



**HAL**  
open science

# Dynamique des écoulements pulsés dans des canaux déformables

Smail Lebbal

► **To cite this version:**

Smail Lebbal. Dynamique des écoulements pulsés dans des canaux déformables. Autre. Université de Lyon, 2021. Français. NNT : 2021LYSEC046 . tel-03577495

**HAL Id: tel-03577495**

**<https://theses.hal.science/tel-03577495>**

Submitted on 16 Feb 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre NNT : 2021LYSEC46

**THÈSE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON  
opérée au sein de l'École Centrale de Lyon**

**École Doctorale N°162  
Mécanique Énergétique Génie Civil Acoustique**

**Spécialité de doctorat : Mécanique des fluides**

Soutenue publiquement le 7 décembre 2021, par  
**Smail LEBBAL**

---

**Dynamique des écoulements pulsés dans  
des canaux déformables**

---

Devant le jury composé de :

Uwe Ehrenstein	Professeur, Université Aix-Marseille	Président/Rapporteur
Christopher Davies	Professeur, University of Leicester	Rapporteur
Damien Biau	Maître de conférences, Arts et métiers PARISTECH	Examinateur
Florence Raynal	Chargée de recherche, École centrale de Lyon	Examinatrice
Benoît Pier	Directeur de recherche, École centrale de Lyon	Directeur de thèse
Frédéric Alizard	Maître de conférences HDR, Université de Lyon1	Co-directeur de thèse



**Résumé :**

Cette étude est consacrée aux instabilités linéaires des écoulements permanents et pulsés dans des canaux à parois déformables. Le modèle de paroi consiste en une plaque mince supportée par des ressorts et des amortisseurs. Le couplage fluide-structure prend en compte toutes les contraintes visqueuses et forces de pression. L'étude des écoulements permanents est réalisée via des problèmes aux valeurs propres classiques, tandis qu'une analyse complète de Floquet est implémentée pour les configurations pulsées, avec une approche efficace pour supprimer les modes parasites. Les résultats obtenus incluent la dynamique des modes de Tollmien-Schlichting (TS) ainsi que les modes d'instabilité de surface induite par l'écoulement (FSI), sous la forme de modes traveling wave flutter (TWF) et de divergence (DIV). Ces différents modes sont interprétés à l'aide des quatre principaux paramètres de contrôle adimensionnels : le nombre de Reynolds ( $Re$ ), le nombre de Womersley ( $Wo$ ), l'amplitude de la modulation de l'écoulement de base et la vitesse réduite ( $VR$ ) qui représente la réponse de la paroi flexible aux forces hydrodynamiques. La dynamique des instabilités est étudiée systématiquement pour de vastes régions de l'espace multi-dimensionnel des paramètres de contrôle. Ce travail révèle que les modes TWF sont principalement régis par  $VR$  et largement indépendants de  $Re$ , alors que les modes DIV et TS dépendent à la fois de  $Re$  et de  $VR$ . L'instabilité est généralement dominée par le mode TWF de symétrie variqueuse, pour les écoulements permanents comme pulsés. Un nouveau type de mode transition a été découvert, provenant de la coalescence de deux modes de Floquet. Une analyse fine des processus de transfert d'énergie permet d'expliquer les mécanismes moteurs des instabilités pour chaque classe de modes.

**Mots-clés :** Stabilité linéaire, écoulement pulsé, parois déformables, interaction fluide-structure.

**Abstract :**

In this study, the linear instability of steady and pulsatile flows in deformable channels is investigated. The compliant wall model consists of a spring-backed plate including a damping mechanism. At the interface between the fluid and the walls, all viscous stresses and pressure forces are taken into account. The analysis of steady configurations proceeds via classical eigenvalue methods, while a complete Floquet analysis is implemented for pulsatile configurations, including an efficient approach for removing the spurious modes. The results obtained include the dynamics of Tollmien-Schlichting (TS) modes as well as flow-induced surface instability (FSI) modes, in the form of both traveling wave flutter (TWF) and divergence (DIV) modes. The different instability modes are then reinterpreted in the light of four main dimensionless control parameters : Reynolds number ( $Re$ ), Womersley number ( $Wo$ ), amplitude of the base flow modulation and the reduced velocity ( $VR$ ) which represents the response of the flexible wall to hydrodynamic loading. The complete instability characteristics are systematically investigated over large regions of the multi-dimensional control parameter space. It is observed that TWF modes are primarily governed by  $VR$  and largely independent of  $Re$ , while DIV and TS modes are both affected by  $VR$  and  $Re$ . It is found that the instability is generally dominated by the TWF mode of varicose symmetry, for steady as well as pulsatile conditions. A new transition mode has been discovered, resulting from the coalescence of two Floquet modes. Close monitoring of energy transfer processes provides physical insight into the different mechanisms driving each class of modes.

**Keywords :** Linear instability, pulsatile flow, compliant channels, fluid-structure interaction.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Présentation générale</b>	<b>11</b>
1.1 État de l'art . . . . .	11
1.2 Formulation du problème de fluide–structure . . . . .	16
1.2.1 Modélisation de la paroi flexible . . . . .	16
1.2.2 Couplage fluide–structure . . . . .	17
1.2.3 Conditions aux limites . . . . .	19
1.3 Solution analytique de l'écoulement pulsé . . . . .	19
1.4 Analyse dimensionnelle . . . . .	22
<b>2 Stabilité linéaire</b>	<b>27</b>
2.1 Méthode des petites perturbations . . . . .	27
2.2 Linéarisation de l'interaction fluide–structure . . . . .	28
2.3 Linéarisation des conditions aux limites . . . . .	30
2.4 Comportement aux temps longs . . . . .	31
2.4.1 Hypothèse de modes normaux . . . . .	31
2.4.2 Théorème de Squire . . . . .	32
2.5 Écoulement permanent . . . . .	33
2.6 Écoulement pulsé . . . . .	34
2.7 Équations pour l'énergie totale . . . . .	36
2.8 Méthodes numériques . . . . .	38
2.8.1 Méthodes spectrales . . . . .	38
2.8.2 Formulation du problème aux valeurs propres . . . . .	39
2.8.3 Résolution du problème de Floquet . . . . .	43
2.8.4 Méthodes de continuation . . . . .	45
2.8.5 Validation des méthodes numériques . . . . .	47
<b>3 Revisiting the linear instabilities of plane channel flow between compliant walls</b>	<b>53</b>
3.1 Introduction . . . . .	56
3.2 Problem formulation . . . . .	58
3.2.1 Fluid–structure interaction model and interface conditions . . . . .	58
3.2.2 Dimensionless control parameters . . . . .	60

3.2.3	Formulation of the linearized model . . . . .	61
3.3	Numerical methods . . . . .	63
3.4	Linear stability results . . . . .	64
3.4.1	Spectra and classes of modes . . . . .	65
3.4.2	Temporal growth and instability onset . . . . .	69
3.4.3	Comparison with asymptotic theories for $d_\star = 0$ . . . . .	79
3.4.4	Energy budgets . . . . .	82
3.5	Concluding remarks . . . . .	92
3.6	Appendix : validation and influence of boundary conditions . . . . .	93
<b>4</b>	<b>Linear instabilities of pulsatile plane channel flow between compliant walls</b>	<b>95</b>
4.1	Introduction . . . . .	97
4.2	Fluid–structure interaction model and interface conditions. . . . .	99
4.3	Base flows and non-dimensional control parameters . . . . .	100
4.4	Linear stability analysis . . . . .	102
4.5	Numerical methods . . . . .	104
4.6	Stability analysis . . . . .	106
4.6.1	The Floquet eigenspectrum . . . . .	107
4.6.2	Influence of some parameters on the spectrum . . . . .	109
4.6.3	Waves superposition for sinuous Floquet mode . . . . .	112
4.6.4	Spatial structure of eigen-modes . . . . .	114
4.6.5	Temporal dynamics of Floquet eigen-modes . . . . .	116
4.6.6	Interaction between TS and sTWF waves . . . . .	117
4.6.7	Neutral curves . . . . .	119
4.6.8	Influence of $\tilde{Q}$ and $Wo$ onto temporal growth rates . . . . .	122
4.6.9	Critical parameters for onset of instability . . . . .	126
4.7	Conclusions . . . . .	130
	<b>Conclusion</b>	<b>133</b>

# Introduction

La compréhension de la dynamique des écoulements artériels s'avère primordiale pour diagnostiquer des pathologies cardiovasculaires à l'aide de méthodes non ou peu intrusives. Par exemple, les fluctuations des contraintes de cisaillement aux parois engendrées par les structures tourbillonnaires favorisent le dépôt de plaques d'athérome, pouvant donner lieu à des sténoses vasculaires [14]. En outre, pour amortir les larges fluctuations de pression à la sortie du cœur, les parois de l'aorte et de l'artère pulmonaire se déforment fortement [69], si bien que la perte d'élasticité des artères favorise des développements pathologiques, souvent liés au vieillissement des artères. C'est le cas de l'anévrisme de l'aorte abdominale où la paroi se dilate irréversiblement pour former une cavité. Sous l'effet de l'écoulement, des zones à fortes contraintes pariétales peuvent conduire à la rupture de l'anévrisme. Dès lors, le développement de modèles couplant plusieurs phénomènes physiques en lien avec l'hémodynamique comme les écoulements pulsés ou encore les interactions fluide–structure est indispensable pour améliorer la prédiction de ces pathologies.

Afin de modéliser ces écoulements sanguins, des hypothèses simplificatrices doivent être adoptées [28]. En effet, nous considérons généralement le fluide comme un milieu continu, ce qui est justifié pour la majorité des vaisseaux sanguins, à l'exception des plus petits capillaires. Nous supposons aussi que l'écoulement est incompressible, même si la densité du sang dépend du nombre de globules rouges [76]. Enfin, le sang est un fluide non newtonien à cause de sa constitution complexe. Cependant, les effets non newtoniens au sein des grosses artères peuvent être négligés [72].

Les écoulements sanguins sont instationnaires du fait de la pulsation cardiaque. Pour modéliser celle-ci, nous utilisons généralement la solution de Womersley [94]. Dans ce cadre, trois paramètres non dimensionnels caractérisent le système : le nombre de Reynolds  $Re$  qui mesure les effets des forces inertielles par rapport aux forces visqueuses ; le nombre de Womersley  $Wo$ , définissant le rapport des effets instationnaires et des effets visqueux ; et l'amplitude de la pulsation  $\hat{Q}$ . Les nombres de Womersley rencontrés dans l'aorte abdominale se situent dans la gamme  $Wo = 10\text{--}15$  [54]. Les nombres de Reynolds quant à eux sont de l'ordre de 600 pour une situation de repos et jusqu'à 6000 dans une phase d'effort [54].

Les études théoriques récentes s'intéressant à l'anévrisme de l'aorte abdominale [38, 37] ont conclu sur la nécessité d'inclure la flexibilité des parois dans les modélisations. Cependant, les tissus présentent un comportement complexe. Ils se décomposent en trois couches, l'intima, la media et l'adventice [29]. La modélisation des parois arté-



rielles constitue ainsi un problème très complexe. En effet, plusieurs processus physiques sont mis en jeu. Par exemple, des transferts de masse entre le sang et l'intima (la première couche de la paroi), la prolifération cellulaire dans la couche media [47], ou encore le comportement non linéaire et non isotrope du matériau lié à la présence de fibres d'élastine et de collagène [83]. Par conséquent, les effets mécaniques, biochimiques et biologiques sont généralement étudiés séparément.

Nous distinguons deux types de modèle mécanique de paroi flexible : surfaciques et volumiques. Les modèles surfaciques consistent en une plaque mince ou une membrane soutenue par des ressorts et des amortisseurs. Dans les modèles volumiques, le matériau de la plaque est complètement décrit par son champ de déplacement. Il est évident que les modèles volumiques sont généralement plus pertinents. En effet, ils s'adaptent parfaitement à la structure multicouches des artères. Cependant, la modélisation des différents matériaux constitutifs est souvent discutable et, en outre, les temps de calcul sont plus importants. De plus, Duncan *et al.* [22] ont montré que les modèles surfaciques permettent une approximation raisonnable des diverses instabilités liées à l'interaction entre un matériau élastique et un fluide.

Il est intéressant aussi de souligner que dans d'autres domaines, comme en aérodynamique, la flexibilité de la paroi peut agir comme un moyen de contrôle passif ou actif pour améliorer la réduction de la traînée et l'efficacité de propulsion. On retrouve cette capacité notamment chez les dauphins [27]. Cette propriété intéressante a conduit au développement de modèles simplifiés depuis les années 30.

Les écoulements pulsés en canal et en tube rigides [74, 75] ainsi que les écoulements permanents interagissant avec une paroi flexible [55] ont déjà été longuement étudiés et sont relativement bien compris. Cependant, seules quelques études sont consacrées sur l'impact des deux effets combinés. Pour le cas de l'écoulement pulsé dans un canal plan avec des parois flexibles, Tsigklifis *et al.* [91] montrent que la flexibilité de la paroi a un effet stabilisant pour une certaine plage du nombre de Womersley. Cependant, la gamme de paramètres de paroi utilisée est relativement restreinte pour obtenir une représentation exhaustive de ce phénomène. Ainsi, une étude complète des paramètres influençant les instabilités naissantes au sein d'un écoulement pulsé interagissant avec une paroi flexible demeure particulièrement pertinente afin d'améliorer les modèles hémodynamiques dans le domaine médical, mais également en aéronautique [8]. Cette thèse est par conséquent consacrée à l'étude d'un modèle linéaire représentatif des écoulements pulsés en canal plan flexible et elle a pour objectif d'étudier les différents modes d'instabilités intervenant dans la dynamique pour une large gamme de paramètres de ce système.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante. Dans le premier chapitre, nous présentons une revue bibliographique sur le sujet des instabilités en présence de paroi flexible et sur les écoulements pulsés. Puis, nous introduirons la formulation du problème fluide-structure, incluant le modèle utilisé, le couplage fluide-structure et les conditions aux limites. Dans la fin de ce chapitre, nous détaillerons les paramètres de contrôle non dimensionnels associés.

Le deuxième chapitre est consacré à la formulation mathématique de la stabilité

---

linéaire, pour les écoulements permanents et pulsés. Les méthodes numériques utilisées sont alors introduites.

Le troisième chapitre donne les résultats de l'étude de stabilité linéaire pour un écoulement permanent dans un canal plan avec des parois flexibles. Nous mettons en évidence l'effet prédominant de la vitesse réduite (soit le rapport entre un temps caractéristique de la paroi sur celui associé au fluide) pour les instabilités de paroi.

Ensuite, le quatrième chapitre présente les résultats de la stabilité linéaire pour les écoulements pulsés obtenus par analyse de Floquet. La dynamique particulièrement riche de ces écoulements est systématiquement caractérisée pour un large espace des paramètres.

Une synthèse des résultats et quelques perspectives sont données dans la conclusion.



# Chapitre 1

## Présentation générale

### 1.1 État de l’art

L’intérêt porté à l’influence d’une paroi flexible sur les mécanismes de transition vers la turbulence a débuté dans les années 30 par les observations de Gray [39] relatives à la peau des dauphins et leur implication sur les performances propulsives de ces derniers.

Ces observations ont motivé les études expérimentales de Kramer [52, 53] dans les années 50. L’auteur a utilisé un projectile sous-marin couvert par une peau flexible. Il a remarqué une baisse brutale de la traînée. Il explique dans son article que la réduction de la traînée est due au maintien de la laminarité de la couche limite. Selon lui, la flexibilité de la paroi amortissait les ondes d’instabilité primaire de Tollmien–Schlichting (associées classiquement à une paroi rigide et notées TS) et ainsi retardait la transition vers la turbulence.

Plusieurs expériences ont par la suite échoué à reproduire les résultats de Kramer. En outre, l’existence d’instabilités propres à la paroi, identifiées théoriquement par Benjamin [2], nuance l’efficacité de cette dernière. La première expérience qui tend à confirmer les résultats de Kramer est effectuée par Gaster en 1988 [34]. L’auteur a ainsi réussi à réduire les taux d’amplification d’ondes TS avec une paroi déformable.

D’un point vue théorique, il s’agit d’un problème classique d’interaction fluide–structure, où des différences suivant la modélisation du couplage entre la paroi et le fluide (continuité des contraintes normales, tangentielles) et du modèle de paroi (plaque mince élastique, simulation complète de la structure) peuvent distinguer les auteurs.

Dans le but d’étudier les instabilités des écoulements cisailés en présence de parois flexibles, Benjamin [3] a étendu les travaux de Miles [67] associés à la génération d’ondes de surface. Ainsi, Benjamin [2], Landahl [56] et d’autres depuis ont montré une universalité des types d’instabilités suivant 5 paramètres de la paroi : l’élasticité, la raideur, la tension, l’amortissement et la masse. Ces types peuvent être classés selon le transfert d’énergie du fluide vers la paroi. Ils se regroupent alors en trois classes. La classe A est caractérisée par un transfert d’énergie positif. C’est le cas des modes

TS, ils sont stabilisés par la flexibilité de la paroi et déstabilisés par sa dissipation. Benjamin [4] a montré que la condition d'instabilité du mode TS est que la dissipation soit supérieure au transfert d'énergie dû au travail des tensions de Reynolds avec le cisaillement du fluide. La classe B est similaire aux ondes induites par le vent au dessus d'une surface d'eau. Elles n'existent que si la paroi est flexible. Elles sont également associées à une instabilité de flottement (*traveling wave flutter* en anglais, notée TWF par la suite). La condition d'instabilité est que la dissipation (incluant celle visqueuse du fluide et celle associée à l'amortissement de la paroi) soit inférieure au transfert d'énergie réalisé par le travail des tensions de Reynolds avec l'écoulement de base. L'amortissement de la paroi a ici un effet stabilisant contrairement aux modes de la classe A. La classe C se produit lorsque la flexibilité est très grande et est associée à des modes ayant des vitesses de phase très petites (notés ensuite modes de divergence, DIV). Elle se distingue en présence de dissipation à la paroi. Les modes des classes B et C n'existent qu'en présence de parois flexibles et sont donc appelés modes d'interaction fluide-structure (IFS).

Toutes les études indiquent que les ondes de classe A sont stabilisées par les parois déformables. Cependant, des instabilités de paroi de classe B et C surviennent également. Kaplan [48] fut le premier à résumer ces travaux relatifs à l'influence de la paroi flexible sur la stabilité linéaire du système.

En 1985, les études théoriques de Carpenter et Garrad [11, 12] ont permis pour la première fois de corroborer les résultats expérimentaux de Kramer obtenus dans les années 50. Les auteurs ont alors modélisé le revêtement utilisé par Kramer à l'aide d'une plaque mince surmontée de ressorts baignant dans un substrat liquide. Carpenter et Garrad [11, 12] ont ainsi utilisé l'équation d'Orr-Sommerfeld pour modéliser le fluide couplée avec l'équation de plaque mince de type Kirchoff intégrant une raideur, une tension et une dissipation. Les auteurs ont montré qu'une réduction de la rigidité en flexion et de la raideur des ressorts ont un effet stabilisant sur les ondes TS, tandis que l'amortissement de la paroi tend à les déstabiliser.

Dans cette approche, la première simulation numérique directe (DNS) d'une couche limite se développant sur une membrane est réalisée par Domaradzki et Metcalfe [20]. En étudiant les bilans d'énergie cinétique, les auteurs ont conclu que la paroi modifie l'écoulement en réduisant le terme de production d'énergie dû au cisaillement du fluide. Par conséquent, le mode TS est amorti. Ils mettent aussi en évidence que les modes de classe B sont dominés par le travail de la pression à la paroi.

En 1988, Sen et Arora [81] démontrent l'existence d'une classe de mode dit de transition qui n'appartient pas aux classes A, B et C de Benjamin. Ce mode apparaît dans des régions de bifurcations. Il résulte d'une coalescence du mode TS et du mode TWF lors de l'augmentation de la dissipation de la paroi.

Un modèle de paroi flexible anisotrope fut développé par Carpenter et Morris [13]. L'auteur a utilisé une théorie asymptotique pour prendre en compte les effets de l'anisotropie d'une paroi flexible sur les instabilités TS et IFS. En étudiant les échanges d'énergie, Carpenter a confirmé les conclusions de Domaradzki et Metcalfe[20] sur le mécanisme de stabilisation du mode TS par la paroi flexible.

Carpenter et Gajjar [10] ont dérivé une approximation asymptotique pour la pression à la paroi et les contraintes visqueuses. Ils ont mis en évidence que le mécanisme de déstabilisation des modes de flottement est dominé par le travail des efforts de pression à la paroi, en accord également avec les analyses de Domaradzki et Metcalfe [20].

Enfin, Lucey et Carpenter [63] ont comparé les résultats de la théorie asymptotique de Carpenter et Gajjar [10] avec ceux issus des expériences de Gaster [34]. Un excellent accord est trouvé pour le mode de flottement.

Davies et Carpenter [16] ont examiné les instabilités naissantes dans un écoulement de canal plan en présence de parois déformables. L'étude est restreinte à la symétrie sinueuse. Un modèle quasi-analytique basé sur la couche critique est également développé. Ce dernier s'est avéré particulièrement représentatif pour décrire les modes d'instabilité de flottement en comparant les valeurs critiques avec celles issues de la résolution complète de l'équation d'Orr–Sommerfeld étendue aux parois souples. Cette étude a aussi confirmé les résultats de Sen et Arora [81] sur l'existence d'un mode de coalescence. Enfin, un mode de divergence est illustré. Ce mode apparaît lorsque la dissipation dans la paroi est très grande.

Une extension du modèle analytique de Davies et Carpenter pour la symétrie variqueuse est proposé par Huang [46]. L'auteur retrouve les mécanismes de transfert d'énergie de l'écoulement de base vers la perturbation que Miles [67] a définis pour la génération d'ondes de surface.

La première étude de stabilité linéaire pour des perturbations antisymétriques dans un canal plan avec des parois flexibles a été menée par Nagata et Cole [68]. Il est montré que le mode de flottement variqueux est plus instable que le mode sinueux.

En considérant deux modèles de paroi pour un écoulement de Couette plan, une plaque mince posée sur des ressorts et un solide viscoélastique d'une épaisseur finie, Shankar et Kumaran [84] ont démontré l'universalité des instabilités de paroi. En effet, les auteurs illustrent que les modes de flottement sont indépendants du modèle choisi.

Plus récemment, Gaurav et Shankar [35, 36] ont prouvé l'existence d'un mode de coalescence dans le cas d'un canal plan pour un matériau néo-hookéen viscoélastique. Ce mode apparaît pour de très grandes déformations. Ces diverses études confirment l'intérêt d'une analyse associée à une plaque surfacique pour la description des mécanismes.

La première étude s'intéressant à l'effet des nonlinéarités sur la dynamique d'un écoulement interagissant avec une paroi flexible est attribuée à Rotenberry et Saffman [77]. Les auteurs ont ainsi utilisé les équations de Ginzburg–Landau pour modéliser l'évolution non linéaire d'une perturbation dans un canal plan flexible.

Thomas [89] a étudié la stabilité non linéaire d'une couche limite se développant le long d'une paroi souple par simulation numérique directe. L'auteur a trouvé que la paroi flexible entraîne une déstabilisation de la couche limite de Blasius. Dans le même esprit, Ehrenstein et Rossi [24] confirmèrent par la suite les résultats de Thomas.

Lucey et Carpenter [62] ont simulé l'évolution d'une perturbation d'amplitude finie pour une couche limite interagissant avec une paroi flexible. La perturbation initialement linéairement instable sature non linéairement lorsque son amplitude atteint

une certaine valeur. Cette phase est alors caractérisée par une onde de divergence non linéaire. L'amortissement de la paroi paraît comme un facteur nécessaire pour la formation de ces ondes non linéaires.

Des simulations numériques directes d'un écoulement de couche limite en présence d'une paroi flexible ont été réalisées par Wiplier et Ehrenstein [93]. Les auteurs illustrent que les ondes TS linéairement stables sont amorties dans le régime non linéaire. En revanche, des ondes saturées de type divergence émergent. Cela confirme les résultats de Lucey et Carpenter [62].

Plus récemment, Hoepffner *et al.* [45] se sont intéressés aux mécanismes linéaires de croissance transitoire pour une perturbation introduite dans un écoulement de canal plan avec des parois flexibles. Un phénomène basse fréquence est observé pour une certaine gamme de paramètres, associé à une interférence entre un mode de paroi et la branche continue du spectre. L'ensemble de ces travaux sont résumés par Gad-el-Hak [30, 31, 32], Carpenter *et al.* [9] et Kumaran [55].

La première étude de stabilité linéaire d'un écoulement pulsé a été menée par Grosch et Salwen [40] pour le cas du canal plan. Pour des petites amplitudes de la composante pulsée, les auteurs observent que l'écoulement est stabilisé. En revanche, lorsque l'amplitude dépasse une certaine valeur, le nombre de Reynolds critique est abaissé. Dans ce cadre, Herbert [43] a analysé les transferts d'énergie entre les perturbations et l'écoulement modulé. L'auteur montre que le transfert d'énergie de l'écoulement de base vers la perturbation est inhibé si le rapport de l'épaisseur de la couche visqueuse et de la couche de Stokes est supérieur à 0.5.

En intégrant en temps et en espace les équations linéarisées de Navier–Stokes, von Kerczek [51] a traité la stabilité d'une couche de Stokes. Celle-ci apparaît alors linéairement stable pour les paramètres explorés. Par la suite, von Kerczek [50] a étudié la stabilité linéaire d'un écoulement de Womersley plan. S'appuyant sur la théorie de Floquet pour résoudre le problème périodique, l'auteur montre que pour un nombre de Womersley  $Wo > 12$  l'écoulement est stabilisé par l'amplitude de la pulsation. Lorsque  $Wo \leq 12$ , l'écoulement est en revanche déstabilisé. Les résultats de von Kerczek apparaissent en désaccord avec ceux de Grosch et Salwen [40].

Plusieurs expériences en tube [66, 44, 23, 1, 25] relatives à la transition vers la turbulence des écoulements pulsés ont révélé que la turbulence est générée lors de la phase de décélération de l'écoulement de base. L'écoulement relaminarise ensuite dans la phase d'accélération. Par conséquent, la turbulence se présente souvent sous forme de bouffées turbulentes périodiques.

Les premières simulations numériques linéarisées pour un écoulement pulsé dans un canal plan ont été menées par Singer *et al.* [85]. Les résultats obtenus sont en accord avec ceux issus de l'approche théorique (von Kerczek [50]). En outre, les auteurs ont mis en évidence une structure spatiale (suivant la normale à la paroi) en double pic.

Dans une série d'études expérimentales et numériques, Xu *et al.* [98, 95] ont caractérisé les régimes d'écoulements transitionnels dans un tube pour un champ de base pulsé. Trois régimes de transition vers la turbulence sont observés. Le régime des hautes fréquences ( $Wo \geq 12$ ) où la modulation de l'écoulement n'a pas d'effet

sur le nombre de Reynolds relatif à la transition vers la turbulence. En revanche, la transition est retardée significativement pour les basses fréquences ( $Wo \leq 2.5$ ). Les fréquences intermédiaires font la jonction entre les deux régimes. Enfin, les auteurs soulignent l'importance de la longueur du tube pour les faibles fréquences. En effet, la longueur du tube doit permettre une évolution des bouffées turbulentes sur un cycle entier de pulsation. Par conséquent, les petits nombres de Womersley nécessitent de très longs tubes.

À l'aide d'études théoriques et de simulations numériques directes, Pier et Schmid [74] ont analysé la stabilité linéaire et non linéaire des écoulements pulsés dans des canaux plans. Les auteurs ont notamment identifié deux régimes distincts associés à la dynamique non linéaire : le régime de croisière et le régime balistique. Le régime de croisière consiste en une onde saturée de Tollmien–Schlichting modulée par l'écoulement de base. L'énergie de la perturbation reste dans le domaine non linéaire durant tout le cycle de pulsation. Ce régime est trouvé pour de faibles amplitudes de pulsation. Le régime balistique est caractérisé par des bouffées périodiques de forte amplitude. Ainsi, durant chaque cycle la perturbation passe successivement par des phases linéaires et non linéaires. Le régime balistique domine pour les grandes amplitudes de la composante pulsée.

En utilisant des méthodes d'optimisation, Biau [5] a étudié la croissance des perturbations aux temps courts pour les écoulements de Stokes oscillants. Il montre que la perturbation optimale linéaire est toujours bidimensionnelle et que le mécanisme de Orr est le principal mécanisme de croissance transitoire. Pour les régimes sous-critiques, les simulations non linéaires montrent qu'une perturbation tridimensionnelle est fondamentale pour déclencher la turbulence.

Dans le même contexte, Xu *et al.* [97, 96] ont mené une étude expérimentale et numérique sur la transition sous-critique dans les écoulements pulsés dans des tubes. Une instabilité hélicoïdale est mise en évidence. Contrairement aux bouffées turbulentes, cette instabilité se développe en amont et en aval de la position de la perturbation initiale. Cela correspond donc à une instabilité absolue.

Plus récemment, Pier et Schmid [75] ont calculé les perturbations optimales pour des écoulements pulsés en canal plan et tube. Deux types de comportement ont été trouvés. Aux faibles amplitudes de pulsation, la croissance de l'énergie est semblable au cas permanent dominé par les stries ( $\alpha = 0, \beta \neq 0$ ). En revanche, à partir d'une valeur critique de l'amplitude de la modulation, la croissance transitoire augmente de façon exponentielle avec l'amplitude de la pulsation. Ce second comportement est associé à des perturbations hélicoïdales ( $\alpha \neq 0, \beta = 1$ ) ou bidimensionnelles ( $\alpha \neq 0, \beta = 0$ ), selon qu'on s'intéresse au tube ou au canal plan. En étudiant les bilans d'énergie, les auteurs montrent que le mécanisme de croissance transitoire est dû principalement aux mécanismes d'Orr et à la croissance intracyclique de l'énergie des modes normaux. En effet, la croissance des perturbations hélicoïdales (tube) et bidimensionnelles (canal plan) peut être décomposée en 2 phases : Une phase de croissance initiale rapide due au mécanisme de Orr, puis une phase plus longue de croissance qui correspond à la croissance d'énergie modale.



Ainsi, cette thèse s’inspire de l’ensemble de ces travaux pour étudier la dynamique des petites perturbations se développant pour les écoulements permanents et pulsés dans des canaux aux parois déformables. Le modèle de la paroi flexible consiste en une plaque mince supportée par des ressorts et des amortisseurs. Les caractéristiques des modes Tollmien–Schlichting (TS) ainsi que des instabilités IFS, de flottement (TWF) ou de divergence (DIV), sont systématiquement étudiées sur un grand espace de paramètres de contrôle. Enfin, les mécanismes physiques à l’origine de ces instabilités sont analysés en effectuant des bilans détaillés de transfert d’énergie.

## 1.2 Formulation du problème de fluide–structure

On introduit le système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  avec les vecteurs unitaires  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ . On considère un fluide newtonien incompressible de viscosité dynamique  $\mu$  et de densité  $\rho$  entre deux plaques flexibles parallèles situées à  $y = \pm h$ . La dynamique du fluide est régie par les équations de Navier–Stokes :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

où  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  représente le champ de vitesses et  $p$  la pression. Nous noterons également par la suite  $\nu = \mu/\rho$ , la viscosité cinématique.

### 1.2.1 Modélisation de la paroi flexible

Un modèle théorique représentatif d’une paroi flexible de type Kramer [52, 53] est illustré sur la figure (1.1). Il est constitué d’une plaque mince élastique supportée par plusieurs ressorts et amortisseurs. On suppose que l’effet des ressorts sur le mouvement de la plaque peut être modélisé par une rigidité  $K$  et l’effet des amortisseurs par le taux d’amortissement  $d$ . On suppose également que le déplacement de la paroi  $\zeta(x, t)$  s’effectue uniquement selon la direction  $y$ . Ainsi, le couplage entre le fluide et la paroi est réalisé à travers la continuité des contraintes normales et une condition cinématique imposant que la vitesse de déplacement de la plaque est égale à la vitesse normale du fluide. La théorie des plaques minces fournit l’équation de la paroi suivante :

$$\rho_m b \frac{\partial^2 \zeta^\pm}{\partial t^2} + d \frac{\partial \zeta^\pm}{\partial t} + (B \Delta^2 - T \Delta + K) \zeta^\pm = f^\pm, \quad (1.2)$$

où  $\zeta^\pm$  représente le déplacement selon  $y$  de la paroi supérieure (+) et inférieure (−),  $[\rho_m] = \text{kg m}^{-3}$  désigne la densité du matériau de la plaque,  $[b] = \text{m}$  caractérise l’épaisseur de la plaque,  $[d] = \text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$  est un coefficient d’amortissement,  $[B] = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$  est la rigidité en flexion de la plaque,  $[T] = \text{kg s}^{-2}$  est la tension longitudinale par unité de largeur et  $[K] = \text{kg m}^{-2} \text{s}^{-2}$  définit la raideur équivalente des ressorts par unité de

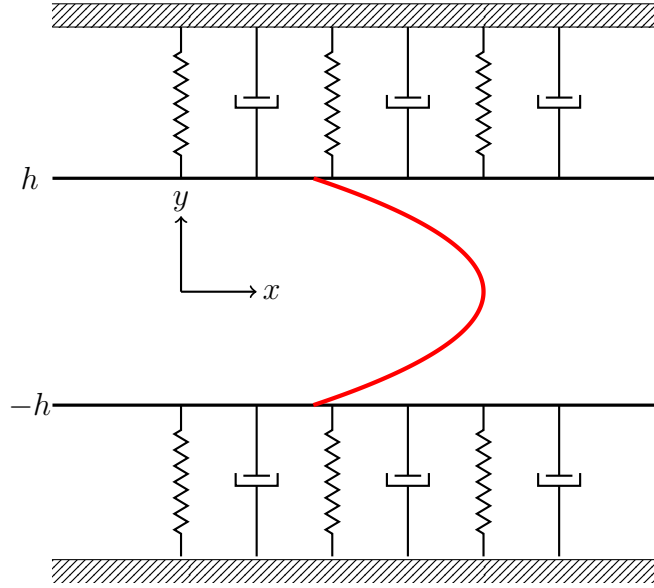


FIG. 1.1 : Illustration schématique du modèle théorique pour une paroi flexible.

largeur. La rigidité en flexion de la plaque mince est donnée par :

$$B = \frac{Eb^3}{12(1 - \xi^2)}, \quad (1.3)$$

où  $E$  et  $\xi$  sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau. En posant  $m = \rho_m b$ , on retrouve l'équation utilisée par Carpenter et Garrad [11] :

$$m \frac{\partial^2 \zeta^\pm}{\partial t^2} + d \frac{\partial \zeta^\pm}{\partial t} + (B\Delta^2 - T\Delta + K) \zeta^\pm = f^\pm. \quad (1.4)$$

Les paramètres de paroi sont donc : la masse de la plaque par unité de surface  $m$ , le coefficient d'amortissement de la paroi  $d$ , la rigidité en flexion de la plaque  $B$ , la tension longitudinale par unité de largeur  $T$  et la raideur équivalente  $K$ . Enfin,  $f^\pm$  désigne les forces hydrodynamiques qui agissent sur la plaque supérieure/inférieure.

### 1.2.2 Couplage fluide–structure

Le terme  $f^\pm$  est un terme de couplage entre le fluide et la paroi, la modélisation de ce terme est d'une importance capitale dans les problèmes d'interaction fluide–structure. Dans les modèles issus de la littérature, ce terme de couplage se réduit parfois à la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de la paroi (pression trans-murale) [62, 11].

Dans la présente étude, le terme de couplage est modélisé sans négliger les contraintes visqueuses. Autrement dit, on considère la contrainte totale  $\bar{\sigma}$  qu'exerce un fluide incompressible sur la paroi. Le tenseur des contraintes pour un fluide incompressible

est donné par :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - p & \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - p & \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - p \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

On note le vecteur normal à l'interface,  $\mathbf{n}^\pm = (n_x^\pm, n_y^\pm, n_z^\pm)$ , avec :

$$n_x^\pm = \pm \frac{\partial \zeta^\pm}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\partial \zeta^\pm}{\partial x}^2 + \frac{\partial \zeta^\pm}{\partial z}^2}}, \quad n_y^\pm = \mp \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\partial \zeta^\pm}{\partial x}^2 + \frac{\partial \zeta^\pm}{\partial z}^2}}, \quad \text{et } n_z^\pm = \mp \frac{\partial \zeta^\pm}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\partial \zeta^\pm}{\partial x}^2 + \frac{\partial \zeta^\pm}{\partial z}^2}}.$$

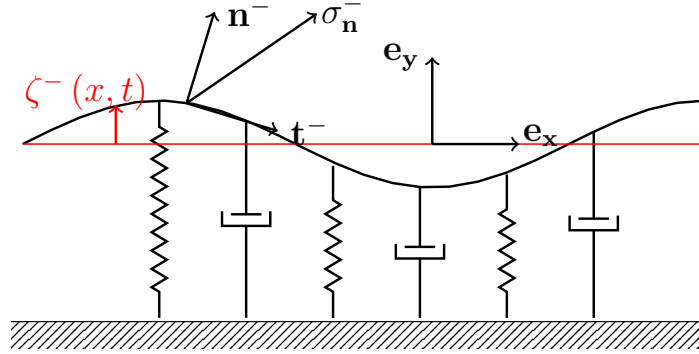


FIG. 1.2 : Représentation du vecteur contrainte par rapport à la normale  $\mathbf{n}$  à la plaque inférieure .

Le terme de couplage est donné par la composante verticale du vecteur contrainte associé à la normale  $\mathbf{n}^\pm$  s'exerçant de chaque côté de la plaque (voir figure 1.2) :

$$f^\pm = \mathbf{e}_y \cdot (\bar{\bar{\sigma}} \mathbf{n}^\pm - \bar{\sigma}_{ext} \mathbf{n}^\pm).$$

La contrainte extérieure est modélisée par la seule pression extérieure  $P_{ext}$ . Ainsi, nous pouvons écrire la force  $f^\pm$  comme :

$$f^\pm = \mathbf{e}_y \cdot (\bar{\bar{\sigma}} + P_{ext} \bar{\bar{I}}) \mathbf{n}^\pm.$$

### 1.3 Solution analytique de l'écoulement pulsé

---

Le vecteur contrainte  $\boldsymbol{\sigma}_n^\pm = (\bar{\sigma} + P_{ext}\bar{I}) \mathbf{n}^\pm$  s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}_n^\pm = \begin{pmatrix} (-p + P_{ext})n_x^\pm + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}n_x^\pm + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)n_y^\pm + \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)n_z^\pm \\ (-p + P_{ext})n_y^\pm + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)n_x^\pm + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}n_y^\pm + \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)n_z^\pm \\ (-p + P_{ext})n_z^\pm + \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)n_x^\pm + \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)n_y^\pm + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}n_z^\pm \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Nous en déduisons le terme de couplage :

$$f^\pm = (-p + P_{ext})n_y^\pm + \mu\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)n_x^\pm + 2\frac{\partial v}{\partial y}n_y^\pm + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)n_z^\pm\right). \quad (1.7)$$

#### 1.2.3 Conditions aux limites

Les conditions limites d'adhérence à la paroi sont utilisées pour le fluide. Dans notre modèle, la paroi est animée uniquement d'un mouvement selon  $y$ . Par conséquent, la vitesse normale du fluide à l'interface est égale à celle de la paroi. Cela se résume à :

$$\begin{cases} u(x, \pm h + \zeta^\pm, z, t) = 0, \\ v(x, \pm h + \zeta^\pm, z, t) = \frac{\partial \zeta^\pm}{\partial t}, \\ w(x, \pm h + \zeta^\pm, z, t) = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Dans l'hypothèse d'un petit déplacement, les conditions aux limites (1.8) peuvent être appliquées en  $y = \pm h$  à l'aide d'un développement de Taylor [16, 11, 12] ou, dans le cadre général, par l'introduction d'un changement de variable qui transforme la géométrie déformée en géométrie cartésienne [24, 93]. Dans les deux cas, le domaine numérique est fixe :  $-h < y < h$ . Cela facilite l'utilisation de méthodes de haute précision telles que les méthodes spectrales [73].

### 1.3 Solution analytique de l'écoulement pulsé

Dans cette partie, nous souhaitons déterminer un écoulement de base solution des équations de Navier–Stokes en présence d'un débit pulsé. Nous considérons que la solution d'équilibre est associée, même en présence de parois flexibles, à la position des plaques en  $\pm h$ . Nous reviendrons sur ce point ultérieurement. Les plaques étant infinies suivant les directions  $x$  et  $z$ , nous supposons que le champ de vitesse ne dépend que de  $y$ . Nous considérons un gradient de pression selon  $x$ , spatialement uniforme et

temporellement périodique. La vitesse suivant  $x$  et la pression associées à cette solution de base sont notées  $U$  et  $P$ . Le gradient de pression étant périodique s'écrit sous la forme d'une série de Fourier :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = G(t) = \sum_n G^{(n)} e^{in\Omega t}. \quad (1.9)$$

L'équation de la quantité de mouvement s'écrit alors :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad (1.10)$$

et la solution est recherchée sous la forme :  $U(y, t) = \sum_n U^{(n)}(y) e^{in\Omega t}$ . En remplaçant cette dernière dans l'équation de la quantité de mouvement (1.9), nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 U^{(n)}}{\partial y^2} - in \frac{\Omega}{\nu} U^{(n)} - \frac{G^{(n)}}{\nu} = 0. \quad (1.11)$$

La solution analytique de cette équation (1.11) différentielle ordinaire d'ordre 2 est :

$$U^{(n)}(y) = C_1 e^{\left(\sqrt{in \frac{\Omega}{\nu}} y\right)} + C_2 e^{\left(-\sqrt{in \frac{\Omega}{\nu}} y\right)} + i \frac{G^{(n)}}{n\Omega}. \quad (1.12)$$

Pour déterminer les constantes  $C_1$  et  $C_2$ , on utilise les conditions de non glissement :  $U^{(n)}(\pm h) = 0$ . Les constantes sont alors données par :

$$C_1 = C_2 = -i \frac{G^{(n)}}{2n\nu \cosh \sqrt{in \frac{\Omega}{\nu}} h}.$$

Les composantes de la solution analytique pour le canal plan s'écrivent :

$$U^{(n)}(y) = -i \frac{G^{(n)}}{n\nu} \left( \frac{\cosh y \sqrt{in \frac{\Omega}{\nu}}}{\cosh h \sqrt{in \frac{\Omega}{\nu}}} - 1 \right). \quad (1.13)$$

Finalement, on établit la relation entre les composantes  $G^{(n)}$  du gradient de pression et  $Q^{(n)}$  les composantes du débit :

$$Q^{(n)} = \int_{-h}^h U^{(n)}(y) dy. \quad (1.14)$$

L'expression finale des composantes du débit est alors donnée par :

$$\frac{Q^{(n)}}{G^{(n)}} = -2i \frac{h}{n\nu} \left( \frac{\tanh h \sqrt{in \frac{\Omega}{\nu}}}{h \sqrt{in \frac{\Omega}{\nu}}} - 1 \right). \quad (1.15)$$

### 1.3 Solution analytique de l'écoulement pulsé

---

Nous remplaçons (1.15) dans (1.13), et nous obtenons alors la formule finale des composantes de la vitesse :

$$U^{(n)}(y) = \frac{Q^{(n)}}{2h} \left( \frac{\cosh y \sqrt{in \frac{\Omega}{\nu}}}{\cosh h \sqrt{in \frac{\Omega}{\nu}}} - 1 \right) / \left( \frac{\tanh h \sqrt{in \frac{\Omega}{\nu}}}{h \sqrt{in \frac{\Omega}{\nu}}} - 1 \right). \quad (1.16)$$

La relation (1.16) n'est valable que pour  $n \neq 0$ . Le cas  $n = 0$  correspond à l'écoulement de Poiseuille plan :

$$U^{(0)}(y) = \frac{Q^{(0)}}{2h} \frac{3}{2} (1 - (y/h)^2). \quad (1.17)$$

Les formules (1.16) et (1.17) donnent l'expression analytique de tout écoulement de base pulsé, en fonction des composants de Fourier du débit  $Q(t) = \sum_n Q^{(n)} e^{in\Omega t}$ .

Nous avons suivi la méthode de Womersley [94] qui a obtenu des formules similaires (faisant intervenir les fonctions de Bessel) pour les écoulements pulsés dans un tuyau cylindrique.

Ainsi, l'écoulement de base pulsé est entièrement déterminé par le nombre de Womersley  $Wo = h \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}$  et les composantes du débit  $Q^{(n)}$ . Pour limiter le nombre des paramètres de contrôle, on étudiera un écoulement avec une seule composante oscillante, ce qui correspond à :

$$Q^{(n)} = 0 \quad \text{si } |n| > 2.$$

Dans la suite nous utilisons un nombre de Reynolds  $Re = \frac{Q^{(0)}}{\nu}$  basé sur la vitesse moyenne et le diamètre du canal. Comme nous étudions les écoulements pulsés, au débit moyen  $Q^{(0)} \neq 0$ , il est commode d'utiliser l'amplitude relative de pulsation  $\tilde{Q}$  définie comme :

$$\tilde{Q} = 2 \frac{Q^{(1)}}{Q^{(0)}}.$$

Les écoulements pulsés développent une couche oscillante ou couche de Stokes, dont l'épaisseur  $\delta = \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}}$  dépend de la fréquence de pulsation et de la viscosité du fluide. Ainsi, le nombre de Womersley  $Wo = \frac{h}{\delta}$  peut aussi être interprété comme le rapport entre la demi-hauteur du canal et l'épaisseur de Stokes.

Des profils de vitesse instantanés d'un écoulement de Womersley plan sont illustrés sur la figure (1.3). Pour mettre en évidence la couche de Stokes, trois nombres de Womersley sont donnés  $Wo = 1, 10, 20$ . Ces  $Wo$  sont associés à trois épaisseurs de couche de Stokes  $\delta = 1, 0.1, 0.05$  respectivement. Pour  $Wo = 1$ , les profils de vitesse ressemblent au profil de Poiseuille (rouge en pointillés) avec une modulation de la vitesse au centre du canal. En effet, l'épaisseur de la couche de Stokes est égale à la demi-hauteur du canal  $\delta = h$ . Pour des nombres élevés de Womersley, les effets de la

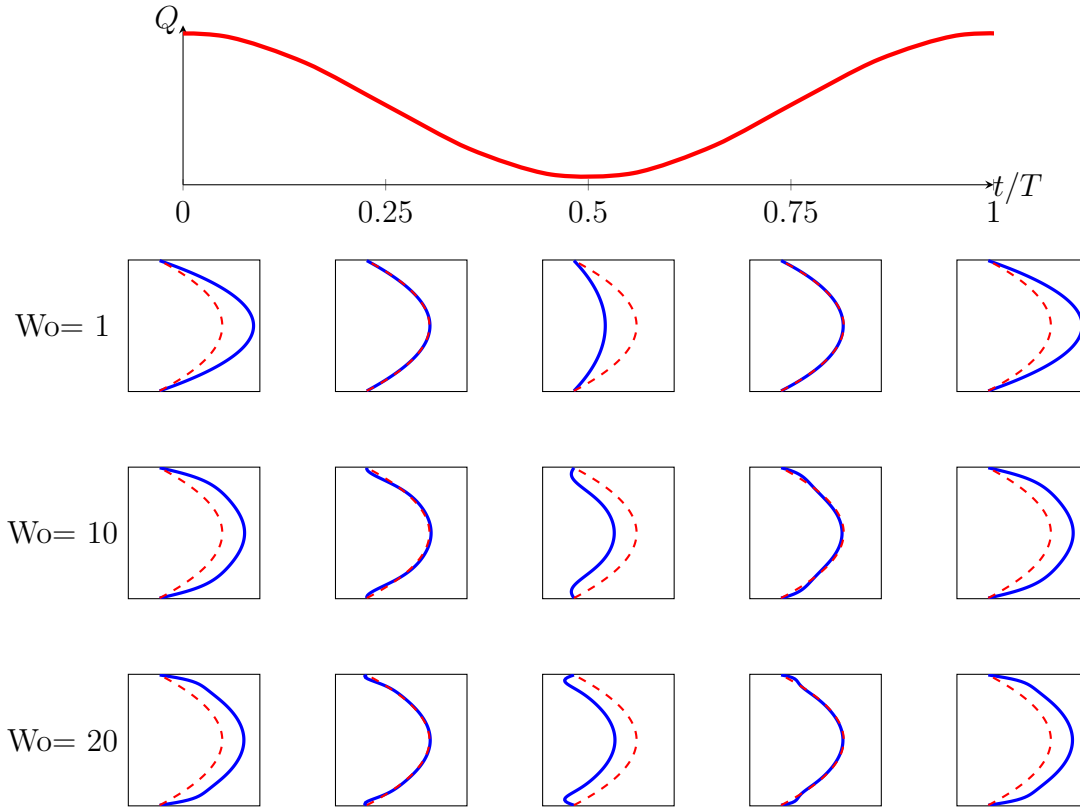


FIG. 1.3 : Profils de vitesse d'un écoulement pulsé (courbe bleue) à différentes phases d'un cycle pour trois valeurs du nombre de Womersley  $Wo$ . Profil de Poiseuille en rouge pointillés. Ici  $\tilde{Q} = 0.5$ .

couche de Stokes sont visibles. Effectivement, des gradients de vitesse plus importants que le profil de Poiseuille sont observés proche de la paroi, ainsi que des zones de vitesses négatives à la hauteur de la couche de Stokes.

Enfin, on peut décomposer le cycle de pulsation en 2 phases, une phase d'accélération et une phase de décélération. Elles correspondent à l'augmentation ou la diminution du débit, respectivement. On notera tout de même qu'il existe un temps de retard entre la vitesse et le débit. En effet, lorsque le débit est minimal ( $t = 0.5T$ , avec  $T = 2\pi/\Omega$ ), la vitesse ne l'est pas.

## 1.4 Analyse dimensionnelle

Dans cette partie, on s'intéresse à la dérivation des paramètres de contrôle non dimensionnels en présence d'interaction fluide-structure. Ces nombres non dimensionnels permettent de mesurer l'importance relative des effets physiques mis en jeu.

Le cas étudié est complètement défini par 11 paramètres dimensionnels : le débit

## 1.4 Analyse dimensionnelle

---

moyen  $[Q^{(0)}] = \text{m}^3\text{s}^{-1}$ , la demi-hauteur  $[h] = \text{m}$  du canal, la densité du fluide  $[\rho] = \text{kg m}^{-3}$ , la viscosité cinématique  $[\nu] = \text{m}^2\text{s}^{-1}$ , la masse de la plaque par unité de surface  $[m] = \text{kg m}^{-2}$ , le coefficient d'amortissement de la paroi  $[d] = \text{kg m}^{-2}\text{s}^{-1}$ , la rigidité en flexion de la plaque  $[B] = \text{kg m}^2\text{s}^{-2}$ , la tension longitudinale par unité de largeur  $[T] = \text{kg s}^{-2}$ , la raideur  $[K] = \text{kg m}^{-2}\text{s}^{-2}$ , la fréquence  $[\Omega] = \text{s}^{-1}$  et l'amplitude de la composante pulsée  $[Q^{(1)}] = \text{m}^2\text{s}^{-1}$ .

Il en résulte 8 paramètres non dimensionnels indépendants qui régissent ce système, 11 paramètres dimensionnels moins 3 unités de base (m, s, kg). Pour le fluide, nous utilisons un nombre de Reynolds (Re) basé sur le débit moyen ( $Q^{(0)}$ ), le nombre de Womersley (Wo, voir discussion précédente) et l'amplitude relative ( $\tilde{Q}$ ) de la composante pulsée :

$$\text{Re} = \frac{Q^{(0)}}{\nu}, \quad \text{Wo} = h\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}, \quad \tilde{Q} = 2\frac{Q^{(1)}}{Q^{(0)}}. \quad (1.18)$$

Les paramètres non dimensionnels de la plaque sont basés sur un temps caractéristique (noté  $\tau$ ) :

$$\begin{cases} K_* = \frac{K}{m}\tau^2, & d_* = \frac{d}{m}\tau, \\ B_* = \frac{B}{mh^4}\tau^2, & T_* = \frac{T}{mh^2}\tau^2. \end{cases} \quad (1.19)$$

Le choix du temps caractéristique est primordial et peut amener à des situations non physiques [20]. Il existe plusieurs choix pour former les paramètres non dimensionnels de la paroi. Parmi eux, nous pouvons citer  $\tau_Q$  le temps de convection,  $\tau_\nu$  le temps visqueux et  $\tau_K$  le temps basé sur la raideur des ressorts :

$$\tau_Q = \frac{4h^2}{Q^{(0)}}, \quad \tau_\nu = \frac{h^2}{\nu}, \quad \tau_K = \sqrt{\frac{m}{K}}. \quad (1.20)$$

En se basant sur l'un ou l'autre des temps caractéristiques, nous obtenons différents choix de nombres non dimensionnels. L'échelle de temps visqueuse est la plus utilisée dans la littérature. Notamment, Landahl [56] a considéré celle-ci. Néanmoins, il devient alors impossible de varier les paramètres non dimensionnels de la paroi de façon indépendante par rapport aux paramètres de contrôle du fluide. Les paramètres de la paroi, basés sur  $\tau_\nu$ , sont :

$$\begin{cases} K_* = K\frac{h^3}{\rho\nu^2}, & d_* = d\frac{h}{\rho\nu}, \\ B_* = B\frac{1}{\rho\nu^2h}, & T_* = T\frac{h}{\rho\nu^2}. \end{cases} \quad (1.21)$$

Dans les cas typiques de la littérature, les ordres de grandeurs des paramètres de cet adimensionnement sont de  $10^7$  pour la raideur  $K_*$  et la rigidité en flexion de la plaque mince  $B_*$ . L'utilisation du temps caractéristique de convection ( $\tau_Q$ ) donne des résultats similaires. En effet, on se sert d'une autre caractéristique du fluide pour



adimensionner les paramètres de la paroi. Cette approche a été adoptée par Davies et Carpenter [16] pour étudier le cas d'un écoulement non visqueux dans un canal plan flexible. Dans ces précédents cas, la variation du nombre de Reynolds induit aussi une modification des propriétés de la paroi [20], ce qui est peu reproductible d'un point de vue expérimental.

Pour y remédier, nous adimensionnons par la suite les paramètres de la paroi par le temps caractéristique  $\tau_K$  propre aux oscillations de la plaque. Cette méthode est *a priori* plus adaptée à l'étude de stabilité dans un canal avec une paroi souple. En effet, cela permet de découpler les valeurs dimensionnelles des paramètres de paroi avec les caractéristiques du fluide (viscosité et débit moyen). En exprimant les paramètres de la paroi en fonction de  $\tau_K$ , on a :

$$d_* = \frac{d}{\sqrt{mK}}, \quad B_* = \frac{B}{Kh^4}, \quad T_* = \frac{T}{Kh^2}. \quad (1.22)$$

Finalement, le lien entre fluide et structure s'effectue par la vitesse réduite [58] :

$$V_R = \frac{\tau_K}{\tau_Q} = \frac{Q^{(0)}}{4h^2} \sqrt{\frac{m}{K}}. \quad (1.23)$$

La vitesse réduite  $V_R$  est alors le paramètre qui mesure l'interaction fluide–structure et correspond au rapport entre la période d'oscillation de la paroi  $\tau_K$  et le temps de passage du fluide le long de la plaque mince  $\tau_Q$ . Pour  $V_R \ll 1$ , la paroi ne voit pas le mouvement du fluide et n'a pas le temps de se déplacer ni de modifier ce dernier. Cela s'apparente à une paroi rigide dans ce cas. Pour  $V_R \gg 1$ , le déplacement de la plaque est significatif pendant le passage du fluide sur celle-ci. Dans ce cas, la paroi interagit avec le fluide, donnant lieu à des échanges d'énergie entre les deux milieux [57]. De plus, l'utilisation de  $V_R$  autorise le maintien des paramètres de la paroi constants lorsque le nombre de Reynolds est modifié. Enfin, il permet de découpler les effets du fluide et de la paroi. Cela facilite l'identification des types d'instabilités (modes induits par le fluide ou par la paroi).

Avec ce choix de paramètres non dimensionnels, (1.22) et (1.23), les ordres de grandeur sont plutôt de l'ordre de 1 pour les configurations typiques.

Le dernier paramètre couplant le fluide et la paroi est associé au rapport de masse :

$$\Gamma = \frac{m}{\rho h}. \quad (1.24)$$

Pour conclure ce chapitre, une table (1.1) de conversion entre les adimensionnements de cette thèse et ceux de Pier et Schmid [74, 75] et de von Kerczek [50] est donnée. Dans ce travail, nous utilisons la vitesse moyenne  $\frac{Q^{(0)}}{2h} = \frac{2}{3}U_c$  (avec  $U_c$  la vitesse sur l'axe du canal) pour normaliser les vitesses et la demi-hauteur du canal pour les longueurs. Il en résulte un facteur 4 entre les fréquences données dans cette thèse et celles données par Pier et Schmid [74, 75]. Les autres paramètres ( $Re$ ,  $Wo$ ) sont équivalents.

	Présent	Pier et Schmid [74, 75]	von Kerczek [50]
Vitesse caractéristique $U$	$\frac{2}{3}U_c$	$\frac{2}{3}U_c$	$U_c$
Longueur caractéristique $L$	$h$	$2h$	$h$
Reynolds $\frac{UL}{\nu}$	$\frac{4}{3}\text{Re}$	$\frac{4}{3}\text{Re}$	$\text{Re}$
Womersley $\frac{h}{\delta}$	$\text{Wo}$	$\text{Wo}$	$\frac{\text{Wo}}{\sqrt{2}}$
Fréquence $\frac{U}{L} \frac{\text{Wo}^2}{\text{Re}}$	$\Omega$	$\frac{\Omega}{4}$	$\frac{\Omega}{2}$
Reynolds critique (permanent) $\text{Re}_c$	7696.29	7696.29	5772.22

TAB. 1.1 : Table de conversion entre les adimensionnements de cette thèse et ceux de Pier et Schmid [74, 75] et de von Kerczek [50].  $U_c$  représente la vitesse au centre du canal.



# Chapitre 2

## Stabilité linéaire

### 2.1 Méthode des petites perturbations

L'étude de stabilité linéaire d'un écoulement consiste à suivre l'évolution temporelle, spatiale ou spatio-temporelle d'une perturbation de faible amplitude se développant au sein d'un écoulement de base laminaire. L'écoulement de base est dit asymptotiquement stable (respectivement instable) si les perturbations s'atténuent (respectivement croissent) aux temps longs. Dans ce cadre, nous utilisons classiquement la décomposition de l'écoulement total  $(\mathbf{u}, p)$  en un écoulement de base (ou encore solution d'équilibre notée  $\mathbf{U}, P$ ) et une petite perturbation  $(\mathbf{u}', p')$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(x, y, z, t) &= \mathbf{U}(y, t) + \mathbf{u}'(x, y, z, t), \\ p(x, y, z, t) &= P(x, t) + p'(x, y, z, t).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Les équations bilans de quantité de mouvement et de masse sont écrites pour le champ instantané  $\mathbf{u}$  en remplaçant (2.1) dans (1.1) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{U} + \mathbf{u}') \cdot \nabla (\mathbf{U} + \mathbf{u}') &= -\frac{1}{\rho} \nabla (P + p') + \nu \Delta (\mathbf{U} + \mathbf{u}'), \\ \nabla \cdot (\mathbf{U} + \mathbf{u}') &= 0.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Puisque l'écoulement de base  $\mathbf{U}$  est également solution des équations de Navier–Stokes (1.1) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{U}, \\ \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0,\end{aligned}\tag{2.3}$$

on déduit de (2.2) les équations associées au comportement spatio-temporel de la perturbation :

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p' + \nu \Delta \mathbf{u}', \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0.$$

En supposant une fluctuation de faible amplitude,  $\mathbf{u}'$  est choisi de l'ordre de  $O(\varepsilon)$ . Tous les termes de l'équation (2.4) sont alors de l'ordre de  $O(\varepsilon)$  sauf le terme quadratique  $(\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}'$  qui est de l'ordre de  $O(\varepsilon^2)$ . Par la suite, nous ne considérons que des perturbations de faible amplitude, ce qui permet de négliger les termes d'ordre  $O(\varepsilon)$ . Nous aboutissons ainsi aux équations de Navier–Stokes linéarisées :

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p' + \nu \Delta \mathbf{u}', \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0.$$

Pour la paroi, nous évaluons la perturbation autour de l'état d'équilibre  $\zeta_b = \pm h$ . Avec la décomposition  $\zeta^\pm = \pm h + \eta^\pm$ , l'équation des parois (1.4) devient :

$$m \frac{\partial^2 \eta^\pm}{\partial t^2} + d \frac{\partial \eta^\pm}{\partial t} + (B \Delta^2 - T \Delta + K) \eta^\pm = f^\pm. \quad (2.6)$$

## 2.2 Linéarisation de l'interaction fluide–structure

En utilisant la décomposition en configuration de base et perturbation, le terme de couplage (1.7) devient :

$$f^\pm = \mp (-p' - P + P_{ext}) \pm \mu \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \eta^\pm}{\partial x} \mp 2\mu \frac{\partial v'}{\partial y} + \mu \left[ \pm \left( \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta^\pm}{\partial x} \mp \left( \frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta^\pm}{\partial z} \right], \quad (2.7)$$

où nous avons utilisé un développement limité pour les composantes du vecteur normal  $\mathbf{n}$  autour de la solution d'équilibre. Comme précédemment, nous négligeons les termes non linéaires, ce qui conduit à :

$$f^\pm = \mp (-p' - P + P_{ext}) \pm \mu \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \eta^\pm}{\partial x} \mp 2\mu \frac{\partial v'}{\partial y}. \quad (2.8)$$

Par la suite, nous supposons que la pression s'exerçant à l'extérieur du canal est égale à la pression à l'intérieur du canal  $P_{ext}(x, t) = P(x, t)$  pour la solution d'équilibre. Ainsi, la configuration de base correspond à un écoulement animé d'un profil de

## 2.2 Linéarisation de l'interaction fluide–structure

---

Poiseuille ou de Womersley et à des parois non déformées en  $y = \pm h$ , même si elles sont flexibles. Cette hypothèse a été introduite par Carpenter et Garrad [11] dans leur modèle de paroi de Kramer. La formulation linéaire du terme de couplage se réduit alors à :

$$f^\pm = \mp \left( -p' - \mu \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \eta^\pm}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial v'}{\partial y} \right). \quad (2.9)$$

Le terme  $\mu \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \eta^\pm}{\partial x}$  représente une déviation due à la perturbation du vecteur normal à l'interface et le terme  $2\mu \frac{\partial v'}{\partial y}$  représente la contribution des contraintes visqueuses normales à la paroi.

Il existe plusieurs approximations de ce terme de couplage dans la littérature. On citera notamment Nagata et Cole [68] qui proposent :

$$f_{NC}^\pm = \mp \left( -p' + 2\mu \frac{\partial v'}{\partial y} \right). \quad (2.10)$$

Néanmoins, la formulation (2.10) ne prend pas en compte les effets dus à la variation de la normale de la paroi.

Davies et Carpenter [16] ont supposé que les contraintes du fluide s'exerçant sur la paroi peuvent être approchées en utilisant uniquement la pression. Par conséquent, ils écrivent :

$$f_{DC}^\pm = \pm p_p. \quad (2.11)$$

Dans cette formulation, la pression à la paroi  $p_p$  est obtenue en intégrant l'équation linéarisée suivant  $y$  des équations de Navier–Stokes (2.5) :

$$p_p(h) = \int_0^h \left( \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \right) dy. \quad (2.12)$$

De même, par souci de cohérence, les termes visqueux dans (2.12) sont négligés par les auteurs, ce qui donne :

$$p_p(h) = \int_0^h \left( \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} \right) dy. \quad (2.13)$$

Nous pouvons tout de même souligner que l'approximation de Davies et Carpenter [16] n'est valable que pour des perturbations de symétrie sinueuse. En effet, la formule (2.13) n'est exacte que si  $p_p(0) = 0$  (la pression fluctuante est nulle au centre du canal). Le tableau (2.1) résume les différentes approximations utilisées dans la littérature.

Par la suite, on discutera de la pertinence de ces différentes formulations en les comparant à notre expression (2.9), directement dérivée des équations linéarisées sans hypothèse supplémentaire.

Méthode	Contraintes normales
Davies et Carpenter [16]	$\pm p_p$
Nagata et Cole [68]	$\mp \left( -p' + 2\mu \frac{\partial v'}{\partial y} \right)$
Guaus et Bottaro [42]	$\pm p'$

TAB. 2.1 : Récapitulatif des méthodes utilisées dans la littérature.

## 2.3 Linéarisation des conditions aux limites

Les conditions (1.8) de non glissement pour  $u$ ,  $v$  et  $w$  à la paroi flexible en  $y = \pm h + \eta^\pm$  peuvent être transformées en conditions aux limites inhomogènes à  $y = \pm h$  par un développement de Taylor. Pour toute quantité  $g$  :

$$g|_{\pm h + \eta^\pm} = \left( g + \eta^\pm \frac{\partial g}{\partial y} \right) \Big|_{\pm h} + O(\eta^2). \quad (2.14)$$

Ainsi, en appliquant la décomposition  $u = U + u'$ , les équations (1.8) deviennent :

$$\begin{cases} u'|_{y=\pm h} + U|_{y=\pm h} + \eta^\pm \left( \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) \Big|_{y=\pm h} = 0, \\ v'|_{y=\pm h} + \eta^\pm \frac{\partial v'}{\partial y} \Big|_{y=\pm h} = \frac{\partial \eta^\pm}{\partial t}, \\ w'|_{y=\pm h} = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

En négligeant les termes d'ordre  $O(\varepsilon^2)$ , les conditions aux limites linéarisées s'écrivent :

$$\begin{cases} u'|_{y=\pm h} = -\eta^\pm \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=\pm h}, \\ v'|_{y=\pm h} = \frac{\partial \eta^\pm}{\partial t}, \\ w'|_{y=\pm h} = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Dans les problèmes non linéaires, la méthode de transformations conformes [70] est nécessaire pour la résolution numérique avec des méthodes de haute précision. Cependant, dans le cadre linéaire, les systèmes d'équations à résoudre associés à chacune des approches sont identiques [92].

## 2.4 Comportement aux temps longs

---

À ce stade, on peut apporter une simplification au terme de couplage. En effet, la condition cinématique (2.16) conduit à :

$$-\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=\pm h} \frac{\partial \eta^\pm}{\partial x} = \frac{\partial u'}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial w'}{\partial z} \Big|_{y=\pm h} = 0, \quad (2.17)$$

ce qui permet de réécrire le terme de couplage (2.9) :

$$f^\pm = \mp \left( -p' + \mu \frac{\partial v'}{\partial y} \right) \Big|_{\pm h} \mp \mu \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \Big|_{\pm h}. \quad (2.18)$$

Dans cette expression, le dernier terme entre parenthèses est nul car il correspond à la condition d'incompressibilité évaluée à la paroi. Finalement, le terme de couplage se réduit à :

$$f^\pm = \pm p' \Big|_{\pm h} \mp \mu \frac{\partial v'}{\partial y} \Big|_{\pm h}. \quad (2.19)$$

Nous adopterons par la suite cette formulation qui, rappelons-le, est dérivée des équations linéarisées sans hypothèse supplémentaire.

## 2.4 Comportement aux temps longs

### 2.4.1 Hypothèse de modes normaux

Dans le cas d'un canal plan infini, l'écoulement de base est indépendant des directions longitudinale ( $x$ ) et transversale ( $z$ ). Ainsi, les perturbations de vitesse, de pression et des déplacements des parois sont exprimées en modes normaux le long de ces deux directions :

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{u}}(y, t) e^{i(\alpha x + \beta z)} + cc, \\ p'(x, y, z, t) = \tilde{p}(y, t) e^{i(\alpha x + \beta z)} + cc, \\ \eta^\pm(x, z, t) = \tilde{\eta}^\pm(t) e^{i(\alpha x + \beta z)} + cc, \end{cases} \quad (2.20)$$

avec  $(\alpha, \beta)$  les nombres d'ondes suivant  $x$  et  $z$ , respectivement et  $cc$  signifiant le complexe conjugué. En remplaçant cette décomposition (2.20) dans les équations de



Navier–Stokes et de la paroi linéarisées (2.5, 2.6), nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -i\alpha U(y, t) \tilde{u} - \frac{dU}{dy} \tilde{v} - \frac{i\alpha}{\rho} \tilde{p} + \nu \left( -\alpha^2 - \beta^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tilde{u}, \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = -i\alpha U(y, t) \tilde{v} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \nu \left( -\alpha^2 - \beta^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tilde{v}, \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = -i\alpha U(y, t) \tilde{w} - \frac{i\beta}{\rho} \tilde{p} + \nu \left( -\alpha^2 - \beta^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tilde{w}, \\ 0 = i\alpha \tilde{u} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}, \\ m \frac{\partial \tilde{\gamma}^\pm}{\partial t} = \mp \mu \frac{d\tilde{v}}{dy} \Big|_{\pm h} \pm \tilde{p} \Big|_{\pm h} - d\tilde{\gamma}^\pm - \left( B(\alpha^2 + \beta^2)^2 + T(\alpha^2 + \beta^2) + K \right) \tilde{\eta}^\pm, \\ \frac{\partial \tilde{\eta}^\pm}{\partial t} = \tilde{\gamma}^\pm. \end{array} \right. \quad (2.21)$$

La notation  $\gamma^\pm = \frac{\partial \eta^\pm}{\partial t}$  est introduite pour obtenir un système d'équations aux dérivées partielles qui soit du premier ordre en temps.

Dans le paragraphe suivant, nous dérivons une extension du théorème de Squire pour les écoulements pulsés dans des canaux déformables.

## 2.4.2 Théorème de Squire

Ce théorème est d'une importance capitale, car il permet de se concentrer sur les instabilités bidimensionnelles. En effet, il associe à tout mode  $(\alpha, \beta)$  tridimensionnel instable, un mode  $(k)$  bidimensionnel plus instable. Par conséquent, les seuils d'instabilités peuvent être obtenus en limitant l'étude à des ondes bidimensionnelles.

L'extension du théorème de Squire (1933)[87] pour un écoulement pulsé est donnée par Conrad et Criminale [15]. La transformation qui permet de passer d'un système tridimensionnel à un système bidimensionnel est :

$$\left\{ \begin{array}{l} k^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad \bar{u} = \frac{\alpha \tilde{u} + \beta \tilde{w}}{k}, \quad \bar{p} = \frac{k}{\alpha} \tilde{p}, \\ \bar{\text{Re}} = \frac{\alpha}{k} \text{Re}, \quad \bar{t} = \frac{\alpha}{k} t, \quad \bar{v} = \tilde{v}. \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Les équations de Navier–Stokes linéarisées qui résultent de la transformation de Squire

## 2.5 Écoulement permanent

---

(2.22) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = -ikU\bar{u} - \frac{dU}{dy}\bar{v} - \frac{ik}{\rho}\bar{p} + \frac{1}{\overline{\text{Re}}} \left( -k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \bar{u}, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} = -ikU\bar{v} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{1}{\overline{\text{Re}}} \left( -k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \bar{v}, \\ 0 = ik\bar{u} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}. \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Enfin, nous pouvons appliquer la transformation (2.22) pour l'équation (2.21) de la paroi flexible avec l'adimensionnement basé sur le temps caractéristique de la plaque mince  $\tau_K$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\gamma}^\pm}{\partial \bar{t}} = \mp \frac{1}{\overline{\text{Re}}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \Big|_{\pm 1} \pm \frac{1}{\overline{\Gamma \bar{p}}} \Big|_{\pm 1} - \frac{d_*}{\bar{V}_R} \bar{\gamma}^\pm - \frac{1}{\bar{V}_R^2} (B_* k^4 + T_* k^2 + K_*) \bar{\eta}^\pm, \\ \frac{\partial \bar{\eta}^\pm}{\partial \bar{t}} = \bar{\gamma}. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

La transformation correspondante est donnée par :

$$\bar{V}_R = \frac{\alpha}{k} V_R, \quad \bar{\gamma}^\pm = \tilde{\gamma}^\pm, \quad \bar{\eta}^\pm = \frac{\alpha}{k} \tilde{\eta}^\pm. \quad (2.25)$$

Le système d'équations ainsi obtenu (2.23, 2.24) est formellement identique au système tridimensionnel (2.21). Autrement dit, pour toute perturbation tridimensionnelle instable, il existe une perturbation bidimensionnelle équivalente à un nombre de Reynolds plus petit et une vitesse réduite plus petite ( $\overline{\text{Re}} < \text{Re}, \bar{V}_R < V_R$ ). Par conséquent, le couple  $(\text{Re}, V_R)$  critique est toujours associé à des perturbations bidimensionnelles. Ainsi, les paramètres critiques peuvent être obtenus par l'étude de stabilité linéaire restreinte au plan  $(x, y)$ . Désormais nous nous placerons donc dans un cadre bidimensionnel, sans vitesse  $w$  ni nombre d'onde transverse  $\beta$ .

## 2.5 Écoulement permanent

La solution de Poiseuille pour un écoulement dans un canal plan est stationnaire. Par conséquent, le champ de base  $\mathbf{U} = U(y) \mathbf{e}_x$  en plus d'être indépendant de  $(x, z)$ , est aussi indépendant de  $t$ . Nous pouvons alors écrire la perturbation sous la forme

normale comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{u}}(y, t) = \hat{\mathbf{u}}(y) e^{-i\omega t}, \\ \tilde{p}(y, t) = \hat{p}(y) e^{-i\omega t}, \\ \tilde{\eta}^{\pm}(t) = \hat{\eta}^{\pm} e^{-i\omega t}, \\ \tilde{\gamma}^{\pm}(t) = \hat{\gamma}^{\pm} e^{-i\omega t}, \end{array} \right. \quad (2.26)$$

avec  $\omega$  la pulsation. Nous adopterons par la suite un point de vue temporel,  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\omega \in \mathbb{C}$  ( $\omega = \omega_r + i\omega_i$ ). En remplaçant (2.26) dans (2.21), nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} -i\omega\hat{u} = -i\alpha U\hat{u} - \frac{dU}{dy}\hat{v} - \frac{i\alpha}{\rho}\hat{p} + \nu\left(-\alpha^2 + \frac{d^2}{dy^2}\right)\hat{u}, \\ -i\omega\hat{v} = -i\alpha U\hat{v} - \frac{1}{\rho}\frac{d\hat{p}}{dy} + \nu\left(-\alpha^2 + \frac{d^2}{dy^2}\right)\hat{v}, \\ 0 = i\alpha\hat{u} + \frac{d\hat{v}}{dy}, \\ -i\omega\hat{\gamma}^{\pm} = \mp \frac{\mu}{m}\frac{d\hat{v}}{dy}\Big|_{\pm h} \pm \frac{1}{m}\hat{p}\Big|_{\pm h} - \frac{d}{m}\hat{\gamma}^{\pm} - \frac{1}{m}(B\alpha^4 + T\alpha^2 + K)\hat{\eta}^{\pm}, \\ -i\omega\hat{\eta}^{\pm} = \hat{\gamma}^{\pm}. \end{array} \right. \quad (2.27)$$

Les conditions aux limites en  $y = \pm h$  sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u} = -\hat{\eta}^{\pm} \frac{\partial U}{\partial y}\Big|_{\pm h}, \\ \hat{v} = \hat{\gamma}^{\pm}. \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Le système (2.27) couplé aux conditions limites (2.28) représente un problème aux valeurs propres généralisé du type :  $\mathbf{A}\mathbf{v} - i\omega\mathbf{B}\mathbf{v} = 0$ . La valeur propre est  $i\omega$  et le vecteur propre  $\mathbf{v} = [\hat{u}, \hat{v}, \hat{p}, \hat{\gamma}^{\pm}, \hat{\eta}^{\pm}]$ .

Aux temps longs, la dynamique temporelle de la perturbation est pilotée par le mode le plus amplifié temporellement (ayant le plus grand taux de croissance  $\omega_i$ ). La fréquence du mode est donnée par  $\omega_r/2\pi$ .

## 2.6 Écoulement pulsé

Le problème (2.21) est périodique lorsque l'écoulement de base est pulsé. Par conséquent, il peut être résolu en utilisant une théorie de Floquet. Dans ce qui suit, nous

## 2.6 Écoulement pulsé

introduisons l'analyse de Floquet pour étudier la stabilité linéaire d'un écoulement pulsé en présence de parois flexibles.

Ainsi, nous écrivons les perturbations sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{u}}(y, t) = \left[ \sum_n \hat{\mathbf{u}}^{(n)}(y) e^{in\Omega t} \right] e^{-i\omega t}, \\ \tilde{p}(y, t) = \left[ \sum_n \hat{p}^{(n)}(y) e^{in\Omega t} \right] e^{-i\omega t}, \\ \tilde{\eta}^{\pm}(t) = \left[ \sum_n \hat{\eta}^{\pm(n)} e^{in\Omega t} \right] e^{-i\omega t}, \\ \tilde{\gamma}^{\pm}(t) = \left[ \sum_n \hat{\gamma}^{\pm(n)} e^{in\Omega t} \right] e^{-i\omega t}, \end{array} \right. \quad (2.29)$$

avec  $i\omega$  la valeur propre et  $\Omega$  la fréquence de pulsation de l'écoulement de base. Dans cette approche, la fonction propre est périodique, de même période que le champ de base. Le comportement de la perturbation est alors déterminé par la résolution du problème aux valeurs propres généralisé suivant, pour tout entier  $n$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} -i\omega \hat{u}^{(n)} = \left[ -in\Omega + \nu \left( -\alpha^2 + \frac{d^2}{dy^2} \right) \right] \hat{u}^{(n)} - i\alpha \sum_k U^{(k)} \hat{u}^{(n-k)} - \sum_k \frac{dU^{(k)}}{dy} \hat{v}^{(n-k)} - \frac{i\alpha}{\rho} \hat{p}^{(n)}, \\ -i\omega \hat{v}^{(n)} = \left[ -in\Omega + \nu \left( -\alpha^2 + \frac{d^2}{dy^2} \right) \right] \hat{v}^{(n)} - i\alpha \sum_k U^{(k)} \hat{v}^{(n-k)} - \frac{1}{\rho} \frac{d\hat{p}^{(n)}}{dy}, \\ 0 = i\alpha \hat{u}^{(n)} + \frac{d\hat{v}^{(n)}}{dy}, \\ -i\omega \hat{\gamma}^{\pm(n)} = - \left( in\Omega + \frac{d}{m} \right) \hat{\gamma}^{\pm(n)} \mp \frac{\mu}{m} \frac{d\hat{v}^{(n)}}{dy} \Big|_{\pm h} \pm \frac{1}{m} \hat{p}^{(n)} \Big|_{\pm h} - \frac{1}{m} (B\alpha^4 + T\alpha^2 + K) \hat{\eta}^{\pm(n)}, \\ -i\omega \hat{\eta}^{\pm(n)} = \hat{\gamma}^{\pm(n)} - in\Omega \hat{\eta}^{\pm(n)}, \end{array} \right. \quad (2.30)$$

avec les conditions aux limites en  $y = \pm h$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}^{(n)} + \sum_k \frac{dU^{(k)}}{dy} \Big|_{\pm h} \hat{\eta}^{\pm(n-k)} = 0, \\ \hat{v}^{(n)} = \hat{\gamma}^{\pm(n)}. \end{array} \right. \quad (2.31)$$

## 2.7 Équations pour l'énergie totale

L'étude des mécanismes physiques de stabilisation/déstabilisation est éclairée par les transferts d'énergie. Notamment, Benjamin [4] et Landahl [56] ont utilisé ces concepts pour classer les différents types d'instabilités rencontrés lorsque un écoulement interagit avec une paroi flexible. Dans ce qui suit, nous nous inspirons des analyses de Domaradzki et Metcalfe [20] et Carpenter et Morris [13] visant à caractériser l'évolution temporelle de l'énergie de la perturbation et des différents transferts associés (paroi/fluide, champ de base/perturbation, par exemple). Ainsi, nous établissons l'équation pour l'énergie cinétique en nous appuyant sur le système aux petites perturbations détaillé précédemment :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho\frac{\partial}{\partial t}(u^2+v^2) &= -\frac{U}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2+v^2) - \rho uv\frac{dU}{dy} - \frac{\partial(up)}{\partial x} - \frac{\partial(vp)}{\partial y} \\ &+ \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \mu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

En appliquant une moyenne spatiale ( $\overline{\quad}$ ) dans la direction de l'écoulement  $x$ , on obtient l'équation de l'évolution temporelle de l'énergie cinétique de la fluctuation [79] :

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\overline{u^2+v^2}}_{\text{Évolution temporelle de l'énergie cinétique}} &= - \underbrace{\rho\overline{uv}\frac{dU}{dy}}_{\mathbb{P} : \text{Production}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\overline{vp}}_{\mathbb{II} : \text{Diffusion par la pression}} + \\ &\underbrace{\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}}\right)}_{\mathbb{D} : \text{Diffusion visqueuse}} - \underbrace{\mu\left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}\right)}_{\varepsilon : \text{Dissipation visqueuse}}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Les termes  $\mathbb{P}$  et  $\varepsilon$  sont respectivement le travail des tensions de Reynolds et la dissipation visqueuse, les termes  $\mathbb{II}$  et  $\mathbb{D}$  sont associés à un terme de diffusion par la pression et la diffusion visqueuse. Nous retrouvons aussi dans la littérature [16, 45, 42] la version intégrale de cette équation (2.33) :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-h}^h\rho\overline{(u^2+v^2)}dy = -\int_{-h}^h\rho\overline{uv}\frac{dU}{dy}dy - \mu\int_{-h}^h\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}dy - \overline{vp}\Big|_{-h}^h + \mu\left(u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Big|_{-h}^h. \quad (2.34)$$

Dans le cas d'une paroi rigide (vitesses  $u$  et  $v$  nulles à la paroi), les deux derniers termes n'ont aucune contribution aux bilans d'énergie. Cependant, dans le cas de paroi flexible, la contribution de ces termes est importante, en particulier pour les instabilités de paroi.

Le terme de travail de pression à la paroi  $\overline{vp}\Big|_{-h}^h$  peut être évalué à l'aide de l'équation de la paroi flexible et de la condition cinématique comme suit :

$$\begin{aligned} \overline{vp}\Big|_{-h}^h &= \gamma^+p(h) + \gamma^-p(-h) \\ &= m\gamma^\pm\frac{\partial\gamma^\pm}{\partial t} + d(\gamma^\pm)^2 + \frac{\partial\eta^\pm}{\partial t}(B\Delta^2 + T\Delta + K)\eta^\pm \pm \mu\gamma^\pm\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{-h}^h. \end{aligned} \quad (2.35)$$

## 2.7 Équations pour l'énergie totale

Sachant que :

$$\overline{\frac{\partial \eta}{\partial t} \Delta^2 \eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \overline{(\Delta \eta)^2}, \quad \overline{\frac{\partial \eta}{\partial t} \Delta \eta} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \overline{(\nabla \eta \cdot \nabla \eta)},$$

on peut réécrire ce terme d'échange sous forme de bilan d'énergie de la paroi :

$$\overline{v\bar{p}} \Big|_{-h}^h = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} m \overline{(\gamma^\pm)^2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \left( B \overline{(\Delta \eta^\pm)^2} - T \overline{(\nabla \eta^\pm \cdot \nabla \eta^\pm)} + K \overline{(\eta^\pm)^2} \right) \right) + \overline{d(\gamma^\pm)^2}. \quad (2.36)$$

Cette formulation à été introduite par Hoepffner *et al.* [45] et permet de définir l'énergie totale incluant les contributions de l'énergie cinétique du fluide, l'énergie cinétique et potentielle de la paroi. Un avantage majeur du bilan d'énergie totale est de faire apparaître explicitement le terme d'amortissement de la paroi. En effet, la dissipation de la paroi est un outil important dans la classification des instabilités [4]. L'équation de l'évolution de l'énergie totale  $\overline{E}_{tot}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{E}_{tot} = & - \underbrace{\int_{-h}^h \rho \bar{u} \bar{v} \frac{dU}{dy} dy}_{\text{C1 : Échange d'énergie avec l'écoulement de base}} - \underbrace{\mu \left( \eta \frac{dU}{dy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{-h}^h}_{\text{C2 : Échange d'énergie à la paroi}} \\ & - \underbrace{\mu \int_{-h}^h \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dy}_{\text{C3 : Dissipation visqueuse}} - \underbrace{\overline{d(\gamma^\pm)^2}}_{\text{C4 : Amortissement de la paroi}}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \overline{E}_{tot} = & \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-h}^h \rho \overline{(u^2 + v^2)} dy}_{E_{FK} : \text{Énergie cinétique du fluide}} + \underbrace{\frac{1}{2} m \overline{(\gamma^\pm)^2}}_{E_{WK} : \text{Énergie cinétique de la paroi}} \\ & + \underbrace{\frac{1}{2} \left( B \overline{(\Delta \eta^\pm)^2} - T \overline{(\nabla \eta^\pm \cdot \nabla \eta^\pm)} + K \overline{(\eta^\pm)^2} \right)}_{E_{WP} : \text{Énergie potentiel de la paroi}}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

L'évolution temporelle de l'énergie totale est gouvernée par 4 termes, 2 termes d'échange avec l'écoulement de base (C1, C2) et 2 termes dissipatifs (C3, C4). En effet, selon Carpenter et Morris [13], le terme C2 résulte d'un échange d'énergie entre l'écoulement de base et la paroi.

Ces différentes expressions vont servir pour calculer les termes de l'équation d'énergie totale en utilisant les fonctions propres obtenues par la résolution du problème aux valeurs propres et ainsi en déduire les mécanismes physiques sous-jacents pour les différents modes d'instabilité.

## 2.8 Méthodes numériques

### 2.8.1 Méthodes spectrales

On discrétise le problème aux valeurs propres généralisé par une méthode de collocation spectrale [73]. Les méthodes spectrales consistent à représenter la solution d'une équation différentielle comme une série tronquée, les inconnues sont les coefficients de cette série. Nous utilisons la décomposition en série de Fourier pour les problèmes périodiques et en polynômes de Tchebychev pour les problèmes non périodiques. Pour le dernier cas, on considère l'expansion de la fonction  $q(y)$  par la série  $q_N(y)$  :

$$q_N(y) = \sum_{k=0}^N \tilde{q}_k T_k(y), \quad (2.39)$$

avec  $T_k(y)$  polynôme de Tchebychev de degré  $k$  et  $\tilde{q}_k$  les coefficients d'expansion. Le polynôme de Tchebychev est défini comme suit :

$$T_k(y) = \cos(k \cos^{-1}(y)), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.40)$$

En posant  $y = \cos(z)$  :

$$T_k = \cos(kz). \quad (2.41)$$

On retrouve une formule qui permet de déduire facilement les premiers polynômes :  $T_0 = 1$ ,  $T_1 = \cos(z)$ ,  $T_2 = \cos(2z)$ . On introduit le résidu  $R_N$  qui doit être mis à zéro :

$$R_N(y) = q - q_N. \quad (2.42)$$

Ainsi, si  $R_N = 0$ ,  $q(y) = q_N(y)$  est vérifiée. Le but est donc de réduire au minimum le résidu ou de l'annuler à certains points. Nous annulons ici le résidu en imposant l'équation (2.43) :

$$(R_N, \psi_i)_{w_*} = \int_{\alpha}^{\beta} R_N \psi_i w_* dy = 0, \quad (2.43)$$

avec  $w_*$  une fonction de poids. La méthode de collocation spectrale consiste à choisir :

$$\psi_i = \delta(y - y_i) \quad \text{et} \quad w_* = 1, \quad (2.44)$$

où  $\delta$  est la fonction de Dirac et les  $y_i$  sont les points de collocation.

On utilise les points de Gauss-Lobatto comme points de collocation :

$$y_i^{GL} = \cos\left(\frac{\pi i}{k}\right), \quad i = 0, \dots, k.$$

On remarque que les points de Gauss-Lobatto annulent le polynôme  $(1-y^2)T'_k(y)$ . Par (2.43) et (2.44) on trouve :

$$R_N(y_i) = 0. \quad (2.45)$$

Ainsi, le résidu est nul aux points de collocation. En outre, on peut également montrer que l'approximation de la fonction sur les points de Gauss–Lobatto minimise les oscillations de Gibbs pour tout l'intervalle  $y \in [-1, 1]$ .

Nous pouvons alors construire des formules de dérivation qui expriment la dérivée d'ordre  $n$  en fonction des valeurs de la fonction aux points de collocation :

$$q_N^{(p)}(y_i) = \sum_{j=0}^N d_{i,j}^{(p)} q_N(y_j), \quad (2.46)$$

où  $D$  est la matrice de dérivation, définie par :  $D = [d_{i,j}^{(1)}]$ ,  $i, j = 0, \dots, N$ .  $Q$  est le vecteur de composantes  $q_N(y_i)$  et  $Q^p$  le vecteur des valeurs de la dérivée d'ordre  $p$ .

### 2.8.2 Formulation du problème aux valeurs propres

La méthode numérique développée ici est axée sur la suppression des modes parasites. Premièrement, les modes parasites de pression sont éliminés en utilisant la méthode  $P_N P_{N-2}$  [73]. Elle consiste à discrétiser la pression avec un polynôme de 2 degrés inférieur à celui utilisé pour les composantes de vitesse. En effet, la pression n'apparaît que sous forme de gradient dans les équations de Navier–Stokes incompressibles et les conditions aux limites associées sont implicitement imposées via la contrainte de divergence nulle.

Nous utilisons  $N$  points de collocation pour les composantes de vitesse et la paroi est décrite par 4 coefficients :  $\eta^\pm$  et  $\gamma^\pm$ . Ainsi, il y a  $3N + 2$  inconnues pour chaque harmonique de la fonction propre de Floquet (2.29). En procédant de cette façon, le problème aux valeurs propre généralisé (2.30, 2.31) discrétisé s'écrit sous forme matricielle, pour chaque entier  $n$ , comme :

$$\widehat{\mathbf{A}}^{(n)} \widehat{\mathbf{X}}^{(n)} + \sum_k \widehat{\mathbf{S}}^{(k)} \widehat{\mathbf{X}}^{(n-k)} = i\omega \widehat{\mathbf{B}}^{(n)} \widehat{\mathbf{X}}^{(n)}, \quad (2.47)$$

où  $\widehat{\mathbf{A}}^{(n)}$ ,  $\widehat{\mathbf{S}}^{(k)}$ ,  $\widehat{\mathbf{B}}^{(n)}$  sont des matrices carrées de taille  $(3N + 2)^2$ . Pour chaque harmonique  $n$ , le vecteur propre s'écrit :

$$\widehat{\mathbf{X}}^{(n)} = \left( \overbrace{\hat{u}_1^{(n)} \dots \hat{u}_N^{(n)}, \hat{v}_1^{(n)} \dots \hat{v}_N^{(n)}}^{\mathbf{V}^{(n)}}, \overbrace{\hat{p}_2^{(n)} \dots \hat{p}_{N-1}^{(n)}}^{\mathbf{P}_I^{(n)}}, \overbrace{\hat{\gamma}_1^{(n)} \hat{\eta}_1^{(n)} \hat{\gamma}_N^{(n)} \hat{\eta}_N^{(n)}}^{\mathbf{W}^{(n)}} \right), \quad (2.48)$$

avec  $2N$  inconnues pour la vitesse  $\mathbf{V}^{(n)}$ ,  $N - 2$  valeurs pour la pression  $\mathbf{P}_I^{(n)}$  aux points intérieurs et 4 valeurs pour les parois  $\mathbf{W}^{(n)}$ . Les matrices  $\widehat{\mathbf{A}}^{(n)}$ ,  $\widehat{\mathbf{S}}^{(k)}$  et  $\widehat{\mathbf{B}}^{(n)}$  sont de la



forme :

$$\widehat{\mathbf{A}}^{(n)} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}^{(n)} & \widehat{\mathbf{G}}_{\mathbf{V}} & \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{V}\mathbf{W}} \\ \widehat{\mathbf{D}}_{\mathbf{V}} & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{D}}_{\mathbf{W}} \\ \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{W}\mathbf{V}} & \widehat{\mathbf{G}}_{\mathbf{W}} & \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{W}\mathbf{W}}^{(n)} \end{bmatrix}, \widehat{\mathbf{S}}^{(k)} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}^{(k)} & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{V}\mathbf{W}}^{(k)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$\text{et } \widehat{\mathbf{B}}^{(n)} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{1}}_{\mathbf{V}\mathbf{V}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{1}}_{\mathbf{W}\mathbf{W}} \end{bmatrix}.$$

Toutes ces matrices ont la même structure en blocs carrés sur la diagonale et rectangulaires hors diagonale, reflétant la structure des vecteurs  $\widehat{\mathbf{X}}^{(n)}$ .

Dans ces expressions,  $n$  peut en théorie prendre toutes les valeurs entières, positives et négatives, mais dans la pratique les séries de Fourier sont tronquées à  $|n| \leq N_f$  pour une certaine valeur de  $N_f$ . Les blocs pour lesquels  $(n)$  n'est pas indiqué ci-dessus sont indépendants de l'harmonique considéré. En particulier, la matrice  $\widehat{\mathbf{B}}^{(n)}$  ne comporte que deux blocs carrés correspondant à l'identité (sauf pour les lignes nulles correspondant aux conditions cinématiques de vitesse).

Enfin, dans les configurations que nous étudions, l'écoulement de base  $U$  ne comporte qu'une seule composante oscillante  $U^{(\pm 1)}(y)$  en plus de la composante moyenne  $U^{(0)}(y)$ . Par conséquent, seules les matrices  $\widehat{\mathbf{S}}^{(k)}$  avec  $|k| \leq 1$  sont non nulles et le problème aux valeurs propres généralisé (2.47) devient tridiagonal par blocs comme indiqué schématiquement sur la figure (2.1).

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{A}}^{(0)} & \widehat{\mathbf{S}}^{(-1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \widehat{\mathbf{S}}^{(1)} & \widehat{\mathbf{A}}^{(1)} & \widehat{\mathbf{S}}^{(-1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{S}}^{(1)} & \widehat{\mathbf{A}}^{(2)} & \widehat{\mathbf{S}}^{(-1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{S}}^{(1)} & \widehat{\mathbf{A}}^{(3)} \end{pmatrix} \widehat{\mathbf{X}} = i\omega \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{B}}^{(0)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{B}}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{B}}^{(2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{B}}^{(3)} \end{pmatrix} \widehat{\mathbf{X}}$$

FIG. 2.1 : Problème aux valeurs propres tridiagonal par blocs.

Afin de réduire la taille du problème aux valeurs propres généralisé, l'équation Orr–Sommerfeld est généralement utilisée, où le vecteur d'état est construit à l'aide de la composante normale de vitesse et la vorticité suivant  $z$ . Cependant, cette formulation conduit à l'apparition de modes parasites, avec une partie réelle importante. Ils sont dus à la réduction analytique des équations de quantité de mouvement en utilisant la contrainte de divergence nulle, et aux conditions limites supplémentaires introduites

du fait de l'introduction de dérivées d'ordre 4 [65]. Pour y remédier, nous suivons la méthode décrite par Manning *et al.* [65]. Elle consiste à réduire le système après la discrétisation de celui-ci par une méthode spectrale. Dans notre étude, nous combinons la méthode  $P_N P_{N-2}$  et la technique de réduction proposée par Manning *et al.* [65], étendue au cas de la paroi flexible.

Dans le système algébrique (2.47), nous commençons par retirer les lignes et les colonnes qui correspondent aux vitesses à la paroi  $\{\hat{u}_1^{(n)}, \hat{v}_1^{(n)}, \hat{u}_N^{(n)}, \hat{v}_N^{(n)}\}$ . Ceci est possible puisque les conditions à la paroi (2.31) permettent d'exprimer ces vitesses en fonction des variables de la paroi  $\{\hat{\gamma}_0^{(n)}, \hat{\eta}_0^{(n)}, \hat{\gamma}_N^{(n)}, \hat{\eta}_N^{(n)}\}$ . Il faut donc effectuer les modifications suivantes, en transformant certaines colonnes du problème aux valeurs propres :

$$\begin{cases} \text{Colonne } \hat{\gamma}_{0,N}^{(n)} & + = \text{Colonne } \hat{v}_{0,N}^{(n)}, \\ \text{Colonne } \hat{\eta}_{0,N}^{(n)} & - = \sum_k \frac{dU^{(k)}}{dy} \Big|_{\pm h} \times \text{Colonne } \hat{u}_{0,N}^{(n-k)}. \end{cases} \quad (2.50)$$

Cette procédure est illustrée par le schéma dans la figure (2.2).

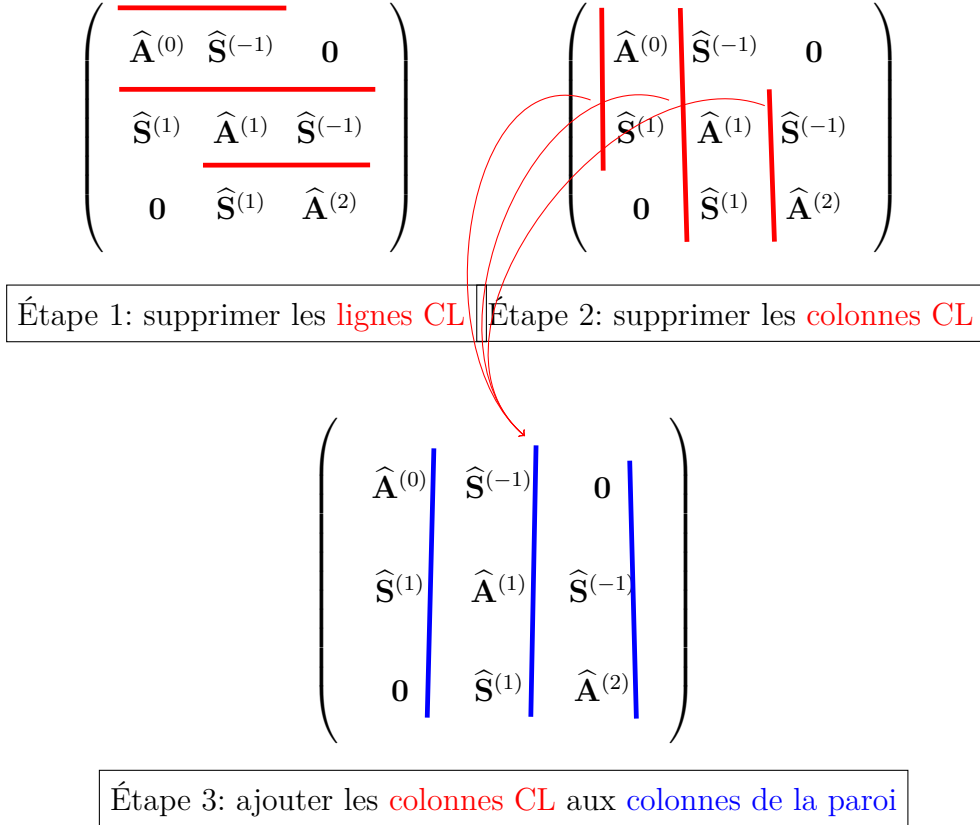


FIG. 2.2 : Schéma représentant les modifications apportées au problème aux valeurs propres généralisé.

Après cette opération d'élimination des 4 équations et des 4 inconnues correspondant à la vitesse aux parois, le système algébrique réduit est toujours tridiagonal par

blocs et il s'écrit comme suit :

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(n)} \tilde{\mathbf{X}}^{(n)} + \sum_k \tilde{\mathbf{S}}^{(k)} \tilde{\mathbf{X}}^{(n-k)} = i\omega \tilde{\mathbf{B}}^{(n)} \tilde{\mathbf{X}}^{(n)}, \quad (2.51)$$

avec  $\tilde{\mathbf{A}}^{(n)}$ ,  $\tilde{\mathbf{S}}^{(k)}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}^{(n)}$  matrices carrées de taille  $(3N - 2)^2$ . De la même façon,  $\tilde{\mathbf{X}}^{(n)}$  est maintenant le vecteur des  $3N - 2$  variables sans les vitesses aux bords :

$$\tilde{\mathbf{X}}^{(n)} = \left( \begin{array}{c} \overbrace{\hat{u}_2^{(n)} \dots \hat{u}_{N-1}^{(n)}, \hat{v}_2^{(n)} \dots \hat{v}_{N-1}^{(n)}}^{\mathbf{V}_I^{(n)}}, \overbrace{\hat{p}_2^{(n)} \dots \hat{p}_{N-1}^{(n)}}^{\mathbf{P}_I^{(n)}}, \overbrace{\hat{\gamma}_1^{(n)} \hat{\eta}_1^{(n)} \hat{\gamma}_N^{(n)} \hat{\eta}_N^{(n)}}^{\mathbf{W}^{(n)}} \end{array} \right). \quad (2.52)$$

La structure des matrices du nouveau système (2.51) reste de la même forme :

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(n)} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}^{(n)} & \tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{V}} & \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{V}\mathbf{W}} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{V}} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{W}} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{W}\mathbf{V}} & \tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{W}} & \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{W}\mathbf{W}}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{S}}^{(k)} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}^{(k)} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{V}\mathbf{W}}^{(k)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

$$\text{et } \tilde{\mathbf{B}}^{(n)} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{1}}_{\mathbf{V}\mathbf{V}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{1}}_{\mathbf{W}\mathbf{W}} \end{bmatrix}.$$

Notons que maintenant les blocs non nuls des matrices  $\tilde{\mathbf{B}}^{(n)}$  sont exactement des matrices identité. L'étape suivante consiste à éliminer la pression et à projeter les équations de quantité de mouvement dans un sous-espace à divergence nulle. Ainsi, le champ de vitesse résultant satisfait la condition de continuité sur tous les points de collocation.

L'opérateur discret de divergence nulle s'écrit :  $\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{V}} \mathbf{V}_I^{(n)} + \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{W}} \mathbf{W}^{(n)} = \mathbf{0}$ . En l'appliquant sur les parties du système algébrique (2.51) correspondant aux équations de quantité de mouvement, on obtient :

$$\begin{aligned} - \left( \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{V}} + \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{W}} \tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{W}} \right) \mathbf{P}_I^{(n)} &= \left( \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{V}} \quad \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{W}} \right) \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}^{(n)} & \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{V}\mathbf{W}} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{W}\mathbf{V}} & \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{W}\mathbf{W}}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_I^{(n)} \\ \mathbf{W}^{(n)} \end{pmatrix} \\ &+ \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{V}} \sum_k \left( \tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}^{(k)} \mathbf{V}_I^{(n-k)} + \tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{V}\mathbf{W}}^{(k)} \mathbf{W}^{(n-k)} \right). \end{aligned} \quad (2.54)$$

L'opérateur  $\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{V}} + \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{W}} \tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{W}}$  est une matrice carrée de taille  $(N - 2)^2$ , indépendante de l'harmonique  $n$  et inversible. Ainsi, les composantes de la pression  $\mathbf{P}_I^{(n)}$  peuvent être exprimées en fonction des  $\mathbf{V}_I^{(n)}$  et des  $\mathbf{W}^{(n)}$ . En effectuant les manipulations correspondant à l'élimination de la pression sur les blocs des matrices  $\tilde{\mathbf{A}}^{(n)}$  et

$\tilde{\mathbf{S}}^{(k)}$ , le système (2.51) devient :

$$\overline{\mathbf{A}}^{(n)}\overline{\mathbf{X}}^{(n)} + \sum_k \overline{\mathbf{S}}^{(k)}\overline{\mathbf{X}}^{(n-k)} = i\omega\overline{\mathbf{X}}^{(n)}. \quad (2.55)$$

Maintenant, les composantes du vecteur propre  $\overline{\mathbf{X}}^{(n)} = (\mathbf{V}_I^{(n)}, \mathbf{W}^{(n)})$  ne comportent plus que  $2N$  variables et les matrices  $\overline{\mathbf{A}}^{(n)}$  et  $\overline{\mathbf{S}}^{(k)}$  sont de taille  $(2N)^2$ . Notons aussi que l'élimination de la pression a transformé le problème aux valeurs propres généralisé en un problème régulier.

Le système (2.55) contient encore  $N - 2$  valeurs propres nulles par harmonique dues à la divergence nulle reliant les composantes de vitesse entre elles. Lorsque le nombre d'onde  $\alpha$  est non nul, il est encore possible d'éliminer la vitesse longitudinale avec la version discrétisée de  $u = \frac{i}{\alpha}\partial_y v$ . Après les manipulations algébriques correspondant à l'élimination des composantes  $\hat{u}_i^{(n)}$ , le système (2.55) devient :

$$\mathbf{A}^{(n)}\mathbf{X}^{(n)} + \sum_k \mathbf{S}^{(k)}\mathbf{X}^{(n-k)} = i\omega\mathbf{X}^{(n)}, \quad (2.56)$$

avec  $N + 2$  variables pour chaque composante du vecteur propre :

$$\mathbf{X}^{(n)} = \left( \hat{v}_2^{(n)} \quad \dots \quad \hat{v}_{N-1}^{(n)}, \hat{\gamma}_1^{(n)} \quad \hat{\eta}_1^{(n)} \quad \hat{\gamma}_N^{(n)} \quad \hat{\eta}_N^{(n)} \right). \quad (2.57)$$

Récapitulons les opérations effectuées. Nous sommes partis d'un problème aux valeurs propres généralisé à  $3N + 2$  variables par composante de Fourier. Quatre équations ont été retirées grâce aux conditions cinématiques aux parois. L'élimination de la pression a conduit à un problème aux valeurs propres régulier de taille  $2N$  par harmonique. Enfin, l'élimination de la vitesse longitudinale a encore permis de gagner  $N - 2$  variables par harmonique.

Finalement, le dernier système (2.56) peut encore être réduit de moitié en considérant séparément des perturbations de symétrie sinueuse ou variqueuse et en utilisant seulement la moitié du canal avec des opérateurs de dérivation appropriés correspondant à la symétrie ou à l'antisymétrie des différents champs [90].

Les manipulations nécessaires pour arriver à la formulation (2.56) sont, certes, fastidieuses mais l'effort est largement récompensé. En effet, cette formulation est non seulement exempte de valeurs propres parasites, mais diminue également considérablement la taille du système, ce qui entraîne une réduction drastique des temps de calcul.

Enfin, ce dernier problème aux valeurs propres est résolu à l'aide d'un algorithme d'Arnoldi présenté dans la section suivante.

### 2.8.3 Résolution du problème de Floquet

Les méthodes directes de résolution de problèmes aux valeurs propres donnent lieu à des temps de calcul très importants pour des opérateurs de grande taille. Une alternative très utilisée est la méthode d'Arnoldi.

La méthode d'Arnoldi est une méthode itérative de la famille des méthodes de Krylov. Celle-ci est basée sur la projection orthogonale dans un sous-espace de Krylov de taille réduite du problème initial. Dans le cas général, pour extraire les valeurs propres approximatives d'un sous-espace on utilise la procédure de Rayleigh–Ritz. Cette méthode revient à calculer les valeurs propres d'une matrice de Hessenberg  $H$  définie comme :

$$H = V^*AV. \quad (2.58)$$

La matrice  $V$  est une matrice orthonormée construite à partir du sous-espace préalablement construit. Dans le cas de la méthode d'Arnoldi, on utilise un sous-espace de Krylov défini comme suit :

$$\kappa_m(A, v) = \{v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v\}, \quad (2.59)$$

avec  $v$  un vecteur initial. A l'itération  $m$  de l'algorithme, on peut écrire :

$$AV_m = V_m H_m + h_{m+1,m} v_m e_m^T. \quad (2.60)$$

Avec  $V_m = \{v_1, \dots, v_m\}$ ,  $H_m$  matrice d'Hessenberg d'ordre  $m$ . Ici,  $e_m^T$  est la  $m$  ème colonne d'une matrice identité d'ordre  $n$ . La convergence est atteinte lorsque  $h_{m+1,m} = 0$ .

La vitesse de convergence de la factorisation d'Arnoldi dépend du vecteur initial  $v_1$ . Diverses méthodes ont été développées pour améliorer la convergence. La méthode la plus efficace a été introduite par Sorensen [86].

Celle-ci repose sur le principe de l'IRAM (Implicitly restarted Arnoldi method). Il s'agit d'effectuer  $m = k + p$  itérations d'Arnoldi, puis d'appliquer une décomposition QR avec  $p$  décalage sur la matrice de Hessenberg  $H_m$  d'ordre  $m$ . Le but final est de reconstruire un vecteur initial qui permet de converger vers les valeurs propres désirées. Finalement,  $p$  itérations de plus sont appliquées.

Le choix des décalages n'est pas unique et l'implémentation de la méthode IRAM (ARPACK [61]) permet de choisir les caractéristiques des valeurs propres. Notamment, les valeurs propres avec la plus grande partie réelle, plus grand module, etc.

Les méthodes de projection telles que celle décrite ci-dessus ne convergent rapidement que pour des valeurs propres bien séparées. Dans le cas général, les valeurs propres désirées ne sont pas toujours bien séparées. Pour y remédier, on utilise la transformation spectrale *Shift and invert*. Cela correspond à résoudre un problème équivalent. Ainsi, on considère un problème aux valeurs propres généralisé :

$$Ax - \lambda Bx = 0, \quad (2.61)$$

avec  $A, B$  des matrices carrées de taille  $n$  et  $x$  le vecteur propre qui correspond à la valeur propre  $\lambda$ . La transformation spectrale *shift invert* s'écrit comme suit :

$$(A - \sigma B)^{-1} Bx - \nu x = 0, \quad \text{avec } \nu = \frac{1}{\lambda - \sigma}. \quad (2.62)$$

Cette technique augmente grandement la vitesse de convergence. Cependant, elle nécessite la résolution d'un système linéaire pour chaque nouvel élément du sous-espace de Krylov. Dans notre étude, la matrice  $A - \sigma B$  est tridiagonale par blocs. Un algorithme de Thomas par blocs est implémenté et combiné à l'algorithme d'Arnoldi issu des routines d'ARPACK [61]. La décomposition LU est réalisée en phase de précalcul, ce qui rend cette méthode particulièrement performante.

### 2.8.4 Méthodes de continuation

Le suivi des relations de dispersion dans l'espace des paramètres est effectué par une méthode de continuation. Ces méthodes sont très efficaces pour notamment déterminer les courbes neutres ( $\omega_i(p, \alpha) = 0$ ).

Les méthodes de continuation sont basées sur un schéma prédicteur-correcteur [26]. Une itération de la méthode de continuation se divise en deux étapes :

$$(p_i, \alpha_i) \longrightarrow (\hat{p}_{i+1}, \hat{\alpha}_{i+1}) \longrightarrow (p_{i+1}, \alpha_{i+1}).$$

Le prédicteur le plus simple est l'interpolation d'ordre 0. Il consiste à utiliser la solution précédente comme un point initial  $\hat{p}_{i+1} = p_i$  (voir figure 2.3a).

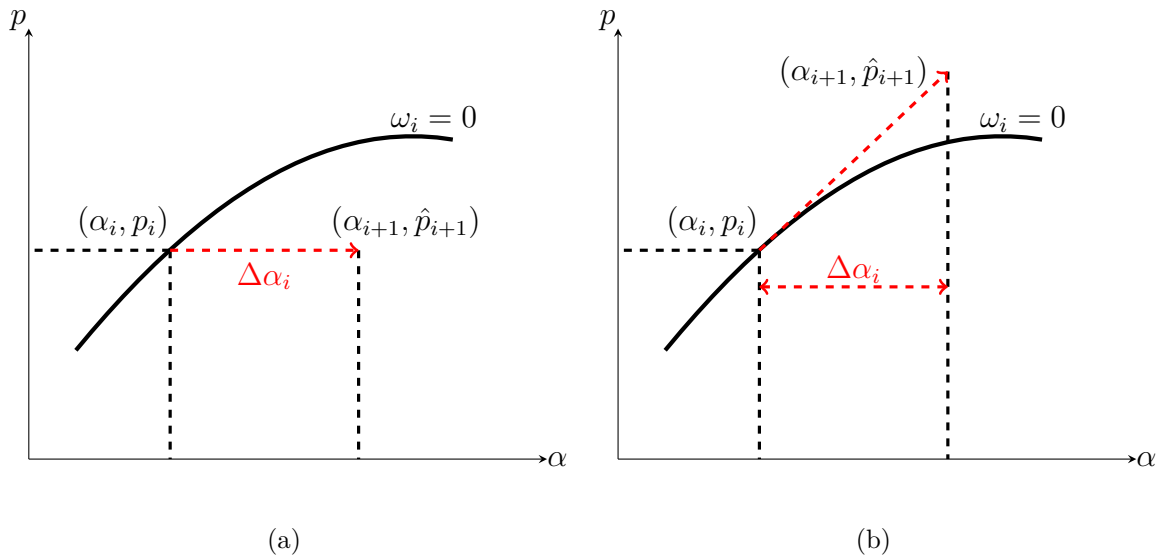


FIG. 2.3 : Prédicteurs d'ordre 0 et d'ordre 1

Les pas associés à ce prédicteur sont très faibles. Une alternative intéressante est le prédicteur d'ordre 1. Cela revient à utiliser la tangente au point  $(p_i, \alpha_i)$  (voir figure 2.3b).

$$\hat{p}_{i+1} = p_i + (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \frac{dp}{d\alpha}.$$

La phase de correction consiste à résoudre le problème  $\omega_i(\hat{p}_{i+1}, \alpha_{i+1}) = 0$ . Un algorithme de Newton est classiquement utilisé [82] pour converger.

La construction de la courbe  $(\omega_i(p, \alpha) = 0)$  est effectuée en avançant graduellement  $\alpha$  avec un pas  $\Delta\alpha$ . Chaque itération  $i$  est composée d'une étape de prédiction  $(\hat{p}_{i+1})$ , suivie de la correction  $(p_{i+1})$ .

Cette méthode de continuation dite naturelle présente un inconvénient majeur. En effet, lorsque la dérivée  $\frac{d\omega_i}{dp}$  est singulière, l'algorithme de Newton ne parvient pas à converger [19]. Les points où la dérivée est singulière sont des points limites [7]. Dans le cas d'une courbe neutre, ce point est généralement appelé point critique. La dérivation d'autres méthodes est donc nécessaire pour le calcul des courbes neutres.

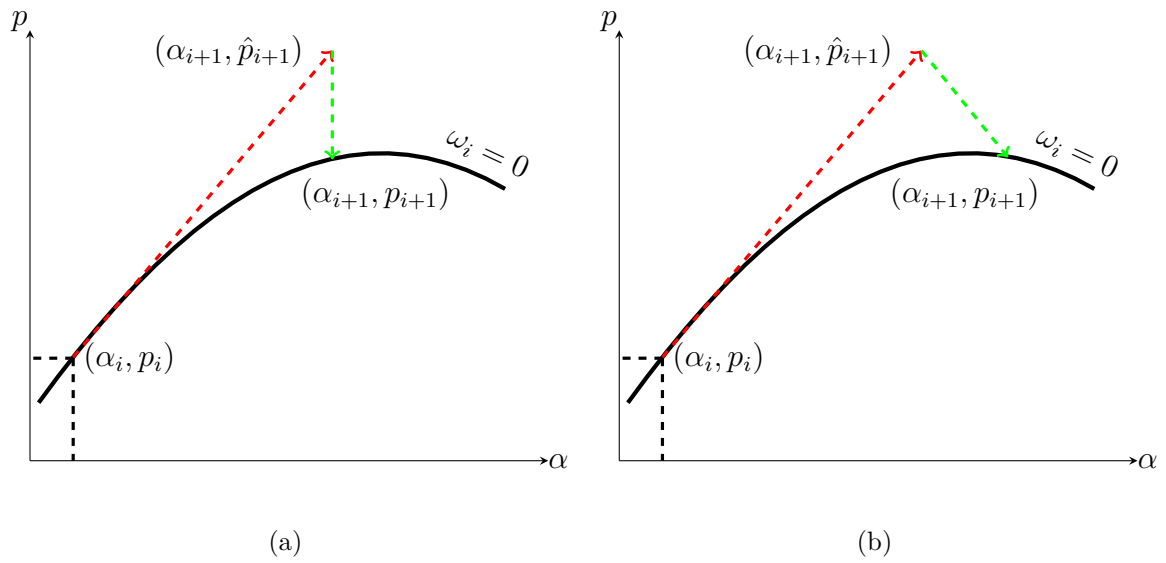


FIG. 2.4 : Méthode de continuation naturelle (a) et de longueur d'arc (b).

La méthode *Pseudo-arc length* introduite par Keller [49] permet de contourner les singularités des points critiques. Elle consiste à ajouter un paramètre  $s$  qui correspond à la longueur de l'arc rejoignant les points  $(p_i, \alpha_i)$  et  $(p_{i+1}, \alpha_{i+1})$ . La contrainte de la longueur d'arc permet de compléter le système d'équation :

$$\left(\frac{dp}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 - 1 = 0 \quad (2.63)$$

Une différence finie centrée est utilisée pour approcher la contrainte (2.63) d'où le nom *Pseudo-arc length*.

$$\frac{dp}{ds}\Big|_i (p_{i+1} - p_i) + \frac{d\alpha}{ds}\Big|_i (\alpha_{i+1} - \alpha_i) - \Delta s_i = 0. \quad (2.64)$$

Si la phase de correction ne converge pas au bout de  $N_{max}$  itérations, le pas est divisé par 2. L'adaptation du pas est basée sur un modèle d'erreur de la phase de

$\tilde{Q}$	Parois Rigides	Parois flexibles
0	$0.18741865 + i 0.16762317E - 02$	$0.20361976 - i 0.18097436E - 02$
0.02	$0.18737426 + i 0.17059598E - 02$	$0.20357869 - i 0.17604915E - 02$
0.04	$0.18724091 + i 0.17939319E - 02$	$0.20345548 - i 0.16153193E - 02$
0.06	$0.18701816 + i 0.19366282E - 02$	$0.20325035 - i 0.13815683E - 02$
0.08	$0.18670557 + i 0.21285524E - 02$	$0.20296410 - i 0.10702272E - 02$
0.10	$0.19630294 + i 0.23627295E - 02$	$0.21259861 - i 0.69444867E - 03$

TAB. 2.2 : Valeurs propres en fonction de  $\tilde{Q}$  pour le mode TS rigide et TS flexible ( $V_R = 1$  et  $B_\star = 4$ ). Les autres paramètres sont :  $Re = 10000$ ,  $Wo = 10$ ,  $\alpha = 1$ .

correction. Le pas est donné avec l'expression détaillée dans [78] :

$$\Delta s_{i+1} = \Delta s_i \left[ 1 + a \left( \frac{N_{max} - N_i}{N_{max} - 1} \right)^2 \right], \quad (2.65)$$

où  $N_i$  est le nombre d'itérations nécessaires à la convergence pour l'étape précédente et  $a$  est un paramètre associé au pas. La formule (2.65) est valable pour la méthode de continuation naturelle en remplaçant  $\Delta s$  par  $\Delta \alpha$ .

### 2.8.5 Validation des méthodes numériques

Cette partie est consacrée à la validation de nos méthodes numériques. D'abord, nous reproduisons les résultats donnés par Pier et Schmid [74] pour le cas du canal rigide. Puis, nous introduisons la paroi flexible avec une vitesse réduite de  $V_R = 1$  et une rigidité en flexion sans dimension  $B_\star = 4$ . Cela correspond à un paramètre sans dimension de  $K_\star = 1.25 \cdot 10^7$  et  $B_\star = 4K_\star$  donnés par Davies et Carpenter [16]. Les résultats sont illustrés pour les modes TS (en présence de parois rigides ou flexibles) et les modes d'interaction fluide-structure (sinueux et variqueux).

Les valeurs propres pour des amplitudes de la composante oscillante du champ de base  $\tilde{Q} = 0, 0.02, \dots, 0.1$  sont données dans les tableaux (2.2, 2.3). Les résultats sont présentés avec une précision d'au moins 8 chiffres après la virgule. Ces derniers dépendent de l'adimensionnement choisi. En effet, les distances sont rendues sans dimension par  $2h$  dans l'article de Pier et Schmid. Dans le travail présenté ici, nous utilisons la demi hauteur du canal  $h$ . Par conséquent, le nombre d'onde  $\alpha$  doit être divisé par 2 et les valeurs propres multipliées par 4. Par exemple, la valeur propre pour le cas d'un écoulement de Poiseuille plan est de  $\omega = 0.7497 + i 0.0067$  soit  $4 \cdot (0.18741865 + i 0.16762317E - 02)$  pour  $Re = 10000$  et  $\alpha = 1$ .

Nous illustrons maintenant la validation de la méthode de continuation. Le choix du pas maximal est primordial. Le but est donc de trouver un pas optimal qui permet d'avoir une courbe continue tout en ayant des temps de calcul raisonnables. Les figures (2.5) montrent deux exemples de courbe neutre réalisée avec la méthode *Pseudo-arc length* avec des pas constants. Dans la figure (2.5a) un pas de  $\Delta s = 0.1$  est utilisé.



$\tilde{Q}$	IFS sinueux	IFS variquex
0	$0.53556695 + i 0.79248137E - 03$	$0.55633561 + i 0.31887165E - 01$
0.02	$0.53553718 + i 0.80194836E - 03$	$0.55633232 + i 0.31861054E - 01$
0.04	$0.53544789 + i 0.83086302E - 03$	$0.55632193 + i 0.31783538E - 01$
0.06	$0.53529920 + i 0.88077867E - 03$	$0.55630298 + i 0.31657046E - 01$
0.08	$0.53509155 + i 0.95431018E - 03$	$0.55627306 + i 0.31485550E - 01$
0.10	$0.53482599 + i 0.10551172E - 02$	$0.55622889 + i 0.31274460E - 01$

TAB. 2.3 : Valeurs propres en fonction de  $\tilde{Q}$  pour le mode interaction fluide/structure sinueux et variquex. Les autres paramètres sont :  $Re = 10000$ ,  $Wo = 10$ ,  $V_R = 1$  et  $B_* = 4$ ,  $\alpha = 1$ .

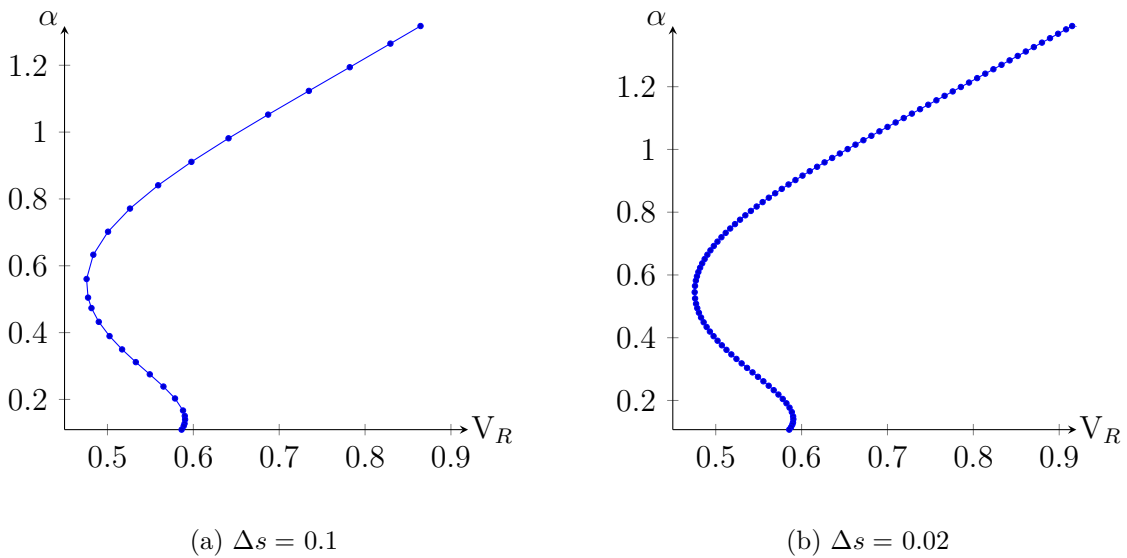


FIG. 2.5 : Exemple de courbe neutre pour un pas de 0.1 et de 0.02.

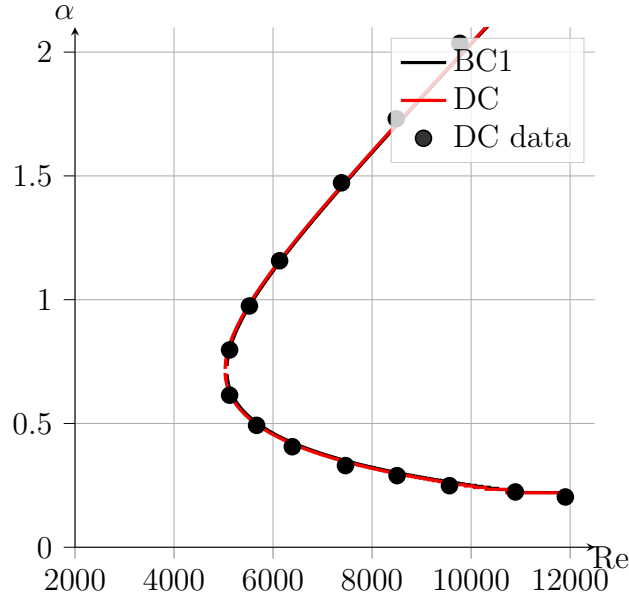


FIG. 2.6 : Courbes neutres. Configuration sinueuse. Validation pour le problème d'interaction fluide–structure en écoulement permanent  $K_* = 10^7$ ,  $B_* = 4K_*$ ,  $d_* = 0$  et  $\Gamma = 2$ . *DC data* : résultats extraits de [16]. *BC1* : la formulation adoptée dans la présente étude pour le problème d'interaction fluide–structure. *DC* : la pression à la paroi est exprimée comme dans [16] et on néglige la contrainte visqueuse aux parois.

On remarque que ce pas n'est pas suffisant dans la partie proche du point critique. En revanche, un pas de  $\Delta s = 0.02$  est illustré sur la figure (2.5b). Celui-ci est suffisamment petit pour avoir une courbe continue, en particulier dans la partie critique. Par conséquent, un pas maximal de  $\Delta s = 0.02$  est choisi. Par la suite, nous utilisons un pas adaptatif avec un pas maximal de 0.02 et un paramètre  $a = 2$ .

Maintenant que la méthode de continuation a été testée et validée, on s'intéresse au terme de couplage entre la paroi et le fluide. Plusieurs formulations du terme de couplage ont été comparées à la formulation adoptée dans cette étude.

D'abord, on compare nos résultats à ceux de Davies et Carpenter [16]. Pour cela, l'adimensionnement de [16] est utilisé. La figure (2.6) montre la courbe neutre du mode d'interaction fluide/structure sinueux. Les courbes se superposent parfaitement.

L'approximation de Davies et Carpenter [16] est alors bien adaptée. En effet, les termes visqueux sont négligés en accord avec l'hypothèse que les contraintes entraînant le mouvement de la paroi peuvent être approximées à l'aide uniquement de la pression issue d'un écoulement de fluide parfait.

D'autres formulations ont été implémentées, les figures (2.7) comparent ces formulations à celle développé dans cette étude. Par la suite, on utilisera l'adimensionnement basé sur la vitesse réduite. La méthode de Gaus et Bottaro [42] (BC3) est inadéquate pour ce cas de figure. En effet, ils ont utilisé cette approximation dans le cadre de perturbations transversales ( $\alpha = 0$ ). Effectivement, si  $\alpha = 0$  le terme  $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ . Ce

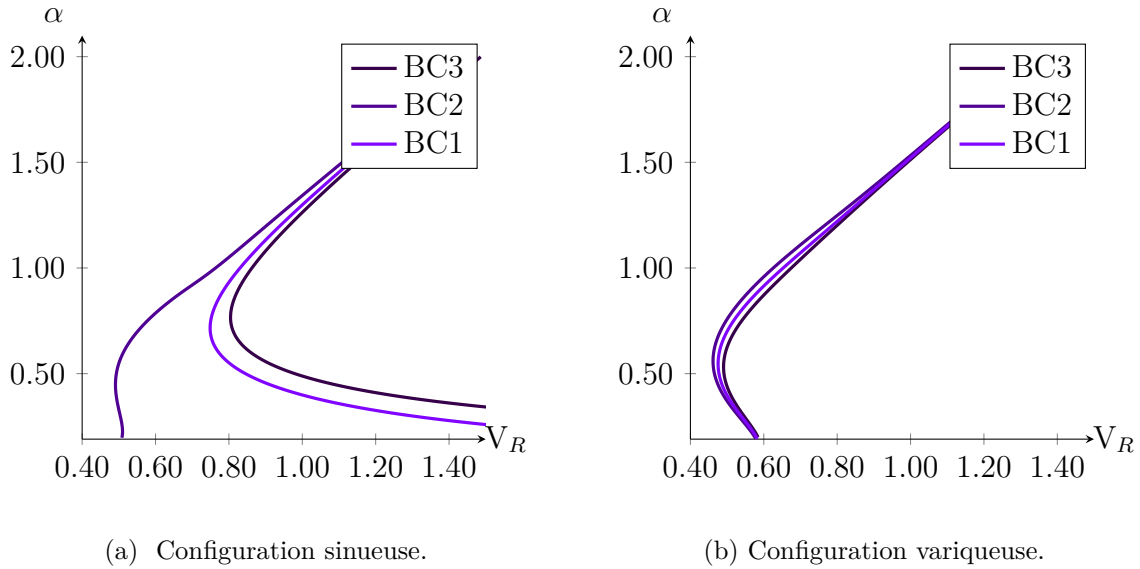


FIG. 2.7 : Courbes neutres avec  $Re = 10000$ ,  $B_* = 4$ ,  $d_* = 0$ ,  $T_* = 0$  et  $\Gamma = 2$ . Validation pour le problème d’interaction fluide–structure en écoulement permanent.  $BC1$  : formulation adoptée dans la présente étude pour le problème d’interaction fluide–structure.  $BC2$  : formulation de Nagata et Cole [68].  $BC3$  : formulation de Guaus et Bottaro [42].

qui simplifie l’expression de la contrainte totale. La courbe neutre calculée avec cette méthode confirme cette prédiction, du fait que la forme est complètement différente et que l’erreur sur le  $V_R$  critique est très grande. Nagata et Cole [68], quant à eux, ont utilisé une expression (BC2) hybride, à mi-chemin entre la contrainte totale et l’approximation de Davies et Carpenter [16], puisqu’ils ont négligé le terme de contrainte moyenne dû à la variation de la normale de l’interface  $(\mu \frac{\partial U_b}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x})$  mais ont gardé le terme des contraintes visqueuses. Les résultats montrent que la courbe neutre de Nagata et Cole [68] est légèrement plus stable que les autres méthodes étudiées. Il en résulte que le terme de contrainte dû à la variation de la normale de la paroi a un effet déstabilisant sur le mode interaction fluide–structure sinueux quelle que soit la raideur étudiée.

Pour conclure cette partie sur le terme de couplage, on rappelle que la formulation de Davies et Carpenter [16] n’est pas définie pour le cas de symétrie variqueuse. Or, le mode d’interaction fluide–structure variqueux est généralement plus instable que le sinueux. De plus, le mode variqueux est instable aux petits nombres d’onde  $\alpha$ . Cet effet a été observé par Domaradzki et Metcalfe [20] dans le cas d’une couche limite avec une paroi souple.

Selon eux, cela est dû aux effets inertiels. En effet, le mode variqueux fait se déplacer de grandes quantités de fluide aux très grandes longueurs d’ondes. Pour s’en assurer, les auteurs ont apporté une modification au modèle de paroi. L’idée est d’ajouter de la

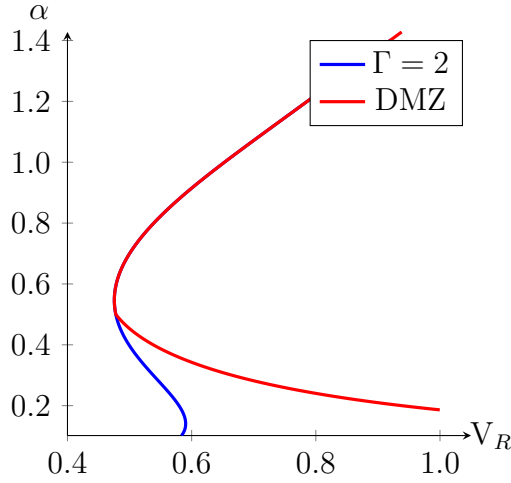


FIG. 2.8 : Courbes neutres du mode interaction fluide/structure variqueux avec  $Re = 10000$ ,  $B_\star = 4$ ,  $d_\star = 0$  et  $T_\star = 0$ . DMZ : la formulation de masse ajoutée de Domaradzki *et al.* [20].

masse aux parois pour des petits  $\alpha$ . Dans la figure (2.8), on compare les courbes neutres du mode interaction fluide–structure variqueux pour une masse de paroi constante ( $\Gamma = 2$ ) et le modèle de masse ajoutée (2.66) :

$$\begin{cases} \Gamma = 2 & \text{si } \alpha > 0.5, \\ \Gamma = 0.5\alpha^{-2} & \text{si } \alpha \leq 0.5. \end{cases} \quad (2.66)$$

La courbe neutre du modèle de masse ajoutée confirme l’hypothèse de Domaradzki et Metcalfe [20]. Effectivement, le mode variqueux n’est plus instable aux petits nombres d’ondes. Par la suite, on utilisera une masse  $\Gamma = 2$  et une tension  $T = 0$ . Nous considérons également un modèle sans masse ajoutée.

Pour conclure cette section, on s’intéresse aux performances de la méthode numérique développée. En effet, trois formulations du problème aux valeurs propres généralisé ont été implémentées, la formulation complète UVP (vitesse, pression) avec la pression et les vitesses normale et longitudinale. La formulation UV (vitesse), où la pression a été éliminée en l’exprimant en fonction des vitesses. Enfin, la formulation (V) où la vitesse longitudinale est également éliminée en utilisant l’équation de continuité.

La figure (2.9) illustre le temps de calcul pour la méthode d’Arnoldi en fonction du nombre d’harmoniques de Floquet  $N_f$  pour différentes formulations. Nous comparons tout d’abord les temps de calculs de la résolution sur la hauteur du canal et sur la demi-hauteur (2.9a). Cela est réalisé en forçant la symétrie du problème aux valeurs propres. La version symétrique (S) ne dépasse pas les 15s même pour des nombres de modes de Floquet de 100. En revanche, la version complète (C) est près de 13 fois plus longue pour des grands nombres de modes Floquet.

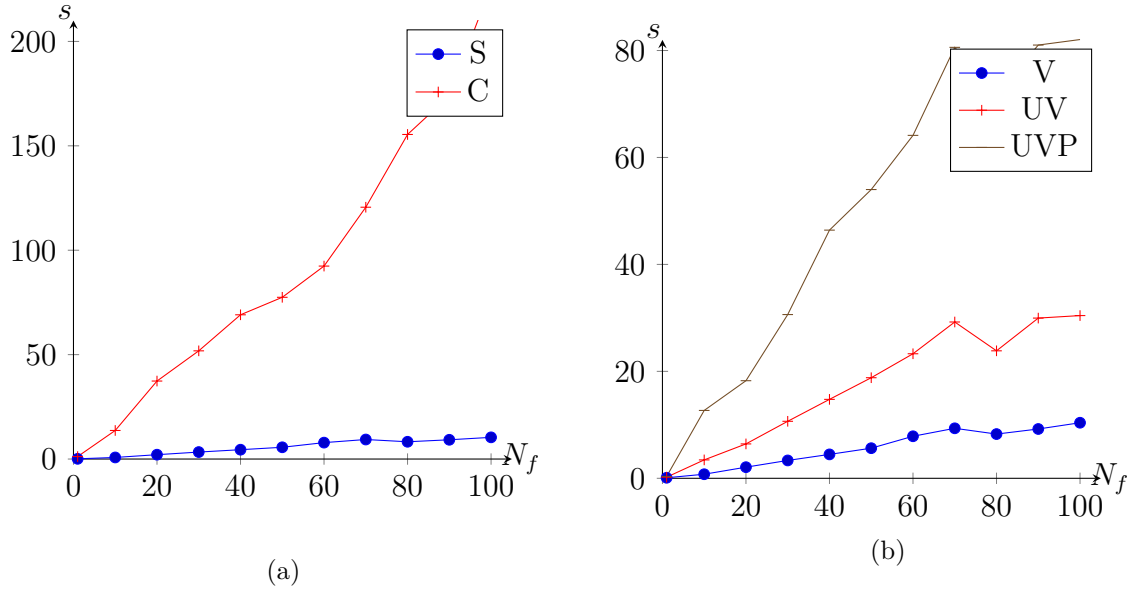


FIG. 2.9 : Temps de calcul de spectre en fonction du nombre d'harmoniques de Floquet  $N_f$ . Points de Tchebychev  $N_y = 128$ . Taille du sous espace de Krylov  $N_{cv} = 100$ . Nombre de valeurs propres  $N_{ev} = 40$ .

Les formulations V, UV et UVP sont présentées sur la figure (2.9b). Pour des raisons de simplicité, on montre uniquement les résultats associés aux versions symétriques de ces formulations. La formulation V est 5 fois plus rapide que la formulation UVP pour des grands nombres de modes de Floquet et, évidemment, l'avantage est d'autant plus important que  $N_f$  est grand. Cela permet d'effectuer des calculs avec des amplitudes de pulsations  $\tilde{Q}$  très grandes. La formulation intermédiaire UV est 2 fois plus lente que la formulation V. La méthode avec uniquement la vitesse normale comme composante permet ainsi d'explorer l'espace des paramètres avec des temps de calcul raisonnables.

## Chapitre 3

# Revisiting the linear instabilities of plane channel flow between compliant walls

Après avoir décrit les méthodes mathématiques et leur implémentation numérique, nous allons maintenant présenter les résultats obtenus. Ce premier chapitre de résultats est consacré aux configurations stationnaires : un écoulement de Poiseuille plan en interaction avec des parois flexibles. Comme cela a été rappelé dans le chapitre 1 de cette thèse, cette configuration a déjà été bien étudiée par d'autres auteurs. Nous avons néanmoins commencé notre travail de recherche par l'étude des cas stationnaires, d'abord pour nous familiariser avec les concepts d'interaction fluide–structure et aussi pour valider nos différentes méthodes. Il est alors apparu que beaucoup de questions restaient en suspens, ou que les résultats décrits dans la littérature n'étaient pas entièrement satisfaisants ou complets.

Ainsi nous avons entrepris l'étude détaillée des modes de Tollmien–Schlichting (TS) et des modes d'interaction fluide–structure (à la fois les modes de flottement TWF et les modes de divergence DIV) pour le modèle classique de paroi flexible, décrit par Davies et Carpenter [16]. Notre attention s'est portée particulièrement sur les équations responsables du couplage entre l'écoulement et la paroi. En effet, de nombreuses solutions différentes sont proposées dans la littérature qui ont, pour la plupart, des avantages et des inconvénients. Après avoir testé différentes approches, nous avons retenu les équations qui prennent en compte toutes les forces hydrodynamiques, sans aucune approximation supplémentaire.

Cette méthode nous a aussi permis d'étudier à la fois les modes de symétrie sinueuse et ceux de symétrie variqueuse. Nous avons alors trouvé que, contrairement à ce qui est couramment admis, ce sont les modes variqueux qui présentent le taux de croissance le plus élevé dans la plupart des cas.

Une analyse fine des transferts d'énergie a aussi permis de mieux comprendre les mécanismes responsables de l'instabilité des différents modes, et ainsi de contribuer à leur classification parmi quelques grandes familles de modes.

Cette étude a également été l'occasion de faire un travail approfondi sur le choix des

paramètres sans dimensions. En effet, vu le nombre de paramètres qui entrent en jeu, beaucoup d'options sont possibles, mais elles ne sont pas toutes adaptées pour décrire pertinemment ces configurations. Finalement, nous avons adopté l'approche décrite par de Langre [57] dans laquelle le principal paramètre de contrôle adimensionnel est la vitesse réduite  $V_R$ , définie comme le rapport entre un temps caractéristique de la paroi et un temps caractéristique de l'écoulement.

L'ensemble des résultats concernant les configurations stationnaires, a été soumis comme article à *Physical Review Fluids*. Nous reproduisons ci-après la version telle qu'elle est en cours de révision.

# Revisiting the linear instabilities of plane channel flow between compliant walls

Smail LEBBAL, Frédéric ALIZARD, Benoît PIER

*Laboratoire de mécanique des fluides et d'acoustique,  
CNRS — École centrale de Lyon — Université de Lyon 1 — INSA  
Lyon,  
36 avenue Guy-de-Collongue, 69134 Écully, France.*

## Abstract

The present investigation revisits the linear stability of Poiseuille channel flow interacting with compliant walls. The results obtained include the dynamics of Tollmien–Schlichting (TS) modes as well as flow-induced surface-instability (FSI) modes, in the form of both traveling-wave flutter (TWF) and divergence (DIV) modes. The compliant wall model consists of a spring-backed plate with a viscous substrate deformable in the vertical direction (Davies & Carpenter, *J. Fluid Mech.* **352**, 205–243, 1997). At the interface between the fluid and the walls, the continuity of velocities and stresses, including both viscous and pressure contributions, are taken into account. The FSI modes (both varicose and sinuous) and TS modes are then reinterpreted in the light of two nondimensional control parameters : the Reynolds number ( $Re$ ) and reduced velocity ( $V_R$ ) that represents the response of the flexible wall to hydrodynamic loading (De Langre, *La Houille Blanche*, **3/4**, 14–18, 2000). The characteristics of TS and FSI modes are systematically investigated over a large control-parameter space, including wall dissipation, spring stiffness and flexural rigidity. We observe that TWF modes are primarily governed by  $V_R$  and largely independent of the Reynolds number. It is found that the instability is generally dominated by the TWF mode of varicose symmetry. DIV and TS modes are both affected by  $V_R$  and  $Re$ , confirming that these modes belong to a different class. The onset of the DIV mode is primarily observed for the sinuous motion, when increasing the dissipation. To provide physical insight into the mechanisms driving these instabilities, the perturbative energy equations for both FSI and TS modes are analyzed for a wide range of wall parameters and wavenumbers.



### 3.1 Introduction

The constant scientific interest to extend the laminar regime for industrial applications has led to the development of compliant walls since the beginning of the 20th century. In particular, researchers focused on finding optimum wall properties aiming to delay the laminar–turbulent transition.

In the biological context, interactions between fluid and elastic forces associated with a deformable channel or tube lead to a variety of physiologically significant phenomena. Especially, deformability plays a prominent role in blood flow as well as peristaltic transport, for example through the intestines and the urogenital tract (see [41, 59] for a review).

Such interest arose from the so-called Gray’s paradox [39]. Indeed, Gray showed that to overcome the friction drag of a swimming dolphin subjected to a turbulent flow around its body, the muscles have to be capable of generating a power at least seven times greater than that of other kinds of mammalian muscle. Hence, Gray has suggested that the dolphin skin is able to delay the laminar–turbulent transition. In the laminar regime, indeed, the power developed by muscles would still conform to that of other types of mammalian muscle.

Kramer [52] in the 50’s developed a compliant coating trying to mimic the dolphin’s skin. The author claimed that he was able to reduce the drag of a torpedo-like model by as much as 60%. Later, the conclusions of both Gray’s hypotheses and Kramer’s experiments were in part questioned. Russian and American experiments since the 80’s failed to reproduce results provided by Kramer. In addition, scientists observed that the lower turbulence level around the dolphin swimming body could also be attributed to local pressure gradients. It was also suggested that a reduction in the friction drag may result from the fact that the dolphin leaps out of the water for breathing (see [8], [27] and [30] for reviews).

However, Gaster’s experiments in 1988 [34] gave new hope in using compliant walls to delay laminar–turbulent transition. He showed that the growth rates of artificially generated Tollmien–Schlichting (TS) waves are inhibited when using appropriate coatings. These experiments have given a strong impulse to theoretical developments aiming to tackle this problem.

A major difficulty arises from the design of compliant wall models that are able to couple fluid and solid dynamics. These models may be separated into two categories : surface-based or volume-based (see [30, 55] for a review). The first class of models is less computationally demanding and considers an infinitely thin wall interacting with the fluid through an interface condition. In this case, the wall is defined as a thin plate mounted on springs and dampers. The wall parameters are classically the spring stiffness, the tension, the bending stiffness, its mass and damping coefficient.

For the second family of models (*i.e.* volume-based), the wall material is fully described to include single- or multi-layer coatings (see Patne & Shankar[71] and Kumaran[55] for recent reviews). However, Duncan [22] has shown that a surface model can be used to quantitatively describe many aspects of instabilities and wave propagation on the surface of an elastic and incompressible coating.

Here, the surface-based approach is adopted. Within this approach and following the lead of Benjamin [3, 2, 4] which relies on the theory developed by Miles for water waves [67], Carpenter & Garrad [11, 12] focused on the stability of boundary-layer flows over Kramer-type compliant walls. They provided some confirmation of the transition-delaying potential of compliant coatings. According to Carpenter & Garrad [11, 12], instability modes can be classified into two categories : fluid-based (TS mode) and solid-based (flow-induced surface instabilities, or fluid–structure instabilities, referenced as FSI hereafter). The last category includes both the traveling-wave flutter (TWF) modes and the (almost static) divergence (DIV) modes. For the divergence mode, scientists are still arguing about its precise nature. It is either interpreted as an absolute instability [93] or it may also result from a modal instability with a nearly vanishing phase velocity when increasing the wall dissipation [64].

While the surface-based model has been extensively used for external flows such as boundary layers, very few studies have been conducted on internal flows (see for instance the recent review of Kumaran [55]). Among them, Davies & Carpenter [16, 17] investigated linear instability waves that emerge when a viscous incompressible flow interacts with infinite or finite spring-backed plates in a plane channel. Considering only sinuous perturbations, Davies & Carpenter [16] derived a theory for the motion of the walls and obtained neutral stability curves for both FSI and TS modes and some values of flexural rigidity of the plate, spring stiffness and damping. The same year, these authors investigated the dynamics of TS waves that propagate over a compliant panel of finite length, using linearized numerical simulations [17]. For low external disturbances, Davies & Carpenter [17] have then suggested that the use of multiple-panel compliant walls could maintain the laminar flow regime at all Reynolds numbers in a plane channel flow. This seminal work was also limited to the sinuous symmetry. These prior analyses have been extended to the varicose motion of the walls for the same case with infinite compliant walls by Nagata [68]. Despite the fact that this investigation focused only on a narrow region of the parameter space to make definite statements, the authors found that the varicose TWF mode can be amplified prior to its sinuous counterpart. A similar analysis has been recently conducted to address the effect of pulsatile Poiseuille flow through a compliant channel [91] for modal and nonmodal instabilities. Albeit the latter extended results discussed above to pulsatile flows and short-time perturbations, it has not brought new elements for the asymptotic regime of the steady flow case. Finally, Gajjar & Sibanda [33] investigated a viscous flow in a channel in which only one wall is compliant. The same spring-plate model is used by the authors and the nonlinear evolution of disturbances have been obtained in the limit of large Reynolds numbers within the nonlinear critical layer theory.

The aforementioned analyses address the amplification of FSI and TS modes for compliant channel flows but it should be noted that the models used above have some limitations. First, these analyses use the Reynolds number as a control parameter for both FSI and TS modes. This approach is not entirely satisfactory because a change in the Reynolds number also leads to a change in the compliant wall characteristics. Therefore, the reduced velocity, defined as the ratio between the characteristic time

of the solid and that of the fluid has been advocated by de Langre [58] to measure the strength of the fluid–structure interactions independently of the Reynolds number. Secondly, a rigorous treatment of the pressure at the wall is key for a complete analysis of fluid–structure interaction problems. On one hand, a consistent formulation has indeed been derived by Davies & Carpenter [16] under the form of an Orr–Sommerfeld-like equation accounting for compliant walls. However, this formulation only applies to perturbations of sinuous symmetry. On the other hand, Nagata [68] and Tsigklifis & Lucey [91] have used a primitive formulation combined with a spectral collocation method without any specific treatments for the pressure and the additional boundary conditions arising from the wall equation. In this case, spurious eigenvalues are likely to occur [65]. Thirdly, as suggested by Nagata [68], the varicose symmetry is as important as the sinuous one for FSI modes. Nevertheless, as far as we know, existing studies of varicose modes only explore a narrow parameter range. As a consequence, the potential gain in using compliant walls to delay laminar/turbulent transition in a plane channel flow could be challenged significantly.

The purpose of the present paper is therefore to revisit the instability modes that emerge when a viscous flow interacts with two parallel spring-backed plates and hope to address the inherent limitations mentioned above. Thus, we reconsider this problem by using the reduced velocity to describe FSI modes. A general formulation is implemented, free of spurious modes, suitable for both sinuous and varicose symmetries, and taking into account the exact hydrodynamic forces acting on the walls. A wide range of wall parameters has been explored to highlight their influence onto both FSI and TS modes. Only two-dimensional perturbations are considered since the Squire theorem holds for compliant walls [77].

The paper is organized as follows. Section 2 presents the model and governing equations used for the fluid–structure interaction problem. Especially, the dimensionless parameters and linearized equations will be introduced. After having presented the numerical methods in section 3, section 4 provides some physical insight into the influence of wall parameters onto FSI and TS modes for both the sinuous and varicose symmetries. For that purpose, kinetic energy budgets are also computed. Conclusions and prospects are given in the last section.

## 3.2 Problem formulation

### 3.2.1 Fluid–structure interaction model and interface conditions

In the entire paper, we restrict our analysis to the two-dimensional problem. Using a Cartesian coordinate system  $(x, y)$  with unit vectors  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ , we consider an incompressible, Newtonian fluid with dynamic viscosity  $\mu$  and density  $\rho$  between two spring-backed deformable plates located at  $y = \zeta^\pm(x, t)$ , which are allowed to move only in the  $y$ -direction. A schematic diagram of the configuration is shown in figure 3.1.

### 3.2 Problem formulation

---

The flow between the walls is governed by the Navier–Stokes equations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

where  $\mathbf{u} = (u, v)$  and  $p$  represent the velocity and pressure fields, and  $u$  (resp.  $v$ ) denotes the streamwise (resp. wall-normal) velocity component, and  $\nu \equiv \mu/\rho$  is the kinematic viscosity of the fluid.

The movement of the flexible plates obeys the following equations, derived through Newton's second law :

$$m \frac{\partial^2 \zeta^\pm}{\partial t^2} + d \frac{\partial \zeta^\pm}{\partial t} + \left( B \frac{\partial^4}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K \right) \zeta^\pm = f^\pm. \quad (3.2)$$

Here,  $m$  denotes the mass per unit area of the plates,  $d$  their damping coefficient,  $B$  the flexural rigidity,  $T$  the wall tension,  $K$  the spring stiffness and  $f^\pm$  represents the  $y$ -component of the forces acting on the plates. These forces are obtained as

$$f^\pm = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{f}^\pm \quad \text{with} \quad \mathbf{f}^\pm = \left( \bar{\bar{\tau}}^\pm - \delta p^\pm \mathbf{I} \right) \cdot \mathbf{n}^\pm. \quad (3.3)$$

Here  $\bar{\bar{\tau}}^\pm$  denotes the viscous stress tensor at the walls and  $\delta p^\pm$  the transmural surface pressure, *i.e.*, the difference between the surface pressure inside and outside of the channel, and  $\mathbf{n}^\pm$  is the unit vector normal to the walls pointing towards the fluid.

The viscous stress tensor at the walls has the following expression :

$$\bar{\bar{\tau}}^\pm = \left( \begin{array}{cc} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right) \Bigg|_{y=\zeta^\pm}, \quad (3.4)$$

and the normal vectors to the interface  $\mathbf{n}^\pm = (n_x^\pm, n_y^\pm)$  are obtained as

$$n_x^\pm = \pm \frac{\partial \zeta^\pm}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial \zeta^\pm}{\partial x} \right)^2}} \quad \text{and} \quad n_y^\pm = \mp \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial \zeta^\pm}{\partial x} \right)^2}}. \quad (3.5)$$

Combining (3.3,3.4,3.5) yields the  $y$ -component of the hydrodynamic forces acting on the compliant walls

$$f^\pm = \left[ \pm \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\zeta^\pm} + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{y=\zeta^\pm} \right) \zeta_x^\pm \mp 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=\zeta^\pm} \pm \delta p^\pm \right] / \sqrt{1 + \left( \frac{\partial \zeta^\pm}{\partial x} \right)^2}, \quad (3.6)$$

which governs the wall dynamics (3.2) since the wall-movement is constrained to occur only in the  $y$ -direction. Note that in this approach there are no hydrodynamic forces acting on the plate from the outside, except a pressure.

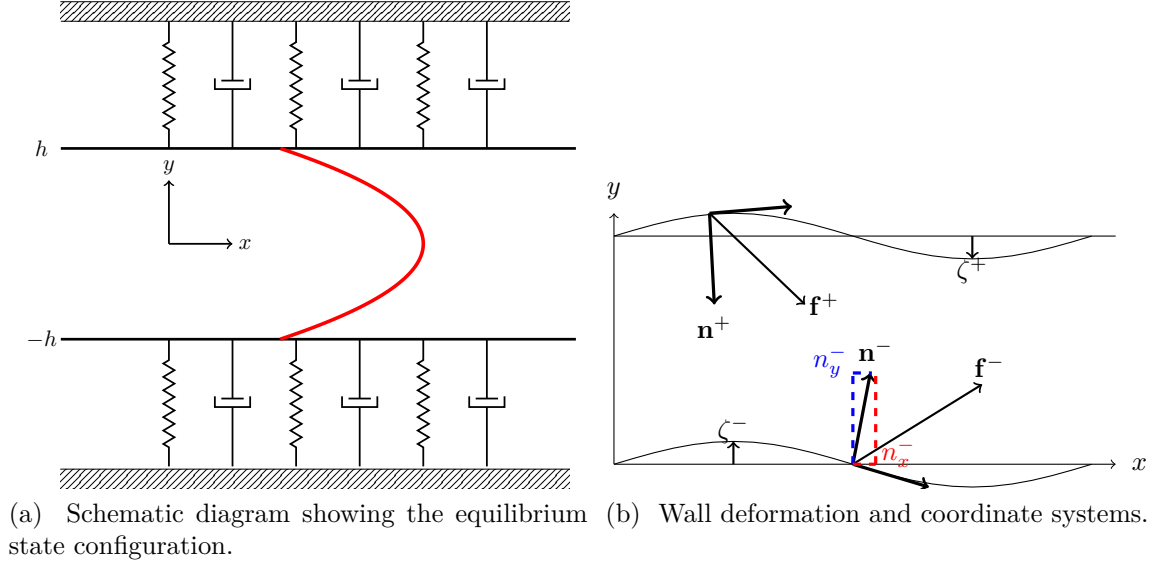


FIG. 3.1 : Channel flow with infinite spring-backed flexible walls.

Finally, the no-slip conditions on both walls lead to the kinematic conditions prevailing at the moving boundaries :

$$u = 0 \quad \text{and} \quad v = \frac{\partial \zeta^\pm}{\partial t} \quad \text{for} \quad y = \zeta^\pm. \quad (3.7)$$

Thus, the fluid–structure interaction problem is completely determined by the coupling of the fluid equations (3.1), the wall equations (3.2) and boundary conditions (3.7).

### 3.2.2 Dimensionless control parameters

The present compliant-channel flow configuration is characterized by 9 dimensional parameters : the volumetric flow rate  $[Q] = \text{m}^3\text{s}^{-1}$ , the half height  $[h] = \text{m}$  of the channel, the fluid density  $[\rho] = \text{kg m}^{-3}$ , the kinematic viscosity  $[\nu] = \text{m}^2\text{s}^{-1}$ , the mass of the plate per unit area  $[m] = \text{kg m}^{-2}$ , the damping coefficient of the wall  $[d] = \text{kg m}^{-2}\text{s}^{-1}$ , the bending stiffness of the plate  $[B] = \text{kg m}^2\text{s}^{-2}$ , the wall tension  $[T] = \text{kg s}^{-2}$  and the spring stiffness  $[K] = \text{kg m}^{-2}\text{s}^{-2}$ . Hence, this system may be described by 6 dimensionless parameters. A useful parameter to characterize fluid–structure interaction phenomena is the reduced flow velocity  $V_R$ , defined[58] as the ratio of a characteristic time of the structure to a characteristic time of the flow. Using time scales based on spring stiffness

$$\tau_K = \sqrt{\frac{m}{K}}$$

and flow advection

$$\tau_Q = \frac{4h^2}{Q},$$

### 3.2 Problem formulation

---

the reduced velocity is obtained as  $V_R = \tau_K/\tau_Q$ . Other choices based on different characteristic times would be possible. For  $V_R \ll 1$ , the influence of the wall compliance is negligible, while  $V_R \gg 1$  corresponds to very soft walls. Hence, the resulting 6 nondimensional control parameters are

$$\begin{cases} Re = \frac{Q}{\nu}, & V_R = \frac{Q}{4h^2} \sqrt{\frac{m}{K}}, & \Gamma = \frac{m}{\rho h}, \\ d_* = \frac{d}{\sqrt{mK}}, & B_* = \frac{B}{Kh^4}, & T_* = \frac{T}{h^2 K}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Here  $Re$  is the Reynolds number based on channel diameter and average flow velocity, and  $\Gamma$  is the mass ratio between the compliant walls and the fluid. The three non-dimensional wall parameters  $d_*$ ,  $B_*$  and  $T_*$  are all relative to the spring stiffness  $K$ , which serves as reference for the reduced velocity  $V_R$ . One may notice that in several previous studies [16, 68, 42], fluid quantities are used to build nondimensional parameters for the wall. As underlined by Domaradzki & Metcalfe [20], this may correspond to nonphysical situations where at each Reynolds number a different compliant wall and a different fluid are considered. In the present work, the Reynolds number may be modified using  $\nu$  and/or  $Q$  without changing the wall properties. Hereafter, the mass ratio is kept constant at  $\Gamma = 2$  and we only consider walls without tension  $T = 0$ . We fix the three dimensional parameters at  $\rho = 1$ ,  $h = 1$  and  $\tau_Q = 1$ .

#### 3.2.3 Formulation of the linearized model

This entire study considers the dynamics of small-amplitude perturbations, obeying the linearized version of the governing equations around a steady base state. The unperturbed base configuration thus consists of a parabolic Poiseuille flow  $\mathbf{U}(y) = (U_b(y), 0)$  between parallel walls located at  $y = \pm h$  (see figure 3.1a). This flow is driven by a pressure  $P_b(x) = P_0 - Gx$  of constant streamwise gradient, and we assume a pressure outside the channel membranes always equal to  $P_b(x)$ , so as to equilibrate the forces acting on both sides of the membranes for unperturbed conditions.

The total flow fields are then decomposed as  $\mathbf{u}(x, y, t) = \mathbf{U}(y) + \mathbf{u}'(x, y, t)$  and  $p(x, y, t) = P_b(x) + p'(x, y, t)$ . The wall displacement is written as  $\zeta^\pm(x, t) = \pm h + \eta^\pm(x, t)$ .

Considering that the perturbation components  $\mathbf{u}'$ ,  $p'$  and  $\eta^\pm$  are of small amplitude, the governing equations may be linearized about the base state.

Since the base state is steady and homogenous in the streamwise direction, the perturbation to the velocity fields, pressure fields and normal displacements are expressed in normal-mode form as :

$$\mathbf{u}'(x, y, t) = \hat{\mathbf{u}}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)}, \quad p'(x, y, t) = \hat{p}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} \quad \text{and} \quad \eta^\pm(x, t) = \hat{\eta}^\pm e^{i(\alpha x - \omega t)}, \quad (3.9)$$

with  $\alpha$  the streamwise wavenumber and  $\omega$  the frequency. Hereafter, we adopt a temporal view point where  $\alpha \in \mathbb{R}$  and  $\omega = \omega_r + i\omega_i \in \mathbb{C}$ , with  $\omega_i$  the temporal amplification

rate of the mode and  $\omega_r$  its circular frequency. Substitution of this decomposition into the Navier–Stokes equations and linearization about the base flow leads to :

$$\begin{cases} -i\omega\rho\hat{u} + \rho i\alpha\hat{u}U_b + \rho\hat{v}\frac{dU_b}{dy} = -i\alpha\hat{p} + \mu\left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right)\hat{u}, \\ -i\omega\rho\hat{v} + \rho i\alpha\hat{v}U_b = -\frac{d\hat{p}}{dy} + \mu\left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right)\hat{v}, \end{cases} \quad (3.10)$$

together with the divergence-free condition :

$$i\alpha\hat{u} + \frac{d\hat{v}}{dy} = 0. \quad (3.11)$$

Linearization of the wall equations (3.2,3.6) yields

$$\begin{cases} -\omega^2 m\hat{\eta}^+ - i\omega d\hat{\eta}^+ + (B\alpha^4 + T\alpha^2 + K)\hat{\eta}^+ = +\hat{p}(h) - \mu\left(i\alpha\frac{dU_b}{dy}\Big|_h\hat{\eta}^+\right) - 2\mu\frac{d\hat{v}}{dy}\Big|_{+h}, \\ -\omega^2 m\hat{\eta}^- - i\omega d\hat{\eta}^- + (B\alpha^4 + T\alpha^2 + K)\hat{\eta}^- = -\hat{p}(-h) - \mu\left(i\alpha\frac{dU_b}{dy}\Big|_{-h}\hat{\eta}^-\right) + 2\mu\frac{d\hat{v}}{dy}\Big|_{-h}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Following Shankar & Kumaran [84], the boundary conditions at the perturbed interface are implemented using Taylor series about the base state at  $y = \pm h$ . At linear order, the flow velocity at the walls reads :

$$\mathbf{u}(x, y = \zeta^\pm, t) = \mathbf{u}'(x, y = \pm h, t) + \eta^\pm \frac{dU_b}{dy}\Big|_{\pm h} \mathbf{e}_x. \quad (3.13)$$

Thus, the kinematic boundary conditions (3.7) become

$$\hat{u}(\pm h) + \hat{\eta}^\pm \frac{dU_b}{dy}\Big|_{\pm h} = 0 \quad \text{and} \quad \hat{v}(\pm h) = -i\omega\hat{\eta}^\pm. \quad (3.14)$$

Then, by using (3.14) and the divergence-free condition, the right-hand-side of (3.12) can be further simplified, leading to :

$$\begin{cases} -\omega^2 m\hat{\eta}^+ - i\omega d\hat{\eta}^+ + (B\alpha^4 + T\alpha^2 + K)\hat{\eta}^+ = +\hat{p}(h) - \mu\frac{d\hat{v}}{dy}\Big|_h, \\ -\omega^2 m\hat{\eta}^- - i\omega d\hat{\eta}^- + (B\alpha^4 + T\alpha^2 + K)\hat{\eta}^- = -\hat{p}(-h) + \mu\frac{d\hat{v}}{dy}\Big|_{-h}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Equations (3.10), (3.11) and (3.15) completely govern the dynamics of small-amplitude perturbations and take into account the linearized fluid–structure coupling as derived from the exact hydrodynamic forces.

### 3.3 Numerical methods

In this work, we follow the general framework described by Manning *et al.* [65] for avoiding spurious eigenvalues. First of all, we rewrite (3.15) using velocity components at the boundaries. For illustration purposes, only the upper wall is here considered.

Using the condition  $-i\omega\hat{\eta}^+ = \hat{v}(h)$ , we obtain

$$-i\omega\hat{v}(h) = W_1\hat{v}(h) + W_2\hat{u}(h) + \frac{1}{m}p(h), \quad (3.16)$$

with

$$W_1 = -\frac{d}{m} - 2\frac{\mu}{m}\frac{d}{dy} \quad \text{and} \quad W_2 = \frac{(B\alpha^4 + T\alpha^2 + K)}{m\frac{dU_b}{dy}\Big|_h} + \frac{\mu}{m}i\alpha.$$

The kinematic condition  $\hat{u}(h) + \hat{\eta}^+\frac{dU_b}{dy}\Big|_h = 0$  is recast as

$$-i\omega\hat{u}(h) + \hat{v}(h)\frac{dU_b}{dy}\Big|_h = 0. \quad (3.17)$$

The velocity components and pressure are discretized in the  $y$ -direction using a Chebyshev collocation method. To avoid spurious pressure modes, we consider the so-called  $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$  approximation in which the pressure is approximated with a polynomial of degree  $N - 2$  while the velocity is discretized with a polynomial of degree  $N$  [73]. From this point, we note the vectors containing the unknowns:  $\mathbf{V} =$

$\left( \overbrace{\hat{u}_0, \hat{u}_N, \hat{v}_0, \hat{v}_N}^{\mathbf{V}_{\text{BC}}}, \overbrace{\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{N-1}, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{N-1}}^{\mathbf{V}_{\text{I}}} \right)$  and  $\mathbf{P}_{\text{I}} = (\hat{p}_1 \dots \hat{p}_{N-1})$ , where we separate the boundary values ( $\mathbf{V}_{\text{BC}}$ ) from the interior points ( $\mathbf{V}_{\text{I}}$ ). Hence, the discretized counterpart of the previous continuous model (3.10, 3.15, 3.14) reads :

$$\underbrace{\left[ \begin{array}{ccc} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \end{array} \right]}_{\substack{4 \\ 2(N-2) \\ N-2}} \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \mathbf{V}_{\text{BC}} \\ \mathbf{V}_{\text{I}} \\ \mathbf{P}_{\text{I}} \end{array} \right]}_{\substack{4 \\ 2(N-2) \\ N-2}} = i\omega \underbrace{\left[ \begin{array}{ccc} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]}_{\substack{4 \\ 2(N-2) \\ N-2}} \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \mathbf{V}_{\text{BC}} \\ \mathbf{V}_{\text{I}} \\ \mathbf{P}_{\text{I}} \end{array} \right]}_{\substack{4 \\ 2(N-2) \\ N-2}}, \quad (3.18)$$

where the divergence-free condition is imposed on the interior points and  $\mathbf{I}$  denotes the identity matrix. The derivative matrices based on Chebyshev polynomials are either expressed on the interior points only (for the pressure) or all the nodes (for the velocity components) [73]. Note that the boundary equations involve the pressure at  $y = \pm h$  : these values are readily obtained by polynomial interpolation with spectral accuracy, corresponding to matrix  $\mathbf{A}_3$ .



The discrete counterpart of the divergence-free condition reads  $\mathbf{C}_2 \mathbf{V}_I = \mathbf{0}$ . Hence, from

$$\mathbf{0} = \mathbf{C}_2(i\omega \mathbf{V}_I) = \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_1 \mathbf{V}_{BC} + \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{V}_I + \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_3 \mathbf{P}_I,$$

the vector  $\mathbf{P}_I$  can be expressed as a function of  $\mathbf{V}_I$  and  $\mathbf{V}_{BC}$  :

$$\mathbf{P}_I = - \overbrace{(\mathbf{C}_2 \mathbf{B}_3)^{-1} \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_1}^{\mathbf{M}_{BC}} \mathbf{V}_{BC} - \overbrace{(\mathbf{C}_2 \mathbf{B}_3)^{-1} \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_2}^{\mathbf{M}_I} \mathbf{V}_I.$$

Thus eliminating the pressure, the system (3.18) is recast as

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_3 \mathbf{M}_{BC} & \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 \mathbf{M}_I \\ \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3 \mathbf{M}_{BC} & \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 \mathbf{M}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{BC} \\ \mathbf{V}_I \end{bmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{BC} \\ \mathbf{V}_I \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

The system (3.19) still contains  $N - 2$  null eigenvalues due to the divergence-free constraint. We can further reduce (3.19) by eliminating the streamwise velocity components at the interior points [65]. Indeed, using  $\mathbf{V}_I = \left( \overbrace{\hat{u}_1, \dots, u_{N-1}}^{\mathbf{U}}, \overbrace{\hat{v}_1, \dots, v_{N-1}}^{\mathbf{V}} \right)$ ,

the divergence-free condition  $\mathbf{C}_2 \mathbf{V}_I = \mathbf{0}$  becomes  $i\alpha \mathbf{U} + \mathbf{C}_2 \mathbf{V} = \mathbf{0}$ . Thus, for  $\alpha \neq 0$ , the streamwise velocity  $\mathbf{U}$  is obtained as a function of  $\mathbf{V}$ . This then leads to a discrete version of the Orr–Sommerfeld equation for the fluid–structure interaction problem of the form of :

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{BC} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{BC} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

This system may be further reduced[90], by considering perturbations of either sinuous or varicose symmetry and using only half of the channel together with derivative operators appropriate for the symmetry of each component of the different flow fields.

Apart from the fact that the above algebraic transformations remove spurious eigenvalues, they also drastically reduce the computational effort. The system is either solved using QZ algorithm from the Lapack library or an Arnoldi technique provided by the Arpack software. The numerical procedure is validated and discussed in appendix 1. The number of collocation points is varied from 100 to 300 as the Reynolds number is increased.

### 3.4 Linear stability results

After the formulation of the linear fluid–structure interaction problem and the presentation of the numerical methods, we are now in a position to analyze its dynamics. The different classes of modes and their dependence on the control parameters are investigated in detail. A specific attention is devoted to provide physical insight through total energy budget analyses.

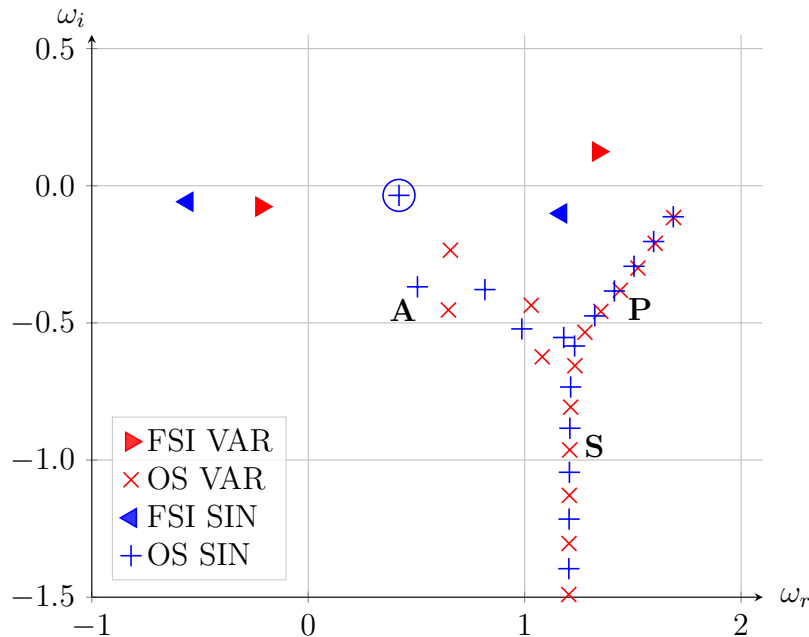


FIG. 3.2 : Eigenvalue spectrum for perturbations with  $\alpha = 0.6$  at  $\text{Re} = 7000$ ,  $V_R = 1$ ,  $B_\star = 4$  and  $d_\star = 0.2$ . Orr–Sommerfeld modes (+ sinuous and  $\times$  varicose) are located on three main branches (A, P and S) and dominated by TS mode (circle); four modes ( $\triangleleft$  and  $\triangle$ ) are due to fluid–structure interactions. Modes of varicose and sinuous symmetry are shown in red and blue respectively.

### 3.4.1 Spectra and classes of modes

A typical spectrum is shown in figure 3.2, corresponding to a base configuration at  $\text{Re} = 7000$ ,  $V_R = 1$ ,  $B_\star = 4$ ,  $d_\star = 0.2$  and perturbations with wavenumber  $\alpha = 0.6$ . Since the base state is symmetric in  $y$ , the entire spectrum consists of the same number of modes of either varicose (red symbols) or sinuous (blue) symmetry. The Orr–Sommerfeld modes ( $\times$  and  $+$ ) are essentially due to the base Poiseuille flow and organized in three branches (classically labelled A, P and S[79]), as for rigid channels. This part of the spectrum is dominated by the Tollmien–Schlichting mode (TS, indicated by circle in figure 3.2) of sinuous symmetry. In the present configuration, the coupling between the fluid and wall equations leads to four additional eigenvalues (indicated by  $\triangleleft$  and  $\triangle$ ) and referenced hereafter as fluid–structure interaction (FSI) modes. Two of these FSI modes travel upstream ( $\omega_r < 0$ ), while the other pair of FSI modes propagates along the flow direction ( $\omega_r > 0$ ); each of these pairs consists of a sinuous and a varicose mode.

To gain a better understanding of these eigenmodes, we monitor changes in the spectrum resulting from the variation of some control parameters. A few typical scenarios are shown in figure 3.3.

FSI modes strongly depend on the reduced velocity  $V_R$ , as shown in figure 3.3(a).

When  $V_R \rightarrow 0$ , which corresponds to approaching the rigid-walls case, the growth rates of the FSI modes reach neutrality ( $\omega_i \rightarrow 0$ ) while their phase velocities tend to infinity ( $\omega_r \rightarrow \pm\infty$ ). For the range of base state configurations shown here, the upstream propagating FSI modes are always stable, albeit with a weak decay rate, and their (negative) phase velocities reach very small values as  $V_R$  is increased : this behaviour is characteristic of divergence (DIV) modes, as observed for boundary-layer flows along highly damped walls[64]. On the other hand, the downstream propagating FSI modes are strongly destabilized as  $V_R$  is increased ; these modes are identified as traveling-wave flutter (TWF) modes. In contrast with the FSI mode dynamics, the TS mode only weakly depends on  $V_R$  since it is mainly driven by the shear flow, see insert in figure 3.3(a). Consistently with the definition of  $V_R$ , the eigenvalue corresponding to the TS mode matches the one found for the rigid case when  $V_R \rightarrow 0$ . The other Orr–Sommerfeld modes on the A-branch also display only a weak dependence on  $V_R$ , while those on the P- and S-branches appear to be mostly unaffected.

The influence of the wall-damping parameter  $d_\star$  is shown in figure 3.3(b,c) for  $V_R = 1$  (b) and  $V_R = 2$  (c). The growth rate  $\omega_i$  of the downstream propagating TWF modes is seen to significantly decrease with wall dissipation  $d_\star$ . Thus wall damping has a strongly stabilizing effect on both sinuous and varicose TWF modes. For  $V_R = 1$ , figure 3.3(b) shows that wall damping has a similar stabilizing effect on the upstream propagating FSI modes. However, at the larger value  $V_R = 2$  of the reduced velocity (figure 3.3c), these FSI modes are nearly stationary divergence modes. In that regime, an increase in wall damping  $d_\star$  results in an increase of their negative growth rate, and the phase velocity is seen to vanish in the limit of large wall damping  $d_\star$ . Here destabilisation of the DIV modes occurs for large values of  $d_\star$ . One may recall that while the sinuous TWF and DIV modes were investigated numerically by Davies & Carpenter[16], the varicose TWF and DIV modes have not been explored for the plane channel flow.

Thus, the influence of the various control parameters may be summarized as follows : the TS mode is temporally damped by an increase of  $V_R$ , but its temporal amplification rate may be amplified with an increase in wall damping for a certain range of streamwise wave numbers. A different behavior is found when the TWF modes are considered : their growth rate increases with  $V_R$ , while it decreases with  $d_\star$ . This is consistent with the mode classification given by Benjamin [4] (*i.e.* class A for TS modes and class B for TWF modes). Moreover, the DIV mode is seen to be amplified for high values of wall damping parameter. Finally, the effect of the wall compliance is seen to be negligible for both P- and S-branches.

To further identify the different types of modes with respect to Benjamin’s classification, the eigenfunctions of a few selected modes are shown in figure 3.4.

One may recall that the mechanism whereby both TWF modes and TS modes grow involves the action of the streamwise velocity base flow gradient along the wall-normal position working against the Reynolds stresses. In the absence of an inflection point, both modes involve a phase shift of the disturbance velocity at some distance from the wall[21]. However, mechanisms are quite different for each of these modes.

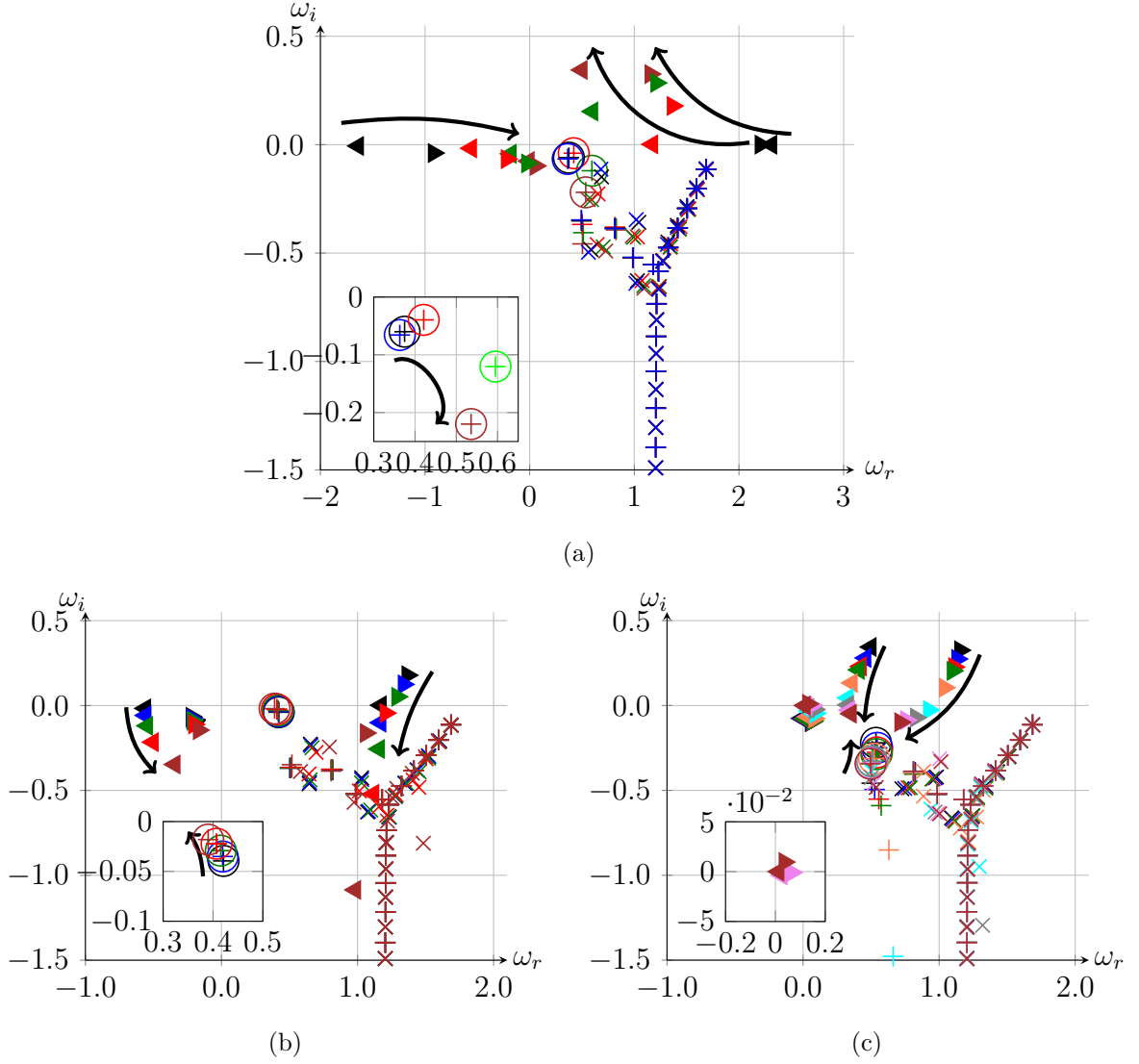


FIG. 3.3 : Influence of reduced velocity  $V_R$  and wall damping  $d_*$  on frequency eigenspectra for  $\alpha = 0.6$  at  $\text{Re} = 7000$  and  $B_* = 4$ . (a) Evolution with  $V_R = 2, 1.5, 1, 0.5, 0.01$  (in brown, green, red, black and blue, respectively) at  $d_* = 0$ . (b) Evolution with  $d_*$  varying from 0 to 2 for  $V_R = 1$  ( $d_* = 0, 0.2, 0.5, 1$  and  $2$  in black, blue, green, red and brown, respectively). (c) Evolution with  $d_*$  varying from 0 to 20 for  $V_R = 2$  ( $d_* = 0, 0.4, 0.8, 1, 2, 4, 6, 10$  and  $20$  in black, blue, red, green, orange, light blue, grey, pink and brown, respectively). Some mode trajectories are represented in dashed lines.

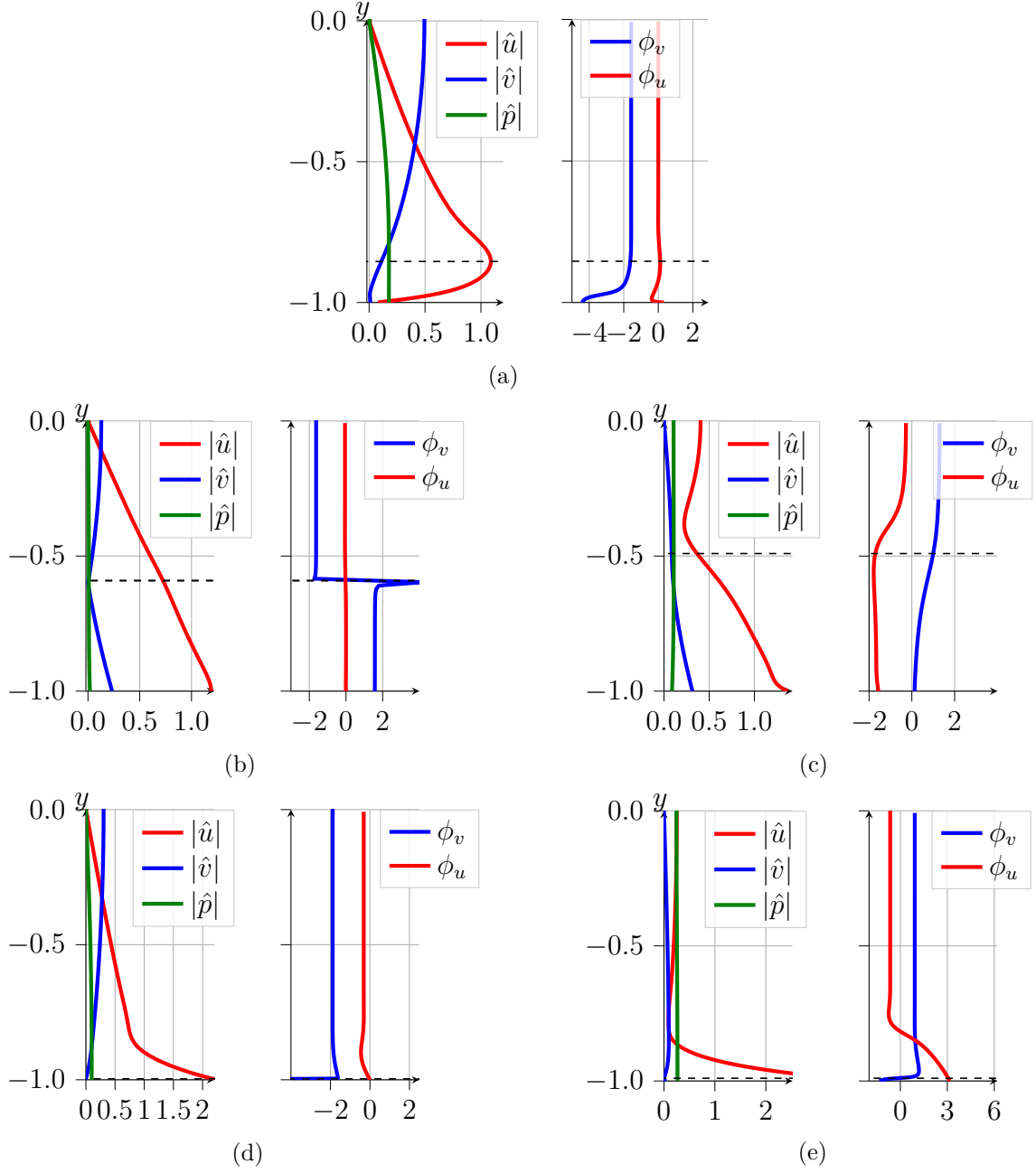


FIG. 3.4 : Eigenfunctions for  $\text{Re} = 7000$  and  $B_* = 4$ . (a) TS (sinuous) mode for  $\alpha = 1$ ,  $d_* = 4$  and  $V_R = 0.5$ . (b) Sinuous TWF mode for  $\alpha = 0.6$ ,  $d_* = 0$  and  $V_R = 1$ . (c) Varicose TWF mode for  $\alpha = 0.6$ ,  $d_* = 0$  and  $V_R = 1$ . (d) Sinuous DIV mode for  $\alpha = 0.6$ ,  $d_* = 20$  and  $V_R = 2$ . (e) Varicose DIV mode for  $\alpha = 0.6$ ,  $d_* = 20$  and  $V_R = 2$ . The phase angles of eigenfunctions are denoted as  $\phi_u$  and  $\phi_v$  for  $u'$  and  $v'$ , respectively. The eigenfunctions are normalized to unit kinetic energy norm.

Within a large-Reynolds-number asymptotic theory, viscous effects are only present in the vicinity of the viscous wall-layer or the critical layer, located at the wall-normal position  $y_c$  where  $U_b(y_c) = \omega_r/\alpha$  [21]. The inviscid approximation is therefore accurate in the other regions of the flow. For the TWF mode, the instability mechanism is essentially driven by the wall. Indeed, the instability is amplified if the work done by the pressure disturbance on the wall is positive when averaged over one period (Benjamin [3]). As first proven by Miles [67] for water waves, Benjamin [2] shows for the boundary-layer-flow case that it results from a phase shift between disturbance wall pressure and wall displacement. In particular, Benjamin [2] proves that the pressure at the wall is associated with the integrated effect of the velocity perturbations along the wall direction and is a consequence of a phase shift for velocity components near the critical layer. We note hereafter  $\phi_u$  and  $\phi_v$  the phases of the respective velocity components  $\hat{u}$  and  $\hat{v}$  of the associated eigenfunctions. For TWF modes (see figures 3.4b,c), the essential phase shift (*i.e.*  $\phi_u - \phi_v \neq \pi/2$ ) occurs near the critical layer in the limit of large Reynolds numbers (class B modes). For the TS mode (figure 3.4a), the phase shift is rather associated with the viscous wall layer. They belong to class A modes and are stabilized through a transfer of energy to the wall. Hence it is essential, when addressing the different classes of modes, to monitor the phases of the perturbation components. Figure 3.4(b) shows that the sinuous TWF mode exhibits a clear phase shift near the critical layer in agreement with class B modes. It is consistent with the theoretical investigation of Davies & Carpenter [16] for the same flow case. The linear behaviour along with the wall normal position of  $\hat{u}$  is associated with a displacement of the Poiseuille solution when the walls are shifted with  $\eta$ . It is easily verified that the small deviation from the Poiseuille solution due to sinuous motion of the walls is proportional to  $-2\hat{\eta}y$  (see also [45]). Interestingly, the varicose case (figure 3.4c), not studied by Davies & Carpenter [16], also exhibits a phase shift.

Finally, the divergence mode (figure 3.4d,e) exhibits a phase shift in the viscous wall layer. Nevertheless, due to the low velocity phase, the viscous wall layer and the critical layer are not well separated. As a consequence, the theoretical framework derived by Davies & Carpenter [16] cannot be applied for these modes.

For all FSI modes (both TWF and DIV), velocity and pressure fluctuations are concentrated near the wall. For the TS mode, as for the rigid case, the streamwise velocity component peaks at the critical layer.

#### 3.4.2 Temporal growth and instability onset

The stability features of compliant channel flow configurations depend on a large number of parameters. In the previous section we have shown that the reduced velocity  $V_R$  is the main control parameter governing fluid–structure interactions, but growth rates of the different classes of modes may also depend significantly on Reynolds number  $Re$ , wall dissipation  $d_\star$  and flexural rigidity  $B_\star$ . In the present section, we will map out the stability characteristics by monitoring the dispersion relation in the  $(V_R, \alpha)$ -plane for selected values of the other relevant control parameters. By taking advantage of the base-flow symmetry, sinuous and varicose perturbations may

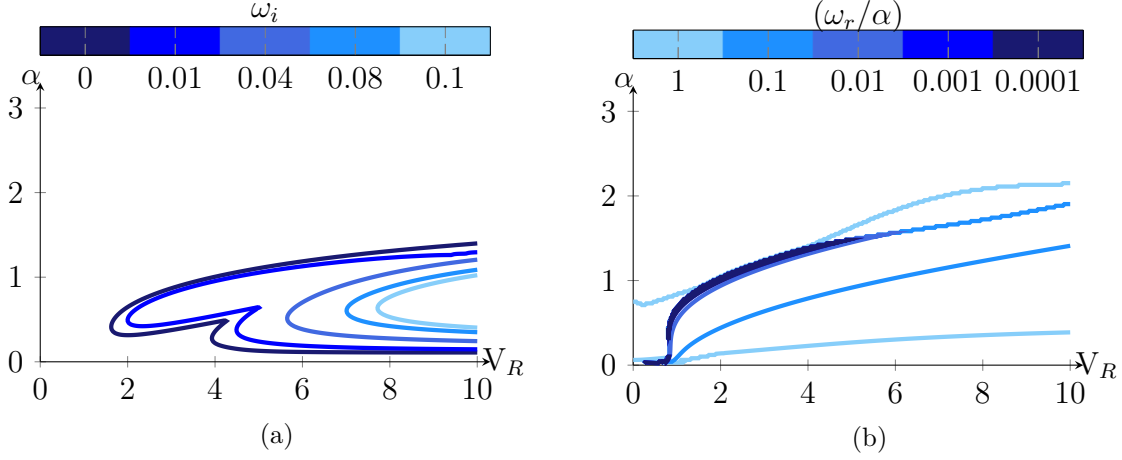


FIG. 3.5 : Dispersion relation for leading varicose mode in  $(V_R, \alpha)$ -plane for  $\text{Re} = 5000$ ,  $d_* = 10$  and  $B_* = 4$  : (a) contours of growth rate  $\omega_i$  and (b) of phase velocity  $\omega_r/\alpha$ .

be efficiently computed and their properties are here discussed separately. We first consider perturbations of varicose symmetry, which are generally the modes most amplified by fluid–structure interactions.

Figure 3.5(a) shows isolines of the temporal growth rate  $\omega_i$  of the leading varicose eigenmode in the  $(V_R, \alpha)$ -plane at  $\text{Re} = 5000$ ,  $d_* = 10$  and  $B_* = 4$ . The neutral curve ( $\omega_i = 0$ ) exhibits two distinct minima at  $V_R \approx 1.6$  and  $V_R \approx 3.9$ . Beyond onset, a finite range of wavenumbers  $\alpha$  display positive temporal growth rates. The associated phase-speeds  $\omega_r/\alpha$  are given in Figure 3.5(b). It is found that near the first minimum  $V_R \approx 1.6$ , modes travel with vanishingly small phase-speeds. In contrast, near the second minimum  $V_R \approx 3.9$ , modes travel with phase-speeds of the order of the mean base flow velocity. This behaviour is characteristic of DIV and TWF modes, which are thus each found to dominate the perturbation dynamics in distinct regions of the  $(V_R, \alpha)$  plane for these parameter settings.

Figure 3.6 illustrates the influence of wall dissipation  $d_*$ , for the same values of  $\text{Re}$  and  $B_*$ . It is observed that energy dissipation in the wall only weakly influences the temporal growth rate for  $0 \leq d_* \leq 1$ , while stronger stabilization occurs for  $d_* > 1$ . At these high dissipation rates, the growth rate and the range of unstable wavenumbers are greatly reduced; however, the critical value of  $V_R$  for onset of instability (noted  $V_R^c$  hereafter) remains of the same order of magnitude. Monitoring the neutral curves more precisely reveals that  $V_R^c$  increases from  $V_R^c \simeq 0.45$  for  $d_* = 0$  to reach a maximal value of about  $V_R^c \simeq 1.6$  for  $d_* = 10$  and decreases again for larger values of  $d_*$  ( $V_R^c \simeq 1.0$  for  $d_* = 100$ ). This non-monotonous effect of wall-dissipation on instability onset is due to a change of the nature of the leading eigenmode : while the instability is dominated by the TWF mode at low values of  $d_*$ , the unstable dynamics is governed by the divergence mode for strong dissipation in the compliant wall as already suggested by figure 3.5.

This observation is further illustrated in figure 3.7 where neutral curves are shown

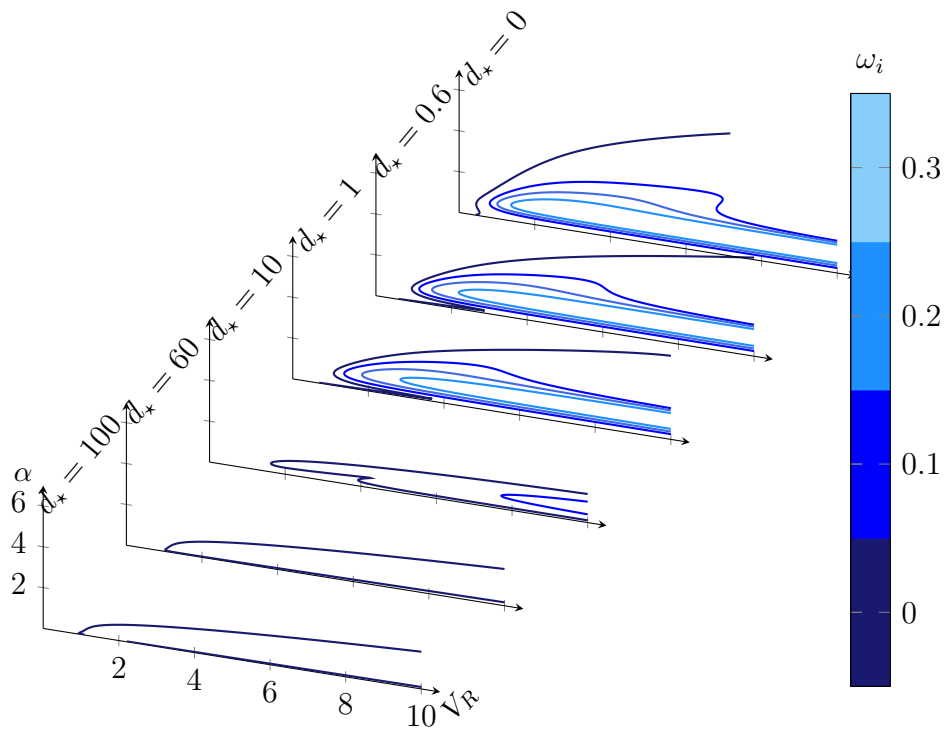


FIG. 3.6 : Temporal growth rates  $\omega_i$  for the varicose instability at  $\text{Re} = 5000$  and  $B_* = 4$  for  $d_* = 0, 0.6, 1, 10, 60$  and  $100$ . The contour levels are  $0, 0.1, 0.2$  and  $0.3$ .



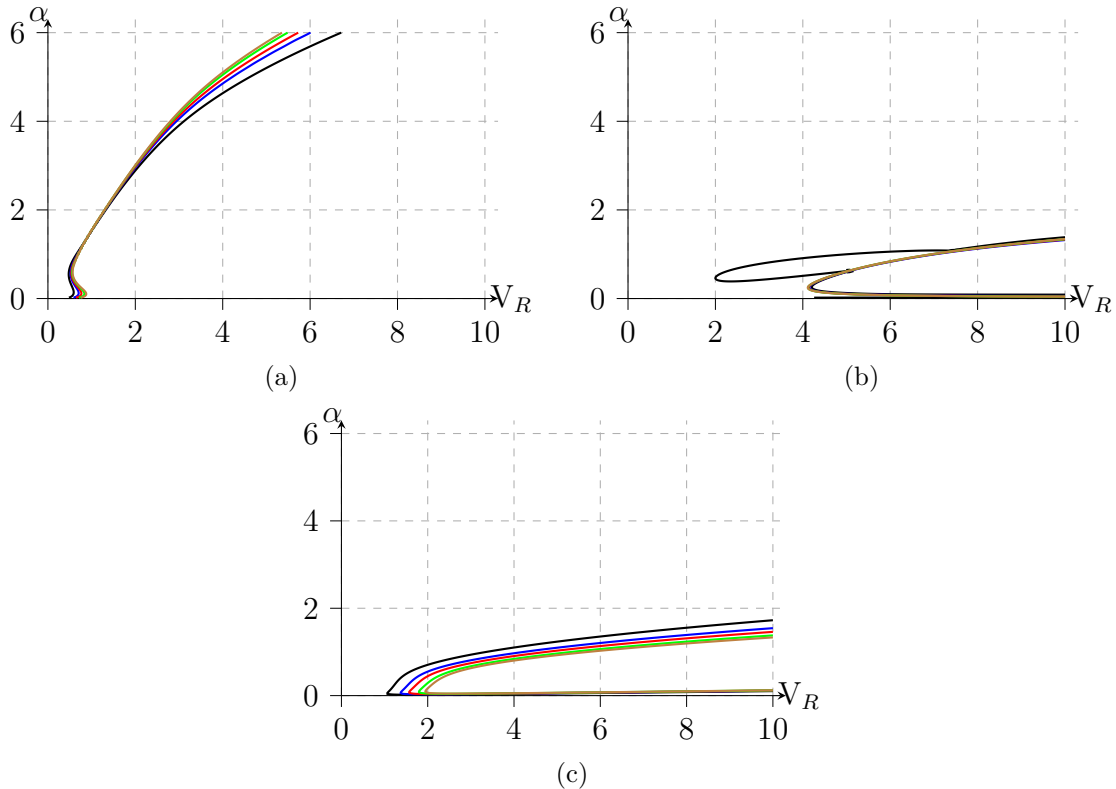


FIG. 3.7 : Marginal curves for onset of varicose instability at  $B_\star = 4$  for  $\text{Re} = 10000, 40000, 80000, 160000$  and  $240000$  (in black, blue, red, green and brown respectively) and (a)  $d_\star = 0$ , (b)  $d_\star = 10$  and (c)  $d_\star = 100$ .

for various Reynolds numbers and wall dissipations. Especially, for  $\text{Re} = 10000$  and  $d_\star = 10$  (figure 3.7b), we observe the coexistence of the DIV and TWF modes. The critical reduced velocities  $V_R^c$  for the divergence and TWF modes are  $\approx 2$  and  $\approx 4$ , respectively. Neutral curves associated with the TWF mode (fig 3.7a) are seen to be almost independent of the Reynolds number. For the divergence mode, we observe a destabilizing effect of viscosity (fig 3.7c) : the critical value  $V_R^c$  for onset of instability is seen to increase with Reynolds number, which is consistent with the fact that divergence modes are intimately connected to the viscous wall layer. Nevertheless, in the regime dominated by divergence modes, the temporal amplification rates reach much lower values than those prevailing for TWF modes at low values of  $d_\star$  (see Figure 3.6).

After the previous extensive discussions of results for varicose perturbations we now focus on the sinuous symmetry. The linear dynamics of sinuous eigenmodes is very similar to that of their varicose counterpart, except that the (sinuous) Tollmien–Schlichting modes may also display positive growth rates.

The growth-rate isolines in the  $(V_R, \alpha)$ -plane of figure 3.8(a) are obtained for  $\text{Re} = 8000$ ,  $B_\star = 4$  and  $d_\star = 10$ . This Reynolds number (based on channel diameter and mean fluid velocity) is slightly in excess of the critical value  $\text{Re}_c \simeq 7696$  for Tollmien–Schlichting instability developing in rigid channel flow. As for the varicose

### 3.4 Linear stability results

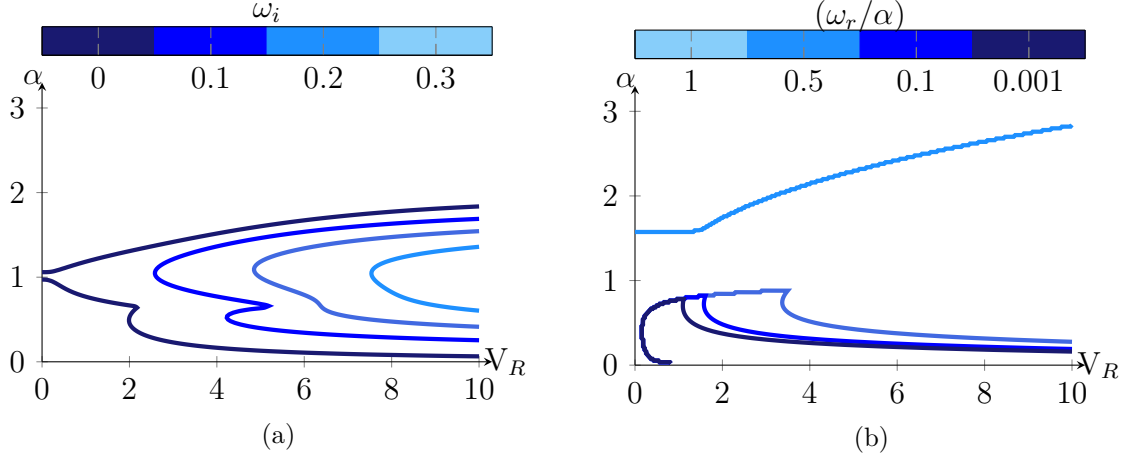


FIG. 3.8 : Dispersion relation for leading sinuous mode in  $(V_R, \alpha)$ -plane for  $\text{Re} = 8000$ ,  $d_\star = 10$  and  $B_\star = 4$  : (a) contours of growth rate  $\omega_i$  and (b) of phase velocity  $\omega_r/\alpha$ .

case, the neutral curve exhibits two minima. The first appears near  $V_R \approx 0$  while the second minimum is close to  $V_R \approx 2$ . The associated phase-speeds  $\omega_r/\alpha$  given in figure 3.8(b) indicate that DIV, TWF and TS modes can be involved in this regime.

Figure 3.9 shows the evolution of sinuous temporal instability characteristics with the wall dissipation parameter  $d_\star$ . For  $d_\star = 0$  and low values of  $V_R$ , corresponding to near-rigid compliant walls, there exists a narrow band of unstable wavenumbers near  $\alpha = 1$  associated with unstable Tollmien–Schlichting modes. At larger values of  $V_R$ , stronger fluid–structure coupling leads to the destabilization of (sinuous) TWF modes : the temporal growth rates  $\omega_i$  and the range of unstable wavenumbers rapidly increase with  $V_R$ . Note that there exists a narrow region near  $V_R = 1$  where both TS and TWF modes are stable. As  $d_\star$  is increased from 0 to 0.6, it is observed that the regions corresponding to unstable TS and TWF modes merge, giving rise to the so-called transition mode.

Except for the merging of TS and TWF instabilities, the instability features of sinuous perturbations shown in figure 3.9 are very similar to those observed for varicose perturbations. For  $d_\star > 1$ , wall dissipation  $d_\star$  significantly reduces the temporal growth rates and the range of unstable wavenumbers. For  $d_\star \geq 10$ , figure 3.9 shows that divergence and transition modes co-exist. In addition, the critical reduced velocity  $V_R^c$  for the onset of the divergence mode is only weakly influenced by the wall dissipation ( $V_R^c \approx 2$ ).

The critical curves shown in figure 3.10 correspond to marginal ( $\omega_i = 0$ ) sinuous instability for a range of Reynolds numbers and  $d_\star = 0, 10$  and  $100$ . Due to the fact that, for  $\text{Re} > 7696$ , TS instability prevails at low values of  $V_R$ , down to  $V_R = 0$ , a critical value of reduced velocity  $V_R^c$  cannot be defined for onset of sinuous instability.

For the sinuous instability, it may be hard to distinguish between TS or TWF modes since branch switching occurs as some parameters are continuously varied. To better illustrate this phenomenon, figure 3.11 shows the dispersion relation for

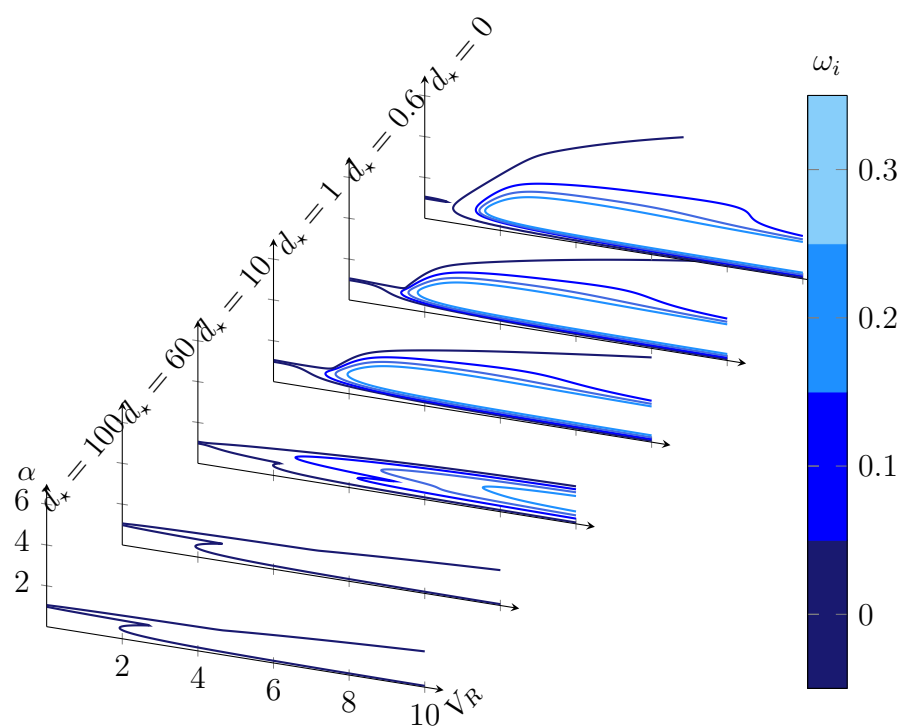


FIG. 3.9: Temporal growth rates  $\omega_i$  for the sinuous instability at  $\text{Re} = 8000$  and  $B_* = 4$  for  $d_* = 0, 0.6, 1, 10, 60$  and  $100$ . The contour levels are  $0, 0.1, 0.2$  and  $0.3$ .

### 3.4 Linear stability results

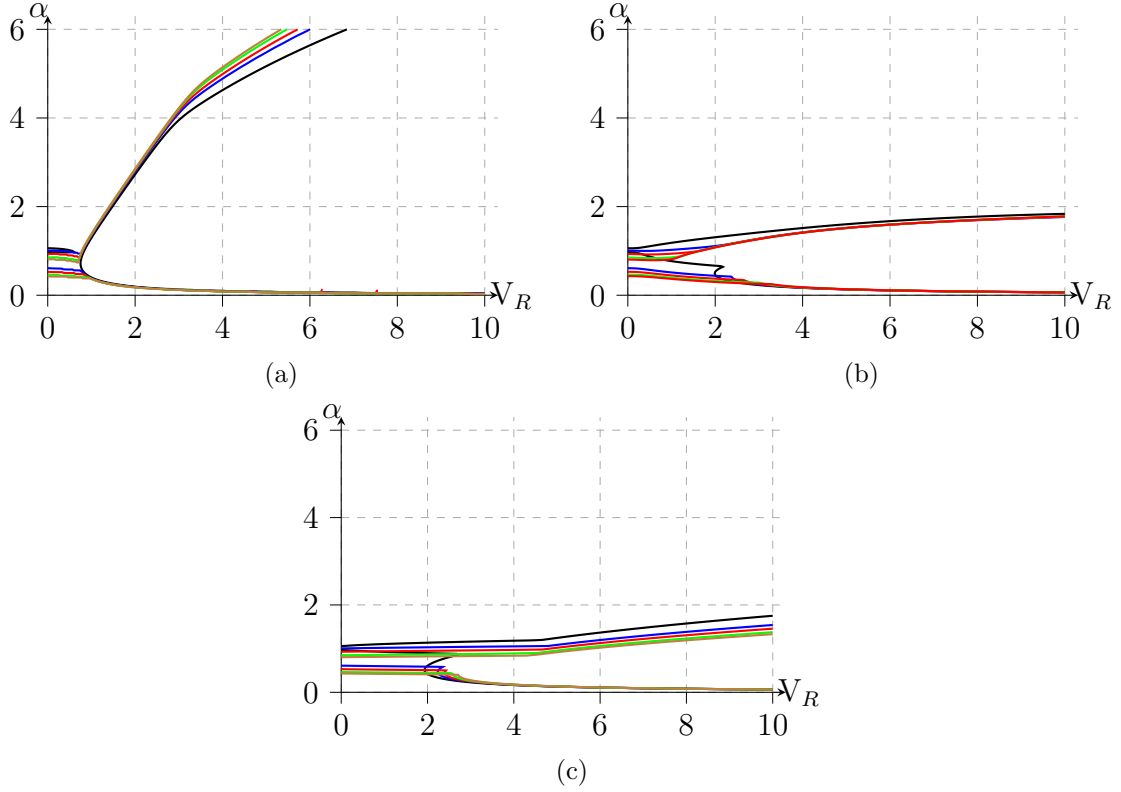


FIG. 3.10 : Marginal curves for onset of sinuous instability at  $B_* = 4$  for  $\text{Re} = 10000, 40000, 80000, 160000$  and  $240000$  (in black, blue, red, green and brown respectively) and (a)  $d_* = 0$ , (b)  $d_* = 10$  and (c)  $d_* = 100$ .

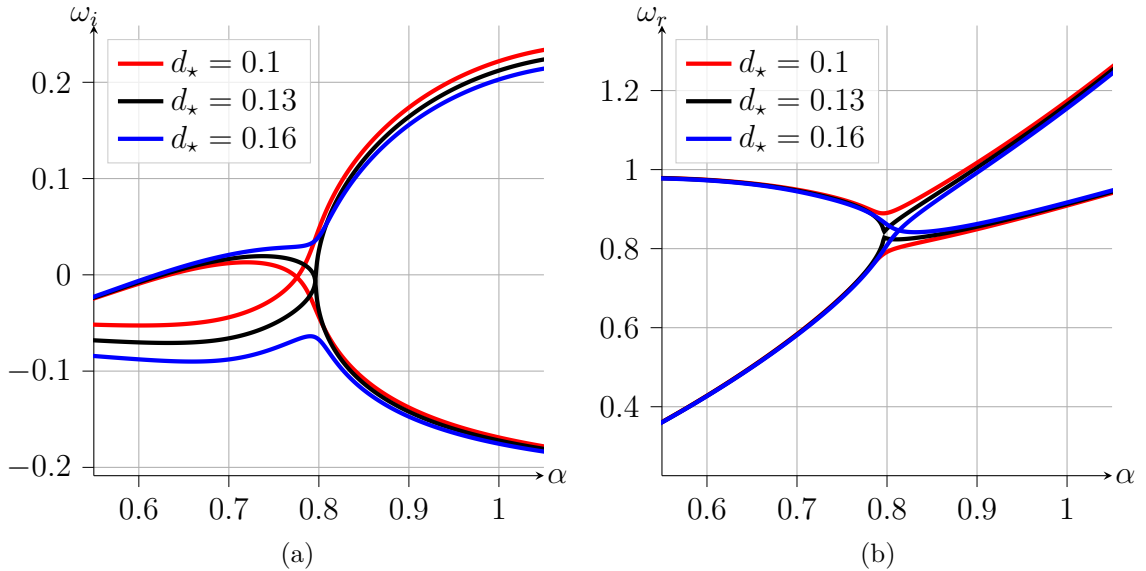


FIG. 3.11 : Dispersion relation for the two leading sinuous modes at  $\text{Re} = 10000, B_* = 1$  and  $V_R = 1$ . (a) Temporal growth rate  $\omega_i$  and (b) frequency  $\omega_r$ . Branch switching occurs near  $\alpha = 0.8$  and  $d_* = 0.13$ .

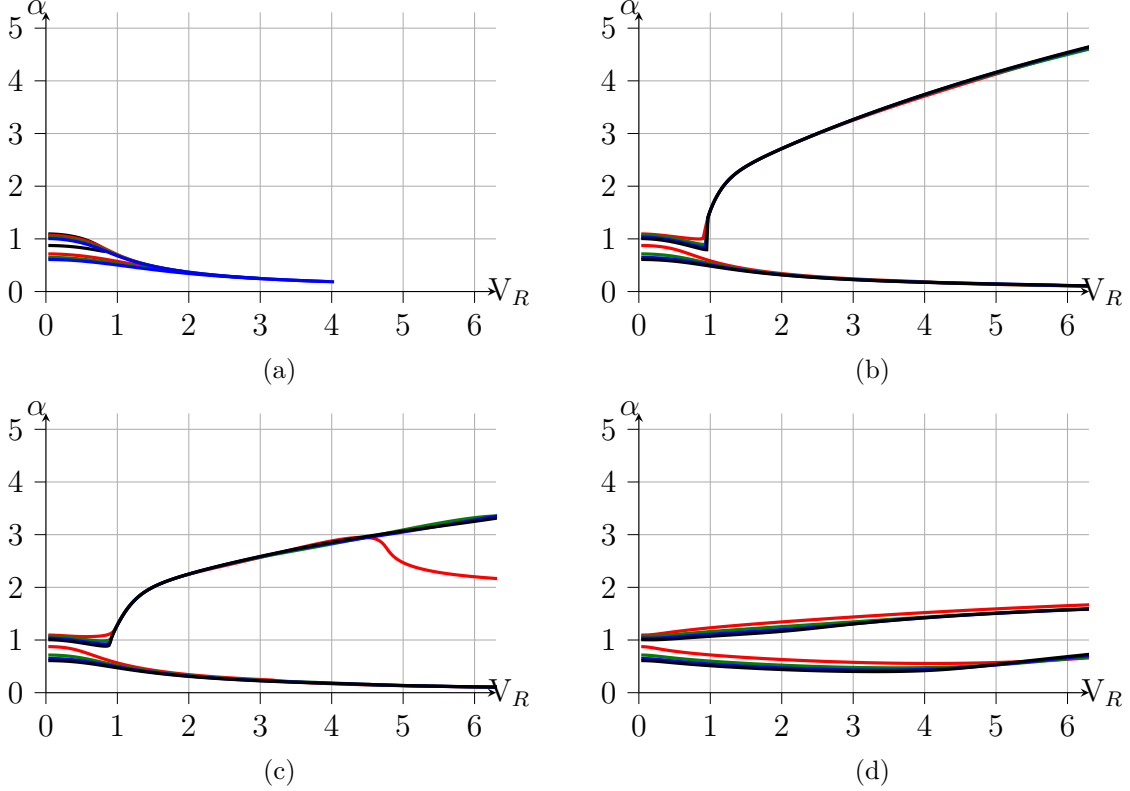


FIG. 3.12 : Neutral curves for the TS mode for  $Re = 10000, 20000, 30000, 40000$  (in black, red, green, blue, respectively) and  $B_* = 1$  in the plane  $(\alpha, V_R)$ . (a)  $d_* = 0$ , (b)  $d_* = 0.5$ , (c)  $d_* = 1$  and (d)  $d_* = 10$ .

both branches in the range  $0.55 < \alpha < 1.05$  for  $d_* = 0.10, 0.13$  and  $0.16$ , at  $Re = 1000, B_* = 1$  and  $V_R = 1$ . For  $\alpha < 0.8$ , the branches with largest temporal growth rate (upper branches in figure 3.11a) are of TS-type while the other branches are always stable in that wavenumber range and can be identified as TWF modes. For  $\alpha > 0.8$ , the unstable branch displays a growth rate  $\omega_i$  rapidly increasing with  $\alpha$ , and is found to correspond to a mode of the TWF type, while the other branch is strongly stabilised at these wavenumbers. Due to the branch switching that occurs near  $\alpha = 0.8$  and  $d_* = 0.13$ , the unstable TWF branch prevailing for  $\alpha > 0.8$  is continuously connected to the TS branch when  $d_* > 0.13$  while it is continued as a stable TWF mode for  $\alpha < 0.8$  when  $d_* < 0.13$ .

This behaviour is further illustrated in figure 3.12. For a small amount of wall dissipation, the TS mode is seen to be damped as  $V_R$  is increasing (figure 3.12a), for all the Reynolds numbers considered. In particular, for  $d_* = 0$ , the critical reduced velocity of TS mode suppression is varying from  $V_R \approx 0.8$  for  $Re = 10000$  to  $V_R \approx 4$  for  $Re = 40000$ . However, as  $d_*$  is increased beyond  $0.13$ , a transition mode emerges and it is no longer possible to distinguish between TWF and TS modes (figures 3.12b–d).

Finally, we present some results for the destabilization of the divergence mode and its dependence on wall dissipation  $d_*$  and Reynolds number  $Re$ . We compute the

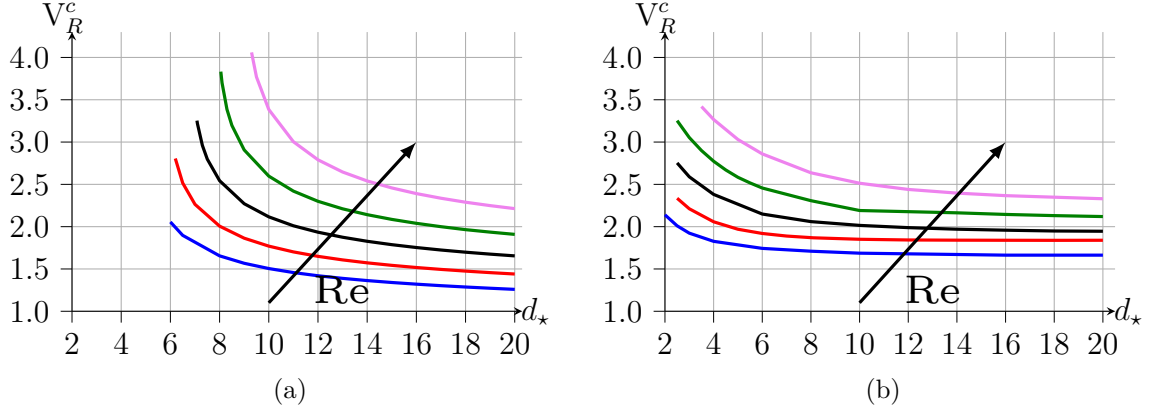


FIG. 3.13 : Divergence mode. Critical reduced velocity distribution  $V_R^c$  with the wall damping parameter and for  $Re = 5000, 10000, 20000, 40000$  and  $80000$  with  $B_* = 1$ . (a) the varicose case, (b) the sinuous case.

critical value  $V_R^c$  for onset of instability in the  $(V_R, \alpha)$ -plane at fixed values of the other control parameters. A Newton–Raphson search algorithm with an adaptive step has been implemented to automatically identify the start of the neutral curve in the  $(V_R, \alpha)$ -plane for different values of  $d_*$  and  $Re$ . The critical value  $V_R^c$  (and associated wavenumber  $\alpha^c$ ) for onset of instability is then obtained when  $\frac{dV_R}{d\alpha}$  vanishes along the neutral curve.

Critical curves as functions of  $d_*$  for different  $Re$  values are plotted in Figure 3.13(a) and (b), respectively for the divergence modes of varicose and sinuous symmetry. Flexural rigidity is kept constant at  $B_* = 1$ . Both sets of curves clearly indicate the stabilizing effect of the Reynolds number on the divergence mode, for both the varicose and sinuous cases. For the varicose case, unstable divergence modes only occur at relatively high wall dissipation,  $d_* > 6$  for  $Re = 5000$  and  $d_* > 9.5$  for  $Re = 80000$ . For the sinuous case, divergence mode instability already starts for  $d_*$  in the range 2–4, with a weaker Reynolds number dependence. In both varicose and sinuous cases, the critical  $V_R^c$  appears to asymptote towards a finite limit for large values of  $d_*$ .

As discussed above, the combined effects of the different wall parameters are conveniently summarized by monitoring either the variations of the critical reduced velocity  $V_R^c$  or the critical Reynolds number  $Re^c$  depending on whether FSI or TS modes is considered. First, we focus on FSI instability modes of varicose symmetry. To that purpose, we consider a high value of the Reynolds number in order to investigate only the influence of the wall properties.

Results are reported in Figure 3.14 for  $0 \leq d_* \leq 60$  and  $0.2 \leq B_* \leq 10$ . The inset in the figure shows that for small values of  $d_*$ , flexural rigidity has a moderately stabilizing effect on TWF modes :  $V_R^c$  increases as  $B_*$  is increased for fixed  $d_*$ . In the range  $5 < d_* < 15$ , onset of instability is seen to display an almost universal behaviour with a linear relationship between  $V_R^c$  and  $d_*$ , almost independent of  $B_*$ . In this regime, instability always occurs by a TWF mode. For larger wall dissipation rates,  $d_* > 20$ , the dynamics is dominated by the divergence modes, associated with

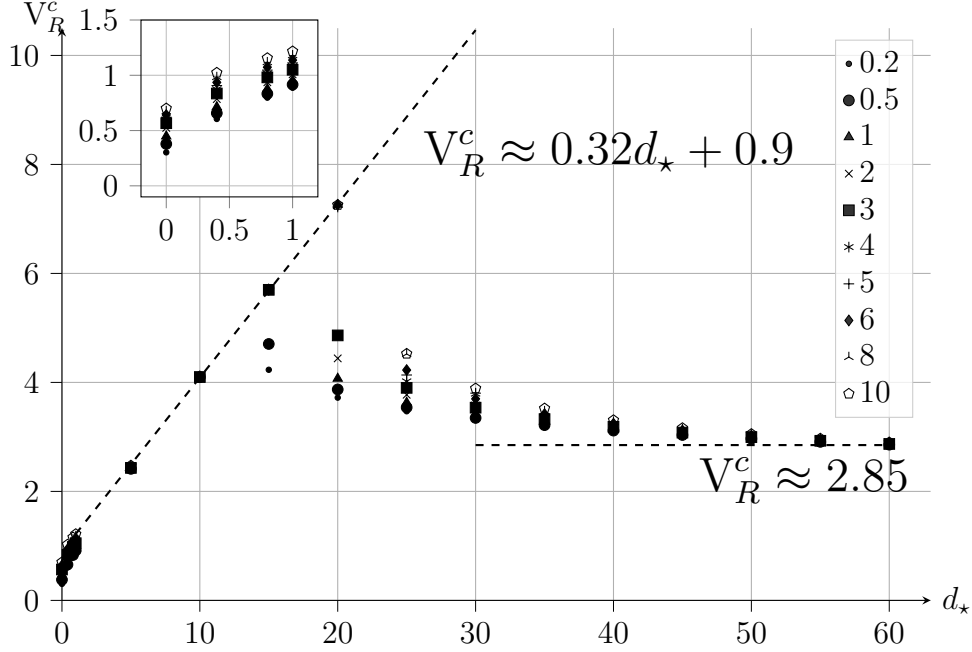


FIG. 3.14 : Evolution of critical reduced velocity  $V_R^c$  with wall damping parameter  $d_*$ , for a range of flexural rigidity values  $B_*$  (from 0.2 to 10). Perturbations of varicose symmetry are considered.

vanishing phase velocities. In this latter regime, the critical values  $V_R^c$  weakly depend on flexural rigidity  $B_*$  and decrease with increasing wall dissipation  $d_*$ . For large values of  $d_*$ , a limit value of  $V_R^c \simeq 2.85$  is asymptotically reached, independently of  $B_*$ . Note that the crossover from the TWF dominated instabilities (low  $d_*$ ) to the DIV dominated instabilities (high  $d_*$ ) also depends on  $B_*$ .

Finally, we address the influence of the wall properties on the stability of TS modes by monitoring the critical  $Re^c$ . We restrict our analysis to the case without wall damping. Results are summarized in figure 3.15 where the critical Reynolds number for the TS mode is displayed as a function of  $V_R$  for  $B_* = 1, 2$  and 4. The figure shows that the TS mode is significantly stabilized with increasing wall compliance (*i.e.* increasing  $V_R$ ), and this stabilizing effect is enhanced at low flexural rigidity  $B_*$ . In the figure, onset of TWF instability is indicated by the nearly vertical lines; recall that these modes are almost independant of the Reynolds number. Dotted lines correspond to sinuous TWF modes while dashed lines have been computed for varicose TWF modes. It is immediately apparent from the figure that the potential effect of a compliant wall regarding transition delay is clearly limited by the destabilization of TWF modes. Indeed, the region of the  $(V_R, Re)$ -plane corresponding to stable configurations is located below the  $Re^c$ -curves for onset of TS instability and delimited at large values of  $V_R$  by onset of TWF instability. The results of the present investigation reveal that the extent of stable region is drastically reduced by taking into account TWF perturbations of varicose symmetry, which display growth rates in excess of their

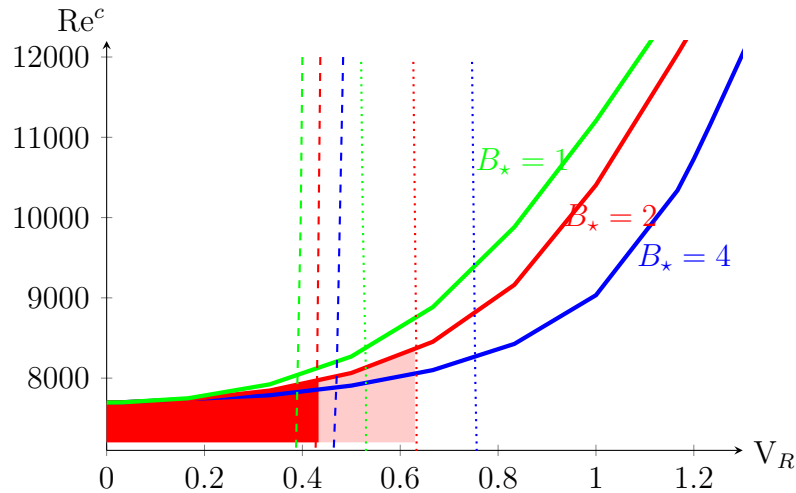


FIG. 3.15 : The critical Reynolds number associated with TS instability is plotted as a function of  $V_R$  for  $B_\star = 1, 2$  and  $4$  in full lines. Nearly vertical lines indicate onset of TWF instability for perturbations of sinuous (dotted lines) and varicose (dashed lines) symmetry. The colored regions correspond to stable configurations at  $B_\star = 2$ , allowing only sinuous perturbations (light red) or all types of perturbations (solid red).

sinuous counterparts. For instance, when only sinuous perturbations are taken into account, the upper right corner of the shaded region in figure 3.15 indicates that stable configurations would be possible up to  $Re = 8370$ , for  $B_\star = 2$ . However when perturbations of all symmetries are allowed, the stable domain is reduced to the solid red region, with maximal Reynolds number of  $Re = 7970$ , only marginally larger than the critical Reynolds number of  $Re = 7696$  corresponding to the rigid case. Similar conclusions hold for different values of  $B_\star$ . Moreover, since it has been shown that wall dissipation has a destabilizing effect on TS waves, it is not expected that using  $d_\star > 0$  could increase the extent of the stable regions in parameter space. Thus it seems impossible to significantly delay instability onset by wall compliance.

### 3.4.3 Comparison with asymptotic theories for $d_\star = 0$

Davies & Carpenter [16] derived an analytical expression for the wall pressure for  $d_\star = 0$  in the limit of small  $\alpha$  and high Reynolds numbers, for modes of sinuous symmetry. This pressure, noted  $\hat{p}(\alpha, c, U_{ref})$  is obtained as a function of the wavenumber  $\alpha$ , the phase velocity  $c = \omega_r/\alpha$  and a reference value for the fluid velocity  $U_{ref} = Q/2h$ , and includes the effects of both the critical and viscous layers. The wall pressure is obtained as an expansion in  $\alpha$  up to  $\alpha^2$ :  $\hat{p} = p_0 + \alpha^2 p_1$ , where only the term  $p_1$  includes the effect of viscous and critical layers. For the viscous layer, the approximation is carried out up to  $O((\alpha Re)^{-1/2})$ . Neglecting the viscous stress at the wall, they obtain



the dispersion relation :

$$m(c^2 - c_0^2) + \hat{p}(\alpha, c, U_{ref}) + i\left(\frac{c}{\alpha}\right)d = 0, \quad (3.21)$$

with  $c_0 = \sqrt{\frac{1}{m}\left(B\alpha^2 + T + \frac{K}{\alpha^2}\right)}$  the free wave speed for the wall. Davies & Carpenter [16] express the onset of instability with the Reynolds number. Here, we suggest that it is more appropriate to use the reduced velocity  $V_R$ . The resulting neutral curves are shown in figure 3.16 for  $B_* = 4$ . For the sinuous case, panel (a) shows a very good agreement between the analytical model and complete numerical resolution of the full system up to  $\alpha \approx 3$ . In order to remove the Reynolds number effect, a numerical solution for  $Re = 10^6$  has been carried out. For the latter case, the grid mesh is increased up to  $N = 300$  in order to correctly capture both viscous and critical layers. Figure 3.16(a) shows that the departure from the theoretical model is due to the expansion in terms of streamwise wave number up to  $\alpha^2$ , hence this approximation is no longer valid for  $\alpha$  greater than 3.5 (not shown in [11]). In addition, one observes that neglecting the viscous stress at the wall and in the analytical expression of the pressure yields an almost perfect approximation of the exact dispersion relation.

In figure 3.16(b), comparisons with varicose cases are shown. While the theoretical model is derived only for the sinuous symmetry, it is interesting to notice that in the limit of high Reynolds numbers, the model associated with merely the critical layer gives a quite accurate description of the varicose symmetry for  $\alpha$  varying from 0.8 to 3. For streamwise wave numbers greater than 4, the varicose and sinuous neutral curves fall in one single curve for all Reynolds numbers. For  $\alpha < 0.8$ , the varicose case exhibits a more complex Reynolds number dependence. Since the varicose mode always dominates over the sinuous mode, the critical value  $V_R^c$  for onset of instability is associated with a varicose perturbation for all configurations that have been considered in the present study. The latter observation is also in agreement with results provided by Nagata [68]. In addition, it is found that the Reynolds number also has a slight stabilizing effect. In figure 3.16, we also provide a comparison with the theoretical model derived by Huang [46] for the varicose symmetry, only based on the critical layer. The figure also shows a good agreement for moderate values of  $\alpha$  between the model and the numerical simulation.

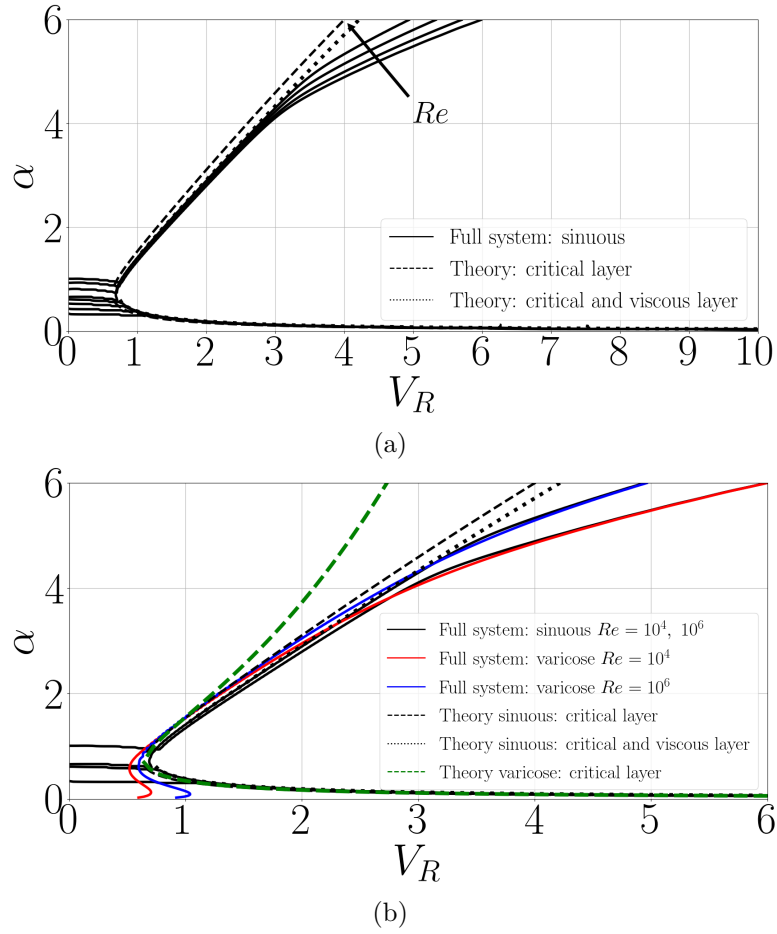


FIG. 3.16 : Neutral curves for  $d_* = 0$  and  $B_* = 4$ . For the full system of equations, the Reynolds numbers are fixed to  $Re = 4 \times 10^4$ ,  $8 \times 10^4$ ,  $2.4 \times 10^5$  and  $10^6$ . For the analytical dispersion relation  $Re$  is fixed to  $10^6$ . (a) Sinuous case, (b) Sinuous and varicose cases comparison.

### 3.4.4 Energy budgets

This final section addresses the energy transfer mechanisms between the different components of the compliant channel flow configurations, in order to shed further light on the dynamics and on the fundamental mechanisms promoting instability. This section is greatly influenced by the work of Domaradski & Metcalfe[20] and by Carpenter & Morris[13].

For the compliant channel flow configuration under consideration, the total energy of the system is the sum of three components :

$$E_{tot} = E_{FK} + E_{WK} + E_{WP}, \quad (3.22)$$

where  $E_{FK}$  represents the fluid kinetic energy, while the wall energy consists of both kinetic and potential contributions,  $E_{WK}$  and  $E_{WP}$  respectively.

The global fluid kinetic energy is obtained by integration over the channel diameter

$$E_{FK} = \int_{-h}^{+h} e(y) dy, \quad (3.23)$$

where

$$e(y) = \rho \hat{\mathbf{u}}(y) \cdot \hat{\mathbf{u}}(y)^* \equiv \rho [\hat{u}(y)\hat{u}(y)^* + \hat{v}(y)\hat{v}(y)^*] \quad (3.24)$$

denotes the local kinetic energy of the flow, averaged over  $x$  at a given wall-normal position  $y$ , using the notations introduced in §2.3. The temporal variation of the local kinetic energy then follows from the governing equation (3.10) as

$$\begin{aligned} 2\omega_i e(y) = & \underbrace{-\rho [\hat{u}(y)\hat{v}(y)^* + \hat{u}(y)^*\hat{v}(y)] \frac{dU_b(y)}{dy}}_{\mathcal{P}: \text{Reynolds stress work against the mean shear}} \underbrace{- \frac{d}{dy} [\hat{p}(y)\hat{v}(y)^* + \hat{p}(y)^*\hat{v}(y)]}_{\text{II: Pressure diffusion}} \\ & - 2\mu \underbrace{\left[ \frac{d\hat{u}(y)}{dy} \frac{d\hat{u}(y)^*}{dy} + \frac{d\hat{v}(y)}{dy} \frac{d\hat{v}(y)^*}{dy} + \alpha^2 (\hat{u}(y)\hat{u}(y)^* + \hat{v}(y)\hat{v}(y)^*) \right]}_{\varepsilon: \text{Viscous dissipation}} \\ & + \mu \underbrace{\frac{d}{dy} \left[ \hat{u}(y) \frac{d\hat{u}(y)^*}{dy} + \hat{u}(y)^* \frac{d\hat{u}(y)}{dy} + \hat{v}(y) \frac{d\hat{v}(y)^*}{dy} + \hat{v}(y)^* \frac{d\hat{v}(y)}{dy} \right]}_{\mathcal{D}: \text{Viscous diffusion}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

and is the result of four distinct mechanisms as indicated in the above equation. Integration of this expression over the channel diameter leads to the equivalent equation governing the evolution of the total fluid kinetic energy,

$$\begin{aligned} 2\omega_i E_{FK} = & - \int_{-h}^{+h} \rho [\hat{u}(y)\hat{v}(y)^* + \hat{u}(y)^*\hat{v}(y)] \frac{dU_b(y)}{dy} dy - [\hat{p}(y)\hat{v}(y)^* + \hat{p}(y)^*\hat{v}(y)]_{-h}^{+h} \\ & - 2\mu \int_{-h}^{+h} \left[ \frac{d\hat{u}(y)}{dy} \frac{d\hat{u}(y)^*}{dy} + \frac{d\hat{v}(y)}{dy} \frac{d\hat{v}(y)^*}{dy} + \alpha^2 (\hat{u}(y)\hat{u}(y)^* + \hat{v}(y)\hat{v}(y)^*) \right] dy \\ & + \mu \left[ \hat{u}(y) \frac{d\hat{u}(y)^*}{dy} + \hat{u}(y)^* \frac{d\hat{u}(y)}{dy} + \hat{v}(y) \frac{d\hat{v}(y)^*}{dy} + \hat{v}(y)^* \frac{d\hat{v}(y)}{dy} \right]_{-h}^{+h}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

### 3.4 Linear stability results

---

While interaction with the base shear flow and viscous dissipation prevails throughout the channel cross-section, pressure and viscous diffusion only contribute at the boundaries and transfer energy between the fluid and the compliant walls.

The kinetic and potential energies associated with the walls are obtained as

$$E_{WK} = m|\omega|^2 (|\hat{\eta}^+|^2 + |\hat{\eta}^-|^2) \quad \text{and} \quad E_{WP} = (B\alpha^4 + T\alpha^2 + K) (|\hat{\eta}^+|^2 + |\hat{\eta}^-|^2), \quad (3.27)$$

respectively. Using the wall equations (3.15), together with the boundary conditions (3.14), yields the temporal variation of the wall energy as

$$\begin{aligned} 2\omega_i(E_{WK} + E_{WP}) = & \underbrace{-2d|\omega|^2 (|\hat{\eta}^+|^2 + |\hat{\eta}^-|^2)}_{E_0} + \underbrace{[\hat{p}(y)\hat{v}(y)^* + \hat{p}(y)^*\hat{v}(y)]_{-h}^{+h}}_{E_1} \\ & - \underbrace{\mu \left[ \hat{v}(y) \frac{d\hat{v}(y)^*}{dy} + \hat{v}(y)^* \frac{d\hat{v}(y)}{dy} \right]_{-h}^{+h}}_{E_2}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Thus, changes in total wall energy are seen to be the result of either dissipation within the wall ( $E_0$ ) or energy exchange at the interface between the fluid and the compliant walls : work done by the pressure force ( $E_1$ ) or the normal viscous stress ( $E_2$ ). Both terms  $E_1$  and  $E_2$  also appear in (3.26) but with opposite sign ; these fluid–structure interaction terms only account for an exchange of energy between the fluid and the walls but do not modify the total energy of the system.

The temporal variation of the total energy (3.22) is then obtained by adding (3.26) and (3.28), which leads to the following integrated total energy budget :

$$\begin{aligned} 2\omega_i E_{tot} = & \underbrace{- \int_{-h}^{+h} \rho [\hat{u}(y)\hat{v}(y)^* + \hat{u}(y)^*\hat{v}(y)] \frac{dU_b(y)}{dy} dy}_{C_1: \text{Energy exchange with the base flow}} \\ & - \underbrace{\mu \left[ \left( \frac{d\hat{u}(y)}{dy} \hat{\eta}^* + \frac{d\hat{u}(y)^*}{dy} \hat{\eta} \right) \frac{dU_b(y)}{dy} \right]_{-h}^{+h}}_{C_2: \text{Energy exchange with the base flow at the walls}} \\ & - \underbrace{2\mu \int_{-h}^{+h} \left[ \frac{d\hat{u}(y)}{dy} \frac{d\hat{u}(y)^*}{dy} + \frac{d\hat{v}(y)}{dy} \frac{d\hat{v}(y)^*}{dy} + \alpha^2 (\hat{u}(y)\hat{u}(y)^* + \hat{v}(y)\hat{v}(y)^*) \right] dy}_{C_3: \text{Viscous dissipation}} \\ & - \underbrace{2d|\omega|^2 (|\hat{\eta}^+|^2 + |\hat{\eta}^-|^2)}_{C_4: \text{Wall damping}}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Hence, the only mechanisms that contribute to variations of the total energy are interactions with the base flow and dissipation (see also [64, 45]). Energy transfer from or to the base flow occurs in the bulk ( $C_1$ ) as well as at the boundaries ( $C_2$ ), and energy dissipation takes place both in the fluid ( $C_3$ ) and in the compliant walls ( $C_4$ ). Note that the kinematic boundary conditions (3.14) have been used to bring to the fore

the role of the base flow shear in the exchange term  $C_2$ . As underlined by Carpenter & Morris[13], the contribution  $C_2$  arises from the interaction of the displaced mean flow and shear stress. In the literature, the terms  $C_1$  and  $C_2$  are often labelled as irreversible energy transfer from the base flow to the perturbation; depending on the signs and phases of the different components in  $C_1$  and  $C_2$ , they may have a destabilizing or a stabilizing influence.

The energy budget (3.29) may be used to recover the temporal growth rate as

$$\omega_i = \underbrace{\hat{C}_1 + \hat{C}_2 + \hat{C}_3 + \hat{C}_4}_{\Sigma}, \quad (3.30)$$

where the different contributions have been renormalized by the total energy,  $\hat{C}_i \equiv C_i/(2E_{tot})$ .

Now that we have identified the different components that contribute to the variation of the perturbation energy, we proceed to analyze their role in the dynamics of the different classes of modes that prevail in the present configuration. In sequence we will address TS, DIV and TWF modes and discuss the corresponding total energy budget as well as the spatial structure of the different contributions.

First we consider the stabilization mechanism of the TS mode as the reduced velocity  $V_R$  is increased. To that purpose, we investigate configurations with  $Re = 10000$ ,  $B_x = 1$  and  $d_x = 0$ . For these typical control parameter values, the TS mode is stable for  $V_R$  in excess of approximately 0.85, as shown by the black curve in figure 3.12(a). To study the influence of  $V_R$  on the energy transfer mechanisms, the most unstable TS mode is considered as  $V_R$  is varied, *i.e.*, the streamwise wavenumber  $\alpha$  is chosen to maximise the temporal growth rate  $\omega_i$  for each value of  $V_R$ .

Figure 3.17(a) plots the components of the total energy budget as  $V_R$  is increased. The associated growth rate  $\omega_i$  is also reported in the same figure. The excellent agreement between the curves of  $\omega_i$ , derived from the eigenvalue problem, and of  $\Sigma$ , right-hand-side of equation (3.30), gives confidence that the computation of the different energy terms is correctly implemented. The curves in figure 3.17(a) show that for the range of  $V_R$  considered here, the major destabilizing contribution is due to the action of the basic velocity gradient working against the Reynolds stress ( $\hat{C}_1$ ). However, as  $V_R$  is increased, this production term  $\hat{C}_1$  is observed to decrease and to be partially balanced by  $\hat{C}_2$ . This suggests two stabilizing mechanisms associated with the compliant wall: one reducing the bulk production term  $\hat{C}_1$  and due to a modification of the perturbation velocity profiles, and another one directly connected to the wall term  $\hat{C}_2$  and due to the displaced mean flow that acts as a dissipative term here. The viscous dissipation ( $\hat{C}_3$ ) is seen to weaken as  $V_R$  is increased, but the overall stabilizing influence dominates for increasing  $V_R$ .

The relative importance of the different components of the total energy (3.22) are displayed in figure 3.17(b) as  $V_R$  is varied, using the notation  $\hat{E}_{FK} = E_{FK}/E_{tot}$ ,  $\hat{E}_{WK} = E_{WK}/E_{tot}$ ,  $\hat{E}_{WP} = E_{WP}/E_{tot}$ , and  $\hat{E}_W = \hat{E}_{WK} + \hat{E}_{WP}$ . This plot shows that, as  $V_R$  is increased, a small part of the fluid kinetic energy is indeed transferred to the wall, mainly as potential energy. This is consistent with a class A mode.

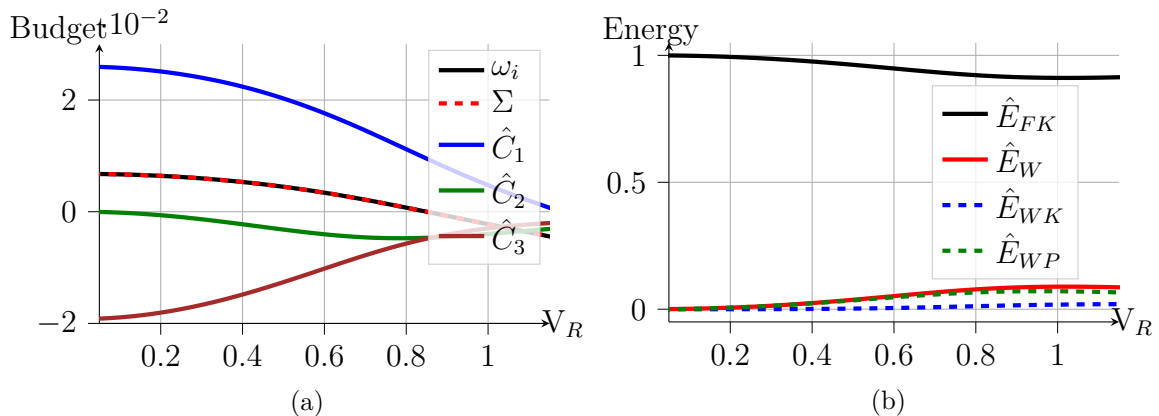


FIG. 3.17 : Energy of most unstable TS mode as  $V_R$  is increased at  $Re = 10000$ ,  $B_* = 1$  and  $d_* = 0$ . (a) Evolution of the integrated total energy budget and comparison with temporal growth rate  $\omega_i$ . (b) Different contributions to the total energy for  $d_* = 0$ .

We now analyze the spatial structure of the fluid kinetic energy budget (3.25). Figure 3.18 shows the wall-normal profiles of the different contributions for the most unstable TS mode computed at different values of  $V_R$  and  $d_*$ . Note that these profiles have been normalized to unit fluid kinetic energy  $E_{FK}$ . Figures 3.18(a) and (b), corresponding to  $V_R = 0$  and  $V_R = 0.03$  at  $d_* = 0$ , show that the production term  $\mathcal{P}$  is significantly modified by an increase of  $V_R$ . In particular, the amplitude of  $\mathcal{P}$  decreases with  $V_R$  and it exhibits a small region of negative production above the critical layer. In this region, the energy is transferred from the wave to the mean flow leading to a decrease of the total energy associated with the fluctuation. A similar observation is made by Metcalfe & Domaradski[20] for the case of a laminar boundary layer stabilized by a compliant membrane. Comparison of figures 3.18(a) and (b) also illustrates the importance of the viscous diffusion term  $\mathcal{D}$  in redistributing energy produced by the Reynolds stress as  $V_R$  is increased, whereas the pressure diffusion term  $\Pi$  has a minor influence. This shows that under the action of the viscous diffusion term, the energy produced by the work of the Reynolds stress is transferred towards the wall where it is dissipated by viscosity ( $\varepsilon$ ). Figure 3.18(a) also reveals that the production term  $\mathcal{P}$  increases near the wall with the emergence of a second peak as  $V_R$  is increased. Due to the pressure diffusion and viscous diffusion terms, which are negatively correlated with  $\mathcal{P}$ , this additional production does not result in a destabilizing effect.

The influence of the dissipation within the compliant wall is illustrated in figures 3.18(b–d) for  $V_R = 1$ . When  $d_*$  is increased from 0 (b) to 0.14 (c), the TS mode is destabilized (not shown here for the sake of conciseness). In figure 3.18(c), the pressure-diffusion term  $\Pi$  is positive across the entire channel, which leads to work of the pressure force at the walls; the viscous diffusion profile  $\mathcal{D}$  is mostly unchanged, but the peak near the wall of the production term  $\mathcal{P}$  becomes the dominant feature. The increase of the dissipation leads to increase the production term in the viscous layer which is consistent with the TS mode (i.e. the phase shift mainly occurs in this region).

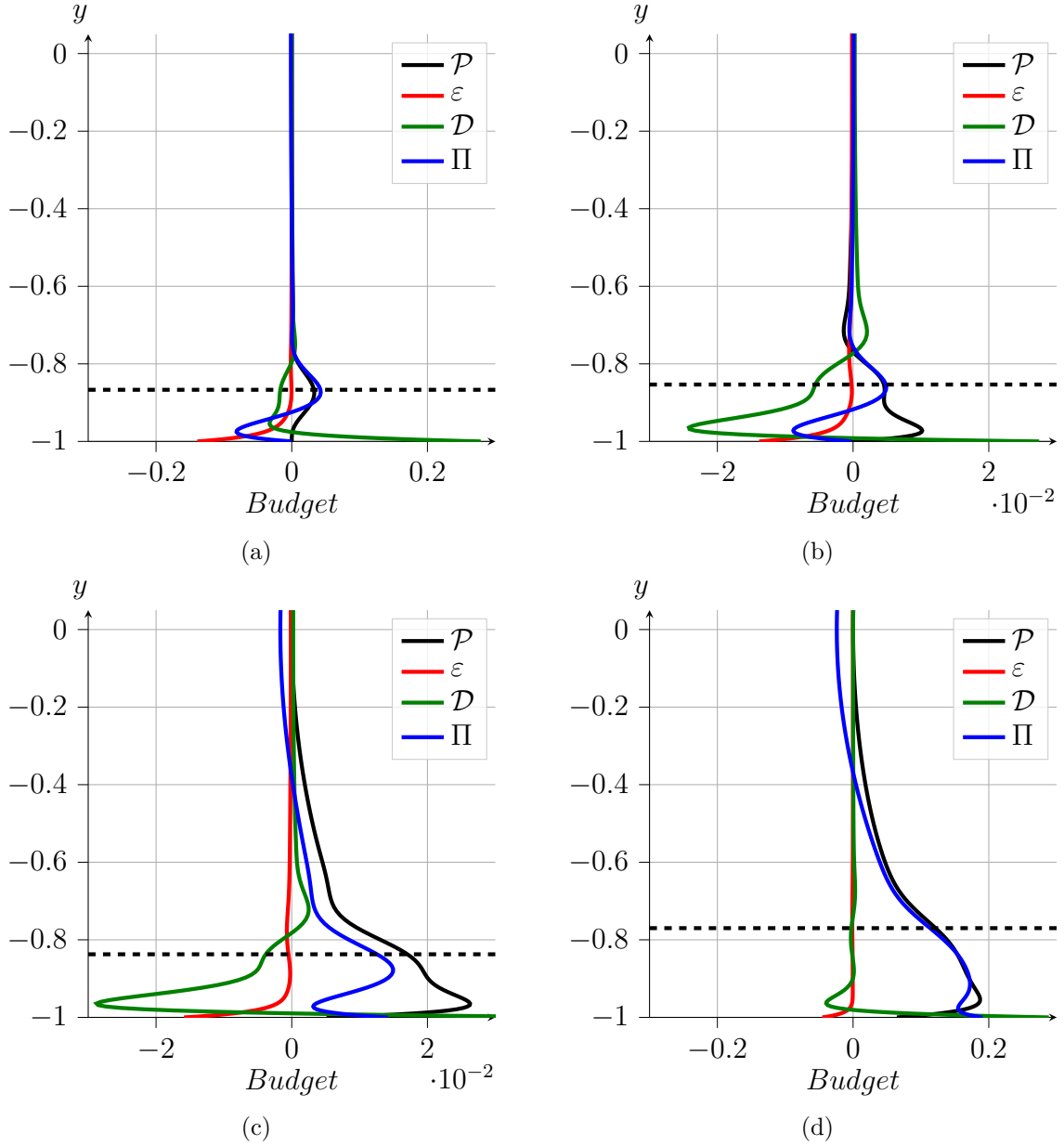


FIG. 3.18 : Fluid kinetic energy budget profiles for most unstable TS mode at  $\text{Re} = 10000$ ,  $B_* = 1$  and (a)  $d_* = 0$ ,  $V_R = 0.03$ , (b)  $d_* = 0$ ,  $V_R = 1$ , (c)  $d_* = 0.14$ ,  $V_R = 1$  and (d)  $d_* = 0.2$ ,  $V_R = 1$ . The wall-normal position of the critical layer is shown in dashed line.

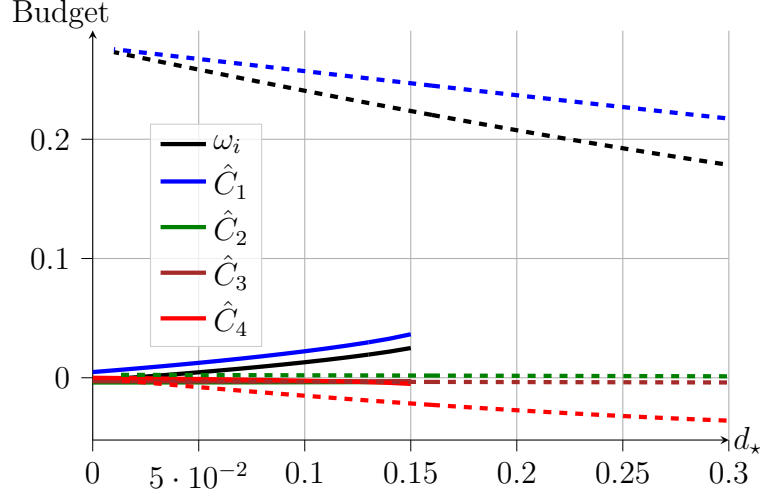


FIG. 3.19 : Energy of most unstable sinuous modes. Evolution of the integrated total energy budget with  $d_*$  for  $V_R = 1$ . TS mode is shown in full line. Sinuous TWF mode is shown in dashed lines. At  $d_* \approx 0.15$  modes collapse.

Finally, for a stronger wall damping  $d_* = 0.2$  (figure 3.18d), the pressure diffusion term  $\Pi$  is almost identical to the production term  $\mathcal{P}$ , in contrast with what is observed for  $d_* = 0.14$  and  $d_* = 0$ . In particular,  $\Pi$  exhibits positive values near the wall which are associated with work of the pressure at the wall. This indicates that the mode is then in strong interaction with the wall and could probably be classified as a TWF mode. In particular, at  $d_* = 0.15$ , a branch switching occurs and a collapse between TS and TWF mode is observed. This behaviour is illustrated in figure 3.19. In the figure,  $\alpha$  is chosen to maximise  $\omega_i$  for each value of  $d_*$ . On one hand, for  $d_* < 0.15$  where TS mode exists, the production term  $\hat{C}_1$  is increasing with the dissipation. It has for consequence to increase the temporal amplification rate of the TS mode in agreement with class A modes. On the other hand, for  $d_* > 0.15$ , the temporal amplification rate is decreasing with the wall dissipation. This further indicates that beyond  $d_* = 0.15$ , the mode is mainly associated with a TWF instability.

After the discussion of the TS modes, we now address the total energy budgets prevailing for DIV modes, of both sinuous and varicose symmetry. The evolution of the energy transfer mechanisms is monitored as  $d_*$  is varied, since this is the main control parameter influencing the dynamics of DIV modes. Figure 3.20 shows data computed over the range  $0 < d_* < 10$  at  $\text{Re} = 10000$ ,  $B_* = 1$  and  $V_R = 2$ . The evolution with  $d_*$  of the different terms of the energy budget for sinuous (figure 3.20a) and varicose (figure 3.20c) modes reveals that the term  $\hat{C}_2$  dominates for both symmetries. This term accounts for the energy exchange with the base flow due to wall displacement, which is therefore identified as the main mechanism promoting instability of the DIV modes. It also confirms the influence of the Reynolds number onto the divergence mode as observed in the previous section. The importance of viscous effects for divergence



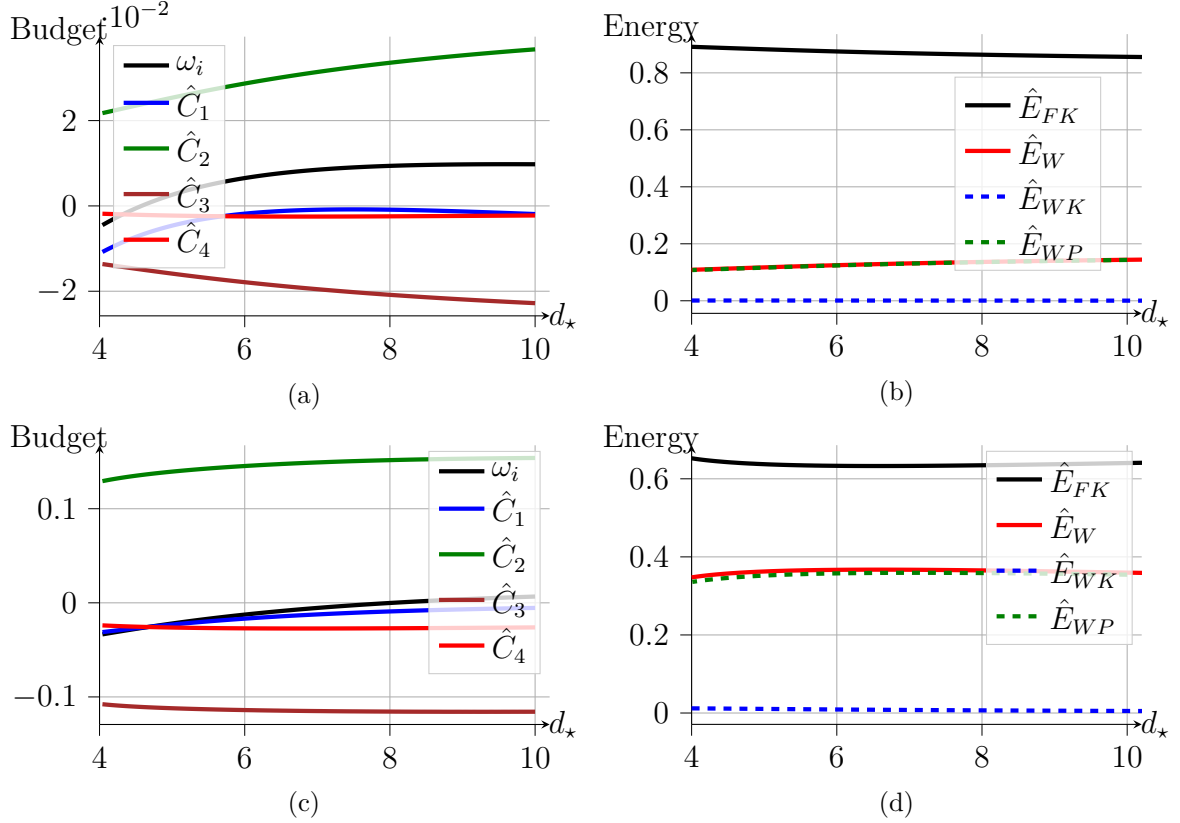


FIG. 3.20 : Energy of most unstable DIV mode as  $d_*$  is increased at  $\text{Re} = 10000$ ,  $B_* = 1$  and  $V_R = 2$ . (a,c) Evolution of integrated total energy budget and (b,d) breakdown of total energy into its components for (a,b) sinuous and (c,d) varicose modes.

modes has also been observed by Carpenter & Morris [13] for the boundary-layer flow case. The destabilizing effect of  $\hat{C}_2$  is partially balanced by the work of the Reynolds stress against the basic shear  $\hat{C}_1$ , the viscous dissipation  $\hat{C}_3$  and the wall dissipation  $\hat{C}_4$ . Hence, it illustrates the dual nature of viscous effects for the divergence mode. On one hand, it promotes the instability by propagating the energy production from the wall displacement into the flow domain, but on the other hand, viscosity also plays its usual dissipative role. Inspection of the different contributions to the total energy (figure 3.20b,d) shows that while the fluid energy remains the main factor in both situations, the varicose modes involve significantly more wall energy than their sinuous counterparts. Due to the slow dynamics of these modes, the wall energy is almost entirely made up of potential energy for both symmetries. It should also be mentioned that due to the long wavelengths of the DIV modes, the main contribution to the wall potential energy  $E_{WP}$  (3.27) is here due to the stiffness while the flexural rigidity only plays a marginal role.

The cross-channel profiles of the fluid kinetic energy budgets for the divergence modes are shown in figure 3.21. The figure demonstrates that the production, diffusion and dissipation contributions are all localized in the near wall region. Comparison of

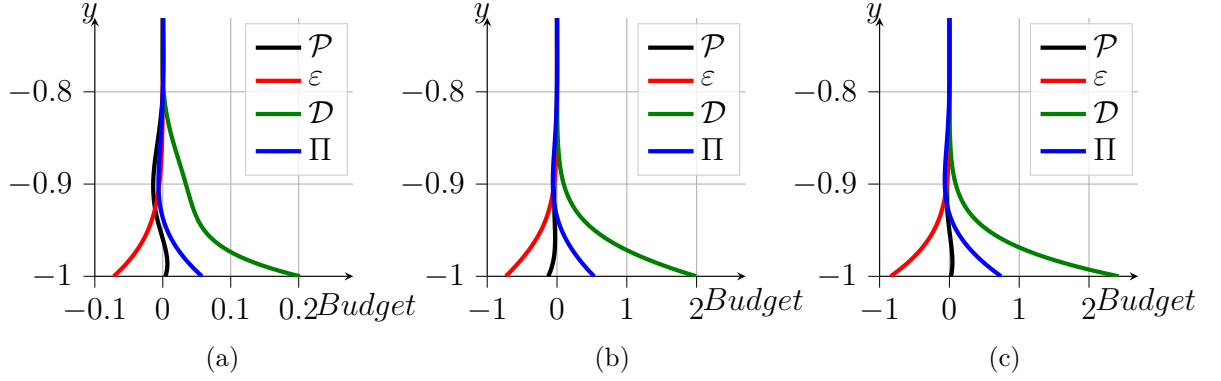


FIG. 3.21 : Fluid kinetic energy budget profiles for most unstable DIV mode at  $\text{Re} = 10000$ ,  $B_* = 1$  and  $V_R = 2$  and (a)  $d_* = 5$  sinuous mode, (b)  $d_* = 5$  varicose mode, (c)  $d_* = 9$  varicose mode.

figures 3.21(a) and (b) reveals a notable difference between sinuous and varicose modes at  $d_* = 5$ : while the production term  $\mathcal{P}$  is negative throughout the channel cross-section for the varicose mode, the sinuous mode exhibits a small region near the wall with positive values of the production  $\mathcal{P}$ . Interestingly, when  $d_*$  is further increased up to  $d_* = 9$ , the plots in figure 3.21(c) show that then the varicose production term  $\mathcal{P}$  also exhibits a weakly positive region near the wall. This change of sign of the production term appears to approximately coincide with the onset of divergence instability, *i.e.*, change of sign of the growth rate  $\omega_i$  plotted in figure 3.20(c). Hence, while the energy budget is dominated by the term  $\hat{C}_2$ , it seems that the instability is also significantly influenced by  $\mathcal{P}$ .

Finally we consider TWF modes. For this final class of modes, we restrict our analysis to the varicose symmetry which has been observed to always dominate over the sinuous symmetry. The evolution of the total energy budgets with  $V_R$  is shown in figure 3.22(a) for  $\text{Re} = 10000$ ,  $B_* = 1$  and  $d_* = 0$ . These plots indicate that the budget is driven by the production term  $\hat{C}_1$ , in agreement with previous analyses [16, 20]. However, it is interesting to notice that energy transfer  $\hat{C}_2$  from the baseflow to the perturbation via the boundaries also promotes the instability. Both contributions  $\hat{C}_1$  and  $\hat{C}_2$  have a destabilizing influence. The distribution of the total energy among its different components plotted in figure 3.22(b) shows that for small values of  $V_R$  the wall is the most energetic component of this fluid-structure system, but for  $V_R > 1.6$  the kinetic energy of the fluid overcomes the wall contribution. Thus, the present scenario appears to be exactly opposite the situation prevailing for TS modes: as  $V_R$  is increased, the ratio  $E_{FK}/E_W$  decreases for TS modes while it increases for TWF modes. This is in accordance with the classification of TS modes as class A and TWF modes as class B modes. Finally, monitoring the potential and kinetic components of the wall energy ( $E_{WP}$  and  $E_{WK}$  respectively) shows that the wall energy is essentially due to the kinematic contribution for TWF modes, which is in contrast to the situation prevailing for DIV modes.

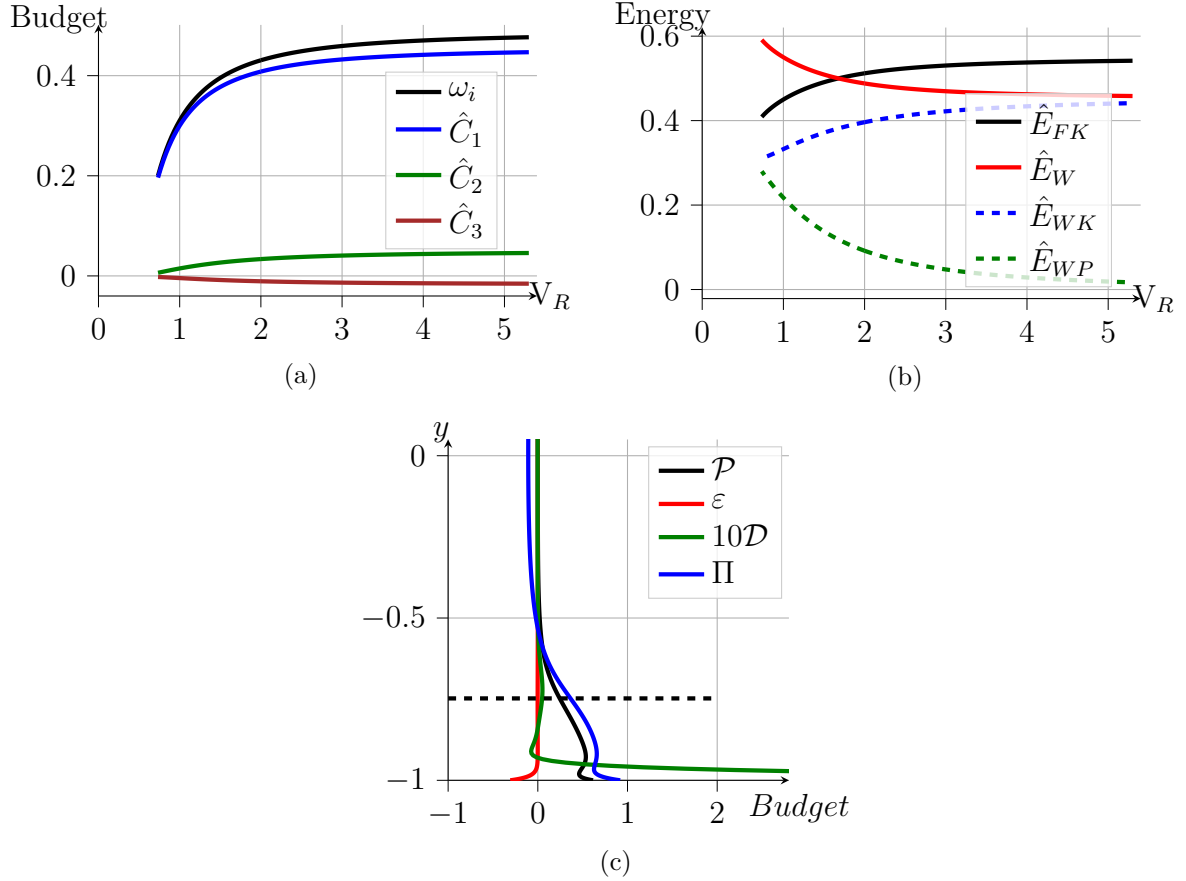


FIG. 3.22 : Energy of most unstable varicose TWF mode as  $V_R$  is increased at  $Re = 10000$ ,  $B_\star = 1$  and  $d_\star = 0$ . (a) Evolution of integrated total energy budget. (b) Distribution of total energy as fluid and wall contributions. (c) Cross-channel profile of the fluid kinetic energy budget for  $V_R = 3$ . The wall-normal position of the critical layer is shown in dashed line.

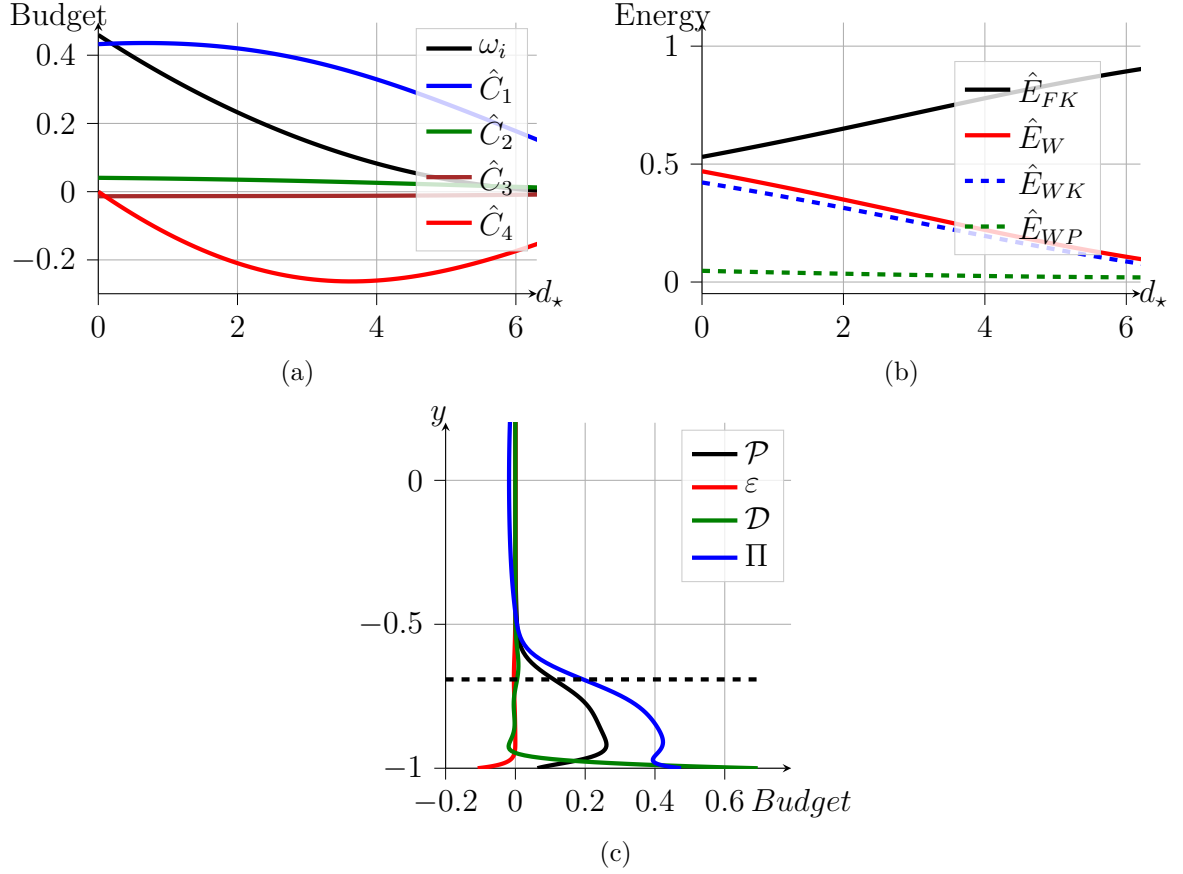


FIG. 3.23 : Energy of most unstable varicose TWF mode as  $d_*$  is increased at  $\text{Re} = 10000$ ,  $B_* = 1$  and  $V_R = 3$ . (a) Evolution of integrated total energy budget. (b) Distribution of total energy as fluid and wall contributions. (c) Cross-channel profile of the fluid kinetic energy budget for  $d_* = 4$ . The wall-normal position of the critical layer is shown in dashed-line.

In figure 3.22(c), the fluid kinetic energy profile is shown across the channel diameter for  $V_R = 3$ . The role of viscosity is found to be mainly concentrated in two distinct areas. The viscous diffusion term  $\mathcal{D}$  exhibits a first shallow peak around the critical layer (indicated by the dashed line), while a second stronger peak emerges near the wall due to the viscous layer. This is consistent with the theoretical model developed by Davies & Carpenter[16]. However, the dominant production term  $\mathcal{P}$  is associated with the work of the Reynolds stress against the mean shear and does not exhibit a maximum near the critical layer. Its profile presents rather an inflection point near the critical layer, which is in contrast with observations by Metcalfe & Domaradski[20] for the flat plate boundary layer. We also observe that both pressure diffusion  $\Pi$  and viscous diffusion  $\mathcal{D}$  display large positive values near the wall. Thus the energy production due to the basic shear flow is transferred to the wall through the action of both diffusion processes.

To conclude this section on energy transfer mechanisms, the influence of wall dissipation  $d_*$  is reported in figure 3.23 for the most unstable varicose TWF modes at  $\text{Re} = 10000$ ,  $B_* = 1$  and  $V_R = 3$ . The plots in figure 3.23(a) show that for small values of  $d_*$  the stabilization of the TWF mode is essentially due to the increasing energy dissipation  $\hat{C}_4$  in the compliant walls. For larger values of  $d_*$ , both the work of the Reynolds stress against the basic shear  $\hat{C}_1$  and the wall dissipation  $\hat{C}_4$  evolve so as to stabilize the TWF mode. This illustrates that two distinct mechanisms are at play to diminish the growth rate for the TWF mode. The curves in figure 3.23(b) illustrate the redistribution of the total energy due to wall dissipation : as  $d_*$  is increased, the wall contribution (essentially kinetic energy) to the total energy decreases almost linearly in favour of the fluid contribution. The effect of the wall damping on the wall-normal profiles of the fluid kinetic energy is shown in figure 3.23(c). While these profiles at  $d_* = 4$  are similar to those prevailing without wall dissipation (see figure 3.22c), it is observed that the production  $\mathcal{P}$  exhibits a lower amplitude than the pressure diffusion term  $\Pi$ . As  $d_*$  increases, the energy transfer from the fluid towards the wall is no longer sufficient to balance the higher wall dissipation and, as a result the proportion of fluid energy increases in the total energy of the perturbation.

### 3.5 Concluding remarks

In this paper, we have revisited the linear stability problem of a fluid interacting with a compliant channel. The walls are modeled as spring-backed deformable plates including a damping mechanism. A general numerical method free of spurious modes is derived to tackle this problem. By taking advantage of the base flow symmetries, varicose and sinuous eigenmodes are computed separately and efficiently. A dimensional analysis has been carried out to identify the most physically relevant control parameters. Traveling wave flutter (TWF), divergence (DIV) and Tollmien–Schlichting (TS) modes are then recovered. The main conclusions of the current study are as follows :

1. TWF waves are mainly driven by the reduced velocity  $V_R$  which measures the strength of the coupling between the fluid and the compliant walls. The Reynolds number effect is not significant for these modes.
2. For TWF modes, the perturbations of varicose symmetry are observed to be destabilized first when increasing  $V_R$ . While a decrease in the flexural rigidity is accompanied by a stabilization of the TS mode, it enhances the amplification of TWF modes. This is especially true for the varicose TWF modes. In particular, we show that the compliant wall potential for laminar-turbulent transition delay is almost negligible when the varicose symmetry is taken into account. This finding extends the previous linear stability results obtained for the same flow case but either limited to the sinuous modes [16, 17] or focusing on a quite narrow region of parameter space [68].
3. For the varicose symmetry, a linear relationship is found between the critical

reduced velocity and the wall dissipation, independently of the flexural rigidity. For large values of  $V_R$ , the dynamics is eventually dominated by DIV modes for a certain amount of wall dissipation and for both symmetries. While, a stabilizing effect is observed for the divergence mode when increasing the Reynolds number, sinuous perturbations are amplified at a lower wall dissipation than their varicose counterpart. Such a distinction between varicose and sinuous symmetries was not identified in previous studies.

We have also uncovered physical mechanisms responsible for the amplification of the different categories of modes. This was accomplished by evaluating total energy budgets. First, for  $d_* = 0$ , kinetic energy budgets indicate that the TS mode is stabilized as  $V_R$  is increasing under the action of two mechanisms. On one hand, the work of the Reynolds stress against the mean flow exhibits a region above the critical layer which is negative. Here, energy is transferred from the wave to the base flow. The second mechanism is associated with a an irreversible energy transfer from the fluctuation to the mean flow due to the mean flow displacement near the walls. On the other hand, the vertical distribution of production term associated with TWF mode is observed to peak near the walls and exhibits an inflexion point close to the critical layer for both symmetries. Hence, it shows some differences with results provided by Domaradzki, J.A. & Metcalfe [20] for the boundary layer where a peak is observed near the critical layer position. Furthermore, the energy transfer from the wall to the fluid is mainly attributed to a pressure diffusion term.

Secondly, the dominant term for DIV modes appears to be associated with an irreversible energy exchange due to the interaction of the displaced mean flow and shear stress.

Extension of the present study to non modal stability analyses can be considered in a future work. Hoepffner *et al.* [45] have investigated the same problem for three-dimensional perturbations but numerical oscillations were observed by the authors when increasing the number of eigenmodes used to compute transient growth. The formulation adopted here is free of spurious modes and we believe that the problem can be solved using the numerical procedure developed in the present analysis. In addition, the role of the reduced velocity has not been investigated by Hoepffner *et al.* [45]. Finally, it should also be interesting to extend our study to pulsatile flow [74, 75] and the pipe geometry which cover more biologically significant phenomena.

## 3.6 Appendix : validation and influence of boundary conditions

For validation purposes, we adopt choices made by Davies & Carpenter [16] for dimensionless wall equations. Here, the Reynolds number is based on  $h$ ,  $\nu$  and the centerline velocity. The dimensionless wall parameters are

$$\Gamma = \frac{m}{\rho h}, \quad B_* = \frac{B}{h\rho\nu^2}, \quad K_* = \frac{Kh^3}{\rho\nu^2}, \quad d_* = \frac{dh}{\rho\nu}.$$

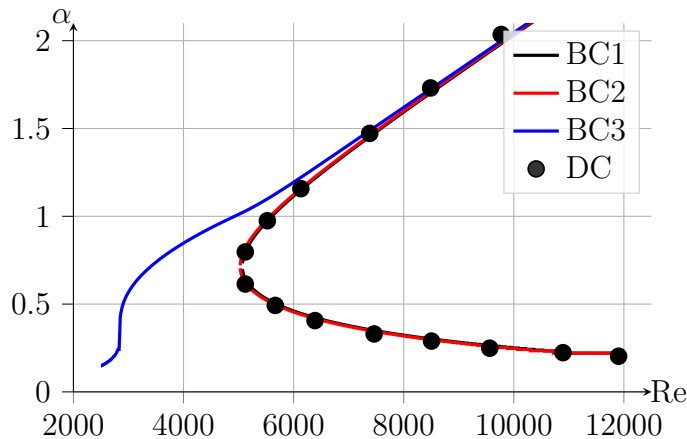


FIG. 3.24 : Neutral curves. Sinuous configuration. Validation and illustration of the effect of the boundary conditions used for the fluid/structure interaction problem.  $K_* = 10^7$ ,  $B_* = 4K_*$ ,  $d_* = 0$  and  $\Gamma = 2$ . *DC* : results extracted from [16]. *BC1* : the formulation adopted in the present paper for the fluid/structure interaction problem. *BC2* : the pressure at the wall is expressed as in [16] and we neglect the viscous stress at the walls. *BC3* : formulation adopted by [42].

Davies & Carpenter [16] used an Orr–Sommerfeld equation for solving the fluid–structure interaction problem. The pressure at the lower wall is recovered through :

$$p(-1) = \frac{1}{2} \left( -i\omega \int_{-1}^1 \hat{v} dy + i\alpha \int_{-1}^1 U_b \hat{v} dy \right)$$

where the viscous terms have been neglected. For consistency, the authors have also neglected the effect of the viscous stress at the wall for the coupling between the fluid and the walls. We recall that this formulation is correct only for the sinuous configuration. Guaus *et al.* [42] used a primitive formulation for the same problem and considered only the pressure at the wall for the force associated with the fluid acting at the walls. However, the pressure is computed without neglecting the viscous stress along the wall normal direction. In the present study, we have not neglected the effect of the viscous stress on both the pressure and the force acting onto the walls. In figure 3.24, we show the neutral curve for the sinuous TWF mode for  $K_* = 10^7$ ,  $B_* = 4K_*$ ,  $d_* = 0$  and  $\Gamma = 2$ . The figure shows an almost perfect agreement between our approach and the one given by Davies & Carpenter [16]. It supports the hypotheses made by the previous authors. Nevertheless, our approach is more general because it also allows to deal with the varicose symmetry. In addition, the system also reduces to an Orr–Sommerfeld problem with only one velocity component. The figure 3.24 also shows that the formulation made by Guaus *et al.* [42] is not consistent and leads to discrepancies near the critical Reynolds number.

## Chapitre 4

# Linear instabilities of pulsatile plane channel flow between compliant walls

Après avoir étudié les configurations stationnaires dans le chapitre précédent, celui-ci est maintenant consacré à la dynamique des écoulements pulsés en interaction avec des parois flexibles. De telles configurations sont régies par deux paramètres supplémentaires : le nombre de Womersley  $Wo$  qui mesure la fréquence de pulsation et l'amplitude  $\tilde{Q}$  de la partie oscillante du débit, relatif au débit moyen. Nous avons généralement adopté l'approche qui consiste à partir du cas stationnaire et à augmenter l'amplitude  $\tilde{Q}$  pour étudier les effets de la pulsation sur la dynamique, pour différentes valeurs de  $Wo$  et des autres paramètres. L'analyse de stabilité linéaire est réalisée dans le cadre de la théorie de Floquet et une approche numérique originale a été développée, qui supprime les modes parasites tout en étant très efficace en termes de temps de calcul (voir chapitre 2). Alors que certains modes ont un comportement qui rappelle beaucoup le cas stationnaire, des comportements très riches et variés ont été mis en évidence. En particulier, nous avons découvert un cas très intéressant de mode qui mélange deux ondes de structure différentes, couplées à travers les harmoniques des fonctions propres de Floquet : c'est donc un phénomène propre aux écoulements périodiques en temps.

Vu la richesse des comportements et le nombre de paramètres de contrôle, c'est difficile d'être exhaustif. Néanmoins, nous nous sommes efforcés de couvrir le plus largement possible l'espace des paramètres. Une variété de courbes critiques, séparant les régions stables des régions instables, sont présentées pour donner une idée de la structure de l'espace des paramètres de contrôle.

Ce dernier chapitre se présente sous la forme d'un article en cours de préparation pour être soumis au *Journal of Fluid Mechanics*.



# Linear instabilities of pulsatile plane channel flow between compliant walls

Smail LEBBAL, Frédéric ALIZARD, Benoît PIER

*Laboratoire de mécanique des fluides et d'acoustique,  
CNRS — École centrale de Lyon — Université de Lyon 1 — INSA  
Lyon,  
36 avenue Guy-de-Collongue, 69134 Écully, France.*

## Abstract

The linear dynamics of perturbations developing in a channel with compliant walls is investigated for pulsatile base flows. It is shown that the flow dynamics is mainly governed by four control parameters : the Reynolds number, the reduced velocity, the Womersley number and the amplitude of the base flow modulation. Linear stability analyses are carried out within the framework of Floquet theory, implementing an efficient approach for removing spurious eigenmodes. The characteristics of flow-based (Tollmien–Schlichting) and wall-based (both travelling-wave flutter and divergence) modes are investigated over a large control-parameter space. It is shown that traveling wave flutter (TWF) modes are predominantly influenced by the reduced velocity and that the Reynolds number has only a marginal effect. The critical reduced velocity (corresponding to onset of linear instability) is found to depend both on the Womersley number and modulation amplitude for a given set of wall parameters. The Tollmien–Schlichting (TS) mode is shown to be only weakly affected by the flexibility of the wall. Finally, the classification given by Benjamin (*J. Fluid Mech.* **16** 436–450, 1963) is found to be too restrictive in the case of pulsatile base flows. In particular, a new type of transition mode is found that results from the coalescence of two Floquet eigenmodes : interaction between TS and TWF modes due to coupling of the different Floquet harmonics, a phenomenon specific to time-periodic base flows.

## 4.1 Introduction

Pulsating flows in pipe or channel flows are laminar provided that Reynolds numbers are sufficiently low as is largely the case for vast parts of the cardiovascular system. In the main arteries, however, blood flow may experience instability waves, generating large fluctuating shear stresses, which are a possible cause for cardiovascular diseases [14]. The compliance of arteries plays a major role in blood transport, such as maintaining blood pressure and regularizing the flow rate [54]. The flexibility of the aorta is also a key element in minimizing pressure fluctuations of blood provided by the left ventricle and distributing oxygen rich blood through capillaries [69]. For these reasons, both flexible walls and pulsatile flow are ubiquitous in physiological configurations. When a pulsatile flow interacts with compliant walls, a better understanding of the development of instabilities is therefore required in order to improve the analysis of the link between wall-shear stress distributions and flow dynamics.

The theory of viscous flow interacting with compliant walls has come a long way from [39]’s initial observations of the outstanding performance of dolphin skins in delaying turbulence, to the recent review of Kumaran [55] enlightening the various instability mechanisms. In the 50s, Kramer conducted pioneering tests in water by towing a dolphin-shaped object covered with viscoelastic materials of varying compliance [52, 53]. The author shows that the compliant coating leads to a significant drag reduction and suggests that the dolphin’s secret results in the laminarisation of the flow due to its skin material.

On one hand, several researchers tried and failed to replicate Kramer’s experiments; see [30, 31] for reviews. On the other hand, theoretical results of Carpenter & Garrad [11] extend the first analytical studies developed by Benjamin [3, 2, 4] and Landahl [56] and demonstrate that a suitable choice of wall properties could control the onset of the primary instability mode of a flat plate boundary layer, the so-called Tollmien–Schlichting (TS) mode. However, it is also suggested that the emergence of solid-based instability modes due to fluid–structure interactions (also referenced as flow–structure instabilities, FSI) can limit the potential of laminarisation of the flow [12]. The FSI modes can be divided into two categories : the traveling-wave flutter (TWF) modes and the (almost static) divergence (DIV) modes. While the physics of TWF modes is fairly well understood using an analogy with the onset of water-waves [67], scientists are still arguing about the physical mechanism behind the divergence mode. The first successful experimental attempt to reproduce Kramer’s findings was given by Gaster [34]. In particular, he found that the measured growth rates of TS waves developing along a simple compliant coating match those obtained by Carpenter & Garrad [11].

Several attempts to classify instability modes in the presence of fluid–structure interactions were made since the seminal study of [4]. In particular, three types of instability mechanisms have been considered : TS modes belong to class A, TWF modes are associated with class B and class C modes correspond to almost steady waves (i.e. the divergence mode). Apart from these modes, a transition mode is also found by Sen & Arora [81], resulting from the coalescence between a TS mode and

a TWF mode. For instance, Davies & Carpenter [16] have shown that the transition mode could develop inside a flow between a compliant channel for a sufficiently high level of wall damping. For the same flow case, we have recently shown that while class B modes are mainly driven by the reduced velocity, which corresponds to the ratio of characteristic wall and advection time scales, class C mode is influenced by both the Reynolds number and the reduced velocity [60].

Independently of studies assessing optimal properties of wall coating to delay transition to turbulence in wall bounded flows, the stability of pulsatile flow with respect to viscous shear instability modes has been theoretically addressed since the middle of the 70s [18]. In comparison with steady flows, pulsatile flows are governed by additional control parameters : the pulsation amplitudes and the pulsating frequency (corresponding to the Womersley number  $Wo$ ). In physiological situations, typical Womersley numbers for large blood vessels are in the range 5–15 [54]. Within a Floquet theory framework, von Kerczek [50] shows that the sinusoidally pulsating flow developing between two flat plates is more stable than the steady plane Poiseuille flow for Womersley numbers in excess of  $Wo = 12$ . This result was confirmed by direct numerical simulations carried out by Singer *et al.* [85]. Using linear Floquet stability analyses and nonlinear numerical simulations, Pier & Schmid [74] explored a large parameter space for the same flow configuration, confirming and extending the earlier results given by von Kerczek [50].

On the other hand, several authors [88, 6] have found that the perturbations may experience a strong increase in kinetic energy during the deceleration phase of the pulsatile base flow. This suggests that transient growth mechanisms and nonlinear effects come into play during this phase and that the flow could possibly break down to turbulence. Recently such a scenario has been further supported by nonmodal stability analyses, experiments and direct numerical simulations for both pipe and channel flows [97, 96, 75].

In spite of major successes achieved so far in the understanding of the dynamics prevailing for either pulsatile base flows or wall flexibility, only few studies address these two effects in combination. For the channel flow case, using Floquet stability analyses, Tsigklifis & Lucey [91] show that wall flexibility has a stabilizing effect for some range of the Womersley number. The combined effect of the wall-damping and Womersley number is also illustrated by these authors. However, the effect of the reduced velocity on travelling wave flutter mode is not considered when the pulsatile base flow component comes into play. Furthermore, it is not completely clear if the classification made by Benjamin [4] still holds for the pulsatile flow case. Finally, the transition mode that emerges due to an increase in wall damping is not investigated when considering a pulsatile flow component.

To provide further understanding to the above points, the present study addresses the linear stability properties of small-amplitude perturbations developing in pulsatile flows through compliant channels. This paper is organized as follows. In the section 2, we introduce the coupled fluid–structure system and the base flow and non-dimensional control parameters are given in section 3. The mathematical formulation of the linear

## 4.2 Fluid–structure interaction model and interface conditions.

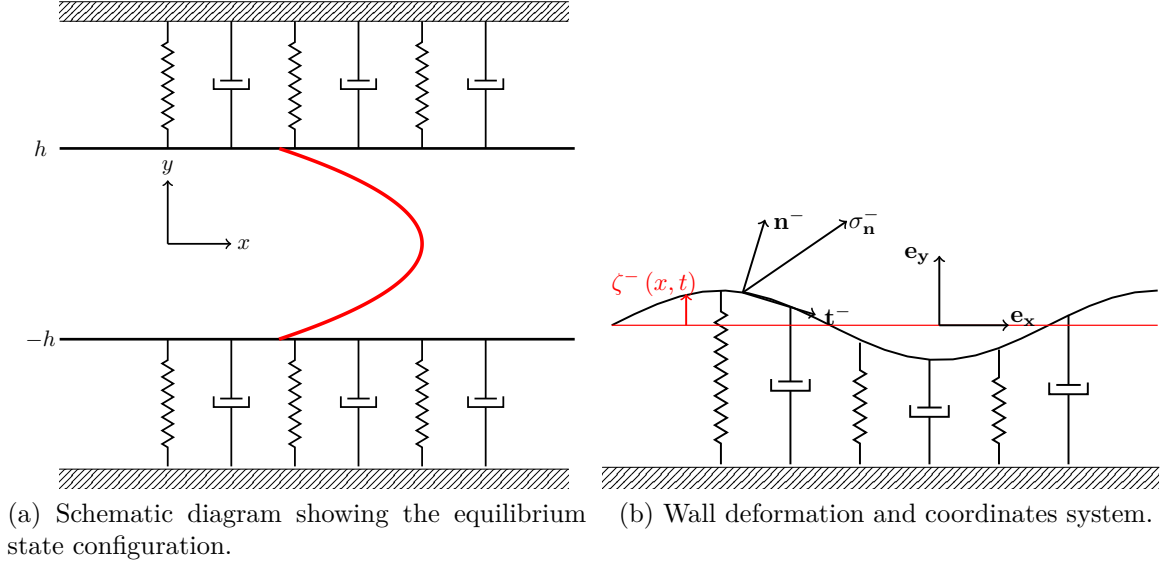


FIG. 4.1 : Channel flow with infinite spring-backed flexible walls.

stability problem is presented in section 4. The numerical methods to solve and reduce the generalized eigenvalue problem are explained in section 5. Section 6 devoted to the results constitutes the main contribution of the paper : discussion of the spectra, influence of the control parameters, spatio-temporal structure of the eigenmodes, and a variety of critical curves associated with onset of linear instability.

## 4.2 Fluid–structure interaction model and interface conditions.

In the present study, the analysis is restricted to the two-dimensional case. We introduce the Cartesian coordinate system  $(x, y)$  with unit vectors  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  and consider an incompressible Newtonian fluid with dynamic viscosity  $\mu$  and density  $\rho$  between two spring-backed deformable plates located at  $y = \zeta^\pm(x, t)$  which are allowed to move only in the wall-normal direction (see figure 4.1). The flow between the walls is governed by the Navier–Stokes equations

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}, \quad (4.1)$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (4.2)$$

where  $\mathbf{u} = (u, v)$  is the velocity field, with streamwise ( $u$ ) and wall-normal ( $v$ ) velocity components, respectively, and  $p$  the pressure field.

The movement of the flexible plates obeys the following equations :

$$m \frac{\partial^2 \zeta^\pm}{\partial t^2} + d \frac{\partial \zeta^\pm}{\partial t} + \left( B \frac{\partial^4}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K \right) \zeta^\pm = f^\pm, \quad (4.3)$$

where  $m$  denotes the mass per unit area of the plates,  $d$  their damping coefficient,  $B$  the flexural rigidity,  $T$  the wall tension,  $K$  the spring stiffness and  $f^\pm$  represents the  $y$ -component of the hydrodynamic forces acting on the plates. These forces are obtained as

$$f^\pm = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{f}^\pm \quad \text{with} \quad \mathbf{f}^\pm = \left( \overline{\overline{\tau}}^\pm - \delta p^\pm \mathbf{I} \right) \cdot \mathbf{n}^\pm. \quad (4.4)$$

Here  $\overline{\overline{\tau}}^\pm$  denotes the viscous stress tensor at the walls,  $\delta p^\pm$  the transmural surface pressure and  $\mathbf{n}^\pm = (n_x^\pm, n_y^\pm)$  is the unit vector normal to the walls pointing towards the fluid. The  $y$  component of the normal forces acting on the plate then reads

$$f^\pm = \mu \left( \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\zeta^\pm} + \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{y=\zeta^\pm} \right) n_x^\pm + 2\mu \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y=\zeta^\pm} n_y^\pm - \delta p^\pm n_y^\pm, \quad (4.5)$$

with

$$n_x^\pm = \pm \frac{\partial \zeta^\pm}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial \zeta^\pm}{\partial x} \right)^2}} \quad \text{and} \quad n_y^\pm = \mp \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial \zeta^\pm}{\partial x} \right)^2}}. \quad (4.6)$$

Finally, the no-slip conditions on both walls lead to the kinematic conditions :

$$u = 0 \quad \text{and} \quad v = \frac{\partial \zeta^\pm}{\partial t} \quad \text{for} \quad y = \zeta^\pm. \quad (4.7)$$

The fluid–structure interaction problem is thus fully defined by the coupling of the fluid equations (4.1,4.2), the wall equations (4.3,4.5) and the boundary conditions (4.7).

### 4.3 Base flows and non-dimensional control parameters

A pulsatile base flow, of frequency  $\Omega$ , is considered. Such a flow is driven by a spatially uniform and temporally periodic streamwise pressure gradient and is obtained as an exact solution of the Navier–Stokes equations. The solution consists of a velocity field in the streamwise direction with profiles that only depend on the wall-normal coordinate and time. It can be expanded as a temporal Fourier series

$$\mathbf{U}(y, t) = U(y, t) \mathbf{e}_x \quad \text{with} \quad U(y, t) = \sum_n U^{(n)}(y) \exp(in\Omega t). \quad (4.8)$$

Similarly, the pressure gradient that drives the flow is expanded as

$$G(t) = \sum_n G^{(n)} \exp(in\Omega t) \quad (4.9)$$

and is associated with a pulsatile flow rate

$$Q(t) = \sum_n Q^{(n)} \exp(in\Omega t). \quad (4.10)$$

### 4.3 Base flows and non-dimensional control parameters

---

The velocity profile is analytically obtained for each harmonic component. The mean-flow component  $U^{(0)}(y)$  corresponds to a parabolic steady Poiseuille flow solution. For  $n \neq 0$ , the profiles  $U^{(n)}(y)$  are obtained in terms of exponential functions [94]. Analytical expressions are detailed in the appendix of [75]. In this work, we focus on pulsatile base flows with a single oscillating component. We can thus write the flow rate as :

$$Q(t) = Q^{(0)} \left( 1 + \tilde{Q} \cos \Omega t \right), \quad (4.11)$$

with the relative pulsating amplitude  $\tilde{Q}$  defined as

$$\tilde{Q} = 2 \frac{Q^{(1)}}{Q^{(0)}}. \quad (4.12)$$

The problem is then characterized by 11 dimensional parameters : the mean flow rate  $[Q^{(0)}] = \text{m}^3\text{s}^{-1}$ , the half-channel width  $[h] = \text{m}$ , the fluid density  $[\rho] = \text{kg m}^{-3}$ , the kinematic viscosity  $[\nu] = \text{m}^2\text{s}^{-1}$ , the mass of the plate per unit area  $[m] = \text{kg m}^{-2}$ , the damping coefficient of the wall  $[d] = \text{kg m}^{-2}\text{s}^{-1}$ , the bending stiffness of the plate  $[B] = \text{kg m}^2\text{s}^{-2}$ , the wall tension  $[T] = \text{kg s}^{-2}$ , the spring stiffness  $[K] = \text{kg m}^{-2}\text{s}^{-2}$ , the pulsation frequency  $[\Omega] = \text{s}^{-1}$  and the amplitude of the oscillating flow component  $[Q^{(1)}] = \text{m}^3\text{s}^{-1}$ . Hence, the present configuration may be described by 8 non-dimensional control parameters.

The base flow is characterized by three non-dimensional parameters :

$$\text{Re} = \frac{Q^{(0)}}{\nu}, \quad \text{Wo} = h\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}, \quad \text{and} \quad \tilde{Q} = 2\frac{Q^{(1)}}{Q^{(0)}}. \quad (4.13)$$

Here, the Reynolds number  $\text{Re}$  is based on the average fluid velocity and the channel diameter ; the Womersley number  $\text{Wo}$  is a measure of the pulsation frequency and can be interpreted as the ratio of the channel diameter to the thickness  $\delta = \sqrt{\nu/\Omega}$  of the oscillating Stokes boundary layers.

The parameters associated with the walls are non-dimensionalized with respect to the spring stiffness  $K$ , which leads to

$$B_* = \frac{B}{Kh^4}, \quad T_* = \frac{T}{Kh^2}, \quad \text{and} \quad d_* = \frac{d}{\sqrt{mK}}. \quad (4.14)$$

Finally, two non-dimensional parameters account for the coupling between the fluid and the compliant walls

$$V_R = \frac{Q^{(0)}}{4h^2} \sqrt{\frac{m}{K}} \quad \text{and} \quad \Gamma = \frac{m}{\rho h}. \quad (4.15)$$

The reduced velocity  $V_R$  represents the ratio of the wall characteristic time scale  $\tau_K = \sqrt{\frac{m}{K}}$ , associated with the spring stiffness, to the characteristic flow advection time scale  $\tau_Q = \frac{4h^2}{Q^{(0)}}$  [57]. The parameter  $\Gamma$  is the mass ratio between the walls and the fluid.

Unperturbed base configurations are thus completely specified by the 8 non-dimensional control parameters (4.13–4.15). We further use  $\rho = 1$ ,  $h = 1$  and  $Q^{(0)} = 1$  to uniquely determine dimensional quantities. Hereafter, to reduce the dimensionality of control-parameter space, the mass ratio is kept constant at  $\Gamma = 2$  and we consider walls without tension  $T = 0$ .

## 4.4 Linear stability analysis

For the stability analysis, the total flow fields are decomposed as the superposition of base and small-amplitude perturbation fields :

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \mathbf{U}(y, t) + \mathbf{u}'(x, y, t), \quad (4.16)$$

$$p(x, y, t) = G(t)x + p'(x, y, t). \quad (4.17)$$

The wall displacement is similarly written as

$$\zeta^\pm(x, t) = \pm h + \eta^{\pm'}(x, t). \quad (4.18)$$

Since the base configuration is homogeneous in  $x$ , perturbation fields may be expressed as spatial normal modes

$$\mathbf{u}'(x, y, t) = \tilde{\mathbf{u}}(y, t)e^{i\alpha x} + c.c., \quad (4.19)$$

$$p'(x, y, t) = \tilde{p}(y, t)e^{i\alpha x} + c.c., \quad (4.20)$$

$$\eta^{\pm'}(x, t) = \tilde{\eta}^\pm(t)e^{i\alpha x} + c.c., \quad (4.21)$$

where  $\alpha$  denotes the streamwise wave number and *c.c.* stands for the complex conjugate. Introducing this decomposition into the governing equations (4.1–4.3) and neglecting the quadratic terms leads to the following system of coupled linear partial differential equations :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -i\alpha U(y, t) \tilde{u} - \frac{\partial U}{\partial y}(y, t) \tilde{v} - \frac{1}{\rho} i\alpha \tilde{p} + \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 \right) \tilde{u}, \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = -i\alpha U(y, t) \tilde{v} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 \right) \tilde{v}, \quad (4.23)$$

$$0 = i\alpha \tilde{u} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}, \quad (4.24)$$

$$m \frac{\partial \tilde{\gamma}^\pm}{\partial t} = -d\tilde{\gamma}^\pm - (B\alpha^4 + T\alpha^2 + K) \tilde{\eta}^\pm \pm \tilde{p}(y, t) \Big|_{\pm h} \mp \mu \frac{d\tilde{v}}{dy} \Big|_{\pm h}, \quad (4.25)$$

where we have introduced the additional functions  $\tilde{\gamma}^\pm \equiv \partial_t \tilde{\eta}^\pm$  in order to reduce the system to first-order differential equations in time. Note that the wall equations (4.25) assume a pressure outside the channel walls always equal to the unperturbed pressure  $G(t)x$  prevailing inside (see [60] for further details). The boundary conditions at the

#### 4.4 Linear stability analysis

---

perturbed interface are expanded in a Taylor series about their equilibrium values at  $y = \pm h$  [84]. At linear order, the flow velocities at the walls are obtained as

$$\mathbf{u}(x, y = \zeta^\pm, t) = \mathbf{u}'(x, y = \pm h, t) + \eta^\pm(x, t) \frac{dU}{dy} \Big|_{(y=\pm h, t)} \mathbf{e}_x. \quad (4.26)$$

Thus, the kinematic boundary conditions (4.7) become

$$\tilde{u}(y = \pm h, t) + \tilde{\eta}^\pm(t) \frac{dU}{dy} \Big|_{(y=\pm h, t)} = 0 \quad \text{and} \quad \tilde{v}(y = \pm h, t) = \tilde{\gamma}^\pm(t). \quad (4.27)$$

Since the base flow is time-periodic, the linear stability analysis proceeds by following Floquet theory, where the eigenfunctions are assumed to have the same temporal periodicity as the base flow. The perturbations are therefore further decomposed as

$$\tilde{\mathbf{u}}(y, t) = \left[ \sum_n \hat{\mathbf{u}}^{(n)}(y) \exp(in\Omega t) \right] \exp(-i\omega t), \quad (4.28)$$

$$\tilde{p}(y, t) = \left[ \sum_n \hat{p}^{(n)}(y) \exp(in\Omega t) \right] \exp(-i\omega t), \quad (4.29)$$

$$\tilde{\eta}^\pm(t) = \left[ \sum_n \hat{\eta}^{\pm(n)} \exp(in\Omega t) \right] \exp(-i\omega t), \quad (4.30)$$

$$\tilde{\gamma}^\pm(t) = \left[ \sum_n \hat{\gamma}^{\pm(n)} \exp(in\Omega t) \right] \exp(-i\omega t), \quad (4.31)$$

where the complex frequency  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  is the eigenvalue, with  $\omega_i$  the growth rate and  $\omega_r$  the circular frequency. The linearized equations governing the dynamics of small perturbations then take the following form, for each integer  $n$ ,

$$\begin{aligned} \omega \hat{u}^{(n)}(y) &= [n\Omega + i\nu(\partial_{yy} - \alpha^2)] \hat{u}^{(n)}(y) + \frac{\alpha}{\rho} \hat{p}^{(n)}(y) \\ &+ \sum_k \left[ \alpha U^{(k)}(y) \hat{u}^{(n-k)}(y) - i \frac{dU^{(k)}}{dy} \hat{v}^{(n-k)}(y) \right], \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \omega \hat{v}^{(n)}(y) &= [n\Omega + i\nu(\partial_{yy} - \alpha^2)] \hat{v}^{(n)}(y) + \frac{1}{\rho} \frac{d\hat{p}^{(n)}}{dy} \\ &+ \sum_k [\alpha U^{(k)}(y) \hat{v}^{(n-k)}(y)], \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$0 = i\alpha \hat{u}^{(n)}(y) + \frac{\partial \hat{v}^{(n)}}{\partial y}, \quad (4.34)$$

$$\omega \hat{\eta}^{\pm(n)} = n\Omega \hat{\eta}^{\pm(n)} + i\hat{\gamma}^{\pm(n)}, \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \omega \hat{\gamma}^{\pm(n)} &= n\Omega \hat{\gamma}^{\pm(n)} - i \frac{d}{m} \hat{\gamma}^{\pm(n)} - \frac{i}{m} (B\alpha^4 + T\alpha^2 + K) \hat{\eta}^{\pm(n)} \\ &\pm \frac{i}{m} \left( p^{(n)}(\pm h) - \mu \frac{d\hat{v}^{(n)}}{dy} \Big|_{\pm h} \right), \end{aligned} \quad (4.36)$$



together with the kinematic wall conditions

$$\hat{u}^{(n)}(\pm h) = - \sum_k \frac{dU^{(k)}}{dy} \Big|_{\pm h} \hat{\eta}^{\pm(n-k)}, \quad (4.37)$$

$$\hat{v}^{(n)}(\pm h) = \hat{\gamma}^{\pm(n)}. \quad (4.38)$$

The system of coupled linear differential equations (4.32–4.36) with boundary conditions (4.37,4.38) forms the generalized eigenvalue problem that governs the dynamics of small-amplitude perturbations developing in this time-periodic fluid–structure interaction system.

## 4.5 Numerical methods

In this section, we outline the numerical strategy that has been implemented for solving the above generalised Floquet eigenvalue problem. The main objectives in this implementation are the elimination of spurious (nonphysical) eigenvalues and the reduction of the required computational efforts. To that purpose, we follow the general framework described by [65].

The velocity and pressure components are discretized in the wall-normal direction using a Chebyshev collocation method. To suppress spurious pressure modes, we consider the  $(\mathbb{P}_N, \mathbb{P}_{N-2})$ -formulation where the pressure is approximated with a polynomial of degree  $N - 2$  while the velocity is discretized with a polynomial of degree  $N$  [80, 7, 73]. In classical fashion, velocity fields are therefore represented by their values over  $N$  Gauss–Lobatto collocation points spanning the entire channel diameter and including the boundary points, while the pressure fields use only the  $N - 2$  interior points. We note the vectors containing the unknown velocity and pressure components at the interior points for each Fourier mode :

$$\mathbf{V}_{\mathbf{I}}^{(n)} = \left( \hat{u}_2^{(n)}, \dots, \hat{u}_{N-1}^{(n)}, \hat{v}_2^{(n)}, \dots, \hat{v}_{N-1}^{(n)} \right), \quad (4.39)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{I}}^{(n)} = \left( \hat{p}_2^{(n)}, \dots, \hat{p}_{N-1}^{(n)} \right). \quad (4.40)$$

Similarly, wall displacements and wall velocities are denoted by

$$\mathbf{W}^{(n)} = \left( \hat{\eta}_1^{(n)}, \hat{\eta}_N^{(n)}, \hat{\gamma}_1^{(n)}, \hat{\gamma}_N^{(n)} \right). \quad (4.41)$$

The kinematic conditions (4.37,4.38) may be used to express the velocity values at the boundaries in terms of the wall variables. As a consequence, the variables  $\hat{u}_1^{(n)}, \hat{v}_1^{(n)}, \hat{u}_N^{(n)}$  and  $\hat{v}_N^{(n)}$  may be directly eliminated from the problem together with the boundary conditions. Then, using

$$\hat{\mathbf{X}}^{(n)} = \left( \mathbf{V}_{\mathbf{I}}^{(n)}, \mathbf{P}_{\mathbf{I}}^{(n)}, \mathbf{W}^{(n)} \right) \quad (4.42)$$

for each harmonic of the Floquet eigenvector, the system (4.32–4.36) is recast as a generalized algebraic eigenvalue problem of the form

$$\hat{\mathbf{A}}^{(n)} \hat{\mathbf{X}}^{(n)} + \sum_k \hat{\mathbf{S}}^{(k)} \hat{\mathbf{X}}^{(n-k)} = i\omega \hat{\mathbf{B}}^{(n)} \hat{\mathbf{X}}^{(n)}. \quad (4.43)$$

Here, the square matrices  $\hat{\mathbf{A}}^{(n)}$ ,  $\hat{\mathbf{S}}^{(k)}$  and  $\hat{\mathbf{B}}^{(n)}$  are of size  $(3N - 2)^2$  and may be written in bloc structure as

$$\hat{\mathbf{A}}^{(n)} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}^{(n)} & \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{V}} & \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{V}\mathbf{W}} \\ \hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{V}} & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{W}} \\ \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{W}\mathbf{V}} & \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{W}} & \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{W}\mathbf{W}}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{S}}^{(k)} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}^{(k)} & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{V}\mathbf{W}}^{(k)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{B}}^{(n)} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{\mathbf{V}\mathbf{V}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbb{I}_{\mathbf{W}\mathbf{W}} \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

Their decomposition in terms of square blocs along the diagonal and rectangular blocs off diagonal reflects the structure of the vectors  $\hat{\mathbf{X}}^{(n)}$  (4.42), with  $2N - 4$  variables for  $\mathbf{V}_{\mathbf{I}}^{(n)}$ ,  $N - 2$  variables for  $\mathbf{P}_{\mathbf{I}}^{(n)}$ , and 4 variables for  $\mathbf{W}^{(n)}$ . In the above expressions,  $n$  may in theory take all integer values (positive and negative) but in practice the Fourier series are truncated at  $|n| \leq N_f$  for some cut-off value  $N_f$ . Note also that the blocs for which the superscript  $(n)$  is not indicated in (4.44) do not depend on a specific harmonic and that the matrix  $\hat{\mathbf{B}}^{(n)}$  only consists of two identity blocs. The matrices  $\hat{\mathbf{S}}^{(k)}$  account for the advection terms due to the pulsating base flow component  $U^{(k)}(y)$  and are responsible for the coupling of the different Fourier components of the Floquet eigenfunctions. Since, we consider pulsating flows with only a single oscillating component  $U^{(\pm 1)}(y)$ , only the matrices  $\hat{\mathbf{S}}^{(k)}$  with  $|k| \leq 1$  are non zero. As a result, the eigenvalue problem (4.43) has bloc-tridiagonal structure, which allows the use of efficient solution methods such as a generalized form of the Thomas algorithm.

The next step consists in eliminating the pressure by using the discrete version of the divergence-free condition

$$\hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{V}} \mathbf{V}_{\mathbf{I}}^{(n)} + \hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{W}} \mathbf{W}^{(n)} = \mathbf{0}. \quad (4.45)$$

Hence, applying this divergence operator to the parts of the algebraic system (4.43) corresponding to the momentum equations yields :

$$\begin{aligned} -\left(\hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{V}} + \hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{W}} \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{W}}\right) \mathbf{P}_{\mathbf{I}}^{(n)} &= \left(\hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{V}} \quad \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{V}}\right) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}^{(n)} & \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{V}\mathbf{W}} \\ \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{W}\mathbf{V}} & \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{W}\mathbf{W}}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{\mathbf{I}}^{(n)} \\ \mathbf{W}^{(n)} \end{pmatrix} \\ &\quad + \hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{V}} \sum_k \left(\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}^{(k)} \mathbf{V}_{\mathbf{I}}^{(n-k)} + \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{V}\mathbf{W}}^{(k)} \mathbf{W}^{(n-k)}\right). \end{aligned} \quad (4.46)$$

The operator  $(\hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{V}} + \hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{W}} \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{W}})$  is a square matrix of size  $(N - 2)^2$ , independent of the harmonic  $n$  and non singular. By inverting it, the pressure components  $\mathbf{P}_{\mathbf{I}}^{(n)}$  are obtained as the result of linear operators acting on the components  $\mathbf{V}_{\mathbf{I}}^{(n)}$  and  $\mathbf{W}^{(n)}$ .

Thus eliminating the pressure, the system (4.43) is recast as

$$\mathbf{A}^{(n)} \mathbf{X}^{(n)} + \sum_k \mathbf{S}^{(k)} \mathbf{X}^{(n-k)} = i\omega \mathbf{X}^{(n)}. \quad (4.47)$$

Now, the components of the eigenvector

$$\mathbf{X}^{(n)} = \left( \mathbf{V}_I^{(n)}, \mathbf{W}^{(n)} \right) \quad (4.48)$$

contain  $2N$  variables and the new matrices  $\mathbf{A}^{(n)}$  and  $\mathbf{S}^{(k)}$  are of size  $(2N)^2$ . Note also that, through the elimination of the pressure, the generalized eigenproblem (4.43) has been transformed into a regular eigenproblem.

The system (4.47) may be further reduced when  $\alpha \neq 0$ . Indeed, using the discretized version of the divergence free condition  $\tilde{u} = \frac{i}{\alpha} \partial_y \tilde{v}$ , allows to eliminate the longitudinal velocity components by expressing them in terms of the wall-normal velocities. This leads to an eigenvalue problem of the same form as (4.47) where the components of the eigenvector are of size  $N + 2$ , with  $N - 2$  wall-normal velocity values and 4 wall variables. In practice, this system is solved using an Arnoldi algorithm that exploits the bloc-tridiagonal structure of the matrices.

The transformations that have led from the initial generalized eigenvalue problem of size  $3N + 2$  to a regular eigenproblem of size  $N + 2$  may appear tedious. However, it is largely worth the effort : the final formulation is not only free of spurious eigenmodes, it is also drastically more efficient in terms of numerical effort. Finally, the method may be further improved by considering separately perturbations of sinuous or varicose symmetries and using only half of the channel together with derivative operators appropriate for the symmetry of each component of the different flow fields. Thus the complete problem may be addressed by carrying out two eigenvalue computations (sinuous and varicose) of half size, which further speeds up the process and directly provides the information about the symmetry of the different modes.

The numerical method has been validated using the results given by [74] for the pulsatile flow inside a rigid channel and those provided by [16] for the steady base flow between compliant walls.

## 4.6 Stability analysis

In fluid–structure interaction problems, perturbations are classically identified as either fluid-based or solid-based instabilities, depending on the nature of the main driving mechanism. For steady flows in compliant channels, Tollmien–Schlichting (TS) modes are known as the prevailing fluid-based instabilities : they are driven by a viscous instability within the bulk of the flow and only weakly affected by wall compliance. On the other hand, solid-based instabilities are due to the interaction between a compliant wall and the fluid flow and are often labelled as fluid–structure interaction (FSI) modes since their dynamics is predominantly governed by the wall parameters. Among these FSI modes, one may further distinguish between traveling wave flutter (TWF) and divergence (DIV) modes : while DIV modes are almost stationary, TWF modes display phase velocities of the same order as those of elastic waves due to the wall only. However, such a mode classification is not always possible since one type may continuously transform into another. For example, when the phase speed of

TWF modes approaches that of TS modes, merging may occur to form a transition instability mode.

The purpose of the present study is to identify the main instability modes in the presence of a pulsating base flow and to document their dynamics for a wide range of flow and wall parameters. We first discuss how the eigenvalue spectra are modified due to the time-periodic flow component. Then, the influence of the main control parameters on the dominant modes is investigated, with special attention given to possible cross-over between different mode types. Close monitoring of the spatial and temporal structure of the eigenfunctions reveals the rich dynamics of perturbations interacting with the pulsating flow and the compliant wall. Finally, the multi-dimensional parameter space is mapped out using a variety of critical curves for instability onset.

### 4.6.1 The Floquet eigenspectrum

The linear stability properties of time-periodic flow configurations is addressed by resorting to Floquet theory, as explained in section §4. In order to introduce the specific features of Floquet eigenspectra that are essential to this entire investigation, we illustrate them for a situation with small pulsation amplitude  $\tilde{Q}$ , and compare them with the corresponding steady case.

Figure 4.2 shows the eigenvalue spectrum computed with  $\alpha = 1$  for a pulsating base configuration characterized by  $V_R = 1$ ,  $Wo = 10$ ,  $\tilde{Q} = 0.02$ ,  $Re = 10000$ ,  $B_\star = 4$  and  $d_\star = 0$ . This plot reveals the characteristic feature of any Floquet spectrum : multiple eigenvalues of same growth rate  $\omega_i$  and frequencies  $\omega_r$ , separated by integer multiples of the base frequency  $\Omega$ . This is due to the fact that if  $\omega$  is a complex eigenvalue associated with an eigenfunction of the form (4.28–4.31), then all frequencies  $\omega_\star = \omega + k\Omega$  (for any positive or negative integer  $k$ ) are also among the eigenvalues and their associated eigenfunctions are simply obtained by shifting  $k$  times the Fourier components in the Floquet expansion as, for example,  $\hat{\mathbf{u}}_\star^{(n)}(y) = \hat{\mathbf{u}}^{(n-k)}(y)$ . In theory, the Fourier expansions (4.28–4.31) are infinite series, and the infinite number of eigenvalues  $\omega + k\Omega$  correspond thus all to the same physical perturbation. In practice, however, the Fourier expansions are truncated to a finite number of components, leading to a finite set of eigenvalues  $\omega + k\Omega$ . These are then no longer exactly identical normal modes since they correspond to different truncations of the Fourier series.

In figure 4.2, the Floquet eigenspectrum for  $\tilde{Q} = 0.02$  is shown together with the eigenspectrum of the corresponding steady configuration (at  $\tilde{Q} = 0$ ). This superposition illustrates the close similarity of both spectra and reveals that each of the steady eigenvalues is located very near one of the Floquet eigenvalues. Here, the Floquet spectrum corresponds to a weakly modulated base flow, for which the oscillating base-flow component  $U^{(\pm 1)}(y)$  is much smaller than the Poiseuille component  $U^{(0)}(y)$ . Thus, the magnitude of the off-diagonal blocs  $\mathbf{S}^{(\pm 1)}$  in the Floquet eigenproblem (4.47) is small in comparison with the diagonal blocs and the adjacent Fourier components in the Floquet eigenfunction are therefore only weakly coupled. As a result, the growth rates in the eigenspectrum here closely follow those prevailing for the equivalent steady flow.

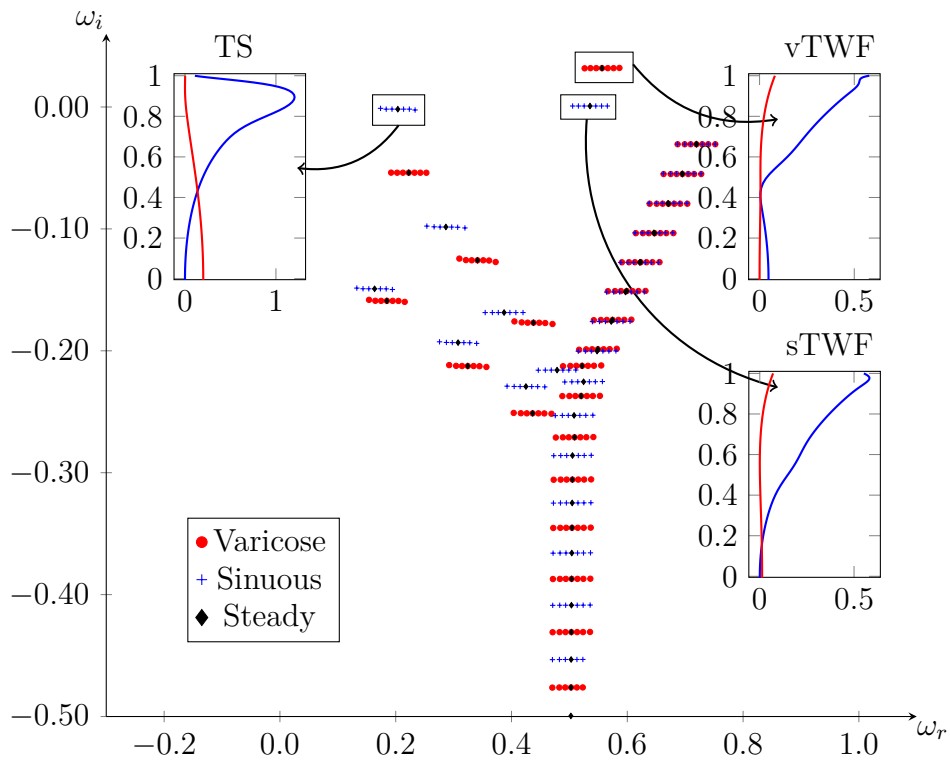


FIG. 4.2 : Spectrum for  $\tilde{Q} = 0.02$ ,  $Wo = 10$ ,  $V_R = 1$ ,  $Re = 10000$ ,  $\alpha = 1$ ,  $B_\star = 4$  and  $d_\star = 0$ . Some eigenfunctions (blue for  $|u|^2$ , red for  $|v|^2$ ) are also shown in panels. The steady corresponds to  $\tilde{Q} = 0$ .

For weakly modulated base flows, as is the case in figure 4.2, it seems thus natural to choose the eigenvalue  $\omega + k\Omega$  nearest its steady counterpart as the most representative frequency of the Floquet normal mode.

For larger pulsation amplitudes  $\tilde{Q}$ , however, this similarity with the steady spectrum no longer holds and a more robust criterion is required to lift the formal degeneracy of the Floquet eigenspectrum. In order to identify the most representative frequency among the multiple Floquet eigenvalues for each normal mode, we consider the magnitude of the different Fourier components of the Floquet eigenfunctions, defined as

$$E_n = \rho \int_{-h}^{+h} |\hat{\mathbf{u}}^{(n)}(y)|^2 dy + m (|\hat{\gamma}^{+(n)}|^2 + |\hat{\gamma}^{-(n)}|^2) + (B\alpha^4 + T\alpha^2 + K) (|\hat{\eta}^{+(n)}|^2 + |\hat{\eta}^{-(n)}|^2) \quad (4.49)$$

By using this energy-based norm, it is possible to single out the dominant component in the eigenfunction Fourier expansion and also to check if the truncation contains enough harmonics for an accurate representation of the normal mode. This process is illustrated in figure 4.3, where the magnitudes  $E_n$  are plotted for five consecutive eigenvalues corresponding to the varicose TWF mode associated with  $\alpha = 0.8$ ,  $\text{Re} = 10000$ ,  $\tilde{Q} = 0.2$ ,  $\text{Wo} = 10$ ,  $V_R = 1$ ,  $B_\star = 4$  and  $d_\star = 0$ . It is observed that the  $E_n$ -distribution peaks at  $n = 0$  for the eigenvalue  $\omega = 0.415 + 0.046i$ , while the distributions associated with the surrounding eigenfrequencies  $\omega + k\Omega$  peak at  $n = k$  since they correspond to similarly shifted Fourier components. It follows that  $\omega = 0.415 + 0.046i$  is the dominant frequency of this eigenmode. Throughout this paper we will therefore always consider that, for a given mode, the dominant frequency is derived by this energy-based criterion and choose the eigenvalue for which the Fourier series is centered on the  $n = 0$  component, i.e. for which  $E_0$  is largest. For the rigid wall case, this method has been proven to be effective in recovering the TS mode frequency obtained using linearized direct numerical simulation (results are given in [74]).

The Floquet eigenfunctions correspond to either sinuous or varicose modes, depending on the symmetry or antisymmetry of the different flow fields with respect to the mid-plane  $y = 0$ . As explained in section §5, they may be efficiently computed by taking advantage of these symmetry properties. In the spectrum of figure 4.2, the sinuous eigenfrequencies are given in blue and the varicose frequencies in red. Despite the multiplicity of the eigenvalues due to the time-periodic base flow, the spectrum still displays the familiar structure made of a large number of Orr–Sommerfeld modes (as A, P and S branches) together with two isolated TWF modes (one sinuous and one varicose). Note that the two DIV modes are here out of the range of this plot.

### 4.6.2 Influence of some parameters on the spectrum

The figure 4.4a displays spectra for  $V_R = 1$ ,  $\text{Wo} = 10$ ,  $d_\star = 0$  and  $\tilde{Q}$  varying from 0 (i.e. the steady flow case) to  $\tilde{Q} = 0.2$ . The figure 4.4b illustrates the effect of the baseflow frequency by varying  $\text{Wo}$  from 10 to 20. As discussed in the previous section,

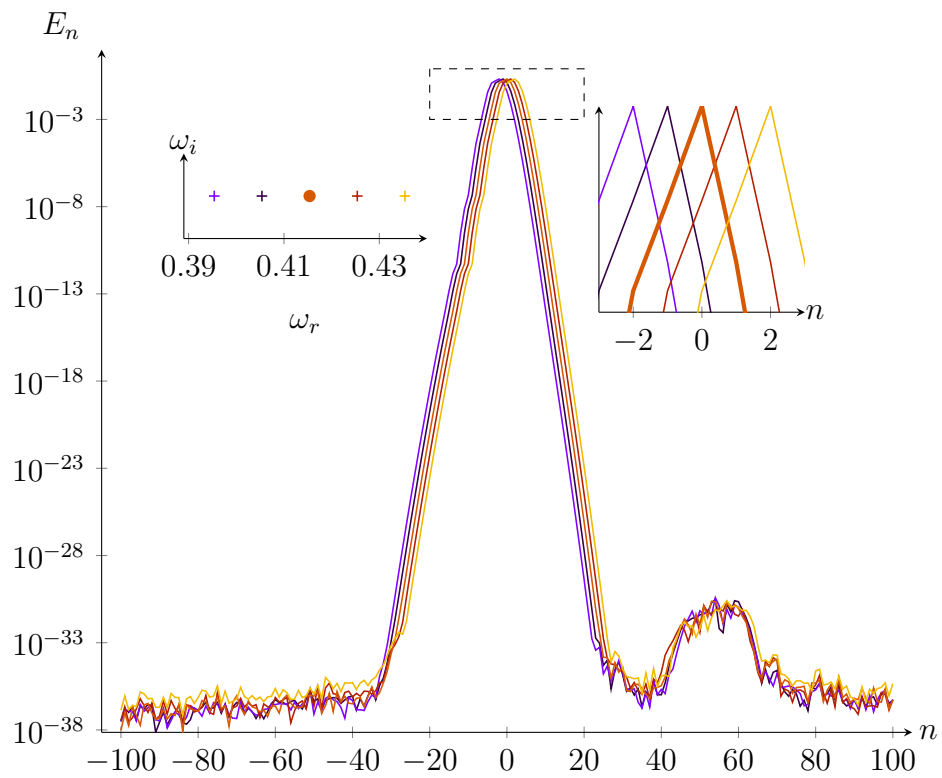


FIG. 4.3 : Fourier density for FSI varicose mode associated with  $\alpha = 0.8$ ,  $\text{Re} = 10000$ ,  $\tilde{Q} = 0.2$ ,  $\text{Wo} = 10$ ,  $V_R = 1$ ,  $B_\star = 4$  and  $d_\star = 0$ .

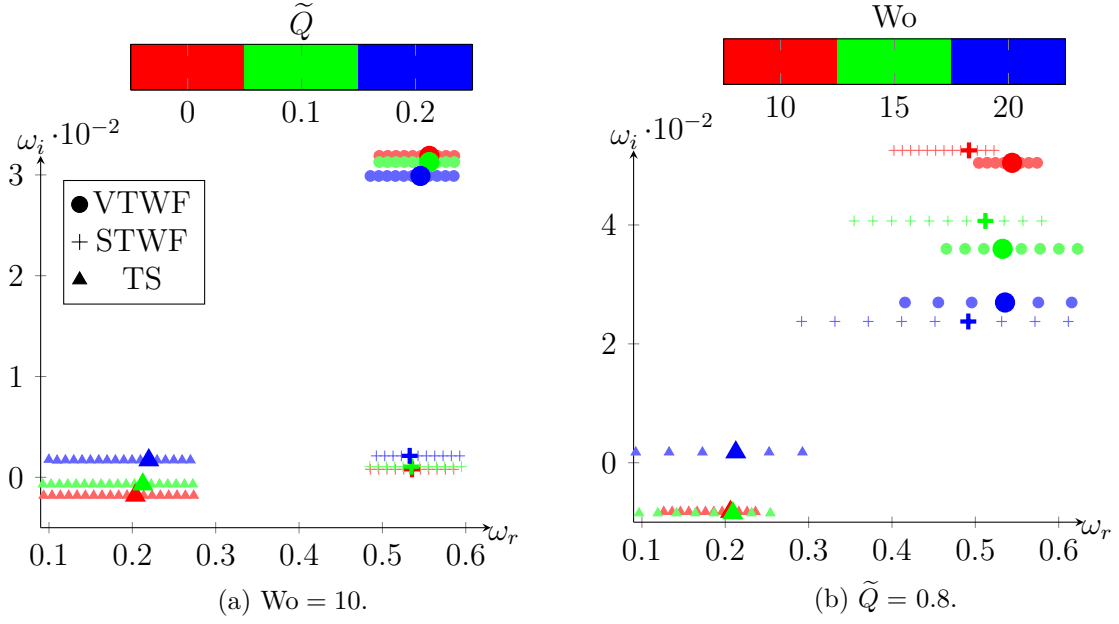


FIG. 4.4 : Spectra with  $V_R = 1$ ,  $Re = 10000$ ,  $\alpha = 1$ ,  $B_\star = 4$  and  $d_\star = 0$ .

the figure shows modes that exhibit equispaced eigenfrequencies where the gap between two successive frequencies corresponds to the base frequency  $\Omega$ , which scales as the square root of the Womersley number. In the figure 4.4, the bold eigenvalues are associated with the dominant frequency for each mode, obtained by considering the magnitude of the Floquet harmonics as explained in the previous subsection. Concentrating on FSI modes, dominant frequencies for both sinuous and varicose symmetries are not steady. It shows that FSI modes are connected to TWF instability waves. They are referenced hereafter as sTWF (sinuous TWF) or vTWF (varicose TWF) depending on their symmetry with respect to the midplane  $y = 0$ .

For flow and wall parameters that are considered and  $\tilde{Q} = 0$ , the most amplified TWF mode is of varicose type (see figure 4.4a). For this steady base flow case, the sTWF is seen to be marginally stable and the temporal growth rate of the TS mode is damped. For  $Wo = 10$ , an increase of  $\tilde{Q}$  tends to destabilize TS wave (see figure 4.4a). This is reminiscent of the results of [74] where TS modes for a pulsatile base flow between rigid walls have been computed. Besides the stability characteristics of the TS mode, the TWF modes exhibit distinct behaviours whether the sinuous or varicose symmetry is considered. While an increase of  $\tilde{Q}$  leads to reduce the temporal amplification rate of varicose type, the opposite behaviour is observed for the sinuous TWF. The figure 4.4b shows the effect of the Womersley number  $Wo$  onto TS and TWF modes for the same case. An increase of  $Wo$  has a stabilizing effect on TWF modes for both symmetries. The opposite role of  $Wo$  is seen for the TS mode. This reflects the richness of physical processes that are in play in comparison to the rigid wall case.

Finally, figure 4.5 shows the effect of wall compliance on TS and TWF modes for  $\tilde{Q} = 0.2$ ,  $Wo = 10$ ,  $Re = 10000$ ,  $B_\star = 4$  and  $\alpha = 1$ . Only Floquet modes that



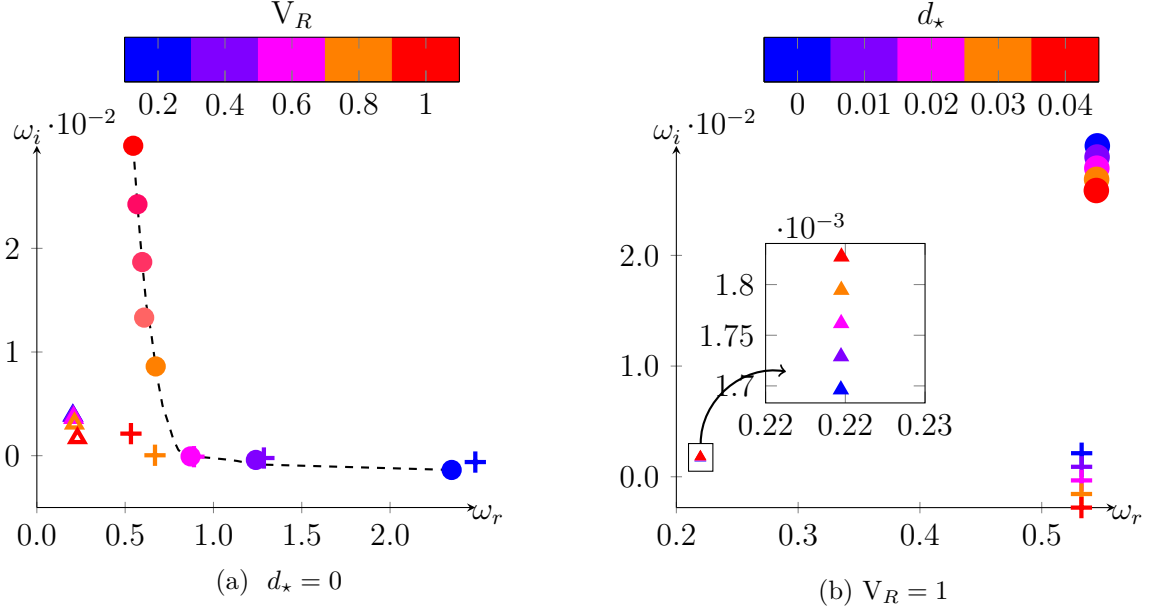


FIG. 4.5 : Spectra with  $\tilde{Q} = 0.2$ ,  $Wo = 10$ ,  $Re = 10000$ ,  $\alpha = 1$  and  $B_\star = 4$ .

match the dominant frequency for each mode are shown. As  $V_R$  is approaching zero, the phase speed of TWF modes tends to infinity which is consistent with the rigid wall case. An increase of  $V_R$  has a stabilizing effect on the TS mode. The opposite behaviour is observed for TWF modes whatever the symmetry considered. However, the figure suggests a preferred varicose symmetry for large  $V_R$ . Parenthetically, one can see in figure 4.5a that the phase speed tends to a finite value ( $\approx 0.5$ ) for both sTWF and vTWF as wall compliance is increasing. The influence of the wall dissipation is illustrated in figure 4.5b for small values of  $d_\star$ . The figure shows that the temporal amplification rate of the TS mode is enhanced by increasing  $d_\star$ . On the contrary, growth rates of TWF modes are likely inhibited by the wall dissipation.

These behaviours suggest similarities between steady case and our results. Especially, for the parameters that have been considered, the distinction made between class A and B modes by [4], [56] and [11] still hold for our pulsatile flow case. However, we will see in the next section that this distinction is clearly too restrictive for pulsatile base flow.

### 4.6.3 Waves superposition for sinuous Floquet mode

The Fourier density distributions for a sinuous Floquet mode associated with  $V_R = 1$ ,  $Wo = 10$ ,  $Re = 10000$ ,  $\alpha = 1$ ,  $B_\star = 4$  and  $d_\star = 0$  are shown in figure 4.6 together with the associated eigenvalues for  $\tilde{Q} = 0.349$  and  $0.350$ . Both series of eigenvalues have positive growth rates. The figure shows the existence of two distinct peaks in the Fourier density distribution. It suggests that two different mechanisms influence this mode. To further illustrate this scenario, the different contributions of the total

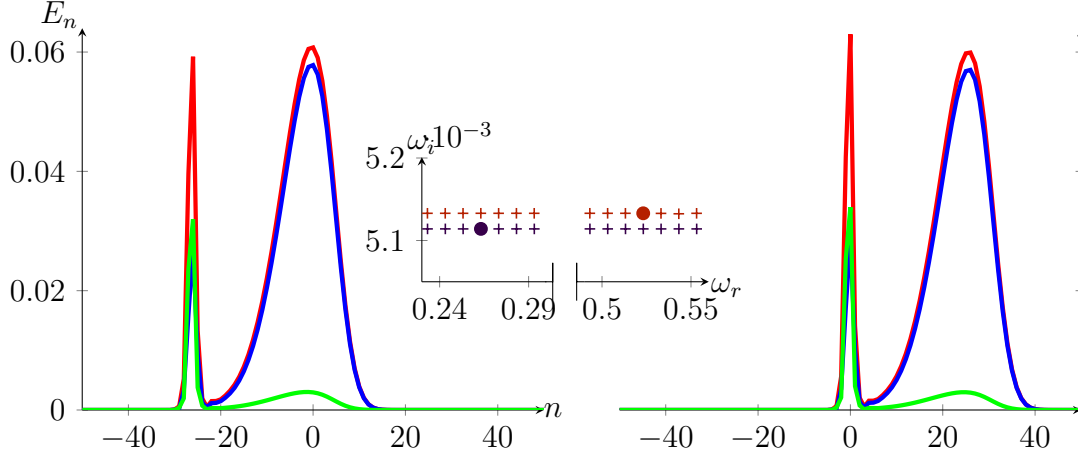


FIG. 4.6 : Energy per Floquet modes (red for total energy, blue for fluid kinetic energy, green for the wall potential and kinetic energy) at  $\tilde{Q} = 0.349$  (left) and  $\tilde{Q} = 0.35$  (right) with  $V_R = 1$ ,  $Wo = 10$ ,  $Re = 10000$ ,  $\alpha = 1$ ,  $B_\star = 4$  and  $d_\star = 0$ .

energy per Fourier mode are also reported in figure 4.6. For the  $E_n$ -distribution at  $\tilde{Q} = 0.349$  (left curves), the main peak is due to the kinetic energy contribution, associated with a dominant frequency of  $\omega_r \simeq 0.26$ . In contrast, for  $\tilde{Q} = 0.350$ , the wall contributions dominate leading to a dominant frequency of  $\omega_r \simeq 0.52$ . For both cases, the  $E_n$ -distributions are very similar, but the exchange in dominant peaks due to a continuous modification of the distribution results in a sudden jump of the dominant frequency. This behaviour indicates that the intracyclic mechanism involves the interference between fluid-based (TS) and solid-based (TWF) modes. By contrast with the steady base flow case, we can therefore no longer distinguish here between class A and class B modes. Moreover, figure 4.6 also shows that for  $\tilde{Q} < 0.35$ , the Floquet mode is mainly driven by its TS component. When  $\tilde{Q}$  is increased up to 0.35, the intracyclic growth is mainly due to its sTWF part. This new type of mode will be called hereafter a two-waves mode.

For the same set of parameters, the influence of  $\tilde{Q}$  on the stability of the system is shown in figure 4.7. For comparison purposes, the rigid case is also reported. We restrict our analysis to the sinuous symmetry. For the compliant wall case, the evolution of both temporal growth rates and circular frequencies are displayed for the first and second most amplified Floquet modes. The dominant Floquet frequency for each mode is selected using the methodology mentioned in the previous section. The TS mode distribution is seen to closely follow its rigid wall counterpart up to  $\tilde{Q} = 0.3$ . When  $\tilde{Q}$  exceeds this value, however, its  $E_n$ -distribution exhibits two peaks and the mode consists of the superposition of TS and TWF waves (as illustrated in figure 4.6). For  $\tilde{Q}$  greater than 0.35 the energy peak is connected to the TWF wave. At this point, the dominant frequency for this mode is associated with wall dynamics as shown by the energy contributions in figure 4.6. For  $\tilde{Q}$  up to 0.5, we observe the co-existence of

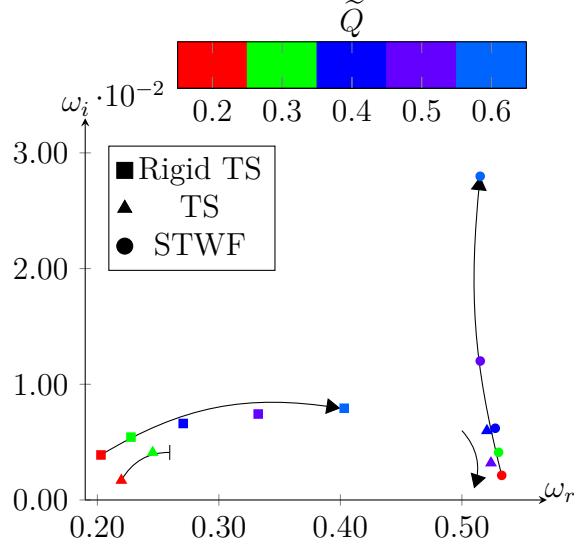


FIG. 4.7 : Spectra for different  $\tilde{Q}$  with  $V_R = 1$ ,  $Wo = 10$ ,  $Re = 10000$ ,  $\alpha = 1$ ,  $B_\star = 4$  and  $d_\star = 0$ .

TWF and two-waves modes. For  $0.5 < \tilde{Q} < 0.6$ , the two-waves modes is seen to be temporally damped. By contrast, the growth rate of TWF mode is increased for this range of  $\tilde{Q}$ .

For larger values of  $\tilde{Q}$ , the spectrum features a single unstable mode that shares the main characteristics of TWF modes.

In the next section, we will describe spatio-temporal behaviour of Floquet eigenfunctions, for TWF, TS and two-waves modes.

#### 4.6.4 Spatial structure of eigen-modes

The structure of TS and FSI Floquet modes are investigated in more detail by monitoring the wall-normal distribution of their flow kinetic energy. To that purpose we define the kinetic energy of the Floquet mode (4.28–4.31) as

$$\hat{E}(y, t) = \frac{1}{2}\rho \left| \sum_n \hat{\mathbf{u}}^{(n)}(y) \exp(in\Omega t) \right|^2, \quad (4.50)$$

which is periodic in time and may be used to characterize the intracyclic dynamics, since it does not contain the long-term exponential growth (or decay) part.

First, we will discuss the temporally averaged energy distribution, obtained as

$$\bar{E}(y) = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{E}(t, y) dt. \quad (4.51)$$

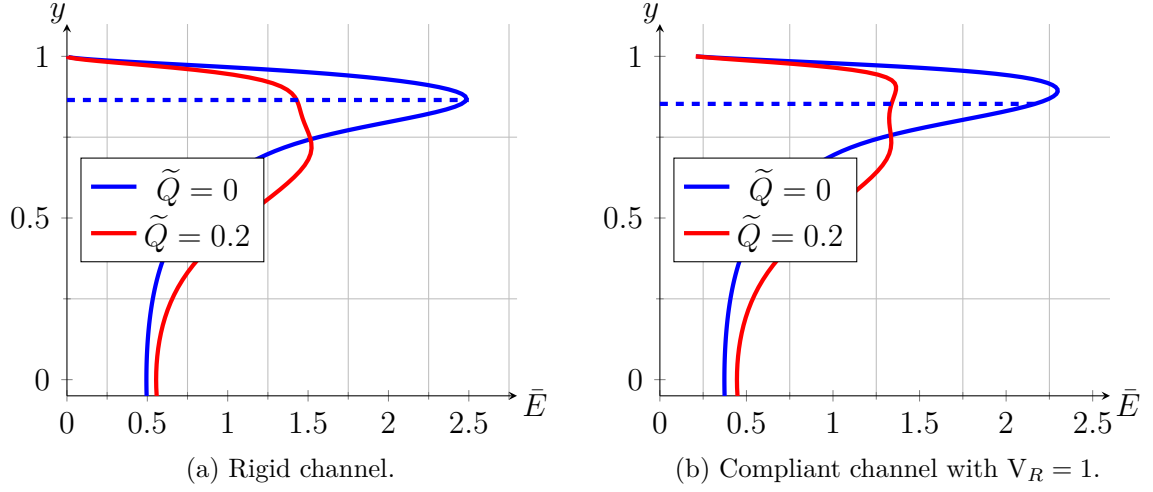


FIG. 4.8 : The wall-normal distribution  $\bar{E}(y)$  of averaged kinetic energy for the TS perturbations with  $\tilde{Q} = 0, 0.2$ ,  $Wo = 10$ ,  $Re = 10000$ ,  $\alpha = 1$ ,  $B_\star = 4$  and  $d_\star = 0$ . The critical layer position is referenced blue dashed lines.

In figure 4.8b,  $\bar{E}(y)$  is shown for the TS mode for  $Wo = 10$ ,  $\tilde{Q} = 0.2$ ,  $Re = 10000$ ,  $\alpha = 1$ ,  $B_\star = 4$ ,  $d_\star = 0$  and  $V_R = 1$ . For comparison purposes, the rigid wall and steady base flow cases are also reported in figure 4.8a.

We recall that for the case of a Poiseuille flow between flat rigid walls,  $\bar{E}(y)$  should peak around the critical layer (i.e. the wall normal position where phase speed equals base flow velocity [21]), as shown in figure 4.8a. For compliant walls and the steady flow case, a similar behaviour is observed [16], see figure 4.8b. However, a slight shift near the wall is observed for the peak in kinetic energy as a consequence of the stabilizing effect of the compliant wall onto TS modes.

The distribution of  $\bar{E}(y)$  for the time-periodic base flow exhibits a double peak structure for both the rigid wall and compliant wall cases (see figure 4.8). This behaviour has also been observed by Singer *et al.* [85] for the same flow case by using linearized direct numerical simulations and assuming rigid walls. They have shown that in a certain moment of the cycle, the mean flow profile exhibits an inflection point. These authors came to the conclusion that this second peak is a consequence of changes in the base flow profile during the cycle. Interestingly, figure 4.8 shows that the wall compliance enhances the first peak. More recently, Tsigklifis & Lucey [91] also notice this tendency for a similar case. The inner peak is also shifted near the wall due to wall compliance. It suggests that the stabilizing effect of elastic wall onto TS mode still holds for pulsatile base flow.

The wall normal distributions of  $\bar{E}(y)$  for both varicose and sinuous TWF modes are shown in figure 4.9 for the same set of parameters. While for the sinuous symmetry, the TWF mode exhibits no changes in comparison to the steady flow case, the varicose TWF mode presents some modifications. Especially, the amplitude of vTWF mode peaks near  $y = 0.9$  for the pulsatile base flow case. The consequences onto stability

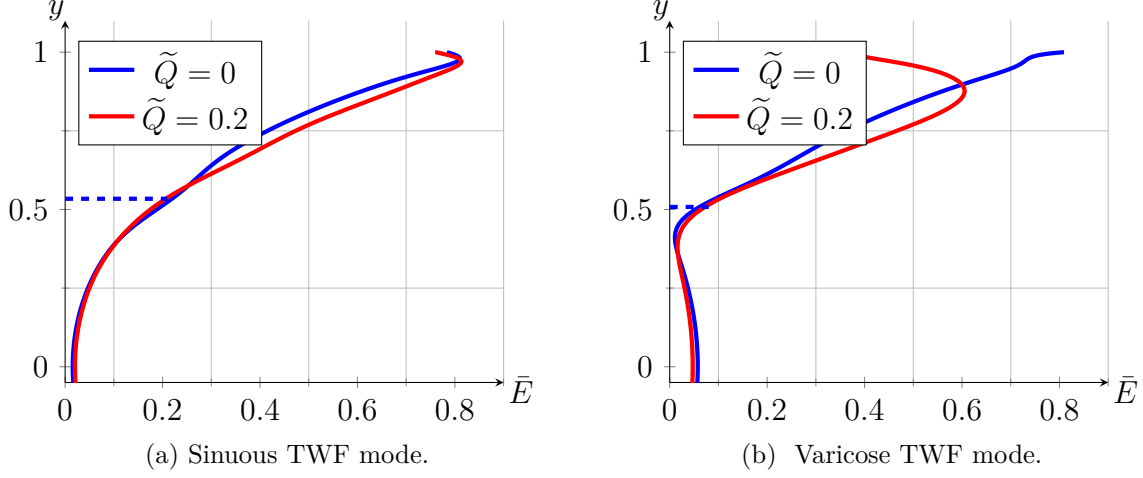


FIG. 4.9 : The wall normal distribution of energy for TWF modes are shown for  $\tilde{Q} = 0$  and 0.2,  $V_R = 1$ ,  $Wo = 10$ ,  $Re = 10000$ ,  $\alpha = 1$ ,  $B_\star = 4$  and  $d_\star = 0$ .

properties will be discussed in the next sections.

#### 4.6.5 Temporal dynamics of Floquet eigen-modes

In this section, we investigate the intracyclic dynamics of the perturbations for the same configurations as in the previous section. For that purpose, we consider the instantaneous total perturbation energy, defined as

$$\tilde{E}(t) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \hat{E}(t, y) dy + \tilde{E}_{WK}(t) + \tilde{E}_{WP}(t). \quad (4.52)$$

This quantity  $\tilde{E}(t)$  is the sum of the instantaneous fluid kinetic energy and the kinetic and potential energies of the walls :

$$\tilde{E}_{WK}(t) = m \left| \sum_n \hat{\gamma}^{\pm(n)} \exp(in\Omega t) \right|^2, \quad (4.53)$$

$$\tilde{E}_{WP}(t) = (B\alpha^4 + T\alpha^2 + K) \left| \sum_n \hat{\eta}^{\pm(n)} \exp(in\Omega t) \right|^2. \quad (4.54)$$

Recall that all these quantities are temporally periodic (with period  $\Omega$ ) since the complex exponential term  $\exp(-i\omega t)$  has been removed.

We first consider the TS mode. Figure 4.10 shows the different contributions to  $\tilde{E}(t)$  for  $Wo = 10$ ,  $\tilde{Q} = 0.2$ ,  $Re = 10000$ ,  $B_\star = 4$ ,  $d_\star = 0$  and  $\alpha = 1$  for both the rigid case and compliant walls with  $V_R = 1$ . As noted by Pier & Schmid [74], the growth of  $\tilde{E}(t)$  occurs in the deceleration phase of the base flow, while decay occurs during the acceleration phase, for the rigid case. This is also true for the compliant

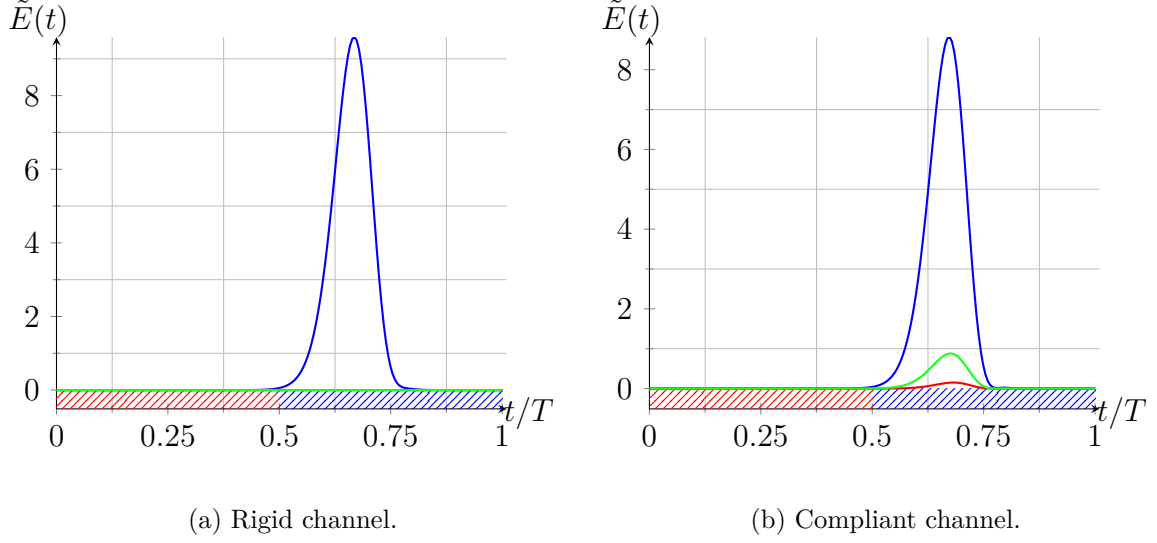


FIG. 4.10 : The intracyclic modulation of energy for the TS perturbations with  $\tilde{Q} = 0.2$ ,  $Wo = 10$ ,  $Re = 10000$ ,  $\alpha = 1$ ,  $B_\star = 4$  and  $d_\star = 0$ . Color : blue for the fluid kinetic energy, green for the wall kinetic energy, red for wall potential energy. For panel (b)  $V_R = 1$ .

wall configuration (figure 4.10b). In particular, the dynamics of the perturbation is mainly driven by the flow kinetic energy while the wall energy is almost negligible. A similar behaviour has also been observed by Tsigklifis & Lucey [91].

The intracyclic dynamics associated with TWF disturbances exhibits a different behaviour as shown in figure 4.11. In contrast with the TS mode, the growth in total energy occurs during the acceleration phase of the base flow for both symmetries. Especially, walls mainly contribute to the total energy growth whatever the symmetry that is considered. However, the fluid kinetic energy is less significant for the varicose case than the sinuous one.

#### 4.6.6 Interaction between TS and sTWF waves

As mentioned earlier, a two-waves mode (i.e. where both FSI and TS waves interact) may emerge for a given set of parameters.

Here we will further investigate the occurrence of this Floquet mode. To that purpose, the parameters  $Wo = 10$ ,  $B_\star = 4$ ,  $d_\star = 0$ ,  $V_R = 1$  and  $\alpha = 1$  are considered. Two Reynolds numbers will be studied  $Re = 2000$  and  $Re = 10000$  (i.e. corresponding to either subcritical or supercritical regime with respect to TS mode associated with the rigid case.)

In figure 4.12, the variation with  $\tilde{Q}$  of the temporal growth rates for both two-waves mode and sTWF mode are shown. For  $Re = 10000$ , the figure shows that these modes merge at  $\tilde{Q} \approx 0.46$ . Beyond this value, we observe that both modes diverge away from one another. Then, one mode exhibits a strong increase in temporal growth rate. This

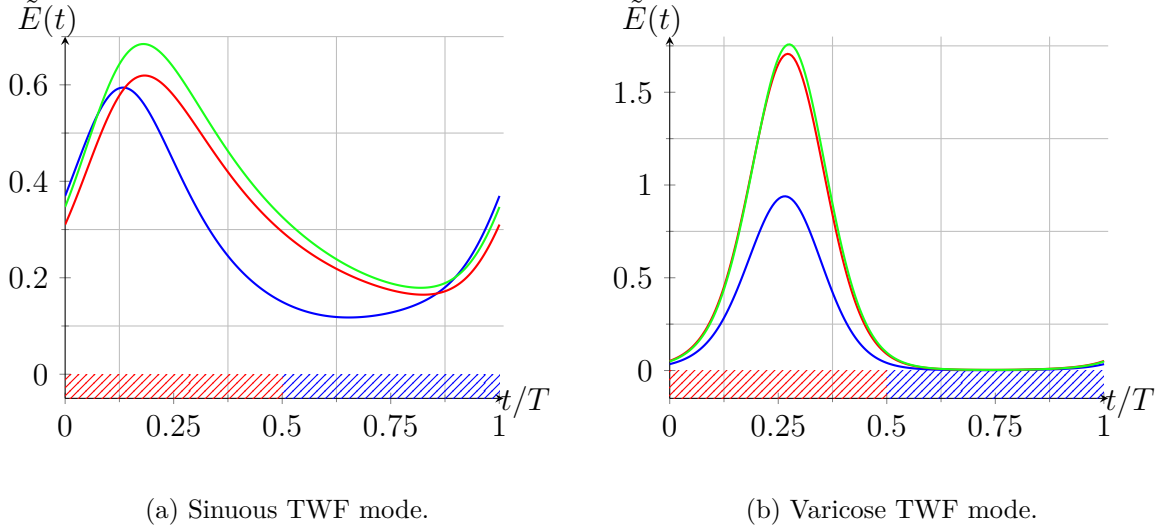


FIG. 4.11 : The intracyclic modulations of energy for the TWF perturbations with  $\tilde{Q} = 0.2$ ,  $V_R = 1$ ,  $Wo = 10$ ,  $Re = 10000$ ,  $\alpha = 1$ ,  $B_\star = 4$  and  $d_\star = 0$ .

behaviour is similar to modes coalescence found in the steady case between TS and sTWF modes when increasing wall dissipation, giving rise to the so-called transition mode. Interestingly, for pulsatile flow, this phenomenon also appears for  $d_\star = 0$ . Then, for  $\tilde{Q} \approx 0.46$ , we can associate this mode to a transition mode. For comparison purpose, the case for  $Re = 2000$  is also reported in figure 4.12. The merging is not observed here because TS wave is temporally damped for this Reynolds number.

To better illustrate the temporal dynamics associated with the two-waves mode and transition mode, we show in figure 4.13 the intracyclic evolution of the total energy  $\tilde{E}(t)$  for different pulsation amplitudes  $\tilde{Q}$  and the sinuous symmetry. On one hand, the TWF mode exhibits almost no effect as  $\tilde{Q}$  is increased in the range 0.38–0.48 for both Reynolds numbers. On the other hand, the two-waves mode presents an interesting intracyclic dynamics.

At  $\tilde{Q} = 0.38$ , the growth occurs for both the acceleration and deceleration phase of the base flow. It is consistent with the fact that this Floquet mode shares common features with both TS and TWF waves. When increasing  $\tilde{Q}$ , the growth associated with the acceleration phase is increasing. On the contrary, figure 4.13 shows that the energy peak in the deceleration phase is damped with  $\tilde{Q}$ . It means that the two-waves modes is mainly driven by its TWF contribution as  $\tilde{Q}$  is increased from 0.38 to 0.48. In particular, beyond  $\tilde{Q} = 0.46$ , the TS wave contribution is negligible. As a consequence, at  $\tilde{Q} = 0.46$ , the variation of  $\tilde{E}(t)$  for TWF and two-waves modes are almost undistinguishable. This corresponds to the coalescence observed in figure 4.12. Beyond  $\tilde{Q} = 0.46$ , the transition mode shows the same characteristics as the TWF instabilities, namely, a growth of energy in the acceleration phase of the base flow.

The intracyclic behaviour associated with the two-waves mode displays a low-frequency beating during the deceleration phase of the base flow for  $0.38 \leq \tilde{Q} \leq 0.46$

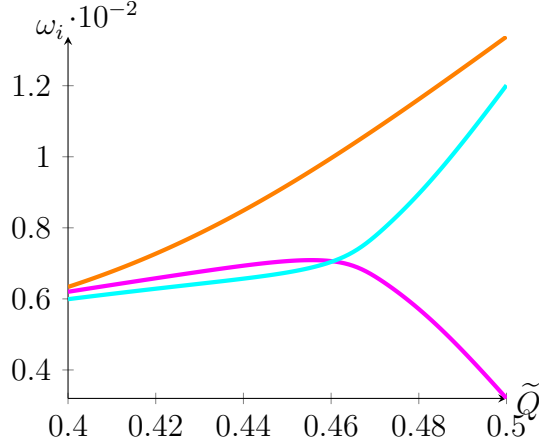


FIG. 4.12 : Dispersion relation with  $V_R = 1$ ,  $Wo = 10$ ,  $Re = 10000$ ,  $\alpha = 1$ ,  $B_\star = 4$  and  $d_\star = 0$  (Cyan for sTWF, Fuchsia for TS and orange for sTWF at  $Re = 2000$ ).

(see figure 4.13). This phenomenon results from an interference between two waves of slightly different frequencies. Especially, for this range of  $\tilde{Q}$ , TS wave and sTWF modes merge to form a wavepacket whose frequency is the difference of the two frequency peaks. The Fourier density distribution of the two-waves mode for  $\tilde{Q} = 0.38$  is shown in figure 4.14a. The difference between the two peaks indeed corresponds exactly to the frequency beating observed in figure 4.14b.

To further illustrate this point,  $\tilde{E}(t)$  has been computed by filtering the Fourier components in the neighborhood of either the TS wave or sTWF wave. The plots of figure 4.14b show that intracyclic dynamics pertaining to either the TS wave or the sTWF wave is recovered and the beating phenomenon is then suppressed.

To conclude this section, we show in figure 4.15 the case of the sinuous traveling wave flutter at  $Re = 2000$ . As noted earlier, at this subcritical Reynolds number, the TS wave is damped. Therefore, the interference appears only as small amplitude oscillations (see figure 4.15b). The harmonics of the two waves are hard to distinguish in figure 4.15a, which results in a greater period for the secondary oscillations.

### 4.6.7 Neutral curves

The purpose of this section is to identify the critical parameters for the onset of instabilities over a wide parameter space. To this end, we first compute the neutral boundaries (i.e. corresponding to  $\omega_i = 0$ ). For the rigid case, the neutral stability curves are commonly presented in the  $(Re, \alpha)$  plane within a temporal framework. However, it has been shown in [60] that the Reynolds number has only a negligible effect onto the TWF instability modes for a steady base flow. Hence, neutral stability curves associated with TWF Floquet modes will be displayed in the  $(V_R, \alpha)$  plane hereafter.

Figure 4.16 shows neutral boundaries associated with the TS Floquet mode for  $\tilde{Q} = 0, 0.1$  and  $0.2$ ,  $Wo = 10, 12, 14$  and  $V_R = 0.2, 0.4, 0.6$  and  $0.8$ . One may



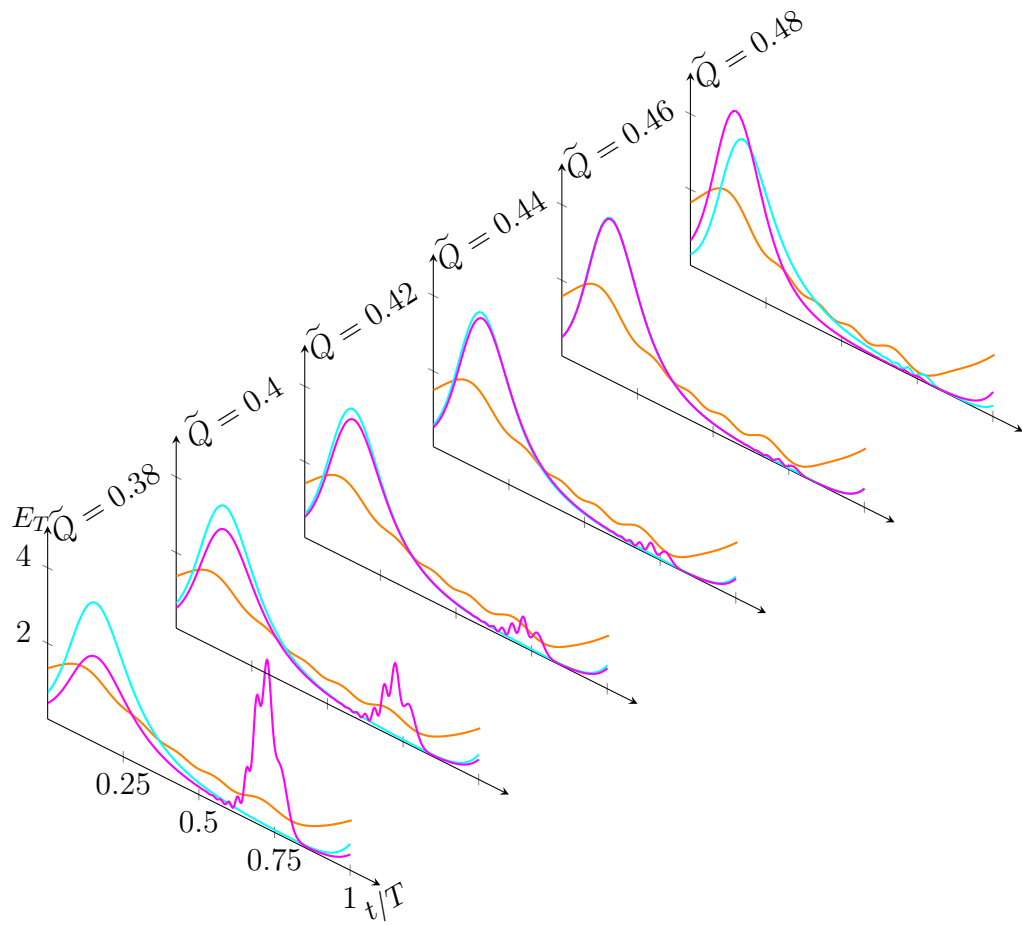


FIG. 4.13 : Intracyclic evolution of the total energy with  $V_R = 1$ ,  $Wo = 10$ ,  $Re = 10000$ ,  $\alpha = 1$ ,  $B_* = 4$  and  $d_* = 0$  (Cyan for sTWF, Fuchsia for TS and orange for sTWF at  $Re = 2000$ ).

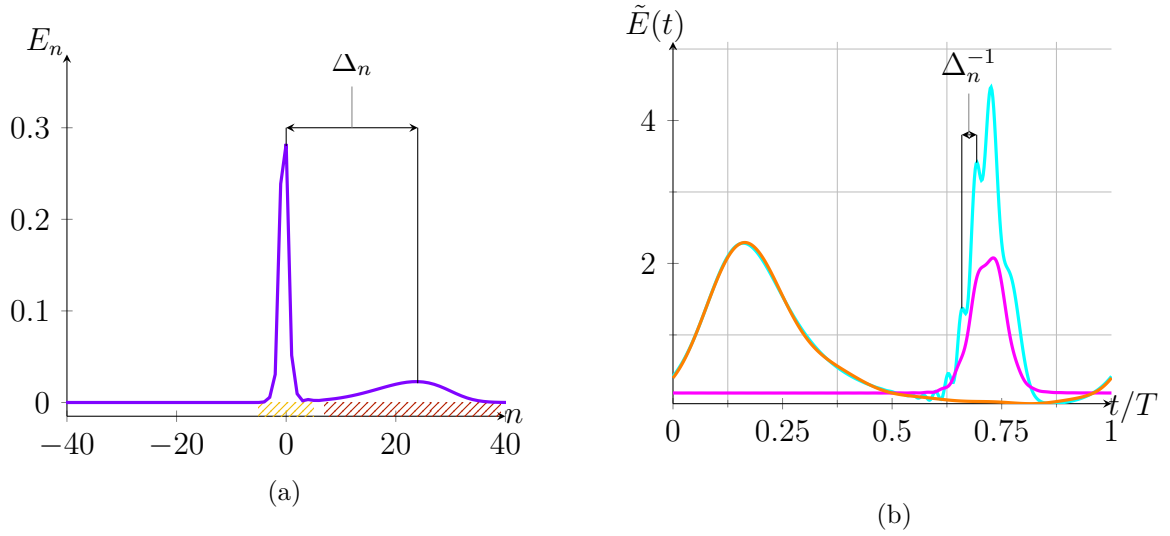


FIG. 4.14 : Fourier density distribution and filtered intracyclic total energy for the two-waves mode with  $\tilde{Q} = 0.38$ ,  $V_R = 1$ ,  $Wo = 10$ ,  $Re = 10000$ ,  $\alpha = 1$ ,  $B_\star = 4$  and  $d_\star = 0$ . Cyan : full dynamics, Fuchsia : TS wave dynamics and orange : sTWF wave dynamics.

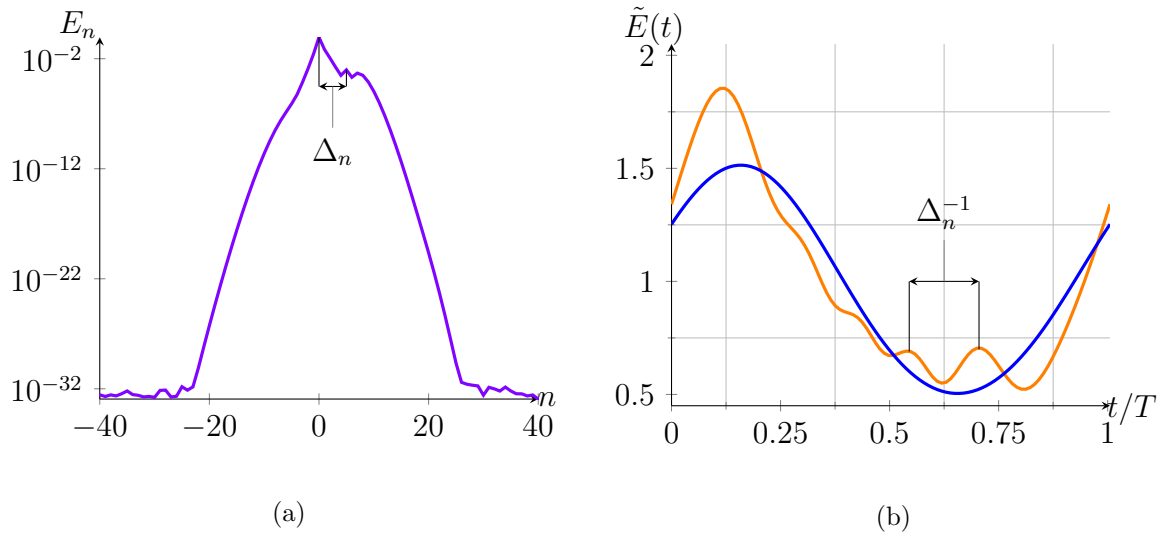


FIG. 4.15 : Fourier density distribution and filtered intracyclic total energy for the sTWF mode with  $\tilde{Q} = 0.38$ ,  $V_R = 1$ ,  $Wo = 10$ ,  $Re = 2000$ ,  $\alpha = 1$ ,  $B_\star = 4$  and  $d_\star = 0$ .

recall that for the rigid case, [74] have found that the oscillating component reduces instability for  $Wo > 13$  while it has a destabilizing effect at lower frequencies. The effect of wall compliance is then investigated in a neighborhood of  $Wo = 13$ .

Increasing the wall compliance (i.e. increasing  $V_R$ ) leads to a reduction of the range of unstable streamwise wave numbers and an increase of the critical Reynolds numbers for all flow parameters. Similar behaviour is also observed for the steady base flow [60]. In addition, the stabilizing effect of  $\tilde{Q}$  onto TS Floquet mode for  $Wo > 13$  is also found for the compliant walls case. Finally, for moderate pulsation amplitudes  $\tilde{Q}$ , the stabilization mechanism caused by wall flexibility seems not to be affected by the base flow modulation.

For  $Wo = 20$ , neutral boundaries for the TWF Floquet mode are shown in figure 4.17 for both symmetries. On one hand, the upper bound of the unstable wave number range grows lineary with the amplitude of the pulsation. On the other hand, the lower bound is almost unchanged by the pulsatile base flow components.

Near the critical reduced velocity, referenced as  $V_R^c$  hereafter (i.e. the value of  $V_R$  that corresponds to the onset of instability), the varicose TWF is weakly stabilized for  $\tilde{Q} < 0.4$ . For larger values of  $\tilde{Q}$ , a destabilization effect is observed. For the sinuous symmetry, a decrease in  $V_R^c$  is observed when the amplitude of the base flow modulation is increased, for all  $\tilde{Q}$  that are considered.

Neutral stability curves are also displayed in figure 4.18 for the same parameters except that  $Wo$  is fixed to 10. The figure shows that the Womersley number has a negligible effect onto the neutral boundaries for the TWF Floquet modes.

#### 4.6.8 Influence of $\tilde{Q}$ and $Wo$ onto temporal growth rates

In this section, we investigate the combined effect of wall flexibility and pulsatile base flow parameters ( $\tilde{Q}$  and  $Wo$ ) onto the temporal growth rates of TWF and TS Floquet modes. Results are conveniently summarized by monitoring the variations of  $\omega_i$  associated with the most unstable streamwise instability (i.e.  $\omega_i^m = \max_\alpha \omega_i$ ) for a given set of fluid and wall parameters. For illustration purposes,  $B_\star = 4$  and  $d_\star = 0$  are fixed.

Figures 4.19a and 4.19b show the distribution of the maximum temporal growth rates with  $\tilde{Q}$  and  $Wo$  of the TS mode for both the rigid case and compliant walls ( $V_R = 0$  and  $V_R = 0.2$ , respectively).

The TS Floquet modes exhibit similar dynamics whatever the case considered (either rigid or compliant walls). For  $Wo = 14, \dots, 20$ , the temporal growth rate decays for both rigid and flexible cases. For  $Wo = 13, \dots, 10$ ,  $\omega_i^m$  is increasing. One may recall that a similar behaviour is observed for the rigid case by [74].

Figure 4.20 illustrates the effect of  $Wo$  and  $\tilde{Q}$  onto travelling flutter Floquet modes for  $V_R = 1$ . The temporal growth rate for the vTWF mode presents two distinguishable phases. For small and moderate values of  $\tilde{Q}$ ,  $\omega_i^m$  is damped. Then, one may observe a growth of  $\omega_i^m$  as  $\tilde{Q}$  is increasing. The tipping point depends on the Womersley number. Especially, the corresponding  $\tilde{Q}$  is seen to increase with  $Wo$ .

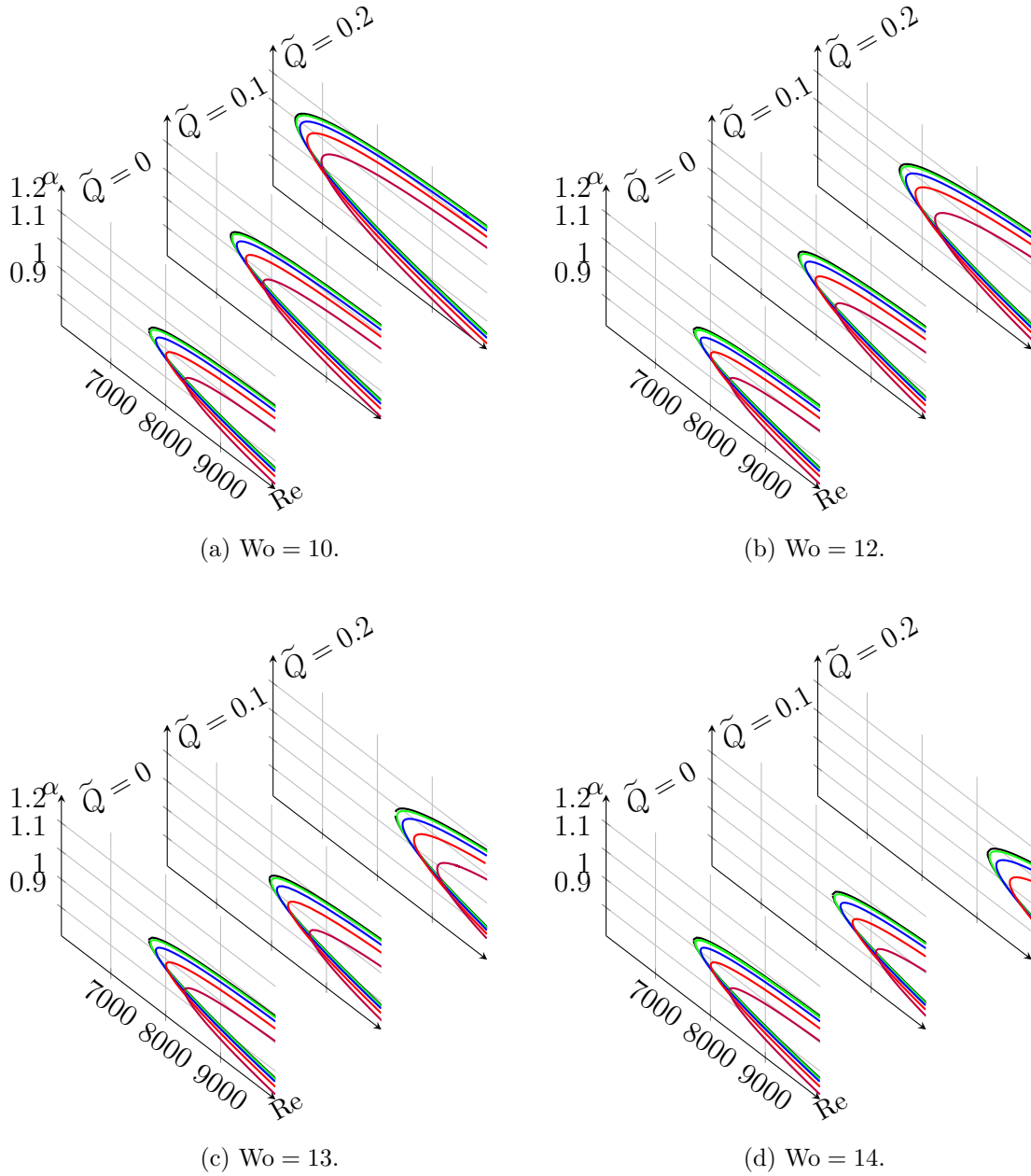


FIG. 4.16 : Neutral curve in the  $(\alpha, \text{Re})$ -plane for TS mode with  $B_\star = 4$  and  $d_\star = 0$  for different amplitudes  $\tilde{Q} = 0, 0.1, 0.2$  and frequencies  $Wo = 10, 12, 13, 14$ , with  $V_R$  varying from 0. to 0.8. The associated colors are respectively black, green, blue, red and brown.

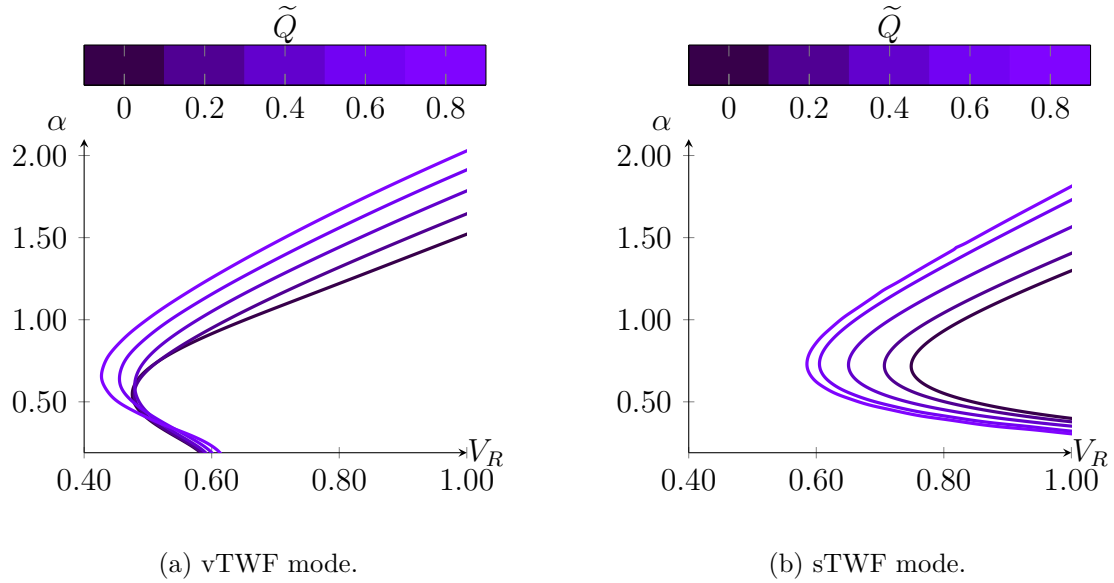


FIG. 4.17 : Neutral curve in the  $(\alpha, V_R)$ -plane for TWF modes with  $Wo = 20$ ,  $Re = 10000$ ,  $B_* = 4$  and  $d_* = 0$ .

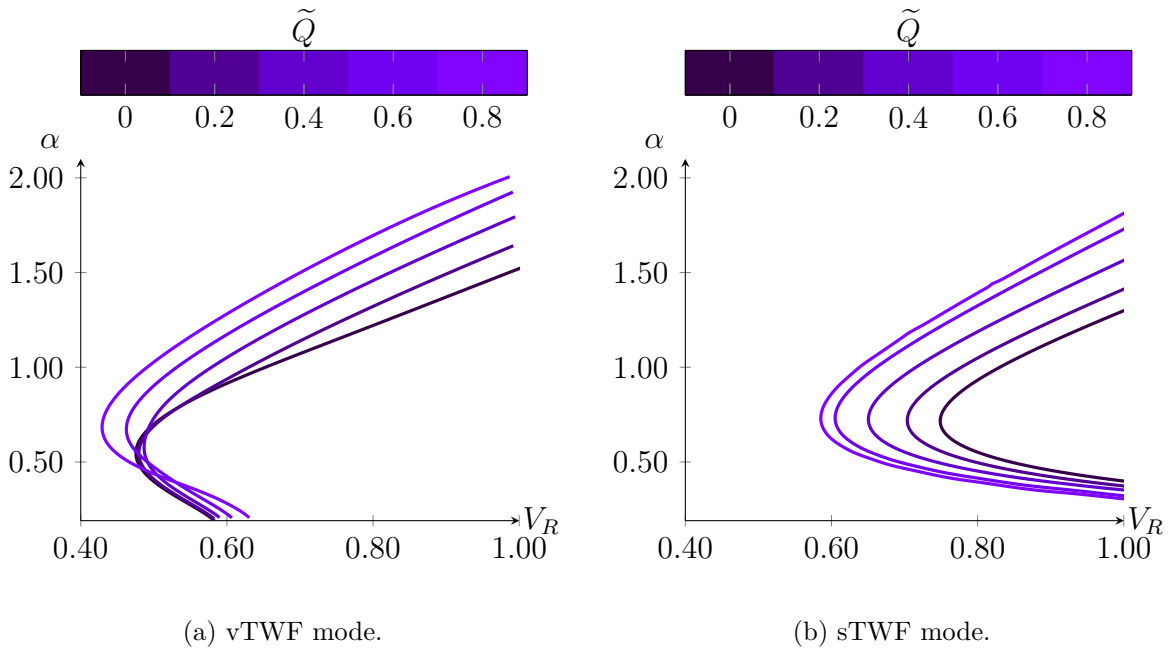


FIG. 4.18 : Neutral curve in the  $(\alpha, V_R)$ -plane for TWF modes with  $Wo = 10$ ,  $Re = 10000$ ,  $B_* = 4$  and  $d_* = 0$ .

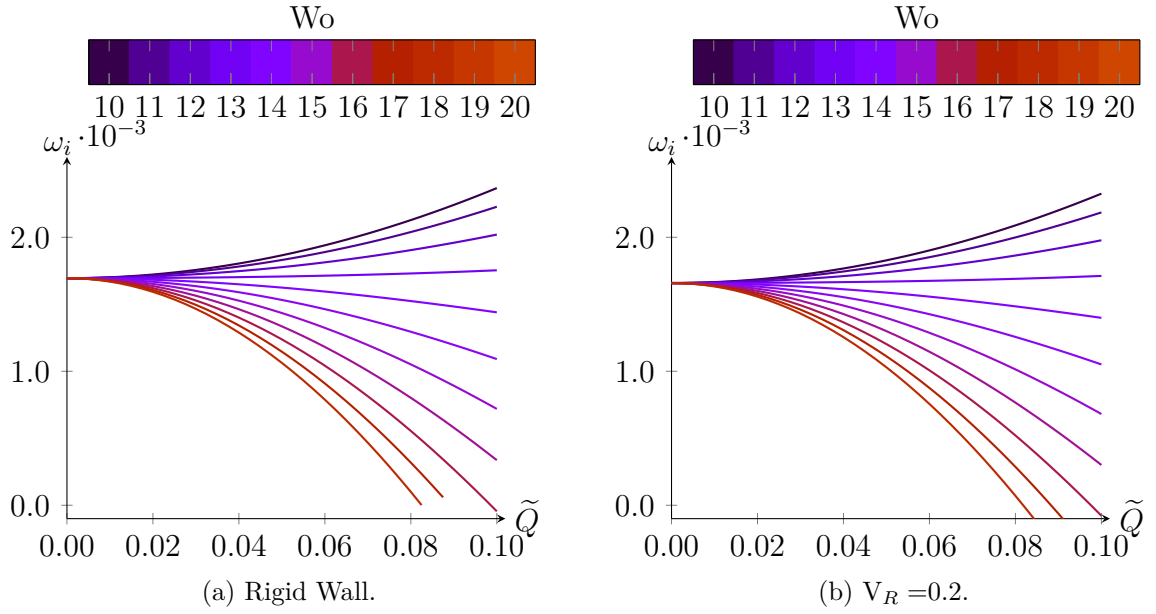


FIG. 4.19 : TS Floquet mode. Temporal growth rates ( $\alpha = \alpha_{max}$ ) for different amplitudes  $\tilde{Q} = 0, \dots, 0.1$  and frequencies  $Wo = 10, \dots, 20$ , with  $Re = 10000$ ,  $B_\star = 4$  and  $d_\star = 0$ .

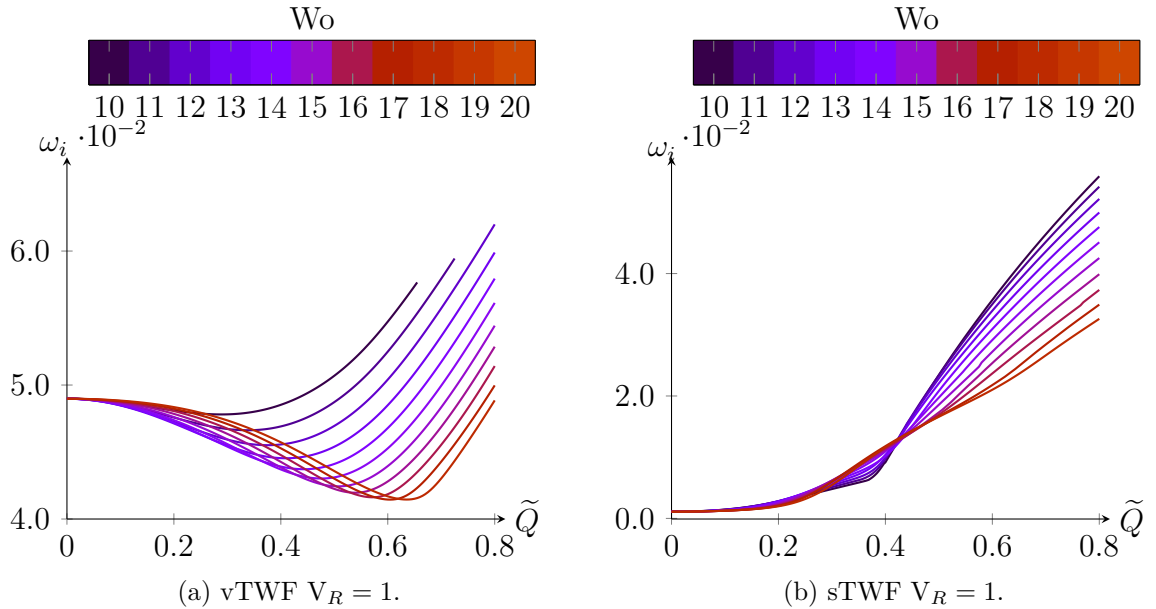


FIG. 4.20 : Temporal growth rates ( $\alpha = \alpha_{max}$ ) for different amplitudes  $\tilde{Q} = 0, \dots, 0.7$  and frequencies  $Wo = 10, \dots, 20$ , with  $Re = 10000$ ,  $B_\star = 4$  and  $d_\star = 0$ .

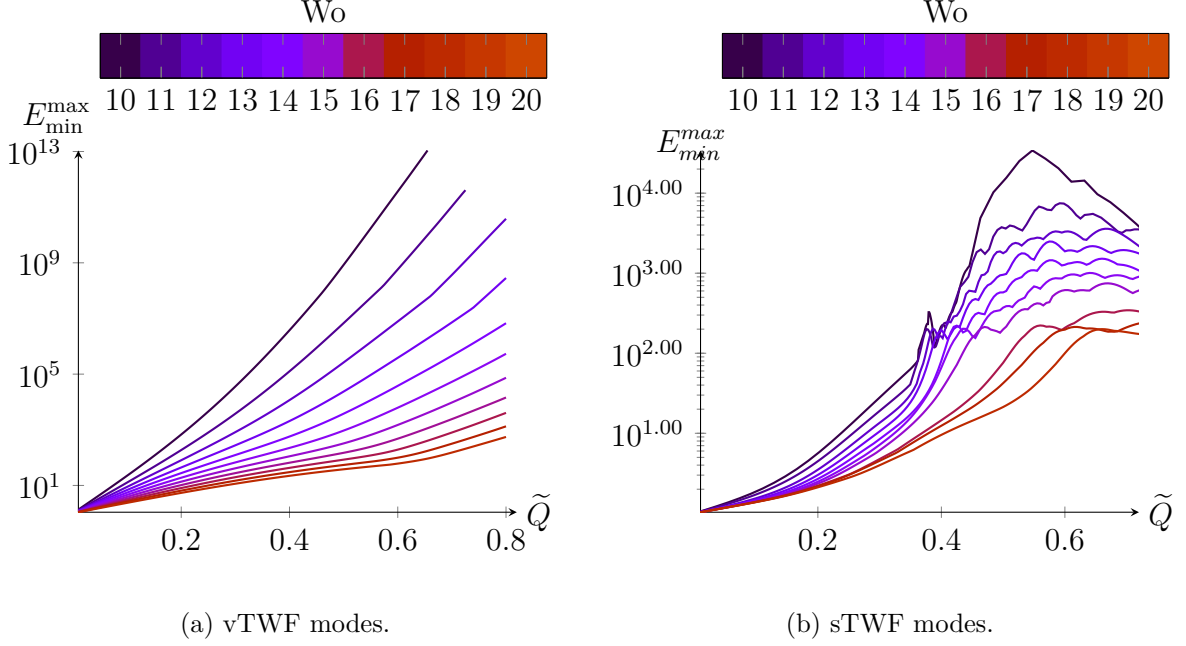


FIG. 4.21 : The amplitude of the modulation ratio  $E_{\min}^{\max}$  for different amplitudes  $\tilde{Q} = 0, \dots, 0.7$  and frequencies  $Wo = 10, \dots, 20$ , with  $Re = 10000$ ,  $B_{\star} = 4$ ,  $d_{\star} = 0$  and  $V_R = 1$ .

The distribution of  $\omega_i^m$  for the sinuous symmetry exhibits a different behaviour. For a weakly pulsatile base flows ( $\tilde{Q} < 0.2$ ), the sTWF mode is destabilized whatever the  $Wo$  number that is considered. In particular, this instability is strongly enhanced for the small frequencies of modulation  $Wo$ . For moderate values of  $\tilde{Q}$  ( $0.2 < \tilde{Q} < 0.5$ ), a more complex behaviour is observed. For this range of amplitudes, the sTWF mode interacts with TS Floquet mode, and we can no longer distinguish between these two waves. Beyond this point,  $\omega_i^m$  strongly increases and reaches similar values as its varicose counterpart.

An intracyclic modulation amplitude  $E_{\min}^{\max}$ , defined as the ratio of the maximum to the minimum of  $\tilde{E}(t)$ , is computed for the same parameter range given in figure 4.20, for traveling wave flutter Floquet modes only. For the varicose symmetry, the plots in figure 4.21a show that  $E_{\min}^{\max}$  increases for all  $Wo$  under consideration. The evolution of  $E_{\min}^{\max}$  for the sinuous symmetry is displayed in figure 4.21b. The figure shows that the sinuous TWF Floquet modes exhibit smaller amplitude variations than their varicose counterparts. In addition, for  $\tilde{Q} > 0.5$ , a saturation of  $E_{\min}^{\max}$  is observed. Such a behaviour occurs beyond the collapse of TWF and TS Floquet modes. One may thus suggest that it is a consequence of the emergence of a transition mode.

#### 4.6.9 Critical parameters for onset of instability

A complete two-dimensional instability analysis is now performed by exploring a wide range of walls and pulsatile flow parameters. In a effort to summarize the different

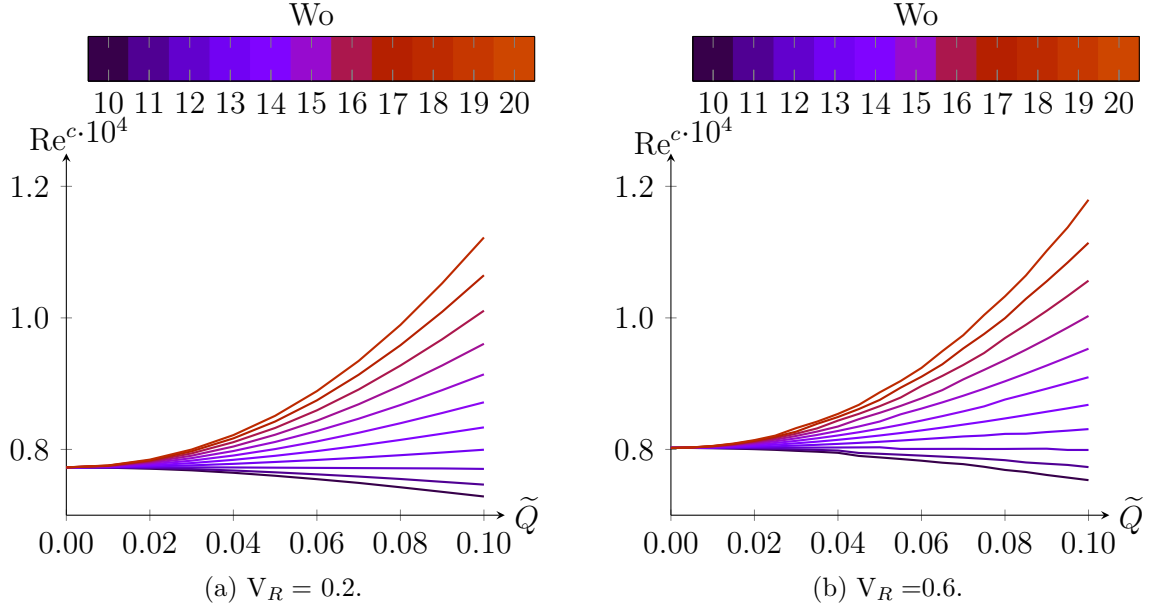


FIG. 4.22 : Critical Re number for TS mode with  $B_\star = 4$  and  $d_\star = 0$ .

results only critical Reynolds numbers ( $\text{Re}^c$ ) and critical reduced velocities ( $V_R^c$ ) are monitored (corresponding to the onset of TS or TWF Floquet modes, respectively).

The variations of  $\text{Re}^c$  for the TS mode are computed for  $V_R = 0.2$  and  $V_R = 0.6$  for different pulsatile flow parameters in figure 4.22. Beyond  $\text{Wo} = 13$ , the TS Floquet modes are destabilized by the pulsatile flow component. For lower frequencies, the opposite behaviour is observed. In particular, the critical Reynolds number is almost twice as large as the value found for the Poiseuille flow case ( $\tilde{Q} = 0$ ). The dynamics including compliant walls is thus found to be very similar to the rigid walls case (see [74]).

The critical reduced velocity  $V_R^c$  for the TWF modes are shown in figure 4.23. The varicose travelling wave flutter displays two phases. For moderate pulsation amplitudes ( $\tilde{Q} > 0.4$ ), the instability is weakly stabilized. For higher amplitudes, the vTWF mode is destabilized for all the frequencies studied. Unlike the vTWF, the sinuous TWF mode shows a monotonic destabilization as the pulsation amplitude is increased. The Womersley numbers considered here have almost no effect on the TWF Floquet modes. Note that even for highly pulsatile flows, onset of TWF Floquet modes is primarily due to the varicose symmetry.

In order to systematically study the linear stability over the entire parameter space, the critical reduced velocity  $V_R^c$  is also computed for various wall dissipations  $d_\star$  (figure 4.24), flexural rigidities  $B_\star$  (figure 4.25) and Reynolds numbers  $\text{Re}$  (figure 4.26).

According to the energy classification of [4] and [56], the dissipation has a stabilizing effect on the traveling wave flutter instabilities. The plots in figure 4.24 show the variation of the critical reduced velocity with wall dissipation  $d_\star$ . For a Poiseuille base flow ( $\tilde{Q} = 0$ ), the critical  $V_R^c$  is almost multiplied by a factor 2 when  $d_\star$  is varied from



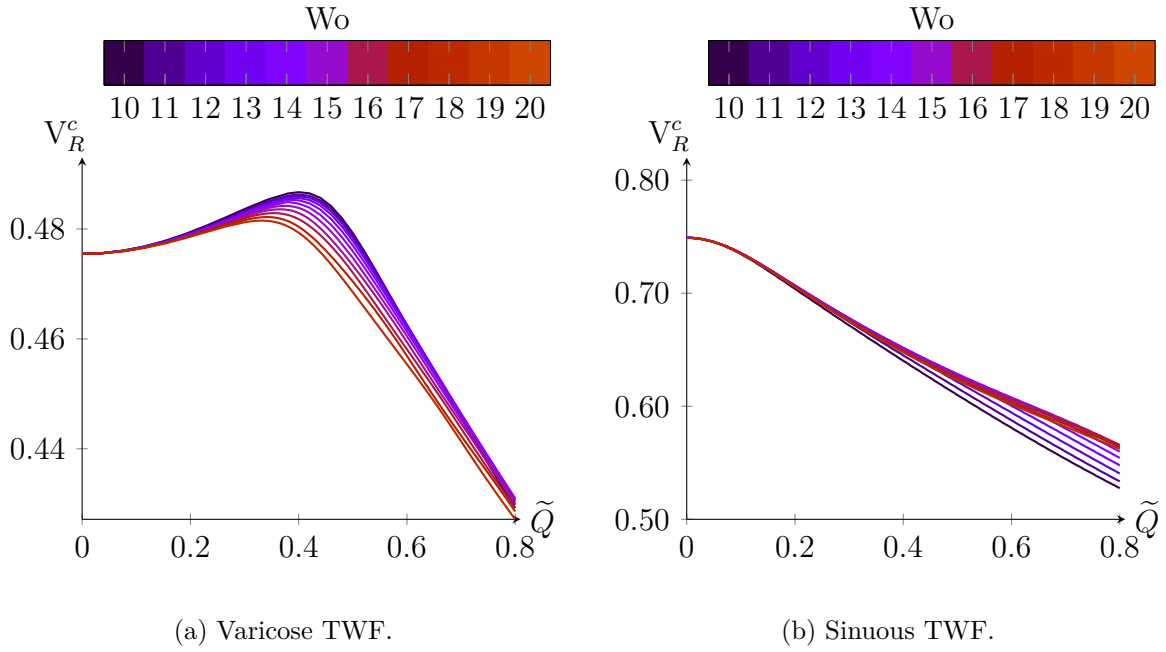


FIG. 4.23 : Critical reduced velocities  $V_R^c$  for TWF modes and different  $Wo$  numbers. The other parameters are :  $Re = 10000$ ,  $B_\star = 4$  and  $d_\star = 0$ .

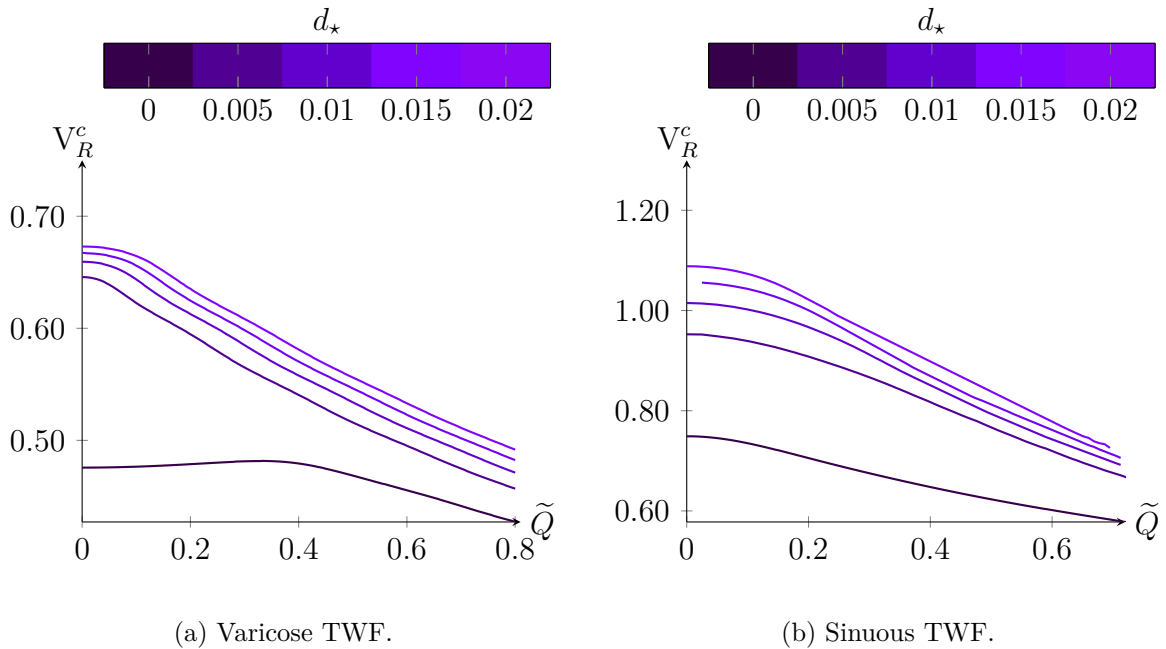


FIG. 4.24 : Critical reduced velocities  $V_R^c$  for TWF modes for different  $d_\star$ . The others parameters are :  $Wo = 20$ ,  $Re = 10000$  and  $B_\star = 4$ .

## 4.6 Stability analysis

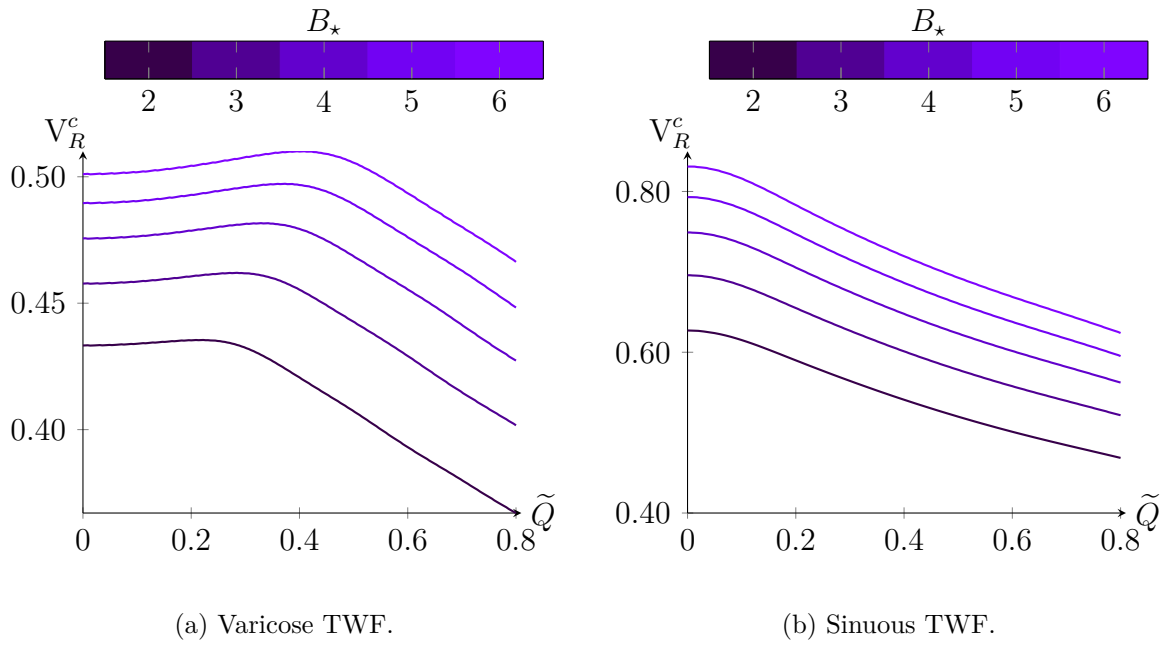


FIG. 4.25 : Critical  $V_R^c$  for TWF modes for different  $B_*$ . The others parameters are :  $Wo = 20$ ,  $Re = 10000$  and  $d_* = 0$ .

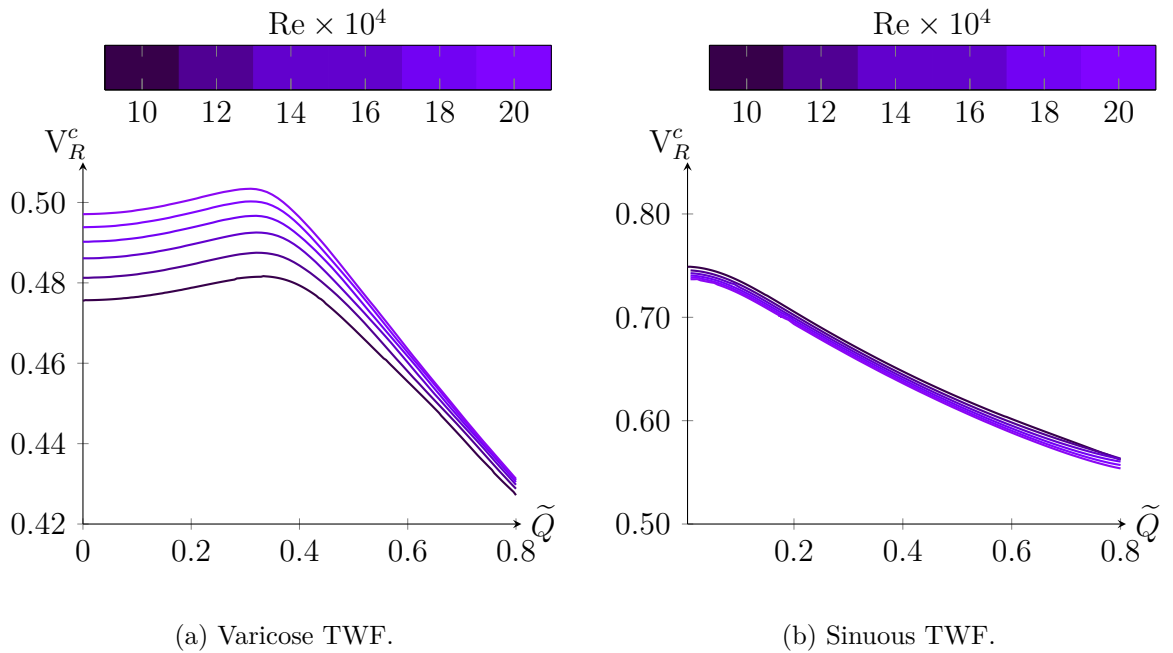


FIG. 4.26 : Critical  $V_R^c$  for TWF modes for different  $Re$  numbers. The others parameters are :  $Wo = 20$ ,  $B_* = 4$  and  $d_* = 0$ .

0 to 0.1.

An increase in  $\tilde{Q}$  leads to stabilize the flow for all values of  $d_*$  that have been considered (see figure 4.24). In particular, the overall behaviour is quite similar for  $d_*$  varying from 0.005 to 0.04. The critical  $V_R^c$  is nearly constant for  $\tilde{Q}$  up to 0.05. Beyond this value,  $V_R^c$  decreases almost linearly with  $\tilde{Q}$  at a similar rate of change. Interestingly, the symmetry of the Floquet mode appears to have a negligible effect onto  $V_R^c$  for this range of parameters.

The effect of flexural rigidity is illustrated in figure 4.25. Increasing  $B_*$  results in stabilizing the TWF Floquet modes for all  $\tilde{Q}$  that are considered. Especially, the overall behaviour is almost unaffected by  $B_*$  for both sinuous and varicose cases. For the varicose case, a nearly constant value of  $V_R^c$  is observed up to  $\tilde{Q} = 0.3$ . Beyond  $\tilde{Q} = 0.4$ , the critical  $V_R^c$  is seen to decrease almost linearly with  $\tilde{Q}$  for all flexural rigidities that have been investigated. Especially, the slope seems to be independent of  $B_*$ .

The sinuous case appears to be more stable than its varicose counterpart. As for the varicose symmetry, the overall tendency is not affected by  $B_*$ . A slight decrease in  $V_R^c$  is observed for  $\tilde{Q}$  up to 0.1. Beyond  $\tilde{Q} = 0.4$ ,  $V_R^c$  exhibits an almost linear behaviour with  $\tilde{Q}$ .

Finally, the influence of the Reynolds number onto  $V_R^c$  is shown in figure 4.26. The onset of Floquet TWF modes are almost unchanged by the Reynolds number for both the varicose and sinuous TWF modes. The behaviour is more pronounced when  $\tilde{Q}$  is increased to large amplitudes. This small effect has also been reported for the steady case [60].

## 4.7 Conclusions

In this paper, we have systematically investigated the rich dynamics resulting from perturbations developing in harmonically pulsating flows between two compliant walls. The stability analysis is restricted to the time-asymptotic behaviour of the flow perturbation and to the two-dimensional case within the framework of the Floquet theory. A numerical solution strategy has been implemented that is free of spurious modes and greatly reduces the computational effort.

When accounting for wall-flexibility, we show that the most relevant control parameters are the reduced velocity  $V_R$  for traveling wave flutter Floquet modes. Especially, the Reynolds number appears to have a negligible influence on these modes. As also observed for the steady case [60], the most unstable modes are associated with the varicose motion. For the pulsatile flow components, we show that the instability onset for these modes is mainly driven by the amplitude of the pulsation rather than its frequency. For  $\tilde{Q}$  in the range 0–0.4 and varicose perturbations, the pulsatile base flow is seen to weakly stabilize the TWF Floquet modes (*i.e.* the critical reduced velocity increases) with respect to the steady flow case. The opposite behaviour is observed for  $\tilde{Q}$  larger than 0.4. For the sinuous symmetry, we always observe a flow destabilization

with an increase of  $\tilde{Q}$ . When accounting for the wall dissipation, we show that an increase of  $d_*$  tends to stabilize the travelling wave flutter Floquet modes for both symmetries whatever the value of  $\tilde{Q}$  in agreement with Benjamin's classification [4]. For the Tollmien–Schlichting Floquet modes, the intracyclic dynamics exhibits strong similarities with the pulsatile flow case in a rigid channel [74]. However, a stronger stabilization is observed when wall flexibility comes into play.

This study has revealed a rich and complex flow dynamics that is not found when wall flexibility or pulsating base flow are studied independently. In particular, a new type of transition mode has been discovered that emerges due to the coalescence of two Floquet modes, even in the absence of wall dissipation. The first Floquet mode combines properties of both Tollmien–Schlichting modes and traveling wave flutter modes. This coupling leads to interference that generates a low-frequency beating during the intracyclic dynamics. The second Floquet mode shares the main properties of a traveling wave flutter mode. When increasing the pulsation amplitude, these two modes merge into a more unstable Floquet mode.

Extension of the present study to nonmodal stability analyses can be considered in a future work, continuing the investigations of Tsigklifis & Lucey [91] and Pier & Schmid [75]. Finally, it would also be interesting to generalize our analyses to pipe geometries which cover more biologically significant phenomena. The theoretical developments and numerical tools that have been used in the present investigation can be easily adapted to a formulation in cylindrical coordinates, following the same approach used by Pier & Schmid [75].



# Conclusion

À travers cette thèse, des études de stabilité linéaire ont été menées pour des écoulements permanents et pulsés dans des canaux déformables, avec un modèle de paroi surfacique simple. Ce modèle est suffisamment riche pour analyser les mécanismes fondamentaux émergeant lors de l'interaction entre une paroi flexible et un fluide dans un canal. Nos études peuvent également servir d'illustration pour d'autres modèles de paroi, considérant l'universalité des modes d'instabilité [22, 84].

Notre étude dimensionnelle pour le problème d'interaction fluide–structure a permis de mettre en lumière un paramètre classiquement utilisé en aéro-élasticité : la vitesse réduite  $V_R$ . Ce paramètre de contrôle s'ajoute au nombre de Reynolds  $Re$  couramment employé pour les instabilités du fluide. La vitesse réduite  $V_R$  permet de caractériser la prédominance ou non des effets propres à l'interaction entre la paroi et le fluide. Elle se définit par le rapport entre un temps caractéristique du fluide et un temps caractéristique de la paroi.

Pour la résolution du problème linéarisé, nous avons développé une méthode numérique originale qui permet de parcourir l'espace des paramètres avec des temps de calcul raisonnables. La méthode est basée sur la théorie de Floquet où la fonction propre est périodique de même période que le champ de base. Celle-ci est combinée avec une méthode numérique s'appuyant sur une discrétisation spectrale des équations exempte de modes parasites. Pour cela, une approche  $P_N P_{N-2}$  est utilisée. Une technique de réduction de matrices permettant l'élimination de la pression et d'une composante de vitesse est ensuite mise en œuvre, réduisant considérablement les temps de calcul numérique.

L'étude de stabilité linéaire pour un écoulement permanent dans un canal flexible est alors présentée. Nous avons en outre calculé les courbes neutres pour les instabilités de paroi (de flottement et de divergence, notées TWF et DIV) ainsi que pour les instabilités du fluide (Tollmien–Schlichting TS). Alors que le mode TWF variqueux est plus instable que le TWF sinueux, le mode de divergence dominant est le sinueux. Ensuite, nous montrons que le mode TS et les modes de divergence (sinueux et variqueux) dépendent du nombre de  $Re$  et de  $V_R$ , tandis que les modes TWF sont quasi-indépendants de  $Re$  et principalement gouvernés par la vitesse réduite. Pour la symétrie variqueuse, une relation linéaire entre la vitesse réduite critique et la dissipation  $d_*$ , indépendamment de la rigidité en flexion  $B_*$ , est trouvée pour le mode de flottement. Enfin, l'effet de la dissipation sur l'apparition du mode de divergence est

aussi illustré.

Pour résumer, le mode TS est stabilisé par la vitesse réduite et déstabilisé par la dissipation  $d_*$  conformément aux modes de classe A. Les modes TWF sont déstabilisés par  $V_R$  et stabilisés par la dissipation  $d_*$ . Cela correspond donc à la classe B. Pour ce qui concerne les modes de divergence de la classe C, ils sont stabilisés par le nombre de Reynolds. Enfin, un mode de coalescence du mode TS et TWF sinueux est trouvé en augmentant la dissipation, ce résultat a été également observé par Davies et Carpenter [16].

Dans ce même chapitre, en utilisant les équations du bilan d'énergie totale (incluant l'énergie du fluide et de la paroi), nous avons également mis en lumière les mécanismes physiques à l'origine des instabilités. Il est trouvé que le mode TS est stabilisé par deux mécanismes. Premièrement, le transfert d'énergie de l'écoulement de base vers la perturbation par les tenseurs des contraintes de Reynolds décroît en augmentant la vitesse réduite  $V_R$ . Ceci est dû à une zone au dessus de la couche critique où le terme de production est négatif. Ensuite, le terme d'échange avec l'écoulement de base à la paroi contribue à la stabilisation du mode TS lorsque la vitesse réduite augmente.

Enfin, il est aussi souligné que les modes de divergence sont pilotés par un terme propre à la paroi qui résulte d'un transfert d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation.

Le dernier chapitre est consacré à la stabilité linéaire des écoulements pulsés dans des canaux flexibles. L'analyse de l'évolution intracyclique de l'énergie totale montre que la dynamique intracyclique du mode TS en présence d'une paroi flexible est très peu modifiée par rapport au mode TS se développant le long d'une paroi rigide. En effet, dans les deux cas, l'évolution intracyclique du mode TS présente une augmentation de l'énergie dans la phase de décélération de l'écoulement de base et d'une diminution de l'énergie dans sa phase d'accélération. En outre, les résultats de stabilité linéaire (courbes neutres, taux de croissance, paramètres critiques) montrent que les ondes TS sont stabilisées pour les hautes fréquences ( $Wo > 12$ ), tandis que pour les basses fréquences ( $Wo < 12$ ) elles sont fortement déstabilisées, lorsque la flexibilité de la paroi est prise en compte. La dynamique des modes TS est donc similaire à celle observée pour une paroi rigide.

La dynamique intracyclique des instabilités de flottement est différente, puisque l'énergie des perturbations se développe principalement lors de la phase d'accélération de l'écoulement de base. Les modes TWF, contrairement aux modes TS, dépendent significativement de l'amplitude de la pulsation, alors que l'effet de la fréquence est plus faible. Pour les faibles amplitudes ( $\tilde{Q} < 0.4$ ), le mode TWF varié est stabilisé, tandis que pour les grandes amplitudes, il est déstabilisé. En ce qui concerne les modes TWF sinueux, l'amplitude de la pulsation a un effet déstabilisant pour toutes les fréquences étudiées.

Les effets des autres paramètres ont également été étudiés. Ainsi, il est observé que la dissipation a un effet stabilisant sur les modes TWF pour toutes les fréquences et amplitudes de pulsation étudiées. Pour la rigidité en flexion, il est montré que les

modes TWF sont stabilisés par celle-ci, en adéquation avec la classe B de Benjamin [4]. Nous montrons aussi que le nombre de Reynolds  $Re$  a un effet négligeable sur les modes de la classe B et ce pour toutes les amplitudes et fréquences étudiées.

Enfin, nous avons identifié une interaction entre le mode TS et TWF sinueux même en absence de dissipation et pour une certaine gamme de paramètres. Nous pouvons rappeler que la présence de dissipation est nécessaire pour déclencher la coalescence des modes TS et TWF sinueux au sein d'un écoulement permanent [16]. Nous avons ainsi montré que l'énergie intracyclique de ce mode de coalescence s'illustre par une interférence entre une onde de type TS et une associée au TWF. Cette interférence induit également un battement de basse fréquence au cours de chaque cycle. Cette interaction entre mode TS et TWF s'effectue par un couplage entre différents harmoniques des fonctions propres de Floquet, c'est donc un phénomène propre aux écoulements pulsés.

En conclusion, la dynamique résultant de l'interaction entre un écoulement pulsé et une paroi flexible est très riche. Ainsi, une extension de l'étude des bilans d'énergie pour le cas d'un écoulement pulsé serait intéressante afin de mieux comprendre les mécanismes physiques de stabilisation/déstabilisation. Suite aux travaux de Pier et Schmid [75] relatifs à l'étude des perturbations optimales pour les écoulements pulsés dans des canaux rigides, une analyse similaire dédiée aux écoulements pulsés dans des canaux flexibles est envisagée. Nous pourrions aussi orienter une future étude au régime non linéaire, à la vue de la richesse que présente la dynamique non linéaire d'un écoulement pulsé [74]. Dans le contexte physiologique, il est aussi nécessaire d'adapter toutes ces approches (stabilité linéaire, non linéaire et non modale) à une géométrie cylindrique. Toutes les analyses théoriques et méthodes numériques utilisées dans cette thèse peuvent être généralisées assez facilement à une géométrie cylindrique et à des profils de débit plus riches en harmoniques comme le pulse cardiaque. La principale difficulté sera l'augmentation du nombre de paramètres de contrôle. Enfin, le développement d'une analogie entre la dynamique associée au modèle surfacique de paroi flexible avec des modèles volumiques plus réalistes, en lien avec les mesures cliniques, serait un objectif de long terme.





# Bibliographie

- [1] R. AKHAVAN, R. D. KAMM et A. H. SHAPIRO. “An investigation of transition to turbulence in bounded oscillatory Stokes flows. Part 1 : Experiments”. In : *J. Fluid Mech.* 225 (1991), p. 395-422.
- [2] T. B. BENJAMIN. “Effects of a flexible boundary on hydrodynamic stability”. In : *J. Fluid Mech.* 9 (1960), p. 513-532.
- [3] T. B. BENJAMIN. “Shearing flow over a wavy boundary”. In : *J. Fluid Mech.* 6 (1959), p. 161-205.
- [4] T. B. BENJAMIN. “The threefold classification of unstable disturbances in flexible surfaces bounding inviscid flows”. In : *J. Fluid Mech.* 16 (1963), p. 436-450.
- [5] D. BIAU. “Transient growth of perturbations in Stokes oscillatory flows”. In : *J. Fluid Mech.* 794 (2016), R4.
- [6] P. J. BLENNERHASSETT et A. P. BASSOM. “The linear stability of high-frequency oscillatory flow in a channel”. In : *J. Fluid Mech.* 556 (2006), p. 1-25.
- [7] J. P. BOYD. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover Publications, 2000.
- [8] D. M. BUSHNELL et K. J. MOORE. “Drag reduction in nature”. In : *Ann. Rev. Fluid Mech.* 23 (1991), p. 65-79.
- [9] P. W. CARPENTER, C. DAVIES et A. D. LUCEY. “Hydrodynamics and compliant walls : Does the dolphin have a secret ?” In : *Current Science* 79 (2000), p. 758-765.
- [10] P. W. CARPENTER et J. S. B. GAJJAR. “A general theory for two- and three-dimensional wall-mode instabilities in boundary layers over isotropic and anisotropic compliant walls”. In : *Theor. Comput. Fluid Dyn.* 1 (1990), p. 349-378.
- [11] P. W. CARPENTER et A. D. GARRAD. “The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Part 1. Tollmien–Schlichting instabilities”. In : *J. Fluid Mech.* 155 (1985), p. 465-510.
- [12] P. W. CARPENTER et A. D. GARRAD. “The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Part 2. Flow-induced surface instabilities.” In : *J. Fluid Mech.* 170 (1986), p. 199-232.
- [13] P. W. CARPENTER et P. J. MORRIS. “The effect of anisotropic wall compliance on boundary-layer stability and transition”. In : *J. Fluid Mech.* 218 (1990), p. 171-223.

- [14] J. J. CHIU et S. CHIEN. “Effects of disturbed flow on vascular endothelium : pathophysiological basis and clinical perspectives”. In : *Physiol. Rev.* 91 (2011), p. 327-387.
- [15] P. W. CONRAD et W. O. CRIMINALE. “The stability of time-dependent laminar flow : parallel flows”. In : *Z. Angew. Math. Phys.* 16 (1965), p. 233-254.
- [16] C. DAVIES et P. W. CARPENTER. “Instabilities in a plane channel flow between compliant walls”. In : *J. Fluid Mech.* 352 (1997), p. 205-243.
- [17] C. DAVIES et P. W. CARPENTER. “Numerical simulation of the evolution of Tollmien-Schlichting waves over finite compliant panels.” In : *J. Fluid Mech.* 335 (1997), p. 361-392.
- [18] S. H. DAVIS. “The stability of time-periodic flows”. In : *Ann. Rev. Fluid Mech.* 8 (1976), p. 57-74.
- [19] K. I. DICKSON, C. T. KELLEY, I. C. F. IPSEN et I. G. KEVREKIDIS. “Condition estimates for pseudo-arclength continuation”. In : *SIAM J. Mat. Anal. App.* 45 (2007), p. 263-276.
- [20] J. A. DOMARADZKI et R. W. METCALFE. “Stabilization of laminar boundary layers by compliant membranes”. In : *Phys. Fluids* 30 (1986), p. 695-705.
- [21] P. G. DRAZIN et W. H. REID. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, 1981.
- [22] J. H. DUNCAN. “A comparison of wave propagation on the surfaces of simple membrane walls and elastic coatings bounded by a fluid flow”. In : *J. Sound. Vibr.* 119(3) (1987), p. 565-573.
- [23] D. M. ECKMANN et J. B. GROTBORG. “Experiments on transition to turbulence in an oscillatory pipe flow”. In : *J. Fluid Mech.* 222 (1991), p. 329-350.
- [24] U. EHRENSTEIN et M. ROSSI. “Nonlinear Tollmien–Schlichting waves for a Blasius flow over compliant coatings”. In : *Phys. Fluids* 8.4 (1996), p. 1036-1051.
- [25] S. EINAV et M. SOKOLOV. “An experimental study of pulsatile pipe flow in the transition range”. In : *J. Biomech. Eng.* 115 (1993), p. 404-411.
- [26] L. A. EUGENE et K. GEORG. *Numerical Continuation Methods*. Springer-Verlag, 1990.
- [27] F. E. FISH et G. V. LAUDER. “Passive and active flow control by swimming fishes and mammals”. In : *Ann. Rev. Fluid Mech.* 38 (2006), p. 192-224.
- [28] L. FORMAGGIA, A. QUARTERONI et A. VENEZIANI. *Cardiovascular Mathematics : Modeling and simulation of the circulatory system*. Springer, 2010.
- [29] Y. C. FUNG. *Mechanical Properties of Living Tissues*. Springer-Verlag New York, 1993.
- [30] M. GAD-EL-HAK. “Boundary layer interactions with compliant coatings : an overview”. In : *Appl. Mech. Rev.* 39 (1986), p. 511-523.

- [31] M. GAD-EL-HAK. “Compliant coatings : A decade of progress”. In : *Appl. Mech. Rev.* 49 (1996), S147-S157.
- [32] M. GAD-EL-HAK. *Flow Control : Passive, Active, and Reactive Flow Management*. Cambridge University Press, 2000.
- [33] J. S. B. GAJJAR et P. SIBANDA. “The hydrodynamic stability of channel flow with compliant boundaries.” In : *Theoret. Comput. Fluid Dynamics* 8 (1996), p. 105-129.
- [34] M. GASTER. “Is the Dolphin a Red Herring?” In : *Turbulence Management and Relaminarisation* Springer-Verlag, Berlin (1988), p. 285-304.
- [35] GAURAV et V. SHANKAR. “Stability of fluid flow through deformable neo-Hookean tubes.” In : *J. Fluid Mech.* 627 (2009), p. 291-322.
- [36] GAURAV et V. SHANKAR. “Stability of pressure-driven flow in a deformable neo-Hookean channel”. In : *J. Fluid Mech.* 659 (2010), p. 318-350.
- [37] S. S. GOPALAKRISHNAN, B. PIER et A. BIESHEUVEL. “Dynamics of pulsatile flow through model abdominal aortic aneurysms”. In : *J. Fluid Mech.* 758 (2014), p. 150-179.
- [38] S. S. GOPALAKRISHNAN, B. PIER et A. BIESHEUVEL. “Global stability analysis of flow through a fusiform aneurysm : Steady flows”. In : *J. Fluid Mech.* 752 (2014), p. 90-106.
- [39] J. GRAY. “Studies in animal locomotion. VI. The propulsive powers of the dolphin”. In : *J. Exp. Biol.* 13 (1936), p. 192-199.
- [40] C. E. GROSCH et H. SALWEN. “The stability of steady and time-dependent plane Poiseuille flow”. In : *J. Fluid Mech.* 34 (1968), p. 177-205.
- [41] J. B. GROTBORG et O. E. JENSEN. “Biofluid mechanics in flexible tubes”. In : *Ann. Rev. Fluid Mech.* 36 (2004), p. 121-147.
- [42] A. GUAUS et A. BOTTARO. “Instabilities of the flow in a curved channel with compliant walls.” In : *Proc. R. Soc. A.* 463 (2007), p. 2201-2222.
- [43] D. M. HERBERT. “The energy balance in modulated plane Poiseuille flow”. In : *J. Fluid Mech.* 56 (1972), p. 73-80.
- [44] M. HINO, M. SAWAMOTO et S. TAKASU. “Experiments on transition to turbulence in an oscillatory pipe flow”. In : *J. Fluid Mech.* 75 (1976), p. 193-207.
- [45] J. HØPFFNER, A. BOTTARO et J. FAVIER. “Mechanisms of non-modal energy amplification in channel flow between compliant walls.” In : *J. Fluid Mech.* 642 (2010), p. 489-507.
- [46] L. HUANG. “Reversal of the Bernoulli effect and channel flutter”. In : *J. Fluids Struct.* 12 (1998), p. 131-151.
- [47] J. JANSEN, X. ESCRIVA, F. S. GODEFERD et P. FEUGIER. “Multiscale biochemo-mechanical model of intimal hyperplasia”. In : *Biomech. Model. Mechanobiol.* (2021).

- [48] R. E. KAPLAN. “The Stability of laminar incompressible boundary layers in the presence of compliant boundaries”. Thèse de doct. Massachusetts Institute of Technology, 1964.
- [49] H. B. KELLER. “Constructive methods for bifurcation and nonlinear eigenvalue problems”. In : *Comp. Meth. App. Mech. Eng.* 704 (1977), p. 241-252.
- [50] C. von KERCZEK. “The instability of oscillatory plane Poiseuille flow”. In : *J. Fluid Mech.* 116 (1982), p. 91-114.
- [51] C. von KERCZEK et S. H. DAVIS. “Linear stability theory of oscillatory Stokes layers”. In : *J. Fluid Mech.* 62 (1974), p. 753-773.
- [52] M. KRAMER. “Boundary layer interactions with compliant coatings : an overview”. In : *J. Aeronaut. Sci.* 24 (1957), p. 459-505.
- [53] M. KRAMER. “Boundary layer stabilization by distributed damping”. In : *Nav. Eng. J.* 74.2 (1962), p. 341-348.
- [54] D. N. KU. “Blood flow in arteries”. In : *Ann. Rev. Fluid Mech.* 29.1 (1997), p. 399-434.
- [55] V. KUMARAN. “Stability and the transition to turbulence in the flow through conduits with compliant walls”. In : *J. Fluid Mech.* 924 (2021), P1.
- [56] M. T. LANDAHL. “On the stability of laminar boundary-layer flow over a flat plate with a compliant surface”. In : *J. Fluid Mech.* 13 (1962), p. 609-632.
- [57] E. de LANGRE. “Analyse dimensionnelle en interaction fluide–structure”. In : *La Houille Blanche* 3-4 (2000), p. 14-18.
- [58] E. de LANGRE. *Fluides et solides*. École Polytechnique, 2001.
- [59] P. G. LAROSE et J. B. GROTHBERG. “Flutter and long-wave instabilities in compliant channels conveying developing flows”. In : *J. Fluid Mech.* 331 (1997), p. 37-58.
- [60] S. LEBBAL, F. ALIZARD et B. PIER. “Revisiting the linear instabilities of plane channel flow between compliant walls”. In : *submitted to Phys. Rev. Fluids* (2021).
- [61] R. B. LEHOUCQ, D. C. SORENSEN et C. YANG. *ARPACK Users’ Guide*. Society for Industrial et Applied Mathematics, 1998.
- [62] A. D. LUCEY, G. J. CAFOLLA, P. W. CARPENTER et M. YANG. “The nonlinear hydroelastic behaviour of flexible walls”. In : *J. Fluids Struct.* 11 (1997), p. 717-744.
- [63] A. D. LUCEY et P. W. CARPENTER. “Boundary layer instability over compliant walls : Comparison between theory and experiment”. In : *Phys. Fluids* 7 (1995), p. 2355-2363.
- [64] M. MALIK, M. SKOTE et R. BOUFFANAIS. “Growth mechanisms of perturbations in boundary layers over a compliant wall”. In : *Phys. Rev. Fluids* 3 (2018), p. 013903.

- [65] M. L. MANNING, B. BAMIEH et J. CARLSON. “Descriptor approach for eliminating spurious eigenvalues in hydrodynamic equations.” In : *arXiv* 0705.1542 (2007), p. 1-12.
- [66] P. MERKLI et H. THOMANN. “Transition to turbulence in oscillating pipe flow”. In : *J. Fluid Mech.* 68 (1975), p. 567-576.
- [67] J. W. MILES. “On the generation of surface waves by shear flows.” In : *J. Fluid Mech.* 3 (1957), p. 185-199.
- [68] M. NAGATA et T. R. COLE. “On the stability of plane Poiseuille flow between compliant boundaries.” In : *Proceedings of the International Conference on Computational Methods and Experimental Measurements IX*, WIT Press (1999), p. 231-240.
- [69] M. F. O’ROURKE et J. HASHIMOTO. “Mechanical factors in arterial aging : A clinical perspective”. In : *J. Am. Coll. Cardiol.* 50 (2007), p. 1-13.
- [70] S. A. ORSZAG. “Spectral methods for problems in complex geometries”. In : *J. Comput. Phys.* 37 (1980), p. 70-92.
- [71] R. PATNE et V. SHANKAR. “Stability of flow through deformable channels and tubes ; implications of consistent formulation”. In : *J. Fluid Mech.* 860 (2019), p. 837-885.
- [72] T. J. PEDLEY. *The Fluid Mechanics of Large Blood Vessels*. Cambridge University Press, 1980.
- [73] R. PEYRET. *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*. Springer, 2002.
- [74] B. PIER et P. J. SCHMID. “Linear and nonlinear dynamics of pulsatile channel flow”. In : *J. Fluid Mech.* 815 (2017), p. 435-480.
- [75] B. PIER et P. J. SCHMID. “Optimal energy growth in pulsatile channel and pipe flows”. In : *J. Fluid Mech.* 926 (2021), A11.
- [76] A. QUARTERONI, M. TUVERI et A. VENEZIANI. “Computational vascular fluid dynamics : problems, models and methods”. In : *Computing and Visualization in Science* 2 (2000), p. 163-197.
- [77] J. M. ROTENBERRY et P. G. SAFFMAN. “Effect of compliant boundaries on weakly nonlinear shear waves in channel flow”. In : *SIAM J. Appl. Math.* 50 (1990), p. 361-394.
- [78] A. G. SALINGER, N. M. BOURABEE, R. P. PAWLOWSKI, E. D. WILKES, E. A. BURROUGHS, R. B. LEHOUCQ et L. A. ROMERO. *LOCA 1.0 Library of continuation algorithms : Theory and implementation manual*. Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM, 2002.
- [79] P. J. SCHMID et D. S. HENNINGSON. *Stability and Transition in Shear Flows*. Applied Mathematical Sciences 142, Springer, 2001.

- [80] M. R. SCHUMACK, W. W. SCHULTZ et J. P. BOYD. “Spectral method solution of the Stokes equations on nonstaggered grids”. In : *J. Comput. Phys.* 94.1 (1991), p. 30-58.
- [81] P. K. SEN et D. S. ARORA. “On the stability of laminar boundary-layer flow over a flat plate with a compliant surface”. In : *J. Fluid Mech.* 197 (1988), p. 201-240.
- [82] R. SEYDEL. *Practical bifurcation and stability analysis : from equilibrium to chaos*. Springer-Verlag New York, 1994.
- [83] R. E. SHADWICK. “Mechanical design in arteries”. In : *J. Exp. Biol.* 202 (1999), p. 3305-3313.
- [84] V. SHANKAR et V. KUMARAN. “Stability of wall modes in fluid flow past a flexible surface.” In : *Phys. Fluids* 14 (2002), p. 2324-2338.
- [85] B. A. SINGER, J. H. FERZIGER et H. L. REED. “Numerical simulations of transition in oscillatory plane channel flow”. In : *J. Fluid Mech.* 208 (1989), p. 45-66.
- [86] D. C. SORENSEN. “Implicit application of polynomial filters in a k-step Arnoldi method”. In : *SIAM J. Mat. Anal. App.* 13 (1992), p. 357-385.
- [87] H. B. SQUIRE. “On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls”. In : *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A-Math. Phys. Eng. Sc.* A142 (1933), p. 621-628.
- [88] A. G. STRAATMAN, R. E. KHAYAT, E. HAJ-QASEM et D. A. STEINMAN. “On the hydrodynamic stability of pulsatile flow in a plane channel”. In : *Phys. Fluids* 14 (2002), p. 1938-1944.
- [89] M. THOMAS. “The nonlinear stability of flows over compliant walls”. In : *J. Fluid Mech.* 239 (1992), p. 657-670.
- [90] L. TREFETHEN. *Spectral Methods in Matlab*. SIAM, 2000.
- [91] K. TSIGKLIFIS et A. D. LUCEY. “Asymptotic stability and transient growth in pulsatile Poiseuille flow through a compliant channel”. In : *J. Fluid Mech.* 820 (2017), p. 370-399.
- [92] O. WIPLIER. “Étude numérique des instabilités d’un écoulement de couche limite en présence d’une paroi déformable”. Thèse de doct. Université des sciences et technologies de Lille, 1999.
- [93] O. WIPLIER et U. EHRENSTEIN. “Numerical simulation of linear and nonlinear disturbance evolution in a boundary layer with compliant walls”. In : *J. Fluids Struct.* 14 (2000), p. 157-182.
- [94] J. R. WOMERSLEY. “Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when pressure gradient is known”. In : *J. Physiol.* 127 (1955), p. 553-563.
- [95] D. XU et M. AVILA. “The effect of pulsation frequency on transition in pulsatile pipe flow”. In : *J. Fluid Mech.* 857 (2018), p. 937-951.

- [96] D. XU, B. SONG et M. AVILA. “Non-modal transient growth of disturbances in pulsatile and oscillatory pipe flows”. In : *J. Fluid Mech.* 907 (2021), R5.
- [97] D. XU, A. VARSHNEY, X. MA, B. SONG, M. RIEDL, M. AVILA et B. HOF. “Nonlinear hydrodynamic instability and turbulence in pulsatile flow”. In : *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A* 117 (21) (2020), p. 11233-11239.
- [98] D. XU, S. WARNECKE, B. SONG, X. MA et B. HOF. “Transition to turbulence in pulsating pipe flow”. In : *J. Fluid Mech.* 831 (2017), p. 418-432.