



HAL
open science

Analyse spectrale des opérateurs de Toeplitz sur des espaces de Bergman et applications

Mahamet Koita

► **To cite this version:**

Mahamet Koita. Analyse spectrale des opérateurs de Toeplitz sur des espaces de Bergman et applications. Théorie spectrale [math.SP]. Université de Bordeaux; Université des Sciences Techniques et Technologiques de Bamako (Mali), 2021. Français. NNT : 2021BORD0294 . tel-03574590

HAL Id: tel-03574590

<https://theses.hal.science/tel-03574590>

Submitted on 15 Feb 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE EN COTUTELLE PRÉSENTÉE

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR
DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX ET DE
L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES DES
TECHNIQUES ET DES TECHNOLOGIES DE
BAMAKO

ECOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

DU MALI

SPECIALITÉ MATHÉMATIQUES PURES

Par **Mahamet KOÏTA**

Analyse spectrale des opérateurs de Toeplitz dans les
espaces de Bergman et applications

Sous la direction de : **Stanislas KUPIN**

Co-directeur : **Belco TOURE**

Soutenue publiquement le 6 décembre 2021 à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux

Membres du jury :

M. Evgueni ABAKOUMOV	Maître de Conférences	Université de Paris Eiffel	Examinateur
M. Emmanuel FRICAIN	Professeur des Universités	Université de Lille	Rapporteur
M. Andeas HARTMANN	Professeur des Universités	Université de Bordeaux	Président
M. Stanislas KUPIN	Professeur des Universités	Université de Bordeaux	Directeur
M. Belco TOURE	Maître de Conférences	Université de Ségou	Co-Directeur
M. Rachid ZAROUF	Professeur des Universités	Université de Aix-Marseille	Rapporteur

Analyse spectrale des opérateurs de Toeplitz dans les espaces de Bergman et applications

Résumé : La présente thèse est consacrée à l'étude des propriétés spectrales d'une classe spécifique d'opérateurs de Toeplitz compacts sur l'espace de Bergman de fonctions holomorphes du disque unité du plan complexe. Rappelons qu'un opérateur de Toeplitz en question est défini comme la composition de la projection de Riesz sur l'espace et la multiplication par une fonction bornée donnée, que l'on appelle le symbole de l'opérateur.

Plus précisément, nous considérons des opérateurs de Toeplitz avec des symboles continus à la décroissance logarithmique vers le bord du disque et nous obtenons les asymptotiques spectrales (i.e., les asymptotiques des valeurs singulières) pour ses objets. Ces résultats sont ensuite appliqués à l'étude des propriétés spectrales de certaines matrices à nombre de diagonales fini compactes.

L'organisation de la thèse est la suivante. Le premier chapitre est une introduction au sujet qui donne, entre autre, la formulation du problème de la thèse et présente les résultats connus sur le sujet. Le second chapitre est consacré à la présentation d'espaces de Bergman des fonctions holomorphes. On y étudie leurs propriétés générales, ainsi que les opérateurs intégraux "du type de projecteur de Riesz" qui joueront un certain rôle par la suite. Le troisième chapitre de la thèse contient les rappels nécessaires sur la théorie des opérateurs, et notamment sur les opérateurs compacts. En particulier, on y introduit la notion importante d'"orthogonalité asymptotique" d'une famille d'opérateurs compacts. Les outils de base sur les opérateurs de Toeplitz dans les espaces de Bergman sont donnés au quatrième chapitre. Enfin, le cinquième (et le dernier) chapitre du manuscrit fait la synthèse des techniques de chapitres précédentes et il est dédié à la démonstration détaillée du théorème principal de la thèse.

Mots-clés : Analyse Spectrale, Opérateurs de Toeplitz, Espaces de Bergman

Spectral analysis of Toeplitz operators on Bergman spaces and applications

Abstract: The current Ph.D. Thesis is devoted to the study of the spectral properties of a specific class of compact Toeplitz operators on Bergman space of holomorphic functions of the disk of the complex plane. Recall that a Toeplitz operator in question is defined as the composition of the Riesz projection on the space and the multiplication by a given bounded function, which is called the operator symbol.

More precisely, we consider Toeplitz operators with continuous symbols decaying logarithmically toward the boundary of the disk and we obtain the spectral asymptotics (i.e., the asymptotics of singular values) for these objects. These results are then applied to the study of the spectral properties of certain compact "band" matrices.

The organization of the thesis is as follows. The first chapter is an introduction to the subject which gives, among other things, the formulation of the problem of the thesis and presents the known results on the issue. The second chapter is devoted to the presentation of Bergman spaces of holomorphic functions. We study their general properties, as well as the integral operators "of the Riesz projector type" which will play a certain role thereafter. The third chapter of the thesis contains the necessary reminders on operator theory, and in particular on compact operators. In particular, we introduce the important notion of "asymptotic orthogonality" of a family of compact operators. The basic tools on Toeplitz operators in Bergman spaces are given in the fourth chapter. Finally, the fifth (and last) chapter of the manuscript synthesizes the techniques of previous chapters and it is dedicated to the detailed demonstration of the main theorem of the thesis.

Keywords: Spectral Analysis, Toeplitz Operators, Bergman spaces.

Unité de recherche

Institut de Mathématiques de Bordeaux, UMR 5251, Université de Bordeaux, 33000
Bordeaux, France.

Remerciements

Mes sincères remerciements vont aux Universités de Ségou et de Bordeaux, qui à travers d'un accord cadre et le financement par le Projet d'Appui à l'Enseignement Supérieur (PADES) m'ont donné la possibilité de réaliser ce rêve. □

Je remercie également Stanislas KUPIN, pour m'avoir m'accepté comme doctrant pendant ces trois années de thèse, sans oublier sa totale disponibilité et sons sens élevé d'écoute et de patience pour la réalisation de cette thèse. □

Mes remerciements vont aussi à Belco TOURE mon co-directeur pour son implication et ses différents conseils avisés qui ont abouti à la réalisation de ce projet de recherche. □

Je tiens également à remercier l'ensemble des membres du jury pour leur disponibilité dans le cadre de l'évaluation de cette thèse. □

J'adresse mes remerciements à toute l'équipe d'analyse de l'Institut de Mathématiques de Bordeaux (IMB), sans elle ce travail aurait été extrêmement difficile pour moi. Je profite de l'occassion pour remercier Karim KELLAY responsable de cette équipe. □

Je n'oublierai jamais de remercier assez Andreas HARTMANN pour sa disponibilité à repondre à mes diverses questions et ses multiples conseils durant mes nombreux séjours à l'Institut Mathématiques de Bordeaux (IMB). □

Je remercie aussi Dantouma KAMISSOKO mon directeur pour m'avoir offert l'opportunité de faire cette thèse. □

Mes sincères remerciements vont également à l'endroit de ma famille qui n'a menagé aucun effort pour la réalisation de cette thèse. □

Que ma chère épouse Maimouna CAMARA trouve ici mes sincères remerciements pour son soutien et sa patience durant mes nombreux séjours à Bordeaux. □

Table des matières

1	Introduction	7
2	Les espaces de Bergman	11
2.1	Le projecteur de Riesz sur les espaces de Bergman $A_\alpha^p(\mathbb{D})$	18
2.2	La transformée de Bérézin : Définition et propriétés générales . . .	21
3	Les opérateurs compacts	25
3.1	Les classes d'opérateurs compacts de façon générale	25
3.2	Les opérateurs de classe Schatten-Von-Neumann	31
3.3	Application de la transformée de Bérézin aux opérateurs compacts	40
3.4	Les classes spécifiques d'opérateurs compacts	43
3.4.1	Orthogonalité asymptotique d'un ensemble d'opérateurs . . .	47
4	Les opérateurs de Toeplitz dans les espaces de Bergman	51
5	Démonstration du résultat principal	55
5.1	Quelques notations et remarques de départ	55
5.2	La preuve de l'orthogonalité asymptotique des opérateurs $T_{\tilde{\chi}_j}$ et $T_{\tilde{\chi}_k}$, $j \neq k$	59
5.2.1	Etape 1. Les opérateurs de Toeplitz dont le symbole est à support compact dans \mathbb{D}	59
5.2.2	Etape 2. Produits des opérateurs de Toeplitz avec noyau intégral lisse	60
5.2.3	Etape 3. Le cas de $T_{\tilde{\chi}_k}^* T_{\tilde{\chi}_j}$ avec $k = j \pm 1$; la borne sur le noyau d'un opérateur intégral	60
5.3	Applications et conclusions finales	67
5.3.1	Les différents versions des résultats obtenus	67
5.3.2	Une application aux matrices à bandes finies	68
5.4	Annexe : Asymptotique d'une intégrale logarithmique	69

Chapitre 1

Introduction

L'analyse complexe est un domaine des mathématiques important et classique fondé par des travaux de A.L. Cauchy, B. Riemann, K. Weierstrass et bien d'autres au *XIX^{ème}* siècle. Aujourd'hui, elle porte principalement sur l'étude des espaces des fonctions holomorphes et des classes des opérateurs définis sur ces espaces. Ces opérateurs (Toeplitz, Hankel, Ha-plitz etc.) servent de modèles importants pour d'autres branches des mathématiques.

La théorie des opérateurs de Toeplitz sur les espaces de Hardy s'est développée dans les années 70-80 du siècle dernier, voir les monographies de Nikolski [7, 8] et Böttcher-Silbermann [2] pour un compte rendu détaillé sur le thème. L'étude des opérateurs de Toeplitz sur de plus grands espaces (comme Fock, Bergman...) est actuellement en cours.

Dans cette thèse, nous allons étudier l'asymptotique spectrale des valeurs singulières des opérateurs de Toeplitz compacts sur l'espace de Bergman avec symbole défini sur le disque unité à décroissance logarithmique vers le bord du disque. Nous avons besoin de plusieurs définitions pour énoncer nos résultats.

Soient $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$ et $\mathbb{T} := \partial\mathbb{D} = \{z : |z| = 1\}$ le disque unité et le cercle unité respectivement. Comme d'habitude, on note $L^2(\mathbb{D}) = L^2(\mathbb{D}, dA)$ l'espace des fonctions mesurables à carré sommable sur \mathbb{D} par rapport à la mesure de Lebesgue normalisée $dA(z) := dx dy / \pi$, $z \in \mathbb{D}$. L'espace de Bergman est défini comme le sous espace fermé des fonctions holomorphes dans $L^2(\mathbb{D})$, c'est à dire

$$A_\alpha^2(\mathbb{D}) := L_a^2(\mathbb{D}, dA) = \{f \in Hol(\mathbb{D}) : \|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA(z) < \infty\}. \quad (1.0.1)$$

La projection orthogonale de Riesz $P_{+, \alpha} : L^2(\mathbb{D}) \rightarrow A_\alpha^2(\mathbb{D})$ est donnée par l'opérateur intégral

$$(P_{+, \alpha} f)(z) := \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{(1 - z\bar{w})^2} f(w) dA(w), \quad f \in L^2(\mathbb{D}). \quad (1.0.2)$$

Un traitement détaillé de ces objets et d'autres peut être trouvé au chapitre 1.

Pour un symbole $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$, l'opérateur de Toeplitz correspondant est défini par la relation

$$T_\varphi f := P_{+, \alpha} \varphi f, \quad f \in A_\alpha^2(\mathbb{D}). \quad (1.0.3)$$

De nombreuses propriétés spectrales de ces opérateurs sont très bien étudiées, voir chapitre 3. Par exemple, nous avons

$$\|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty,$$

et donc l'opérateur de Toeplitz correspondant à symbole borné est également borné. La compacité de T_φ est liée au comportement du symbole φ quand on s'approche du cercle unité \mathbb{T} . La proposition suivante est facile à prouver.

Proposition 1.1 ([11, Prop. 7.3]). *Soit $\varphi \in C(\bar{\mathbb{D}})$, la classe des fonctions continues sur l'adhérence de \mathbb{D} . Alors, T_φ est compact si et seulement si*

$$\lim_{|z| \rightarrow 1^-} \varphi(z) = 0, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Pour un symbole φ , les critères pour que T_φ soit compact ou appartienne à la classe Schatten-Von-Neumann \mathcal{S}_p , $0 < p < \infty$, peuvent être trouvés dans [11].

Les résultats ultérieurs dans cette direction portent sur les asymptotiques spectrales, c'est à dire l'asymptotique des valeurs singulières de l'opérateur de Toeplitz avec symbole provenant de classes spéciales.

Considérons un symbole φ de la forme suivante

$$\varphi(z) := \varphi_1(e^{i\theta})\varphi_0(r) = \varphi_1(e^{i\theta})(1-r)^\gamma, \quad (1.0.4)$$

où $z := re^{i\theta}$, $\gamma > 0$ et $\varphi_1 \in C(\mathbb{T})$. Par la proposition 1.1, l'opérateur de Toeplitz T_φ est évidemment compact. Ses valeurs singulières $\{s_n(T_\varphi)\}_n$ forment une suite décroissante et convergente vers zéro. Un résultat important à venir a été obtenu par Alexandre Pushnitski [9].

Théorème 1.2 ([9, Thm. 1.1]). *Considérons l'opérateur de Toeplitz T_φ avec symbole défini dans (1.0.4). Ses valeurs singulières $\{s_n(T_\varphi)\}_n$ ont les asymptotiques suivantes*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\gamma s_n(T_\varphi) &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{2^\gamma} \|\varphi_1\|_{L^{1/\gamma}(\mathbb{T})} \\ &:= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{2^\gamma} \left(\int_0^{2\pi} |\varphi_1(e^{i\theta})|^{1/\gamma} \frac{d\theta}{2\pi} \right)^\gamma. \end{aligned} \quad (1.0.5)$$

La fonction $\Gamma(\cdot)$ ci-dessus est celle d'Euler.

Le résultat ci-dessus a été obtenu dans [9] sous une forme légèrement plus générale. Maintenant, définissons la fonction de comptage $n(\cdot, T_\varphi)$ pour la suite de nombres singuliers de T_φ comme

$$n(s, T_\varphi) := \#\{n : s_n(T_\varphi) > s\}, \quad s > 0.$$

Nous pouvons alors écrire la relation (1.0.5) de manière équivalente

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} n(s, T_\varphi) = \frac{\Gamma(\gamma+1)^{1/\gamma}}{2} \|\varphi_1\|_{L^{1/\gamma}(\mathbb{T})}^{1/\gamma}.$$

La preuve du théorème 1.2 utilise les méthodes générales de la théorie des opérateurs et quelques résultats de base sur l'espace de Bergman sous-jacent.

Le résultat de cette thèse est un analogue du théorème 1.2 à l'échelle logarithmique. Soit $\varphi_1 \in C(\mathbb{T})$, l'espace des fonctions continues sur le cercle unité. Pour un $\gamma > 0$ fixé, considérons

$$\varphi(z) := \varphi_1(e^{i\theta})\varphi_0(r), \quad (1.0.6)$$

où

$$\varphi_0(r) := \varphi_{0,\gamma}(r) = \frac{1}{\left(1 + \log \frac{1}{1-r}\right)^\gamma}, \quad r \in [0, 1). \quad (1.0.7)$$

Théorème 1.3. *Soit φ le symbole défini ci-dessus. Les valeurs singulières $\{s_n(T_\phi)\}$ de l'opérateur de Toeplitz T_φ possèdent l'asymptotique suivante*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\log(n+1))^\gamma s_n(T_\gamma) = \|\varphi_1\|_{L^\infty(\mathbb{T})}. \quad (1.0.8)$$

En rappelant la définition de la fonction de comptage, nous pouvons re-écrire (1.0.8) comme

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log(n(s, T_\varphi)) = \|\varphi_1\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^{1/\gamma}. \quad (1.0.9)$$

Nous soulignons que malgré une similitude apparente, la preuve du théorème 1.3 est plus complexe que celle du Théorème 1.2. Entre autre, il repose essentiellement sur la structure de l'espace de Bergman et utilise les propriétés fines de la projection de Riesz (1.0.2) définie plus haut.

L'organisation de cette thèse est la suivante. On commence d'abord par une introduction générale des espaces de Bergman, en définissant les objets tels que le noyau reproduisant, le noyau reproduisant normalisé ainsi que la projection de Riesz. Le chapitre 1 étudie les espaces de Bergman de façon générale et ses propriétés, puis le projecteur de Riesz sur les espaces de Bergman A_α^p et enfin on parle des transformées de Bérézin de façon générale. Le chapitre 2 concentré aux opérateurs compacts qui commence, par les classes d'opérateurs compacts de façon générale ensuite, les opérateurs de la classe Schatten-Von-Neumann, en plus l'application de la transformée de Bérézin aux opérateurs compacts et enfin les classes spécifiques d'opérateurs compacts feront l'objet d'une attention particulière dans lequel on va parler de l'orthogonalité asymptotique d'un ensemble d'opérateurs. Pour finir dans le chapitre 3 on va voir les opérateurs de Toeplitz dans les espaces de Bergman, puis les différents cas de la preuve du théorème principal de notre thèse, les différentes étapes de la preuve de l'orthogonalité asymptotique des opérateurs $T_{\tilde{\chi}_j}$ et $T_{\tilde{\chi}_k}$, $j \neq k$, enfin les applications et conclusions finales. Le travail se présente comme suit :

1. Introduction
2. Généralités sur les espaces de Bergman.
3. Opérateurs compacts.
4. Les opérateurs de Toeplitz dans les espaces de Bergman.
5. Démonstration du résultat principal

Tout au long de cette thèse, les constantes génériques changent d'une relation à une autre. Les constantes significatives sont sous-indexées comme C_1, C_2 , etc. Les points du disque unité \mathbb{D} sont souvent écrits comme $z = |z|e^{i\theta} := re^{i\theta}$ $r \in [0, 1), \theta \in [0, 2\pi)$. Comme d'habitude, le cercle unité $\mathbb{T} = \{z = e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi)\}$ est identifié avec l'intervalle $[0, 2\pi)$.

Chapitre 2

Les espaces de Bergman

Pour $0 < p < +\infty$ et $-1 < \alpha < +\infty$, l'espace de Bergman noté $A_\alpha^p = A_\alpha^p(\mathbb{D})$ sur le disque est l'espace des fonctions holomorphes dans $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, où $dA_\alpha(z) = (\alpha + 1)(1 - |z|^2)^\alpha dA(z)$. Nous écrivons que f appartient à $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ si et seulement si :

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left[\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z) \right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Nous allons nous intéresser au cas $1 \leq p < +\infty$, ce qui nous amène à dire que l'espace $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ est un espace de Banach. Pour $p = 2$, ceci est un espace de Hilbert, et son produit scalaire est noté par : $\langle f, g \rangle_\alpha = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}dA_\alpha(z)$.

Proposition 2.1. *Supposons $0 < p < +\infty$, $-1 < \alpha < +\infty$; et K est un sous ensemble compact de \mathbb{D} . Alors il existe une constante $C = C(n, K, p, \alpha)$ telle que :*

$$\sup\{|f^{(n)}(z)| : z \in K\} \leq C\|f\|_{p,\alpha},$$

pour tout $f \in A_\alpha^p$ et tout $n = 1, 2, 3 \dots$; en particulier toute évaluation en un point dans \mathbb{D} est une forme linéaire bornée sur A_α^p .

Démonstration. On suppose $K = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$. D'abord on montre le résultat pour $r \in (0, 1)$ et $n = 0$. Soit $\rho = \frac{1-r}{2}$ et soit $B(z, \rho)$ la boule de centre z et rayon ρ . Montrons que

$$\forall f \in A_\alpha^p, \quad \sup\{|f^{(n)}(z)| : z \in K\} \leq C(n, K, p, \alpha)\|f\|_{p,\alpha}.$$

D'après Cauchy on a, pour $z_0 \in K$, et tout $s \in (0, \rho)$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, s)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

En paramétrant l'intégrale curviligne sur $\partial B(z_0, s)$, on a

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + se^{it})}{z_0 + se^{it} - z_0} i s e^{it} dt, \\ f(z_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + se^{it}) dt, \end{aligned}$$

$$f(z_0) \int_0^\rho s ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \int_0^\rho f(z_0 + se^{it}) s ds,$$

puis en multipliant par s et en intégrant par rapport à s sur $[0, \rho]$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\rho^2}{2} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{B(z_0, \rho)} f(z) dA(z) \\ f(z_0) &= \frac{1}{\pi \rho^2} \int_{B(z_0, \rho)} f(z) dx dy \\ |f(z_0)| &= \frac{1}{\pi \rho^2} \left| \int_{B(z_0, \rho)} f(z) dx dy \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi \rho^2} \int_{B(z_0, \rho)} |f(z)| dx dy \\ &\leq \frac{1}{\rho^2} \int_{B(z_0, \rho)} |f(z)| \frac{dx dy}{\pi}. \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{\rho^2} \int_{B(z_0, \rho)} |f(z)| dA(z).$$

En élevant cette relation à la puissance p , et en appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned} |f(z_0)|^p &\leq \left(\frac{1}{\pi \rho^2} \right)^p \left(\int_{B(z_0, \rho)} |f(z)| dx dy \right)^p \\ &\leq \frac{1}{(\pi \rho^2)^p} \left[\left(\int_{B(z_0, \rho)} |f(z)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(z_0, \rho)} 1 dx dy \right)^{\frac{1}{q}} \right]^p \\ &\leq \frac{1}{(\pi \rho^2)^p} \left(\int_{B(z_0, \rho)} |f(z)|^p dx dy \right) (\pi \rho^2)^{\frac{p}{q}} \\ &\leq \frac{1}{(\pi \rho^2)^{p - \frac{p}{q}}} \int_{B(z_0, \rho)} |f(z)|^p dx dy. \end{aligned}$$

Or on sait que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \implies p - \frac{p}{q} = 1$, on obtient :

$$\dots \leq \frac{1}{\rho^2} \int_{B(z_0, \rho)} |f(z)|^p dA(z).$$

Ainsi on a :

$$|f(z_0)|^p \leq \frac{1}{\rho^2} \int_{B(z_0, \rho)} |f(z)|^p dA(z).$$

Pour $z \in K$, on a :

$1 - |z|^2 = (1 - |z|)(1 + |z|) \geq 1 - |z| \geq \frac{1-r}{2}$, ce qui donne $(\frac{1-r}{2})^\alpha \leq (1 - |z|^2)^\alpha$.
Comme $dA_\alpha = (1 + \alpha)(1 - |z|^2)^\alpha dA$, en substituant cette inégalité à l'intégrale ci-dessus on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-r}{2}\right)^\alpha |f(z_0)|^p &\leq \frac{1}{\rho^2} \int_{B(z_0, \rho)} |f(z_0)|^p (1 - |z|^2)^\alpha dA(z), \\ |f(z_0)|^p &\leq \frac{1}{\rho^2 \left(\frac{1-r}{2}\right)^{1+\alpha}} \int_{B(z_0, \rho)} |f(z)|^p dA_\alpha(z). \end{aligned}$$

On obtient :

$$|f(z_0)|^p \leq C(\rho) \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z),$$

car $B(z_0, \rho) \subset \mathbb{D}$. Pour le cas $n = 0$ nous venons de prouver, qu'il existe une constante $M > 0$ telle que : $|f(\zeta)| \leq M \|f\|_{\alpha, p}$, pour tout $|\zeta| = R$, où $R = \frac{1+r}{2}$.
Si $z \in K$ par la formule de l'intégrale de Cauchy on a :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \\ |f^{(n)}(z)| &= \left| \frac{n!}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \right| \\ |f^{(n)}(z)| &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^{n+1}} |d\zeta| \\ &\leq \frac{n! M 2\pi R}{2\pi} \|f\|_{\alpha, p} \left(\frac{2}{1-r}\right)^{n+1} \\ |f^{(n)}(z)| &\leq n! M R \|f\|_{\alpha, p} \left(\frac{2}{1-r}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

pour tout $z \in K$ et tout $f \in A_\alpha^p$. □

On va voir que l'espace de Bergman A_α^p est un espace de Banach quand $1 \leq p < \infty$ et un espace métrique complet quand $0 < p < \infty$.

Proposition 2.2. *Pour tout $0 < p < +\infty$ et $-1 < \alpha < +\infty$, l'espace de Bergman A_α^p est fermé dans $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$.*

Démonstration. Soit $A_\alpha^p \subset L_\alpha^p(\mathbb{D})$ complet, et la suite $(f_n) \subset A_\alpha^p$, $(f_n) \rightarrow (f)$.
Montrons que $f \in A_\alpha^p$: On a $(f_n) \subset A_\alpha^p \subset L_\alpha^p(\mathbb{D})$, $(f_n) \rightarrow (f) \in L_\alpha^p(\mathbb{D})$
alors :

$$\|(f_n) - (f)\|_{L_\alpha^p} \rightarrow 0 \iff \|(f_n) - f\|_{L_\alpha^p} \rightarrow 0$$

Par le résultat sur la convergence uniforme des fonctions holomorphes on a f holomorphe. □

Proposition 2.3. *Soit f une fonction holomorphe dans \mathbb{D} et pour $0 < r < 1$, on pose $f_r(z) = f(rz)$, $z \in \mathbb{D}$. Alors :*

- Pour tout $f \in A_{\alpha}^p$, on a : $\|f_r - f\|_{p,\alpha} \rightarrow 0$ si $r \rightarrow 1^-$,
- Pour tout $f \in A_{\alpha}^2$, il existe une suite (p_n) de fonctions polynomiales telles que : $\|p_n - f\|_{p,\alpha} \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$.

Démonstration. On donne une fonction dans A_{α}^p , montrons la première assertion. On note $\text{long}(A)$ = la longueur de A , puis on donne δ un nombre dans $(0,1)$ et on note que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |f_r(z) - f(z)|^p dA_{\alpha}(z) &\leq \int_{|z| \leq \delta} |f_r(z) - f(z)|^p dA_{\alpha}(z) \\ &+ \int_{\delta < |z| < 1} |f_r(z) - f(z)|^p dA_{\alpha}(z). \end{aligned}$$

D'après la continuité absolue de l'intégrale :

$f \in L^p([0,1]) \implies \int_0^1 |f(x)|^p dx < \infty$ on en déduit que : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta \geq 0, \forall A \subset [0,1]$ avec $A =]\delta, 1[$ et $B =]\delta, 1[\times]0, 2\pi[$, $\text{long}(A) < \delta \implies \int_A |f(x)|^p dx < \epsilon$. On a pour la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 que $m_2(B) = \pi(1 - \delta^2) \rightarrow 0$ si $\delta \rightarrow 1^-$ avec $A = \{z, \delta < |z| < 1\}$, ainsi le premier intégrale est bornée, f étant holomorphe dans \mathbb{D} , $f_r(z) = f(rz)$, $z \in \mathbb{D}$, et donc si $r \rightarrow 1^-$ alors la fonction $f_r(z)$ peut être approchée par la fonction $f(z)$.

Soit $f \in A_{\alpha}^p$, dans la première assertion nous venons de prouver que $(f_r) \rightarrow f$ dans $L^p(\mathbb{D}, A_{\alpha}^p)$, soit T_N la fonction polynomiale de Taylor dans le disque \mathbb{D} . $f_r(z)$ converge lorsque son rayon de convergence noté $R = \frac{1}{r}$, ce qui nous amène à dire que $\mathbb{D}_{\frac{1}{r}}$ est compact, ainsi : $T_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n(rs)^n \rightarrow f_r(z)$ uniformément car la convergence normale implique la convergence uniforme. Or d'après la première assertion $(f_r) \rightarrow f$ dans $L^p(\mathbb{D}, A_{\alpha}^p)$ et donc $T_N \rightarrow f_r \rightarrow f$, d'où l'assertion. \square

Pour la proposition suivante, on aura besoin du rappel suivant, dans lequel nous allons utiliser les propriétés élémentaires de la fonction Γ . Soit U une variable complexe, alors on peut écrire :

$$|U| < 1, \quad \frac{1}{1-U} = \sum_{n=0}^{+\infty} U^n,$$

et en appliquant la dérivée puis en faisant un changement de variable, on obtient l'égalité suivante :

$$\frac{1}{(1-U)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)U^n.$$

Ainsi

$$\frac{1}{(1-U)^{2+\alpha}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{n!\Gamma(2+\alpha)} U^n,$$

en posant $\alpha = 0$ on aura :

$$\frac{1}{(1-U)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+2)}{n!\Gamma(2)} U^n,$$

et comme $\Gamma(2) = 1! = 1$, on obtient :

$$\frac{1}{(1-U)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+2)}{n!\Gamma(2)} U^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)U^n,$$

Pour $\alpha = k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\frac{1}{(1-U)^{2+k}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+k+2)}{n!\Gamma(2+k)} U^n,$$

avec

$$\frac{\Gamma(n+k+2)}{n!\Gamma(2+k)} = \frac{(n+k+1)!}{(n!)(k+1)!}.$$

Définition 2.4. On définit la projection orthogonale ou projection de Riesz par $P_{+,\alpha} : L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha) \rightarrow A_\alpha^2$ avec la propriété $\forall f, g \in A_\alpha^2, \langle P_{+,\alpha}f, g \rangle_\alpha = \langle f, g \rangle_\alpha$. Si $\alpha = 0$ alors $P_{+,\alpha} = P_+$.

Remarque 2.5. On pose $e_n(z) = \sqrt{\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha+2)}} z^n, n \geq 0$. En particulier, pour $\alpha > 0$, comme $\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha+2)} = \frac{\Gamma(n+2)}{n!\Gamma(2)} = \frac{(n+1)!}{n!1!} = n+1$, on a $e_n(z) = \sqrt{n+1}z^n$. Dans ces conditions :

$$\langle f, g \rangle_{\alpha=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n \bar{b}_n,$$

et donc :

$$\|f\|_{\alpha=0}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} |a_n|^2.$$

On montre facilement que $\{e_n\}_n$ est une base orthonormée. En effet $e_n(z) = c_n z^n$, avec c_n une constante. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \neq m$, montrons que : e_n est orthogonale à e_m ,

$$\begin{aligned} \langle e_n, e_m \rangle &= \langle c_n z^n, c_m z^m \rangle = c_n c_m \langle z^n, z^m \rangle \\ &= c_n c_m \int_{\mathbb{D}} z^n \bar{z}^m \frac{dx dy}{\pi} \\ &= c_n c_m \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^{n+m} e^{i\theta(n-m)} \frac{r dr}{\pi}. \end{aligned}$$

Si $n \neq m$ alors l'intégrale est nulle, par contre si $n = m$, alors :

$$\langle e_n, e_n \rangle = \frac{c_n c_n}{\pi} \int_0^1 r^{2n+1} dr \int_0^{2\pi} d\theta, = \frac{c_n^2}{\pi} \left[\frac{r^{2n+2}}{2n+2} \right]_0^1 [\theta]_0^{2\pi}, \langle e_n, e_n \rangle = \frac{c_n^2}{n+1}.$$

Donc la base $\{e_n\}_n$ est orthonormée si $\langle e_n, e_n \rangle = 1 \iff \frac{c_n^2}{n+1} = 1 \iff c_n = \sqrt{n+1}$.

Proposition 2.6. Pour $-1 < \alpha < +\infty$; soit $P_{+,\alpha}$ la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ sur A_α^2 . Alors :

$$P_{+,\alpha}f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w) dA_\alpha(w)}{(1-z\bar{w})^{\alpha+2}}, \quad z \in \mathbb{D},$$

ceci pour tout $f \in L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$.

Démonstration. On sait que :

$$\langle P_{+, \alpha} f, e_n \rangle = \langle f, P_{+, \alpha} e_n \rangle = \langle f, e_n \rangle.$$

Or :

$$\begin{aligned} P_{+, \alpha} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle_{\alpha} e_n(z) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{D}} f(w) c_n \bar{w}^n dA_{\alpha}(w) \right) c_n z^n. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de la convergence uniforme par rapport à $w \in \mathbb{D}$ on a :

$$\dots = \int_{\mathbb{D}} f(w) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 \bar{w}^n z^n \right) dA_{\alpha}(w).$$

En posant $U = z\bar{w}$, on a :

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{D}} f(w) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 (\bar{w}z)^n dA_{\alpha}(w) \right) \\ &= \int_{\mathbb{D}} f(w) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 U^n dA_{\alpha}(w) \right) \\ &= \int_{\mathbb{D}} f(w) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n + \alpha + 2)}{n! \Gamma(2 + \alpha)} \frac{1}{(1 - U)^{\alpha + 2}} \right) dA_{\alpha}(w). \end{aligned}$$

En remplaçant U par $z\bar{w}$,

$$(P_{+, \alpha} f)(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n + \alpha + 2)}{n! \Gamma(2 + \alpha)} \frac{1}{(1 - z\bar{w})^{\alpha + 2}} \right) dA_{\alpha}(w).$$

A ce niveau démontrons la convergence de la série représentant $P_{\alpha} f$

On sait que :

$$P_{+, \alpha} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle_{\alpha} e_n \iff |P_{+, \alpha} f| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle f, e_n \rangle_{\alpha}| |e_n|.$$

Et comme nous sommes dans le disque : $\mathbb{D} = \{z : |z| < r\}$ avec $r < 1$,

$$|\langle f, e_n \rangle_{\alpha}| \leq \|f\|_{\alpha} \|e_n\|_{\alpha} \iff |\langle f, e_n \rangle_{\alpha}| \leq C.$$

Et donc :

$$\begin{aligned} |P_{+, \alpha} f| &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} C \frac{\Gamma(n + \alpha + 2)}{n! \Gamma(2 + \alpha)} |z|^n \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C}{\Gamma(\alpha + 2)} \frac{\Gamma(n + \alpha + 2)}{n!} |z|^n \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{n=0}^{+\infty} C' n^{\alpha+1} |z|^n.$$

On sait que la série $n^{\alpha+1}|z|^n$ converge sur le disque de rayon R , son rayon de convergence, et que :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{\alpha+1})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{\frac{\alpha+1}{n}}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{\alpha+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{(\alpha+1) \ln n}{n}} = 1.$$

Donc, $\frac{1}{R} = 1 \implies R = 1$ et la série converge par suite $|P_\alpha f| \leq C$. D'où

$$P_{+, \alpha} f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w) \frac{1}{(1 - z\bar{w})^{\alpha+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!(\alpha+2)} dA_\alpha(w).$$

Alors

$$P_{+, \alpha} f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w) \frac{1}{(1 - z\bar{w})^{\alpha+2}} dA_\alpha(w), z \in \mathbb{D}, \forall f \in L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha).$$

□

Corollaire 2.7. Si f est une fonction dans A_α^1 , alors :

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w) dA_\alpha(w)}{(1 - z\bar{w})^{\alpha+2}}, z \in \mathbb{D}.$$

Cette intégrale converge uniformément pour z dans tout sous ensemble compact de \mathbb{D} . Ce corollaire sera appelé la formule de noyau reproduisant de Bergman.

Démonstration. Cette formule est vraie pour $f \in A_\alpha^2$ d'après la Proposition 2.6 et de plus A_α^2 est dense dans A_α^1 □

On note $A^p = A_0^p$ et on les appelle les espaces ordinaires de Bergman. La projection de Bergman correspondante est notée par P , et la formule du noyau de Bergman dans ce cas sera :

$$K(z, w) = \frac{1}{(1 - z\bar{w})^2}, \quad \alpha = 0.$$

On peut aussi constituer les noyaux d'espaces de Bergman à l'aide des transformations du groupe de Möbius qui sont des automorphismes dans \mathbb{D} notés : $\text{Aut}(\mathbb{D})$. Pour voir cela, soit $z \in \mathbb{D}$ et considérons la fonction de Möbius φ_z pour le disque unité, en interchangeant z et 0.

$$\varphi_z(w) = \frac{z - w}{1 - \bar{z}w}, (w \in \mathbb{D}).$$

Nous répertorions quelques unes des propriétés de φ_z , qui peuvent être vérifiées facilement.

Proposition 2.8. La fonction de Möbius φ_z possède les propriétés suivantes :

- $\varphi_z^{-1} = \varphi_z$,
- Le déterminant réel du jacobien de φ_z en w est $|\varphi_z(w)'|^2 = \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\bar{z}w|^4}$,
- $1 - |\varphi_z(w)|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\bar{z}w|^2}$.

En tant que simple application pour les propriétés ci-dessus, nous mentionnons que la formule pour la fonction du noyau de Bergman $K_\alpha(z, w)$ peut être dérivée d'un simple changement de variables que nous allons voir ci-dessous.

Démonstration. — Montrons que : $\varphi_z^{-1} = \varphi_z$ On sait que :

$$\varphi(z) = \frac{z-w}{1-\bar{z}w} = y \iff y(1-\bar{z}w) = z-w \iff w = \frac{z-y}{1-y\bar{z}}.$$

En posant $y = w$, alors $\varphi(z) = \frac{z-w}{1-\bar{z}w}$, et donc $\varphi_z^{-1} = \varphi_z$.

— Montrons que : $|\varphi'_z(w)|^2 = \frac{|1-|z|^2|^2}{|1-z\bar{w}|^4}$.

On sait que :

$$\varphi'_z(w) = \left(\frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right)' = \frac{-(1-\bar{z}w) + \bar{z}(z-w)}{(1-\bar{z}w)^2} = \frac{-1+|z|^2}{(1-\bar{z}w)^2},$$

en passant et en les élevant au carré on obtient :

$$|\varphi'_z(w)|^2 = \frac{|1-|z|^2|^2}{|1-z\bar{w}|^4}.$$

— On sait que :

$$\begin{aligned} |1-\bar{z}w|^2 &= (|1-\bar{z}w|)(\overline{|1-\bar{z}w|}) = (1-\bar{z}w)(1-z\bar{w}) \\ &= 1-z\bar{w}-\bar{z}w+|z|^2 \times |w|^2 + |z|^2 + |w|^2 - |z|^2 - |w|^2 \\ &= (1-|z|^2-|w|^2+|z|^2 \times |w|^2) + (|z|^2+|w|^2-\bar{z}w-z\bar{w}) \\ |1-\bar{z}w|^2 &= |z-w|^2 + (1-|w|^2)(1-|z|^2). \end{aligned}$$

En multipliant les égalités par : $\frac{1}{|1-\bar{z}w|^2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{|z-w|^2}{|1-\bar{z}w|^2} + \frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-z\bar{w}|^2} \\ 1 &= |\varphi'_z(w)|^2 + \frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-z\bar{w}|^2} \end{aligned}$$

d'où :

$$1 - |\varphi'_z(w)|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-z\bar{w}|^2}.$$

□

2.1 Le projecteur de Riesz sur les espaces de Bergman $A_\alpha^p(\mathbb{D})$

Certains problèmes sur les espaces de Bergman exigent, des estimations sur les opérateurs intégraux semblables à l'opérateur de projection de Riesz. Ces

2.1. LE PROJECTEUR DE RIESZ SUR LES ESPACES DE BERGMAN $A_\alpha^p(\mathbb{D})$ 19

estimations sont à l'étude dans cette section. Dans cette section, on présente aussi quelques estimations d'opérateurs intégraux qui se sont avérées très utiles dans le passé. En particulier, nous établirons la continuité de la projection $P_{+, \alpha}$ dans l'espace de Bergman pour certains espaces L^p .

Théorème 2.9. *Pour tout $-1 < \alpha < +\infty$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$, on donne :*

$$I_{\alpha, \beta}(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^\alpha}{|1 - z\bar{w}|^{2+\alpha+\beta}} dA(w), z \in \mathbb{D},$$

$$J_\beta(z) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1 - ze^{-i\theta}|^{1+\beta}}, z \in \mathbb{D}.$$

Alors on a :

$$I_{\alpha, \beta}(z) \sim J_\beta(z) \sim \begin{cases} 1, & \text{si } \beta < 0 \\ \log \frac{1}{1-|z|^2}, & \text{si } \beta = 0 \\ \frac{1}{(1-|z|^2)^\beta}, & \text{si } \beta > 0 \end{cases}$$

pour $|z| \rightarrow 1^-$.

Le résultat est admis, voir Hedenmalm-Korenblum-Zhu [5].

On aura besoin du résultat suivant, appelé le test intégral de Schur, voir [5].

Théorème 2.10. *Supposons X un espace mesurable et μ une mesure positive dans X . On donne $T(X, Y)$ une fonction positive mesurable dans $X \times X$, et T l'opérateur intégrale associé :*

$$Tf(x) = \int_X T(x, y)f(y)d\mu(y), x \in X,$$

défini pour les $x \in X$ tel que l'intégrale converge. Si, pour $1 < p < +\infty$, il existe une fonction mesurable strictement positive h dans X et une constante M positive telles que :

$$\int_X T(x, y)h(y)^q d\mu(y) \leq Mh(x)^q, x \in X,$$

et

$$\int_X T(x, y)h(y)^p d\mu(x) \leq Mh(y)^p, y \in X.$$

où $p^{-1} + q^{-1} = 1$, alors T est borné dans $L^p(X, d\mu)$ avec $\|T\| \leq M$

Théorème 2.11. *Soient a, b, c des nombres réels et posons $d\mu(z) = (1 - |z|^2)^c dA(z)$. On donne \mathbb{T} et \mathbb{S} les opérateurs intégraux définis par :*

$$\mathbb{T}f(z) = (1 - |z|^2)^a \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^b}{(1 - z\bar{w})^{2+a+b}} f(w) dA(w),$$

et

$$\mathbb{S}f(z) = (1 - |z|^2)^a \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^b}{|1 - z\bar{w}|^{2+a+b}} f(w) dA(w).$$

Alors pour $1 \leq p < +\infty$ les conditions suivantes sont équivalentes :

1. \mathbb{T} est borné dans $L^p(\mathbb{D}, d\mu)$,

2. \mathbb{S} est borné dans $L^p(\mathbb{D}, d\mu)$,

3. $-pa < c + 1 < p(b + 1)$.

Démonstration. D'abord, il est évident que si \mathbb{S} est borné dans $L^p(\mathbb{D}, d\mu)$, alors \mathbb{T} l'est dans $L^p(\mathbb{D}, d\mu)$. Supposons $-pa < c + 1 < p(b + 1)$, et montrons que \mathbb{S} est borné. Pour cela, prenons $p > 1$ et $h(z) = (1 - |z|^2)^s$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}f(z) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |z|^2)^a (1 - |w|^2)^b}{|1 - z\bar{w}|^{2+a+b}} f(w) dA_c(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |z|^2)^a (1 - |w|^2)^b}{|1 - z\bar{w}|^{2+a+b}} f(w) dA_c(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |z|^2)^a (1 - |w|^2)^b}{|1 - z\bar{w}|^{2+a+b}} (1 - |w|^2)^{qs} f(w) dA(w) \\ &\leq C(1 - |z|^2)^{sq}. \end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^{b+qs}}{|1 - z\bar{w}|^{2+a+b}} dA(w) &\leq C(1 - |z|^2)^{sq-a}, \\ \mathbb{S}f(z) &\leq \frac{C}{(1 - |z|^2)^{a-sq}}. \end{aligned}$$

En faisant l'intégration par rapport à z on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |z|^2)^a (1 - |w|^2)^{b+c}}{|1 - z\bar{w}|^{2+a+b}} (1 - |z|^2)^{sp} (1 - |z|^2)^c dA(z) &\leq C(1 - |w|^2)^{sp}, \\ \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |z|^2)^{a+sp+c} (1 - |w|^2)^{b+c}}{|1 - z\bar{w}|^{2+a+b}} dA(z) &\leq C(1 - |w|^2)^{sp}. \end{aligned}$$

Par le théorème 2.10 on a dans le premier cas :

$$I_{\alpha,\beta}(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^{b+qs}}{|1 - z\bar{w}|^{2+a+b}} dA(w) \leq C(1 - |z|^2)^{sq-a},$$

avec $\alpha = b + qs$ et $2 + \alpha + \beta = 2 + a + b \implies \beta = a - qs$.

Dans le second cas :

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |z|^2)^{a+sp+c} (1 - |w|^2)^{b+c}}{|1 - z\bar{w}|^{2+a+b}} dA(z) \leq C(1 - |w|^2)^{sp},$$

avec $\alpha = a + ps + c$, $2 + \alpha + \beta = 2 + a + b$ et $p = b - ps - c$.

Les valeurs $\beta \neq 0$ ne conviennent pas, en effet : si $\beta = 0$, on a $I_{\alpha,\beta} \sim \log \frac{1}{1-|z|^2} \rightarrow \infty$, et, d'autre part, $\frac{1}{(1-|z|)^{a-qs}} \sim \frac{1}{(1-|z|^2)^0} \sim (1 - |z|^2)^0 = 1$ pour $|z| \rightarrow 1^-$. Lorsque $|z| \rightarrow 1^-$, nous avons : $I_{\alpha,\beta}(z) \leq C$, ce qui est impossible.

Si $\beta < 0$, alors :

$(1 - |z|^2)^{-\beta} = (1 - |z|^2)^{|\beta|} \rightarrow 0$ quand $|z| \rightarrow 1^-$, ainsi on a :

$$C \leq (1 - |z|^2)^{|\beta|} \longrightarrow 0$$

qui est impossible sous nos conditions prédéfinies.

Pour $\beta > 0$, et dans le premier cas on sait que : $\alpha > -1 \implies b + qs > -1$, et $a - qs > 0$.

En effet : $a - qs > 0 \implies a > qs \implies s < \frac{a}{q}$,

$b + qs > -1 \implies qs > -(b + 1) \implies -\frac{b+1}{q} < s < \frac{a}{q}$,

Dans le second cas on a :

$\alpha > -1 \implies a + ps + c > -1$, et du fait que $\beta > 0$ alors $b - ps - c > 0 \implies ps > -(1 + a + c) \iff s > -\frac{1+a+c}{p}$, de plus $ps < b - a \implies \frac{b-c}{p}$, par suite : $-\frac{1+a+c}{p} < s < \frac{b-c}{p}$. \square

Pour conclure, on constate que $P_{+, \alpha}$ est un projecteur de Riesz borné sur $A_\alpha^p(\mathbb{D})$, $1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$.

2.2 La transformée de Bérézin : Définition et propriétés générales

Bien que les espaces de Hilbert d'une dimension donnée soient tous isomorphes, il y a souvent de bonnes raisons d'étudier les opérateurs sur certains espaces de Hilbert particuliers. L'exemple classique est l'opérateur unilatéral de décalage ou shift, qui est le plus commodément défini sur la suite de l'espace l^2 , mais dont tous les propriétés sont mieux comprises dans le contexte de l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ du disque unité.

Dans cette partie on considère les opérateurs linéaires, bornés définis sur une classe spéciale d'espace de Hilbert, à savoir, les espaces de Hilbert à noyau reproduisant de fonctions holomorphes dans le disque unité. Dans ce cas, chaque opérateur T donne lieu à une fonction lisse \tilde{T} d'une manière naturelle. On appelle \tilde{T} la transformée de Bérézin de T .

La transformée de Bérézin est un outil pour étudier les opérateurs à noyau reproduisant de l'espace de Hilbert. Toutefois, nous allons nous intéresser au cas où l'espace sous-jacent est l'espace de Bergman A_α^2 . Une structure supplémentaire est présente dans le cadre des espaces de Bergman : le noyau reproduisant de l'espace de Bergman induit la métrique dite de Bergman.

Supposons H un espace de Hilbert de fonctions holomorphes dans le disque unité \mathbb{D} avec la propriété que, pour n'importe quel $z \in \mathbb{D}$, l'application $f \mapsto f(z)$ est une fonctionnelle linéaire bornée dans H . Par le théorème de représentation de Riesz, il existe une unique fonction K_z dans H telle que

$$f(z) = \langle f, K_z \rangle, \quad z \in \mathbb{D}, \quad f \in H. \quad (2.2.1)$$

La fonction $K(z, w) = \langle K_w, K_z \rangle$, $z, w \in \mathbb{D}$, est alors appelée le noyau reproduisant de H , et l'égalité (3.8) est appelée la propriété de reproduction de H .

Il est facile de voir que si H est un espace de Hilbert de fonctions holomorphes dans \mathbb{D} avec noyau reproduisant $K(z, w) = \langle K_w, K_z \rangle$, alors les fonctions K_w , $w \in \mathbb{D}$, engendrent l'espace H . En fait, si $f \in H$ et $f \perp K_w$ pour tout w , alors par la propriété de reproduction (3.8), $f(w) = 0$ pour tout w , et ainsi $f = 0$.

Étant donné que $K(z, w) = \langle K_w, K_z \rangle$, nous avons

$$\|K_z\|^2 = K(z, z), \quad |K(z, w)| \leq \sqrt{K(z, z)K(w, w)}. \quad (2.2.2)$$

En particulier, si H a la propriété que pour tout $z \in \mathbb{D}$, il existe certaines fonctions $f \in H$ avec $f(z) \neq 0$, alors $K(z, z) > 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Dans ce cas, on peut normaliser le noyau reproduisant pour obtenir une famille de vecteurs unitaires k_z , $z \in \mathbb{D}$, comme il suit

$$k_z(w) = \frac{K(w, z)}{\sqrt{K(z, z)}}, \quad w \in \mathbb{D}.$$

La fonction k_z est appelée le noyau reproduisant normalisé de H au point $z \in \mathbb{D}$. Soit H un espace de Hilbert de fonctions holomorphes dans \mathbb{D} avec k_z le noyau reproduisant normalisé et soit T un opérateur linéaire borné de H . On définit une fonction \tilde{T} dans \mathbb{D} par

$$\tilde{T}(z) = \langle Tk_z, k_z \rangle, \quad z \in \mathbb{D},$$

et on appelle \tilde{T} la transformée de Bérézin de T .

Proposition 2.12. *La transformée de Bérézin a les propriétés élémentaires qui suivent*

1. Si T est auto-adjoint, alors \tilde{T} est à valeurs réelles.
2. Si T est positif, alors \tilde{T} est non négative.
3. $\tilde{T}^* = \overline{\tilde{T}}$, c'est à dire, la transformée de Bérézin de l'adjoint T^* est le conjugué de \tilde{T} .
4. L'application $T \mapsto \tilde{T}$ est un opérateur contractif de $\mathcal{L}(H)$ vers $L^\infty(\mathbb{D})$, où $\mathcal{L}(H)$ est l'espace de Banach de tous les opérateurs linéaires bornés sur H .

Démonstration. Étant donné que $K(z, w)$ est holomorphe dans z et antiholomorphe dans w , les noyaux reproduisants k_z sont holomorphes réels dans z . Il suit que la transformée de Bérézin \tilde{T} est une fonction holomorphe réelle dans \mathbb{D} à chaque fois que T est un opérateur borné de H . En effet :

Soit $T : A_\alpha^2 \rightarrow A_\alpha^2$;

1. Supposons T auto-adjoint, alors

$$\begin{aligned} \tilde{T}(z) &= \langle Tk_z, k_z \rangle, \quad k_z = \frac{K_z}{\sqrt{K(z, z)}} \\ &= \langle k_z, T^*k_z \rangle \\ &= \langle k_z, Tk_z \rangle \\ &= \overline{\langle Tk_z, k_z \rangle}. \end{aligned}$$

Donc $\tilde{T} = \overline{\tilde{T}}$, par conséquent $\tilde{T} \in \mathbb{R}$.

2. Supposons $T \geq 0$, $\forall x, \langle Tx, x \rangle \geq 0$ est toujours vraie et $T = T^*$, dans cette écriture en remplaçant x par k_z on aura : $\langle Tk_z, k_z \rangle \geq 0$ alors $\tilde{T} \geq 0$.
3. Un raisonnement analogue au 1. montre que $\tilde{T}^* = \overline{\tilde{T}}$.
4. Soit

$$(\tilde{\cdot}) : \mathcal{L}(H) \rightarrow L^\infty(\mathbb{D})$$

$$|\tilde{T}(z)| = |\langle Tk_z, k_z \rangle|$$

$$\begin{aligned} &\leq \|Tk_z\| \|k_z\| \\ &\leq \|T\| \|k_z\|^2 \end{aligned}$$

ainsi,

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} |\tilde{T}(z)| \leq \|T\|_{L(H)}.$$

□

Proposition 2.13. *Si le noyau reproduisant normalisé de H a la propriété que $k_z \rightarrow 0$ faiblement dans H quand $|z| \rightarrow 1^-$, alors $\tilde{T} \in \mathbb{C}_0(\mathbb{D})$ pour n'importe quel opérateur compact T dans H .*

Démonstration. Étant donné que $\tilde{T}(z) = \langle Tk_z, k_z \rangle$ et aussi k_z est un vecteur unitaire, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve $|\tilde{T}(z)| \leq \|Tk_z\|$. Alors le résultat souhaité découle du théorème 1.2. □

Remarque 2.14. Le cas des espaces de Bergman pondérés.

Nous allons nous intéresser au cas où l'espace de Hilbert H est un espace de Bergman A_α^2 , $\alpha > -1$, donc son noyau reproduisant est

$$K(z, w) = K_\alpha(z, w) = \frac{1}{(1 - z\bar{w})^{2+\alpha}}, \quad z, w \in \mathbb{D},$$

et les noyaux reproduisants normalisés sont donnés par

$$k_z(w) = \frac{(1 - |z|^2)^{\frac{2+\alpha}{2}}}{(1 - z\bar{w})^{2+\alpha}}.$$

Chapitre 3

Les opérateurs compacts

3.1 Les classes d'opérateurs compacts de façon générale

Les opérateurs compacts sont une classe importante d'opérateurs qu'on va étudier dans le cas des opérateurs de Toeplitz par la suite. Ce chapitre est consacré à l'étude des propriétés générales des opérateurs compacts.

Soit H un espace de Hilbert séparable. La boule unité fermée de H est dénotée par $B_1(H)$ ou par simplement B_1 dans cette section, et se compose de tous les vecteurs x de H tels que $\|x\| \leq 1$. Un opérateur T est dit compact si $T(B_1)$ est relativement compact pour la norme de H ; autrement dit, si l'adhérence de $T(B_1)$ est compact dans H . Il est facile de voir qu'un opérateur compact est nécessairement borné.

Théorème 3.1. *Un opérateur linéaire T sur H est compact si et seulement si pour toute suite (x_n) bornée, il existe une sous suite (x_{n_k}) telle que (Tx_{n_k}) converge en norme.*

Démonstration. Si T est compact, alors la compacité de T implique que (Tx_n) est contenue dans un ensemble compact. De plus, un ensemble dans H est compact si et seulement si toute suite contient une sous suite convergente. Ainsi, il existe une sous suite $(Tx_{n_k})_k$ qui converge dans H . \square

Théorème 3.2. *Un opérateur T linéaire sur H est compact si et seulement si $\|Tx_n\| \rightarrow 0$ dès que $x_n \rightarrow 0$ faiblement dans H .*

Démonstration. Supposons T compact et $x_n \rightarrow 0$ faiblement dans H . Nous montrons que $\|Tx_n\| \rightarrow 0$. Supposons le contraire, en prenant une sous suite, on peut supposer que $\|Tx_n\| \geq \epsilon$ pour un $\epsilon > 0$ et tout n . par le principe de la continuité uniforme, la convergence faible de x_n implique que $\|x_n\|$ est bornée dans n . Ainsi on a une sous suite x_n telle que Tx_{n_k} converge vers le vecteur y dans H . En particulier, Tx_{n_k} converge faiblement vers y . On sait que T est aussi continu faiblement, ainsi $x_n \rightarrow 0$ faiblement implique que $Tx_n \rightarrow 0$ faiblement. L'unicité de la limite faible donne $y = 0$, et en conséquence $\|Tx_n\| \rightarrow 0$, qui est contradictoire à $\|Tx_n\| \geq \epsilon$. Inversement, si T est non compact, alors il existe une suite $\{x_n\}$ dans B_1 telle qu'il n'y a pas de sous suite Tx_{n_k} qui converge. Par le théorème d'Alaoglu qui dit que "la boule unité fermée de x^* dual de x

est compact en ce qui concerne la topologie faible $*$, B_1 est compact dans la topologie faible, ainsi il y a la sous suite $\{x_{n_k}\}$ qui converge faiblement. Ainsi nous avons une suite $y_n = x_{n_k}$ qui converge faiblement, mais son image par T n'a pas de sous suite non convergente en norme. D'où la démonstration du théorème. \square

Théorème 3.3. *Si T est un opérateur compact dans H , alors pour tout opérateur linéaire borné S dans H , les opérateurs TS et ST sont tous deux compacts. Si S est aussi compact, alors $T + S$ est compact.*

Démonstration. On se donne une suite $\{x_n\}$ dans H qui converge vers 0 faiblement, la compacité de T implique que $\|Tx_n\| \rightarrow 0$, ainsi $\|STx_n\| \rightarrow 0$ étant donné que S est borné. Ainsi par le théorème 3.2, ST est compact. De même si $x_n \rightarrow 0$ (faiblement) par continuité de S , on a $Sx_n \rightarrow 0$ (faiblement) et par le théorème 3.2, $\|TSx_n\| \rightarrow 0$, et donc TS est compact. La compacité de $T + S$ vient également du théorème 3.2. \square

Théorème 3.4. *Un opérateur linéaire borné T dans H est compact si et seulement si T^* est compact.*

Démonstration. Étant donné que $(T^*)^* = T$, il suffit de montrer que la compacité de T implique la compacité de T^* . On donne $\{x_n\}$ qui converge faiblement vers 0 dans H , alors, en premier lieu, il existe une constante $C > 0$ telle que $\|x_n\| \leq C$ pour tout n par le principe de la continuité uniforme. Dans un second temps, T^*x_n converge vers 0 faiblement dans H , étant donné que T^* est continu faiblement. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a,

$$\|T^*x_n\|^2 = \langle TT^*x_n, x_n \rangle \leq C \|TT^*x_n\|$$

pour tout n . La compacité de T et le fait que $Tx_n \rightarrow 0$ faiblement implique que $\|TT^*x_n\| \rightarrow 0$ par le théorème 3.2. Donc $\|T^*x_n\| \rightarrow 0$ et en conséquence T^* est compact par le théorème 3.2 une fois de plus. \square

Théorème 3.5. *Un opérateur linéaire T dans H est compact si et seulement si T^*T est compact si et seulement si $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ est compact.*

Démonstration. Si T est compact, alors T^*T l'est aussi par le théorème 3.3. Si $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ est compact, alors il découle de la décomposition polaire de l'opérateur T et du théorème 3.3 que T est compact. Il reste à montrer que la compacité de T^*T implique la compacité de $|T|$.

Soit $S = |T|$, alors $S^2 = T^*T$. On donne (x_n) une suite dans H qui converge vers 0 faiblement, la compacité de S^2 implique que $\|S^2x_n\| \rightarrow 0$, et le principe de la continuité uniforme montre que $\|x_n\|$ est bornée. Ainsi l'inégalité

$$\|Sx_n\|^2 = \langle S^2x_n, x_n \rangle \leq \|x_n\| \|S^2x_n\|$$

donne $\|Sx_n\| \rightarrow 0$. Ainsi S est compact par le théorème 3.2. \square

Théorème 3.6. *Si (T_n) est une suite d'opérateur compact dans H et $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ pour un opérateur T dans H , alors T est aussi compact.*

3.1. LES CLASSES D'OPÉRATEURS COMPACTS DE FAÇON GÉNÉRALE 27

Démonstration. Supposons que (x_n) est une suite dans H qui converge vers 0 faiblement. Alors la compacité de T_k implique que $\|T_k x_n\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ pour tout k . Nous devons montrer que $\|T x_n\| \rightarrow 0$. Par le principe de la continuité uniforme, nous pouvons aussi bien supposer que $\|x_n\| \leq 1$ pour tout n . Étant donné $\epsilon > 0$, nous pouvons trouver un entier positif k tel que $\|T_k - T\| < \epsilon$. On choisit un entier positif N tel que $\|T_k x_n\| < \epsilon$ pour $n \geq N$. Alors pour tout $n \geq N$,

$$\|T x_n\| = \|T x_n - T_k x_n + T_k x_n\| \leq \|T x_n - T_k x_n\| + \|T_k x_n\| < 2\epsilon \implies \|T x_n\| < \epsilon.$$

Ainsi $\|T x_n\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ et une application du théorème 3.2 termine la preuve. \square

On rappelle que $L(H)$ est l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur l'espace de Hilbert H . Il est un espace de Banach avec la norme opérateur

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in B_1(H)\}, \quad T \in L(H).$$

Sauf indication contraire spécifiée, nous considérons $L(H)$ muni de cette la norme. Un sous ensemble B de $L(H)$ est appelé auto adjoint si pour tout $A \in B \implies A^* \in B$. On a :

1. $\|T\| = \|T^*\|$ pour tout $T \in L(H)$.
2. $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$ pour tout $T, S \in L(H)$.
3. L'opérateur identité I a pour norme 1.

Une algèbre de Banach est une algèbre complexe muni d'une norme qui en fait un espace de Banach et satisfaisant la condition $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ pour tous éléments x et y dans l'espace.

Si l'algèbre contient l'élément identité e , nous demandons que $\|e\| = 1$. Une \mathbb{C}^* -algèbre est une algèbre de Banach avec une involution $x \mapsto x^*$ qui satisfait les conditions suivantes :

1. $(x^*)^* = x$ pour tout vecteur x .
2. $(ax + by)^* = \bar{a}x^* + \bar{b}y^*$ pour tous vecteurs x, y et tous nombres complexes a, b .
3. $(xy)^* = y^*x^*$ pour tous x et y .
4. $\|(x^*)^*\| = \|x\|^2$ pour tout vecteur x .

Si X est un espace de Hausdorff compact, c'est à dire $X = [0, 1]$ et $C(X)$ est l'espace des fonctions continues sur X à valeurs complexes avec la norme infinie, alors $C(X)$ est une \mathbb{C}^* -algèbre dans laquelle l'involution est juste la conjugaison complexe. Similairement, l'espace $L^\infty(X)$ avec la norme infinie est aussi une \mathbb{C}^* -algèbre avec l'involution donnée par le complexe conjugué. L'algèbre $L(H)$ de tous les opérateurs linéaires bornés dans un espace de Hilbert H est une \mathbb{C}^* -algèbre avec la norme opérateur et involution comme adjoint. Une sous algèbre formée de $L(H)$ est une algèbre de Banach, et elle est une \mathbb{C}^* -algèbre si et seulement si elle est auto-adjointe.

Soit $K(H)$, ou simplement K , l'ensemble de tous les opérateurs compacts sur H . Maintenant nous avons prouvé que K est un fermé, auto-adjoint, et un idéal commutatif de l'algèbre $L(H)$. Alors K est aussi une \mathbb{C}^* -sous algèbre de $L(H)$.

Proposition 3.7. *Supposons (e_n) et (σ_n) deux suites orthonormées dans H et $\{\lambda_n\}$ une suite de nombres complexes tendant vers 0. Soit T un opérateur linéaire sur H défini par*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle \sigma_n, \quad x \in H.$$

Alors T est compact.

Démonstration. Supposons que (x_n) est une suite faiblement convergente vers 0 dans H . Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle x_k, e_n \rangle = 0$$

pour chaque n , et il y a une constante $C > 0$ telle que $\|x_k\| \leq C$ pour tout k . On se donne $\epsilon > 0$, alors il existe un entier positif N avec

$$|\lambda_n| < \epsilon, \quad n > N.$$

Par la généralisation du théorème de Pythagore, nous avons

$$\begin{aligned} \|Tx_k\|^2 &= \sum_{n=1}^N |\lambda_n|^2 |\langle x_k, e_n \rangle|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle x_k, e_n \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^N |\lambda_n|^2 |\langle x_k, e_n \rangle|^2 + \epsilon^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |\langle x_k, e_n \rangle|^2. \end{aligned}$$

Le second terme ci-dessus est inférieur ou égal à $C^2 \epsilon^2$, et le premier terme ci-dessus tend vers 0 quand $k \rightarrow \infty$. Il suit que $\|Tx_k\| \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$, et par conséquent T est compact par le théorème 3.2. \square

Théorème 3.8. *Si T est un opérateur auto-adjoint compact dans H , alors il existe une suite de nombres réels $\{\lambda_n\}$ tendant vers 0 et il existe une suite orthonormale (e_n) de H telle que*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n, \quad \text{pour tout } x \in H.$$

Démonstration. Pour éviter la trivialité, on suppose $T \neq 0$. Étant donné que T est auto-adjoint, on a :

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : \|x\| = 1\}.$$

Remplaçons T par $-T$ si nécessaire, on peut supposer qu'il existe une suite de vecteurs unitaires (x_n) dans H telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \langle Tx_n, x_n \rangle = \|T\|,$$

étant donné que $\langle Tx_n, x_n \rangle \leq \|Tx_n\| \leq \|T\|$ pour tout n , on a aussi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \|Tx_n\| = \|T\|.$$

Il suit facilement par expansion que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \|Tx_n - \|T\|x_n\| = 0.$$

Étant donné que T est compact et la suite (x_n) est bornée, le théorème 3.1 implique qu'il existe une sous suite (x_{n_k}) telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \|Tx_{n_k} - y\| = 0$$

pour un vecteur $y \in H$. En combinant ça avec

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \|Tx_n - \|T\|x_n\| = 0,$$

on conclut que (x_{n_k}) converge vers $x = \frac{y}{\|T\|}$ en norme (avec x un vecteur unitaire) et par conséquent $Tx = \|T\|x$. Ainsi, nous avons établi l'existence de valeurs propres non nulles pour T .

Juste comme le cas des matrices, il est facile de prouver que les vecteurs propres associés aux différentes valeurs propres de l'opérateur auto-adjoint sont orthogonaux l'un à l'autre. Cela implique facilement que pour n'importe quel nombre positif δ , il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres λ de T tel que $|\lambda| \neq \delta$. En effet, $\{\lambda_n\}$ est une suite de différentes valeurs propres de T avec x_n le vecteur unitaire correspondant de λ_n pour n'importe quel n , alors (x_n) est un ensemble orthogonal et étant donné $x_n \rightarrow 0$ faiblement dans H (par la généralisation du théorème de Pythagore, par exemple). Ainsi, la compacité de T implique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\lambda_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|Tx_n\| = 0.$$

On conclut que soit T a un nombre fini de valeurs propres distinctes, soit que les valeurs propres de T forment une suite qui tendent vers 0.

Étant donné que T est compact, l'espace propre correspondant à chacune des valeurs propres non nulles est de dimension finie. Sinon, soit $\{e_n\}$ une base orthonormale de l'espace propre (qui est clairement fermé) correspondant à $\lambda \neq 0$. Alors $e_n \rightarrow 0$ faiblement dans H et par conséquent la compacité de T implique que

$$|\lambda| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|Te_n\| = 0,$$

qui est contradictoire au fait que $\lambda \neq 0$.

Soit $\{\mu_1, \mu_2, \dots\}$ une suite finie ou infinie de valeurs propres distinctes non nulles de T , arrangées de sorte que $|\mu_1| \geq |\mu_2| \dots$, et soit m_n la dimension de l'espace propre correspondant à μ_n . On note que toutes les valeurs propres de T sont réelles étant donné que T est auto-adjoint. Soit $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ la suite réelle constituée de μ_1 répétée m_1 fois, μ_2 répétée m_2 fois, \dots . Soit $\{e_1, e_2, \dots\}$ la suite de vecteurs unitaires constituant une base orthonormale pour l'espace propre de μ_1 , l'espace propre de μ_2, \dots . Étant donné que les vecteurs propres correspondants à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux, on voit que $\{e_n\}$ est un ensemble orthonormal dans H avec $Te_n = \lambda_n e_n$ pour tout n .

Soit T_0 l'opérateur compact dans H voir (proposition 3.7) défini par

$$T_0x = \sum_n \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n, \quad x \in H.$$

Soit M le sous espace fermé de H engendré par $\{e_n\}$. Alors clairement $T_0M \subset M$ et $T_0x = 0$ pour tout $x \in M^\perp$. Il est aussi clair que $TM \subset M$. En fait, $TM \subset M \implies TM^\perp \subset M^\perp$ car T est auto-adjoint. En effet, $TM \subset M \implies T^*M^\perp \subset M^\perp$ (propriétés générales) et T auto-adjoint $\implies T^* = T$. Donc $TM^\perp \subset M^\perp$. De plus l'opérateur $S = T - T_0$ n'a pas de valeur propre non nulle. En effet, si λ est une valeur propre non nulle de S avec x un vecteur propre non nul, alors

$$T\left(x - \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n\right) = Tx - T_0x = \lambda x$$

étant donné que $Te_n = \lambda_n e_n$ pour tout n . Donc $x \in M^\perp$ car le vecteur dans la parenthèse ci-dessus est dans M^\perp et $TM^\perp \subset M^\perp$. Cela implique que $T_0x = 0$ et par conséquent $Tx = \lambda x$. Donc $\lambda = \lambda_n$ pour tout n et x est dans M (un vecteur propre de λ_n). Nous avons une contradiction qui oblige x à être nul.

Étant donné que $T_0 - T$ est un opérateur compact auto-adjoint sans valeur propre non nulle, le premier paragraphe de cette démonstration montre que $T - T_0 = 0$. Par conséquent $T = T_0$. \square

Étant donné que $T_0M^\perp = \{0\}$ et $T_0 = T$, on conclut que $H = \ker(T) \oplus M$. Si on donne M_n qui désigne l'espace propre de μ_n et $M_0 = \ker(T)$ l'espace propre correspondant à la valeur propre 0, alors on a

$$H = M_0 \oplus M_1 \oplus M_2 \dots$$

Ceci généralise le résultat de la dimension finie de la diagonalisation des matrices auto-adjointes.

Si T est un opérateur compact, mais non nécessairement auto-adjoint, alors on considère en premier la décomposition polaire de $T = V|T|$, où $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ est positive et par conséquent auto-adjointe et compact et V est une isométrie partielle. Par le théorème ci-dessus, il y a un ensemble orthonormé (e_n) dans H telle que

$$|T|x = \sum_n \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n, \quad x \in H,$$

où (λ_n) est une suite décroissante de nombres positifs tendant vers 0. Soit $\sigma_n = Ve_n$ pour chaque n . Alors $\{\sigma_n\}$ est encore un ensemble orthogonal et on a

$$Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, e_n \rangle \sigma_n, \quad x \in H.$$

Cela s'appellera la décomposition canonique de l'opérateur compact T . La suite (λ_n) arrangée par ordre décroissant est appelée la suite de valeurs singulières de T . Le nombre λ_n est appelée la $n^{\text{ième}}$ valeur singulière de T et correspond à la $n^{\text{ième}}$ valeur propre de $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$.

Un opérateur linéaire dans H est appelé un opérateur de rang fini si l'image de T est de dimension finie. Clairement un opérateur de rang fini est nécessairement compact. Le résultat montre que l'ensemble des opérateurs de rang fini est dense dans $K(H)$, l'idéal des opérateurs compacts sur H .

Théorème 3.9. *Un opérateur T dans H est compact si et seulement si il y a une suite d'opérateurs T_n de rang fini telle que $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.*

Démonstration. Par le théorème 3.8, nous avons juste besoin de prouver le "seulement si". Pour cela supposons T compact. Alors par les remarques à la fin de la proposition 3.7,

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle \sigma_n, \quad x \in H,$$

où $\lambda_n \rightarrow 0$ et $\{e_n\}, \{\sigma_n\}$ sont des suites orthonormales. Pour tout $k \geq 1$, soit T_k un opérateur dans H défini par

$$T_k x = \sum_{n=1}^k \lambda_n \langle x, e_n \rangle \sigma_n, \quad x \in H.$$

Alors chaque T_k est un opérateur de rang fini et on a $\|T_k - T\| \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$. En effet, pour tout vecteur unitaire x dans H , on a

$$\|(T_k - T)x\|^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \sup\{|\lambda_n|^2 : n > k\}.$$

Le côté droit est indépendant de x et converge vers 0 quand $k \rightarrow \infty$. Par conséquent, $\|T_k - T\| \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$. \square

Certains des résultats de cette section peuvent se généraliser à un espace de Banach réflexif. Nous disons qu'un opérateur linéaire borné T sur un espace de Banach X est compact si T fait correspondre la boule unité fermée de X à un ensemble relativement compact. Il y a d'autres définitions de la compacité des opérateurs linéaires sur les espaces de Banach en littérature. Quand l'espace de Banach X est réflexif (c'est à dire, X est isomorphe au second dual de X), les deux définitions raisonnables de la compacité d'un opérateur linéaire sur X sont équivalentes.

3.2 Les opérateurs de classe Schatten-Von-Neumann

On rappelle que si T est un opérateur compact sur un espace de Hilbert séparable H , alors il existe des suites (e_n) et (σ_n) orthonormales dans H telles que

$$Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, e_n \rangle \sigma_n, \quad x \in H,$$

où λ_n est la $n^{\text{ième}}$ valeur propre singulière de T .

Soit $0 < p < \infty$, on définit la p -classe de Schatten sur H , notée par $S_p(H)$ ou simplement par S_p , l'espace de tous les opérateurs compacts sur H dont la suite des valeurs singulières (λ_n) appartiennent à l^p .

On remarque que $S_p(H)$ est un espace vectoriel. Dans le cas où $1 \leq p < \infty$, $S_p(H)$ est un espace de Banach avec la norme

$$\|T\|_p = \left[\sum_n |\lambda_n|^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Deux cas spéciaux méritent d'être mentionnés : S_1 est appelé usuellement la classe des opérateurs à trace et S_2 est appelé usuellement la classe de Hilbert-Schmidt. Nous notons que si

$$Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, e_n \rangle \sigma_n$$

est la décomposition canonique pour un opérateur T compact, alors

$$T^*x = \sum_n \overline{\lambda_n} \langle x, e_n \rangle \sigma_n$$

est la décomposition canonique de T^* . Il suit que l'opérateur T est dans S_p si et seulement T^* est dans S_p . De plus, nous avons $\|T\|_p = \|T^*\|_p$ pour tout $T \in S_p$.

Théorème 3.10. *Si T est un opérateur compact dans H avec des valeurs singulières $\{\lambda_n\}$, alors*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|Tx_n\|^2 = \sum_{n,m=1}^{+\infty} |\langle Tx_n, x_m \rangle|^2$$

pour n'importe quelle base (x_n) orthonormale de H .

Démonstration. Il suffit de prouver la première égalité, la seconde égalité va suivre en utilisant l'identité de Parseval et théorème de Fubini. Soit

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \langle x, e_k \rangle \sigma_k, \quad x \in H$$

la décomposition canonique de T . Alors pour toute base x_n orthonormale de H , l'identité de Parseval donne

$$\|Tx_n\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2 |\langle x_n, e_k \rangle|^2.$$

Appliquons de nouveau le théorème de Fubini et l'identité de Parseval, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_k |\lambda_k|^2 |\langle x_n, e_k \rangle|^2 \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, e_k \rangle|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \|e_k\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2. \end{aligned}$$

D'où la première égalité car $\|e_k\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, e_k \rangle|^2 = 1$. □

Théorème 3.11. *Si T est un opérateur compact positif dans H avec la décomposition canonique*

$$Tx = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n, \quad x \in H,$$

alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \sum_{k=1}^{\infty} \langle T\sigma_k, \sigma_k \rangle$$

pour toute base orthonormale (σ_k) de H .

Démonstration. Si (σ_k) est une base orthonormale de H , alors

$$\langle T\sigma_k, \sigma_k \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n |\langle \sigma_k, e_n \rangle|^2.$$

Par le théorème de Fubini et l'identité de Parseval, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \langle T\sigma_k, \sigma_k \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n |\langle \sigma_k, e_n \rangle|^2 \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \sigma_k, e_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \|e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n. \end{aligned}$$

□

Théorème 3.12. *Si T est dans S_1 , alors la série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_k, e_k \rangle$$

converge absolument pour toute base (e_k) orthonormale de H et la somme est indépendante du choix de la base orthonormale.

Démonstration. Supposons T positif, alors par le théorème 3.11,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_k, e_k \rangle = \sum_n \lambda_n = \|T\|_1 < +\infty$$

pour toute base (e_k) , où $\{\lambda_k\}$ est une suite de valeur singulière de T qui est indépendante de la base orthonormale (e_k) . En général nous pouvons écrire que

$$T = (T_1 - T_2) + i(T_3 - T_4),$$

avec tous les T_i positifs et dans S_1 . Cela implique que chaque série converge et la somme est indépendante de la base orthonormale $\{e_k\}$.

Ainsi les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_k, e_k \rangle$$

sont absolument convergentes et la somme est indépendante du choix de la base orthonormale. □

Remarque 3.13. Pour tous $T \in S_1$, et toute base orthonormale (e_k) de H , on écrit que

$$\text{tr}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_k, e_k \rangle$$

et on appelle cette valeur la trace de T .

Lemme 3.14. Soit T un opérateur compact strictement positif dans H et $p > 0$, alors $T \in S_p$ si et seulement si $T^p \in S_1$. Ainsi,

$$\|T\|_p^p = \|T^p\|_1.$$

Démonstration. Soit

$$Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n, \quad x \in H$$

la décomposition canonique de T . Alors $\{\lambda_n\} \cup \{0\}$ est précisément le spectre de T , $\{\lambda_n^p\}$ est le spectre de T^p moins 0, et $\{\lambda_n^p\}$ est la suite de valeurs singulières de T^p . On remarque que

$$T^p x = \sum_n \lambda_n^p \langle x, e_n \rangle e_n, \quad x \in H.$$

Supposons $T^p \in S_1$. Alors $\sum |\lambda_k^p| < \infty$. De plus, $\sum |\lambda_k|^p < \infty \iff \sum |\langle T^p e_n, e_n \rangle| < \infty$.

Or si $p \geq 1$, alors $\sum |\langle T^p e_n, e_n \rangle| < \infty \iff \sum |\langle T e_n, e_n \rangle|^p < \infty$, et si $0 < p \leq 1$, alors $\sum |\langle T^p e_n, e_n \rangle| < \infty \iff \sum |\langle T e_n, e_n \rangle|^p < \infty$, par conséquent $T \in S_p$. Il suit que

$$\|T^p\|_1 = \sum_n \lambda_n^p = \|T\|_p^p,$$

d'où le résultat. □

Théorème 3.15. Si T est un opérateur compact dans H et $p > 0$, alors $T \in S_p$ si et seulement si $|T|^p = (T^*T)^{\frac{p}{2}} \in S_1$ si et seulement si $T^*T \in S_{\frac{p}{2}}$. Ainsi,

$$\|T\|_p^p = \||T|\|_p^p = \||T|^p\|_1 = \|T^*T\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}.$$

Par conséquent, $T \in S_p$ si et seulement si $|T| \in S_p$

Démonstration. Par définition, les valeurs singulières de T sont les mêmes que celles de $|T|$. Ainsi en utilisant le lemme 3.14 on a le résultat souhaité. □

Théorème 3.16. Supposons que T est un opérateur compact de H et $p \geq 1$. Alors T est dans S_p si et seulement si

$$\sum |\langle T e_n, e_n \rangle|^p < +\infty$$

pour toute suite (e_n) orthonormale. Si T est auto-adjoint, alors nous avons aussi

$$\|T\|_p = \sup \left\{ \left[\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle T e_n, e_n \rangle|^p \right]^{\frac{1}{p}} : (e_n) \text{ orthonormale} \right\}.$$

Démonstration. D'abord supposons que T est auto-adjoint. Alors il existe un ensemble orthonormal $\{\sigma_n\}$ tel que

$$Tx = \sum \lambda_n \langle x, \sigma_n \rangle \sigma_n, \quad x \in H,$$

où $\{\lambda_n\}$ est une suite de valeurs propres de T et

$$\sum |\lambda_n|^p = \|T\|_p^p.$$

Étant donné $\lambda_n = \langle T\sigma_n, \sigma_n \rangle$, nous avons

$$\begin{aligned} \|T\|_p^p &= \sum |\langle T\sigma_n, \sigma_n \rangle|^p \\ &\leq \sup \left\{ \sum |\langle Te_n, e_n \rangle|^p : \{e_n\} \text{ orthonormal} \right\}. \end{aligned}$$

Par contre, si $\{e_n\}$ est un ensemble orthonormal dans H , alors pour tout $m \geq 1$

$$\langle Te_m, e_m \rangle = \sum_n \lambda_n |\langle e_m, \sigma_n \rangle|^2.$$

Soit q le conjugué de p c'est à dire $q = +\infty$ si $p = 1$. D'après l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} |\langle Te_m, e_m \rangle| &\leq \sum |\lambda_n| |\langle e_m, \sigma_n \rangle|^{\frac{2}{p}} |\langle e_m, \sigma_n \rangle|^{\frac{2}{q}} \\ &\leq \left[\sum |\lambda_n| |\langle e_m, \sigma_n \rangle|^2 \right]^{\frac{2}{p}} \left[\sum |\lambda_n| |\langle e_m, \sigma_n \rangle|^2 \right]^{\frac{2}{q}}. \end{aligned}$$

Étant donné que

$$\sum_n |\langle e_m, \sigma_n \rangle|^2 \leq \|e_m\|^2 = 1,$$

on a

$$\begin{aligned} \sum_n |\langle Te_m, e_m \rangle|^p &\leq \sum_m \sum_n |\lambda_n|^p |\langle e_m, \sigma_n \rangle|^2 \\ &= \sum_n |\lambda_n|^p \leq \sum_m |\langle e_m, \sigma_n \rangle|^2 \\ &\leq \sum_n |\lambda_n|^p. \end{aligned}$$

En prenant le supremum de tous les ensembles $\{e_n\}$, on obtient

$$\sup \left\{ \sum |\langle Te_n, e_n \rangle|^p : \{e_n\} \text{ orthonormal} \right\} \leq \|T\|_p^p.$$

Cela prouve les résultats souhaités quand T est auto-adjoint.

En général, nous écrivons que $T = T_1 + iT_2$, où

$$T_1 = \frac{T + T^*}{2}, \quad T_2 = \frac{T - T^*}{2i},$$

dont chacun est auto-adjoint. Il est clair que T est dans S_p si et seulement si T_1 et T_2 sont tous dans S_p . Ainsi,

$$|\langle Te_n, e_n \rangle|^2 = |\langle T_1 e_n, e_n \rangle|^2 + |\langle T_2 e_n, e_n \rangle|^2,$$

par conséquent il existe une constante positive C dépendante de p telle que

$$C^{-1} |\langle Te_n, e_n \rangle|^p \leq |\langle T_1 e_n, e_n \rangle|^p + |\langle T_2 e_n, e_n \rangle|^p \leq C |\langle Te_n, e_n \rangle|^p$$

Le résultat souhaité découle alors du cas où T est auto-adjoint. \square

Une conséquence de la première assertion du théorème 3.15 ci-dessus est que la classe de Schatten S_p est un espace vectoriel. Ce fait pour tout $p > 0$ vient également d'un corollaire de la section suivante. La seconde assertion du théorème 3.15 est fautive quand $p > 1$ et T est non auto-adjoint. Par exemple, si $\{e_1, e_2\}$ est la base ordinaire de $H = \mathbb{C}^2$ et T est l'opérateur de H défini par

$$Tz = \langle z, e_2 \rangle e_1, \quad z \in H.$$

Alors $\|T\|_p = 1$ pour tout $p > 0$. Par contre, n'importe quelle base orthonormale de $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ de \mathbb{C}^2 s'écrira

$$\sigma_1 = (z_1, z_2), \quad \sigma_2 = e^{i\theta}(\bar{z}_1, \bar{z}_2),$$

où $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ et θ est réel. Il suit que

$$|\langle T\sigma_k, \sigma_k \rangle| = |z_1 z_2|, \quad k = 1, 2,$$

et

$$\sup \left[\sum_{k=1}^2 |\langle T\sigma_k, \sigma_k \rangle|^p \right]^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}} \sup |z_1 z_2| = 2^{\frac{1}{p}-1},$$

ce qui est différent de $\|T\|_p$ à moins que $p = 1$.

Théorème 3.17. *Supposons que T est un opérateur compact dans H et $p \geq 1$. Alors T est dans S_p si et seulement si*

$$\sum |\langle Te_n, \sigma_n \rangle|^p < +\infty$$

pour toutes les bases orthonormales (e_n) et (σ_n) . Si T est positif, alors nous avons aussi

$$\|T\|_p = \sup \left\{ \left[\sum |\langle Te_n, \sigma_n \rangle|^p \right]^{\frac{1}{p}} : (e_n) \text{ et } (\sigma_n) \text{ sont orthonormales} \right\}.$$

Démonstration. D'abord supposons que T est auto-adjoint. Alors il existe un ensemble orthonormal $\{\sigma_n\}$ tel que

$$Tx = \sum \lambda_n \langle x, \sigma_n \rangle \sigma_n, \quad x \in H,$$

où $\{\lambda_n\}$ est une suite de valeurs propres de T et

$$\sum |\lambda_n|^p = \|T\|_p^p.$$

Étant donné $\lambda_n = \langle T\sigma_n, \sigma_n \rangle$, nous avons

$$\begin{aligned} \|T\|_p^p &= \sum |\langle T\sigma_n, \sigma_n \rangle|^p \\ &\leq \sup \left\{ \sum |\langle Te_n, e_n \rangle|^p : (e_n) \text{ orthonormale} \right\}. \end{aligned}$$

Par contre, si (e_n) est un ensemble orthonormal dans H , alors pour tout $m \geq 1$, on a

$$\langle Te_m, e_m \rangle = \sum_n \lambda_n |\langle e_m, \sigma_n \rangle|^2.$$

Soit q le conjugué de p , $1/p + 1/q = 1$, $p, q \geq 1$. D'après l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} |\langle Te_m, e_m \rangle| &\leq \sum |\lambda_n| |\langle e_m, \sigma_n \rangle|^{\frac{2}{p}} |\langle e_m, \sigma_n \rangle|^{\frac{2}{q}}, \\ &\leq \left[\sum |\lambda_n| |\langle e_m, \sigma_n \rangle|^2 \right]^{\frac{2}{p}} \left[\sum |\lambda_n| |\langle e_m, \sigma_n \rangle|^2 \right]^{\frac{2}{q}}. \end{aligned}$$

Étant donné que

$$\sum_n |\langle e_m, \sigma_n \rangle|^2 \leq \|e_m\|^2 = 1,$$

on a

$$\begin{aligned} \sum_n |\langle Te_m, e_m \rangle|^p &\leq \sum_m \sum_n |\lambda_n|^p |\langle e_m, \sigma_n \rangle|^2, \\ &= \sum_n |\lambda_n|^p \leq \sum_m |\langle e_m, \sigma_n \rangle|^2, \\ &\leq \sum_n |\lambda_n|^p. \end{aligned}$$

En prenant le supremum de tous les bases orthonormales (e_n) , on obtient

$$\sup \left\{ \sum |\langle Te_n, e_n \rangle|^p : (e_n) \text{ orthonormal} \right\} \leq \|T\|_p^p.$$

Cela prouve les résultats souhaités quand T est auto-adjoint.

Dans le cas général, nous écrivons $T = T_1 + iT_2$, où

$$T_1 = \frac{T + T^*}{2}, \quad T_2 = \frac{T - T^*}{2i},$$

dont chaque opérateur est auto-adjoint. Il est clair que T est dans S_p si et seulement si T_1 et T_2 sont tous dans S_p . Ainsi,

$$|\langle Te_n, e_n \rangle|^2 = |\langle T_1 e_n, e_n \rangle|^2 + |\langle T_2 e_n, e_n \rangle|^2,$$

et donc il existe une constante positive C dépendante de p telle que

$$C^{-1} |\langle Te_n, e_n \rangle|^p \leq |\langle T_1 e_n, e_n \rangle|^p + |\langle T_2 e_n, e_n \rangle|^p \leq C |\langle Te_n, e_n \rangle|^p$$

Le résultat souhaité découle alors du cas où T est auto-adjoint. \square

Proposition 3.18. *Supposons que T est un opérateur compact dans H et $0 < p \leq 2$. Alors pour toute base orthonormale $\{e_n\}$ de H on a*

$$\|T\|_p^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle Te_n, e_k \rangle|^p.$$

Démonstration. On suppose que

$$T = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \langle \cdot, f_m \rangle g_m$$

est la décomposition canonique de T , où $\{f_n\}$ et $\{g_n\}$ sont orthonormales dans H . Étant donné que $\frac{p}{2} \leq 1$, d'après l'inégalité de Hölder on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle Te_n, e_k \rangle|^p \geq \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\langle Te_n, e_k \rangle|^2 \right]^{\frac{p}{2}} = \|Te_n\|^p.$$

De la décomposition

$$Te_n = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \langle e_n, f_m \rangle g_m$$

on déduit que

$$\|Te_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m|^2 |\langle e_n, f_m \rangle|^2.$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle Te_n, e_k \rangle|^p \geq \left[\sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m|^2 |\langle e_n, f_m \rangle|^2 \right]^{\frac{p}{2}}.$$

Il est clair qu'à $m \mapsto |\langle e_n, f_m \rangle|^2$ est une mesure de probabilité dans un ensemble d'entiers positifs, ainsi l'hypothèse $\frac{2}{p} \geq 1$ avec l'inégalité de Hölder impliquent que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle Te_n, e_k \rangle|^p &\geq \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m|^p |\langle e_n, f_m \rangle|^2 \\ \iff \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle Te_n, e_k \rangle|^p &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m|^p |\langle e_n, f_m \rangle|^2 \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p \sum_{m=1}^{\infty} |\langle e_n, f_m \rangle|^2 \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p \|e_n\|^2 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle Te_n, e_k \rangle|^p &\geq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p = \|T\|_p^p \end{aligned}$$

d'où le théorème. □

On va admettre le corollaire suivant

Corollaire 3.19. *On suppose que T_1 et T_2 sont des opérateurs compacts dans H et $\lambda_n(T)$ est une suite de valeurs singulières de T . Alors pour n'importe quels n et m positifs on a*

$$\lambda_{n+m+1}(T_1 + T_2) \leq \lambda_{n+1}(T_1) + \lambda_{m+1}(T_2),$$

et

$$\lambda_{n+m+1}(T_1 T_2) \leq \lambda_{n+1}(T_1) \lambda_{m+1}(T_2).$$

Proposition 3.20. *On suppose que A est un opérateur borné surjectif dans H et T est aussi un opérateur linéaire borné dans H . Alors A^*TA est dans S_p si et seulement si T est dans S_p .*

Démonstration. Si T est dans S_p , alors $S = A^*TA \in S_p$, car S_p est un idéal à gauche et à droite. Il est clair que la classe de Schatten S_p est un espace vectoriel, c'est dire qu'il est stable pour l'addition et le produit par un scalaire. Il découle du corollaire ci-dessus que S_p est clairement un idéal à gauche et à droite dans $L(H)$, à savoir, les opérateurs AB et BA appartiennent à S_p à chaque fois que $A \in S_p$ et $B \in L(H)$.

Soit $X = H \ominus \ker(A)$. Alors $A : X \rightarrow H$ est borné, injectif et surjectif, ainsi B son inverse est borné par le théorème d'isomorphisme de Banach. Donc B est un opérateur linéaire borné dans H avec $AB = I$, l'opérateur identité de H . Cet opérateur B est appelé inverse à droite de A .

Maintenant, en supposant que $S = A^*TA \in S_p$, alors l'opérateur B^*SB est aussi dans S_p , une fois encore par ce que S_p est un idéal dans les deux sens. Ainsi

$$\begin{aligned} B^*SB &= B^*(A^*TA)B = B^*A^*TAB, \\ &= (AB)^*T(AB), \\ &= I^*TI = T. \end{aligned}$$

On conclut aussi que T est dans S_p . □

Proposition 3.21. *Supposons que A est un opérateur positif dans un espace de Hilbert H et x un vecteur unitaire de H . Alors*

1. $\langle A^p x, x \rangle \geq \langle Ax, x \rangle^p$, pour tout $p \geq 1$,
2. $\langle A^p x, x \rangle \leq \langle Ax, x \rangle^p$, pour tout $0 < p \leq 1$.

Démonstration. Soit

$$A = \int_0^\infty t dE(t)$$

la décomposition spectrale de l'opérateur A positif. Alors pour tout $p > 0$ et $x \in H$ on a

$$\begin{aligned} A^p &= \int_0^\infty t^p dE(t), \\ \langle A^p x, x \rangle &= \int_0^\infty t^p d\langle E(t)x, x \rangle. \end{aligned}$$

Si x est un vecteur unitaire alors

$$\int_0^\infty d\langle E(t)x, x \rangle = 1$$

□

Corollaire 3.22. *Supposons que T est un opérateur positif dans H et $\{e_n\}$ une base orthonormale dans H . Si $p \geq 1$, alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle Te_n, e_n \rangle^p < \infty$$

est nécessaire pour tout $T \in S_p$; si $0 < p \leq 1$, alors la condition ci-dessus est suffisante pour $T \in S_p$.

Démonstration. Par la proposition 3.21, de fait que $T \in S_p$ si et seulement si $T^p \in S_1$, et de fait que $T^p \in S_1$ si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} \langle T^p e_n, e_n \rangle < \infty$. \square

Théorème 3.23. *Supposons que T est un opérateur compact dans H et $p \geq 2$. Alors T est dans S_p si et seulement si*

$$\sum \|Te_n\|^p < +\infty$$

pour tout ensemble $\{e_n\}$ orthonormal dans H . De plus

$$\|T\|_p = \sup \left\{ \left[\sum \|Te_n\|^p \right]^{\frac{1}{p}} : \{e_n\} \text{ orthonormal} \right\}.$$

Démonstration. D'après le théorème 3.15

$$\|T\|_p^2 = \|T^*T\|^{\frac{p}{2}}.$$

En utilisant le théorème 3.16 et le fait que

$$\|Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x \rangle$$

pour tout vecteur $x \in H$.

On a mentionné au début de cette section que pour $p \geq 1$ l'espace S_p est complet sous la norme

$$\|T\|_p = \left[\text{tr} \left((T^*T) \right) \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\sum_n \lambda_n^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

où (λ_n) est une suite de valeurs singulières de T . Bien qu'il n'est pas évident S_p est complet, la preuve est facile pour $p = 2$ et $0 < p \leq 2$ car pour $\{e_n\}$, $\sum |\langle Te_n, e_m \rangle|^2 < \infty$ et donc $T \in S_2$. \square

3.3 Application de la transformée de Bérézin aux opérateurs compacts

Il est clair que $K(z, z) \rightarrow \infty$ quand $|z| \rightarrow 1^-$ avec K le noyau reproduisant de Bergman. Si w est restreint à un sous ensemble compact de \mathbb{D} , alors $K(z, w)$ est borné. Il suit que $k_z \rightarrow 0$ faiblement dans A_α^2 quand $|z| \rightarrow 1^-$.

Aussi on rappelle du chapitre 2 que

$$K(z, w) = K_\alpha(z, w) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k(z) \overline{e_k(w)}$$

pour n'importe quelle base orthonormale $\{e_k\}$ de A_α^2 .

Théorème 3.24. *Si T est un opérateur positif dans A_α^2 , alors T est un opérateur à trace si et seulement si $\tilde{T} \in L^1(\mathbb{D}, d\lambda)$, où*

$$d\lambda(z) = \frac{dA(z)}{(1 - |z|^2)^2}$$

est la mesure réelle invariante de Möbius dans \mathbb{D} . De plus, la formule de la trace

$$\text{tr}(T) = (\alpha + 1) \int_{\mathbb{D}} \tilde{T}(z) d\lambda(z) \quad (3.3.1)$$

est toujours vérifiée.

3.3. APPLICATION DE LA TRANSFORMÉE DE BÉRÉZIN AUX OPÉRATEURS COMPACTS 41

Démonstration. Fixons $\{e_n\}$ une base orthonormale pour A_α^2 . Étant donné que T est positif, il appartient à la classe des opérateurs à trace si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle Te_n, e_n \rangle < \infty.$$

Soit $S = \sqrt{T}$. Par le théorème de Fubini, la propriété de noyau reproduisant de K_z , et l'identité de Parseval, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(T) &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle Te_n, e_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \|Se_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{D}} |Se_n(z)|^2 dA_\alpha(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |Se_n(z)|^2 \right] dA_\alpha(z) = \int_{\mathbb{D}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \langle Se_n, K_z \rangle^2 \right] dA_\alpha(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, SK_z \rangle^2 \right] dA_\alpha(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \|SK_z\|^2 dA_\alpha(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \langle TK_z, K_z \rangle dA_\alpha(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \tilde{T}(z) K(z, z) dA_\alpha(z). \end{aligned}$$

Comme

$$K(z, z) = K_\alpha(z, z) = \frac{1}{(1 - |z|^2)^{2+\alpha}},$$

et

$$dA_\alpha(z) = (\alpha + 1)(1 - |z|^2)^\alpha dA(z),$$

on a

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(T) &= \int_{\mathbb{D}} (\alpha + 1)(1 - |z|^2)^\alpha \tilde{T}(z) \frac{1}{(1 - |z|^2)^{2+\alpha}} dA(z) \\ \operatorname{tr}(T) &= (\alpha + 1) \int_{\mathbb{D}} \tilde{T}(z) d\lambda(z). \end{aligned}$$

En particulier, $\tilde{T} \in L^1(\mathbb{D}, d\lambda)$ si et seulement si $T \in S_1$. \square

Corollaire 3.25. *Si T est un opérateur à trace sur A_α^2 , alors \tilde{T} est dans $L^1(\mathbb{D}, d\lambda)$ et la formule de la trace 3.3.1 est toujours vérifiée.*

Démonstration. Nous réduisons d'abord le cas où T est auto-adjoint. Pour cela on utilise la décomposition standard

$$T = \frac{T + T^*}{2} + i \frac{T - T^*}{2i}.$$

Une fois que T est auto-adjoint, nous pouvons restreindre la discussion au cas où T est positif. Pour cela on utilisera la décomposition suivante

$$T = \frac{|T| + T}{2} - \frac{|T| - T}{2}.$$

Si T est positif, le résultat souhaité est obtenu par le théorème 3.24. \square

Dans la suite, nous désignons par S_p , où $0 < p < \infty$, la p -classe de Schatten d'opérateurs dans A_α^2

Théorème 3.26. *Supposons que T est un opérateur positif dans A_α^2 .*

1. *Si $1 \leq p < \infty$ et $T \in S_p$, alors \tilde{T} est dans $L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$.*
2. *Si $0 \leq p \leq 1$ et $\tilde{T} \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$, alors $T \in S_p$.*

Démonstration. $1 \leq p < \infty$, alors par la proposition 3.21,

$$\tilde{T}^p(z) \geq (\tilde{T}(z))^p, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Pour l'opérateur positif T , $T \in S_p$ implique que T^p est un opérateur à trace, ainsi il suit du théorème 3.24 que

$$\int_{\mathbb{D}} [(\tilde{T}(z))^p] d\lambda(z) \leq \int_{\mathbb{D}} ((\tilde{T}^p(z))) d\lambda(z) = tr(T^p) < \infty.$$

□

Corollaire 3.27. *Si $1 \leq p < \infty$ et $T \in S_p$, alors $\tilde{T} \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$.*

Démonstration. En réunissant le théorème 3.26 et le corollaire 3.25, du fait qu'on peut écrire T comme combinaison linéaire finie d'opérateurs positifs dans S_p on conclut le théorème. □

Pour n'importe quel $z \in \mathbb{D}$, nous utilisons P_z pour désigner la projection orthogonale de A_α^2 sur le sous espace unidimensionnel généré par k_z . Ainsi

$$P_z(f) = \langle f, k_z \rangle k_z, \quad f \in A_\alpha^2.$$

Il est clair que chaque P_z est un opérateur de rang 1 positif avec $tr(P_z) = 1$

Lemme 3.28. *Soit T un opérateur linéaire borné sur A_α^2 . Alors*

$$\tilde{T}(z) = tr(TP_z),$$

pour n'importe quel $z \in \mathbb{D}$.

Démonstration. Soit $\{e_n\}$ une base orthonormale de A_α^2 avec $e_1 = k_z$. Alors

$$tr(TP_z) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle TP_z e_k, e_k \rangle = \langle TP_z k_z, k_z \rangle = \langle T k_z, k_z \rangle = \tilde{T}(z),$$

d'où le résultat. □

Lemme 3.29. *Supposons que $1 \leq p < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $T \in S_p$ et si $S \in S_q$, alors*

1. *TS et ST sont dans S_1 ,*
2. *$tr(ST) = tr(TS)$,*
3. *$|tr(TS)| \leq \|T\|_p \|S\|_q$.*

Démonstration. Nous donnons un exemple de démonstration quand les opérateurs S, T sont diagonaux par rapport à la même base orthonormale de l'espace H . On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(ST) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(S) \lambda_k(T) \right) \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k(S)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k(T)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|S\|_{S_p} \|T\|_{S_q} \\ |\operatorname{tr}(ST)| &\leq \|S\|_{S_p} \|T\|_{S_q} \end{aligned}$$

avec le dual $(S_p)' = S_q$. \square

3.4 Les classes spécifiques d'opérateurs compacts

Dans cette partie, nous nous intéressons principalement aux classes d'opérateurs compacts avec comportement logarithmique des valeurs singulières. Pour faire face à ces classes, on introduit une définition appropriée aussi bien que certaines modifications des notions classiques présentées dans la section précédente. Pour commencer, on considère un décalage de la fonction de comptage,

$$\tilde{n}(s, A) = n(s, A) + 2. \quad (3.4.1)$$

Pour $\gamma > 0$, on note dans cette partie \mathcal{S}_∞ l'ensemble des opérateurs compacts et $s_n(A)$ la $n^{\text{ième}}$ valeur singulière de A , l'ensemble

$$\begin{aligned} \Sigma_\gamma &= \left\{ A \in \mathcal{S}_\infty : s_n(A) = O\left(\frac{1}{(\log(n+1))^\gamma}\right) \right\} \\ &= \left\{ A \in \mathcal{S}_\infty : \sup_{n \geq 1} (\log n)^\gamma s_n(A) < +\infty \right\}, \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_\gamma^0 &= \left\{ A \in \mathcal{S}_\infty : s_n(A) = o\left(\frac{1}{(\log(n+1))^\gamma}\right) \right\} \\ &= \left\{ A \in \mathcal{S}_\infty : \lim_{n \rightarrow +\infty} (\log n)^\gamma s_n(A) = 0 \right\}. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Lemme 3.30. *Soit A un opérateur compact.*

1. *Supposons que*

$$\sup_{n \geq 1} (\log(n+1))^\gamma s_n(A) = C_1 < \infty,$$

alors

$$\sup_{s > 0} s^{1/\gamma} \log \tilde{n}(s, A) \leq C_2, \text{ avec } C_2 = \log(e^{C_1^{1/\gamma}} + 2) + 2. \quad (3.4.4)$$

2. *Inversement, supposons que*

$$\sup_{s > 0} s^{1/\gamma} \log \tilde{n}(s, A) = C_3 < \infty,$$

alors

$$\sup_{n \geq 1} (\log n)^\gamma s_n(A) \leq C_4, \quad C_4 = C_3^\gamma.$$

3. La relation

$$s_n(A) = \frac{C}{(\log(n+1))^\gamma} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow +\infty,$$

est équivalente à

$$\tilde{n}(s, A) = \frac{C^{1/\gamma}}{s^{1/\gamma}} (1 + o(1)), \quad s \rightarrow 0^+.$$

Démonstration. Nous commençons par (1). Pour un $s > 0$, on prend le plus petit n tel que $C_1/(\log(n+1))^\gamma \leq s$, c'est à dire $n = \lceil \exp((C_1/s)^{\frac{1}{\gamma}}) \rceil$. En particulier, nous avons $n(s, A) \leq n$, et

$$\tilde{n}(s, A) = n(s, A) + 2 \leq e^{(C_1/s)^{1/\gamma}} + 2.$$

Par conséquent, nous voyons que $\tilde{n}(s, A) \leq e^{C_1^{1/\gamma}} + 2$ pour $s \geq 1$, et, pour $0 < s < 1$

$$\log \tilde{n}(s, A) \leq \log e^{(C_1/s)^{1/\gamma}} (1 + 2e^{-(C_1/s)^{1/\gamma}}) \leq \left(\frac{C_1}{s}\right)^{1/\gamma} + 2.$$

Donc, la relation (3.4.4) suit avec $C_2 = \log(e^{C_1^{1/\gamma}} + 2) + 2$.

Le calcul pour le point (2) est simple. En effet, on fixe $s > 0$, et soit $n := n(s, A)$; cela signifie que $s_{n+1}(A) \leq s$. Nous avons

$$s^{1/\gamma} \log(n+1) = s^{1/\gamma} \log(n(s, A) + 1) \leq s^{1/\gamma} \log \tilde{n}(s, A) \leq C_3,$$

et

$$s_{n+1}(A) \leq s \leq \left(\frac{C_3}{\log(n+1)}\right)^\gamma,$$

donc on prend $C_4 = C_3^\gamma$.

Comme la preuve du point (3) se démontre de façon similaire cette démonstration est laissée au lecteur. \square

Pour la suite plusieurs remarques s'imposent. La première, on peut travailler de façon similaire respectivement avec la fonction de comptage habituelle mais décalée $n(\cdot, A)$ et $\tilde{n}(\cdot, A)$. Nous verrons que $\tilde{n}(\cdot, A)$ est plus pratique pour nos besoins du point de vue technique. La seconde, les classes Σ_γ et Σ_γ^0 peuvent être définies de manière équivalente comme

$$\begin{aligned} \Sigma_\gamma &= \left\{ A \in \mathcal{S}_\infty : \log \tilde{n}(s, A) = O\left(\frac{1}{s^{1/\gamma}}\right), \quad s > 0 \right\} \\ &= \left\{ A \in \mathcal{S}_\infty : \sup_{s>0} s^{1/\gamma} \log \tilde{n}(s, A) < +\infty \right\}, \\ \Sigma_\gamma^0 &= \left\{ A \in \mathcal{S}_\infty : \log \tilde{n}(s, A) = o\left(\frac{1}{s^{1/\gamma}}\right), \quad s > 0 \right\} \\ &= \left\{ A \in \mathcal{S}_\infty : \lim_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log \tilde{n}(s, A) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Encore une fois, soit $A \in \Sigma_\gamma$. Les quantités suivantes seront utiles pour la suite

$$\Delta_\gamma(A) = \limsup_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log \tilde{n}(s, A), \quad \delta_\gamma(A) = \liminf_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log \tilde{n}(s, A). \quad (3.4.5)$$

Proposition 3.31. *Soit $A, B \in \Sigma_\gamma$. Alors*

$$\Delta_\gamma(A+B)^{\gamma/(1+\gamma)} \leq \Delta_\gamma(A)^{\gamma/(1+\gamma)} + \Delta_\gamma(B)^{\gamma/(1+\gamma)}, \quad (3.4.6)$$

$$|\Delta_\gamma(A)^{\gamma/(1+\gamma)} - \Delta_\gamma(B)^{\gamma/(1+\gamma)}| \leq \Delta_\gamma(A-B)^{\gamma/(1+\gamma)}, \quad (3.4.7)$$

$$|\delta_\gamma(A)^{\gamma/(1+\gamma)} - \delta_\gamma(B)^{\gamma/(1+\gamma)}| \leq \Delta_\gamma(A-B)^{\gamma/(1+\gamma)}. \quad (3.4.8)$$

Démonstration. Essentiellement la preuve de cette proposition vient de Birman-Solomyak [1]. On remarquera que pour $a, b \geq 2$, on a $\log(a+b) \leq \log a + \log b$. Il est clair que pour $T_1, T_2 \in S_\infty$

$$n(s, T_1 + T_2) \leq n(s_1, T_1) + n(s_2, T_2),$$

où $s = s_1 + s_2, s_1, s_2 > 0$, voir [1]. Nous voyons aussi que

$$\tilde{n}(s, T_1 + T_2) \leq \tilde{n}(s_1, T_1) + \tilde{n}(s_2, T_2).$$

Soient $A, B \in \Sigma_\gamma$. En prenant arbitrairement un paramètre $\tau, 0 < \tau < 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta_\gamma(A+B) &= \limsup_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log \tilde{n}(s, A+B) = \limsup_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log \tilde{n}(\tau s + (1-\tau)s, A+B) \\ &\leq \limsup_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log[\tilde{n}(\tau s, A) + \tilde{n}((1-\tau)s, B)] \\ &\leq \limsup_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log \tilde{n}(\tau s, A) + \limsup_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log \tilde{n}((1-\tau)s, B) \\ &\leq \frac{1}{\tau^{1/\gamma}} \limsup_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log \tilde{n}(s, A) + \frac{1}{(1-\tau)^{1/\gamma}} \limsup_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log \tilde{n}(s, B) \\ &\leq \frac{1}{\tau^{1/\gamma}} \Delta_\gamma(A) + \frac{1}{(1-\tau)^{1/\gamma}} \Delta_\gamma(B). \end{aligned}$$

En minimisant la quantité à droite de l'inégalité par rapport à τ , nous arrivons à (3.4.6).

Nous continuons avec la preuve de la seconde relation (3.4.7). Pour $A, B \in \Sigma_\gamma$, avec $A = B + T, T := A - B$ et on remarque que $T \in \Sigma_\gamma$ par (3.4.6). Par conséquent,

$$\Delta_\gamma(A)^{\gamma/(1+\gamma)} \leq \Delta_\gamma(B)^{\gamma/(1+\gamma)} + \Delta_\gamma(T)^{\gamma/(1+\gamma)} = \Delta_\gamma(B)^{\gamma/(1+\gamma)} + \Delta_\gamma(A-B)^{\gamma/(1+\gamma)},$$

et, en interchangeant les rôles de A et B ,

$$\Delta_\gamma(B)^{\gamma/(1+\gamma)} \leq \Delta_\gamma(A)^{\gamma/(1+\gamma)} + \Delta_\gamma(-T)^{\gamma/(1+\gamma)} = \Delta_\gamma(A)^{\gamma/(1+\gamma)} + \Delta_\gamma(A-B)^{\gamma/(1+\gamma)}.$$

Par conséquent, la relation (3.4.7) est démontrée. La preuve de l'inégalité (3.4.8) est similaire aux précédents raisonnements sauf en deux points : le premier, $\delta_\gamma(A) \leq \Delta_\gamma(A)$ pour un $A \in \Sigma_\gamma$; le second, pour les fonctions $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\liminf_{s \rightarrow 0^+} (f(s) + g(s)) \leq \limsup_{s \rightarrow 0^+} f(s) + \liminf_{s \rightarrow 0^+} g(s).$$

Fin de la preuve. □

Proposition 3.32 (Lemme de Ky-Fan). *Soient $A \in \Sigma_\gamma$ et $B \in \Sigma_\gamma^0$. Alors*

$$\Delta_\gamma(A+B) = \Delta_\gamma(A), \quad \delta_\gamma(A+B) = \delta_\gamma(A). \quad (3.4.9)$$

Démonstration. On montre d'abord la première relation (3.4.9). Supposons que $A \in \Sigma_\gamma$ et $B \in \Sigma_\gamma^0$. En argumentant comme dans la preuve de la proposition 4.1, nous avons pour τ , $0 < \tau < 1$,

$$\begin{aligned} \Delta_\gamma(A+B) &= \limsup_{s \rightarrow 0+} s^{1/\gamma} \log \tilde{n}(s, A+B) \leq \limsup_{s \rightarrow 0+} s^{1/\gamma} \log [\tilde{n}(\tau s, A) + \tilde{n}((1-\tau)s, B)] \\ &\leq \limsup_{s \rightarrow 0+} s^{1/\gamma} \log \tilde{n}(\tau s, A) + \limsup_{s \rightarrow 0+} s^{1/\gamma} \log \tilde{n}((1-\tau)s, B) \\ &= \frac{1}{\tau^{1/\gamma}} \limsup_{s \rightarrow 0+} s^{1/\gamma} \log \tilde{n}(s, A) + \frac{1}{(1-\tau)^{1/\gamma}} \limsup_{s \rightarrow 0+} s^{1/\gamma} \log \tilde{n}(s, B) \\ &= \frac{1}{\tau^{1/\gamma}} \Delta_\gamma(A) + \frac{1}{(1-\tau)^{1/\gamma}} \Delta_\gamma(B) = \frac{1}{\tau^{1/\gamma}} \Delta_\gamma(A). \end{aligned}$$

Ci-dessus, nous avons utilisé $B \in \Sigma_\gamma^0$, et, par conséquent $\Delta_\gamma(B) = 0$. L'inégalité ci-dessus est valable pour tout $\tau \in (0, 1)$, et en prenant la limite quand $\tau \rightarrow 1-$, nous trouvons l'inégalité

$$\Delta_\gamma(A+B) \leq \Delta_\gamma(A).$$

En interchangeant les rôles de $A+B$ et A , on obtient l'inégalité opposé, aussi bien que la première relation (3.4.9).

On obtient la seconde relation dans (3.4.9), nous argumentons de la même façon en remplaçant \limsup par \liminf . \square

Proposition 3.33. *On a :*

1. si $A, B \in \Sigma_\gamma$, alors $\Delta_{2\gamma}(AB) \leq \Delta_\gamma(A) + \Delta_\gamma(B)$, et, par conséquent, $AB \in \Sigma_{2\gamma}$.
2. si $A \in \Sigma_\gamma$ et $B \in \Sigma_\gamma^0$, alors $\Delta_{2\gamma}(AB) = 0$, en particulier, $AB \in \Sigma_{2\gamma}^0$.

Démonstration. Nous commençons par prouver la seconde relation de cette proposition. On se rappelle que pour $s > 0$ and $A, B \in \mathcal{S}_\infty$, on a

$$n(s, AB) \leq n(s_1, A) + n(s_2, B),$$

où $s = s_1 s_2$ et $s_1, s_2 > 0$, voir [1]. Nous introduisons une fonction auxiliaire $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ telle que $\lim_{s \rightarrow 0+} f(s) = +\infty$; son choix précis sera donné plus tard. En faisant un changement de variable $s \mapsto \sqrt{s}$ dans la troisième ligne, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta_{2g}(AB) &= \limsup_{s \rightarrow 0+} s^{1/(2\gamma)} \log \tilde{n}((f(s)\sqrt{s}) \cdot (\sqrt{s}/f(s)), AB) \\ &\leq \limsup_{s \rightarrow 0+} s^{1/(2\gamma)} \log \tilde{n}((f(s)\sqrt{s}), A) + \limsup_{s \rightarrow 0+} s^{1/(2\gamma)} \log \tilde{n}((\sqrt{s}/f(s)), B) \\ &\leq \limsup_{s \rightarrow 0+} s^{1/\gamma} \log \tilde{n}((f(s)s), A) + \limsup_{s \rightarrow 0+} s^{1/\gamma} \log \tilde{n}((s/f(s)), B) \\ &\leq \limsup_{s \rightarrow 0+} \frac{1}{f(s)^{1/\gamma}} [f(s)s]^{1/\gamma} \log \tilde{n}((f(s)s), A) \tag{3.4.10} \\ &\quad + \limsup_{s \rightarrow 0+} f(s)^{1/\gamma} [s/f(s)]^{1/\gamma} \log \tilde{n}((s/f(s)), B). \tag{3.4.11} \end{aligned}$$

Posons

$$F(s) = [s/f(s)]^{1/\gamma} \log \tilde{n}((s/f(s)), B).$$

Comme $B \in \Sigma_\gamma^0$ et $\lim_{s \rightarrow 0^+} f(s) = 0$, nous avons $\lim_{s \rightarrow 0^+} F(s) = 0$. Maintenant, il existe toujours une fonction f telle que

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} f(s)^{1/\gamma} F(s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} f(s) = +\infty.$$

Par conséquent, le terme dans (3.4.11) tend vers zéro quand $s \rightarrow 0^+$. Aussi pour $A \in \Sigma_\gamma$, nous avons

$$\limsup_{s \rightarrow 0^+} [f(s)s]^{1/\gamma} \log \tilde{n}((f(s)s), A) < +\infty,$$

et donc le terme dans (3.4.10) ainsi tend vers zéro. Ainsi la seconde propriété de la proposition est prouvée.

La première propriété utilise les mêmes idées et est aussi simple, et on va l'admettre. \square

3.4.1 Orthogonalité asymptotique d'un ensemble d'opérateurs

Soit A un opérateur compact et

$$A = \sum_{k=1}^L A_k.$$

Supposons aussi que $A_k \in \mathcal{S}_\infty$, $k = 1, \dots, L$. A quelques détails techniques près, la proposition suivante est similaire au [9, Théorème 2.2] de Pushnitski .

Proposition 3.34. *Supposons que A, A_k , $k = 1, \dots, L$, comme ci-dessus et la famille $\{A_k\}_k$ est orthogonale asymptotiquement c'est à dire*

$$A_k^* A_j, A_k A_j^* \in \Sigma_{2\gamma}^0, \quad j \neq k, \quad j, k = 1, \dots, L. \quad (3.4.12)$$

Alors

$$\Delta_\gamma(A) = \limsup_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log \left(\sum_{k=1}^L \tilde{n}(s, A_k) \right), \quad \delta_\gamma(A) = \liminf_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log \left(\sum_{k=1}^L \tilde{n}(s, A_k) \right). \quad (3.4.13)$$

Démonstration. Soit $H_L = \oplus_{k=1}^L H$, et

$$A_0 = \text{diag} \{A_1, \dots, A_L\} : H_L \rightarrow H_L,$$

avec

$$A_0(f_1, \dots, f_L) = (A_1 f_1, \dots, A_L f_L)$$

pour $(f_1, \dots, f_L) \in H_L$. Considérons l'opérateur d'intégration $J : H_L \rightarrow H$ donné par

$$J(f_1, \dots, f_L) = f_1 + \dots + f_L.$$

On a $J^* f = (f, \dots, f) : H \rightarrow H_L$. Par un calcul simple on montre que

$$(JA_0)(JA_0)^* f = (A_1 A_1^* + \dots + A_L A_L^*) f, \quad (3.4.14)$$

$$(JA_0)^*(JA_0) = \begin{bmatrix} A_1^*A_1 & \dots & A_1^*A_L \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_L^*A_1 & \dots & A_L^*A_L \end{bmatrix}, \quad (3.4.15)$$

où nous avons utilisé une décomposition de l'opérateur en blocs naturels $(JA_0)(JA_0)^* : H_L \rightarrow H_L$. Puisque l'opérateur A_0 est un bloc diagonal dans H_L , on voit que

$$n(s, A_0) = \sum_{k=0}^L n(s, A_k), \quad s > 0.$$

maintenant, en utilisant 3.4.12, on a

$$(JA_0)^*(JA_0) - A_0^*A_0 \in \Sigma_{2\gamma}^0.$$

On remarque que les valeurs singulières de T^*T et TT^* coïncident pour tout opérateur compact T , et, en particulier, $\Delta_{2\gamma}((JA_0)^*(JA_0)) = \Delta_{2\gamma}((JA_0)(JA_0)^*)$. Par conséquent, par la Proposition 3.32,

$$\begin{aligned} \Delta_{2\gamma}((JA_0)^*(JA_0)) &= \Delta_{2\gamma}(A_0^*A_0) = \Delta_{\gamma}(A_0) \\ &= \limsup_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log \left(\sum_{k=1}^L n(s, A_k) + 2 \right). \end{aligned}$$

En outre, puisque $AA^* = \sum_{k,j=1}^L A_k A_j^*$, la relation (3.4.12) et la Proposition 3.32 donnent à nouveau

$$AA^* - (JA_0)(JA_0)^* \in \Sigma_{2\gamma}^0,$$

et $\Delta_{2\gamma}(AA^*) = \Delta_{2\gamma}((JA_0)(JA_0)^*)$. En utilisant les calculs ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta_{\gamma}(A) &= \Delta_{2\gamma}(AA^*) = \Delta_{2\gamma}((JA_0)(JA_0)^*) = \Delta_{2\gamma}((JA_0)^*(JA_0)) \\ &= \Delta_{\gamma}(A_0) = \limsup_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log \left(\sum_{k=1}^L n(s, A_k) + 2 \right). \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

Il est maintenant facile de passer aux fonctions de comptage $n(\cdot, A_k)$ à $\tilde{n}(\cdot, A_k)$. En effet, supposons d'abord que

$$\sup_{s > 0} \left(\sum_{k=1}^L n(s, A_k) + 2 \right) = M < +\infty.$$

De toute évidence, la lim sup à droite de (3.4.16) est égale à zéro, et est donc

$$\limsup_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log \left(\sum_{k=1}^L \tilde{n}(s, A_k) \right) = 0.$$

Deuxièmement, supposons que

$$\sup_{s > 0} \left(\sum_{k=1}^L n(s, A_k) + 2 \right) = +\infty,$$

ou, équivalent à,

$$\limsup_{s \rightarrow 0^+} \left(\sum_{k=1}^L n(s, A_k) + 2 \right) = +\infty.$$

Les transformations élémentaires de l'expression sous \limsup montrent à nouveau que

$$\limsup_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log \left(\sum_{k=1}^L n(s, A_k) + 2 \right) = \limsup_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log \left(\sum_{k=1}^L \tilde{n}(s, A_k) \right),$$

comme revendiquer dans (3.4.13).

Le calcul de $\delta_\gamma(A)$ dans (3.4.13) est exactement le même (quand on remplace \limsup par \liminf) et est donc omis. \square

Chapitre 4

Les opérateurs de Toeplitz dans les espaces de Bergman

Cette partie concerne les opérateurs de Toeplitz sur les espaces de Bergman pondérés et l'étude des propriétés élémentaires des opérateurs de Toeplitz.

On commence par rappeler la définition de la projection de Bergman, définir en plus les propriétés de compacité des opérateurs de Toeplitz, tout au long de ce chapitre on fixe un paramètre $\alpha > -1$ et on considère l'espace de Bergman A_α^2 et on associe la projection de Bergman

$$P_{+, \alpha} : L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha) \longrightarrow A_\alpha^2.$$

On rappelle que $P_{+, \alpha}$ est un opérateur intégral représenté par

$$P_{+, \alpha} f(z) = \int_{\mathbb{D}} K_\alpha(z, w) f(w) dA_\alpha(w) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\bar{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w).$$

Toutes les normes et produits scalaires utilisés dans ce chapitre seront ceux de A_α^2 .

Étant donné une fonction $\phi \in L^\infty(\mathbb{D})$, on définit un opérateur T_ϕ dans A_α^2 par

$$T_\phi f = P_{+, \alpha}(\phi f), \quad f \in A_\alpha^2.$$

T_ϕ est appelé l'opérateur de Toeplitz dans l'espace de Bergman A_α^2 avec symbole ϕ . Étant donné que la projection de Bergman $P_{+, \alpha}$ a une norme égale à 1 dans A_α^2 , on a clairement $\|T_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$. En effet $\|T_\phi f\| = \|P_{+, \alpha} \phi f\| \leq \|P_{+, \alpha}\| \|\phi\|_\infty \|f\| \leq \|\phi\|_\infty \|f\|$ car $\|P_{+, \alpha}\| = 1$. En utilisant l'intégrale représentant la projection de Bergman $P_{+, \alpha}$, nous pouvons écrire T_ϕ comme l'opérateur intégral qui suit

$$\begin{aligned} T_\phi f(z) &= \int_{\mathbb{D}} K_\alpha(z, w) \phi(w) f(w) dA_\alpha(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{\phi(w) f(w)}{(1 - z\bar{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w). \end{aligned}$$

Il est clair que T_ϕ dépend du paramètre α . A chaque fois qu'il y a un risque de confusion, nous utiliserons $T_\phi^{(\alpha)}$ à la place de T_ϕ .

Proposition 4.1. *On suppose a et b des nombres complexes, ϕ et ψ sont des fonction bornées dans \mathbb{D} . Alors*

1. $T_{a\phi+b\psi} = aT_\phi + bT_\psi$.
2. $T_{\bar{\phi}} = T_\phi^*$.
3. $T_\phi \geq 0$, si $\phi \geq 0$.
De plus, si $\phi \in H^\infty$, alors
4. $T_\psi T_\phi = T_{\psi\phi}$.
5. $T_{\bar{\phi}} T_\psi = T_{\bar{\phi}\psi}$.

Démonstration. 1. On sait que

$$\begin{aligned} T_{a\phi+b\psi}(f) &= P_{+,\alpha}((a\phi + b\psi)(f)) \\ &= P_{+,\alpha}(a\phi(f) + b\psi(f)) \\ &= P_{+,\alpha}(a\phi(f)) + P_{+,\alpha}(b\psi(f)) \\ &= aT_\phi(f) + bT_\psi(f) \\ \iff T_{a\phi+b\psi} &= aT_\phi + bT_\psi. \end{aligned}$$

2. Soit f et g dans A_α^2 ,

$$\begin{aligned} \langle T_\phi f, g \rangle &= \langle P_{+,\alpha}\phi f, g \rangle = \langle \phi f, P_{+,\alpha}^* g \rangle = \langle \phi f, P_{+,\alpha} g \rangle = \langle \phi f, g \rangle = \langle f, \bar{\phi} g \rangle \\ &= \langle P_{+,\alpha} f, \bar{\phi} g \rangle = \langle f, P_{+,\alpha}^* \bar{\phi} g \rangle = \langle f, P_{+,\alpha} \bar{\phi} g \rangle \\ &= \langle f, T_{\bar{\phi}} g \rangle. \end{aligned}$$

Donc

$$T_\phi^* = T_{\bar{\phi}}.$$

3. En fait, $T_\phi \geq 0$ signifie que $\forall f \in A_\alpha^2$, $\langle T_\phi f, f \rangle \geq 0$. Or

$$\langle T_\phi f, f \rangle = \langle P_{+,\alpha}(\phi f), f \rangle = \langle \phi f, f \rangle = \int_{\mathbb{D}} \phi(w) |f(w)|^2 dA_\alpha(w).$$

D'où $\langle T_\phi f, f \rangle \geq 0$ car $\phi \geq 0$

4. Soit $f \in A_\alpha^2$ et $\phi \in H^\infty$

$$T_\psi T_\phi(f) = P_{+,\alpha} \psi P_{+,\alpha} \phi f = P_{+,\alpha} \psi(\phi f) = P_{+,\alpha}(\psi \phi) f = T_{\psi\phi}(f).$$

Donc $T_\psi T_\phi = T_{\psi\phi}$.

5. $T_{\bar{\phi}} T_\psi(f) = P_{+,\alpha} \bar{\phi} P_{+,\alpha} \psi f = P_{+,\alpha} \bar{\phi}(P_{+,\alpha} + P_{+,\alpha}^\perp) \psi f = P_{+,\alpha} \bar{\phi} \psi f = T_{\bar{\phi}\psi} f$.
Donc $T_{\bar{\phi}} T_\psi = T_{\bar{\phi}\psi}$ □

Remarque 4.2. Les opérateurs de Toeplitz peuvent également être définis pour des symboles non bornés ou même des mesures finies sur le disque unité ouvert \mathbb{D} . On définit l'opérateur

$$T_\mu : H^\infty \longrightarrow H(\mathbb{D}),$$

par la formule intégrale

$$T_\mu f(z) = \int_{\mathbb{D}} K_\alpha(z, w) f(w) d\mu(w).$$

S'il existe une constante positive C telle que

$$\int_{\mathbb{D}} |T_\mu f|^2 dA_\alpha \leq C \int_{\mathbb{D}} |f|^2 dA_\alpha,$$

pour tout $f \in H^\infty$, alors on trouve que T_μ est borné dans A_α^2 par densité de H^∞ dans A_α^2 . Par conséquent, si μ une mesure finie est à support compact dans \mathbb{D} , alors T_μ est non seulement borné mais également compact dans A_α^2 . Si T_μ est borné sur A_α^2 , alors la transformée de Bérézin de T_μ dans A_α^2 est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{T}_\mu(z) &= \langle T_\mu k_z, k_z \rangle = \left\langle T_\mu \frac{K(z, w)}{\sqrt{K(z, z)}}, \frac{K(z, w)}{\sqrt{K(z, z)}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{K(z, z)} \int_{\mathbb{D}} K(z, w) \overline{K(z, w)} d\mu(w) \\ &= (1 - |z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} |K(z, w)|^2 d\mu(w) \\ \tilde{T}_\mu(z) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |z|^2)^{2+\alpha}}{|1 - z\bar{w}|^{2(2+\alpha)}} d\mu(w). \end{aligned}$$

Plus généralement, nous allons utiliser la formule intégrale ci-dessus pour définir la transformée de Bérézin d'une mesure arbitraire finie μ que l'on note par $B_\alpha \mu$ ou $\tilde{\mu}$, où

$$d\mu(z) = \phi(z) dA_\alpha(z), \quad \phi \in L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha),$$

on simplifie l'écriture en prenant $T_\mu = T_\phi$. En particulier, si ϕ est borné, alors on a l'opérateur de Toeplitz usuel dans l'espace de Bergman.

On suppose que $\phi \in L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ et T_ϕ borné dans A_α^2 . Il découle d'une formule précédente pour \tilde{T}_μ que la transformée de Bérézin de T_ϕ coïncide avec la transformée de Bérézin de la fonction ϕ , à savoir,

$$B_\alpha \phi(z) = \tilde{T}_\phi(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |z|^2)^{2+\alpha}}{|1 - z\bar{w}|^{2(2+\alpha)}} \phi(w) dA_\alpha(w).$$

Également, si on étend le domaine de $P_{+, \alpha}$ à l'espace $L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, en utilisant cette représentation intégrale, alors pour n'importe quelle $f \in H^\infty$ on a

$$T_\phi f(z) = \int_{\mathbb{D}} K(z, w) f(w) \phi(w) dA_\alpha(w) = P_{+, \alpha}(\phi f)(z),$$

ce qui est cohérent avec la définition de l'opérateur de Toeplitz avec symbole borné. En particulier, si $\phi \in A_\alpha^2$, alors $T_\phi f = \phi f$ pour tout f dans H^∞ . Il découle que si ϕ est holomorphe, alors T_ϕ est borné dans A_α^2 si et seulement si $\phi \in H^\infty$. Ceci est également vrai pour les fonctions harmoniques.

Proposition 4.3. *Si $\phi \in L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ est harmonique, alors T_ϕ est borné dans A_α^2 si et seulement si ϕ est borné; T_ϕ est compact dans A_α^2 si et seulement si $\phi \equiv 0$.*

Démonstration. Supposons que T_ϕ est borné, alors d'après Cauchy-Schwarz $|B_\alpha \phi(z)| = |\langle T_\phi k_z, k_z \rangle| \leq \|T_\phi k_z\| \|k_z\| \leq \|T_\phi\| \|k_z\|^2 = \|T_\phi\|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, puis que k_z est un vecteur unitaire dans A_α^2 . On rappelle que $B_\alpha \phi = \phi$ quand ϕ

est harmonique, donc ϕ est borné.

Si T_ϕ est compact, alors

$$\phi(z) = B_\alpha \phi(z) = \langle T_\phi k_z, k_z \rangle \longrightarrow 0 \quad \text{quand } |z| \longrightarrow 1^-$$

car $k_z \longrightarrow 0$ faiblement dans A_α^2 quand $|z| \longrightarrow 1^-$. Par le principe de maximum les fonctions harmoniques ϕ

$$\sup_{\mathbb{D}} |\phi(z)| = \sup_{\mathbb{T}} |\phi(z)| = 0,$$

ce qui implique que $\phi = 0$ donc $\phi \equiv 0$. □

Proposition 4.4. *Soit $\phi \in C(\bar{\mathbb{D}})$, alors T_ϕ est compact dans A_α^2 si et seulement si $\phi \in C_0(\mathbb{D})$.*

Démonstration. Si $\phi \in C_0(\mathbb{D})$, alors ϕ peut être uniformément approchée par des fonctions continues dans \mathbb{D} à support compact. Puis que la convergence uniforme des symboles implique la convergence en norme des opérateurs de Toeplitz, et l'opérateur de Toeplitz est compact si le symbole est à support compact, on voit que T_ϕ est compact dans si $\phi \in C_0(\mathbb{D})$.

D'autre part, si T_ϕ est compact, alors

$$B_\alpha \phi(z) = \langle T_\phi k_z, k_z \rangle \longrightarrow 0 \quad \text{quand } |z| \longrightarrow 1^-$$

par ce que $k_z \longrightarrow 0$ faiblement. Soit $\varphi \in C(\bar{\mathbb{D}})$ alors $B_\alpha \varphi \in C(\bar{\mathbb{D}})$ et $\tilde{\varphi} = \varphi \in \mathbb{T}$, en effet on utilise (via un changement de variable) que pour $z \in \mathbb{D}$,

$$(B_\alpha \phi)(z) = \int_{\mathbb{D}} (\varphi \circ \varphi_z)(w) dA_\alpha(w),$$

où $\varphi_z(w) = \frac{z-w}{1-\bar{z}w}$.

Or

$$\varphi_z(w) = \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \longrightarrow \frac{z_0-w}{1-\bar{z}_0w} = \frac{z_0(1-\bar{z}_0w)}{1-\bar{z}_0w} = z_0, \quad \text{si } z \longrightarrow z_0 \quad \text{et } z_0 \in \mathbb{T}.$$

Le théorème de la convergence dominée prouve alors que

$$(B_\alpha \phi)(z) \longrightarrow \int_{\mathbb{D}} \varphi(z_0) dA_\alpha(w) = \varphi(z_0), \quad \text{si } z \longrightarrow z_0.$$

Ainsi $\varphi - B_\alpha \phi \in C_0(\mathbb{D})$, et donc $B_\alpha \phi \in C(\bar{\mathbb{D}})$, et ensuite $B_\alpha \phi = \varphi$ sur \mathbb{T} . □

Chapitre 5

Démonstration du résultat principal

Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème 1.3, le résultat principal de cette thèse. Rappelons sa formulation. Soit φ_1 une fonction continue sur le cercle unité, $\varphi_1 \in C(\mathbb{T})$, et

$$\varphi_0(r) := \varphi_{0,\gamma}(r) = \frac{1}{\left(1 + \log \frac{1}{1-r}\right)^\gamma}, \quad r \in [0, 1), \quad \gamma > 0. \quad (5.0.1)$$

Considérons la fonction

$$\varphi(z) := \varphi_1(e^{i\theta})\varphi_0(r), \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}, \quad (5.0.2)$$

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 5.1. *Soit φ le symbole défini ci-dessus. Les valeurs singulières $(s_n(T_\varphi))$ de l'opérateur de Toeplitz T_φ possèdent l'asymptotique suivante*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\log(n+1))^\gamma s_n(T_\varphi) = \|\varphi_1\|_{L^\infty(\mathbb{T})}. \quad (5.0.3)$$

5.1 Quelques notations et remarques de départ

Pour commencer, nous considérons le cas simple $\varphi_1(e^{i\theta}) \equiv 1$. Autrement dit $\varphi(z) := \varphi_0(z) = \varphi_0(r)$.

Lemme 5.2. *Nous avons*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\log(n+1))^\gamma s_n(T_\varphi) = \|\varphi_1\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = 1. \quad (5.1.1)$$

Démonstration. Puisque le symbole φ_0 est radial, la matrice de l'opérateur T_{φ_0} est diagonale lorsqu'elle est calculée dans la base standard de l'espace de Bergman $\{e_n\}_{n=0,\dots,\infty}$, $e_n(z) = \sqrt{n+1} z^n$. En passant aux coordonnées polaires

et en utilisant le Lemme 5.14 ($g(r) \equiv 1$ sur $[0, 1]$), nous obtenons

$$\begin{aligned} s_n(T_{\varphi_0}) &= (T_{\varphi_0} e_n, e_n) = 2(n+1) \int_0^1 r^{2n+1} \varphi_0(r) dr \\ &= 2(n+1) \frac{1}{(2n+1)(\log(2n+1))^\gamma} (1 + o(1)) \\ &= \frac{1}{(\log(n+1))^\gamma} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

□

Maintenant, prenons un entier naturel $L > 0$ et soit $I_j := [2\pi(j-1)/L, 2\pi j/L)$, $j = 1, \dots, L$. La fonction χ_{I_j} est la fonction caractéristique de l'intervalle I_j , $j = 1, \dots, L$, et, en outre

$$\tilde{\chi}_j := \chi_{I_j} \varphi_0, \quad T_{\tilde{\chi}_j} := P_+ \tilde{\chi}_j = P_+(\chi_{I_j} \varphi_0), \quad (5.1.3)$$

voir (5.0.1). Il est clair que les opérateurs $T_{\tilde{\chi}_j}$ sont unitairement équivalents à $T_{\tilde{\chi}_1}$ par rotation $z \mapsto e^{-i(2\pi(j-1)/L)} z$, $z \in \mathbb{D}$, et donc leur valeurs singulières et fonctions de comptages coïncident, $\tilde{n}(s, T_{\tilde{\chi}_j}) = \tilde{n}(s, T_{\tilde{\chi}_1})$, $s > 0$.

Le cas de T_φ quand le symbole φ est positif

Il est clair que pour le symbole $\varphi(z) \geq 0$, $z \in \mathbb{D}$, l'opérateur T_φ est auto-adjoint et positif c'est à dire $T_\varphi \geq 0$. Bien sûr, les valeurs singulières et propres de T_φ coïncident dans cette situation, mais nous préférons argumenter en termes de valeurs singulières pour garder la présentation homogène.

Nous commençons à prouver un théorème auxiliaire, qui servira de point de départ pour le théorème 1.3.

Théorème 5.3. *Pour un entier naturel $L > 0$, soit $\varphi_1 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction étagée positive*

$$\varphi_1 = \sum_{j=1}^L c_j \chi_j,$$

où $c_j \geq 0$. Pour $\varphi = \varphi_1 \varphi_0$, on a

$$\Delta_\gamma(T_\varphi) = \delta_\gamma(T_\varphi) = \|\varphi_1\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^{1/\gamma},$$

ce qui est équivalent à

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log \tilde{n}(s, T_\varphi) = \|\varphi_1\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^{1/\gamma}.$$

Démonstration. Pour commencer, considérons le cas où $\varphi_1(e^{i\theta}) \equiv 1$ pour tout $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$; en d'autres termes nous avons $\varphi = \varphi_0$. Bien sûr,

$$\varphi_1 = \sum_{j=1}^L 1 \cdot \chi_j, \quad T_\varphi = T_{\varphi_0} = \sum_{j=1}^L 1 \cdot T_{\tilde{\chi}_j}.$$

Rappelons que le calcul (5.1.2) et le point (3) du lemme 3.30 donnent

$$\Delta_\gamma(T_{\varphi_0}) = \delta_\gamma(T_{\varphi_0}) = \|1\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^{1/\gamma} = 1.$$

Par le théorème 5.5, les opérateurs $T_{\tilde{\chi}_j}^* T_{\tilde{\chi}_k}, T_{\tilde{\chi}_j} T_{\tilde{\chi}_k}^*$ sont dans $\Sigma_{2\gamma}^0$ pour $j \neq k, \mathfrak{a}, k = 1, \dots, L$, et donc la Proposition 4.4 montre que

$$\begin{aligned} \Delta_\gamma(T_{\varphi_0}) &= \limsup_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log \left(\sum_{j=1}^L \tilde{n}(s, T_{\tilde{\chi}_j}) \right) \\ &= \limsup_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log(L\tilde{n}(s, T_{\tilde{\chi}_1})) = \Delta_\gamma(T_1). \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

De même, on voit $\delta_\gamma(T_{\varphi_0}) = \delta_\gamma(T_1)$. C'est que,

$$\Delta_\gamma(T_{\varphi_0}) = \delta_\gamma(T_{\varphi_0}) = \Delta_\gamma(T_1) = \delta_\gamma(T_1) = 1.$$

Passons maintenant à la situation générale lorsque

$$\varphi_1 = \sum_{j=1}^L c_j \cdot \chi_j, \quad T_\varphi = \sum_{j=1}^L c_j \cdot T_{\tilde{\chi}_j},$$

où $c_j \geq 0$. Pour nous faciliter l'écriture, nous supposons que $\max_{j=1, \dots, L} c_j = c_1 > 0$. En particulier,

$$\tilde{n}(s, c_j T_{\tilde{\chi}_j}) \leq \tilde{n}(s, c_1 T_{\tilde{\chi}_1}), \quad j = 1, \dots, L.$$

En utilisant (5.1.4), nous avons

$$\begin{aligned} \Delta_\gamma(T_\varphi) &= \limsup_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log \left(\sum_{j=1}^L \tilde{n}(s, c_j T_{\tilde{\chi}_j}) \right) \\ &= \limsup_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log \left(\tilde{n}(s, c_1 T_{\tilde{\chi}_1}) + \sum_{j=2}^L \tilde{n}(s, c_j T_{\tilde{\chi}_j}) \right) \\ &= \limsup_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log \left(\tilde{n}(s, c_1 T_{\tilde{\chi}_1}) \left\{ 1 + \frac{\sum_{j=2}^L \tilde{n}(s, c_j T_{\tilde{\chi}_j})}{\tilde{n}(s, c_1 T_{\tilde{\chi}_1})} \right\} \right). \end{aligned}$$

comme le terme entre accolade sur la droite de cette relation est bornée, nous continuons donc comme suit

$$\begin{aligned} \Delta_\gamma(T_\varphi) &= \limsup_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log \tilde{n}(s, c_1 T_{\tilde{\chi}_1}) = c_1^{1/\gamma} \limsup_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log \tilde{n}(s, T_1) \\ &= c_1^{1/\gamma} \Delta_\gamma(T_1) = c_1^{1/\gamma}. \end{aligned}$$

Le calcul de $\delta_\gamma(T_\varphi)$ est complètement analogue, et la preuve est terminée. \square

La preuve du Théorème 1.3, le cas où $\varphi_1 \geq 0$. Soit φ_1 une fonction continue positive sur \mathbb{T} . L'idée de la preuve du théorème est choisir une suite de fonctions étagées positives (ψ_n) convergeant uniformément vers φ_1 , et de passer à la limite dans $\Delta_\gamma(T_{\psi_n}) = \delta_\gamma(T_{\psi_n})$, ainsi on obtient les valeurs $\Delta_\gamma(T_\varphi)$ et $\delta_\gamma(T_\varphi)$.

Soient $A_1, A_2 \in S_\infty$ et $0 \leq A_1 \leq A_2$. Rappelons que

$$s_n(A_1) \leq s_n(A_2), \quad n(s, A_1) \leq n(s, A_2), \quad s > 0$$

Voir Birman-Solomyak [1], Gohberg-Krein [4].

Donc, soit $\varphi_1 \in C(\mathbb{T})$ tel que $\varphi_1(z) \geq 0$, $z \in \mathbb{T}$. Soit un $\epsilon > 0$ donné. Par la continuité uniforme de φ_1 , il existe un entier naturel $L > 0$ et deux fonctions étagées $\overline{\varphi_1}, \underline{\varphi_1}$ associées à la subdivision donnée par les intervalles $[2\pi(j-1/L, 2\pi j/L)$, $j = 1, \dots, L$, avec les propriétés suivantes

$$0 \leq \underline{\varphi_1} \leq \varphi_1 \leq \overline{\varphi_1}, \quad 0 \leq \overline{\varphi_1} - \varphi_1 \leq \epsilon, 0 \leq \varphi_1 - \underline{\varphi_1} \leq \epsilon.$$

En effet, les fonctions $\underline{\varphi_1}, \overline{\varphi_1}$ peuvent être définies comme

$$\underline{\varphi_1} = \sum_{j=1}^L \underline{c_j} \chi_j, \quad \overline{\varphi_1} = \sum_{j=1}^L \overline{c_j} \chi_j,$$

où $\underline{c_j} = \min_{z \in I_j} \varphi_1(z)$, $\overline{c_j} = \max_{z \in I_j} \varphi_1(z)$. Pour $\overline{\varphi} = \overline{\varphi_1} \varphi_0$, $\underline{\varphi} = \underline{\varphi_1} \varphi_0$, on a

$$0 \leq T_{\underline{\varphi}} \leq T_{\varphi} \leq T_{\overline{\varphi}}.$$

Par la monotonie des valeurs singulières, des fonctions de comptage, les propriétés des quantités $\Delta_\gamma(\cdot)$ et $\delta_\gamma(\cdot)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} (\|\varphi_1\|_{L^\infty(\mathbb{T})} - \epsilon)^{1/\gamma} &\leq \|\underline{\varphi_1}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^{1/\gamma} = \delta_\gamma(T_{\underline{\varphi}}) \leq \delta_\gamma(T_{\varphi}) \leq \Delta_\gamma(T_{\varphi}) \leq \Delta_\gamma(T_{\overline{\varphi}}) \\ &= \|\overline{\varphi_1}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^{1/\gamma} = \|\varphi_1\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^{1/\gamma}. \end{aligned}$$

Ici, nous avons également utilisé que $\delta_\gamma(A) \leq \Delta_\gamma(A)$. En passant à la limite par rapport à $\epsilon \rightarrow 0$, nous arrivons à

$$\delta_\gamma(T_\varphi) = \Delta_\gamma(T_\varphi) = \|\varphi_1\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^{1/\gamma}.$$

Le théorème est prouvé. □

Le cas de T_φ avec en général le symbole φ à valeur réelle

Rappelons que $\varphi = \varphi_1 \varphi_0$, voir (5.0.2), (5.0.1).

Lemme 5.4. *On a*

$$\Delta_\gamma(T_\varphi) \leq \|\varphi_1\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^{1/\gamma}.$$

Démonstration. Observons que l'inégalité ci-dessus est homogène et respecte la norme $\|\varphi_1\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^{1/\gamma}$, donc nous pouvons supposer que $\|\varphi_1\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = 1$ sans perte de généralité. On pose $F := T_{\varphi_0} = P_{+, \alpha} \varphi_0 : A_\alpha^2 \rightarrow A_\alpha^2$, nous avons

$$T_\varphi^* T_\varphi = P_{+, \alpha} \overline{\varphi} P_{+, \alpha} \varphi P_{+, \alpha} = P_{+, \alpha} \overline{\varphi_0 \varphi_1} P_{+, \alpha} \varphi_1 \varphi_0 P_{+, \alpha}.$$

où nous avons plusieurs fois utilisé que $X^* Y X \leq \|Y\| X^* X$ pour les opérateurs bornés $X, Y, Y = Y^*$. Donc nous aurons que $\{s_n^2(T_\varphi)\} = \{s_n(T_\varphi^* T_\varphi)\} \leq \{s_n(F, F^*)\}$, où $\{s_n(T_\varphi)\}_n$ et $\{s_n(F, F^*)\}$ sont respectivement des valeurs singulières de l'opérateur T_φ et FF^* . Par conséquent,

$$\tilde{n}(s, T_\varphi) \leq \tilde{n}(\sqrt{s}, FF^*),$$

$$\begin{aligned} \Delta_\gamma(T_\varphi) &= \limsup_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log \tilde{n}(s, T_\varphi) \leq \limsup_{s \rightarrow 0^+} s^{1/\gamma} \log \tilde{n}(\sqrt{s}, FF^*), \\ &= \limsup_{s \rightarrow 0^+} s^{\frac{1}{2\gamma}} \log \tilde{n}(\sqrt{s}, FF^*) = \Delta_{2\gamma}(FF^*) = \Delta_\gamma(F) = \Delta_\gamma(T_{\varphi_0}) = 1, \end{aligned}$$

par le premier point du lemme 5.2 Le lemme est prouvé. \square

La preuve du Théorème 1.2, le cas général où φ_1 est à valeur réelle. La preuve est assez similaire à la preuve de $\varphi \geq 0$.

Soit $\varphi_1 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $\epsilon > 0$ donné, on choisit la fonction étagée $\tilde{\varphi}_1$ avec les propriétés

$$\|\varphi_1 - \tilde{\varphi}_1\|_{L^\infty(\mathbb{T})} < \epsilon,$$

et prendre $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_1 \varphi_0$. Le lemme 5.4 dit que

$$\Delta_\gamma(T_\varphi - T_{\tilde{\varphi}}) = \Delta_\gamma(T_{\varphi - \tilde{\varphi}}) \leq \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^{1/\gamma} \leq \epsilon^{1/\gamma}.$$

D'autre part, la proposition 4.1 implique

$$\begin{aligned} |\Delta_\gamma(T_\varphi)^{\gamma/(1+\gamma)} - \Delta_\gamma(T_{\tilde{\varphi}})^{\gamma/(1+\gamma)}| &\leq \Delta_\gamma(T_\varphi - T_{\tilde{\varphi}})^{\gamma/(1+\gamma)} < \epsilon^{\gamma^2/(1+\gamma)}, \\ |\delta_\gamma(T_\varphi)^{\gamma/(1+\gamma)} - \delta_\gamma(T_{\tilde{\varphi}})^{\gamma/(1+\gamma)}| &\leq \Delta_\gamma(T_\varphi - T_{\tilde{\varphi}})^{\gamma/(1+\gamma)} < \epsilon^{\gamma^2/(1+\gamma)}. \end{aligned}$$

On termine la preuve en passant à la limite quand $\epsilon \rightarrow 0$. \square

5.2 La preuve de l'orthogonalité asymptotique des opérateurs $T_{\tilde{\chi}_j}$ et $T_{\tilde{\chi}_k}$, $j \neq k$

Le but de cette section est de prouver le théorème suivant.

Théorème 5.5. *Pour $j \neq k$, $j, k = 1, \dots, L$, les opérateurs de Toeplitz $T_{\tilde{\chi}_j}, T_{\tilde{\chi}_k}$ sont asymptotiquement orthogonaux, c'est à dire vérifient*

$$T_{\tilde{\chi}_k}^* T_{\tilde{\chi}_j}, T_{\tilde{\chi}_k} T_{\tilde{\chi}_j}^* \in \Sigma_{2\gamma}^0.$$

Pour la définition des opérateurs $T_{\tilde{\chi}_j}$, $j = 1, \dots, L$, voir (5.1.3). Par défaut, nous supposons que $j \neq k$, $j, k = 1, \dots, L$ tout au long de cette section. Nous présentons les arguments pour l'opérateur $T_{\tilde{\chi}_k}^* T_{\tilde{\chi}_j}$; le raisonnement pour l'opérateur $T_{\tilde{\chi}_k} T_{\tilde{\chi}_j}^*$ est complètement similaire.

Puisque la preuve du théorème 5.3 est plutôt complexe, elle est divisée en plusieurs étapes.

5.2.1 Etape 1. Les opérateurs de Toeplitz dont le symbole est à support compact dans \mathbb{D}

Prenons un $\delta > 0$ petit et définissons la fonction caractéristique de $\{z : |z| \leq 1 - \delta\}$,

$$\chi_{00}(z) = \begin{cases} 1, & |z| \leq 1 - \delta \\ 0, & |z| > 1 - \delta \end{cases}, \quad \chi_{01}(z) = 1 - \chi_{00}(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Alors, on écrit $T_{\tilde{\chi}_j}$ comme $T_{\tilde{\chi}_j} = T_{\chi_{00}\tilde{\chi}_j} + T_{\chi_{01}\tilde{\chi}_j}$. Puisque le $\text{supp}(\chi_{00}\tilde{\chi}_j)$ est compact dans \mathbb{D} , les valeurs singulières $\{s_n(T_{\chi_{00}\tilde{\chi}_j})\}_n$ de $T_{\chi_{00}\tilde{\chi}_j}$ décroissent de façon exponentielle, c'est à dire qu'il y a une constante $C = C(\delta) > 0$ telle que

$$s_n(T_{\chi_{00}\tilde{\chi}_j}) \leq C(1 - \delta_0)^{2n},$$

voir Zhu [11], Pushnitski [9]. On a

$$T_{\tilde{\chi}_k}^* T_{\tilde{\chi}_j} = T_{\chi_{00}\tilde{\chi}_k}^* T_{\chi_{00}\tilde{\chi}_j} + T_{\chi_{00}\tilde{\chi}_k}^* T_{\chi_{01}\tilde{\chi}_j} + T_{\chi_{01}\tilde{\chi}_k}^* T_{\chi_{00}\tilde{\chi}_j} + T_{\chi_{01}\tilde{\chi}_k}^* T_{\chi_{01}\tilde{\chi}_j}.$$

Tous les opérateurs $T_{\tilde{\chi}_j}, T_{\chi_{00}\tilde{\chi}_j}, T_{\chi_{01}\tilde{\chi}_j}$ sont bornés et donc les valeurs singulières des trois premiers produits opérateurs sur le coté droit de la relation ci-dessus décroissent aussi bien exponentiellement. C'est à dire, le fait que $T_{\tilde{\chi}_k}^* T_{\tilde{\chi}_j} \in \Sigma_{2\gamma}^0$ est équivalent à $T_{\chi_{01}\tilde{\chi}_k}^* T_{\chi_{01}\tilde{\chi}_j} \in \Sigma_{2\gamma}^0$.

5.2.2 Etape 2. Produits des opérateurs de Toeplitz avec noyau intégral lisse

Deuxièmement, soit $B_0 = T_{\chi_{01}\tilde{\chi}_k}^* T_{\chi_{01}\tilde{\chi}_j}$. Nous tenons à montrer que $B_0 \in \mathcal{S}_p \subset \Sigma_{2\gamma}^0$ pour un certain $p > 0$.

La conclusion ci-dessus est assez simple à obtenir dans le cas quand $j < k - 1$ où $j > k + 1$, et, comme toujours, $j, k = 1, \dots, L$. Cela signifie que les intervalles I_j et I_k ne sont pas touchés.

Lemme 5.6. *Soit $j < k - 1$ or $j > k + 1$. Alors $T_{\chi_{01}\tilde{\chi}_k}^* T_{\chi_{01}\tilde{\chi}_j} \in \mathcal{S}_2$, la classe Hilbert-Schmidt.*

Démonstration. La preuve est bien connue et assez simple, voir Pushnitski [9]. Soit l'ensemble

$$S_j = \{z \in \mathbb{D} : z = re^{i\theta}, r \in (1 - \delta, 1), \theta \in I_j\}, \quad j = 1, \dots, L.$$

Par définition, nous avons $\chi_{S_j} = \chi_{01}\tilde{\chi}_j$. L'opérateur intégral $T_{\chi_{01}\tilde{\chi}_k}^* T_{\chi_{01}\tilde{\chi}_j}$ peut être écrit comme

$$\begin{aligned} (T_{\chi_{01}\tilde{\chi}_k}^* T_{\chi_{01}\tilde{\chi}_j} f)(w) &= \int_{\mathbb{D}} K(w, z) f(z) dA(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{\chi_{S_k}(w) \varphi_0(w) \chi_{S_j}(z) \varphi_0(z)}{(1 - w\bar{z})^2} f(z) dA(z), \quad f \in A^2(\mathbb{D}). \end{aligned}$$

Puisque la distance entre les régions S_k et S_j est strictement positive, l'intégral du noyau $K(w, z)$ est une fonction bornée. Par conséquent, l'opérateur intégral est Hilbert-Schmidt, voir [1, Chap. 11, Sect. 3], et nous avons fini. \square

5.2.3 Etape 3. Le cas de $T_{\tilde{\chi}_k}^* T_{\tilde{\chi}_j}$ avec $k = j \pm 1$; la borne sur le noyau d'un opérateur intégral

Les arguments des sous-sections précédentes montrent qu'il reste à prouver que $B_0 := T_{\chi_{01}\tilde{\chi}_k}^* T_{\chi_{01}\tilde{\chi}_j} \in \Sigma_{2\gamma}^0$ pour $k = j \pm 1$, $j, k = 1, \dots, L$. Par la rotation, supposons sans perte de généralités que $k = 1$ et $j = L$. Pour simplifier la notation, nous posons $\delta = 2\pi/L$ et

$$\omega_1 := \chi_{01}\tilde{\chi}_1 = \chi_{S_1}\varphi_0, \quad S_1 := \left\{ z = re^{i\theta} : r \in (1 - \delta, 1), \theta \in \left(0, \frac{2\pi}{L}\right) \right\},$$

$$\omega_L := \chi_{01}\tilde{\chi}_L = \chi_{S_L}\varphi_0, \quad S_L := \left\{ z = re^{i\theta} : r \in (1 - \delta, 1), \theta \in \left(\frac{2\pi(L-1)}{L}, 2\pi \right) \right\}.$$

Alternativement, nous pouvons écrire les ensembles S_1 et S_L comme

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{z = re^{i\theta} : r \in (1 - \delta, 1), \theta \in (0, \delta)\}, \\ S_L &:= \{z = re^{i\theta} : r \in (1 - \delta, 1), \theta \in (-\delta, 0)\}, \end{aligned}$$

pour que $S_L = \bar{S}_1$. Nous avons $B_0 = T_{\omega_1}^* T_{\omega_L}$, et

$$\begin{aligned} D_0 &:= B_0^* B_0 = (T_{\omega_1}^* T_{\omega_L})^* (T_{\omega_1}^* T_{\omega_L}) = T_{\omega_L}^* T_{\omega_1} T_{\omega_1}^* T_{\omega_L} \\ &= P_+ \omega_L P_+ \omega_1 P_+ \omega_1 P_+ \omega_L P_+ \leq D := \omega_L P_+ \omega_1^2 P_+ \omega_L \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

$$= \chi_{S_L} \varphi_0 P_+ \varphi_0^2 \chi_{S_1} P_+ \varphi_0 \chi_{S_L}. \quad (5.2.2)$$

Par conséquent, nous pouvons majorer les valeurs singulières $s_n(D_0)$ par les valeurs singulières $s_n(D)$.

Nous nous intéressons aux bornes supérieures des noyaux intégraux pour les opérateurs D, D^m avec m un entier naturel tel que $m > 0$. Soit

$$\begin{aligned} (Df)(z_1) &:= (D^1 f)(z_1) = \int_{\mathbb{D}, z_3} D_1(z_1, z_3) f(z_3) dA(z_3), \\ (D^m f)(z_1) &:= \int_{\mathbb{D}, z_{2m+1}} D_m(z_1, z_{2m+1}) f(z_{2m+1}) dA(z_{2m+1}), \end{aligned}$$

La notation des indices z_j sera clarifiée un peu plus tard. Nous indiquerons la variable d'intégration comme un sous-indice d'intégrale tel qu'il est écrit ci-dessus.

Proposition 5.7. *Nous avons*

$$\begin{aligned} D_1(z_1, z_3) &= \int_{\mathbb{D}, z_2} \frac{\tilde{\chi}_{S_L}(z_1) \tilde{\chi}_{S_1}(z_2)^2 \tilde{\chi}_{S_L}(z_3)}{(1 - z_1 \bar{z}_2)^2 (1 - z_2 \bar{z}_3)^2} dA(z_2), \\ D_m(z_1, z_{2m+1}) &= \underbrace{\int_{\mathbb{D}, z_2} \cdots \int_{\mathbb{D}, z_{2m}}}_{2m-1} \frac{\prod_{j=1}^m \tilde{\chi}_{S_L}(z_{2j-1}) \tilde{\chi}_{S_1}(z_{2j})^2 \tilde{\chi}_{S_L}(z_{2j+1})}{\prod_{j=1}^m (1 - z_{2j-1} \bar{z}_{2j})^2 (1 - z_{2j} \bar{z}_{2j+1})^2} \prod_{j=2}^{2m} dA(z_j). \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Démonstration. Les relations (5.2.1), (5.2.2) et la projection de P_+ dans l'espace de Bergman, cf. la proposition 2.6, nous donnent, pour $f \in A_\alpha^2$,

$$\begin{aligned} Df(z_1) &= \int_{\mathbb{D}, z_2} \frac{\tilde{\chi}_{S_L}(z_1) \tilde{\chi}_{S_1}(z_2)}{(1 - z_1 \bar{z}_2)^2} \left(\int_{\mathbb{D}, z_3} \frac{\tilde{\chi}_{S_1}(z_2) \tilde{\chi}_{S_L}(z_3)}{(1 - z_2 \bar{z}_3)^2} f(z_3) dA(z_3) \right) dA(z_2) \\ &= \int_{\mathbb{D}, z_3} D_1(z_1, z_3) f(z_3) dA(z_3), \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

où, par le théorème de Fubini-Tonelli,

$$D_1(z_1, z_3) = \int_{\mathbb{D}, z_2} \frac{\tilde{\chi}_{S_L}(z_1) \tilde{\chi}_{S_1}(z_2)^2 \tilde{\chi}_{S_L}(z_3)}{(1 - z_1 \bar{z}_2)^2 (1 - z_2 \bar{z}_3)^2} dA(z_2). \quad (5.2.5)$$

C'est la première relation (5.2.3); la seconde est similaire par une récurrence élémentaire bien que fastidieuse. \square

Nous soulignons que $z_{2j} \in S_1$, $j = 1, \dots, m$, et $z_{2j+1} \in S_L$, $j = 0, \dots, m$, dans la seconde relation (5.2.3).

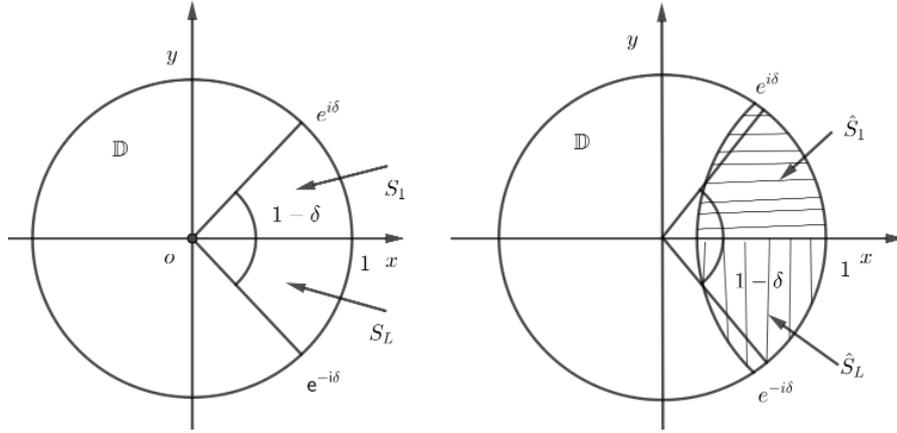
Avant de commencer la preuve de la proposition à venir, nous introduisons les notations suivantes. En premier, soit

$$\psi_0(r) := \frac{1}{(1 + 1/\log r)^\gamma}, \quad r > 0. \quad (5.2.6)$$

Définissons aussi

$$\begin{aligned} \hat{S}_L &:= \{z : |z| \leq 1, |z - 1| \leq \sqrt{2\delta}, \operatorname{Im} z \leq 0\} \\ &= \{z = 1 - re^{i\theta} : 0 \leq r < \sqrt{2\delta}, r < 2 \cos \theta, \theta \in (0, \pi/2)\}, \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

voir figures ci-dessous



avec un léger abus de notation, nous traitons \hat{S}_L comme

$$\{z = 1 - re^{i\theta} : 0 \leq r \leq \sqrt{2\delta}, \theta \in (0, \pi/2)\}$$

en supposant que les fonctions correspondante sont nulles de la "vraie" \hat{S}_L . Il est clair que $S_L \subset \hat{S}_L$, et donc $\chi_{S_L} \leq \chi_{\hat{S}_L}$. La région \hat{S}_1 est définie pour S_1 de la même manière.

Maintenant, il est commode de faire le changement de variables polaires ; notez que les nouvelles variables (r_j, θ_j) sont centrées au point $z_0 = 1$, et non l'origine $z_0 = 0$. Plus précisément, nous définissons

$$\begin{aligned} z_{2j+1} &:= 1 - r_{2j+1}e^{-i\theta_{2j+1}} \in \hat{S}_1, \quad j = 0, \dots, m, \\ z_{2j} &:= 1 - r_{2j}e^{i\theta_{2j}} \in \hat{S}_L, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Nous avons $z_{2j+1} \in \hat{S}_1$ et $z_{2j} \in \hat{S}_L$ pour $r_k \in (0, \sqrt{2\delta}), \theta_k \in (0, \pi/2)$, $k = 1, \dots, 2m + 1$.

Proposition 5.8. *Nous avons la borne suivante sur les noyaux $D_m(\cdot, \cdot)$ (5.2.3)*

en termes de variables introduites dans (5.2.8)

$$\begin{aligned}
 & |D_m(z_1, z_{2m+1})| \\
 & \leq C \underbrace{\int_{0, r_2}^{\sqrt{2}\delta} \dots \int_{0, r_{2m}}^{\sqrt{2}\delta}}_{2m-1} \frac{\chi_{\hat{S}_L}(z_1)\psi_0(r_1) \left(\prod_{j=2}^{2m} \psi_0(r_j)^2\right) \chi_{\hat{S}_L}(z_{2m+1})\psi_0(r_{2m+1})}{\prod_{j=1}^{2m} (r_j + r_{j+1})} \prod_{j=2}^{2m} dr_j.
 \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

Démonstration. D'abord, nous prenons le module sous l'intégrale dans la seconde relation (5.2.3). Puisque $S_1 \subset \hat{S}_1$ et $S_L \subset \hat{S}_L$, nous voyons $\tilde{\chi}_{S_1} \leq \tilde{\chi}_{\hat{S}_1}$ et $\tilde{\chi}_{S_L} \leq \tilde{\chi}_{\hat{S}_L}$, donc nous pouvons remplacer $\tilde{\chi}_{S_1}, \tilde{\chi}_{S_L}$ avec $\tilde{\chi}_{\hat{S}_1}, \tilde{\chi}_{\hat{S}_L}$ sous l'intégrale. Deuxièmement, pour rendre la notation plus uniforme, nous effectuons le changement de variable

$$z_{2j} \in \hat{S}_1 \mapsto \bar{z}_{2j} \in \hat{S}_L.$$

De cette façon, nous avons $z_k = 1 - r_k e^{i\theta} \in \hat{S}_L$ pour tout $k = 2, \dots, 2m$.

En outre, nous obtenons

$$1 - z_{2j-1}z_{2j} = r_{2j-1}e^{i\theta_{2j-1}} + r_{2j}e^{i\theta_{2j}} - r_{2j-1}r_{2j}e^{i(\theta_{2j-1}+\theta_{2j})}.$$

Par conséquent, il existe $C = C(\delta) > 0$ tel que

$$|1 - z_{2j-1}z_{2j}|^2 \geq C(r_{2j-1} + r_{2j})^2.$$

Rappelons que $\tilde{\chi}_{\hat{S}_L}(z) = \chi_{\hat{S}_L}(z)\varphi_0(|z|)$. Concernant ce facteur, nous notons que $1 - |z_k| \leq |1 - z_k| = r_k$, $k = 2, \dots, 2m$, et donc

$$\varphi_0(z_k) \leq \psi_0(r_k).$$

En plaçant toutes ces estimations dans la seconde relation (5.2.3), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 |D_m(z_1, z_{2m+1})| & \leq \underbrace{\int_{\mathbb{D}, z_2} \dots \int_{\mathbb{D}, z_{2m+1}}}_{2m-1} \frac{\prod_{j=1}^m \tilde{\chi}_{\hat{S}_L}(z_{2j-1})\tilde{\chi}_{\hat{S}_L}(z_{2j})^2\tilde{\chi}_{\hat{S}_L}(z_{2j+1})}{\prod_{j=1}^m |1 - z_{2j-1}z_{2j}|^2 |1 - z_{2j}z_{2j+1}|^2} \prod_{j=2}^{2m} dA(z_j) \\
 & \leq C \underbrace{\int_{0, \theta_2}^{\pi/2} \int_{0, r_2}^{\delta} r_2 dr_2 d\theta_2 \dots \int_{0, \theta_{2m}}^{\pi/2} \int_{0, r_{2m}}^{\delta} r_{2m} dr_{2m} d\theta_{2m}}_{2m-1} \frac{\tilde{\chi}_{\hat{S}_L}(z_1) \left(\prod_{j=2}^{2m} \psi_0(r_j)^2\right) \tilde{\chi}_{\hat{S}_L}(z_{2m+1})}{\prod_{j=1}^{2m} (r_j + r_{j+1})^2} \\
 & \leq C \underbrace{\int_0^\delta \dots \int_0^\delta}_{2m-1} \frac{\tilde{\chi}_{\hat{S}_L}(z_1) \left(\prod_{j=2}^{2m} \psi_0(r_j)^2\right) \tilde{\chi}_{\hat{S}_L}(z_{2m+1})}{\prod_{j=1}^{2m} (r_j + r_{j+1})} \prod_{j=2}^{2m} dr_j,
 \end{aligned}$$

où nous utilisons que $r_j/(r_j+r_{j+1})^2 \leq 1/(r_j+r_{j+1})$. La proposition est démontrée. \square

Le cas de $T_{\tilde{\chi}_k}^* T_{\tilde{\chi}_j}$ avec $k = j \pm 1$; un lemme auxiliaire et le calcul final

L'intégrale de la droite de (5.2.9) est calculée sur un cube $(r_2, \dots, r_{2m}) \in \mathcal{C} = (0, \delta)^{2m-1}$. En gros, l'idée principale pour le calcul de cette sous section est de faire une division simple du cube en différentes parties.

$$\mathcal{C}_{i_2, \dots, i_{2m}} = \{(r_2, \dots, r_{2m}) \in \mathcal{C} : r_{i_2} \in (0, \delta), \delta > r_{i_2} > \dots > r_{i_{2m}} > 0\},$$

et d'obtenir les majorations appropriées pour (5.2.9) de l'intégrale ci-dessus sur chaque partie. Ici, $i_j, i_k = 2, \dots, 2m$, et $i_j \neq i_k$.

Lemme 5.9. *Soit $r_j \geq 0$, $j = 1, \dots, 2l$, où $l > 0$ est nombre entier naturel. Alors*

$$\begin{aligned} (r_1 + r_2) \left(\prod_{j=2}^{l-1} (r_j + r_{j+1}) \right) (r_l + r_{l+1}) \cdot (r_1 + r_{l+2}) \left(\prod_{j=l+2}^{2l-1} (r_j + r_{j+1}) \right) (r_{2l} + r_{l+1}) \\ \geq \left(\max_{i=1, \dots, 2l} r_i \right)^2 \left(\prod_{j=1}^{2l} r_j \right)'' \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

où $(\prod \cdot)''$ signifie nous supprimons les facteurs maximaux et minimaux dans le produit.

Supposons que nous avons $r_{i_1} > r_{i_2} > \dots > r_{i_{2l}} > 0$. Alors le lemme dit que

$$\begin{aligned} (r_1 + r_2) \left(\prod_{j=2}^{l-1} (r_j + r_{j+1}) \right) (r_l + r_{l+1}) \cdot (r_1 + r_{l+2}) \left(\prod_{j=l+2}^{2l} (r_j + r_{j+1}) \right) (r_{2l} + r_{l+1}) \\ \geq r_{i_1}^2 \left(\prod_{j=2}^{2l-1} r_{i_j} \right). \end{aligned}$$

Démonstration. Supposons sans perte de généralité que $r_j > 0$, $j = 1, \dots, 2l$. Il est clair que les variables

$$G_1 = \{r_1, r_{l+1}\}, \quad G_2 = \{(r_j)_{j=2, \dots, l-1}, (r_j)_{j=l+2, 2l}\}$$

ont "le même rôle" au sein de chaque groupe G_1, G_2 où G_1 et G_2 sont disjoints. Donc nous allons considérer quatre cas différents.

Cas 1 : $r_1 = \max_{j=1, \dots, 2l} r_j \in G_1$, $r_2 = \min_{j=1, \dots, 2l} r_j \in G_2$. Bien sûr, le choix de r_2 n'a pas d'importance, et l'estimation est la même pour tout $r_k, k \in G_2$. Nous avons

$$\begin{aligned} (r_1 + r_2)(r_2 + r_3) \dots (r_l + r_{l+1}) \cdot (r_1 + r_{l+2})(r_{l+2} + r_{l+3}) \dots (r_{2l-1} + r_{2l})(r_{2l} + r_l) \\ \geq r_1 r_3 \dots r_l r_{l+1} \cdot r_1 r_{l+2} \dots r_{2l-1} r_{2l} = r_1^2 \prod_{j=3}^{2l} r_j. \end{aligned}$$

Cas 2 : $r_1 = \max_{j=1, \dots, 2l} r_j \in G_1$, $r_{l+1} = \min_{j=1, \dots, 2l} r_j \in G_1$. Nous avons

$$\begin{aligned} (r_1 + r_2)(r_2 + r_3) \dots (r_l + r_{l+1}) \cdot (r_1 + r_{l+2})(r_{l+2} + r_{l+3}) \dots (r_{2l-1} + r_{2l})(r_{2l} + r_l) \\ \geq r_1 r_2 \dots r_l \cdot r_1 r_{l+2} \dots r_{2l-1} r_{2l} = r_1^2 \prod_{j=2, j \neq l+1}^{2l} r_j. \end{aligned}$$

5.2. LA PREUVE DE L'ORTHOGONALITÉ ASYMPTOTIQUE DES OPÉRATEURS $T_{\tilde{\chi}_J}$ ET $T_{\tilde{\chi}_K}$, $J \neq K$ 65

Cas 3 : $r_2 = \max_{j=1, \dots, 2l} r_j \in G_2$, $r_3 = \min_{j=1, \dots, 2l} r_j \in G_2$. Encore une fois, le choix des variables r_2, r_3 ne sont pas importants, et nous pouvons leur remplacer par n'importe quelles variables de G_2 . Nous avons

$$\begin{aligned} & (r_1 + r_2)(r_2 + r_3) \dots (r_l + r_{l+1}) \cdot (r_1 + r_{l+2})(r_{l+2} + r_{l+3}) \cdot (r_{2l} + r_l) \\ & \geq r_2 r_2 r_4 \dots r_{l+1} \cdot r_1 r_{l+2} \cdot r_{2l} = r_2^2 \prod_{j=1, j \neq 2, 3}^{2l} r_j. \end{aligned}$$

Cas 4 : $r_1 = \min_{j=1, \dots, 2l} r_j \in G_1$, $r_2 = \max_{j=1, \dots, 2l} r_j \in G_2$. Le choix de la variable r_2 n'est pas important. Nous avons

$$\begin{aligned} & (r_1 + r_2)(r_2 + r_3) \dots (r_l + r_{l+1}) \cdot (r_1 + r_{l+2})(r_{l+2} + r_{l+3}) \dots (r_{2l-1} + r_{2l})(r_{2l} + r_l) \\ & \geq r_2 r_2 r_3 \dots r_l \cdot r_{l+2} r_{l+3} \dots r_{2l-1} r_{2l} = r_2^2 \prod_{j=3}^{2l} r_j. \end{aligned}$$

La démonstration est finie. \square

Proposition 5.10. *Les affirmations suivantes ont lieu :*

1. *Nous avons*

$$\begin{aligned} \|D^m\|_{\mathcal{S}_2}^2 & \leq C \underbrace{\int_0^{\sqrt{2\delta}} \dots \int_0^{\sqrt{2\delta}}}_{4m} \frac{\prod_{j=1}^{4m} \psi_0(r_j)^2}{(r_1 + r_2)^2 \left(\prod_{j=2}^{2m-1} (r_j + r_{j+1}) \right) (r_{2m} + r_{2m+1})} \\ & \frac{1}{(r_1 + r_{2m}) \left(\prod_{j=2m+2}^{4m-1} (r_j + r_{j+1}) \right) (r_{4m} + r_{2m+1})} \prod_{j=1}^{4m} dr_j. \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

2. *En particulier, $D^m \in \mathcal{S}_2$ ou de façon équivalent $D \in \mathcal{S}_{2m}$, pour n'importe quel $\gamma > 1/(8m)$.*

Démonstration. La preuve de cette proposition est assez longue, mais plutôt élémentaire. Pour la commodité du lecteur, nous allons traiter le cas de $m = 1$, puis généraliser au cas $m \geq 1$.

Donc, soit $m = 1$. Rappelons la notation introduite dans la Proposition 5.7. La relation (5.2.9) dit que

$$|D(z_1, z_3)| \leq C \int_0^{\sqrt{2\delta}} \frac{\tilde{\chi}_{\hat{S}_L}(z_1) \psi_0(r_2)^2 \tilde{\chi}_{\hat{S}_L}(z_3)}{(r_1 + r_2)(r_2 + r_3)} dr_2, \quad z_1, z_3 \in \mathbb{D}. \quad (5.2.12)$$

Nous continuons comme

$$\begin{aligned} I_1 & := \|D\|_{\mathcal{S}_2}^2 = \int_{\mathbb{D}, z_1} \int_{\mathbb{D}, z_3} |D(z_1, z_3)|^2 dA(z_1) dA(z_3) \\ & = \int_{\hat{S}_L, z_1} \int_{\hat{S}_L, z_3} |D(z_1, z_3)|^2 dA(z_1) dA(z_3). \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

Maintenant, nous passons aux coordonnées polaires au point $z_0 = 1$

$$z_1 = 1 - r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_3 = 1 - r_3 e^{i\theta_3}$$

exactement comme nous avons fait dans la proposition 5.8. Ici, $r_j \in (0, \sqrt{2}\delta)$, $\theta_j \in (0, \pi/2)$, $j = 1, 3$. Chaque facteur $|D(z_1, z_3)|$ dans la droite de l'intégrale (5.2.13) est borné par (5.2.12), donc on estime cette dernière intégrale comme

$$I_1 \leq C \underbrace{\int_0^{\sqrt{2}\delta} \cdots \int_0^{\sqrt{2}\delta}}_4 \frac{\prod_{j=1}^4 \psi_0(r_j)^2}{(r_1 + r_2)(r_2 + r_3) \cdot (r_1 + r_4)(r_4 + r_3)} \prod_{j=1}^4 dr_j. \quad (5.2.14)$$

C'est le point (1) de la proposition pour $m = 1$.

Comme déjà mentionné, nous avons coupé le cube $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\sqrt{2}\delta) = (0, \sqrt{2}\delta)^4$ en simplexes

$$\mathcal{C}_{i_1 \dots i_4} = \{(r_1, r_2, r_3, r_4) : \delta > r_{i_1} > \dots > r_{i_4} > 0\},$$

où $i_k = 1, \dots, 4$, $i_k \neq i_j$, $k \neq j$, $k, j = 1, \dots, 4$. Le lemme 5.9 avec $l = 2$ dit que

$$(r_1 + r_2)(r_2 + r_3) \cdot (r_1 + r_4)(r_4 + r_3) \geq r_{i_1}^2 r_{i_2} r_{i_3}.$$

Par conséquent, l'estimation supérieure pour l'intégrale sur $\mathcal{C}_{i_1 \dots i_4}$ se lit comme

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{C}_{i_1 \dots i_4}} \cdots \leq C \int_0^\delta \frac{\psi_0(r_{i_1})^2}{r_{i_1}^2} dr_{i_1} \int_0^{r_{i_1}} \frac{\psi_0(r_{i_2})^2}{r_{i_2}} dr_{i_2} \cdots \int_0^{r_{i_3}} \psi_0(r_{i_4})^2 dr_{i_4} \\ & \leq C \int_0^\delta \frac{\psi_0(r_{i_1})^2}{r_{i_1}^2} dr_{i_1} \int_0^{r_{i_1}} \frac{\psi_0(r_{i_2})^2}{r_{i_2}} dr_{i_2} \int_0^{r_{i_2}} \frac{\psi_0(r_{i_3})^4 r_{i_3}}{r_{i_3}} dr_{i_3} \\ & \leq C \int_0^\delta \frac{\psi_0(r_{i_1})^2}{r_{i_1}^2} dr_{i_1} \int_0^{r_{i_1}} \frac{\psi_0(r_{i_2})^6 r_{i_2}}{r_{i_2}} dr_{i_2} \\ & \leq C \int_0^\delta \frac{\psi_0(r_{i_1})^8 r_{i_1}}{r_{i_1}^2} dr_{i_1} = C \int_0^\delta \frac{\psi_0(r_{i_1})^8}{r_{i_1}} dr_{i_1}, \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

où nous avons utilisé que $\psi_0(r_{i+1}) \leq \psi_0(r_i)$ puisque $r_{i+1} \leq r_i$ et la fonction ψ_0 est croissante. Cette dernière intégrale est convergente chaque fois que $8\gamma > 1$, qui est le (2) la proposition actuelle avec $m = 1$.

Pour le cas général, nous suivons la même démarche de la preuve que pour $m = 1$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} I_m & := \|D^m\|_{\mathcal{S}_2}^2 = \int_{\mathbb{D}, z_1} \int_{\mathbb{D}, z_{2m+1}} |D_m(z_1, z_{2m+1})|^2 dA(z_1) dA(z_{2m+1}) \\ & = \int_{\hat{\mathcal{S}}_L, z_1} \int_{\hat{\mathcal{S}}_L, z_{2m+1}} |D_m(z_1, z_{2m+1})|^2 dA(z_1) dA(z_{2m+1}). \end{aligned}$$

En rappelant la relation (5.2.9) pour $|D_m(z_1, z_{2m+1})|$, nous bornons l'intégrale ci-dessus par ce qui suit $4m$ -tuple intégrale

$$\begin{aligned} I_m & \leq C \underbrace{\int_0^\delta \cdots \int_0^\delta}_{4m} \frac{\prod_{j=1}^{4m} \psi_0(r_j)^2}{(r_1 + r_2)^2 \left(\prod_{j=2}^{2m-1} (r_j + r_{j+1}) \right) (r_{2m} + r_{2m+1})} \\ & \quad \frac{1}{(r_1 + r_{2m}) \left(\prod_{j=2m+2}^{4m-1} (r_j + r_{j+1}) \right) (r_{4m} + r_{2m+1})} \prod_{j=1}^{4m} dr_j, \end{aligned}$$

le calcul étant complètement analogue à (5.2.14). Le point (1) de la proposition est démontré.

Nous divisons maintenant le cube $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\sqrt{2}\delta) = (0, \sqrt{2}\delta)^{4m}$ en simplexes

$$\mathcal{C}_{i_1 \dots i_{4m}} = \{(r_1, \dots, r_{4m}) : \sqrt{2}\delta > r_{i_1} > \dots > r_{i_{4m}} > 0\},$$

où $i_k = 1, \dots, 4m, i_k \neq i_j, k \neq j, k, j = 1, \dots, 4m$. Le lemme 5.9 ($l = 2m$) donne

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{j=1}^{2m} (r_j + r_{j+1}) \right) \cdot (r_1 + r_{2m+2}) \left(\prod_{j=2m+2}^{4m-1} (r_j + r_{j+1}) \right) (r_{4m} + r_{2m+1}) \\ & \geq r_{i_1}^2 \left(\prod_{j=2}^{4m-1} r_{i_j} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, la borne supérieure de l'intégrale sur $\mathcal{C}_{i_1 \dots i_{4m}}$ est

$$\int_{\mathcal{C}_{i_1 \dots i_{4m}}} \dots \leq C \int_0^\delta \frac{\psi_0(r_{i_1})^2 dr_{i_1}}{r_{i_1}^2} \int_0^{r_{i_1}} \frac{\psi_0(r_{i_2})^2}{r_{i_2}} dr_{i_2} \dots \int_0^{r_{i_{4m-1}}} \psi_0(r_{i_{4m}})^2 dr_{i_{4m}}.$$

Comme avant, nous avons $\psi_0(r_{i+1}) \leq \psi_0(r_i)$ puisque ψ_0 est croissante et $0 < r_{i+1} \leq r_i$. Nous avons lié cette intégrale par télescopage comme dans (5.2.15) pour obtenir

$$\int_{\mathcal{C}_{i_1 \dots i_{4m}}} \dots \leq C \int_0^\delta \frac{\psi_0(r_{i_1})^{8m} r_{i_1} dr_{i_1}}{r_{i_1}^2} = C \int_0^\delta \frac{\psi_0(r_{i_1})^{8m}}{r_{i_1}} dr_{i_1}.$$

Cette dernière intégrale est convergente chaque fois que $8m\gamma > 1$, qui est le point (2) de cette proposition. La preuve est finie. \square

Preuve du théorème 5.5. En effet, fixons $m > 0$ un naturel tel que $\gamma > 1/(8m)$. Rappelons que

$$(T_{\omega_1}^* T_{\omega_L})^* (T_{\omega_1}^* T_{\omega_L}) \leq D,$$

et, par la proposition 5.10, $D \in \mathcal{S}_{2m} \subset \Sigma_{2\gamma}^0$. Par monotonie des valeurs singulières, l'opérateur $T_{\omega_1}^* T_{\omega_L}$ est aussi dans $\Sigma_{2\gamma}^0$, et le théorème est prouvé. \square

5.3 Applications et conclusions finales

Les corollaires présentés dans cette section suivent principalement Pushnitski [9]. Encore une fois, rappelons la notation des fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \varphi$ dans (5.0.2) et (5.0.1).

5.3.1 Les différents versions des résultats obtenus

Corollaire 5.11.

1. Soit φ une fonction continue sur $\bar{\mathbb{D}}$ et ayant la propriété

$$\lim_{|z| \rightarrow 1-0} |\varphi_{0,\gamma}(|z|)^{-1} \varphi(z) - \varphi_1(e^{i\theta})| = 0, \quad z = |z|e^{i\theta} \in \mathbb{D},$$

où $\varphi_1 \in C(\mathbb{T})$. Alors les valeurs singulières de l'opérateur T_φ ont les asymptotes (1.0.8), (1.0.9).

2. En particulier

$$\varphi(z) = \varphi_1(e^{i\theta})\varphi_0(|z|)g(|z|),$$

où $g(\cdot)$ est une fonction continue sur $[0, 1]$ tel que $g(1) \neq 0$. Nous supposons sans perte de généralités que $g(1) > 0$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log(n+1)^\gamma s_n(T_\varphi) = (g(1)\|\varphi_1\|_{L^\infty(\mathbb{T})})^\gamma,$$

idem pour la contrepartie de la formule (1.0.9).

La preuve de la première partie du corollaire est similaire au raisonnement de la section précédente donc elle est omise. Pour la seconde partie, nous l'avons en utilisant le lemme 5.14 avec la fonction notée g au lieu de $g(r) \equiv 1$ pour $r \in [0, 1]$, comme cela a été dans le théorème 1.2.

Les techniques théoriques générales des opérateurs développées dans Pushnitski-Yafaev [10] permettent de traiter les suites de valeurs propres négatives et positives $\{\lambda_n^\pm(T_\varphi)\}_n$ de l'opérateur T_φ avec symbole réel φ . Pour la simplicité, nous donnons le corollaire suivant pour un symbole φ donné dans (5.0.2), (5.0.1).

Corollaire 5.12. *Soit φ le symbole réel ci-dessus. Nous avons les asymptotiques suivantes pour les suites de valeurs propres négatives et positives de l'opérateur T_φ , respectivement*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log(n+1)^\gamma \lambda_n^\pm(T_\varphi) = \|\varphi_1^\pm\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^\gamma.$$

5.3.2 Une application aux matrices à bandes finies

Les résultats obtenus nous permettent de gérer les valeurs singulières des matrices à bandes avec la décroissance logarithmique le long de la diagonale principale. Nous donnons quelques définitions pour rendre ceci précis.

Soit $D : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ un opérateur compact. Sa matrice est définie par

$$D := [d_{i,j}]_{i,j=0,\dots,\infty}$$

dans la base canonique de $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$. Pour un $N \in \mathbb{N}$ fixé, nous dirons que D est une matrice à $(2N+1)$ -bandes, si $d_{i,j} = 0$ for $|i-j| > N+1$. En outre, soit $\{b_{-N}, \dots, b_N\}$ un ensemble de $2N+1$ coefficients complexes. Pour un $\gamma > 0$ fixé, nous dirons que D est une matrice à $(2N+1)$ -bandes à décroissance logarithmique, si

$$d_{m,m+j} = \frac{b_j}{(\log(m+1))^\gamma} (1 + o(1)), \quad m \rightarrow +\infty, \quad j = -N, \dots, N.$$

Pour donner le corollaire suivant, définissons la fonction spécifique correspondante φ_1 à coefficients $\{b_j\}_{j=-N,\dots,N}$ comme

$$\varphi_{1,b}(e^{i\theta}) := \sum_{j=-N}^N b_j e^{ij\theta}.$$

Corollaire 5.13. *Nous avons les asymptotiques des valeurs singulières suivantes de la matrice D à $(2N+1)$ -bandes*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\log(n+1))^\gamma s_n(D) = \|\varphi_{1,b}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}. \quad (5.3.1)$$

La preuve du corollaire découle à la fois de deux faits. Premièrement, les valeurs singulières d'opérateurs de Toeplitz T_φ avec $\varphi = \varphi_{1,b}\varphi_0$ ont l'asymptotique (5.3.1). Deuxièmement, nous écrivons l'opérateur T_φ dans la base standard de l'espace de Bergman A_α^2 et nous l'identifions avec la matrice obtenue sur $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$. Il est facile de voir maintenant que $D - T_\varphi \in \Sigma_\gamma^0$, et contenu du corollaire découle de la proposition 4.2.

5.4 Annexe : Asymptotique d'une intégrale logarithmique

Le lemme suivant est une conséquence facile du lemme de type Watson pour les intégrales de Laplace prouvé dans Kupin-Naboko [6, Thm. 1].

Lemme 5.14. *Soit g une fonction continue sur $[0, 1]$, et $g(1) \neq 0$. Alors, pour tout $\gamma > 0$,*

$$\int_0^1 \frac{r^n}{(1 + \log 1/(1-r))^\gamma} g(r) dr = \frac{g(1)}{n(\log n)^\gamma} (1 + o(1)).$$

Bibliographie

- [1] Birman, M. Sh. ; Solomjak, M. Z. Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space. Translated from the 1980 Russian original by S. Khrushchëv and V. Peller. Mathematics and its Applications (Soviet Series). D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.
- [2] Böttcher, A. ; Silbermann, B. Analysis of Toeplitz operators. Second edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [3] Bruneau, V. ; Raikov, G. Spectral properties of harmonic Toeplitz operators and applications to the perturbed Krein Laplacian. *Asymptot. Anal.* 109 (2018), no. 1-2, 53–74.
- [4] Gohberg, I. C. ; Krein, M. G. Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators. Translated from the Russian by A. Feinstein. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 18 American Mathematical Society, Providence, R.I. 1969.
- [5] Hedenmalm, H. ; Korenblum, B. ; Zhu, K. Theory of Bergman spaces. Graduate Texts in Mathematics, 199. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [6] Kupin, S. ; Naboko, S. A version of Watson lemma in logarithmic scale, submitted, arxiv.
- [7] Nikolski, N.. Operators, functions, and systems : an easy reading. Vol. 1. Hardy, Hankel, and Toeplitz. Mathematical Surveys and Monographs, 92. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [8] Nikolski, N. Operators, functions, and systems : an easy reading. Vol. 2. Model operators and systems. Mathematical Surveys and Monographs, 93. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [9] Pushnitskii, A. Spectral asymptotics for Toeplitz operators and an application to banded matrices. *Oper. Theory Adv. Appl.*, Vol. 268, Birkhäuser-Springer, 2018, 397–412.
- [10] Pushnitski, A. ; Yafaev, D. Spectral asymptotics for compact self-adjoint Hankel operators. *J. Spectr. Theory* 6 (2016), no. 4, 921–953.
- [11] Zhu, K. Operator theory in function spaces. Second edition. Mathematical Surveys and Monographs, 138. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.