



HAL
open science

Prévision de la réponse forcée de roues aubagées désaccordées en présence de non-linéarités de frottement

Samuel Quaegebeur

► To cite this version:

Samuel Quaegebeur. Prévision de la réponse forcée de roues aubagées désaccordées en présence de non-linéarités de frottement. Autre. Université de Lyon, 2021. Français. NNT : 2021LYSEC043 . tel-03577720

HAL Id: tel-03577720

<https://theses.hal.science/tel-03577720>

Submitted on 16 Feb 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE CENTRALE DE LYON

École doctorale **Mécanique Énergétique Génie civil Acoustique**

Unité de recherche **LTDS**

Thèse présentée par **Samuel QUAEGEBEUR**

Soutenue le **22 novembre 2021**

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'École Centrale de Lyon

Discipline **Mécanique**

Spécialité **Dynamique des structures**

Prévision de la réponse forcée de roues aubagées désaccordées en présence de non-linéarités de frottement

Thèse dirigée par Fabrice THOUVEREZ Directeur
Benjamin CHOUVION Co-Encadrant

Composition du jury

<i>Rapporteurs</i>	Évangeline CAPIEZ-LERNOUT Mathias LEGRAND	Maître de conférences HDR, Université Paris-Est Marne-la-Vallée Professeur, McGill University, SDVL
<i>Examineur</i>	Loïc BERTHE	Ingénieur Méthodes, Safran Helicopter Engines
<i>Président</i>	Marc MIGNOLET	Professeur, Arizona State University
<i>Directeurs de thèse</i>	Fabrice THOUVEREZ Benjamin CHOUVION	Professeur, École Centrale de Lyon, LTDS Maître de conférences, École Centrale de Lyon, LTDS

ÉCOLE CENTRALE DE LYON

Doctoral School **Mécanique Énergétique Génie civil Acoustique**

University Department **LTDS**

Thesis defended by **Samuel QUAEGEBEUR**

Defended on **22nd November, 2021**

In order to become Doctor from **École Centrale de Lyon**

Academic Field **Mechanical engineering**

Speciality **Structural Dynamics**

Forced response of mistuned cyclic structures with friction nonlinearities

Thesis supervised by Fabrice THOUVEREZ Supervisor
Benjamin CHOUVION Co-Monitor

Committee members

<i>Referees</i>	Évangeline CAPIEZ-LERNOU Mathias LEGRAND	HDR Associate Professor, Université Paris-Est Marne-la-Vallée Professor, McGill University, SDVL
<i>Examiner</i>	Loïc BERTHE	Methods Engineer, Safran Helicopter Engines
<i>President</i>	Marc MIGNOLET	Professor, Arizona State University
<i>Supervisors</i>	Fabrice THOUVEREZ Benjamin CHOUVION	Professor, École Centrale de Lyon, LTDS Associate Professor, École Centrale de Lyon, LTDS

Cette thèse a été préparée au

LTDS

LTDS UMR 5513
École Centrale de Lyon
36, avenue Guy de Collongue
69134 Ecully, France

☎ 0 (+33) 4 72 18 62 93
✉ helene.schoch@ec-lyon.fr
Site ltds.ec-lyon.fr



PRÉVISION DE LA RÉPONSE FORCÉE DE ROUES AUBAGÉES DÉSACCORDÉES EN PRÉSENCE DE NON-LINÉARITÉS DE FROTTEMENT**Résumé**

Afin de certifier leurs moteurs, les industriels du milieu aéronautique doivent valider un ensemble de spécifications fournies par un cahier des charges précis. Dans cette thèse, le volet qui nous intéresse est celui de la vibration des systèmes mécaniques. Plus le niveau vibratoire de la structure est important, plus celle-ci est soumise à des contraintes importantes et donc plus elle s'use par fatigue. Afin de réduire ces niveaux, des systèmes frottants, non-linéaires, sont ajoutés au système mécanique et dissipent de l'énergie. Pour dimensionner correctement les moteurs, des outils numériques complexes et performants doivent être utilisés et ces derniers sont encore plus complexes en présence de non-linéarités.

Ces outils s'appuient sur les propriétés de symétrie cyclique venant de la géométrie particulière des roues aubagées. En revanche, l'utilisation de ces propriétés n'est pas complètement triviale à cause de la présence de désaccordage : de légères différences entre les secteurs de la structure, venant des tolérances de fabrication ou encore de l'usure, brisent ainsi la périodicité du système. Des méthodes ont pu être mises en place, en partenariat avec des chercheurs académiques, pour traiter de systèmes cycliques désaccordés non-linéaires. Afin de diminuer le temps de calcul elles emploient des méthodes de réduction telles que la sous-structuration ou encore le concept de mode non-linéaire.

Différents objectifs motivent ce travail de thèse. Le premier est de développer de nouvelles méthodologies de réduction analytiques. Ces stratégies performantes se basent sur le couplage non-linéaire entre le frottement et les diamètres nodaux du système à symétrie cyclique. Le second objectif est de statuer sur la faisabilité d'une méthode de réduction non-linéaire récemment développée, appelée CNCMS, pour étudier des amortisseurs sous plateformes. Comme cette stratégie se montre imprécise dans certaines situations, le dernier objectif consiste à développer une nouvelle procédure non-linéaire pour traiter de systèmes désaccordés. Celle-ci s'appuie sur un principe de sous-structuration et de modes complexes cycliques non-linéaires. Cette stratégie peut prendre en compte différentes excitations, du désaccordage aléatoire et intentionnel et est donc très polyvalente. De plus elle offre une réduction du temps de calcul supérieure à celle de la CNCMS.

A la suite de différentes validations, cette nouvelle méthodologie est employée pour traiter une multitude de problèmes mécaniques sur une structure éléments finis réaliste d'un compresseur. Un système non-linéaire à trois corps est tout d'abord examiné pour lequel les contacts pale/disque et pale/amortisseurs sont étudiés. Une étude de sensibilité sur le désaccordage aléatoire est ensuite menée pour déterminer l'influence du couplage entre les non-linéarités et le désaccordage sur le niveau vibratoire de la structure. Il a notamment pu être montré que l'augmentation du niveau de non-linéarité diminue l'influence du désaccordage sur le niveau vibratoire. Finalement une approche est proposée pour déterminer le schéma de désaccordage intentionnel optimal d'un système mécanique non-linéaire. En appliquant cette méthode sur un système non-linéaire avec des amortisseurs sous plateformes, six schémas optimaux ont pu être identifiés. Des analyses supplémentaires sur le flottement ou la sensibilité des schémas au désaccordage aléatoire permettent de restreindre davantage ce nombre.

Mots clés : symétrie cyclique, méthode de réduction, non-linéarité polynomiale, non-linéarité de frottement, désaccordage

FORCED RESPONSE OF MISTUNED CYCLIC STRUCTURES WITH FRICTION NONLINEARITIES**Abstract**

Before developing their engines, the aeronautics industry must satisfy detailed certification specifications. In this thesis, the vibration criterion of the mechanical system is handled. As level of vibration increases, the stresses raises, and thus the structure is wearing down faster. To decrease the vibration, friction nonlinearities are added to the main structure and thus dissipate energy. To simulate the engine properly, reliable and efficient numerical tools must be employed. With the aid of academic research, numerical methodologies have been implemented. These strategies allow to tackle nonlinear cyclic systems with possible mistuning. To decrease the computation time of the simulations, reduced-order methods such as substructuring or nonlinear normal modes are employed. Different goals have been defined for this PhD study. First, new analytical reduction strategies for cyclic symmetric structures are developed. These efficient methods allow to determine the nonlinear coupling between the nodal diameters of the system and the friction nonlinearities. The second purpose is to investigate the performance of a recent methodology, named CNCMS, for cyclic systems with underplatform dampers. Given some limitations of this strategy, a new nonlinear reduced-order methodology is proposed to handle nonlinear mistuned structures. It relies on the substructuring concept and complex cyclic nonlinear normal modes. This strategy was shown to be most versatile (different excitations, random and intentional mistuning can be handled). Besides, it offers better reduction than the CNCMS.

After different validations, this strategy is employed on a realistic finite element bladed disk with underplatform dampers. A preliminary study is conducted to study the three body contact and evaluate the influence of the bladed-disk contact with respect to the underplatform dampers contact. Then a random mistuning sensitivity analysis is performed to determine the influence of the coupling between the nonlinearities and the mistuning on the vibration level of the structure. One main result of this analysis was to show that the higher the nonlinearity level, the less the mistuning affect the system.

Finally, an approach is proposed to determine the best intentional mistuned pattern of a nonlinear mechanical system. Employing this method enabled to identify six optimal mistuned patterns. Additional studies (flutter phenomena, sensitivity of the random mistuning) can be conducted to single out the best one.

Keywords: cyclic symmetry, reduce-order model, polynomial nonlinearity, friction nonlinearity, mistuning

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer ces travaux de thèse. Je les remercie également pour leur disponibilité pour la date de soutenance : trouver une heure (compte tenu du décalage horaire pour certains) qui convienne à tous n'était pas évident.

Je voulais ensuite remercier les personnes qui m'ont encadré durant cette thèse. Tout d'abord mon directeur de thèse, Fabrice Thouverez, qui a su m'orienter dans les bonnes directions lors de ces trois années de recherche. Les nombreuses réunions et discussions ont permis de maintenir un rythme de travail soutenu. Je tenais également à le remercier pour son investissement dans mon choix de carrière professionnel. Un grand merci également à Benjamin Chouvion pour son encadrement et surtout pour ses disponibilités malgré son détachement à l'École de l'Air. Sa rigueur dans les articles scientifiques a permis d'améliorer grandement la qualité des publications effectuées lors de cette thèse. Je tiens également à remercier Loïc Berthe, de l'entreprise Safran Helicopter Engines de m'avoir fait confiance pour cette thèse CIFRE et également pour son analyse minutieuse des différentes méthodes développées lors de ces travaux.

De façon plus globale, je remercie les deux entités qui m'ont accueilli dans leurs locaux. Tout d'abord les personnes du site de Safran Helicopter Engines à Bordès. En particulier, merci à l'équipe méthodes et outils : Jérôme, Julien, Olivier, et Patricio. Ainsi qu'à l'équipe turbines et échappement notamment à Matthieu Herrand. M'accueillir dans leurs locaux pendant la période du covid (mesures sanitaires, surcharge de travail, etc) n'était pas évident mais j'ai beaucoup apprécié leur effort pour m'intégrer au mieux. Je remercie également l'ensemble du personnel de l'École Centrale de Lyon, en particulier les résidents des bâtiments E6 et G8 (le normal, le bis, et le phare). Merci à Olivier et Lionel pour le support informatique. Pour une thèse en numérique, c'est indispensable ! Merci à Laurent, Fabrice, Sébastien, et Hélène pour les charges d'enseignement qu'ils m'ont confiés. Merci à Stéphane et Sébastien pour le support technique des TP effectués. Merci aussi à Isabelle pour l'ensemble des tâches administratives (et il y en a beaucoup). Je tenais également à remercier Alexandre Danescu et Hélène Magoariéc qui, de part leur qualités exceptionnelles d'enseignants, m'ont donné envie de continuer dans le monde académique/recherche en général et dans le domaine de la mécanique en particulier.

Merci ensuite à mes différents co-bureaux du bâtiment. Cette thèse a été ponctuée de discussions scientifiques, d'entraides sur Matlab, Latex, et Ansys, mais aussi de pauses, sorties, et moments de détente. Merci aux autres amis qui m'ont soutenu pendant cette thèse : Alexandre, Corentin, Florence, et Lise. Quelques lignes spéciales pour Dorine à qui je souhaite exprimer toute ma tendresse. J'ai eu beaucoup de chance de t'avoir rencontrée et je souhaite te remercier pour qui tu es.

Merci à toute ma famille pour son soutien lors de cette thèse, en particulier à ma famille proche, Sabine, Tony et Saméo, Sophie et mes parents. Merci pour tout : le soutien, la patience, les conseils et l'amour que vous me portez.

Table des matières

Résumé	vii
Remerciements	ix
Table des matières	xi
Introduction générale	1
Contexte industriel	1
Contexte scientifique	2
Objectifs	2
Organisation du mémoire	2
I Contexte et problématique	5
1 Équation du mouvement du système mécanique	6
2 Introduction à la symétrie cyclique	6
3 Chargements spécifiques des roues aubagées	9
4 Analyses linéaires de roues aubagées	11
4.1 Analyse modale	11
4.2 Exemple d'analyse de conception	11
5 Introduction au désaccordage	13
5.1 Impact du désaccordage sur les propriétés de symétrie cyclique	14
5.2 Étude statistique du désaccordage aléatoire	16
6 Enjeux vibratoires : introduction aux forces non-linéaires	18
6.1 Non-linéarité de frottement	18
6.2 Non-linéarité géométrique	18
7 Résolution par la méthode d'équilibrage harmonique (HBM)	19
7.1 Principe théorique	19
7.2 Évaluation des forces non-linéaires	20
7.3 Méthode de continuation	21
7.4 Prédiction/correction	22
8 Stabilité et bifurcation des solutions périodiques	23
8.1 Stabilité locale	23
8.2 Suivi de bifurcations	25
9 Bilan du chapitre	26
II État de l'art sur les méthodes de réduction	27
1 Sous-structuration linéaire : la méthode de Craig-Bampton	28
2 Double synthèse modale	29
3 Réduction non-linéaire	29
3.1 Historique des modes non-linéaires	30

3.2 Modes complexes non-linéaires	31
4 Synthèse modale non-linéaire	32
5 Condensation sur les degrés de liberté non-linéaires relatifs	35
5.1 Calcul de la matrice de rigidité dynamique	35
5.2 Restitution du déplacement	36
6 Sous-structuration non-linéaire à interfaces fixes : la CNCMS	36
6.1 Première réduction : sous-structuration	37
6.2 Seconde réduction : mode non-linéaire	38
6.3 Troisième réduction : double synthèse modale	39
6.4 Synthèse, substitution des forces non-linéaires et prise en compte du désaccordage aléatoire	39
6.5 Validation sur un modèle éléments-finis	40
6.6 Simulation numérique non-linéaire	43
7 Bilan du chapitre	46
III Réduction de systèmes non-linéaires à symétrie cyclique	47
1 Approche de Petrov	48
1.1 Pour une onde tournante	48
1.2 Pour une onde stationnaire	50
2 Réduction cyclique pour des non-linéarités polynomiales	51
2.1 Analyse des résonances internes par la méthode des échelles multiples	55
2.2 Analyse d'une résonance interne 1 :1 pour une forme d'onde tournante	57
2.3 Résumé de l'analyse	58
2.4 Limitations de la méthode	59
3 Réduction cyclique pour des non-linéarités de frottement	59
3.1 Méthode 1 : méthode générale de réduction pour l'évaluation des forces non-linéaires	62
3.2 Méthode 2 : interaction entre diamètres nodaux couplée à la stratégie de Petrov	63
3.3 Méthode 3 : interaction entre diamètres nodaux avec l'hypothèse d'onde stationnaire	64
3.4 Capacités de réduction des différentes méthodologies	65
3.5 Limitations des méthodes	67
4 Validation des méthodologies sur un modèle masse-ressort	67
4.1 Non-linéarité polynomiale	69
4.2 Non-linéarité de frottement	72
5 Validation des méthodologies sur un modèle éléments finis	75
5.1 Cas d'une excitation tournante	76
5.2 Cas d'une excitation stationnaire	77
5.3 Performance des méthodes	80
6 Performance de la CNCMS sur un modèle éléments finis réaliste	82
6.1 Présentation du modèle réaliste : TurboTopo Vrillé	82
6.2 Résultats numériques	82
7 Bilan du chapitre	85
IV Réduction pour des structures cycliques non-linéaires désaccordées	87
1 Synthèse modale cyclique non-linéaire	88
1.1 Calcul du mode non-linéaire cyclique tournant	88
1.2 Méthode de synthèse cyclique	89
2 Principe de la Substructuring method based on Nonlinear Cyclic Reduction	91
2.1 Détails sur la création de la base non-linéaire	91
2.2 Choix de la base de réduction	96
3 Validation	97

3.1	Validation numérique pour une structure à symétrie cyclique	97
3.2	Validation de la SNCR pour des structures désaccordées	99
3.3	Performances et limitations	103
3.4	Exemple simple d'application	105
4	Bilan du chapitre	108
V	Analyse d'un modèle éléments finis de roue aubagée	109
1	Analyse d'une structure accordée constituée de pales, d'un disque et d'amortisseurs . .	109
1.1	Résultat numérique sur le cas accordé standard	109
1.2	Détails sur les composantes spectrales dans le cas d'une excitation stationnaire . .	114
1.3	Influence du coefficient de frottement	115
1.4	Influence de la précharge centrifuge	116
2	Analyse de sensibilité d'une roue aubagée au désaccordage aléatoire	118
3	Étude d'amortisseurs désaccordés sur la vibration d'une roue aubagée	121
3.1	Cas test	122
3.2	Étude paramétrique du coefficient de frottement sur la structure accordée	122
3.3	Optimisation globale du système mécanique	124
4	Bilan du chapitre	128
	Conclusion	131
	Contexte	131
	Résultats	131
	Perspectives	132
	Table des figures	135
	Liste des tableaux	139
	Bibliographie	141
A	Passage des composantes cycliques complexes aux composantes cycliques réelles	155
B	Traitements des mouvements de corps rigides	159
1	Cas pour deux corps : contact pale et disque	159
1.1	Calcul de la matrice de rigidité dynamique	159
1.2	Restitution du déplacement	160
2	Cas pour trois corps : contact pale, disque et amortisseur	160
2.1	Calcul de la matrice de rigidité dynamique	160
2.2	Restitution du déplacement	161
C	Calcul des modes complexes non-linéaires	163
1	Mise en équation	163
2	Évaluation de la jacobienne	164
2.1	Jacobienne par rapport aux inconnues harmoniques de déplacement relatives . . .	164
2.2	Jacobienne par rapport à la pulsation complexe	164
2.3	Passage en quantités réelles	165
D	Algorithme de contact : Dynamic Lagrangian Frequency Time	167
1	Dynamic Lagrangian Frequency Time pour l'effort normal	167
2	Dynamic Lagrangian Frequency Time pour l'effort tangentiel	167

E	Résultats complémentaires avec la méthode des échelles multiples	169
1	Étude d'une résonance interne 1 :1 pour une onde stationnaire	169
2	Étude d'une résonance interne 1 :3 pour une onde tournante	170
3	Étude d'une résonance interne 1 :3 pour une onde stationnaire	171
F	Algorithme pour déterminer l'interaction diamétrale	173
G	Calcul de la jacobienne de la méthode SNCR	175
1	Jacobienne par rapport aux coordonnées généralisées	175
2	Jacobienne par rapport à la pulsation d'excitation	176
	Liste des publications personnelles	177

Introduction générale

Contexte industriel

Cette thèse a été proposée par l'entreprise Safran Helicopter Engines constructeur de moteurs d'hélicoptères. Les moteurs sont généralement constitués de plusieurs parties comme notamment les étages de compresseurs, la chambre de combustion et les étages de turbines. Le flux d'air entrant dans le moteur va être comprimé par les compresseurs avant de rentrer dans la chambre de combustion. Le mélange air-kérosène est alors enflammé. Ce mélange monte en température et en pression. Les gaz passent ensuite par des étages de turbine qui vont récupérer une partie de l'énergie du fluide pour faire tourner l'ensemble du moteur ainsi que les pales d'hélicoptères. Le lecteur pourra se référer au livre [138] pour de plus amples informations.

L'ensemble du système mécanique est donc soumis à des forces aérodynamiques dues au mouvement du flux d'air. Avec la rotation des arbres, ces chargements sont périodiques et vont faire vibrer l'intégralité du moteur. Il est alors important de pouvoir prédire le comportement des différentes parties du moteur pour pouvoir en déterminer l'usure et les limites en fatigue. Pour vendre leurs produits, les motoristes doivent valider de nombreuses certifications (voir la Section CS-E 650 de [1]) justifiant le bon fonctionnement du système. Évidemment des tests sur pièces réelles sont effectués pour justifier la qualité du produit mais ces essais sont très onéreux et sont donc limités au minimum. L'objectif de l'entreprise pour cette thèse est de développer une stratégie numérique permettant de déterminer le mouvement d'une roue de compresseur ou de turbine soumis à un chargement aérodynamique et centrifuge. Ces simulations numériques ont donc pour objectif de caractériser ces composants de façon précise pour limiter le nombre d'essais réels à réaliser pour valider le système.

Cette problématique est loin d'être simple pour plusieurs raisons. Tout d'abord les modèles éléments finis industriels sont très raffinés afin de garantir une grande précision sur les déplacements, et les contraintes du système. Il convient donc de trouver des stratégies de réduction de modèle permettant de réduire la taille du problème tout en gardant une bonne précision sur la dynamique du système. Les non-linéarités des solides (non-linéarités de matériaux, effets géométriques, ou encore présence de zone de frottement : contact pied d'aube, amortisseurs sous plateformes, talons, etc) rendent complexe la prédiction du mouvement du système. Des méthodes de résolution existent mais sont coûteuses en temps de calcul. Une dernière problématique que nous pouvons mentionner est la présence de désaccordage : les secteurs au sein d'une même roue présentent des géométries ou des propriétés matériaux différentes d'un secteur à l'autre à cause des tolérances d'usinage ou de l'usure par exemple. Ainsi déterminer le mouvement d'un secteur ne suffit pas pour reconstituer le déplacement sur l'ensemble de la roue.

L'entreprise a donc pour objectif de développer une méthode de résolution permettant de prédire le mouvement non-linéaire de roues aubagées en présence de désaccordage tout en réduisant au maximum les temps de calcul.

Contexte scientifique

Cette thèse a été réalisée au sein du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS) à l'École Centrale de Lyon. Les problématiques vibratoires des machines tournantes y sont très étudiées : non-linéarité de frottement [20, 82, 112], non-linéarité géométrique [98], désaccordage [123], couplage aéro-dynamique [6], contact rotor-stator [54], usure [137], etc. Tous ces phénomènes rendent difficile la prédiction du mouvement du système et il convient donc de les analyser indépendamment pour comprendre leur influence respective. Le manuscrit présenté ici fait suite à la thèse de Colas Joannin [64] qui traite de roues aubagées désaccordées non-linéaires via des pales rapportées (contact pale/disque). Sa thèse a consisté en l'élaboration d'une méthode de réduction non-linéaire permettant de calculer le niveau vibratoire sur ce type de systèmes. Plusieurs questions restaient en suspens à la suite de sa thèse : quelle est la précision de sa méthode sur des systèmes fortement non-linéaires ? Est-il possible de considérer des solides avec des amortisseurs sous-plateformes ? Les travaux présentés ici répondent à ces questions en proposant des stratégies de résolution analytique qui couplent les non-linéarités de frottement avec la notion de symétrie cyclique. De plus, afin de résoudre certains problèmes rencontrés avec la méthode de Joannin [64], une nouvelle stratégie de réduction non-linéaire est proposée pour traiter de structures désaccordées avec des amortisseurs sous plateformes. Notons également que, pour la première fois au sein du laboratoire, cette thèse traite de trois corps distincts en contact : le disque, la pale et les amortisseurs.

Cette thèse s'inscrit dans un intérêt international très marqué autour des machines tournantes. De nombreuses universités scientifiques tels que l'Imperial College, Ann Arbor University ou encore l'Université Polytechnique de Turin innovent sur des thématiques traitées dans cette thèse. Nous pouvons mentionner le sujet du frottement avec des éléments dissipatifs [89, 126, 176] ou encore celui du désaccordage [90, 128]. Cet engouement pour ce sujet donne lieu à des conférences internationales spécifiques (comme par exemple TurboExp) mais également à des collaborations inter-laboratoires et inter-entreprises comme le projet européen EXPERTISE. Dans ce projet, des doctorants de différents laboratoires étudient de multiples thèmes centrés autour des machines tournantes tels que sur la modélisation du contact [31], l'identification des interfaces de contact [70], la dynamique des turbines [136], ou encore du calcul haute performance [38]. La thèse présentée ici s'inscrit donc dans un contexte scientifique riche et très actuel.

Objectifs

L'objectif principal de cette thèse consiste à développer une méthode permettant d'étudier des structures cycliques multi-corps en éléments finis, désaccordées, non-linéaires. Cette problématique sera décomposée en plusieurs parties. Tout d'abord des stratégies robustes sont développées permettant de traiter des structures à symétrie cyclique non-linéaires. Ces méthodes sont ensuite utilisées pour étudier les performances d'une méthode de réduction développée il y a quelques années au LTDS. Certaines faiblesses de cette réduction seront mises en évidence, et conduiront à l'élaboration d'une nouvelle stratégie. Celle-ci sera finalement employée sur des structures d'intérêts de Safran Helicopter Engines.

Organisation du mémoire

Ce mémoire est subdivisé en plusieurs chapitres. Le Chapitre I rappelle les équations de la dynamique des machines tournantes et explique les différentes difficultés traitées dans ce manuscrit : non-linéarité et désaccordage. Le Chapitre II présente l'état de l'art des méthodes de réduction pour traiter des systèmes non-linéaires désaccordés. Le Chapitre III présente des méthodes de réduction exactes permettant de calculer la dynamique de structures à symétrie cyclique soumises à des non-linéarités géométriques et de frottement. Le Chapitre IV présente une nouvelle méthode de réduction non-linéaire pour des

structures désaccordées. Le Chapitre [V](#) emploie ces nouvelles stratégies sur des modèles industriels (avec et sans amortisseurs). Une conclusion est finalement proposée sur les travaux de cette thèse avec quelques perspectives.

Chapitre I

Contexte et problématique

Sommaire du chapitre

1 Équation du mouvement du système mécanique	6
2 Introduction à la symétrie cyclique	6
3 Chargements spécifiques des roues aubagées	9
4 Analyses linéaires de roues aubagées	11
4.1 Analyse modale	11
4.2 Exemple d'analyse de conception	11
5 Introduction au désaccordage	13
5.1 Impact du désaccordage sur les propriétés de symétrie cyclique	14
5.2 Étude statistique du désaccordage aléatoire	16
6 Enjeux vibratoires : introduction aux forces non-linéaires	18
6.1 Non-linéarité de frottement	18
6.2 Non-linéarité géométrique	18
7 Résolution par la méthode d'équilibrage harmonique (HBM)	19
7.1 Principe théorique	19
7.2 Évaluation des forces non-linéaires	20
7.3 Méthode de continuation	21
7.4 Prédiction/correction	22
8 Stabilité et bifurcation des solutions périodiques	23
8.1 Stabilité locale	23
8.2 Suivi de bifurcations	25
9 Bilan du chapitre	26

L'objectif de cette première partie est de formuler le système d'équations régissant la dynamique vibratoire de compresseurs ou turbines. Pour cela, nous présentons les différents problèmes qui seront traités dans ce manuscrit ainsi que les méthodes de résolution qui seront employées. Nous définissons ainsi les types de structures étudiées, à savoir des machines tournantes avec des propriétés de symétrie cyclique. Nous introduisons ensuite la notion de désaccordage et les études statistiques qui peuvent y être associées. Nous abordons ensuite la notion de forces non-linéaires via des effets géométriques et via le frottement ainsi que leur phénoménologie respective.

1 Équation du mouvement du système mécanique

Le mouvement des systèmes mécaniques linéaires discrets est régi par l'équation de la dynamique

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}_{\text{ext}}. \quad (\text{I.1})$$

Les matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} et \mathbf{K} représentent les matrices de masse, d'amortissement et de raideur du système. Les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{f}_{ext} sont respectivement les déplacements et les efforts extérieurs appliqués sur la structure. Le calcul de ces termes structuraux n'est pas rappelé ici mais est détaillé dans [46] ainsi que dans différentes thèses, comme par exemple [53, 64, 98]. Dans le cadre de ce mémoire, ces matrices sont obtenues soit en considérant des cas tests phénoménologiques masses-ressorts (leur écriture est alors directe), soit via le logiciel Ansys qui utilise la méthode des éléments finis [45]. Dans le cadre des solides en rotation (comme pour les machines tournantes), la matrice d'amortissement peut être additionnée à une matrice de Coriolis. De même, la matrice de raideur contient en plus la matrice d'assouplissement centrifuge, la matrice de raideur géométrique, et la matrice d'accélération angulaire [46]. La rotation du système mène aussi à une force dite de précharge \mathbf{f}_0 qui est ici incluse dans le terme \mathbf{f}_{ext} . Dans notre cadre d'étude, la vitesse de rotation du système est constante ce qui permet de supprimer la matrice d'accélération angulaire. De plus, le disque est supposé suffisamment rigide et la pale suffisamment peu élancée pour négliger la matrice de Coriolis.

2 Introduction à la symétrie cyclique

Dans ce manuscrit, les structures à symétrie cyclique (par exemple des roues aubagées) vont être étudiées. Ces structures comportent un secteur de référence qui se répète N fois, et qui forme ainsi le système complet de N secteurs. Une représentation d'une telle structure est fournie à la Figure I.1.

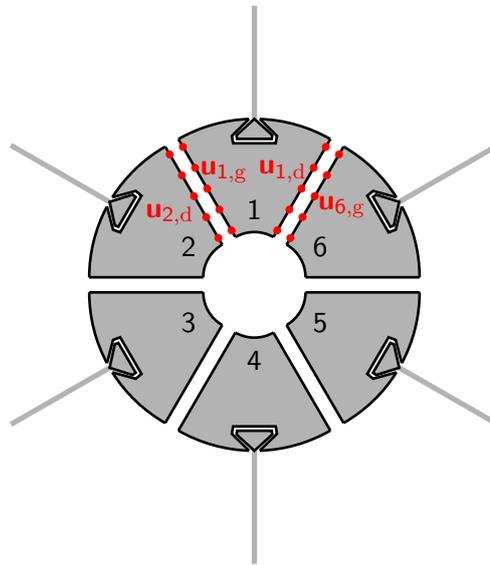


FIGURE I.1 – Structure cyclique décomposée en 6 secteurs.

Dans un premier temps, considérons une structure sans effets non-linéaires. En notant \mathbf{M}_f , \mathbf{C}_f et \mathbf{K}_f les matrices de masse, d'amortissement et de raideur du système complet, l'équation du mouvement s'écrit

$$\mathbf{M}_f\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_f\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_f\mathbf{u} = \mathbf{f}_{\text{ext}}. \quad (\text{I.2})$$

Le but de cette section est de trouver un système équivalent à (I.2) dans l'espace cyclique [156, 166]. Pour cela nous introduisons les termes \mathbf{M}_0 , \mathbf{C}_0 et \mathbf{K}_0 qui représentent les matrices de masse, amortissement et de raideur du secteur de référence. L'équation du mouvement d'un secteur $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ s'écrit alors

$$\mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{u}}_j + \mathbf{C}_0 \dot{\mathbf{u}}_j + \mathbf{K}_0 \mathbf{u}_j + \mathbf{f}_{s,j-1} + \mathbf{f}_{s,j+1} = \mathbf{f}_{\text{ext},j}, \quad (\text{I.3})$$

où \mathbf{u}_j représente le déplacement du secteur j . Les vecteurs $\mathbf{f}_{s,j-1}$ et $\mathbf{f}_{s,j+1}$ représentent les forces de réactions entre le secteur j et ses voisins. Du fait de la structure cyclique, nous avons $\mathbf{f}_{s,N+1} = \mathbf{f}_{s,1}$ et $\mathbf{f}_{s,0} = \mathbf{f}_{s,N}$. Lors de l'assemblage menant au système (I.2) ces forces se compensent et n'apparaissent plus dans les équations. En revanche, dans la formulation cyclique, ces deux vecteurs ne s'annulent pas pour le moment et leur écriture est simplifiée en $\mathbf{f}_{c,j} = \mathbf{f}_{s,j-1} + \mathbf{f}_{s,j+1}$.

Considérons maintenant la théorie des représentations linéaires des groupes cycliques d'ordre N [166]. Tout champ \mathbf{u}_j d'un secteur j peut être décrit par

$$\mathbf{u}_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\tilde{\mathbf{u}}_k e^{ik(j-1)\alpha} \right], \quad (\text{I.4})$$

où $\alpha = \frac{2\pi}{N}$ correspond à l'angle inter-secteur et $\tilde{\mathbf{u}}_k$ représente les composantes cycliques complexes harmoniques d'ordre k , avec $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$. Il peut être démontré facilement (voir Annexe A) que la relation suivante est vraie pour $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$ avec $K = \frac{N}{2} - 1$ si N est pair et $K = \frac{N-1}{2}$ si N est impair.

$$\tilde{\mathbf{u}}_{N-k} = \tilde{\mathbf{u}}_k^*, \quad (\text{I.5})$$

où $*$ représente le complexe conjugué. Ainsi, connaître les composantes cycliques $\tilde{\mathbf{u}}_k$ pour $k \in \llbracket 0, K \rrbracket$ est suffisant pour reconstituer le déplacement physique sur tous les secteurs. L'Annexe A propose également le passage des composantes cycliques complexes aux composantes cycliques réelles (également utilisées dans la littérature [93, 165]). Il peut ainsi être montré que les composantes des diamètres 0 et $\frac{N}{2}$ (si celui-ci existe) sont purement réelles et les diamètres sont dits simples ou encore non-dégénérés. Les termes des autres diamètres ont des valeurs complexes et sont dits doubles ou encore dégénérés. Dans ce manuscrit, des passages fréquents entre composantes physiques et cycliques seront effectués. Ceux-ci s'opèrent via la matrice de Fourier \mathbf{F} ,

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{i\alpha} & \dots & e^{i(N-1)\alpha} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{i(N-1)\alpha} & \dots & e^{i(N-1)^2\alpha} \end{bmatrix}. \quad (\text{I.6})$$

Nous définissons $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_{N_i+2N_f}$, où \otimes correspond à l'opérateur du produit de Kronecker matriciel, N_i le nombre de degré de liberté interne d'un secteur et N_f celui de la frontière cyclique (droite ou gauche). Le terme \mathbf{I}_N représente la matrice identité de dimension N . Le vecteur de déplacement total (et similairement pour les forces de réactions \mathbf{f}_c et les forces extérieures \mathbf{f}_{ext}) s'écrit

$$\mathbf{u} = \left[\mathbf{u}_1^T, \dots, \mathbf{u}_j^T, \dots, \mathbf{u}_N^T \right]^T, \quad (\text{I.7})$$

où \bullet^T représente l'opérateur de transposition. Ces champs physiques peuvent s'exprimer dans le domaine cyclique via

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}_1 \tilde{\mathbf{u}}. \quad (\text{I.8})$$

Le système (I.3) est maintenant écrit pour tous les secteurs. Pour avoir des équations compactes, nous introduisons la notation $\mathbf{M} = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{M}_0)$ (de même pour \mathbf{C} et \mathbf{K}). Substituer \mathbf{u} par $\mathbf{F}_1 \tilde{\mathbf{u}}$ et projeter (I.3)

sur $\bar{\mathbf{F}}_1$ donne

$$\bar{\mathbf{F}}_1 \mathbf{M} \bar{\mathbf{F}}_1 \ddot{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{F}}_1 \mathbf{C} \bar{\mathbf{F}}_1 \dot{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{F}}_1 \mathbf{K} \bar{\mathbf{F}}_1 \mathbf{u} + \bar{\mathbf{F}}_1 \mathbf{f}_c = \bar{\mathbf{F}}_1 \mathbf{f}_{\text{ext}}. \quad (\text{I.9})$$

Avec la propriété de l'exponentielle,

$$\sum_{p=0}^{N-1} (e^{-ipn\alpha} e^{ipm\alpha}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ N & \text{si } n = m, \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

le terme $\bar{\mathbf{F}}\mathbf{F}$ est égal à \mathbf{I}_N et donc, via les propriétés du produit de Kronecker matriciel, le système (I.9) se simplifie en

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \bar{\mathbf{F}}_1 \mathbf{f}_c = \bar{\mathbf{F}}_1 \mathbf{f}_{\text{ext}}. \quad (\text{I.11})$$

Le champ de déplacement d'un secteur discrétisé \mathbf{u}_j se décompose en nœuds internes, en nœuds de frontières à droite et en nœuds de frontière à gauche, $\mathbf{u}_j = [\mathbf{u}_{j,i}^\top, \mathbf{u}_{j,d}^\top, \mathbf{u}_{j,g}^\top]^\top$. La structure étant cyclique, la moitié des degrés de liberté de frontières est redondante. Arbitrairement, nous gardons les degrés de libertés situés sur la frontière cyclique de droite. Les relations peuvent être visualisées à la Figure I.1 et se traduisent par

$$\mathbf{u}_{j,g} = \mathbf{u}_{j+1,d}, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (\text{I.12})$$

avec $\mathbf{u}_{N+1} = \mathbf{u}_1$. Ces relations peuvent être traduites dans le domaine cycliques [93, 156]. Via (I.4), nous avons pour le secteur voisin $j+1$,

$$\mathbf{u}_{j+1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} [e^{ik\alpha} \tilde{\mathbf{u}}_k e^{ik(j-1)\alpha}]. \quad (\text{I.13})$$

En remplaçant les relations (I.4) et (I.13) dans (I.12), et en mettant en facteur les termes dépendant de $e^{ikj\alpha}$ nous avons,

$$0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{ik(j-1)\alpha} [\tilde{\mathbf{u}}_{k,g} - e^{ik\alpha} \tilde{\mathbf{u}}_{k,d}] \quad \forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (\text{I.14})$$

Ce système d'équations linéaires se met sous la forme de type $(\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_{N_f}) \mathbf{x} = 0$ avec

$$\mathbf{x} = [\tilde{\mathbf{u}}_{0,g}^\top - \tilde{\mathbf{u}}_{0,d}^\top, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_{N-1,g}^\top - e^{i(N-1)\alpha} \tilde{\mathbf{u}}_{N-1,d}^\top]^\top. \quad (\text{I.15})$$

Comme le déterminant de \mathbf{F} est non nul (matrice de Vandermonde), l'unique solution du système précédent est $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ainsi la condition de cyclicité dans le domaine physique (I.12) se traduit dans l'espace cyclique par

$$\tilde{\mathbf{u}}_{k,g} = e^{ik\alpha} \tilde{\mathbf{u}}_{k,d}, \quad k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket. \quad (\text{I.16})$$

Par conséquent, pour chaque composante cyclique k , une réduction des degrés de liberté de gauche peut être effectuée

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_{k,i} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{k,d} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{k,g} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{B}}_k \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_{k,i} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{k,d} \end{bmatrix}, \quad (\text{I.17})$$

où $\tilde{\mathbf{B}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_i} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{N_f} \\ 0 & e^{ik\alpha} \mathbf{I}_{N_f} \end{bmatrix}$. La matrice $\tilde{\mathbf{B}}$ est diagonale par blocs, constituée des matrices $(\tilde{\mathbf{B}}_k)_{k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$. Le

nouveau vecteur d'inconnues cycliques se note $\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{\mathbf{u}}_{0,i}^\top, \tilde{\mathbf{u}}_{0,d}^\top, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_{N-1,i}^\top, \tilde{\mathbf{u}}_{N-1,d}^\top]^\top$. La projection (I.11)

sur $\tilde{\mathbf{B}}^\top$ donne

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{B}}^\top \tilde{\mathbf{F}}_1 \mathbf{f}_c = \tilde{\mathbf{B}}^\top \tilde{\mathbf{F}}_1 \mathbf{f}_{\text{ext}}, \quad (\text{I.18})$$

avec $\tilde{\mathbf{M}}$ une matrice diagonale par blocs contenant les matrices $(\tilde{\mathbf{M}}_k)_{k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$, avec $\tilde{\mathbf{M}}_k = \tilde{\mathbf{B}}_k^\top \mathbf{M}_0 \tilde{\mathbf{B}}_k$ (et similairement pour $\tilde{\mathbf{C}}$ et $\tilde{\mathbf{K}}$). Le terme $\tilde{\mathbf{B}}^\top \tilde{\mathbf{F}}_1 \mathbf{f}_c$ s'annule du fait de la troisième loi de Newton. De plus, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{ext}} &= \mathbf{F}_1 \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext}}, \\ \tilde{\mathbf{F}}_1 \mathbf{f}_{\text{ext}} &= \tilde{\mathbf{F}}_1 \mathbf{F}_1 \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext}}. \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

Avec $\tilde{\mathbf{F}}\mathbf{F} = \mathbf{I}_N$, le terme $\tilde{\mathbf{F}}_1 \mathbf{f}_{\text{ext}}$ s'écrit directement en fonction de ses composantes cycliques. En supposant que les forces extérieures ne s'appliquent pas sur la frontière, la matrice $\tilde{\mathbf{B}}$ n'influence pas la valeur des forces extérieures et condense juste les degrés de liberté de frontières. Le système précédent (I.18) devient alors

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext}}. \quad (\text{I.20})$$

Ce système est de même taille que le système de la structure complète (I.2). Cependant les matrices cycliques structurales sont diagonales par bloc et donc un découplage diamétral du système est obtenu. Ainsi (I.20) peut être résolu pour chaque indice cyclique $k \in \llbracket 0, K \rrbracket$,

$$\tilde{\mathbf{M}}_k \ddot{\mathbf{u}}_k + \tilde{\mathbf{C}}_k \dot{\mathbf{u}}_k + \tilde{\mathbf{K}}_k \mathbf{u}_k = \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext},k}. \quad (\text{I.21})$$

Pour des problèmes linéaires, ce changement de variables physiques en variables cycliques est très intéressant du fait du découplage des équations. Dans le cadre des moteurs d'avions, le flux d'air qui excite l'étage en considération a initialement traversé des étages antérieurs avec une vitesse de rotation et un nombre de pales différents. Les excitations ont donc une forme à diamètres prédéfinie et sont généralement de nature fixe ou tournante. Par conséquent, les forces d'excitation cycliques, $\tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext},k}$ ne sont non nulles que pour certains diamètres nodaux. Le système (I.21) doit alors être résolu seulement pour cet ensemble réduit. Ces considérations permettent de réduire l'espace de stockage nécessaire (seules certaines matrices structurales cycliques sont sauvegardées) mais offrent aussi un gain de temps formidable pour le calcul dynamique du système linéaire.

3 Chargements spécifiques des roues aubagées

Un moteur d'avion ou d'hélicoptère est constitué de plusieurs étages de roues aubagées. Le passage de l'air dans ces étages entraîne l'apparition d'oscillations du champ de pression, qui vient charger les structures en dynamique. La rotation constante de la roue aubagée conduit à des forces extérieures qui sont de type périodiques. Sur la roue étudiée, l'excitation est supposée être mono-harmonique. Sur le premier secteur, elles s'écrivent

$$\mathbf{f}_{\text{ext},1}(t) = \frac{1}{2} (\mathbf{f}_a e^{i\omega t} + \bar{\mathbf{f}}_a e^{-i\omega t}), \quad (\text{I.22})$$

avec \mathbf{f}_a un vecteur complexe et ω la fréquence d'excitation. Dans le cadre des turbomachines, pour deux roues aubagées successives, l'une est généralement tournante (rotor) et l'autre est immobile (stator). Cela donne lieu à une force d'excitation dite tournante. Les forces sur les secteurs $j \in \llbracket 2, N \rrbracket$ peuvent alors être obtenues directement par les forces extérieures du premier secteur $\mathbf{f}_{\text{ext},1}(t)$. Pour une onde tournante directe de nombre d'onde $h_{ex} \geq 0$ (qui physiquement représente la différence du nombre d'aubes entre les deux roues), nous avons

$$\mathbf{f}_{\text{ext},j}(t) = \mathbf{f}_{\text{ext},1} \left(t - \frac{\alpha(j-1) h_{ex}}{\omega} \right). \quad (\text{I.23})$$

L'onde tournante rétrograde a un sens opposé à l'onde directe et s'écrit donc

$$\mathbf{f}_{\text{ext},j}(t) = \mathbf{f}_{\text{ext},1} \left(t + \frac{\alpha(j-1)h_{\text{ex}}}{\omega} \right). \quad (\text{I.24})$$

Une onde stationnaire peut être obtenue par la somme de ces deux ondes tournantes (directe et rétrograde). Son expression est égale à

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{ext},j}(t) &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{f}_{\text{ext},1} \left(t - \frac{\alpha(j-1)h_{\text{ex}}}{\omega} \right) + \mathbf{f}_{\text{ext},1} \left(t + \frac{\alpha(j-1)h_{\text{ex}}}{\omega} \right) \right) \\ &= \cos((j-1)\alpha h_{\text{ex}}) \mathbf{f}_{\text{ext},1}(t). \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

Nous pouvons écrire ces forces extérieures dans le domaine cyclique. Considérons un diamètre $q \in \llbracket 0, K \rrbracket$ et calculons la composante cyclique des forces extérieures pour ce diamètre, $\tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext},q}$,

$$\tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext},q} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N e^{-iq(j-1)\alpha} \mathbf{f}_{\text{ext},j}. \quad (\text{I.26})$$

En remplaçant $\mathbf{f}_{\text{ext},j}$ dans (I.26) par (I.23) et en utilisant (I.10), nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext},q} &= \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N [e^{-iq(j-1)\alpha} (\mathbf{f}_a e^{i\omega t} e^{-i\alpha(j-1)h_{\text{ex}}} + \bar{\mathbf{f}}_a e^{-i\omega t} e^{i\alpha(j-1)h_{\text{ex}}})] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N [(\mathbf{f}_a e^{i\omega t} e^{-i\alpha(j-1)(q+h_{\text{ex}})} + \bar{\mathbf{f}}_a e^{-i\omega t} e^{i\alpha(j-1)(-q+h_{\text{ex}})})] \\ &= \begin{cases} \frac{\sqrt{N}}{2} \bar{\mathbf{f}}_a e^{-i\omega t} & \text{si } (q - h_{\text{ex}}) \equiv 0 \pmod{N}, \\ \frac{\sqrt{N}}{2} \mathbf{f}_a e^{i\omega t} & \text{si } (q + h_{\text{ex}}) \equiv 0 \pmod{N} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{I.27})$$

Les calculs sont similaires pour l'onde stationnaire et donnent

$$\tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext},q} = \begin{cases} \frac{\sqrt{N}}{4} (\mathbf{f}_a e^{i\omega t} + \bar{\mathbf{f}}_a e^{-i\omega t}) & \text{si } (q - h_{\text{ex}}) \equiv 0 \pmod{N} \text{ ou } (q + h_{\text{ex}}) \equiv 0 \pmod{N} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{I.28})$$

Pour les deux types de forces, la composante cyclique q des forces extérieures, $\tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext},q}$, est non-nulle si et seulement si les termes $(q - h_{\text{ex}})$ ou $(q + h_{\text{ex}})$ sont congrus à 0 modulo N . Ainsi pour une excitation extérieure avec un nombre d'onde h_{ex} , le système à résoudre est

$$\tilde{\mathbf{M}}_q \ddot{\mathbf{u}}_q + \tilde{\mathbf{C}}_q \dot{\mathbf{u}}_q + \tilde{\mathbf{K}}_q \mathbf{u}_q = \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext},q}, \quad (\text{I.29})$$

avec q vérifiant la relation de congruence précédente. Les autres composantes cycliques sont nulles et n'ont pas besoin d'être évaluées.

4 Analyses linéaires de roues aubagées

4.1 Analyse modale

Afin d'identifier les fréquences propres de la structure, le système linéaire autonome non-amorti sous-jacent de (I.29) est étudié pour chaque diamètre nodal q

$$(-\omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_q + \tilde{\mathbf{K}}_q) \tilde{\mathbf{u}}_q = \mathbf{0}. \quad (\text{I.30})$$

La résolution aux valeurs propres du système (I.30) fournit, pour chaque diamètre nodal q , un couple solution (ω_q, Φ_q) qui représente la pulsation propre et le vecteur propre d'un mode de vibration du système. En pratique, il convient de distinguer différents cas [108] :

- $q = 0$, le vecteur propre Φ_0 est réel et la reconstitution du déplacement physique du système complet via l'Équation (I.4) indique que chaque secteur aura la même déformée. Les secteurs vibrent en phase comme illustré en Figure I.2a.
- $q = \frac{N}{2}$ (avec N pair), le vecteur propre $\Phi_{\frac{N}{2}}$ est également réel. La reconstitution du déplacement physique du système complet montre que les secteurs voisins sont en opposition de phase (mouvement alterné, voir Figure I.2b).
- $q \notin \{0, \frac{N}{2}\}$, le vecteur propre est complexe et ce diamètre est également associé à un vecteur propre conjugué (voir l'Équation (I.5)). Pour ce diamètre, les valeurs propres sont de multiplicité 2 (et donc deux vecteurs propres sont obtenus). La déformée Φ_q correspond à une onde tournante avec q lignes nodales (sur ces lignes le déplacement est égal à 0, voir les lignes rouges des Figures I.2c I.2d, I.2e et I.2f). Associé à son complexe conjugué, $\bar{\Phi}_q$, une onde fixe peut être obtenue.

En résolvant le problème aux valeurs propres (I.30) pour chaque diamètre, nous obtenons le diagramme à points du système (illustré en Figure I.3). Les fréquences propres sont indiquées par des points noirs. Dans un souci visuel, ces marqueurs sont reliés par des lignes.

4.2 Exemple d'analyse de conception

De nombreux diagrammes sont établis pour dimensionner un moteur. L'ouvrage de Lalanne et Ferraris [81] présente une vue globale des différents outils. Dans ce manuscrit, seul un exemple classique est présenté : le diagramme de Campbell. Les matrices structurales de l'Équation (I.1) dépendent de la vitesse de rotation. Tandis que la Figure I.3 donne les fréquences propres des différents diamètres pour une vitesse de rotation donnée, le diagramme de Campbell trace les fréquences propres du système en fonction de la vitesse de rotation du système. Un tel diagramme est présenté en Figure I.4. Du fait de la richesse fréquentielle du système, seules les cinq premières fréquences des trois premiers diamètres sont illustrées.

Ce diagramme est généralement complété par des droites linéaires avec différents coefficients directeurs n qui représentent les ordres moteurs (qui correspond au nombre d'onde h_{ex} de la Section I.3). Les intersections entre ces droites et les courbes sont des zones potentiellement dangereuses pour la structure car celle-ci pourrait être excitée sur une de ces fréquences de résonance (coïncidence fréquentielle).

Pour qu'une telle intersection soit réellement dangereuse pour le système, cette intersection doit également présenter une coïncidence en forme (l'ordre moteur de la droite (h_{ex}) excite un diamètre q). Si q correspond à la famille nodale qui est intersectée par l'ordre moteur h_{ex} alors les deux conditions nécessaires à la résonance sont réunies et la structure peut présenter des niveaux vibratoires élevés. Les conditions de forme ont déjà été écrites à la Section I.3 ($(q - h_{ex}) \equiv 0 \pmod{N}$ ou $(q + h_{ex}) \equiv 0 \pmod{N}$) avec $0 \leq q \leq \frac{N}{2}$ et peuvent être plus simplement visualisées sur le diagramme zigzag donné en Figure I.5. Les lignes représentées sur cette Figure correspondent aux conditions d'appairage.

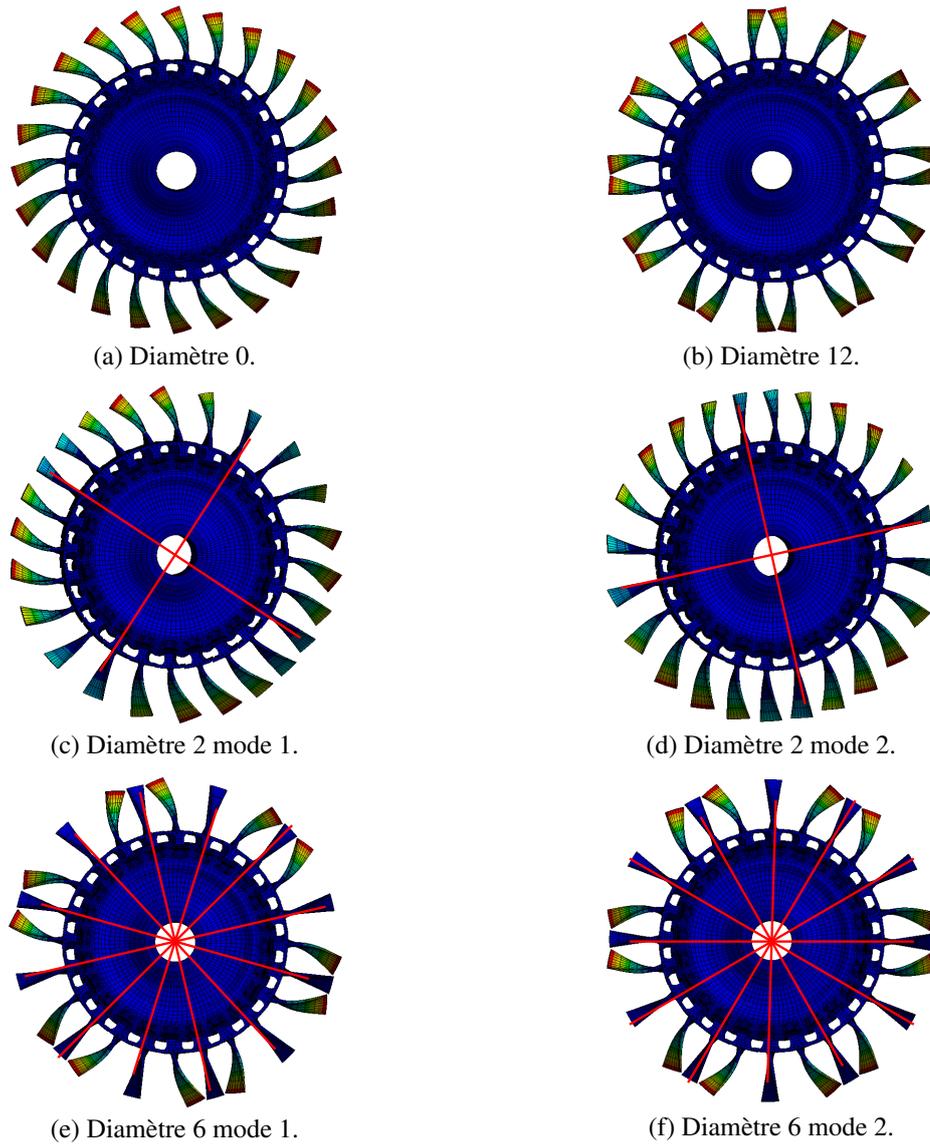


FIGURE I.2 – Déformées d'une roue aubagée sur son premier mode de flexion.

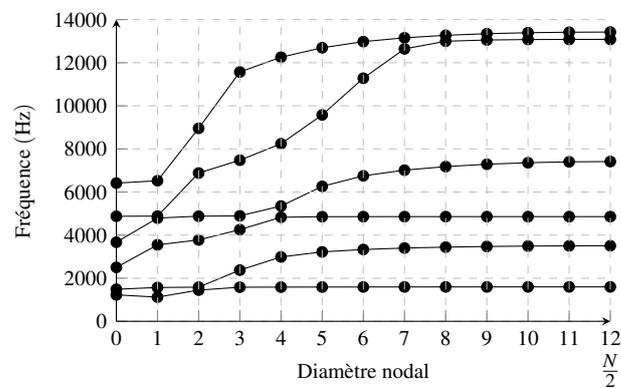


FIGURE I.3 – Diagramme fréquence-diamètres.

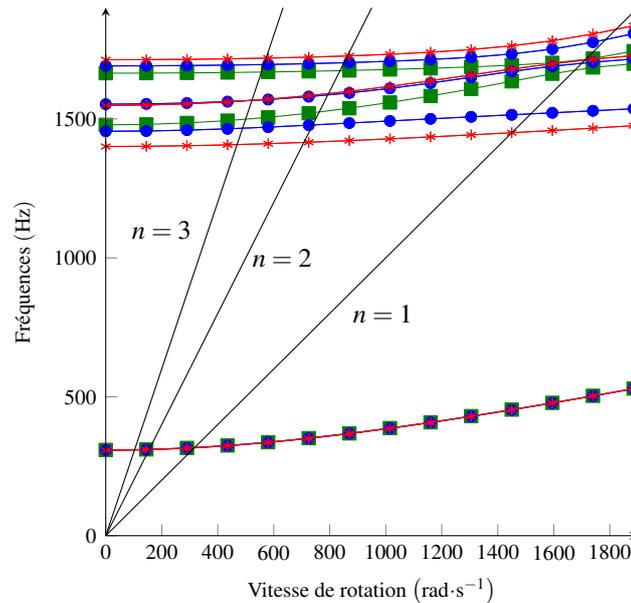


FIGURE I.4 – Diagramme de Campbell, (■) modes à 0 diamètres; (●) modes à 1 diamètres; (✱) modes à 2 diamètres.

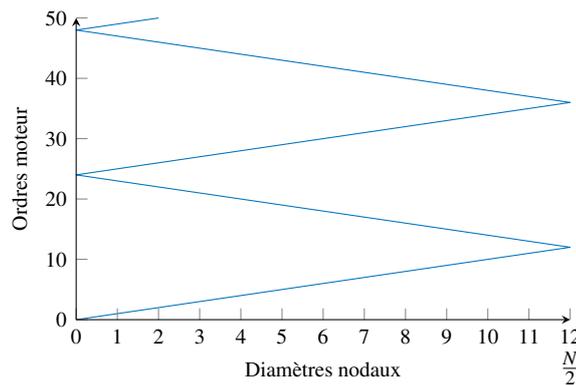


FIGURE I.5 – Diagramme zigzag.

5 Introduction au désaccordage

La formulation en symétrie cyclique présente des avantages très intéressants en terme de coûts numériques. Néanmoins les secteurs d'une roue aubagée réelle présentent des différences : au niveau de la géométrie (tolérances d'usinage, usure des pièces), au niveau des propriétés thermo-mécaniques (maîtrise de formation des matériaux). Ces écarts non-maitrisés génèrent des disparités de comportement vibratoire entre les secteurs et sont qualifiés de désaccordage aléatoire. Ils influencent les fréquences propres du système ainsi que les amplitudes associées aux réponses forcées. La Figure I.6 représente un exemple d'une réponse forcée d'une structure accordée et celle de la structure désaccordée sous-jacente. De multiples pics sont obtenus pour le second système (cas désaccordé) traduisant la séparation fréquentielle de certaines aubes [65]. Cette structure présente également un maximum global sur la plage de fréquence plus important que le cas accordé et donc des contraintes plus importantes. Il convient donc de quantifier cet écart en amplitude. Pour cela, le facteur d'amplification est défini comme le ratio entre le déplacement maximal du système désaccordé avec le système accordé. Des études probabilistes sont réalisées pour quantifier ce facteur. Une évolution type est donnée dans l'article de Castanier et Pierre [16] et est fournie en Figure I.7. Celle-ci décrit la variation du facteur d'amplification des pales

en fonction de l'intensité (ou taux) du désaccordage (défini comme égal à l'écart type associé aux fréquences propres). Nous pouvons y voir une forte augmentation de l'amplitude pour de faible taux de désaccordage jusqu'à un maximum à partir duquel, l'amplitude diminue jusqu'à atteindre un plateau.

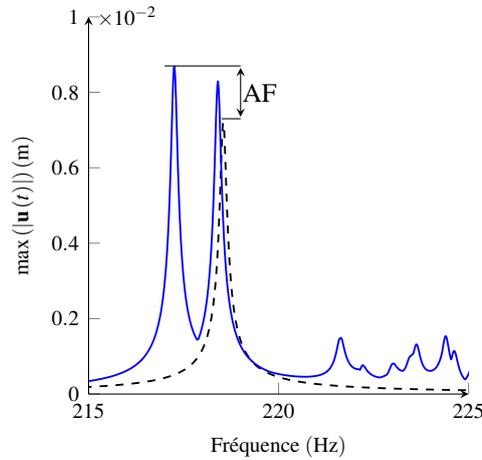


FIGURE I.6 – Déplacement maximal pour une structure accordée et désaccordée. (—) : réponse désaccordée; (- -) : réponse accordée. Notion de facteur d'amplification (AF).

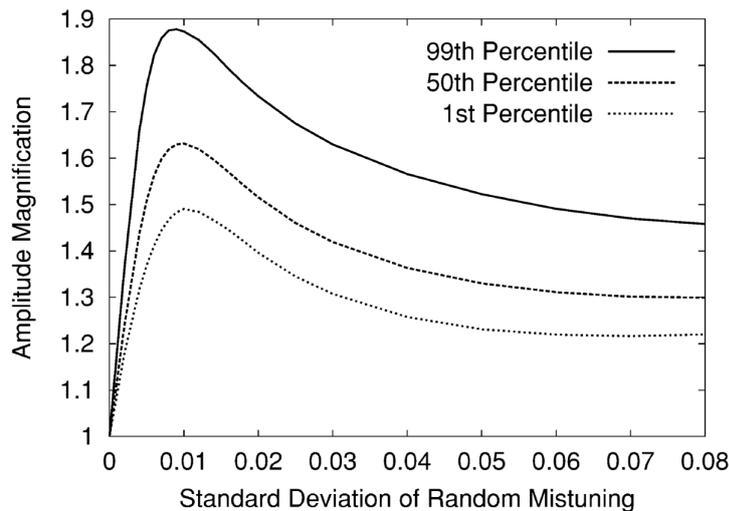


FIGURE I.7 – Facteur d'amplification en fonction du taux de désaccordage extrait de [16].

Le désaccordage aléatoire étant inévitable, les motoristes essaient de se situer sur l'asymptote de la Figure I.7 afin de maîtriser les amplitudes vibratoires. Pour cela les structures cycliques sont désaccordées intentionnellement [17] (différences maîtrisées entre les secteurs d'une roue aubagée). L'écart introduit par le désaccordage aléatoire est alors d'importance moindre et les amplitudes vibratoires sont mieux prédites. Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, des méthodes permettent d'utiliser les propriétés de symétrie cyclique vues en Section I.2 même en présence de désaccordage important.

5.1 Impact du désaccordage sur les propriétés de symétrie cyclique

Nous proposons ici d'étudier analytiquement l'influence d'un désaccordage en raideur sur le système cyclique (I.21). Supposons que chaque secteur j est désaccordé en raideur, noté $\Delta\mathbf{K}_j$. La matrice de raideur du secteur j s'écrit donc

$$\mathbf{K}_j = \mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K}_j. \quad (\text{I.31})$$

En assemblant par blocs les écarts sur chacun des secteurs, la matrice complète désaccordée donne

$$\Delta \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{K}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Delta \mathbf{K}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \Delta \mathbf{K}_N \end{pmatrix}. \quad (\text{I.32})$$

Il convient alors de suivre les étapes de la symétrie cyclique décrites en Section 1.2 : la matrice précédente est post-multipliée par \mathbf{F}_1 (passage espace physique à l'espace de Fourier) et \mathbf{B} (conditions des nœuds de frontières droites/gauches) ainsi que pré-multipliée par $\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{F}}$. Comme les parties désaccordées $\Delta \mathbf{K}_j$ sont différentes d'un secteur à l'autre, la matrice $\Delta \tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{B}}^\top \tilde{\mathbf{F}}_1 \Delta \mathbf{K} \mathbf{F}_1 \mathbf{B}$ est pleine (à l'inverse des matrices $\tilde{\mathbf{M}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$, $\tilde{\mathbf{K}}$ introduites à l'Équation (I.18)). La contribution des parties désaccordées sur le système cyclique complet s'écrit alors,

$$\begin{pmatrix} \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{0,0} & \cdots & \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{0,K} & \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{0,K+1} & \cdots & \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{0,N-1} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{K,0} & \cdots & \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{K,K} & \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{K,K+1} & \cdots & \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{K,N-1} \\ \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{K+1,0} & \cdots & \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{K+1,K} & \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{K+1,K+1} & \cdots & \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{K+1,N-1} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{N-1,0} & \cdots & \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{N-1,K} & \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{N-1,K+1} & \cdots & \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{N-1,N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_0 \\ \cdots \\ \tilde{\mathbf{u}}_K \\ \tilde{\mathbf{u}}_{K-1} \\ \cdots \\ \tilde{\mathbf{u}}_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{I.33})$$

où les composantes $\tilde{\mathbf{u}}_{N-k}$ ont été remplacées par leur équivalent complexe conjugué (I.5). Via cette propriété, seule la partie supérieure (associée aux composantes cycliques $k \in \llbracket 0, K \rrbracket$) sont nécessaires pour calculer la dynamique du système. Ce terme de désaccordage peut alors être décomposé en deux blocs

$$\Delta \tilde{\mathbf{K}}_a \tilde{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{0,0} & \cdots & \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{0,K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{K,0} & \cdots & \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{K,K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_0 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{u}}_K \end{pmatrix}, \quad (\text{I.34})$$

et

$$\Delta \tilde{\mathbf{K}}_b \tilde{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{0,N-1} & \cdots & \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{0,K+1} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{K,N-1} & \cdots & \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{K,K+1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_0 \\ \tilde{\mathbf{u}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{u}}_{K-1} \\ \tilde{\mathbf{u}}_K \end{pmatrix}. \quad (\text{I.35})$$

Pour simplifier les notations, nous notons $(\Delta \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{u}})_k$ le sous bloc de $\Delta \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{u}}$ projeté sur la composante cyclique d'ordre k . En introduisant ces termes dans l'Équation (I.21) le système cyclique final avec du désaccordage s'écrit

$$\tilde{\mathbf{M}}_k \tilde{\mathbf{u}}_k + \tilde{\mathbf{C}}_k \tilde{\mathbf{u}}_k + \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{u}}_k + (\Delta \tilde{\mathbf{K}}_a \tilde{\mathbf{u}})_k + (\Delta \tilde{\mathbf{K}}_b \tilde{\mathbf{u}})_k = \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext},k} \quad \forall k \in \llbracket 0, K \rrbracket. \quad (\text{I.36})$$

En comparant ce système avec le modèle complet (I.2) (où la matrice $\Delta \mathbf{K}$ du désaccordage peut directement être introduite), nous remarquons que le nombre d'inconnues est le même. Par rapport au système cyclique (I.18), les Équations (I.36) sont couplées et nécessitent une résolution complète (pour toutes les composantes cycliques).

Le désaccordage intentionnel est largement utilisé en pratique pour limiter l'influence du désaccordage aléatoire et pour mieux maîtriser les niveaux d'amplitudes de la roue aubagée. Des études paramétriques [57, 107] peuvent être menées pour déterminer le meilleur schéma de désaccordage. Ces études s'étendent même dans un cadre avec des non-linéarités géométriques [124]. La conception

d'un moteur nécessite la caractérisation de la dynamique de la structure mais aussi la caractérisation du mouvement du fluide parcourant le système. En effet, bien que le désaccordage impacte directement la réponse forcée du système, il influence également les termes de couplages aéro-mécanique de la structure à travers le flottement [9, 97]. En pratique, des schémas de désaccordage alterné de type [A,B,A,...] peuvent suffire à supprimer l'effet du flottement [24] mais la symétrie du schéma n'est pas optimal pour la mécanique des structures. Par conséquent, l'utilisation du désaccordage intentionnel nécessite un certain équilibre entre la dynamique vibratoire du système et les instabilités aéro-élastiques.

5.2 Étude statistique du désaccordage aléatoire

Le désaccordage aléatoire, comme son nom l'indique, est aléatoire et n'est a priori pas connu. Son influence sur la dynamique d'un système mécanique [16] est illustrée à la Figure I.7. Celle-ci a été obtenue en modifiant légèrement un paramètre du modèle mécanique étudié (ici le module de Young des pales). Ce paramètre variait selon une distribution gaussienne de variance égale au taux de désaccordage σ . Pour chaque valeur de σ , et pour chaque tirage aléatoire (un très grand nombre), la réponse forcée du système est calculée autour de la fréquence d'étude pour déterminer le déplacement maximal. Afin de calculer la réponse forcée sur des modèles éléments finis raffinés, des stratégies de réduction ont été développées pour diminuer la taille du système tout en gardant une physique correcte. Pour des problèmes linéaires, de nombreuses méthodes ont été proposées : la CMM [88] ou l'IMM [167] sont largement utilisées par la communauté pour étudier du désaccordage aléatoire. A titre d'informations, des méthodes comme la SMC [39], la PRIME [95] ou plus récemment la PRISM [142] sont quant à elles utilisées pour du désaccordage intentionnel.

A travers ces modèles réduits, des études statistiques peuvent être menées. Comme représenté à la Figure I.7, ces simulations déterminent la probabilité que les systèmes soient en dessous d'un certain seuil du facteur d'amplification (dans l'exemple, les 99^e, 50^e, et 1^{er} centiles sont déterminés) pour un taux de désaccordage donné. Ces résultats sont généralement obtenus par une étude de Monte-Carlo [10, 16], qui consiste à réaliser un très grand nombre de tirages aléatoires. A titre d'exemple, Bladh et al. [10] indique que pour déterminer le 95^e centile, environ 1000 tirages sont nécessaires. Tandis que pour le 99.9^e centile, environ 50000 tirages doivent être menés. Pour réduire le coût numérique, Bladh et al [10] proposent d'utiliser une méthode de Monte-Carlo accélérée. Les simulations sont conduites pour un nombre de tirages très réduits (environ 50), les auteurs interpolent ensuite leurs résultats avec une loi de Weibull avec trois paramètres,

$$F(x) = e^{-\left(\frac{\lambda-x}{\delta}\right)^\beta} \quad (\text{I.37})$$

avec F la fonction de distribution cumulée, x , le facteur d'amplification. Les trois paramètres à déterminer sont λ , δ et β . Le paramètre λ est approximé par Whitehead [171],

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{N}\right). \quad (\text{I.38})$$

Les deux autres paramètres sont obtenus par interpolation en appliquant deux fois la fonction log sur l'Équation (I.37)

$$\log(\lambda - x) = \frac{1}{\beta} \log(-\log(F)) + \log(\delta). \quad (\text{I.39})$$

Dans ce manuscrit, les études sont effectuées avec par une interpolation de Weibull avec 50 tirages. La fonction F est donc discrétisée en 50 valeurs allant entre 0 et 1. La fonction $\log(\lambda - x)$ est aussi discrétisée et contient le paramètre λ soustrait des facteurs d'amplification déterminés par les réponses

forcées. L'Algorithme I.1 donne la structure d'un programme pour mener ces études statistiques.

Algorithme I.1 : Étude statistique du désaccordage aléatoire. En rouge sont les étapes propres à un tirage de Monte-Carlo et en bleu celles d'une méthode accélérée.

```

1: for  $\sigma = 0$  to  $\sigma_{\max}$  do
2:   for  $j = 1$  to 1000 (50) do
3:     Schéma de désaccordage aléatoire  $\leftarrow$  [distribution gaussienne ( $\sigma$ )].
4:     Modification de la matrice de rigidité dynamique.
5:     Calcul de la réponse forcée du modèle réduit (obtenu via la CMM [88] par exemple).
6:     Détermination du maximum d'amplitude sur tous les secteurs et toute la plage
7:     fréquentielle.
8:   end for
9:   Calcul direct des centiles (grâce à un nombre important de simulations).
10:  Interpolation avec la distribution de Weibull.
11: end for

```

La Figure I.8 représente une fonction de distribution cumulée F obtenue par une simulation de Monte-Carlo (avec 1000 tirages), ainsi que 20 fonctions de distribution obtenues par interpolation de la loi de Weibull à trois paramètres. Pour chacune de ces 20 interpolations, 50 tirages ont été effectués. Le modèle utilisé pour cette simulation est présenté dans le Chapitre III, Section III.4. Sur cette Figure I.8, nous voyons une très bonne correspondance entre chaque courbe interpolée de Weibull avec la simulation de Monte-Carlo. Ceci nous permet de justifier l'utilisation d'une loi de Weibull à trois paramètres.

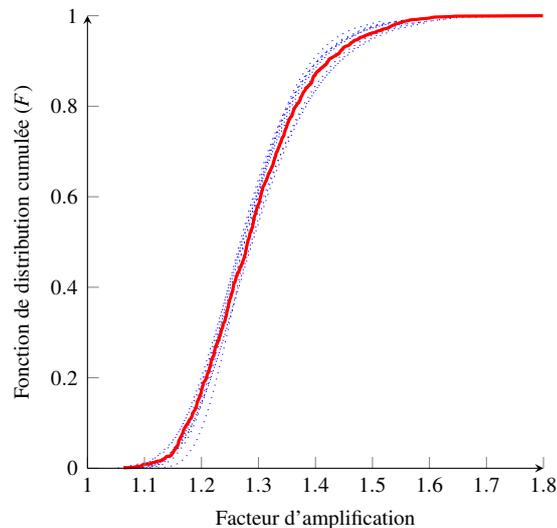


FIGURE I.8 – Exemple de représentation de la fonction de distribution cumulée en fonction du facteur d'amplification (taux de désaccordage fixé). (—) : Monte-Carlo (1000 tirages); (⋯) : interpolations de Weibull (20 courbes chacune avec 50 tirages).

D'autres stratégies de prise en compte du désaccordage sont disponibles dans la littérature comme les approches paramétriques [60, 147] ou non-paramétriques [149] permettant d'intégrer les incertitudes du modèle dans leur globalité. Ce dernier type d'approche proposé par Soize [150] combine la théorie de l'information avec le principe du maximum d'entropie. Cette méthode a été utilisée pour étudier les turbomachines [14] et des systèmes mécaniques complexes [13]. Dans cette même lancée, ces stratégies ont été adaptées pour considérer du désaccordage intentionnel [102], et des effets non-linéaires géométriques [15, 124].

6 Enjeux vibratoires : introduction aux forces non-linéaires

6.1 Non-linéarité de frottement

Les disques aubagés monoblocs (DAM) constitués d'un seul matériau laissent progressivement place à des roues aubagées avec pales rapportées. Ce procédé permet d'adapter les matériaux pour chacune des pièces selon leurs chargements spécifiques et donc permet un gain financier (les pales sont par exemple soumises à des chargements thermiques et mécaniques plus importants que le disque). De plus, un tel système facilite le remplacement d'une pale en cas de défaut. Finalement, le contact entre les pales et le disque introduit du frottement qui permet de réduire l'amplitude vibratoire du système. Outre l'usure qui en résulte [31, 87], les pales rapportées (que ce soit en queue d'aronde, Figure I.9a ou en pied de sapin Figure I.9b) ajoutent des termes non-linéaires dans les équations du mouvement du système (forces de frottement, perte de contact), notés \mathbf{f}_{nl} . Le système complet (I.2) s'écrit alors

$$\mathbf{M}_f \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_f \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_f \mathbf{u} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{f}_{ext}. \quad (\text{I.40})$$

Pour le système cyclique, le terme $\tilde{\mathbf{f}}_{nl,k}$ décrit la composante cyclique k du terme $\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{F}}\mathbf{f}_{nl}$. Le système (I.21) s'écrit alors

$$\tilde{\mathbf{M}}_k \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_k + \tilde{\mathbf{C}}_k \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_k + \tilde{\mathbf{K}}_k \tilde{\mathbf{u}}_k + \tilde{\mathbf{f}}_{nl,k}(\tilde{\mathbf{u}}, \dot{\tilde{\mathbf{u}}}) = \tilde{\mathbf{f}}_{ext,k}, \quad k \in \llbracket 0, K \rrbracket. \quad (\text{I.41})$$

De façon similaire au désaccordage, le terme $\tilde{\mathbf{f}}_{nl,k}$ dépend de toutes les composantes cycliques du déplacement et vient coupler les diamètres nodaux. Il convient donc de résoudre le système pour tous les diamètres en même temps. Dans ce manuscrit, les forces de frottement sont modélisées par la loi de Coulomb. La force de contact entre les deux solides sera donc composée de deux contraintes : une loi de non-interpénétration et une loi de frottement. La loi de non-interpénétration s'écrit

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{nl,N}(t) \leq 0 & \text{force répulsive} \\ \mathbf{x}_{r,N}(t) \geq 0 & \text{pas d'interpénétration} \\ \mathbf{x}_{r,N}(t) \cdot \mathbf{f}_{nl,N}(t) = 0 & \text{soit il y a une force, soit il n'y a pas de contact,} \end{cases} \quad (\text{I.42})$$

où $\mathbf{f}_{nl,N}$ est la force de contact dans la direction normale au contact et $\mathbf{x}_{r,N}$ est la distance entre les deux solides dans la direction normale. Dans le cas où les solides sont en contact, le frottement induit par la vitesse relative entre les solides respecte les conditions suivantes

$$\begin{cases} \|\mathbf{f}_{nl,T}\| < \mu \|\mathbf{f}_{nl,N}\| & \text{si } \dot{\mathbf{x}}_{r,T} = 0 \\ \mathbf{f}_{nl,T} = \mu \|\mathbf{f}_{nl,N}\| \frac{\dot{\mathbf{x}}_{r,T}}{\|\dot{\mathbf{x}}_{r,T}\|} & \text{si } \|\dot{\mathbf{x}}_{r,T}\| > 0, \end{cases} \quad (\text{I.43})$$

où $\mathbf{f}_{nl,T}$ représente la force non-linéaire tangentielle, μ le coefficient de frottement et $\dot{\mathbf{x}}_{r,T}$ est la vitesse relative tangentielle. On notera que les Équations (I.42) et (I.43) sont opposées aux expressions classiques. Ceci est dû à ce que les forces non-linéaires sont situées à gauche dans les Équations de la dynamique (I.40) et (I.21). Il existe d'autres types de modèle de frottement et de lois de contact [33, 34].

Dans ce manuscrit, un modèle de loi régularisée via une tangente hyperbolique sera employé, ainsi que les lois (I.42) et (I.43) au travers de la procédure Dynamic Lagrangian Frequency Time (DLFT) [113].

6.2 Non-linéarité géométrique

Bien que les non-linéarités de contact sont très présentes dans les turbomachines, les non-linéarités de grands déplacements commencent également à avoir un effet non-négligeable. En effet, dans un souci de réduction de la consommation du carburant, le diamètre des moteurs s'agrandit tout en maintenant



(a) Modélisation d'une attache type queue d'aronde. (b) Modélisation d'une attache type pied de sapin.

FIGURE I.9 – Différents types d'attaches pour le contact pale-disque.

une section des pales faible. Ce choix de géométrie vient accentuer les effets de grands déplacements déjà existants. Pour prendre en compte ces non-linéarités géométriques, il est nécessaire de prendre en compte les termes d'ordre 2 dans le tenseur des déformations. Ce type de non-linéarité est conservatif et fait entrer en jeu des non-linéarités de type polynomial, en particulier des termes quadratiques et cubiques [111]

$$\mathbf{f}_{nl} = \sum_j \sum_k \mathbf{K}_{jk}^q \mathbf{u}_j \mathbf{u}_k + \sum_j \sum_k \sum_l \mathbf{K}_{jkl}^c \mathbf{u}_j \mathbf{u}_k \mathbf{u}_l, \quad (\text{I.44})$$

où \mathbf{K}_{jk}^q , \mathbf{K}_{jkl}^c sont respectivement des tenseurs d'ordre 3 et 4. Pour plus de détails sur la prise en compte de ces termes, nous référons au livre de Gmür [46] ou au premier chapitre de la thèse de Martin [98]. Les effets de ces non-linéarités géométriques ont été étudiés par de nombreuses équipes sur divers systèmes [2, 160, 170].

7 Résolution par la méthode d'équilibrage harmonique (HBM)

Pour résoudre les systèmes non-linéaires comme ceux fournis aux Équations (I.40) ou (I.41), différentes méthodes de résolution sont possibles. Nous pouvons citer, entre autres, la méthode de tir [69, 116], ou encore la méthode asymptotique numérique (MAN) [23]. Dans ce manuscrit, seules l'intégration temporelle et la méthode d'équilibrage harmonique (HBM) sont employées.

La méthode de Runge-Kutta est utilisée pour résoudre les Équations (I.40) ou (I.41). D'autres méthodes d'intégration temporelles existent et l'ouvrage de Butcher [11] explique ces différentes stratégies. Ces simulations servent souvent de référence pour valider de nouvelles approches mais restent très coûteuses en temps de calcul. Notons aussi que les problèmes (I.40) ou (I.41) pourraient être écrits suivant un formalisme du type "Linear Complementarity Problem" (LCP) [103]. La méthode d'équilibrage harmonique sera privilégiée dans ce manuscrit et est expliquée ci-dessous.

7.1 Principe théorique

La HBM cherche le régime périodique du système (I.40). La solution est cherchée sous la forme d'une série de Fourier de pulsation fondamentale égale à celle de l'excitation extérieure. En raison du caractère non-linéaire du système d'équations, un développement à l'ordre $N_1 > 1$ est généralement effectué. Le nombre d'inconnues à déterminer est donc égal au nombre de degrés de liberté multiplié par le nombre d'harmoniques gardés pour le développement de la solution. L'intérêt principal de la méthode est de se placer dans le domaine fréquentiel et donc de ne pas déterminer le régime transitoire du système (ce qui permet de diminuer drastiquement les temps de calculs). Cette méthode est largement utilisée dans le milieu industriel et académique [73]. La méthode d'équilibrage harmonique est une méthode de Galerkin où la solution est décomposée sous forme de série de Fourier tronquée (étape de substitution) puis le système d'équation est projeté sur le même espace vectoriel (étape d'orthogonalisation) [74, 75]. Tandis que plusieurs travaux de thèse en détaillent le fonctionnement dans l'espace réel [53, 64, 104],

les développements présentés ci-dessous utilisent des variables complexes. La solution sera recherchée sous la forme

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{N_h} (\mathbf{c}_n e^{in\omega t}) + c.c \right], \quad (\text{I.45})$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation d'excitation et T la période associée. La série de Fourier est tronquée à l'ordre N_h . Les coefficients complexes \mathbf{c}_n sont les coefficients de Fourier associés à l'harmonique n . Le vecteur \mathbf{u} décrit un déplacement physique (et donc réel), le terme $c.c$ correspond aux complexes conjugués de la somme. Pour une composante cyclique (et donc a priori complexe), la série de Fourier s'écrit

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{n=-N_h}^{N_h} \tilde{\mathbf{c}}_n e^{in\omega t}, \quad (\text{I.46})$$

où les coefficients $\tilde{\mathbf{c}}_n$ sont des vecteurs complexes. Pour le reste de cette partie, le développement de la HBM sera effectué sur le système physique complet (I.40) (les calculs pour des systèmes cycliques sont similaires). Remplacer \mathbf{u} dans (I.40) par (I.45) donne

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N_h} \left[\left((in\omega)^2 \mathbf{M}_f + in\omega \mathbf{C}_f + \mathbf{K}_f \right) \mathbf{c}_n e^{in\omega t} + c.c \right] + \mathbf{f}_{nl} = \mathbf{f}_{ext}. \quad (\text{I.47})$$

Ces équations sont ensuite projetées sur la base $(e^{in\omega t})_{n \in \llbracket 0, N_h \rrbracket}$ via le produit scalaire hermitien

$$\langle f, g \rangle = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t) \bar{g}(t) dt. \quad (\text{I.48})$$

Nous avons alors

$$\left((in\omega)^2 \mathbf{M}_f + in\omega \mathbf{C}_f + \mathbf{K}_f \right) \mathbf{c}_n + \langle \mathbf{f}_{nl}, e^{in\omega t} \rangle = \langle \mathbf{f}_{ext}, e^{in\omega t} \rangle, \quad n \in \llbracket 0, N_h \rrbracket. \quad (\text{I.49})$$

Le système complet s'écrit finalement

$$\left[\omega^2 (\nabla_\omega^2 \otimes \mathbf{M}_f) + \omega (\nabla_\omega \otimes \mathbf{C}_f) + (\mathbf{I}_{N_h+1} \otimes \mathbf{K}_f) \right] \mathbf{c} + \mathbf{c}_{f_{nl}} = \mathbf{c}_{f_{ext}}, \quad (\text{I.50})$$

avec \mathbf{c} le vecteur contenant les harmoniques $(\mathbf{c}_n)_{n \in \llbracket 0, N_h \rrbracket}$, $\mathbf{c}_{f_{nl}}$ est le vecteur contenant l'ensemble des projections $(\langle \mathbf{f}_{nl}, e^{in\omega t} \rangle)_{n \in \llbracket 0, N_h \rrbracket}$ et de même pour les forces extérieures avec $\mathbf{c}_{f_{ext}}$. La matrice ∇_ω est une matrice diagonale par blocs contenant les termes $(\nabla_{\omega, n} = in)_{n \in \llbracket 0, N_h \rrbracket}$.

7.2 Évaluation des forces non-linéaires

Le calcul du terme $\mathbf{c}_{f_{nl}}$ requiert une attention particulière. En effet, les forces non-linéaires sont données par des lois exprimées dans le domaine physique (voir les Equations (I.43), (I.42) et (I.44)). Cameron et Griffin [12] ont proposé, dans le cadre d'une approche HBM, la procédure Alternating Frequency Time (AFT) qui permet de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel. A partir des coefficients de Fourier \mathbf{c} , le déplacement physique est évalué (avec la matrice notée \mathbf{D}_{tf}) dans le domaine temporel via (I.45) pour un intervalle de temps discrétisé, les forces non-linéaires peuvent alors être évaluées sur ce même intervalle via leur loi de contact ou même pour d'autres types de non-linéarités. Elles sont finalement projetées dans le domaine fréquentiel (avec la matrice notée \mathbf{D}_{tf}). La Figure I.10 permet de visualiser les différents passages entre temps et fréquence nécessaires à la procédure AFT.

Cette méthode permet une bonne approximation de la solution à condition que suffisamment d'harmoniques temporels soient retenus, que la plage temporelle soit suffisamment discrétisée et que les

forces non-linéaires soient périodiques. Le nombre d'harmoniques impacte directement la discrétisation temporelle via la loi de Shannon [91]. En revanche, un grand nombre d'harmoniques rend les matrices de l'AFT (\mathbf{D}_{ft} et \mathbf{D}_{tf}) plus grandes ce qui conduit à un calcul plus long. Différentes méthodologies [50, 82, 96] permettent une adaptation des harmoniques retenus afin de rendre la procédure plus efficace et robuste.

Notons que si la solution est cherchée sous sa forme cyclique (I.46), il est alors nécessaire d'évaluer les forces non-linéaires dans le domaine cyclique/fréquentiel. Ce calcul nécessite une opération supplémentaire par rapport à l'AFT classique : le passage du domaine cyclique vers le domaine physique comme expliqué à la Section I.2 et illustré à la Figure I.10.

Notons que dans ce manuscrit, nous allons travailler soit dans l'espace physique/cyclique soit dans l'espace temporel/fréquentiel. Le passage d'un espace à l'autre est rappelé à la Figure I.11.

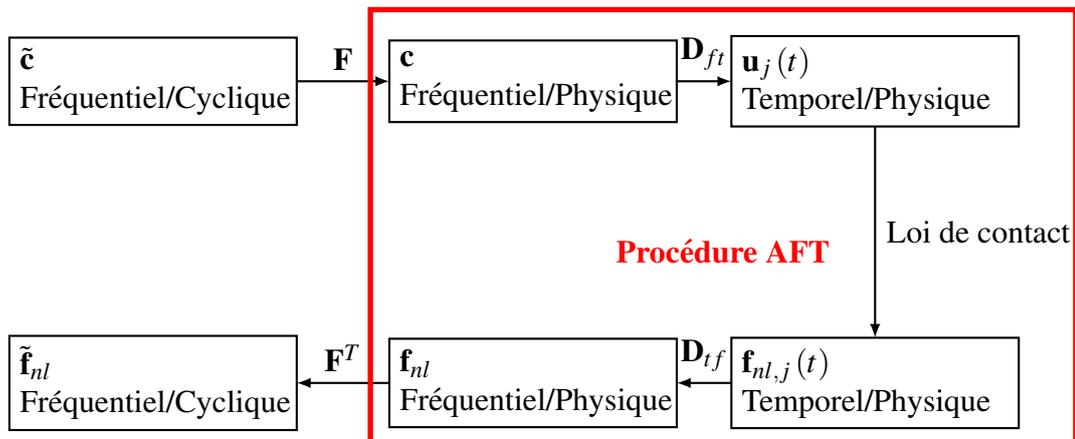


FIGURE I.10 – Procédure pour évaluer les forces non-linéaires cycliques.

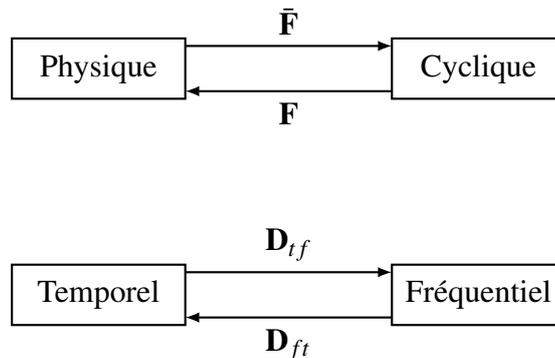


FIGURE I.11 – Présentation et passage entre les différents espaces.

7.3 Méthode de continuation

Dans le cadre du calcul d'une réponse forcée non-linéaire, plusieurs solutions existent pour une pulsation ω donnée et il convient d'appliquer des méthodes de continuation pour trouver un certain nombre d'entre elles [141]. Une fois la méthode choisie, un algorithme type Newton-Raphson est utilisé pour résoudre le système. Une solution initiale (prédite) doit être proposée au solveur (dénnotée avec l'indice *pre* ci-après).

Continuation séquentielle Cette procédure consiste à fixer la pulsation ω . Le système (I.50) peut alors être résolu. Un incrément fréquentiel $d\omega$ est défini pour obtenir la solution sur une plage fréquentielle. Le principal défaut de cette méthode est son impossibilité à retrouver des branches issues de points de retournement. Un schéma associée à cette procédure est donné en Figure I.12a.

Continuation à longueur d'arc (arc length) Cette continuation suit l'abscisse curviligne de la solution, et donc la pulsation ω n'est plus imposée. Il est nécessaire de rajouter une équation à (I.50) pour avoir un système carré. Cette procédure recherche la solution (ω, \mathbf{x}) sur une hypersphère de rayon ds centré autour de la dernière solution (ω_p, \mathbf{x}_p) (voir Figure I.12b) et l'équation dite de fermeture s'écrit.

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) + (\omega - \omega_p)^2 = ds^2. \quad (\text{I.51})$$

Continuation à pseudo longueur d'arc (pseudo arc length) De façon similaire à la continuation à longueur d'arc, cette procédure suit l'abscisse curviligne de la solution. Cependant, elle recherche la solution sur un hyperplan orthogonal à la tangente du dernier point solution comme représenté en Figure I.12c. Elle permet de résoudre certains problèmes d'attractivité par rapport à la continuation à longueur d'arc. La tangente à la solution p se note $(\Delta\omega_p, \Delta\mathbf{x}_p)$. Elle est calculée à partir de la jacobienne du résidu. L'équation s'écrit alors

$$\Delta\mathbf{x}_p \cdot (\mathbf{x} - (\mathbf{x}_p + \Delta\mathbf{x}_p)) + \Delta\omega_p (\omega - (\omega_p + \Delta\omega_p)) = 0, \quad (\text{I.52})$$

ce qui revient en développant la formule précédente et en normalisant la tangente avec l'abscisse curviligne $\Delta\mathbf{x}_p^\top \Delta\mathbf{x}_p + \Delta\omega_p^2 = ds^2$

$$\Delta\mathbf{x}_p^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) + \Delta\omega_p (\omega - \omega_p) = ds^2. \quad (\text{I.53})$$

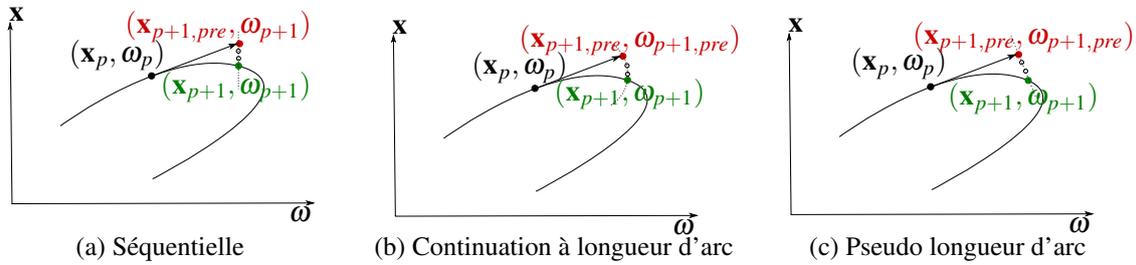


FIGURE I.12 – Méthodes de continuation

Dans la suite de ce manuscrit, la continuation à pseudo longueur d'arc (pseudo arc length) sera employée pour des non-linéarités géométriques tandis qu'une continuation séquentielle sera préférée pour des non-linéarités de frottement.

7.4 Prédiction/correction

Pour converger vers une des solutions du système, une prédiction judicieuse doit être fournie au solveur. Différentes méthodes, basées sur la solution précédente (indice p), sont proposées ici. La prédiction sécante est généralement utilisée en parallèle d'une continuation séquentielle (où la pulsation ω est fournie). La prédiction $\mathbf{x}_{p+1,pre}$ est donnée par

$$\mathbf{x}_{p+1,pre} = \mathbf{x}_p + \frac{(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_{p-1})}{\omega_p - \omega_{p-1}} (\omega - \omega_p). \quad (\text{I.54})$$

Pour des méthodes à longueur d'arc, une prédiction tangente est préférée

$$\mathbf{x}_{p+1,pre} = \mathbf{x}_p + \Delta\mathbf{x}_p \quad (\text{I.55})$$

$$\omega_{p+1,pre} = \omega_p + \Delta\omega, \quad (\text{I.56})$$

où $\Delta\mathbf{x}_p$ et $\Delta\omega_p$ se calculent comme pour la continuation à pseudo longueur d'arc (calcul de la jacobienne du résidu).

Les travaux de Woivode et al. [172, 173] font des comparaisons entre différents types de continuation et montrent que la HBM couplée aux méthodes de prédiction/correction expliquées ci-dessus est à favoriser pour des problèmes de frottement avec des excitations périodiques (ce qui constitue la majeure partie de ce travail de thèse).

8 Stabilité et bifurcation des solutions périodiques

En présence de non-linéarités, un système mécanique peut présenter plusieurs solutions [115, 143]. Celles-ci peuvent être stables (l'ajout d'une perturbation ne modifie pas la solution asymptotiquement) ou instables (la solution tend vers l'infini). De nombreux ouvrages et articles [48, 115, 140] expliquent des méthodes théoriques et numériques qui permettent d'exhiber ces solutions. Dans ce manuscrit, l'utilisation de ces outils permettront de calculer les bifurcations associées à la recherche des solutions périodiques [28, 174] ainsi que d'en analyser la stabilité [35, 59].

8.1 Stabilité locale

Différentes méthodes numériques existent pour déterminer la stabilité d'une solution périodique comme par exemple la méthode de Floquet [35] ou la méthode de Hill [59]. La méthode de Hill, bien que plus rapide, est moins robuste et moins précise que celle de Floquet [117]. Pour ces raisons, seule la méthode de Floquet est expliquée et employée dans ce manuscrit.

En pratique, nous employons la HBM pour résoudre le système régissant la dynamique du système (voir Section I.7) et la solution temporelle $\mathbf{u}(t)$ est obtenue via l'Équation (I.45). Ce déplacement est solution du problème non-autonome

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{f}_{ext}. \quad (\text{I.57})$$

Pour déterminer la stabilité locale de la solution, une faible perturbation $\mathbf{p}(t)$ est ajoutée,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{p}(t). \quad (\text{I.58})$$

En injectant ce terme dans (I.57) et en simplifiant les différents termes, nous avons

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}\mathbf{p} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u} + \mathbf{p}, \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{p}}) - \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}. \quad (\text{I.59})$$

La perturbation étant de faible amplitude, un développement limité au premier ordre est employé sur les forces non-linéaires. Le système à résoudre devient alors

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}\mathbf{p} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})} \mathbf{p} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right|_{(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}. \quad (\text{I.60})$$

Ce système d'équations différentielles linéaire en $\mathbf{p}(t)$ peut se mettre sous la forme

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(\mathbf{u})\mathbf{y}, \quad (\text{I.61})$$

$$\text{avec } \mathbf{A}(\mathbf{u}) = - \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}^{-1} \left[\mathbf{K} + \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})} \quad \mathbf{C} + \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \Big|_{(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})} \right] \text{ et } \mathbf{y} = [\mathbf{p}^\top \quad \dot{\mathbf{p}}^\top]^\top.$$

L'étude de l'évolution de $\mathbf{p}(t)$ permet de statuer sur la stabilité de la solution de $\mathbf{u}(t)$. Le livre de Nayfeh et Balachandran [114] propose une démonstration pédagogique du théorème de Floquet. En notant \mathbf{Y} les solutions linéaires indépendantes de (I.61) (chaque colonne de \mathbf{Y} est solution de (I.61)), la propriété suivante est obtenue

$$\mathbf{Y}(t+T) = \mathbf{Y}(t) \Phi, \quad (\text{I.62})$$

où T est la période de la solution \mathbf{u} et Φ est appelé la matrice de monodromie. Pour déterminer cette matrice, l'Équation (I.61) est résolue par intégration temporelle avec la condition initiale $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{I}$. En intégrant jusqu'à T , nous avons

$$\Phi = \mathbf{Y}(T). \quad (\text{I.63})$$

En suivant les calculs de [114], il est possible de faire le changement de variable

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{V}(t) \mathbf{P}^{-1}, \quad (\text{I.64})$$

avec \mathbf{P} une matrice inversible. Si les valeurs propres ρ de Φ (également appelées les multiplicateurs de Floquet) sont distinctes, il est possible de construire \mathbf{P} de telle façon à ce que

$$\mathbf{V}(t+T) = \mathbf{V}(t) \mathbf{J}, \quad (\text{I.65})$$

avec \mathbf{J} une matrice diagonale contenant les valeurs propres ρ . Le cas où les valeurs propres de Φ ont une multiplicité supérieur à 1 est traité dans [115]. Donc finalement pour chaque colonne m de \mathbf{V} , nous avons

$$\mathbf{v}_m(t+T) = \rho_m \mathbf{v}_m(t) \quad (\text{I.66})$$

et donc

$$\mathbf{v}_m(t+NT) = \rho_m^N \mathbf{v}_m(t). \quad (\text{I.67})$$

L'évolution de \mathbf{Y} suit l'évolution de \mathbf{V} via (I.64). Par conséquent si le rayon spectral de Φ ($\max_m (|\rho_m|)$) est inférieur à 1 alors la perturbation tend asymptotiquement vers 0 et la solution \mathbf{u} est dite stable.

Le suivi de la stabilité d'une solution donne parfois lieu à des solutions instables qui peuvent être caractérisées par la façon dont les multiplicateurs de Floquet quittent le cercle unité. Ce changement de stabilité permet de détecter des points de bifurcations (solutions multiples). Trois scénarios existent et sont schématisés à la Figure I.13,

- Une valeur propre quitte le cercle unité par l'axe des réels avec une valeur positive. Selon le nombre de solutions et leur stabilité, ce point correspond soit à un point de bifurcation de type transcritique, rupture de symétrie, ou encore de retournement.
- Une valeur propre quitte le cercle unité par l'axe réel avec une valeur négative. Ce point correspond à un point de bifurcation de dédoublement de période.
- Une paire de valeurs propres (complexes conjugués) quitte le cercle unité avec une partie imaginaire non-nulle. Ce point correspond à une bifurcation de Neimark ou Hopf 2. Une branche quasi-périodique peut être obtenue [37] via une méthode HBM modifiée.

L'ouvrage de Nayfeh et Balachandran [114] explique en détails ces différents cas. Dans la suite de ce manuscrit, seules les solutions périodiques de période T vont nous intéresser. Par conséquent seuls les points de bifurcations de type transcritique, rupture de symétrie, ou encore de retournement seront traités. Notons que pour un système autonome, une des valeurs propres se situe toujours sur le cercle unité [114].

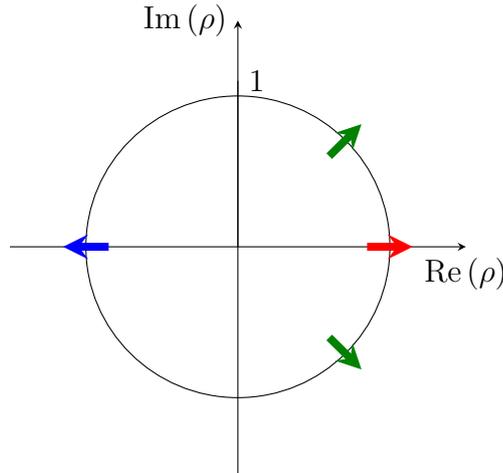


FIGURE I.13 – Cercle unité de Floquet. (—) : transcritique, rupture de symétrie ou retournement, (—) : dédoublement de période, (—) : Neimark ou Hopf 2 points de bifurcation.

8.2 Suivi de bifurcations

Dans nos travaux, le suivi de bifurcations s'opère sur le système HBM (I.50). Différents ouvrages traitent du sujet comme le chapitre 2.3 de [115]. La théorie mathématique associée aux bifurcations est détaillée dans [143]. Quelques papiers scientifiques proposent des méthodologies pour calculer les points de bifurcations ainsi que leurs branches associées [120, 174] dont nous faisons ici un court résumé.

Dans la section précédente, nous avons vu qu'il est possible de déterminer les points de bifurcation via la stabilité de Floquet. Une autre possibilité consiste à calculer les valeurs propres de la jacobienne associée au résidu de l'équation de la dynamique du système. Définissons le résidu de (I.50) par

$$\mathbf{r}(\mathbf{c}, \omega) = [\omega^2 (\nabla_{\omega}^2 \otimes \mathbf{M}_f) + \omega (\nabla_{\omega} \otimes \mathbf{C}_f) + (\mathbf{I}_{N_h+1} \otimes \mathbf{K}_f)] \mathbf{c} + \mathbf{c}_{f_{nl}} - \mathbf{c}_{f_{ext}}. \quad (\text{I.68})$$

La jacobienne de \mathbf{r} par rapport à \mathbf{c} est notée \mathbf{J}_x et est égale à

$$\mathbf{J}_x = [\omega^2 (\nabla_{\omega}^2 \otimes \mathbf{M}_f) + \omega (\nabla_{\omega} \otimes \mathbf{C}_f) + (\mathbf{I}_{M_h+1} \otimes \mathbf{K}_f)] + \frac{\partial \mathbf{c}_{f_{nl}}}{\partial \mathbf{c}}. \quad (\text{I.69})$$

De façon similaire, \mathbf{J}_{ω} correspond à la jacobienne de \mathbf{r} par rapport à ω . Si le spectre de \mathbf{J}_x contient une valeur propre nulle alors il y a un point de bifurcation. En pratique, nous utilisons un principe de continuation (voir Section I.7.3) qui ne permet pas d'obtenir directement le point de bifurcation. Ainsi nous regardons en quelle valeur le déterminant de \mathbf{J}_x change de signe ce qui nous permet "d'encadrer" le point de bifurcation entre deux solutions. La position exacte du point de bifurcation s'obtient en résolvant le système non-linéaire suivant.

$$\begin{cases} \mathbf{r}(\mathbf{c}, \omega) + \lambda \mathbf{h} = \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_x(\mathbf{c})^T \mathbf{h} = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}^T \mathbf{h} - 1 = 0 \\ \mathbf{J}_{\omega}^T \mathbf{h} = 0, \end{cases} \quad (\text{I.70})$$

où \mathbf{h} , λ , ω et \mathbf{c} sont les inconnues du problème. La première équation correspond au résidu du système auquel est ajouté $\lambda \mathbf{h}$ pour éviter des singularités. Les seconde et troisième équations traduisent la singularité de \mathbf{J}_x . La dernière équation n'est vérifiée que pour des points de bifurcations auxquels plusieurs branches de solutions se rattachent. Pour calculer les différentes branches de solutions, nous utilisons la HBM présentée en Section I.7. L'initialisation de la solution s'effectue en calculant les

tangentes associées au point de bifurcation [79]. Ces autres branches de solutions peuvent par exemple correspondre à des résonances internes du système mécanique. L'analyse de ces phénomènes non-linéaires est très étudiée dans la littérature. Ce phénomène apparaît quand des fréquences propres du système sont commensurables ou quasi-commensurables (multiples l'une de l'autre). Ainsi, à travers les non-linéarités, en excitant un mode, d'autres modes peuvent répondre. De nombreuses études analytiques existent sur ce type de phénomènes [80, 110] (via la méthode des échelles multiples) et montrent que les résonances sont obtenues à partir d'un certain seuil d'énergie du système. De multiples simulations numériques sont disponibles dans la littérature en lien avec ce phénomène [28, 120, 151, 174]. De nombreuses analyses sur l'apparition des résonances internes ont aussi été réalisées pour des structures à symétrie cyclique [44, 49, 51, 139]. La richesse modale de ces structures favorise l'apparition de ces phénomènes non-linéaires. Les travaux [22, 48, 140] sont également très intéressants et présentent l'existence possible de poches de solutions associées à ce type de structure.

Dans le cadre de cette thèse, nous étudierons des résonances internes seulement sur un exemple simple dans le Chapitre III en Section III.4.1. La majorité du reste de notre travail se concentrera sur des non-linéarités de frottement où seule la branche principale stable du système sera calculée. Cette restriction est adoptée dans la majorité des articles traitant du frottement. Effectivement, de par sa nature dissipative elle ne favorise pas l'apparition de résonance interne qui nécessite le franchissement d'un seuil souvent difficilement atteignable. Néanmoins, il a été montré récemment que la présence d'amortisseurs sous plateformes peut donner lieu à l'apparition de plusieurs solutions [58]. Ceci ne sera cependant pas étudié dans le cadre de cette thèse.

9 Bilan du chapitre

Ce chapitre nous a permis, dans un premier temps, de poser les équations de la dynamique des systèmes classiquement rencontrés en machines tournantes dans le domaine physique et cyclique. Les problématiques du désaccordage et des forces non-linéaires ont ensuite pu être abordées avant d'expliquer la méthode d'équilibrage harmonique qui va principalement être utilisée dans cette thèse. Celle-ci semble particulièrement efficace pour déterminer les régimes permanents du système mécanique et est donc privilégiée. Le prochain chapitre aura pour objectif de passer en revue différentes méthodes de réduction de la littérature permettant de diminuer le coût numérique associé à la résolution du système.

Chapitre II

État de l'art sur les méthodes de réduction

Sommaire du chapitre

1	Sous-structuration linéaire : la méthode de Craig-Bampton	28
2	Double synthèse modale	29
3	Réduction non-linéaire	29
3.1	Historique des modes non-linéaires	30
3.2	Modes complexes non-linéaires	31
4	Synthèse modale non-linéaire	32
5	Condensation sur les degrés de liberté non-linéaires relatifs	35
5.1	Calcul de la matrice de rigidité dynamique	35
5.2	Restitution du déplacement	36
6	Sous-structuration non-linéaire à interfaces fixes : la CNCMS	36
6.1	Première réduction : sous-structuration	37
6.2	Seconde réduction : mode non-linéaire	38
6.3	Troisième réduction : double synthèse modale	39
6.4	Synthèse, substitution des forces non-linéaires et prise en compte du désaccor- dage aléatoire	39
6.5	Validation sur un modèle éléments-finis	40
6.6	Simulation numérique non-linéaire	43
7	Bilan du chapitre	46

Les modèles numériques en calcul des structures utilisés dans l'industrie sont souvent obtenus à l'aide de la méthode des éléments finis. Afin d'avoir une bonne précision sur le comportement du système mécanique, ils doivent être suffisamment raffinés (contenir assez de nœuds). L'emploi d'un maillage fin entraîne un volume de données important et une simulation du système coûteuse en temps (que ce soit pour une structure linéaire ou non-linéaire). Des méthodes de réduction ont été proposées dans la littérature [25, 94] pour réduire le nombre d'inconnues du problème tout en gardant une évaluation précise de la réponse du système. La sous-structuration décompose le système en plusieurs sous-éléments. Chacune de ces parties est réduite puis elles sont assemblées. Pour chacun des sous-éléments, une réduction des degrés de liberté linéaires est effectuée. Le principe est de chercher le vecteur de déplacement sur un nouvel espace plus petit. Pour cela, une matrice de réduction rectangulaire

\mathbf{R} est définie,

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{u}_r \quad (\text{II.1})$$

où \mathbf{u}_r est le nouveau vecteur des inconnues. Dans un problème concret, du type (I.2), le déplacement est substitué par (II.1) et l'ensemble de l'équation est projeté sur la base définie par \mathbf{R} . Il existe des sous-structurations à interfaces fixes de type Craig-Bampton [25] ou en encore celle de Benfield-Hruda [5] mais également des sous-structurations dites libres comme celles de MacNeal [94] ou de Craig-Chang [135]. De nombreux ouvrages ou manuscrits de thèse traitent de ces méthodes de réduction et les comparent. Nous pouvons citer, entre autres, le livre de Gérardin et Rixen [45], ou différentes thèses [4, 7, 54, 98, 164]. Dans un premier temps, nous expliquons deux concepts de réduction linéaire qui seront utilisés dans ce manuscrit. Puis nous présenterons une récente méthode de réduction utilisée pour des systèmes non-linéaires désaccordés.

1 Sous-structuration linéaire : la méthode de Craig-Bampton

Dans le milieu industriel, la méthode de réduction à interfaces fixes Craig-Bampton (CB) [25] est largement utilisée pour sa robustesse. Cette méthode sera donc employée dans ce manuscrit et sera expliquée ci-dessous. Considérons le problème aux valeurs propres suivant,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (\text{II.2})$$

Des degrés de liberté « maîtres », \mathbf{u}_m , sont définis et ne sont pas réduits tandis que d'autres degrés de liberté dits « esclaves », \mathbf{u}_s , sont réduits par la méthode. Ces définitions conduisent à restructurer les matrices de masse et raideur de la façon suivante

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sm} \\ \mathbf{M}_{ms} & \mathbf{M}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_s \\ \ddot{\mathbf{u}}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sm} \\ \mathbf{K}_{ms} & \mathbf{K}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

ce qui donne (en supposant la solution périodique, mono-harmonique)

$$-\omega^2 (\mathbf{M}_{ss}\mathbf{u}_s + \mathbf{M}_{sm}\mathbf{u}_m) + \mathbf{K}_{ss}\mathbf{u}_s + \mathbf{K}_{sm}\mathbf{u}_m = \mathbf{0}, \quad (\text{II.4})$$

$$-\omega^2 (\mathbf{M}_{ms}\mathbf{u}_s + \mathbf{M}_{mm}\mathbf{u}_m) + \mathbf{K}_{ms}\mathbf{u}_s + \mathbf{K}_{mm}\mathbf{u}_m = \mathbf{0}. \quad (\text{II.5})$$

La matrice de réduction de Craig-Bampton est basée sur des analyses statique et modale. La partie statique est obtenu en négligeant les effets dynamiques de (II.4)

$$\mathbf{u}_s = -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm}\mathbf{u}_m. \quad (\text{II.6})$$

En imposant successivement un déplacement unitaire sur chaque degré de liberté maître, la matrice des modes statiques de liaison est obtenue

$$\boldsymbol{\Psi} = -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm}. \quad (\text{II.7})$$

À ce calcul statique est ajouté un calcul modal où les degrés de liberté maîtres sont imposés fixes. Ainsi (II.4) devient

$$(-\omega^2\mathbf{M}_{ss} + \mathbf{K}_{ss})\mathbf{u}_s = \mathbf{0}. \quad (\text{II.8})$$

La résolution de ce système modal donne le vecteur des valeurs propres du problème ainsi que la matrice des vecteurs propres associés $\boldsymbol{\Phi}$. Un critère fréquentiel est alors appliqué et seuls les vecteurs propres $\boldsymbol{\Phi}_r$ associés à une fréquence $\boldsymbol{\Omega}_r$ inférieure à un seuil ω_s [45] sont conservés. Dans ce manuscrit, ce choix est appliqué mais d'autres possibilités comme sélectionner les modes à l'intérieur d'une plage

fréquentielle pourraient être envisagées. Les degrés de liberté esclaves sont alors réduits par

$$\mathbf{u}_s = \Phi_r \boldsymbol{\eta} + \Psi \mathbf{u}_m \quad (\text{II.9})$$

où $\boldsymbol{\eta}$ correspond à des coordonnées généralisées réduites. La matrice de réduction s'écrit finalement

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \Phi_r & \Psi \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (\text{II.10})$$

et le problème réduit par

$$\mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{K}_r \mathbf{u}_r = \mathbf{0}, \quad (\text{II.11})$$

avec $\mathbf{u}_r = [\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}_m]$, $\mathbf{M}_r = \mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R}$ et de même pour \mathbf{K}_r . La forme des matrices structurales ont l'agencement suivant [45]

$$\mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{m,m} & \mathbf{M}_{mr} \\ \mathbf{M}_{rm} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{m,m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_r^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{II.12})$$

Cette méthode de sous-structuration est simple à mettre en place, très robuste, et précise. Elle est souvent employée aussi bien dans le milieu industriel qu'académique. D'autres méthodes de types interfaces libres existent [94]. Ces dernières sont généralement plus précises mais peuvent donner lieu à des problèmes de stabilité numérique et ne seront donc pas employées. Notons que pour ces deux méthodes, la taille du problème devient essentiellement égale au nombre de nœuds maîtres gardés (nombre de nœuds de contact additionné aux nœuds de frontières).

2 Double synthèse modale

La méthode de sous-structuration précédemment vue nécessite de garder les degrés de liberté des frontières (\mathbf{x}_{fr}) de chaque sous-élément pour pouvoir ensuite les assembler et obtenir ainsi la structure entière. Ce nombre d'inconnues peut s'avérer prohibitif et la méthode de double synthèse modale permet de réduire le système. En extrayant les matrices complètes des frontières (\mathbf{K}_{fr} pour la matrice de raideur et \mathbf{M}_{fr} pour la matrice de masse), une analyse modale est effectuée

$$(\mathbf{K}_{fr} - \omega^2 \mathbf{M}_{fr}) \mathbf{x}_{fr} = \mathbf{0}. \quad (\text{II.13})$$

Via un critère fréquentiel, seul un certain nombre de modes est gardé et la réduction se lit

$$\mathbf{x}_{fr} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{p}_r, \quad (\text{II.14})$$

où \mathbf{p}_r correspond aux coordonnées généralisées. $\mathbf{\Gamma}$ est la matrice de réduction composée des vecteurs propres de l'analyse modale (II.14). Cette méthode a différentes appellations : modes d'interfaces [162, 163], modes contraintes caractéristiques [18], ou encore modes de branches [8]. Cette synthèse offre généralement une réduction importante mais nécessite l'assemblage, au préalable, du système sur les frontières. Cette étape peut donc nécessiter des ressources numériques importantes.

3 Réduction non-linéaire

Les méthodes de réduction des sections précédentes sont des réductions linéaires. En présence de non-linéarités, les nœuds non-linéaires sont en général gardés en tant que nœuds maîtres pour pouvoir appliquer, par exemple, les lois de contact ou de grands déplacements. Pour une roue complète industrielle, ce type de calcul n'est pas réalisable et il est alors nécessaire de faire appel à des méthodes

de réduction non-linéaires. Certaines de ces méthodes se basent sur le concept de modes non-linéaires (MNLs) qui sont une extension des modes linéaires, largement utilisés dans les sections précédentes.

3.1 Historique des modes non-linéaires

Au cours du temps, plusieurs définitions de modes non-linéaires ont été proposées. Le concept a été tout d'abord introduit dans une suite d'articles de Rosenberg [132-134]. Il considère le système mécanique autonome et conservatif suivant

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0} \quad (\text{II.15})$$

où la non-linéarité est polynomiale de degré impair. Rosenberg définit le mode non-linéaire comme une solution périodique où les degrés de liberté vibrent à l'unisson. Ainsi le mouvement d'un seul degré de liberté (u_k) suffit pour connaître le mouvement des autres,

$$u_i = f_i(u_k(t)), \quad \forall i \in \llbracket 1, N_{\text{ddl}} \rrbracket \setminus k \quad (\text{II.16})$$

où N_{ddl} représente le nombre de degrés de liberté du système, $(f_i)_{i \in \llbracket 1, N_{\text{ddl}} \rrbracket \setminus k}$ décrit la famille de fonctions gouvernant le mouvement des degrés de liberté. En remplaçant les dérivées première et seconde du mouvement par (II.16), les nouvelles inconnues sont u_k ainsi que les fonctions f_i . L'analyse de ces modes a permis la définition de propriétés intéressantes : la dépendance des fréquences propres par rapport à l'énergie totale du système, le couplage non-linéaire des modes, ou encore l'existence d'un plus grand nombre de modes non-linéaires que le nombre de degrés de liberté du système [68]. Si la déformée des modes ne dépend pas de l'énergie, ces derniers sont dits similaires. Sinon ils sont appelés non-similaires.

Shaw et Pierre ont proposé une extension de la définition de Rosenberg en prenant en compte des systèmes dissipatifs et/ou gyroscopiques [144, 145]

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{f}_{\text{nl}} = \mathbf{0}. \quad (\text{II.17})$$

Leur approche consiste à définir une variété invariante de dimension 2 dans l'espace des phases. Le mouvement des degrés de liberté est ainsi fonction du déplacement d'un degré de liberté u_k et de sa vitesse \dot{u}_k . Le système d'équations régissant la dynamique est d'abord écrit sous forme d'état

$$\dot{u}_i = v_i, \quad \forall i \in \llbracket 1, N_{\text{ddl}} \rrbracket, \quad (\text{II.18a})$$

$$\dot{v}_i = f_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall i \in \llbracket 1, N_{\text{ddl}} \rrbracket. \quad (\text{II.18b})$$

Un couple déplacement-vitesse arbitraire (u_k, v_k) noté (u, v) est choisi et les autres degrés de liberté sont exprimés en fonction de ce couple

$$u_i = X_i(u, v) \quad \forall i \in \llbracket 1, N_{\text{ddl}} \rrbracket \setminus k, \quad (\text{II.19a})$$

$$v_i = V_i(u, v) \quad \forall i \in \llbracket 1, N_{\text{ddl}} \rrbracket \setminus k. \quad (\text{II.19b})$$

Les fonctions X_i et Y_i sont cherchées sous forme polynomiale. Cette approche analytique reste difficilement applicable à des modèles industriels. D'autres approches ont été proposées, notamment via la théorie des formes normales [63] qui repose sur le théorème de Poincaré-Dulac. Cette approche a été largement utilisée par Touzé et al. [158-160] et plus récemment dans [168] pour créer un modèle réduit d'une structure éléments finis avec des non-linéarités géométriques. Très récemment, Haller et Ponsioen [55] ont proposé une définition unifiée du mode non-linéaire via des « spectral submanifolds » (SSM). Leur approche a ensuite été appliquée à des modèles éléments finis [125]. D'autres méthodes de réduction existent comme les dérivées modales [61, 148] ou encore les modes compagnons [19, 106,

169]. Une récente revue bibliographique de ces différentes méthodes peut être trouvée dans [161].

3.2 Modes complexes non-linéaires

Dans ce manuscrit, nous utilisons l'approche de Laxalde et Thouverez, développée à la suite de la définition de Shaw et Pierre. Ils proposent dans [84] un concept semi-analytique de modes non-linéaires permettant de traiter des non-linéarités dissipatives comme le frottement aussi bien pour des modèles de petites que de grandes tailles. La méthode s'utilise en parallèle de la HBM, qui a été décrite à la Section I.7. Cette procédure s'appuie sur les modes complexes linéaires et sur l'approche de Rosenberg. Le déplacement est cherché sous la forme

$$\mathbf{u} = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\mathbf{c}_n e^{(-p\beta + in\omega_m)t} \right) \right), \quad (\text{II.20})$$

où β est une inconnue caractérisant l'amortissement du système et ω_m est la pulsation du mode étudié (aussi inconnue du système). Le champ de déplacement est donc supposé pseudo-périodique. Afin de calculer numériquement la solution, la série est tronquée. De plus, une dépendance linéaire est supposée entre les harmoniques de β et ω_m . Le déplacement est finalement approximé par

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{N_h} \left(\mathbf{c}_n e^{(-n\beta + in\omega_m)t} \right) + c.c \right) \quad (\text{II.21})$$

et est introduit dans l'Équation (II.17). Les étapes de la HBM sont ensuite appliquées : orthogonalisation par rapport à la base $(e^{in\omega_m t})_{n \in \llbracket 0, N_h \rrbracket}$ avec le produit scalaire (I.48)

$$\begin{cases} [(-\lambda)^2 \mathbf{M} + (-\lambda) \mathbf{C} + \mathbf{K}] \mathbf{c}_1 + \langle \mathbf{f}_{nl}, e^{i\omega_m t} \rangle = \mathbf{0} & (\text{II.22a}) \\ [(n\lambda)^2 \mathbf{M} + n\lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}] \mathbf{c}_n + \langle \mathbf{f}_{nl}, e^{in\omega_m t} \rangle = \mathbf{0}, & (\text{II.22b}) \end{cases}$$

avec $\lambda = -\beta + i\omega_m$.

Moyennant l'hypothèse que les forces non-linéaires soient périodiques, ces dernières sont évaluées par la procédure AFT. Notons qu'avec les inconnues supplémentaires β et ω_m , deux équations supplémentaires doivent être fournies au système : une équation en amplitude et une équation en phase. Différentes équations sont possibles, une première idée serait d'imposer le déplacement et la vitesse initiale d'un degré de liberté arbitraire k . Cela se traduirait par

$$u_k(t=0) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{N_h} c_{n,k} + c.c \right) = x_0, \quad (\text{II.23a})$$

$$\dot{u}_k(t=0) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{N_h} ((-n\beta + in\omega_m) c_{n,k}) + c.c \right) = v_0. \quad (\text{II.23b})$$

A la place de (II.23a), une procédure de continuation type pseudo longueur d'arc (pseudo-arc length) peut être préférée (voir Section I.7.3). Obtenir le mode non-linéaire consiste à balayer l'espace des amplitudes et phases (x_0, v_0) . Comme nous le verrons dans la Section II.4, le concept du mode non-linéaire va servir pour calculer une réponse forcée. Il est ainsi seulement calculé pour différentes valeurs d'amplitude x_0 avec une phase fixée. En pratique les conditions de fermeture sont appliquées sur un degré de liberté en tête de pale (nommé « tip »)

$$\operatorname{Re}(c_{1,\text{tip}}) = x_0, \quad (\text{II.24a})$$

$$\operatorname{Im}(c_{1,\text{tip}}) = -x_0, \quad (\text{II.24b})$$

où Re et Im représentent les parties réelles et imaginaires. Le paramètre $x_0 \in [0, X_f]$ est un paramètre qui sera augmenté progressivement jusqu'à une valeur seuil X_f . Le mode non-linéaire est ainsi obtenu pour des valeurs discrétisées de x_0 . Il est nécessaire de choisir un nœud dont le déplacement est non nul pour le mode étudié. Ainsi, selon une simulation en flexion, ou en torsion, le choix du degré de liberté de contrôle peut varier. Dans nos différentes applications, nous allons étudier le premier mode de flexion et de torsion. Notre choix se porte donc sur un nœud situé à une extrémité de la tête de pale dans sa direction orthoradiale (lieu du déplacement maximal).

Dans les applications de synthèse modale non-linéaire, la paire (\mathbf{c}_1, λ) représente le mode non-linéaire discrétisé (la déformée est donnée par \mathbf{c}_1 , la fréquence propre par ω_m et le coefficient d'amortissement par β). Pour chaque niveau de x_0 , le terme \mathbf{c}_1 est normalisé par $c_{1,\text{tip}}$ et donne la déformée normalisée du mode non-linéaire Φ :

$$\Phi = \frac{\mathbf{c}_1}{c_{1,\text{tip}}} = \frac{\mathbf{c}_1}{x_0(1-i)}, \quad x_0 \in [0, X_f]. \quad (\text{II.25})$$

En pratique, Φ est évalué numériquement pour un ensemble de valeurs discrétisées de x_0 (généralement une centaine de points permet de bien décrire la déformée du mode). Afin de décrire le mouvement du système pour n'importe quel niveau vibratoire, une interpolation linéaire de Φ est effectuée. Les valeurs propres du mode non-linéaire, λ , sont également interpolées. A la suite de cette étape, Φ et λ ne sont plus des quantités discrétisées mais des fonctions du scalaire q_{tip} (avec $q_{\text{tip}} = |\bar{c}_{1,\text{tip}}| = \sqrt{2}x_0$ qui représente l'amplitude du degré de liberté en tête de pale).

Notons que la méthode des modes complexes non-linéaires fait différentes approximations : le scalaire n multipliant l'amortissement β est le même que pour la pulsation (passage Équation (II.20) à (II.21)), l'étape d'orthogonalisation de la HBM néglige le caractère dissipatif du système et enfin les forces non-linéaires sont évaluées par une AFT classique malgré les termes dissipatifs. Ces approximations sont acceptables dans le sens où la solution est cherchée sur une période T et que la décroissance associée à l'amortissement est très faible comparée à la période ($\beta \ll \omega_m$). Cette approche sera utilisée pour le reste du manuscrit. Un exemple de résultat est fourni à la Figure II.1. Le modèle utilisé pour cette simulation est présenté dans le Chapitre III, Section III.4.

Krack [72] a également proposé une définition des modes non-linéaires pour traiter le même type de problème (système avec des non-linéarités de friction). A la place de chercher des solutions amorties, le déplacement est supposé périodique. L'amortissement est introduit par une matrice supplémentaire qui vient compenser la perte d'énergie introduite par les non-linéarités de frottement par exemple. La méthode emploie alors la HBM pour résoudre le mode non-linéaire. Jahn et al. [62] ont proposé une étude de performances entre les deux types de définition. Bien qu'ils aient montré que l'approche de Krack était un peu plus précise, nous garderons dans ce manuscrit l'approche de Laxalde et Thouvez car celle-ci semble plus robuste d'emploi dans le cas de synthèse modale non-linéaire.

4 Synthèse modale non-linéaire

Les modes non-linéaires précédemment définis peuvent servir de bases de réduction non-linéaire pour calculer une réponse forcée de type

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{f}_{\text{nl}} = \mathbf{f}_{\text{ext}}. \quad (\text{II.26})$$

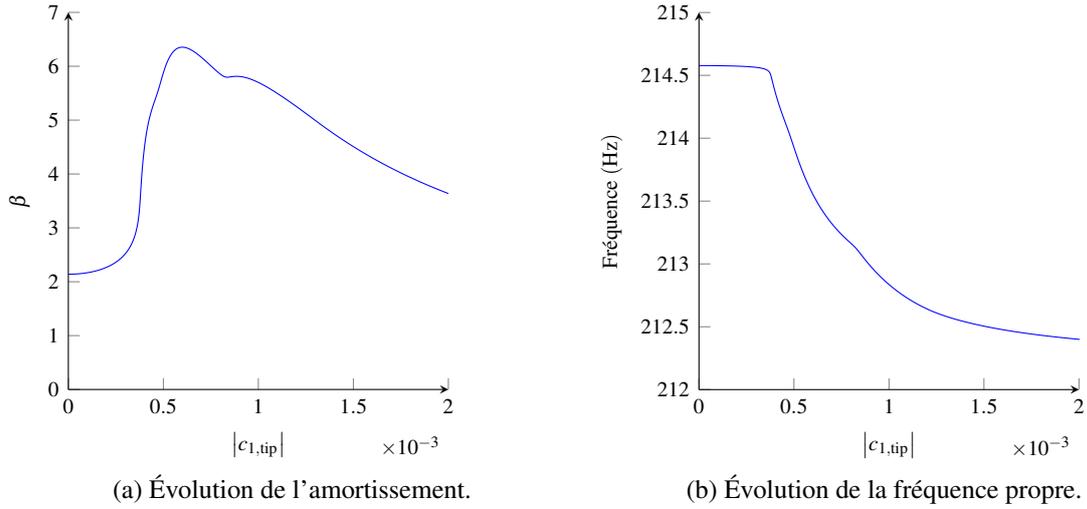


FIGURE II.1 – Évolution du mode complexe non-linéaire.

Dans cette optique, Szemplinska-Stupnicka proposa la méthode du « single non-linear mode » [152]. Le principe est de fournir le contenu du mode non-linéaire (déformée et pulsation) en fonction d'une variable à déterminer. Le concept se rapproche de la superposition modale linéaire où, proche d'une fréquence propre, le mode associé suffit à approximer correctement la dynamique du système.

Cette synthèse modale non-linéaire a été étendue par Laxalde et Thouverez pour des systèmes non-conservatifs [84] avant d'être complétée par Krack et al. pour un calcul de modes non-linéaires avec plusieurs harmoniques [76]. Néanmoins ces deux approches ont été développées dans un cadre de synthèse avec un seul mode non-linéaire. Joannin et al. ont développé une approche utilisant une synthèse multi-modale sans supposer l'orthogonalité des modes [66]. Cette dernière approche sera présentée ici. Notons qu'une des limitations de ces méthodes est qu'elles ne permettent pas de retrouver des phénomènes tels que des résonances internes car seul le système d'équations associé au premier harmonique est résolu et les forces non-linéaires sont substituées sans couplage via d'autres modes. Appliquons tout d'abord la HBM sur le système (II.26)

$$\begin{cases} [(-\omega)^2 \mathbf{M} + (i\omega) \mathbf{C} + \mathbf{K}] \mathbf{c}_1 + \langle \mathbf{f}_{nl}, e^{i\omega t} \rangle = \langle \mathbf{f}_{ext}, e^{i\omega t} \rangle & \text{(II.27a)} \\ [(-n\omega)^2 \mathbf{M} + (in\omega) \mathbf{C} + \mathbf{K}] \mathbf{c}_n + \langle \mathbf{f}_{nl}, e^{in\omega t} \rangle = \mathbf{0}. & \text{(II.27b)} \end{cases}$$

L'hypothèse de Krack [76] consiste à supposer que la pulsation d'excitation est proche de la pulsation du mode résonant étudié ($\omega \approx \omega_m$). Avec cette hypothèse et avec l'absence d'un terme d'excitation, le système (II.27b) est supposé vérifié après avoir substitué le terme \mathbf{c}_n par le mode non-linéaire (voir Équation (II.22b)). Cette hypothèse permet de réduire le nombre d'inconnues mais aussi le temps de calcul pour obtenir la réponse forcée du système. En revanche cette hypothèse est également la raison pour laquelle des résonances internes ne peuvent pas être obtenues. Ainsi seule l'Équation (II.27a) sera résolue par la synthèse modale non-linéaire.

A travers l'évaluation des modes non-linéaires (quantités Φ et λ) comme présenté à la Section II.3.2, la solution de (II.26) s'écrit sous la forme,

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} \left(\sum_i \phi_i (|q_{tip}|) q_i e^{i\omega t} + c.c \right) \quad \text{(II.28)}$$

où i est un indice de sommation sur les modes non-linéaires à considérer, ϕ_i correspond au mode i

normalisé (voir Équation (II.25)). Le déplacement en tête de pale est obtenu en sommant les coordonnées généralisées

$$q_{\text{tip}} = \left| \sum_i q_i \right|. \quad (\text{II.29})$$

Nous notons ϕ , la matrice ordonnant les vecteurs non-linéaires ϕ_i en colonnes. De même, \mathbf{q} correspond au vecteur inconnu regroupant les coordonnées généralisées, la solution s'écrit

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} (\phi (|q_{\text{tip}}|) \mathbf{q} e^{i\omega t} + c.c.). \quad (\text{II.30})$$

En substituant le coefficient \mathbf{c}_1 dans (II.27a) par $\frac{1}{2} (\phi (|q_{\text{tip}}|) \mathbf{q})$ et en orthogonalisant le système par rapport à la base non-linéaire ϕ , nous obtenons

$$\bar{\phi}^T (-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \phi \mathbf{q} + \bar{\phi}^T \langle \mathbf{f}_{\text{nl}}, e^{i\omega t} \rangle = \bar{\phi}^T \langle \mathbf{f}_{\text{ext}}, e^{i\omega t} \rangle, \quad (\text{II.31})$$

où la dépendance en q_{tip} a été enlevée pour simplifier les équations. Pour diminuer le temps de calcul de la résolution du système, la projection des forces non-linéaires sur le premier harmonique est substituée à partir du calcul du mode non-linéaire (II.22a). Pour un mode non-linéaire i , nous avons $\lambda_i (|q_{\text{tip}}|) = -\beta_i + i\omega_i$,

$$\langle \mathbf{f}_{\text{nl},i}, e^{i\omega t} \rangle = - [\lambda_i^2 \mathbf{M} + \lambda_i \mathbf{C} + \mathbf{K}] \phi_i q_i, \quad (\text{II.32})$$

où la dépendance de λ par rapport à q_{tip} a été omise par soucis de lisibilité. Notons que même si seul le premier harmonique des forces non-linéaires est utilisé, ce dernier a été évalué en prenant en compte plus d'harmoniques que dans le calcul de la réponse forcée (II.30). En créant la matrice λ diagonale par bloc contenant les valeurs $(\lambda_i)_i$ pour les différents modes non-linéaires considérés, nous avons

$$\langle \mathbf{f}_{\text{nl}}, e^{i\omega t} \rangle = - (\mathbf{M} \phi \lambda^2 + \mathbf{C} \phi \lambda + \mathbf{K} \phi) \mathbf{q}. \quad (\text{II.33})$$

En substituant ce terme dans (II.31) nous avons finalement

$$\bar{\phi}^T \left[(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \phi - (\mathbf{M} \phi \lambda^2 + \mathbf{C} \phi \lambda + \mathbf{K} \phi) \right] \mathbf{q} = \bar{\phi}^T \langle \mathbf{f}_{\text{ext}}, e^{i\omega t} \rangle. \quad (\text{II.34})$$

Comme ϕ et λ dépendent de \mathbf{q} , la résolution du système précédent nécessite l'utilisation d'un algorithme type Newton-Raphson.

Notons que la synthèse suppose plusieurs approximations :

- La solution est cherchée sous forme mono-harmonique (II.30). Une synthèse multi-harmoniques est envisageable mais la précision de la solution ne s'en trouve que très peu améliorée. Notons que le mode non-linéaire a été évalué avec plusieurs harmoniques, et donc qu'un couplage s'est opéré lors de son évaluation. Ainsi le vecteur ϕ_i contient l'influence des harmoniques supérieurs.
- Les forces non-linéaires ont été substituées via le mode non-linéaire dont la fréquence ne correspond pas nécessairement à la pulsation de la force d'excitation ω .

Pour restituer le déplacement sur l'ensemble de la structure et notamment au niveau du contact, il est possible d'interpoler les harmoniques supérieurs à 1 du mode non-linéaire à partir de la coordonnée généralisée \mathbf{q} obtenue.

Comme nous le verrons plus tard, ces approximations (en plus de celles du mode complexe non-linéaire) donnent de très bons résultats dans le cas d'une non-linéarité de frottement. En revanche dans le cas d'une non-linéarité géométrique, cette synthèse ne permet pas de capturer des phénomènes telles que des résonances internes. Pour pallier cette difficulté, une synthèse multi-harmoniques avec une ré-évaluation des forces non-linéaires devrait être envisagée [130]. Une telle approche autoriserait du

couplage entre les différents modes non-linéaires. Une autre possibilité consisterait à calculer le mode non-linéaire avec les différentes branches de bifurcation. Pour cette approche, il faudrait alors faire une interpolation et une synthèse branche par branche pour éviter des problèmes de bijectivité lors de l'interpolation du mode non-linéaire.

Plus récemment, Krack [71] a proposé une extension de la synthèse modale non-linéaire pour des structures non-linéaires attachées à de petits systèmes de types électrique, magnétique, acoustique, etc.

5 Condensation sur les degrés de liberté non-linéaires relatifs

5.1 Calcul de la matrice de rigidité dynamique

Dans le cadre d'une non-linéarité de frottement, une réduction du système sur les degrés de liberté de contact est souvent appliquée. Pour simplifier les notations, la matrice de rigidité dynamique \mathbf{Z}_n est définie par

$$\mathbf{Z}_n = (in\omega)^2 \mathbf{M}_f + in\omega \mathbf{C}_f + \mathbf{K}_f. \quad (\text{II.35})$$

L'indice a correspond aux degrés de liberté linéaires (ou les modes internes) tandis que l'indice c indique des degrés de liberté de contact. Considérons deux structures (par exemple une pale et un disque comme représenté en Figure II.2). Pour un harmonique n , l'Équation (I.50) de chacun de ces solides s'écrit sous la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{n,aa} & \mathbf{Z}_{n,ac} \\ \mathbf{Z}_{n,ca} & \mathbf{Z}_{n,cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{n,a} \\ \mathbf{c}_{n,c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_{f_{nl},n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{f_{ext,n,a}} \\ \mathbf{c}_{f_{ext,n,c}} \end{bmatrix}. \quad (\text{II.36})$$

Les degrés de liberté linéaires peuvent s'exprimer à partir des degrés de liberté non-linéaires (premier bloc d'équations)

$$\mathbf{c}_{n,a} = (\mathbf{Z}_{n,aa})^{-1} (\mathbf{c}_{f_{ext,n,a}} - \mathbf{Z}_{n,ac} \mathbf{c}_{n,c}). \quad (\text{II.37})$$

En injectant ce terme dans le second bloc du système (II.36), nous avons la réduction

$$\mathbf{Z}_{n,red} \mathbf{c}_{n,c} + \mathbf{c}_{f_{nl},n} = \mathbf{c}_{f_{red,n}}, \quad (\text{II.38})$$

avec $\mathbf{Z}_{n,red} = \mathbf{Z}_{n,cc} - \mathbf{Z}_{n,ca} (\mathbf{Z}_{aa})^{-1} \mathbf{Z}_{n,ac}$ et $\mathbf{c}_{f_{red,n}} = \mathbf{c}_{f_{ext,n,c}} - \mathbf{Z}_{n,ca} (\mathbf{Z}_{aa})^{-1} \mathbf{c}_{f_{ext,n,a}}$. Cette réduction condense donc le système d'équations de chacune des structures sur leurs degrés de liberté non-linéaire respectifs. Une condensation sur les degrés de liberté de contact relatif est ensuite effectuée. Les indices $\{1, 2\}$ dénotent les numéros des solides; par la suite l'indice n de l'harmonique sera enlevé pour une meilleure lisibilité. D'après le principe d'action-réaction, la force non-linéaire sur le deuxième solide est égale à l'opposée de la force sur le premier solide,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{red,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{red,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{c,1} \\ \mathbf{c}_{c,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{f_{nl},1} \\ -\mathbf{c}_{f_{nl},1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{f_{red,1}} \\ \mathbf{c}_{f_{red,2}} \end{bmatrix}. \quad (\text{II.39})$$

En définissant la matrice $\mathbf{P}^T = [\mathbf{I}, -\mathbf{I}]$, les coordonnées de contact relatives sont égales à

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_r &= \mathbf{P}^T \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{c,1} \\ \mathbf{c}_{c,2} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{P}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{red,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{red,2} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{c}_{f_{red,1}} \\ \mathbf{c}_{f_{red,2}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{f_{nl},1} \\ -\mathbf{c}_{f_{nl},1} \end{bmatrix} \right) \\ &= \mathbf{P}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{red,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{red,2} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{c}_{f_{red,1}} \\ \mathbf{c}_{f_{red,2}} \end{bmatrix} - \mathbf{P} \mathbf{c}_{f_{nl},1} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

Donc finalement le système réduit s'écrit

$$\mathbf{Z}_r \mathbf{c}_r + \mathbf{c}_{f_{nl}} = \mathbf{c}_{f_r}, \quad (\text{II.41})$$

où l'indice 1 sur les forces non-linéaires a été enlevé pour plus de lisibilité et avec

$$\mathbf{Z}_r = \left(\mathbf{P}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{\text{red},1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{\text{red},2} \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{P} \right)^{-1} \quad (\text{II.42a})$$

$$\mathbf{c}_{f_r} = \mathbf{Z}_r \mathbf{P}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{\text{red},1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{\text{red},2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{f_{\text{red},1}} \\ \mathbf{c}_{f_{\text{red},2}} \end{bmatrix}. \quad (\text{II.42b})$$

5.2 Restitution du déplacement

Une fois le système (II.41) résolu, il est possible d'évaluer les déplacements des nœuds des structures par le processus inverse. Le vecteur solution \mathbf{c}_r permet de trouver le terme $\mathbf{c}_{f_{nl}}$ via (II.41). On ré-injecte les forces non-linéaires dans l'Équation (II.38) pour trouver le terme $\mathbf{c}_{n,c}$. Les déplacements des degrés de liberté linéaires, $\mathbf{c}_{n,a}$, s'obtiennent en utilisant la relation (II.37).

Dans le cas de mouvement de corps rigides, l'inversion de la matrice \mathbf{Z}_{red} peut poser problème. L'Annexe B propose une technique pour passer outre ce problème numérique. Une extension au cas trois solides (par exemple pale, amortisseur et disque) est également proposée. L'évaluation du mode complexe non-linéaire proposée en Section II.3.2 utilise également cette réduction. Les détails de l'implémentation du code numérique pour l'évaluation du résidu à minimiser (solution de (II.41)) et de la matrice jacobienne associée sont proposés en Annexe C.

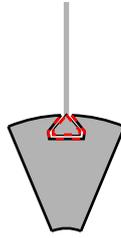


FIGURE II.2 – Représentation d'un contact pale disque en pointillé rouge.

6 Sous-structuration non-linéaire à interfaces fixes : la CNCMS

De nombreuses méthodes de réduction ont été proposées pour des structures linéaires désaccordées et utilisent, entre autre, le concept de sous-structuration défini à la Section II.1. Bien que le changement de variables sur les composantes cycliques ne soient pas aussi efficaces que pour une structure à symétrie cyclique, leurs propriétés ont été utilisées pour de nombreuses méthodes de réduction comme la SNM [175], la FNM [32]. Les méthodes CMM [88] et IMM [167] sont actuellement largement utilisées pour des modèles éléments finis avec du désaccordage aléatoire. Celui-ci est généralement modélisé par une loi gaussienne sur un paramètre du modèle (voir Section I.5.2). Pour traiter du désaccordage intentionnel, différentes méthodes ont été définies comme dans [101] mais aussi la PRIME [95] ou encore plus récemment la PRISM [142]. Généralement le désaccordage intentionnel est modélisé par des géométries différentes de secteurs. Le papier de Yuan et al. [177] passe en revue les différentes méthodes existantes et leur performances.

Dans ce manuscrit, nous nous intéressons à des structures non-linéaires désaccordées. Différentes méthodes ont été définies pour réaliser des études paramétriques : [153] propose une approche basée sur

une base de réduction avec des conditions de glissement successives, [99] établit une stratégie pour traiter de faibles désaccordage, [127] développe une approche pour des modèles avec des talons, et l'étend dans un cadre général dans [129]. Afin de réaliser des études stochastiques non-paramétriques, des outils ont été développés [19, 105] et traitent de structures avec des non-linéarités géométriques. Dans ce travail de thèse nous utilisons un outil interne au laboratoire du LTDS appelé la méthode *Component Nonlinear Complex Mode Synthesis* (CNCMS). Joannin et al. [64] ont développé cette méthode pour résoudre des systèmes cycliques en présence de désaccordage (aléatoire ou intentionnel) avec des non-linéarités de frottement. La méthode se base principalement sur les travaux de [3] mais également de [76, 84]. Le concept utilise trois réductions distinctes : une méthode de sous-structuration avec l'utilisation de la méthode de Craig-Bampton (voir Section II.1) une méthode de réduction non-linéaire via les modes complexes non-linéaires (voir Section II.3.2) et une double synthèse modale (voir Section II.2). Ces trois étapes sont présentées ci-dessous. Cette méthode a montré de très bonnes performances pour des modèles simples [66] et des modèles en éléments finis [67].

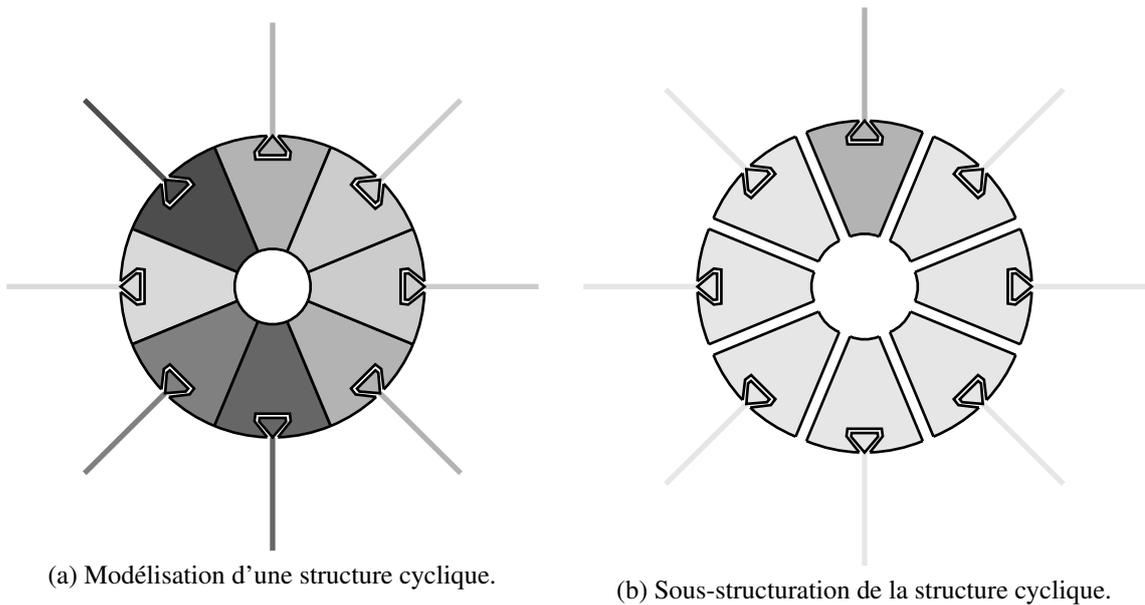


FIGURE II.3 – Sous-structuration de la structure cyclique.

6.1 Première réduction : sous-structuration

Considérons une structure cyclique avec N secteurs (voir Figure II.3a). Ces secteurs peuvent être différents les uns des autres via un désaccordage intentionnel et/ou un désaccordage aléatoire. Le désaccordage aléatoire n'est pas pris en compte dans le modèle éléments finis et n'est seulement introduit que dans la synthèse finale de la méthode (via une perturbation sur les fréquences propres du système). Le désaccordage intentionnel est, quant à lui, pris en compte dans la phase de modélisation. Ainsi les N secteurs se décomposent en M types de secteurs désaccordés et chacun de ces types est répété m_i fois,

$$\sum_{i=1}^M m_i = N. \quad (\text{II.43})$$

Pour chaque type de secteur i , une sous-structuration du système est effectuée (voir Figure II.3b) via une réduction de de Craig-Bampton. Les nœuds maîtres regroupent les nœuds de contact (afin de prendre en compte la loi de contact), les nœuds de frontières de symétrie cyclique (pour assembler les secteurs), et un nœud dit d'observation (généralement en tête de pale). Le nombre de modes dynamiques

est choisi suivant un critère fréquentiel classique [45]. Cette étape est illustrée à la Figure II.4 et se traduit en terme d'équation pour chacun des secteurs par

$$\mathbf{u}_{r,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix} = \mathbf{R}_1 \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_r & \boldsymbol{\Psi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix}, \quad (\text{II.44})$$

avec \mathbf{u}_s , les degrés de liberté esclaves et $\mathbf{u}_m = [u_{\text{obs}}, \mathbf{u}_{\text{nl}}^T, \mathbf{u}_{\text{fr}}^T]^T$, les degrés de liberté maîtres.

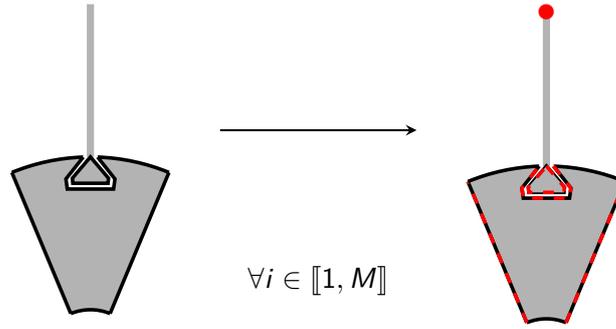


FIGURE II.4 – Réduction de Craig-Bampton linéaire.

6.2 Seconde réduction : mode non-linéaire

Une fois que chaque type de secteur ait été réduit par la méthode de Craig-Bampton, une seconde étape de réduction non-linéaire est effectuée. Celle-ci consiste en un Craig-Bampton non-linéaire : des modes complexes non-linéaires sont calculés avec des frontières encastées pour chaque type de secteur i . Les modes non-linéaires sont évalués en augmentant progressivement l'amplitude du nœud d'observation comme décrit à la Section II.3.2. L'amplitude maximale, pour laquelle le mode non-linéaire est calculé, doit être choisie de manière judicieuse : elle doit être suffisamment élevée pour bien représenter l'ensemble du mode considéré mais ne doit pas être choisie trop importante afin d'éviter des temps de calcul prohibitifs. Pour ce choix, on peut se baser sur l'amplitude de la réponse forcée linéaire (pour le niveau d'excitation d'intérêt). Ces modes non-linéaires sont ensuite complétés avec des modes linéaires statiques de liaison en imposant un déplacement unitaire sur chacun des nœuds de la frontière de symétrie cyclique. Ainsi les nœuds maîtres de ce Craig-Bampton non-linéaire correspondent aux nœuds de frontière tandis que les modes dynamiques correspondent aux modes non-linéaires pilotés par le nœud d'observation. Cette étape est schématisée sur la Figure II.5 et se traduit en terme d'équation par

$$\mathbf{u}_{r,2} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix} = \mathbf{R}_2 \begin{bmatrix} q_{\text{obs}} \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_r(|q_{\text{obs}}|) & \boldsymbol{\Psi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{\text{obs}} \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix}, \quad (\text{II.45})$$

avec \mathbf{u}_s les degrés de liberté de contact et les modes internes issus de la première réduction de Craig-Bampton et $\mathbf{u}_m = [\mathbf{u}_{\text{fr}}]^T$ les degrés de liberté de frontières. Tandis que le vecteur $\boldsymbol{\Psi}$ est obtenu via (II.7), le vecteur $\boldsymbol{\phi}_r(|q_{\text{obs}}|)$ correspond au premier harmonique normalisé du mode non-linéaire (voir Section II.3.2 et particulièrement l'Équation (II.25)) pour le secteur encasté,

$$[\lambda^2 \mathbf{M}_e + \lambda \mathbf{C}_e + \mathbf{K}_e] \mathbf{c}_1 + \langle \mathbf{f}_{\text{nl}}, e^{i\omega t} \rangle = \mathbf{0}, \quad (\text{II.46})$$

avec \mathbf{M}_e , \mathbf{C}_e et \mathbf{K}_e les matrices réduites du secteur encasté considéré.

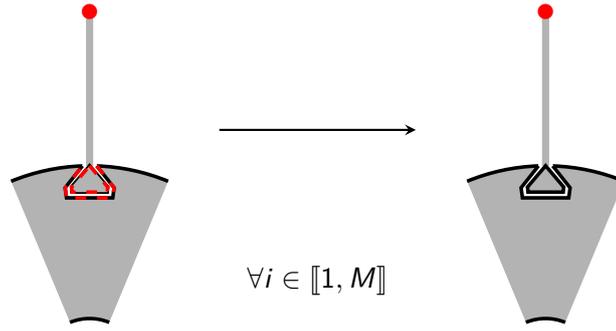


FIGURE II.5 – Réduction via le mode non-linéaire.

6.3 Troisième réduction : double synthèse modale

A la suite du calcul des modes non-linéaires pour chaque type de secteurs, la structure est ré-assemblée via les nœuds de frontières. Une double synthèse modale est alors effectuée (voir Section II.2) et les nœuds de frontière sont réduits. La Figure II.6 représente cette étape de réduction. En ré-ordonnant les nœuds suivant $\mathbf{u}_{r,2} = [\mathbf{q}^T, \mathbf{u}_{fr}^T]^T$ avec \mathbf{q} l'ensemble des nœuds d'observations pour les N secteurs, la réduction s'écrit

$$\mathbf{u}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{u}_{fr} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{3,t} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix}, \quad (\text{II.47})$$

avec $\boldsymbol{\Gamma}$ la matrice contenant les modes d'interfaces.

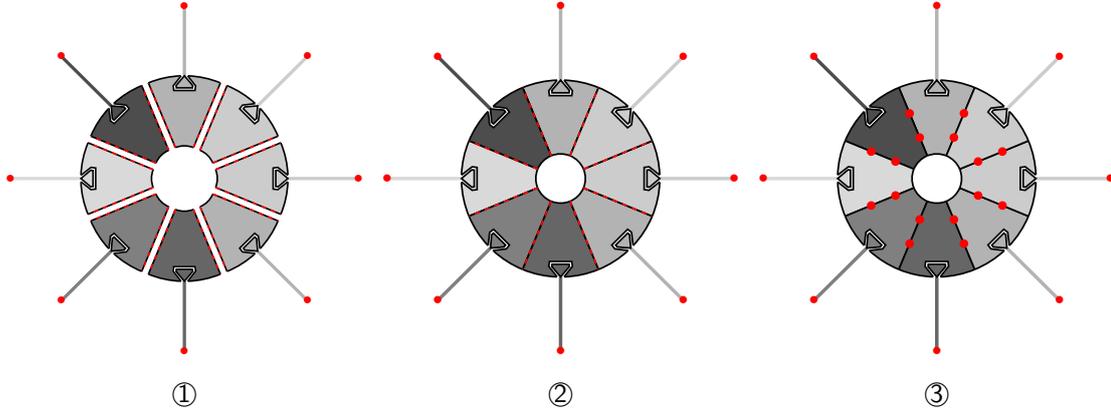


FIGURE II.6 – Assemblage (1-2) puis réduction (2-3) par modes d'interfaces.

6.4 Synthèse, substitution des forces non-linéaires et prise en compte du désaccordage aléatoire

Finalement, le déplacement total sur tous les secteurs se réduit en

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}_{1,t} \mathbf{R}_{2,t} \mathbf{R}_{3,t} \mathbf{u}_r, \quad (\text{II.48})$$

où $\mathbf{R}_{1,t}$ et $\mathbf{R}_{2,t}$ sont les matrices issues des deux premières réductions étendues au système complet (répétition des secteurs et assemblage). Il s'en suit une synthèse modale non-linéaire : en substituant cette réduction (II.48) dans l'équation du mouvement (I.40) puis en projetant sur les matrices de réduction et en appliquant la HBM avec un harmonique, nous avons

$$(-\omega^2 \mathbf{M}_r + i\omega \mathbf{C}_r + \mathbf{K}_r) \mathbf{c}_{1,r} + \mathbf{R}_3^T \mathbf{R}_{2,t}^T \mathbf{R}_{1,t}^T \langle \mathbf{f}_{nl}, e^{i\omega t} \rangle = \mathbf{R}_3^T \mathbf{R}_{2,t}^T \mathbf{R}_{1,t}^T \langle \mathbf{f}_{ext}, e^{i\omega t} \rangle, \quad (\text{II.49})$$

avec $\mathbf{c}_{1,r}$ l'harmonique principal de \mathbf{u}_r . Comme pour la synthèse modale non-linéaire expliquée en Section II.4, les forces non-linéaires sont substituées via les calculs des modes non-linéaires avec interfaces fixes (voir la réduction II.6.2)

$$\langle \mathbf{f}_{nl}, e^{i\omega t} \rangle = - [\lambda^2 \mathbf{M}_e + \lambda \mathbf{C}_e + \mathbf{K}_e] \boldsymbol{\phi}_r(|q_{obs}|) q_{obs}. \quad (\text{II.50})$$

Dans [67], le désaccordage aléatoire est introduit dans l'Équation (II.50). La partie imaginaire des valeurs propres λ est perturbée suivant une loi normale de paramètre σ (écart type qui représente le taux de désaccordage) et μ (l'espérance qui est égale à la fréquence linéarisée du mode non-linéaire étudié). Cette méthode compacte permet de faire de nombreuses simulations et études paramétriques (variation du taux de désaccordage, variation de la force d'excitation, etc.).

6.5 Validation sur un modèle éléments-finis

La méthode CNCMS a été validée numériquement sur un modèle masses-ressorts dans [66] mais aucune validation n'a été faite sur un modèle éléments finis. Le but de cette section est de répondre à cette lacune. Pour cela, nous utilisons un modèle de turbine simple avec des pales droites, qui sera par la suite appelé TurboTopo Simple.

6.5.1 Présentation du cas test

Le secteur est formé d'une portion de disque de diamètre 100 mm et d'une pale de longueur 60 mm. Les deux éléments sont attachés via une queue d'aronde. Ce modèle a déjà été étudié à différentes occasions comme dans [87] pour une étude en usure. Dans l'étude qui suit, le nombre de pales varie entre $\{6, 12, 18, 24\}$. Chaque zone de contact est discrétisée avec 15 noeuds (zone rectangulaire de taille 3×5). Avec trois degrés de liberté par noeud et deux zones de contact par secteur, chaque modèle contient 180 degrés de liberté non-linéaire par secteur. La Figure II.7a représente le modèle pour $N = 24$ secteurs. Le secteur fondamental associé (voir Figure II.7b) est composé de 25920 degrés de liberté. Les zones de contact sont mises en évidence par des surfaces vertes sur les Figures II.7c et II.7d. Le système est en rotation avec une vitesse de $\Omega = 1000 \text{ rad s}^{-1}$ ce qui donne lieu à une précharge centrifuge. Les effets gyroscopique sont supposés négligeables et ne sont pas pris en compte dans les calculs. Le moyeu du disque est encastré. Une excitation de type onde tournante est appliquée en tête de pale avec une amplitude de 0.32 N. Le nombre d'onde est choisi arbitrairement pour chaque valeur de N et sera précisé dans les simulations. Des résultats similaires ont été obtenus dans le cas d'une excitation stationnaire mais ne sont pas représentés ici dans un souci de concision. Les effets non-linéaires sont modélisés par la procédure DLFT avec un coefficient de frottement de $\mu = 0.3$.

Les différentes réductions de la CNCMS sont appliquées sur le secteur et sont schématisées sur la Figure II.8. La CNCMS est comparée à une méthode de référence décrite ci-dessous.

Le secteur fondamental est réduit suivant une procédure de Craig-Bampton (voir Section II.1) et est identique à la première étape de la CNCMS. Pour le cas linéaire sous-jacent, les secteurs sont ensuite assemblés sur leur frontières. Ce modèle est appelé modèle complet par la suite (et est schématisé dans la colonne de gauche de la Figure II.8). Une résolution non-linéaire de ce modèle n'est en revanche pas possible en des temps raisonnables. Une seconde réduction de Craig-Bampton est donc appliquée pour réduire les frontières. Cette étape ajoute des approximations supplémentaires mais est tout de même appelée méthode de référence pour les systèmes non-linéaires car suffisamment de modes de Craig-Bampton sont conservés. Cette méthode est schématisée sur la colonne du milieu de la Figure II.8.

La Figure II.9 fournit le diagramme à points du système pour $N = 24$. La première famille modale du mode de flexion, 1F, sera étudiée et donc l'excitation aura une pulsation proche de ses fréquences. Pour cette plage d'étude, les nombres de modes de Craig-Bampton, de modes d'interfaces, et de modes non-linéaires ont pu être choisis et sont fournis au Tableau II.1. Le Tableau II.2 fournit les temps de

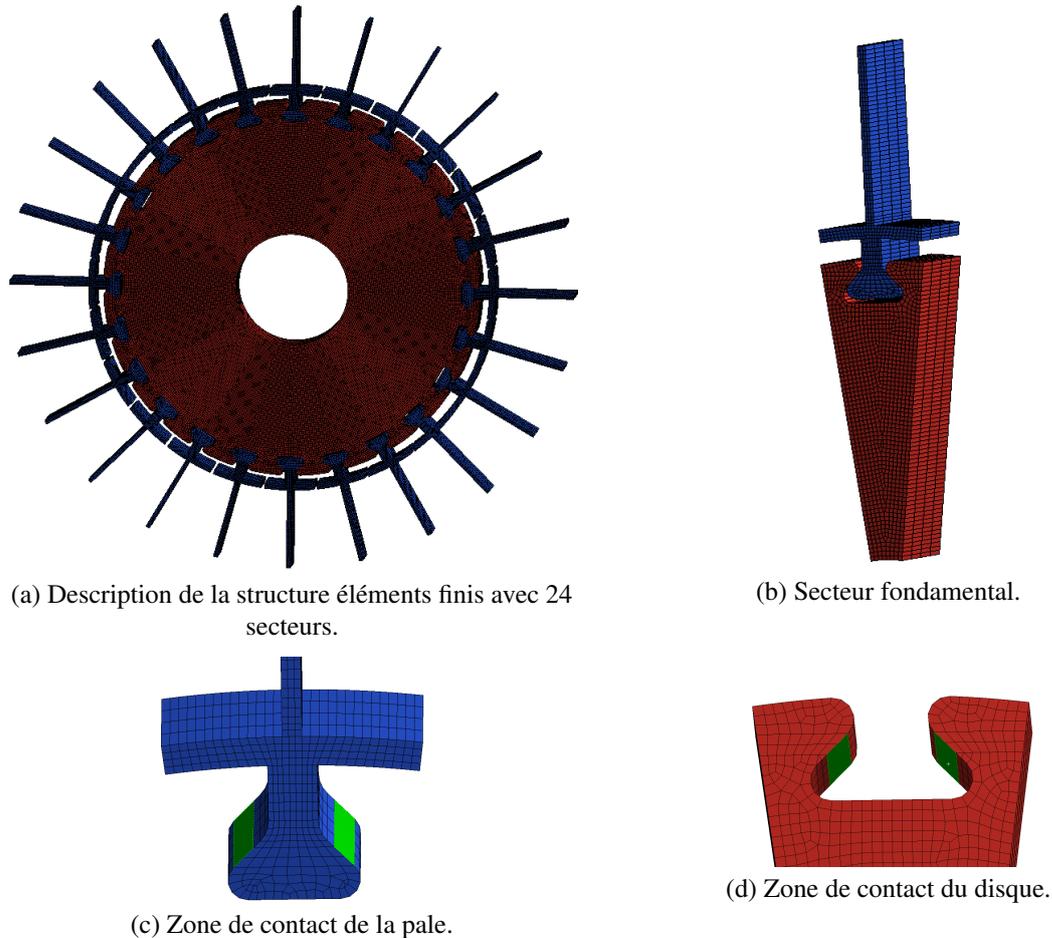


FIGURE II.7 – Maillage du TurboTopo Simple.

calcul de réduction pour chacune des méthodes (toujours associées au cas $N = 24$). La procédure de Craig-Bampton entre les états 0-1 n'a été réalisée qu'une seule fois avec le logiciel Ansys pour toutes les méthodes. La seconde procédure de Craig-Bampton employée pour la méthode de référence a été réalisée via le logiciel Matlab et a nécessité un serveur de calcul avec plusieurs dizaines de gigaoctets de mémoire pour stocker les matrices. Cette étape requiert davantage de temps de calcul que le logiciel Ansys car ce dernier a des procédures d'optimisation très avancées pour la réduction de Craig-Bampton. Le mode complexe pour la CNCMS (entre les états 2-3) a été évalué avec $N_h = 3$.

État	Complet	Référence	CNCMS
Etat 0-1	40 modes internes	40 modes internes	40 modes internes
Etat 2-3	-	600 modes internes	1 MNL avec interfaces fixes
Etat 3-4	-	-	400 modes d'interfaces

TABLEAU II.1 – Valeurs des modes réduits pour le modèle complet, de référence et pour la CNCMS.

La HBM est employée avec $N_h = 3$ (qui est un bon compromis entre précision et temps de calcul, et est largement utilisée dans la littérature, comme dans [87, 118] pour des modèles éléments finis) pour le calcul du mode non-linéaire de la CNCMS et pour la méthode de référence.

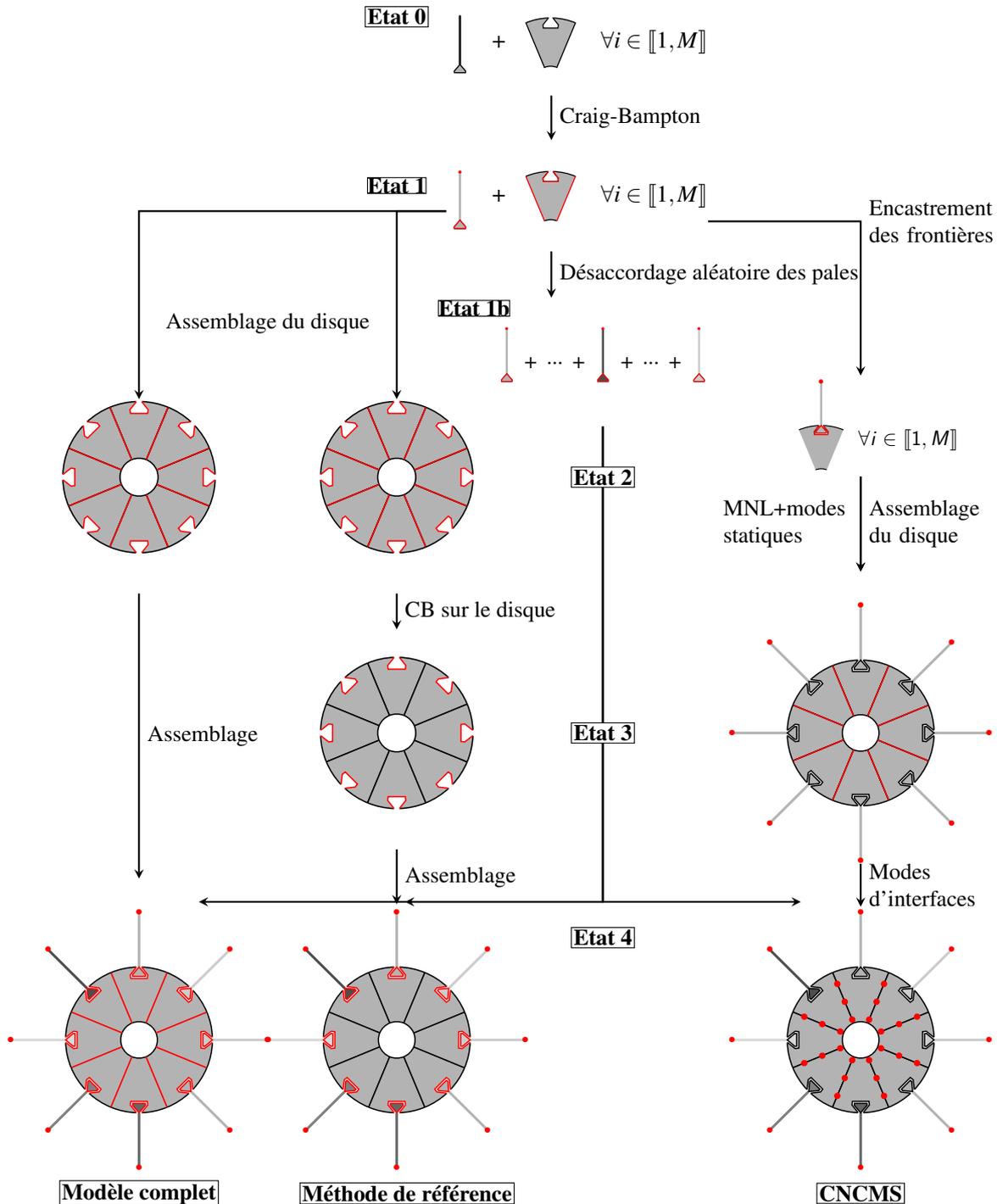


FIGURE II.8 – Description des méthodes de référence et de la CNCMS.

6.5.2 Résultats numériques

Simulation numérique linéaire Une simulation linéaire est tout d'abord effectuée avec le logiciel commercial Ansys pour le cas $N = 24$ avec une excitation de nombre d'onde $h_{ex} = 3$. Figure II.10a représente l'amplitude du déplacement en tête de pale sur plage fréquentielle recouvrant les trois premiers modes (voir Figure II.9).

La Figure II.10b représente les réponses linéaires des différentes méthodologies. Aucun écart est observé et témoigne que les réductions choisies au Tableau II.1 sont pertinentes. Si le mode d'étude

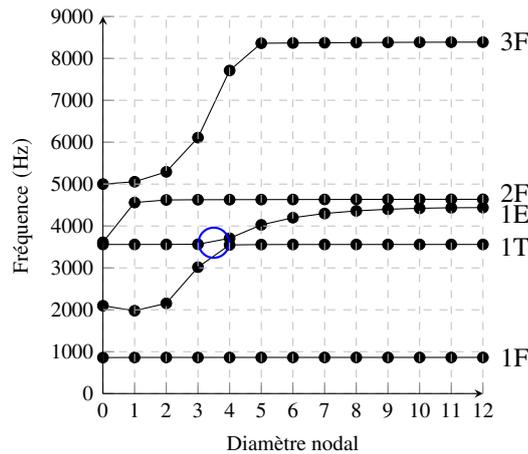


FIGURE II.9 – Diagramme fréquence-diamètres du cas test TurboTopo Simple.

État	Modèle complet		Modèle de référence		CNCMS	
	Inconnues	Temps	Inconnues	Temps	Inconnues	Temps
États 0-1						
Pale	7650→133	3 s (*)	7650→133	3 s (*)	7650→133	3 s (*)
Disque	18270→2260	40 s (*)	18270→2260	40 s (*)	18270→2260	40 s (*)
États 1-2						
Disque	2260→28680	3 s	2260→28680	3 s	2260→130	≈ 0
États 2-3						
Secteur (Φ)	-	-	-	-	263→ 1	10 min
Secteur (Ψ)	-	-	-	-	2130→ 2130	1 s
Disk	-	-	28680→3720	1 h (**)	2131→25584	3 s
État 3-4						
Système	31872→ 29712	10s	-	-	25584→ 424	11 min
Final	29712	1 min	6912	1 h	424	22 min

TABLEAU II.2 – Performance des réductions des différentes méthodes. Le temps de calcul (Temps) avec une astérisque (*) correspond à une réduction effectuée sur Ansys. Les autres étapes de réduction sont effectuées sur Matlab. Les simulations ont été faites sur un ordinateur Intel(R) Core(TM) i7-7700 @ 3.6 GHz, sauf pour l'étape avec une double astérisque (**) qui nécessitait trop d'espace mémoire et qui a été lancée sur un supercalculateur Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2690 @ 2.9 GHz.

était le deuxième ou troisième mode, davantage de modes lors des réductions auraient dû être gardés.

6.6 Simulation numérique non-linéaire

Les résultats qui suivent représentent le déplacement en tête des pales en fonction de la fréquence d'excitation (autour du premier mode de flexion). La Figure II.11 illustre les résultats obtenus avec la méthode de référence et la CNCMS pour des valeurs différentes du nombre de pales et du nombre d'onde. Du fait de l'excitation tournante, chacun des secteurs a le même maximum et donc un seul niveau vibratoire est observé.

La Figure II.11 montre un comportement similaire des différentes structures : du fait du frottement et de la séparation des nœuds sur les zones de contact, l'amplitude du système non-linéaire est environ la moitié du cas linéaire. Nous pouvons remarquer que la CNCMS présente des résultats légèrement

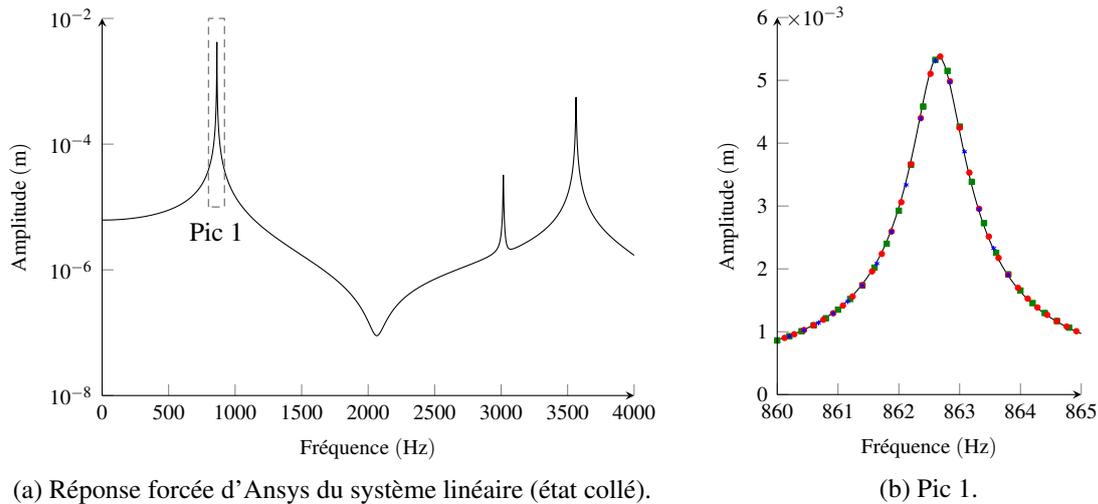


FIGURE II.10 – Réponse forcée linéaire (—) : ANSYS ; (■) : modèle complet ; (●) : méthode de référence ; (■) : CNCMS.

différents de ceux de la méthode de référence. Ces écarts augmentent avec le nombre de secteurs et sont quantifiés dans le Tableau II.3 via la formule suivante

$$\text{error} = \max_{\omega} \left(\left| \frac{u_{\text{ref}} - u_{\text{RM}}}{u_{\text{ref}}} \right| \right), \quad (\text{II.51})$$

avec u_{ref} et u_{RM} les solutions de la méthode de référence et de la CNCMS. Ces écarts peuvent provenir des différentes approximations de la CNCMS :

- Nombre de modes de Craig-Bampton insuffisant lors de la première réduction ;
- Nombre de modes non-linéaires évalués insuffisant lors de la deuxième réduction ;
- Approximation dans l'évaluation du mode complexe non-linéaire $\beta \ll \omega$;
- Relevés statiques linéaires (et non non-linéaires) dans la deuxième réduction ;
- Nombre insuffisant de modes d'interfaces lors de la troisième réduction ;
- Substitution des forces non-linéaires via le mode non-linéaire.

Via différents tests, nous avons vérifié que les nombres de modes gardés étaient suffisants pour les différentes réductions (nombres de modes de Craig-Bampton lors de la première et deuxième étapes, nombres de modes d'interfaces). L'hypothèse $\beta \ll \omega$ semble raisonnable dans notre cas et a été testée à de multiples reprises [62, 84]. Il reste donc les deux dernières hypothèses, à savoir la pertinence des relevés statiques linéaires pour représenter la dynamique non-linéaire du problème ainsi que la pertinence de la substitution des forces non-linéaires via un mode non-linéaire évalué à frontières fixes. Les résultats de la Figure II.11 indiquent qu'au plus les non-linéarités sont proches des frontières au plus les écarts en amplitude sont grands. Nous pouvons effectivement conclure que cette seconde étape de réduction est trop approximative pour notre cas. Cette limitation de la CNCMS avait été évoquée dans [66] mais jamais quantifiée. Globalement, pour des systèmes où des zones de contact sont proches des frontières de symétrie cyclique, les relevés statiques linéaires ne permettent pas de transmettre correctement la dynamique non-linéaire. De plus les forces non-linéaires substituées peuvent manquer de précision car elles ne prennent pas en compte l'influence des frontières.

Le Tableau II.4 donne les temps de calcul de la réponse forcée (FrF) et total (somme du temps de calcul de la réduction et de la réponse forcée) pour la CNCMS et la méthode de référence. Pour une configuration donnée, le mode complexe non-linéaire et les modes d'interfaces ne doivent être

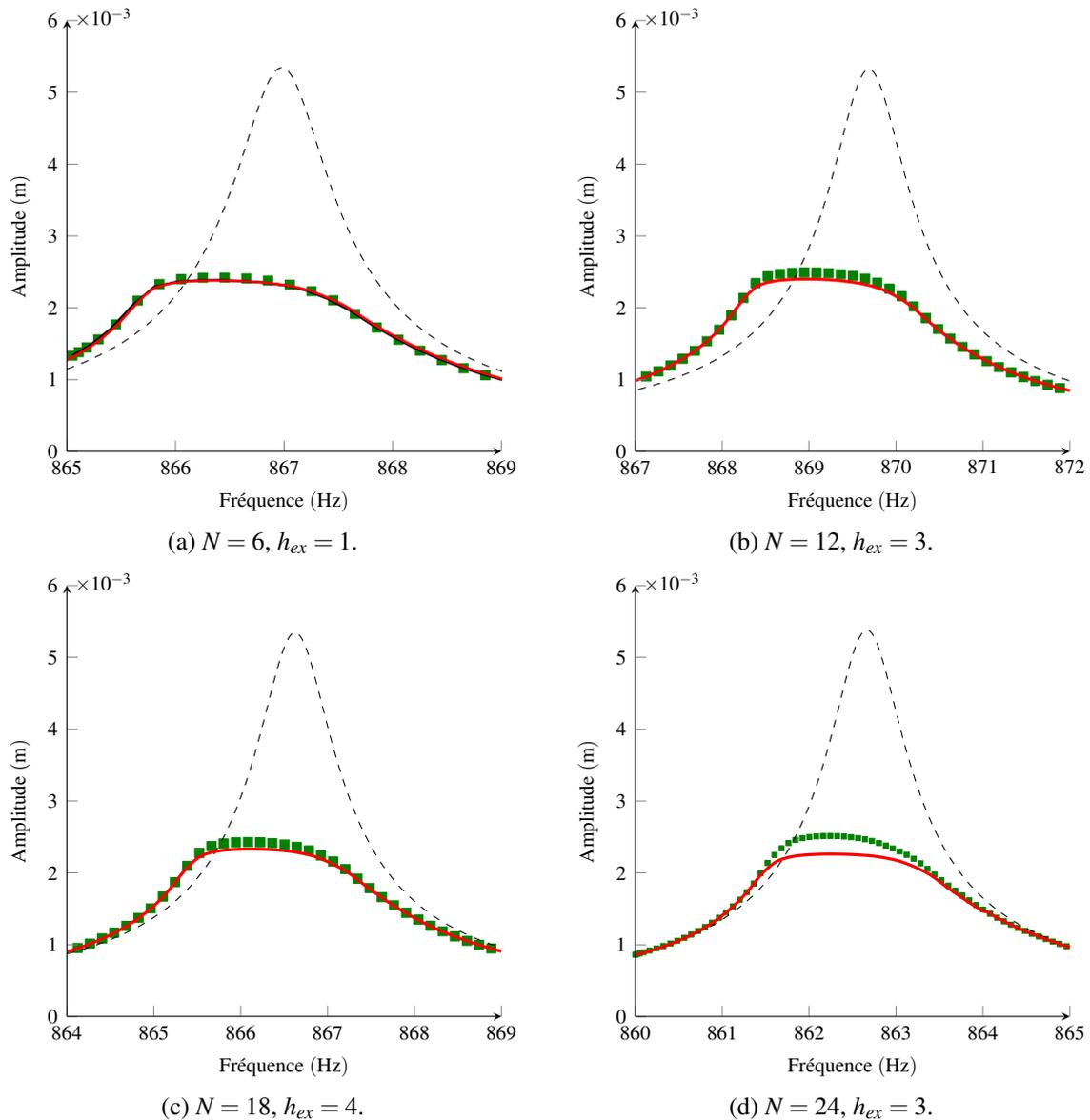


FIGURE II.11 – Réponses forcées du système soumis à une excitation tournante. (- -) : solution linéaire (état collé); (■) : solution de référence; (—) : CNCMS.

Nombre de secteurs	6	12	18	24
CNCMS	1.7%	3.6%	4.1%	10.4%

TABLEAU II.3 – Écart relatif de la CNCMS pour une excitation tournante.

évalués qu'une seule fois. L'étape de synthèse calcule la réponse forcée du système pour une excitation et un désaccordage aléatoire donné. Ainsi, pour faire des études paramétriques sur l'excitation ou le désaccordage, seule cette dernière étape est relancée (et dure environ 40 minutes pour une plage fréquentielle de 5 Hz discrétisée en environ 70 points de calcul). La méthode de référence nécessiterait, quant à elle, de relancer un calcul complet d'environ 7 heures. Le gain de la CNCMS en temps de calcul est donc considérable et permettrait d'accepter les écarts rencontrés dans une phase de pre-design.

Ces résultats ne permettent pas de conclure sur l'efficacité de la CNCMS pour tout type de structures

	CNCMS	Référence
Nombre d'inconnues	848	15120
Temps de calcul (FrF)	40 min	7 h
Temps de calcul total	1 h	8 h

TABLEAU II.4 – Temps de calcul pour la CNCMS et la méthode de référence. Les simulations sont obtenues avec un ordinateur Intel(R) Core(TM) i7-7700 @ 3.6 GHz.

non-linéaires. Nous pouvons, par exemple, penser à une configuration industrielle avec des amortisseurs sous plateformes, où ces éléments de frottement sont très proches de la frontière de symétrie cycliques et peuvent donc mettre à défaut la CNCMS.

Par conséquent, avant d'employer la CNCMS pour des études paramétriques et ou statistiques sur de tels systèmes, il peut sembler judicieux de pouvoir justifier de sa pertinence à travers une simple validation pour une simulation non-linéaire. La principale difficulté d'une telle validation vient que la méthode de référence (illustrée à la Figure II.8) n'est pas applicable pour des configurations industrielles. L'objectif du chapitre suivant sera de proposer des nouvelles méthodes de réduction applicables à des structures industrielles. Il sera montré que de telles stratégies peuvent faire office de méthodes de référence.

7 Bilan du chapitre

Ce chapitre avait pour objectif de présenter quelques méthodes de réduction précises qui seront employées dans ce manuscrit. Cela a permis de couvrir des méthodes de réduction linéaires (méthode de sous-structuration de Craig-Bampton, double synthèse modale) mais aussi non-linéaires (avec par exemple l'utilisation des modes complexes non-linéaires). Le chapitre est conclu par la présentation d'un outil du LTDS appelé la CNCMS qui traite des structures non-linéaires désaccordées. Cette méthode a été validée pour des modèles masses-ressort dans [66] mais sa validité sur des modèles éléments finis reste partielle. Le but de la section suivante sera de présenter des méthodes de réduction exactes pour des systèmes non-linéaires à symétrie cyclique. La CNCMS pourra alors être testée/validée sur des configurations industrielles.

Chapitre III

Réduction de systèmes non-linéaires à symétrie cyclique

Sommaire du chapitre

1 Approche de Petrov	48
1.1 Pour une onde tournante	48
1.2 Pour une onde stationnaire	50
2 Réduction cyclique pour des non-linéarités polynomiales	51
2.1 Analyse des résonances internes par la méthode des échelles multiples . . .	55
2.2 Analyse d'une résonance interne 1 :1 pour une forme d'onde tournante . . .	57
2.3 Résumé de l'analyse	58
2.4 Limitations de la méthode	59
3 Réduction cyclique pour des non-linéarités de frottement	59
3.1 Méthode 1 : méthode générale de réduction pour l'évaluation des forces non-linéaires	62
3.2 Méthode 2 : interaction entre diamètres nodaux couplée à la stratégie de Petrov	63
3.3 Méthode 3 : interaction entre diamètres nodaux avec l'hypothèse d'onde stationnaire	64
3.4 Capacités de réduction des différentes méthodologies	65
3.5 Limitations des méthodes	67
4 Validation des méthodologies sur un modèle masse-ressort	67
4.1 Non-linéarité polynomiale	69
4.2 Non-linéarité de frottement	72
5 Validation des méthodologies sur un modèle éléments finis	75
5.1 Cas d'une excitation tournante	76
5.2 Cas d'une excitation stationnaire	77
5.3 Performance des méthodes	80
6 Performance de la CNCMS sur un modèle éléments finis réaliste	82
6.1 Présentation du modèle réaliste : TurboTopo Vrillé	82
6.2 Résultats numériques	82
7 Bilan du chapitre	85

Ce chapitre a pour but de développer de nouvelles méthodes de réductions rigoureuses afin de traiter des structures à symétrie cyclique mettant en jeu différentes non-linéarités. Ces nouvelles méthodes ont

un usage limité car elles ne permettent pas de traiter de désaccordage (à l'inverse de la CNCMS vue dans le chapitre précédent) ou de trouver l'intégralité des solutions non-linéaires. En revanche elles peuvent être utilisées comme référence pour des structures type éléments finis afin d'étudier les performances (vitesse de calcul et précision) de méthodes de réduction non-linéaires désaccordées (comme la CNCMS par exemple).

Avant de présenter ces méthodes originales et de montrer leurs performances, une stratégie décrite dans la littérature est rappelée. Celle-ci traite de la réduction des structures non-linéaires à symétrie cyclique (aucun désaccordage n'est donc possible). Cet état de l'art est inclus dans ce chapitre du fait de son application spécifique aux structures étudiées dans ce chapitre (celles à symétrie cyclique). Notons que très peu de validations ont été proposées pour cette méthode. Par conséquent, ce chapitre offre aussi des comparaisons numériques détaillées sur l'ensemble des stratégies étudiées ici.

1 Approche de Petrov

Très peu de méthodes existent pour décrire la dynamique non-linéaire d'une structure à symétrie cyclique. La plupart des travaux sur le sujet [44, 47, 49, 165] résout le système d'équations complet (voir Équation (I.2) supplémentée des forces non-linéaires)

$$\mathbf{M}_f \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_f \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_f \mathbf{u} + \mathbf{f}_{nl} = \mathbf{f}_{ext}. \quad (\text{III.1})$$

Ce système peut être résolu avec les méthodes évoquées à la Section I.7 mais la taille des modèles (stockage des matrices structurales) et le coût numérique deviennent prohibitifs pour des modèles éléments finis.

En 2004, Petrov [119] proposa l'hypothèse que le déplacement d'une structure à symétrie cyclique soumise à un chargement dynamique tournant direct (voir Équation (I.23)) a la même forme que l'excitation,

$$\mathbf{u}_j(t) = \mathbf{u}_1 \left(t - \frac{\alpha(j-1)h_{ex}}{\omega} \right). \quad (\text{III.2})$$

Cette méthode est employée dans la littérature pour diverses études : [146] étudie le contact des talons, [87] investigate l'impact de l'usure sur la vibration tandis que [52] porte sur le fluage. Les développements de cette section se concentrent sur des excitations à onde tournante directe (des calculs similaires sont obtenus pour des ondes rétrogrades).

1.1 Pour une onde tournante

Bien que l'hypothèse (III.2) puisse être employée avec diverses méthodologies, Petrov en proposa l'utilisation avec la HBM expliquée en Section I.7. Le déplacement sur le premier secteur est cherché sous la forme

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{N_h} (\mathbf{c}_n e^{in\omega t}) + c.c \right], \quad (\text{III.3})$$

et donc via l'hypothèse (III.2)

$$\mathbf{u}_j = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{N_h} (\mathbf{c}_n e^{in\omega t} e^{-in\alpha(j-1)h_{ex}}) + c.c \right]. \quad (\text{III.4})$$

Les composantes cycliques du déplacement se déduisent de l'Équation (I.4),

$$\tilde{\mathbf{u}}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \left[\mathbf{u}_j e^{-ik(j-1)\alpha} \right]. \quad (\text{III.5})$$

En supposant que l'expansion HBM ne soit faite que pour un seul harmonique n et en remplaçant dans (I.4) le déplacement \mathbf{u}_j par l'Équation (III.2), nous avons pour chaque harmonique n

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_q &= \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \left[(\mathbf{c}_n e^{in\omega t} e^{-i\alpha(j-1)(q+nh_{ex})} + \bar{\mathbf{c}}_n e^{-in\omega t} e^{i\alpha(j-1)(-q+nh_{ex})}) \right] \\ &= \begin{cases} \frac{\sqrt{N}}{2} (\mathbf{c}_n e^{in\omega t} + \bar{\mathbf{c}}_n e^{-in\omega t}) & \text{si } q = 0 \text{ et } nh_{ex} \equiv 0 \pmod{N} \\ \frac{\sqrt{N}}{2} (\mathbf{c}_n e^{in\omega t} + \bar{\mathbf{c}}_n e^{-in\omega t}) & \text{si } q = \frac{N}{2} \text{ et } (nh_{ex}) \equiv \frac{N}{2} \pmod{N} \\ \frac{\sqrt{N}}{2} \bar{\mathbf{c}}_n e^{-in\omega t} & \text{si } (q - nh_{ex}) \equiv 0 \pmod{N}, \text{ et } q \notin \{0, \frac{N}{2}\} \\ \frac{\sqrt{N}}{2} \mathbf{c}_n e^{in\omega t} & \text{si } (q + nh_{ex}) \equiv 0 \pmod{N}, \text{ et } q \notin \{0, \frac{N}{2}\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{III.6}) \end{aligned}$$

Dans un cadre linéaire, seul le premier harmonique est utile ($N_h = 1$) et celui-ci est associé au diamètre correspondant au nombre d'onde de l'excitation. Dans le cadre non-linéaire actuel, plusieurs harmoniques sont pris en compte. L'hypothèse d'onde tournante revient finalement à considérer une excitation extérieure de pulsation fondamentale ω et multi-harmonique. Chaque harmonique multiplie le nombre d'onde de l'excitation et le diamètre correspondant doit être gardé dans la résolution du système. En pratique, l'utilisateur de la méthode fournit la liste des harmoniques à considérer (n varie de 0 à la valeur N_h) et évalue pour chaque harmonique le reste de la division euclidienne de (nh_{ex}) par N pour déterminer q . Pour chaque harmonique n , une seule valeur de q est obtenue. En revanche un diamètre q peut être piloté par plusieurs harmoniques dont l'ensemble est noté \mathcal{N}_q . Une table de correspondance entre les harmoniques n et les diamètres q est ainsi obtenue. L'ensemble des diamètres en interaction est noté $\mathcal{F}_{\text{interact}}$. Pour faciliter la compréhension de cette méthode, un exemple est fourni à la fin de cette section. Finalement la composante cyclique $q \in \mathcal{F}_{\text{interact}}$ s'écrit

$$\tilde{\mathbf{u}}_q = \begin{cases} \sum_{n \in \mathcal{N}_q} \frac{\sqrt{N}}{2} \bar{\mathbf{c}}_n e^{-in\omega t} \text{ ou } \sum_{n \in \mathcal{N}_q} \frac{\sqrt{N}}{2} \mathbf{c}_n e^{in\omega t} & \text{si } q \in \llbracket 1, M \rrbracket \\ \sum_{n \in \mathcal{N}_q} \frac{\sqrt{N}}{2} (\mathbf{c}_n e^{in\omega t} + \bar{\mathbf{c}}_n e^{-in\omega t}) & \text{si } q \in \{0, \frac{N}{2}\}, \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

avec $M = \frac{N}{2} - 1$ si N est pair et $M = \frac{N-1}{2}$ sinon. Le système (I.41) qui régit la dynamique de la structure dans l'espace cyclique est donc simplifié en

$$\tilde{\mathbf{M}}_q \ddot{\mathbf{u}}_q + \tilde{\mathbf{C}}_q \dot{\mathbf{u}}_q + \tilde{\mathbf{K}}_q \mathbf{u}_q + \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl},q}(\tilde{\mathbf{u}}) = \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext},q}, \quad \forall q \in \mathcal{F}_{\text{interact}}. \quad (\text{III.8})$$

En appliquant la HBM sur le système (substitution de (III.7) dans (III.8) et orthogonalisation par rapport au produit scalaire (I.48)), nous obtenons le système

$$\left[(in\omega)^2 \tilde{\mathbf{M}}_q - (in\omega) \tilde{\mathbf{C}}_q + \tilde{\mathbf{K}}_q \right] \frac{\sqrt{N}}{2} \bar{\mathbf{c}}_n + \langle \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl},q}, e^{-in\omega t} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext},q}, e^{-in\omega t} \rangle \quad \forall q \in \mathcal{F}_{\text{interact}}, \forall n \in \mathcal{N}_q. \quad (\text{III.9})$$

La projection des forces non-linéaires cycliques sur la base exponentielle est obtenue par la procédure AFT [12]. Les forces non-linéaires sur le premier secteur sont cherchées sous forme de série de Fourier

$$\mathbf{f}_{nl,1}(t) = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{N_h} (\mathbf{c}_{f_{nl},n} e^{in\omega t}) + c.c. \right]. \quad (\text{III.10})$$

Du fait de l'hypothèse (III.2), les forces non-linéaires respectent la même forme

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{nl,j}(t) &= \mathbf{f}_{nl}(\dot{\mathbf{u}}_j(t)) \\ &= \mathbf{f}_{nl} \left(\dot{\mathbf{u}}_1 \left(t - \frac{\alpha(j-1)h_{ex}}{\omega} \right) \right) \\ &= \mathbf{f}_{nl,1} \left(t - \frac{\alpha(j-1)h_{ex}}{\omega} \right). \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Finalement le terme $\langle \tilde{\mathbf{f}}_{nl,q}, e^{-in\omega t} \rangle$ est obtenu par les mêmes calculs que $\tilde{\mathbf{u}}_q$ (voir Équation (III.7)),

$$\tilde{\mathbf{f}}_{nl,q} = \begin{cases} \sum_{n \in \mathcal{N}_q} \frac{\sqrt{N}}{2} \bar{\mathbf{c}}_{f_{nl},n} e^{-in\omega t} \text{ or } \sum_{n \in \mathcal{N}_q} \frac{\sqrt{N}}{2} \mathbf{c}_{f_{nl},n} e^{in\omega t} & \text{if } q \in \llbracket 1, M \rrbracket \\ \sum_{n \in \mathcal{N}_q} \frac{\sqrt{N}}{2} (\mathbf{c}_{f_{nl},n} e^{in\omega t} + \bar{\mathbf{c}}_{f_{nl},n} e^{-in\omega t}) & \text{if } q \in \{0, \frac{N}{2}\}. \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

Cette méthode, proposée par Petrov [119], permet de réduire significativement le nombre d'inconnues : à la place d'avoir un système de taille $N_{DDL,nl} \times N \times (1 + 2N_h)$ (avec $N_{DDL,nl}$ le nombre de degrés de liberté non-linéaire relatif sur un secteur), nous avons un système réduit de taille $N_{DDL,nl} \times (1 + 2N_h)$. Ce qui offre une réduction d'un facteur N . Ce facteur provient de l'hypothèse (III.2) qui stipule que connaître le déplacement d'un secteur permet de connaître le déplacement de tous les autres.

Cette hypothèse est néanmoins très réductrice car seules des excitations tournantes peuvent être appliquées sur le système. De plus, la solution est cherchée sous forme d'onde tournante ce qui est réducteur pour des analyses de bifurcations de branches de type rupture de symétrie [115] (la forme de la solution est modifiée, en l'occurrence elle n'est plus assimilable à une onde tournante).

Exemple numérique

Un simple exemple est proposé ici pour établir la table de correspondance entre les harmoniques et les diamètres. Considérons une structure avec $N = 24$ secteurs, $h_{ex} = 3$ et $N_h = 7$ harmoniques. La correspondance entre les harmoniques et les diamètres est donnée à la Table III.1. Les harmoniques $n \in \{1, 7\}$ activent le troisième diamètre nodal (voir Équation (III.6)), les harmoniques $\{3, 5\}$ activent le neuvième diamètre et ainsi de suite.

Numéro de l'harmonique n	1	2	3	4	5	6	7
Numéro du diamètre nodal q	3	6	9	12	9	6	3

TABLEAU III.1 – Table de correspondance entre les harmoniques et les diamètres pour une onde tournante.

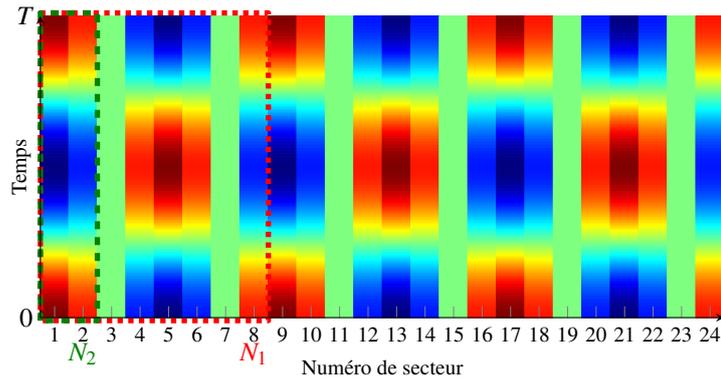
1.2 Pour une onde stationnaire

Pour traiter des ondes stationnaires, Petrov [119] propose d'étendre sa méthodologie des ondes tournantes. Supposons une excitation stationnaire de nombre d'onde h_{ex} (voir Équation (I.25)). Les N secteurs formant la structure complète sont décomposés en M groupes de N_1 secteurs avec

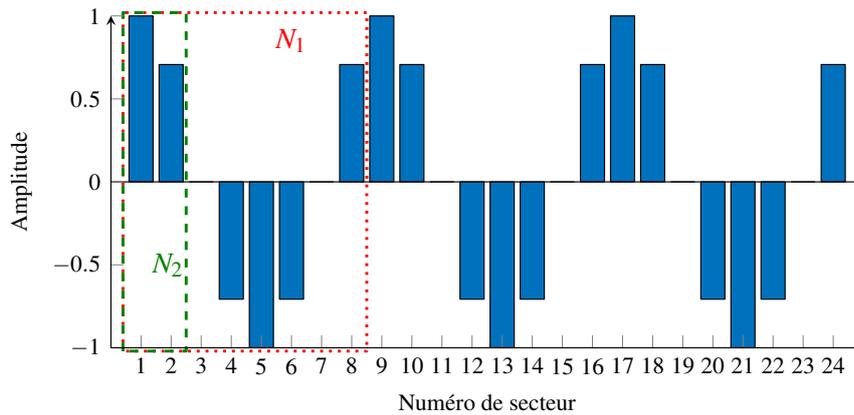
$$N = MN_1. \quad (\text{III.13})$$

La valeur de N_1 est choisie de telle façon à ce que l'excitation perçue par le supersecteur est une onde tournante de nombre d'onde 0. Sa valeur dépend donc de h_{ex} et N . La méthodologie expliquée précédemment (voir Section III.1.1) peut alors être employée avec $M = \frac{N}{N_1}$ supersecteurs et avec $h_{ex} = 0$. Cette méthode, bien qu'intéressante, est difficile à mettre en place du fait de devoir créer un supersecteur. De plus la taille du système reste grande pour un modèle éléments finis de type industriel et les forces non-linéaires doivent être évaluées pour N_1 secteurs.

Afin de mieux visualiser le choix de N_1 , la Figure III.1 représente une onde stationnaire avec $h_{ex} = 3$ et $N = 24$. En considérant $M = 3$ groupes de $N_1 = 8$ secteurs, nous voyons que ce supersecteur est excité par une onde tournante avec $h_{ex} = 0$.



(a) Exemple de la distribution d'une onde stationnaire pour les N secteurs sur une période.



(b) Exemple de la distribution de la force stationnaire à un instant ($t = 0$).

FIGURE III.1 – Représentation d'une excitation stationnaire avec $h_{ex} = 3$ et $N = 24$.

2 Réduction cyclique pour des non-linéarités polynomiales

Bien que l'approche présentée précédemment soit efficace, elle reste assez limitée et se base sur une hypothèse contraignante. Cette Section propose une approche théorique pour déterminer les couplages diamétraux d'une structure cyclique soumise à un chargement tournant ou stationnaire avec un nombre d'onde h_{ex} .

Reprenons l'écriture des forces non-linéaires dans le domaine cyclique initialement donnée à l'Équation (I.41). Dans un souci de simplicité, nous faisons l'hypothèse que les forces non-linéaires sont internes au secteur et sont donc nulles aux frontières. Cette hypothèse n'impacte pas le résultat de cette section mais facilite les notations matricielles employées. Nous avons alors

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl},0} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl},q} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl},N-1} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{F}} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\text{nl},1} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{\text{nl},j} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{\text{nl},N} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.14})$$

Tout comme pour le déplacement (voir Équation (I.5)), nous avons

$$\tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl},N-k} = \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl},k}. \quad (\text{III.15})$$

Sans perdre en généralité, nous faisons l'hypothèse que la non-linéarité sur le secteur j ($j \in \llbracket 1, N \rrbracket$) n'est présente que sur un degré de liberté (la notation en gras est donc enlevée) et pour un monôme quelconque (une démonstration sera effectuée par la suite pour tout type de développement polynomial). La force non-linéaire s'écrit donc

$$f_{\text{nl},j} = k_{\text{nl}} u_j^p, \quad (\text{III.16})$$

avec k_{nl} une valeur scalaire, et p un entier supérieur à 1. L'expression (III.16) traduit une non-linéarité polynomiale. Le passage à des non-linéarités géométriques (terme de couplage $u_1 u_2$ par exemple, voir Équation (I.44)) se déduit des développements suivants.

En remplaçant u_j par (I.4) dans (III.16), nous avons

$$f_{\text{nl},j} = k_{\text{nl}} \prod_{m=1}^p \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} (\tilde{u}_k e^{ik(j-1)\alpha}) \right). \quad (\text{III.17})$$

Les forces non-linéaires cycliques sont obtenues via l'Équation (III.14). Pour le diamètre q ($q \in \llbracket 0, K \rrbracket$), nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\text{nl},q} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \left[e^{-iq(j-1)\alpha} \frac{k_{\text{nl}}}{\sqrt{N}^p} \prod_{m=1}^p \left(\sum_{k=0}^{N-1} (\tilde{u}_k e^{ik(j-1)\alpha}) \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}^{p+1}} k_{\text{nl}} \sum_{k_1=0}^{N-1} \left(\sum_{k_2=0}^{N-1} \left(\dots \sum_{k_p=0}^{N-1} \left(\tilde{u}_{k_1} \tilde{u}_{k_2} \dots \tilde{u}_{k_p} \sum_{j=1}^N [e^{i(j-1)\alpha((k_1+k_2+\dots+k_p)-q)}] \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

Via la propriété (I.10), le terme $\tilde{f}_{\text{nl},q}$ est différent de 0 si et seulement si le couple (k_1, k_2, \dots, k_p) satisfait la relation suivante

$$\sum_{m=1}^p k_m \equiv q \pmod{N}. \quad (\text{III.19})$$

Comme $0 \leq k_m \leq N-1$, le couple (k_1, k_2, \dots, k_p) doit vérifier

$$\sum_{m=1}^p k_m = q + jN \quad \text{pour } j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket. \quad (\text{III.20})$$

L'ensemble des couples solutions \mathcal{S}_q de (III.20) s'obtient numériquement via l'Algorithme III.1 et dépend de l'ordre p de la non-linéarité et du nombre de secteurs N . Les forces non-linéaires cycliques s'écrivent alors

$$\tilde{f}_{\text{nl},q} = \frac{1}{\sqrt{N}^{p-1}} k_{\text{nl}} \sum_{(k_m) \in \mathcal{S}_q} \tilde{u}_{k_1} \tilde{u}_{k_2} \dots \tilde{u}_{k_p}. \quad (\text{III.21})$$

L'Équation (III.21) permet d'évaluer les forces non-linéaires directement dans le domaine cyclique.

En utilisant ce résultat avec la HBM, une procédure AFT reste nécessaire pour passer du domaine fréquentiel ou domaine temporel, comme indiqué à la Figure III.2. En revanche, cette nouvelle formulation permet de s'affranchir du passage du domaine cyclique au domaine physique jusque là nécessaire (voir Figure I.10). Le gain de temps est évident puisque les matrices de Fourier \mathbf{F} (de grande taille) n'ont plus besoin d'être employées à chaque itération du solveur. De plus cette formulation permet de déterminer a priori l'ensemble des diamètres nodaux, noté $\mathcal{F}_{\text{interact}}$, qui vont venir se coupler via les non-linéarités. Ainsi l'Équation (I.41) qui devait être résolue pour tous les $k \in \llbracket 0, K \rrbracket$ devient

$$\tilde{\mathbf{M}}_k \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_k + \tilde{\mathbf{C}}_k \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_k + \tilde{\mathbf{K}}_k \tilde{\mathbf{u}}_k + \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl},k}(\tilde{\mathbf{u}}) = \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext},k}, \quad k \in \mathcal{F}_{\text{interact}}. \quad (\text{III.22})$$

Algorithme III.1 : Détermination du couplage diamétral et des forces cycliques non-linéaires.

- 1: Fournir N , k_m , et p .
 - 2: $\text{diam} \leftarrow k_m$ {Nombre total de diamètres nodaux.}
 - 3: Calcul de K {Détermination du diamètre nodal maximum possible.}
 - 4: **while** Convergence sur le vecteur diam **do**
 - 5: **for** $i = 1 : 1 : p$ **do**
 - 6: combinaison(i) \leftarrow diam {Chaque terme de la non-linéarité peut contenir une valeur du vecteur diam .}
 - 7: **end for**
 - 8: $\text{all_combi} \leftarrow \text{allcomb}(\text{combinaison})$ {Détermination de toutes les combinaisons possibles. La fonction allcomb est une fonction Matlab.}
 - 9: $\text{sum_combi} \leftarrow \text{sum}(\text{all_combi})$ {On somme toutes les puissances. Cela permet de déterminer les diamètres excités.}
 - 10: Actualisation de diam {On récupère les nouveaux diamètres couplés.}
 - 11: **end while**
 - 12: **for** $\text{idiam} = 0 : 1 : K$ **do**
 - 13: Détermination de la force non-linéaire (comptabilisation du nombre d'occurrences de all_combi).
 - 14: **end for**
-

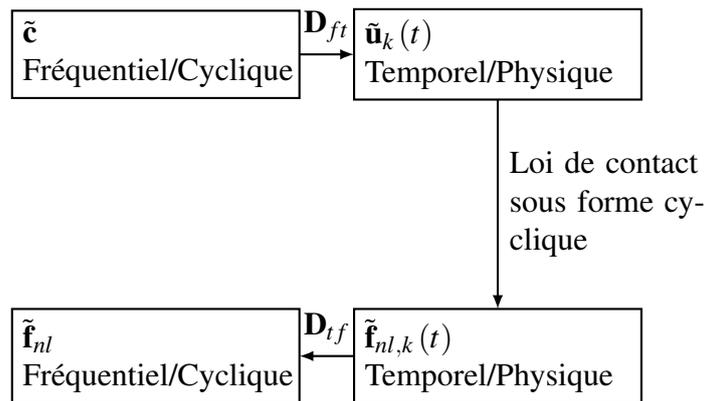


FIGURE III.2 – Procédure AFT simplifiée.

Pour $q = h_{ex}$, le diamètre nodal $\tilde{\mathbf{u}}_q$ est directement excité par la force d'excitation. En revanche, via la condition (III.20), nous pouvons voir que d'autres diamètres nodaux peuvent être couplés. D'après les essais effectués, il semble que pour un monôme supérieur à 1, un nombre de secteurs N premier, et une excitation $h_{ex} \neq 0$, tous les diamètres nodaux se couplent. Pour cette configuration très spécifique, il n'y a alors aucune réduction par l'approche proposée.

Exemple concret

Considérons une structure constituée de $N = 24$ secteurs avec une non-linéarité cubique ($p = 3$). Ces structures sont soumises à une excitation tournante ou stationnaire de nombre d'onde h_{ex} , pris ici égal à 3. Par conséquent $\tilde{\mathbf{f}}_{ext,3}$ (et son complexe conjugué $\tilde{\mathbf{f}}_{ext,21}$, voir l'Équation (I.5)) sont non-nuls. Le déplacement aura donc une composante $\tilde{\mathbf{u}}_3$ (ainsi que son complexe conjugué, i.e $\tilde{\mathbf{u}}_{21}$). En contraignant les valeurs de k_m dans l'Équation (III.20) à $\{3, 21\}$, seules certaines forces non-linéaires cycliques seront non-nulles. Dans le cas d'une simple non-linéarité cubique les composantes cycliques 3, et 9 sont non-nulles (avec leur complexe conjugué) et vont venir créer un couplage au niveau des déplacements cycliques ($\tilde{\mathbf{u}}_3, \tilde{\mathbf{u}}_9$). En re-itérant sur l'Équation (III.20) avec cette fois $k_m \in \{3, 9, 15, 21\}$, seuls les termes $\tilde{\mathbf{f}}_{nl,3}$ et $\tilde{\mathbf{f}}_{nl,9}$ sont non-nuls à nouveau. L'algorithme III.1 a donc convergé sur cet ensemble de diamètres et aucun autre couplage diamétral n'est obtenu.

Cette discussion est résumée à la Figure III.3a où le résultat de (III.20) est détaillé étape par étape. La Figure III.3c présente les couplages non-linéaires pour $N = 24$, $h_{ex} = 3$ mais avec $p = \{2, 3\}$.

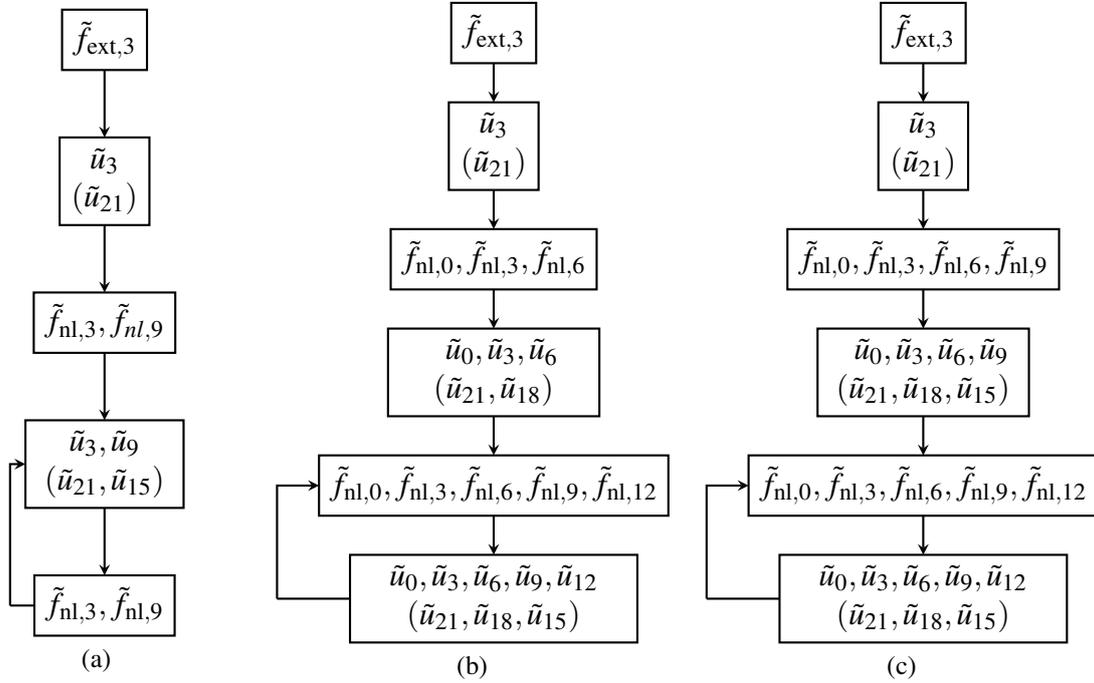


FIGURE III.3 – Procédure pour sélectionner le couplage des diamètres nodaux. (a) : pour une non-linéarité cubique ; (b) : pour une non-linéarité quadratique ; (c) : pour une non-linéarité quadratique et cubique. Les composantes cycliques entre parenthèses interviennent dans le calcul mais correspondent aux complexes conjugués (I.5).

L'Équation (III.20) permet non seulement de déterminer les composantes cycliques non-nulles mais aussi d'exprimer les forces non-linéaires dans le domaine cyclique. Pour la non-linéarité cubique, nous avons

$$\tilde{\mathbf{f}}_{nl,3} = \frac{1}{N} k_{nl} (3\tilde{\mathbf{u}}_3^2 \tilde{\mathbf{u}}_3 + 6\tilde{\mathbf{u}}_3 \tilde{\mathbf{u}}_9 \tilde{\mathbf{u}}_9 + \tilde{\mathbf{u}}_9^3 + 3\tilde{\mathbf{u}}_3^2 \tilde{\mathbf{u}}_9 + 3\tilde{\mathbf{u}}_3 \tilde{\mathbf{u}}_9^2), \quad (\text{III.23a})$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_{nl,9} = \frac{1}{N} k_{nl} (\tilde{\mathbf{u}}_3^3 + 6\tilde{\mathbf{u}}_3 \tilde{\mathbf{u}}_3 \tilde{\mathbf{u}}_9 + 3\tilde{\mathbf{u}}_3 \tilde{\mathbf{u}}_9^2 + 3\tilde{\mathbf{u}}_9^2 \tilde{\mathbf{u}}_9 + 3\tilde{\mathbf{u}}_3^2 \tilde{\mathbf{u}}_9), \quad (\text{III.23b})$$

et pour la non-linéarité quadratique et cubique,

$$\begin{aligned} \frac{N\tilde{f}_{nl,0}}{k_{nl}} &= \tilde{u}_0^2 + \tilde{u}_{12}^2 + 2(\tilde{u}_3\tilde{u}_3 + \tilde{u}_6\tilde{u}_6 + \tilde{u}_9\tilde{u}_9) \\ &\quad + \tilde{u}_0^3 + 6(\tilde{u}_0\tilde{u}_3\tilde{u}_3 + \tilde{u}_0\tilde{u}_6\tilde{u}_6 + \tilde{u}_0\tilde{u}_9\tilde{u}_9) \\ &\quad + 6(\tilde{u}_3\tilde{u}_6\tilde{u}_9 + \tilde{u}_3\tilde{u}_9\tilde{u}_{12} + \tilde{u}_3\tilde{u}_6\tilde{u}_9 + \tilde{u}_3\tilde{u}_9\tilde{u}_{12}) \\ &\quad + 3(\tilde{u}_0\tilde{u}_{12}^2 + \tilde{u}_3^2\tilde{u}_6 + \tilde{u}_6^2\tilde{u}_{12} + \tilde{u}_6\tilde{u}_9^2 + \tilde{u}_3^2\tilde{u}_6 + \tilde{u}_6^2\tilde{u}_{12} + \tilde{u}_6\tilde{u}_9^2), \end{aligned} \quad (\text{III.24a})$$

$$\begin{aligned} \frac{N\tilde{f}_{nl,3}}{k_{nl}} &= 2(\tilde{u}_0\tilde{u}_3 + \tilde{u}_3\tilde{u}_6 + \tilde{u}_6\tilde{u}_9 + \tilde{u}_9\tilde{u}_{12}) \\ &\quad + \tilde{u}_9^3 + 6(\tilde{u}_0\tilde{u}_3\tilde{u}_6 + \tilde{u}_0\tilde{u}_6\tilde{u}_9 + \tilde{u}_0\tilde{u}_9\tilde{u}_{12}) \\ &\quad + 6(\tilde{u}_3\tilde{u}_6\tilde{u}_6 + \tilde{u}_3\tilde{u}_9\tilde{u}_9 + \tilde{u}_6\tilde{u}_9\tilde{u}_{12} + \tilde{u}_3\tilde{u}_6\tilde{u}_{12}) \\ &\quad + 3(\tilde{u}_3^2\tilde{u}_3 + \tilde{u}_3\tilde{u}_{12}^2 + \tilde{u}_6^2\tilde{u}_9 + \tilde{u}_3^2\tilde{u}_9 + \tilde{u}_3\tilde{u}_9^2 + \tilde{u}_6^2\tilde{u}_9), \end{aligned} \quad (\text{III.24b})$$

$$\begin{aligned} \frac{N\tilde{f}_{nl,6}}{k_{nl}} &= \tilde{u}_3^2 + \tilde{u}_9^2 + 2(\tilde{u}_0\tilde{u}_6 + \tilde{u}_3\tilde{u}_9 + \tilde{u}_6\tilde{u}_{12}) \\ &\quad + \tilde{u}_6^3 + 6(\tilde{u}_0\tilde{u}_3\tilde{u}_9 + \tilde{u}_0\tilde{u}_6\tilde{u}_{12}) \\ &\quad + 6(\tilde{u}_3\tilde{u}_3\tilde{u}_6 + \tilde{u}_6\tilde{u}_9\tilde{u}_9 + \tilde{u}_3\tilde{u}_6\tilde{u}_9 + \tilde{u}_3\tilde{u}_9\tilde{u}_{12} + \tilde{u}_3\tilde{u}_6\tilde{u}_9) \\ &\quad + 3(\tilde{u}_0^2\tilde{u}_6 + \tilde{u}_0\tilde{u}_3^2 + \tilde{u}_0\tilde{u}_9^2 + \tilde{u}_6^2\tilde{u}_6 + \tilde{u}_6\tilde{u}_{12}^2 + \tilde{u}_9^2\tilde{u}_{12} + \tilde{u}_3^2\tilde{u}_{12}), \end{aligned} \quad (\text{III.24c})$$

$$\begin{aligned} \frac{N\tilde{f}_{nl,9}}{k_{nl}} &= 2(\tilde{u}_0\tilde{u}_9 + \tilde{u}_3\tilde{u}_6 + \tilde{u}_3\tilde{u}_{12} + \tilde{u}_6\tilde{u}_9) \\ &\quad + \tilde{u}_3^3 + 6(\tilde{u}_0\tilde{u}_3\tilde{u}_6 + \tilde{u}_0\tilde{u}_3\tilde{u}_{12} + \tilde{u}_0\tilde{u}_6\tilde{u}_9) \\ &\quad + 6(\tilde{u}_3\tilde{u}_3\tilde{u}_9 + \tilde{u}_3\tilde{u}_6\tilde{u}_{12} + \tilde{u}_6\tilde{u}_6\tilde{u}_9 + \tilde{u}_6\tilde{u}_9\tilde{u}_{12}) \\ &\quad + 3(\tilde{u}_0^2\tilde{u}_9 + \tilde{u}_3\tilde{u}_9^2 + \tilde{u}_3\tilde{u}_6^2 + \tilde{u}_9^2\tilde{u}_9 + \tilde{u}_9\tilde{u}_{12}^2 + \tilde{u}_3^2\tilde{u}_9 + \tilde{u}_3\tilde{u}_6^2), \end{aligned} \quad (\text{III.24d})$$

$$\begin{aligned} \frac{N\tilde{f}_{nl,12}}{k_{nl}} &= \tilde{u}_6^2 + \tilde{u}_6^2 + 2(\tilde{u}_0\tilde{u}_{12} + \tilde{u}_3\tilde{u}_9 + \tilde{u}_3\tilde{u}_9) \\ &\quad + \tilde{u}_{12}^3 + 6(\tilde{u}_0\tilde{u}_3\tilde{u}_9 + \tilde{u}_0\tilde{u}_3\tilde{u}_9 + \tilde{u}_3\tilde{u}_6\tilde{u}_9) \\ &\quad + 6(\tilde{u}_3\tilde{u}_3\tilde{u}_{12} + \tilde{u}_6\tilde{u}_6\tilde{u}_{12} + \tilde{u}_9\tilde{u}_9\tilde{u}_{12} + \tilde{u}_3\tilde{u}_6\tilde{u}_9) \\ &\quad + 3(\tilde{u}_0^2\tilde{u}_{12} + \tilde{u}_0\tilde{u}_6^2 + \tilde{u}_0\tilde{u}_6^2 + \tilde{u}_3^2\tilde{u}_6 + \tilde{u}_6\tilde{u}_9^2 + \tilde{u}_6\tilde{u}_9^2 + \tilde{u}_3^2\tilde{u}_6). \end{aligned} \quad (\text{III.24e})$$

Les développements précédents ont été réalisés pour une force non-linéaire composée d'un seul monôme mais il est bien évidemment possible d'appliquer ces développements sur des non-linéarités géométriques (voir Équation (I.44)) et d'exprimer les relations précédentes sous formes de tenseurs. Comme expliqué en Section I.8, les non-linéarités géométriques peuvent donner lieu à des phénomènes non-linéaires complexes tels que des résonances internes. Afin d'éprouver la méthode déployée ici, nous allons, dans les sections suivantes, étudier ce type de comportement.

2.1 Analyse des résonances internes par la méthode des échelles multiples

Écrire les forces non-linéaires sous la forme (III.21) permet de déterminer le couplage des diamètres et donc de réduire la taille du problème pour déterminer le mouvement du système. Dans cette section, nous allons utiliser cette nouvelle formulation pour étudier les résonances internes d'un système cyclique via la méthode des échelles multiples.

Une résonance interne implique un couplage entre deux modes différents. Alors que le système est excité suivant un mode particulier, la non-linéarité vient transmettre de l'énergie à un autre mode et ce dernier peut se mettre à gouverner le mouvement du système. Dans l'exemple de la Figure III.3a, nous avons vu que les diamètres 3 et 9 étaient couplés par une non-linéarité cubique. Afin d'avoir une résonance interne, il est nécessaire d'avoir des fréquences propres quasi-commensurables (quasiment multiples l'une de l'autre) [44, 115].

Considérons un exemple d'un système à symétrie cyclique de 24 secteurs soumis à une excitation avec un nombre d'onde $h_{ex} = 3$. Le système à résoudre (III.22) devient alors

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{M}}_3 \ddot{\mathbf{u}}_3 + \tilde{\mathbf{C}}_3 \dot{\mathbf{u}}_3 + \tilde{\mathbf{K}}_3 \mathbf{u}_3 + \tilde{\mathbf{f}}_{nl,3} = \tilde{\mathbf{f}}_{ext,3}, \\ \tilde{\mathbf{M}}_9 \ddot{\mathbf{u}}_9 + \tilde{\mathbf{C}}_9 \dot{\mathbf{u}}_9 + \tilde{\mathbf{K}}_9 \mathbf{u}_9 + \tilde{\mathbf{f}}_{nl,9} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

avec les expressions de $\tilde{\mathbf{f}}_{nl,3}$ et $\tilde{\mathbf{f}}_{nl,9}$ fournies aux Équations (III.23a) et (III.23b). Supposons que la fréquence propre d'un mode du diamètre 3 soit quasi-commensurable à celle d'un mode du diamètre 9. La projection sur ces modes de l'Équation (III.25) donne

$$\begin{cases} \ddot{q}_3 + 2\xi_3 \omega_3 \dot{q}_3 + \omega_3^2 q_3 + \alpha \tilde{f}_{nl,3}(\alpha q_3, \beta q_9) = \alpha \tilde{f}_{ext,3}, \\ \ddot{q}_9 + 2\xi_9 \omega_9 \dot{q}_9 + \omega_9^2 q_9 + \beta \tilde{f}_{nl,9}(\alpha q_3, \beta q_9) = 0, \end{cases} \quad (\text{III.26})$$

avec q_3 et q_9 les coordonnées généralisées complexes des modes considérés pour le diamètres 3 et 9. Les termes ξ_3 et ξ_9 correspondent à leur taux d'amortissement, ω_3 et ω_9 à leur fréquence propre, et α et β aux coefficients modaux associés à la projection des modes.

La méthode des échelles multiples [115] est appliquée sur ce système d'équations pour déterminer les couplages possibles suivant différentes excitations et formes de la solution. Les différentes échelles temporelles sont notées $T_n = \varepsilon^n t$. Comme indiqué dans [115], la non-linéarité cubique ne fera intervenir que deux échelles temporelles, T_0 et T_2 . Les ordres de grandeur des différentes quantités de l'Équation (III.26) sont égales à

$$\begin{cases} \tilde{f}_{ext,3} = \varepsilon^3 f_e, & (\text{III.27}) \\ 2\xi_3 \omega_3 = 2\varepsilon^2 \mu_3, & (\text{III.28}) \\ 2\xi_9 \omega_9 = 2\varepsilon^2 \mu_9, & (\text{III.29}) \\ \Omega = \omega_3 + \sigma_1 \varepsilon^2, & (\text{III.30}) \end{cases}$$

avec Ω la fréquence d'excitation de $\tilde{f}_{ext,3}$, σ_1 un scalaire, ε un petit paramètre sans dimension, et f_e , μ_3 et μ_9 les termes normalisés d'excitation et d'amortissement. Les coordonnées généralisées sont décomposées en

$$\begin{cases} q_3 = \varepsilon q_{3,1}(T_0, T_2) + \varepsilon^3 q_{3,3}(T_0, T_2) \\ q_9 = \varepsilon q_{9,1}(T_0, T_2) + \varepsilon^3 q_{9,3}(T_0, T_2). \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

La dérivée temporelle est remplacée par $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2}$, et le système (III.26) se résout alors pour chaque ordre de grandeur de ε . Pour l'ordre 1, nous avons

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 q_{31}}{\partial T_0^2} + \omega_3^2 q_{31} = 0 \\ \frac{\partial^2 q_{91}}{\partial T_0^2} + \omega_9^2 q_{91} = 0. \end{cases} \quad (\text{III.32})$$

La résolution de ce système donne

$$\begin{cases} q_{31} = A_{31}(T_2) e^{i\omega_3 T_0} + A_{32}(T_2) e^{-i\omega_3 T_0} \\ q_{91} = A_{91}(T_2) e^{i\omega_9 T_0} + A_{92}(T_2) e^{-i\omega_9 T_0}, \end{cases} \quad (\text{III.33})$$

où A_{ij} sont des fonctions complexes de T_2 . Pour l'ordre 3, nous avons

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 q_{33}}{\partial T_0^2} + 2 \frac{\partial^2 q_{31}}{\partial T_0 \partial T_2} + 2\mu_3 \frac{\partial q_{31}}{\partial T_0} + \omega_3^2 q_{33} + \alpha f_{nl,3} = \alpha f_e \\ \frac{\partial^2 q_{93}}{\partial T_0^2} + 2 \frac{\partial^2 q_{91}}{\partial T_0 \partial T_2} + 2\mu_9 \frac{\partial q_{91}}{\partial T_0} + \omega_9^2 q_{93} + \beta f_{nl,9} = 0, \end{cases} \quad (\text{III.34})$$

avec,

$$\begin{cases} f_{nl,3} &= 3\alpha^3 q_{3,1}^2 \bar{q}_{3,1}^2 + 6\alpha\beta^2 q_{3,1} q_{9,1} \bar{q}_{9,1} + \beta^3 q_{9,1}^3 + 3\alpha^2 \beta \bar{q}_{3,1}^2 q_{9,1} + 3\alpha\beta^2 \bar{q}_{3,1} \bar{q}_{9,1}^2 \\ f_{nl,9} &= \alpha^3 q_{3,1}^3 + 6\alpha^2 \beta q_{3,1} \bar{q}_{3,1} q_{9,1} + 3\alpha\beta^2 q_{3,1} \bar{q}_{9,1}^2 + 3\beta^3 q_{9,1}^2 \bar{q}_{9,1} + 3\alpha^2 \beta \bar{q}_{3,1}^2 \bar{q}_{9,1}. \end{cases} \quad (\text{III.35})$$

Par la suite, ce système d'équations différentielles (III.34) sera analysé en étudiant ses conditions de solvabilité. De plus, nous traiterons le cas d'une résonance interne 1:1 (réponse dominante d'un mode dont la fréquence est très proche de celle d'un autre mode excité; un transfert d'énergie s'opère entre les deux modes) et introduisons le paramètre σ_2 égal à

$$\omega_9 = \omega_3 + \sigma_2 \varepsilon^2. \quad (\text{III.36})$$

D'autres exemples (résonances internes, forme d'onde stationnaire) sont fournis en Annexe E. Leur résultat sont résumés à la fin de cette section.

2.2 Analyse d'une résonance interne 1 : 1 pour une forme d'onde tournante

L'excitation tournante s'écrit

$$f_e = f_a e^{i\Omega t}, \quad (\text{III.37})$$

avec f_a un paramètre scalaire. Nous faisons de plus l'hypothèse que le déplacement a la forme d'une onde tournante. L'Équation (III.33) se simplifie alors en

$$\begin{cases} q_{31} = A_3(T_2) e^{i\omega_3 T_0} \\ q_{91} = A_9(T_2) e^{i\omega_9 T_0}. \end{cases} \quad (\text{III.38})$$

Les quantités A_{31} et A_{91} de (III.33) sont renommées ici A_3 et A_9 pour simplifier les notations. En remplaçant q_{31} et q_{91} par (III.38) dans le système (III.34), les conditions de solvabilité suivantes sont obtenues :

$$\begin{cases} -2i\omega_3 \left(A_3' + \mu_3 A_3 \right) - \alpha \left(3\alpha^3 A_3^2 \bar{A}_3 + 6\alpha\beta^2 A_3 A_9 \bar{A}_9 \right) + \alpha f_a e^{i\sigma_1 T_2} = 0 \\ -2i\omega_9 \left(A_9' + \mu_9 A_9 \right) - \beta \left(6\alpha^2 \beta A_3 \bar{A}_3 A_9 + 3\beta^3 A_9^2 \bar{A}_9 \right) = 0, \end{cases} \quad (\text{III.39})$$

où A_i' représente la dérivée de A_i par rapport à T_2 . A_3 et A_9 sont écrits dans leur forme polaire,

$$\begin{cases} A_3 = \frac{1}{2} a_3(T_2) e^{i\Theta_3(T_2)} \\ A_9 = \frac{1}{2} a_9(T_2) e^{i\Theta_9(T_2)}. \end{cases} \quad (\text{III.40})$$

En introduisant la variable

$$\gamma_1 = \sigma_1 T_2 - \Theta_3, \quad (\text{III.41})$$

en remplaçant A_3 et A_9 par (III.40) dans l'Équation (III.39), et en considérant un mouvement périodique ($a_3' = a_9' = \gamma_1' = 0$), les conditions de solvabilité donnent finalement (en distinguant les parties réelles et imaginaires)

$$\begin{cases} a_3 \sigma_1 \omega_3 = \frac{3\alpha a_3}{8} [\alpha^3 a_3^2 + 2\beta^2 a_9^2] - \alpha f_a \cos(\gamma_1) \end{cases} \quad (\text{III.42})$$

$$\begin{cases} a_9 \Theta_9' \omega_9 = \frac{3\beta a_9}{8} [2\alpha^2 \beta a_3^2 + \beta^3 a_9^2] \end{cases} \quad (\text{III.43})$$

$$\begin{cases} \omega_3 \mu_3 a_3 = \alpha f_a \sin(\gamma_1) \end{cases} \quad (\text{III.44})$$

$$\begin{cases} \omega_9 \mu_9 a_9 = 0. \end{cases} \quad (\text{III.45})$$

La résolution de ce système donnent a_9 et Θ'_9 égaux à 0 via les Équations (III.45) et (III.43). Par conséquent il n'y a pas de résonance interne 1:1 avec un déplacement sous forme d'onde tournante. Évidemment le troisième diamètre répond avec $a_3 = \frac{\alpha f_a \sin(\gamma_1)}{\omega_3 \mu_3}$. Les travaux de [80] présentent la méthodologie pour évaluer le terme de $q_{3,3}$.

Des calculs similaires ont été menés dans l'Annexe E.1 pour étudier une résonance interne 1:1 avec un déplacement sous forme d'onde stationnaire. Le résultat final donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3 \sigma_1 \omega_3 = \frac{3\alpha}{8} [3\alpha^3 a_3^3 + 3\alpha\beta^2 a_3 a_9^2 (2 + \cos(2\gamma_2)) + \cos(\gamma_2) (\alpha^2 \beta a_3^2 a_9 + \beta^3 a_9^3)] \\ \hspace{20em} - \alpha f_a \cos(\gamma_1) \quad \text{(III.46)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_9 \omega_9 = \frac{3\beta}{8(\sigma_1 - \sigma_2)} [3\beta^3 a_9^3 + 3\alpha^2 \beta a_3^2 a_9 (2 + \cos(2\gamma_2)) + \cos(\gamma_2) (\alpha \beta^2 a_3 a_9^2 + \alpha^3 a_3^3)] \quad \text{(III.47)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_3 \mu_3 a_3 = -\frac{3\alpha\beta a_9}{8} [3\alpha\beta a_3^2 \sin(2\gamma_2) + \alpha^2 a_3^2 \sin(\gamma_2) + \beta^2 a_9^2 \sin(\gamma_2)] + \alpha f_a \sin(\gamma_1) \quad \text{(III.48)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_9 \mu_9 a_9 = \frac{3\beta\alpha a_3}{8} [3\alpha\beta a_3 a_9 \sin(2\gamma_2) + \alpha^2 a_3^2 \sin(\gamma_2) + \beta^2 a_9^2 \sin(\gamma_2)], \quad \text{(III.49)} \end{array} \right.$$

avec $\gamma_2 = \Theta_9 - \Theta_3 + \sigma_2 T_2$.

Si nous considérons le cas découplé, avec $a_3 \neq 0$ et $a_9 = 0$, alors les Équations (III.47) et (III.49) sont vérifiées et nous obtenons les conditions de solvabilité du cas tournant (Équations (III.42) et (III.44)). Considérons maintenant le cas couplé, alors les Équations (III.48) et (III.49) donnent

$$\omega_3 \mu_3 a_3^2 - \alpha f_a \sin(\gamma_1) + \omega_9 \mu_9 a_9^2 = 0. \quad \text{(III.50)}$$

Pour cette Équation (III.50), nous pouvons avoir $a_9 \neq 0$ alors que l'excitation a été portée sur le troisième diamètre. Ainsi une résonance interne 1:1 peut être obtenue pour un déplacement sous forme d'onde stationnaire. L'Annexe E.2 démontre qu'il est également possible d'obtenir une résonance interne 1:3.

2.3 Résumé de l'analyse

Grâce à l'écriture des forces non-linéaires sous leur forme cyclique, il a été possible d'employer la méthode des échelles multiples pour identifier certaines résonances internes pour un système cyclique de 24 secteurs excité suivant son troisième diamètre. Dans le cas d'une excitation et d'un déplacement sous forme d'onde tournante, aucune résonance interne 1:1 n'apparaît entre le troisième et neuvième diamètres. Cependant une résonance interne 1:3 peut avoir lieu. Dans le cas d'une onde stationnaire, nous pouvons obtenir des résonances internes 1:1 et 1:3. Il semble ainsi qu'une forme stationnaire soit plus propice à l'apparition de résonances internes. Physiquement, les ondes stationnaires excitent les secteurs avec des niveaux d'amplitudes différents et peuvent donc faciliter l'échange d'énergie entre les diamètres. En revanche les ondes tournantes bougent au sein de la structure et peuvent « casser » les échanges entre les diamètres. Notre analyse s'appuyant sur une technique d'échelles multiples ne permet pas d'avoir une vision exhaustive du comportement non-linéaire comme l'attestent certains résultats. En effet, quelques articles [36, 47] montrent que des ondes tournantes peuvent donner lieu à des phénomènes complexes comme des solitons.

Cette Section a permis de déterminer analytiquement les diamètres nodaux couplés via une non-linéarité polynomiale d'ordre p . Cette approche théorique permet de réduire le système en cherchant la solution dans un espace réduit. L'objectif de la section suivante est d'appliquer cette stratégie à des non-linéarités en frottement.

2.4 Limitations de la méthode

La nouvelle méthode développée dans cette section est intéressante mais présente une limitation majeure : les solutions trouvées sont restreintes à un espace défini par les diamètres nodaux considérés. Ainsi, elles ne permettent pas de trouver toutes les solutions du système dynamique comme la méthodologie de référence ou d'autres méthodes [48]. Dans la majorité des cas, ces stratégies permettent de réduire la taille du problème.

3 Réduction cyclique pour des non-linéarités de frottement

La démonstration précédente est maintenant étendue à des non-linéarités de frottement. Cela donnera lieu à trois nouvelles méthodologies qui seront détaillées par la suite.

La loi de frottement est généralement modélisée par la loi de Coulomb (voir Équation (I.43)) et peut être régularisée par une loi tangente hyperbolique [66, 83]

$$\mathbf{f}_{nl,T} = \mu |f_{nl,N}| \tanh\left(\frac{\dot{\mathbf{u}}_{r,T}}{\varepsilon}\right), \quad (\text{III.51})$$

avec ε un paramètre positif qui contrôle la pente à l'origine de la force non-linéaire en fonction de la vitesse relative (voir Figure III.4). Au plus ε est petit, au mieux la tangente hyperbolique approxime la loi de Coulomb.

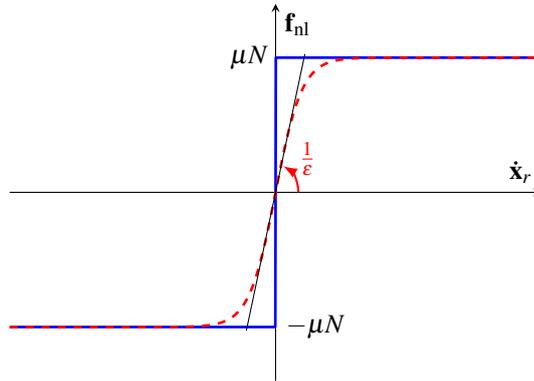


FIGURE III.4 – Modélisation de la loi de frottement ; (—) : loi de Coulomb ; (- -) : loi régularisée avec une fonction tangente hyperbolique.

Cette loi de frottement régularisée est adoptée dans cette section à des fins analytiques. Le développement en série de Taylor de la tangente hyperbolique est égal à

$$\tanh(z) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n z^{2n-1}, \quad (\text{III.52})$$

avec q_n les coefficients d'expansion à l'ordre n . En utilisant ce développement de Taylor dans l'Équation (III.51), en remplaçant le déplacement physique par les déplacements cycliques, et en projetant sur la matrice de Fourier (voir les Équations (III.17) et (III.18)), nous avons pour la composante cyclique q ($q \in \llbracket 0, K \rrbracket$)

$$\tilde{f}_{nl,q} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\tilde{q}_n \sum_{k_1=0}^{N-1} \left(\sum_{k_3=0}^{N-1} \left(\dots \sum_{k_{2n-1}=0}^{N-1} \left(\tilde{u}_{k_1} \tilde{u}_{k_3} \dots \tilde{u}_{k_{2n-1}} \sum_{j=1}^N \left[e^{i(j-1)\alpha((k_1+k_3+\dots+k_{2n-1})-q)} \right] \right) \right) \right) \right], \quad (\text{III.53})$$

avec

$$\tilde{q}_n = \frac{\mu |f_{nl,N}| q_n}{\sqrt{N} (\sqrt{N}\varepsilon)^{2n-1}}. \quad (\text{III.54})$$

Par conséquent, s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sum_{m=1}^{2n-1} k_m \equiv q \pmod{N}, \quad (\text{III.55})$$

alors le terme $\tilde{f}_{nl,q}$ est différent de 0 et la composante cyclique \tilde{u}_q est non nulle. A l'instar de (III.18), cette Équation (III.55) permet de déterminer les couplages inter-diamètre dus à une non-linéarité de frottement. L'ensemble des diamètres couplés est noté $\mathcal{T}_{\text{interact}}$ et l'équation de la dynamique qui régit le système est donnée à (III.22). Ce système peut se ré-écrire sous la forme

$$\tilde{\mathbf{M}}_r \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_r + \tilde{\mathbf{C}}_r \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_r + \tilde{\mathbf{K}}_r \tilde{\mathbf{u}}_r + \tilde{\mathbf{F}}_r^T \mathbf{f}_{nl} = \tilde{\mathbf{F}}_r^T \mathbf{f}_{\text{ext}}, \quad (\text{III.56})$$

où $\tilde{\mathbf{u}}_r$ rassemble les composantes cycliques des diamètres couplés (compris entre 0 et K). Les matrices $\tilde{\mathbf{M}}_r$, $\tilde{\mathbf{C}}_r$ et $\tilde{\mathbf{K}}_r$ sont les matrices structurales cycliques, diagonales par blocs. Le terme \mathbf{F}_r correspond à la matrice de Fourier définie à l'Équation (I.6) mais ne prend en compte que les diamètres couplés (la matrice est donc rectangulaire). Le déplacement physique est alors obtenu par

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}_r \tilde{\mathbf{u}}_r + \mathbf{c.c.} \quad (\text{III.57})$$

Dues à la somme infinie de (III.53), les forces non-linéaires ne peuvent pas être calculées directement dans le domaine cyclique. Cela est problématique car l'évaluation du terme $\tilde{\mathbf{F}}_r^T \mathbf{f}_{nl}$ nécessite d'appliquer la procédure donnée en Figure I.10 et donc d'évaluer les forces non-linéaires sur l'intégralité des secteurs. Pour un modèle éléments finis, cela donnerait lieu à des temps de calculs extrêmement longs. Des stratégies de réduction sont proposées dans les sections suivantes pour pallier cette difficulté.

Bien que ces calculs analytiques aient été faits via une loi de frottement généralisée, les diamètres nodaux qui interagissent ne dépendent pas de la valeur de ε . Nous pouvons donc faire tendre ε vers 0 et se rapprocher du modèle de Coulomb. Le passage à la limite n'est pas trivial. Des simulations numériques, présentés en Section III.4.2.2, utilisent une modélisation discontinue du frottement, et vont venir confirmer la pertinence de ces résultats théoriques.

Exemple concret Voyons maintenant un exemple pour déterminer l'ensemble $\mathcal{T}_{\text{interact}}$ pour une non-linéarité de frottement. Supposons une onde tournante ou stationnaire de nombre d'onde h_{ex} . Sans couplage non-linéaire, seule la composante cyclique $\tilde{u}_{h_{ex}}$ est non nulle. Le terme k_m peut alors prendre seulement la valeur h_{ex} , et la condition (III.55) est simplifiée en : si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(2n - 1) h_{ex} \equiv q \pmod{N}, \quad (\text{III.58})$$

alors $\tilde{f}_{nl,q}$ est non nul et la composante cyclique \tilde{u}_q est excitée. Bien que n soit un entier (et peut donc prendre une infinité de valeurs), les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de $(2n - 1) h_{ex}$ par N sont finies et ces différentes valeurs sont obtenues pour un nombre fini de valeurs de n . Si n devient plus grand qu'un entier noté M_1 , alors les mêmes valeurs des restes sont de nouveau obtenues. La valeur M_1 est obtenue via

$$(2(n + M_1) - 1) h_{ex} \equiv q \pmod{N}, \quad (\text{III.59})$$

ce qui donne

$$2M_1 h_{ex} \equiv 0 \pmod{N}. \quad (\text{III.60})$$

La valeur M_1 peut ainsi être évaluée. En faisant varier n dans $\llbracket 1, M_1 \rrbracket$, nous obtenons toutes les valeurs

des restes des divisions euclidiennes de $(2n - 1)h_{ex}$ par N pour $n \in \mathbb{N}^*$. Ces restes correspondent aux numéros des diamètres nodaux couplés.

Via cette première itération, nous avons un ensemble de diamètres nodaux $\{q_1, \dots, q_P\}$ qui se couple par une excitation de nombre d'onde h_{ex} . On pourrait penser qu'il faille ensuite refaire une suite d'itérations : prendre k_m dans l'ensemble $\{q_1, \dots, q_P\}$, ré-évaluer les différentes valeurs de (III.55), trouver les nouveaux diamètres nodaux couplés, etc, jusqu'à convergence (c'est à dire jusqu'à ce qu'aucune nouvelle valeur de diamètre ne soit obtenue avec l'algorithme). Cependant une telle procédure n'est pas nécessaire : les diamètres nodaux obtenus via la première itération sont nécessairement égaux à h_{ex} multipliés par un nombre entier impair (avec un éventuel décalage de N) : $q_i \equiv (2n_i - 1)h_{ex} \pmod{N}, i \in \llbracket 1, P \rrbracket$. Ainsi en considérant (III.55) avec ces nouvelles valeurs de k_m et en décomposant cette somme globale en plusieurs sommes propres à chaque diamètre nodal, nous avons

$$\sum^{m_1} q_1 + \dots + \sum^{m_P} q_P \equiv q \pmod{N}, \quad (\text{III.61})$$

avec $\sum_i m_i = 2n - 1$. Comme souligné ci-dessous, chaque diamètre nodal q est égal à h_{ex} multiplié par un nombre entier impair. Ainsi (III.61) peut être ré-écrit en

$$\sum^{m_1} (2n_1 - 1)h_{ex} + \dots + \sum^{m_P} (2n_P - 1)h_{ex} \equiv q \pmod{N}. \quad (\text{III.62})$$

En factorisant le terme h_{ex} , nous avons

$$\begin{aligned} h_{ex} \sum_{i=1}^P (m_i (2n_i - 1)) &\equiv q \pmod{N}, \\ h_{ex} \left(2 \left(\sum_{i=1}^P m_i n_i \right) - \sum_{i=1}^P (m_i) \right) &\equiv q \pmod{N}, \end{aligned} \quad (\text{III.63})$$

comme $\sum_i m_i = 2n - 1$, la dernière équation est juste le reste de la division euclidienne de h_{ex} fois un nombre impair par N . Cette équation est par conséquent équivalente à (III.55), et ainsi résoudre cette équation une seule fois permet de déterminer tous les diamètres nodaux qui interagissent.

Cette méthode peut être généralisée pour des excitations avec de multiples nombres d'ondes (voir l'Annexe F). De plus, nous pourrions appliquer un tel principe à n'importe quel type de non-linéarité du moment qu'elle puisse être modélisée par une série de Taylor.

Exemple numérique

Reprenons l'exemple d'une structure avec $N = 24$ secteurs soumis à une excitation avec $h_{ex} = 3$. Le calcul de (III.60) donne $M_1 = 4$. Les valeurs du terme $(2n - 1)h_{ex}$ pour $n \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ donnent $[3, 9, 15, 21]$. Comme $\tilde{u}_{15} = \tilde{u}_9$ et $\tilde{u}_{21} = \tilde{u}_3$ (voir (I.5)), seuls les troisième et neuvième diamètres sont couplés. Ainsi nous avons $k_m \in \{3, 9\}$. Détaillons l'Équation (III.61) pour montrer qu'il n'est pas nécessaire de ré-appliquer la procédure de la division euclidienne pour le nouveau jeu de valeurs de k_m :

$$\begin{aligned} \sum^{m_1} 3 + \sum^{m_2} 9 &\equiv q \pmod{N}, \\ \sum^{m_1} 3 + \sum^{m_2} (3 \times 3) &\equiv q \pmod{N}, \\ 3(m_1 + 3m_2) &\equiv q \pmod{N}, \\ 3(2(m_1 + 2m_2) - (m_1 + m_2)) &\equiv q \pmod{N}. \end{aligned} \quad (\text{III.64})$$

Le terme $m_1 + m_2$ est égal $2n - 1$ et le terme $2(m_1 + 2m_2)$ est pair. Par conséquent $2(m_1 + 2m_2) -$

$(m_1 + m_2)$ est un nombre impair. Calculer le reste de la division euclidienne de $6(m_1 + 2m_2) - 3(m_1 + m_2)$ par N donne les mêmes valeurs qu'obtenues lors de la première itération.

3.1 Méthode 1 : méthode générale de réduction pour l'évaluation des forces non-linéaires

L'objectif de cette section est de proposer une méthode générale permettant d'évaluer efficacement le terme $\bar{\mathbf{F}}_r^T \mathbf{f}_{nl}$ du système (III.56). Ce terme représente la projection des forces non-linéaires de tous les secteurs sur l'espace réduit de Fourier contenant les diamètres en interaction. Lors de la résolution du système, cette opération est effectuée à chaque itération du solveur et doit donc être optimisée afin de réduire les temps de calcul. La Méthode 1 propose une approche analytique pour réduire le nombre de secteurs sur lequel les forces non-linéaires doivent être évaluées. Comme pour le déplacement à l'Équation (III.57), les forces non-linéaires s'évaluent par

$$\mathbf{f}_{nl} = \mathbf{F}_r \tilde{\mathbf{f}}_{nl,r} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}, \quad (\text{III.65})$$

où $\tilde{\mathbf{f}}_{nl,r}$ sont les composantes cycliques des forces non-linéaires pour les diamètres en interaction. En décomposant cette équation, nous avons

$$\mathbf{f}_{nl} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{nl,m} \\ \mathbf{f}_{nl,s} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{F}_{r,m}) & -\text{Im}(\mathbf{F}_{r,m}) \\ \text{Re}(\mathbf{F}_{r,s}) & -\text{Im}(\mathbf{F}_{r,s}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}(\tilde{\mathbf{f}}_{nl,r}) \\ \text{Im}(\tilde{\mathbf{f}}_{nl,r}) \end{bmatrix}, \quad (\text{III.66})$$

avec $\mathbf{f}_{nl,m}$ les forces non-linéaires sur les secteurs $\llbracket 1, N_{\text{diam}} \rrbracket$, où N_{diam} est égal au nombre de diamètres en interaction pondéré par un facteur 2 pour chaque diamètre dégénéré. $\mathbf{f}_{nl,s}$ sont les forces non-linéaires sur les secteurs restants $\llbracket N_{\text{diam}} + 1, N \rrbracket$. Les forces non-linéaires cycliques sont décomposées en leurs parties réelle et imaginaire (opérateurs Re et Im). Les parties imaginaires des forces non-linéaires cycliques pour les diamètres non-dégénérés sont nulles et sont donc enlevées de l'équation. Le terme $[\text{Re}(\mathbf{F}_{r,m}) \quad -\text{Im}(\mathbf{F}_{r,m})]$ est une matrice carrée de taille $N_{\text{diam}} \times N_{\text{diam}}$. En inversant cette matrice et en substituant la première ligne de (III.66) dans la seconde nous avons

$$\bar{\mathbf{F}}_r^T \mathbf{f}_{nl} = \bar{\mathbf{F}}_r^T \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_{\text{diam}}} \\ [\text{Re}(\mathbf{F}_{r,s}) \quad -\text{Im}(\mathbf{F}_{r,s})] [\text{Re}(\mathbf{F}_{r,m}) \quad -\text{Im}(\mathbf{F}_{r,m})]^{-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \mathbf{f}_{nl,m}. \quad (\text{III.67})$$

Via cette procédure de substitution, l'Équation (III.56) se simplifie en

$$\tilde{\mathbf{M}}_r \ddot{\mathbf{u}}_r + \tilde{\mathbf{C}}_r \dot{\mathbf{u}}_r + \tilde{\mathbf{K}}_r \mathbf{u}_r + \bar{\mathbf{F}}_r^T \mathbf{P} \mathbf{f}_{nl,m} = \bar{\mathbf{F}}_r^T \mathbf{f}_{\text{ext}}. \quad (\text{III.68})$$

Par rapport au système (III.56), cette nouvelle formulation (III.68) ne nécessite pas une évaluation des forces non-linéaires sur l'intégralité des secteurs mais seulement sur le nombre réduit $\llbracket 1, N_{\text{diam}} \rrbracket$.

Cette démarche générale peut être vue comme une méthode exacte de substitution. Elle est valide pour n'importe quel type d'excitation. De plus, elle est facile à implémenter dans un code numérique puisqu'elle ne nécessite que la création d'une matrice \mathbf{P} constante. Comme indiqué au début des développements, cette stratégie sera par la suite référencée comme « Méthode 1 ». Dans les sections suivantes, d'autres méthodologies sont développées (nommées Méthode 2 et Méthode 3). Elles utilisent des hypothèses qui permettent une réduction plus importante mais sont spécifiques à certains cas particuliers.

Exemple numérique

Afin d'illustrer l'approche associée à la Méthode 1, nous proposons d'étudier une structure constituée de $N = 24$ secteurs soumise à une excitation composée d'ondes tournantes et stationnaires avec des

nombre d'ondes $h_{ex} \in \{3, 9\}$. Pour ce type d'excitation, seuls les diamètres 3 et 9 vont interagir (voir Section III.3). Ces deux diamètres sont dégénérés et donc $N_{\text{diam}} = 4$. La matrice \mathbf{P} de (III.67) est égale à

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{III.69})$$

3.2 Méthode 2 : interaction entre diamètres nodaux couplée à la stratégie de Petrov

Nous proposons ici une nouvelle méthodologie nommée « Méthode 2 » pour traiter le cas des structures à symétrie cycliques non-linéaires soumises à une excitation de type onde tournante ou onde stationnaire. Cette méthode combine l'hypothèse de l'article de Petrov [119] présentée aux Sections III.1.1 et III.1.2 avec la prédiction théorique des diamètres nodaux en interaction (voir la Section III.3).

Comme rappelé aux Sections III.1.1 et III.1.2, la stratégie de Petrov couplée à la HBM permet de ne considérer que certains harmoniques fréquentiels pour certains diamètres nodaux. En utilisant la méthode de la Section III.3, nous pouvons réduire le nombre total d'inconnues en enlevant les diamètres nodaux qui ne sont pas en interaction.

En reprenant l'exemple numérique de la Section III.1.1 ($N = 24$ et $h_{ex} = 3$), et le résultat de la Section III.3 (seuls les diamètres $\{3, 9\}$ sont couplés), nous pouvons donc supprimer les diamètres nodaux 6 et 12 du Tableau III.1. Nous pouvons remarquer que seuls les harmoniques impairs sont alors retenus. Ce résultat peut être expliqué par le caractère impair de la loi de frottement. Cette méthodologie est intéressante car elle permet de placer l'hypothèse de Petrov dans un contexte plus théorique et d'en accroître l'efficacité. En revanche, cette stratégie n'est qu'applicable pour des excitations d'onde tournante. De plus elle ne permet pas de détecter des bifurcations de rupture de symétrie où les harmoniques fréquentiels pairs peuvent répondre.

Dans le cas d'une excitation type onde stationnaire, nous avons vu que la méthode de Petrov requiert de construire un supersecteur contenant N_1 secteurs fondamentaux puis d'y évaluer les forces non-linéaires. La première partie de cette stratégie est contraignante d'un point de vue espace mémoire surtout pour des modèles éléments finis car il est nécessaire de stocker les matrices structurales de ce supersecteur. Il est donc beaucoup plus avantageux d'employer la stratégie de la Section III.3 pour obtenir le système (III.56). Pour la seconde étape (évaluation des forces non-linéaires réduite, $\bar{\mathbf{F}}_r^T \mathbf{f}_{nl}$), nous pouvons suivre la stratégie de Petrov et calculer les forces non-linéaires sur N_1 secteurs. En reprenant l'exemple $N = 24$ et $h_{ex} = 3$, la méthode de Petrov nécessite un supersecteur avec $N_1 = 8$. Pour la nouvelle méthode seuls les diamètres 3 et 9 sont non-nuls et donc le nombre d'inconnues est divisé par 2. Le coût de l'évaluation des forces non-linéaires est en revanche le même : elles doivent être calculées sur 8 secteurs.

En comparant la Méthode 2 avec la Méthode 1 (voir Section III.3.1), nous voyons que cette Méthode 2 est plus performante pour des ondes tournantes. Le nombre d'inconnues est le même mais l'évaluation des forces non-linéaires n'est faite que pour un secteur contre $N_{\text{diam}} \geq 1$ pour la Méthode 1. Cependant elle est moins performante dans le cas des ondes stationnaires : l'évaluation doit être faite pour $N_1 \leq N_{\text{diam}}$ secteurs. Ceci nous a conduit au développement d'une dernière méthodologie appelée Méthode 3, spécialement développée pour des ondes stationnaires.

3.3 Méthode 3 : interaction entre diamètres nodaux avec l'hypothèse d'onde stationnaire

Cette Méthode 3 reprend la théorie de la Section III.3 mais emploie une hypothèse pour l'évaluation des forces non-linéaires. Considérons une structure avec N secteurs soumise à une excitation stationnaire (I.25). La distribution spatiale de cette force est contenue dans le terme $\cos((j-1)\alpha h_{ex})$. Un exemple de la forme de cette force est illustré à la Figure III.1. La Méthode 3 détermine un motif de répétition de la force extérieure et fait l'hypothèse que ce motif s'applique à la fois au déplacement de la structure et aux forces non-linéaires.

La première propriété de symétrie qu'offre une onde stationnaire est celle donnée par Petrov (M groupes de N_1 secteurs). Cela se traduit par

$$\begin{aligned} \cos((j-1)\alpha h_{ex}) &= \cos((j-1+N_1)\alpha h_{ex}) \\ \iff N_1\alpha h_{ex} &\equiv 0 \pmod{N}. \end{aligned} \quad (\text{III.70})$$

Cette condition est illustrée en Figure III.1 par un carré rouge. Nous pouvons aller plus loin que cette hypothèse et considérer la symétrie du terme $\cos(2\pi(j-1)/N_1)$. Selon la valeur de N_1 , trois cas peuvent être distingués : « N_1 est impair », « N_1 est pair » et « N_1 est divisible par 4 ». Pour ces trois cas, différentes symétries sont obtenues. Quand N_1 est pair (voir Figure III.5a), $N_2 = (N_1 + 1)/2$ secteurs sont suffisants pour décrire l'ensemble de la distribution de la force extérieure (via une symétrie horizontale). Quand N_1 est pair et non-divisible par 4 (voir Figure III.5b), seuls $N_2 = (\frac{N_1}{2} + 1)/2$ secteurs sont nécessaires pour déterminer la répartition complète de la force extérieure. Et finalement, pour N_1 divisible par 4 (voir Figure III.5c), seuls $N_2 = N_1/4$ secteurs sont nécessaires pour décrire la force extérieure (via une symétrie verticale et horizontale). Pour ce dernier cas, il n'est pas nécessaire de considérer le secteur sur l'axe y puisque $\cos((j-1)\alpha h_{ex}) = 0$ et donc l'excitation est nulle pour ce secteur.

Pour l'exemple d'une structure avec $N = 24$ secteurs et $h_{ex} = 3$, illustré à la Figure III.1, nous avons $N_1 = 8$. Cela correspond au troisième cas (voir III.5c) et par conséquent $N_2 = 2$ (illustré par le rectangle vert de la Figure III.1).

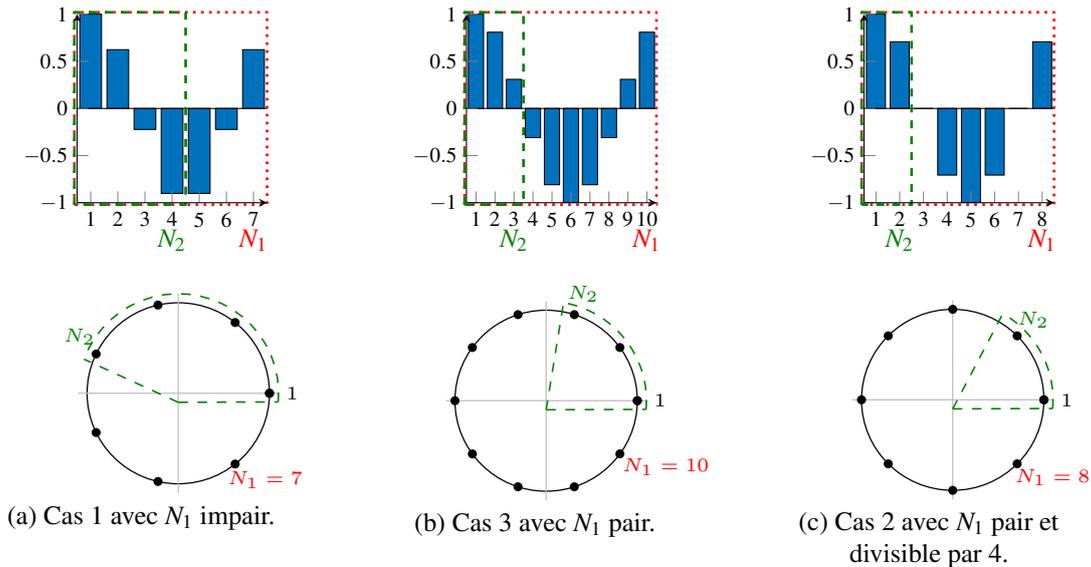


FIGURE III.5 – Nombre de secteurs à considérer pour différentes valeurs de N_1 dans le cas d'une excitation stationnaire. Première ligne : répartition spatiale de la force pour les N_1 premiers secteurs. Deuxième ligne : représentation cyclique de ces distributions.

Ainsi, l'onde stationnaire ne présente que N_2 amplitudes non-nulles distinctes. En décalant correctement ces N_2 amplitudes, nous pouvons ré-obtenir la distribution sur les N_1 secteurs. Ce schéma se répète M fois pour obtenir la distribution sur les N secteurs.

Le vecteur $\mathbf{f}_{\text{ext}} = [\mathbf{f}_{\text{ext},1}^\top, \dots, \mathbf{f}_{\text{ext},j}^\top, \dots, \mathbf{f}_{\text{ext},N}^\top]^\top$ correspond aux forces extérieures sur tous les secteurs. Il peut alors être ré-écrit sous la forme

$$\mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{P}\mathbf{f}_{\text{ext},r}, \quad (\text{III.71})$$

avec $\mathbf{f}_{\text{ext},r} = [\mathbf{f}_{\text{ext},1}^\top, \dots, \mathbf{f}_{\text{ext},N_2}^\top]^\top$ le vecteur des forces extérieures réduit et \mathbf{P} la matrice du motif (formée par les propriétés de symétrie évoquées précédemment) de taille $N \times N_2$. Dans l'exemple numérique précédent, nous avons

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_m}. \quad (\text{III.72})$$

La matrice \mathbf{P}_m définit les propriétés symétriques pour les $N_1 = 8$ premiers secteurs, et le produit de Kronecker (de taille $M = 3$) permet de répéter ce schéma M fois. Nous faisons maintenant l'hypothèse que les déplacements et forces non-linéaires ont la même structure que les forces extérieures (III.71) :

$$\mathbf{u} = \mathbf{P}\mathbf{u}_r, \quad (\text{III.73})$$

avec $\mathbf{u}_r = [\mathbf{u}_1^\top, \dots, \mathbf{u}_{N_2}^\top]^\top$ le vecteur de déplacements réduit. En combinant cette hypothèse avec le résultat théorique de la Section III.3 (voir Équation (III.57)), nous avons

$$\tilde{\mathbf{u}}_r = \tilde{\mathbf{F}}_r \mathbf{P}\mathbf{u}_r. \quad (\text{III.74})$$

Finalement le système (III.56) est de nouveau réduit et donne le système (III.68) avec la nouvelle matrice \mathbf{P} . Les forces non-linéaires sont désormais évaluées pour seulement N_2 secteurs.

3.4 Capacités de réduction des différentes méthodologies

Cette section compare les capacités de réduction respectives des méthodes présentées ci-dessous avec la méthode de référence (résolution du système complet, voir Équation (III.1)). La HBM est utilisée dans toutes les méthodologies. Les Tableaux III.2 et III.3 résument les avantages des stratégies pour le cas d'une onde tournante et stationnaire. Un classement, basé sur les réductions numériques (taille du secteur de référence, nombre total d'inconnues, coût de la procédure AFT), est établi.

Pour le cas d'une onde tournante (voir le Tableau III.2), la méthode [119] permet d'associer chaque harmonique à un diamètre défini. La Méthode 2 utilise le même principe mais ne considère que les diamètres nodaux qui vont entrer en interaction via la non-linéarité (déterminés par la Section III.3). Cela permet à la Méthode 2 de réduire le nombre d'inconnues (on passe à $N_{h,2} < N_h$ harmoniques) et donc d'être plus efficace. Ces deux méthodes sont plus efficaces que la Méthode 1 du fait qu'elles supposent le déplacement sous la forme d'une onde tournante.

Dans le cas d'une onde stationnaire (voir le Tableau III.3), les nouvelles méthodologies (Méthodes 1, 2 et 3) sont toutes plus avantageuses que celle de [119]. Tout d'abord, seul un secteur fondamental est nécessaire (contre un supersecteur N_1 fois plus grand pour [119]). Ensuite, le nombre d'inconnues

est très réduit : seules les composantes cycliques non nulles sont évaluées pour les nouvelles méthodes et sont de tailles N_{diam} . La méthode [119] nécessite l'évaluation du déplacement sur le supersecteur complet, de taille $N_1 > N_{\text{diam}}$. Finalement le nombre de secteurs pour lequel les forces non-linéaires doivent être évaluées est également réduit. Cette réduction dépend de la méthode choisie. En faisant l'hypothèse que le déplacement (et donc les forces non-linéaires) présente la même symétrie que la force d'excitation, la Méthode 3 ne nécessite qu'une évaluation sur N_2 secteurs (plus petit que N_{diam}). La Méthode 1 est la seconde plus efficace et nécessite une évaluation sur N_{diam} secteurs. En troisième position se trouve la Méthode 2 avec une évaluation sur N_1 secteurs.

Il est important de remarquer que si l'excitation est une combinaison d'ondes tournantes et stationnaires, alors seule la Méthode 1 est adaptée à la résolution du problème et garde les mêmes capacités de réductions que celles données aux Tableaux III.2 et III.3.

Méthodes	Taille du secteur de référence	Solveur non-linéaire (HBM)		Rang
		Nbr. inconnues	Procédure AFT	
Référence	$N \times N_{\text{dof}}$	$(2N_h + 1) \times N \times N_{\text{ddl}}$	N secteurs	4
Méthode [119]	N_{ddl}	$(2N_h + 1) \times N_{\text{ddl}}$	1 secteur	2
Méthode 1	N_{ddl}	$(2N_h + 1) \times N_{\text{diam}} \times N_{\text{ddl}}$	N_{diam} secteurs	3
Méthode 2	N_{ddl}	$(2N_{h,2} + 1) \times N_{\text{ddl}}$	1 secteur	1

TABLEAU III.2 – Performance des différentes méthodes pour une onde tournante.

Méthodes	Taille du secteur de référence	Solveur non-linéaire (HBM)		Rang
		Nbr. inconnues	Procédure AFT	
Référence	$N \times N_{\text{ddl}}$	$(2N_h + 1) \times N \times N_{\text{ddl}}$	N secteurs	5
Méthode [119]	$N_1 \times N_{\text{ddl}}$	$(2N_h + 1) \times N_1 \times N_{\text{ddl}}$	N_1 secteurs	4
Méthode 1	N_{ddl}	$(2N_h + 1) \times N_{\text{diam}} \times N_{\text{ddl}}$	N_{diam} secteurs	2
Méthode 2	N_{ddl}	$(2N_h + 1) \times N_{\text{diam}} \times N_{\text{ddl}}$	N_1 secteurs	3
Méthode 3	N_{ddl}	$(2N_h + 1) \times N_{\text{diam}} \times N_{\text{ddl}}$	N_2 secteurs	1

TABLEAU III.3 – Performance des différentes méthodes pour une onde stationnaire.

Afin de mieux évaluer les performances des nouvelles méthodologies dans le cadre d'une onde stationnaire, les valeurs numériques de N_1 , N_2 et N_{diam} sont fournies au Tableau III.4 pour différentes valeurs de N et h_{ex} . Pour $N = 24$ et $h_{ex} = 2$, la méthode [119] nécessite un supersecteur de 12 secteurs fondamentaux (et le même nombre pour l'évaluation des forces non-linéaires). La Méthode 3, quant à elle, n'a besoin que d'un secteur fondamental (gain d'environ 92% en taille de mémoire) et l'évaluation des forces non-linéaires n'est faite que sur 3 secteurs.

N	24			27		
h_{ex}	2	3	4	2	3	4
N_1	12	8	6	27	9	27
N_2	3	2	2	14	5	14
$\mathbf{q}_{\text{interact}}$	(2, 6, 10)	(3, 9)	(4, 12)	[[0, 13]]	(0, 3, 6, 9, 12)	[[0, 13]]
N_{diam}	6	4	4	27	9	27

TABLEAU III.4 – Comparaison des valeurs de N_1 et N_2 pour différentes valeurs de N et h_{ex} .

La Méthode 1 est générale (aucune hypothèse n'est faite) et peut répondre à un grand nombre de cas industriels. Cette méthode devrait être capable de prendre en considération des effets gyroscopiques,

de traiter de résonances internes, suivi de bifurcations (type rupture de symétrie [115]). La réduction proposée en Section III.2 reste plus adaptée pour les non-linéarités polynomiales car les forces non-linéaires sont directement évaluées dans le domaine cyclique.

Pour la Méthode 2 (respectivement Méthode 3), le nombre de secteurs pour lequel les forces non-linéaires doivent être évaluées est fortement réduit mais nécessite l'hypothèse d'une forme spécifique du déplacement. Cette stratégie permet d'obtenir des résultats de façon très efficace mais elle n'est pas applicable en présence de comportements complexes comme par exemple pour une combinaison de forces extérieures.

3.5 Limitations des méthodes

Tout comme la limitation de la méthode développée en Section III.2, les stratégies proposées ici restreignent les solutions dans un espace défini par les diamètres nodaux considérés. Dans la majorité des cas, ces stratégies permettent de réduire la taille du problème. Cependant, comme fourni dans le Tableau III.4, nous pouvons avoir des situations où aucune réduction n'est obtenue ($N = 27$ et $h_{ex} = 4$). Notons également que ces méthodes ne peuvent pas être appliquées en présence de désaccordage. En effet pour de telles structures, tous les diamètres sont couplés du fait de la rupture de symétrie cyclique.

De plus, les Méthodes 1, 2, et 3, définies à la Section III.3, utilisent des résultats théoriques basés sur une non-linéarité régularisée du frottement. Dans le cas de problèmes avec une loi de contact (voir Équation (I.42)), les approches proposées ne sont plus rigoureuses. En effet, il est possible que, lors d'une période, le contact soit perdu et qu'ainsi la force non-linéaire soit nulle dans cet intervalle de temps. Le développement limité de la force non-linéaire n'est alors plus vrai et d'autres couplages peuvent donc exister. Il est néanmoins attendu que les résultats des méthodes restent globalement adaptés pour ce type de problèmes.

En revanche, ces méthodes sont difficilement applicables dans le cas de non-linéarité de type vibro-impact [85, 157] qui vont couvrir un large spectre d'un point de vue dynamique.

4 Validation des méthodologies sur un modèle masse-ressort

Dans un premier temps, nous allons valider les différentes stratégies sur un modèle masses-ressorts. Le système cyclique est représenté à la Figure III.6 et est constitué de $N = 24$ secteurs. C'est un modèle phénoménologique d'une roue aubagée. Ce même système a déjà été utilisé par Joannin [64, 66]. Deux non-linéarités sont considérées : le modèle de la Figure III.6a contient une non-linéarité cubique en tête de pale qui modélise des effets géométriques, le modèle de la Figure III.6b contient une non-linéarité de frottement et modélise la friction en pied de pale avec le disque. L'excitation est appliquée sur la tête de pale, au niveau de la masse (m_1).

Les valeurs numériques des masses, raideurs et de l'amortissement sont fournies au Tableau III.5 et III.6. Les valeurs des masses ont été choisies de façon à respecter une répartition en masse représentative d'un secteur de roue aubagée. Les valeurs en raideur sont prises de façon à ce que la première famille de modes de flexion correspond à un cas représentatif d'une roue aubagée (voir Figure III.7). Un amortissement modal de 0.1% a été utilisé pour les simulations.

m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
0.2	0.3	0.4	1.2	1.2

TABLEAU III.5 – Valeurs numériques des masses, en kg.

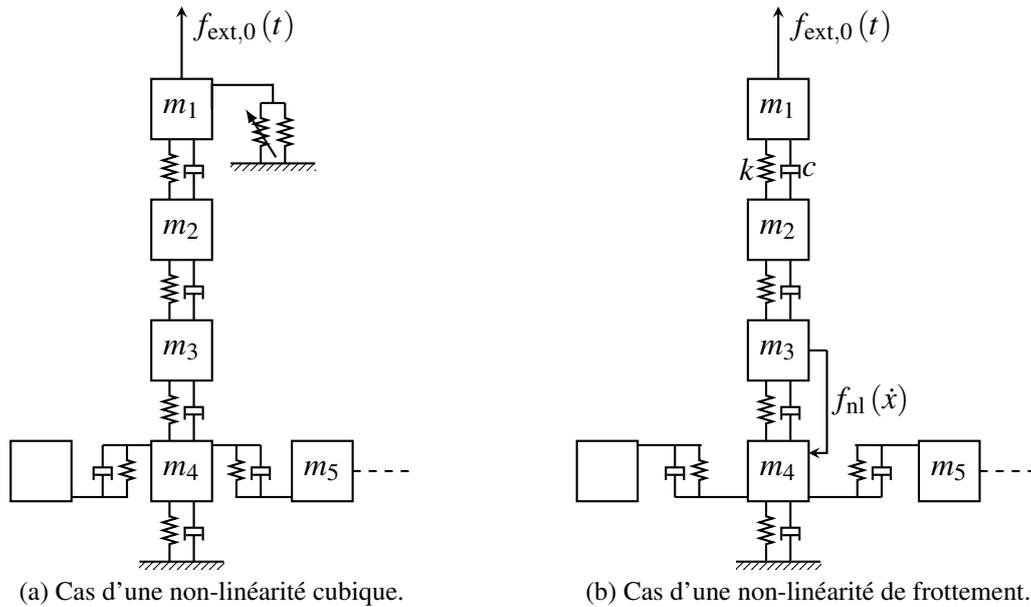


FIGURE III.6 – Représentation du cas test masses-ressorts.

Section du solide	k (10^6 N m^{-1})	c (N s m^{-1})
m_1 -sol	0.1	0
$m_1 - m_2$	2	1.3
$m_2 - m_3$	1	0.7
$m_3 - m_4$	40	26.7
$m_4 - m_5$	50	33.3
m_4 -sol	0.6	0.4

TABLEAU III.6 – Valeurs numériques des raideurs et amortisseurs.

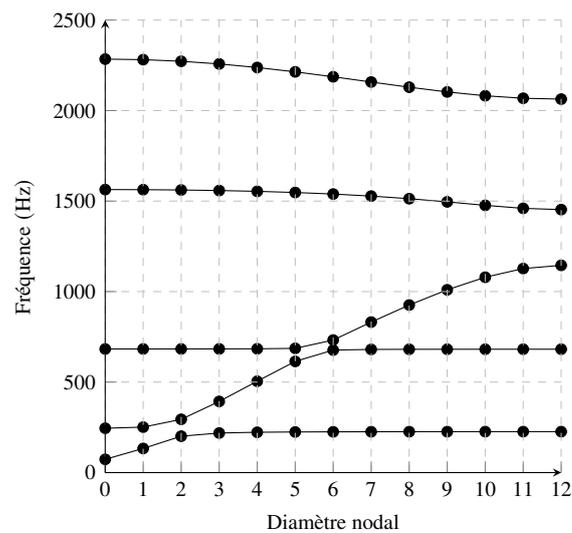


FIGURE III.7 – Diagramme fréquence-diamètres du système masses-ressorts.

4.1 Non-linéarité polynomiale

Tout d'abord, nous validons les résultats théoriques de la Section III.2 (réduction du système en ne prenant en compte que les diamètres nodaux qui interagissent via la non-linéarité). Pour cela la structure est soumise à une excitation $h_{ex} = 3$ (choix arbitraire). Deux excitations sont étudiées : une excitation tournante (voir Équation I.23) et une stationnaire (voir Équation I.25). D'après les résultats de la Section III.2, la solution appartient au sous-espace des déplacements formés des diamètres 3 et 9. Le système d'équations à résoudre est fourni à l'Équation (III.25). Afin de valider cette stratégie, le système d'équations complet (III.1) est également résolu. La HBM est employée pour la résolution de ces deux systèmes avec $N_h = 11$ harmoniques. Une méthode d'intégration temporelle est également employée sur le système complet. L'initialisation pour cette méthode est prise égale au résultat de la HBM avec l'ajout d'une petite perturbation (1% d'écart avec la solution HBM). Seuls les résultats dont l'initialisation est un point stable sont représentés (les autres ont divergé). La stabilité est déterminée par la méthode de Floquet expliquée en Section I.8.1.

L'amplitude de l'excitation est prise égale à 12.5 N. Le Tableau III.7 fournit les valeurs des fréquences propres du système. Le premier mode du diamètre 3 est étudié et donc la pulsation de l'excitation varie autour de $f_{3,1} = 218.54$ Hz (où $f_{i,j}$ représente la fréquence propre du mode j du diamètre i). La raideur non-linéaire est prise égale à k_{nl} à 2×10^9 N m⁻³.

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
\tilde{f}_3	218.54	393.15	683.25	1558.24	2257.67
\tilde{f}_9	226.08	681.36	1009.82	1495.64	2102.93

TABLEAU III.7 – Fréquences propres du système pour les diamètres 3 et 9, en (Hz).

La Figure III.8 représente les composantes spectrales \tilde{u}_3 et \tilde{u}_9 prises en tête de pale en fonction de la fréquence d'excitation. Les différentes méthodologies employées donnent les mêmes résultats, ce qui tend à confirmer la stratégie définie à la Section III.2.

La HBM est également employée avec l'hypothèse que le déplacement a la forme d'une onde tournante (voir Section III.1.1). Cette hypothèse associe les harmoniques $\{1, 7, 9\}$ au diamètre 3 et les harmoniques $\{3, 5, 11\}$ au diamètre 9. Cette hypothèse permet de retrouver les bons résultats et confirme, dans cette situation, le caractère tournant de la solution. Les amplitudes des harmoniques 1 et 3 du pic de la Figure III.8 sont représentées en Figure III.9 (les autres harmoniques n'interviennent que très peu et ne sont pas représentés).

Ces résultats traduisent un couplage non-linéaire entre le diamètre 3 et le diamètre 9, comme suggéré dans la Section III.2.

La Figure III.10 représente la réponse forcée du système soumis à une onde stationnaire. De nouveau, la résolution du système complet par HBM donne la même solution que la résolution du système réduit. Cependant le temps de résolution est 17 fois plus long, comme indiqué au Tableau III.8. Pour une même précision, la méthodologie de la Section III.2 est beaucoup plus rapide. L'intégration temporelle est employée sur les branches stables du système. Comme attendu, les solutions obtenues correspondent bien aux résultats des deux autres méthodologies. Afin de détecter toutes les solutions possibles par la méthode de réduction, un suivi de bifurcations a été effectué en suivant la méthodologie présentée à la Section I.8.2.

Pour bien comprendre les solutions aux trois pics numérotés de la Figure III.10, les amplitudes des harmoniques des diamètres 3 et 9 sont fournies à la Figure III.11. Dans un souci de concision, seuls les harmoniques 1, et 3 sont représentés. Pour le premier pic (sur la branche principale), \tilde{u}_3 répond principalement sur le premier harmonique (voir Figure III.11a) ; un couplage est observé pour le diamètre 9. Pour le second pic (voir Figure III.11b), l'amplitude du diamètre 9 est plus importante que le diamètre 3 et le pic est centré sur la fréquence propre du diamètre 9. Une résonance interne 1:1

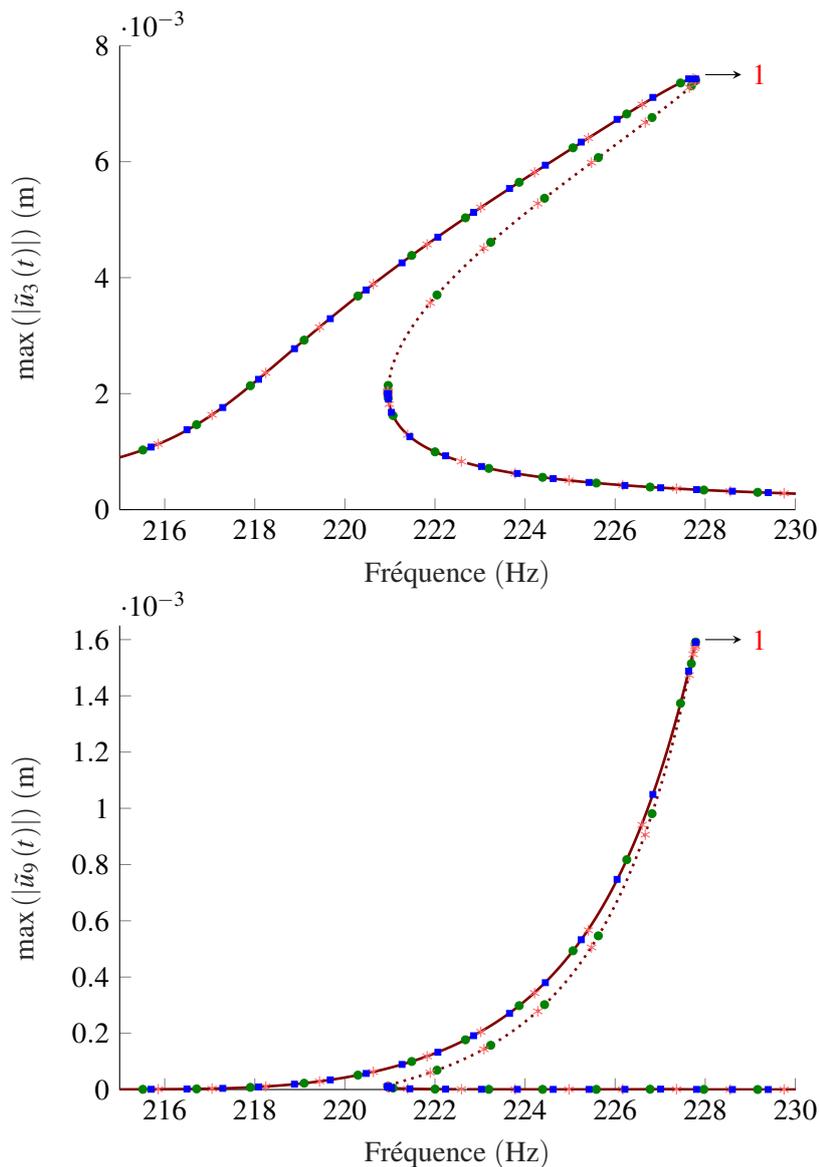


FIGURE III.8 – Réponse forcée pour le cas d'un chargement tournant. (—) : solution stable; (⋯) : solution instable du système réduit; (●) : solution du système complet; (*) : solution avec l'hypothèse d'une onde tournante [119]; (■) : résultats de l'intégration temporelle.

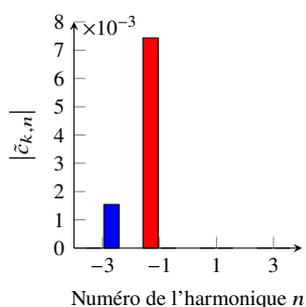


FIGURE III.9 – Amplitude des harmoniques pour le pic de la Figure III.8. (—) : $\tilde{c}_{3,n}$; (—) : $\tilde{c}_{9,n}$. Les autres harmoniques ont des amplitudes négligeables.

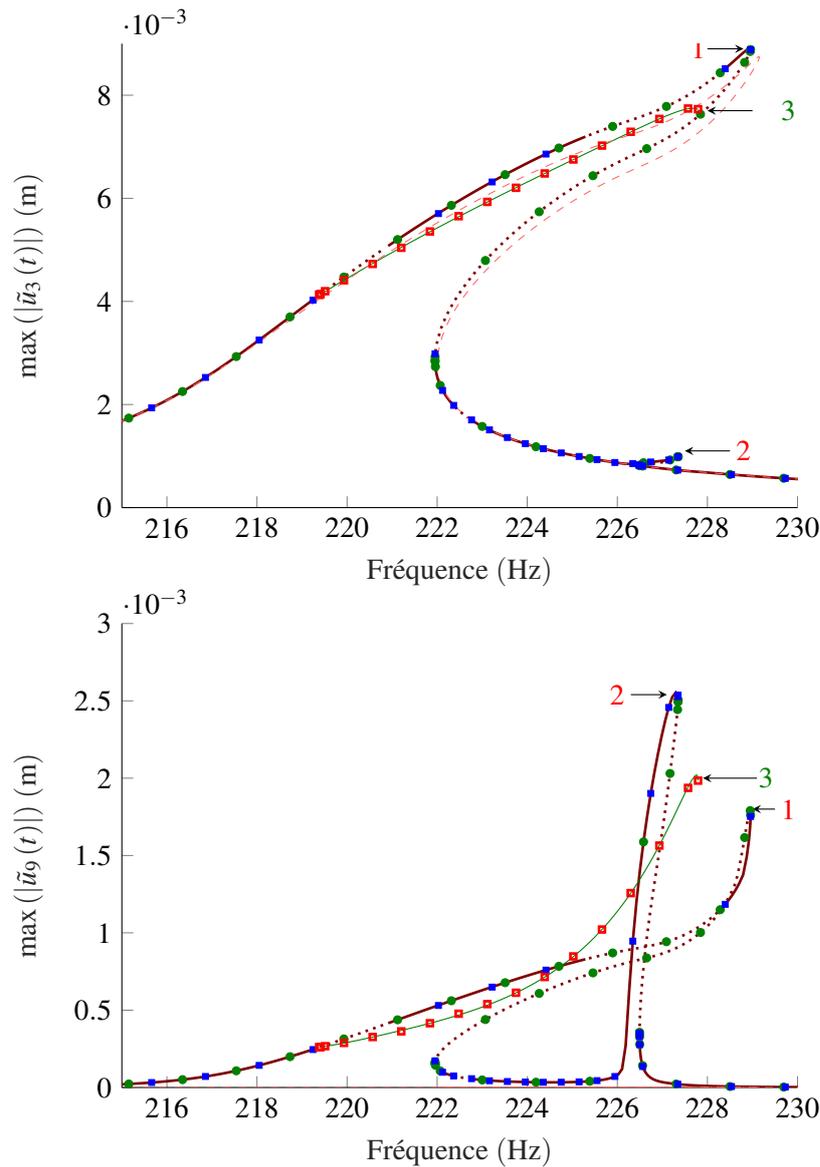


FIGURE III.10 – Réponse forcée pour le cas d'un chargement stationnaire. (—) : solution stable, (⋯) : solution instable du système réduit; (—) : branche bifurquée stable obtenue via le système réduit; (●) : branche principale du système complet; (■) : résultats d'intégration temporelle sur la branche principale, (□) : résultats d'intégration temporelle sur la branche bifurquée du système réduit.

est ainsi obtenue. Notons que pour ces deux solutions, la réponse a une forme d'onde stationnaire (les harmoniques vérifient $\tilde{c}_{k,n} = -\tilde{c}_{k,-n}$) et nous nous situons dans le cadre de l'analyse échelles multiple de l'Annexe E.1. Pour le troisième et dernier pic (situé sur la branche bifurquée), la solution se rapproche de la forme d'une onde tournante (voir Figure III.11c, $\tilde{c}_{k,n < 0} \neq 0$ et $\tilde{c}_{k,n > 0} = 0$). L'étude de la stabilité de Floquet au point de bifurcation montre une valeur propre qui sort du cercle unité par l'axe positif des réels. Le point traduit donc un point de bifurcation de type rupture de symétrie.

Une résonance interne 1:1 est mise en évidence pour le pic 2 : l'amplitude du diamètre 9 devient plus importante que celle du diamètre 3 (avec son premier harmonique temporel prépondérant).

Les résultats numériques présentés ici confirment les analyses théoriques des Sections III.2 et III.2.1 (couplages diamétraux pour des non-linéarités géométriques). La méthodologie développée permet de réduire le système d'équations de façon rigoureuse. De plus, une résonance interne 1:1 a été observée à

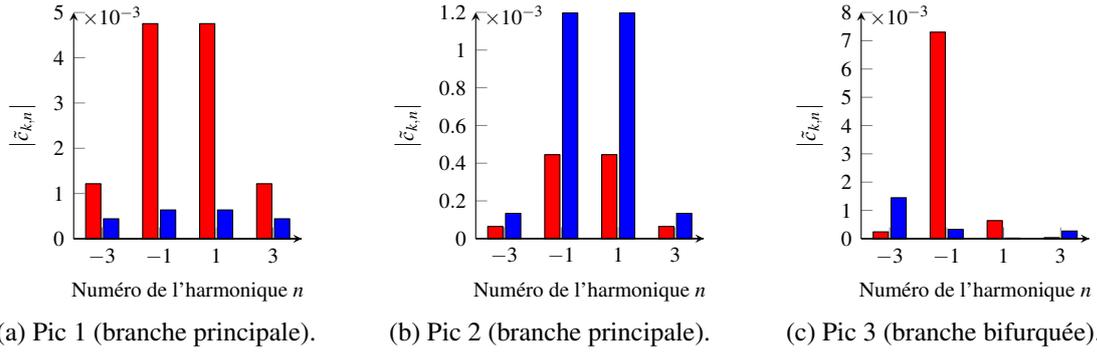


FIGURE III.11 – Amplitude des harmoniques pour les trois pics indiqués à la Figure III.10. (—) : $\tilde{c}_{3,n}$; (—) : $\tilde{c}_{9,n}$. Les autres harmoniques ont des amplitudes négligeables.

Méthode	Nombre d'inconnues	Temps de calcul (s)	
		Tournant	Stationnaire
Système complet (●)	2760	1805	2219
approche suggérée : système réduit (—) (évaluation non-linéaire en cyclique)	230	62	80
système réduit (évaluation non-linéaire en physique)	230	134	173

TABLEAU III.8 – Performance des différentes méthodes pour les excitations tournante et stationnaire. Les forces non-linéaires de (III.25) sont évaluées dans le domaine cyclique (approche suggérée, voir Figure III.2) et dans le domaine physique (voir Figure I.10).

la Figure III.10, en accord avec les résultats de la Section III.2.1, via la méthode des échelles multiples (une solution sous la forme d'une onde stationnaire peut présenter une résonance interne 1:1). La section suivante a pour but de valider les résultats théoriques de la Section III.3 (couplages diamétraux pour des non-linéarités de frottement) ainsi que les méthodes appelées Méthode 1, 2, 3.

4.2 Non-linéarité de frottement

Nous considérons désormais le système mécanique décrit à la Figure III.6b. Une non-linéarité de frottement est présente entre le pied de pale et le disque. Ce frottement sera modélisé par deux approches : dans un premier temps, une loi régularisée sera employée (identique à ce que nous avons utilisé dans la partie théorique de la Section III.3); dans un second temps une procédure sans régularisation sera utilisée. Les paramètres du modèle (masses, raideurs, amortissements) sont identiques à ceux de la section précédente (voir Tableau III.6).

4.2.1 Modélisation via une loi régularisée

Nous allons, tout d'abord considérer que le frottement est modélisé par une loi tangente hyperbolique avec le paramètre $f_{nl,N}$ égal à 1000 N et μ à 0.3. Une excitation stationnaire de nombre d'onde $h_{ex} = 3$ est appliquée sur la structure. Son amplitude varie entre 1 N et 5 N avec un incrément de 1 N. Les Méthodes 1, 2 et 3 sont employées et comparées avec la méthode de référence (résolution du système complet) et celle de Petrov [119]. Comme le modèle est de petite taille (un seul degré de liberté non-linéaire par secteur), le temps de calcul de la HBM avec 15 harmoniques reste raisonnable pour chacune des stratégies. Ce nombre est choisi suffisamment grand de façon à garantir la convergence des effets non-linéaires. Un tel nombre n'aurait pas pu être employé pour le modèle éléments finis de la

Section II.6.5.1 du fait du trop grand nombre d'inconnues et donc d'un temps de calcul trop important.

Les résultats sont présentés à la Figure III.12 et illustrent le déplacement des composantes cycliques non nulles (à savoir le diamètre 3 et 9). Les résultats se superposent parfaitement avec ceux de la méthode de référence. La variation de l'amplitude d'excitation permet de couvrir de faibles et forts niveaux de non-linéarités. Le pic de la composante \tilde{u}_3 , varie entre 207 Hz (état avec de faibles non-linéarités et donc un état collé) et 205 Hz (forts niveaux non-linéaire et donc un état glissant). Même pour de faibles niveaux d'excitations un couplage avec le diamètre 9 est observé.

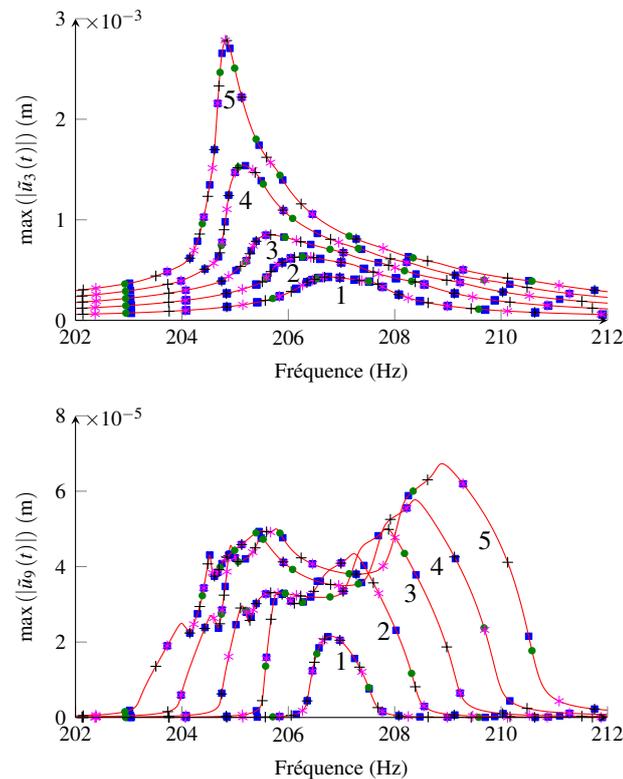


FIGURE III.12 – Réponses forcées pour une excitation stationnaire (de 1 N à 5 N). Le frottement est modélisé par une loi régularisée. (■) : solution de référence ; (+) : Méthode 1 ; (*) : Méthode 2 ; (—) : Méthode 3 ; (●) : méthode de Petrov.

Le Tableau III.9 fournit le nombre d'inconnues ainsi que le temps de calcul des différentes méthodologies. Pour les nouvelles méthodes (Méthodes 1, 2 et 3), la taille du modèle est réduit de 87.5% par rapport à [119] (où un supersecteur doit être considéré). De plus le nombre d'inconnues non-linéaires associé est divisé par 2, ce qui offre une réduction de temps de calcul d'environ 53% pour la Méthode 1. Pour la Méthode 3, les forces non-linéaires ne doivent être évaluées que pour deux secteurs, ce qui offre un gain de temps de 65%. Il est à noter que la différence entre les Méthodes 1, 2 et 3 réside seulement dans l'évaluation des forces non-linéaires. Nous voyons donc l'impact négatif d'une évaluation des forces non-linéaires sur un trop grand nombre de secteurs.

4.2.2 Modélisation via la procédure DLFT

Dans cette section, le même système est étudié, avec la même excitation. Seule la modélisation de la force non-linéaire est remplacée par la procédure DLFT [113]. Cet algorithme ne régularise pas la loi de Coulomb comme la tangente hyperbolique et est utilisé par la communauté [77, 78]. Le but de cette section est de valider la méthodologie de la Section III.3 pour une loi de contact discontinue.

Méthode	Taille du secteur de référencer	Nbr. inconnues	Temps de calcul (s)
Système complet	120	3600	11621
Méthode [119]	40	1240	1417
Méthode 1	5	620	659
Méthode 2	5	620	949
Méthode 3	5	620	488

TABLEAU III.9 – Performance des méthodes. Le temps de calcul est fourni pour le cas avec une excitation de 5 N. Les simulations ont été lancées sur un ordinateur Intel(R) Core(TM) i7-7700 @ 3.6 GHz.

La Figure III.13 illustre la réponse forcée du système. Comme pour la Figure III.12, les résultats se superposent et valident ainsi l'approche analytique de la Section III.3.

La comparaison de la Figure III.12 avec III.13 permet de visualiser l'influence du choix de la loi de contact (c'est le seul paramètre qui change entre les deux simulations). Pour une forte excitation, les différences sont minimales puisque le système est dans un état glissant, modélisé correctement par la loi tangente hyperbolique. En revanche, pour de faibles valeurs d'excitations, le système est partiellement collé et les résultats diffèrent légèrement. Ces différences viennent du fait que la loi tangente hyperbolique autorise toujours un glissement partiel (voir la Figure III.4 où la pente de \mathbf{f}_{nl} à 0 n'est pas verticale) contrairement à la DLFT qui peut représenter l'état collé pur et qui répond donc plus correctement à la loi de Coulomb. Cette différence se remarque principalement pour le cas d'une excitation d'1 N où le diamètre 9 a une amplitude deux fois plus grande due au couplage.

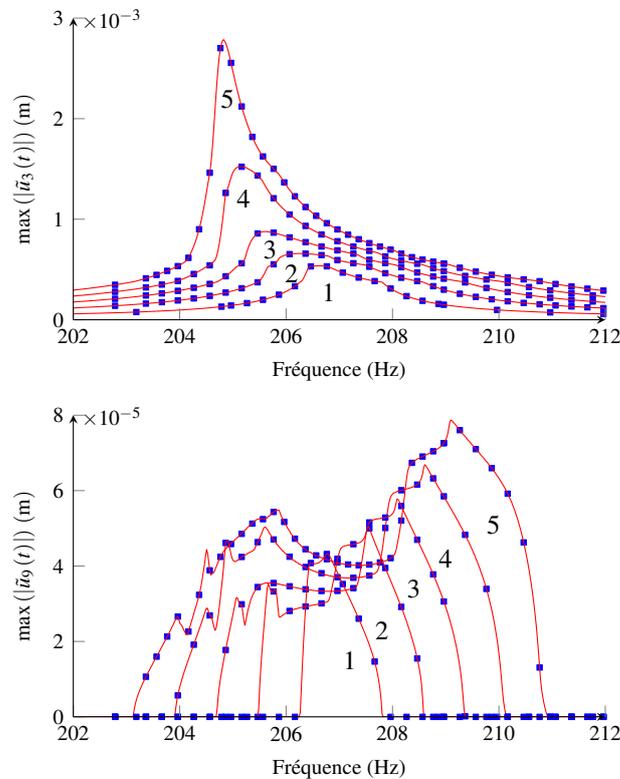


FIGURE III.13 – Réponses forcées pour une excitation stationnaire (de 1 N à 5 N). La procédure DLFT est utilisée pour modéliser le contact. La légende est identique à celle de la Figure III.12.

4.2.3 Cas d'une excitation complexe

Les résultats de cette Section insistent sur le caractère précis de la Méthode 1 et cherchent à valider le fait que la stratégie puisse gérer des excitations complexes (créées via la combinaison d'ondes tournantes et stationnaires) comme souligné dans la Section III.3.1.

Considérons une excitation constituée de deux ondes stationnaires ($h_{ex} = 2$ et $h_{ex} = 6$) et d'une onde tournante ($h_{ex} = 10$). Chaque onde a une amplitude de 5 N. La forme de l'excitation est fournie à la Figure III.14. Les calculs analytiques de la Section III.3 (voir le Tableau III.4) indiquent que seuls les diamètres 2, 6, et 10 se couplent. De plus les forces non-linéaires doivent être évaluées pour six secteurs. A titre d'information, une telle excitation n'a jamais été considérée dans [119], mais nécessiterait un supersecteur de 12 secteurs fondamentaux. Ainsi par comparaison, la Méthode 1 permet une réduction de 91.7% du modèle par rapport à [119], ainsi qu'une réduction de 50% du nombre d'inconnues et du nombre de secteurs sur lequel les forces non-linéaires doivent être évaluées.

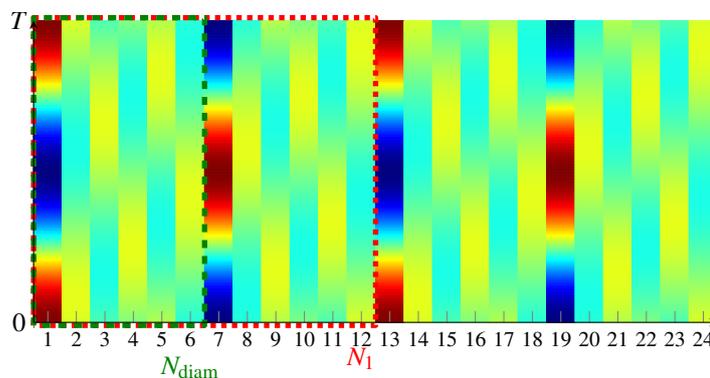


FIGURE III.14 – Forme de l'excitation créée par une combinaison d'onde tournantes et stationnaires.

La Figure III.15 compare les résultats entre la Méthode 1 et celle de référence. Encore une fois, la précision est parfaite et montre que la Méthode 1 permet d'être utilisée pour une excitation complexe avec des fortes non-linéarités.

Valider une méthodologie sur un modèle masses-ressorts permet de vérifier que la méthode fonctionne comme attendu (précision, temps de calcul, etc). Cela ne suffit, en revanche, pas pour assurer son bon fonctionnement sur des structures 3D en éléments finis. En effet, la dynamique de telles structures peut s'avérer beaucoup plus complexes qu'un modèle masses-ressorts. Dans le cas de la Section III.4.2, les effets de séparation, de décollement ne sont pas pris en compte. Ces phénomènes peuvent influencer sur la précision des méthodologies vues précédemment. A titre d'exemple, Joannin et al. ont validé la CNCMS sur un modèle masses-ressorts [66] mais n'ont pas validé leur méthode sur des modèles éléments finis. A travers la Section II.6.5.2, nous avons pu voir des différences assez importantes entre la CNCMS et la référence. Ces écarts témoignent du besoin de valider les nouvelles méthodes de réduction sur des structures éléments finis. Cette interrogation sera l'objet de la section suivante.

5 Validation des méthodologies sur un modèle éléments finis

Reprenons l'exemple du Turbotopo présenté à la Section II.6.5.1. L'obtention du système cyclique est décrit à la Figure III.16. Comme pour la méthode de référence (structure complète avec deux étapes de réduction de Craig-Bampton) et la CNCMS (voir Figure II.8), une première réduction de Craig-Bampton est effectuée (état 1), les propriétés de symétrie cyclique sont ensuite appliquées (voir Section I.2, état 2). Afin de diminuer davantage le nombre de degrés de liberté linéaires, les degrés de liberté des frontières sont réduits à travers une seconde réduction de Craig-Bampton (état 3). Une validation de ces réductions est faite en linéaire et les résultats sont identiques à ceux de la Figure II.10b

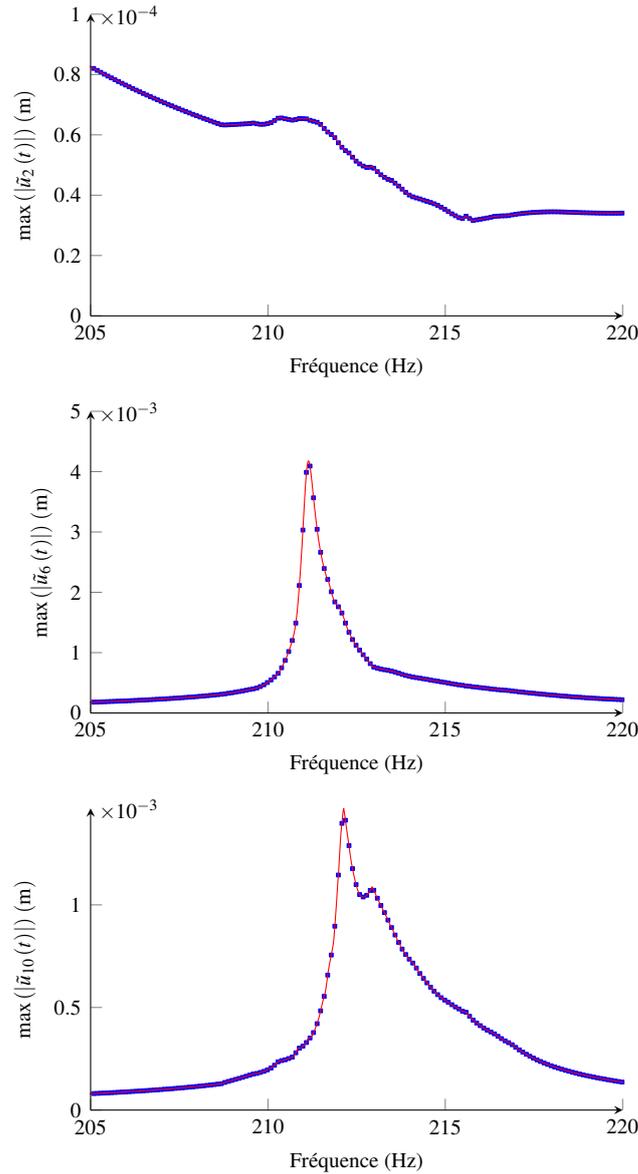


FIGURE III.15 – Réponse forcée du système soumis à une excitation combinée. Le frottement est modélisé par la DLFT. (■) : solution de référence ; (—) : Méthode 1.

et ne sont donc pas rappelés.

5.1 Cas d'une excitation tournante

Nous reprenons ici les simulations de la Section II.6.6 pour les mêmes couples (N, h_{ex}) . Une onde tournante est tout d'abord appliquée au système. Les résultats de la méthode de Petrov [119], de la Méthode 1 (voir Section III.3.1) et de la Méthode 2 (voir Section III.3.2) sont fournis.

La Figure III.17 montre que les résultats des différentes méthodologies reproduisent très bien la solution de référence. Pour quantifier d'éventuels écarts, nous utilisons l'erreur définie à l'Équation (II.51) ce qui donne lieu au le Tableau III.10.

Nous pouvons observer que la Méthode 1 et la méthode de [119] fournissent les mêmes niveaux d'erreurs pour le critère fourni à l'Équation (II.51). Cependant les courbes associées aux deux méthodes sont bien différentes : seule leur valeur au maximum d'amplitude sont identiques. Notons que, pour

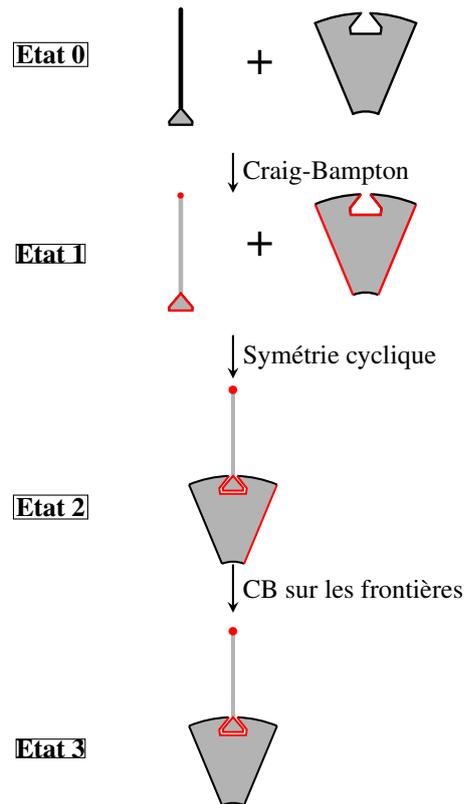


FIGURE III.16 – Procédure pour l’obtention des matrices cycliques structurales.

Nombre de secteurs	6	12	18	24
Méthode [119]	1.4%	3.2%	1.2%	0.6%
Méthode 1	1.4%	3.2%	1.2%	0.6%
Méthode 2	0.2%	0.1%	1.2%	1.6%

TABLEAU III.10 – Écart relatif pour une onde tournante.

chacune des stratégies, la réponse associée est très précise. Une erreur un peu plus importante peut être observée à la Figure II.11b pour la Méthode 1 et la méthode de Petrov (l’écart observé correspond à 3.2% d’erreur dans le Tableau III.10). Ce résultat est également surprenant sachant que la Méthode 2, qui fait davantage d’approximations, a une erreur de 0.1% seulement. La seule différence entre la Méthode 2 et la méthode de Petrov, en terme d’implémentations numériques, est que la méthode de Petrov considère un couplage entre le second harmonique temporel et le sixième diamètre. Donc normalement la méthode de Petrov offre plus de flexibilité à la résolution et on pourrait donc s’attendre à une erreur plus petite. Cet écart peut provenir du conditionnement numérique qui rendrait ces approches, quoique plus précises en théorie, moins robustes dans les faits.

5.2 Cas d’une excitation stationnaire

La Méthode 1 est également employée dans le cas d’une excitation stationnaire (pour les mêmes valeurs de N et h_{ex}). La Figure III.18 illustre le déplacement en tête de pale de tous les secteurs. Contrairement à la Figure III.17 (où l’onde était tournante), différents niveaux vibratoires sont observés pour les différents secteurs (et donc plusieurs courbes sont représentées sur la Figure III.17). Les échanges d’énergie entre les diamètres nodaux seront détaillés par la suite.

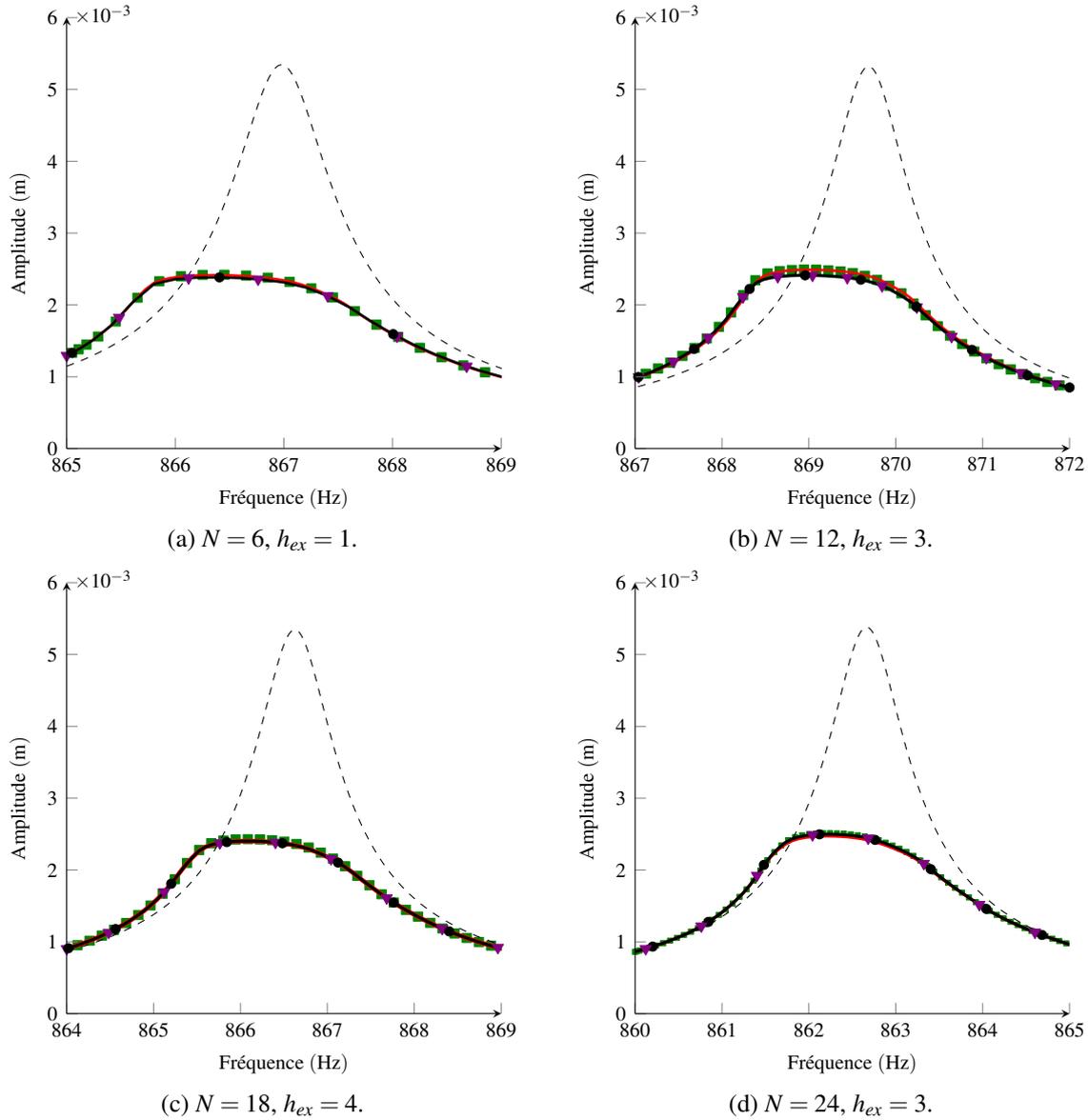


FIGURE III.17 – Réponses forcées du système soumis à une excitation tournante. (- -) : solution linéaire (état collé); (■) : solution de référence; (▼) : méthode de Petrov; (●) : Méthode 1; (—) : Méthode 2.

Comme précédemment les résultats de la Méthode 1 sont très proches de ceux de la référence. Le Tableau III.11 présente les erreurs de la Méthode 1. De nouveau, l'erreur maximale est obtenue pour le cas $N = 12, h_{ex} = 3$. La Méthode 1 ne fait aucune hypothèse sur la forme de la solution : comme expliqué à la Section III.3.1, elle est basée sur un développement analytique des forces non-linéaires de frottement dans le domaine cyclique pour déterminer les couplages inter-diamètres. La procédure DLFT permet de modéliser le frottement sans régularisation et prend également en compte une possible séparation des nœuds sur les zones de contact. Ainsi un nœud non-linéaire peut être au cours d'une période temporelle dans les états suivants : totalement séparé (il n'y a aucun contact, par conséquent la Méthode 1 est exacte sur la branche étudiée), jamais séparé (une nouvelle fois la Méthode 1 capture correctement cet état puisque le nœud peut alors être soit glissant ou collé), ou finalement le nœud peut être en partie séparé (le nœud alterne un état de contact et un état séparé au cours de la période temporelle). Pour cette dernière situation, la Méthode 1, étant uniquement basée sur un développement

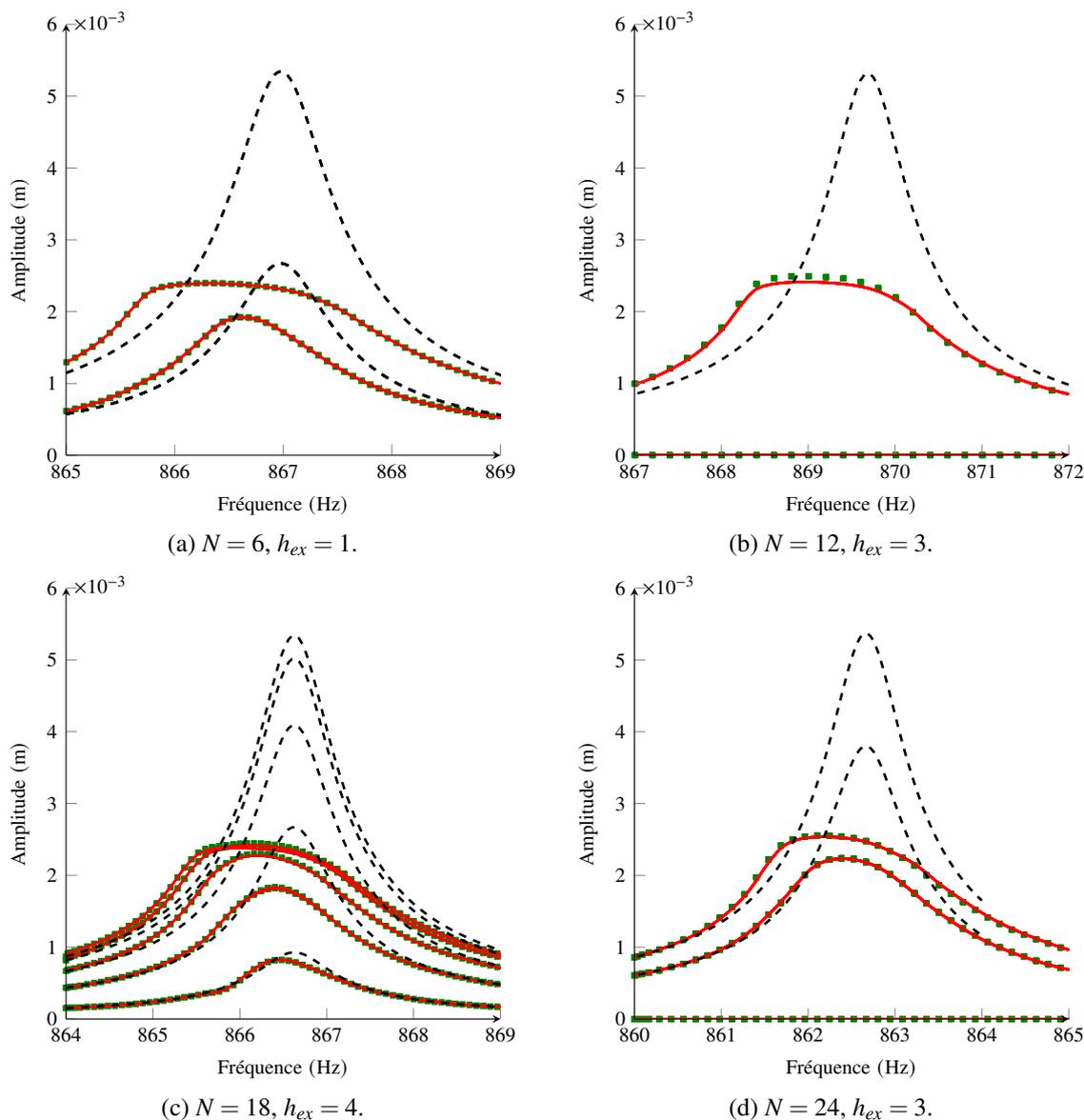


FIGURE III.18 – Réponses forcées du système soumis à une excitation stationnaire. (--) : solution linéaire (état collé); (■) : solution de référence; (—) : Méthode 1.

des forces de frottement et non de contact, n'est pas exacte et peut être une source d'écarts avec la méthode de référence.

Nombre de secteurs	6	12	18	24
Méthode 1	1.6%	3.2%	1.1%	0.6%

TABLEAU III.11 – Ecart relatifs pour une onde stationnaire.

Afin d'illustrer les états moyens des nœuds non-linéaires, la Figure III.19 présente l'état de contact moyen de ces nœuds au cours d'une période temporelle (discrétisée en n_{it} instants) pour la Méthode 1 (avec des lignes) et pour la méthode de référence (avec des marqueurs carrés et cercle). Les lignes pleines (ou marqueurs carrés) représentent le pourcentage de nœuds étant en séparation (couleur verte), en état collé (couleur rouge) et glissant (couleur bleu). A titre d'exemple, le pourcentage de nœuds

séparés se calcule par

$$\%separation = \frac{1}{n_{it}} \sum_{it=1}^{n_{it}} \left(\frac{1}{N_{ddl,nl}} \sum_{node=1}^{N_{ddl,nl}} (\text{contact}(it, node) == \text{separation}) \right) \times 100, \quad (\text{III.75})$$

avec « contact($it, node$) == separation » égal à 1 si l'état du nœud à l'instant it est séparé et 0 sinon. De plus, dans la Figure III.19, les lignes en tirets (ou marqueurs en cercle) donnent le pourcentage de nœuds ayant un état constant au cours de la période. Le même code couleur est employé (vert pour la séparation, rouge pour l'état collé et bleu pour un état glissant). Le pourcentage de nœuds étant séparé à tout instant se calcule par

$$\%separation_{tot} = \frac{1}{N_{ddl,nl}} \sum_{node=1}^{N_{ddl,nl}} (\text{contact}(\forall it, node) == \text{separation}) \times 100, \quad (\text{III.76})$$

avec « contact($\forall it, node$) == separation » égal à 1 si le nœud de contact est séparé pour tous les instants et 0 sinon. Le taux moyen de nœuds collés et glissants est calculé de façon similaire aux Équations (III.75) et (III.76). Ce post-traitement permet de décrire, dans sa globalité, l'état de contact du système. Par exemple, la Figure III.19c montre qu'à 864Hz les nœuds sont pour la plupart dans un état collé (98% globalement et environ 50% sont collés au cours de toute la période). La Méthode 1 fournit des résultats proches de ceux de la référence (de légers écarts sont visibles pour $N = 12$ et $N = 24$ mais la tendance globale est bien obtenue).

Ce post-traitement permet de quantifier la précision de la Méthode 1. En effet, le calcul du taux de séparation partielle (obtenu en faisant la différence entre les lignes vertes pleines et celles en pointillées de la Figure III.19) permet d'estimer le nombre de nœuds en séparation partiel et donc la précision de la Méthode 1. Pour les cas $N = 6, 12, 18$ et 24 , les nœuds ont respectivement un état global de séparation partielle au maximum de 6%, 8%, 1% et 0.2% (dans nos cas les lignes vertes en pointillées sont toutes à 0 et donc aucun nœud n'est totalement séparé au cours d'une période). Une corrélation peut ainsi être établie entre le niveau d'erreur du Tableau III.11 et le taux de nœuds partiellement séparé. A titre d'exemple, la Méthode 1 présentait un écart maximal de 3.2% pour le cas $N = 12$. Cet écart maximal correspond au maximum de nœuds dans un état de séparation partielle.

Il est important de remarquer que la Méthode 2, employée à la Section III.5.1, utilise en plus l'hypothèse que la solution est sous forme d'onde tournante. Par conséquent, les écarts observés pour cette méthode peuvent provenir aussi bien de la séparation partielle des nœuds de contact que de l'hypothèse de la forme cherchée de la solution.

La Méthode 3 (expliquée à la Section III.3.3) ne marche pas dans son état actuel car les forces extérieures sont constituées à la fois d'une force de précharge et d'une force dynamique. Il serait possible d'adapter la méthode pour un modèle préchargé. Cependant, nous voyons que la Méthode 1 marche très bien et est plus générale que les autres méthodologies développées. Elle peut donc être utilisée comme méthode de référence pour des modèles éléments finis accordés plus compliqués.

5.3 Performance des méthodes

Les Tableaux III.12 et III.13 contiennent les temps de calcul de la réponse forcée du système pour les différentes méthodes pour $N = 24$. Pour rappel, les simulations ont été lancées sur un ordinateur Intel(R) Core(TM) i7-7700 @ 3.6 GHz.

Pour une excitation tournante, la méthode de Petrov et la Méthode 2 sont très efficaces : les temps de calcul sont très largement inférieurs à ceux de la méthode de référence et à ceux de la CNCMS (voir Tableau II.4). La Méthode 1 nécessite davantage de temps de calcul (similaire à la CNCMS) mais offre plus de flexibilité puisqu'elle peut également être employée pour des excitations stationnaires.

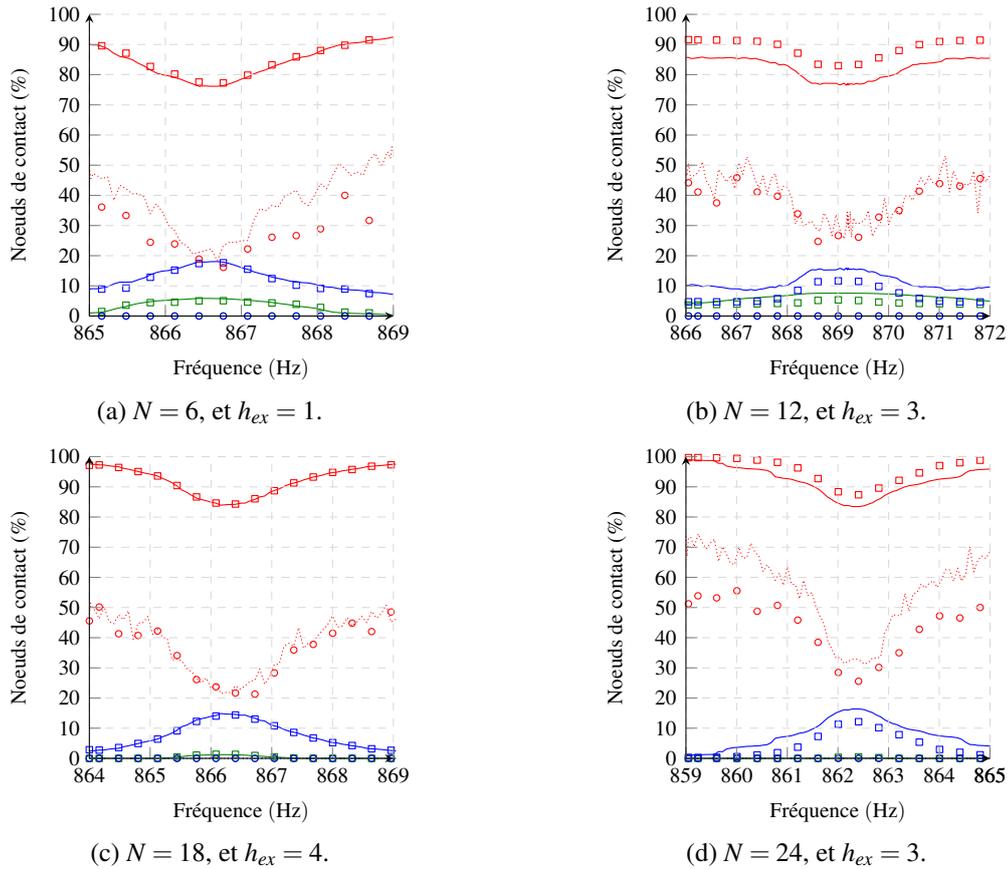


FIGURE III.19 – Statut moyen de l'état de contact des nœuds au cours d'une période. (—) : séparé ; (—) : collé ; (—) : glissant évalués par la Méthode 1. Pour chaque état, (.....) (avec le même code couleur) correspond au pourcentage de nœuds qui ne change pas d'état au cours de la période. (▣), respectivement (○), donnent les résultats associés à (—), respectivement (.....), mais pour la solution de référence (avec le même code couleur).

Méthode	Nombre d'inconnues	Temps de calcul
Modèle de référence	15120	7h
Méthode de Petrov [119]	630	40s
Méthode 1	3150	17 min
Méthode 2	450	24s

TABEAU III.12 – Performance des méthodes pour une excitation tournante.

Méthode	Nombre d'inconnues	Temps de calcul
Modèle de référence	15120	6h
Méthode 1	3150	18 min

TABEAU III.13 – Performance des méthodes pour une excitation stationnaire.

La Section III.4.2 a permis de valider les méthodologies définies dans la Section III.3 sur un modèle masses-ressorts. Des résultats identiques à la référence (résolution sur le modèle complet) ont été obtenus. Employer ces stratégies sur un modèle éléments finis 3D a permis de se rendre compte de certaines limitations qui ne sont pas visibles sur le modèle masses-ressorts qui est trop simplifié. Notamment, dans

le cas d'une perte de contact partielle de certains nœuds, les méthodes développées peuvent perdre en précision. Les résultats restent néanmoins très satisfaisants et témoignent de la robustesse des stratégies proposées.

Dans la Section II.6.5.2, la CNCMS a présenté quelques écarts sur le modèle TurboTopo Simple. Une question légitime serait de se demander si ces écarts sont encore plus importants dans le cas d'un modèle industriel. L'objectif de la section suivante est de répondre à cette question. Pour cela, nous comparerons les résultats de la CNCMS avec ces nouvelles méthodes (qui feront office de référence) sur un cas industriel.

6 Performance de la CNCMS sur un modèle éléments finis réaliste

Dans cette section, nous étudions un modèle élément finis d'une roue aubagée de turbine. La structure est représentée à la Figure III.20. L'objectif de cette section est d'étudier la précision de la CNCMS sur ce modèle plus réaliste.

6.1 Présentation du modèle réaliste : TurboTopo Vrillé

Le modèle est constitué de trois solides : un disque, une pale, et des amortisseurs sous plateformes. Ainsi deux zones de contact sont présentes : le contact pale/disque en pied de sapin (voir les zones vertes sur la Figure III.20c) et le contact entre la pale/amortisseurs sous plateformes (voir la Figure III.20d). Le secteur fondamental contient 30840 degrés de liberté (14430 pour la pale, 14628 pour le disque et 1782 pour les amortisseurs sous plateformes). Des éléments à fonction de forme quadratique sont utilisés pour le modèle. Le contact pale/disque est discrétisé en 432 degrés de liberté non-linéaires tandis que la zone pale/amortisseurs en 306 degrés de liberté non-linéaires. La structure est en rotation avec une vitesse $\Omega = 2200 \text{ rad s}^{-1}$. Une excitation type onde tournante est également appliquée en tête de pale avec une amplitude de 0.4 N avec $h_{ex} = 3$. Trois configurations de la structure sont étudiées : le cas pale/disque sans amortisseurs (seul le contact entre la pale et le disque est considéré, voir la Figure III.21a), le cas roue/amortisseur (seul le contact entre la pale et les amortisseurs est considéré, la pale est supposée être collée au disque, voir la Figure III.21b), et finalement le cas complet pale, disque et amortisseurs (toutes les zones de contact sont considérées, voir la Figure III.21c). Les forces non-linéaires sont évaluées avec l'algorithme de la DLFT avec un coefficient de frottement égal à $\mu = 0.15$. La HBM est employée avec une expansion $N_h = 3$ harmoniques.

La Figure III.22 représente les fréquences propres du système linéaire sous-jacent (pour ce calcul de valeurs propres, les nœuds de contact sont supposés être en état collé). Seules les 5 premières familles sont représentées : le premier mode de flexion « flapwise » (1F, les pales ont un mouvement principalement dans la direction orthoradiale), le premier mode de flexion « edge-wise » (1E, pales et disque ont une déformée axiale), le premier mode de torsion (1T), et le deuxième et troisième mode de flexion (2F et 3F). Dans cette section, le premier mode de flexion du troisième diamètre nodal est étudié (triangle vert sur la Figure III.22).

6.2 Résultats numériques

La méthode CNCMS (voir Section II.6) est employée et comparée avec la Méthode 2 (adaptée pour les structures accordées soumises à des excitations d'onde tournante). La procédure de Craig-Bampton (voir les états 0-1 des Figures II.8 et III.16) est appliquée sur chaque solide (pale, disque et amortisseur) et 60 modes internes sont conservés par solide. Le Tableau III.14 fournit les temps de calcul de réduction pour la CNCMS pour le cas complet (contact pale, disque, et amortisseur) : 1 seul mode non-linéaire est calculé (le premier mode de flexion) et les frontières cycliques sont réduites sur 400 modes d'interfaces. Les temps de réduction pour les méthodes cycliques sont négligeables (de l'ordre de la seconde) et ne sont donc pas fournis.

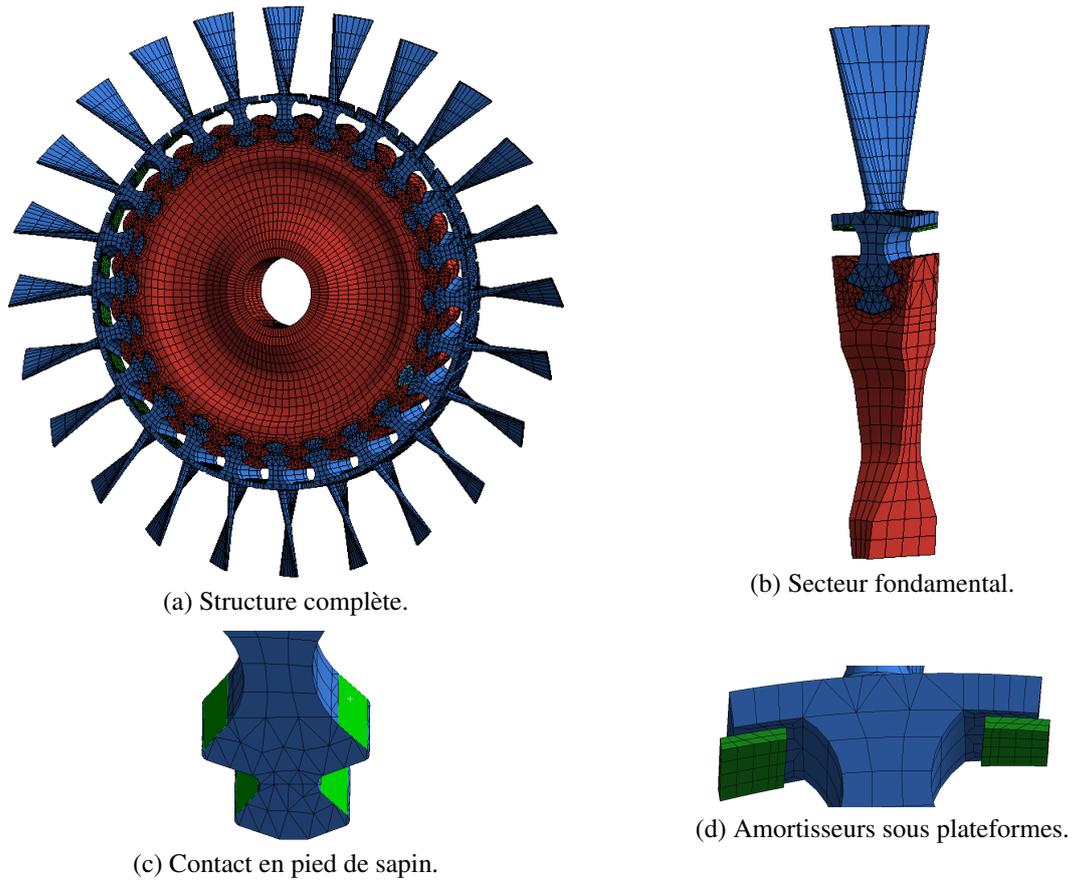


FIGURE III.20 – Modèle éléments finis : turbotopo vrillé.

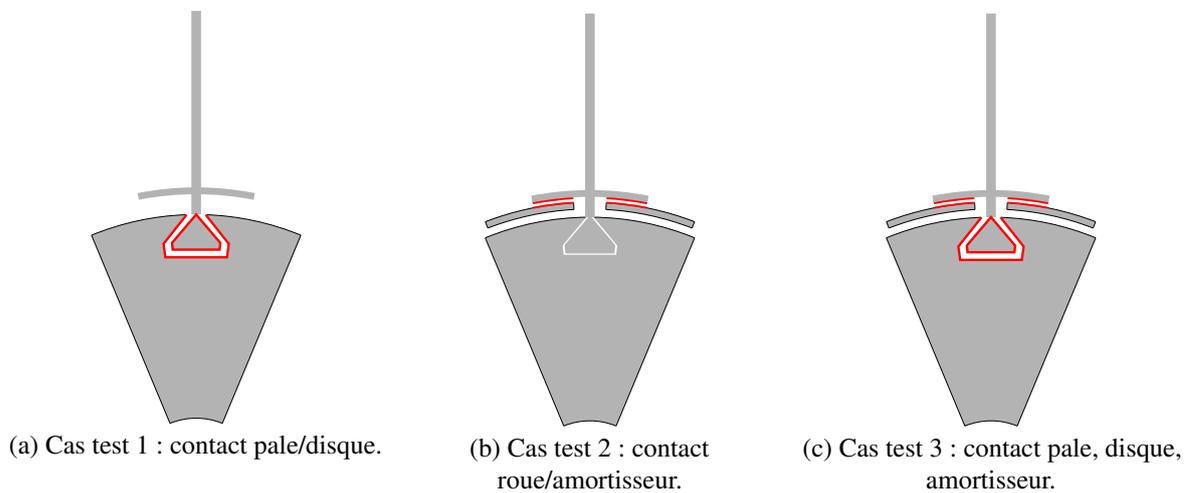


FIGURE III.21 – Schémas des trois cas tests. Les zones non-linéaires de contact prises en compte sont représentées en rouge.

La Figure III.23 présente les résultats numériques de la CNCMS et de la Méthode 2 pour les trois configurations. Des écarts sont obtenus pour chacune des situations. L'écart absolu (différence au niveau du maximum en tête de pale) pour chaque cas est respectivement égal à 22%, 46%, et 32%. Ces écarts mettent en évidence les limitations de la CNCMS observées à la Section II.6.5.2. Pour le cas TurboTopo

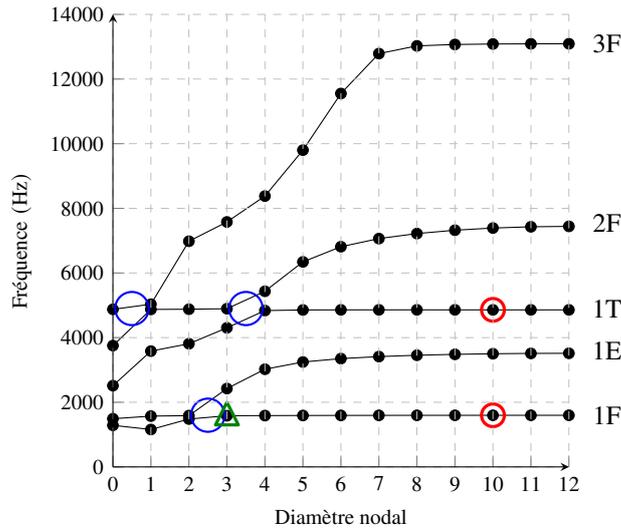


FIGURE III.22 – Diagramme fréquence-diamètres du système Turbotopo Vrillé. Les larges cercles bleus représentent des zones de veering. Les petits cercles rouges et le triangle vert représentent les modes qui vont être étudiés.

CNCMS		
	Mode non-linéaire	Modes d'interfaces
Nombre d'inconnues	$7 \times (432 + 306) = 5166$	$24 \times (1728 + 222) = 46800$
Temps de calcul	3 h	14 min

TABLEAU III.14 – Temps de calcul pour la CNCMS pour le cas complet (pale, disque, amortisseur). Les simulations ont été lancées sur un ordinateur Intel(R) Core(TM) i7-7700 @ 3.6 GHz.

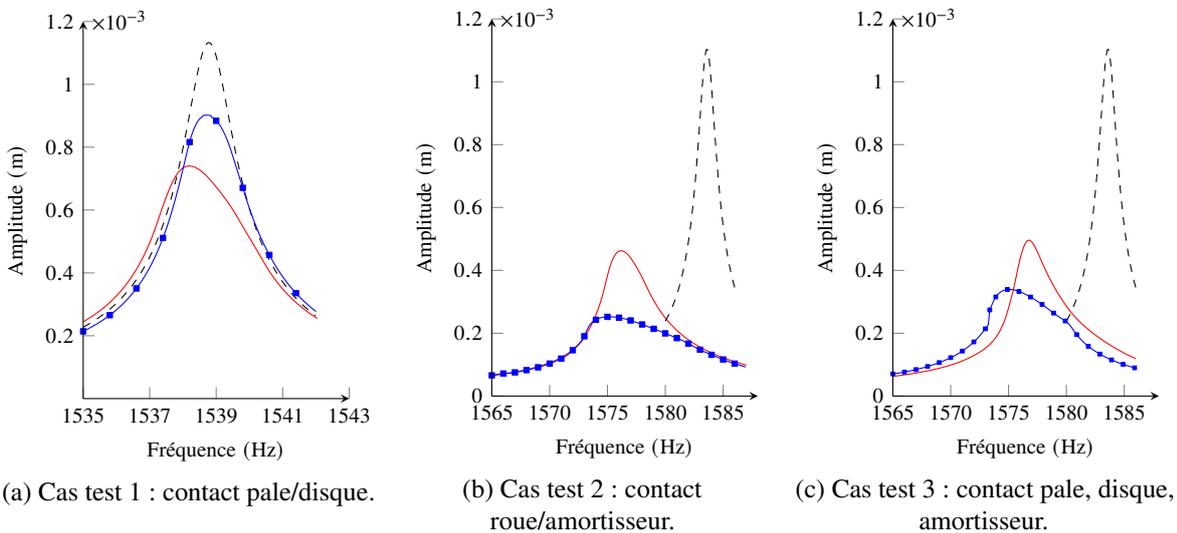


FIGURE III.23 – Réponses forcées des trois systèmes.(- -) : linéaire, (—) : méthode cyclique, et (—■) : CNCMS.

Simple, les écarts étaient autour de 10%, ce qui pouvait être acceptable au vu du gain en temps de calcul apporté par la méthode de réduction. En revanche, pour le cas TurboTopo Vrillé (plus réaliste d'une roue aubagée de turbine), les écarts observés ne sont plus acceptables.

Cette courte analyse permet également de mettre en évidence l'utilité des méthodes cycliques, développées dans cette Section. En effet, via ces méthodes, nous pouvons calculer une solution de référence et ainsi établir la précision de nouvelles méthodes de réduction sur des modèles éléments finis.

7 Bilan du chapitre

Pour un système à symétrie cyclique non-linéaire, formuler le problème dans l'espace cyclique ne permet pas a priori de réduire le système d'équations : toutes les composantes cycliques doivent être considérées et les forces non-linéaires doivent être évaluées pour tous les secteurs de la structure. Ce chapitre avait pour vocation de présenter des nouvelles méthodes de réduction pour des structures à symétrie cyclique soumises à des excitations tournantes ou stationnaires et présentant diverses non-linéarités. Ces méthodes cherchent les solutions du problème dynamique dans un sous-espace où seuls certains diamètres nodaux interagissent. Cet espace réduit est obtenu de façon analytique et permet de diminuer les temps de calcul de façon significative.

Dans le cadre de non-linéarité polynomiale, les forces non-linéaires ont pu être directement exprimées dans le domaine cyclique. Un exemple simple composé de masses et ressorts a été étudié. La méthode a donné des résultats extrêmement précis et est à même d'obtenir des résonances internes. Appliquer cette méthodologie sur des modèles éléments finis avec des non-linéarités géométriques est une perspective de ce travail. Une des difficultés majeures d'une telle application serait d'au préalable réduire le secteur fondamental avant d'appliquer la symétrie cyclique et la méthodologie proposée. En effet, prendre en compte des non-linéarités géométriques sur un modèle éléments finis est extrêmement coûteux puisque des tenseurs d'ordre 3 et 4 doivent être déterminés (voir Équation (I.44)). Des méthodes de réduction existent pour réduire le système comme la méthode STEP [111], la méthode de dérivée modale [148], la méthode des modes compagnons [106], etc. Récemment Vizzaccaro et al. [168] ont étendu la théorie de la forme normale [63, 158] à des modèles éléments finis. Leurs résultats semblent très prometteurs et pourraient constituer une base pour réduire le secteur fondamental avant d'employer la symétrie cyclique.

Dans le cadre des non-linéarités de frottement, différentes méthodologies ont pu être proposées. Le point commun aux méthodes est l'établissement théorique des diamètres nodaux interagissant via la non-linéarité. Avec cette base, nous avons défini la Méthode 1 qui réduit le nombre de secteurs sur lesquels les forces non-linéaires doivent être évaluées. Cette approche est purement théorique et ne fait pas d'hypothèses. Des déclinaisons (moyennant certaines hypothèses) ont été proposées dans le cadre d'une excitation tournante et d'une onde stationnaire. Ces méthodologies ont été validées sur un modèle simple constitué de masses et ressorts ainsi que sur un modèle éléments finis. Via ces méthodes, la précision de la CNCMS a pu être analysée sur un modèle réaliste et nous avons pu montrer que des écarts importants pouvaient être obtenus. Ceci confirme les remarques de la Section II.7 sur la performance de la CNCMS. Le but du prochain chapitre est de développer une nouvelle méthode de réduction traitant de modèles non-linéaires désaccordés.

Chapitre IV

Réduction pour des structures cycliques non-linéaires désaccordées

Sommaire du chapitre

1 Synthèse modale cyclique non-linéaire	88
1.1 Calcul du mode non-linéaire cyclique tournant	88
1.2 Méthode de synthèse cyclique	89
2 Principe de la Substructuring method based on Nonlinear Cyclic Reduction	91
2.1 Détails sur la création de la base non-linéaire	91
2.2 Choix de la base de réduction	96
3 Validation	97
3.1 Validation numérique pour une structure à symétrie cyclique	97
3.2 Validation de la SNCR pour des structures désaccordées	99
3.3 Performances et limitations	103
3.4 Exemple simple d'application	105
4 Bilan du chapitre	108

Ce chapitre propose une nouvelle méthode de réduction pour obtenir la dynamique de roues aubagées non-linéaires désaccordées. La CNCMS fait une sous-structuration de la roue complète et chaque secteur est réduit, entre autres par un mode complexe non-linéaire à interfaces fixes. Une telle sous-structuration permet de prendre en compte facilement du désaccordage puisque chaque secteur est piloté, en partie, indépendamment des autres. En revanche, des écarts ont pu être mis en évidence et ont pour origine le manque de représentativité de la réduction non-linéaire à interfaces fixes. La méthode présentée dans ce chapitre utilise également une sous-structuration pour prendre en compte le désaccordage mais réduit chaque secteur sur une base non-linéaire constituée des modes complexes cycliques non-linéaires. Elle est donc nommée méthode de réduction cyclique non-linéaire avec sous-structuration (*Substructuring method based on Nonlinear Cyclic Reduction*, SNCR).

Ce chapitre se décompose donc en trois parties : la première consistera à expliquer la méthode de synthèse modale non-linéaire cyclique, la deuxième détaillera la SNCR et finalement la dernière partie se concentrera sur une validation de la méthode sur le modèle TurboTopo simple.

1 Synthèse modale cyclique non-linéaire

Cette Section étend les développements des Sections II.3.2 et II.4 à des modes non-linéaires cycliques tournants. Comme détaillé à la Section I.4, les modes linéaires d'une structure accordée sont soit des modes non-dégénérés (la fréquence propre du mode est de multiplicité 1) soit des modes dégénérés (la fréquence propre est de multiplicité 2). Les modes non-dégénérés décrivent soit un mouvement du système à l'unisson (que l'on peut représenter comme une onde tournante directe avec $h_{ex} = 0$) ou un mouvement du système alterné (que l'on peut représenter comme une onde tournante directe avec $h_{ex} = \frac{N}{2}$). Les modes dégénérés vont par paire et leur déformée correspond à deux ondes tournante directe et rétrograde. Cette Section présente les développements d'une synthèse modale à partir d'un mode non-linéaire cyclique tournant direct. Le cas d'une onde rétrograde se fait de façon similaire.

1.1 Calcul du mode non-linéaire cyclique tournant

Considérons l'étude d'un diamètre noté h_{ex} et d'un de ses modes p . Supposons que le déplacement du système a la forme d'une onde tournante,

$$\mathbf{u}_j(t) = \mathbf{u}_1 \left(t - \frac{\alpha(j-1)h_{ex}}{\omega_p} \right). \quad (\text{IV.1})$$

Nous employons la définition du mode complexe non-linéaire [84], rappelée à la Section II.3.2 et cherchons le déplacement du premier secteur sous la forme suivante

$$\mathbf{u}_1(t) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{c}_0 + \sum_{n=1}^{N_h} \mathbf{c}_n e^{n(-\beta + i\omega_p)t} \right) + \text{c.c.} \quad (\text{IV.2})$$

Comme écrit à la Section III.1.1, combiner l'Équation (IV.2) avec (IV.1) permet d'exprimer le déplacement \mathbf{u}_j en fonction des harmoniques \mathbf{c}_n . Substituer cette expression de \mathbf{u}_j dans l'Équation (III.5) conduit à un appairage entre les harmoniques temporels et les diamètres nodaux

$$\tilde{\mathbf{u}}_k = \begin{cases} \frac{\sqrt{N}}{2} \tilde{\mathbf{c}}_n e^{n\lambda_{h_{ex}}^- t} \text{ ou } \frac{\sqrt{N}}{2} \mathbf{c}_n e^{n\lambda_{h_{ex}}^+ t} & \text{si } k \in \llbracket 1, M \rrbracket, n \in \mathcal{N}_k, \\ \frac{\sqrt{N}}{2} \left(\mathbf{c}_n e^{n\lambda_{h_{ex}}^+ t} + \tilde{\mathbf{c}}_n e^{n\lambda_{h_{ex}}^- t} \right) & \text{si } k \in \left\{ 0, \frac{N}{2} \right\}, n \in \mathcal{N}_k, \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

avec $\lambda_{h_{ex}}^\pm = (-\beta \pm i\omega_p)$. Le signe du scalaire $\lambda_{h_{ex}}$ dépend de l'harmonique n qui peut conduire à un repliement de spectre. Pour $n = 1$, le diamètre h_{ex} est excité. Pour les harmoniques supérieurs, il est nécessaire de faire le produit entre n et h_{ex} et de regarder le diagramme zigzag (voir Figure I.5) ou de calculer le reste de la division euclidienne de $n h_{ex}$ par N pour déterminer le diamètre k excité. Nous suivons alors les étapes de la HBM avec l'approximation $\beta \ll \omega_p$ (voir la Section I.7) et obtenons

$$\left\{ \left[\left(\lambda_{h_{ex}}^- \right)^2 \tilde{\mathbf{M}}_{h_{ex}} + \left(\lambda_{h_{ex}}^- \right) \tilde{\mathbf{C}}_{h_{ex}} + \tilde{\mathbf{K}}_{h_{ex}} \right] \frac{\sqrt{N}}{2} \tilde{\mathbf{c}}_1 + \langle \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}, h_{ex}}, e^{-i\omega_p t} \rangle = 0 \quad n = 1, \quad (\text{IV.4a}) \right.$$

$$\left. \left[\left(n\lambda_{h_{ex}}^\pm \right)^2 \tilde{\mathbf{M}}_k + \left(n\lambda_{h_{ex}}^\pm \right) \tilde{\mathbf{C}}_k + \tilde{\mathbf{K}}_k \right] \frac{\sqrt{N}}{2} \tilde{\mathbf{c}}_n + \langle \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}, k}, e^{\pm i n \omega_p t} \rangle = 0 \quad \forall n \in \llbracket 0, N_h \rrbracket \text{ et } n \neq 1. \quad (\text{IV.4b}) \right.$$

La projection des forces non-linéaires cycliques est évaluée de façon similaire que le déplacement et nous avons

$$\tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}, k} = \begin{cases} \frac{\sqrt{N}}{2} \tilde{\mathbf{c}}_{f_{\text{nl}, n}} e^{n\lambda_{h_{ex}}^- t} \text{ or } \frac{\sqrt{N}}{2} \mathbf{c}_{f_{\text{nl}, n}} e^{n\lambda_{h_{ex}}^+ t} & \text{si } k \in \llbracket 1, M \rrbracket, n \in \mathcal{N}_k, \\ \frac{\sqrt{N}}{2} \left(\mathbf{c}_{f_{\text{nl}, n}} e^{n\lambda_{h_{ex}}^+ t} + \tilde{\mathbf{c}}_{f_{\text{nl}, n}} e^{n\lambda_{h_{ex}}^- t} \right) & \text{si } k \in \left\{ 0, \frac{N}{2} \right\}, n \in \mathcal{N}_k. \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

Les inconnues du système (IV.4) sont les coefficients harmoniques $(\mathbf{c}_n)_{n \in \llbracket 0, N_h \rrbracket}$, la pulsation de résonance ω_p et le coefficient d'amortissement β . Deux équations réelles doivent être ajoutées au système pour sa résolution. Comme pour un mode complexe non-linéaire classique (voir Section II.3.2), nous imposons la partie réelle et imaginaire du premier harmonique d'un degré de liberté en tête de pale

$$\operatorname{Re}(\bar{\mathbf{c}}_{1,\text{tip}}) = x_{\text{amp}}, \quad (\text{IV.6a})$$

$$\operatorname{Im}(\bar{\mathbf{c}}_{1,\text{tip}}) = -x_{\text{amp}}. \quad (\text{IV.6b})$$

La résolution simultanée de (IV.4) et (IV.6) donne le mode complexe cyclique non-linéaire tournant direct. En pratique, le mode non-linéaire est évalué avec plusieurs harmoniques ($N_h > 1$) mais seul le premier harmonique sera récupéré et normalisé pour chaque amplitude de x_{amp} ,

$$\Phi_{h_{\text{ex}}}^- = \frac{\bar{\mathbf{c}}_1}{\bar{\mathbf{c}}_{1,\text{tip}}} = \frac{\bar{\mathbf{c}}_1}{x_{\text{amp}}(1 - \mathbf{i})}, \quad x_{\text{amp}} \in [0, X_f]. \quad (\text{IV.7})$$

Ce premier harmonique servira de base non-linéaire pour la synthèse modale et les harmoniques supérieurs ne seront pas pris en compte. $\Phi_{h_{\text{ex}}}^-$ est évalué numériquement pour l'ensemble des valeurs discrétisées de x_{amp} . Comme pour le mode complexe non-linéaire classique, une interpolation linéaire de $\Phi_{h_{\text{ex}}}^-$ et de $\lambda_{h_{\text{ex}}}^-$ est effectuée. Ces quantités sont finalement fonction de q_{tip} (avec $q_{\text{tip}} = |\bar{\mathbf{c}}_{1,\text{tip}}| = \sqrt{2}x_{\text{amp}}$). Des développements similaires peuvent être menés pour obtenir le mode complexe cyclique non-linéaire tournant rétrograde défini par la déformée $\Phi_{h_{\text{ex}}}^+$ et la valeur propre $\lambda_{h_{\text{ex}}}^+$.

1.2 Méthode de synthèse cyclique

Le concept de mode complexe cyclique non-linéaire tournant sera utilisé dans la Section IV.2 pour la nouvelle méthode de réduction non-linéaire. Nous faisons d'abord ici un parallèle avec la Section II.4 pour synthétiser la réponse forcée d'une structure non-linéaire soumise à une excitation d'onde tournante.

Supposons une structure à symétrie cyclique excitée par une onde tournante directe de fréquence ω et de nombre d'onde h_{ex} ($h_{\text{ex}} \leq K$). La pulsation est supposée proche de la fréquence de résonance du mode p dont le mode non-linéaire a été évalué. L'application de la HBM à ce système donne le système suivant à résoudre

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[(-i\omega)^2 \tilde{\mathbf{M}}_{h_{\text{ex}}} + (-i\omega) \tilde{\mathbf{C}}_{h_{\text{ex}}} + \tilde{\mathbf{K}}_{h_{\text{ex}}} \right] \frac{\sqrt{N}}{2} \bar{\mathbf{c}}_1 + \langle \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl},h_{\text{ex}}}, e^{-i\omega t} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext},h_{\text{ex}}}, e^{-i\omega t} \rangle, \quad n = 1, \quad (\text{IV.8a}) \\ \left[(-in\omega)^2 \tilde{\mathbf{M}}_k + (-in\omega) \tilde{\mathbf{C}}_k + \tilde{\mathbf{K}}_k \right] \frac{\sqrt{N}}{2} \bar{\mathbf{c}}_n + \langle \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl},k}, e^{-in\omega t} \rangle = 0, \quad \forall n \in \llbracket 0, N_h \rrbracket \text{ et } n \neq 1. \quad (\text{IV.8b}) \end{array} \right.$$

Comme pour la Section II.4, nous utilisons l'approximation proposée par Krack et al. [76] et supposons que l'Équation (IV.8b) est vérifiée en substituant le terme $\bar{\mathbf{c}}_n$ par sa composante associée du mode non-linéaire. Cette hypothèse est justifiée car $\omega \approx \omega_p$. Ainsi, seule l'Équation (IV.8a) est résolue. Le terme $\bar{\mathbf{c}}_1$ est substitué par $\Phi_{h_{\text{ex}}}^- q_{h_{\text{ex}}}^-$, où $q_{h_{\text{ex}}}^-$ est la coordonnée généralisée qui pilote le mode non-linéaire p . Le système (IV.8a) est alors pré-multiplié par $\Phi_{h_{\text{ex}}}^-$ et s'écrit

$$\left(\Phi_{h_{\text{ex}}}^- \right)^\top \left(\left[(-i\omega)^2 \tilde{\mathbf{M}}_{h_{\text{ex}}} + (-i\omega) \tilde{\mathbf{C}}_{h_{\text{ex}}} + \tilde{\mathbf{K}}_{h_{\text{ex}}} \right] \frac{\sqrt{N}}{2} \Phi_{h_{\text{ex}}}^- q_{h_{\text{ex}}}^- + \langle \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl},h_{\text{ex}}}, e^{-i\omega t} \rangle - \langle \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext},h_{\text{ex}}}, e^{-i\omega t} \rangle \right) = 0. \quad (\text{IV.9})$$

Le terme $\langle \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl},h_{\text{ex}}}, e^{-i\omega t} \rangle$ est substitué via le mode non-linéaire (voir Équation (II.22a)) :

$$\langle \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl},h_{\text{ex}}}, e^{-i\omega t} \rangle = - \left[\left(\lambda_{h_{\text{ex}}}^- \right)^2 \tilde{\mathbf{M}}_{h_{\text{ex}}} + \left(\lambda_{h_{\text{ex}}}^- \right) \tilde{\mathbf{C}}_{h_{\text{ex}}} + \tilde{\mathbf{K}}_{h_{\text{ex}}} \right] \frac{\sqrt{N}}{2} \Phi_{h_{\text{ex}}}^- q_{h_{\text{ex}}}^-. \quad (\text{IV.10})$$

Au final, le système à résoudre est

$$\left(\Phi_{h_{ex}}^-\right)^T \left(\left[\left((-i\omega)^2 - (\lambda_{h_{ex}}^-)^2 \right) \tilde{M}_{h_{ex}} + \left((-i\omega) - (\lambda_{h_{ex}}^-) \right) \tilde{C}_{h_{ex}} \right] \frac{\sqrt{N}}{2} \Phi_{h_{ex}}^- q_{h_{ex}}^- - \langle \tilde{f}_{ext, h_{ex}}, e^{-i\omega t} \rangle \right) = 0. \quad (IV.11)$$

Seules deux inconnues régissent le système : la partie réelle et imaginaire de $q_{h_{ex}}^-$. Notons que les forces non-linéaires ne doivent pas être ré-évaluées et donc la résolution d'un tel système est très rapide. Pour synthétiser une réponse forcée d'une structure soumise à une excitation tournante rétrograde, le même raisonnement peut être appliqué. L'équation sera alors similaire à (IV.11) avec les quantités $\Phi_{h_{ex}}^+$ et $\lambda_{h_{ex}}^+$.

Considérons l'exemple du cas TurboTopo Simple de la Section II.6.5.1 avec $N = 24$. La tête de pale II.7b est excitée avec une onde tournante directe avec une amplitude de 0.1, 0.15, 0.2, et 0.25 N et un nombre d'onde égal à $h_{ex} = 3$. La méthode de synthèse modale cyclique non-linéaire présentée ci-dessus et la méthode de résolution complète (voir Méthode de référence Figure II.8) sont employées. Comme expliqué dans la Section III.1.1, pour une excitation tournante, les secteurs vont avoir la même déformée avec une phase différente. Par conséquent les résultats de la Figure IV.1 ne représente le déplacement de tête de pale que d'un seul secteur. Quatre courbes sont représentées représentant les quatre niveaux d'amplitude appliqués à la structure.

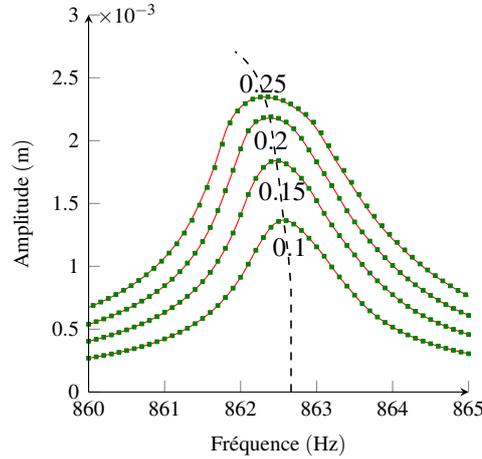


FIGURE IV.1 – Réponses forcées du cas TurboTopo simple soumis à une excitation onde tournante pour différentes amplitudes. (---) : courbe squelette du mode non-linéaire ; (■) : méthode de référence ; (—) : synthèse modale cyclique non-linéaire.

La Figure IV.1 montre que les résultats de la synthèse modale non-linéaire sont très précis. Nous pouvons également voir que la backbone du mode complexe non-linéaire [116] passe très proche des extrema de chacune des réponses forcées.

Les temps de calcul des deux méthodes sont fournis au Tableau IV.1. Pour la structure éléments finis étudiée le temps de calcul d'un mode complexe non-linéaire cyclique est approximativement de 50 min. Ce temps est cinq fois plus long que le calcul d'un mode non-linéaire à interfaces fixes. Ceci peut s'expliquer par le fait que le modèle cyclique n'a pas été réduit aux frontières (la procédure de Craig-Bampton entre les états 2-3 de la Figure III.16 n'a pas été appliquée) et donc la condensation de Schur qui réduit le modèle sur les nœuds non-linéaires est beaucoup plus longue car davantage de nœuds linéaires doivent être réduits. Nous avons décidé de garder les nœuds de frontières dans cette simulation car la nouvelle méthodologie présentée ci-dessus requiert la déformée au niveau des frontières de symétrie cyclique. Malgré ce temps de réduction relativement long, nous voyons que la synthèse de la réponse forcée s'effectue quant à elle très rapidement.

De telles performances sont évidemment très intéressantes. Cependant la synthèse modale cyclique non-linéaire n'est valable que pour des structures à symétrie cyclique et pour des ondes tournantes.

	Synthèse modale	Référence
Nombre d'inconnues	2	15120
Temps de calcul (FrF)	30 s	7 h
Temps de calcul total	51 min	8 h

TABLEAU IV.1 – Temps de calcul des méthodes pour une amplitude d'excitation de 0.25 N. Les calculs ont été réalisés sur un ordinateur Intel(R) Core(TM) i7-7700 @ 3.6 GHz.

Afin d'illustrer cette limitation, la même structure est cette fois excitée avec une onde stationnaire de nombre d'onde $h_{ex} = 3$ et d'amplitude 0.25 N. Pour cette excitation, les secteurs ont des amplitudes différentes et donc les déplacements de tous les secteurs sont représentés pour la méthode de synthèse et pour celle de référence. Les résultats sont représentés à la Figure IV.2. Comme attendu, de gros écarts sont visibles : la méthode de synthèse (avec le mode non-linéaire évalué avec une hypothèse d'onde tournante) ne permet pas de retrouver les différents niveaux d'énergie des secteurs (un seul niveau est obtenu).

Le but de la section suivante est de développer une méthodologie palliant ces difficultés et permettant également d'étudier des systèmes désaccordés.

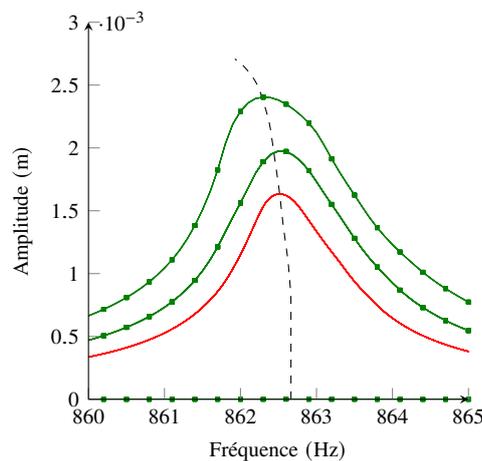


FIGURE IV.2 – Réponse forcée du cas TurboTopo simple soumis à une excitation onde stationnaire (amplitude 0.25 N et $h_{ex} = 3$). (- -) : backbone du mode non-linéaire ; (-■-) : méthode de référence (déplacement de tous les secteurs) ; (—) : synthèse modale cyclique non-linéaire.

2 Principe de la Substructuring method based on Nonlinear Cyclic Reduction

Dans cette section, nous développons la nouvelle méthode de réduction non-linéaire appelée *Substructuring method based on Nonlinear Cyclic Reduction* (SNCR). Comme pour la méthode de référence ou la CNCMS (voir Figure II.8), les différentes étapes de la SNCR sont rappelées à la Figure IV.3.

2.1 Détails sur la création de la base non-linéaire

La première réduction de la méthode reprend la réduction de la CNCMS (voir Section II.6.1) qui consiste à faire une sous-structuration du système cyclique. Les M secteurs désaccordés intentionnelle-

ment sont chacun réduits par une procédure de Craig-Bampton. Pour chaque type de secteur $(S_i)_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket}$, nous appliquons la symétrie cyclique comme si la structure complète était formée uniquement de ce secteur S_i (État 2 de la Figure IV.3). Les modes complexes cycliques tournants directs et rétrogrades sont évalués via la méthodologie expliquée à la Section IV.1.1 (État 3 de la Figure IV.3).

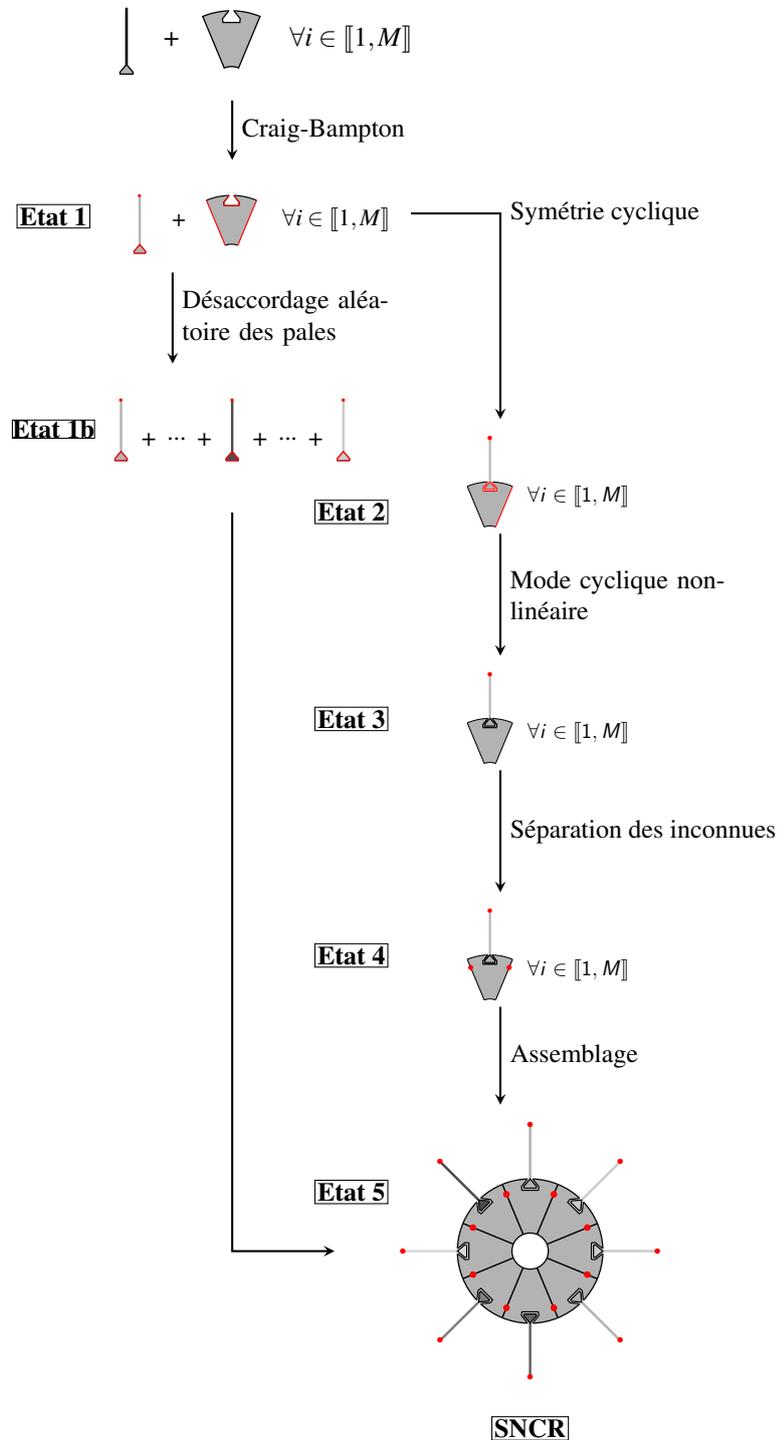


FIGURE IV.3 – Principe de la SNCR.

Comme le déplacement cyclique d'un diamètre peut s'écrire comme la somme de ces modes tournants en linéaire [108], nous faisons l'hypothèse qu'il en est de même en non-linéaire à la différence

près où chacun des modes est modulé par des amplitudes différentes

$$\tilde{\mathbf{u}}_{k,i} = \sum_{p=1}^{N_{\text{mode}}} \left(\Phi_{k,p,i}^- (q_{\text{tip}}) q_{k,p}^- e^{-i\omega t} + \Phi_{k,p,i}^+ (q_{\text{tip}}) q_{k,p}^+ e^{i\omega t} \right), \quad i \in \llbracket 1, M \rrbracket, \quad (\text{IV.12})$$

avec N_{mode} le nombre de modes réduits gardés pour l'analyse et $\tilde{\mathbf{u}}_{k,i}$ le déplacement cyclique du k -ème diamètre pour le secteur de type i . Les quantités $q_{k,p}^-$ et $q_{k,p}^+$ sont les coordonnées généralisées et sont associées au diamètre nodal k et au mode p . Pour un diamètre non-dégénéré, chaque mode est de multiplicité 1 (avec $k = 0$, les secteurs vibrent à l'unisson, et pour $k = \frac{N}{2}$ les secteurs vibrent de façon alternée) et il n'y a donc plus de distinction entre mode direct et rétrograde.

Considérons un secteur j avec un désaccordage intentionnel de type $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$. Via les Équations (I.4) et (IV.12), le déplacement sur ce secteur s'écrit

$$\mathbf{u}_j = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\mathbf{u}}_{k,i} e^{i(j-1)k\alpha} \quad (\text{IV.13a})$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{p=1}^{N_{\text{mode}}} \left(\Phi_{k,p,i}^- (q_{\text{tip},j}) q_{k,p,j}^- e^{-i\omega t} + \Phi_{k,p,i}^+ (q_{\text{tip},j}) q_{k,p,j}^+ e^{i\omega t} \right) \right]. \quad (\text{IV.13b})$$

Le terme $e^{i(j-1)k\alpha}$ dans (IV.13a) est directement inclus dans les termes $q_{k,p,j}^-$ et $q_{k,p,j}^+$ dans l'Équation (IV.13b). Remarquons que la formulation de l'Équation (IV.13b) est plus flexible que (I.4) parce que chaque secteur j est contrôlé indépendamment.

Le déplacement \mathbf{u}_j doit satisfaire le système d'équations suivant

$$\mathbf{M}_j \ddot{\mathbf{u}}_j + \mathbf{C}_j \dot{\mathbf{u}}_j + \mathbf{K}_j \mathbf{u}_j + \mathbf{f}_{\text{nl},j} + \mathbf{f}_{s,j} = \mathbf{f}_{\text{ext},j}, \quad (\text{IV.14})$$

avec, rappelons-le, \mathbf{M}_j , \mathbf{C}_j , \mathbf{K}_j les matrices de masse, amortissement et raideur du secteur j , qui prennent en compte le désaccordage intentionnel (le secteur j est de type $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$) et aléatoire. Le terme $\mathbf{f}_{s,j}$ correspond aux forces appliquées par les secteurs voisins du secteur j . La HBM est alors appliquée avec un harmonique sur le système (IV.14) et donne :

$$\mathbf{Z}_{1,j} \mathbf{c}_{1,j} + \langle \mathbf{f}_{\text{nl},j}, e^{i\omega t} \rangle + \langle \mathbf{f}_{s,j}, e^{i\omega t} \rangle = \langle \mathbf{f}_{\text{ext},j}, e^{i\omega t} \rangle, \quad (\text{IV.15})$$

avec $\mathbf{Z}_{1,j}$ la matrice de rigidité dynamique associée au premier harmonique du secteur j et $\mathbf{c}_{1,j}$ le coefficient complexe du premier harmonique de \mathbf{u}_j . Via l'Équation (IV.13b), ce coefficient s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{1,j} &= \langle \mathbf{u}_j, e^{i\omega t} \rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{p=1}^{N_{\text{mode}}} \left(\Phi_{k,p,i}^- (q_{\text{tip},j}) q_{k,p,j}^- e^{-i\omega t} + \Phi_{k,p,i}^+ (q_{\text{tip},j}) q_{k,p,j}^+ e^{i\omega t} \right) \right], e^{i\omega t} \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=0}^K \left[\sum_{p=1}^{N_{\text{mode}}} \left(\Phi_{k,p,i}^- (q_{\text{tip},j}) q_{k,p,j}^- e^{-i\omega t} + \Phi_{k,p,i}^+ (q_{\text{tip},j}) q_{k,p,j}^+ e^{i\omega t} \right) \right], e^{i\omega t} \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \sum_{k=1}^M \left[\sum_{p=1}^{N_{\text{mode}}} \left(\bar{\Phi}_{k,p,i}^- (q_{\text{tip},j}) \bar{q}_{k,p,j}^- e^{i\omega t} + \bar{\Phi}_{k,p,i}^+ (q_{\text{tip},j}) \bar{q}_{k,p,j}^+ e^{-i\omega t} \right) \right], e^{i\omega t} \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^K \left[\sum_{p=1}^{N_{\text{mode}}} \left(\bar{\Phi}_{k,p,i}^- (q_{\text{tip},j}) \bar{q}_{k,p,j}^- + \Phi_{k,p,i}^+ (q_{\text{tip},j}) q_{k,p,j}^+ \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

où la propriété (I.5) a été utilisée pour simplifier la somme initiale allant de $K + 1$ à $N - 1$ en la somme allant de 1 à M (via les termes complexes conjugués). La dernière équation de (IV.16) rassemble les

différents termes et est écrite en une seule somme. Pour que la relation soit vraie, nous imposons $\bar{q}_{k,p,j}^-$ égal à 0 pour $k = 0$ et $\frac{N}{2}$ si ce diamètre existe. Avec la normalisation des modes complexes cycliques non-linéaires (voir Équation (IV.7)), le déplacement en tête de pale du secteur j s'exprime via

$$q_{\text{tip},j} = \left| \sum_{k=0}^K \left[\sum_{p=1}^{N_{\text{mode}}} (\bar{q}_{k,p,j}^- + q_{k,p,j}^+) \right] \right|. \quad (\text{IV.17})$$

Dans la suite des calculs, le vecteur propre pour un diamètre k , un type de secteur i , et un mode p qui combine à la fois le mode tournant direct et rétrograde s'écrit

$$\Phi_{k,p,i} = \left[\bar{\Phi}_{k,p,i}^- \quad \Phi_{k,p,i}^+ \right], \quad (\text{IV.18})$$

où la dépendance en $q_{\text{tip},j}$ a été omise pour plus de lisibilité. Numériquement, la base complète est créée en concaténant les modes non-linéaires (d'abord les diamètres puis les modes)

$$\Phi_i = \left[\Phi_{0,1,i} \dots \Phi_{h_{\text{ex}},1,i} \dots \Phi_{K,1,i} \dots \Phi_{h_{\text{ex}},p,i} \dots \Phi_{K,N_{\text{mode}},i} \right]. \quad (\text{IV.19})$$

Le vecteur des inconnues suit la même décomposition :

$$\mathbf{q}_{k,p,j} = \left[\bar{q}_{k,p,j}^- \quad q_{k,p,j}^+ \right]^T, \quad (\text{IV.20})$$

et

$$\mathbf{q}_j = \left[\mathbf{q}_{0,1,j}^T \dots \mathbf{q}_{h_{\text{ex}},1,j}^T \dots \mathbf{q}_{K,1,j}^T \dots \mathbf{q}_{h_{\text{ex}},p,j}^T \dots \mathbf{q}_{K,N_{\text{mode}},j}^T \right]^T. \quad (\text{IV.21})$$

L'Équation (IV.16) s'écrit finalement

$$\mathbf{c}_{1,j} = \Phi_i(q_{\text{tip},j}) \mathbf{q}_j. \quad (\text{IV.22})$$

Pour prendre en compte l'influence des secteurs adjacents au secteur j , il est nécessaire d'assembler le système. Le déplacement est ainsi décomposé en nœuds internes (indice i), et en nœuds de frontières (indices b, L et b, R pour les frontières de gauche et droite),

$$\mathbf{c}_{1,j} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1,j,i} \\ \mathbf{c}_{1,j,b,L} \\ \mathbf{c}_{1,j,b,R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{i,i}(q_{\text{tip},j}) \\ \Phi_{i,b,L}(q_{\text{tip},j}) \\ \Phi_{i,b,R}(q_{\text{tip},j}) \end{bmatrix} \mathbf{q}_j. \quad (\text{IV.23})$$

Cette équation est alors modifiée de façon à piloter indépendamment les déplacements des nœuds internes, de frontières gauches et de frontières droites,

$$\mathbf{c}_{1,j} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1,j,i} \\ \mathbf{c}_{1,j,b,L} \\ \mathbf{c}_{1,j,b,R} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_{i,i}(q_{\text{tip},j}) & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{i,b,L}(q_{\text{tip},j}) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{i+1,b,L}(q_{\text{tip},j+1}) \end{bmatrix}}_{\Phi_{i,f}} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_j \\ \mathbf{q}_{j,b,L} \\ \mathbf{q}_{j,b,R} \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.24})$$

Cette dernière opération agrandit l'espace de représentation (des inconnues sont ajoutées au système $\mathbf{q}_{j,b,L}$, $\mathbf{q}_{j,b,R}$) et permet l'assemblage des différentes sous-structures réduites. La base de réduction des degrés de liberté sur la frontière de droite est imposée égale à celle des degrés de liberté de la frontière de gauche du secteur suivant pour assurer une continuité des efforts et du déplacement aux frontières. Remarquons que le déplacement en tête de pale reste contrôlé par la quantité \mathbf{q}_j via l'Équation (II.29).

Le terme $\mathbf{c}_{1,j}$ est substitué par (IV.24) dans (IV.15) et le système est pré-multiplié par $\Phi_{i,f}^\top$ pour donner

$$\mathbf{Z}_{r,j} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_j \\ \mathbf{q}_{j,b,L} \\ \mathbf{q}_{j,b,R} \end{bmatrix} + \Phi_{i,f}^\top \langle \mathbf{f}_{nl,j}, e^{i\omega t} \rangle + \Phi_{i,f}^\top \langle \mathbf{f}_{s,j}, e^{i\omega t} \rangle = \Phi_{i,f}^\top \langle \mathbf{f}_{ext,j}, e^{i\omega t} \rangle. \quad (\text{IV.25})$$

La matrice de rigidité dynamique réduite est égale à $\mathbf{Z}_{r,j} = \Phi_{i,f}^\top \mathbf{Z}_{1,j} \Phi_{i,f}$. Les termes $\mathbf{f}_{s,j}$ s'annulent en assemblant les secteurs sur les coordonnées généralisées $\mathbf{q}_{j,b,L}$, et $\mathbf{q}_{j,b,R}$. Afin de prendre en compte le couplage des diamètres nodaux, les forces non-linéaires sont évaluées via

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}_{nl,j}, e^{i\omega t} \rangle &= \langle \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u}_j), e^{i\omega t} \rangle \\ &= \langle \mathbf{f}_{nl} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{p=1}^{N_{\text{mode}}} \left(\Phi_{k,p,i}^- (q_{\text{tip},j}) q_{k,p,j}^- + \Phi_{k,p,i}^+ (q_{\text{tip},j}) q_{k,p,j}^+ \right) \right] \right), e^{i\omega t} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{IV.26})$$

où la seconde équation est obtenue en substituant \mathbf{u}_j par (IV.13). Néanmoins, cette opération revient à ré-évaluer toutes les forces non-linéaires et nuit considérablement aux performances de la méthode. Par conséquent, nous faisons l'hypothèse qu'il n'y a pas d'interactions entre les vecteurs de la base non-linéaire lors de l'évaluation des forces non-linéaires (interaction entre les modes et les diamètres). Cette supposition est légitime car les fréquences propres du système sont éloignées les unes des autres et correspondent à différentes déformées diamétrales. Une telle hypothèse est également utilisée dans la théorie de la synthèse modale non-linéaire [76]. Cela implique que les termes de sommation de l'Équation (IV.26) peuvent être retirés de la fonction non-linéaire et donne donc

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}_{nl,j}, e^{i\omega t} \rangle &= \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{p=1}^{N_{\text{mode}}} \langle \mathbf{f}_{nl} \left(\Phi_{k,p,i}^- (q_{\text{tip},j}) q_{k,p,j}^- \right), e^{i\omega t} \rangle \right] \\ &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{p=1}^{N_{\text{mode}}} \langle \mathbf{f}_{nl} \left(\Phi_{k,p,i}^+ (q_{\text{tip},j}) q_{k,p,j}^+ \right), e^{i\omega t} \rangle \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.27})$$

Sous cette forme, les forces non-linéaires peuvent être substituées par les modes complexes cycliques non-linéaires tournants comme expliqué à la Section IV.1.2. Pour chaque diamètre nodal et chaque mode, le terme $\langle \mathbf{f}_{nl} \left(\Phi_{k,p,i}^- (q_{\text{tip},j}) q_{k,p,j}^- \right), e^{i\omega t} \rangle$ est substitué par l'Équation (IV.4a) (et de façon similaire pour le mode rétrograde). Cela donne finalement :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}_{nl,j}, e^{i\omega t} \rangle &= - \sum_{k=0}^K \left[\sum_{p=1}^{N_{\text{mode}}} \left(\left(\bar{\lambda}_{k,p}^- \right)^2 \bar{\mathbf{M}}_k + \left(\bar{\lambda}_{k,p}^- \right) \bar{\mathbf{C}}_k + \bar{\mathbf{K}}_k \right) \frac{\sqrt{N}}{2} \bar{\Phi}_{k,p,i}^- \bar{q}_{k,p,j}^- \right] \\ &\quad - \sum_{k=0}^K \left[\sum_{p=1}^{N_{\text{mode}}} \left(\left(\lambda_{k,p}^+ \right)^2 \tilde{\mathbf{M}}_k + \left(\lambda_{k,p}^+ \right) \tilde{\mathbf{C}}_k + \tilde{\mathbf{K}}_k \right) \frac{\sqrt{N}}{2} \Phi_{k,p,i}^+ q_{k,p,j}^+ \right], \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

où la dépendance de Φ et λ en $q_{\text{tip},j}$ a été omise.

Numériquement, il faut créer pour chaque diamètre k et mode p le vecteur

$$\mathbf{z}_{nl,j}^- = - \left(\left(\lambda_{k,p}^- \right)^2 \bar{\mathbf{M}}_k + \left(\lambda_{k,p}^- \right) \bar{\mathbf{C}}_k + \bar{\mathbf{K}}_k \right) \frac{\sqrt{N}}{2} \bar{\Phi}_{k,p,i}^- \quad (\text{IV.29a})$$

$$\mathbf{z}_{nl,j}^+ = - \left(\left(\lambda_{k,p}^+ \right)^2 \tilde{\mathbf{M}}_k + \left(\lambda_{k,p}^+ \right) \tilde{\mathbf{C}}_k + \tilde{\mathbf{K}}_k \right) \frac{\sqrt{N}}{2} \Phi_{k,p,i}^+ \quad (\text{IV.29b})$$

Chacun de ces vecteurs est concaténé pour former la matrice $\mathbf{Z}_{nl,j}$ (de façon similaire aux Équa-

tions (IV.18) et (IV.19)). Finalement, le système à résoudre devient

$$\mathbf{Z}_{r,j} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_j \\ \mathbf{q}_{j,b,L} \\ \mathbf{q}_{j,b,R} \end{bmatrix} + \Phi_{i,f}^\top \mathbf{Z}_{nl,j} \mathbf{q}_j = \Phi_{i,f}^\top \langle \mathbf{f}_{ext,j}, e^{i\omega t} \rangle. \quad (\text{IV.30})$$

Comme les quantités $\mathbf{Z}_{r,j}$, $\Phi_{i,f}^\top$ et $\mathbf{Z}_{nl,j}$ dépendent de \mathbf{q}_j (voir l'Équation (II.29)), le système (IV.30) doit être résolu avec un solveur non-linéaire. De façon similaire à la CNCMS [66], une jacobienne semi-analytique est fournie au solveur pour assurer une convergence rapide du système. Les calculs associés sont présentés à l'Annexe G.

Une fois le système résolu (les quantités \mathbf{q}_j , $\mathbf{q}_{j,b,L}$, et $\mathbf{q}_{j,b,R}$ sont connues pour tous les secteurs), le déplacement peut être retrouvé sur tous les degrés de liberté de la structure. Il suffit pour cela de calculer les amplitudes en tête de pales des secteurs (voir Équation (II.29)), puis d'évaluer les déformées en ces valeurs, et finalement d'utiliser l'Équation (IV.13b) pour obtenir les déplacements physiques.

2.2 Choix de la base de réduction

Le nombre d'inconnues total du système (IV.30) est égal au nombre total de modes non-linéaires gardés multiplié par 2 (les variables sont complexes), multiplié de nouveau par 2 (pour la décomposition des inconnues (IV.24)), et finalement par N (pour le nombre de secteurs). L'évaluation d'un mode complexe non-linéaire cyclique est relativement long (du fait que l'on garde les degrés de liberté sur les frontières de symétrie cyclique, voir le Tableau IV.1). Ainsi il est nécessaire de minimiser le nombre de modes non-linéaires. Dans nos cas d'applications, la plage fréquentielle de la réponse forcée est généralement centrée autour d'un mode en particulier (dans les exemples fournis ci-dessous, le premier mode de flexion, 1F, sera étudié). Par conséquent, la base non-linéaire peut être constituée uniquement de ce mode étudié ($N_{\text{mode}} = 1$ dans l'Équation (IV.12)).

Il reste alors à choisir les diamètres nodaux pour lesquels il faut évaluer les modes non-linéaires. Dans les machines tournantes, les excitations tournantes et stationnaires sont les plus classiquement rencontrées. Nous proposons donc ici un choix de diamètres à conserver basé sur le type de l'excitation.

1. Déterminer les nombres d'onde h_{ex} des forces d'excitation (plusieurs valeurs sont possibles)
2. A partir des résultats théoriques de la Section III.3, il est possible d'évaluer quels diamètres nodaux vont interagir et donc de déterminer l'espace de couplage $\mathcal{T}_{\text{interact}}$.

La base est alors formée des modes non-linéaires de ces diamètres nodaux constituant $\mathcal{T}_{\text{interact}}$. En revanche, selon le nombre de secteurs et des nombres d'onde h_{ex} , la base à déterminer peut rester grande. Afin de la réduire davantage, il est possible de considérer la procédure suivante :

1. Pour chaque type de secteur $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, nous évaluons la réponse forcée de la structure à symétrie cyclique avec un secteur fondamental de type i soumise à une excitation stationnaire de nombre d'onde h_{ex} . Une telle évaluation peut être obtenue à partir d'un calcul sur la structure complète (voir la méthode de référence sur la Figure II.8 ou par la Méthode 1 proposée en Section III.3.1);
2. Pour chaque type de secteur $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, nous créons une base Φ avec la valeur de h_{ex} (résoudre (IV.4) et (IV.6), puis concaténer (IV.19));
3. Nous évaluons la réponse forcée du système via la SNCR en utilisant cette base de réduction (résoudre (IV.30));
4. Nous itérons entre les étapes 2 et 3 jusqu'à convergence entre la SNCR et la méthode de référence en ajoutant à la base Φ des modes non-linéaires cycliques dont le diamètre appartient à $\mathcal{T}_{\text{interact}}$.

Une fois la base de réduction obtenue (à travers une des deux stratégies proposée), il est possible de lancer des simulations pour des structures accordées ou désaccordées. On pourrait argumenter qu'en présence de désaccordage aléatoire, tous les diamètres nodaux devraient être pris en compte. Dans la

méthodologie proposée, nous supposons que la base réduite formée de seulement quelques diamètres est capable de fournir des résultats corrects. Cette hypothèse est pertinente puisque la méthode pilote chaque secteur de façon indépendante et peut donc retrouver des phénomènes de localisation.

3 Validation

Dans cette section la SNCR est validée sur le modèle TurboTopo simple présenté en Section II.6.5.1 avec $N = 24$. Différentes configurations sont étudiées : un cas où la structure est en symétrie cyclique, un cas où du désaccordage aléatoire est pris en compte, et finalement un cas avec du désaccordage intentionnel. Bien que les effets gyroscopiques puissent être inclus dans la méthode, ces derniers sont négligeables dans nos cas et ne sont donc pas pris en compte. Par conséquent les modes non-linéaires cycliques tournants directs et rétrograde sont complexes conjugués

$$\Phi_{k,p,i}^+ = \bar{\Phi}_{k,p,i}^- \quad (\text{IV.31})$$

et donc seul le mode tournant direct est calculé.

3.1 Validation numérique pour une structure à symétrie cyclique

La méthode a été testée avec de multiples valeurs de nombres d'onde h_{ex} pour des excitations tournantes et stationnaires. Ici, nous présentons seulement les résultats pour une onde stationnaire avec deux valeurs pour h_{ex} (1 et 3). Le choix d'une onde stationnaire semble plus pertinent car sa phénoménologie est plus complexe (les secteurs ont des amplitudes différentes et le couplage inter-diamètre est plus important). L'amplitude d'excitation est prise égale à 0.25 N.

Regardons d'abord le cas $h_{ex} = 1$. A travers l'analyse analytique de la Section III.3, nous pouvons déterminer l'espace de couplage $\mathcal{T}_{interact}$. Celui-ci est formé des diamètres $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$. Il faut ajouter à cela le diamètre 0 du fait de la précharge obtenue avec la rotation de la structure. Dans une première étape nous choisirons une base de réduction formée uniquement des diamètres $\{0, 1\}$ (les nombres à l'intérieur des crochets correspondent aux diamètres nodaux gardés pour la réduction). Dans cette section, seul le premier mode de flexion des différents diamètres est étudié (ainsi dans l'Équation (IV.12), $N_{mode} = 1$).

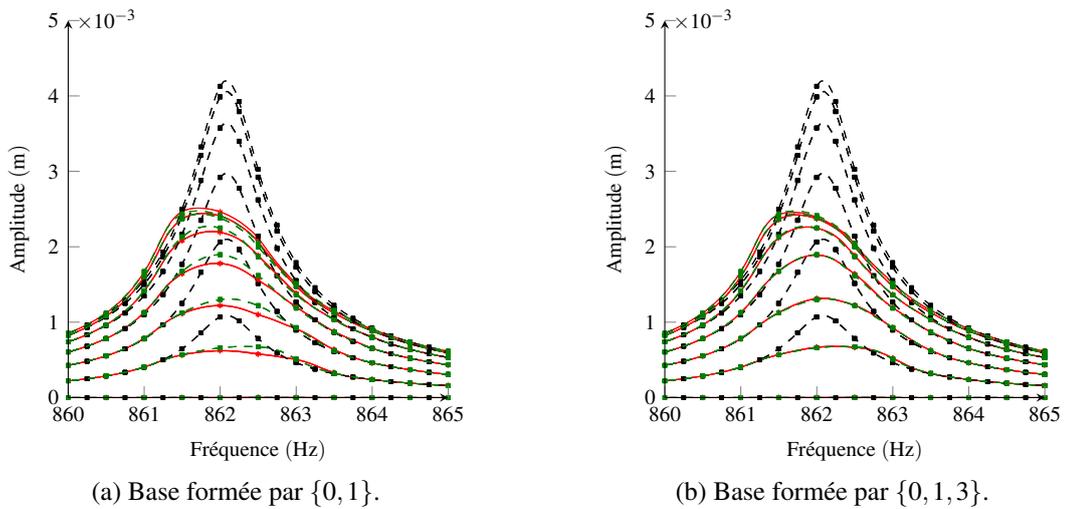


FIGURE IV.4 – Réponses forcées de la structure soumise à une onde stationnaire avec $h_{ex} = 1$. $(-\blacksquare-)$: réponse linéaire ; $(-\blacksquare-)$: méthode de référence ; $(-)$: SNCR.

La Figure IV.4 montre l'amplitude en tête de pale de tous les secteurs en fonction de la fréquence d'excitation. Le calcul a été réalisé pour les cas linéaire (contact supposé collé) et non-linéaire. La méthode de référence et la SNCR sont employées pour ces deux situations. La SNCR avec la base $\{0, 1\}$ donne exactement les mêmes résultats linéaires que la méthode de référence et ceux-ci ne sont donc pas représentés. Ce résultat est attendu puisque la structure linéarisée est parfaitement accordée et est soumise à une excitation avec $h_{ex} = 1$. Comme aucun couplage inter-diamétral n'existe, la base initiale suffit à assurer la convergence. En revanche pour le cas non-linéaire, des écarts existent entre la SNCR et la méthode de référence, voir la Figure IV.4a. La base $\{0, 1\}$ n'est donc pas suffisante à représenter les différents couplages existants. Nous ajoutons donc à cette base, les modes non-linéaires tournants du diamètre 3. La base est donc maintenant formée par $\{0, 1, 3\}$. La Figure IV.4b représente les résultats associés. L'amplitude de tous les secteurs est maintenant correctement obtenue et montre que la base a convergé.

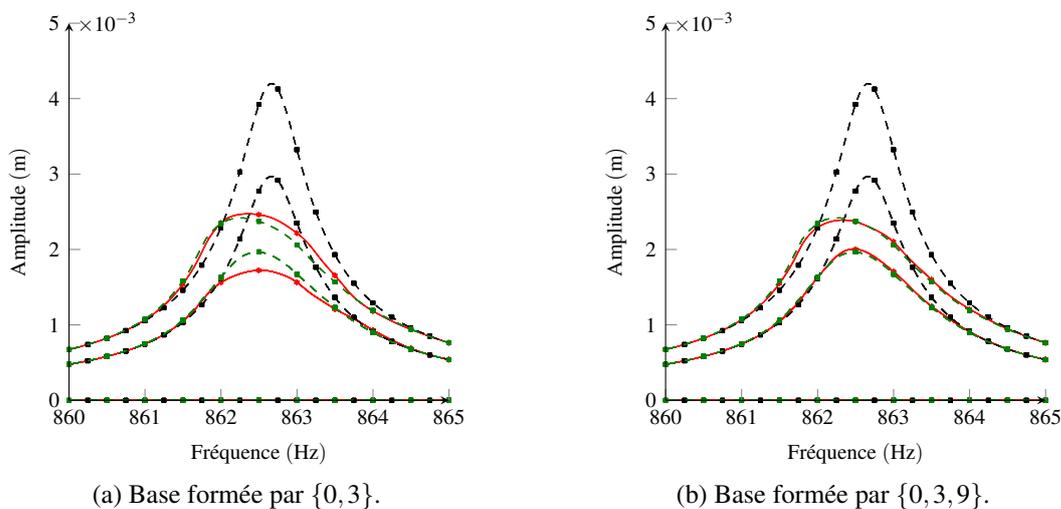


FIGURE IV.5 – Réponses forcées de la structure soumise à une onde stationnaire avec $h_{ex} = 3$.
 (■) : réponse linéaire; (■) : méthode de référence; (■) : SNCR.

Des résultats similaires sont obtenus avec une onde stationnaire avec $h_{ex} = 3$. La Figure IV.5a représente la réponse obtenue avec la base $\{0, 3\}$. En ajoutant le neuvième diamètre nodal (voir la Section III.3) à la base, la SNCR décrit correctement la réponse du système (voir la Figure IV.5b). De légères différences sont observées et résultent de l'hypothèse au niveau de l'Équation (IV.27) pour les forces non-linéaires.

A travers ces premières simulations, nous obtenons déjà des résultats prometteurs : notamment la SNCR permet de retrouver la dynamique d'une structure non-linéaire soumise à une excitation stationnaire à partir d'une base de réduction formée de modes non-linéaires cycliques tournants. La Figure IV.6 permet de comparer les résultats de la SNCR avec la CNCMS. Comme, nous pouvons le voir, la SNCR est beaucoup plus précise que la CNCMS pour des temps de calculs globalement plus courts. Des détails sur ces temps sont fournis dans la Section IV.3.3.

Pour compléter cette étude sur les structures à symétrie cyclique, nous appliquons une excitation seulement sur le premier secteur de la structure. Pour une excitation localisée, la stratégie de réduction proposée dans la Section IV.2.2 n'est plus applicable parce que tous les diamètres sont a priori couplés. Ici, nous décidons d'enrichir la base de la SNCR de façon progressive jusqu'à ce que la solution linéaire (état collé) corresponde à la solution linéaire de la méthode de référence. Pour le cas considéré, la base est formée de $\{0, 1, 3, 5, 7\}$ (les nombres impairs ont ici été choisis de façon arbitraire, il est bien évidemment possible qu'une autre base fonctionne également). Les résultats des simulations linéaires sont fournis à la Figure IV.7a. Les réponses non-linéaires sont présentées à la Figure IV.7b pour la même

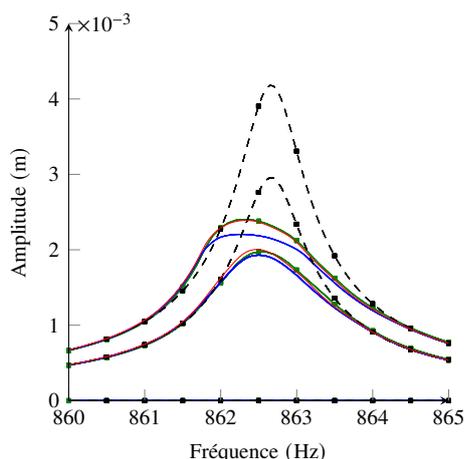


FIGURE IV.6 – Comparaison de la CNCMS et de la SNCR pour la structure soumise à une onde stationnaire avec $h_{ex} = 3$. (—■) : réponse linéaire ; (—■) : méthode de référence ; (—) : SNCR ; (—) : CNCMS.

base de réduction. De faibles écarts de l'ordre de 2% sont observés pour la SNCR. Ceux-ci peuvent venir des deux approximations suivantes : une base qui n'est pas assez riche pour les phénomènes non-linéaires de la structure, l'approximation de l'évaluation des forces non-linéaires (IV.27). Ces écarts restent toutefois faibles et sont à relativiser par rapport à la complexité de l'excitation considérée.

A titre de comparaison, nous avons mis les résultats de la CNCMS qui sont très proches de la solution de référence (écart inférieur à 1%). Dans cet exemple, l'énergie du système est principalement contenue dans un seul secteur de la structure et peu de couplages existent entre les frontières. Ainsi, pour des excitations localisées, la base de réduction de la CNCMS (mode complexe non-linéaire avec des interfaces fixes) semble être plus pertinente que la base cyclique de la SNCR.

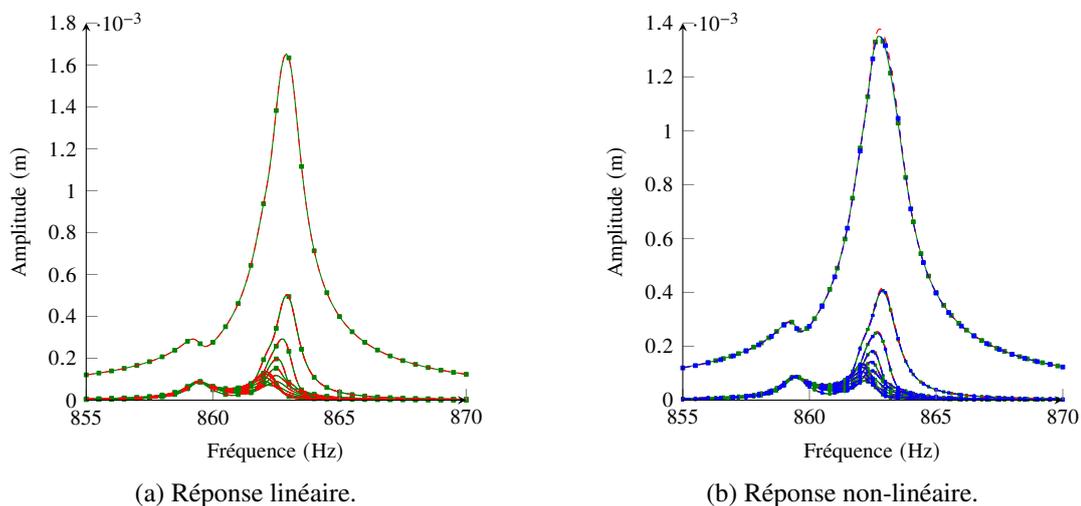


FIGURE IV.7 – Réponses forcées pour une excitation localisée avec une amplitude 0.125 N. (—■) : référence ; (---) : SNCR, (—■) : CNCMS.

3.2 Validation de la SNCR pour des structures désaccordées

Le but de cette section est de valider la fiabilité de la SNCR pour des structures non-linéaires désaccordées. Comme pour la section précédente, les résultats sont comparés à la méthode de référence

et à la CNCMS.

3.2.1 Modélisation du désaccordage aléatoire

En pratique, les secteurs des roues aubagées sont tous différents les uns des autres du fait des tolérances d'usinage ou encore à cause de l'usure [108]. Ce désaccordage aléatoire donne lieu généralement à des déplacements maximums plus importants que ceux d'une structure accordée. On définit par le facteur d'amplification (AF) le rapport entre le déplacement maximum de la structure désaccordée par celui d'une structure accordée. Différents choix existent pour modéliser le désaccordage aléatoire. Pour la CNCMS, Joannin et al. [67] avaient considéré de faire varier la fréquence propre du mode complexe non-linéaire à interfaces fixes via une loi gaussienne de moyenne μ_g et de variance σ^2 (également appelé le niveau de désaccordage).

Dans ce manuscrit, le désaccordage aléatoire est introduit en modifiant les fréquences propres des modes internes de la pale à la suite de la procédure de Craig-Bampton (voir le terme Ω_r^2 de l'Équation (II.12), ainsi que l'Étape 1b de la Figure IV.3). Pour chaque secteur, chaque fréquence propre de la diagonale de Ω_r^2 , Ω , est modifiée suivant une loi gaussienne ayant pour espérance Ω et σ^2 comme variance. Comme représenté aux Figures II.8 et IV.3, une telle modélisation présente l'intérêt d'être commune pour les différentes méthodologies. Le désaccordage introduit est donc identique entre la méthode complète, la méthode de référence, la CNCMS et la SNCR. Ceci permet une comparaison entre les différentes stratégies de calcul. Ce choix de désaccordage ne requiert que les matrices structurales initialement calculées et offre donc un gain en temps de calcul. Dans la plupart des applications des roues aubagées, comme par exemple dans [88], seul un désaccordage sur les pales est introduit, ce qui permet également de conforter notre choix de modélisation.

Pour les méthodes complète et de référence (voir la Figure II.8), les pales ne sont réduites qu'une seule fois. Les matrices désaccordées sont ensuite introduites, sans approximation, dans l'assemblage du système (État 4 de la Figure II.8). En revanche dans le cas de la SNCR, voir la Figure IV.3, (et de la CNCMS, voir la Figure II.8), les pales sont davantage réduites à travers les calculs des modes non-linéaires complexes. Évaluer les modes non-linéaires pour chaque pale désaccordée détériorerait fortement les performances des méthodologies. Ainsi, nous faisons l'hypothèse que la base Φ n'est pas perturbée par le désaccordage. Une telle approximation reste raisonnable puisque le désaccordage aléatoire est généralement faible. Il est néanmoins pris en compte dans l'étape de synthèse des méthodes de réduction (voir l'Équation (IV.30) pour la SNCR et (II.49) pour la CNCMS). Par conséquent, les résultats entre la méthode de référence (ou complète) et les méthodes de réduction pourront différer à cause des approximations propres aux méthodologies (base non-linéaire, substitution des forces non-linéaires, etc) mais aussi via le désaccordage qui n'est pas pris en compte dans les bases de réduction.

Dans les résultats numériques qui suivent, une onde tournante directe avec une amplitude de 0.25 N et de nombre d'onde $h_{ex} = 3$ est appliquée en tête des pales de la structure. La base de réduction de la SNCR est formée par $\{0, 3, 9\}$, comme suggéré dans la Section IV.2.2. Les étapes de réduction de la CNCMS sont fournies au Tableau II.1. Des résultats similaires ont été obtenus pour différentes valeurs de h_{ex} mais ne sont pas représentés par souci de concision.

Les Figures IV.8a et IV.8b représentent la solution linéaire du système (état collé) avec un désaccordage relativement élevé (égal à $\sigma = 15\%$) obtenue avec le modèle complet (colonne de gauche de la Figure II.8), le modèle de référence (colonne du milieu de la Figure II.8) et avec la SNCR. La solution de la CNCMS n'est pas représentée car elle coïncide parfaitement avec la celle de la SNCR. La solution de la méthode de référence colle parfaitement avec la solution du modèle complet et prouve que les 600 modes internes de la seconde réduction de Craig-Bampton sont suffisants pour capturer correctement le mouvement du disque. Pour la solution de la SNCR, on observe que les amplitudes des déplacements sont très proches de celles de la référence. En revanche, un décalage fréquentiel est observable pour les basses fréquences (décalage de 2 Hz autour de la pulsation 850 Hz, ce qui représente une erreur

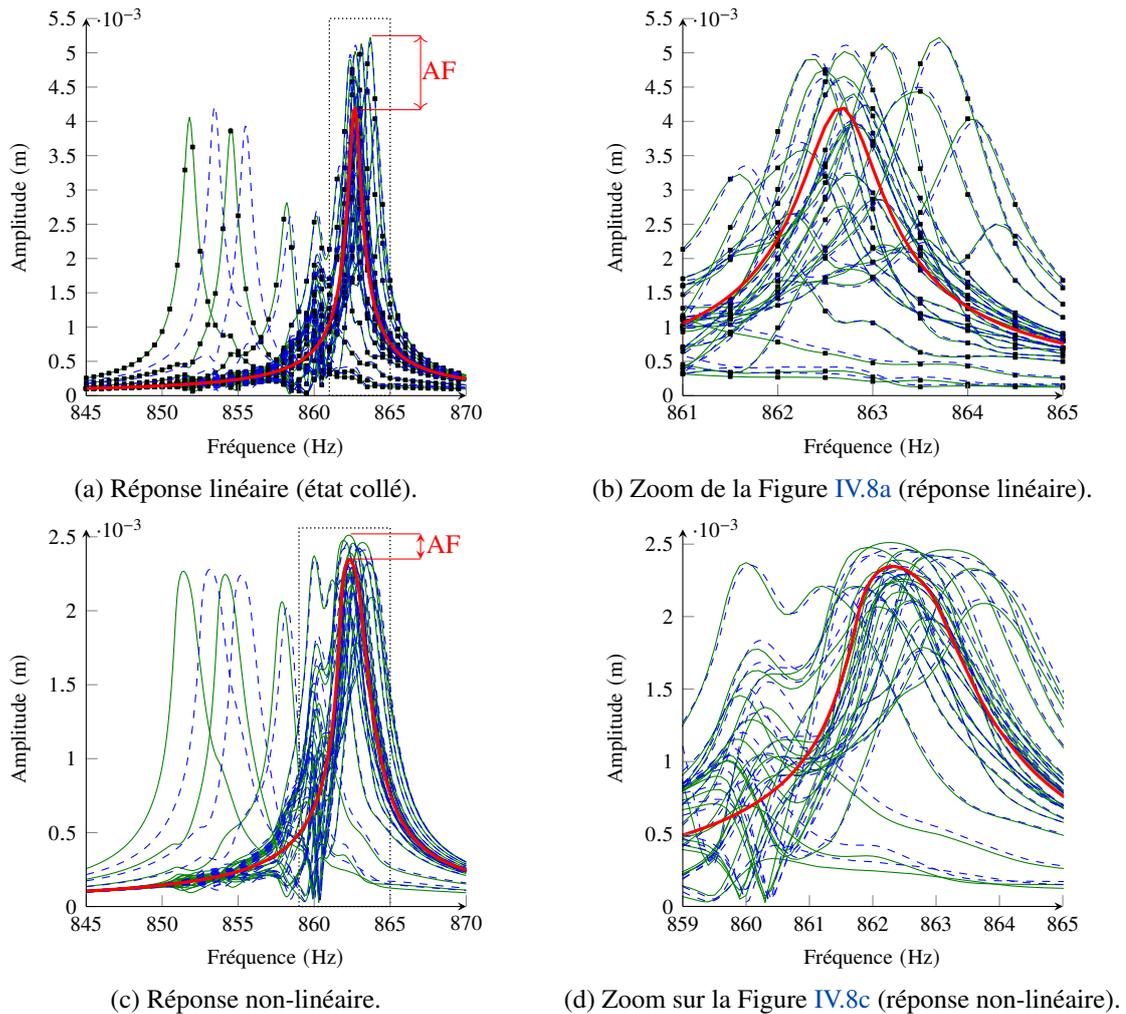


FIGURE IV.8 – Réponses forcées de la structure avec du désaccordage aléatoire ($\sigma^2 = 15\%$).
 (■) : modèle complet ; (—) : méthode de référence, (---) : SNCR, (—) : réponse de la structure accordée.

relative de 0.25%). Ce petit écart est dû aux approximations de la SNCR mais également dû au fait que le désaccordage n'est pas appliqué exactement à la même physique. Pour corriger ces différences, il faudrait soit ré-évaluer la base de réduction pour chaque secteur (avec leur désaccordage respectif), soit prendre un très grand nombre de modes dans la base de réduction. Cependant le but des méthodes de réduction est de pouvoir décrire globalement la dynamique du système avec une base de petite taille. La précision actuelle de la SNCR est largement suffisante pour une telle description : les écarts fréquentiels, bien qu'existant sont faibles, le déplacement maximal de la structure est correctement obtenu (autour de 863.8 Hz).

Les Figures IV.8c et IV.8d représentent la réponse non-linéaire de la structure pour la méthode de référence et pour la SNCR. De façon similaire au cas linéaire, un léger décalage fréquentiel est observé autour de 850Hz, mais les amplitudes des déplacements sont correctement obtenues (notamment au niveau du déplacement maximum de la structure). Ceci signifie que la SNCR capture correctement le facteur d'amplification (qui est une donnée très importante pour les concepteurs de moteurs). Davantage de simulations sont fournies ci-dessous pour valider la SNCR.

Dans un souci de lisibilité, la Figure IV.9 représente le déplacement maximum de la structure (et non plus le déplacement pour chaque secteur) en fonction de la fréquence d'excitation. Les principaux

résultats de la Figure IV.8 sont ainsi résumés dans la Figure IV.9c dans laquelle les résultats de la CNCMS ont été ajoutés pour faciliter la comparaison entre les méthodes. Trois niveaux de désaccordage sont étudiés : une variance à 5%, 10%, et 15%. De nouveau, la SNCR fournit des résultats très proches de la méthode de référence pour les cas linéaire et non-linéaire. Comme montré dans la Section II.6.6, la CNCMS ne parvient pas à récupérer le déplacement maximal.

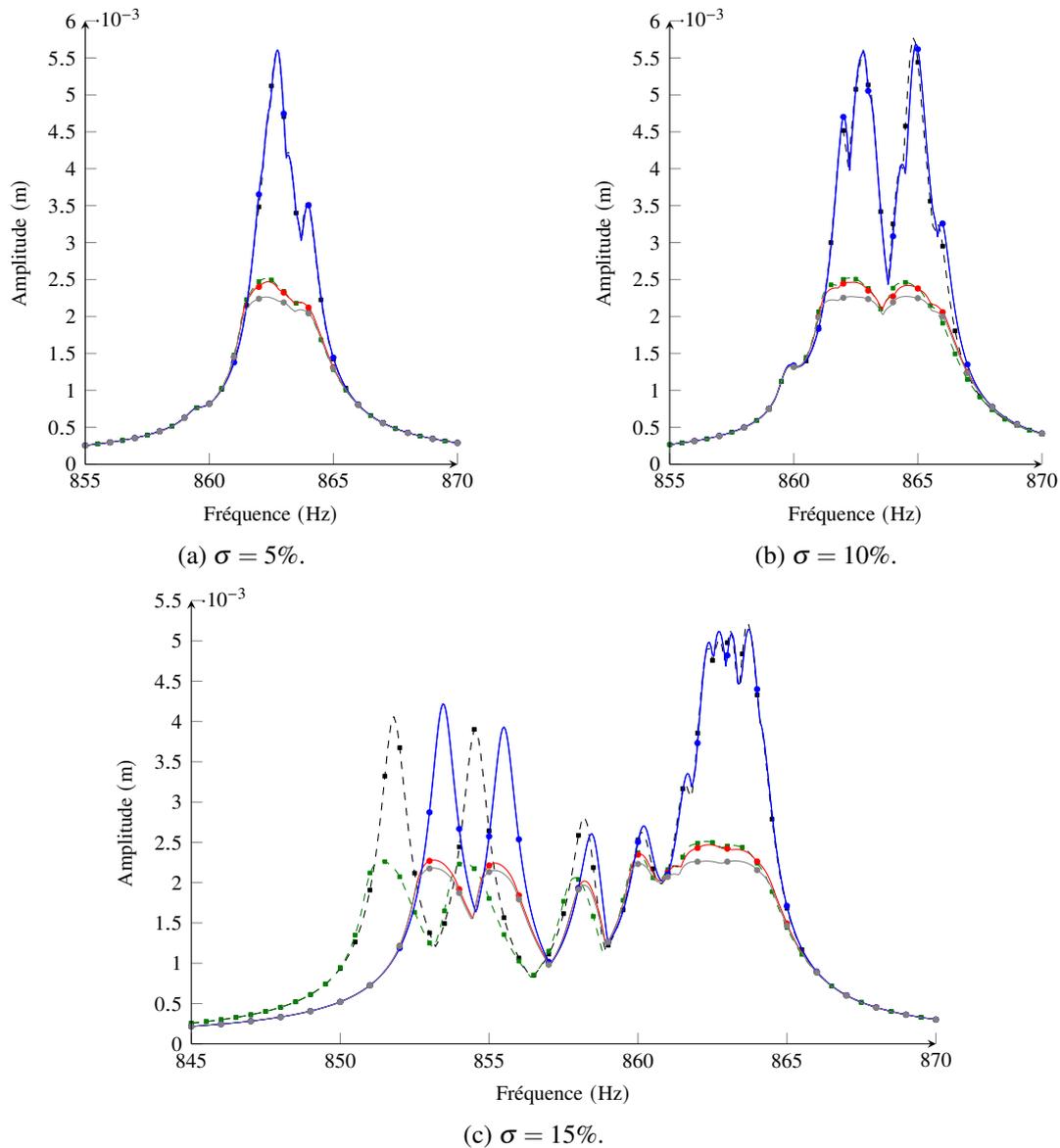


FIGURE IV.9 – Réponses forcées de la structure pour différentes valeurs de σ . (■) : réponse linéaire pour la méthode de référence; (■) : réponse non-linéaire pour la référence; (●) : réponse non-linéaire CNCMS; (●) : réponse linéaire SNCR; (●) : réponse non-linéaire SNCR.

3.2.2 Désaccordage intentionnel

D'autres études, comme présentées dans [17], ont montré que, dans certaines conditions, considérer du désaccordage intentionnel permet de diminuer le facteur d'amplification de la structure. Le désaccordage intentionnel consiste à assembler des secteurs qui ont des géométries et/ou des matériaux différents. Dans notre étude, deux types de secteurs sont étudiés ($M = 2$ dans les Équations (II.43) ou (IV.12)) et la

structure complète est construite à travers le schéma arbitraire de désaccordage suivant :

$$\text{pattern} = [1, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2]. \quad (\text{IV.32})$$

Le numéro 1 correspond au secteur étudié jusqu'à présent (voir les Sections II.6.5.1, III.5, et IV.3.1) tandis que le numéro 2 correspond à un nouveau secteur dont la longueur de pale a été réduite de 0.5 mm par rapport au secteur 1 (de longueur 150 mm). Le Tableau IV.2 donne les trois premières fréquences propres des deux secteurs associées au troisième diamètre nodal.

Numéro du mode	Secteur 1	Secteur 2
1	862.7 Hz	873.4 Hz
2	3016.5 Hz	3030.2 Hz
3	3563.1 Hz	3590.8 Hz

TABLEAU IV.2 – Fréquences propres des deux secteurs étudiés pour le troisième diamètre nodal.

La méthode de référence, décrite à la Section II.6.5.1, ainsi que la SNCR sont appliquées. Pour la méthode de réduction, les matrices cycliques de deux types sont évaluées. Puis leurs modes complexes cycliques non-linéaires sont calculés. Pour les deux types de secteurs ($i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$), la base Φ_i de l'Équation (IV.30) est formée par les modes complexes cycliques non-linéaires associés au secteur i . Dans l'application ci-dessous, le système est excité par une onde stationnaire avec un nombre d'onde $h_{ex} = 3$ d'amplitude 0.25 N. En suivant la stratégie de la Section IV.2.2, la base Φ_i contient les modes complexes associés aux diamètres 0, 3 et 9 du secteur i . La Figure IV.10 représente la réponse forcée du système désaccordée intentionnellement. Les amplitudes en tête de pale de tous les secteurs y sont illustrées. Une nouvelle fois, les résultats de la SNCR sont très proches de ceux de la méthode de référence.

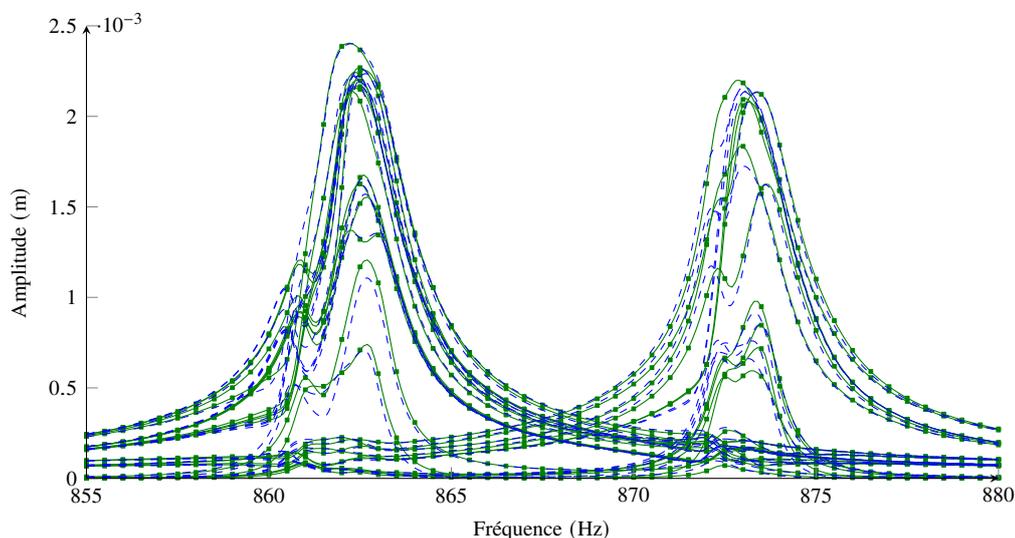


FIGURE IV.10 – Réponse forcée non-linéaire pour une structure désaccordée intentionnellement pour une excitation stationnaire avec $h_{ex} = 3$. (—■—) : solution de référence, (---) : SNCR.

3.3 Performances et limitations

Cette section fournit les détails de la performance de la SNCR, et de la CNCMS sur les différents cas tests réalisés précédemment. Dans des cas d'applications pratiques, les ingénieurs s'intéressent particulièrement aux pics résonants des réponses forcées (et donc les amplitudes et fréquences de

résonance associés). Par conséquent, nous calculons les quantités $L_{\infty,u}$, et $L_{\infty,\omega}$ qui évaluent la précision des méthodes en amplitude et fréquence en fonction des résultats de la méthode de référence. $L_{\infty,u}$ est défini via

$$L_{\infty,u} = \frac{\left| \max_j \left[\max_{\omega} (u_{j,\text{tip,ROM}}) \right] - \max_j \left[\max_{\omega} (u_{j,\text{tip,Ref}}) \right] \right|}{\max_j \left[\max_{\omega} (u_{j,\text{tip,Ref}}) \right]}, \quad (\text{IV.33})$$

avec $u_{j,\text{tip,ROM}}$ (respectivement $u_{j,\text{tip,Ref}}$) le déplacement d'un secteur j en tête de pale calculé par une des méthodes de réduction (respectivement la méthode de référence). L'erreur $L_{\infty,\omega}$ est évaluée via

$$L_{\infty,\omega} = \left[\frac{\left| \max_j (\omega_{j,\text{MAX,ROM}}) - \max_j (\omega_{j,\text{MAX,Ref}}) \right|}{\max_j (\omega_{j,\text{MAX,Ref}})} \right], \quad (\text{IV.34})$$

avec $\omega_{j,\text{MAX,ROM}}$ (respectivement $\omega_{j,\text{MAX,Ref}}$) la pulsation du modèle réduit (respectivement de la méthode de référence) pour laquelle l'amplitude du secteur j atteint son maximum. Afin d'étudier la précision globale des méthodes sur les différents secteurs (et non pas seulement sur le secteur avec le déplacement maximal), nous définissons deux autres quantités

$$ME_u = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[\max_{\omega} \left(\frac{|u_{j,\text{tip,ROM}} - u_{j,\text{tip,Ref}}|}{u_{j,\text{tip,Ref}}} \right) \right], \quad (\text{IV.35})$$

et,

$$ME_{\omega} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[\frac{|\omega_{j,\text{MAX,ROM}} - \omega_{j,\text{MAX,Ref}}|}{\omega_{j,\text{MAX,Ref}}} \right]. \quad (\text{IV.36})$$

La quantité $L_{\infty,u}$ représente l'écart relatif pour le déplacement maximum de la structure. Le terme $L_{\infty,\omega}$ correspond à l'écart relatif pour les fréquences propres pour lesquelles le maximum est atteint. Le terme ME_u représente l'erreur moyenne en amplitude sur tous les secteurs et le terme ME_{ω} fournit l'erreur moyenne sur les fréquences propres. Le Tableau IV.3 présente les valeurs numériques de ces différentes quantités, les temps de calcul associés aux différentes méthodes, ainsi que leur nombre d'inconnues. Les résultats de la CNCMS sont fournis dans le Tableau IV.3 bien qu'ils n'aient pas été tous illustrés dans les Figures précédentes dans un souci de lisibilité et de concision.

Pour tous les cas tests étudiés, la SNCR présente des performances excellentes : sa précision est très bonne et son temps de calcul est au moins 15 fois plus petit que celle de la méthode de référence. La simulation présentant l'écart le plus élevé correspond au cas de l'excitation localisée. Ceci peut-être expliqué par le fait que l'excitation et la non-linéarité viennent coupler tous les diamètres nodaux. Ainsi même si la réponse linéaire de la Figure IV.7a a convergé, le couplage non-linéaire peut ne pas être capturé correctement par la base choisie. Malgré cette limitation de la méthode, notons que l'écart reste relativement faible.

Comparée à la CNCMS, la SNCR se comporte également mieux. Par exemple, pour la simulation de la Figure IV.6, l'erreur en amplitude est de 8.2% pour la CNCMS contre 1.1% pour la SNCR, avec un temps de calcul pour la réponse forcée réduit de 2.6. Le seul cas où la CNCMS est plus précise que la SNCR est dans le cas d'une excitation localisée. Le principal désavantage de la SNCR est son temps de calcul pour évaluer les modes complexes cycliques non-linéaires. En effet, ce temps est plus long que la CNCMS dû aux degrés de liberté non-linéaire de frontières qui sont gardés et qui accroissent les coûts numériques lors de l'étape d'inversion pour la condensation de Schur (voir Équation (II.37)). Néanmoins la SNCR présente l'avantage de nécessiter un faible coût en espace mémoire. En effet, seuls les M différents secteurs fondamentaux doivent être stockés pour la résolution (matrices, modes cycliques, ...).

Dans le cas de la CNCMS, les données sur les secteurs fondamentaux doivent être stockées mais aussi la matrice assemblée du disque pour faire le calcul des modes d'interfaces. Dans le cas d'une structure avec beaucoup de degrés de liberté, cette opération peut s'avérer très coûteuse.

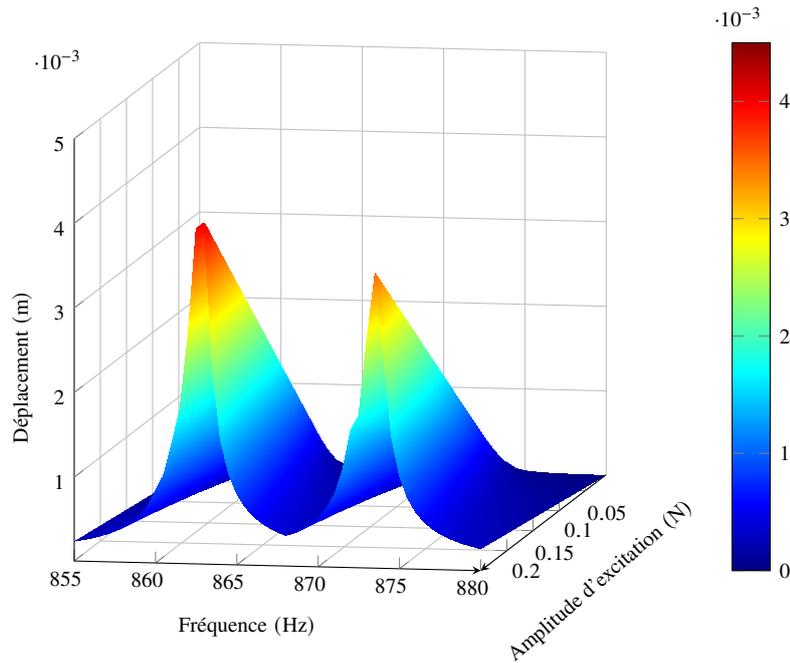
Méthodes		Simulations			
		Figure IV.6	Figure IV.7b	Figure IV.9c	Figure IV.10
Référence	Nbr. inconnues	15120	15120	15120	15120
	Temps calcul FrF	7h	26h	35h	40h
	Temps calcul total	8h	27h	36h	41h
SNCR	Nbr. inconnues	480	672	480	480
	Temps calcul FrF	15 min	1 h	2h	1 h
	Temps calcul total	3h	5 h	5h	7h
	$L_{\infty,u}$	1.1%	2%	1.6%	0.1%
	ME_u	1.2%	0.8%	1.2%	2.7%
	$L_{\infty,\omega}$	< 0.01%	< 0.01%	0.011%	< 0.01%
	ME_ω	< 0.01%	< 0.01%	0.02%	0.01%
CNCMS	Nbr. inconnues	848	848	848	848
	Temps calcul FrF	40 min	2 h	4h	2h
	Temps calcul total	1 h	3h	5h	3h
	$L_{\infty,u}$	8.2%	0.05%	9.6%	7.3%
	ME_u	3.2%	0.8%	5.7%	3.9%
	$L_{\infty,\omega}$	< 0.01%	< 0.01%	0.1%	< 0.01%
	ME_ω	0.08%	< 0.01%	0.02%	< 0.01%

TABLEAU IV.3 – Performance des méthodes sur les simulations de la Section IV.3. Les simulations ont été lancées sur un ordinateur Intel(R) Core(TM) i7-7700 @ 3.6 GHz.

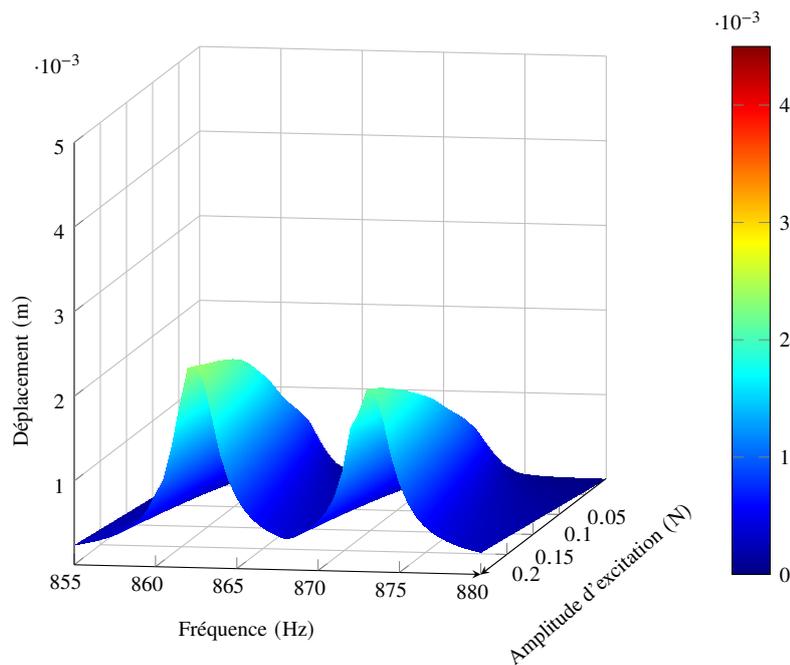
3.4 Exemple simple d'application

Dans le chapitre suivant, la SNCR sera employée sur un modèle éléments finis réaliste d'un compresseur. Avant de réaliser de telles simulations, une courte étude est ici réalisée sur la structure désaccordée intentionnellement, présentée à la Section IV.3.2.2. La structure est soumise à une excitation stationnaire de nombre d'onde $h_{ex} = 3$ avec une amplitude variable allant de 0.01 à 0.25 N. Le déplacement maximal sur tous les secteurs est illustré en Figure IV.11 en fonction du niveau d'excitation. Ces simulations ont duré environ une journée avec la SNCR mais aurait duré plusieurs semaines pour la méthode de référence.

Sur la Figure IV.11, le déplacement maximal du système est représenté pour un cas linéaire (état collé) et non-linéaire. Via ces résultats, il est possible de caractériser le système non-linéaire. Il est par exemple possible de déterminer l'amortissement de la structure sur toute la plage d'excitation. Pour le niveau vibratoire le plus élevé, le frottement permet de diminuer l'amplitude de 50% au niveau du pic de résonance. Pour des excitations encore plus importantes, cette valeur devrait encore augmenter car le pic linéaire croît linéairement tandis qu'une certaine saturation du niveau vibratoire est observé dans le cas non-linéaire. De plus, nous pouvons voir que les effets non-linéaires commencent à entrer



(a) Réponse linéaire.

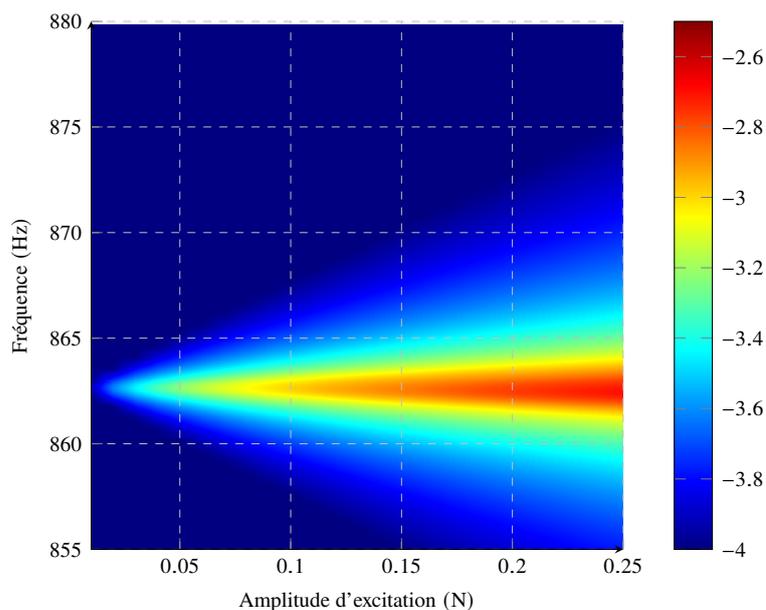


(b) Réponse non-linéaire.

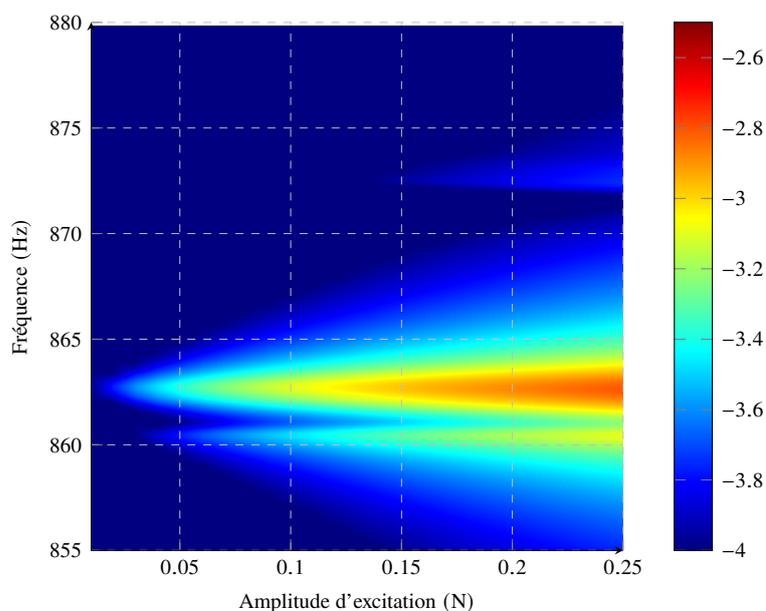
FIGURE IV.11 – Étude paramétrique sur le niveau d'excitation pour une onde stationnaire ($h_{ex} = 3$).

en jeu pour des amplitudes d'excitation supérieures à 0.1 N. Remarquons que la Figure IV.11b permet de visualiser la forme du mode non-linéaire (backbone curve) : l'amplitude du pic non-linéaire semble avoir une forme quadratique en fonction du niveau d'excitation contre une variation linéaire pour le cas collé (voir Figure IV.11a). L'aplatissement de la courbe non-linéaire est également très visible.

Ces résultats peuvent être comparés à ceux de la structure non-linéaire accordée (le système n'est constitué que du secteur fondamental 1). De tels résultats sont illustrés à la Figure IV.12. Pour souligner



(a) Réponse accordée.



(b) Réponse désaccordée.

FIGURE IV.12 – Comparaison du déplacement entre les structures non-linéaires accordée et désaccordée pour le 8^e secteur (échelle logarithmique).

le décalage fréquentiel dû aux effets du désaccordage. Le déplacement en tête de pale du 8^e secteur est illustré en échelle logarithmique. Comme attendu, un seul pic est obtenu pour le cas accordé (voir la Figure IV.12a), tandis que le système désaccordé est constitué de trois pics distincts (voir la Figure IV.12b) : deux pics assez marqués à 860 Hz et 863 Hz et un pic plus faible à 872 Hz). De plus, pour le mode et le secteur étudié, l'amplitude est plus basse pour la structure désaccordée que pour celle accordée. A travers cette courte étude, nous voyons clairement que la SNCR est adaptée à étudier des structures cycliques non-linéaires désaccordées, particulièrement dans une phase de préconception où les temps de calculs doivent restés raisonnables.

4 Bilan du chapitre

Ce chapitre avait pour vocation de proposer une alternative à la CNCMS qui s'avère imprécise pour des forts niveaux de non-linéarités ou lorsque la frontière de symétrie cyclique est proche d'une zone de contact. La *Substructuring method based on Nonlinear Cyclic Reduction* (SNCR) a donc été proposée. Celle-ci s'appuie sur un principe de sous-structuration et sur la notion de modes cycliques complexes non-linéaires. Chaque secteur est ainsi réduit sur sa base non-linéaire de modes complexes et est paramétré par une coordonnée généralisée indépendante des autres secteurs. Une telle approche permet donc de traiter d'excitations stationnaires ou localisées mais également de structures désaccordées. Lors de l'étape de synthèse de la réponse forcée, le désaccordage aléatoire est introduit. De plus les forces non-linéaires sont substituées par les modes complexes non-linéaires. Ceci permet à la SNCR d'être très efficace pour des études paramétriques (influence de la force d'excitation, valeur du désaccordage, etc.).

Diverses analyses numériques ont été conduites pour valider la méthode : excitations tournantes, stationnaires, et localisées, structures désaccordées aléatoirement et intentionnellement. Dans toutes les situations sauf celle de l'excitation localisée, la SNCR fournit des résultats plus précis que la CNCMS pour des temps de calcul équivalents voire plus rapides.

L'objectif de la section suivante sera d'employer les différentes méthodes développées dans cette thèse sur un modèle industriel. En particulier, la SNCR sera employée pour faire des analyses sur le désaccordage aléatoire et intentionnel.

Chapitre V

Analyse d'un modèle éléments finis de roue aubagée

Sommaire du chapitre

1 Analyse d'une structure accordée constituée de pales, d'un disque et d'amortisseurs	109
1.1 Résultat numérique sur le cas accordé standard	109
1.2 Détails sur les composantes spectrales dans le cas d'une excitation stationnaire	114
1.3 Influence du coefficient de frottement	115
1.4 Influence de la précharge centrifuge	116
2 Analyse de sensibilité d'une roue aubagée au désaccordage aléatoire	118
3 Étude d'amortisseurs désaccordés sur la vibration d'une roue aubagée	121
3.1 Cas test	122
3.2 Étude paramétrique du coefficient de frottement sur la structure accordée . .	122
3.3 Optimisation globale du système mécanique	124
4 Bilan du chapitre	128

Ce chapitre se décompose en trois études indépendantes sur le modèle TurboTopo Vrillé présenté au Chapitre III, Section III.6.1. La structure complète est représentée à la Figure V.1 et présente une complexité proche de celle utilisée en bureaux d'études. Les sous-systèmes étudiés sont illustrés à la Figure V.2. La première analyse consiste à évaluer l'impact de l'amortisseur vis à vis du frottement en pied de pale. La seconde étude porte sur l'impact du niveau des non-linéarités sur la surtension dynamique en présence de désaccordage aléatoire. Enfin, une dernière section propose de trouver un schéma de désaccordage intentionnel pour optimiser le comportement vibratoire du système mécanique.

1 Analyse d'une structure accordée constituée de pales, d'un disque et d'amortisseurs

1.1 Résultat numérique sur le cas accordé standard

Nous étudions ici la réponse forcée de trois structures issues du modèle éléments finis de la Figure V.1 : un cas avec seulement les pales et le disque (appelé cas pale-disque), un où les pales sont collées au disque et des amortisseurs sont positionnés sous les plateformes (appelé cas roue amortisseurs), et le dernier système correspond à la structure complète (appelé cas pale, disque et amortisseurs) avec cette

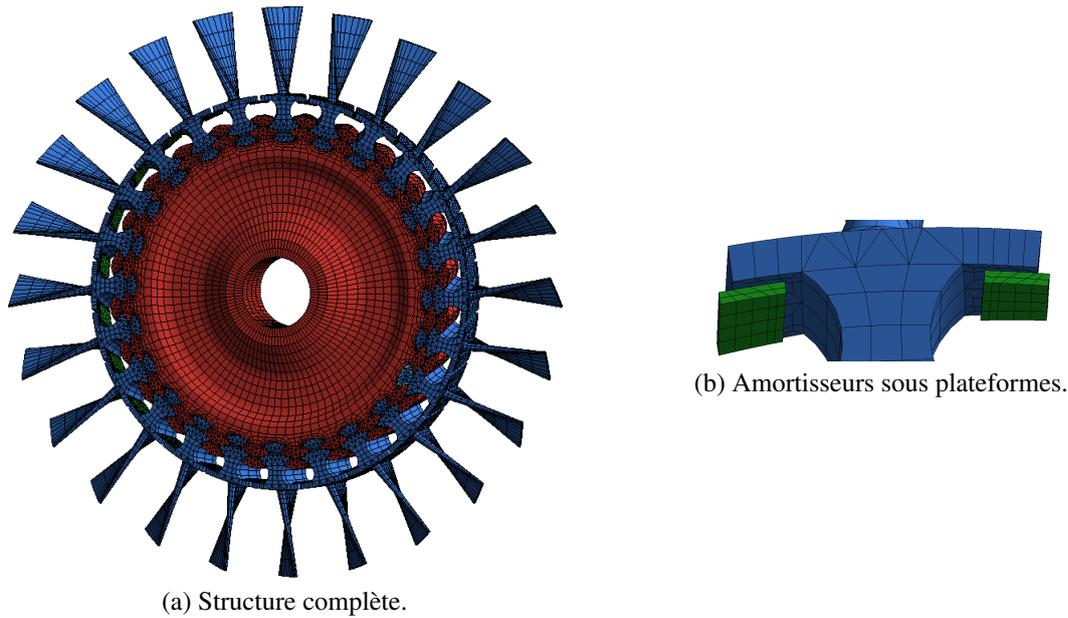


FIGURE V.1 – Modèle éléments finis : turbotopo vrillé.

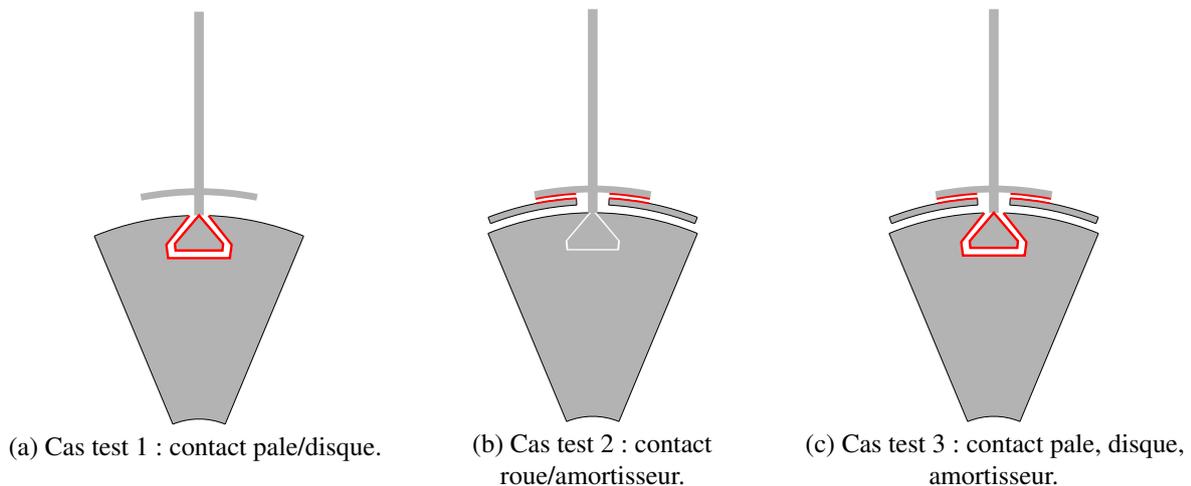


FIGURE V.2 – Schémas des trois cas tests. Les zones non-linéaires de contact prises en compte sont représentées en rouge.

fois un contact non-linéaire entre les pales et le disque. Ces structures sont soumises à des excitations ondes tournantes et stationnaires suivant le diamètre 3 (nombre d'onde $h_{ex} = 3$). L'amplitude de la force est prise égale à 0.4N. Comme indiqué à la Section III.6, la méthode de référence n'est plus applicable du fait du trop grand nombre de degrés de liberté non-linéaires. Nous appliquons donc les nouvelles méthodes cycliques proposées au Chapitre III, à savoir la Méthode 1 pour traiter des ondes stationnaires et la Méthode 2 pour des ondes tournantes. Afin d'être pleinement confiant dans les résultats obtenus, la méthode [119] est également employée pour les excitations tournantes. Le contenu harmonique de chaque diamètre gardé est fourni au Tableau V.1 pour les différentes méthodes. Comme dans les simulations de la Section III.6, le premier mode de flexion du 3^e diamètre est étudié (voir triangle vert de la Figure III.22). Les réponses forcées sont illustrées par le déplacement en tête de pale des différents secteurs.

Diamètre nodal	Méthode [119]	Méthode 2	Méthode 1
0	0	0	[[0, 3]]
3	1	1	[[0, 3]]
6	2	n/a	n/a
9	3	3	[[0, 3]]

TABLEAU V.1 – Contenu harmonique pour chacun des diamètres nodaux pour les différentes méthodologies.

1.1.1 Excitation onde tournante

La Figure V.3 illustre la réponse forcée des trois systèmes mécaniques de la Section III.6.1, à savoir le cas pale-disque, le cas roue (contact pale et disque linéarisé) amortisseur, et le cas complet : pale, disque et amortisseurs. Le déplacement en tête de pale de tous les secteurs sont représentés. Comme la réponse est sous la forme d'une onde tournante, les réponses des différents secteurs se superposent et une seule courbe est visible par graphe.

Les simulations linéaires (état collé) des différents systèmes sont représentées par des traits en pointillés noirs dans la Figure V.3. Nous observons que la présence d'amortisseurs décale les pics de résonance vers les hautes fréquences : sans amortisseurs le pic est à 1538 Hz (Figure V.3a), avec amortisseurs il est à 1584 Hz (Figure V.3c). Ceci s'explique simplement par la rigidification du système via les amortisseurs.

Pour la simulation non-linéaire du cas pale-disque, la Figure V.3a montre des résultats similaires à ceux de la Section III.5 : le pic de résonance est atténué d'environ 35% et est décalé vers les basses fréquences. Ces deux effets proviennent du glissement au niveau de la zone de contact et à l'ouverture du contact. Dans le cas du système roue amortisseurs, illustré à la Figure V.3b, les effets non-linéaires sont amplifiés : un décalage fréquentiel de 8 Hz est observé et l'amortissement est de 55%. La Figure V.3c correspond au modèle complet et est similaire à la Figure V.3b. Nous pouvons conclure que les effets non-linéaires sont principalement pilotés par les amortisseurs et non par le contact en pied de pale.

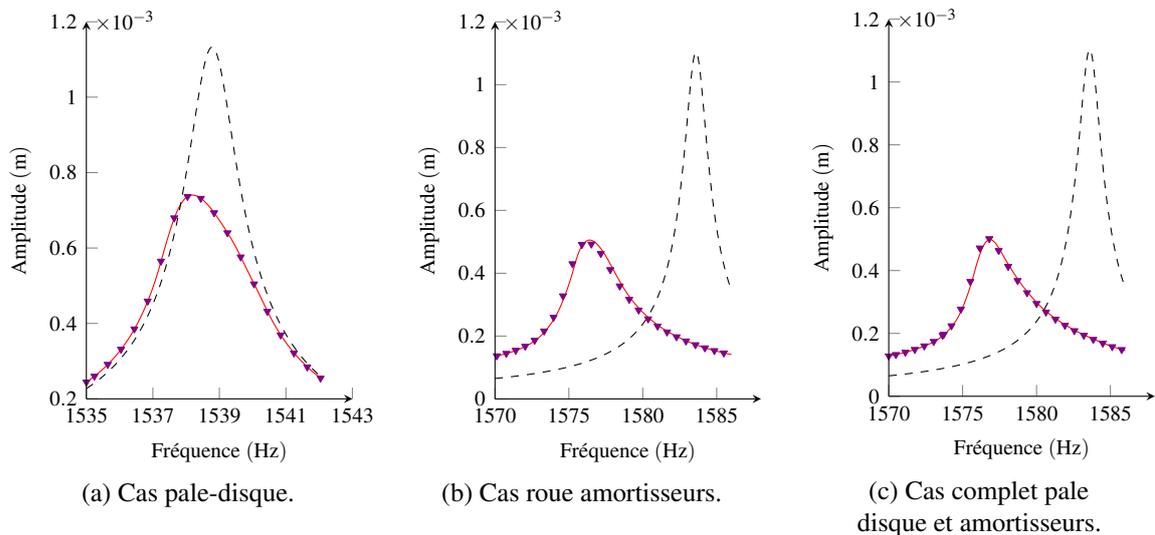


FIGURE V.3 – Réponses forcées des structures soumises à une excitation tournante. (---) : solution linéaire (état collé); (▼) : Méthode de Petrov [119]; (—) : Méthode 2.

Comme pour la Section III.5.2, nous illustrons le comportement global du contact des structures (voir les Équations (III.75) et (III.76)). La Figure V.4 représente donc, pour les trois structures étudiées

de la Figure V.3, le pourcentage de nœuds dans un état collé (en rouge), glissant (en bleu), et séparé (en vert). Les traits en pointillés représentent le pourcentage de nœuds dont le statut ne change pas sur une période (avec le même code couleur). Afin de mieux illustrer le contact pale disque et pale amortisseur sur le cas complet, les courbes de pourcentage de chaque zone de contact sont distinguées dans la Figure V.4c (traits pleins contact pale/disque et traits avec marqueurs pour le contact pale/amortisseur). Cette distinction facilite la comparaison entre les Figures V.4c et Figure V.4a pour étudier le contact pale disque et entre les Figures V.4c et V.4b pour le contact pale amortisseur.

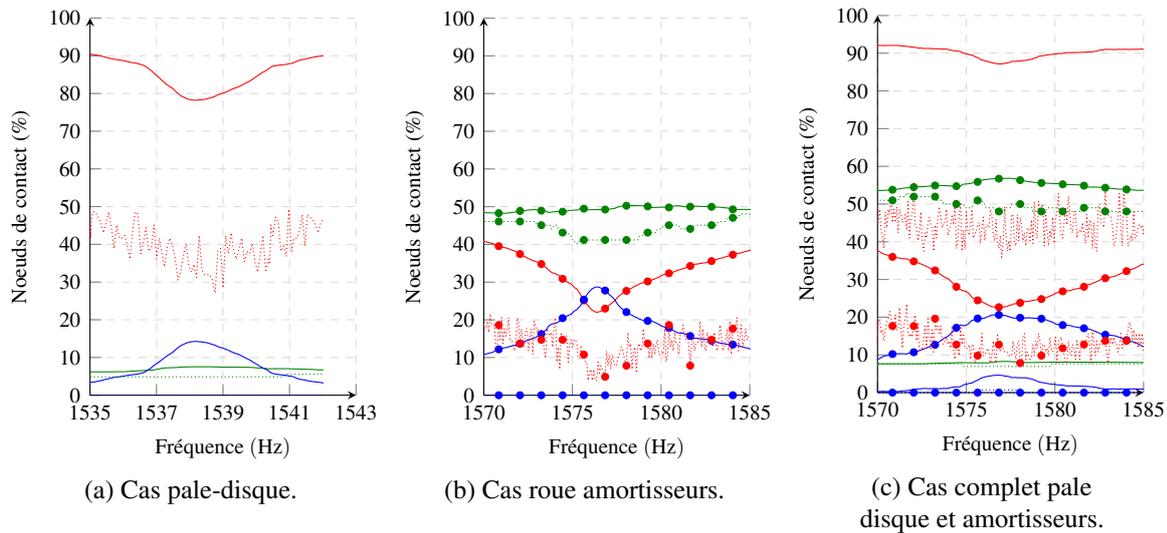


FIGURE V.4 – Statut moyen de l'état de contact des nœuds au cours d'une période pour une excitation tournante évalué par la Méthode 1 avec $\mu = 0.15$. (—) : séparé; (—) : collé; (—) : glissant. Pour chaque état, (.....) (avec le même code couleur) correspond au pourcentage de noeuds qui ne change pas d'état au cours de la période. Les marqueurs en forme de cercle correspondent au contact roue amortisseurs.

Pour le cas pale-disque (voir Figure V.4a), 5% des nœuds sont en moyenne séparés à tout instant. De plus seuls 2% (différence entre la ligne pleine et la ligne en pointillé) des nœuds ont une ouverture partielle. Cette information nous permet de confirmer la pertinence de la Méthode 2. En effet, comme indiqué aux Sections III.5 et III.3.5, les Méthodes 1 et 2 sont basées sur la détermination analytique du couplage inter-diamétral pour une non-linéarité de frottement (et ne prend donc pas en compte les ouvertures partielles du contact). Dans la simulation actuelle le faible nombre de nœuds dans cet état rassure dans l'utilisation de ces méthodes.

L'état du contact pour le cas roue amortisseur est très différent que pour celui du cas pale-disque. En effet, 50% des nœuds sont ouverts à tout instant. En revanche, seuls 10% sont en ouverture partielle à la résonance (donc la Méthode 2 reste pertinente pour notre analyse). Au pic de résonance, davantage de nœuds passe d'un état collé à glissant (sur la Figure V.4b, la ligne bleue passe au-dessus de la ligne rouge).

La Figure V.4c décrit le contact global pour le cas complet. Globalement le comportement des zones de contact sont proches des Figures V.4a et Figure V.4b. Nous observons tout de même sur la Figure V.4c qu'approximativement 90% des nœuds en pied de pale sont dans un état collé contre 80% sur la Figure V.4a. Comme un état collé ne donne lieu à aucune dissipation d'énergie, cette observation conduit à la conclusion que l'énergie est principalement perdue dans le contact pale amortisseur. Globalement, nous pouvons voir que l'impact de l'amortisseur sur la réponse non-linéaire est du premier ordre.

Toutes ces simulations utilisent un maillage uniformément réparti (donné en Figure V.1). Au vu du maillage actuel, nous pouvons supposer que densifier le maillage en le laissant uniforme ne changerait

pas les valeurs fournies dans cette section. En revanche, pour des maillages non-uniformes (par exemple plus dense au niveau des arêtes), les pourcentages associés au statut des nœuds de contact pourraient changer.

1.1.2 Excitation stationnaire

Nous étudions dans cette section les mêmes structures mais cette fois soumises à une excitation stationnaire de nombre d'onde $h_{ex} = 3$. La Figure V.5 illustre les réponses forcées obtenues par la Méthode 1. Pour les trois cas, les amplitudes en tête de pale des différents secteurs sont représentées. Du fait de la forme de l'excitation, seuls trois niveaux d'amplitude sont observés (dont un qui est quasiment nul). Le déplacement maximal pour les trois cas est très proche des amplitudes obtenues par une excitation tournante (voir la Figure V.3).

L'état de contact global des trois configurations est fourni en fonction de la fréquence d'excitation à la Figure V.6. De nombreuses différences peuvent être observées par rapport au cas de l'excitation tournante. Tout d'abord le pourcentage de nœuds glissants est plus petit : pour le cas pale-disque, 10% des nœuds glissent en stationnaire (voir Figure V.6a) contre 15% pour le cas tournant (voir Figure V.4a). Cet effet est plus marqué pour le cas roue amortisseur où 15% des nœuds glissent en stationnaire (voir Figure V.5b) contre 30% pour le cas tournant (voir Figure V.4b). Ceci indique donc que les excitations tournantes facilitent les effets de glissement. Cela semble assez logique puisque dans le cas d'une onde tournante, tous les secteurs ont un mouvement avec des amplitudes similaires (comme représenté à la Figure V.3a : l'amplitude en tête de pale est la même pour tous les secteurs) tandis que pour une onde stationnaire, certains secteurs ont une amplitude beaucoup plus faible et restent donc dans un état collé.

Une autre différence entre les simulations pour les deux excitations est particulièrement visible sur le cas complet pale disque et amortisseur qui concerne le nombre de nœuds en séparation. En effet, cet état de contact est prédominant dans le cas d'une onde tournante (environ 55% des nœuds de la zone pale amortisseur). En revanche pour le cas d'une onde stationnaire l'état collé prédomine (Figure V.6c). Comme cela n'a pas été observé dans le cas roue amortisseur (Figure V.6b), nous pouvons supposer que cet effet provient du lien entre de l'excitation (différents niveaux d'énergie pour les différents secteurs) et l'activation de la non-linéarité entre la pale et le disque.

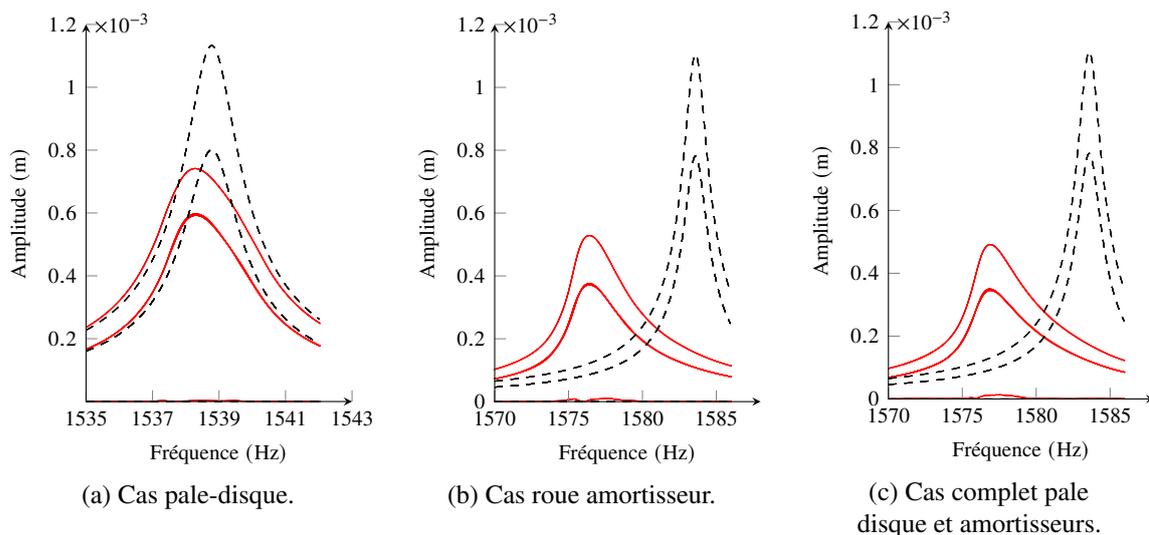


FIGURE V.5 – Réponses forcées des structures soumises à une excitation stationnaire. (---) : solution linéaire (état collé); (—) : Méthode 1.

Ces quelques simulations nous ont permis de voir l'influence des zones de contact sur le niveau vibratoire d'une roue aubagée. Les amortisseurs sous plateformes ont une influence majeure sur la

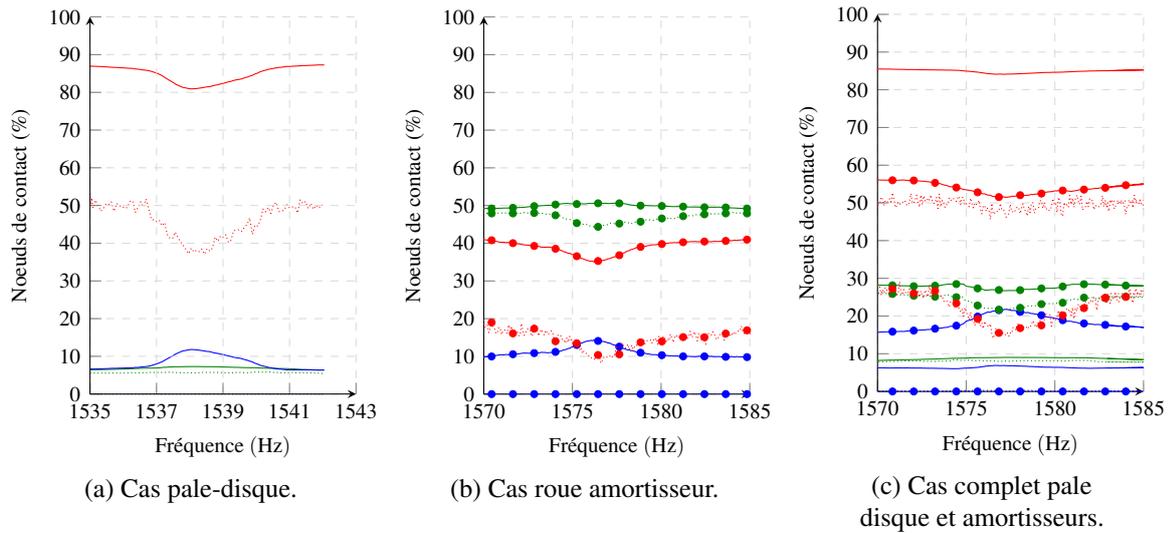


FIGURE V.6 – Statut moyen de l'état de contact des nœuds au cours d'une période pour une excitation stationnaire. La légende est identique à celle de la Figure V.4.

dissipation d'énergie bien que de nombreux nœuds de contact soient dans un état ouvert. Nous avons également pu voir que le comportement de la zone de contact dépend fortement de la nature de l'excitation (tournante ou stationnaire).

1.2 Détails sur les composantes spectrales dans le cas d'une excitation stationnaire

Dans cette section, nous illustrons les composantes cycliques des réponses forcées représentées à la Figure V.5. Elles sont fournies à la Figure V.7 pour chaque configuration.

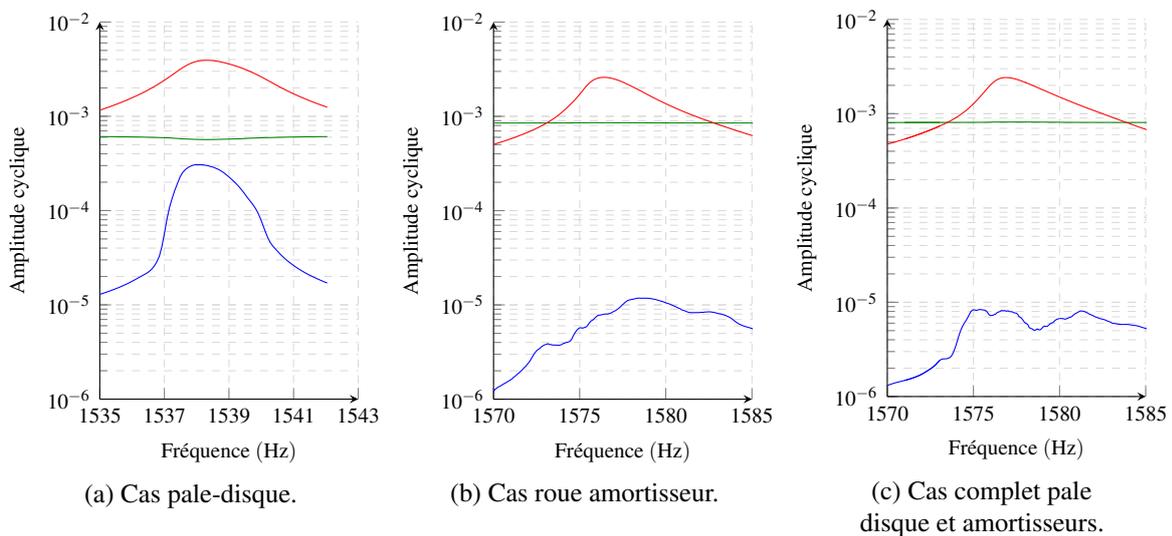


FIGURE V.7 – Composantes spectrales de la Figure V.5 obtenue avec la Méthode 1. (—) : \tilde{u}_0 , (—) : \tilde{u}_3 et (—) : \tilde{u}_9 .

Nous voyons sur la Figure V.7, que la réponse du diamètre 0 est globalement constante sur toute la plage fréquentielle. La précharge statique contrôle le comportement global de ce diamètre. De faibles variations sont tout de même obtenues dû aux couplages non-linéaires. Pour les cas avec des amortisseurs

(Figures V.7b et V.7c), l'amplitude de \tilde{u}_0 est plus grande du fait de l'effet centrifuge additionnel des amortisseurs.

Dans le cas pale-disque, illustré à la Figure V.7a, le neuvième diamètre est couplé avec le troisième (le ratio entre ces deux composantes est environ égal à 0.08). Cependant, pour le cas roue amortisseur (Figure V.7b), ce ratio diminue à 0.0046. Il semble donc que le contact en pied de pale est plus à même de faciliter le transfert d'énergie entre les diamètres nodaux. Entre la Figure V.7b et V.7c, ce ratio est très proche car le contact pale-disque est essentiellement collé et seul le couplage issu de l'amortisseur est présent.

1.3 Influence du coefficient de frottement

Dans cette section, nous étudions l'impact du coefficient de frottement sur la dynamique des trois systèmes étudiés jusqu'à présent. Trois valeurs de μ ont été testées : 0.15, 0.3 et 0.45. Seuls les résultats pour une excitation tournante sont représentés (obtenus avec la Méthode 2). Une excitation stationnaire fournit des résultats assez semblables.

La Figure V.8 montre l'influence de μ sur la réponse forcée des trois configurations autour de leur premier mode de flexion. Les résultats de la Figure V.8a sont similaires à ceux obtenus dans [87] : lorsque μ augmente, le système se rapproche du cas collé.

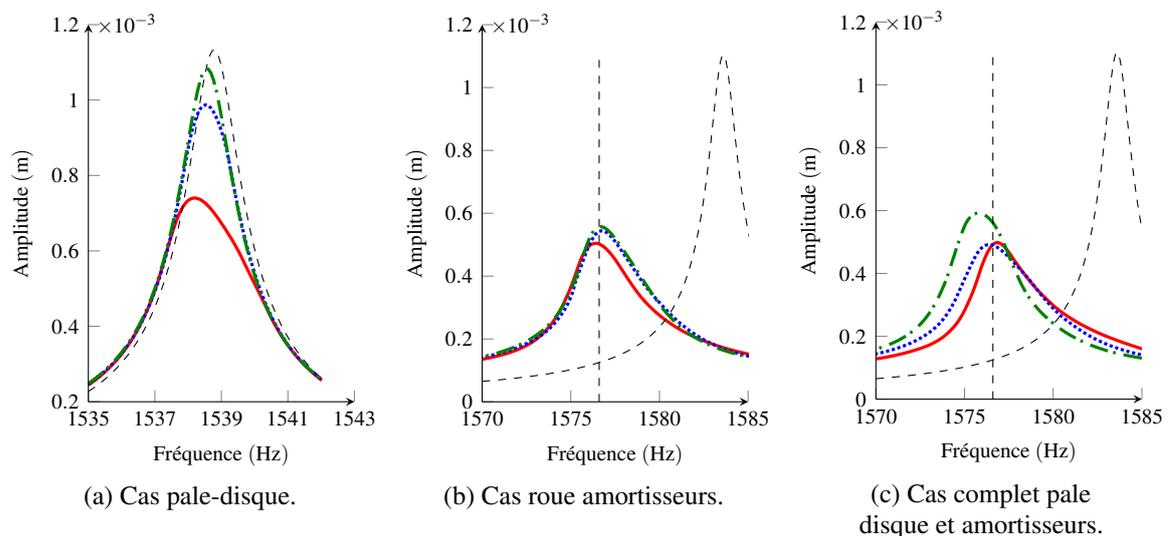


FIGURE V.8 – Réponses forcées des trois configurations pour différentes valeurs de μ . (—) : $\mu = 0.15$; (.....) : $\mu = 0.3$; (- -) : $\mu = 0.45$, (- -) : réponse linéaire (tous les nœuds de contact sont dans un état collé). La ligne verticale en pointillé indique la fréquence propre linéaire où les nœuds de contact ouverts lors de la précharge sont maintenus ouverts (les autres nœuds sont collés).

Contrairement au cas pale-disque, l'augmentation de μ pour les cas avec des amortisseurs ne donnent pas des résultats qui se rapprochent de la réponse linéaire sous-jacente (illustrés par les courbes noires en pointillés, voir la Figure V.8). En fait, dû à la précharge, certains nœuds de la zone de contact pale amortisseur s'ouvrent et restent ouverts peu importe la valeur de μ . Pour représenter ce phénomène, un trait vertical en pointillé est représenté aux V.8b et V.8c. Ce trait représente la fréquence de résonance (située à 1576.6 Hz) du système linéaire auquel les nœuds qui sont initialement séparés ne sont pas assemblés. Bien évidemment, la vibration du système mécanique peut induire un changement d'état de ces nœuds et donc ce trait ne représente pas l'état asymptotique de la structure mais permet simplement de matérialiser le décalage fréquentiel dû à l'ouverture du contact.

Pour $\mu = 0.15$, la Section V.1.1.1 a mis en évidence que les amortisseurs contrôlaient une grande partie de la dynamique du système complet pale disque et amortisseurs. Cependant les lignes bleue et

verte de la Figure V.8c (correspondant aux valeurs $\mu = 0.3$ et $\mu = 0.45$) montrent un comportement différent de la Figure V.8b. Pour ces nouvelles valeurs de μ , le contact entre la pale et le disque impacte de manière plus importante la structure et il est alors difficile d'établir une prédominance d'une zone de contact sur l'autre.

La Figure V.9 représente l'état glissant des nœuds de contact pour les trois valeurs de μ et pour les trois configurations. Pour le cas roue amortisseur (voir la Figure V.8b), l'augmentation de μ , donne lieu à une diminution du nombre de nœuds glissants de 30% à 15%. Cela signifie que moins d'énergie est dissipée par le système et donc l'amplitude de la réponse forcée (voir Figure V.7) augmente avec μ . Des résultats similaires sont observés dans [121, 122].

Remarquons que μ n'a que très peu d'influence sur la séparation. Par exemple, pour le cas complet de la Figure V.8c, le pourcentage de nœuds ouverts reste d'environ 50% quelque soit la valeur de μ .

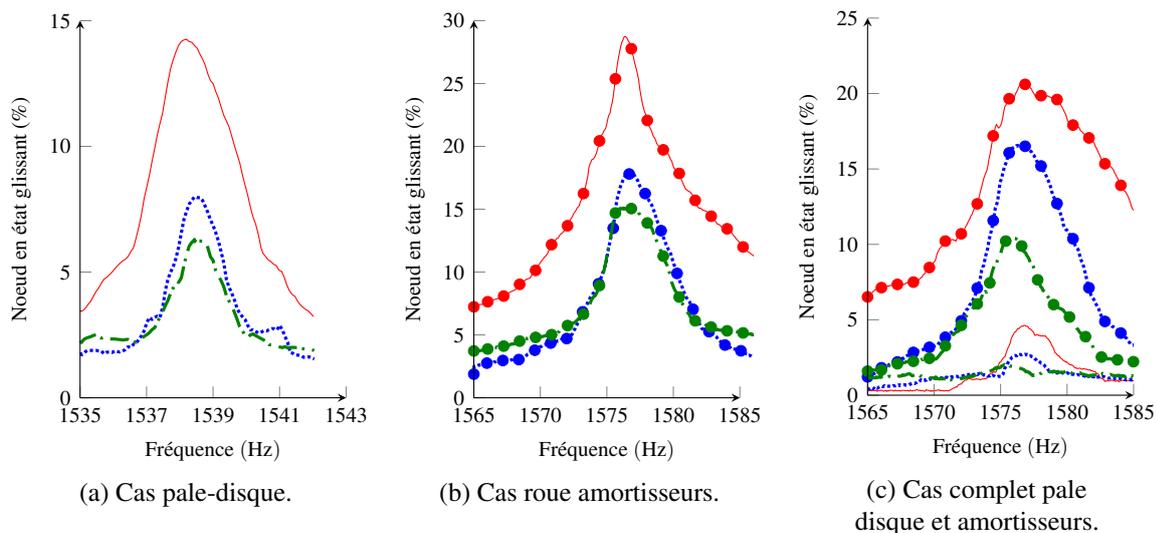
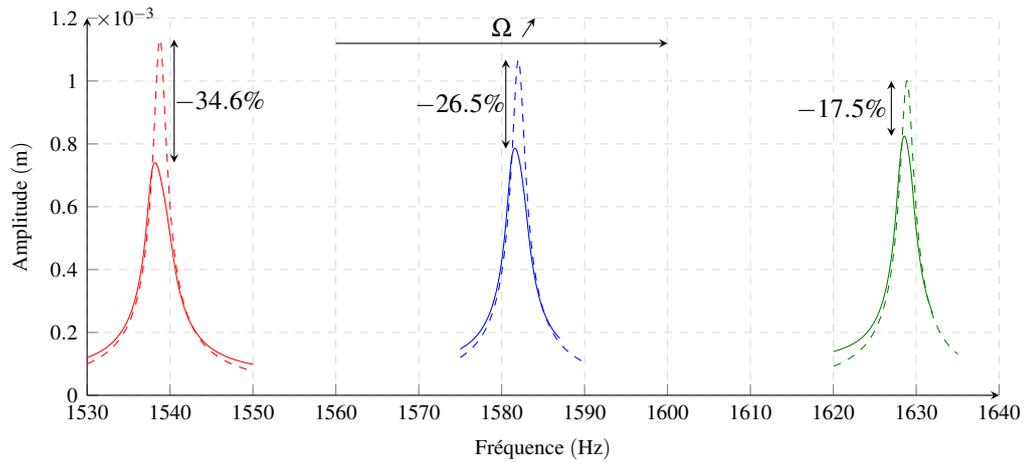


FIGURE V.9 – Statut moyen de l'état glissant des nœuds au cours d'une période pour différentes valeurs de μ . (—) : $\mu = 0.15$; (---) : $\mu = 0.3$; (-·-) : $\mu = 0.45$. Les lignes avec (●) (avec le même code couleurs pour μ) représentent le contact entre la pale et les amortisseurs.

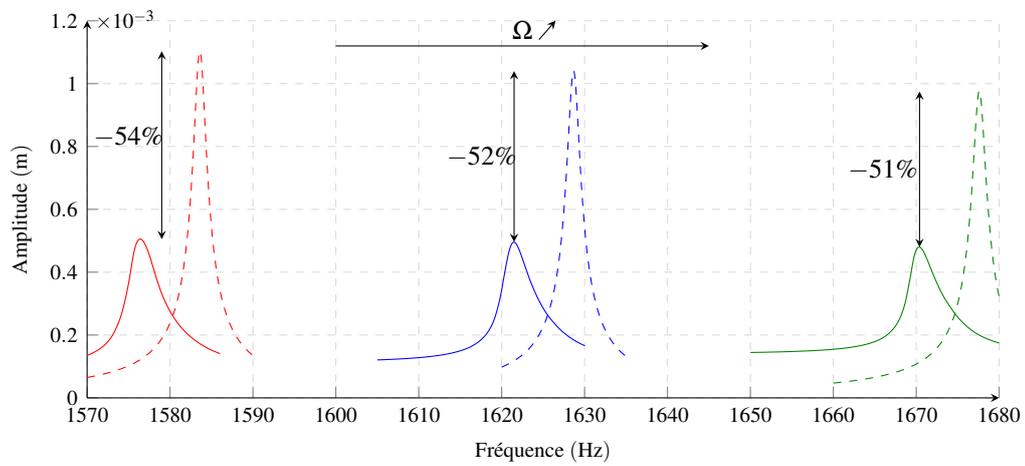
1.4 Influence de la précharge centrifuge

Dans cette section, le coefficient de frottement est constant, égal à $\mu = 0.15$ et trois valeurs de vitesses de rotation des solides Ω sont étudiées : 2200 rad s^{-1} , 2500 rad s^{-1} et 2800 rad s^{-1} . Pour rappel, cette rotation du système donne lieu à des matrices d'assouplissement centrifuge et de raideur géométrique. Seule la matrice de Coriolis est négligée car le disque est rigide et la pale peu élancée. Cette étude est complémentaire à l'étude précédente puisque la vitesse de rotation va influencer à la fois sur la charge normale de la loi de frottement mais aussi sur l'ouverture des nœuds. Les réponses forcées sont obtenues avec la Méthode 2 pour les trois configurations et les trois vitesses de rotations. Celles-ci sont représentées à la Figure V.10. La Figure V.11 illustre le pourcentage de nœuds glissants en fonction de la fréquence d'excitation. Afin de représenter cette évolution sur un même graphe, la fréquence d'excitation a été normalisée par les fréquences propres linéaires.

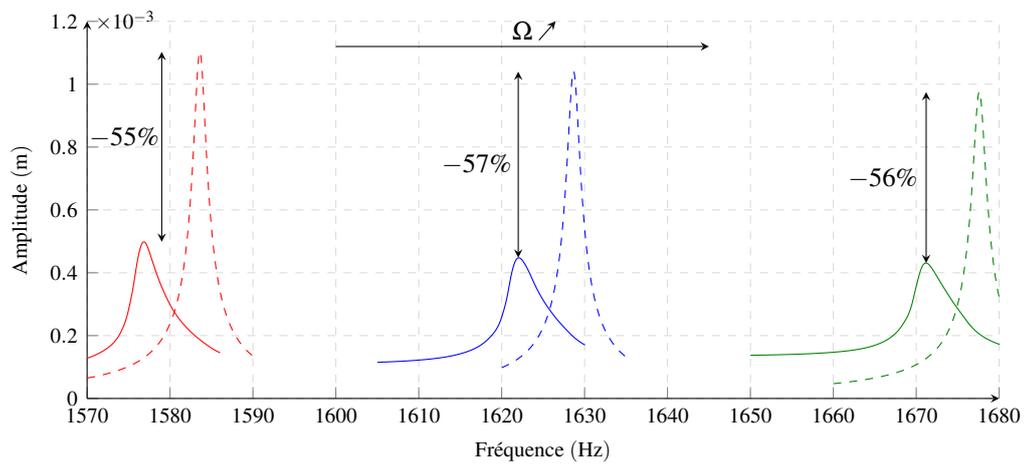
La Figure V.10 montre que pour chaque cas test, la fréquence propre du premier mode de flexion du troisième diamètre augmente avec la vitesse de rotation. Les ratios entre l'amplitude à la résonance entre les courbes linéaires et non-linéaires sont fournis sur la Figure V.10. Pour le cas pale-disque (voir la Figure V.10a), la vitesse de rotation maximale conduit à moins de dissipation et donc à une amplitude en tête de pale la plus élevée. Avec des vitesses de rotation plus importantes, les solides sont davantage pressés les uns contre les autres et sont donc moins susceptibles de glisser ou de se séparer. Ceci est



(a) Cas pale-disque.



(b) Cas roue amortisseur.



(c) Cas complet pale disque et amortisseur.

FIGURE V.10 – Réponses forcées pour différentes valeurs de vitesses de rotation des solides.
 (—) : $\Omega = 2200 \text{ rad s}^{-1}$; (—) : $\Omega = 2500 \text{ rad s}^{-1}$; (—) : $\Omega = 2800 \text{ rad s}^{-1}$. (--) : réponse linéaire (état collé) avec le même code couleur.

confirmé avec la Figure V.11a où le taux de nœuds glissants diminue avec l'augmentation de la vitesse de

rotation. Pour $\Omega = 2200 \text{ rad s}^{-1}$, à la résonance, presque 15% des nœuds glissent tandis que seulement 10% des nœuds sont dans cet état pour $\Omega = 2800 \text{ rad s}^{-1}$. Ce comportement est également observé pour le cas roue amortisseur (voir la Figure V.11b) où 30% des nœuds glissent pour $\Omega = 2200 \text{ rad s}^{-1}$, mais seulement 20% pour $\Omega = 2800 \text{ rad s}^{-1}$. En revanche la Figure V.10b montre que l'amplitude en tête de pale du cas roue amortisseurs diminue avec l'augmentation de la vitesse de rotation. Cet accroissement de la dissipation avec la vitesse de rotation peut s'expliquer par la force normale qui augmente aux interfaces. Bien que cela conduit à moins de nœuds glissants, la force de frottement tangentielle sur un nœud va être augmentée. Il y a donc un compromis à avoir en terme d'énergie dissipée par rapport à l'augmentation de Ω . D'un côté moins de nœuds glissent, mais de l'autre les forces tangentielles augmentent et donc l'énergie dissipée augmente. Dans le cas roue amortisseur, ce dernier effet est dominant. Et l'inverse pour le cas pale-disque. Dans le cas du système complet, la dissipation varie peu et il semble donc que ces effets se compensent.

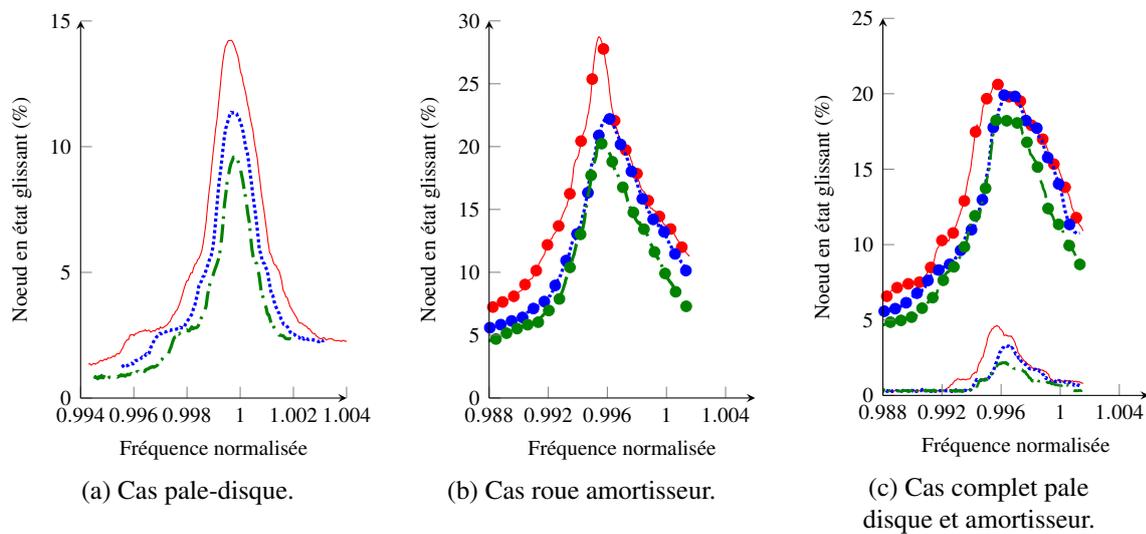


FIGURE V.11 – Statut moyen de l'état glissant des nœuds au cours d'une période pour différentes valeurs de Ω . (—) : $\Omega = 2200 \text{ rad s}^{-1}$; (.....) : $\Omega = 2500 \text{ rad s}^{-1}$; (-.-) : $\Omega = 2800 \text{ rad s}^{-1}$ pour l'interface pale disque. Les lignes en (●) sont associées au contact pale amortisseurs (même couleur et style de ligne).

2 Analyse de sensibilité d'une roue aubagée au désaccordage aléatoire

Dans cette section, nous étudions la configuration pale disque (voir Figure V.2a) du cas TurboTopo vrillé (voir Figure V.1). L'objectif est de compléter les analyses menées par Joannin [64]. Dans son manuscrit, il propose d'étudier succinctement l'influence du niveau de désaccordage, de la force d'excitation et de la présence de zone de veering avec la méthode de la CNCMS (voir Section II.6). Dans notre analyse, nous proposons d'étudier en détail l'influence du taux de désaccordage sur la réponse non-linéaire du système mécanique via la SNCR qui est plus précise que la CNCMS (voir Section IV.2). Pour cela le premier mode de flexion du premier, deuxième et troisième diamètre nodal sont étudiés. Une excitation tournante en tête de pale est appliquée. Afin d'étudier le couplage entre le désaccordage et le niveau de non-linéarité, différentes amplitudes sont appliquées au système.

L'étude proposée ici se base sur les explications fournies en Section I.5.2. Pour chaque numéro de diamètre, valeur de force, et valeur de déviation σ du désaccordage, cinquante tirages aléatoires sont effectués (modification des modes de Craig-Bampton comme indiqué en Section IV.3.2.1). La SNCR est employée pour évaluer les cinquante réponses forcées associées. Puis une loi de Weibull à 3 paramètres

est utilisée pour déterminer les 95^e, 50^e, et 5^e centiles du facteur d'amplification.

La Figure V.12 présente les résultats linéaires d'une telle analyse. Nous observons que, pour le premier mode de flexion, le diamètre 1 est le plus sensible au désaccordage aléatoire suivi du diamètre 2, puis finalement du diamètre 3. Pour les deux premiers diamètres, une surtension du facteur d'amplification est observée (pour $\sigma = 1.5\%$ pour le diamètre 1 et $\sigma = 0.9\%$ pour le diamètre 2). En revanche, un tel phénomène n'est pas visible pour le diamètre 3 dont le facteur d'amplification augmente avec σ jusqu'à atteindre un plateau.

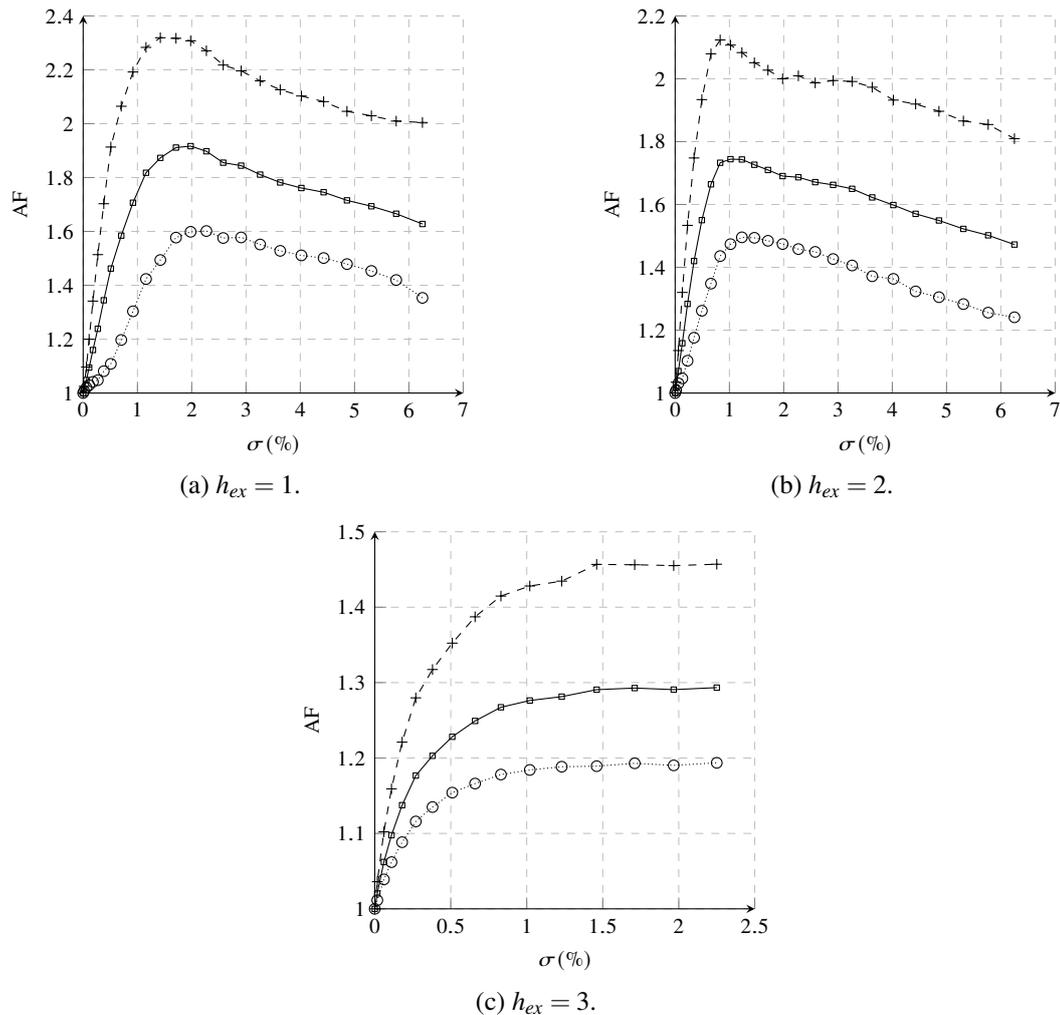


FIGURE V.12 – Facteur d'amplification linéaire en fonction de la valeur de la déviation. (+) : 95^e centile ; (■) : 50^e centile ; (○) : 5^e centile.

Regardons maintenant l'évolution de ces courbes pour les systèmes non-linéaires. Pour l'excitation suivant $h_{ex} = 2$ (respectivement $h_{ex} = 3$), la base de réduction de la SNCR est formée des modes cycliques complexes du premier mode de flexion pour les diamètres nodaux 0, 2, 6, et 10 (respectivement 0, 3, et 9) et suit la première procédure expliquée à la Section IV.2.2. Pour le diamètre 1, la seconde procédure est employée et la base est formée du couplage entre les diamètres 0, 1, 3, et 5.

La Figure V.13 représente l'évolution du 95^e centile du facteur d'amplification pour le premier diamètre en fonction du niveau de la non-linéarité. Pour faire varier ce niveau, différentes amplitudes d'excitation F_a sont appliquées sur le système. Plus le niveau est élevé, plus les non-linéarités sont

activées. Rappelons que le facteur d'amplification (AF) est calculé par rapport à la référence accordée

$$AF = \frac{\max(\mathbf{u}_{nl,\sigma})}{\max(\mathbf{u}_{nl,\sigma=0})}, \quad (V.1)$$

où le numérateur est égal au déplacement non-linéaire maximum de la structure désaccordée sur la plage fréquentielle d'étude et le dénominateur le déplacement non-linéaire de la structure accordée.

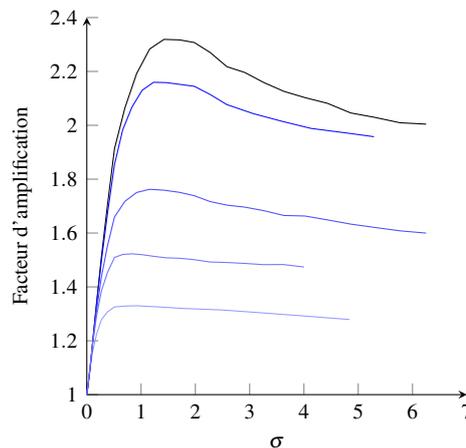


FIGURE V.13 – Facteur d'amplification pour le 95^e centile en fonction de la valeur de la déviation pour $h_{ex} = 1$. (—) : linéaire, (—) : non-linéaire ($F_a = 0.1$), (—) : non-linéaire ($F_a = 0.2$), (—) : non-linéaire ($F_a = 0.3$), et (—) : non-linéaire ($F_a = 0.4$).

La Figure V.13 fournit diverses informations intéressantes sur le couplage entre les non-linéarités et le désaccordage. Tout d'abord plus le niveau de non-linéarité est élevé moins le désaccordage influe sur le facteur d'amplification. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'amplification associée au désaccordage est réduite par le frottement du système mécanique et concentre moins la dynamique sur le mode (étalement du pic). La seconde observation est que le lieu de la surtension décroît avec l'augmentation du niveau de non-linéarité. Pour le cas linéaire, le facteur d'amplification maximum est obtenu pour $\sigma = 1.5\%$. Pour le système non-linéaire avec $F_a = 0.4N$, le maximum est atteint à $\sigma = 0.6\%$. Pour ce niveau, la Figure V.14 représente les 95^e, 50^e, et 5^e centiles. Contrairement au cas linéaire (voir Figure V.15a), les courbes des trois centiles sont très resserrées. D'un point de vue conception, de telles courbes facilitent la prédiction des marges vibratoires lors du dimensionnement.

Une étude moins complète sur les diamètres 2 et 3 a également été effectuée. Les résultats sont fournis en Figure V.15. Des observations similaires au diamètre 1 sont obtenus ici : l'augmentation du niveau de non-linéarité fait diminuer l'impact du désaccordage sur le facteur d'amplification. Comme pour le linéaire (voir Figure V.12c), la courbe du diamètre 3 ne présente pas de surtension et augmente jusqu'à un plateau. Cette différence de comportement selon les diamètres nodaux a été observée dans [16]. Il est donc difficile de donner une règle commune applicable à d'autres cas tests ou diamètres nodaux excités, compte tenu de la complexité de la dynamique en jeu.

La capacité des non-linéarités de frottement à diminuer le niveau vibratoire est bien connue dans le milieu des équipementiers aéronautiques. Cette courte analyse permet de mettre en lumière un autre bénéfice des non-linéarités de frottement : sa capacité à limiter l'influence du désaccordage aléatoire. En effet, au plus les non-linéarités sont élevées au plus le facteur d'amplification est faible et au plus le plateau est atteint rapidement. Mettre en place des systèmes de dissipation permettraient donc de diminuer les marges vibratoires des moteurs.

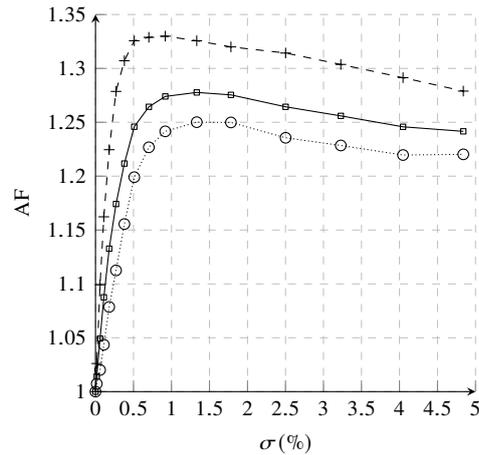


FIGURE V.14 – Facteur d'amplification non-linéaire pour $h_{ex} = 1$ en fonction de la valeur de la déviation. (+) : 95^e centile; (■) : 50^e centile; (○) : 5^e centile.

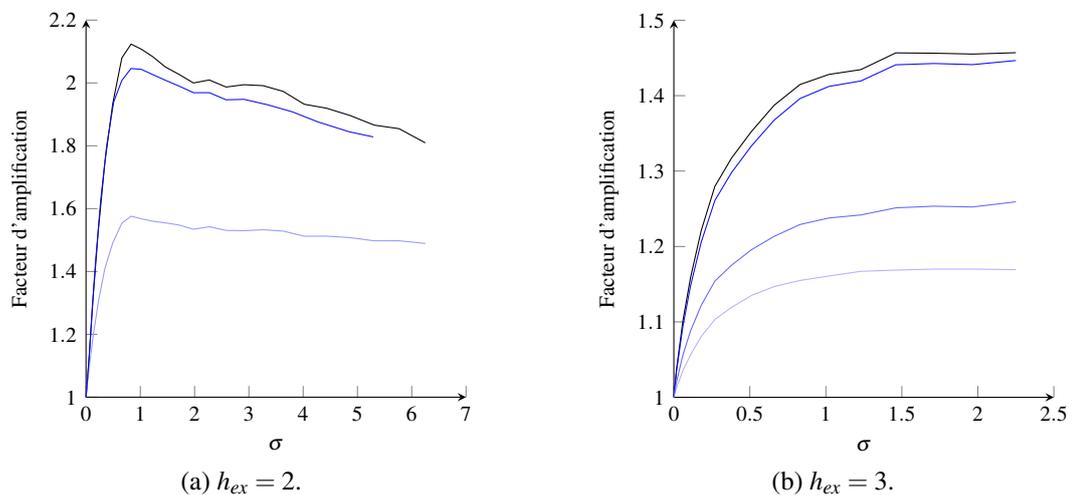


FIGURE V.15 – Facteur d'amplification pour le 95^e centile en fonction de la valeur de la déviation pour $h_{ex} = 2$ et 3. (—) : linéaire, (—) : non-linéaire ($F_a = 0.1$), (—) : non-linéaire ($F_a = 0.2$), (—) : non-linéaire ($F_a = 0.3$), et (—) : non-linéaire ($F_a = 0.4$).

3 Étude d'amortisseurs désaccordés sur la vibration d'une roue aubagée

Dans cette section, nous étudions la configuration roue amortisseur (voir Figure V.2b) du cas TurboTopo vrillé (voir Figure V.1). Le but est de proposer une méthodologie afin de déterminer un schéma de désaccordage intentionnel d'amortisseurs sous plateformes de façon à minimiser la vibration de deux modes simultanés : le premier mode de flexion (1F) et le premier mode de torsion (1T) du dixième diamètre nodal (choix arbitraire). Ces modes sont indiqués par les petits cercles rouges sur le diagramme à points de la Figure III.22. Cette optimisation se déroulera en deux étapes. Tout d'abord nous allons identifier pour chacun des modes (1F et 1T) la valeur du coefficient de frottement qui optimise le niveau vibratoire de la structure. Cette étude permettra de définir deux secteurs fondamentaux différents notés secteur A et secteur B. Ces deux secteurs diffèrent uniquement par leur valeur du coefficient de frottement. Le secteur A optimise le mode 1F et le secteur B, le mode 1T. La seconde étape consistera à déterminer la combinaison de secteurs A et B à former pour optimiser simultanément les deux modes.

3.1 Cas test

La structure est excitée en tête de pale par une onde tournante avec $h_{ex} = 10$. Pour le mode 1F (respectivement 1T), l'excitation de fréquence varie autour de la pulsation propre à 1597Hz (respectivement 4860Hz). L'intensité des forces d'excitation pour chacun des deux modes sont choisies de telle façon à obtenir un déplacement en tête de pale égal pour chaque mode à la résonance du système linéaire sous-jacent. Ainsi une excitation de 0.5 N (respectivement 1.5 N) est appliquée pour le mode 1F (respectivement 1T).

3.2 Étude paramétrique du coefficient de frottement sur la structure accordée

Dans cette section, nous allons faire varier la valeur du coefficient d'amortissement μ pour chaque mode afin d'en optimiser l'amortissement. Nous adoptons ici une démarche frontale et calculons pour une multitude de valeurs de μ la réponse forcée du système. La valeur optimale de μ est définie comme étant la valeur qui minimise le déplacement maximal en tête de pale. Cette étude est réalisée pour les modes 1F et 1T séparés.

3.2.1 Méthodologie

Afin de calculer la réponse forcée de la structure soumise à une excitation tournante, nous employons la Méthode 2 définie dans la Section III.3.2. L'excitation ayant un nombre d'onde égal à 10, les non-linéarités vont venir créer du couplage entre les diamètres 2, 6, et 10. En raison de la rotation de la structure, une force centrifuge est appliquée sur la structure suivant le diamètre 0. Celui-ci est donc également inclus dans le calcul. Le système d'équations à résoudre est donc

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{M}}_0 \ddot{\mathbf{u}}_0 + \tilde{\mathbf{C}}_0 \dot{\mathbf{u}}_0 + \tilde{\mathbf{K}}_0 \mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{f}}_{nl,0} = \tilde{\mathbf{f}}_{ext,0}, & (V.2a) \\ \tilde{\mathbf{M}}_{10} \ddot{\mathbf{u}}_{10} + \tilde{\mathbf{C}}_{10} \dot{\mathbf{u}}_{10} + \tilde{\mathbf{K}}_{10} \mathbf{u}_{10} + \tilde{\mathbf{f}}_{nl,10} = \tilde{\mathbf{f}}_{ext,dyn,10}, & (V.2b) \\ \tilde{\mathbf{M}}_k \ddot{\mathbf{u}}_k + \tilde{\mathbf{C}}_k \dot{\mathbf{u}}_k + \tilde{\mathbf{K}}_k \mathbf{u}_k + \tilde{\mathbf{f}}_{nl,k} = \mathbf{0}, \quad k \in \{2, 6\}. & (V.2c) \end{cases}$$

La HBM est appliquée sur le système avec une expansion harmonique $N_h = 3$. La solution sur le premier secteur est cherchée sous la forme (III.3) et le déplacement du reste des secteurs est obtenu avec l'hypothèse d'une onde tournante (III.2). L'appariement entre les harmoniques et les diamètres nodaux donne finalement le système suivant à résoudre

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{K}}_0 \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_{f_{nl},0} = \mathbf{c}_{f_{ext},0}, & (V.3a) \\ (-\omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{10} + i\omega \tilde{\mathbf{C}}_{10} + \tilde{\mathbf{K}}_{10}) \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_{f_{nl},1} = \mathbf{c}_{f_{ext},1}, & (V.3b) \\ (-\omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_6 + i\omega \tilde{\mathbf{C}}_6 + \tilde{\mathbf{K}}_6) \mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_{f_{nl},3} = \mathbf{0}. & (V.3c) \end{cases}$$

Le second harmonique temporel est couplé avec le quatrième diamètre nodal mais comme celui-ci ne fait pas partie des diamètres en interaction dû au frottement, l'équation associée n'est pas retenue. De plus, le dixième diamètre est censé se coupler avec le deuxième diamètre nodal. Cependant le premier harmonique à s'appairer avec ce diamètre est $n_h = 5$ (en dehors de l'expansion harmonique de la HBM).

3.2.2 Résultats numériques

Le système (V.3) est résolu pour différentes valeurs de μ pour les modes 1F et 1T étudiés de façon séparée. La valeur initiale de μ est prise égale à 0.3, puis est diminuée progressivement avec un pas décremental de 0.01. Les valeurs optimales des modes 1F et 1T, notés μ_{1F}^* et μ_{1T}^* , correspondent à la valeur de μ qui minimise le déplacement maximal de la structure. Les Figures V.16 et V.17 représentent le déplacement maximal de la structure pour quelques valeurs de μ .

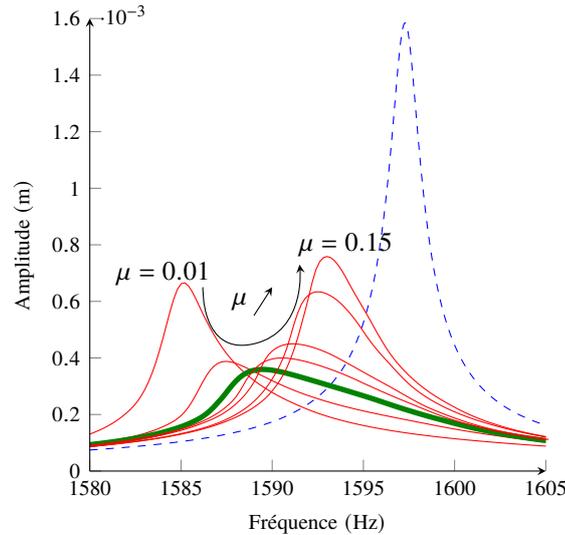


FIGURE V.16 – Réponses forcées pour le mode 1F. (---) : cas linéaire (état collé); (—) : cas optimal $\mu_{1F}^* = 0.03$. (—) : autres valeurs de μ (0.01, 0.02, 0.04, 0.05, 0.1, et 0.15 dans cet ordre).

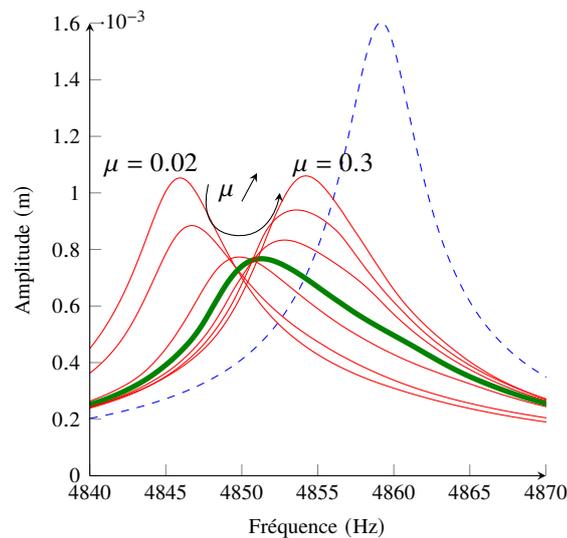


FIGURE V.17 – Réponses forcées pour le mode 1T. (---) : cas linéaire (état collé); (—) : cas optimal $\mu_{1T}^* = 0.1$. (—) : autres valeurs de μ (0.02, 0.03, 0.07, 0.15, 0.2, et 0.3 dans cet ordre).

De telles études ont déjà été réalisées comme par exemple dans [122]. Pour les valeurs élevées de μ , le système tend vers l'état collé de la structure (avec un décalage fréquentiel lié à l'ouverture des noeuds comme expliqué dans la Section V.1). Pour les valeurs basses de μ , la dynamique du système tend vers un état totalement glissant. Entre ces deux extrêmes, une valeur optimale de μ est atteinte. Pour le mode 1F, sa valeur est égale à $\mu_{1F}^* = 0.03$ et pour le mode 1T, $\mu_{1T}^* = 0.1$.

De cette étude préliminaire, deux secteurs sont définis : le secteur A avec un coefficient de frottement μ_{1F}^* et un secteur B avec un coefficient de frottement μ_{1T}^* . De façon pratique, il est possible de faire varier ce coefficient de la surface de contact en ajoutant des patches rugueux, en lubrifiant la zone, ou encore en traitant la zone de contact via des opérations de sablage ou grenailage. La section suivante cherche à déterminer un schéma de désaccordage intentionnel, formé de secteurs A et B, qui optimise à la fois le mode 1F et 1T.

3.3 Optimisation globale du système mécanique

La nouvelle structure considérée est donc constituée de deux types de secteurs. Afin de capturer la dynamique de ce système, nous appliquons la SNCR expliquée à la Section IV.2. Dans cet exemple, nous étudions le dixième diamètre nodal (qui se couple comme vu dans la section précédente avec le zéro, deuxième et sixième diamètre nodal). Pour chaque secteur (ici deux : secteurs A et B) et pour chaque mode (ici deux : modes 1F et 1T), la base de réduction est formée de quatre modes complexes cycliques (donc au total seize modes sont évalués). Avant d'appliquer la SNCR à des fins d'optimisation, nous validons tout d'abord cette stratégie pour des roues aubagées avec des amortisseurs sous plateformes.

3.3.1 Performance et validation de la méthode

Nous étudions ici quatre structures : $(A)_{24}$, $(B)_{24}$, $(AB)_{12}$, et $(ABBA)_6$. La notation $(X)_Y$ correspond au système composé de 24 secteurs avec le supersecteur X qui est répété Y fois. Pour ces quatre systèmes, la SNCR est appliquée et comparée avec la Méthode 2 (qui fera office de référence, voir Section III.3.2). Pour cette méthode cyclique, nous devons créer les différents supersecteurs X (AB et ABBA) pour faire les calculs. Pour un mode spécifique étudié, la SNCR emploie une base de réduction de modes cycliques pour les secteurs A et B séparément. L'excitation est la même que celle décrite à la Section V.3.1.

La Figure V.18 représente le déplacement maximal pour chacune des quatre structures excitées autour du mode 1F. Pour les systèmes $(A)_{24}$ et $(B)_{24}$, les courbes se superposent parfaitement. Pour les systèmes $(AB)_{12}$, et $(ABBA)_6$, quelques écarts sont observés : un décalage d'environ 1 Hz sur le pic de résonance, et une erreur en amplitude maximale d'environ 8% pour le cas $(AB)_{12}$ et 5% pour $(ABBA)_6$.

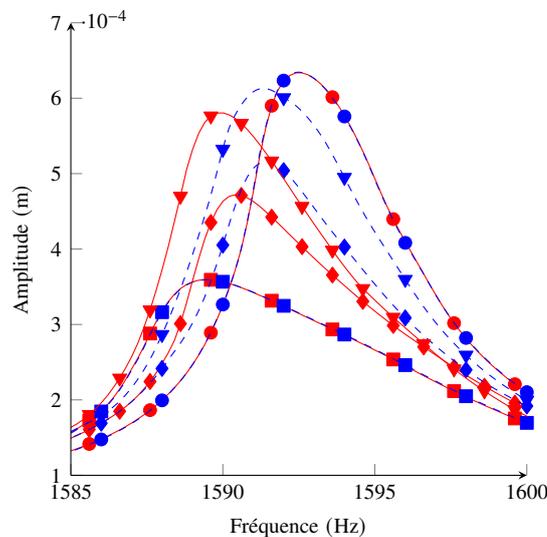


FIGURE V.18 – Réponses forcées pour le mode 1F. (—) : Méthode 2; (---) : SNCR. Les marqueurs (■), (●), (◆), et (▼) correspondent aux systèmes $(A)_{24}$, $(B)_{24}$, $(AB)_{12}$, et $(ABBA)_6$.

La Figure V.19 illustre le déplacement maximum des structures autour du mode 1T. Pour les quatre cas, la SNCR fournit de très bons résultats avec la référence. De petits écarts sont observés pour les structures $(AB)_{12}$ et $(ABBA)_6$ (les écarts sont en dessous de 2%). Globalement ces résultats sont très satisfaisants.

Afin d'expliquer ces quelques différences, nous pouvons nous interroger sur les écarts des déformées des modes induits par les différentes valeurs de μ .

La Figure V.18 montre que pour le mode 1F la différence en amplitude entre les systèmes $(A)_{24}$ et $(B)_{24}$ est de 43%, ce qui implique des déformées locales fortement différentes. En revanche, pour le

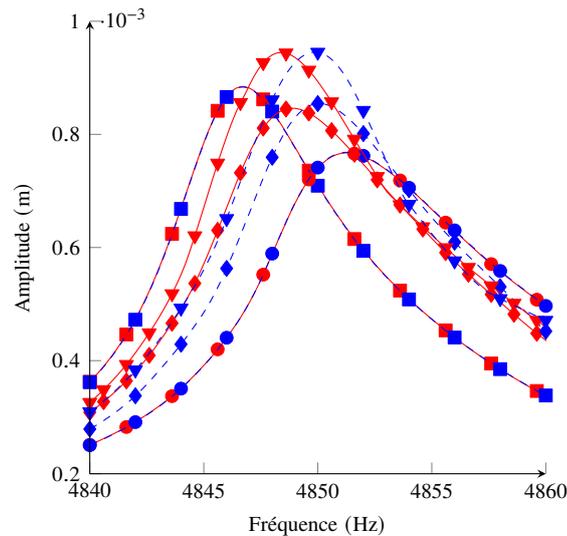


FIGURE V.19 – Réponses forcées pour le mode 1T. (—) : Méthode 2; (---) : SNCR. Les marqueurs (■), (●), (◆), et (▼) correspondent aux structures $(A)_{24}$, $(B)_{24}$, $(AB)_{12}$, et $(ABBA)_6$.

mode 1T, le niveau de vibrations de $(B)_{24}$ est seulement 14% plus faible que $(A)_{24}$. Les déformées des secteurs A et B sont donc plus proches.

Du fait que la seule différence entre les secteurs A et B soit leur valeur de μ , leur déformée respective sont censées être différentes notamment autour de la zone de contact et donc au niveau de la frontière de symétrie cyclique. Bien que les déplacements aux frontières soient imposés continus dans la SNCR, les différences des déformées peuvent créer des inexactitudes dans l'étape d'assemblage pour deux secteurs différents. La Figure V.20 illustre la déformée de la frontière de l'amortisseur de droite (voir la Figure III.20) pour les systèmes $(A)_{24}$ et $(B)_{24}$ au niveau de leur pic de résonance. Sur le côté gauche de la Figure, la direction du déplacement est proche entre les deux structures, mais l'amplitude du mouvement est beaucoup plus grande pour le système $(B)_{24}$. Sur le côté droit de la surface, la direction et l'amplitude sont différentes pour les deux systèmes.

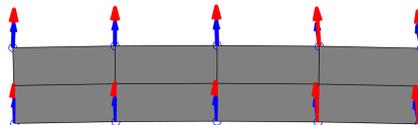


FIGURE V.20 – Déformées de l'amortisseur de droite pour le mode 1F au pic de résonance. Directions et amplitudes pour [→] : $(A)_{24}$, [→] : $(B)_{24}$.

Cette différence en termes de déformées peut être également soulignée par les Figures V.18 et V.19. Tout d'abord, le niveau d'erreur entre la Méthode 2 et la SNCR est plus grand pour le mode 1F que le 1T. Cela est dû au fait que la déformée des secteurs A et B sont similaires pour le mode 1T mais différentes pour le 1F. De plus, le système $(AB)_{12}$ donne les écarts les plus importants du fait que les secteurs A et B alternent sans cesse.

Malgré ces différences, la SNCR donne des résultats très satisfaisants et les tendances sont bien respectées pour les différents cas étudiés. Par exemple, le classement des structures qui minimisent le niveau vibratoire est correctement obtenu. Pour le cas 1F, nous avons tout d'abord la structure $(A)_{24}$, suivi par $(AB)_{12}$, puis $(ABBA)_6$, et finalement $(B)_{24}$. De plus, le temps de calcul de la SNCR est globalement beaucoup plus bas que celui de la Méthode 2. Ceci est indiqué dans le Tableau IV.3. Notons que le temps de calcul d'un mode complexe cyclique non-linéaire dure environ 3h mais que ce calcul

n'est effectué qu'une seule fois. Lorsque la taille du supersecteur augmente, (du secteur simple A ou B aux secteurs AB et ABBA), le nombre d'inconnues augmente pour la Méthode 2, mais reste constant pour la SNCR. Un des grands avantages de la SNCR est qu'elle peut être utilisée pour n'importe quel schéma de désaccordage tandis que la Méthode 2 ne peut être utilisée que pour des systèmes à symétrie cyclique avec un supersecteur de petite taille (le désaccordage ne peut pas être pris en compte et un système avec un grand supersecteur demande des ressources informatiques trop importantes).

Modes	Systèmes	Nbr. d'inconnues		Tps calcul (en h)	
		SNCR	Méthode 2	SNCR	Méthode 2
1F	(A) ₂₄	672	1530	1.2	1.2
	(B) ₂₄	672	1530	1.6	1.2
	(AB) ₁₂	672	3060	1.4	5.7
	(ABBA) ₆	672	7120	1.6	32.5
1T	(A) ₂₄	672	1530	2.1	1.5
	(B) ₂₄	672	1530	1.5	1.5
	(AB) ₁₂	672	3060	1.9	6.3
	(ABBA) ₆	672	7120	1.7	35.8

TABLEAU V.2 – Performance de la SNCR. Les calculs ont été réalisés sur un ordinateur Intel(R) Core(TM) i7-7700 @ 3.6 GHz.

Au vu de la précision et de la rapidité de la SNCR, une série de simulations pour différents schémas de désaccordage est effectuée dans la section suivante. Le but étant d'établir le schéma optimal qui minimise le niveau vibratoire pour à la fois le mode 1F et le mode 1T.

3.3.2 Détermination du meilleur schéma de désaccordage intentionnel dans la minimisation simultanée des modes 1F et 1T

Rappelons que le secteur A optimise le mode 1F et le secteur B le mode 1T. Pour des structures linéaires, différents articles ont proposé des méthodologies pour évaluer l'efficacité des schémas de désaccordage intentionnel. L'approche la plus frontale consiste à évaluer la réponse forcée de tous les systèmes possibles. Pour une structure à N secteurs avec deux types de secteurs, cela revient à environ $\approx 2^N/N$ [56] combinaisons. Pour des structures non-linéaires, une telle approche a un coût numérique encore trop important. Dans [21], Choi et al. ont proposé d'utiliser un algorithme génétique pour optimiser une structure linéaire désaccordée. Une telle approche pourrait être considérée ici mais il est compliqué de prédire le nombre de tirages nécessaire à la convergence de la solution. Cette limitation rend l'algorithme génétique peu adapté à notre situation. Dans [56], les auteurs proposent à la place de chercher la solution dans un sous-espace de solutions. En effet, via les travaux [21, 131], il a pu être montré que pour des pales faiblement couplées le schéma de désaccordage optimal (minimisation de l'amplitude maximal du système mécanique pour le mode étudié) consiste en une structure présentant de nombreuses alternances entre les secteurs A et B. En revanche pour un couplage fort entre les pales, la structure optimale ne présente pas beaucoup d'alternance entre les secteurs. Cette approche est largement utilisée par la communauté scientifique comme dans [100] par exemple et sera donc privilégiée ici. Nous proposons donc une étude complète et définissons deux sous-espaces d'étude. Le premier est composé du motif AB ou BA et le second du motif AA ou BB.

Pour chaque optimisation et pour chaque mode, il y a 352 simulations non-linéaires à effectuer ($\approx 2^{12}/12$, et non plus $\approx 2^{24}/24$ car nous considérons un motif formé de deux secteurs). La tâche reste ambitieuse car au total $2 \times 2 \times 352 = 1408$ simulations doivent être faites. Afin de réaliser cette tâche dans un temps raisonnable, nous réalisons des calculs parallélisés.

La Figure V.21a (respectivement la Figure V.21b) représente le déplacement maximal des structures en fonction du numéro du schéma de désaccordage employé pour le mode 1F (respectivement pour le mode 1T). Les carrés rouges correspondent aux structures formées de motifs AB et BA. Les croix bleues décrivent celles contenant les motifs AA et BB. Pour les deux modes, les structures AB/BA présentent un déplacement plus petit que celles formées de AA/BB. A partir de [56], cela signifierait donc que les pales sont faiblement couplées. Cela est attendu car les modes étudiés activent la non-linéarité de l'amortisseur (voir la Section V.1) et donc une grande partie de l'énergie du système est dissipée ce qui résulte en un faible couplage des pales.

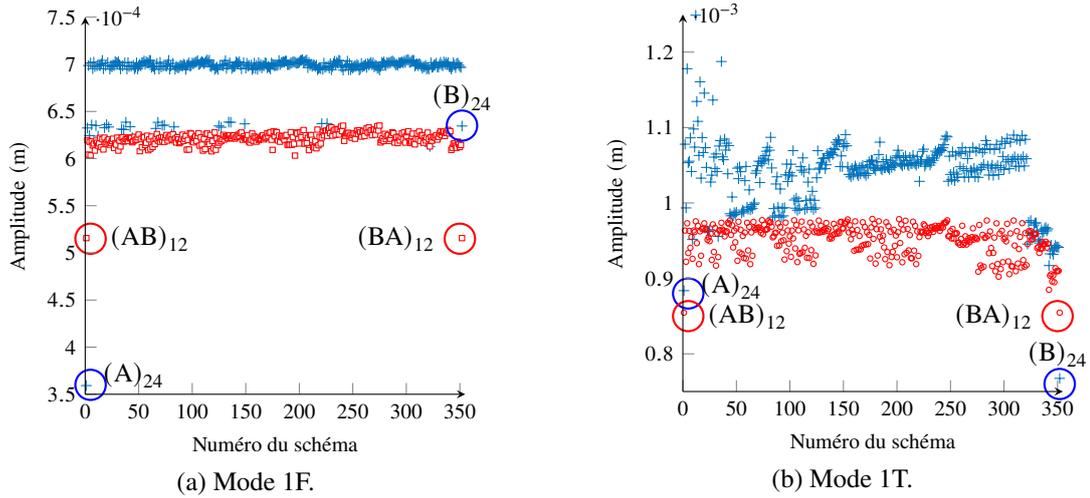


FIGURE V.21 – Déplacement maximal pour les différentes structures désaccordées. (◻) : combinaison de AB et BA ; (+) : combinaison de AA et BB.

En utilisant les déplacements maximaux des deux modes (notés $|\max u_{1F}|$ et $|\max u_{1T}|$), nous pouvons déterminer le meilleur schéma de désaccordage intentionnel. Dans cette étude, deux fonctions d'optimisation sont définies

$$\text{crit}_{\text{sum}} = |\max u_{1F}| + |\max u_{1T}|, \quad (\text{V.4})$$

et

$$\text{crit}_{\text{fatigue}} = |\max u_{1F}| + \frac{\omega_{1T}}{\omega_{1F}} |\max u_{1T}|. \quad (\text{V.5})$$

La première fonction, crit_{sum} , est simplement un critère vibratoire et est égal à la somme des amplitudes des pics de résonance. La seconde fonction prend en compte les fréquences propres des modes étudiés et s'apparente donc à un critère en fatigue. Les Tableaux V.3 et V.4 fournissent les six meilleurs schémas de désaccordage pour les deux critères. Dans ces tableaux les numéros des schémas sont donnés afin de pouvoir les identifier dans les Figures V.21a et V.21b (les marqueurs sont également entourés pour les cas (A)₂₄, (AB)₁₂, et (B)₂₄). Pour les deux fonctions, les six mêmes schémas sont obtenus. Trois de ceux-là avaient été étudiés à la Section V.3.2.2 : les cas (A)₂₄, (B)₂₄, et (AB)₁₂. Les quatrième, cinquième et sixième meilleurs schémas sont respectivement (2A2B1A1B)₄, (2A2B1A1B1A1B)₃ et 2A2B1A1B2A2B1A1B1A1B1A1B2A2B1A1B1A1B (noté dans les Tableaux V.3 et V.4 MP345). Les structures (A)₂₄ et (B)₂₄ sont peu recommandées pour un moteur du fait du phénomène de flottement [9, 16, 97]. De plus, en la présence de désaccordage aléatoire (qui est nécessairement présent dans les structures réelles), les systèmes présentant une symétrie cyclique sont sujets à un facteur d'amplification important [65]. Par conséquent, les schémas ne présentant aucune symétrie, comme le MP345, pourraient s'avérer être les plus appropriés.

Il pourrait être intéressant de réaliser une étude complète sur l'impact du désaccordage aléatoire pour cet exemple. Mais comme une étude similaire a été présentée à la Section V.2 pour le cas pale-disque,

nous ne réaliserons pas de nouveau cette analyse. A la place, nous proposons de faire un seul tirage aléatoire et d'en étudier son influence sur les schémas de désaccordage optimaux. Ceci permettra également de vérifier la grande sensibilité des structures à symétrie cyclique au désaccordage aléatoire.

Rang	Schéma de désaccordage	Numéro du schéma	Valeur de la fonction
1	(A) ₂₄	1 pour AA/BB	1.2×10^{-3}
2	(AB) ₁₂	1 pour AB/BA	1.4×10^{-3}
3	(B) ₂₄	352 pour AA/BB	1.4×10^{-3}
4	(2A2B1A1B) ₄	342 pour AB/BA	1.5×10^{-3}
5	(2A2B1A1B1A1B) ₃	347 pour AB/BA	1.5×10^{-3}
6	MP345	345 pour AB/BA	1.5×10^{-3}

TABLEAU V.3 – Schémas de désaccordage optimaux pour la fonction d'optimisation crit_{sum} .

Rang	Schéma de désaccordage	Numéro du schéma	Valeur de la fonction
1	(B) ₂₄	352 pour AA/BB	3.0×10^{-3}
2	(A) ₁₂	1 pour AA/BB	3.0×10^{-3}
3	(AB) ₁₂	1 pour AB/BA	3.1×10^{-3}
4	(2A2B1A1B) ₄	342 pour AB/BA	3.3×10^{-3}
5	(2A2B1A1B1A1B) ₃	347 pour AB/BA	3.3×10^{-3}
6	MP345	345 pour AB/BA	3.3×10^{-3}

TABLEAU V.4 – Schémas de désaccordage optimaux pour la fonction d'optimisation $\text{crit}_{\text{fatigue}}$.

3.3.3 Sensibilité des systèmes à un tirage aléatoire

Comme vu précédemment, la SNCR permet également de traiter du désaccordage aléatoire. Ici, nous étudions l'impact d'un tirage aléatoire sur les systèmes (A)₂₄, (AB)₁₂, (2A2B1A1B)₄ et MP345. Comme dans les Sections IV.3.2.1 et V.2, le désaccordage est introduit en modifiant les fréquences propres des modes internes de Craig-Bampton via une loi normale de déviation égale à 10%. Un seul tirage aléatoire a été effectué et nous regardons le déplacement maximal des systèmes pour le mode 1F, voir Figure V.22.

Comme attendu, chacun des systèmes (distingué par un marqueur propre dans la Figure V.22), voit son déplacement maximal augmenté avec le désaccordage aléatoire. Le facteur d'amplification est calculé pour chaque système et est égal à une augmentation de 14%, 17%, 8% et 6% pour les structures (A)₂₄, (AB)₁₂, (2A2B1A1B)₄ et MP345. Ces résultats confirment que les structures (A)₂₄, et (AB)₁₂ sont très sensibles au désaccordage aléatoire, et par conséquent ne devrait pas être considéré comme des candidats acceptables. On peut leur préférer le système MP345 (qui ne connaît aucune symétrie) car il possède la surtension dynamique la plus faible en présence de désaccordage aléatoire.

4 Bilan du chapitre

Ce chapitre a proposé différentes analyses d'un modèle industriel comportant un disque, des pales et amortisseurs. Les méthodes cycliques développées au Chapitre III ont permis de faire une comparaison sur l'impact respectif du contact pale/disque et pale/amortisseur. Cette influence n'est pas triviale et dépend de paramètres tels que le coefficient de frottement ou encore la vitesse de rotation du système mécanique. D'autres paramètres, non étudiés ici, pourraient également impacter la réponse dynamique tels que les caractéristiques dynamiques du disque, des pales, etc.

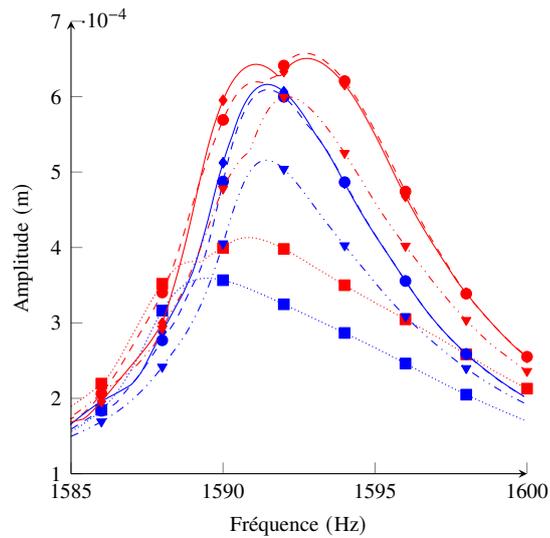


FIGURE V.22 – Réponses forcées pour le mode 1F. (—) : sans désaccordage aléatoire ; (---) : avec désaccordage aléatoire. Les lignes (■), (▼), (●), et (◆) correspondent aux systèmes $(A)_{24}$, $(AB)_{12}$, $(2A2B1A1B)_4$ et MP345.

Une seconde étude portait sur la sensibilité du système pale/disque vis à vis du désaccordage aléatoire. Pour cela, la SNCR, développée au Chapitre IV, a été employée. Suivant le diamètre excité, différentes observations ont pu être faites. Notamment, pour le diamètre 1, nous avons pu voir que les forts niveaux de non-linéarités (et donc forte réduction vibratoire du système), diminuent de façon significative l'influence du désaccordage : le facteur d'amplification maximum s'obtient pour de très faibles valeurs du taux de désaccordage et le plateau est obtenu bien plus rapidement.

Le principal intérêt de la dernière section était de proposer une méthode générale pour déterminer le meilleur schéma de désaccordage intentionnel pour optimiser le niveau vibratoire de structures non-linéaires pour plusieurs modes. Celle-ci a été employée pour un cas avec des amortisseurs sous plateformes où deux modes étaient minimisés simultanément : le premier mode de flexion et le premier mode de torsion du dixième diamètre nodal. Six schémas ont pu être ainsi distingués. A la suite de considérations supplémentaires (sensibilité au désaccordage aléatoire, phénomène de flottement), seul un schéma semble pouvoir convenir aux diverses attentes. Ce résultat est spécifique aux différents paramètres de l'étude (modes à minimiser, niveau de l'excitation, etc). Néanmoins cela a permis de mettre en évidence les possibilités d'applications de la méthode SNCR.

Conclusion

Contexte

Dans le milieu industriel, un besoin fort d'outils numériques permettant de prédire avec précision le niveau vibratoire de roues aubagées non-linéaires désaccordées est ressenti. Avec comme objectif de diminuer les niveaux vibratoires des structures, des systèmes dissipatifs type amortisseurs sous plateformes sont mis en place. Ces dispositifs rendent le système mécanique non-linéaire. Prédire la dynamique d'une telle structure est pour le moment hors de portée des bureaux d'études des entreprises à cause de la complexité du problème mais également par les temps de calcul prohibitifs. L'objectif de cette thèse est de comprendre théoriquement les couplages entre les non-linéarités et la propriété cyclique de la structure. Via cette base fondamentale, des outils numériques vont être mis en place pour réduire la complexité du problème et les temps de calcul associés. Pour cela des modèles réduits vont être développés utilisant à la fois le concept du mode non-linéaire et les propriétés de symétrie cyclique.

Résultats

Ce travail de thèse a permis de mettre en place des méthodes de réductions rigoureuses pour des systèmes non-linéaires à symétrie cyclique. En effet, en écrivant les forces non-linéaires (pour des effets géométriques ou de frottement) dans le domaine cyclique, il est possible de déterminer les diamètres nodaux qui vont se coupler avec l'excitation. A partir de cette nouvelle approche, différentes méthodes ont pu être développées. L'une d'entre elles permet de traiter de nombreux systèmes mécaniques soumis à des excitations tournantes ou fixes. Une autre méthodologie, plus rapide, a été définie mais ne traite que des excitations à ondes tournantes. Ces méthodes ont été validées sur des systèmes éléments finis complexes et les résultats obtenus témoignent de leur efficacité et précision. Néanmoins, certaines limites ont pu être établies. En effet, ces méthodes ne peuvent être employées que pour des structures à symétrie cyclique. La présence de désaccordage enfrait les propriétés mathématiques employées pour définir ces stratégies. De plus elles cherchent les solutions dans un espace restreint de diamètres nodaux et ne permettent pas de retrouver l'ensemble des solutions qui peuvent exister dans un problème fortement non-linéaire (présence de bifurcations). Cette seconde limitation n'est pas en revanche problématique pour les applications industrielles de cette thèse : dans le cadre du frottement, généralement une seule solution est recherchée.

Au vu de leur performances, ces nouvelles approches ont été utilisées en tant que méthode de référence et ont permis d'évaluer la précision de la CNCMS (méthode de réduction utilisant des modes non-linéaires à interfaces fixes et permettant de prendre en compte le désaccordage) sur des modèles éléments finis complexes à symétrie cyclique. L'idée est de vérifier que la CNCMS fonctionne correctement sur ces modèles à symétrie cyclique avant d'introduire du désaccordage. En revanche, ces études ont révélé des limitations de la CNCMS : pour de trop forts niveaux de non-linéarités ou dans le cas où la zone non-linéaire est trop proche des frontières de symétrie cyclique, les modes complexes non-linéaires à interfaces fixes et les relevés statiques associés ne permettent pas d'approximer correctement la dynamique non-linéaire du système. Ces limitations peuvent s'avérer problématiques dans le cadre

d'amortisseurs sous plateformes où les interfaces de contact sont très proches de la frontière de symétrie cyclique.

Afin de pallier aux difficultés de la CNCMS, une nouvelle méthode de réduction non-linéaire a été définie : la SNCR. Cette approche utilise un principe de sous-structuration où chaque secteur est piloté indépendamment des autres. Un secteur est réduit sur une base non-linéaire formée de modes complexes cycliques non-linéaires. Comme pour la CNCMS, les forces non-linéaires sont substituées par les modes non-linéaires et ne sont donc pas ré-évaluées lors de la synthèse. Avec ces différentes étapes, la SNCR est extrêmement efficace et permet de corriger les écarts observés avec la CNCMS. Différents niveaux de validation ont pu être effectués : excitations ondes tournantes, ondes fixes, localisées, prise en compte du désaccordage aléatoire, et intentionnel. Dans toutes les simulations, sauf pour le cas de l'excitation localisée, la SNCR donne des résultats meilleurs que la CNCMS. Cette nouvelle méthode présente toutefois certaines limitations. Tout d'abord, le calcul des modes complexes cycliques est relativement long car les degrés de liberté de la frontière de symétrie cyclique sont gardés en tant que nœuds maîtres. De plus il a pu être montré que pour des changements fréquents de type de secteurs (via du désaccordage intentionnel), la SNCR pouvait présenter quelques erreurs liés à des déformées non compatibles aux frontières cycliques. Néanmoins, cette nouvelle méthode reste très intéressante car elle est polyvalente et permet de réduire drastiquement les temps de calcul.

Différentes études ont été réalisées sur un modèle réaliste de compresseurs constitué de trois corps : pale, disque et amortisseurs. Une première série de simulations sur le système en symétrie cyclique a permis d'investiguer l'influence respective du contact pale/disque et pale/amortisseur sur la dynamique globale du système. Il a été intéressant de noter que les phénomènes non-linéaires mis en jeu par les deux zones de contact étaient parfois opposés. Il a pu également être montré que l'amortisseur a une influence considérable sur le système mécanique. Une seconde étude portait sur l'influence du couplage entre les non-linéarités et le désaccordage sur le niveau vibratoire de la structure. A faible niveau non-linéaire, le système se comporte comme le cas linéaire sous-jacent. En revanche, il a pu être remarqué que pour des fortes non-linéarités, le désaccordage n'a qu'une influence très mineure sur le niveau vibratoire de la structure : le facteur d'amplification est très faible et le régime stabilisé (plateau) de ce paramètre est atteint pour des valeurs plus faibles de désaccordage. Une dernière étude consistait à montrer la faisabilité de la SNCR à déterminer un schéma de désaccordage intentionnel optimal sur un exemple arbitraire.

Perspectives

Différentes voies d'exploration sont envisagées à la suite de la thèse. Un travail de comparaison entre essais expérimentaux et simulations numériques doit être considéré. Cette approche permettra dans un premier temps de valider la modélisation de la structure (modèle éléments finis, modélisation des forces non-linéaires, etc) puis d'évaluer les performances de la SNCR sur un exemple concret. Les travaux de Mabilia [92] ont permis de développer une méthodologie de comparaison avec des essais sur le banc PHARE 1 et il pourrait être intéressant d'employer cette stratégie pour la SNCR. Des essais expérimentaux avec des amortisseurs sous plateformes devraient également être envisagés. Comme présenté dans la Section V.3, la SNCR devrait fournir des résultats très satisfaisants dans le domaine non-linéaire avec du désaccordage. Il pourrait également être pertinent de quantifier les erreurs venant d'un désaccordage intentionnel. A la suite de cette phase de validation, il pourrait être judicieux d'employer la SNCR afin de trouver de nouvelles architectures permettant d'optimiser la dynamique des roues aubagées.

Les méthodes développées dans ce manuscrit permettent de réduire le système d'équations régissant la dynamique du système. La SNCR, par exemple, emploie la notion de modes complexes non-linéaires et permet de piloter l'ensemble des degrés de liberté de contact par un seul couple de coordonnées généralisées. Néanmoins, l'évaluation de ce mode non-linéaire peut coûter cher pour un maillage raffiné

de la zone de contact : en effet, chaque nœud non-linéaire représente (en terme de coût numérique) une inconnue supplémentaire à résoudre ainsi qu'une force non-linéaire additionnelle à évaluer. Les configurations industrielles sont très raffinées et peuvent contenir plusieurs milliers de nœuds de contact et dépassent donc largement les capacités des méthodes numériques actuelles. Différentes stratégies ont été proposées [109] ou encore [40]. Ces articles proposent une base de réduction des nœuds de contact. Cependant, l'évaluation de la réponse forcée du système réduit nécessite la ré-évaluation des forces non-linéaires. Ce calcul détériore fortement les performances de la méthode de réduction. Par conséquent, même si les temps de calcul de la réponse forcée sont diminués par ces méthodes, le nombre de nœuds de contact reste un caractère limitant. Il semble donc indispensable de travailler sur des méthodes de réduction des interfaces non-linéaires pour pallier cette difficulté. Les travaux de Lemoine [86] semblent offrir une alternative intéressante. En effet, le calcul dynamique non-linéaire est effectué sur un maillage grossier mais un second code numérique est ensuite employé pour faire une analyse fine de l'état de contact.

Sur la poursuite des travaux de méthodes non-linéaires de réduction de cette thèse, il pourrait être envisagé d'étendre ces méthodologies pour traiter également des non-linéarités géométriques. En effet, les tendances actuelles essaient de diminuer l'impact environnemental des moteurs d'avions et d'hélicoptères. Pour satisfaire ces demandes, le diamètre des soufflantes des moteurs augmente et favorise l'apparition d'effets géométriques. Ces non-linéarités donnent lieu à des résonances internes [29] qui complexifient la résolution du système. Les travaux de Delhez et al. [26] traitent de cette problématique et pourraient être une première étape vers la réduction de tels modèles.

Une perspective plus académique serait d'envisager de nouveaux outils pour réduire et contrôler la vibration des systèmes cycliques. Dans ce manuscrit, nous nous sommes concentrés sur des systèmes d'attaches type pied de pale, et/ou amortisseurs sous plateformes. D'autres mécanismes tels que les nageoires, les talons ou encore les joncs sont des éléments dissipatifs largement étudiés. Depuis une quinzaine d'années, des systèmes appelés "nonlinear energy sink" (NES) font leur apparition [43]. Ces appareils à masse très faible sont attachés à la structure principale via une raideur non-linéaire. Avec un dimensionnement correct, un transfert d'énergie s'effectue de la structure principale vers le NES, ce qui permet de diminuer le niveau vibratoire. Afin d'améliorer les performances de ce type de systèmes sur des plages d'excitation plus importantes, le concept de "nonlinear tuned vibration absorber" (NLTVA) a été développé [27]. Une des limitations de ces deux technologies est la difficulté de les mettre en place sur un système physique. La technologie "Vibro-Impact Nonlinear Energy Sink" (VI-NES), consiste en des petites billes qui vont impacter le système mécanique et diminuer le niveau vibratoire. Ces structures ont été étudiées théoriquement dans [41, 42]. Des simulations numériques ont également été effectuées [30, 155] sur ce sujet. Cette technologie est beaucoup plus simple à mettre en œuvre et permettrait une réduction vibratoire importante. Une perspective de ce travail de thèse serait donc de considérer l'étude de ces NES, NLTVA, et VI-NES avec des structures cycliques. Bien évidemment, trouver une base de réduction efficace pour ce type de systèmes reste une problématique en soi.

Table des figures

I.1	Structure cyclique décomposée en 6 secteurs.	6
I.2	Déformées d'une roue aubagée sur son premier mode de flexion.	12
I.3	Diagramme fréquence-diamètres.	12
I.4	Diagramme de Campbell, (■) modes à 0 diamètres; (●) modes à 1 diamètres; (→) modes à 2 diamètres.	13
I.5	Diagramme zigzag.	13
I.6	Déplacement maximal pour une structure accordée et désaccordée. (—) : réponse désaccordée; (- -) : réponse accordée. Notion de facteur d'amplification (AF).	14
I.7	Facteur d'amplification en fonction du taux de désaccordage extrait de [16].	14
I.8	Exemple de représentation de la fonction de distribution cumulée en fonction du facteur d'amplification (taux de désaccordage fixé). (—) : Monte-Carlo (1000 tirages); (⋯) : interpolations de Weibull (20 courbes chacune avec 50 tirages).	17
I.9	Différentes types d'attaches pour le contact pale-disque.	19
I.10	Procédure pour évaluer les forces non-linéaires cycliques.	21
I.11	Présentation et passage entre les différents espaces.	21
I.12	Méthodes de continuation	22
I.13	Cercle unité de Floquet. (—) : transcritique, rupture de symétrie ou retournement, (—) : dédoublement de période, (—) : Neimark ou Hopf 2 points de bifurcation.	25
II.1	Évolution du mode complexe non-linéaire.	33
II.2	Représentation d'un contact pale disque en pointillé rouge.	36
II.3	Sous-structuration de la structure cyclique.	37
II.4	Réduction de Craig-Bampton linéaire.	38
II.5	Réduction via le mode non-linéaire.	39
II.6	Assemblage (①-②) puis réduction (②-③) par modes d'interfaces.	39
II.7	Maillage du TurboTopo Simple.	41
II.8	Description des méthodes de référence et de la CNCMS.	42
II.9	Diagramme fréquence-diamètres du cas test TurboTopo Simple.	43
II.10	Réponse forcée linéaire (—) : ANSYS; (■) : modèle complet; (→) : méthode de référence; (→) : CNCMS.	44
II.11	Réponses forcées du système soumis à une excitation tournante. (- -) : solution linéaire (état collé); (■) : solution de référence; (—) : CNCMS.	45
III.1	Représentation d'une excitation stationnaire avec $h_{ex} = 3$ et $N = 24$	51
III.2	Procédure AFT simplifiée.	53
III.3	Procédure pour sélectionner le couplage des diamètres nodaux. (a) : pour une non-linéarité cubique; (b) : pour une non-linéarité quadratique; (c) : pour une non-linéarité quadratique et cubique. Les composantes cycliques entre parenthèses interviennent dans le calcul mais correspondent aux complexes conjugués (I.5).	54

III.4	Modélisation de la loi de frottement; (—) : loi de Coulomb; (- -) : loi régularisée avec une fonction tangente hyperbolique.	59
III.5	Nombre de secteurs à considérer pour différentes valeurs de N_1 dans le cas d'une excitation stationnaire. Première ligne : répartition spatiale de la force pour les N_1 premiers secteurs. Deuxième ligne : représentation cyclique de ces distributions.	64
III.6	Représentation du cas test masses-ressorts.	68
III.7	Diagramme fréquence-diamètres du système masses-ressorts.	68
III.8	Réponse forcée pour le cas d'un chargement tournant. (—) : solution stable; (.....) : solution instable du système réduit; (●) : solution du système complet; (*) : solution avec l'hypothèse d'une onde tournante [119]; (■) : résultats de l'intégration temporelle.	70
III.9	Amplitude des harmoniques pour le pic de la Figure III.8. (—) : $\tilde{c}_{3,n}$; (—) : $\tilde{c}_{9,n}$. Les autres harmoniques ont des amplitudes négligeables.	70
III.10	Réponse forcée pour le cas d'un chargement stationnaire. (—) : solution stable, (.....) : solution instable du système réduit; (—) : branche bifurquée stable obtenue via le système réduit; (●) : branche principale du système complet; (■) : résultats d'intégration temporelle sur la branche principale, (□) : résultats d'intégration temporelle sur la branche bifurquée du système réduit.	71
III.11	Amplitude des harmoniques pour les trois pics indiqués à la Figure III.10. (—) : $\tilde{c}_{3,n}$; (—) : $\tilde{c}_{9,n}$. Les autres harmoniques ont des amplitudes négligeables.	72
III.12	Réponses forcées pour une excitation stationnaire (de 1 N à 5 N). Le frottement est modélisé par une loi régularisée. (■) : solution de référence; (+) : Méthode 1; (*) : Méthode 2; (—) : Méthode 3; (●) : méthode de Petrov.	73
III.13	Réponses forcées pour une excitation stationnaire (de 1 N à 5 N). La procédure DLFT est utilisée pour modéliser le contact. La légende est identique à celle de la Figure III.12.	74
III.14	Forme de l'excitation créée par une combinaison d'onde tournantes et stationnaires.	75
III.15	Réponse forcée du système soumis à une excitation combinée. Le frottement est modélisé par la DLFT. (■) : solution de référence; (—) : Méthode 1.	76
III.16	Procédure pour l'obtention des matrices cycliques structurales.	77
III.17	Réponses forcées du système soumis à une excitation tournante. (- -) : solution linéaire (état collé); (■) : solution de référence; (▼) : méthode de Petrov; (—●) : Méthode 1; (—) : Méthode 2.	78
III.18	Réponses forcées du système soumis à une excitation stationnaire. (- -) : solution linéaire (état collé); (■) : solution de référence; (—) : Méthode 1.	79
III.19	Statut moyen de l'état de contact des nœuds au cours d'une période. (—) : séparé; (—) : collé; (—) : glissant évalués par la Méthode 1. Pour chaque état, (.....) (avec le même code couleur) correspond au pourcentage de nœuds qui ne change pas d'état au cours de la période. (□), respectivement (○), donnent les résultats associés à (—), respectivement (.....), mais pour la solution de référence (avec le même code couleur).	81
III.20	Modèle éléments finis : turbotopo vrillé.	83
III.21	Schémas des trois cas tests. Les zones non-linéaires de contact prises en compte sont représentées en rouge.	83
III.22	Diagramme fréquence-diamètres du système TurboTopo Vrillé. Les larges cercles bleus représentent des zones de veering. Les petits cercles rouges et le triangle vert représentent les modes qui vont être étudiés.	84
III.23	Réponses forcées des trois systèmes.(- -) : linéaire, (—) : méthode cyclique, et (—■) : CNCMS.	84
IV.1	Réponses forcées du cas TurboTopo simple soumis à une excitation onde tournante pour différentes amplitudes. (- -) : courbe squelette du mode non-linéaire; (■) : méthode de référence; (—) : synthèse modale cyclique non-linéaire.	90

IV.2	Réponse forcée du cas TurboTopo simple soumis à une excitation onde stationnaire (amplitude 0.25 N et $h_{ex} = 3$). (---) : backbone du mode non-linéaire; (■) : méthode de référence (déplacement de tous les secteurs); (—) : synthèse modale cyclique non-linéaire.	91
IV.3	Principe de la SNCR.	92
IV.4	Réponses forcées de la structure soumise à une onde stationnaire avec $h_{ex} = 1$. (■) : réponse linéaire; (■) : méthode de référence; (—) : SNCR.	97
IV.5	Réponses forcées de la structure soumise à une onde stationnaire avec $h_{ex} = 3$. (■) : réponse linéaire; (■) : méthode de référence; (—) : SNCR.	98
IV.6	Comparaison de la CNCMS et de la SNCR pour la structure soumise à une onde stationnaire avec $h_{ex} = 3$. (■) : réponse linéaire; (■) : méthode de référence; (—) : SNCR; (—) : CNCMS.	99
IV.7	Réponses forcées pour une excitation localisée avec une amplitude 0.125 N. (■) : référence; (---) : SNCR, (■) : CNCMS.	99
IV.8	Réponses forcées de la structure avec du désaccordage aléatoire ($\sigma^2 = 15\%$). (■) : modèle complet; (—) : méthode de référence, (---) : SNCR, (—) : réponse de la structure accordée.	101
IV.9	Réponses forcées de la structure pour différentes valeurs de σ . (■) : réponse linéaire pour la méthode de référence; (■) : réponse non-linéaire pour la référence; (●) : réponse non-linéaire CNCMS; (●) : réponse linéaire SNCR; (●) : réponse non-linéaire SNCR.	102
IV.10	Réponse forcée non-linéaire pour une structure désaccordée intentionnellement pour une excitation stationnaire avec $h_{ex} = 3$. (■) : solution de référence, (---) : SNCR.	103
IV.11	Étude paramétrique sur le niveau d'excitation pour une onde stationnaire ($h_{ex} = 3$).	106
IV.12	Comparaison du déplacement entre les structures non-linéaires accordée et désaccordée pour le 8 ^e secteur (échelle logarithmique).	107
V.1	Modèle éléments finis : turbotopo vrillé.	110
V.2	Schémas des trois cas tests. Les zones non-linéaires de contact prises en compte sont représentées en rouge.	110
V.3	Réponses forcées des structures soumises à une excitation tournante. (---) : solution linéaire (état collé); (♥) : Méthode de Petrov [119]; (—) : Méthode 2.	111
V.4	Statut moyen de l'état de contact des nœuds au cours d'une période pour une excitation tournante évalué par la Méthode 1 avec $\mu = 0.15$. (—) : séparé; (—) : collé; (—) : glissant. Pour chaque état, (.....) (avec le même code couleur) correspond au pourcentage de nœuds qui ne change pas d'état au cours de la période. Les marqueurs en forme de cercle correspondent au contact roue amortisseurs.	112
V.5	Réponses forcées des structures soumises à une excitation stationnaire. (---) : solution linéaire (état collé); (—) : Méthode 1.	113
V.6	Statut moyen de l'état de contact des nœuds au cours d'une période pour une excitation stationnaire. La légende est identique à celle de la Figure V.4.	114
V.7	Composantes spectrales de la Figure V.5 obtenue avec la Méthode 1. (—) : \tilde{u}_0 , (—) : \tilde{u}_3 et (—) : \tilde{u}_9 .	114
V.8	Réponses forcées des trois configurations pour différentes valeurs de μ . (—) : $\mu = 0.15$; (.....) : $\mu = 0.3$; (—) : $\mu = 0.45$, (---) : réponse linéaire (tous les nœuds de contact sont dans un état collé). La ligne verticale en pointillé indique la fréquence propre linéaire où les nœuds de contact ouverts lors de la précharge sont maintenus ouverts (les autres nœuds sont collés).	115
V.9	Statut moyen de l'état glissant des nœuds au cours d'une période pour différentes valeurs de μ . (—) : $\mu = 0.15$; (.....) : $\mu = 0.3$; (—) : $\mu = 0.45$. Les lignes avec (●) (avec le même code couleurs pour μ) représentent le contact entre la pale et les amortisseurs.	116

V.10	Réponses forcées pour différentes valeurs de vitesses de rotation des solides. (—) : $\Omega = 2200 \text{ rad s}^{-1}$; (—) : $\Omega = 2500 \text{ rad s}^{-1}$; (—) : $\Omega = 2800 \text{ rad s}^{-1}$. (--) : réponse linéaire (état collé) avec le même code couleur.	117
V.11	Statut moyen de l'état glissant des nœuds au cours d'une période pour différentes valeurs de Ω . (—) : $\Omega = 2200 \text{ rad s}^{-1}$; (—) : $\Omega = 2500 \text{ rad s}^{-1}$; (—) : $\Omega = 2800 \text{ rad s}^{-1}$ pour l'interface pale disque. Les lignes en (●) sont associées au contact pale amortisseurs (même couleur et style de ligne).	118
V.12	Facteur d'amplification linéaire en fonction de la valeur de la déviation. (++) : 95 ^e centile; (—) : 50 ^e centile; (—) : 5 ^e centile.	119
V.13	Facteur d'amplification pour le 95 ^e centile en fonction de la valeur de la déviation pour $h_{ex} = 1$. (—) : linéaire, (—) : non-linéaire ($F_a = 0.1$), (—) : non-linéaire ($F_a = 0.2$), (—) : non-linéaire ($F_a = 0.3$), et (—) : non-linéaire ($F_a = 0.4$).	120
V.14	Facteur d'amplification non-linéaire pour $h_{ex} = 1$ en fonction de la valeur de la déviation. (++) : 95 ^e centile; (—) : 50 ^e centile; (—) : 5 ^e centile.	121
V.15	Facteur d'amplification pour le 95 ^e centile en fonction de la valeur de la déviation pour $h_{ex} = 2$ et 3. (—) : linéaire, (—) : non-linéaire ($F_a = 0.1$), (—) : non-linéaire ($F_a = 0.2$), (—) : non-linéaire ($F_a = 0.3$), et (—) : non-linéaire ($F_a = 0.4$).	121
V.16	Réponses forcées pour le mode 1F. (--) : cas linéaire (état collé); (—) : cas optimal $\mu_{1F}^* = 0.03$. (—) : autres valeurs de μ (0.01, 0.02, 0.04, 0.05, 0.1, et 0.15 dans cet ordre).	123
V.17	Réponses forcées pour le mode 1T. (--) : cas linéaire (état collé); (—) : cas optimal $\mu_{1T}^* = 0.1$. (—) : autres valeurs de μ (0.02, 0.03, 0.07, 0.15, 0.2, et 0.3 dans cet ordre).	123
V.18	Réponses forcées pour le mode 1F. (—) : Méthode 2; (--) : SNCR. Les marqueurs (■), (●), (◆), et (▼) correspondent aux systèmes (A) ₂₄ , (B) ₂₄ , (AB) ₁₂ , et (ABBA) ₆	124
V.19	Réponses forcées pour le mode 1T. (—) : Méthode 2; (--) : SNCR. Les marqueurs (■), (●), (◆), et (▼) correspondent aux structures (A) ₂₄ , (B) ₂₄ , (AB) ₁₂ , et (ABBA) ₆	125
V.20	Déformées de l'amortisseur de droite pour le mode 1F au pic de résonance. Directions et amplitudes pour [→] : (A) ₂₄ , [→] : (B) ₂₄	125
V.21	Déplacement maximal pour les différentes structures désaccordées. (□) : combinaison de AB et BA; (+) : combinaison de AA et BB.	127
V.22	Réponses forcées pour pour le mode 1F. (—) : sans désaccordage aléatoire; (—) : avec désaccordage aléatoire. Les lignes (—), (—), (—), et (—) correspondent aux systèmes (A) ₂₄ , (AB) ₁₂ , (2A2B1A1B) ₄ et MP345.	129

Liste des tableaux

II.1	Valeurs des modes réduits pour le modèle complet, de référence et pour la CNCMS. . . .	41
II.2	Performance des réductions des différentes méthodes. Le temps de calcul (Temps) avec une astérisque (*) correspond à une réduction effectuée sur Ansys. Les autres étapes de réduction sont effectuées sur Matlab. Les simulations ont été faites sur un ordinateur Intel(R) Core(TM) i7-7700 @ 3.6 GHz, sauf pour l'étape avec une double astérisque (**) qui nécessitait trop d'espace mémoire et qui a été lancée sur un supercalculateur Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2690 @ 2.9 GHz.	43
II.3	Écart relatif de la CNCMS pour une excitation tournante.	45
II.4	Temps de calcul pour la CNCMS et la méthode de référence. Les simulations sont obtenues avec un ordinateur Intel(R) Core(TM) i7-7700 @ 3.6 GHz.	46
III.1	Table de correspondance entre les harmoniques et les diamètres pour une onde tournante.	50
III.2	Performance des différentes méthodes pour une onde tournante.	66
III.3	Performance des différentes méthodes pour une onde stationnaire.	66
III.4	Comparaison des valeurs de N_1 et N_2 pour différentes valeurs de N et h_{ex}	66
III.5	Valeurs numériques des masses, en kg.	67
III.6	Valeurs numériques des raideurs et amortisseurs.	68
III.7	Fréquences propres du système pour les diamètres 3 et 9, en (Hz).	69
III.8	Performance des différentes méthodes pour les excitations tournante et stationnaire. Les forces non-linéaires de (III.25) sont évaluées dans le domaine cyclique (approche suggérée, voir Figure III.2) et dans le domaine physique (voir Figure I.10).	72
III.9	Performance des méthodes. Le temps de calcul est fourni pour le cas avec une excitation de 5N. Les simulations ont été lancées sur un ordinateur Intel(R) Core(TM) i7-7700 @ 3.6 GHz.	74
III.10	Écart relatif pour une onde tournante.	77
III.11	Ecart relatif pour une onde stationnaire.	79
III.12	Performance des méthodes pour une excitation tournante.	81
III.13	Performance des méthodes pour une excitation stationnaire.	81
III.14	Temps de calcul pour la CNCMS pour le cas complet (pale, disque, amortisseur). Les simulations ont été lancées sur un ordinateur Intel(R) Core(TM) i7-7700 @ 3.6 GHz. . . .	84
IV.1	Temps de calcul des méthodes pour une amplitude d'excitation de 0.25N. Les calculs ont été réalisés sur un ordinateur Intel(R) Core(TM) i7-7700 @ 3.6 GHz.	91
IV.2	Fréquences propres des deux secteurs étudiés pour le troisième diamètre nodal.	103
IV.3	Performance des méthodes sur les simulations de la Section IV.3. Les simulations ont été lancées sur un ordinateur Intel(R) Core(TM) i7-7700 @ 3.6 GHz.	105
V.1	Contenu harmonique pour chacun des diamètres nodaux pour les différentes méthodologies.	111
V.2	Performance de la SNCR. Les calculs ont été réalisés sur un ordinateur Intel(R) Core(TM) i7-7700 @ 3.6 GHz.	126

V.3	Schémas de désaccordage optimaux pour la fonction d'optimisation crit_{sum}	128
V.4	Schémas de désaccordage optimaux pour la fonction d'optimisation $\text{crit}_{\text{fatigue}}$	128

Bibliographie

- [1] E. U. A. S. AGENCY. *Certification Specifications and Acceptable Means of Compliance for Engines*. European Union Aviation Safety Agency. 2020 (cf. p. 1).
- [2] M. AMABILI. “Nonlinear vibrations of rectangular plates with different boundary conditions : theory and experiments”. *Computers & Structures*. Nonlinear dynamics of continuous systems 82.31 (2004), p. 2587-2605. DOI : [10.1016/j.compstruc.2004.03.077](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.03.077) (cf. p. 19).
- [3] P. APIWATTANALUNGGARN, S. SHAW et C. PIERRE. “Component mode synthesis using nonlinear normal modes”. *Nonlinear Dynamics* 41.1 (2005), p. 17-46. DOI : [10.1007/s11071-005-2791-2](https://doi.org/10.1007/s11071-005-2791-2) (cf. p. 37).
- [4] A. BATAILLY. “Simulation de l’interaction rotor/stator pour des turbo-machines aéronautiques en configuration non-accidentelle”. Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Nantes, 2008. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00364945> (cf. p. 28).
- [5] W. A. BENFIELD et R. F. HRUDA. “Vibration Analysis of Structures by Component Mode Substitution”. en. *AIAA Journal* (2012). DOI : [10.2514/3.49936](https://doi.org/10.2514/3.49936) (cf. p. 28).
- [6] T. BERTHELON. “Réponse forcée du FAN sous ingestion de Vortex”. Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Lyon, 2020. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-03171666> (cf. p. 2).
- [7] S. BESSET. “Optimisation du comportement vibro-acoustique des structures à l’aide d’une synthèse modale généralisée”. Thèse de doctorat. Ecully, Ecole centrale de Lyon, 2006. URL : <http://www.theses.fr/2006ECDL0034> (cf. p. 28).
- [8] S. BESSET et L. JÉZÉQUEL. “Dynamic Substructuring Based on a Double Modal Analysis”. *Journal of Vibration and Acoustics* 130.011008 (2007). DOI : [10.1115/1.2346698](https://doi.org/10.1115/1.2346698) (cf. p. 29).
- [9] S. BIAGIOTTI, L. PINELLI, F. POLI, F. VANTI et R. PACCIANI. “Numerical Study of Flutter Stabilization in Low Pressure Turbine Rotor with Intentional Mistuning”. *Energy Procedia*. ATI 2018 - 73rd Conference of the Italian Thermal Machines Engineering Association 148 (2018), p. 98-105. DOI : [10.1016/j.egypro.2018.08.035](https://doi.org/10.1016/j.egypro.2018.08.035) (cf. p. 16, 127).
- [10] R. BLADH, C. PIERRE, M. P. CASTANIER et M. J. KRUSE. “Dynamic Response Predictions for a Mistuned Industrial Turbomachinery Rotor Using Reduced-Order Modeling”. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 124.2 (2002), p. 311-324. DOI : [10.1115/1.1447236](https://doi.org/10.1115/1.1447236) (cf. p. 16).
- [11] J. C. BUTCHER. “Numerical differential equation methods”. John Wiley & Sons, Ltd. 2016, p. 55-142. DOI : [10.1002/9781119121534.ch2](https://doi.org/10.1002/9781119121534.ch2) (cf. p. 19).
- [12] T. M. CAMERON et J. H. GRIFFIN. “An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems”. *Journal of Applied Mechanics* 56.1 (1989), p. 149-154. DOI : [10.1115/1.3176036](https://doi.org/10.1115/1.3176036) (cf. p. 20, 50).

- [13] E. CAPIEZ-LERNOUT, M. PELLISSETTI, H. PRADLWARTER, G. I. SCHUELLER et C. SOIZE. “Data and model uncertainties in complex aerospace engineering systems”. *Journal of Sound and Vibration* 295.3 (2006), p. 923-938. DOI : [10.1016/j.jsv.2006.01.056](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.01.056) (cf. p. 17).
- [14] E. CAPIEZ-LERNOUT et C. SOIZE. “Nonparametric Modeling of Random Uncertainties for Dynamic Response of Mistuned Bladed Disks”. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 126.3 (2004), p. 610-618. DOI : [10.1115/1.1760527](https://doi.org/10.1115/1.1760527) (cf. p. 17).
- [15] E. CAPIEZ-LERNOUT, C. SOIZE et M. MBAYE. “Mistuning analysis and uncertainty quantification of an industrial bladed disk with geometrical nonlinearity”. *Journal of Sound and Vibration* 356 (2015), p. 124-143. DOI : [10.1016/j.jsv.2015.07.006](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.07.006) (cf. p. 17).
- [16] M. P. CASTANIER et C. PIERRE. “Modeling and analysis of mistuned bladed disk vibration : Status and emerging directions”. *Journal of Propulsion and Power* (2006). DOI : [10.2514/1.16345](https://doi.org/10.2514/1.16345) (cf. p. 13 sq., 16, 120, 127).
- [17] M. P. CASTANIER et C. PIERRE. “Using intentional Mistuning in the design of turbomachinery rotors”. *AIAA Journal* 40.10 (2002), p. 2077-2086. DOI : [10.2514/2.1542](https://doi.org/10.2514/2.1542) (cf. p. 14, 102).
- [18] M. P. CASTANIER, Y. C. TAN et C. PIERRE. “Characteristic Constraint Modes for Component Mode Synthesis”. *AIAA Journal* 39.6 (2001), p. 1182-1187. DOI : [10.2514/2.1433](https://doi.org/10.2514/2.1433) (cf. p. 29).
- [19] Y.-W. CHANG, X. Q. WANG, E. CAPIEZ-LERNOUT, M. P. MIGNOLET et C. SOIZE. “Reduced order modelling for the nonlinear geometric response of some curved structures”. *International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, IFASD 2011*. Paris, France, 2011, paper IFASD-2011-185, Pages : 1-19 (cf. p. 30, 37).
- [20] D. CHARLEUX. “Étude des effets de la friction en pied d’aube sur la dynamique des roues aubagées”. Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Lyon, 2006. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01130569> (cf. p. 2, 167).
- [21] B.-K. CHOI, J. LENTZ, A. J. RIVAS-GUERRA et M. P. MIGNOLET. “Optimization of intentional mistuning patterns for the reduction of the forced response effects of unintentional mistuning : formulation and assessment”. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 125.1 (2003), p. 131-140. DOI : [10.1115/1.1498270](https://doi.org/10.1115/1.1498270) (cf. p. 126).
- [22] B. CHOUVION. “A wave approach to show the existence of detached resonant curves in the frequency response of a beam with an attached nonlinear energy sink”. *Mechanics Research Communications* 95 (2019), p. 16-22. DOI : [10.1016/j.mechrescom.2018.11.006](https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2018.11.006) (cf. p. 26).
- [23] B. COCHELIN, N. DAMIL et M. POTIER-FERRY. *Méthode asymptotique numérique*. Methodes numériques. Hermes Lavoissier. 2007 (cf. p. 19).
- [24] R. CORRAL, O. KHEMIRI et C. MARTEL. “Design of mistuning patterns to control the vibration amplitude of unstable rotor blades”. *Aerospace Science and Technology* 80 (2018), p. 20-28. DOI : [10.1016/j.ast.2018.06.034](https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.06.034) (cf. p. 16).
- [25] R. CRAIG et M. BAMPTON. “Coupling of substructures for dynamic analyses.” *AIAA Journal* 6.7 (1968), p. 1313-1319. DOI : [10.2514/3.4741](https://doi.org/10.2514/3.4741) (cf. p. 27 sq.).
- [26] E. DELHEZ, F. NYSSSEN, J. C. GOLINVAL et A. BATAILLY. “Reduced order modeling of blades with geometric nonlinearities and contact interactions”. *Journal of Sound and Vibration* 500 (2021), p. 116037. DOI : [10.1016/j.jsv.2021.116037](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116037) (cf. p. 133).
- [27] T. DETROUX, G. HABIB, L. MASSET et G. KERSCHEN. “Performance, robustness and sensitivity analysis of the nonlinear tuned vibration absorber”. *Mechanical Systems and Signal Processing* 60-61 (2015), p. 799-809. DOI : [10.1016/j.ymsp.2015.01.035](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2015.01.035) (cf. p. 133).

- [28] T. DETROUX, L. RENSON, L. MASSET et G. KERSCHEN. “The harmonic balance method for bifurcation analysis of large-scale nonlinear mechanical systems”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 296 (2015), p. 18-38. DOI : [10.1016/j.cma.2015.07.017](https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.07.017) (cf. p. 23, 26).
- [29] N. DI PALMA, A. MARTIN, F. THOUVEREZ et V. COURTIER. “Nonlinear Harmonic Analysis of a Blade Model Subjected to Large Geometrical Deflection and Internal Resonance”. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection. 2019. DOI : [10.1115/GT2019-91213](https://doi.org/10.1115/GT2019-91213) (cf. p. 133).
- [30] B. FANG, T. THEURICH, M. KRACK, L. BERGMAN et A. VAKAKIS. “Vibration suppression and modal energy transfers in a linear beam with attached vibro-impact nonlinear energy sinks”. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 91 (2020), p. 105415. DOI : [10.1016/j.cnsns.2020.105415](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105415) (cf. p. 133).
- [31] A. FANTETTI, L. R. TAMATAM, M. VOLVERT, I. LAWAL, L. LIU, L. SALLES, M. R. W. BRAKE, C. W. SCHWINGSHACKL et D. NOWELL. “The impact of fretting wear on structural dynamics : experiment and simulation”. *Tribology International* 138 (2019), p. 111-124. DOI : [10.1016/j.triboint.2019.05.023](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2019.05.023) (cf. p. 2, 18).
- [32] D. M. FEINER et J. H. GRIFFIN. “A fundamental model of mistuning for a single family of modes”. *Journal of Turbomachinery* (2002), p. 953-964. DOI : [10.1115/GT2002-30425](https://doi.org/10.1115/GT2002-30425) (cf. p. 36).
- [33] C. FIRRONE et S. ZUCCA. “Modelling Friction Contacts in Structural Dynamics and its Application to Turbine Bladed Disks”. *Numerical Analysis - Theory and Application* (2011). DOI : [10.5772/25128](https://doi.org/10.5772/25128) (cf. p. 18).
- [34] C. FIRRONE, S. ZUCCA et M. GOLA. “The effect of underplatform dampers on the forced response of bladed disks by a coupled static/dynamic harmonic balance method”. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 46 (2011), p. 363-375. DOI : [10.1016/j.ijnonlinmec.2010.10.001](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2010.10.001) (cf. p. 18).
- [35] G. FLOQUET. “Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques”. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* 2e série, 12 (1883). Elsevier, p. 47-88. DOI : [10.24033/asens.220](https://doi.org/10.24033/asens.220) (cf. p. 23, 157).
- [36] F. FONTANELA, A. GROLET, L. SALLES, A. CHABCHOUB et N. HOFFMANN. “Dark solitons, modulation instability and breathers in a chain of weakly nonlinear oscillators with cyclic symmetry”. *Journal of Sound and Vibration* 413 (2018), p. 467-481. DOI : [10.1016/j.jsv.2017.08.004](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.08.004) (cf. p. 58).
- [37] F. FONTANELA, A. GROLET, L. SALLES et N. HOFFMANN. “Computation of quasi-periodic localised vibrations in nonlinear cyclic and symmetric structures using harmonic balance methods”. *Journal of Sound and Vibration* 438 (2019), p. 54-65. DOI : [10.1016/j.jsv.2018.09.002](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.09.002) (cf. p. 24).
- [38] C. FOYER, A. TATE et S. MCINTOSH-SMITH. “ASPEN : An Efficient Algorithm for Data Redistribution Between Producer and Consumer Grids”. *Euro-Par 2018 : Parallel Processing Workshops*. Lecture Notes in Computer Science. Springer International Publishing. Cham, 2019, p. 171-182. DOI : [10.1007/978-3-030-10549-5_14](https://doi.org/10.1007/978-3-030-10549-5_14) (cf. p. 2).
- [39] V. GANINE, M. LEGRAND, H. MICHALSKA et C. PIERRE. “A sparse preconditioned iterative method for vibration analysis of geometrically mistuned bladed disks”. *Computers & Structures* 87.5 (2009), p. 342-354. DOI : [10.1016/j.compstruc.2008.12.011](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2008.12.011) (cf. p. 16).

- [40] C. GASTALDI, S. ZUCCA et B. EPUREANU. “Jacobian projection reduced-order models for dynamic systems with contact nonlinearities”. *Mechanical Systems and Signal Processing* 100 (2018), p. 550-569. DOI : [10.1016/j.ymssp.2017.07.049](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.07.049) (cf. p. 133).
- [41] O. V. GENDELMAN. “Analytic treatment of a system with a vibro-impact nonlinear energy sink”. *Journal of Sound and Vibration* 331.21 (2012), p. 4599-4608. DOI : [10.1016/j.jsv.2012.05.021](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.05.021) (cf. p. 133).
- [42] O. V. GENDELMAN et A. ALLONI. “Dynamics of forced system with vibro-impact energy sink”. *Journal of Sound and Vibration* 358 (2015), p. 301-314. DOI : [10.1016/j.jsv.2015.08.020](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.08.020) (cf. p. 133).
- [43] O. V. GENDELMAN, E. GOURDON et C. H. LAMARQUE. “Quasiperiodic energy pumping in coupled oscillators under periodic forcing”. *Journal of Sound and Vibration* 294.4 (2006), p. 651-662. DOI : [10.1016/j.jsv.2005.11.031](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.11.031) (cf. p. 133).
- [44] F. GEORGIADIS, M. PEETERS, G. KERSCHEN, J. C. GOLINVAL et M. RUZZENE. “Modal analysis of a nonlinear periodic structure with cyclic symmetry”. *AIAA Journal* 47.4 (2009), p. 1014-1025. DOI : [10.2514/1.40461](https://doi.org/10.2514/1.40461) (cf. p. 26, 48, 55).
- [45] M. GERADIN et D. RIXEN. *Mechanical vibrations : theory and application to structural dynamics*. John Wiley & Sons. 2015. ISBN : 978-1-118-90020-8 (cf. p. 6, 28 sq., 38).
- [46] T. GMÜR. *Dynamique des structures : analyse modale numérique*. PPUR presses polytechniques. 1997. ISBN : 978-2-88074-333-8 (cf. p. 6, 19).
- [47] A. GROLET, N. HOFFMANN, F. THOUVEREZ et C. SCHWINGSHACKL. “Travelling and standing envelope solitons in discrete non-linear cyclic structures”. *Mechanical Systems and Signal Processing* 81 (2016), p. 75-87. DOI : [10.1016/j.ymssp.2016.02.062](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.02.062) (cf. p. 48, 58).
- [48] A. GROLET et F. THOUVEREZ. “Computing multiple periodic solutions of nonlinear vibration problems using the harmonic balance method and Groebner bases”. *Mechanical Systems and Signal Processing* 52-53 (2015), p. 529-547. DOI : [10.1016/j.ymssp.2014.07.015](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2014.07.015) (cf. p. 23, 26, 59).
- [49] A. GROLET et F. THOUVEREZ. “Free and forced vibration analysis of a nonlinear system with cyclic symmetry : Application to a simplified model”. *Journal of Sound and Vibration* 331.12 (2012), p. 2911-2928. DOI : [10.1016/j.jsv.2012.02.008](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.02.008) (cf. p. 26, 48).
- [50] A. GROLET et F. THOUVEREZ. “On a new harmonic selection technique for harmonic balance method”. *Mechanical Systems and Signal Processing* 30 (2012), p. 43-60. DOI : [10.1016/j.ymssp.2012.01.024](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2012.01.024) (cf. p. 21).
- [51] A. GROLET et F. THOUVEREZ. “Vibration Analysis of a Nonlinear System With Cyclic Symmetry”. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 133.2 (2010). DOI : [10.1115/1.4001989](https://doi.org/10.1115/1.4001989) (cf. p. 26).
- [52] J. GROSS, P. BUHL, U. WEBER, X. SCHULER et M. KRACK. “Effect of creep on the nonlinear vibration characteristics of blades with interlocked shrouds”. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 99 (2018), p. 240-246. DOI : [10.1016/j.ijnonlinmec.2017.12.002](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.12.002) (cf. p. 48).
- [53] M. GRUIN. “Dynamique non-linéaire d’une roue de turbine Basse Pression soumise à des excitations structurales d’un turboréacteur”. Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Lyon, 2012. URL : <http://www.theses.fr/2012ECDL0003> (cf. p. 6, 19).
- [54] N. GUÉRIN. “Analyse thermomécanique du contact aube-stator : approches numérique et expérimentale”. Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Lyon, 2019. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-03434990> (cf. p. 2, 28).

- [55] G. HALLER et S. PONSIOEN. “Nonlinear normal modes and spectral submanifolds : existence, uniqueness and use in model reduction”. *Nonlinear Dynamics* 86.3 (2016), p. 1493-1534. DOI : [10.1007/s11071-016-2974-z](https://doi.org/10.1007/s11071-016-2974-z) (cf. p. 30).
- [56] Y. HAN, R. MURTHY, M. MIGNOLET et J. LENTZ. “Optimization of intentional mistuning patterns for the mitigation of the effects of random mistuning”. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 136.6 (2014). DOI : [10.1115/1.4026141](https://doi.org/10.1115/1.4026141) (cf. p. 126 sq.).
- [57] Z. HE, B. EPUREANU et C. PIERRE. “Parametric study of the aeroelastic response of mistuned bladed disks”. *Computers & Structures*. Fourth MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics 85.11 (2007), p. 852-865. DOI : [10.1016/j.compstruc.2007.01.007](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2007.01.007) (cf. p. 15).
- [58] T. HEINZE, L. PANNING-VON SCHEIDT et J. WALLASCHEK. “Global detection of detached periodic solution branches of friction-damped mechanical systems”. *Nonlinear Dynamics* 99.3 (2020), p. 1841-1870. DOI : [10.1007/s11071-019-05425-4](https://doi.org/10.1007/s11071-019-05425-4) (cf. p. 26).
- [59] G. HILL. “On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and the moon”. *Acta Mathematica* (1886) (cf. p. 23).
- [60] R. A. IBRAHIM. “Structural Dynamics with Parameter Uncertainties”. *Applied Mechanics Reviews* 40.3 (1987), p. 309-328. DOI : [10.1115/1.3149532](https://doi.org/10.1115/1.3149532) (cf. p. 17).
- [61] S. IDELSOHN et A. CARDONA. “A reduction method for nonlinear structural dynamic analysis”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 49.3 (1985), p. 253-279. DOI : [10.1016/0045-7825\(85\)90125-2](https://doi.org/10.1016/0045-7825(85)90125-2) (cf. p. 30).
- [62] M. JAHN, S. TATZKO, L. PANNING-VON SCHEIDT et J. WALLASCHEK. “Comparison of different harmonic balance based methodologies for computation of nonlinear modes of non-conservative mechanical systems”. *Mechanical Systems and Signal Processing* 127 (2019), p. 159-171. DOI : [10.1016/j.ymsp.2019.03.005](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2019.03.005) (cf. p. 32, 44).
- [63] L. JEZEQUEL et C. LAMARQUE. “Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory”. *Journal of Sound and Vibration* 149.3 (1991), p. 429-459. DOI : [10.1016/0022-460X\(91\)90446-Q](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90446-Q) (cf. p. 30, 85).
- [64] C. JOANNIN. “Réduction de modèle par sous-structuration et modes non-linéaires - Application à la dynamique des roues aubagées”. Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2017. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01800400> (cf. p. 2, 6, 19, 37, 67, 118, 164).
- [65] C. JOANNIN, B. CHOUVION, F. THOUVEREZ, M. MBAYE et J.-P. OUSTY. “Nonlinear Modal analysis of mistuned periodic structures subjected to dry friction”. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 138.7 (2015), p. 072504-072504-12. DOI : [10.1115/1.4031886](https://doi.org/10.1115/1.4031886) (cf. p. 13, 127).
- [66] C. JOANNIN, B. CHOUVION, F. THOUVEREZ, J. OUSTY et M. MBAYE. “A nonlinear component mode synthesis method for the computation of steady-state vibrations in non-conservative systems”. *Mechanical Systems and Signal Processing* 83 (2017), p. 75-92. DOI : [10.1016/j.ymsp.2016.05.044](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2016.05.044) (cf. p. 33, 37, 40, 44, 46, 59, 67, 75, 96).
- [67] C. JOANNIN, F. THOUVEREZ et B. CHOUVION. “Reduced-order modelling using nonlinear modes and triple nonlinear modal synthesis”. *Computers & Structures* 203 (2018), p. 18-33. DOI : [10.1016/j.compstruc.2018.05.005](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2018.05.005) (cf. p. 37, 40, 100).
- [68] G. KERSCHEN. “Definition and Fundamental Properties of Nonlinear Normal Modes”. *Modal Analysis of Nonlinear Mechanical Systems*. CISM International Centre for Mechanical Sciences. Springer. Vienna, 2014, p. 1-46. DOI : [10.1007/978-3-7091-1791-0_1](https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1791-0_1) (cf. p. 30).

- [69] G. KERSCHEN, M. PEETERS, J. C. GOLINVAL et A. F. VAKAKIS. “Nonlinear normal modes, Part I : A useful framework for the structural dynamicist”. *Mechanical Systems and Signal Processing*. Special Issue : Non-linear Structural Dynamics 23.1 (2009), p. 170-194. DOI : [10.1016/j.ymssp.2008.04.002](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2008.04.002) (cf. p. 19).
- [70] S. W. B. KLAASSEN et D. J. RIXEN. “Using SEMM to Identify the Joint Dynamics in Multiple Degrees of Freedom Without Measuring Interfaces”. *Dynamic Substructures, Volume 4*. Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series. Springer International Publishing. Cham, 2020, p. 87-99. DOI : [10.1007/978-3-030-12184-6_10](https://doi.org/10.1007/978-3-030-12184-6_10) (cf. p. 2).
- [71] M. KRACK. “Extension of the single-nonlinear-mode theory by linear attachments and application to exciter-structure interaction”. *Journal of Sound and Vibration* (2021), p. 116120. DOI : [10.1016/j.jsv.2021.116120](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116120) (cf. p. 35).
- [72] M. KRACK. “Nonlinear modal analysis of nonconservative systems : Extension of the periodic motion concept”. *Computers & Structures* 154 (2015), p. 59-71. DOI : [10.1016/j.compstruc.2015.03.008](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2015.03.008) (cf. p. 32).
- [73] M. KRACK et J. GROSS. “Application to mechanical systems”. *Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems*. Mathematical Engineering. Springer International Publishing. Cham, 2019, p. 47-79. DOI : [10.1007/978-3-030-14023-6_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-14023-6_3) (cf. p. 19).
- [74] M. KRACK et J. GROSS. “Solving the harmonic balance equations”. *Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems*. Mathematical Engineering. Springer International Publishing. Cham, 2019, p. 81-103. DOI : [10.1007/978-3-030-14023-6_4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-14023-6_4) (cf. p. 19).
- [75] M. KRACK et J. GROSS. “Theory of harmonic balance”. *Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems*. Mathematical Engineering. Springer International Publishing. Cham, 2019, p. 11-46. DOI : [10.1007/978-3-030-14023-6_2](https://doi.org/10.1007/978-3-030-14023-6_2) (cf. p. 19).
- [76] M. KRACK, L. PANNING-VON SCHEIDT et J. WALLASCHEK. “A method for nonlinear modal analysis and synthesis : Application to harmonically forced and self-excited mechanical systems”. *Journal of Sound and Vibration* 332.25 (2013), p. 6798-6814. DOI : [10.1016/j.jsv.2013.08.009](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.08.009) (cf. p. 33, 37, 89, 95).
- [77] M. KRACK, L. PANNING-VON SCHEIDT, J. WALLASCHEK, C. SIEWERT et A. HARTUNG. “Reduced order modeling based on complex nonlinear modal analysis and its application to bladed disks with shroud contact”. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 135.10 (2013), p. 102502-102502-8. DOI : [10.1115/1.4025002](https://doi.org/10.1115/1.4025002) (cf. p. 73).
- [78] M. KRACK, L. SALLES et F. THOUVEREZ. “Vibration Prediction of Bladed Disks Coupled by Friction Joints”. *Archives of Computational Methods in Engineering* 24.3 (2017), p. 589-636. DOI : [10.1007/s11831-016-9183-2](https://doi.org/10.1007/s11831-016-9183-2) (cf. p. 73).
- [79] Y. KUZNETSOV. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. 3^e éd. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag. New York, 2004. DOI : [10.1007/978-1-4757-3978-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3978-7) (cf. p. 26).
- [80] W. LACARBONARA, G. REGA et A. H. NAYFEH. “Resonant non-linear normal modes. Part I : analytical treatment for structural one-dimensional systems”. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 38.6 (2003), p. 851-872. DOI : [10.1016/S0020-7462\(02\)00033-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(02)00033-1) (cf. p. 26, 58, 170).
- [81] M. LALANNE et G. FERRARIS. *Rotordynamics Prediction in Engineering*. Wiley. 1998. ISBN : 978-0-471-97288-4 (cf. p. 11).
- [82] D. LAXALDE. “Etude d’amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages”. Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Lyon, 2007. URL : <http://www.theses.fr/2007ECDL0041> (cf. p. 2, 21).

- [83] D. LAXALDE, L. SALLES, L. BLANC et F. THOUVEREZ. “Non-Linear Modal Analysis for Bladed Disks With Friction Contact Interfaces”. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection. 2009, p. 457-467. DOI : [10.1115/GT2008-50860](https://doi.org/10.1115/GT2008-50860) (cf. p. 59).
- [84] D. LAXALDE et F. THOUVEREZ. “Complex non-linear modal analysis for mechanical systems : Application to turbomachinery bladings with friction interfaces”. *Journal of Sound and Vibration* 322.4 (2009), p. 1009-1025. DOI : [10.1016/j.jsv.2008.11.044](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.11.044) (cf. p. 31, 33, 37, 44, 88).
- [85] M. LEGRAND, S. JUNCA et S. HENG. “Nonsmooth modal analysis of a N-degree-of-freedom system undergoing a purely elastic impact law”. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 45 (2017), p. 190-219. DOI : [10.1016/j.cnsns.2016.08.022](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2016.08.022) (cf. p. 67).
- [86] E. LEMOINE. “Approche couplée pour l’étude du contact sous chargement dynamique vibratoire : application à l’usure par fretting du contact aube-disque”. Thèse de doctorat. Lyon, 2021. URL : <https://www.theses.fr/256598339> (cf. p. 133, 159).
- [87] E. LEMOINE, D. NÉLIAS, F. THOUVEREZ et C. VINCENT. “Influence of fretting wear on bladed disks dynamic analysis”. *Tribology International* 145 (2020), p. 106-148. DOI : [10.1016/j.triboint.2019.106148](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2019.106148) (cf. p. 18, 40 sq., 48, 115).
- [88] S. LIM, R. BLADH, M. P. CASTANIER et C. PIERRE. “Compact, generalized component mode mistuning representation for modeling bladed disk vibration”. *AIAA Journal* 45.9 (2007), p. 2285-2298. DOI : [10.2514/1.13172](https://doi.org/10.2514/1.13172) (cf. p. 16 sq., 36, 100).
- [89] A. LUPINI et B. EPUREANU. “A Friction-Enhanced Tuned Ring Damper for Bladed Disks”. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 143.011002 (2020). DOI : [10.1115/1.4049203](https://doi.org/10.1115/1.4049203) (cf. p. 2).
- [90] A. LUPINI, J. SHIM, S. CALLAN et B. EPUREANU. “Mistuning Identification Technique Based on Blisk Detuning”. *AIAA Journal* (2021), p. 1-9. DOI : [10.2514/1.J060209](https://doi.org/10.2514/1.J060209) (cf. p. 2).
- [91] R. LYONS. *Understanding digital signal processing*. Prentice Hall. 2011. ISBN : 978-0-13-702741-5 (cf. p. 21).
- [92] A. MABILIA. “Dynamique non-linéaire d’une soufflante en rotation”. Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Lyon, 2020. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03152435> (cf. p. 132).
- [93] R. H. MACNEAL. “NASTRAN cyclic symmetry capability. [application to solid rocket propellant grains and space antennas]”. NASA Goddard Space Flight Center. 1973 (cf. p. 7 sq.).
- [94] R. MACNEAL. “A hybrid method of component mode synthesis”. *Computers & Structures*. Special issue on structural dynamics 1.4 (1971), p. 581-601. DOI : [10.1016/0045-7949\(71\)90031-9](https://doi.org/10.1016/0045-7949(71)90031-9) (cf. p. 27 sqq.).
- [95] A. MADDEN, B. EPUREANU et S. FILIPPI. “Reduced-order modeling approach for blisks with large mass, stiffness, and geometric mistuning”. *AIAA Journal* 50.2 (2012), p. 366-374. DOI : [10.2514/1.J051140](https://doi.org/10.2514/1.J051140) (cf. p. 16, 36).
- [96] R. MAPLE, P. KING, P. ORKWIS et J MITCH WOLFF. “Adaptive harmonic balance method for nonlinear time-periodic flows”. *Journal of Computational Physics* 193.2 (2004), p. 620-641. DOI : [10.1016/j.jcp.2003.08.013](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.08.013) (cf. p. 21).
- [97] C. MARTEL, R. CORRAL et J. LLORENS. “Stability Increase of Aerodynamically Unstable Rotors Using Intentional Mistuning”. *Journal of Turbomachinery* 130.1 (2008). DOI : [10.1115/1.2720503](https://doi.org/10.1115/1.2720503) (cf. p. 16, 127).

- [98] A. MARTIN. “Réduction en dynamique non-linéaire géométrique : Application au cas des structures à symétrie cyclique”. Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2019. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-02476146> (cf. p. 2, 6, 19, 28).
- [99] F. MASHAYEKHI, A. S. NOBARI et S. ZUCCA. “Hybrid reduction of mistuned bladed disks for nonlinear forced response analysis with dry friction”. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 116 (2019), p. 73-84. DOI : [10.1016/j.ijnonlinmec.2019.06.001](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.06.001) (cf. p. 37).
- [100] M. MBAYE. “Conception robuste en vibration et aéroélasticité des roues aubagées de turbomachines”. Thèse de doctorat. Paris Est, 2009. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00529002v2> (cf. p. 126).
- [101] M. MBAYE, C. SOIZE et J.-P. OUSTY. “A reduced-order model of detuned cyclic dynamical systems with geometric modifications using a basis of cyclic modes”. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power-Transactions of the Asme* 132.11 (2010), Article Number 112502. DOI : [10.1115/1.4000805](https://doi.org/10.1115/1.4000805) (cf. p. 36).
- [102] M. MBAYE, C. SOIZE, J. OUSTY et E. CAPIEZ-LERNOUT. “Robust Analysis of Design in Vibration of Turbomachines”. *Journal of Turbomachinery* 135.2 (2012). DOI : [10.1115/1.4007442](https://doi.org/10.1115/1.4007442) (cf. p. 17).
- [103] M. MEINGAST, M. LEGRAND et C. PIERRE. “A linear complementarity problem formulation for periodic solutions to unilateral contact problems”. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 4th Canadian Conference on Non-linear Solid Mechanics 66 (2014), p. 18-27. DOI : [10.1016/j.ijnonlinmec.2014.01.007](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.01.007) (cf. p. 19).
- [104] L. MEYRAND. “Modes non linéaires : approches réduites par PGD/HBM et applications aux réponses forcées”. Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Marseille, 2019. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02408126> (cf. p. 19).
- [105] M. P. MIGNOLET et C. SOIZE. “Stochastic reduced order models for uncertain geometrically nonlinear dynamical systems”. en. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197.45 (2008), p. 3951-3963. DOI : [10.1016/j.cma.2008.03.032](https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.03.032) (cf. p. 37).
- [106] M. MIGNOLET, A. PRZEKOP, S. RIZZI et S. SPOTTSWOOD. “A review of indirect/non-intrusive reduced order modeling of nonlinear geometric structures”. *Journal of Sound and Vibration* 332.10 (2013), p. 2437-2460. DOI : [10.1016/j.jsv.2012.10.017](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.10.017) (cf. p. 30, 85).
- [107] M. MITRA, A. BAYRAK, S. ZUCCA et B. EPUREANU. “A sensitivity based heuristic for optimal blade arrangement in a linear mistuned rotor”. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection. 2018. DOI : [10.1115/GT2018-75542](https://doi.org/10.1115/GT2018-75542) (cf. p. 15).
- [108] M. MITRA et B. EPUREANU. “Dynamic modeling and projection-based reduction methods for bladed disks with nonlinear frictional and intermittent contact interfaces”. *Applied Mechanics Reviews* 71.5 (2019). DOI : [10.1115/1.4043083](https://doi.org/10.1115/1.4043083) (cf. p. 11, 92, 100).
- [109] M. MITRA, S. ZUCCA et B. EPUREANU. “Adaptive microslip projection for reduction of frictional and contact nonlinearities in shrouded blisks”. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 11.4 (2016), p. 041016. DOI : [10.1115/1.4033003](https://doi.org/10.1115/1.4033003) (cf. p. 133).
- [110] M. MONTEIL, S. BESSET et J. SINOU. “A double modal synthesis approach for brake squeal prediction”. *Mechanical Systems and Signal Processing* 70-71 (2016), p. 1073-1084. DOI : [10.1016/j.ymsp.2015.07.023](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2015.07.023) (cf. p. 26).
- [111] A. MURAVYOV et S. RIZZI. “Determination of nonlinear stiffness with application to random vibration of geometrically nonlinear structures”. *Computers & Structures* 81.15 (2003), p. 1513-1523. DOI : [10.1016/S0045-7949\(03\)00145-7](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(03)00145-7) (cf. p. 19, 85).

- [112] S. NACIVET. “Modélisation du frottement en pied d’aube par une approche fréquentielle”. Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Lyon, 2002. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01119596> (cf. p. 2).
- [113] S. NACIVET, C. PIERRE, F. THOUVEREZ et L. JÉZÉQUEL. “A dynamic Lagrangian frequency–time method for the vibration of dry-friction-damped systems”. *Journal of Sound and Vibration* 265.1 (2003), p. 201-219. DOI : [10.1016/S0022-460X\(02\)01447-5](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01447-5) (cf. p. 18, 73, 167).
- [114] A. NAYFEH et B. BALACHANDRAN. *Applied Nonlinear Dynamics : Analytical, Computational and Experimental Methods*. Wiley VCH. New York, 1995. ISBN : 978-0-471-59348-5 (cf. p. 24).
- [115] A. NAYFEH et D. MOOK. *Nonlinear Oscillations*. John Wiley & Sons. 2008. ISBN : 978-3-527-61759-3 (cf. p. 23 sqq., 50, 55 sq., 67, 170 sq.).
- [116] M. PEETERS, R. VIGUIÉ, G. SÉRANDOUR, G. KERSCHEN et J. C. GOLINVAL. “Nonlinear normal modes, Part II : Toward a practical computation using numerical continuation techniques”. *Mechanical Systems and Signal Processing*. Special Issue : Non-linear Structural Dynamics 23.1 (2009), p. 195-216. DOI : [10.1016/j.ymsp.2008.04.003](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2008.04.003) (cf. p. 19, 90).
- [117] L. PELETAN, S. BAGUET, M. TORKHANI et G. JACQUET-RICHARDET. “A comparison of stability computational methods for periodic solution of nonlinear problems with application to rotordynamics”. *Nonlinear Dynamics* 72.3 (2013), p. 671-682. DOI : [10.1007/s11071-012-0744-0](https://doi.org/10.1007/s11071-012-0744-0) (cf. p. 23).
- [118] L. PESARESI, L. SALLES, A. JONES, J. S. GREEN et C. W. SCHWINGSHACKL. “Modelling the nonlinear behaviour of an underplatform damper test rig for turbine applications”. *Mechanical Systems and Signal Processing* 85 (2017), p. 662-679. DOI : [10.1016/j.ymsp.2016.09.007](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2016.09.007) (cf. p. 41).
- [119] E. P. PETROV. “A method for use of cyclic symmetry properties in analysis of nonlinear multiharmonic vibrations of bladed disks”. *Journal of Turbomachinery* 126.1 (2004), p. 175. DOI : [10.1115/1.1644558](https://doi.org/10.1115/1.1644558) (cf. p. 48, 50, 63, 65 sq., 70, 72 sqq., 81, 110 sq.).
- [120] E. P. PETROV. “Analysis of Bifurcations in Multiharmonic Analysis of Nonlinear Forced Vibrations of Gas Turbine Engine Structures With Friction and Gaps”. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 138.10 (2016). DOI : [10.1115/1.4032906](https://doi.org/10.1115/1.4032906) (cf. p. 25 sq.).
- [121] E. P. PETROV. “Explicit Finite Element Models of Friction Dampers in Forced Response Analysis of Bladed Disks”. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 130.2 (2008). DOI : [10.1115/1.2772633](https://doi.org/10.1115/1.2772633) (cf. p. 116).
- [122] E. P. PETROV et D. J. EWINS. “Advanced Modeling of Underplatform Friction Dampers for Analysis of Bladed Disk Vibration”. *Journal of Turbomachinery* 129.1 (2007), p. 143-150. DOI : [10.1115/1.2372775](https://doi.org/10.1115/1.2372775) (cf. p. 116, 123).
- [123] J. PHILIPPE. “Prédiction robuste du comportement vibratoire des redresseurs sectorisés désaccordés”. Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Lyon, 2016. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01486187> (cf. p. 2).
- [124] A. PICOU, E. CAPIEZ-LERNOUT, C. SOIZE et M. MBAYE. “Robust dynamic analysis of detuned-mistuned rotating bladed disks with geometric nonlinearities”. *Computational Mechanics* 65.3 (2020), p. 711-730. DOI : [10.1007/s00466-019-01790-4](https://doi.org/10.1007/s00466-019-01790-4) (cf. p. 15, 17).
- [125] S. PONSIOEN, S. JAIN et G. HALLER. “Model reduction to spectral submanifolds and forced-response calculation in high-dimensional mechanical systems”. *Journal of Sound and Vibration* 488 (2020), p. 115640. DOI : [10.1016/j.jsv.2020.115640](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115640) (cf. p. 30).

- [126] S. M. POURKIAEE, T. BERRUTI, S. ZUCCA et G. NEUVILLE. “Experimental and Numerical Assessment of Mistuning Effects on Vibratory Response of a Bladed Disk With Underplatform Dampers”. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 143.031010 (2021). DOI : [10.1115/1.4049772](https://doi.org/10.1115/1.4049772) (cf. p. 2).
- [127] S. M. POURKIAEE et S. ZUCCA. “A reduced order model for nonlinear dynamics of mistuned bladed disks with shroud friction contacts”. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 141.1 (2019). DOI : [10.1115/1.4041653](https://doi.org/10.1115/1.4041653) (cf. p. 37).
- [128] S. M. POURKIAEE et S. ZUCCA. “Mixed-Boundary Component Mode Substitution for Nonlinear Dynamics of Mistuned Shrouded Bladed Disks”. *AIAA Journal* 58.1 (2020), p. 402-414. DOI : [10.2514/1.J058561](https://doi.org/10.2514/1.J058561) (cf. p. 2).
- [129] S. M. POURKIAEE, S. ZUCCA et R. PARKER. “Relative cyclic component mode synthesis : A reduced order modeling approach for mistuned bladed disks with friction interfaces”. en. *Mechanical Systems and Signal Processing* 163 (2022), p. 108197. DOI : [10.1016/j.ymsp.2021.108197](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2021.108197) (cf. p. 37).
- [130] S. QUAEGEBEUR, B. CHOUVION, F. THOUVEREZ et L. BERTHE. “On a new nonlinear reduced-order model for capturing internal resonances in intentionally mistuned cyclic structures”. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 143.2 (2021). DOI : [10.1115/1.4049138](https://doi.org/10.1115/1.4049138) (cf. p. 34).
- [131] A. J. RIVAS-GUERRA et M. P. MIGNOLET. “Local/global effects of mistuning on the forced response of bladed disks”. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 126.1 (2004), p. 131-141. DOI : [10.1115/1.1581898](https://doi.org/10.1115/1.1581898) (cf. p. 126).
- [132] R. ROSENBERG. “Normal Modes of Nonlinear Dual-Mode Systems”. *Journal of Applied Mechanics* 27.2 (1960), p. 263. DOI : [10.1115/1.3643948](https://doi.org/10.1115/1.3643948) (cf. p. 30).
- [133] R. ROSENBERG. “On Normal Vibrations of a General Class of Nonlinear Dual-Mode Systems”. *Journal of Applied Mechanics* 28.2 (1961), p. 275. DOI : [10.1115/1.3641668](https://doi.org/10.1115/1.3641668) (cf. p. 30).
- [134] R. ROSENBERG. “The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems”. *Journal of Applied Mechanics* 29.1 (1962), p. 7-14. DOI : [10.1115/1.3636501](https://doi.org/10.1115/1.3636501) (cf. p. 30).
- [135] R. ROY CRAIG et C. CHANG. “Free-interface methods of substructure coupling for dynamic analysis”. en. *AIAA Journal* (2012). DOI : [10.2514/3.7264](https://doi.org/10.2514/3.7264) (cf. p. 28).
- [136] Z. SAEED, G. JENOVENCIO, S. ARUL, J. BLAHOŠ, A. SUDHAKAR, L. PESARESI, J. YUAN, F. EL HADDAD, H. HETZLER et L. SALLES. “A Test-Case on Continuation Methods for Bladed-Disk Vibration with Contact and Friction”. *Nonlinear Structures and Systems, Volume 1*. Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series. Springer International Publishing. Cham, 2020, p. 209-212. DOI : [10.1007/978-3-030-12391-8_27](https://doi.org/10.1007/978-3-030-12391-8_27) (cf. p. 2).
- [137] L. SALLES. “Etude de l’usure par fretting sous chargements dynamiques dans les interfaces frottantes : application aux pieds d’aubes de turbomachines”. Thèse de doctorat. Ecully, Ecole centrale de Lyon, 2010. URL : <http://www.theses.fr/2010ECDL0038> (cf. p. 2, 164).
- [138] H. I. H. SARAVANAMUTTOO, G. F. C. ROGERS et H. COHEN. *Gas Turbine Theory*. Pearson Education, 2001. ISBN : 978-0-13-015847-5 (cf. p. 1).
- [139] E. SARROUY. “Analyse globale de systèmes mécaniques non-linéaires - Application à la dynamique des rotors”. Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Lyon, 2008. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00366857> (cf. p. 26).
- [140] E. SARROUY, A. GROLET et F. THOUVEREZ. “Global and bifurcation analysis of a structure with cyclic symmetry”. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 46.5 (2011), p. 727-737. DOI : [10.1016/j.ijnonlinmec.2011.02.005](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.02.005) (cf. p. 23, 26).

- [141] E. SARROUY et J.-J. SINOÛ. *Non-Linear Periodic and Quasi-Periodic Vibrations in Mechanical Systems - On the use of the Harmonic Balance Methods*. IntechOpen, 2011. DOI : [10.5772/15638](https://doi.org/10.5772/15638) (cf. p. 21).
- [142] L. SCHWERDT, L. PANNING-VON SCHEIDT et J. WALLASCHEK. "A Model Reduction Method for Bladed Disks With Large Geometric Mistuning Using a Partially Reduced Intermediate System Model". *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 143.7 (2021). DOI : [10.1115/1.4049357](https://doi.org/10.1115/1.4049357). URL : <https://doi.org/10.1115/1.4049357> (cf. p. 16, 36).
- [143] R. SEYDEL. *Practical Bifurcation and Stability Analysis*. 3^e éd. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2010. ISBN : 978-1-4419-1739-3 (cf. p. 23, 25).
- [144] S. W. SHAW et C. PIERRE. "Normal Modes for Non-Linear Vibratory Systems". *Journal of Sound and Vibration* 164.1 (1993), p. 85-124. DOI : [10.1006/jsvi.1993.1198](https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1198) (cf. p. 30).
- [145] S. W. SHAW et C. PIERRE. "Normal modes of vibration for non-linear continuous systems". *Journal of Sound and Vibration* 169.3 (1994), p. 319-347. DOI : [10.1006/jsvi.1994.1021](https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1021) (cf. p. 30).
- [146] C. SIEWERT, L. PANNING-VON SCHEIDT, J. WALLASCHEK et C. RICHTER. "Multiharmonic Forced Response Analysis of a Turbine Blading Coupled by Nonlinear Contact Forces". *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 132.8 (2010), p. 082501-082501-9. DOI : [10.1115/1.4000266](https://doi.org/10.1115/1.4000266) (cf. p. 48).
- [147] R. SINGH et C. LEE. "Frequency Response Of Linear Systems With Parameter Uncertainties". *Journal of Sound and Vibration* 168.1 (1993), p. 71-92. DOI : [10.1006/jsvi.1993.1362](https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1362) (cf. p. 17).
- [148] P. M. A. SLAATS, J. de JONGH et A. A. H. J. SAUREN. "Model reduction tools for nonlinear structural dynamics". *Computers & Structures* 54.6 (1995), p. 1155-1171. DOI : [10.1016/0045-7949\(94\)00389-K](https://doi.org/10.1016/0045-7949(94)00389-K) (cf. p. 30, 85).
- [149] C. SOIZE. "A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics". *Journal of Sound and Vibration* 288.3 (2005), p. 623-652. DOI : [10.1016/j.jsv.2005.07.009](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.07.009) (cf. p. 17).
- [150] C. SOIZE. "A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics". en. *Probabilistic Engineering Mechanics* 15.3 (2000), p. 277-294. DOI : [10.1016/S0266-8920\(99\)00028-4](https://doi.org/10.1016/S0266-8920(99)00028-4) (cf. p. 17).
- [151] C. S. M. SOMBROEK, P. TISO, L. RENSON et G. KERSCHEN. "Numerical computation of nonlinear normal modes in a modal derivative subspace". *Computers & Structures* 195 (2018), p. 34-46. DOI : [10.1016/j.compstruc.2017.08.016](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.08.016) (cf. p. 26).
- [152] W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA. "The modified single mode method in the investigations of the resonant vibrations of non-linear systems". *Journal of Sound and Vibration* 63.4 (1979), p. 475-489. DOI : [10.1016/0022-460X\(79\)90823-X](https://doi.org/10.1016/0022-460X(79)90823-X) (cf. p. 33).
- [153] W. TANG, S. BAEK et B. EPUREANU. "Reduced-order models for blisks with small and large mistuning and friction dampers". *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 139.1 (2017). DOI : [10.1115/1.4034212](https://doi.org/10.1115/1.4034212) (cf. p. 36).
- [154] S. TATZKO et M. JAHN. "On the use of complex numbers in equations of nonlinear structural dynamics". *Mechanical Systems and Signal Processing* 126 (2019), p. 626-635. DOI : [10.1016/j.ymsp.2019.02.041](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2019.02.041) (cf. p. 165).
- [155] T. THEURICH, J. GROSS et M. KRACK. "Effects of modal energy scattering and friction on the resonance mitigation with an impact absorber". *Journal of Sound and Vibration* 442 (2019), p. 71-89. DOI : [10.1016/j.jsv.2018.10.055](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.10.055) (cf. p. 133).

- [156] D. L. THOMAS. “Dynamics of rotationally periodic structures”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14.1 (1979), p. 81-102. DOI : [10.1002/nme.1620140107](https://doi.org/10.1002/nme.1620140107) (cf. p. 7 sq.).
- [157] A. THORIN, P. DELEZOIDE et M. LEGRAND. “Periodic solutions of n-dofs autonomous vibro-impact oscillators with one lasting contact phase”. *Nonlinear Dynamics* 90.3 (2017), p. 1771-1783. DOI : [10.1007/s11071-017-3763-z](https://doi.org/10.1007/s11071-017-3763-z) (cf. p. 67).
- [158] C. TOUZÉ. *A normal form approach for nonlinear normal modes*. Research Report Publications du LMA, numéro 156. LMA, 2003 (cf. p. 30, 85).
- [159] C. TOUZÉ et M. AMABILI. “Nonlinear normal modes for damped geometrically nonlinear systems : Application to reduced-order modelling of harmonically forced structures”. *Journal of Sound and Vibration* 298.4 (2006), p. 958-981. DOI : [10.1016/j.jsv.2006.06.032](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.06.032) (cf. p. 30).
- [160] C. TOUZÉ, O. THOMAS et A. CHAIGNE. “Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes”. *Journal of Sound and Vibration* 273.1 (2004), p. 77-101. DOI : [10.1016/j.jsv.2003.04.005](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.04.005) (cf. p. 19, 30).
- [161] C. TOUZÉ, A. VIZZACCARO et O. THOMAS. *Model order reduction methods for geometrically nonlinear structures : a review of nonlinear techniques*. T. 105. 2. 2021, p. 1141-1190. DOI : [10.1007/s11071-021-06693-9](https://doi.org/10.1007/s11071-021-06693-9) (cf. p. 31).
- [162] D. M. TRAN. “Component mode synthesis methods using interface modes. Application to structures with cyclic symmetry”. *Computers & Structures* 79.2 (2001), p. 209-222. DOI : [10.1016/S0045-7949\(00\)00121-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00121-8) (cf. p. 29).
- [163] D. M. TRAN. “Component mode synthesis methods using partial interface modes : Application to tuned and mistuned structures with cyclic symmetry”. *Computers & Structures* 87.17 (2009), p. 1141-1153. DOI : [10.1016/j.compstruc.2009.04.009](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2009.04.009) (cf. p. 29).
- [164] D. M. TRAN. “Réduction de modèle en dynamique des structures et des systèmes couplés aéroélastiques”. Habilitation à diriger des recherches. Institut national des sciences appliquées de Lyon ; Université Claude Bernard Lyon 1, 2015 (cf. p. 28).
- [165] A. F. VAKAKIS. “Dynamics of a nonlinear periodic structure with cyclic symmetry”. *Acta Mechanica* 95.1 (1992), p. 197-226. DOI : [10.1007/BF01170813](https://doi.org/10.1007/BF01170813) (cf. p. 7, 48).
- [166] R. VALID et R. OHAYON. “Théorie et calcul statique et dynamique des structures à symétries cycliques”. *La Recherche aérospatiale* (1985), p. 251-263 (cf. p. 7).
- [167] P. VARGIU, C. M. FIRRONE, S. ZUCCA et M. GOLA. “A reduced order model based on sector mistuning for the dynamic analysis of mistuned bladed disks”. *International Journal of Mechanical Sciences* 53.8 (2011), p. 639-646. DOI : [10.1016/j.ijmecsci.2011.05.010](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.05.010) (cf. p. 16, 36).
- [168] A. VIZZACCARO, Y. SHEN, L. SALLES, J. BLAHOŠ et C. TOUZÉ. “Direct computation of nonlinear mapping via normal form for reduced-order models of finite element nonlinear structures”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 384 (2021), p. 113957. DOI : [10.1016/j.cma.2021.113957](https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.113957) (cf. p. 30, 85).
- [169] X. Q. WANG et M. P. MIGNOLET. “Discussion on “A non-intrusive model-order reduction of geometrically nonlinear structural dynamics using modal derivatives””. *Mechanical Systems and Signal Processing* 159 (2021), p. 107638. DOI : [10.1016/j.ymsp.2021.107638](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2021.107638) (cf. p. 30).
- [170] X. Q. WANG, Z. ZHANG, Z. ZHOU, M. P. MIGNOLET et P. C. CHEN. “Effects of Nonlinear Structural Damping Uncertainty on F-16 Limit Cycle Oscillations”. *AIAA Scitech 2019 Forum*. AIAA SciTech Forum. 2019. DOI : [10.2514/6.2019-1752](https://doi.org/10.2514/6.2019-1752) (cf. p. 19).

- [171] D. S. WHITEHEAD. "Effect of Mistuning on the Vibration of Turbo-Machine Blades Induced by Wakes". *Journal of Mechanical Engineering Science* 8.1 (1966), p. 15-21. DOI : [10.1243/JMES_JOUR_1966_008_004_02](https://doi.org/10.1243/JMES_JOUR_1966_008_004_02) (cf. p. 16).
- [172] L. WOIWODE, N. BALAJI, J. KAPPAUF, F. TUBITA, L. GUILLOT, C. VERGEZ, B. COCHELIN, A. GROLET et M. KRACK. "Comparison of ANM and predictor-corrector method to continue solutions of harmonic balance equations". *Nonlinear Structures and Systems, Volume 1*. Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series. Springer International Publishing. Cham, 2020, p. 239-242. ISBN : 978-3-030-12391-8. DOI : [10.1007/978-3-030-12391-8_34](https://doi.org/10.1007/978-3-030-12391-8_34) (cf. p. 23).
- [173] L. WOIWODE, N. BALAJI, J. KAPPAUF, F. TUBITA, L. GUILLOT, C. VERGEZ, B. COCHELIN, A. GROLET et M. KRACK. "Comparison of two algorithms for harmonic balance and path continuation". *Mechanical Systems and Signal Processing* 136 (2020), p. 106503. DOI : [10.1016/j.ymsp.2019.106503](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2019.106503) (cf. p. 23).
- [174] L. XIE, S. BAGUET, B. PRABEL et R. DUFOUR. "Bifurcation tracking by Harmonic Balance Method for performance tuning of nonlinear dynamical systems". *Mechanical Systems and Signal Processing* 88 (2017), p. 445-461. DOI : [10.1016/j.ymsp.2016.09.037](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2016.09.037) (cf. p. 23, 25 sq.).
- [175] M.-T. YANG et J. H. GRIFFIN. "A reduced order model of mistuning using a subset of nominal system modes". American Society of Mechanical Engineers. 1999. DOI : [10.1115/99-GT-288](https://doi.org/10.1115/99-GT-288) (cf. p. 36).
- [176] J. YUAN, A. FANTETTI, E. DENIMAL, S. BHATNAGAR, L. PESARESI, C. SCHWINGSHACKL et L. SALLES. "Propagation of friction parameter uncertainties in the nonlinear dynamic response of turbine blades with underplatform dampers". *Mechanical Systems and Signal Processing* 156 (2021), p. 107673. DOI : [10.1016/j.ymsp.2021.107673](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2021.107673) (cf. p. 2).
- [177] J. YUAN, F. SCARPA, G. ALLEGRI, B. TITURUS, S. PATSIAS et R. RAJASEKARAN. "Efficient computational techniques for mistuning analysis of bladed discs : A review". *Mechanical Systems and Signal Processing* 87 (2017), p. 71-90. DOI : [10.1016/j.ymsp.2016.09.041](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2016.09.041) (cf. p. 36).

Annexe A

Passage des composantes cycliques complexes aux composantes cycliques réelles

Dans la Section I.2, les différents développements ont été faits avec des nombres complexes. Dans la communauté scientifique, les nombres réels peuvent être préférés et nous proposons donc ici un passage de quantités complexes aux quantités réelles. En décomposant les composantes cycliques $(\tilde{\mathbf{u}}_k)_{k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$ en leurs parties réelles et imaginaires puis en les remplaçant dans (I.4), nous avons

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_j &= \sum_{k=0}^{N-1} [(\cos(k(j-1)\alpha) + i \sin(k(j-1)\alpha)) (\operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{u}}_k) + i \operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{u}}_k))] \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} [\operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{u}}_k) \cos(k(j-1)\alpha) - \operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{u}}_k) \sin(k(j-1)\alpha)] \\
 &\quad + i \left(\sum_{k=0}^{N-1} [\operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{u}}_k) \cos(k(j-1)\alpha) + \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{u}}_k) \sin(k(j-1)\alpha)] \right) \\
 &= \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{u}}_0) + (-1)^{(j-1)} \operatorname{Re}\left(\tilde{\mathbf{u}}_{\frac{N}{2}}\right) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \frac{N}{2}}}^{N-1} [\operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{u}}_k) \cos(k(j-1)\alpha) - \operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{u}}_k) \sin(k(j-1)\alpha)] \\
 &\quad + i \left(\operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{u}}_0) + (-1)^{(j-1)} \operatorname{Im}\left(\tilde{\mathbf{u}}_{\frac{N}{2}}\right) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \frac{N}{2}}}^{N-1} [\operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{u}}_k) \cos(k(j-1)\alpha) + \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{u}}_k) \sin(k(j-1)\alpha)] \right)
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

avec, rappelons-le, Re et Im les parties réelles et imaginaires. Les composantes $\operatorname{Re}\left(\tilde{\mathbf{u}}_{\frac{N}{2}}\right)$ et $\operatorname{Im}\left(\tilde{\mathbf{u}}_{\frac{N}{2}}\right)$ n'existent que si N est pair. Les sommes des deux dernières lignes de (A.1) sont décomposées en deux sous-sommes (la première allant de 1 à K et la seconde de $K+1$ à $N-1$). Avec le changement d'indice

$m = N - k$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_j &= \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{u}}_0) + (-1)^{(j-1)} \operatorname{Re}\left(\tilde{\mathbf{u}}_{\frac{N}{2}}\right) + \sum_{k=1}^K [\operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{u}}_k) \cos(k(j-1)\alpha) - \operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{u}}_k) \sin(k(j-1)\alpha)] \\
&+ \sum_{m=1}^K [\operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{u}}_{N-m}) \cos((N-m)(j-1)\alpha) - \operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{u}}_{N-m}) \sin((N-m)(j-1)\alpha)] \\
&+ i \left(\operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{u}}_0) + (-1)^{(j-1)} \operatorname{Im}\left(\tilde{\mathbf{u}}_{\frac{N}{2}}\right) + \sum_{k=1}^K [\operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{u}}_k) \cos(k(j-1)\alpha) + \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{u}}_k) \sin(k(j-1)\alpha)] \right. \\
&\left. + \sum_{m=1}^K [\operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{u}}_{N-m}) \cos((N-m)(j-1)\alpha) + \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{u}}_{N-m}) \sin((N-m)(j-1)\alpha)] \right). \tag{A.2}
\end{aligned}$$

Comme $\alpha = \frac{2\pi}{N}$, nous avons $N\alpha j = 2\pi j$. Quelques relations classiques de la trigonométrie donnent

$$\begin{aligned}
\cos((N-m)j\alpha) &= \cos(mj\alpha), \\
\sin((N-m)j\alpha) &= -\sin(mj\alpha). \tag{A.3}
\end{aligned}$$

Nous remplaçons alors ces expressions dans (A.2) et prenons $k = m$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_j &= \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{u}}_0) + (-1)^{(j-1)} \operatorname{Re}\left(\tilde{\mathbf{u}}_{\frac{N}{2}}\right) + i \left(\operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{u}}_0) + (-1)^{(j-1)} \operatorname{Im}\left(\tilde{\mathbf{u}}_{\frac{N}{2}}\right) \right) \\
&+ \sum_{k=1}^K [\cos(k(j-1)\alpha) [\operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{u}}_k) + \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{u}}_{R,N-k})] - \sin(k(j-1)\alpha) [\operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{u}}_k) - \operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{u}}_{I,N-k})]] \\
&+ i \left(\sum_{k=1}^K [\cos(k(j-1)\alpha) [\operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{u}}_k) + \operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{u}}_{I,N-k})] + \sin(k(j-1)\alpha) [\operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{u}}_k) - \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{u}}_{R,N-k})]] \right). \tag{A.4}
\end{aligned}$$

Le déplacement physique d'un secteur j est une quantité réelle. La partie imaginaire de l'équation précédente doit donc être nulle. Cela donne N équations pour N inconnues. Comme le déterminant du système linéaire est non-nul, nous avons les relations suivantes,

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{u}}_0) &= 0 \\ \operatorname{Im}\left(\tilde{\mathbf{u}}_{\frac{N}{2}}\right) &= 0 \\ \operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{u}}_k) &= -\operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{u}}_{N-k}) & \forall k \in \llbracket 1, K \rrbracket \\ \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{u}}_k) &= \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{u}}_{N-k}) & \forall k \in \llbracket 1, K \rrbracket. \end{cases} \tag{A.5}$$

Cela donne le résultat suivant qui a été employé en Section I.2

$$\tilde{\mathbf{u}}_{N-k} = \bar{\tilde{\mathbf{u}}}_k \quad k \in \llbracket 1, K \rrbracket. \tag{A.6}$$

En remplaçant cette équation dans (A.4), nous avons

$$\mathbf{u}_j = \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{u}}_0) + \sum_{k=1}^K [2\operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{u}}_k) \cos(k(j-1)\alpha) - 2\sin(k(j-1)\alpha) \operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{u}}_k)] + (-1)^{(j-1)} \operatorname{Re}\left(\tilde{\mathbf{u}}_{\frac{N}{2}}\right), \tag{A.7}$$

avec le terme $(-1)^{(j-1)} \operatorname{Re}\left(\tilde{\mathbf{u}}_{\frac{N}{2}}\right)$ qui n'existe que si N est pair. En définissant les relations suivantes,

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}_0 &= \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{u}}_0) \\ \tilde{\mathbf{u}}^{k,c} &= 2\operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{u}}_k) \\ \tilde{\mathbf{u}}^{k,s} &= -2\operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{u}}_k) \\ \tilde{\mathbf{u}}_{\frac{N}{2}} &= \operatorname{Re}\left(\tilde{\mathbf{u}}_{\frac{N}{2}}\right), \end{cases} \tag{A.8}$$

la formulation cyclique réelle, comme donnée dans [35], est retrouvée.

$$\mathbf{u}_j = \tilde{\mathbf{u}}_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \left[\tilde{\mathbf{u}}^{k,c} \cos(k(j-1)\alpha) + \tilde{\mathbf{u}}^{k,s} \sin(k(j-1)\alpha) \right] + (-1)^{(j-1)} \tilde{\mathbf{u}}_{\frac{N}{2}}. \quad (\text{A.9})$$

Annexe B

Traitements des mouvements de corps rigides

Avec la condensation de Schur proposée en Section II.5, les matrices de rigidité dynamique réduites, $\mathbf{Z}_{\text{red},1}$, de chaque solide doivent être inversées. Pour l'harmonique 0 de l'expansion HBM cela revient à inverser la matrice de rigidité statique réduite. Dans les modèles éléments finis qui nous intéressent ces matrices peuvent être singulières : les conditions limites sont appliquées sur le disque mais la pale est libre de glisser sur la zone de contact et présente donc des mouvements de corps rigides (et similairement pour les amortisseurs sous-plateformes). Pour pallier ces difficultés, des techniques d'inversion ont été mises en place. Les travaux de Lemoine [86] ont permis de répondre à cette difficulté pour deux solides (pale, disque par exemple) et seront rappelés ci-dessous. Pour le travail de cette thèse, une extension à trois corps a été proposée.

1 Cas pour deux corps : contact pale et disque

1.1 Calcul de la matrice de rigidité dynamique

La matrice \mathbf{Z}_r de l'harmonique 0 (remplacer $n = 0$ dans (II.35)) à l'Équation II.41 est égale à

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_{r,0} &= \left(\mathbf{P}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{\text{red},1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{\text{red},2} \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{P} \right)^{-1} \\ &= \left(\mathbf{Z}_{\text{red},1}^{-1} + \mathbf{Z}_{\text{red},2}^{-1} \right)^{-1}.\end{aligned}\tag{B.1}$$

Supposons que le premier solide représente la pale avec des mouvements de corps rigides. L'inversion de $\mathbf{Z}_{\text{red},1}$ n'est donc pas licite. Nous allons utiliser la propriété que si deux matrices A et B sont inversibles alors

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.\tag{B.2}$$

En appliquant cette propriété sur (B.1), nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_{r,0} &= \left(\mathbf{Z}_{\text{red},1}^{-1} + \mathbf{Z}_{\text{red},2}^{-1} \right)^{-1} \\
&= \left(\mathbf{Z}_{\text{red},2}^{-1} + \mathbf{Z}_{\text{red},1}^{-1} \right)^{-1} \\
&= \left(\mathbf{Z}_{\text{red},1}^{-1} \mathbf{Z}_{\text{red},1} \mathbf{Z}_{\text{red},2}^{-1} + \mathbf{Z}_{\text{red},1}^{-1} \mathbf{Z}_{\text{red},2} \mathbf{Z}_{\text{red},2}^{-1} \right)^{-1} \\
&= \left(\mathbf{Z}_{\text{red},1}^{-1} (\mathbf{Z}_{\text{red},1} + \mathbf{Z}_{\text{red},2}) \mathbf{Z}_{\text{red},2}^{-1} \right)^{-1} \\
&= \left(\mathbf{Z}_{\text{red},2} (\mathbf{Z}_{\text{red},1} + \mathbf{Z}_{\text{red},2})^{-1} \mathbf{Z}_{\text{red},1} \right) \\
&= \left(\mathbf{Z}_{\text{red},2} \left(\mathbf{P}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{\text{red},1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{\text{red},2} \end{bmatrix} \mathbf{P} \right)^{-1} \mathbf{Z}_{\text{red},1} \right).
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Comme nous pouvons le voir dans (B.3) la matrice $\mathbf{Z}_{\text{red},1}$ ne se fait plus inverser. Notons, que ces étapes de calcul ont fait l'hypothèse que $\mathbf{Z}_{\text{red},1}$ était inversible ce qui est en principe faux. D'un point de vue numérique la précision des machines rend cette hypothèse valide asymptotiquement.

1.2 Restitution du déplacement

Dans le cadre des mouvements de corps rigides (pour l'harmonique 0), $\mathbf{Z}_{\text{red},1}$ n'est plus inversible, et il est donc nécessaire de modifier la procédure de la Section II.5.2 pour restituer le déplacement. Via l'Équation (II.41), nous récupérons le terme $\mathbf{c}_{f_{nl}}$ et évaluons le terme $\mathbf{c}_{c,2}$ du solide sans mouvement de corps rigides (donc ici le disque) par (II.38). Le déplacement des nœuds non-linéaires de la pale s'obtient simplement en utilisant la relation

$$\mathbf{c}_{c,1} = \mathbf{c}_r + \mathbf{c}_{c,2}. \tag{B.4}$$

Les déplacements des nœuds linéaires sont obtenus via la relation (II.37).

2 Cas pour trois corps : contact pale, disque et amortisseur

2.1 Calcul de la matrice de rigidité dynamique

Dans le cas d'un contact pale, disque et amortisseur, la pale et les amortisseurs ont un mouvement de corps rigides. Nous pouvons appliquer la méthodologie précédente (Section B.1) pour chaque contact. En notant c1 le contact entre la pale et le disque et c2 le contact entre la pale et les amortisseurs, la matrice de rigidité dynamique s'écrit,

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_{r,0} &= \left(\mathbf{P}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{\text{red},1,c1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{\text{red},1,c2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{\text{red},2,c1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{\text{red},3,c2} \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{P} \right)^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \left(\mathbf{Z}_{\text{red},1,c1}^{-1} + \mathbf{Z}_{\text{red},2,c1}^{-1} \right)^{-1} \\ \left(\mathbf{Z}_{\text{red},1,c2}^{-1} + \mathbf{Z}_{\text{red},3,c2}^{-1} \right)^{-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{B.5}$$

En appliquant la stratégie précédente, nous avons

$$\mathbf{Z}_{r,0} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{\text{red},2,c1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{\text{red},3,c2} \end{bmatrix} \left(\mathbf{P}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{\text{red},1,c1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{\text{red},1,c2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{\text{red},2,c1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{\text{red},3,c2} \end{bmatrix} \mathbf{P} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{\text{red},1,c1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{\text{red},1,c2} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

La procédure peut ainsi s'appliquer pour un nombre n de contact.

2.2 Restitution du déplacement

Tandis que le calcul de la matrice de rigidité dynamique est généralisable à n corps, la restitution du déplacement est dépendante du cas étudié. Dans notre cas de système à trois corps (pale, disque et amortisseurs), seul le disque n'a pas de mouvements de corps rigides et ses déplacements peuvent être évalués via la procédure de la Section II.5.2. Le déplacement des nœuds non-linéaires de la pale associée au contact pale disque est obtenu via

$$\mathbf{c}_{c,1,c1} = \mathbf{c}_{r,c1} + \mathbf{c}_{c,2,c2}. \quad (\text{B.7})$$

Pour obtenir le déplacement des nœuds non-linéaires de la pale au niveau du cas des amortisseurs, nous subdivisons l'Équation (II.38) associée à la pale en deux parties

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{\text{red},1,c1} & \mathbf{Z}_{\text{red},1,c2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{c,1,c1} \\ \mathbf{c}_{c,1,c2} \end{bmatrix} + \mathbf{c}_{f_{nl}} = \mathbf{c}_{f_{\text{red}}}. \quad (\text{B.8})$$

Le coefficient $\mathbf{c}_{c,1,c2}$ est obtenu par la pseudo-inverse de $\mathbf{Z}_{\text{red},1,c2}$ (via une méthode de Penrose) notée $\mathbf{Z}_{\text{red},1,c2}^*$

$$\mathbf{c}_{c,1,c2} = \mathbf{Z}_{\text{red},1,c2}^* (\mathbf{c}_{f_{\text{red}}} - \mathbf{c}_{f_{nl}} - \mathbf{Z}_{\text{red},1,c1} \mathbf{c}_{c,1,c1}). \quad (\text{B.9})$$

Le déplacement des amortisseurs sur les interfaces de contact s'obtiennent alors par

$$\mathbf{c}_{c,3,c2} = -\mathbf{c}_{r,c1} + \mathbf{c}_{c,1,c2}. \quad (\text{B.10})$$

Le déplacement des nœuds linéaires des structures sont obtenus par l'Équation (II.37).

Annexe C

Calcul des modes complexes non-linéaires

Cette partie offre plus de détails sur l'évaluation numérique du mode complexe non-linéaire proposée en Section II.3.2.

1 Mise en équation

Comme l'équation du mouvement est complétée par les équations de fermeture (II.24), la condensation de Schur proposée en Section II.5 doit être modifiée. Considérons le cas pale/disque (deux solides) avec le degré de liberté d'observation situé en tête de pale (tip). Les degrés de liberté linéaires (indice a) sont partagés en degrés de liberté de contrôle (indice tip) et degrés de liberté internes (indice i),

$$\mathbf{c}_a = \left[\mathbf{c}_i^\top, \mathbf{c}_{\text{tip}}^\top \right]^\top. \quad (\text{C.1})$$

Le système d'équations de la pale s'écrit comme à l'Équation (II.36) (pour le mode non-linéaire, il n'y a pas d'efforts dynamiques) avec une partition supplémentaire (pour plus de facilité, nous dissocions l'harmonique $n = 1$ des autres harmoniques n),

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{1,ii} & \mathbf{Z}_{n,itip} & \mathbf{Z}_{1,ic} \\ \mathbf{Z}_{1,tipi} & \mathbf{Z}_{1,tipip} & \mathbf{Z}_{1,tipc} \\ \mathbf{Z}_{1,ci} & \mathbf{Z}_{1,ctip} & \mathbf{Z}_{1,cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1,i} \\ \mathbf{c}_{1,tip} \\ \mathbf{c}_{1,c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_{f_{n1},1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \end{array} \right. \quad (\text{C.2a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{n,aa} & \mathbf{Z}_{n,ac} \\ \mathbf{Z}_{n,ca} & \mathbf{Z}_{n,cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{n,a} \\ \mathbf{c}_{n,c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_{f_{n1},n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \end{array} \right. \quad \forall n \in \llbracket 1, N_h \rrbracket, n \neq 1. \quad (\text{C.2b})$$

Dans cette Section, la matrice de rigidité dynamique de l'harmonique n du solide 1 est calculée par

$$\mathbf{Z}_n = (n\lambda)^2 \mathbf{M}_1 + n\lambda \mathbf{C}_1 + \mathbf{K}_1. \quad (\text{C.3})$$

Pour les harmoniques $n \neq 1$, les développements suivent les étapes de la Section II.5. Pour l'harmonique 1, davantage de développements doivent être faits. Explicitions l'Équation (C.2a) pour chaque type de degrés de liberté,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{c}_{1,i} = -\mathbf{Z}_{1,ii}^{-1} (\mathbf{Z}_{1,itip} \mathbf{c}_{1,tip} + \mathbf{Z}_{1,ic} \mathbf{c}_{1,c}) \end{array} \right. \quad (\text{C.4a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{Z}_{1,tipc} - \mathbf{Z}_{1,tipi} \mathbf{Z}_{1,ii}^{-1} \mathbf{Z}_{1,ic}) \mathbf{c}_{1,c} = (-\mathbf{Z}_{1,tipip} + \mathbf{Z}_{1,tipi} \mathbf{Z}_{1,ii}^{-1} \mathbf{Z}_{1,tip}) \mathbf{c}_{1,tip} \end{array} \right. \quad (\text{C.4b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{Z}_{1,cc} - \mathbf{Z}_{1,ci} \mathbf{Z}_{1,ii}^{-1} \mathbf{Z}_{1,ic}) \mathbf{c}_{1,c} + \mathbf{c}_{f_{n1},1} = (-\mathbf{Z}_{1,ctip} + \mathbf{Z}_{1,ci} \mathbf{Z}_{1,ii}^{-1} \mathbf{Z}_{1,tip}) \mathbf{c}_{1,tip}. \end{array} \right. \quad (\text{C.4c})$$

Par conséquent le système d'équations régissant la pale (voir Équation (II.38)) est modifié en

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_{1,\text{red}}\mathbf{c}_{1,c} + \mathbf{c}_{\text{nl},1} = \mathbf{c}_{\text{red},1} & \text{(C.5a)} \\ \mathbf{Z}_{\text{MNL}}\mathbf{c}_{1,c} = \mathbf{c}_{\text{f}_{\text{MNL}}} & \text{(C.5b)} \\ \mathbf{Z}_{n,\text{red}}\mathbf{c}_{n,c} + \mathbf{c}_{\text{nl},n} = \mathbf{c}_{\text{red},n} & \forall n \in \llbracket 0, N_h \rrbracket, n \neq 1, \end{cases} \quad \text{(C.5c)}$$

avec

$$\mathbf{Z}_{1,\text{red}} = \mathbf{Z}_{1,cc} - \mathbf{Z}_{1,ci}\mathbf{Z}_{1,ii}^{-1}\mathbf{Z}_{1,ic} \quad \text{(C.6a)}$$

$$\mathbf{c}_{\text{red},1} = \left(-\mathbf{Z}_{1,\text{ctip}} + \mathbf{Z}_{1,ci}\mathbf{Z}_{1,ii}^{-1}\mathbf{Z}_{1,\text{itip}} \right) \mathbf{c}_{1,\text{tip}} \quad \text{(C.6b)}$$

$$\mathbf{Z}_{\text{MNL}} = \mathbf{Z}_{1,\text{tipc}} - \mathbf{Z}_{1,\text{tipi}}\mathbf{Z}_{1,ii}^{-1}\mathbf{Z}_{1,ic} \quad \text{(C.6c)}$$

$$\mathbf{c}_{\text{f}_{\text{MNL}}} = \left(-\mathbf{Z}_{1,\text{tipip}} + \mathbf{Z}_{1,\text{tipi}}\mathbf{Z}_{1,ii}^{-1}\mathbf{Z}_{1,\text{itip}} \right) \mathbf{c}_{1,\text{tip}}. \quad \text{(C.6d)}$$

$$\text{(C.6e)}$$

Comme à la Section II.5, nous faisons une condensation relative sur les degrés de liberté non-linéaire. Le système final s'écrit

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_{r,n}\mathbf{c}_{r,n} + \mathbf{c}_{\text{nl},n} = \mathbf{c}_{\text{f}_{r,n}}, & \forall n \in \llbracket 0, N_h \rrbracket \\ -\mathbf{Z}_{r,\text{MNL}}\mathbf{c}_{\text{nl},1} = \mathbf{c}_{\text{f}_{r,\text{MNL}}}, \end{cases} \quad \text{(C.7a)}$$

$$\text{(C.7b)}$$

avec

$$\mathbf{Z}_{r,\text{MNL}} = \mathbf{Z}_{\text{MNL}}\mathbf{Z}_{\text{red},1,1}^{-1} \quad \text{(C.8a)}$$

$$\mathbf{c}_{\text{f}_{r,\text{MNL}}} = \mathbf{c}_{\text{f}_{\text{MNL}}} - \mathbf{Z}_{\text{MNL}}\mathbf{Z}_{\text{red},1,1}^{-1}\mathbf{c}_{\text{f}_{\text{red},1}}. \quad \text{(C.8b)}$$

2 Évaluation de la jacobienne

Le système (C.7) est non-linéaire et doit être résolu par une méthode de résolution type Newton-Raphson. Afin d'assurer la rapidité de la convergence, une matrice jacobienne analytique est fournie au solveur. Les inconnues complexes sont $\mathbf{c}_{r,n}$, λ .

2.1 Jacobienne par rapport aux inconnues harmoniques de déplacement relatives

L'évaluation de la jacobienne par rapport à $\mathbf{c}_{r,n}$ a déjà été largement documentée [64, 137]. La principale difficulté réside dans l'évaluation de la jacobienne pour les forces non-linéaires et ceci a été traité dans [137]. La jacobienne du résidu du système (C.7) par rapport à $\mathbf{c}_{r,n}$ donne

$$\mathbf{J}_{\mathbf{c}_{r,n}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{r,n}\mathbf{c}_{r,n} + \frac{d\mathbf{c}_{\text{nl},n}}{d\mathbf{c}_{r,n}} \\ -\mathbf{Z}_{r,\text{MNL}}\frac{d\mathbf{c}_{\text{nl},1}}{d\mathbf{c}_{r,n}} \end{bmatrix}. \quad \text{(C.9)}$$

2.2 Jacobienne par rapport à la pulsation complexe

La dérivée du résidu par rapport à la variable λ n'a en revanche pas été documentée. Une difficulté des calculs vient du fait que les matrices de rigidité réduite du système (C.7) s'obtiennent par diverses inversions matricielles (voir Équations (II.38) et (II.42a)). Via l'astuce suivante nous pouvons déterminer facilement la jacobienne par rapport à λ ,

$$\mathbf{Z}\mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{I}. \quad \text{(C.10)}$$

En dérivant par rapport à λ ,

$$\frac{d\mathbf{Z}}{d\lambda}\mathbf{Z}^{-1} + \mathbf{Z}\frac{d\mathbf{Z}^{-1}}{d\lambda} = \mathbf{0}. \quad (\text{C.11})$$

Donc finalement

$$\frac{d\mathbf{Z}^{-1}}{d\lambda} = -\mathbf{Z}^{-1}\frac{d\mathbf{Z}}{d\lambda}\mathbf{Z}^{-1}. \quad (\text{C.12})$$

Dans la suite des calculs toute quantité du type $\frac{d\mathbf{Z}^{-1}}{d\lambda}$ sera évaluée à travers la relation (C.12). Pour l'harmonique 0, la jacobienne est nulle. Pour les autres harmoniques, nous dérivons l'Équation (II.42a),

$$\frac{d\mathbf{Z}_r}{d\lambda} = \left(\mathbf{P}^\top \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{Z}_{\text{red},1}^{-1}}{d\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{d\mathbf{Z}_{\text{red},2}^{-1}}{d\lambda} \end{bmatrix} \mathbf{P} \right)^{-1}. \quad (\text{C.13})$$

Pour chaque solide, il est nécessaire d'évaluer la dérivée de $\mathbf{Z}_{\text{red}}^{-1}$ par rapport à λ . La propriété (C.12) est utilisée et cela revient donc à évaluer la dérivée de \mathbf{Z}_{red} par rapport à λ . Via l'Équation (C.6a) (pour l'harmonique 1 du solide avec le nœud d'observation) ou l'Équation (II.38) (pour les autres harmoniques/solides), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Z}_{1,\text{red}}}{d\lambda} &= \frac{d\mathbf{Z}_{1,cc}}{d\lambda} - \frac{d\mathbf{Z}_{1,ci}}{d\lambda}\mathbf{Z}_{1,ii}^{-1}\mathbf{Z}_{1,ic} \\ &\quad - \mathbf{Z}_{1,ci}\frac{d\mathbf{Z}_{1,ii}^{-1}}{d\lambda}\mathbf{Z}_{1,ic} - \mathbf{Z}_{1,ci}\mathbf{Z}_{1,ii}^{-1}\frac{d\mathbf{Z}_{1,ic}}{d\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Encore une fois, la dérivée de $\mathbf{Z}_{1,ii}^{-1}$ par rapport à λ s'évalue via (C.12). Il suffit finalement d'évaluer la dérivée de \mathbf{Z} pour les différentes partitions pour avoir la dérivée de \mathbf{Z}_r par rapport à λ . Via (C.3),

$$\frac{d\mathbf{Z}_{1,n}}{d\lambda} = 2n^2\lambda\mathbf{M}_1 + n\mathbf{C}_1. \quad (\text{C.15})$$

2.3 Passage en quantités réelles

En pratique le solveur résout le système pour des variables réelles. La taille du problème est donc doublé. Il convient donc de repasser le système et la jacobienne en réel. Les calculs sont relativement simples mais sont tout de même proposés ci-dessous. Tatzko et Jahn ont publié un article à ce sujet [154]. Pour calculer le résidu (C.7) en réel, il suffit d'en prendre la partie réelle puis imaginaire. Pour la jacobienne, les dérivées doivent également être dans le domaine réel. Via les relations suivantes

$$\frac{d\bullet}{d\text{Re}(\mathbf{c}_{r,n})} = \frac{d\bullet}{d\mathbf{c}_{r,n}} \frac{d\mathbf{c}_{r,n}}{d\text{Re}(\mathbf{c}_{r,n})} = \frac{d\bullet}{d\mathbf{c}_{r,n}}, \quad (\text{C.16a})$$

$$\frac{d\bullet}{d\text{Im}(\mathbf{c}_{r,n})} = \frac{d\bullet}{d\mathbf{c}_{r,n}} \frac{d\mathbf{c}_{r,n}}{d\text{Im}(\mathbf{c}_{r,n})} = i \frac{d\bullet}{d\mathbf{c}_{r,n}}, \quad (\text{C.16b})$$

$$\frac{d\bullet}{d\text{Re}(\lambda)} = \frac{d\bullet}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\text{Re}(\lambda)} = \frac{d\bullet}{d\lambda}, \quad (\text{C.16c})$$

$$\frac{d\bullet}{d\text{Im}(\lambda)} = \frac{d\bullet}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\text{Im}(\lambda)} = i \frac{d\bullet}{d\lambda}, \quad (\text{C.16d})$$

et en prenant les parties réelles et imaginaires de ces quantités, nous obtenons le système réel à fournir au solveur non-linéaire.

Annexe D

Algorithme de contact : Dynamic Lagrangian Frequency Time

Dans cette Annexe nous rappelons le principe de la DLFT pour les efforts normaux et tangentiels.

1 Dynamic Lagrangian Frequency Time pour l'effort normal

Cet algorithme permet de déterminer si les solides se séparent et dans le cas contraire quelle est la force normale qui s'exerce entre eux. Considérons l'Équation (II.41) suivant la direction normale

$$\mathbf{Z}_{r,N}\mathbf{c}_r + \mathbf{c}_{f_{nl,N}} = \mathbf{c}_{f_{r,N}}, \quad (\text{D.1})$$

où l'indice N représente les degrés de liberté normaux. La DLFT consiste à chercher les forces non-linéaires sous la forme

$$\mathbf{c}_{f_{nl,N}} = \mathbf{c}_{f_{r,N}} - \mathbf{Z}_{r,N}\mathbf{c}_r + \varepsilon(\mathbf{c}_{r,N} - \mathbf{x}_{r,N}), \quad (\text{D.2})$$

où ε est un paramètre de pénalisation [20]). $\mathbf{x}_{r,N}$ représente les harmoniques du déplacement relatif normal aux solides et doit satisfaire la loi de séparation dans le domaine temporel. Les forces non-linéaires sont séparées en deux parties : les forces prédites

$$\mathbf{c}_{f_{nl,N,u}} = \mathbf{c}_{f_{r,N}} - \mathbf{Z}_{r,N}\mathbf{c}_r + \varepsilon\mathbf{c}_{r,N}, \quad (\text{D.3})$$

et les forces de correction pour satisfaire la loi de séparation

$$\mathbf{c}_{f_{nl,N,x}} = -\varepsilon\mathbf{x}_{r,N}. \quad (\text{D.4})$$

La force prédite est évaluée dans le domaine temporel avec la procédure AFT (voir Section I.7.2). Deux cas sont possibles : soit les solides sont en contact ($\mathbf{f}_{nl,N,u} < 0$), donc le déplacement relatif est nul et la prédiction est correcte

$$\mathbf{f}_{nl,N} = \mathbf{f}_{nl,N,u}, \quad (\text{D.5})$$

soit les solides sont séparés ($\mathbf{f}_{nl,N,u} > 0$, force de traction) et il n'y a alors pas de force de contact,

$$\mathbf{f}_{nl,N} = \mathbf{0}. \quad (\text{D.6})$$

2 Dynamic Lagrangian Frequency Time pour l'effort tangentiel

Deux formulations existent pour la procédure DLFT pour les efforts tangentiels : la formulation originale en déplacements [113] et la formulation en vitesse introduite dans [20]. Cette seconde

formulation sera brièvement expliquée dans cette section. Considérons la condensation de Schur, fournie en Section II.5, qui donne pour les degrés de liberté tangentiels relatifs,

$$\mathbf{Z}_{r,T}\mathbf{c}_r + \mathbf{c}_{f_{nl,T}} = \mathbf{c}_{f_{r,T}}, \quad (\text{D.7})$$

où l'indice T représente les degrés de liberté tangentiels. La DLFT consiste à chercher les forces non-linéaires sous la forme

$$\mathbf{c}_{f_{nl,T}} = \mathbf{c}_{f_{r,T}} - \mathbf{Z}_{r,T}\mathbf{c}_r + \varepsilon (\nabla\mathbf{c}_{r,T} - \mathbf{v}_{r,T}). \quad (\text{D.8})$$

Le terme $\mathbf{v}_{r,T}$ représente les harmoniques de la vitesse relative des solides en contact et doit satisfaire la loi de Coulomb dans le domaine temporel. Les forces non-linéaires sont séparées en deux parties : les forces prédites

$$\mathbf{c}_{f_{nl,T,u}} = \mathbf{c}_{f_{r,T}} - \mathbf{Z}_{r,T}\mathbf{c}_r + \varepsilon\nabla\mathbf{c}_{r,T}, \quad (\text{D.9})$$

et les forces de correction pour satisfaire la loi de Coulomb

$$\mathbf{c}_{f_{nl,T,x}} = -\varepsilon\mathbf{v}_{r,T}. \quad (\text{D.10})$$

Si les solides ne sont pas en contact, alors les forces tangentiels sont nulles

$$\mathbf{f}_{nl,T} = \mathbf{0}. \quad (\text{D.11})$$

En revanche, si les solides sont en contact, il est nécessaire de projeter le terme $\mathbf{c}_{f_{nl,T,u}}$ dans le domaine temporel via l'AFT (voir Section I.7.2) pour obtenir les forces non-linéaires prédites en fonction du temps. Deux cas sont alors rencontrés : soit les solides sont collés $\mathbf{f}_{nl,T,u} < \mu |f_{nl,N}|$, alors la vitesse relative est nulle et la prédiction est correcte,

$$\mathbf{f}_{nl,T} = \mathbf{f}_{nl,T,u}, \quad (\text{D.12})$$

soit du glissement apparaît $\|\mathbf{f}_{nl,T,u}\| \geq \mu |f_{nl,N}|$. La prédiction est alors fautive et doit être corrigée avec

$$\mathbf{f}_{nl,T,x} = \mathbf{f}_{nl,T,u} \left(1 - \frac{\mu |f_{nl,N}|}{\|\mathbf{f}_{nl,T,u}\|} \right). \quad (\text{D.13})$$

Finalement les forces non-linéaires sont égales à

$$\mathbf{f}_{nl} = \mathbf{f}_{nl,u} - \mathbf{f}_{nl,x}. \quad (\text{D.14})$$

un mouvement périodique ($a'_3 = a'_9 = \gamma'_1 = \gamma'_2 = 0$), nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3 \sigma_1 \omega_3 = \frac{3\alpha}{8} [3\alpha^3 a_3^3 + 3\alpha\beta^2 a_3 a_9^2 (2 + \cos(2\gamma_2)) + \cos(\gamma_2) (\alpha^2 \beta a_3^2 a_9 + \beta^3 a_9^3)] \\ \hspace{15em} - \alpha f_a \cos(\gamma_1) \end{array} \right. \quad (\text{E.8})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_9 \omega_9 = \frac{3\beta}{8(\sigma_1 - \sigma_2)} [3\beta^3 a_9^3 + 3\alpha^2 \beta a_3^2 a_9 (2 + \cos(2\gamma_2)) + \cos(\gamma_2) (\alpha\beta^2 a_3 a_9^2 + \alpha^3 a_3^3)] \end{array} \right. \quad (\text{E.9})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_3 \mu_3 a_3 = -\frac{3\alpha\beta a_9}{8} [3\alpha\beta a_3^2 \sin(2\gamma_2) + \alpha^2 a_3^2 \sin(\gamma_2) + \beta^2 a_9^2 \sin(\gamma_2)] + \alpha f_a \sin(\gamma_1) \end{array} \right. \quad (\text{E.10})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_9 \mu_9 a_9 = \frac{3\beta\alpha a_3}{8} [3\alpha\beta a_3 a_9 \sin(2\gamma_2) + \alpha^2 a_3^2 \sin(\gamma_2) + \beta^2 a_9^2 \sin(\gamma_2)] . \end{array} \right. \quad (\text{E.11})$$

L'interprétation de ces résultats est fourni en Section III.2.3.

2 Étude d'une résonance interne 1:3 pour une onde tournante

Nous complétons ici notre étude des résonances internes 1:1 par une analyse pour des résonances internes 1:3. Les résonances internes 1:3 ont été largement étudiées dans la littérature comme par exemple dans [115] et [80]. Pour cette résonance interne, nous définissons σ_2 par

$$\omega_9 = 3\omega_3 + \sigma_2 \varepsilon^2. \quad (\text{E.12})$$

De façon similaire à la Section III.2.2, nous considérons le cas où l'excitation et le déplacement sont sous la forme d'onde tournante. Ainsi, la relation (III.38) reste vérifiée. Les conditions de solvabilité deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} -2i\omega_3 (A'_3 + \mu_3 A_3) - \alpha (3\alpha^3 A_3^2 \bar{A}_3 + 6\alpha\beta^2 \bar{A}_3 A_9 \bar{A}_9 + 3\alpha^2 \beta \bar{A}_3^2 A_9 e^{i\sigma_2 T_2}) + \alpha f_a e^{i\sigma_1 T_2} = 0 \\ -2i\omega_9 (A'_9 + \mu_9 A_9) - \beta (\alpha^3 A_3^3 e^{-i\sigma_2 T_2} + 6\alpha^2 \beta A_3 \bar{A}_3 A_9 + 3\beta^3 A_9^2 \bar{A}_9) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{E.13})$$

En remplaçant A_3 et A_9 par leur forme polaire (III.40), en introduisant les paramètres

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = \sigma_1 T_2 - \Theta_3 \end{array} \right. \quad (\text{E.14})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_2 = \Theta_9 - 3\Theta_3 + \sigma_2 T_2, \end{array} \right. \quad (\text{E.15})$$

dans (E.13), et en considérant un mouvement périodique ($a'_3 = a'_9 = \gamma'_1 = \gamma'_2 = 0$), nous obtenons le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} -a_3 \sigma_1 \omega_3 = -\frac{3\alpha^2 a_3}{8} [\alpha^2 a_3^2 + 2\beta^2 a_9^2 + \alpha\beta a_3 a_9 \cos(\gamma_2)] + \alpha f_a \cos(\gamma_1) \end{array} \right. \quad (\text{E.16})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -a_9 (3\sigma_1 - \sigma_2) \omega_9 = -\frac{3\beta}{8} [\alpha^3 a_3^3 + 2\alpha^2 \beta a_3^2 a_9 + 3\beta^3 a_9^3] \end{array} \right. \quad (\text{E.17})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_3 \mu_3 a_3 = -\frac{3\alpha^3 \beta}{8} a_3^2 a_9 \sin(\gamma_2) + \alpha f_a \sin(\gamma_1) \end{array} \right. \quad (\text{E.18})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_9 \mu_9 a_9 = \frac{3\beta}{8} \alpha^3 a_3^3 \sin(\gamma_2). \end{array} \right. \quad (\text{E.19})$$

De façon similaire à la Section E.1, il peut y avoir un couplage entre le troisième et neuvième diamètre pour une onde tournante via une résonance interne 1:3 (voir Équation (E.19)). Ces résultats

sont similaires à ceux obtenus par Nayfeh dans [115].

3 Étude d'une résonance interne 1:3 pour une onde stationnaire

Considérons désormais le cas d'une onde stationnaire, les Équations (E.2) sont conservées mais les conditions de solvabilité deviennent

$$\begin{cases} -2i\omega_3 (A'_3 + \mu_3 A_3) - \alpha (9\alpha^3 A_3^2 \bar{A}_3 + 18\alpha\beta^2 \bar{A}_3 A_9 \bar{A}_9 + 3\alpha^2 \beta \bar{A}_3^2 A_9 e^{i\sigma_2 T_2}) + \alpha f_a e^{i\sigma_1 T_2} = 0 & \text{(E.20)} \\ -2i\omega_9 (A'_9 + \mu_9 A_9) - \beta (\alpha^3 A_1^3 e^{-i\sigma_2 T_2} + 18\alpha^2 \beta A_3 \bar{A}_3 A_9 + 9\beta^3 A_9^2 \bar{A}_9) = 0. & \text{(E.21)} \end{cases}$$

Les termes A_3 et A_9 sont écrits sous leur forme polaire (voir Équation (III.40)). En substituant l'expression (III.40) de A_3 et A_9 dans (E.13), et en considérant un mouvement périodique ($a'_3 = a'_9 = \gamma'_1 = 0$), nous obtenons le système final (en distinguant les parties réelles et imaginaires) :

$$\begin{cases} -a_3 \sigma_1 \omega_3 = -\frac{3\alpha}{8} [3\alpha^3 a_3^3 + 6\alpha\beta^2 a_3 a_9^2 + \alpha^2 \beta a_3^2 a_9 \cos(\gamma_2)] + \alpha f_a \cos(\gamma_1) & \text{(E.22)} \\ -a_9 \omega_9 (3\sigma_1 - \sigma_2) = -\frac{3\beta}{8} [\alpha^3 a_3^3 \cos(\gamma_2) + 6\alpha^2 \beta a_3^2 a_9 + 3\beta^3 a_9^3] & \text{(E.23)} \\ \omega_3 \mu_3 a_3 = -\frac{3\alpha}{8} [\alpha^2 \beta a_3^2 a_9 \sin(\gamma_2)] + \alpha f_a \sin(\gamma_1) & \text{(E.24)} \\ \omega_9 \mu_9 a_9 = \frac{3\beta}{8} \alpha^3 a_3^3 \sin(\gamma_2). & \text{(E.25)} \end{cases}$$

On retrouve ici le même résultat que [115] adapté à notre cas. Ces équations sont très proches de celle obtenues dans le cadre d'une onde tournante (seuls certains coefficients diffèrent).

Annexe F

Algorithme pour déterminer l'interaction diamétrale

Dans la Section III.3, nous avons proposé des calculs analytiques pour déterminer les couplages inter-diamétraux pour une excitation avec un nombre d'onde spécifique h_{ex} . Cette Annexe propose un algorithme général permettant de déterminer les couplages quand de multiples excitations sont prises en compte. Considérons P nombres d'ondes noté $\mathbf{q} = (q_i)_{i \in \llbracket 1, P \rrbracket}$. L'Équation (III.55) est décomposée en multiples sommes avec les nombres d'ondes différents et devient

$$\sum_{i=1}^P (m_i q_i) \equiv q \pmod{N}, \quad (\text{F.1})$$

avec la condition $\sum_{i=1}^P m_i = 2n - 1$ (m_i peut être pair ou impair). Cette équation peut s'écrire

$$\sum_{i=1}^P \left[(2n_i q_i) - \sum_{k \in \mathcal{S}_P} \delta_{ki} q_i \right] \equiv q \pmod{N}, \quad (\text{F.2})$$

avec la condition que le terme $\sum_i^P \sum_{k \in \mathcal{S}_P} \delta_{ki}$ soit impair. L'ensemble \mathcal{S}_P dénombre tous les couples $(m_i)_{i \in \llbracket 1, P \rrbracket}$ possibles. Par exemple, si $P = 5$, alors nous avons trois possibilités : tous les m_i sont impairs, 3 des m_i sur 5 sont impairs, ou bien une valeur des m_i sur 5 est impair. Le nombre de possibilités est égal à $\frac{P}{2}$ si P est pair, et à $\frac{P+1}{2}$ si P est impair.

Dans le cas d'une seule valeur h_{ex} , nous pouvons déterminer la périodicité (notée M_i) pour chaque diamètre nodal q_i à travers l'Équation (III.60). Par conséquent, nous pouvons calculer toutes les combinaisons possibles de la condition (F.2) en prenant $(n_1, \dots, n_P) = \llbracket 1, M_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, M_P \rrbracket$.

L'Algorithme F.1 résume ces différentes étapes pour obtenir les couplages inter-diamétraux.

Algorithme F.1 : Détermination des couplages

```

1: Fournir  $N$  et  $\mathbf{q}$ .
2:  $\text{diam} \leftarrow \mathbf{q}$  {Nombre total de diamètres nodaux.}
3: for  $i = 1 : 1 : P$  do
4:   Calculer  $M_i$  {voir Équation (III.60).}
5: end for
6:  $\text{list\_combinaison} \leftarrow []$  {Initialisation des ensembles des combinaisons à l'ensemble nul.}
7: for  $i = 1 : 1 : P$  do
8:   On ajoute à  $\text{list\_combinaison}$  le terme  $2q_i[1 : M_i]$  {premier terme de l'Équation (F.2).}
9: end for
10: if  $P$  est pair then
11:    $\text{nbr\_S} \leftarrow \frac{P}{2}$  {Détermination de l'ensemble  $\mathcal{S}_P$ .}
12: else
13:    $\text{nbr\_S} \leftarrow \frac{P+1}{2}$  {Détermination de l'ensemble  $\mathcal{S}_P$ .}
14: end if
15: for  $k = 1 : 1 : \text{nbr\_S}$  do
16:    $\text{combinaisons\_supplémentaires} \leftarrow \text{nchoosek}(\text{diam}, 2k - 1)$  {On ajoute à  $\text{list\_combinaison}$ 
    le terme  $\delta_{ki}q_i$ ; voir le second terme de (F.2) avec  $\text{nchoosek}$ 
    le coefficient binomial.}
17: end for {On garde seulement les diamètres  $0 \leq q \leq K$ .}
18:  $q_{\text{update}} \leftarrow q_{\text{update}} \leq K$ 
19: Actualisation de  $\text{diam}$ . {On récupère les nouveaux diamètres couplés à travers la commande
     $\text{setdiff}$ .}
20:  $q_{\text{new}} \leftarrow \text{setdiff}(\text{diam}, q_{\text{new}})$ 

```

Annexe G

Calcul de la jacobienne de la méthode SNCR

1 Jacobienne par rapport aux coordonnées généralisées

Pour évaluer la matrice jacobienne du système (IV.30), nous procédons comme pour l'évaluation du résidu et évaluons la jacobienne sur chaque secteur avant d'assembler le système. Considérons un secteur j et évaluons la jacobienne associée de l'Équation (IV.25). Les forces de contact entre les secteurs ne sont pas prises en compte puisqu'elles s'annulent lors de l'assemblage. Nous évaluons tout d'abord la jacobienne de la base de réduction $\Phi_{i,f}$ par rapport aux parties réelles et imaginaires des coordonnées généralisées $\text{Re}(\mathbf{q}_j)$ et $\text{Im}(\mathbf{q}_j)$. Rappelons que la base de réduction $\Phi_{i,f}$ est obtenue via une interpolation linéaire par morceaux des déformées du mode non-linéaire discrétisé (voir Section IV.1.1). La jacobienne de $\Phi_{i,f}$ par rapport aux quantités réelles se calcule donc via (la jacobienne par rapport aux quantités imaginaires est obtenu de façon similaire) :

$$\frac{\partial \Phi_{i,f}}{\partial \text{Re}(\mathbf{q}_j)} = \frac{\partial \Phi_{i,f}}{\partial q_{\text{tip},j}} \frac{\partial q_{\text{tip},j}}{\partial \text{Re}(\mathbf{q}_j)}. \quad (\text{G.1})$$

Le premier terme $\frac{\partial \Phi_{i,f}}{\partial q_{\text{tip},j}}$ est obtenu via une méthode de différence finie à travers l'interpolation linéaire. Le second terme est égal à (voir Équation (IV.17))

$$\frac{\partial q_{\text{tip},j}}{\partial \text{Re}(\mathbf{q}_j)} = \frac{\text{Re} \left(\sum_{k=0}^K \left[\sum_{p=1}^{N_{\text{mode}}} (\bar{q}_{k,p,j} + q_{k,p,j}^+) \right] \right)}{q_{\text{tip},j}}. \quad (\text{G.2})$$

Le terme $\frac{\partial \Phi_{i,f}}{\partial \text{Re}(\mathbf{q}_j)}$ est un tenseur d'ordre 3 ($\Phi_{i,f}$ est une matrice dont nous évaluons le gradient) dont il conviendra de modifier la forme pour effectuer les diverses opérations de calculs (transposition, multiplication matricielle, ...). Les forces non-linéaires sont évaluées à travers l'Équation (IV.29) et dépendent de la base de réduction et du terme λ . Par conséquent, ces termes non-linéaires peuvent également être calculés a priori du calcul et être interpolés linéairement. Le gradient de $\mathbf{Z}_{\text{nl},j}$ est donc évalué de façon similaire à (G.1). Au final la jacobienne du résidu (noté \mathbf{r}_j) est égal à

$$\left[\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \text{Re}(\mathbf{q}_j)} \quad \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \text{Re}(\mathbf{q}_{j,\text{b,L}})} \quad \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \text{Re}(\mathbf{q}_{j,\text{b,R}})} \right] = \Phi_{i,f}^T \mathbf{Z}_{1,j} \Phi_{i,f} + \left[\frac{\partial \mathbf{r}_{j,\text{bis}}}{\partial \text{Re}(\mathbf{q}_j)} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \right] \quad (\text{G.3})$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_{j,\text{bis}}}{\partial \text{Re}(\mathbf{q}_j)} &= \frac{\partial \Phi_{i,f}^\top}{\partial \text{Re}(\mathbf{q}_j)} \left(\mathbf{Z}_{r,j} \Phi_{i,f} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_j \\ \mathbf{q}_{j,b,L} \\ \mathbf{q}_{j,b,L} \end{bmatrix} + \mathbf{Z}_{nl,j} \mathbf{q}_j - \langle \mathbf{f}_{\text{ext},j}, \mathbf{e}^{i\omega t} \rangle \right) \\ &+ \Phi_{i,f}^\top \mathbf{Z}_{r,j} \frac{\partial \Phi_{i,f}}{\partial \text{Re}(\mathbf{q}_j)} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_j \\ \mathbf{q}_{j,b,L} \\ \mathbf{q}_{j,b,L} \end{bmatrix} + \Phi_{i,f}^\top \left(\frac{\partial \mathbf{Z}_{nl,j}}{\partial \text{Re}(\mathbf{q}_j)} \mathbf{q}_j + \mathbf{Z}_{nl,j} \right). \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

2 Jacobienne par rapport à la pulsation d'excitation

Dans le cas d'une continuation arc-length ou pseudo arc-length (voir Section I.7.3), la dérivée de (IV.25) par rapport à ω est nécessaire. Seule la matrice de rigidité réduite dépend de cette variable et nous avons donc

$$\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \omega} = \frac{\partial \mathbf{Z}_{r,j}}{\partial \omega} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_j \\ \mathbf{q}_{j,b,L} \\ \mathbf{q}_{j,b,R} \end{bmatrix}. \quad (\text{G.5})$$

Liste des publications personnelles

Revues internationales avec comité de lecture

- S. Quaegebeur, B. Chouvion, F. Thouverez, L. Berthe. « Energy transfer between nodal diameters of cyclic symmetric structures exhibiting polynomial nonlinearities : Cyclic condition and analysis ». *Mechanical System and Signal Processing* (2020), doi : [10.1016/j.ymssp.2019.106604](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.106604)
- S. Quaegebeur, B. Chouvion, F. Thouverez, « Model reduction of nonlinear cyclic structures based on their cyclic symmetric properties ». *Mechanical System and Signal Processing* (2020), doi : [10.1016/j.ymssp.2020.106970](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2020.106970)
- S. Quaegebeur, B. Chouvion, F. Thouverez, L. Berthe. « On a new nonlinear reduced-order model for capturing internal resonances in intentionally mistuned cyclic structures ». *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* (2020), doi : [10.1115/1.4049138](https://doi.org/10.1115/1.4049138)
- S. Quaegebeur, B. Chouvion, F. Thouverez. « Nonlinear cyclic reduction for the analysis of mistuned cyclic systems ». *Journal of Sound and Vibration* (2021), doi : [10.1016/j.jsv.2021.116002](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116002)
- S. Quaegebeur, B. Chouvion, F. Thouverez. « Impact of mistuned underplatforms dampers on the vibration of bladed-disks ». *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* (2021), doi : [10.1115/1.4051868](https://doi.org/10.1115/1.4051868)
- S. Quaegebeur, B. Chouvion, F. Thouverez. « Nonlinear dynamic analysis of 3D bladed-disks with frictional contact interfaces based on cyclic reduction strategies ». *International Journal of Solids and Structures* (2021), doi : [10.1016/j.ijsolstr.2021.111277](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.111277)

Colloques internationaux avec actes publiés

- S. Quaegebeur, B. Chouvion, F. Thouverez, L. Berthe. « On a new nonlinear reduced-order model for capturing internal resonances in intentionally mistuned cyclic structures ». *Proceedings of the ASME TurboExpo*, Virtual (Online), 2020.
- S. Quaegebeur, B. Chouvion, and F. Thouverez. « Impact of mistuned underplatforms dampers on the vibration of bladed-disks ». *Proceedings of the ASME TurboExpo*, Virtual (Online), 2021.

Colloques internationaux

- S. Quaegebeur, B. Chouvion, F. Thouverez. « Mistuning sensitivity analysis of a high-fidelity bladed-disk model undergoing friction nonlinearities ». *COMPdyn Eccomas*, Virtual (Online), 2021.

PRÉVISION DE LA RÉPONSE FORCÉE DE ROUES AUBAGÉES DÉSACCORDÉES EN PRÉSENCE DE NON-LINÉARITÉS DE FROTTEMENT

Résumé

Afin de certifier leurs moteurs, les industriels du milieu aéronautique doivent valider un ensemble de spécifications fournies par un cahier des charges précis. Dans cette thèse, le volet qui nous intéresse est celui de la vibration des systèmes mécaniques. Plus le niveau vibratoire de la structure est important, plus celle-ci est soumise à des contraintes importantes et donc plus elle s'use par fatigue. Afin de réduire ces niveaux, des systèmes frottants, non-linéaires, sont ajoutés au système mécanique et dissipent de l'énergie. Pour dimensionner correctement les moteurs, des outils numériques complexes et performants doivent être utilisés et ces derniers sont encore plus complexes en présence de non-linéarités.

Ces outils s'appuient sur les propriétés de symétrie cyclique venant de la géométrie particulière des roues aubagées. En revanche, l'utilisation de ces propriétés n'est pas complètement triviale à cause de la présence de désaccordage : de légères différences entre les secteurs de la structure, venant des tolérances de fabrication ou encore de l'usure, brisent ainsi la périodicité du système. Des méthodes ont pu être mises en place, en partenariat avec des chercheurs académiques, pour traiter de systèmes cycliques désaccordés non-linéaires. Afin de diminuer le temps de calcul elles emploient des méthodes de réduction telles que la sous-structuration ou encore le concept de mode non-linéaire.

Différents objectifs motivent ce travail de thèse. Le premier est de développer de nouvelles méthodologies de réduction analytiques. Ces stratégies performantes se basent sur le couplage non-linéaire entre le frottement et les diamètres nodaux du système à symétrie cyclique. Le second objectif est de statuer sur la faisabilité d'une méthode de réduction non-linéaire récemment développée, appelée CNCMS, pour étudier des amortisseurs sous plateformes. Comme cette stratégie se montre imprécise dans certaines situations, le dernier objectif consiste à développer une nouvelle procédure non-linéaire pour traiter de systèmes désaccordés. Celle-ci s'appuie sur un principe de sous-structuration et de modes complexes cycliques non-linéaires. Cette stratégie peut prendre en compte différentes excitations, du désaccordage aléatoire et intentionnel et est donc très polyvalente. De plus elle offre une réduction du temps de calcul supérieure à celle de la CNCMS.

A la suite de différentes validations, cette nouvelle méthodologie est employée pour traiter une multitude de problèmes mécaniques sur une structure éléments finis réaliste d'un compresseur. Un système non-linéaire à trois corps est tout d'abord examiné pour lequel les contacts pale/disque et pale/amortisseurs sont étudiés. Une étude de sensibilité sur le désaccordage aléatoire est ensuite menée pour déterminer l'influence du couplage entre les non-linéarités et le désaccordage sur le niveau vibratoire de la structure. Il a notamment pu être montré que l'augmentation du niveau de non-linéarité diminue l'influence du désaccordage sur le niveau vibratoire. Finalement une approche est proposée pour déterminer le schéma de désaccordage intentionnel optimal d'un système mécanique non-linéaire. En appliquant cette méthode sur un système non-linéaire avec des amortisseurs sous plateformes, six schémas optimaux ont pu être identifiés. Des analyses supplémentaires sur le frottement ou la sensibilité des schémas au désaccordage aléatoire permettent de restreindre davantage ce nombre.

Mots clés : symétrie cyclique, méthode de réduction, non-linéarité polynomiale, non-linéarité de frottement, désaccordage

FORCED RESPONSE OF MISTUNED CYCLIC STRUCTURES WITH FRICTION NONLINEARITIES

Abstract

Before developing their engines, the aeronautics industry must satisfy detailed certification specifications. In this thesis, the vibration criterion of the mechanical system is handled. As level of vibration increases, the stresses raises, and thus the structure is wearing down faster. To decrease the vibration, friction nonlinearities are added to the main structure and thus dissipate energy. To simulate the engine properly, reliable and efficient numerical tools must be employed. With the aid of academic research, numerical methodologies have been implemented. These strategies allow to tackle nonlinear cyclic systems with possible mistuning. To decrease the computation time of the simulations, reduced-order methods such as substructuring or nonlinear normal modes are employed. Different goals have been defined for this PhD study. First, new analytical reduction strategies for cyclic symmetric structures are developed. These efficient methods allow to determine the nonlinear coupling between the nodal diameters of the system and the friction nonlinearities. The second purpose is to investigate the performance of a recent methodology, named CNCMS, for cyclic systems with underplatform dampers. Given some limitations of this strategy, a new nonlinear reduced-order methodology is proposed to handle nonlinear mistuned structures. It relies on the substructuring concept and complex cyclic nonlinear normal modes. This strategy was shown to be most versatile (different excitations, random and intentional mistuning can be handled). Besides, it offers better reduction than the CNCMS.

After different validations, this strategy is employed on a realistic finite element bladed disk with underplatform dampers. A preliminary study is conducted to study the three body contact and evaluate the influence of the bladed-disk contact with respect to the underplatform dampers contact. Then a random mistuning sensitivity analysis is performed to determine the influence of the coupling between the nonlinearities and the mistuning on the vibration level of the structure. One main result of this analysis was to show that the higher the nonlinearity level, the less the mistuning affect the system.

Finally, an approach is proposed to determine the best intentional mistuned pattern of a nonlinear mechanical system. Employing this method enabled to identify six optimal mistuned patterns. Additional studies (flutter phenomena, sensitivity of the random mistuning) can be conducted to single out the best one.

Keywords: cyclic symmetry, reduce-order model, polynomial nonlinearity, friction nonlinearity, mistuning

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 mai 2016,

Vu la demande du directeur de thèse

Monsieur F. THOUVEREZ

et les rapports de

M. M. LEGRAND

Professeur - Université Mc Gill - Département de Génie Mécanique - 817 rue Sherbrooke Ouest
Montréal - Québec

et de

Mme E. CAPIEZ-LERNOUT

Maître de Conférences HDR - Université Gustave Eiffel - Cité Descartes - Bâtiment Lavoisier
Bureau C12 - 5 bd Descartes - 77454 Marne-la-Vallée cedex 2

Monsieur QUAEGEBEUR Samuel

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale Mécanique, Energétique, Génie Civil et Acoustique

Fait à Ecully, le 16 novembre 2021

P/l'administrateur provisoire de l'ECL
Le directeur des Formations



Vial
Grégory VIAL