}_2 = \theta_2 \mathbf{b}_2^*$ ainsi qu'une borne g^* et un coefficient de frottement μ^* , de sorte que la déformation correspondante dans le corps Ω au moment donné t soit aussi petite que possible.

Conclusion. Dans cet article, le changement majeur par rapport aux précédents est le passage à un problème avec opérateur de mémoire, celui-ci permettant de traiter un large panel de nouveaux problèmes, la dépendance par rapport au temps étant à la fois plus complexe à gérer mais aussi plus représentative de la réalité des problèmes physiques envisagés. En effet, les processus de contact quasi-statique et dynamique adhèrent plus à la réalité. Mathématiquement, l'évolution par rapport aux précédents problèmes est l'introduction des opérateurs de mémoire nécessitant de nouveaux résultats d'existence et d'unicité pour une autre classe d'inéquations quasi-variationnelles. Enfin, pour ce qui est du contrôle optimal, il est à noter que l'on a réussi dans ce papier à transposer les résultats obtenus tout au long de cette thèse.

CONCLUSIONS

Il convient pour conclure ce mémoire de faire un bilan des travaux présentés dans cette thèse.

Premièrement, intéressons-nous à l'évolution des problèmes mécaniques étudiés. Le premier modèle décrit un processus de contact statique entre un corps élastique et un obstacle composite. Bien que le fait de négliger le frottement simplifie l'étude mathématique du problème, c'est la condition de contact particulière à cet article qui est intéressante. En effet, l'obstacle est composé d'une fondation impénétrable que l'on retrouve plutôt dans des problèmes de contact de type Signorini, d'une couche de matériaux déformables correspondant à un problème avec compliance normale, et d'une croûte rigide craquant au delà d'un seuil critique d'effort subit, plus spécifique aux problèmes de contact plastique. Cependant, comme précisé précédemment, on idéalise la situation physique pour négliger le frottement, ce qui exclut une majorité d'applications possibles. Ainsi le second problème étudié inclut du frottement, mais en prenant le parti d'introduire une deuxième surface de contact amenant un processus avec compliance normale. Si ce problème s'appuie sur le premier, le généralisant, le troisième prend la tangente en considérant un problème où la loi de comportement, régularisant la loi de Hencky, exprime le tenseur linéarisé des déformations en fonction du tenseur de contrainte montrant la volonté de formuler le problème faible en terme de contraintes. Notons également l'ajout d'une pression sur la surface de contact qui fera office de contrôle. Enfin, le dernier problème constitue l'aboutissement de la thèse, bien plus complexe que les précédents. En effet, on considère ici un processus quasi-statique avec dépendance par rapport au temps, décrivant le contact entre un corps visco-élastique et un obstacle composé d'une fondation rigide recouverte d'une couche rigide déformable imprimant un effet mémoire. Comme le précise l'article, la condition de contact a été utilisée dans l'étude d'un problème évolutif sans frottement impliquant des matériaux élastiques. On a de plus du frottement modélisé par une version de la loi de Coulomb avec coefficient de frottement.

Regardons maintenant l'évolution de ces problèmes du point de vue mathématique. Le premier modèle conduit à l'étude d'un problème consistant à résoudre une inéquation variationnelle elliptique du second ordre. La preuve de l'existence et de l'unicité de la solution de celui-ci consiste à appliquer un résultat fondamental sur les inéquations variationnelles du second ordre, sous certaines hypothèses sur l'opérateur et la fonctionnelle en faisant partie. Le gros du travail sur cet article réside dans la preuve du résultat de convergence. Le théorème de Smulyan y joue un rôle essentiel. Le procédé utilisé dans cette preuve sera repris, excepté quelques variations, dans les démonstrations des résultats des articles suivants. De la même manière, le résultat obtenu pour le contrôle optimal sert de base pour la suite de la thèse, et sera affiné et étendu à d'autres types de problèmes au fil des articles. Il s'agit ici d'un problème d'optimisation où la fonctionnelle coût ne dépend que de la solution du problème mécanique et du contrôle choisi. L'idée étant d'introduire en plus des coefficients pour moduler la priorité entre approcher le plus possible la valeur souhaitée par exemple pour le déplacement normal ou assurer un critère de minimisation pour une donnée autre que celle choisie pour contrôle.

Le deuxième article approfondit les choses en introduisant une dépendance de la fonctionnelle coût par rapport à toutes les données. Remarquons également, comme le montre l'exemple unidimensionnel, que la valeur optimale du contrôle dépend des données du problème. Notons encore que l'ajout de la seconde surface de contact avec frottement complexifie le problème de telle sorte que la fonctionnelle associée à la formulation variationnelle dépend de la solution, induisant cette fois l'étude d'une inéquation quasi-variationnelle. Ainsi, on applique un résultat d'existence et d'unicité classique pour ce type d'inéquation. Cela nécessite cependant à la fois un renforcement des hypothèses sur ladite fonctionnelle et un choix particulier de coefficient de frottement. Jusqu'ici, les problèmes abordés avaient une formulation faible exprimée en terme de déplacement, or il est possible et pas si rare d'en formuler en terme de contraintes ce que nous faisons dans le troisième article. Cependant, toujours dans la continuité de la thèse, l'enjeu est de faire du contrôle optimal sur des problèmes duaux. Pour se faire, on utilise un nouvel outil mathématique, la convergence de Mosco, une convergence sur les ensembles. Elle est utilisée pour assurer la convergence des solutions aux problèmes d'optimisation considérés. À ce stade, on s'est restreint au cas statique. Or, une grande partie des problèmes auxquels nos travaux pourraient éventuellement être appliqués sont évolutifs. Ainsi, dans le dernier article, on s'intéresse à ce type de problème. La particularité ici étant l'utilisation d'opérateurs de mémoire pour décrire l'effet mémoire des matériaux considérés. De plus, on utilise d'autres outils tels que le lemme de Gronwall, le théorème de convergence dominée de Lebesgue ou encore l'inégalité du sous-gradient. Pour le résultat de convergence, on s'appuie clairement sur ce qui a été fait dans le premier article. Enfin, sous des considérations spécifiques, nous arrivons également à étendre nos résultats de contrôle optimal aux cas évolutifs.

Pour synthétiser, nous sommes partis d'un problème idéalisé par la négligence

du frottement, et donc relativement simplifié, non sans intérêt pour autant. Le travail produit sur celui-ci forme un socle de base pour les articles suivants. Nous avons ensuite complexifié le problème en y ajoutant du frottement, puis étendu les résultats obtenus, avec de nouvelles considérations physiques comme mathématiques pour affiner le modèle. Nous nous sommes également aventuré dans d'autres champs de problèmes, les problèmes duaux et réussi à y étendre nos résultats. Enfin, afin de coller à la réalité de la plupart des problèmes physiques, il fallait considérer un problème évolutif. Plus spécifiquement, nous y avons ajouté également des matériaux à effet mémoire nécessitant l'utilisation de l'arsenal mathématique y étant associé. Ainsi, un grand nombre de problèmes en mécanique du contact est concerné par les travaux de cette thèse. Cependant, il faut bien remarquer que les fonctionnelles rencontrées jusque là avaient la bonne propriété d'être convexes. Or, beaucoup de problèmes plus complexes nécessitent l'utilisation de fonctions non convexes. Ceux-ci sont couverts par les inéquations hémi-variationnelles. La théorie mathématique de ce domaine d'inéquations est toutefois autrement plus compliquée. Cela constitue donc une ouverture plus qu'intéressante pour de futures recherches. Mentionnons également que l'étude des problèmes dynamiques de contact avec contraintes unilatérales, y compris leur contrôle, pourrait constituer une continuation naturelle des travaux inclus dans cette thèse.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. Duvaut and J.-L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Berlin, Springer-Verlag, 1976.
- [2] R. Glowinski, J.-L. Lions and R. Trémoilières, *Numerical Analysis of Variational Inequalities*, Amsterdam, North-Holland, 1981.
- [3] I. Hlaváček, J. Haslinger, J. Necăs and J. Lovísek, *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*, New York, Springer-Verlag, 1988.
- [4] A.J. Kurdila and M. Zabrankin, *Convex Functional Analysis*, Birkhäuser, Basel, 2005.
- [5] J.-L. Lions, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Paris, 1968.
- [6] P. D. Panagiotopoulos, *Inequality Problems in Mechanics and Applications*, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [7] P.D. Panagiotopoulos, *Hemivariational Inequalities, Applications in Mechanics and Engineering*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [8] M. Sofonea and A. Matei, *Variational Inequalities with Applications. A Study of Antiplane Frictional Contact Problems*, Advances in Mechanics and Mathematics **18**, New York, Springer, 2009.
- [9] M. Sofonea and S. Migórski, *Variational-Hemivariational Inequalities with Applications*, Pure and Applied Mathematics, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton-London, 2018.
- [10] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Applications II A/B*, Springer, New York, 1990.

1. A. Benraouda, M. Couderc and M. Sofonea, Optimal control of a frictionless contact problem with unilateral constraint, *preprint*.
2. M. Couderc and M. Sofonea, An elastic frictional contact problem with unilateral constraint, *Mediterranean Journal of Mathematics* 15 (2018), Art 195, 18 pp., [https://doi.org/ 10.1007/ s00009-018-1243-4](https://doi.org/10.1007/s00009-018-1243-4).
3. M. Sofonea, Y. Xiao and M. Couderc, Optimization problems for elastic contact models with unilateral constraints, *Journal of Applied Mathematics and Physics. (ZAMP)* 70 (2019) Art. 1, 17 pp., [https://doi.org/10.1007/ s000033-018-1046-2](https://doi.org/10.1007/s000033-018-1046-2).
4. M. Sofonea, Y. Xiao and M. Couderc, Optimization problems for a viscoelastic frictional contact problem with unilateral constraints, *Nonlinear Analysis Series B: Real World Applications* 50 (2019), 86–103.

Optimal control of a frictionless contact problem with unilateral constraint

Ahlem Benraouda, Maxime Couderc and Mircea Sofonea*

Laboratoire de Mathématiques et Physique

University of Perpignan Via Domitia

52 Avenue Paul Alduy, 66860 Perpignan, France

e-mail: ahlem.benraouda@univ-perp.fr, maxime.couderc@etudiant.univ-perp.fr

sofonea@univ-perp.fr

Abstract

We consider a mathematical model which describes the equilibrium of an elastic body in contact with a rigid-plastic obstacle. The contact is frictionless and is modeled with a new condition which involves unilateral constraints. We describe the problem and derive a weak formulation in the form of an elliptic variational inequality for the displacement field. Then, we establish the existence of a unique weak solution to the problem and prove its continuous dependence with respect to the data. Next, we state an abstract optimization problem for which we prove the existence of a minimizer. The proof is based on arguments of compactness and lower semicontinuity. Then, we use this result in the study of four optimal control problems associated to the contact model. Finally, we present a one-dimensional version of the problem for which the analytic expression of the solution is obtained. We illustrate our theoretical results in the study of this elementary example.

AMS Subject Classification : 74M15, 49J40, 49J45, 49J20.

Key words : elastic material, frictionless contact, variational inequality, weak solution, convergence results, optimal control, optimal pair.

*Corresponding author

1 Introduction

Processes of contact between deformable bodies abound in industry and everyday life. A few simple examples are brake pads in contact with wheels, tires on roads, and pistons with skirts. Because of the importance of contact processes in structural and mechanical systems, considerable effort has been put into their modeling, analysis and numerical simulations and the literature in the field is extensive. It includes the books [5, 6, 8, 10, 14, 15, 16, 17], for instance.

Variational inequalities represent a powerful mathematical tool used in the study of various nonlinear boundary value problems arising in Contact Mechanics. Their theory was developed based on arguments of monotonicity and convexity, including properties of the subdifferential of a convex function. Basic references in the field are [2, 3, 4, 7, 9, 11], for instance.

The literature concerning optimal control problems in the study of mathematical models of contact is quite limited. The reason is the strong nonlinearities which arise in the boundary conditions included in such models. Results on optimal control for various contact problems with elastic materials could be found in [1, 4, 12, 13, 18, 19] and the references therein.

In this paper we consider a mathematical model which describes the contact between an elastic body and a foundation. We assume that the foundation is made of a rigid material, covered by a rigid-plastic layer of thickness g and yield limit F . The body is acted upon by body forces of density \mathbf{f}_0 and by tractions of density \mathbf{f}_2 , which act on a part of its boundary. The variational formulation of the model is in a form of an elliptic variational inequality with unilateral constraints in which the unknown is the displacement field and the data are the density of applied forces $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2)$, the thickness g and yield limit F . The aim of this paper is study four optimal control problems for the contact model, in which the control are successively \mathbf{f}_0 , \mathbf{f}_2 , g and F . To this end, besides the unique solvability of the problem we need results concerning the continuous dependence of the solution with respect to the data, which present an interest on their own.

The paper is structured as follows. In Section 2 we introduce the contact model, then we list the assumptions on the data and derive its variational formulation. In Section 3 we state and prove the unique weak solvability of the problem, Theorem 3.1. Then we proceed with a convergence result, Theorem 3.2, which states the continuous dependence of the solution with respect to the density of applied forces, the unilateral constraints and the yield limit of the obstacle. In Section 4 we state a general optimization problem and prove its solvability, Theorem 4.1. Then, we construct four optimal control problems associated to Problem \mathcal{P} in which the control is the density of the body forces, the density of the surface tractions, the thickness and the yield limit of the obstacle, respectively. Finally, in Section 5 we consider a one-dimensional example which models the contact of a linearly elastic rod. In this case the solution

could be easily calculated. We illustrate the use of our theoretical result on this elementary example and we provide the corresponding mechanical interpretations.

We end this introduction with the following abstract existence result.

Theorem 1.1. *Let X be a Hilbert space and assume that K is a nonempty closed convex subset of X , $A : X \rightarrow X$ is a strongly monotone Lipschitz continuous operator and $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ is a convex lower semicontinuous function. Then, for each $f \in X$ there exists a unique solution to the variational inequality*

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K. \quad (1.1)$$

Theorem 1.1 will be used in Section 3 to prove the unique weak solvability of our mathematical model of contact. Its proof is based on the Banach fixed point argument and could be found in [17], for instance.

2 The model

We consider an elastic body which occupies a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$) with a Lipschitz continuous boundary Γ , divided into three measurable disjoint parts Γ_1 , Γ_2 and Γ_3 such that $meas(\Gamma_1) > 0$. The body is fixed on Γ_1 , is acted by given body forces, given surface tractions on Γ_2 , and is in contact with an obstacle on Γ_3 . As a result, the mechanical state of the body evolves. To describe it we need to introduce the following notation.

First, we denote by $\mathbf{u} = (u_i)$ and $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$ the displacement field and the stress field, respectively. The functions \mathbf{u} and $\boldsymbol{\sigma}$ depend on the spatial variable $\mathbf{x} = (x_i) \in \Omega \cup \Gamma$ and play the role of the unknowns of the problem. Here and below the indices i, j, k, l run between 1 and d and, unless stated otherwise, the summation convention over repeated indices is used. Moreover, an index that follows a comma represents the partial derivative with respect to the corresponding component of the spatial variable \mathbf{x} , e.g. $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$. Also, $\boldsymbol{\varepsilon}$ and Div will represent the deformation and the divergence operators, respectively, i.e.,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j})$$

and, therefore, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ represents the linearized strain tensor. Note also that, in order to simplify the notation, we usually do not indicate explicitly the dependence of various functions on the spatial variable \mathbf{x} .

Next, we denote by \mathbb{S}^d the space of second order symmetric tensors on \mathbb{R}^d or, equivalently, the space of symmetric matrices of order d . The inner product and norm on \mathbb{R}^d and \mathbb{S}^d are defined by

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_i v_i, & \|\mathbf{v}\| &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{\frac{1}{2}} & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, & \|\boldsymbol{\tau}\| &= (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})^{\frac{1}{2}} & \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d, \end{aligned}$$

and the zero element of these spaces will be denoted by $\mathbf{0}$. Also, we denote by $\boldsymbol{\nu} = (\nu_i)$ the outward unit normal at Γ and u_ν , \mathbf{u}_τ will represent the normal and tangential components of \mathbf{u} on Γ given by $u_\nu = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}$ and $\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} - u_\nu \boldsymbol{\nu}$, respectively. Finally, σ_ν and $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ denote the normal and tangential stress on Γ , that is $\sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}$ and $\boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}$.

With these preliminaries, the classical formulation of the contact problem we consider in this paper is as follows.

Problem \mathcal{P} . Find a displacement field $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ and a stress field $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ such that

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{in } \Omega, \quad (2.1)$$

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_1, \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{on } \Gamma_2, \quad (2.4)$$

$$u_\nu \leq g, \quad \left. \begin{array}{ll} \sigma_\nu = 0 & \text{if } u_\nu < 0 \\ -F \leq \sigma_\nu \leq 0 & \text{if } u_\nu = 0 \\ \sigma_\nu = -F & \text{if } 0 < u_\nu < g \\ \sigma_\nu \leq -F & \text{if } u_\nu = g \end{array} \right\} \quad \text{on } \Gamma_3, \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_3. \quad (2.6)$$

We now provide a description of the equations and boundary conditions in Problem \mathcal{P} . First, equation (2.1) represents the elastic constitutive law of the material in which \mathcal{F} is assumed to be a nonlinear constitutive operator. Equation (2.2) is the equation of equilibrium. We use it here since the contact process is assumed to be static and, therefore, the inertial term is neglected. Conditions (2.3), (2.4) represent the displacement and traction boundary conditions, respectively. Finally, condition (2.6) represents the frictionless contact condition.

We now turn on the contact condition (2.5) in which our main interest is and which represents one of the traits of novelty of this paper. This condition is described by the monotone multivalued relation between the normal displacement and the opposite of the normal stress represented in Figure 1. It models the contact with a foundation made of a rigid body covered by a layer made of rigid-plastic material, say asperities, and can be derived in the following way. First, we assume that the normal stress has an additive decomposition of the form

$$\sigma_\nu = \sigma_\nu^P + \sigma_\nu^R \quad \text{on } \Gamma_3, \quad (2.7)$$

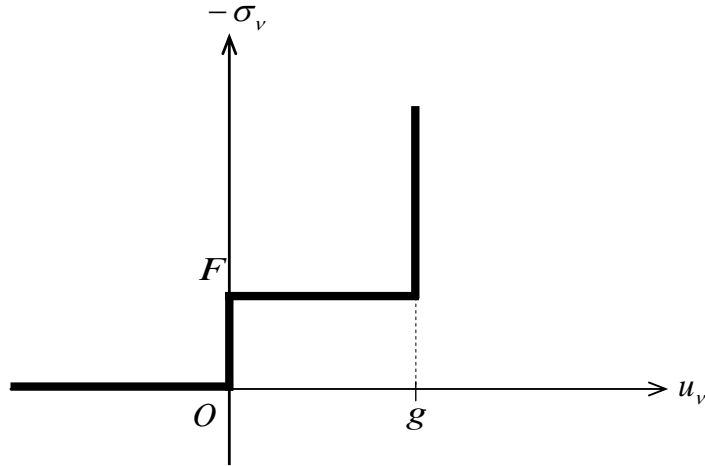


Figure 1: The contact condition (2.5).

in which σ_ν^P describes the reaction of the rigid-plastic material and σ_ν^R describes the reaction of the rigid body. We assume that σ_ν^P satisfies the condition

$$-F \leq \sigma_\nu^P \leq 0, \quad \sigma_\nu^P = \begin{cases} 0 & \text{if } u_\nu < 0, \\ -F & \text{if } u_\nu > 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

where F is a given positive function which will be described below. Using (2.8) we have

$$\begin{aligned} -F < \sigma_\nu^P \leq 0 &\implies u_\nu \leq 0, \\ \sigma_\nu^P = -F &\implies u_\nu \geq 0. \end{aligned}$$

This shows that the foundation does not allow penetration (and, therefore, it behaves like a rigid body) as far as the inequality $-F < \sigma_\nu^P \leq 0$ holds. It could allow penetration only when $\sigma_\nu^P = -F$ and, in this case, it offers no additional resistance. We conclude from here that condition (2.8) models the contact with a rigid-plastic obstacle, as claimed. Moreover, the function F could be interpreted as the yield limit of the obstacle.

On the other hand, the rigid part of the foundation does not allow penetration and, therefore, we assume that the normal displacement satisfies condition

$$u_\nu \leq g \quad \text{on } \Gamma_3. \quad (2.9)$$

Here $g > 0$ is a given bound which represents the thickness of the rigid-plastic layer. In addition, the part σ_ν^R of the normal stress satisfies the Signorini condition in the

form with the gap g , i.e.,

$$\sigma_\nu^R \leq 0, \quad \sigma_\nu^R(u_\nu - g) = 0 \quad \text{on } \Gamma_3. \quad (2.10)$$

We now gather conditions (2.7)–(2.10) and claim that in this way we obtain the contact condition (2.5). Indeed:

a) If $u_\nu < 0$ then (2.8) implies that $\sigma_\nu^P = 0$, (2.10) implies that $\sigma_\nu^R = 0$ and, therefore, equality (2.7) shows that $\sigma_\nu = 0$.

b) If $u_\nu = 0$ then (2.8) implies that $-F \leq \sigma_\nu^P \leq 0$, (2.10) implies that $\sigma_\nu^R = 0$ and, therefore, equality (2.7) shows that $-F \leq \sigma_\nu \leq 0$.

c) If $0 < u_\nu < g$ then (2.8) implies that $\sigma_\nu^P = -F$, (2.10) implies that $\sigma_\nu^R = 0$ and, therefore, equality (2.7) shows that $\sigma_\nu = -F$.

d) If $u_\nu = g$ then (2.8) implies that $\sigma_\nu^P = -F$, (2.10) implies that $\sigma_\nu^R \leq 0$ and, therefore, equality (2.7) shows that $\sigma_\nu \leq -F$.

We conclude from above that in any case condition (2.5) is satisfied, which proves the claim.

In the study of Problem \mathcal{P} we need to introduce further notation and preliminary material. Everywhere in this paper we use the standard notation for Sobolev and Lebesgue spaces associated to Ω and Γ . In particular, we use the spaces $L^2(\Omega)^d$, $L^2(\Gamma_2)^d$, $L^2(\Gamma_3)$ and $H^1(\Omega)^d$, endowed with their canonical inner products and associated norms. Moreover, we recall that for an element $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d$ we sometimes write \mathbf{v} for the trace $\gamma\mathbf{v} \in L^2(\Gamma)^d$ of \mathbf{v} to Γ . In addition, we consider the following spaces:

$$\begin{aligned} V &= \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_1 \}, \\ Q &= \{ \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) : \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) \}. \end{aligned}$$

The spaces V and Q are real Hilbert spaces endowed with the canonical inner products given by

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx, \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_Q = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx. \quad (2.11)$$

The associated norms on these spaces are denoted by $\|\cdot\|_V$ and $\|\cdot\|_Q$, respectively. Also, recall that the completeness of the space V follows from the assumption $\text{meas}(\Gamma_1) > 0$ which allows the use of Korn's inequality.

We denote by $\mathbf{0}_V$ the zero element of V and, for any element $\mathbf{v} \in V$ we denote by v_ν and \mathbf{v}_τ its normal and tangential components on Γ given by $v_\nu = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}$ and $\mathbf{v}_\tau = \mathbf{v} - v_\nu \boldsymbol{\nu}$. Moreover, for a regular stress function $\boldsymbol{\sigma}$, the following Green's formula holds:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx + \int_{\Omega} \text{Div } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} \, da \quad \text{for all } \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d. \quad (2.12)$$

We also recall that there exists $c_0 > 0$ which depends on Ω , Γ_1 and Γ_3 such that

$$\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \|\mathbf{v}\|_V \quad \text{for all } \mathbf{v} \in V. \quad (2.13)$$

Inequality (2.13) represents a consequence of the Sobolev trace theorem.

Let $Y = L^2(\Omega)^d \times L^2(\Gamma_2)^d$ be the product Hilbert space endowed with the canonical inner product $(\cdot, \cdot)_Y$ and the associated norm $\|\cdot\|_Y$. We denote by $\pi : V \rightarrow Y$ the operator defined by

$$\pi \mathbf{v} = (\mathbf{v}, \gamma_2 \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (2.14)$$

where γ_2 represents the trace of the function $\mathbf{v} \in V$ to the boundary Γ_2 . Note that π is a linear continuous operator and, therefore, there exists a constant $d_0 > 0$ such that

$$\|\pi \mathbf{v}\|_Y \leq d_0 \|\mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.15)$$

Moreover, the compactness of the trace operator combined with the compactness of the embedding $H^1(\Omega)^d \subset L^2(\Omega)^d$ imply that π is a weakly-strongly continuous operator, i.e.

$$\mathbf{v}_n \rightharpoonup \mathbf{v} \quad \text{in } V \quad \implies \quad \pi \mathbf{v}_n \rightarrow \pi \mathbf{v} \quad \text{in } Y. \quad (2.16)$$

Here and below we use notation “ \rightharpoonup ” and “ \rightarrow ” for the weak and strong convergence in various Hilbert spaces.

In the study of the mechanical problem (2.1)–(2.6) we assume that the elasticity operator \mathcal{F} satisfies the following conditions.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) There exists } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ such that} \\ \quad \|\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) There exists } m_{\mathcal{F}} > 0 \text{ such that} \\ \quad (\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(d) The mapping } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ is measurable on } \Omega, \\ \quad \text{for any } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(e) The mapping } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \text{ belongs to } Q. \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Concrete examples of operators \mathcal{F} which satisfy condition (2.17) can be found in [8, 17], for instance. We also assume that the densities of body forces and tractions, the yield limit and the bound are such that

$$\mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^d, \quad (2.19)$$

$$F \in L^2(\Gamma_3), \quad F(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \quad (2.20)$$

$$g > 0. \quad (2.21)$$

Under these assumptions we introduce the set $K \subset V$, the operator $A : V \rightarrow V$, the function $j : V \rightarrow \mathbb{R}$ and the element $\mathbf{f} \in Y$ defined by

$$K = \{ \mathbf{v} \in V : v_\nu \leq g \text{ a.e. on } \Gamma_3 \}, \quad (2.22)$$

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad (2.23)$$

$$j(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} Fv_\nu^+ \, da \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{f} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2). \quad (2.25)$$

Here and below, r^+ denotes the positive part of r , i.e., $r = \max\{0, r\}$. Moreover, note that the definition (2.14) implies that

$$(\mathbf{f}, \pi\mathbf{v})_Y = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.26)$$

We are now in a position to derive the variational formulation of Problem \mathcal{P} and, to this end, we assume that $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ are sufficiently regular functions which satisfy (2.1)–(2.6). Then using (2.5) and (2.22) it follows that

$$\mathbf{u} \in K. \quad (2.27)$$

Let $\mathbf{v} \in K$. We use Green's formula (2.12) and equalities (2.2)–(2.4), (2.25) to see that

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_Q = (\mathbf{f}, \pi\mathbf{v} - \pi\mathbf{u})_Y + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, da.$$

Moreover, since

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, da = \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(v_\nu - u_\nu) \, da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau) \, da,$$

the frictionless condition (2.6) yields

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_Q = (\mathbf{f}, \pi\mathbf{v} - \pi\mathbf{u})_Y + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(v_\nu - u_\nu) \, da. \quad (2.28)$$

We now use the contact condition (2.5) and the hypothesis (2.20) on the function F to see that

$$\sigma_\nu(v_\nu - u_\nu) \geq F(u_\nu^+ - v_\nu^+) \quad \text{on } \Gamma_3$$

and, therefore,

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(v_\nu - u_\nu) \, da \geq \int_{\Gamma_3} F(u_\nu^+ - v_\nu^+) \, da. \quad (2.29)$$

Next, we combine equality (2.28) with inequality (2.29), then we use the constitutive law (2.1), the definitions (2.23)–(2.24) and the regularity (2.27). As a result we find the following variational formulation of Problem \mathcal{P} .

Problem \mathcal{P}_V . Find a displacement field \mathbf{u} such that

$$\mathbf{u} \in K, \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V + j(\mathbf{v}) - j(\mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \pi\mathbf{v} - \pi\mathbf{u})_Y \quad \forall \mathbf{v} \in K. \quad (2.30)$$

Note that Problem \mathcal{P}_V is formulated in terms of the displacement field. Once the displacement field is known, the stress field can be easily obtained by using the constitutive law (2.1). A couple $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ which satisfies (2.1) and (2.30) is called a *weak solution* to the contact problem \mathcal{P} .

3 Existence, uniqueness and convergence result

In this section we present results on the analysis of Problem \mathcal{P}_V , including existence, uniqueness and convergence results. We start with the unique solvability of Problem \mathcal{P}_V , provided by the following theorem.

Theorem 3.1. Assume (2.17)–(2.21). Then, Problem \mathcal{P}_V has a unique solution.

Proof. We use Theorem 1.1 with $X = V$. To this end, we use the definition (2.22) to see that K is a nonempty, closed and convex subset of V . Next, we use the definition (2.23) and assumption (2.17)(c) to see that

$$(A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_V \geq m_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (3.1)$$

On the other hand, using assumption (2.17)(b) yields

$$\|A\mathbf{u} - A\mathbf{v}\|_V \leq L_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (3.2)$$

We conclude by (3.1) and (3.2) that A is a strongly monotone Lipschitz continuous operator on the space V .

Moreover, using (2.20) and (2.13) it is easy to see that the functional j defined by (2.24) is a seminorm on the space V and, in addition,

$$j(\mathbf{v}) \leq c_0 \|F\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

It follows from here that j is a continuous seminorm and, therefore, it is convex and lower semicontinuous.

Finally, using (2.15) and the Riesz representation theorem, we deduce that there exists a unique element $\tilde{\mathbf{f}} \in V$ such that

$$(\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{v})_V = (\mathbf{f}, \pi\mathbf{v})_Y \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (3.3)$$

Theorem 3.1 now is a direct consequence of Theorem 1.1. \square

Note that the solution \mathbf{u} of Problem \mathcal{P}_V depends on the data $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, g$ and, therefore, we shall denote it sometimes by $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, g)$. In what follows we study its dependence with respect to these data. To this end, in the rest of this section we assume that (2.17)–(2.21) hold and, in addition, we consider a perturbation $\mathbf{f}_{0\rho}, \mathbf{f}_{2\rho}, F_\rho, g_\rho$, of $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, g$, respectively, which satisfy conditions (2.18)–(2.21). Here ρ denotes a positive parameter which will converge to zero. For each $\rho > 0$ we consider the set $K_\rho \subset V$, the functional $j_\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ and the element $\mathbf{f}_\rho \in Y$ defined by

$$K_\rho = \{ \mathbf{v} \in V : v_\nu \leq g_\rho \text{ a.e. on } \Gamma_3 \}, \quad (3.4)$$

$$j_\rho(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} F_\rho v_\nu^+ da \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{f}_\rho = (\mathbf{f}_{0\rho}, \mathbf{f}_{2\rho}). \quad (3.6)$$

Moreover, we consider the following perturbation of Problem \mathcal{P}_V .

Problem \mathcal{P}_V^ρ . Find a displacement field \mathbf{u}_ρ such that

$$\mathbf{u}_\rho \in K_\rho, \quad (A\mathbf{u}_\rho, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\rho)_V + j_\rho(\mathbf{v}) - j_\rho(\mathbf{u}_\rho) \geq (\mathbf{f}_\rho, \pi\mathbf{v} - \pi\mathbf{u}_\rho)_Y \quad \forall \mathbf{v} \in K_\rho. \quad (3.7)$$

It follows from Theorem 3.1 that, for each $\rho > 0$, Problem \mathcal{P}_V^ρ has a unique solution $\mathbf{u}_\rho = \mathbf{u}_\rho(\mathbf{f}_{0\rho}, \mathbf{f}_{2\rho}, F_\rho, g_\rho)$. Our second result in this section is the following.

Theorem 3.2. Assume that

$$\mathbf{f}_{0\rho} \rightharpoonup \mathbf{f}_0 \quad \text{in } L^2(\Omega)^d \quad \text{as } \rho \rightarrow 0, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{f}_{2\rho} \rightharpoonup \mathbf{f}_2 \quad \text{in } L^2(\Gamma_2)^d \quad \text{as } \rho \rightarrow 0, \quad (3.9)$$

$$F_\rho \rightarrow F \quad \text{in } L^2(\Gamma_3) \quad \text{as } \rho \rightarrow 0, \quad (3.10)$$

$$g_\rho \rightarrow g \quad \text{as } \rho \rightarrow 0. \quad (3.11)$$

Then, the solution \mathbf{u}_ρ of Problem \mathcal{P}_V^ρ converges to the solution \mathbf{u} of Problem \mathcal{P}_V , i.e.

$$\mathbf{u}_\rho \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{in } V \quad \text{as } \rho \rightarrow 0. \quad (3.12)$$

The proof of Theorem 3.2 will be carried out in several steps that we present in what follows. We start by considering the intermediate problem of finding a displacement field $\tilde{\mathbf{u}}_\rho$ such that

$$\tilde{\mathbf{u}}_\rho \in K, \quad (A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{u}}_\rho)_V + j_\rho(\mathbf{v}) - j_\rho(\tilde{\mathbf{u}}_\rho) \geq (\mathbf{f}_\rho, \pi\mathbf{v} - \pi\tilde{\mathbf{u}}_\rho)_Y \quad \forall \mathbf{v} \in K. \quad (3.13)$$

Note that the unique solvability of this problem is a direct consequence of Theorem 3.1.

Lemma 3.3. The sequence $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\}$ converge weakly in V to \mathbf{u} , that is

$$\tilde{\mathbf{u}}_\rho \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{in } V \quad \text{as } \rho \rightarrow 0. \quad (3.14)$$

Proof. Let $\rho > 0$. We take $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$ in (3.13) to obtain

$$(A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\rho)_V + j_\rho(\mathbf{u}_\rho) \leq (\mathbf{f}_\rho, \pi\tilde{\mathbf{u}}_\rho)_Y.$$

Next, using assumption (3.1), the positivity of the function j_ρ and the continuity of the operator π , (2.15), it follows that

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\rho\|_V \leq \frac{1}{m_{\mathcal{F}}} \max(1, d_0) (\|\mathbf{f}_\rho\|_Y + \|A\mathbf{0}_V\|_V). \quad (3.15)$$

On the other hand, it is easy to see that the convergences (3.8) and (3.9) yield

$$\mathbf{f}_\rho \rightharpoonup \mathbf{f} \quad \text{in } Y \quad \text{as } \rho \rightarrow 0 \quad (3.16)$$

which implies that the sequence $\{\mathbf{f}_\rho\}$ is bounded in Y . We now use inequality (3.15) to deduce that there exists a positive constant M which does not depend on ρ such that

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\rho\|_V \leq M. \quad (3.17)$$

Thus, a standard compactness argument implies that there exists $\tilde{\mathbf{u}} \in V$ such that, passing to a subsequence, still denoted $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\}$, we have

$$\tilde{\mathbf{u}}_\rho \rightharpoonup \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{in } V \quad \text{as } \rho \rightarrow 0. \quad (3.18)$$

We now prove that

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}. \quad (3.19)$$

To this end we first note that K is a closed convex subset of the space V and $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\} \subset K$. Therefore, the convergence (3.18) implies that $\tilde{\mathbf{u}} \in K$. Let $\rho > 0$. We take $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{u}} \in K$ in (3.13) to obtain that

$$(A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \tilde{\mathbf{u}})_V \leq (\mathbf{f}_\rho, \pi\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \pi\tilde{\mathbf{u}})_Y + j_\rho(\tilde{\mathbf{u}}_\rho) - j_\rho(\tilde{\mathbf{u}}),$$

then we pass to the upper limit as $\rho \rightarrow 0$ in this inequality and use the convergences (3.10), (3.16), (3.18), (2.16) and the compactness of the trace operator. As a result we deduce that

$$\limsup_{\rho \rightarrow 0} (A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \tilde{\mathbf{u}})_V \leq 0.$$

Therefore, using (3.1)–(3.2), the convergence (3.18) and standard arguments on pseudomonotone operators, we deduce that

$$\liminf_{\rho \rightarrow 0} (A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{v})_V \geq (A\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in K. \quad (3.20)$$

On the other hand, using inequality (3.13) and the convergences (3.10), (3.16), (3.18) and (2.16) we obtain that

$$\liminf_{\rho \rightarrow 0} (A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{v})_V \leq (\mathbf{f}, \pi\tilde{\mathbf{u}} - \pi\mathbf{v})_Y + j(\mathbf{v}) - j(\tilde{\mathbf{u}}) \quad \forall \mathbf{v} \in K. \quad (3.21)$$

We combine now the inequalities (3.20) and (3.21) to see that

$$(A\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{u}})_V + j(\mathbf{v}) - j(\tilde{\mathbf{u}}) \geq (\mathbf{f}, \pi\mathbf{v} - \pi\tilde{\mathbf{u}})_Y \quad \forall \mathbf{v} \in K. \quad (3.22)$$

Next, we take $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ in (3.22) and $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{u}}$ in (2.30). Then, adding the resulting inequalities and using the strong monotonicity of the operator A , (3.1), we obtain that (3.19) holds.

A carefully examination of the arguments used above shows that any weakly convergent subsequence of the sequence $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\} \subset V$ converges weakly to \mathbf{u} , where, recall, \mathbf{u} is the unique element of V which solves the variational inequality (2.30). Moreover, estimate (3.17) shows that the sequence $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\}$ is bounded in V . We are now in a position to apply a standard compactness argument to see that the whole sequence $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\}$ converges weakly in V to \mathbf{u} as $\rho \rightarrow 0$, which concludes the proof. \square

We proceed with the following strong convergence result.

Lemma 3.4. *The sequence $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\}$ converges strongly in V to \mathbf{u} , that is*

$$\tilde{\mathbf{u}}_\rho \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{in } V \quad \text{as } \rho \rightarrow 0. \quad (3.23)$$

Proof. Let $\rho > 0$. We take $\mathbf{v} = \mathbf{u} \in K$ in (3.13) to obtain that

$$(A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u})_V \leq (\mathbf{f}_\rho, \pi\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \pi\mathbf{u})_Y + j_\rho(\tilde{\mathbf{u}}_\rho) - j_\rho(\mathbf{u}). \quad (3.24)$$

Next, we use (3.1) and (3.24) to find that

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{F}} \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u}\|_V^2 &\leq (A\tilde{\mathbf{u}}_\rho - A\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u})_V \\ &= (A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u})_V - (A\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u})_V \\ &\leq (\mathbf{f}_\rho, \pi\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \pi\mathbf{u})_Y + j_\rho(\tilde{\mathbf{u}}_\rho) - j_\rho(\mathbf{u}) - (A\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u})_V. \end{aligned}$$

We now pass to the limit in this inequality and use (3.10), (3.16), (3.18), (2.16) and the compactness of the trace operator. As a result we deduce that

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u}\|_V \rightarrow 0 \quad \text{as } \rho \rightarrow 0,$$

which concludes the proof. \square

We now have all the ingredients to provide the proof of Theorem 3.2.

Proof. For this end, let $\rho > 0$. It follows from the definitions (2.22) and (3.4) that $\frac{g}{g_\rho}\mathbf{u}_\rho \in K$ and $\frac{g_\rho}{g}\tilde{\mathbf{u}}_\rho \in K_\rho$. Therefore, taking $\mathbf{v} = \frac{g}{g_\rho}\mathbf{u}_\rho \in K$ in (3.13) and multiplying the resulting inequality by $\frac{g_\rho}{g}$ we find that

$$(A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \mathbf{u}_\rho - \frac{g_\rho}{g}\tilde{\mathbf{u}}_\rho)_V + \frac{g_\rho}{g}j_\rho(\frac{g}{g_\rho}\mathbf{u}_\rho) - \frac{g_\rho}{g}j_\rho(\tilde{\mathbf{u}}_\rho) \geq (\mathbf{f}_\rho, \pi\mathbf{u}_\rho - \frac{g_\rho}{g}\pi\tilde{\mathbf{u}}_\rho)_Y. \quad (3.25)$$

On the other hand, taking $\mathbf{v} = \frac{g_\rho}{g} \tilde{\mathbf{u}}_\rho \in K_\rho$ in (3.7) we obtain that

$$(A\mathbf{u}_\rho, \frac{g_\rho}{g} \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u}_\rho)_V + j_\rho(\frac{g_\rho}{g} \tilde{\mathbf{u}}_\rho) - j_\rho(\mathbf{u}_\rho) \geq (\mathbf{f}_\rho, \pi \frac{g_\rho}{g} \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \pi \mathbf{u}_\rho)_Y. \quad (3.26)$$

We now add inequalities (3.25) and (3.26), then we use the positive homogeneity of the functional j_ρ , $j_\rho(\lambda \mathbf{v}) = \lambda j_\rho(\mathbf{v})$ for $\lambda \geq 0$, and the linearity of the operator π . As a result we obtain

$$(A\tilde{\mathbf{u}}_\rho - A\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\rho - \frac{g_\rho}{g} \tilde{\mathbf{u}}_\rho)_V \geq 0$$

and, therefore,

$$(A\tilde{\mathbf{u}}_\rho - A\mathbf{u}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u}_\rho)_V \leq (A\tilde{\mathbf{u}}_\rho - A\mathbf{u}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \frac{g_\rho}{g} \tilde{\mathbf{u}}_\rho)_V$$

Then, using (3.1) and (3.2) we obtain that

$$m_{\mathcal{F}} \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u}_\rho\|_V \leq L_{\mathcal{F}} \left| 1 - \frac{g_\rho}{g} \right| \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho\|_V. \quad (3.27)$$

We now combine inequalities (3.27), (3.17) and the convergence (3.11) to deduce that

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u}_\rho\|_V \rightarrow 0 \quad \text{as } \rho \rightarrow 0. \quad (3.28)$$

Finally, by the triangle inequality we have

$$\|\mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}\|_V \leq \|\mathbf{u}_\rho - \tilde{\mathbf{u}}_\rho\|_V + \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u}\|_V,$$

and, using the convergences (3.28), (3.23), we deduce that (3.12) holds, which concludes the proof. \square

In addition to the mathematical interest in the convergence result (3.12) it is important from mechanical point of view, since it shows that the weak solution of the contact problem \mathcal{P} depends continuously on the densities of the applied forces, the yield limit and the thickness of the rigid-plastic layer of the foundation.

4 Optimal control problems

In this section we state a four optimal control problems associated to Problem \mathcal{P}_V . As already mentioned, the solution of this problem depends on the data \mathbf{f}_0 , \mathbf{f}_2 , F and g , and, therefore, each of these quantities could play the role of a control for the variational inequality (2.30). Moreover, situations when the control is given by pairs of the form $(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2)$, (\mathbf{f}_0, F) , $(\mathbf{f}_0, g), \dots$, as well as by triples of the form $(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F)$, $(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, g), \dots$, could also be considered. It follows from here that we can associated to Problem \mathcal{P}_V several optimal control problems, which differ by the choice of the control. The existence of optimal pairs to these problems could be proved by using similar arguments, based on compactness and lower semicontinuity

properties. Therefore, in order to avoid repetitions, we consider in what follows an abstract optimization problem which will be useful in the study of various optimal control problems associated to Problem \mathcal{P}_V .

The functional framework is the following. Let Z be a reflexive Banach spaces endowed with the norm $\|\cdot\|_Z$ and let X, W be normed spaces endowed with the norms $\|\cdot\|_X$ and $\|\cdot\|_W$, respectively. We consider the following assumptions.

$$U \text{ is a weakly closed subset of } Z, \text{ i.e.,} \quad (4.1)$$

$$\{\boldsymbol{\theta}_n\} \subset U, \quad \boldsymbol{\theta} \in Z, \quad \boldsymbol{\theta}_n \rightharpoonup \boldsymbol{\theta} \text{ in } Z \implies \boldsymbol{\theta} \in U.$$

$$T : U \rightarrow X \text{ is a weakly - strongly continuous operator, i.e.} \quad (4.2)$$

$$\{\boldsymbol{\theta}_n\} \subset U, \quad \boldsymbol{\theta} \in U, \quad \boldsymbol{\theta}_n \rightharpoonup \boldsymbol{\theta} \text{ in } Z \implies T\boldsymbol{\theta}_n \rightarrow T\boldsymbol{\theta} \text{ in } X.$$

$$S : X \rightarrow W \text{ is a continuous operator, i.e.} \quad (4.3)$$

$$\{\mathbf{u}_n\} \subset X, \quad \mathbf{u} \in X, \quad \mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u} \text{ in } X \implies S\mathbf{u}_n \rightarrow S\mathbf{u} \text{ in } W.$$

$$\phi \in W. \quad (4.4)$$

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0. \quad (4.5)$$

We also consider the functional $J : U \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \alpha \|ST(\boldsymbol{\theta}) - \phi\|_W + \beta \|\boldsymbol{\theta}\|_Z \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in U, \quad (4.6)$$

together with the following optimization problem.

Problem \mathcal{Q} . Find $\boldsymbol{\theta}^* \in U$ such that

$$J(\boldsymbol{\theta}^*) = \min_{\boldsymbol{\theta} \in U} J(\boldsymbol{\theta}). \quad (4.7)$$

We have the following existence result.

Theorem 4.1. Assume that (4.1)–(4.5) hold. Then, there exists at least one solution $\boldsymbol{\theta}^* \in U$ to problem \mathcal{Q} .

Proof. Let

$$\omega = \inf_{\boldsymbol{\theta} \in U} J(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R} \quad (4.8)$$

and let $\{\boldsymbol{\theta}_n\} \subset U$ be a minimizing sequence for the functional J , i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(\boldsymbol{\theta}_n) = \omega. \quad (4.9)$$

We claim that the sequence $\{\boldsymbol{\theta}_n\}$ is bounded in Z . Arguing by contradiction, assume that $\{\boldsymbol{\theta}_n\}$ is not bounded in Z . Then, passing to a subsequence still denoted $\{\boldsymbol{\theta}_n\}$, we have

$$\|\boldsymbol{\theta}_n\|_Z \rightarrow +\infty \text{ as } n \rightarrow +\infty. \quad (4.10)$$

We now use the definition (4.6) and assumption (4.5) to see that

$$J(\boldsymbol{\theta}_n) \geq \beta \|\boldsymbol{\theta}_n\|_Z.$$

Therefore, passing to the limit as $n \rightarrow +\infty$ and using (4.10) we deduce that

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J(\boldsymbol{\theta}_n) = +\infty. \quad (4.11)$$

Equalities (4.9) and (4.11) imply that $\omega = +\infty$ which is in contradiction with (4.8).

We conclude from above that the sequence $\{\boldsymbol{\theta}_n\}$ is bounded in Z and, therefore there exists $\boldsymbol{\theta}^* \in Z$ such that, passing to a subsequence still denoted $\{\boldsymbol{\theta}_n\}$, we have

$$\boldsymbol{\theta}_n \rightharpoonup \boldsymbol{\theta}^* \quad \text{in } Z \quad \text{as } n \rightarrow +\infty. \quad (4.12)$$

Moreover, by assumption (4.1) we deduce that

$$\boldsymbol{\theta}^* \in U. \quad (4.13)$$

In addition, the convergence (4.12) and assumption (4.2) yields

$$T\boldsymbol{\theta}_n \rightarrow T\boldsymbol{\theta}^* \quad \text{in } X \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (4.14)$$

and, therefore, assumption (4.3) implies that

$$ST(\boldsymbol{\theta}_n) \rightarrow ST(\boldsymbol{\theta}^*) \quad \text{in } W \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad (4.15)$$

We now use the convergences (4.15) and (4.12) to see that

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|ST(\boldsymbol{\theta}_n) - \phi\|_W = \|ST(\boldsymbol{\theta}^*) - \phi\|_W, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\boldsymbol{\theta}_n\|_Z \geq \|\boldsymbol{\theta}^*\|_Z,$$

which imply that

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} J(\boldsymbol{\theta}_n) \geq J(\boldsymbol{\theta}^*). \quad (4.16)$$

It follows now from (4.9) and (4.16) that

$$\omega \geq J(\boldsymbol{\theta}^*). \quad (4.17)$$

In addition, (4.13) and (4.8) yield

$$\omega \leq J(\boldsymbol{\theta}^*). \quad (4.18)$$

Finally, we combine inequalities (4.17) and (4.18) to see that (4.7) holds and, using (4.13), we conclude the proof. \square

We now formulate four control problems for the variational inequality (2.30) which cast in the abstract form (4.7) with a specific choice of spaces and operators. In all these problems $\boldsymbol{\theta}$ will represent the control. Then, we use Theorem 4.1 to deduce the existence of optimal pairs for the corresponding control problems.

The case $\theta = \mathbf{f}_0$. In this case we control the solution of the variational inequality (2.30) by the density of body forces. We assume in what follows that the density of surface traction \mathbf{f}_2 , the yield limit F and the bound g are given and satisfy assumptions (2.19), (2.20) and (2.21), respectively. We also consider the set of admissible pairs given by

$$\mathcal{V}_{ad} = \{ (\mathbf{u}, \mathbf{f}_0) \in K \times L^2(\Omega)^d : \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, g) \}. \quad (4.19)$$

In other words, a couple $(\mathbf{u}, \mathbf{f}_0)$ belongs to \mathcal{V}_{ad} iff $\mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d$ and, moreover, \mathbf{u} is the solution of Problem \mathcal{P}_V with the data $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F$ and g . Given $\phi \in L^2(\Gamma_3)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, we consider the functional $\mathcal{L} : V \times L^2(\Omega)^d \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{f}_0) = \alpha \|u_\nu - \phi\|_{L^2(\Gamma_3)} + \beta \|\mathbf{f}_0\|_{L^2(\Omega)^d}. \quad (4.20)$$

for all $\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d$ and we formulate the following optimal control problem.

Problem \mathcal{Q}_1 . Find $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}_0^*) \in \mathcal{V}_{ad}$ such that

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}_0^*) = \min_{(\mathbf{u}, \mathbf{f}_0) \in \mathcal{V}_{ad}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{f}_0). \quad (4.21)$$

An element $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}_0^*) \in \mathcal{V}_{ad}$ which solves Problem \mathcal{Q}_1 is called an *optimal pair* and the corresponding function \mathbf{f}_0^* is called an *optimal control*. The mechanical interpretation of Problem \mathcal{Q}_1 is the following : we are looking for a given body force $\mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d$ such that the normal component of the displacement $\mathbf{u} \in V$ given by (2.30) is as close as possible to the “desired normal displacement” ϕ . Furthermore, this choice has to fulfill a minimum expenditure condition which is taken into account by the last term in (4.20). In fact, a compromise policy between the two aims (“ u_ν close to ϕ ” and “minimal data \mathbf{f}_0 ”) has to be found and the relative importance of each criterion with respect to the other is expressed by the choice of the weight coefficients $\alpha, \beta > 0$.

Our main result in the study of Problem \mathcal{Q}_1 is the following.

Theorem 4.2. Assume that (2.17), (2.19)–(2.21) hold and, moreover, assume that $\phi \in L^2(\Gamma_3)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Then, there exists at least one solution $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}_0^*) \in \mathcal{V}_{ad}$ to Problem \mathcal{Q}_1 .

Proof. We apply Theorem 4.1 with the choice $Z = L^2(\Omega)^d$, $X = V$, $W = L^2(\Gamma_3)$. To this end we consider the set $U = L^2(\Omega)^d$ and the operators $T : L^2(\Omega)^d \rightarrow V$, $S : V \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ defined by

$$T\mathbf{f}_0 = \mathbf{u}(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, g) \quad \forall \mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d, \quad (4.22)$$

$$S\mathbf{u} = u_\nu \quad \forall \mathbf{u} \in V. \quad (4.23)$$

Then, Theorem 3.2 shows that condition (4.2) holds and the continuity of the trace map guarantees that condition (4.3) holds, too. Since conditions (4.1), (4.4) and (4.5)

are obviously satisfied, we are in a position to apply Theorem 4.1 to obtain that there exists at least one element $\mathbf{f}_0^* \in L^2(\Omega)^d$ such that

$$J(\mathbf{f}_0^*) = \min_{\mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d} J(\mathbf{f}_0), \quad (4.24)$$

where $J : L^2(\Omega)^d \rightarrow \mathbb{R}$ is the function given by

$$J(\mathbf{f}_0) = \alpha \|ST(\mathbf{f}_0) - \phi\|_{L^2(\Gamma_3)} + \beta \|\mathbf{f}_0\|_{L^2(\Omega)^d} \quad \forall \mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d. \quad (4.25)$$

On the other hand, using (4.19) and (4.22) it is easy to see that

$$(\mathbf{u}, \mathbf{f}_0) \in \mathcal{V}_{ad} \iff \mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d \text{ and } \mathbf{u} = T\mathbf{f}_0 \quad (4.26)$$

and, using (4.25) and (4.20) yields

$$J(\mathbf{f}_0) = \mathcal{L}(T\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_0) \quad \forall \mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d. \quad (4.27)$$

Let $\mathbf{u}^* = T\mathbf{f}_0^*$. Then, using (4.26), (4.27) and (4.24) we deduce that $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}_0^*) \in \mathcal{V}_{ad}$ and, moreover,

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}_0^*) = \mathcal{L}(T\mathbf{f}_0^*, \mathbf{f}_0^*) = J(\mathbf{f}_0^*) \leq J(\mathbf{f}_0) = \mathcal{L}(T\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_0) = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{f}_0)$$

for all $(\mathbf{u}, \mathbf{f}_0) \in \mathcal{V}_{ad}$. This shows that the pair $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}_0^*)$ is a solution to Problem \mathcal{Q}_1 , which concludes the proof. \square

The case $\theta = \mathbf{f}_2$. In this case we control the solution of the variational inequality (2.30) by the density of surface traction. We assume that the density of body forces \mathbf{f}_0 , the yield limit F and the bound g are given and satisfy assumptions (2.18), (2.20) and (2.21), respectively. We consider the set of admissible pair given by

$$\mathcal{V}_{ad} = \{ (\mathbf{u}, \mathbf{f}_2) \in K \times L^2(\Gamma_2)^d : \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, g) \}.$$

In other words, a couple $(\mathbf{u}, \mathbf{f}_2)$ belongs to \mathcal{V}_{ad} iff $\mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^d$ and, moreover, \mathbf{u} is the solution of Problem \mathcal{P}_V with the data \mathbf{f}_0 , \mathbf{f}_2 , F and g . Given $\phi \in V$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, we consider the functional $\mathcal{L} : V \times L^2(\Gamma_2)^d \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{f}_2) = \alpha \|\mathbf{u} - \phi\|_V + \beta \|\mathbf{f}_2\|_{L^2(\Gamma_2)^d}. \quad (4.28)$$

for all $\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^d$ and we formulate the following optimal control problem.

Problem \mathcal{Q}_2 . Find $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}_2^*) \in \mathcal{V}_{ad}$ such that

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}_2^*) = \min_{(\mathbf{u}, \mathbf{f}_2) \in \mathcal{V}_{ad}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{f}_2).$$

The mechanical interpretation of Problem \mathcal{Q}_2 is the following : we are looking for a given surface traction force $\mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^d$ such that the displacement $\mathbf{u} \in V$ given by (2.30) is as close as possible to the ‘‘desired displacement’’ ϕ . Furthermore, this choice has to fulfill a minimum expenditure condition which is taken into account by the last term in (4.28).

Our main result in the study of Problem \mathcal{Q}_2 is the following.

Theorem 4.3. *Assume that (2.17), (2.18), (2.20), (2.21) hold and, moreover, assume that $\phi \in V$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Then, there exists at least one solution $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}_2^*) \in \mathcal{V}_{ad}$ to Problem \mathcal{Q}_2 .*

Proof. The proof is similar to that of Theorem 4.2 and, therefore, we do not provide the details. We restrict ourselves to note that it is based on the use of Theorem 4.1 with the choice $Z = L^2(\Gamma_2)^d$, $X = V$, $W = V$, $U = L^2(\Gamma_2)^d$, $T : L^2(\Gamma_2)^d \rightarrow V$, $S : V \rightarrow V$,

$$T\mathbf{f}_2 = \mathbf{u}(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, g) \quad \forall \mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^d, \quad S\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in V.$$

We are allowed to use Theorem 4.1 since conditions (4.1), (4.3)–(4.5) are obviously satisfied and, in addition, Theorem 3.2 guarantee the validity of condition (4.2). \square

The case $\theta = F$. In this case we control the solution of the variational inequality (2.30) by the yield limit of the rigid-plastic layer of the foundation. We assume that the density of body forces \mathbf{f}_0 , the density of the surface traction \mathbf{f}_2 and the bound g are given and satisfy assumptions (2.18), (2.19) and (2.21), respectively. We consider the set of admissible pair given by

$$\mathcal{V}_{ad} = \{(\mathbf{u}, F) \in K \times U : \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, g)\}.$$

where

$$U = \{F \in L^2(\Gamma_3) : F(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma_3\}. \quad (4.29)$$

Given $\sigma_0 \in Q$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, we consider the functional $\mathcal{L} : V \times U \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, F) = \alpha \|\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}) - \sigma_0\|_Q + \beta \|F\|_{L^2(\Gamma_3)} \quad (4.30)$$

for all $\mathbf{u} \in V$, $F \in U$ and we formulate the following optimal control problem.

Problem \mathcal{Q}_3 . *Find $(\mathbf{u}^*, F^*) \in \mathcal{V}_{ad}$ such that*

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}^*, F^*) = \min_{(\mathbf{u}, F) \in \mathcal{V}_{ad}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, F). \quad (4.31)$$

The mechanical interpretation of Problem \mathcal{Q}_3 is the following : we are looking for a given surface yield limit $F \in U$ such that the stress field $\sigma = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u})$ associated to the displacement $\mathbf{u} \in V$ given by (2.30) is as close as possible to the “desired stress” σ_0 . Furthermore, this choice has to fulfill a minimum expenditure condition which is taken into account by the last two terms in (4.20).

Our main result in the study of Problem \mathcal{Q}_3 is the following.

Theorem 4.4. *Assume that (2.17)–(2.19), (2.21) hold and, moreover, assume that $\sigma_0 \in Q$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Then, there exists at least one solution $(\mathbf{u}^*, F^*) \in \mathcal{V}_{ad}$ to Problem \mathcal{Q}_3 .*

Proof. We use Theorem 4.1 with the choice $Z = L^2(\Gamma_3)$, $X = V$, $W = Q$, $\phi = \sigma_0$, $T : U \rightarrow V$, $S : V \rightarrow Q$,

$$TF = \mathbf{u}(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, g) \quad \forall F \in L^2(\Gamma_3), \quad S\mathbf{u} = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in V.$$

U being defined by (4.29). Note that the properties of the trace operator guarantee the validity of condition (4.1), Theorem 3.2 guarantee the validity of condition (4.2) and assumption (2.17) on the elasticity operator guarantees the validity of condition (4.3). Finally, conditions (4.4) and (4.5) are obviously satisfied. \square

The case $\theta = g$. In this case we control the solution of the variational inequality (2.30) by the thickness g of the elastic-plastic layer of the foundation. We assume that the density of body forces \mathbf{f}_0 , the density of the surface traction \mathbf{f}_2 and the yield F are given and satisfy assumptions (2.18), (2.19) and (2.20), respectively. We consider the set of admissible pairs given by

$$\mathcal{V}_{ad} = \{ (\mathbf{u}, g) \in K \times U : \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, g) \}. \quad (4.32)$$

where $U = [g_0, +\infty)$ with $g_0 > 0$. Given $\phi \in L^2(\Gamma_3)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, we consider the functional $\mathcal{L} : V \times U \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, g) = \alpha \|u_\nu - \phi\|_{L^2(\Gamma_3)} + \beta |g|. \quad (4.33)$$

for all $\mathbf{u} \in V$, $g \in U$ and we formulate the following optimal control problem.

Problem \mathcal{Q}_4 . Find $(\mathbf{u}^*, g^*) \in \mathcal{V}_{ad}$ such that

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}^*, g^*) = \min_{(\mathbf{u}, g) \in \mathcal{V}_{ad}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, g). \quad (4.34)$$

The mechanical interpretation of Problem \mathcal{Q}_4 is the following : we are looking for a given thickness $g \in U$ such that the normal component of the displacement $\mathbf{u} \in V$ given by (2.30) is as close as possible to the “desired normal displacement” ϕ .

Our main result in the study of Problem \mathcal{Q}_4 is the following.

Theorem 4.5. Assume that (2.17)–(2.20) hold and, moreover, assume that $\phi \in L^2(\Gamma_3)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Then, there exists at least one solution $(\mathbf{u}^*, g^*) \in \mathcal{V}_{ad}$ to Problem \mathcal{Q}_4 .

Proof. We use Theorem 4.1 with the choice $Z = \mathbb{R}$, $X = V$, $W = L^2(\Gamma_3)$, $T : U \rightarrow V$, $S : V \rightarrow L^2(\Gamma_3)$, $Tg = \mathbf{u}(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, g)$ for all $g \in U$, $S\mathbf{u} = u_\nu$ for all $\mathbf{u} \in V$, $U \subset \mathbb{R}$ being the interval $[g_0, +\infty)$. \square

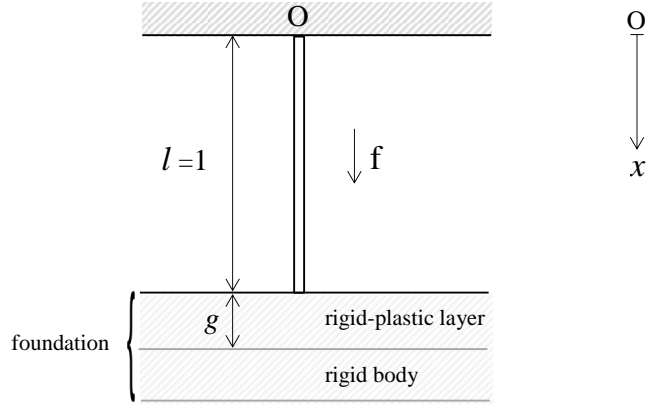


Figure 2: Physical setting.

5 A one dimensional example

In this section we illustrate our results in the study of a representative one-dimensional example. Thus, we consider Problem \mathcal{P} in the particular case when $\Omega = (0, 1)$, $\Gamma_1 = \{0\}$, $\Gamma_2 = \emptyset$, $\Gamma_3 = \{1\}$. Note that in this case the linearized strain field is given by $\varepsilon = u'$ where, here and below, the prime denotes the derivative with respect to the spatial variable $x \in [0, 1]$. Moreover, we assume that the material behaves linearly elastic and, therefore, the elasticity operator is $\mathcal{F}\varepsilon = E\varepsilon$ where $E > 0$ is the Young modulus of the material. In addition, we assume that the density of the body force does not depend on the spatial variable and we denote it by $f \in \mathbb{R}$. Then, the statement of the problem is the following.

Problem \mathcal{P}^{1d} . Find a displacement field $u: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ and a stress field $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\sigma(x) = E u'(x) \quad \text{for } x \in (0, 1), \quad (5.1)$$

$$\sigma'(x) + f = 0 \quad \text{for } x \in (0, 1), \quad (5.2)$$

$$u(0) = 0, \quad (5.3)$$

$$u(1) \leq g, \quad \left. \begin{array}{l} \sigma(1) = 0 \quad \text{if } u(1) < 0 \\ -F \leq \sigma(1) \leq 0 \quad \text{if } u(1) = 0 \\ \sigma(1) = -F \quad \text{if } 0 < u(1) < g \\ \sigma(1) \leq -F \quad \text{if } u(1) = g \end{array} \right\}. \quad (5.4)$$

Note that Problem \mathcal{P}^{1d} models the contact of an elastic rod of length $l = 1$ with

a foundation. The rod occupies the domain $[0, 1]$ on the Ox axis, is fixed at its end $x = 0$, as acted by body forces, and its extremity $x = 1$ is in contact with an obstacle made of a rigid-plastic material of yield limit $F > 0$ and thickness $g > 0$, which covers a rigid body. This physical setting is depicted in Figure 2.

For the variational analysis of Problem \mathcal{P}^{1d} we use the space

$$V = \{ v \in H^1(0, 1) : v(0) = 0 \}$$

and the set of admissible displacement field defined by

$$K = \{ u \in V \mid u(1) \leq g \}.$$

Then, the variational formulation of Problem \mathcal{P}^{1d} , obtained using integration by parts, is the following.

Problem \mathcal{P}_V^{1d} . Find a displacement field $u \in K$ such that

$$\int_0^1 Eu'(v' - u') dx + Fv(1)^+ - Fu(1)^+ \geq \int_0^1 f(v - u) dx \quad \forall v \in K. \quad (5.5)$$

The existence of a unique solution to Problem \mathcal{P}_V^{1d} follows from Theorem 3.1. In addition, Theorem 3.2 shows the continuous dependence of the solution with respect to the data f , F and g . On the other hand, a simple calculation allows us to solve Problem \mathcal{P}^{1d} . Four cases are possible, described below, together with the corresponding mechanical interpretations.

a) **The case $f < 0$.** In this case the body force acts into the opposite direction of the foundation and the solution of Problem \mathcal{P}^{1d} is given by

$$\begin{cases} \sigma(x) = -fx + f, \\ u(x) = -\frac{f}{2E}x^2 + \frac{f}{E}x \end{cases} \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (5.6)$$

We have $u(1) < 0$ and $\sigma(1) = 0$ which shows that there is separation between the rod and the foundation and, therefore, there is no reaction on the point $x = 1$. This case corresponds to Figure 3 a).

b) **The case $0 \leq f < 2F$.** In this case the body force pushes the rod towards the foundation and the solution of Problem \mathcal{P}^{1d} is given by

$$\begin{cases} \sigma(x) = -fx + \frac{f}{2}, \\ u(x) = -\frac{f}{2E}x^2 + \frac{f}{2}x \end{cases} \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (5.7)$$

We have $u(1) = 0$ and $-F < \sigma(1) \leq 0$ which shows that the rod is in contact with the foundation and the reaction of the foundation is towards the rod. Nevertheless, there is no penetration, since the magnitude of the stress in $x = 1$ is under the yield limit F and, therefore, the rigid-plastic layer behaves like a rigid. This case corresponds to Figure 3 b).

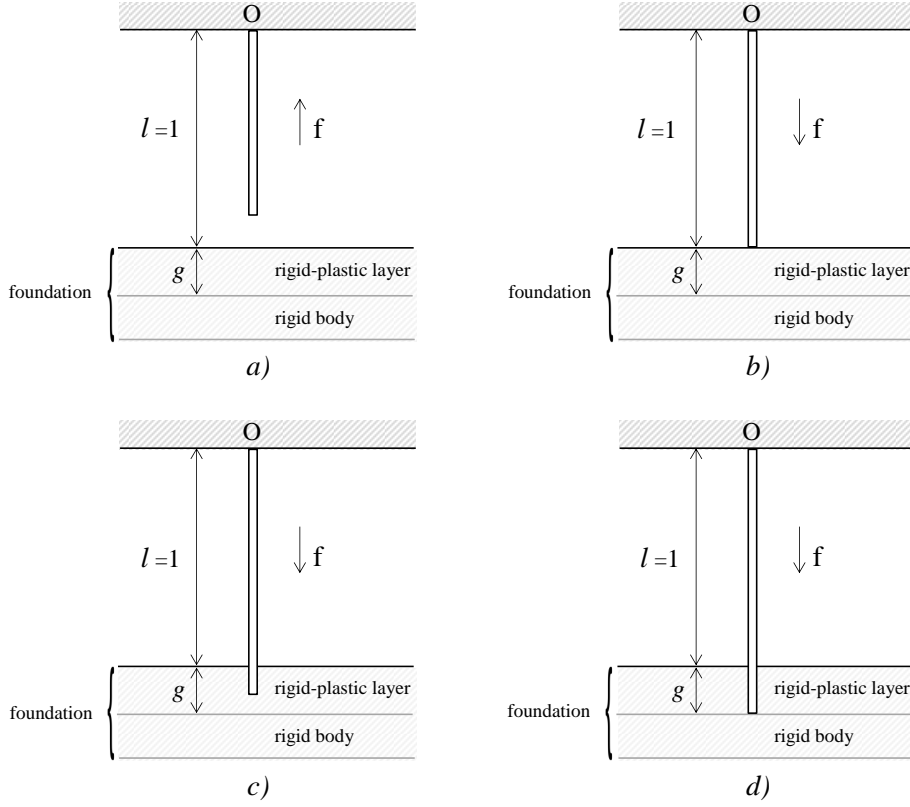


Figure 3: The rod in contact with a foundation:

- a) The case $f < 0$; b) The case $0 \leq f < 2F$;
c) The case $2F \leq f < 2Eg + 2F$; d) The case $2Eg + 2F \leq f$.

c) **The case** $2F \leq f < 2Eg + 2F$. In this case the solution of Problem \mathcal{P}^{1d} is given by

$$\begin{cases} \sigma(x) = -fx + f - F, \\ u(x) = -\frac{f}{2E}x^2 + \frac{f-F}{E}x \end{cases} \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (5.8)$$

We have $0 \leq u(1) < g$ and $-\sigma(1) = F$. This shows that the magnitude of the stress in $x = 1$ reached the yield limit and, therefore, there is penetration into the rigid-plastic layer which now behaves plastically. Nevertheless, the penetration is partially, since $u(1) < g$. This case corresponds to Figure 3 c).

d) **The case** $2Eg + 2F \leq f$. In this case the solution of Problem \mathcal{P}^{1d} is given by

$$\begin{cases} \sigma(x) = -fx + \frac{2Eg+f}{2}, \\ u(x) = -\frac{f}{2E}x^2 + \frac{2Eg+f}{2E}x \end{cases} \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (5.9)$$

We have $0 \leq u(1) = g$ and $\sigma(1) \leq -F$ which shows that the rigid-plastic layer is completely penetrated and the point $x = 1$ reaches the rigid body. The magnitude of the reaction in this point is larger than the yield limit F , i.e. $|\sigma(1)| \geq F$ since, besides the reaction of the rigid-plastic layer, we add the reaction of the rigid body which now becomes active. This case corresponds to Figure 3 d).

We now formulate the optimal control problem \mathcal{Q}_4 in the one-dimensional case of Problem \mathcal{P}^{1d} . We use (4.32) and (4.33) to see that in this case

$$\mathcal{V}_{ad} = \{ (u, g) \in K \times U : u \text{ solves the variational inequality (5.5)} \} \quad (5.10)$$

and

$$\mathcal{L}(u, g) = \alpha |u(1) - \phi| + \beta |g|, \quad (5.11)$$

where $\phi \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $U = [g_0, \infty)$ with $g_0 > 0$. Then using (4.34) we see that the problem can be formulated as follows.

Problem \mathcal{Q}_4^{1d} . Find $(u^*, g^*) \in \mathcal{V}_{ad}$ such that

$$\mathcal{L}(u^*, g^*) = \min_{(u, g) \in \mathcal{V}_{ad}} \mathcal{L}(u, g). \quad (5.12)$$

We now take $E = 1$, $f = 10$, $F = 2$, $\phi = 4$ and $g_0 = 1$ which implies that $U = [1, +\infty)$. It is easy to see that if $g \leq 3$ then $f \geq 2Eg + 2F$ and, if $g > 3$ then $2F \leq f < 2Eg + 2F$. Therefore, using (5.9) and (5.8) we have

$$u(x) = \begin{cases} -5x^2 + (g+5)x & \text{if } 1 \leq g \leq 3, \\ -5x^2 + 8x & \text{if } g > 3 \end{cases} \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (5.13)$$

So,

$$u(1) = \begin{cases} g & \text{if } 1 \leq g \leq 3, \\ 3 & \text{if } g > 3 \end{cases} \quad \forall x \in [0, 1]$$

and, using (5.11) with $\phi = 4$ we find that

$$\mathcal{L}(u, g) = \begin{cases} (\beta - \alpha)g + 4\alpha & \text{if } 1 \leq g \leq 3, \\ \beta g + \alpha & \text{if } g > 3. \end{cases} \quad (5.14)$$

We conclude from (5.14) the following.

- a) If $\beta > \alpha > 0$ then the optimal control problem (5.12) has a unique solution (u^*, g^*) where $g^* = 1$ and u^* is given by (5.13) with $g = g^*$.
- b) If $\beta = \alpha$ then the optimal control problem (5.12) has an infinity of solutions of the form (u^*, g^*) where g^* is any value in the interval $[1, 3]$ and u^* is given by (5.13) with $g = g^*$.
- c) If $0 < \beta < \alpha$ then the optimal control problem (5.12) has a unique solution (u^*, g^*) where $g^* = 3$ and u^* is given by (5.13) with $g = g^*$.

Note also that similar results can be obtained for the optimal control problems \mathcal{Q}_1 , \mathcal{Q}_2 and \mathcal{Q}_3 in the study of the one-dimensional problem \mathcal{P}^{1d} .

References

- [1] A. Amassad, D. Chenais and C. Fabre, Optimal control of an elastic contact problem involving Tresca friction law, *Nonlinear Analysis* **48** (2002), 1107–1135.
- [2] C. Baiocchi and A. Capelo, *Variational and Quasivariational Inequalities: Applications to Free-Boundary Problems*, John Wiley, Chichester, 1984.
- [3] H. Brézis, Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **18** (1968), 115–175.
- [4] A. Capatina, *Variational Inequalities Frictional Contact Problems*, Advances in Mechanics and Mathematics, Vol. 31, Springer, New York, 2014.
- [5] G. Duvaut and J.-L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [6] C. Eck, J. Jarušek and M. Krbeč, *Unilateral Contact Problems: Variational Methods and Existence Theorems*, Pure and Applied Mathematics **270**, Chapman/CRC Press, New York, 2005.
- [7] R. Glowinski, *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [8] W. Han and M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, Studies in Advanced Mathematics **30**, American Mathematical Society, Providence, RI–International Press, Somerville, MA, 2002.
- [9] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*, Classics in Applied Mathematics **31**, SIAM, Philadelphia, 2000.
- [10] T.A. Laursen, *Computational Contact and Impact Mechanics*, Springer, Berlin, 2002.
- [11] J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Gauthiers-Villars, Paris, 1969.
- [12] A. Matei and S. Micu, Boundary optimal control for nonlinear antiplane problems, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* **74** (2011), 1641–1652.
- [13] A. Matei and S. Micu, Boundary optimal control for a frictional contact problem with normal compliance, *Applied Mathematics & Optimization*, to appear.
- [14] S. Migórski, A. Ochal and M. Sofonea, *Nonlinear Inclusions and Hemivariational Inequalities. Models and Analysis of Contact Problems*, Advances in Mechanics and Mathematics **26**, Springer, New York, 2013.

- [15] P.D. Panagiotopoulos, *Inequality Problems in Mechanics and Applications*, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [16] M. Shillor, M. Sofonea and J.J. Telega, *Models and Analysis of Quasistatic Contact*, Lect. Notes Phys. **655**, Springer, Berlin, 2004.
- [17] M. Sofonea and A. Matei, *Mathematical Models in Contact Mechanics*, London Mathematical Society Lecture Note Series **398**, Cambridge University Press, 2012.
- [18] A. Touzaline, Optimal control of a frictional contact problem, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series* 31 (2015), 991–1000.
- [19] D. Tiba, *Optimal Control of Nonsmooth Distributed Parameter Systems*, Springer, Berlin, 1990.

An elastic frictional contact problem with unilateral constraint

Maxime Couderc and Mircea Sofonea*

Laboratoire de Mathématiques et Physique

University of Perpignan Via Domitia

52 Avenue Paul Alduy, 66860 Perpignan, France

e-mail: maxime.couderc@etudiant.univ-perp.fr,

sofonea@univ-perp.fr

Abstract

We consider a mathematical model which describes the equilibrium of an elastic body in contact with two obstacles. We derive its weak formulation which is in a form of an elliptic quasivariational inequality for the displacement field. Then, under a smallness assumption, we establish the existence of a unique weak solution to the problem. We also study the dependence of the solution with respect to the data and prove a convergence result. Finally, we consider an optimization problem associated to the contact model for which we prove the existence of a minimizer and a convergence result, as well.

AMS Subject Classification: 74M10, 74M15, 49J40, 49J45, 49J20.

Key words: elastic material, frictional contact, quasivariational inequality, weak solution, convergence results, optimization problem.

1 Introduction

Processes of contact between deformable bodies arise in industry and everyday life. Their mathematical modelling leads to strongly elliptic or evolutionary nonlinear boundary value problems and, therefore, their study is carried out by using arguments of nonsmooth analysis. Reference in the field are the books [6, 7, 8, 9, 10, 16, 17] and, more recently, [5, 14, 18]. There, various models of contact with elastic, viscoelastic and viscoplastic materials have been considered, associated to a large number of

*Corresponding author

contact boundary condition. Existence and uniqueness results have been proved, by using arguments of variational and hemivariational inequalities. In part of these references the numerical analysis of the models was also provided, together with error estimates and convergence results. Moreover, numerical simulations which represent an evidence of the theoretical results have been presented, together with their mechanical interpretations. Results on optimal control for various contact problems with elastic materials could be found in [1, 5, 11, 12, 13, 20, 21] and the references therein.

In [4] we considered a mathematical model which describes the frictionless contact between an elastic body and a foundation made of a rigid material, covered by a rigid-plastic layer of thickness g and yield limit F . The variational formulation of the model led to an elliptic variational inequality with unilateral constraints for the displacement field, governed by the parameter g . We provided the unique solvability of the model, the continuous dependence of the solution with respect to the data, and we discussed related optimal control problems.

The current paper represents a continuation of [4]. The first novelty arises in the model we use, which is frictional. It describes the equilibrium of an elastic body acted upon by body forces of density \mathbf{f}_0 and tractions of density \mathbf{f}_2 , in contact with two obstacles. The first obstacle is made of a rigid material, covered by a rigid-plastic layer of thickness g and yield limit F . The second one is made of a rigid material, covered by a deformable layer of thickness k . The contact between the body and the first obstacle is frictionless, while the contact with the second one is frictional and is modeled with a version of Coulomb's law of dry friction. Our aim is to provide a clear and rigorous statement of the problem, to provide its variational analysis and to study related optimization problems, in which the control could be \mathbf{f}_0 , \mathbf{f}_2 , F , g and k . Note that, in contrast with the contact model in [4], the model considered in this current paper leads to an elliptic quasivariational inequality for the displacement field in which the set of constraints is governed by two parameters, g and k . This gives rise to additional mathematical difficulties in its analysis. The approach used to overcome these difficulties represents the second trait of novelty of this paper.

The paper is structured as follows. In Section 2 we introduce the preliminary material we need. It includes a survey of the basic properties on the functional spaces we use as well as an existence and uniqueness result for elliptic quasivariational inequalities. In Section 3 we introduce the contact model, then we list the assumptions on the data and derive its variational formulation. In Section 4 we state and prove the unique weak solvability of the problem, Theorem 4.1. In Section 5 we study the dependence of the solution with respect to the data and prove a convergence result, Theorem 5.1. The proof is based on arguments of compactness, monotonicity and lower semicontinuity. Finally, in Section 6 we deal with an optimization problem related with the contact model. We start with an abstract result, Theorem 6.1, then we show its applicability in two relevant particular cases, for which we provide the corresponding mechanical interpretations.

2 Preliminaries

Basic notation. Everywhere in this paper $d \in \{1, 2, 3\}$ and \mathbb{S}^d represents the space of second order symmetric tensors on \mathbb{R}^d or, equivalently, the space of symmetric matrices of order d . The zero element of the spaces \mathbb{R}^d and \mathbb{S}^d will be denoted $\mathbf{0}$. The inner product and norm on \mathbb{R}^d and \mathbb{S}^d are defined by

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_i v_i, & \|\mathbf{v}\| &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{\frac{1}{2}} & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, & \|\boldsymbol{\tau}\| &= (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})^{\frac{1}{2}} & \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d, \end{aligned}$$

where the indices i, j run between 1 and d and, unless stated otherwise, the summation convention over repeated indices is used.

Function spaces. Let Ω be a bounded domain of \mathbb{R}^d with a Lipschitz continuous boundary Γ and let $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ be a partition of Γ into four measurable parts such that $meas(\Gamma_1) > 0$. We use $\mathbf{x} = (x_i)$ for the generic point in $\Omega \cup \Gamma$. An index that follows a comma will represent the partial derivative with respect to the corresponding component of the spatial variable $\mathbf{x} \in \Omega \cup \Gamma$, i.e., $f_i = \partial f / \partial x_i$. Moreover, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_i)$ denotes the outward unit normal at Γ .

We use the standard notation for Sobolev and Lebesgue spaces associated to Ω and Γ . In particular, we use the spaces $L^2(\Omega)^d$, $L^2(\Gamma_2)^d$, $L^2(\Gamma_3)$ and $H^1(\Omega)^d$, endowed with their canonical inner products and associated norms. Moreover, we recall that for an element $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d$ we sometimes write \mathbf{v} for the trace $\gamma \mathbf{v} \in L^2(\Gamma)^d$ of \mathbf{v} to Γ . In addition, we consider the following spaces:

$$V = \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_1 \}, \quad Q = \{ \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) : \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) \}.$$

The spaces V and Q are real Hilbert spaces endowed with the canonical inner products given by

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx, \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_Q = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx. \quad (2.1)$$

Here and below $\boldsymbol{\varepsilon}$ and Div will represent the deformation and the divergence operators, respectively, i.e., $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}))$, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$, $\text{Div} \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j})$. The associated norms on these spaces are denoted by $\|\cdot\|_V$ and $\|\cdot\|_Q$, respectively. Also, recall that the completeness of the space V follows from the assumption $meas(\Gamma_1) > 0$ which allows the use of Korn's inequality.

We denote by $\mathbf{0}_V$ the zero element of V and, for any element $\mathbf{v} \in V$, we denote by v_ν and \mathbf{v}_τ its normal and tangential components on Γ given by $v_\nu = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}$ and $\mathbf{v}_\tau = \mathbf{v} - v_\nu \boldsymbol{\nu}$, respectively. For a regular function $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ we denote by σ_ν and $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ its normal and tangential components on Γ , that is $\sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}$ and $\boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}$, and we recall that the following Green's formula holds:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx + \int_{\Omega} \text{Div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d. \quad (2.2)$$

We also recall that there exists $c_0 > 0$ which depends on Ω and Γ_1 such that

$$\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma)^d} \leq c_0 \|\mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.3)$$

Inequality (2.3) represents a consequence of the Sobolev trace theorem.

Let $Y = L^2(\Omega)^d \times L^2(\Gamma_2)^d$ be the product Hilbert space endowed with the canonical inner product $(\cdot, \cdot)_Y$ and the associated norm $\|\cdot\|_Y$. We denote by $\pi : V \rightarrow Y$ the operator defined by

$$\pi \mathbf{v} = (\mathbf{v}, \gamma_2 \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (2.4)$$

where $\gamma_2 \mathbf{v}$ represents the trace of the function $\mathbf{v} \in V$ to the boundary Γ_2 . Note that π is a linear continuous operator and, therefore, there exists a constant $d_0 > 0$ such that

$$\|\pi \mathbf{v}\|_Y \leq d_0 \|\mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.5)$$

Moreover, the compactness of the trace operator combined with the compactness of the embedding $H^1(\Omega)^d \subset L^2(\Omega)^d$ imply that π is a weakly-strongly continuous operator, i.e.,

$$\mathbf{v}_n \rightharpoonup \mathbf{v} \quad \text{in } V \quad \implies \quad \pi \mathbf{v}_n \rightarrow \pi \mathbf{v} \quad \text{in } Y. \quad (2.6)$$

Here and below we use notation “ \rightharpoonup ” and “ \rightarrow ” for the weak and strong convergence in various Hilbert spaces. All the limits, upper and lower limits below are considered as $n \rightarrow \infty$, even if we do not mention it explicitly.

Quasivariational inequalities. Consider a real Hilbert space X endowed with the inner product $(\cdot, \cdot)_X$ and the associated norm $\|\cdot\|_X$. Let $K \subset X$, $A : X \rightarrow X$, $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in X$ and consider the following problem.

Problem 1. *Find an element u such that*

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_X + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K. \quad (2.7)$$

Note that the function j depends on the solution u and, for this reason, we refer to (2.7) as a quasivariational inequality. Quasivariational inequalities of the form (2.7) have been studied by many authors, by using different functional methods, including fixed point and topological degree arguments. Existence and uniqueness results for such inequalities could be found in [3, 15, 18], for instance, under various assumption on the operator A and the function j . Here, we consider the following assumptions.

$$K \text{ is a nonempty, closed and convex subset of } X. \quad (2.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \text{ is a strongly monotone Lipschitz continuous operator, i.e.,} \\ \quad \text{there exists } m_A > 0 \text{ and } L_A > 0 \text{ such that} \\ \text{(a) } (Au - Av, u - v)_X \geq m_A \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X, \\ \text{(b) } \|Au - Av\|_X \leq L_A \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

(2.10)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) For all } \eta \in X, j(\eta, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ is convex} \\ \text{and lower semicontinuous.} \\ \text{(b) There exists } \alpha_j \geq 0 \text{ such that} \\ j(\eta_1, v_2) - j(\eta_1, v_1) + j(\eta_2, v_1) - j(\eta_2, v_2) \\ \leq \alpha_j \|\eta_1 - \eta_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X \quad \forall \eta_1, \eta_2, v_1, v_2 \in X. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

$$m_A > \alpha_j. \quad (2.12)$$

Under these assumptions we have the following existence and uniqueness result.

Theorem 2.1. *Assume (2.8)–(2.12). Then, Problem 1 has a unique solution.*

A proof of Theorem 2.1 can be found in [18, p. 49], based on the Banach fixed point argument.

3 The model

The physical setting is depicted in Figure 1 and is described as follows. An elastic body occupies, in its reference configuration, the domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Recall that the boundary of Ω , denoted Γ , is divided into four measurable disjoint parts $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ such that $meas(\Gamma_1) > 0$. The body is fixed on Γ_1 , is acted upon by given surface tractions on Γ_2 , and is in contact with two obstacles on Γ_3 and Γ_4 , respectively. The mathematical model which corresponds to the equilibrium of the body in the physical setting above, based on specific interface boundary condition that will be described below, is the following.

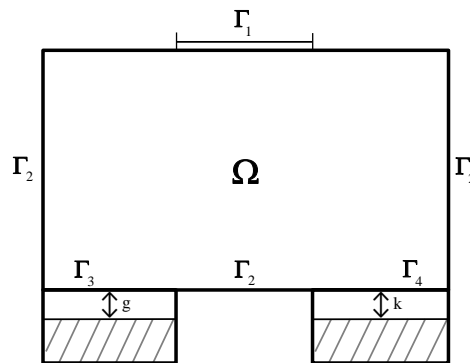


Figure 1: The physical setting.

Problem 2. Find a displacement field $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ and a stress field $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ such that

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{in } \Omega, \quad (3.1)$$

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_1, \quad (3.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{on } \Gamma_2, \quad (3.4)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_\nu \leq g, \\ \sigma_\nu = 0 \quad \text{if } u_\nu < 0, \\ -F \leq \sigma_\nu \leq 0 \quad \text{if } u_\nu = 0, \\ \sigma_\nu = -F \quad \text{if } 0 < u_\nu < g, \\ \sigma_\nu \leq -F \quad \text{if } u_\nu = g, \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad \text{on } \Gamma_3, \quad (3.5)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_\nu \leq k, \\ \sigma_\nu + p(u_\nu) \leq 0, \\ (u_\nu - k)(\sigma_\nu + p(u_\nu)) = 0, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq \mu p(u_\nu), \\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mu p(u_\nu) \frac{\mathbf{u}_\tau}{\|\mathbf{u}_\tau\|} \quad \text{if } \mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad \text{on } \Gamma_4. \quad (3.6)$$

We now provide a description of the equations and boundary conditions in Problem 2. First, equation (3.1) represents the elastic constitutive law of the material in which \mathcal{F} is assumed to be a nonlinear constitutive operator. Equation (3.2) is the equation of equilibrium. We use it here since the contact process is assumed to be static and, therefore, the inertial term in the equation of motion is neglected. Conditions (3.3), (3.4) represent the displacement and traction boundary conditions, respectively.

Condition (3.5) describes the frictionless contact with an obstacle made of a rigid body covered by a layer made of rigid-plastic material of thickness g . This condition was already used in [4]. There, its detailed description was provided, together with various mechanical interpretation. Here we restrict ourselves to mention that the function F could be interpreted as the yield limit of the rigid-plastic layer. Indeed, this layer does not allow penetration (and, therefore, it behaves like a rigid body) as far as the inequality $-F < \sigma_\nu \leq 0$ holds. It could allow penetration only when $\sigma_\nu = -F$ and, in this case, it offers no additional resistance.

Condition (3.6) describes the frictional contact with an obstacle made of a rigid body covered by a layer made of deformable material of thickness k . Here, μ represent the coefficient of friction and p is the normal compliance function which will be described in the next section. This condition was introduced in [2] and used in number of papers, see [19] and the references therein. It describes a contact with normal compliance, as far as the normal displacement satisfies the condition $u_\nu < k$,

associated to the classical Coulomb's law of dry friction. When $u_\nu = k$ the contact is with a Signorini-type condition and is associated to the Tresca friction law with the bound $\mu p(k)$. It follows from here that condition (3.6) describes a natural transition from the Coulomb law of dry friction (which is valid as far as $0 \leq u_\nu < k$) to the Tresca law (which is valid when $u_\nu = k$).

4 Existence and uniqueness

In the study of the mechanical problem (3.1)–(3.6) we assume that the elasticity operator \mathcal{F} satisfies the following conditions.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) There exists } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ such that} \\ \quad \|\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) There exists } m_{\mathcal{F}} > 0 \text{ such that} \\ \quad (\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(d) The mapping } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ is measurable on } \Omega, \\ \quad \text{for any } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(e) The mapping } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \text{ belongs to } Q. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

The normal compliance function satisfies

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } p : \Gamma_4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) There exists } L_p > 0 \text{ such that} \\ \quad |p(\mathbf{x}, r_1) - p(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma_4. \\ \text{(c) The mapping } \mathbf{x} \mapsto p(\mathbf{x}, r) \text{ is measurable on } \Gamma_4, \text{ for any } r \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) } (p(\mathbf{x}, r_1) - p(\mathbf{x}, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma_4. \\ \text{(e) } p(\mathbf{x}, r) = 0 \quad \text{for all } r \leq 0, \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma_4. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Finally, we assume that the densities of body forces and tractions, the yield limit, the coefficient of friction and the given thicknesses are such that

$$\mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^d, \quad (4.4)$$

$$F \in L^2(\Gamma_3), \quad F(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \quad (4.5)$$

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_4), \quad \mu(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma_4, \quad (4.6)$$

$$g > 0, \quad k > 0. \quad (4.7)$$

Under these assumptions we introduce the set $K \subset V$, the operator $A : V \rightarrow V$, the function $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ and the element $\mathbf{f} \in Y$ defined by

$$K = \{ \mathbf{v} \in V : v_\nu \leq g \text{ a.e. on } \Gamma_3, \quad v_\nu \leq k \text{ a.e. on } \Gamma_4 \}, \quad (4.8)$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx + \int_{\Gamma_4} p(u_\nu)v_\nu \, da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad (4.9)$$

$$j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} Fv_\nu^+ \, da + \int_{\Gamma_4} \mu p(u_\nu)\|\mathbf{v}_\tau\| \, da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{f} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2). \quad (4.11)$$

Here and below, r^+ denotes the positive part of r , i.e., $r = \max\{0, r\}$. Moreover, note that the definition (2.4) implies that

$$(\mathbf{f}, \pi\mathbf{v})_Y = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (4.12)$$

We are now in a position to derive the variational formulation of Problem \mathcal{P} and, to this end, we assume that $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ are sufficiently regular functions which satisfy (3.1)–(3.6). Then using (3.3), (3.5), (3.6) and (4.8) it follows that

$$\mathbf{u} \in K. \quad (4.13)$$

Let $\mathbf{v} \in K$. We use Green's formula (2.2) and equalities (3.2)–(3.4) to see that

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \, dx &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, da + \int_{\Gamma_4} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, da. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Moreover, using standard arguments we see that the contact condition (3.5) implies that

$$\int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, da \geq \int_{\Gamma_3} F(u_\nu^+ - v_\nu^+) \, da. \quad (4.15)$$

In addition, the contact condition (3.6) yields

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_4} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, da \\ &\geq \int_{\Gamma_4} p(u_\nu)(u_\nu - v_\nu) \, da + \int_{\Gamma_4} \mu p(u_\nu)(\|\mathbf{u}_\tau\| - \|\mathbf{v}_\tau\|) \, da. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Next, we combine equality (4.14) with inequalities (4.15), (4.16), then we use the constitutive law (3.1), the definitions (4.9), (4.10), equality (4.12) and the regularity (4.13). As a result we find the following variational formulation of Problem \mathcal{P} .

Problem 3. Find a displacement field \mathbf{u} such that

$$\mathbf{u} \in K, \quad (\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \pi\mathbf{v} - \pi\mathbf{u})_Y \quad \forall \mathbf{v} \in K. \quad (4.17)$$

Note that Problem 3 is formulated in terms of the displacement field. Once the displacement field is known, the stress field can be easily obtained by using the constitutive law (3.1). A couple $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ which satisfies (3.1) and (4.17) is called a *weak solution* to the contact problem \mathcal{P} .

The unique solvability of Problem 3 is provided by the following theorem.

Theorem 4.1. *Assume (4.1)–(4.7). Then, there exists a constant μ_0 , which depends on Ω , Γ_1 and \mathcal{F} , such that Problem 3 has a unique solution, if*

$$L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_4)} < \mu_0. \quad (4.18)$$

Proof. We use Theorem 2.1 with the choice $X = V$. To this end, we note that the set (4.8) is a nonempty closed convex subset of V and, moreover, $\mathbf{0}_V \in K$. Therefore, condition (2.8) is satisfied. Next, we use the definition (4.9) and the properties (4.1)(c) and (4.2)(d) to see that

$$(A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_V \geq m_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (4.19)$$

On the other hand, using (4.9), (4.1)(b), (4.2)(b) and the trace inequality (2.3) yields

$$\|A\mathbf{u} - A\mathbf{v}\|_V \leq (L_{\mathcal{F}} + c_0^2 L_p) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (4.20)$$

We conclude by (4.19) and (4.20) that A is a strongly monotone Lipschitz continuous operator on the space V which shows that (2.9) holds. Moreover, it is easy to see that the functional j defined by (4.10) satisfies condition (2.11)(a).

Assume now that $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$. Then, using the definition (2.11), after some elementary computation we find that

$$\begin{aligned} & j(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_2) - j(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_1) + j(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{v}_1) - j(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{v}_2) \\ & \leq \int_{\Gamma_4} \mu |p(\eta_{1\nu}) - (p(\eta_{2\nu}))| \|\mathbf{v}_{1\tau}\| - \|\mathbf{v}_{2\tau}\| \, da \end{aligned}$$

and, using the properties (4.2), (4.6), of the function p and μ , together with the trace inequality (2.3), we deduce that

$$\begin{aligned} & j(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_2) - j(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_1) + j(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{v}_1) - j(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{v}_2) \\ & \leq c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_4)} \|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V. \end{aligned} \quad (4.21)$$

It follows from here that j satisfies condition (2.11)(b) with $\alpha_j = c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_4)}$.

Let

$$\mu_0 = \frac{m_{\mathcal{F}}}{c_0^2}. \quad (4.22)$$

and note that, clearly, μ_0 depends on Ω , Γ_1 and \mathcal{F} . Assume that (4.18) holds. Then, since $m_A = m_{\mathcal{F}}$, it follows that condition (2.12) holds, too. Finally, using (2.5) and

the Riesz representation theorem, we deduce that there exists a unique element $\tilde{\mathbf{f}} \in V$ such that

$$(\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{v})_V = (\mathbf{f}, \pi \mathbf{v})_Y \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (4.23)$$

Theorem 4.1 now is a direct consequence of Theorem 2.1. \square

5 A continuous dependence result

The solution \mathbf{u} of Problem 3 depends on the data $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, \mu, g, k$ and, therefore, we sometimes denote it by $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, \mu, g, k)$. In what follows we study its dependence with respect to these data. To this end, in the rest of this section we assume that (4.1)–(4.7), (4.18) hold and, in addition, we consider a perturbation $\mathbf{f}_{0n}, \mathbf{f}_{2n}, F_n, \mu_n, g_n, k_n$ of $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, \mu, g, k$, respectively, which satisfy conditions (4.3)–(4.7), (4.18). For each $n \in \mathbb{N}$ we consider the set $K_n \subset V$, the functional $j_n : V \rightarrow \mathbb{R}$ and the element $\mathbf{f}_n \in Y$ defined by

$$K_n = \{ \mathbf{v} \in V : v_\nu \leq g_n \text{ a.e. on } \Gamma_3, \quad v_\nu \leq k_n \text{ a.e. on } \Gamma_4 \}, \quad (5.1)$$

$$j_n(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} F_n v_\nu^+ da + \int_{\Gamma_4} \mu_n p(u_\nu) \|\mathbf{v}_\tau\| da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{f}_n = (\mathbf{f}_{0n}, \mathbf{f}_{2n}). \quad (5.3)$$

Moreover, we consider the following perturbation of Problem 3.

Problem 4. Find a displacement field \mathbf{u}_n such that

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n \in K_n, \quad (A\mathbf{u}_n, \mathbf{v} - \mathbf{u}_n)_V + j_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}) - j_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) \\ \geq (\mathbf{f}_n, \pi \mathbf{v} - \pi \mathbf{u}_n)_Y \quad \forall \mathbf{v} \in K_n. \end{aligned} \quad (5.4)$$

It follows from Theorem 4.1 that, for each $n \in \mathbb{N}$, Problem 4 has a unique solution $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_n(\mathbf{f}_{0n}, \mathbf{f}_{2n}, F_n, \mu_n, g_n, k_n)$. Our main result in this section is the following.

Theorem 5.1. Assume that

$$\mathbf{f}_{0n} \rightharpoonup \mathbf{f}_0 \quad \text{in } L^2(\Omega)^d, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{f}_{2n} \rightharpoonup \mathbf{f}_2 \quad \text{in } L^2(\Gamma_2)^d, \quad (5.6)$$

$$F_n \rightharpoonup F \quad \text{in } L^2(\Gamma_3), \quad (5.7)$$

$$\mu_n \rightarrow \mu \quad \text{in } L^\infty(\Gamma_4), \quad (5.8)$$

$$g_n \rightarrow g, \quad k_n \rightarrow k. \quad (5.9)$$

Then, the solution \mathbf{u}_n of Problem 4 converges to the solution \mathbf{u} of Problem 3, i.e.,

$$\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{in } V. \quad (5.10)$$

The proof of Theorem 5.1 will be carried out in several steps that we present in what follows. We start by considering the following intermediate problem.

Problem 5. Find a displacement field $\tilde{\mathbf{u}}_n$ such that

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_n \in K, \quad (A\tilde{\mathbf{u}}_n, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{u}}_n)_V + j_n(\tilde{\mathbf{u}}_n, \mathbf{v}) - j_n(\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{\mathbf{u}}_n) \\ \geq (\mathbf{f}_n, \pi\mathbf{v} - \pi\tilde{\mathbf{u}}_n)_Y \quad \forall \mathbf{v} \in K. \end{aligned} \quad (5.11)$$

The unique solvability of this problem is a direct consequence of Theorem 2.1. We now proceed with the following result.

Lemma 5.2. There exists a constant $D > 0$ such that

$$\|\mathbf{u}_n\|_V \leq D, \quad \|\tilde{\mathbf{u}}_n\|_V \leq D, \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}. \quad (5.12)$$

Proof. Let $n \in \mathbb{N}$. We take $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$ in (5.4) to obtain

$$(A\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n)_V + j_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) \leq (\mathbf{f}_n, \pi\mathbf{u}_n)_Y.$$

Next, using assumption (4.19), the positivity of the function j_n and the continuity of the operator π , (2.5), it follows that

$$\|\mathbf{u}_n\|_V \leq \frac{1}{m_{\mathcal{F}}} \max(1, d_0) (\|\mathbf{f}_n\|_Y + \|A\mathbf{0}_V\|_V). \quad (5.13)$$

Similar arguments show that

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_n\|_V \leq \frac{1}{m_{\mathcal{F}}} \max(1, d_0) (\|\mathbf{f}_n\|_Y + \|A\mathbf{0}_V\|_V). \quad (5.14)$$

Finally, assumptions (5.5) and (5.6) imply that

$$\mathbf{f}_n \rightharpoonup \mathbf{f} \quad \text{in } Y \quad (5.15)$$

and, therefore, the sequence $\{\mathbf{f}_n\} \subset Y$ is bounded, i.e., there exists $E > 0$ which does not depend on n , such

$$\|\mathbf{f}_n\|_Y \leq E. \quad (5.16)$$

Lemma 5.2 is now a direct consequence of inequalities (5.13), (5.14) and (5.16). \square

Lemma 5.3. The sequence $\{\tilde{\mathbf{u}}_n\}$ converge weakly in V to \mathbf{u} , that is

$$\tilde{\mathbf{u}}_n \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{in } V. \quad (5.17)$$

Proof. Lemma 5.2 combined with a standard compactness argument implies that there exists $\tilde{\mathbf{u}} \in V$ such that, passing to a subsequence, still denoted $\{\tilde{\mathbf{u}}_n\}$, we have

$$\tilde{\mathbf{u}}_n \rightharpoonup \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{in } V. \quad (5.18)$$

We now prove that

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}. \quad (5.19)$$

To this end we first note that K is a closed convex subset of the space V and $\{\tilde{\mathbf{u}}_n\} \subset K$. Therefore, the convergence (5.18) implies that $\tilde{\mathbf{u}} \in K$. Let $n \in \mathbb{N}$. We take $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{u}} \in K$ in (5.11) to obtain that

$$(A\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}})_V \leq (\mathbf{f}_n, \pi\tilde{\mathbf{u}}_n - \pi\tilde{\mathbf{u}})_Y + j_n(\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{\mathbf{u}}) - j_n(\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{\mathbf{u}}_n). \quad (5.20)$$

We now use the convergences (5.7), (5.8), (5.15), (5.18), (2.6) and the compactness of the trace operator to see that

$$(\mathbf{f}_n, \pi\tilde{\mathbf{u}}_n - \pi\tilde{\mathbf{u}})_Y \rightarrow 0, \quad (5.21)$$

$$j_n(\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{\mathbf{u}}) - j_n(\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{\mathbf{u}}_n) \rightarrow 0. \quad (5.22)$$

We now pass to the upper limit in (5.20) and use (5.21), (5.22) to deduce that

$$\limsup (A\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}})_V \leq 0.$$

Therefore, using (4.19)–(4.20), the convergence (5.18) and standard arguments on pseudomonotone operators, we deduce that

$$\liminf (A\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{\mathbf{u}}_n - \mathbf{v})_V \geq (A\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in K. \quad (5.23)$$

On the other hand, using again inequality (5.11), the convergences (5.7), (5.8), (5.15), (5.18) and (2.6) we obtain that

$$\limsup (A\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{\mathbf{u}}_n - \mathbf{v})_V \leq (\mathbf{f}, \pi\tilde{\mathbf{u}} - \pi\mathbf{v})_Y + j(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - j(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) \quad \forall \mathbf{v} \in K. \quad (5.24)$$

We combine now the inequalities (5.23) and (5.24) to see that

$$(A\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{u}})_V + j(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - j(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) \geq (\mathbf{f}, \pi\mathbf{v} - \pi\tilde{\mathbf{u}})_Y \quad \forall \mathbf{v} \in K. \quad (5.25)$$

Next, we take $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ in (5.25) and $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{u}}$ in (4.17). Then, adding the resulting inequalities and using the strong monotonicity of the operator A , (4.19), we obtain that

$$m_{\mathcal{F}} \|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_V^2 \leq j(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) - j(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) + j(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

Finally, we use inequality (4.21) to see that

$$(m_{\mathcal{F}} - c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_d)}) \|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_V^2 \leq 0.$$

Equality (5.19) is now a consequence of assumption (4.18) and definition (4.22).

A carefully examination of the arguments used above shows that any weakly convergent subsequence of the sequence $\{\tilde{\mathbf{u}}_n\} \subset V$ converges weakly to \mathbf{u} , where, recall, \mathbf{u} is the unique solution of inequality (4.17). Therefore, using the bound (5.13) we find that the whole sequence $\{\tilde{\mathbf{u}}_n\}$ converges weakly in V to \mathbf{u} , which concludes the proof. \square

We proceed with the following strong convergence result.

Lemma 5.4. *The sequence $\{\tilde{\mathbf{u}}_n\}$ converges strongly in V to \mathbf{u} , that is*

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}\|_V \rightarrow 0. \quad (5.26)$$

Proof. Let $n \in \mathbb{N}$. We take $\mathbf{v} = \mathbf{u} \in K$ in (5.11) to obtain that

$$(A\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u})_V \leq (\mathbf{f}_n, \pi\tilde{\mathbf{u}}_n - \pi\mathbf{u})_Y + j_n(\tilde{\mathbf{u}}_n, \mathbf{u}) - j_n(\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{\mathbf{u}}_n). \quad (5.27)$$

Next, we use (4.19) to find that

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{F}} \|\tilde{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}\|_V^2 &\leq (A\tilde{\mathbf{u}}_n - A\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u})_V \\ &= (A\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u})_V - (A\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u})_V \end{aligned}$$

and, therefore, (5.27) yields

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{F}} \|\tilde{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}\|_V^2 & \leq (\mathbf{f}_n, \pi\tilde{\mathbf{u}}_n - \pi\mathbf{u})_Y + j_n(\tilde{\mathbf{u}}_n, \mathbf{u}) - j_n(\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{\mathbf{u}}_n) - (A\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u})_V. \end{aligned} \quad (5.28)$$

We now use (5.7), (5.8), (5.15), (5.17), (2.6) and the compactness of the trace operator to see that

$$(\mathbf{f}_n, \pi\tilde{\mathbf{u}}_n - \pi\mathbf{u})_Y \rightarrow 0, \quad (5.29)$$

$$j_n(\tilde{\mathbf{u}}_n, \mathbf{u}) - j_n(\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{\mathbf{u}}_n) \rightarrow 0, \quad (5.30)$$

$$(A\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u})_V \rightarrow 0. \quad (5.31)$$

Finally, we combine the inequality (5.28) with the convergences (5.29)–(5.31) to see that (5.26) holds. \square

Lemma 5.5. *The following convergence holds:*

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n\|_V \rightarrow 0. \quad (5.32)$$

Proof. Let $n \in \mathbb{N}$ and let $\alpha_n > 0$, $\beta_n > 0$ be given by

$$\alpha_n = \min \left\{ \frac{g_n}{g}, \frac{k_n}{k} \right\}, \quad \beta_n = \min \left\{ \frac{g}{g_n}, \frac{k}{k_n} \right\}. \quad (5.33)$$

Then, it is since $\tilde{\mathbf{u}}_n \in K$ and $\mathbf{u}_n \in K_n$ it is easy to see that

$$\alpha_n \tilde{\mathbf{u}}_n \in K_n. \quad (5.34)$$

and

$$\beta_n \mathbf{u}_n \in K. \quad (5.35)$$

The regularity (5.34) allows to test in (5.4) with $\mathbf{v} = \alpha_n \tilde{\mathbf{u}}_n$ to obtain

$$\begin{aligned} (A\mathbf{u}_n, \alpha_n \tilde{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n)_V + j_n(\mathbf{u}_n, \alpha_n \tilde{\mathbf{u}}_n) - j_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) \\ \geq (\mathbf{f}_n, \pi(\alpha_n \tilde{\mathbf{u}}_n) - \pi\mathbf{u}_n)_Y. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Moreover, the regularity (5.35) allows to test in (5.11) with $v = \beta_n \mathbf{u}_n$. As a result we find that

$$\begin{aligned} (A\tilde{\mathbf{u}}_n, \beta_n \mathbf{u}_n - \tilde{\mathbf{u}}_n)_V + j_n(\tilde{\mathbf{u}}_n, \beta_n \mathbf{u}_n) - j_n(\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{\mathbf{u}}_n) \\ \geq (\mathbf{f}_n, \pi(\beta_n \mathbf{u}_n) - \pi\tilde{\mathbf{u}}_n)_Y. \end{aligned} \quad (5.37)$$

We now add inequalities (5.36), (5.37) to find that

$$\begin{aligned} (A\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{\mathbf{u}}_n - \beta_n \mathbf{u}_n)_V + (A\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n - \alpha_n \tilde{\mathbf{u}}_n)_V \\ \leq (1 - \beta_n)(\mathbf{f}_n, \pi\mathbf{u}_n)_Y + (1 - \alpha_n)(\mathbf{f}_n, \pi\tilde{\mathbf{u}}_n)_Y \\ + j_n(\tilde{\mathbf{u}}_n, \beta_n \mathbf{u}_n) - j_n(\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{\mathbf{u}}_n) + j_n(\mathbf{u}_n, \alpha_n \tilde{\mathbf{u}}_n) - j_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n). \end{aligned}$$

Then, we use the positively homogeneity of the function j with respect to the second argument and, after some algebra, we deduce that

$$\begin{aligned} (A\tilde{\mathbf{u}}_n - A\mathbf{u}_n, \tilde{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n)_V \\ \leq (\alpha_n - 1)(A\mathbf{u}_n, \tilde{\mathbf{u}}_n)_V + (\beta_n - 1)(A\tilde{\mathbf{u}}_n, \mathbf{u}_n)_V \\ \leq (1 - \beta_n)(\mathbf{f}_n, \pi\mathbf{u}_n)_Y + (1 - \alpha_n)(\mathbf{f}_n, \pi\tilde{\mathbf{u}}_n)_Y \\ + (\beta_n - 1)j(\tilde{\mathbf{u}}_n, \mathbf{u}_n) + (\alpha_n - 1)j(\mathbf{u}_n, \tilde{\mathbf{u}}_n) \\ + j_n(\tilde{\mathbf{u}}_n, \mathbf{u}_n) - j_n(\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{\mathbf{u}}_n) + j_n(\mathbf{u}_n, \tilde{\mathbf{u}}_n) - j_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n). \end{aligned} \quad (5.38)$$

We now use inequalities (4.19), (4.20), (2.5) and the bounds (5.12), (5.16) to see that

$$(A\tilde{\mathbf{u}}_n - A\mathbf{u}_n, \tilde{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n)_V \geq m_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u}_n - \tilde{\mathbf{u}}_n\|_V^2 \quad (5.39)$$

$$(\alpha_n - 1)(A\mathbf{u}_n, \tilde{\mathbf{u}}_n)_V \leq |\alpha_n - 1|(L_{\mathcal{F}} + c_0^2 L_p + \|A\mathbf{0}_V\|_V)D, \quad (5.40)$$

$$(\beta_n - 1)(A\tilde{\mathbf{u}}_n, \mathbf{u}_n)_V \leq |\beta_n - 1|(L_{\mathcal{F}} + c_0^2 L_p + \|A\mathbf{0}_V\|_V)D, \quad (5.41)$$

$$(1 - \beta_n)(\mathbf{f}_n, \pi\mathbf{u}_n)_Y \leq |\beta_n - 1|Ed_0D, \quad (5.42)$$

$$(1 - \alpha_n)(\mathbf{f}_n, \pi\tilde{\mathbf{u}}_n)_Y \leq |\alpha_n - 1|Ed_0D. \quad (5.43)$$

On the other hand, using inequality (4.21) with $\boldsymbol{\eta}_1 = \tilde{\mathbf{u}}_n$, $\boldsymbol{\eta}_2 = \mathbf{0}_V$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}_V$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_n$ combined with assumption (4.2)(e) it follows that

$$j(\tilde{\mathbf{u}}_n, \mathbf{u}_n) \leq c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_4)} \|\tilde{\mathbf{u}}_n\|_V \|\mathbf{u}_n\|_V.$$

Therefore, the bounds (5.12) imply that

$$(\beta_n - 1)j(\tilde{\mathbf{u}}_n, \mathbf{u}_n) \leq |\beta_n - 1|c_0^2 L_p D^2 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_4)}. \quad (5.44)$$

A similar arguments yields

$$(\alpha_n - 1)j(\mathbf{u}_n, \tilde{\mathbf{u}}_n) \leq |\alpha_n - 1|c_0^2 L_p D^2 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_4)}. \quad (5.45)$$

Finally, using again inequality (4.21) we deduce that

$$\begin{aligned} j_n(\tilde{\mathbf{u}}_n, \mathbf{u}_n) - j_n(\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{\mathbf{u}}_n) + j_n(\mathbf{u}_n, \tilde{\mathbf{u}}_n) - j_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) \\ \leq c_0^2 L_p \|\mu_n\|_{L^\infty(\Gamma_4)} \|\mathbf{u}_n - \tilde{\mathbf{u}}_n\|_V^2. \end{aligned} \quad (5.46)$$

We now combine inequalities (5.38)–(5.46) to see that there exists a positive constant G which does not depend on n such that

$$(m_{\mathcal{F}} - c_0^2 L_p \|\mu_n\|_{L^\infty(\Gamma_4)}) \|\mathbf{u}_n - \tilde{\mathbf{u}}_n\|_V^2 \leq G(|\alpha_n - 1| + |\beta_n - 1|). \quad (5.47)$$

On the other hand, the convergence (5.8) implies that

$$m_{\mathcal{F}} - c_0^2 L_p \|\mu_n\|_{L^\infty(\Gamma_4)} \rightarrow m_{\mathcal{F}} - c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_4)} \quad (5.48)$$

and, in addition, the smallness assumption (4.18) and the definition (4.22) yield $m_{\mathcal{F}} - c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_4)} > 0$. We combine this inequality with the convergence (5.48) to deduce that for n large enough we have

$$(m_{\mathcal{F}} - c_0^2 L_p \|\mu_n\|_{L^\infty(\Gamma_4)}) \geq \frac{1}{2} (m_{\mathcal{F}} - c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_4)}). \quad (5.49)$$

The inequalities (5.47) and (5.49) show that there exists a positive constant C which does not depend on n such that

$$\|\mathbf{u}_n - \tilde{\mathbf{u}}_n\|_V^2 \leq C(|\alpha_n - 1| + |\beta_n - 1|). \quad (5.50)$$

Finally, note that the definition (5.33) and assumption (5.9) yield

$$\alpha_n \rightarrow 1, \quad \beta_n \rightarrow 1. \quad (5.51)$$

The convergence (5.32) is now a consequence of (5.50) and (5.51). \square

We now have all the ingredients to provide the proof of Theorem 5.1.

Proof. Let $n \in \mathbb{N}$. We write

$$\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_V \leq \|\mathbf{u}_n - \tilde{\mathbf{u}}_n\|_V + \|\tilde{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}\|_V$$

then we use Lemmas 5.4 and 5.5 to see that the convergence (5.10) holds, which concludes the proof. \square

In addition to the mathematical interest in the convergence result (5.10) it is important from mechanical point of view, since it shows that the weak solution of the contact problem 2 depends continuously on the data.

6 An optimization problem

In this section we study an optimization problem associated to Problem 3, under the assumption that μ is fixed. As already mentioned, the solution of this problem depends on the data $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, g$ and k and, therefore, each of these quantities could play the role of a control for the variational inequality (4.17). Various choice can be considered and, for this reason, to avoid repetition, we shall consider a generic problem which can be constructed as follows.

Denote by $\boldsymbol{\theta}$ one or part of the data $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, g$ and k and let $\boldsymbol{\eta}$ be the reminder ones. To guarantee the conditions of Theorem 4.1 we assume that $\boldsymbol{\theta} \in U$ and $\boldsymbol{\eta} \in S$ where U and S are subsets of two appropriate Hilbert spaces Z and W , respectively. For instance, if $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{f}_2$ then $\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{f}_0, F, g, k)$, $Z = L^2(\Gamma_2)^d$ and $W = L^2(\Omega)^d \times L^2(\Gamma_3) \times \mathbb{R}^2$. If $\boldsymbol{\theta} = (g, k)$ then $\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F)$, $Z = \mathbb{R}^2$ and $W = L^2(\Omega)^d \times L^2(\Gamma_2)^d \times L^2(\Gamma_3)$. The sets U and S will be specified in the Examples 6.3 and 6.4 below. For each $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}) \in U \times S$ we denote in what follows by $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta})$ the solution of the variational inequality (4.17) and we consider the following optimization problem.

Problem 6. *Given $\boldsymbol{\eta} \in S$, find $\boldsymbol{\theta}^* \in U$ such that*

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\eta})) = \min_{\boldsymbol{\theta} \in U} \mathcal{L}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta})). \quad (6.1)$$

We also consider the following assumptions.

$$\left\{ \begin{array}{l} U \text{ is a bounded weakly closed subset of } Z, \text{ i.e.,} \\ \{\boldsymbol{\theta}_n\} \subset U, \quad \boldsymbol{\theta} \in Z, \quad \boldsymbol{\theta}_n \rightharpoonup \boldsymbol{\theta} \text{ in } Z \implies \boldsymbol{\theta} \in U. \end{array} \right. \quad (6.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L} : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ is a lower semicontinuous function, i.e.,} \\ \{\mathbf{u}_n\} \subset V, \quad \mathbf{u} \in V, \quad \mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u} \text{ in } V \implies \liminf \mathcal{L}(\mathbf{u}_n) \geq \mathcal{L}(\mathbf{u}). \end{array} \right. \quad (6.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S \text{ is a weakly closed subset of } W, \text{ i.e.,} \\ \{\boldsymbol{\eta}_n\} \subset S, \quad \boldsymbol{\eta} \in W, \quad \boldsymbol{\eta}_n \rightharpoonup \boldsymbol{\eta} \text{ in } W \implies \boldsymbol{\eta} \in S. \end{array} \right. \quad (6.4)$$

$$\mathcal{L} : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ is a continuous function.} \quad (6.5)$$

We have the following existence result.

Theorem 6.1. *Assume (6.2) and (6.3). Then for each $\boldsymbol{\eta} \in S$ there exists at least one solution $\boldsymbol{\theta}^* \in U$ to Problem 6.*

Proof. Let

$$\omega = \inf_{\boldsymbol{\theta} \in U} \mathcal{L}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta})) \quad (6.6)$$

and let $\{\boldsymbol{\theta}_n\} \subset U$ be a minimizing sequence for the functional J , i.e.,

$$\lim \mathcal{L}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}_n, \boldsymbol{\eta})) = \omega. \quad (6.7)$$

Since $U \subset Z$ is bounded, it follows that the sequence $\{\boldsymbol{\theta}_n\}$ is bounded in Z and, therefore there exists $\boldsymbol{\theta}^* \in Z$ such that, passing to a subsequence still denoted $\{\boldsymbol{\theta}_n\}$, we have

$$\boldsymbol{\theta}_n \rightharpoonup \boldsymbol{\theta}^* \quad \text{in } Z. \quad (6.8)$$

Moreover, since $U \subset Z$ is weakly closed we deduce that

$$\boldsymbol{\theta}^* \in U. \quad (6.9)$$

In addition, the convergence (6.8) and Theorem 5.1 yields

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}_n, \boldsymbol{\eta}) \rightarrow \mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\eta}) \quad \text{in } V \quad (6.10)$$

and, therefore, assumption (6.3) implies that

$$\liminf \mathcal{L}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}_n, \boldsymbol{\eta})) \geq \mathcal{L}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\eta})). \quad (6.11)$$

It follows now from (6.7) and (6.11) that

$$\omega \geq \mathcal{L}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\eta})). \quad (6.12)$$

In addition, (6.9) and (6.6) yield

$$\omega \leq \mathcal{L}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\eta})). \quad (6.13)$$

Finally, we combine (6.9), (6.12) and (6.13) to see that (6.1) holds, which concludes the proof. \square

The solution of the optimization problem 6 depends on $\boldsymbol{\eta}$. Its dependence is provided by the following result.

Theorem 6.2. *Assume (6.2), (6.4), (6.5). Let $\{\boldsymbol{\eta}_n\} \subset S$ and, for each $n \in \mathbb{N}$, let $\boldsymbol{\theta}_n^*$ be a solution to Problem 6 for $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_n$. In addition, assume that*

$$\boldsymbol{\eta}_n \rightharpoonup \boldsymbol{\eta} \quad \text{in } W. \quad (6.14)$$

Then, there exists a subsequence of the sequence $\{\boldsymbol{\theta}_n^\}$, again denoted $\{\boldsymbol{\theta}_n^*\}$, and an element $\boldsymbol{\theta}^* \in U$, such that*

$$\boldsymbol{\theta}_n^* \rightharpoonup \boldsymbol{\theta}^* \quad \text{in } Z. \quad (6.15)$$

Moreover, $\boldsymbol{\theta}^$ is a solution to Problem 6.*

Proof. We start with the remark that assumption (6.5) implies (6.3) and, therefore, the existence of the solution $\boldsymbol{\theta}_n^*$ of Problem 6 is guaranteed by Theorem 6.1, for each $n \in \mathbb{N}$. Next, we use assumption (6.2) to see that the sequence $\{\boldsymbol{\theta}_n^*\}$ is bounded and, therefore, there exists $\boldsymbol{\theta}^* \in Z$ such that, passing to a subsequence still denoted $\{\boldsymbol{\theta}_n^*\}$, the convergence (6.15) holds. Moreover, (6.2) implies that

$$\boldsymbol{\theta}^* \in U \quad (6.16)$$

and (6.4) implies that $\boldsymbol{\eta} \in S$. In addition, the convergences (6.14), (6.15) and Theorem 5.1 guarantee that

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}_n^*, \boldsymbol{\eta}_n) \rightarrow \mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\eta}) \quad \text{in } V. \quad (6.17)$$

Assume now that $\boldsymbol{\theta}_0^*$ is a solution of Problem 6. Then,

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}_0^*, \boldsymbol{\eta})) \leq \mathcal{L}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\eta})). \quad (6.18)$$

Moreover, (6.14) and Theorem 5.1 imply that

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}_0^*, \boldsymbol{\eta}_n) \rightarrow \mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}_0^*, \boldsymbol{\eta}) \quad \text{in } V. \quad (6.19)$$

On the other hand, by the optimality of $\boldsymbol{\theta}_n^*$ it follows that

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}_n^*, \boldsymbol{\eta}_n)) \leq \mathcal{L}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}_0^*, \boldsymbol{\eta}_n)) \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

Therefore, the convergences (6.17), (6.19) and the continuity of \mathcal{L} , (6.5), imply that

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\eta})) \leq \mathcal{L}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}_0^*, \boldsymbol{\eta})). \quad (6.20)$$

We now combine inequalities (6.18) and (6.20) and use regularity (6.16) to deduce that $\boldsymbol{\theta}^*$ is a solution to Problem 6, which concludes the proof. \square

We end this section with two examples of optimization problems for which the results provided by Theorems 6.1 and 6.2 hold.

Example 6.3. We chose $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{f}_2$ and, therefore, $\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{f}_0, F, g, k)$, $Z = L^2(\Gamma_2)^d$, $W = L^2(\Omega)^d \times L^2(\Gamma_3) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Let

$$U = \{ \boldsymbol{\theta} \in Z : \|\boldsymbol{\theta}\|_Z \leq E \},$$

$$S = \{ \boldsymbol{\eta} = (\mathbf{f}_0, F, g, k) \in S : F \geq 0 \text{ a.e. on } \Gamma_3, g_0 \leq g \leq g_1, k_0 \leq k \leq k_1 \},$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \|v_\nu - \phi\|^2 da \quad \text{for all } \mathbf{v} \in V$$

where E , g_0 , g_1 , k_0 and k_1 are strictly positive constants such that $g_0 \leq g_1$ and $k_0 \leq k_1$ and $\phi \in L^2(\Gamma_3)$ is given. With this choice, the mechanical interpretation of Problem 6 is the following: given a contact process of the form (3.1)–(3.6), with the data $(\mathbf{f}_0, F, g, k) \in S$ we are looking for a traction $\boldsymbol{\theta}^* = \mathbf{f}_2^* \in U$ such that the corresponding normal displacement of the solution on Γ_3 is as close as possible to the “desired displacement” ϕ . It is easy to see that in this case all the assumptions of Theorems 6.1 and 6.2 are satisfied. Theorem 6.1 guarantees the existence of at least one solution of this optimization problem.

Example 6.4. A second example of Problem 6 can be obtained by taking $\boldsymbol{\theta} = (g, k)$ and, therefore, $\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F)$, $Z = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $W = L^2(\Omega)^d \times L^2(\Gamma_2)^d \times L^2(\Gamma_3)$. Let

$$U = \{ \boldsymbol{\theta} = (g, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : g_0 \leq g \leq g_1, k_0 \leq k \leq k_1 \},$$

$$S = \{ \boldsymbol{\eta} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F) \in S : F \geq 0 \text{ a.e. on } \Gamma_3 \},$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|^2 dx \quad \text{for all } \mathbf{v} \in V$$

where g_0, g_1, k_0 and k_1 are strictly positive constants such that $g_0 \leq g_1$ and $k_0 \leq k_1$. With this choice, the mechanical interpretation of Problem 6 is the following: given a contact process of the form (3.1)–(3.6), with the data $(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F) \in S$ we are looking for a thicknesses $\boldsymbol{\theta}^* = (g^*, k^*) \in U$ such that the corresponding deformation in the body is as small as possible. Theorem 6.1 guarantees the existence of at least one solution of all this optimization problem.

References

- [1] A. Amassad, D. Chenais and C. Fabre, Optimal control of an elastic contact problem involving Tresca friction law, *Nonlinear Analysis* **48** (2002), 1107–1135.
- [2] M. Barboteu, X. Cheng and M. Sofonea, Analysis of a contact problem with unilateral constraint and slip-dependent friction, *Mathematics and Mechanics of Solids* **21** (2016), 791–811.
- [3] M. Cocu, Existence of solutions of Signorini problems with friction, *Int. J. Engrg. Sci.* **22** (1984), 567–581.
- [4] A. Benraouda, M. Couderc and M. Sofonea, Analysis and Control of a Contact Problem with Unilateral Constraints, submitted.
- [5] A. Capatina, *Variational Inequalities Frictional Contact Problems*, Advances in Mechanics and Mathematics **31**, Springer, New York, 2014.
- [6] G. Duvaut and J.-L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [7] C. Eck, J. Jarušek and M. Krbeč, *Unilateral Contact Problems: Variational Methods and Existence Theorems*, Pure and Applied Mathematics **270**, Chapman/CRC Press, New York, 2005.
- [8] W. Han and M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, Studies in Advanced Mathematics **30**, American Mathematical Society, Providence, RI–International Press, Somerville, MA, 2002.

- [9] N. Kikuchi and J.T. Oden, *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia, 1988.
- [10] T.A. Laursen, *Computational Contact and Impact Mechanics*, Springer, Berlin, 2002.
- [11] A. Matei and S. Micu, Boundary optimal control for nonlinear antiplane problems, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* **74** (2011), 1641–1652.
- [12] A. Matei and S. Micu, Boundary optimal control for a frictional contact problem with normal compliance, *Applied Mathematics & Optimization*, DOI <https://doi.org/10.1007/s00245-017-9410-8>, to appear.
- [13] A. Matei, S. Micu and C. Niță, Optimal control for antiplane frictional contact problems involving nonlinearly elastic materials of Hencky type, *Mathematics and Mechanics of Solids* **23** (2018), 308–328.
- [14] S. Migórski, A. Ochal and M. Sofonea, *Nonlinear Inclusions and Hemivariational Inequalities. Models and Analysis of Contact Problems*, Advances in Mechanics and Mathematics **26**, Springer, New York, 2013.
- [15] D. Motreanu and M. Sofonea, Quasivariational inequalities and applications in frictional contact problems with normal compliance, *Adv. Math. Sci. Appl.* **10** (2000), 103–118.
- [16] P.D. Panagiotopoulos, *Inequality Problems in Mechanics and Applications*, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [17] M. Shillor, M. Sofonea and J.J. Telega, *Models and Analysis of Quasistatic Contact*, Lect. Notes Phys. **655**, Springer, Berlin, 2004.
- [18] M. Sofonea and A. Matei, *Mathematical Models in Contact Mechanics*, London Mathematical Society Lecture Note Series **398**, Cambridge University Press, 2012.
- [19] M. Sofonea and S. Migórski, *Variational-Hemivariational Inequalities with Applications*, Pure and Applied Mathematics, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton-London, 2018.
- [20] D. Tiba, *Optimal Control of Nonsmooth Distributed Parameter Systems*, Springer, Berlin, 1990.
- [21] A. Touzaline, Optimal control of a frictional contact problem, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series* **31** (2015), 991–1000.

Optimization problems for elastic contact models with unilateral constraints

Mircea Sofonea¹, Yi-bin Xiao^{2*} and Maxime Couderc¹

² *Laboratoire de Mathématiques et Physique
University of Perpignan Via Domitia
52 Avenue Paul Alduy, 66860 Perpignan, France*

¹ *School of Mathematical Sciences
University of Electronic Science and Technology of China
Chengdu, Sichuan, 611731, PR China*

Abstract

The aim of this paper is to provide some results in the study of an abstract optimization problem in reflexive Banach spaces and to illustrate their use in the analysis and control of static contact problems with elastic materials. We start with a simple model problem which describes the equilibrium of an elastic body in unilateral contact with a foundation. We derive a variational formulation of the model which is in the form of minimization problem for the stress field. Then we introduce the abstract optimization problem for which we prove existence, uniqueness and convergence results. The proofs are based on arguments of lower semicontinuity, monotonicity, convexity, compactness and Mosco convergence. Finally, we use these abstract results to deduce both the unique solvability of the contact model as well as the existence and the convergence of the optimal pairs for an associated optimal control problem.

AMS Subject Classification: 49J40, 49J45, 49J20, 49J27, 74M15, 74G65.

Key words: optimization problem, Mosco convergence, optimal pair, elastic material, frictionless contact, weak solution, convergence results.

*Corresponding author, Email: xiaoyb9999@hotmail.com

1 Introduction

Optimization methods represent a mathematical tool intensively used in Applied Mathematics, both in the analysis and numerical approximation of various nonlinear boundary value problems. They are used in Solid and Fluid Mechanics and in Engineering Sciences as well. Comprehensive references in the field are the books [5, 11, 12].

Process of contact between deformable bodies arise in industry and everyday life. Their mathematical modeling leads to strongly elliptic or evolutionary nonlinear boundary value problems. References in the field include [9, 10, 13, 15, 23, 24, 25, 34] and, more recently, [4, 21, 28]. There, various existence and uniqueness results have been proved, by using arguments of variational and hemivariational inequalities, which together with their applications have been studied intensively, see [4, 8, 9, 16, 17, 21, 29, 33, 35] and the references therein. In part of these references the numerical analysis of the models was also provided, together with error estimates and convergence results. Moreover, numerical simulations which represents an evidence of the theoretical results have been presented, together with their mechanical interpretations. Results on optimal control for various contact problems with elastic materials could be found in [1, 4, 18, 19, 26, 31, 32] and the references therein.

Our aim in this paper is two fold. The first one is to study a general class of optimization problems in abstract reflexive Banach spaces for which we provide existence, uniqueness and convergence results. The second one is to illustrate how these abstract results can be applied in the analysis and optimal control of contact problems with unilateral constraints. In this way we construct and develop mathematical tools useful in Contact Mechanics and illustrate the cross fertilization between models and applications, on one hand, and the nonlinear functional analysis, on the other hand.

The results we present here represent a continuation of [3, 7], where the analysis and control of new models which describe the equilibrium of an elastic body in contact with a foundation has been carried out. The model considered in [3] was frictionless and its variational formulation was in the form of elliptic variational inequality with unilateral constraints. The model considered in [7] was frictional and, therefore, the variational formulation of the problem was in the form of elliptic quasivariational inequality. In both models the unknown was the displacement field. We provided the unique solvability of the models, the continuous dependence of the solution with respect to the data and discussed related optimal control problems. To this end, we used arguments of analysis and control for elliptic variational and quasivariational inequalities.

In the current paper we use a different approach, based on abstract optimization results that we state and prove here for the first time. Due to their generality, these results have an interest on their own and, therefore, they could be useful in the study of various elliptic problems. Nevertheless, our aim is to illustrate their use in the

analysis and control of elastic contact problems. To this end, we consider an elastic frictionless contact problem with unilateral constraints for which the abstract results work. In contrast with the models in [3, 7], the model we consider in this paper leads to a variational formulation in which the unknown is the stress field.

The paper is structured as follows. In Section 2 we introduce the contact model, list the assumptions on the data and derive its variational formulation, in terms of the stress field. In Section 3 we state an abstract optimization problem in reflexive Banach spaces, for which we prove existence, uniqueness and convergence results, gathered in Theorems 3.2 and 3.3. These abstract results are useful in both the analysis and the control of the contact model as we illustrate in the last two sections of the manuscript. Indeed, in Section 4 we use Theorem 3.3 to prove the unique weak solvability of the contact model as well as the continuous dependence of the solution with respect to the data. In Section 5 we use Theorem 3.2 to prove the existence of optimal pairs for an associated optimal control problem and, under additional assumptions, a convergence result. We end this paper with Section 6 in which we present some concluding remarks.

2 The contact model

We consider an elastic body which occupies the domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$), with smooth boundary Γ . The boundary Γ is divided into three measurable disjoint parts Γ_1 , Γ_2 and Γ_3 such that $meas(\Gamma_1) > 0$. The body is fixed on Γ_1 , is acted upon by given surface tractions on Γ_2 , and could arrive in frictionless contact with an obstacle on Γ_3 . Denote by \mathbb{S}^d the space of second order symmetric tensors on \mathbb{R}^d or, equivalently, the space of symmetric matrices of order d . Then, the mathematical model we consider to describe the equilibrium of the body in this physical setting is the following.

Problem \mathcal{P} . Find a displacement field $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ and a stress field $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ such that

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathcal{A}\boldsymbol{\sigma} + \beta(\boldsymbol{\sigma} - P_B\boldsymbol{\sigma}) \quad \text{in } \Omega, \quad (2.1)$$

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_1, \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{on } \Gamma_2, \quad (2.4)$$

$$u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu + p \leq 0, \quad (u_\nu - g)(\sigma_\nu + p) = 0 \quad \text{on } \Gamma_3, \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_3. \quad (2.6)$$

We now provide a description of the equations and boundary conditions in Problem

\mathcal{P} where, for simplicity, we do not mention the dependence of various functions with respect to the spatial variable $\mathbf{x} \in \Omega \cup \Gamma$.

First, equation (2.1) represents the elastic constitutive law of the material in which \mathcal{A} is the elasticity tensor, β is a given coefficient, B is a nonempty closed convex subset of \mathbb{S}^d and $P_B : \mathbb{S}^d \rightarrow B$ denotes the projection map. Such kind of constitutive laws represent a regularization of the well-known Hencky law, in which the stress tensor is constrained to remain in the convex set B . Details on this matter can be found in [30]. Equation (2.2) is the equation of equilibrium in which \mathbf{f}_0 denotes the density of body forces. We use it here since the contact process is assumed to be static and, therefore, the inertial term in the equation of motion is neglected. Conditions (2.3), (2.4) represent the displacement and traction boundary conditions, respectively, where $\boldsymbol{\nu}$ denotes the unit outward normal to Γ and \mathbf{f}_2 represents the density of surface tractions.

Next, condition (2.5) represents a version of the Signorini condition. Here g denotes the gap between the body's surface and the obstacle, measured on the outward normal and p is a given function, say a pressure. Moreover, the index ν and τ denote the normal and tangential components of vectors and tensors, respectively. This condition describes the contact with a rigid body covered by a fluid of pressure p and was considered in [20] and the references therein. Finally, condition (2.6) represents the frictionless condition in which $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ denotes the tangential stress.

To provide the analysis of Problem \mathcal{P} we need to introduce further notation. Thus, we recall that inner product and norm on \mathbb{R}^d and \mathbb{S}^d are defined by

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_i v_i, & \|\mathbf{v}\| &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{\frac{1}{2}} & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, & \|\boldsymbol{\tau}\| &= (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})^{\frac{1}{2}} & \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d, \end{aligned}$$

where the indices i, j run between 1 and d and, unless stated otherwise, the summation convention over repeated indices is used. The zero element of the spaces \mathbb{R}^d and \mathbb{S}^d will be denoted by $\mathbf{0}$. We use the standard notation for Sobolev and Lebesgue spaces associated to Ω and Γ . In particular, we use the spaces $L^2(\Omega)^d$, $L^2(\Gamma_2)^d$, $L^2(\Gamma_3)$ and $H^1(\Omega)^d$, endowed with their canonical inner products and associated norms. Moreover, we recall that for an element $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d$ we still write \mathbf{v} for the trace $\gamma\mathbf{v} \in L^2(\Gamma)^d$ of \mathbf{v} to Γ . In addition, we consider the following spaces:

$$\begin{aligned} V &= \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_1 \}, \\ Q &= \{ \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) : \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) \}. \end{aligned}$$

The spaces V and Q are real Hilbert spaces endowed with the canonical inner products given by

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx, \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_Q = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx. \quad (2.7)$$

Here and below $\boldsymbol{\varepsilon}$ and Div will represent the deformation and the divergence operators,

respectively, i.e.,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j}),$$

where an index that follows a comma represents the partial derivative with respect to the corresponding component of the spatial variable $\mathbf{x} = (x_i)$, e.g. $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$. The associated norms on these spaces are denoted by $\|\cdot\|_V$ and $\|\cdot\|_Q$. Also, recall that the completeness of the space V follows from the assumption $\text{meas}(\Gamma_1) > 0$ which allows the use of Korn's inequality.

We denote by $\mathbf{0}_V$ the zero element of V and we recall that, for an element $\mathbf{v} \in V$, the normal and tangential components on Γ are given by $v_\nu = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}$ and $\mathbf{v}_\tau = \mathbf{v} - v_\nu \boldsymbol{\nu}$, respectively. For a regular function $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ we have $\sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}$ and $\boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}$ and, moreover, the following Green's formula holds:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx + \int_{\Omega} \text{Div } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} \, da \quad \text{for all } \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d. \quad (2.8)$$

In the study of the contact problem (2.1)–(2.6) we assume that the elasticity tensor \mathcal{A} satisfies the following conditions.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ijkl}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) } \mathcal{A}_{ijkl} = \mathcal{A}_{klij} = \mathcal{A}_{jikl} \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leq i, j, k, l \leq d. \\ \text{(c) There exists } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ such that} \\ \quad \mathcal{A} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} \geq m_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{\tau}\|^2 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d, \text{ a.e. in } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

We also assume that the set B and the rest of the data satisfy the following conditions.

$$B \text{ is a closed convex subset of } \mathbb{S}^d \text{ such that } \mathbf{0} \in B. \quad (2.10)$$

$$\beta \in L^\infty(\Omega), \quad \beta(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{a.e. } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^d, \quad (2.13)$$

$$p \in L^2(\Gamma_3), \quad (2.14)$$

$$g \geq 0. \quad (2.15)$$

Note that, if p is interpreted as a pressure, from physical point of view we have to assume that $p(\mathbf{x}) \geq 0$ a.e. $\mathbf{x} \in \Gamma_3$. Nevertheless, this additional assumption is not needed from mathematical point of view and, therefore, we skip it here and in Section 4. We shall consider it only in Section 5 where we deal with an optimal control problem associated to \mathcal{P} , in which p represents the control.

Finally, we assume that there exists an element $\boldsymbol{\theta} \in V$ such that

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\nu} \quad \text{on } \Gamma_3, \quad (2.16)$$

and we refer the reader to [14, 27] for examples and details on this condition.

We now introduce the form $a : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ and the function $j : Q \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_V = \int_{\Omega} \mathcal{A}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in Q, \quad (2.17)$$

$$j(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \beta \|\boldsymbol{\sigma} - P_B \boldsymbol{\sigma}\|^2 \, dx \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in Q. \quad (2.18)$$

Next, we consider the product Hilbert space

$$Y = L^2(\Omega)^d \times L^2(\Gamma_2)^d \times L^2(\Gamma_3) \times \mathbb{R}$$

endowed with the canonical inner product denoted by $(\cdot, \cdot)_Y$. and the associated norm $\|\cdot\|_Y$. Moreover, assumptions (2.12)–(2.15) lead us to consider the subset of Y defined by

$$\Lambda = \{ \boldsymbol{\eta} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, p, g) \in Y : g \geq 0 \}. \quad (2.19)$$

Then, for $\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, p, g) \in \Lambda$ we introduce the element $\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}) \in V$, the sets $U(\boldsymbol{\eta}) \subset V$, $\Sigma(\boldsymbol{\eta}) \subset Q$ and the function $J(\cdot, \boldsymbol{\eta}) : Q \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$(\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}), \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} \, da - \int_{\Gamma_3} p v_{\nu} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (2.20)$$

$$U(\boldsymbol{\eta}) = \{ \mathbf{v} \in V : v_{\nu} \leq g \text{ a.e. on } \Gamma_3 \}, \quad (2.21)$$

$$\Sigma(\boldsymbol{\eta}) = \{ \boldsymbol{\tau} \in Q : (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(g\boldsymbol{\theta}))_Q \geq (\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}), \mathbf{v} - g\boldsymbol{\theta})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U(\boldsymbol{\eta}) \}, \quad (2.22)$$

$$J(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) + j(\boldsymbol{\sigma}) - (\boldsymbol{\varepsilon}(g\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\sigma})_Q \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in Q. \quad (2.23)$$

We now derive the variational formulation of Problem Q and, to this end, we assume that $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ are sufficiently regular functions which satisfy (2.1)–(2.6), $\boldsymbol{\eta} \in \Lambda$ is fixed and $\mathbf{v} \in U(\boldsymbol{\eta})$. Then, using (2.8), equation (2.2) and the boundary conditions (2.3), (2.4) we find that

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, da \end{aligned} \quad (2.24)$$

On the other hand,

$$\int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, da = \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_{\nu} (v_{\nu} - u_{\nu}) \, da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_{\tau} \cdot (\mathbf{v}_{\tau} - \mathbf{u}_{\tau}) \, da$$

and, therefore, conditions (2.5) and (2.6) yield

$$\int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, da \geq \int_{\Gamma_3} p (u_{\nu} - v_{\nu}) \, da. \quad (2.25)$$

We now combine (2.24), (2.25) then use notation (2.20) to deduce that

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_Q \geq (\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}), \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U(\boldsymbol{\eta}). \quad (2.26)$$

Moreover, assumption (2.16) allows us to write inequality (2.26) with $\mathbf{v} = g\boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{u} - g\boldsymbol{\theta}$, both in $U(\boldsymbol{\eta})$, to see that

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(g\boldsymbol{\theta}))_Q = (\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}), \mathbf{u} - g\boldsymbol{\theta})_V. \quad (2.27)$$

Next, using (2.26) and (2.27) we find that

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(g\boldsymbol{\theta}))_Q \geq (\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}), \mathbf{v} - g\boldsymbol{\theta})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U(\boldsymbol{\eta})$$

which implies that

$$\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma(\boldsymbol{\eta}). \quad (2.28)$$

Let $\boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\boldsymbol{\eta})$. We use (2.23) to see that

$$\begin{aligned} & J(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) - J(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) \\ &= \frac{1}{2} a(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}) + a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}) + j(\boldsymbol{\tau}) - j(\boldsymbol{\sigma}) - (\boldsymbol{\varepsilon}(g\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})_Q \end{aligned}$$

and, therefore, (2.9)(c) implies that

$$\begin{aligned} & J(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) - J(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) \\ & \geq a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}) + j(\boldsymbol{\tau}) - j(\boldsymbol{\sigma}) - (\boldsymbol{\varepsilon}(g\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})_Q. \end{aligned} \quad (2.29)$$

On the other hand, it is well known that the function j is convex and Gâteaux differentiable and, moreover, $\nabla j(\boldsymbol{\sigma}) = \beta(\boldsymbol{\sigma} - P_B\boldsymbol{\sigma})$ for all $\boldsymbol{\sigma} \in Q$. Therefore, the subgradient inequality yields

$$j(\boldsymbol{\tau}) - j(\boldsymbol{\sigma}) \geq (\beta(\boldsymbol{\sigma} - P_B\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})_Q. \quad (2.30)$$

We now combine inequalities (2.29) and (2.30) then use the constitutive law (2.1) to see that

$$J(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) - J(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) \geq (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(g\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})_Q. \quad (2.31)$$

Note that $\mathbf{u} \in U(\boldsymbol{\eta})$. Then, inequality (2.31), equality (2.27) and definition (2.22) show that $J(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) \geq J(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta})$. Therefore, we deduce the following variational formulation of Problem \mathcal{P} .

Problem \mathcal{P}^V . Given $\boldsymbol{\eta} \in \Lambda$, find a stress field $\boldsymbol{\sigma}$ such that

$$\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma(\boldsymbol{\eta}), \quad J(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) \leq J(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\boldsymbol{\eta}). \quad (2.32)$$

The analysis of Problem \mathcal{P}^V , including existence, uniqueness and various convergence results, will be provided in the next section. Here we restrict ourselves to mention that a couple of functions $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ which satisfies (2.32) and (2.1) is called a weak solution of the elastic contact problem (2.1)–(2.6).

3 An abstract optimization problem

In this section we consider an abstract optimization problem which includes as particular case Problem \mathcal{P} . We prove existence and convergence results which have interest in their own and are useful in the analysis and control of the contact problem \mathcal{P} . The functional framework is as follows. Assume that $(X, \|\cdot\|_X)$ is a reflexive Banach space, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ a normed space, $\Lambda \subset Y$, $J : X \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ and, for each $\eta \in \Lambda$, $K(\eta)$ is a given subset of X . Then, the optimization problem under consideration is as follows.

Problem \mathcal{O} . *Given $\eta \in \Lambda$, find u such that*

$$u \in K(\eta), \quad J(u, \eta) = \min_{v \in K(\eta)} J(v, \eta). \quad (3.1)$$

Next, for each $n \in \mathbb{N}$, we consider a perturbation $\eta_n \in \Lambda$ of η , together with the following optimization problem.

Problem \mathcal{O}_n . *Given $\eta_n \in \Lambda$, find u_n such that*

$$J(u_n, \eta_n) = \min_{v \in K(\eta_n)} J(v, \eta_n) \quad (3.2)$$

Below in this paper we denote by \rightarrow and \rightharpoonup the strong and weak convergence in various normed spaces, which will be specified. Moreover, in the study of problems \mathcal{O} and \mathcal{O}_n we consider the following assumptions.

- (Λ) Λ is a nonempty weakly closed subset of Y .
- (K) For each $\eta \in \Lambda$, $K(\eta)$ is a nonempty weakly closed subset of X .
- (K^*) For each $\eta \in \Lambda$, $K(\eta) = K$ with $K \subset X$ given.

$$(J_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{For all sequences } \{u_k\} \subset X \text{ and } \{\eta_k\} \subset \Lambda \text{ such that} \\ u_k \rightharpoonup u \text{ in } X, \eta_k \rightharpoonup \eta \text{ in } Y \text{ and for all } v \in X, \\ \text{the inequality below holds:} \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} [J(v, \eta_k) - J(u_k, \eta_k)] \leq J(v, \eta) - J(u, \eta). \end{array} \right.$$

$$(J_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{For all sequences } \{u_k\} \subset X \text{ and } \{\eta_k\} \subset \Lambda \text{ such that} \\ \|u_k\|_X \rightarrow \infty \text{ and } \eta_k \rightharpoonup \eta \text{ in } Y, \text{ one has } J(u_k, \eta_k) \rightarrow \infty. \end{array} \right.$$

$$(J_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{For all sequence } \{\eta_k\} \subset \Lambda \text{ such that } \eta_k \rightharpoonup \eta \text{ in } Y \\ \text{and all } v \in X, \text{ one has } J(v, \eta_k) \rightarrow J(v, \eta). \end{array} \right.$$

$$(J_4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{For all sequences } \{v_k\} \subset X \text{ and } \{\eta_k\} \subset \Lambda \text{ such that} \\ v_k \rightarrow v \text{ in } X, \eta_k \rightarrow \eta \text{ in } Y \text{ one has} \\ J(v_k, \eta_k) - J(v, \eta) \rightarrow 0. \end{array} \right.$$

$$\eta_n \rightarrow \eta \quad \text{in } Y. \quad (3.3)$$

$$K(\eta_n) \xrightarrow{M} K(\eta) \quad \text{in } X, \quad (3.4)$$

where notation “ \xrightarrow{M} ” denotes the convergence in the sense of Mosco that we recall below, for the convenience of the reader.

Definition 3.1. *Let X be a normed space, $\{K_n\}$ a sequence of nonempty subsets of X and K a nonempty subset of X . We say that the sequence $\{K_n\}$ converges to K in the Mosco sense if the following conditions hold.*

$$(M_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{For each } v \in K, \text{ there exists a sequence } \{v_n\} \text{ such that} \\ v_n \in K_n \text{ for each } n \in \mathbb{N} \text{ and } v_n \rightarrow v \text{ in } X. \end{array} \right.$$

$$(M_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{For each sequence } \{v_n\} \text{ such that} \\ v_n \in K_n \text{ for each } n \in \mathbb{N} \text{ and } v_n \rightarrow v \text{ in } X, \text{ we have } v \in K. \end{array} \right.$$

Note that the convergence in the sense of Mosco depends on the topology of the normed space X and, for this reason, in (3.4) we write explicitly $K(\eta_n) \xrightarrow{M} K(\eta)$ in X . More details on this topic can be found in [22].

Our first result in this section is as follows.

Theorem 3.2. *Assume that the assumptions (Λ) , (K) , (J_1) and (J_2) hold. Then, we have the following statements.*

i) *Problem \mathcal{O} has at least one solution and Problem \mathcal{O}_n has at least one solution, for each $n \in \mathbb{N}$.*

ii) *Under assumptions (3.3), (3.4), (J_3) , (J_4) or, alternatively, under assumptions (3.3), (K^*) , (J_3) , if u_n is a solution of Problem \mathcal{O}_n , for each $n \in \mathbb{N}$, then there exists a subsequence of the sequence $\{u_n\}$, again denoted $\{u_n\}$, and an element $u \in X$, such that*

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } X. \quad (3.5)$$

And u is a solution to Problem \mathcal{O} .

Proof. i) We take $\eta_k = \eta$ in (J_1) to see that, for all sequences $\{u_k\} \subset X$ such that $u_k \rightarrow u$ and for all $v \in X$,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} [J(v, \eta) - J(u_k, \eta)] \leq J(v, \eta) - J(u, \eta),$$

which implies that

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} J(u_k, \eta) \geq J(u, \eta).$$

It follows that the function $J(\cdot, \eta) : X \rightarrow \mathbb{R}$ is lower semicontinuous. Moreover, taking $\eta_k = \eta$ in (J_2) we deduce that $J(\cdot, \eta)$ is coercive. Recall also the assumption (K) on $K(\eta)$. The existence of at least one solution to Problem \mathcal{O} is now a direct consequence of the well-known Weierstrass theorem. The existence of at least one solution to Problem \mathcal{O}_n follows by the same argument, applied to the function $J(\cdot, \eta_n) : X \rightarrow \mathbb{R}$.

ii) Assume now that (3.3), (3.4), (J_3) and (J_4) hold. We claim that the sequence $\{u_n\}$ is bounded in X . Indeed, if $\{u_n\}$ is not bounded, then we can find a subsequence of the sequence $\{u_n\}$, again denoted $\{u_n\}$, such that $\|u_n\|_X \rightarrow \infty$. Therefore, using assumptions (3.3) and (J_2) we deduce that

$$J(u_n, \eta_n) \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

Let v be a given element in $K(\eta)$ and recall that assumption (3.4) implies that condition (M_1) holds. Thus, there exists a sequence $\{v_n\}$ such that $v_n \in K(\eta_n)$ for each $n \in \mathbb{N}$ and

$$v_n \rightarrow v \quad \text{in } X. \quad (3.7)$$

Moreover, since u_n is a solution of Problem \mathcal{O}_n we obtain that $J(u_n, \eta_n) \leq J(v_n, \eta_n)$ and, therefore,

$$J(u_n, \eta_n) \leq J(v_n, \eta_n) - J(v, \eta_n) + J(v, \eta_n) - J(v, \eta) + J(v, \eta) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

On the other hand, the convergences (3.7) and (3.3) allow us to use assumption (J_4) to find that $J(v_n, \eta_n) - J(v, \eta_n) \rightarrow 0$ and, in addition, assumption (J_3) shows that $J(v, \eta_n) - J(v, \eta) \rightarrow 0$. Thus, inequality (3.8) implies that the sequence $\{J(u_n, \eta_n)\}$ is bounded, which contradicts (3.6). We conclude from above that the sequence $\{u_n\}$ is bounded in X and, therefore, there exists a subsequence of the sequence $\{u_n\}$, again denoted $\{u_n\}$, and an element $u \in X$, such that (3.5) holds.

We now prove that u is a solution of Problem \mathcal{O} . To this end, we use (3.5) and condition (M_2) , guaranteed by assumption (3.4), to deduce that $u \in K(\eta)$. Next, we consider an arbitrary element $v \in K(\eta)$ and, using condition (M_1) , we know that there exists a sequence $\{v_n\}$ such that $v_n \in K(\eta_n)$ for each $n \in \mathbb{N}$ and (3.7) holds. Since u_n is a solution to Problem \mathcal{O}_n we have $J(u_n, \eta_n) \leq J(v_n, \eta_n)$, which implies that

$$0 \leq [J(v, \eta_n) - J(u_n, \eta_n)] + [J(v_n, \eta_n) - J(v, \eta_n)]. \quad (3.9)$$

We now use the convergences (3.7), (3.3) and assumptions (J_1) , (J_4) to see that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} [J(v, \eta_n) - J(u_n, \eta_n)] \leq J(v, \eta) - J(u, \eta), \quad (3.10)$$

$$J(v_n, \eta_n) - J(v, \eta_n) \rightarrow 0 \quad (3.11)$$

We now combine (3.9)–(3.11) to deduce that u is a solution of Problem \mathcal{O} .

Alternatively, assume now that (3.3), (K^*) , (J_3) hold. Then, $K(\eta_n) = K(\eta) = K$ and, since u_n is a solution of Problem \mathcal{O}_n , we have

$$J(u_n, \eta_n) \leq J(v, \eta_n) \quad \forall v \in K, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.12)$$

Using now assumption (J_3) we deduce that the sequence $\{J(u_n, \eta_n)\}$ is bounded, which contradicts (3.6). We conclude from above that the sequence $\{u_n\}$ is bounded in X and, therefore, there exists a subsequence of the sequence $\{u_n\}$, again denoted $\{u_n\}$, and an element $u \in X$, such that (3.5) holds.

We now prove that u is a solution of Problem \mathcal{O} . To this end, we use (3.5) and condition (K^*) to see that $u \in K(\eta) = K$. Next, we consider an arbitrary element $v \in K(\eta)$. Since u_n is the solution to Problem \mathcal{O}_n we have $J(u_n, \eta_n) \leq J(v, \eta_n)$ which implies that

$$0 \leq J(v, \eta_n) - J(u_n, \eta_n). \quad (3.13)$$

We now use the convergence (3.3) and assumption (J_1) to see that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} [J(v, \eta_n) - J(u_n, \eta_n)] \leq J(v, \eta) - J(u, \eta). \quad (3.14)$$

We now combine (3.13) and (3.14) to deduce that u is a solution of Problem \mathcal{O} , which concludes the proof. \square

We now reinforce the conditions on the data by considering the following assumptions.

(\tilde{K}) For each $\eta \in \Lambda$, $K(\eta) \subset X$ is a nonempty closed convex subset.

(\tilde{J}) For each $\eta \in \Lambda$, $J(\cdot, \eta) : X \rightarrow \mathbb{R}$ is a strictly convex function.

$$(J^*) \quad \begin{cases} \text{There exists } m > 0 \text{ such that} \\ (1-t)J(u, \eta) + tJ(v, \eta) - J((1-t)u + tv, \eta) \geq mt(1-t)\|u - v\|_X^2 \\ \text{for all } u, v \in X, \eta \in \Lambda, t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Note that assumption (\tilde{K}) implies assumption (K) and, moreover, assumption (J^*) implies assumption (\tilde{J}) .

Theorem 3.3. *Assume that assumptions (Λ) , (\tilde{K}) , (J_1) , (J_2) and (\tilde{J}) hold. Then we have the following statements.*

i) *Problem \mathcal{O} has a unique solution u and Problem \mathcal{O}_n has a unique solution u_n , for each $n \in \mathbb{N}$.*

ii) *Under assumptions (3.3), (3.4), (J_3) , (J_4) or, alternatively, under assumptions (3.3), (K^*) , (J_3) , the sequence $\{u_n\}$ converges weakly to u , i.e., $u_n \rightharpoonup u$ in X .*

iii) Under assumptions (3.3), (3.4), (J_3) , (J_4) , (J^*) or, alternatively, under assumptions (3.3), (K^*) , (J_3) , (J^*) , the sequence $\{u_n\}$ converges strongly to u , i.e., $u_n \rightarrow u$ in X .

Proof. i) For the existence part we use arguments similar to those used in the proof of Theorem 3.2 i), ii). Since the modifications are straightforward, we skip the details. The uniqueness part follows from the strictly convexity of the functions $J(\cdot, \eta)$ and $J(\cdot, \eta_n)$, guaranteed by assumption (\tilde{J}) .

ii) Assume that (3.3), (3.4), (J_3) , (J_4) or, alternatively, (3.3), (K^*) , (J_3) hold. Then, a careful analysis of the proof of Theorem 3.2 ii) reveals that in both cases the sequence $\{u_n\}$ is bounded and any weakly convergent subsequence of $\{u_n\}$ converges to a solution of Problem \mathcal{P} . On the other hand, Problem \mathcal{P} has a unique solution, denoted u , as proved in the first part of the theorem. The weak convergence of the whole sequence $\{u_n\}$ to u is now a consequence of a standard argument.

iii) Assume now that (3.3), (3.4), (J_3) , (J_4) , (J^*) hold and let $\{\tilde{u}_n\}$ be a sequence such that $\tilde{u}_n \in K(\eta_n)$ for each $n \in \mathbb{N}$ and

$$\tilde{u}_n \rightarrow u \quad \text{in } X. \quad (3.15)$$

Recall that the existence of such sequence follows from assumption (M_1) , guaranteed by condition (3.4). Then, using (J^*) with $t = \frac{1}{2}$ we find that

$$\frac{m}{4} \|\tilde{u}_n - u_n\|_X^2 \leq \frac{1}{2} \left[J(\tilde{u}_n, \eta_n) - J\left(\frac{\tilde{u}_n + u_n}{2}, \eta_n\right) \right] + \frac{1}{2} \left[J(u_n, \eta_n) - J\left(\frac{\tilde{u}_n + u_n}{2}, \eta_n\right) \right]$$

and, since u_n is a minimizer for the function $J(\cdot, \eta_n)$ on $K(\eta_n)$, it follows that

$$\frac{m}{4} \|\tilde{u}_n - u_n\|_X^2 \leq \frac{1}{2} \left[J(\tilde{u}_n, \eta_n) - J\left(\frac{\tilde{u}_n + u_n}{2}, \eta_n\right) \right], \quad (3.16)$$

which implies that

$$\frac{m}{4} \|\tilde{u}_n - u_n\|_X^2 \leq \frac{1}{2} \left[J(u, \eta_n) - J\left(\frac{\tilde{u}_n + u_n}{2}, \eta_n\right) \right] + \frac{1}{2} \left[J(\tilde{u}_n, \eta_n) - J(u, \eta_n) \right]. \quad (3.17)$$

Next, we use the convergences (3.3), (3.5), (3.15) and assumptions (J_1) , (J_4) to deduce that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left[J(u, \eta_n) - J\left(\frac{u_n + u}{2}, \eta_n\right) \right] \leq 0, \quad (3.18)$$

$$J(\tilde{u}_n, \eta_n) - J(u, \eta_n) \rightarrow 0. \quad (3.19)$$

We now combine inequalities (3.17)–(3.19) to find that $\tilde{u}_n - u_n \rightarrow 0$, which implies that $u_n \rightarrow u$ in X due to (3.15).

Alternatively, assume now that assumptions (3.3), (K^*) and (J_3) hold. Then, $K(\eta_n) = K(\eta) = K$ and, therefore we are allowed to take $\tilde{u}_n = u$ in (3.16) to obtain that

$$\frac{m}{4} \|u - u_n\|_X^2 \leq \frac{1}{2} \left[J(u, \eta_n) - J\left(\frac{u_n + u}{2}, \eta_n\right) \right]. \quad (3.20)$$

On the other hand, the part ii) shows that the sequence $\{u_n\}$ converges weakly to u , i.e., $u_n \rightharpoonup u$ in X , which implies that

$$\frac{u_n + u}{2} \rightharpoonup u \quad \text{in } X. \quad (3.21)$$

We use the convergences (3.3), (3.21) and assumption (J_1) with $v = u$ to deduce that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left[J(u, \eta_n) - J\left(\frac{u_n + u}{2}, \eta_n\right) \right] \leq 0. \quad (3.22)$$

Thus, it follows from inequalities (3.20) and (3.22) that $u_n \rightarrow u$ in X which concludes the proof. \square

4 Existence, uniqueness and convergence results

In this section we use Theorem 3.3 to study Problems \mathcal{P} and \mathcal{P}^V . To this end, for each $n \in \mathbb{N}$ we consider a perturbation $\mathbf{f}_{0n}, \mathbf{f}_{2n}, p_n, g_n$ of the data $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, p, g$, respectively, such that

$$\mathbf{f}_{0n} \in L^2(\Omega)^d, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{f}_{2n} \in L^2(\Gamma_2)^d, \quad (4.2)$$

$$p_n \in L^2(\Gamma_3), \quad (4.3)$$

$$g_n \geq 0. \quad (4.4)$$

Moreover, we assume that the following convergences hold.

$$\mathbf{f}_{0n} \rightharpoonup \mathbf{f}_0 \quad \text{in } L^2(\Omega)^d, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{f}_{2n} \rightharpoonup \mathbf{f}_2 \quad \text{in } L^2(\Gamma_2)^d, \quad (4.6)$$

$$p_n \rightharpoonup p \quad \text{in } L^2(\Gamma_3), \quad (4.7)$$

$$g_n \rightarrow g. \quad (4.8)$$

Denote $\boldsymbol{\eta}_n = (\mathbf{f}_{0n}, \mathbf{f}_{2n}, p_n, g_n)$, which clearly belongs to Λ . With these data we consider the following perturbation of Problem \mathcal{P}^V .

Problem \mathcal{P}_n^V . Given $\boldsymbol{\eta}_n \in \Lambda$, find a stress field $\boldsymbol{\sigma}_n$ such that

$$\boldsymbol{\sigma}_n \in \Sigma(\boldsymbol{\eta}_n), \quad J(\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\eta}_n) \leq J(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}_n) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\boldsymbol{\eta}_n). \quad (4.9)$$

We have the following existence, uniqueness and convergence result.

Theorem 4.1. Assume (2.9)–(2.16), (4.1)–(4.4). Then, the following statement hold.

i) Problem \mathcal{P}^V has a unique solution $\boldsymbol{\sigma}$ and, for each $n \in \mathbb{N}$, Problem \mathcal{P}_n^V has a unique solution $\boldsymbol{\sigma}_n$.

ii) If (4.5)–(4.8) hold, then the sequence $\{\boldsymbol{\sigma}_n\}$ converges strongly to $\boldsymbol{\sigma}$, i.e., $\boldsymbol{\sigma}_n \rightarrow \boldsymbol{\sigma}$ in X .

To provide the proof of Theorem 4.1 we need some preliminary results that we present in what follows. First, we note that assumption (2.9) on the elasticity tensor implies that the bilinear form a is symmetric, continuous and coercive with constant $m_{\mathcal{A}}$. Therefore,

$$\boldsymbol{\sigma}_k \rightarrow \boldsymbol{\sigma} \text{ in } Q, \quad \boldsymbol{\tau}_k \rightarrow \boldsymbol{\tau} \text{ in } Q \quad \Longrightarrow \quad a(\boldsymbol{\sigma}_k, \boldsymbol{\tau}_k) \rightarrow a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}). \quad (4.10)$$

$$a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) \geq m_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{\tau}\|_Q^2 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in Q. \quad (4.11)$$

This implies that the function $\boldsymbol{\tau} \mapsto a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau})$ is weakly lower semicontinuous on X , i.e.,

$$\boldsymbol{\tau}_k \rightharpoonup \boldsymbol{\tau} \text{ in } Q \quad \Longrightarrow \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} a(\boldsymbol{\tau}_k, \boldsymbol{\tau}_k) \geq a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}). \quad (4.12)$$

On the other hand, it is easy to see that the function j is convex and continuous and, therefore weakly lower semicontinuous. Hence,

$$\boldsymbol{\tau}_k \rightharpoonup \boldsymbol{\tau} \text{ in } Q \quad \Longrightarrow \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} j(\boldsymbol{\tau}_k) \geq j(\boldsymbol{\tau}), \quad (4.13)$$

$$\boldsymbol{\tau}_k \rightarrow \boldsymbol{\tau} \text{ in } Q \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} j(\boldsymbol{\tau}_k) = j(\boldsymbol{\tau}). \quad (4.14)$$

We are now in position to provide the proof of Theorem 4.1.

Proof. We shall use Theorem 3.3 with $X = Q$ and $K(\cdot) = \Sigma(\cdot)$, Λ and J being defined by (2.19) and (2.23), respectively. To this end, in what follows we check the validity of assumptions of this theorem.

First, it is easy to see that the set Λ is a nonempty closed convex subset of Y which implies that condition (Λ) holds. On the other hand, for each $\boldsymbol{\eta} \in \Lambda$ the set $\Sigma(\boldsymbol{\eta})$ is a closed convex subset of Q and, moreover, since

$$(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta})), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q = (\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}), \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

we deduce that $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta})) \in \Sigma(\boldsymbol{\eta})$. Therefore, condition (\tilde{K}) is satisfied. In addition, a simple calculation based on the definitions (2.17)–(2.18), the properties of the form a and the convexity of the function j shows that

$$(1-t)J(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) + tJ(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) - J((1-t)\boldsymbol{\sigma} + t\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) \geq \frac{1}{2}t(1-t)a(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau})$$

for all $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in X$, $\boldsymbol{\eta} \in \Lambda$, $t \in [0, 1]$. We combine this inequality with inequality (4.11) to see that condition (J^*) holds.

Assume now that $\{\boldsymbol{\sigma}_k\} \subset Q$ and $\{\boldsymbol{\eta}_k\} \subset \Lambda$ are two sequences such that $\boldsymbol{\sigma}_k \rightharpoonup \boldsymbol{\sigma}$ in Q , $\boldsymbol{\eta}_k = (\mathbf{f}_{0k}, \mathbf{f}_{2k}, p_k, g_k) \rightharpoonup \boldsymbol{\eta} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, p, g)$ in Y and let $\boldsymbol{\tau} \in Q$. Since

$$J(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}_k) - J(\boldsymbol{\sigma}_k, \boldsymbol{\eta}_k) = \frac{1}{2}a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) - \frac{1}{2}a(\boldsymbol{\sigma}_k, \boldsymbol{\sigma}_k) + j(\boldsymbol{\tau}) - j(\boldsymbol{\sigma}_k) - (\boldsymbol{\varepsilon}(g_k \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}_k)_Q,$$

using (4.12), (4.13) and the convergence $g_k \rightarrow g$, we deduce that

$$\begin{aligned} & \limsup_{k \rightarrow \infty} [J(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}_k) - J(\boldsymbol{\sigma}_k, \boldsymbol{\eta}_k)] \\ & \leq \frac{1}{2} a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) - \frac{1}{2} \liminf_{k \rightarrow \infty} a(\boldsymbol{\sigma}_k, \boldsymbol{\sigma}_k) + j(\boldsymbol{\tau}) - \liminf_{k \rightarrow \infty} j(\boldsymbol{\sigma}_k) - (\boldsymbol{\varepsilon}(g\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})_Q \\ & \leq \frac{1}{2} a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) - \frac{1}{2} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) + j(\boldsymbol{\tau}) - j(\boldsymbol{\sigma}) - (\boldsymbol{\varepsilon}(g\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})_Q = J(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) - J(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}). \end{aligned}$$

It follows from here that condition (J_1) is satisfied.

On the other hand, for any sequences $\{\boldsymbol{\sigma}_k\} \subset Q$ and $\{\boldsymbol{\eta}_k\} \subset \Lambda$, using inequality (4.11) and the positivity of j we have

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{\sigma}_k, \boldsymbol{\eta}_k) &= \frac{1}{2} a(\boldsymbol{\sigma}_k, \boldsymbol{\sigma}_k) + j(\boldsymbol{\sigma}_k) - (\boldsymbol{\varepsilon}(g_k\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\sigma}_k)_Q \quad (4.15) \\ &\geq \frac{m_A}{2} \|\boldsymbol{\sigma}_k\|_Q^2 - g_k \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})\|_Q \|\boldsymbol{\sigma}_k\|_Q. \end{aligned}$$

Assume now that $\boldsymbol{\eta}_k \rightarrow \boldsymbol{\eta}$ in Y . Then $\{\boldsymbol{\eta}_k\}$ is bounded in Y which implies that $\{g_k\}$ is bounded in \mathbb{R} . Therefore, if $\|\boldsymbol{\sigma}_k\|_Q \rightarrow \infty$, inequality (4.15) shows that $J(\boldsymbol{\sigma}_k, \boldsymbol{\eta}_k) \rightarrow \infty$. We conclude from above that condition (J_2) is satisfied, too.

Let $\{\boldsymbol{\eta}_k\} \subset \Lambda$ be a sequence such that $\boldsymbol{\eta}_k \rightarrow \boldsymbol{\eta}$ in Y and let $\boldsymbol{\tau} \in Q$. We have

$$J(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}_k) - J(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) = (g - g_k)(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\tau})$$

and, using the convergence $g_k \rightarrow g$ we obtain that $J(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}_k) - J(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) \rightarrow 0$ which shows that condition (J_3) holds.

Assume now that $\{\boldsymbol{\tau}_k\} \subset Q$ and $\{\boldsymbol{\eta}_k\} \subset \Lambda$ are two sequences such that $\boldsymbol{\tau}_k \rightarrow \boldsymbol{\tau}$ in Q and $\boldsymbol{\eta}_k \rightarrow \boldsymbol{\eta}$ in Y . We have

$$J(\boldsymbol{\tau}_k, \boldsymbol{\eta}_k) - J(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}_k) = \frac{1}{2} a(\boldsymbol{\tau}_k, \boldsymbol{\tau}_k) - \frac{1}{2} a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) + j(\boldsymbol{\tau}_k) - j(\boldsymbol{\tau}) - g_k(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\tau}_k - \boldsymbol{\tau})_Q$$

and, using the convergences (4.10) and (4.14), we deduce that

$$J(\boldsymbol{\tau}_k, \boldsymbol{\eta}_k) - J(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}_k) \rightarrow 0,$$

which shows that condition (J_4) holds.

Assume in what follows that (4.5)–(4.8) hold. Then

$$\boldsymbol{\eta}_n = (\boldsymbol{f}_{0n}, \boldsymbol{f}_{2n}, p_n, g_n) \rightarrow \boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{f}_2, p, g) \quad \text{in } Y, \quad (4.16)$$

which shows that condition (3.3) holds, too.

We now prove that

$$\Sigma(\boldsymbol{\eta}_n) \xrightarrow{M} \Sigma(\boldsymbol{\eta}) \quad \text{in } Q. \quad (4.17)$$

To this end, we introduce the sets

$$U_0 = \{ \mathbf{v} \in V : v_\nu \leq 0, \text{ a.e. on } \Gamma_3 \}, \quad (4.18)$$

$$\Sigma_0 = \{ \boldsymbol{\tau} \in Q : (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in U_0 \}. \quad (4.19)$$

Then, it is easy to see that $\mathbf{v} \in U(\boldsymbol{\eta})$ if and only if $\mathbf{v} - g\boldsymbol{\theta} \in U_0$ and, therefore, definition (2.22) implies that $\boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\boldsymbol{\eta})$ if and only if $\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta})) \in \Sigma_0$. We conclude from here that

$$\Sigma(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta})) + \Sigma_0, \quad (4.20)$$

$$\Sigma(\boldsymbol{\eta}_n) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}_n)) + \Sigma_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.21)$$

Let $\boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\boldsymbol{\eta})$. Then, using (4.20) it follows that there exists an element $\boldsymbol{\tau}_0 \in \Sigma_0$ such that $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta})) + \boldsymbol{\tau}_0$. Define $\boldsymbol{\tau}_n = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}_n)) + \boldsymbol{\tau}_0$ and note that (4.21) shows that $\boldsymbol{\tau}_n \in \Sigma(\boldsymbol{\eta}_n)$. Moreover, an elementary calculus combined with definition (2.20) show that

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\tau}_n - \boldsymbol{\tau}\|_Q^2 &= \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}_n)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}))\|_Q^2 = \|\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}_n) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta})\|_V^2 \\ &= (\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}_n), \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}_n) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}))_V - (\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}), \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}_n) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}))_V \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{f}_{0n} - \mathbf{f}_0) \cdot (\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}_n) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta})) \, dx + \int_{\Gamma_2} (\mathbf{f}_{2n} - \mathbf{f}_2) \cdot (\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}_n) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta})) \, da \\ &\quad - \int_{\Gamma_3} (p_n - p)(\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}_n) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}))_\nu \, da. \end{aligned}$$

Note that (4.16) imply that $\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}_n) \rightharpoonup \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta})$ in V and, using the compactness of the trace operator, it follows that $\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}_n) \rightarrow \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta})$ in V , $\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}_n) \rightarrow \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta})$ in $L^2(\Gamma_2)^d$ and $(\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}_n) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}))_\nu \rightarrow 0$ in $L^2(\Gamma_3)^d$. Therefore, using the previous equality it is easy to see that $\|\boldsymbol{\tau}_n - \boldsymbol{\tau}\|_Q^2 \rightarrow 0$ which shows that condition (M_1) in Definition 3.1 is satisfied.

Assume now that $\boldsymbol{\tau}_n \in \Sigma(\boldsymbol{\eta}_n)$ such that $\boldsymbol{\tau}_n \rightharpoonup \boldsymbol{\tau}$ in Q . Then $\boldsymbol{\tau}_n = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}_n)) + \boldsymbol{\tau}_0$ with $\boldsymbol{\tau}_0 \in \Sigma_0$ and, since $\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}_n) \rightharpoonup \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta})$ in V we deduce that $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}_n)) \rightharpoonup \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}))$ in Q . It follows from here that $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta})) + \boldsymbol{\tau}_0$ and, using (4.21) we deduce that $\boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\boldsymbol{\eta})$. This shows that condition (M_2) in Definition 3.1 is satisfied and, therefore, the convergence (4.17) holds.

To conclude, it follows from above that conditions (Λ) , (\tilde{K}) , (J_1) – (J_4) , (J^*) , (3.3) and (3.4) hold. Theorem 4.1 is now a direct consequence of Theorem 3.3. \square

Note that Theorem 4.1 provides the unique weak solvability of Problem \mathcal{P} . In addition, it shows that the weak solution of this contact problem depends continuously on the densities of the applied forces, the given pressure and the gap g , which is important from mechanical point of view.

5 An optimal control problem

Theorem 3.2 can be used in the study of optimal control problems associated to the contact Problem \mathcal{P} . Several examples can be considered. Nevertheless, we restrict ourselves in this section to the study of a representative example, i.e., a boundary control problem in which the control is the function p , interpreted as the pressure of the fluid which covers the obstacle.

Below in this section, in contrast with the previous section, we consider the product Hilbert space $Y = L^2(\Omega)^d \times L^2(\Gamma_2)^d \times \mathbb{R}$, endowed with the canonical inner product $(\cdot, \cdot)_Y$ and the associated norm $\|\cdot\|_Y$. A generic element of Y will be denoted by $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, g)$. Moreover, we use the notation Λ for the set

$$\Lambda = \{ \boldsymbol{\xi} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, g) \in Y : g \geq 0 \} \quad (5.1)$$

and let W be a given set such that

$$W \subset \{ p \in L^2(\Gamma_3) : p(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma_3 \}.$$

Let $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, g)$ and $p \in W$ be given and denote by $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, p, g) = \boldsymbol{\sigma}(p, \boldsymbol{\xi})$ the solution of Problem \mathcal{P}^V , under the assumption of Theorem 4.1. With these notation, we define the set of admissible pairs for Problem \mathcal{P}^V by equality

$$\mathcal{V}_{ad}(\boldsymbol{\xi}) = \{ (\boldsymbol{\sigma}, p) : p \in W \text{ and } \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(p, \boldsymbol{\xi}) \}. \quad (5.2)$$

In other words, a pair $(\boldsymbol{\sigma}, p)$ belongs to $\mathcal{V}_{ad}(\boldsymbol{\xi})$ if and only if $p \in W$ and, moreover, $\boldsymbol{\sigma}$ is the solution of Problem \mathcal{P}^V with $\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, p, g)$. Consider also a cost functional $\mathcal{L} : Q \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow \mathbb{R}$. Then, the optimal control problem we are interested in is the following.

Problem Q. Given $\boldsymbol{\xi} \in \Lambda$, find $(\boldsymbol{\sigma}^*, p^*) \in \mathcal{V}_{ad}(\boldsymbol{\xi})$ such that

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}^*, p^*) = \min_{(\boldsymbol{\sigma}, p) \in \mathcal{V}_{ad}(\boldsymbol{\xi})} \mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}, p). \quad (5.3)$$

To solve Problem Q we consider the following assumptions.

$$W \text{ is a nonempty weakly closed subset of } L^2(\Gamma_3). \quad (5.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{For all sequences } \{\boldsymbol{\sigma}_k\} \subset Q \text{ and } \{p_k\} \subset L^2(\Gamma_3) \text{ such that} \\ \boldsymbol{\sigma}_k \rightharpoonup \boldsymbol{\sigma} \text{ in } Q, \ p_k \rightharpoonup p \text{ in } L^2(\Gamma_3) \text{ we have} \\ \text{(a) } \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}_k, p_k) \geq \mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}, p). \\ \text{(b) } \lim_{k \rightarrow \infty} [\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}_k, p_k) - \mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}, p_k)] = 0. \end{array} \right. \quad (5.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{There exists } h : L^2(\Gamma_3) \rightarrow \mathbb{R} \text{ such that} \\ \text{(a) } \mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}, p) \geq h(p) \ \forall \boldsymbol{\sigma} \in Q, \ p \in L^2(\Gamma_3). \\ \text{(b) } \|p_n\|_{L^2(\Gamma_3)} \rightarrow +\infty \implies h(p_n) \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Example 5.1. A typical example of function \mathcal{L} which satisfies conditions (5.5)–(5.6) is obtained by taking

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}, p) = f(\boldsymbol{\sigma}) + h(p) \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in Q, p \in L^2(\Gamma_3)$$

where $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous positive function and $h : L^2(\Gamma_3) \rightarrow \mathbb{R}$ is a lower semicontinuous coercive function, i.e., it satisfies condition (5.6)(b). We conclude that our results below are valid for such type of cost functionals.

Next, for each $n \in \mathbb{N}$ we consider a perturbation $\boldsymbol{\xi}_n = (\mathbf{f}_{0n}, \mathbf{f}_{2n}, g_n) \in \Lambda$ of $\boldsymbol{\xi}$. With these data we consider the following perturbation of Problem \mathcal{Q} .

Problem \mathcal{Q}_n . Given $\boldsymbol{\xi}_n \in \Lambda$, Find $(\boldsymbol{\sigma}_n^*, p_n^*) \in \mathcal{V}_{ad}(\boldsymbol{\xi}_n)$ such that

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}_n^*, p_n^*) = \min_{(\boldsymbol{\sigma}, p) \in \mathcal{V}_{ad}(\boldsymbol{\xi}_n)} \mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}, p). \quad (5.7)$$

Note that in the statement of this problem, the set of admissible pairs is defined by

$$\mathcal{V}_{ad}(\boldsymbol{\xi}_n) = \{ (\boldsymbol{\sigma}, p) : p \in W \text{ and } \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(p, \boldsymbol{\xi}_n) \}. \quad (5.8)$$

We have the following existence, uniqueness and convergence result.

Theorem 5.2. Assume (2.9)–(2.16), (4.1)–(4.4) and (5.4)–(5.6). Then, the following statement hold.

i) Problem \mathcal{Q} has at least one solution $(\boldsymbol{\sigma}^*, p^*)$ and, for each $n \in \mathbb{N}$, Problem \mathcal{Q}_n has at least one solution $(\boldsymbol{\sigma}_n^*, p_n^*)$.

ii) If (4.5), (4.6), (4.8) hold and $(\boldsymbol{\sigma}_n^*, p_n^*)$ is a solution of Problem \mathcal{Q}_n , for each $n \in \mathbb{N}$, then there exists a subsequence of the sequence $\{(\boldsymbol{\sigma}_n^*, p_n^*)\}$, again denoted $\{(\boldsymbol{\sigma}_n^*, p_n^*)\}$, and an element $(\boldsymbol{\sigma}^*, p^*)$, such that

$$\boldsymbol{\sigma}_n^* \rightarrow \boldsymbol{\sigma}^* \quad \text{in } Q. \quad (5.9)$$

$$p_n^* \rightarrow p^* \quad \text{in } L^2(\Gamma_3). \quad (5.10)$$

Moreover, $(\boldsymbol{\sigma}^*, p^*)$ is a solution to Problem \mathcal{Q} .

To provide the proof of Theorem 5.2 we need some preliminary results that we present in what follows. First, for each $\boldsymbol{\xi} \in \Lambda$ we consider the function $J(\cdot, \boldsymbol{\xi}) : L^2(\Gamma_3) \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$J(p, \boldsymbol{\xi}) = \mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}(p, \boldsymbol{\xi}), p) \quad \forall p \in L^2(\Gamma_3), \quad (5.11)$$

together with the following auxiliary problem.

Problem \mathcal{R} . Given $\boldsymbol{\xi} \in \Lambda$, find $p^* \in W$ such that

$$J(p^*, \boldsymbol{\xi}) = \min_{p \in W} J(p, \boldsymbol{\xi}). \quad (5.12)$$

Then, using the definitions (5.11) and (5.2) it is easy to see that

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\sigma}^*, p^*) \text{ is a solution of Problem } \mathcal{Q} \text{ if and only if} \\ p^* \text{ is a solution of Problem } \mathcal{R} \text{ and } \boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}(p^*, \boldsymbol{\xi}). \end{cases} \quad (5.13)$$

Next, for each $n \in \mathbb{N}$ we consider the following problem.

Problem \mathcal{R}_n . Given $\boldsymbol{\xi}_n \in \Lambda$, find $p_n^* \in W$ such that

$$J(p_n^*, \boldsymbol{\xi}_n) = \min_{p \in W} J(p, \boldsymbol{\xi}_n). \quad (5.14)$$

Then, using again (5.11) and definition (5.8) it is easy to see that

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\sigma}_n^*, p_n^*) \text{ is a solution of Problem } \mathcal{Q}_n \text{ if and only if} \\ p_n^* \text{ is a solution of Problem } \mathcal{R}_n \text{ and } \boldsymbol{\sigma}_n^* = \boldsymbol{\sigma}(p_n^*, \boldsymbol{\xi}_n). \end{cases} \quad (5.15)$$

We are now in position to provide the proof of Theorem 5.2.

Proof. We shall use Theorem 3.2 with $X = L^2(\Gamma_3)$ and $K(\cdot) = W$, Λ and J defined by (5.1) and (5.11), respectively. To this end, in what follows we check the validity of assumptions in Theorem 3.2

First, it is easy to see that the set Λ is a nonempty closed convex subset of Y which implies that condition (A) holds. On the other hand, assumption (5.4) guarantees that condition (K) is satisfied and, since W does not depend on $\boldsymbol{\xi}$, we deduce that condition (K*) holds, too.

Assume now that $\{p_k\} \subset L^2(\Gamma_3)$ and $\{\boldsymbol{\xi}_k\} \subset \Lambda$ are two sequences such that $p_k \rightarrow p$ in $L^2(\Gamma_3)$, $\boldsymbol{\xi}_k = (\mathbf{f}_{0k}, \mathbf{f}_{2k}, g_k) \rightarrow \boldsymbol{\xi} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, g)$ in Y and let $q \in L^2(\Gamma_3)$. Then, using (5.11) we have

$$J(q, \boldsymbol{\xi}_k) - J(p_k, \boldsymbol{\xi}_k) = \mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}(q, \boldsymbol{\xi}_k), q) - \mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}(p_k, \boldsymbol{\xi}_k), p_k). \quad (5.16)$$

Note also that Theorem 4.1 guarantees the convergences $\boldsymbol{\sigma}(q, \boldsymbol{\xi}_k) \rightarrow \boldsymbol{\sigma}(q, \boldsymbol{\xi})$ in Q , $\boldsymbol{\sigma}(p_k, \boldsymbol{\xi}_k) \rightarrow \boldsymbol{\sigma}(p, \boldsymbol{\xi})$ in Q . Here, $g_k \rightarrow g$, but in Theorem 4.1, one important condition is $g_k \rightarrow g$. Therefore, assumption (5.5) and definition (5.11) imply that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}(q, \boldsymbol{\xi}_k), q) = \mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}(q, \boldsymbol{\xi}), q) = J(q, \boldsymbol{\xi}), \quad (5.17)$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} [-\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}(p_k, \boldsymbol{\xi}_k), p_k)] \leq -\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}(p, \boldsymbol{\xi}), p) = -J(p, \boldsymbol{\xi}). \quad (5.18)$$

We now pass to the upper limit in (5.16) and use relations (5.17), (5.18) to find that

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} [J(q, \boldsymbol{\xi}_k) - J(p_k, \boldsymbol{\xi}_k)] \leq J(q, \boldsymbol{\xi}) - J(p, \boldsymbol{\xi}),$$

which shows that condition (J_1) is satisfied.

On the other hand, for any sequences $\{p_k\} \subset X$ and $\{\boldsymbol{\xi}_k\} \subset \Lambda$, using inequality (5.6)(a) we have

$$J(p_k, \boldsymbol{\xi}_k) = \mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}(p_k, \boldsymbol{\xi}_k), p_k) \geq h(p_k).$$

Therefore, if $\|p_k\|_{L^2(\Gamma_3)} \rightarrow \infty$, from (5.6)(b) we deduce that $J(p_k, \boldsymbol{\xi}_k) \rightarrow \infty$ which shows that condition (J_2) is satisfied, too.

Let $\{\boldsymbol{\xi}_k\} \subset \Lambda$ be a sequence such that $\boldsymbol{\xi}_k \rightharpoonup \boldsymbol{\xi}$ in Y and let $q \in L^2(\Gamma_3)$. We have

$$J(q, \boldsymbol{\xi}_k) - J(q, \boldsymbol{\xi}) = \mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}(q, \boldsymbol{\xi}_k), q) - \mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}(q, \boldsymbol{\xi}), q)$$

and, using the convergence $\boldsymbol{\sigma}(q, \boldsymbol{\xi}_k) \rightarrow \boldsymbol{\sigma}(q, \boldsymbol{\xi})$, guaranteed by Theorem 4.1, we deduce by assumption (5.5)(b) that

$$J(q, \boldsymbol{\xi}_k) - J(q, \boldsymbol{\xi}) \rightarrow 0.$$

This shows that condition (J_3) holds.

Note also that, if (4.5), (4.6), (4.8) hold, then $\boldsymbol{\xi}_n = (\mathbf{f}_{0n}, \mathbf{f}_{2n}, g_n) \rightharpoonup \boldsymbol{\xi} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, g)$ in Y , which shows that condition (3.3) holds.

We conclude from above that all the assumptions (Λ) , (K) , (J_1) , (J_2) , (3.3), (K^*) , (J_3) of Theorem 3.2 are valid the study of the optimization problems \mathcal{Q} and \mathcal{Q}_n . Theorem 5.2 is now a direct consequence of Theorem 3.2, combined with the equivalences (5.13) and (5.15) and the convergence result in Theorem 4.1. \square

We end this section with two examples of optimal control problems for which the result provided by Theorem 5.2 hold. In both examples, for a given $\boldsymbol{\sigma} \in Q$ we denote by $\mathbf{u}(\boldsymbol{\sigma})$ the unique displacement field $\mathbf{u} \in V$ associated to $\boldsymbol{\sigma}$ via the constitutive law (2.1). Note that the existence and uniqueness of \mathbf{u} follows arguments similar to those used in Theorem 5.13 in [28] and therefore, we skip its proof. Nevertheless, we recall that, under assumptions (2.9)–(2.15) the operator $\boldsymbol{\sigma} \mapsto \mathbf{u}(\boldsymbol{\sigma}) : Q \rightarrow V$ is Lipschitz continuous.

Example 5.3. *Let α and δ be strictly positive constants and let $\phi \in L^2(\Gamma_3)$ be given. Define*

$$W = \{p \in L^2(\Gamma_3) : p(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma_3\} \quad (5.19)$$

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}, p) = \alpha \int_{\Gamma_3} \|u_\nu(\boldsymbol{\sigma}) - \phi\|^2 da + \delta \int_{\Gamma_3} p^2 da \quad (5.20)$$

for all $(\boldsymbol{\sigma}, p) \in Q \times L^2(\Gamma_3)$. With this choice, the mechanical interpretation of Problem \mathcal{Q} is the following : we are looking for a surface pressure $p \in W$ acting on Γ_3 such that the corresponding normal displacement u_ν is as close as possible to the “desired displacement” ϕ . Furthermore, this choice has to fulfill a minimum expenditure condition which is taken into account by the last term in (5.20). Note that in this case conditions (5.4)–(5.6) are satisfied and, therefore, Theorem 5.2 can be applied to obtain that the corresponding Problem \mathcal{Q} has at least one solution.

Example 5.4. Let $W(\cdot)$ be defined by (5.19), $\alpha > 0$, $\delta > 0$ and let

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}, p) = \alpha \int_{\Omega} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\sigma}))\|^2 dx + \delta \int_{\Gamma_3} p^2 da \quad (5.21)$$

for all $(\boldsymbol{\sigma}, p) \in Q \times L^2(\Gamma_3)$. With this choice, the mechanical interpretation of Problem \mathcal{Q} is the following : we are looking for a surface pressure p acting on Γ_3 such that the corresponding deformation in the body is as small as possible. And, again, this choice has to fulfill a minimum expenditure condition which is taken into account by the last term in (5.21). Note that in this case conditions (5.4)–(5.6) are satisfied and, therefore, Theorem 5.2 guarantees the existence of at least one solution of the corresponding optimal control problem.

6 Conclusion

We studied an abstract optimization problem for which we provided existence, uniqueness and convergence results. The proofs were based on arguments of monotonicity, lower semicontinuity and Mosco convergence. To illustrate the usefulness of these abstract results, we applied them in the study of the analysis and control of a mathematical model which describes the equilibrium of an elastic body in frictionless contact with an obstacle, the so-called foundation.

The study presented in this paper give rise to several open problems that we describe in what follows. Any progress in these directions will complete our work and will open the way for new advances and ideas. First, it would be interesting to derive necessary optimality conditions in the study of Problem \mathcal{Q} . Due to the nonsmooth and nonconvex feature of the functional \mathcal{L} , the treatment of this problem requires the use of its approximation by smooth optimization problems. And, in this matter, the abstract convergence results for the optimal pairs in this paper could be a crucial tool. Another interesting continuation of the results presented in this paper would be their extension to frictional models of contact. Such models lead, in general, to variational and hemivariational inequalities in which the unknown is the displacement field. Considering optimal control for quasistatic or dynamic models of contact would be another problem which deserves future research. Such models lead to evolutionary variational, hemivariational or variational-hemivariational inequalities, as shown in the recent references [21, 29].

References

- [1] A. Amassad, D. Chenais and C. Fabre, Optimal control of an elastic contact problem involving Tresca friction law, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* 48 (2002), 1107–1135.

- [2] M. Barboteu, X. Cheng and M. Sofonea, Analysis of a Contact Problem with Unilateral Constraint and Slip-dependent Friction, *Mathematics and Mechanics of Solids* 21 (2016), 791–811.
- [3] A. Benraouda, M. Couderc and M. Sofonea, Analysis and Control of a Contact Problem with Unilateral Constraints, *Nonlinear Differential Equations and Applications*, submitted.
- [4] A. Capatina, *Variational Inequalities Frictional Contact Problems*, Advances in Mechanics and Mathematics, Vol. 31, Springer, New York, 2014.
- [5] P.G. Ciarlet, B. Miara and J.-M. Thomas, *Introduction to Numerical Linear Algebra and Optimisation*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [6] M. Cocu, Existence of solutions of Signorini problems with friction, *International Journal of Engineering Science* **22** (1984), 567–581.
- [7] M. Couderc and M. Sofonea, An elastic frictional contact problem with unilateral constraint, submitted.
- [8] H.B. Chen, Y.J. Wang and G. Wang, Strong convergence of extragradient method for generalized variational inequalities in Hilbert space, *Journal of Inequalities and Applications*, **223** (2014).
- [9] G. Duvaut and J.-L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [10] C. Eck, J. Jarušek and M. Krbeč, *Unilateral Contact Problems: Variational Methods and Existence Theorems*, Pure and Applied Mathematics **270**, Chapman/CRC Press, New York, 2005.
- [11] I. Ekeland and R. Temam, *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1976.
- [12] R. Glowinski, *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [13] W. Han and M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, Studies in Advanced Mathematics **30**, American Mathematical Society, Providence, RI–International Press, Somerville, MA, 2002.
- [14] P. Kalita, S. Migorski and M. Sofonea, A Class of Subdifferential Inclusions for Elastic Unilateral Contact Problems, *Set-Valued and Variational Analysis* **24** (2016), 355–379.
- [15] N. Kikuchi and J.T. Oden, *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia, 1988.

- [16] J. Lu, Y.B. Xiao and N.J. Huang, A Stackelberg quasi-equilibrium problem via quasi-variational inequalities, *Carpathian Journal of Mathematics*, (2017), to appear.
- [17] W. Li, Y.B. Xiao, N.J. Huang and Y.J. Cho, A class of differential inverse quasi-variational inequalities in finite dimensional spaces, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, **10** (2017), 4532–4543.
- [18] A. Matei and S. Micu, Boundary optimal control for nonlinear antiplane problems, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* **74** (2011), 1641–1652.
- [19] A. Matei and S. Micu, Boundary optimal control for nonlinear antiplane problems, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* **74** (2011), 1641–1652.
- [20] A. Matei and M. Sofonea, Dual formulation of a viscoplastic contact problem with unilateral constraint, *Discrete and Continuous Dynamic Systems - Series S* **6** (2013), 1587–1598.
- [21] S. Migórski, A. Ochal and M. Sofonea, *Nonlinear Inclusions and Hemivariational Inequalities. Models and Analysis of Contact Problems*, Advances in Mechanics and Mathematics **26**, Springer, New York, 2013.
- [22] U. Mosco, Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities, *Advances in Mathematics* **3** (1968), 510–585.
- [23] P.D. Panagiotopoulos, *Inequality Problems in Mechanics and Applications*, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [24] M. Sofonea and Y.B. Xiao, Fully history-dependent quasivariational inequalities in contact mechanics, *Applicable Analysis*, **95** (2016), 2464–2484.
- [25] M. Shillor, M. Sofonea and J.J. Telega, *Models and Analysis of Quasistatic Contact*, Lect. Notes Phys. **655**, Springer, Berlin, 2004.
- [26] M. Sofonea, Optimal control of variational-hemivariational inequalities, *Applied Mathematics and Optimization*, DOI: 10.1007/s00245-017-9450-0, to appear.
- [27] M. Sofonea, D. Danan and C. Zheng, Primal and Dual Variational Formulation of a Frictional Contact Problem, *Mediterranean Journal of Mathematics* **13** (2016), 857–872.
- [28] M. Sofonea and A. Matei, *Mathematical Models in Contact Mechanics*, London Mathematical Society Lecture Note Series **398**, Cambridge University Press, 2012.

- [29] M. Sofonea and S. Migórski, *Variational-Hemivariational Inequalities with Applications*, Pure and Applied Mathematics, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton-London, 2018.
- [30] R. Temam, *Problèmes mathématiques en plasticité*, Méthodes mathématiques de l'informatique **12**, Gauthiers Villars, Paris, 1983.
- [31] D. Tiba, *Optimal Control of Nonsmooth Distributed Parameter Systems*, Springer, Berlin, 1990.
- [32] A. Touzaline, Optimal control of a frictional contact problem, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series* **31** (2015), 991–1000.
- [33] Y.M. Wang, Y.B. Xiao, X. Wang and Y.J. Cho, Equivalence of well-posedness between systems of hemivariational inequalities and inclusion problems, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications* **9** (2016), 1178–1192.
- [34] Y.B. Xiao, N.J. Huang and Y. J. Cho, A class of generalized evolution variational inequalities in Banach space, *Applied Mathematics Letters*, **25** (2012), 914–920.
- [35] Y.B. Xiao, N.J. Huang and M.M. Wong, Well-posedness of hemivariational inequalities and inclusion problems, *Taiwanese Journal of Mathematics*, **15** (2011), 1261–1276.
- [36] W.X. Zhang, D.R. Han and S.L. Jiang, A modified alternating projection based prediction-correction method for structured variational inequalities, *Applied Numerical Mathematics*, **83** (2014), 12-21.

Optimization problems for a viscoelastic frictional contact problem with unilateral constraints

Mircea Sofonea¹, Yi-bin Xiao^{2*} and Maxime Couderc¹

¹ *Laboratoire de Mathématiques et Physique
University of Perpignan Via Domitia
52 Avenue Paul Alduy, 66860 Perpignan, France*

² *School of Mathematical Sciences
University of Electronic Science and Technology of China
Chengdu, Sichuan, 611731, PR China*

Abstract

We consider a mathematical model which describes the contact between a viscoelastic body and a rigid-deformable foundation with memory effects. We derive a variational formulation of the model which is in the form of a history-dependent variational inequality for the displacement field. Then we prove the existence of a unique weak solution to the problem. We also study the continuous dependence of the solution with respect to the data and prove two convergence results, under different assumptions on the data. The proofs are based on arguments of lower semicontinuity, pseudomonotonicity, and compactness. Finally, we use our convergence results in the study of several optimization problems associated to the viscoelastic contact model.

AMS Subject Classification: 74M15, 74M10, 74G25, 74G30, 49J20, 49J40.

Key words: viscoelastic material, frictional contact, unilateral constraint, weak solution, convergence results, optimization problems.

*Corresponding author, Email: xiaoyb9999@hotmail.com

1 Introduction

Process of contact between deformable bodies are very frequent in industry and daily life. A few simple examples are brake pads in contact with wheels, pistons with skirts, shoes with floor. Because of their importance in mechanical systems, industrial process and various real word application, a large effort has been put into the modeling, analysis and numerical simulations of contact process. The literature on this field is extensive, both the engineering and the mathematical one. The publications in mathematical literature deal with the variational analysis of various models of contact, which are expressed in terms of strongly elliptic, time dependent or evolutionary nonlinear boundary value problems. References in the field include [3, 4, 16, 17, 25, 1]. There, various existence and uniqueness results have been proved, by using the tools of variational and hemivariational inequalities which have been studied extensively in recent years (see, for example, [2, 10, 11, 26, 29, 30, 31, 33]). Once existence, uniqueness or nonuniqueness, and stability of solutions have been established, related important questions arise, such as the optimal control of contact problems, the numerical analysis of the solutions and how to construct reliable and efficient algorithms for their numerical approximations with guaranteed convergence. Results on optimal control for various contact problems with elastic materials could be found in [1, 2, 12, 14, 15, 19, 20, 22, 23, 28]. References on numerical analysis of contact problems within the framework of linearized strain theory include [5, 6, 7, 8].

The optimal shape design of contact processes represents a topic of considerable theoretical and applied interest. Indeed, in most applications this is the main interest of the design engineer. Related issues are the observability properties of the contact models and parameter identification. The need to study the continuous dependence of the solution to contact problems with respect to the data and parameters is currently widely recognized, since it plays a crucial role in solving control and optimal design problems related to various mechanical structures. Unfortunately, there are quite few results in the literature related to this topic. The reason arises from the intrinsic structure of the contact models, which usually involve both nonlinear operators, unilateral constraints and nondifferentiable functionals which depend on those parameters.

Our aim in this paper is to study some optimization problems in the study of a quasistatic frictional contact problem with viscoelastic materials. The problem describes the contact with a rigid-deformable foundation and takes into account its memory effects, which represents the first trait of novelty of this paper. Besides the densities of body forces and tractions, denoted by \mathbf{f}_0 and \mathbf{f}_2 , the model is governed by two positive parameters, g and μ , which represent the thickness of the deformable layer of the foundation and the coefficient of friction, respectively. We state the contact problem and provide its variational formulation, which is in a form of a history-dependent variational inequality for the displacement field. Then we prove its unique weak solvability. Next, we state and prove a convergence result of the

solution with respect to the data \mathbf{f}_0 , \mathbf{f}_2 and parameters g and μ , which represents the second trait of novelty of this paper. Finally, we use this convergence result in order to prove the solvability of some optimization problems related to our contact model, which represents the third novelty of our paper. The theoretical results we present here illustrate the cross fertilization between models and applications, on one hand, and the nonlinear functional analysis, on the other hand. Moreover, they could be used in the optimal design for contact processes in real word as well as in the study of their optimal control.

The rest of the paper is structured as follows. In Section 2 we introduce the contact model. Then, in Section 3 we list the assumptions on the data, derive a variational formulation of the contact model and prove its unique weak solvability. The proof is based on arguments of history-dependent variational inequalities presented in [18]. In Section 4 we study the continuous dependence of the solution with respect to the data and prove a convergence result. The proof is based on arguments of monotonicity, pseudomonotonicity and compactness. Finally, in Section 5 we introduce two classes of optimization problems related to the contact model and provide their solvability. The proofs are based on the convergence result in Section 4, combined with a Weierstrass-type argument.

2 The contact model

We consider a viscoelastic body which occupies the domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), with smooth boundary Γ . The boundary Γ is divided into three measurable disjoint parts Γ_1 , Γ_2 and Γ_3 such that $meas(\Gamma_1) > 0$. The body is fixed on Γ_1 , is acted upon by time-dependent surface traction on Γ_2 and is in frictional contact on Γ_3 with a rigid-deformable obstacle, the so-called foundation. The contact process is quasistatic and the time interval of interest is $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. We denote by \mathbb{S}^d the space of second order symmetric tensors on \mathbb{R}^d or, equivalently, the space of symmetric matrices of order d . The inner product, norm and zero element of the spaces \mathbb{R}^d and \mathbb{S}^d will be denoted by “ \cdot ”, $\|\cdot\|$ and $\mathbf{0}$, respectively. Moreover, we use the index ν and τ for the normal and tangential components of vectors and tensors, respectively. Then, the mathematical model we use to describe the equilibrium of the body in this physical setting is the following.

Problem \mathcal{P} . Find a displacement field $\mathbf{u} = (u_i): \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$, a stress field $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}): \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{S}^d$ and two interface functions $\eta_\nu: \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi_\nu: \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ such that, for all $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) ds \quad \text{in } \Omega, \quad (2.1)$$

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0(t) = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_1, \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2(t) \quad \text{on } \Gamma_2, \quad (2.4)$$

$$\left. \begin{aligned} u_\nu(t) &\leq g, \\ \sigma_\nu(t) + \eta_\nu(t) + \xi_\nu(t) &\leq 0, \\ (u_\nu(t) - g)(\sigma_\nu(t) + \eta_\nu(t) + \xi_\nu(t)) &= 0, \\ 0 \leq \eta_\nu(t) &\leq F\left(\int_0^t u_\nu^+(s) ds\right), \\ \eta_\nu(t) &= \begin{cases} 0 & \text{if } u_\nu(t) < 0, \\ F\left(\int_0^t u_\nu^+(s) ds\right) & \text{if } u_\nu(t) > 0, \end{cases} \\ \xi_\nu(t) &= p(u_\nu(t)) \end{aligned} \right\} \quad \text{on } \Gamma_3, \quad (2.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\| &\leq \mu p(u_\nu(t)), \\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) &= \mu p(u_\nu(t)) \frac{\mathbf{u}_\tau(t)}{\|\mathbf{u}_\tau(t)\|} \quad \text{if } \mathbf{u}_\tau(t) \neq \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad \text{on } \Gamma_3. \quad (2.6)$$

We now provide a description of the equations and boundary conditions in Problem \mathcal{P} where, for simplicity, we do not mention the dependence of various functions with respect to the spatial variable $\mathbf{x} \in \Omega \cup \Gamma$.

First, equation (2.1) represents the viscoelastic constitutive law of the material in which \mathcal{A} is the elasticity operator and \mathcal{B} is the relaxation tensor. Equation (2.2) is the equation of equilibrium in which \mathbf{f}_0 denotes the density of body forces, assumed to be time-dependent. We use it here since we neglect the inertial term in the equation of motion. Conditions (2.3), (2.4) represent the displacement and traction boundary conditions, respectively, where $\boldsymbol{\nu}$ denotes the unit outward normal to Γ and \mathbf{f}_2 represents the density of surface tractions which, again, are assumed to be time-dependent.

Next, condition (2.5) represents the contact condition in which $g > 0$, p and F are given positive functions which will be described below and r^+ represents the positive part of r , i.e., $r^+ = \max\{r, 0\}$. This condition was introduced in [26, p. 247] and used in the study of a time-dependent frictionless contact problem with elastic materials. There, various mechanical interpretations can be found and, for this reason we do not

provide here the physical assumptions which lead to this boundary condition. We restrict ourselves to mention that it models the contact with a foundation made of a rigid body covered by a rigid-deformable layer of thickness g which involves memory effects. The function p represents the normal compliance function (which depends on the current penetration) and F represents the yield limit (assumed to depend on the accumulated penetration).

Finally, condition (2.6) represents a version of the Coulomb's law of dry friction, in which $\mu \geq 0$ denotes the coefficient of friction. Details and mechanical interpretation concerning this law can be found in [21, 25] and the references therein. Here we restrict ourselves to mention that this law describes a transition between the classical version of Coulomb's law (which governs the contact with the rigid-deformable layer) and the Tresca friction law (which governs the contact with the rigid body).

In the analysis of Problem \mathcal{P} , besides the standard Lebesgue and Sobolev spaces associated to Ω and Γ , we use the spaces

$$\begin{aligned} V &= \{ \mathbf{v} = (v_i) \in H^1(\Omega)^d : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_1 \}, \\ Q &= \{ \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) : \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) \}. \end{aligned}$$

These are real Hilbert spaces endowed with the canonical inner products given by

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx, \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_Q = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx, \quad (2.7)$$

and the associated norms $\|\cdot\|_V$ and $\|\cdot\|_Q$, respectively. Here, $\boldsymbol{\varepsilon} : V \rightarrow Q$ represents the linearized deformation operator, that is

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v} \right) \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

For an element $\mathbf{v} \in V$ we still write \mathbf{v} for the trace of \mathbf{v} to Γ . Moreover, the normal and tangential components of \mathbf{v} on Γ are given by $v_\nu = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}$ and $\mathbf{v}_\tau = \mathbf{v} - v_\nu \boldsymbol{\nu}$, respectively. In addition, we denote by $\|\gamma\|$ the norm of the trace operator $\gamma : V \rightarrow L^2(\Gamma_3)^d$ and recall that the following inequality holds:

$$\|\gamma \mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq \|\gamma\| \|\mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.8)$$

For a regular function $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ we have $\sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}$ and $\boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}$ and, moreover, the following Green's formula holds:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx + \int_{\Omega} \text{Div } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} \, da \quad \text{for all } \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d. \quad (2.9)$$

Finally, we need the space of fourth order symmetric tensors \mathbf{Q}_∞ given by

$$\mathbf{Q}_\infty = \{ \mathcal{E} = (e_{ijkl}) \mid e_{ijkl} = e_{jikl} = e_{klij} \in L^\infty(\Omega), 1 \leq i, j, k, l \leq d \}. \quad (2.10)$$

It is easy to see that \mathbf{Q}_∞ is a real Banach space with the norm

$$\|\mathcal{E}\|_{\mathbf{Q}_\infty} = \max_{0 \leq i,j,k,l \leq d} \|e_{ijkl}\|_{L^\infty(\Omega)}$$

and, moreover,

$$\|\mathcal{E}\boldsymbol{\tau}\|_Q \leq d \|\mathcal{E}\|_{\mathbf{Q}_\infty} \|\boldsymbol{\tau}\|_Q \quad \text{for all } \mathcal{E} \in \mathbf{Q}_\infty, \boldsymbol{\tau} \in Q. \quad (2.11)$$

Inequalities (2.8) and (2.11) will be used in various places in the next sections.

3 Existence and uniqueness

We start this section with an abstract existence and uniqueness result that we need in the study of Problem \mathcal{P} . To this end, everywhere below we use \mathbb{N} for the set of positive integers and \mathbb{R}_+ will represent the set of nonnegative real numbers, i.e. $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. For each normed space X we use the notation $\|\cdot\|_X$ and 0_X for the norm and the zero element of X , respectively. Also, $C(\mathbb{R}_+; X)$ will represent the space of continuous functions defined on \mathbb{R}_+ with values in X . For a subset $K \subset X$ we still use the symbol $C(\mathbb{R}_+; K)$ for the set of continuous functions defined on \mathbb{R}_+ with values in K . It is well known that, if X is a Banach space, then $C(\mathbb{R}_+; X)$ can be organized in a canonical way as a Fréchet space, i.e. as a complete metric space in which the corresponding topology is induced by a countable family of seminorms. We also recall that the convergence of a sequence $\{x_n\}$ to the element x , in the space $C(\mathbb{R}_+; X)$, can be described as follows:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \rightarrow x \quad \text{in } C(\mathbb{R}_+; X) \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad \text{if and only if} \\ \max_{r \in [0, m]} \|x_n(r) - x(r)\|_X \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \quad \text{for all } m \in \mathbb{N}. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Consider now a real Hilbert space X with inner product $(\cdot, \cdot)_X$ and associated norm $\|\cdot\|_X$ and let Z be a normed space. Also, let K be a subset of X , let $A : X \rightarrow X$, $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Z)$ be two operators, and let $j : Z \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ be two functions. With these data we consider the following problem.

Problem Q. *Find a function $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ such that, for all $t \in \mathbb{R}_+$, the inequality below holds:*

$$\begin{aligned} u(t) \in K, \quad & (Au(t), v - u(t))_X + j(\mathcal{S}u(t), u(t), v) \\ & - j(\mathcal{S}u(t), u(t), u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_X \quad \forall v \in K. \end{aligned} \quad (3.2)$$

In the study of Problem \mathcal{P} we consider the following assumptions.

$$K \text{ is a nonempty closed convex subset of } X, \quad (3.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) There exists } m_A > 0 \text{ such that} \\ \quad (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X \geq m_A \|u_1 - u_2\|_X^2 \\ \quad \forall u_1, u_2 \in X. \\ \text{(b) There exists } L_A > 0 \text{ such that} \\ \quad \|Au_1 - Au_2\|_X \leq L_A \|u_1 - u_2\|_X \quad \forall u_1, u_2 \in X. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) For all } z \in Z, u \in X, j(z, u, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ is convex} \\ \quad \text{and lower semicontinuous.} \\ \text{(b) There exist } \alpha_j \geq 0 \text{ and } \beta_j \geq 0 \text{ such that} \\ \quad j(z_1, u_1, v_2) - j(z_1, u_1, v_1) + j(z_2, u_2, v_1) - j(z_2, u_2, v_2) \\ \quad \leq \alpha_j \|z_1 - z_2\|_Z \|v_1 - v_2\|_X + \beta_j \|u_1 - u_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X \\ \quad \forall z_1, z_2 \in Z, \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in X. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{For every } m \in \mathbb{N} \text{ there exists } d_m > 0 \text{ such that} \\ \quad \|\mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t)\|_Z \leq d_m \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds \\ \quad \forall u_1, u_2 \in C(\mathbb{R}_+; X), \quad \forall t \in [0, m]. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

$$m_A > \beta_j. \quad (3.7)$$

$$f \in C(\mathbb{R}_+; X). \quad (3.8)$$

On these assumptions we have the following comments. First, condition (3.4) shows that the operator A is a strongly monotone and Lipschitz continuous operator. Next, following the terminology introduced in [24], condition (3.6) shows that the operator \mathcal{S} is a history-dependent operator and, therefore, we refer to (3.2) as a history-dependent variational inequality. Finally, we note that (3.7) represents a smallness assumption where, recall, m_A and β_j are the constants in (3.4) and (3.5), respectively.

We now recall the following existence and uniqueness result in the study of the history-dependent variational inequality (3.2).

Theorem 3.1. *Assume that (3.3)–(3.8) hold. Then, Problem \mathcal{Q} has a unique solution $u \in C(\mathbb{R}_+; K)$.*

A proof of Theorem 3.1 can be found in [18], based on arguments of time-dependent variational inequalities, monotonicity and fixed-point.

We now turn to the analysis of Problem \mathcal{P} and, to this end, we introduce the assumptions on the data. We assume that the elasticity operator and the relaxation tensor satisfy the following conditions.

$$\left\{ \begin{array}{l}
\mathcal{A}: \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d \text{ is such that} \\
\text{(a) there exists } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ such that} \\
\quad (\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|^2 \\
\quad \text{for all } \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Omega, \\
\text{(b) there exists } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ such that} \\
\quad \|\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \\
\quad \text{for all } \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Omega, \\
\text{(c) } \mathcal{A}(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ is measurable on } \Omega \text{ for all } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d, \\
\text{(d) } \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \text{ for a.e. } \mathbf{x} \in \Omega.
\end{array} \right. \quad (3.9)$$

$$\mathcal{B} \in C(\mathbb{R}_+, \mathbf{Q}_{\infty}). \quad (3.10)$$

We also assume the densities of body forces and surface tractions have the regularity

$$\mathbf{f}_0 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)), \quad \mathbf{f}_2 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d)). \quad (3.11)$$

The yield function and the normal compliance function are such that

$$\left\{ \begin{array}{l}
F: \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ is such that} \\
\text{(a) there exists } L_F > 0 \text{ such that} \\
\quad |F(\mathbf{x}, r_1) - F(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_F |r_1 - r_2| \\
\quad \text{for all } r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \\
\text{(b) } F(\cdot, r) \text{ is measurable on } \Gamma_3 \text{ for all } r \in \mathbb{R}, \\
\text{(c) } F(\mathbf{x}, 0) = 0, \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma_3.
\end{array} \right. \quad (3.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
p: \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ is such that} \\
\text{(a) there exists } L_p > 0 \text{ such that} \\
\quad |p(\mathbf{x}, r_1) - p(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2| \\
\quad \text{for all } r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \\
\text{(b) } (p(\mathbf{x}, r_1) - p(\mathbf{x}, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \\
\quad \text{for all } r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \\
\text{(d) } p(\cdot, r) \text{ is measurable on } \Gamma_3 \text{ for all } r \in \mathbb{R}, \\
\text{(c) } p(\mathbf{x}, r) = 0 \text{ for all } r \leq 0, \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma_3.
\end{array} \right. \quad (3.13)$$

We also recall that

$$g > 0, \quad \mu > 0 \quad (3.14)$$

and, finally, we assume that the following condition holds:

$$\mu L_p \|\boldsymbol{\gamma}\|^2 < m_{\mathcal{A}}. \quad (3.15)$$

We now introduce the set of admissible displacement fields U defined by

$$U = \{ \mathbf{v} \in V \mid v_\nu \leq g \text{ a.e. on } \Gamma_3 \}. \quad (3.16)$$

Then, following a standard approach based on the Green formula (2.9), we can derive the following variational formulation of Problem \mathcal{P} , in terms of displacements.

Problem \mathcal{P}^V . *Find a displacement field $\mathbf{u}: \mathbb{R} \rightarrow U$ such that, for all $t \in \mathbb{R}_+$, the inequality below holds:*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) \, dx + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu(t))(v_\nu - u_\nu(t)) \, da \quad (3.17) \\ & + \int_{\Omega} \left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) \, ds \right) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) \, dx \\ & + \int_{\Gamma_3} F \left(\int_0^t u_\nu^+(s) \, ds \right) (v_\nu^+ - u_\nu^+(t)) \, da + \int_{\Gamma_3} \mu p(u_\nu(t)) (\|\mathbf{v}_\tau\| - \|\mathbf{u}_\tau(t)\|) \, da \\ & \geq \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \, da \quad \forall \mathbf{v} \in U. \end{aligned}$$

In the study of this problem, we have the following existence and uniqueness result.

Theorem 3.2. *Assume (3.9)–(3.15). Then, Problem \mathcal{P}^V has a unique solution with regularity $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}; U)$.*

The proof of Theorem 3.2 will be done in several steps, based on the abstract existence and uniqueness provided by Theorem 3.1. To present it, we assume in what follows that (3.9)–(3.15) hold. We introduce the space $Z = Q \times L^2(\Gamma_3)$ together with the norm

$$\|\mathbf{z}\|_Z = \|\boldsymbol{\sigma}\|_Q + \|\boldsymbol{\xi}\|_{L^2(\Gamma_3)} \quad \forall \mathbf{z} = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in Z. \quad (3.18)$$

Moreover, we consider the operators $A: V \rightarrow V$, $\mathcal{S}: C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Z)$, the functional $j: Z \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ and the function $\mathbf{f}: \mathbb{R}_+ \rightarrow V$ defined by

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu)v_\nu \, da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad (3.19)$$

$$\mathcal{S}\mathbf{u}(t) = \left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) \, ds, F \left(\int_0^t u_\nu^+(s) \, ds \right) \right) \quad \forall \mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; V), \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} j(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v}_\nu^+ \, da + \int_{\Gamma_3} \mu p(u_\nu) \|\mathbf{v}_\tau\| \, da \quad (3.21) \\ &\quad \forall \mathbf{z} = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in Z, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \end{aligned}$$

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t) \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (3.22)$$

With these notation, it is easy to obtain the following preliminary result.

Lemma 3.3. *A displacement field $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}; U)$ is a solution of Problem \mathcal{P}^V if and only if, for all $t \in \mathbb{R}_+$, the inequality below holds:*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) \in U, \quad & (A\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V + j(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) \\ & - j(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in U. \end{aligned} \quad (3.23)$$

The next step is provided by the following intermediate result.

Lemma 3.4. *There exists a unique displacement field $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}; U)$ which satisfies inequality (3.23), for all $t \in \mathbb{R}_+$.*

Proof. We use Theorem 3.1 with $X = V$, $Z = Q \times L^2(\Gamma_3)$, $K = U$, the operators A , \mathcal{S} , the functional j and the function \mathbf{f} defined by (3.19)–(3.22). To this end, we check in what follows the validity of conditions (3.3)–(3.8). First, definition (3.16) shows that condition (3.3) is obviously satisfied. Next, we use assumptions (3.9), (3.13) and inequality (2.8) to see that

$$\begin{aligned} (A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V &\geq m_A \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2, \\ \|A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2\|_V &\leq (L_A + L_p \|\gamma\|^2) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \end{aligned} \quad (3.24)$$

for all $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$. It follows from here that the operator A satisfies condition (3.4) with $m_A = m_A$ and $L_A = L_A + L_p \|\gamma\|^2$. It is easy to see that condition (3.5)(a) is satisfied, too, and an elementary calculus based on assumption (3.13) and inequality (2.8) shows that

$$\begin{aligned} j(\mathbf{z}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j(\mathbf{z}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + j(\mathbf{z}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) - j(\mathbf{z}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) \\ \leq (1 + \|\gamma\|) \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_Z \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V + \mu L_p \|\gamma\|^2 \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V \end{aligned} \quad (3.25)$$

for all $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in Z$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$. This shows that condition (3.5)(b) holds with $\alpha_j = 1 + \|\gamma\|$ and $\beta_j = \mu L_p \|\gamma\|^2$.

We now use assumptions (3.10), (3.12) and inequality (2.11) to see that for each $m \in \mathbb{N}$ the following inequality holds:

$$\|\mathcal{S}\mathbf{u}_1(t) - \mathcal{S}\mathbf{u}_2(t)\|_Z \leq (d \max_{r \in [0, m]} \|\mathcal{B}(r)\|_{\mathbf{Q}_\infty} + L_F \|\gamma\|) \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_X ds \quad (3.26)$$

for all $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in C(\mathbb{R}_+; V)$, $t \in [0, m]$. This inequality shows that condition (3.6) is satisfied. Finally, inequality (3.15) shows that condition (3.7) holds and assumption (3.11) on the external forces guarantees that the function \mathbf{f} defined by (3.22) has the regularity (3.8).

It follows from above that assumptions (3.3)–(3.8) hold and, therefore, we are in a position to use Theorem 3.1 in order to conclude the proof. \square

We end this section with the remark that Theorem 3.2 is now a direct consequence of Lemmas 3.3 and 3.4. Moreover, the solution of Problem \mathcal{P}^V , provided by this theorem, represents a weak solution of the viscoelastic contact problem \mathcal{P} .

4 Convergence results

In this section we study the dependence of the solution to Problem \mathcal{P} with respect to the body forces \mathbf{f}_0 , the tractions \mathbf{f}_2 , the thickness g and the coefficient of friction μ . To this end, we assume in what follows that (3.9)–(3.15) hold and we denote by \mathbf{u} the solution of Problem \mathcal{P}^V obtained in Theorem 3.1. Next, for each $n \in \mathbb{N}$ we consider a perturbation \mathbf{f}_{0n} , \mathbf{f}_{2n} , g_n , μ_n of the data \mathbf{f}_0 , \mathbf{f}_2 , g , μ , respectively, such that

$$\mathbf{f}_{0n} \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)), \quad \mathbf{f}_{2n} \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d)), \quad (4.1)$$

$$g_n > 0, \quad \mu_n > 0, \quad (4.2)$$

$$\mu_n L_p \|\gamma\|^2 < m_{\mathcal{A}}. \quad (4.3)$$

Now, with the set of admissible displacement fields U_n defined by

$$U_n = \{ \mathbf{v} \in V \mid v_\nu \leq g_n \text{ a.e. on } \Gamma_3 \}, \quad (4.4)$$

we introduce the perturbation of Problem \mathcal{P}^V as follows:

Problem \mathcal{P}_n^V . Find a displacement field $\mathbf{u}_n: \mathbb{R} \rightarrow U_n$ such that, for all $t \in \mathbb{R}_+$, the inequality below holds:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathcal{A} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n(t)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n(t))) \, dx + \int_{\Gamma_3} p(u_{n\nu}(t))(v_\nu - u_{n\nu}(t)) \, da \quad (4.5) \\ & + \int_{\Omega} \left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n(s)) \, ds \right) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n(t))) \, dx \\ & + \int_{\Gamma_3} F \left(\int_0^t u_{n\nu}^+(s) \, ds \right) (v_\nu^+ - u_{n\nu}^+(t)) \, da + \int_{\Gamma_3} \mu_n p(u_{n\nu}(t)) (\|\mathbf{v}_\tau\| - \|\mathbf{u}_{n\tau}(t)\|) \, da \\ & \geq \int_{\Omega} \mathbf{f}_{0n}(t) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}_n(t)) \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_{2n}(t) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}_n(t)) \, da \quad \forall \mathbf{v} \in U_n. \end{aligned}$$

It follows from Theorem 3.2 Problem \mathcal{P}_n^V has a unique solution $\mathbf{u}_n \in C(\mathbb{R}; U_n)$. Moreover, for all $t \in \mathbb{R}_+$, the solution satisfies the inequality

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n(t) \in U_n, \quad (\mathcal{A} \mathbf{u}_n(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_n(t))_V + j_n(\mathcal{S} \mathbf{u}_n(t), \mathbf{u}_n(t), \mathbf{v}) \quad (4.6) \\ - j_n(\mathcal{S} \mathbf{u}_n(t), \mathbf{u}_n(t), \mathbf{u}_n(t)) \geq (\mathbf{f}_n(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_n(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in U_n. \end{aligned}$$

Here and below in this section the functional $j_n: Z \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ and the function $\mathbf{f}_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow V$ are defined by equalities

$$\begin{aligned} j_n(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v}_\nu^+ \, da + \int_{\Gamma_3} \mu_n p(u_\nu) \|\mathbf{v}_\tau\| \, da \quad (4.7) \\ \forall \mathbf{z} = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in Z, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \end{aligned}$$

$$(\mathbf{f}_n(t), \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_{0n}(t) \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_{2n}(t) \cdot \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in V, \, t \in \mathbb{R}_+. \quad (4.8)$$

Moreover, we denote by “ \rightharpoonup ” the weak convergence in various normed spaces to be specified and we recall that all the limit, upper limit and lower limit are considered when $n \rightarrow \infty$, even if we do not mention it explicitly.

Our main result in this section is the following.

Theorem 4.1. *Assume that (3.9)–(3.15) and (4.1)–(4.3) hold. Moreover, assume that*

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{0n}(t) \rightharpoonup \mathbf{f}_0(t) & \text{in } L^2(\Omega)^d, & \mathbf{f}_{2n}(t) \rightharpoonup \mathbf{f}_2(t) & \text{in } L^2(\Gamma_2)^d, \\ \text{as } n \rightarrow \infty, \forall t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\begin{cases} \text{For each } m \in \mathbb{N} \text{ there exists } \tilde{N}_m \in \mathbb{N} \text{ and } \delta_m > 0 \text{ such that} \\ \|\mathbf{f}_{0n}(t)\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \delta_m, \|\mathbf{f}_{2n}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq \delta_m & \forall t \in [0, m], n \geq \tilde{N}_m, \end{cases} \quad (4.10)$$

$$g_n \rightarrow g, \quad \mu_n \rightarrow \mu \quad \text{in } \mathbb{R}. \quad (4.11)$$

Then,

$$\mathbf{u}_n(t) \rightarrow \mathbf{u}(t) \quad \text{in } V \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \quad (4.12)$$

for all $t \in \mathbb{R}$.

The proof of Theorem 4.1 will be carried out in several steps that we present in what follows. Everywhere in the rest of this section we assume that (3.9)–(3.15), (4.1)–(4.3) and (4.9)–(4.11) hold. Let $n \in \mathbb{N}$. We start by considering the intermediate problem of finding a function $\bar{\mathbf{u}}_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow V$ such that, for each $t \in \mathbb{R}_+$, the inequality below holds:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_n(t) \in U_n, \quad & (A\bar{\mathbf{u}}_n(t), \mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}_n(t))_V + j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t), \mathbf{v}) \\ & - j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t)) \geq (\mathbf{f}_n(t), \mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}_n(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in U_n. \end{aligned} \quad (4.13)$$

It follows from Theorem 3.1 that this problem has a unique solution with regularity $\bar{\mathbf{u}}_n \in C(\mathbb{R}_+; U_n)$.

We proceed with the following result.

Lemma 4.2. *For each $m \in \mathbb{N}$ there exists $\lambda_m > 0$ and $N_m \in \mathbb{N}$ such that*

$$\|\bar{\mathbf{u}}_n(t)\|_V \leq \lambda_m \quad \forall t \in [0, m], n \geq N_m. \quad (4.14)$$

Proof. Let $m \in \mathbb{N}$ be fixed and let $t \in [0, m]$. We test in (4.13) with $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$ to obtain

$$(A\bar{\mathbf{u}}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t))_V \leq (\mathbf{f}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t))_V - j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t)),$$

and then we use the strong monotonicity of the operator A and equality $A\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$ to see that

$$m_{\mathcal{A}}\|\bar{\mathbf{u}}_n(t)\|_V^2 \leq \|\mathbf{f}_n(t)\|_V\|\bar{\mathbf{u}}_n(t)\|_V - j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t)). \quad (4.15)$$

On the other hand, using (4.7) we write

$$\begin{aligned} -j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t)) &= j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t), \mathbf{0}_V) - j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t)) \\ &\quad + j_n(\mathbf{0}_V, \mathbf{0}_V, \bar{\mathbf{u}}_n(t)) - j_n(\mathbf{0}_V, \mathbf{0}_V, \mathbf{0}_V), \end{aligned}$$

and then we use inequality (3.25) for the function j_n to obtain

$$\begin{aligned} -j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t)) & \tag{4.16} \\ & \leq (1 + \|\gamma\|)\|\mathcal{S}\mathbf{u}(t)\|_Z\|\bar{\mathbf{u}}_n(t)\|_V + \mu_n L_p \|\gamma\|^2 \|\bar{\mathbf{u}}_n(t)\|_V^2. \end{aligned}$$

We now combine the inequalities (4.15) and (4.16) to see that

$$(m_{\mathcal{A}} - \mu_n L_p \|\gamma\|^2)\|\bar{\mathbf{u}}_n(t)\|_V \leq \|\mathbf{f}_n(t)\|_V + (1 + \|\gamma\|)\|\mathcal{S}\mathbf{u}(t)\|_Z. \tag{4.17}$$

Note that assumptions (4.11) and (3.15) imply that there exists $\bar{N}_m \in \mathbb{N}$ such that

$$m_{\mathcal{A}} - \mu_n L_p \|\gamma\|^2 \geq \frac{1}{2}(m_{\mathcal{A}} - \mu L_p \|\gamma\|^2) \quad \forall n \geq \bar{N}_m.$$

Therefore, (4.17) allows us to write

$$\|\bar{\mathbf{u}}_n(t)\|_V \leq c_0(\|\mathbf{f}_n(t)\|_V + \|\mathcal{S}\mathbf{u}(t)\|_Z) \quad \forall n \geq \bar{N}_m, \tag{4.18}$$

where c_0 is a positive constant which does not depends on n and t . We now use assumption (4.10) and define $N_m = \max\{\bar{N}_m, \tilde{N}_m\}$. Then, (4.18) implies that

$$\|\bar{\mathbf{u}}_n(t)\|_V \leq \tilde{c}_0(\delta_m + \|\mathcal{S}\mathbf{u}(t)\|_Z) \quad \forall n \geq N_m, \tag{4.19}$$

where, again, \tilde{c}_0 is a positive constant which does not depends on n and t . And thus, the inequality (4.14) holds now with

$$\lambda_m = \tilde{c}_0(\delta_m + \max_{t \in [0, m]} \|\mathcal{S}\mathbf{u}(t)\|_Z),$$

which concludes the proof. \square

We proceed with the following weak convergence result.

Lemma 4.3. *For all $t \in \mathbb{R}_+$ the following convergence holds:*

$$\bar{\mathbf{u}}_n(t) \rightharpoonup \mathbf{u}(t) \quad \text{in } V. \tag{4.20}$$

Proof. We fix $t \in \mathbb{R}_+$ and let $m \in \mathbb{N}$ be such that $t \in [0, m]$. It follows from Lemma 4.2 that the sequence $\{\bar{\mathbf{u}}_n(t)\}$ is bounded in V and, therefore, there exists an element $\bar{\mathbf{u}}(t) \in V$ such that, passing to a subsequence still denoted $\{\bar{\mathbf{u}}_n(t)\}$,

$$\bar{\mathbf{u}}_n(t) \rightharpoonup \bar{\mathbf{u}}(t) \quad \text{in } V. \tag{4.21}$$

Note that this convergence implies that $\bar{\mathbf{u}}_n(t) \rightarrow \bar{\mathbf{u}}(t)$ a.e. on Γ_3 and, therefore, definitions (4.4), (3.16) and the convergence (4.11) yield

$$\bar{\mathbf{u}}(t) \in U. \quad (4.22)$$

Let $\mathbf{v} \in U$. Then $\frac{g_n}{g}\mathbf{v} \in U_n$ and, using (4.13) we deduce that

$$\begin{aligned} (A\bar{\mathbf{u}}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t) - \frac{g_n}{g}\mathbf{v})_V &\leq (\mathbf{f}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t) - \frac{g_n}{g}\mathbf{v})_V \\ &+ j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t), \frac{g_n}{g}\mathbf{v}) - j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t)). \end{aligned}$$

We now write $\bar{\mathbf{u}}_n(t) - \frac{g_n}{g}\mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}}_n(t) - \mathbf{v} + (1 - \frac{g_n}{g})\mathbf{v}$ to find that

$$\begin{aligned} (A\bar{\mathbf{u}}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t) - \mathbf{v})_V + (A\bar{\mathbf{u}}_n(t), (1 - \frac{g_n}{g})\mathbf{v})_V &\quad (4.23) \\ \leq (\mathbf{f}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t) - \mathbf{v})_V + (\mathbf{f}_n(t), (1 - \frac{g_n}{g})\mathbf{v})_V \\ + j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t), \frac{g_n}{g}\mathbf{v}) - j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t)). \end{aligned}$$

Next, we use assumptions (4.9)–(4.11), convergence (4.21) and standard compactness arguments to see that the following convergences hold:

$$\begin{aligned} (A\bar{\mathbf{u}}_n(t), (1 - \frac{g_n}{g})\mathbf{v})_V &\rightarrow 0, \\ (\mathbf{f}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t) - \mathbf{v})_V &\rightarrow (\mathbf{f}(t), \bar{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{v})_V, \\ (\mathbf{f}_n(t), (1 - \frac{g_n}{g})\mathbf{v})_V &\rightarrow 0, \\ j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t), \frac{g_n}{g}\mathbf{v}) &\rightarrow j(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}), \\ j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t)) &\rightarrow j(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{u}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t)). \end{aligned}$$

Therefore, taking the upper limit in (4.23) and using these convergences we deduce that

$$\begin{aligned} \limsup (A\bar{\mathbf{u}}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t) - \mathbf{v})_V &\quad (4.24) \\ \leq (\mathbf{f}(t), \bar{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{v})_V + j(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}) - j(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{u}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t)). \end{aligned}$$

The regularity (4.22) allows us to take $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}}(t)$ in the previous inequality. As a result we deduce that

$$\limsup (A\bar{\mathbf{u}}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t) - \bar{\mathbf{u}}(t))_V \leq 0. \quad (4.25)$$

We now use (4.21), (4.25) and a standard pseudomonotonicity argument to see that

$$(A\bar{\mathbf{u}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{v})_V \leq \liminf (A\bar{\mathbf{u}}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t) - \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (4.26)$$

We now combine inequalities (4.24) and (4.26) to deduce that

$$\begin{aligned} & (A\bar{\mathbf{u}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{v})_V \\ & \leq (\mathbf{f}(t), \bar{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{v})_V + j(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}) - j(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{u}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t)) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Inequality (4.27) combined with regularity (4.22) and the uniqueness of the solution of the variational inequality (3.23) shows that $\bar{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(t)$. A careful analysis of the previous results reveals that the sequence $\{\bar{\mathbf{u}}_n(t)\}$ is bounded in V and every weakly convergent subsequence of this sequence converges to $\mathbf{u}(t)$. This implies the convergence (4.20) and concludes the proof. \square

The next step is given by the following strong convergence result.

Lemma 4.4. *For all $t \in \mathbb{R}_+$ the following convergence holds:*

$$\bar{\mathbf{u}}_n(t) \rightarrow \mathbf{u}(t) \quad \text{in } V. \quad (4.28)$$

Proof. Let $t \in \mathbb{R}_+$. We successively test with $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}}(t)$ in (4.24) and (4.26) to deduce that

$$0 \leq \liminf (A\bar{\mathbf{u}}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t) - \bar{\mathbf{u}}(t))_V \leq \limsup (A\bar{\mathbf{u}}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t) - \bar{\mathbf{u}}(t))_V \leq 0,$$

which implies that $\lim (A\bar{\mathbf{u}}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t) - \bar{\mathbf{u}}(t))_V = 0$. This result combined with equality $\bar{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(t)$, obtained in the proof of Lemma 4.2, yields

$$(A\bar{\mathbf{u}}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t) - \mathbf{u}(t))_V \rightarrow 0. \quad (4.29)$$

Next, we use the strong monotonicity of the operator A to see that

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A}} \|\bar{\mathbf{u}}_n(t) - \mathbf{u}(t)\|_V^2 & \leq (A\bar{\mathbf{u}}_n(t) - A\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t) - \mathbf{u}(t))_V \\ & = (A\bar{\mathbf{u}}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t) - \mathbf{u}(t))_V - (A\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t) - \mathbf{u}(t))_V. \end{aligned}$$

This inequality combined with the convergences (4.29) and (4.20) imply that

$$\limsup \|\bar{\mathbf{u}}_n(t) - \mathbf{u}(t)\|_V^2 \leq 0,$$

which shows that (4.28) holds. \square

We now have all the ingredients to provide the proof of Theorem 4.1.

Proof. Let $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$ and let $m \in \mathbb{N}$ be such that $t \in [0, m]$. We take $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}}_n(t)$ in (4.6) and $\mathbf{v} = \mathbf{u}_n(t)$ in (4.13), then we add the resulting inequalities to obtain that

$$\begin{aligned} & (A\mathbf{u}_n(t) - A\bar{\mathbf{u}}_n(t), \mathbf{u}_n(t) - \bar{\mathbf{u}}_n(t))_V \\ & \leq j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}_n(t), \mathbf{u}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t)) - j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}_n(t), \mathbf{u}_n(t), \mathbf{u}_n(t)) \\ & \quad + j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t), \mathbf{u}_n(t)) - j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t), \bar{\mathbf{u}}_n(t)). \end{aligned}$$

Next, we use the strong monotonicity of the operator A , as well as inequality (3.25) for the functional j_n to see that

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A}} \|\bar{\mathbf{u}}_n(t) - \mathbf{u}_n(t)\|_V^2 & \leq (1 + \|\gamma\|) \|\mathcal{S}\mathbf{u}_n(t) - \mathcal{S}\mathbf{u}(t)\|_V \|\bar{\mathbf{u}}_n(t) - \mathbf{u}_n(t)\|_V \\ & \quad + \mu_n L_p \|\gamma\|^2 \|\bar{\mathbf{u}}_n(t) - \mathbf{u}_n(t)\|_V^2, \end{aligned}$$

which implies that

$$(m_{\mathcal{A}} - \mu_n L_p \|\gamma\|^2) \|\bar{\mathbf{u}}_n(t) - \mathbf{u}_n(t)\|_V \leq (1 + \|\gamma\|) \|\mathcal{S}\mathbf{u}_n(t) - \mathcal{S}\mathbf{u}(t)\|_V.$$

Let $n \geq \bar{N}_m$ where, recall, $\bar{N}_m \in \mathbb{N}$ was defined in the proof of Lemma 4.2. Then, using arguments similar to those used in the proof of inequality (4.18), we see that there exists a constant $c_0 > 0$ such that, for $n \geq \bar{N}_m$ we have

$$\|\bar{\mathbf{u}}_n(t) - \mathbf{u}_n(t)\|_V \leq c_0 \|\mathcal{S}\mathbf{u}_n(t) - \mathcal{S}\mathbf{u}(t)\|_V.$$

Then, using inequality (3.26) we find that

$$\|\bar{\mathbf{u}}_n(t) - \mathbf{u}_n(t)\|_V \leq c_m \int_0^t \|\mathbf{u}_n(s) - \mathbf{u}(s)\|_V ds, \quad (4.30)$$

where $c_m > 0$ depends on m but does not depend on n and t . It follows from here that

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_n(t) - \mathbf{u}(t)\|_V & \leq \|\mathbf{u}_n(t) - \bar{\mathbf{u}}_n(t)\|_V + \|\bar{\mathbf{u}}_n(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \\ & \leq c_m \int_0^t \|\mathbf{u}_n(s) - \mathbf{u}(s)\|_V ds + \|\bar{\mathbf{u}}_n(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \end{aligned}$$

and, therefore, using the Gronwall inequality yields

$$\|\mathbf{u}_n(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \leq c_m \int_0^t e^{c_m(t-s)} \|\bar{\mathbf{u}}_n(s) - \mathbf{u}(s)\|_V ds + \|\bar{\mathbf{u}}_n(t) - \mathbf{u}(t)\|_V. \quad (4.31)$$

Note that Lemma 4.2 implies that

$$\|\bar{\mathbf{u}}_n(s) - \mathbf{u}(s)\|_V \leq \|\bar{\mathbf{u}}_n(s)\|_V + \|\mathbf{u}(s)\|_V \leq \lambda_m + \max_{s \in [0, m]} \|\mathbf{u}(s)\|_V$$

and, moreover,

$$e^{c_m(t-s)} \leq e^{c_m t} \leq m e^{c_m} \quad \forall s \in [0, t].$$

These inequalities show that the integrand in (4.31) is bounded. Then, Lemma 3.4 allows us to use the Lebesgue theorem in order to see that

$$\int_0^t e^{c_m(t-s)} \|\bar{\mathbf{u}}_n(s) - \mathbf{u}(s)\|_V ds \rightarrow 0, \quad \|\bar{\mathbf{u}}_n(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \rightarrow 0.$$

We now use these convergences in (4.31) to find that (4.12) holds, which concludes the proof. \square

Besides its mathematical interest in the convergence result (4.12), it is important from mechanical point of view since it shows that, at any moment t , the weak solution of the contact problem \mathcal{P} depends continuously on the thickness of rigid-deformable layer, the coefficient of friction, and the densities of body forces and tractions.

Theorem 4.1 provides the pointwise convergence of the solution \mathbf{u}_n to the solution \mathbf{u} . It seems that the assumptions of this theorem are not enough to guarantee this convergence in the space $C(\mathbb{R}_+; V)$. For this reason we reinforce in what follows these assumptions to obtain the following result.

Theorem 4.5. *In addition to conditions (3.9)–(3.15), (4.2)–(4.3), (4.11), we assume further that $\mathbf{f}_{0n} = \mathbf{f}_0$ and $\mathbf{f}_{2n} = \mathbf{f}_2$ for all $n \in \mathbb{N}$. Then*

$$\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{in } C(\mathbb{R}_+; V) \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \quad (4.32)$$

i.e., \mathbf{u}_n converges uniformly to \mathbf{u} on any compact interval $I \subset \mathbb{R}_+$.

The proof is based on estimates already obtained in the proof of Theorem 4.1 combined with arguments similar to those presented in [23]. Thus, we present only its sketch.

Proof. Let $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ and let $t \in [0, m]$. We test in (3.23) with $\mathbf{v} = \frac{g}{g_n} \mathbf{u}_n(t) \in U$, then we multiply the resulting inequality with $\frac{g_n}{g}$ and add it to the inequality obtained from (4.6) with $\mathbf{v} = \frac{g_n}{g} \mathbf{u}(t) \in U_n$. In this way we deduce that

$$\begin{aligned} & (A\mathbf{u}_n(t) - A\mathbf{u}(t), \frac{g_n}{g} \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_n(t))_V + j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}_n(t), \mathbf{u}_n(t), \frac{g_n}{g} \mathbf{u}(t)) \\ & - j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}_n(t), \mathbf{u}_n(t), \mathbf{u}_n(t)) + j(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}_n(t)) - j(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \frac{g_n}{g} \mathbf{u}(t)), \end{aligned}$$

and, therefore,

$$\begin{aligned} & (A\mathbf{u}_n(t) - A\mathbf{u}(t), \mathbf{u}_n(t) - \mathbf{u}(t))_V \leq \left(\frac{g_n}{g} - 1 \right) (A\mathbf{u}_n(t) - A\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t))_V \quad (4.33) \\ & + \left(\frac{g_n}{g} - 1 \right) j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}_n(t), \mathbf{u}_n(t), \mathbf{u}(t)) + j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}_n(t), \mathbf{u}_n(t), \mathbf{u}(t)) \\ & - j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}_n(t), \mathbf{u}_n(t), \mathbf{u}_n(t)) + j(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}_n(t)) \\ & - j(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) + \left(1 - \frac{g_n}{g} \right) j(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)). \end{aligned}$$

Note that Lemma 4.2, implies the bound

$$\|\mathbf{u}_n(t)\|_V \leq c. \quad (4.34)$$

Here and below in this proof c denotes a positive constant which could depend on m , on the solution \mathbf{u} and the rest of the problem data, but is independent on n and t , and whose value may change from line to line. We now use the properties of A , \mathcal{S} and j as well as inequality (4.34) to see that

$$\left(\frac{g_n}{g} - 1\right)(A\mathbf{u}_n(t) - A\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t))_V \leq c|g_n - g|, \quad (4.35)$$

$$\left(\frac{g_n}{g} - 1\right)j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}_n(t), \mathbf{u}_n(t), \mathbf{u}(t)) \leq c|g_n - g|, \quad (4.36)$$

$$\left(1 - \frac{g_n}{g}\right)j(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) \leq c|g_n - g|, \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} & j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}_n(t), \mathbf{u}_n(t), \mathbf{u}(t)) - j_n(\mathcal{S}\mathbf{u}_n(t), \mathbf{u}_n(t), \mathbf{u}_n(t)) \\ & + j(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}_n(t)) - j(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) \\ & \leq c\|\mathcal{S}\mathbf{u}_n(t) - \mathcal{S}\mathbf{u}(t)\|_Z\|\mathbf{u}_n(t) - \mathbf{u}(t)\|_V + \tilde{c}\|\mathbf{u}_n(t) - \mathbf{u}(t)\|_V^2 + c|\mu_n - \mu|, \end{aligned} \quad (4.38)$$

where \tilde{c} is a positive constant such that $\tilde{c} \leq m_{\mathcal{A}}$, if n is large enough. We now combine inequalities (4.33), (4.35)–(4.38), then use the strongly monotonicity of A to deduce that

$$\|\mathbf{u}_n(t) - \mathbf{u}(t)\|_V^2 \leq c\|\mathcal{S}\mathbf{u}_n(t) - \mathcal{S}\mathbf{u}(t)\|_Z\|\mathbf{u}_n(t) - \mathbf{u}(t)\|_V + c(|g_n - g| + |\mu_n - \mu|).$$

Next, the elementary inequality $x^2 \leq ax + b \implies x \leq a + \sqrt{b}$ implies that

$$\|\mathbf{u}_n(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \leq c\|\mathcal{S}\mathbf{u}_n(t) - \mathcal{S}\mathbf{u}(t)\|_Z + c\sqrt{|g_n - g| + |\mu_n - \mu|},$$

and, therefore inequality (3.26) and the Gronwall argument yield

$$\max_{t \in [0, m]} \|\mathbf{u}_n(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \leq c\sqrt{|g_n - g| + |\mu_n - \mu|},$$

for n large enough. Finally, assumption (4.11) and (3.1) show that the convergence (4.32) holds, which concludes the proof. \square

5 Optimization problems

Theorems 4.1 and 4.5 can be used to study a large number of optimization problems associated to Problem \mathcal{P} . To provide a first general example, we assume in what follows that (3.9), (3.10), (3.12) and (3.13) hold and let $K_0 \subset L^2(\Omega)^d$, $K_2 \subset L^2(\Gamma_d)^3$. Moreover, let θ_0 and θ_2 be such that

$$\theta_0 \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \quad \theta_2 \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \quad (5.1)$$

and, in addition, consider two reals intervals K_3 and K_4 such that

$$K_3 = [a_3, b_3] \text{ with } 0 < a_3 \leq b_3, \quad K_4 = [\xi_4, \zeta_4] \text{ with } 0 \leq \xi_4 \leq \zeta_4 \leq \frac{m_A}{L_p \|\gamma\|^2}. \quad (5.2)$$

We denote in what follows by X the Hilbert space $X = L^2(\Omega)^d \times L^2(\Gamma_3)^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ endowed with the canonical inner product and let $\mathcal{K} = K_0 \times K_2 \times K_3 \times K_4 \subset X$. For every element $k = (\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_2, g, \mu) \in \mathcal{K}$ we consider the Problem \mathcal{P} with the data $\mathbf{f}_0 = \theta_0 \mathbf{b}_0$, $\mathbf{f}_2 = \theta_2 \mathbf{b}_2$, g and μ . Using (5.1) and (5.2) we see that the assumptions of Theorem 3.2 are satisfied and, therefore, this problem has a unique solution, denoted \mathbf{u}_k , with regularity $\mathbf{u}_k \in C(\mathbb{R}_+, U)$.

Consider now a cost functional $\mathcal{L} : V \rightarrow \mathbb{R}$ and an arbitrary time moment $t \in \mathbb{R}_+$. We formulate the following optimization problem.

Problem \mathcal{O}_1 . Find $k^* \in \mathcal{K}$ such that

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_{k^*}(t)) = \min_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{L}(\mathbf{u}_k(t)).$$

In the study of this problem we assume that

$$K_0 \text{ is a bounded weakly closed set of } L^2(\Omega)^d. \quad (5.3)$$

$$K_2 \text{ is a bounded weakly closed set of } L^2(\Gamma_2)^d. \quad (5.4)$$

$$\mathcal{L} : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ is a lower semicontinuous function.} \quad (5.5)$$

We have the following existence result.

Theorem 5.1. Assume that (3.9), (3.10), (3.12), (3.13), (5.1)–(5.5). Then, Problem \mathcal{O}_1 has at least one solution.

Proof. Consider the function $J_t : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$J_t(k) = \mathcal{L}(\mathbf{u}_k(t)) \quad \text{for all } k \in \mathcal{K}.$$

Assume that $\{k_n\} = \{(\mathbf{b}_{0n}, \mathbf{b}_{2n}, g_n, \mu_n)\}$ is a sequence of elements of \mathcal{K} which converges weakly in X to the element $k = \{(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_2, g, \mu)\} \in \mathcal{K}$. Then, $\mathbf{b}_{0n} \rightharpoonup \mathbf{b}_0$ in $L^2(\Omega)^d$, $\mathbf{b}_{2n} \rightharpoonup \mathbf{b}_2$ in $L^2(\Gamma_2)^d$, $g_n \rightarrow g$, $\mu_n \rightarrow \mu$ and, therefore, denoting $\mathbf{f}_{0n} = \theta_0 \mathbf{b}_{0n}$, $\mathbf{f}_{2n} = \theta_2 \mathbf{b}_{2n}$, $\mathbf{f}_0 = \theta_0 \mathbf{b}_0$, $\mathbf{f}_2 = \theta_2 \mathbf{b}_2$, we see that conditions (4.9)–(4.11) are satisfied. We now use Theorem 4.1 to deduce that $\mathbf{u}_{k_n}(t) \rightarrow \mathbf{u}_k(t)$ in V . Thus, using assumption (5.5) we obtain that

$$\liminf \mathcal{L}(\mathbf{u}_{k_n}(t)) \geq \mathcal{L}(\mathbf{u}_k(t)),$$

which shows that the function J_t is weakly lower semicontinuous on \mathcal{K} . Moreover, assumptions (5.2), (5.3) and (5.4) guarantee that \mathcal{K} is a bounded weakly closed subset on X . Theorem 5.1 follows now from a version of the well known Weierstrass theorem (Theorem 7.3.4 in [9], for instance). \square

Example 5.2. A first example of Problem \mathcal{O}_1 can be obtained by taking

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \int_{\Gamma_3} \|u_\nu - \phi\|^2 da \quad \text{for all } \mathbf{u} \in V, \quad (5.6)$$

where $\phi \in L^2(\Gamma_3)$ is a given function such that $\phi(\mathbf{x}) \geq 0$ for a.e. $\mathbf{x} \in \Gamma_3$. With this choice, the mechanical interpretation of Problem \mathcal{O}_1 is the following: given set \mathcal{K} and a contact process of the form (2.1)–(2.6), we are looking for a body force $\mathbf{f}_0 = \theta_0 \mathbf{b}_0^*$, a traction $\mathbf{f}_2 = \theta_2 \mathbf{b}_2^*$, a bound g^* and a friction coefficient μ^* such that $k^* = (\mathbf{b}_0^*, \mathbf{b}_2^*, g^*, \mu^*) \in \mathcal{K}$ and the corresponding penetration of the body in the foundation at the given moment t is as close as possible to the given penetration ϕ . Note that the function $\mathcal{L} : V \rightarrow \mathbb{R}$ defined by (5.6) is continuous, hence it satisfies condition (5.5). Therefore, Theorem 5.1 guarantees the existence of the solutions to the corresponding optimization problem.

Example 5.3. A second example of Problem \mathcal{O}_1 can be obtained by taking

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|^2 dx \quad \text{for all } \mathbf{u} \in V. \quad (5.7)$$

With this choice, the mechanical interpretation of Problem \mathcal{O}_1 is the following: given set \mathcal{K} and a contact process of the form (2.1)–(2.6), we are looking for a body force $\mathbf{f}_0 = \theta_0 \mathbf{b}_0^*$, a traction $\mathbf{f}_2 = \theta_2 \mathbf{b}_2^*$, a bound g^* and a friction coefficient μ^* such that $k^* = (\mathbf{b}_0^*, \mathbf{b}_2^*, g^*, \mu^*) \in \mathcal{K}$ and the corresponding deformation in the body at the given moment t is as small as possible. Note that the function (5.7) satisfies condition (5.5). Therefore, Theorem 5.1 guarantees the existence of the solutions to the corresponding optimization problem.

We now move to a second kind of optimization problems, based on Theorem 4.5. We assume in what follows that (3.9)–(3.13) hold and consider two reals intervals K_3 and K_4 such that (5.2) hold. Let $\mathcal{K} = K_3 \times K_4 \subset \mathbb{R}^2$. For every element $(g, \mu) \in \mathcal{K}$ we consider the Problem \mathcal{P} with the data g and μ . Using (5.2) we see that the assumptions of Theorem 3.2 are satisfied and, therefore, this problem has a unique solution, denoted $\mathbf{u}(g, \mu)$, with regularity $\mathbf{u}(g, \mu) \in C(\mathbb{R}_+, U)$.

Consider now a cost functional and $\mathcal{L} : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow \mathbb{R}$ together with the following optimization problem.

Problem \mathcal{O}_2 . Find $(g^*, u^*) \in \mathcal{K}$ such that

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}(g^*, \mu^*)) = \min_{(g, \mu) \in \mathcal{K}} \mathcal{L}(\mathbf{u}(g, \mu)). \quad (5.8)$$

Here, for each $(g, \mu) \in \mathcal{K}$ we use the notation $\mathbf{u}(g, \mu)$ for the solution of inequality (3.17) which is also the unique solution of the inequality (3.23). In the study of Problem \mathcal{O}_2 we assume that

$$\begin{cases} \mathcal{L} : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow \mathbb{R} \text{ is a lower semicontinuous function, i.e.,} \\ \mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u} \text{ in } C(\mathbb{R}_+; V) \implies \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\mathbf{u}_n) \geq \mathcal{L}(\mathbf{u}). \end{cases} \quad (5.9)$$

We have the following existence result.

Theorem 5.4. *Assume that (3.9)–(3.13), (5.2) and (5.9) hold. Then, Problem \mathcal{O}_2 has at least one solution.*

Proof. Consider the function $J : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$J(g, \mu) = \mathcal{L}(\mathbf{u}(g, \mu)) \quad \text{for all } (g, \mu) \in \mathcal{K}.$$

Theorem 4.5 guarantees that the map $(g, \mu) \mapsto \mathbf{u}(g, \mu) : \mathcal{K} \rightarrow C(\mathbb{R}_+; V)$ is continuous. Therefore, using assumption (5.9) we deduce that the function J is lower semicontinuous on \mathcal{K} . Recall also that the set \mathcal{K} is a compact subset of \mathbb{R}^2 . Theorem 5.4 follows now from the Weierstrass theorem. \square

Example 5.5. *An example of Problem \mathcal{O}_2 can be obtained by taking*

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \int_0^T \left(\int_{\Omega} \|\boldsymbol{\sigma}_u(t, \mathbf{x})\|^2 dx \right) ds \quad \text{for all } \mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; V), \quad (5.10)$$

where $T > 0$ is given and, for each $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; V)$, $\boldsymbol{\sigma}_u \in C(\mathbb{R}_+; Q)$ represents the stress function defined by the viscoelastic constitutive equation (2.1). With this choice, the mechanical interpretation of Problem \mathcal{O}_2 is the following: given a contact process of the form (2.1)–(2.6) and a compact set $\mathcal{K} = K_3 \times K_4 \in \mathbb{R}^2$ described in (5.2), we are looking for a bound g^* and a friction coefficient μ^* such that $(g^*, \mu^*) \in \mathcal{K}$ and the corresponding stress in the body during the time interval of interest $[0, T]$ is as small as possible. It is easy to see that the function \mathcal{L} defined by (5.10) satisfies condition (5.9). Indeed, consider a sequence $\{\mathbf{u}_n\} \subset C(\mathbb{R}_+; V)$ such that $\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u}$ in $C(\mathbb{R}_+; V)$. We use (2.1) to see that

$$\boldsymbol{\sigma}_n(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n(s)) ds,$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) ds,$$

for all $t \in \mathbb{R}_+$ and $n \in \mathbb{N}$. Then, assumptions (3.9) and (3.10) imply that $\boldsymbol{\sigma}_n \rightarrow \boldsymbol{\sigma}$ in $C(\mathbb{R}_+; Q)$. Therefore, $\mathcal{L}(\mathbf{u}_n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{u})$, which shows that condition (5.9) is satisfied. Theorem 5.1 guarantees now the existence of the solutions to the corresponding optimization problem.

References

- [1] A. Amassad, D. Chenais and C. Fabre, Optimal control of an elastic contact problem involving Tresca friction law, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* **48** (2002), 1107–1135.

- [2] A. Capatina, *Variational Inequalities Frictional Contact Problems*, Advances in Mechanics and Mathematics, Vol. 31, Springer, New York, 2014.
- [3] G. Duvaut and J.L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [4] C. Eck, J. Jarušek and M. Krbeč, *Unilateral Contact Problems: Variational Methods and Existence Theorems*, Pure and Applied Mathematics **270**, Chapman/CRC Press, New York, 2005.
- [5] W. Han and M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, Studies in Advanced Mathematics **30**, American Mathematical Society, Providence, RI–International Press, Somerville, MA, 2002.
- [6] J. Haslinger, I. Hlaváček and J. Nečas, Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics, *Handbook of Numerical Analysis, Vol IV*, P.G. Ciarlet and J.L. Lions (eds.), North-Holland, Amsterdam, 1996, 313–485.
- [7] I. Hlaváček, et al., *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [8] N. Kikuchi and J.T. Oden, *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia, 1988.
- [9] A.J. Kurdila and M. Zabrankin, *Convex Functional Analysis*, Birkhäuser, Basel, 2005.
- [10] J. Lu, Y.B. Xiao and N.J. Huang, A Stackelberg quasi-equilibrium problem via quasi-variational inequalities, *Carpathian Journal of Mathematics*, to appear.
- [11] W. Li, et al., A class of differential inverse quasi-variational inequalities in finite dimensional spaces, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, **10** (2017), 4532–4543.
- [12] A. Matei and S. Micu, Boundary optimal control for nonlinear antiplane problems, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* **74** (2011), 1641–1652.
- [13] A. Matei and S. Micu, Boundary optimal control for nonlinear antiplane problems, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* **74** (2011), 1641–1652.
- [14] A. Matei and S. Micu, Boundary optimal control for a frictional contact problem with normal compliance, *Applied Mathematics and Optimization*, DOI <https://doi.org/10.1007/s00245-017-9410-8>, to appear.

- [15] A. Matei, S. Micu and C. Niță, Optimal control for antiplane frictional contact problems involving nonlinearly elastic materials of Hencky type, *Mathematics and Mechanics of Solids* **23** (2018), 308–328.
- [16] S. Migórski, A. Ochal and M. Sofonea, *Nonlinear Inclusions and Hemivariational Inequalities. Models and Analysis of Contact Problems*, Advances in Mechanics and Mathematics **26**, Springer, New York, 2013.
- [17] P.D. Panagiotopoulos, *Inequality Problems in Mechanics and Applications*, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [18] M. Sofonea and Y.B. Xiao, Fully history-dependent quasivariational inequalities in contact mechanics, *Applicable Analysis* **95** (2016), 2464–2484.
- [19] M. Sofonea and Y.B. Xiao, Boundary optimal control of a nonsmooth frictionless contact problem, submitted.
- [20] M. Sofonea and Y.B. Xiao, Optimization problems for elastic contact models with unilateral constraints, submitted.
- [21] M. Shillor, M. Sofonea and J.J. Telega, *Models and Analysis of Quasistatic Contact*, Lect. Notes Phys. **655**, Springer, Berlin, 2004.
- [22] M. Sofonea, Optimal control of variational-hemivariational inequalities, *Applied Mathematics and Optimization*, DOI: 10.1007/s00245-017-9450-0, to appear.
- [23] M. Sofonea, A Coverage result for history-dependent variational-hemivariational inequalities, *Journal of Elasticity*, <https://doi.org/10.1007/s10659-018-9684-3>, to appear.
- [24] M. Sofonea and A. Matei, History-dependent Quasivariational Inequalities arising in Contact Mechanics, *European Journal of Applied Mathematics*, **22** (2011), 471–491.
- [25] M. Sofonea and A. Matei, *Mathematical Models in Contact Mechanics*, London Mathematical Society Lecture Note Series **398**, Cambridge University Press, 2012.
- [26] M. Sofonea and S. Migórski, *Variational-Hemivariational Inequalities with Applications*, Pure and Applied Mathematics, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton-London, 2018.
- [27] D. Tiba, *Optimal Control of Nonsmooth Distributed Parameter Systems*, Springer, Berlin, 1990.
- [28] A. Touzaline, Optimal control of a frictional contact problem, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series* **31** (2015), 991–1000.

- [29] Y.M. Wang, et al, Equivalence of well-posedness between systems of hemivariational inequalities and inclusion problems, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications* **9** (2016), 1178–1192.
- [30] Y.B. Xiao, N.J. Huang and Y. J. Cho, A class of generalized evolution variational inequalities in Banach space, *Applied Mathematics Letters* **25** (2012), 914–920.
- [31] Y.B. Xiao, N.J. Huang and M.M. Wong, Well-posedness of hemivariational inequalities and inclusion problems, *Taiwanese Journal of Mathematics* **15** (2011), 1261–1276.
- [32] Y.B. Xiao and M. Sofonea, On the optimal control of variational-hemivariational inequalities, Submitted.
- [33] W.X. Zhang, D.R. Han and S.L. Jiang, A modified alternating projection based prediction-correction method for structured variational inequalities, *Applied Numerical Mathematics*, **83** (2014), 12-21.

Résumé

Le sujet de cette thèse porte sur le contrôle optimal de quelques problèmes aux limites décrivant le contact entre un corps déformable et une fondation. La thèse est composée de trois parties. La première partie contient des préliminaires d'analyse. La deuxième partie représente un résumé des résultats obtenus dans l'étude de quatre problèmes aux limites. Le premier problème décrit un processus de contact statique sans frottement entre un corps élastique et une fondation rigide-plastique avec contrainte unilatérale. Dans le second problème on ajoute une deuxième surface de contact avec frottement de Coulomb et compliance normale. Le troisième problème est un problème dual. Le contact est sans frottement, modélisé par une version de la condition de Signorini. Le dernier problème considéré est évolutif, conduisant à l'étude d'une inéquation quasivariationnelle avec opérateur de mémoire. Pour chaque problème on fournit des résultats d'existence, d'unicité et de convergence de la solution faible. Enfin, on traite quelques problèmes de contrôle optimal associés aux modèles de contact ci-dessus. La dernière partie de la thèse est constituée de quatre articles. On y revient sur les problèmes de contact sus-mentionnés tout en présentant les détails des démonstrations.

Mots clé : inéquations quasivariationnelle, opérateur de mémoire, contact avec et sans frottement, lois de comportement élastique et viscoélastique, formulation variationnelle, problème dual, solution faible, contrôle optimal, convergence dans le sens de Mosco.

Abstract

The topic of this thesis concerns the optimal control of some boundary value problems describing the contact between a deformable body and a foundation. The thesis is divided into three parts. The first part contains preliminaries on functional analysis. The second part summarizes our results in the study of four boundary value problems. The first one describes the process of static frictionless contact between an elastic body and a rigid-plastic foundation with unilateral constraint. In the second one we consider a second contact surface with Coulomb friction law and normal compliance. The third problem is a dual problem. The contact is frictionless and is modelled by a version of the Signorini condition. The last problem we consider is evolutionary, leading to the study of an history-dependent quasivariational inequality. For each problem we provide existence, uniqueness and convergence results for the weak solution. Finally, we deal with some optimal control problems associated to our contact models above. The last part of the thesis contains four papers. Here we turn back on the above mentioned contact problems and present the details in proof.

Keywords : quasivariational inequality, history-dependent operator, duality, frictional and frictionless contact, elastic and viscoelastic constitutive law, variational formulation, dual problem, weak solution, optimal control, Mosco convergence.