



HAL
open science

Propagation d'ondes de cisaillement cohérentes dans un matériau multi-diffusant à résonances dipolaires locales

Alverède Simon

► **To cite this version:**

Alverède Simon. Propagation d'ondes de cisaillement cohérentes dans un matériau multi-diffusant à résonances dipolaires locales. Acoustique [physics.class-ph]. Sorbonne Université, 2020. Français. NNT : 2020SORUS097 . tel-03585733

HAL Id: tel-03585733

<https://theses.hal.science/tel-03585733>

Submitted on 23 Feb 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Sorbonne Université

Ecole doctorale 391 : Sciences Mécaniques, Acoustique, Electronique et Robotique de Paris

Thèse de Doctorat

Spécialité Acoustique Physique

Propagation d'ondes de cisaillement cohérentes dans un matériau multi-diffusant à résonances dipolaires locales

Alverède Simon

Sous la direction de Régis Wunenburger, Professeur,
Tony Valier-Brasier, Maître de conférences

à l'Institut Jean le Rond d'Alembert, Sorbonne Université, CNRS, UMR 7190.

Soutenue le 27 novembre 2020 à Paris, devant le jury composé de :

Philippe Roux	Directeur de recherche CNRS	Rapporteur
Valentin Leroy	Directeur de recherche CNRS	Rapporteur
Francine Luppé	Professeure à l'Université Le Havre Normandie	Examinatrice
Arnaud Tourin	Professeur à l'ESPCI Paris	Examinateur
Thomas Brunet	Maître de conférences (HDR) à l'Université de Bordeaux	Examinateur
Jean-Louis Thomas	Directeur de recherche CNRS	Examinateur
Régis Wunenburger	Professeur à Sorbonne Université	Directeur de thèse
Tony Valier-Brasier	Maître de conférences à Sorbonne Université	Co-encadrant

Résumé

L'objet de la thèse est l'étude de la propagation d'ondes de cisaillement cohérentes dans un milieu élastique contenant une dispersion de billes denses. L'originalité de ce système est l'existence des résonances de corps rigide sub-longueur d'onde des diffuseurs, en translation et en rotation, qui s'accompagnent d'une importante diffusion dipolaire d'ondes transverses. Un modèle issu de la mécanique des fluides di-phasiques est adapté au cas d'une matrice solide pour décrire la propagation d'ondes transverses et longitudinales dans le système étudié. Les résultats sont en accord quantitatif avec des modèles de diffusion multiple sous l'*Independent Scattering Approximation* en régime grande longueur d'onde. D'autre part, une méthode de mesure d'ondes élastiques originale, basée sur l'acquisition d'interférences de Fabry-Pérot dans un milieu multi-couche, est développée afin de sonder des échantillons fins et atténuants. Grâce à ce dispositif, les coefficients de réflexion et de transmission d'échantillons, dans un premier temps de matériaux homogènes viscoélastiques, puis de résine époxy chargée de billes denses, sont évalués de manière absolue. La vitesse et l'atténuation effective de ces matériaux sont obtenues grâce à la résolution d'un problème inverse. Ces paramètres présentent les signatures des résonances de corps rigide des particules qui se caractérisent par une importante dispersion de la vitesse effective couplée à un intense pic d'atténuation. Le dispositif permet aussi de déterminer la masse volumique effective de la dispersion, où seul l'effet de la résonance en translation est observée. Enfin, les influences de la concentration et de la microstructure sont analysées afin d'optimiser les paramètres effectifs de ces matériaux.

Abstract

The subject of the thesis is the study of the propagation of coherent shear waves in an elastic medium containing a dense beads dispersion. This system exhibits subwavelength rigid body resonances of the diffusers, in translation and in rotation, which are accompanied by a large dipole scattering of transverse waves. A model derived from the diphasic fluids mechanics is suitable for the case of a solid matrix to describe the propagation of transverse and longitudinal waves in this system. The results are in quantitative agreement with multiple scattering models under the Independent Scattering Approximation in the long wavelength regime. Next, an original elastic wave measurement method is developed in order to probe thin and attenuating materials and is based on the acquisition of Fabry-Perot interferences in a multi-layer medium. Thanks to this device, the reflection and transmission coefficients of homogeneous viscoelastic samples, and then of epoxy resin loaded with dense beads, are evaluated. The effective velocity and attenuation of the waves propagating in these materials are obtained by solving an optimisation problem. The result present the signatures of the particles rigid body resonances which are characterized by a large dispersion of the effective velocity coupled with a strong attenuation peak. The device also permits to determine the effective density of the bead dispersions, where only the effect of translational resonance is observed. Finally, the influences of the volume fraction and the microstructure are analyzed in order to optimize the effective parameters of these materials.

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mes encadrants, Régis Wunenbuser et Tony Valier-Brasier, mes deux "papas académiques", de m'avoir fait confiance au cours de ces trois années de thèse et de m'avoir tant enseigné. Je pense que les travaux de ce manuscrit représentent bien la synergie qu'il y a eu entre nous, aussi bien sur l'aspect théorique que expérimental. Ils m'ont appris à avoir confiance en mes résultats et à toujours aller au delà des acquis. Je considère qu'ils ont pleinement contribué à former le jeune chercheur que je suis aujourd'hui. Pour tout cela, je leur exprime ma profonde gratitude.

Je tiens ensuite à remercier vivement chaque membre du jury et tout d'abord Valentin Leroy et Philippe Roux d'avoir consciencieusement relu ce manuscrit. Leurs rapports complets m'ont donné un point de vue différent et une vision plus large du sujet traité ici. Je remercie ensuite Arnaud Tourin d'avoir accepté d'être le président du jury, Jean-Louis Thomas d'avoir assuré mon comité de suivi, Thomas Brunet de s'être déplacé depuis Bordeaux en période de confinement et Francine Luppé de s'être donné la peine de noter les coquilles encore présentes dans le manuscrit. Je remercie chaleureusement chacun d'entre eux pour leurs questions pertinentes et leurs compliments, qui m'ont beaucoup touché, à la suite de mon exposé.

Je voudrais aussi remercier Jean-Marc Conoir qui s'est toujours rendu disponible pour parler théorie. J'estime que je lui dois beaucoup concernant ma compréhension des différents modèles de diffusion multiple. Pour toutes nos discussions, je tiens à lui présenter mes salutations les plus sincères.

J'aimerais également remercier Jean-Marie Citerne et Dominique Busquet de l'équipe de Saint-Cyr pour leur appui sur l'usinage du dispositif de mesure d'ondes ainsi que sur le dispositif de fabrication des échantillons.

Il y a par ailleurs toutes les autres personnes qui ont contribué de près ou de loin à cette thèse. Je pense tout d'abord à l'ensemble du corps enseignant que j'ai rencontré au long de mes huit années à Sorbonne Université pour la qualité de leurs cours. J'aimerais aussi remercier les membres de l'Institut Jean Le Rond d'Alembert, notamment tous les doctorants que j'ai pu y rencontrer, qui ont rendu cette expérience si agréable. J'aimerais également saluer Pierre-Yves Lagrée et Simona Otarasanu pour qui le bien être des doctorants est une question primordiale.

J'aimerais aussi remercier tous mes proches que j'embrasse : mes amis, a.k.a. mes "frateys" qui se reconnaîtront, ma famille en France et en Argentine, et en particulier mes parents et ma soeur qui ont toujours été présents à mes côtés. Je finirai par remercier Ophélie Schlumberger, avec qui je partage ma vie depuis maintenant cinq ans, pour son soutien sans faille. Sans elle, l'accomplissement de cette thèse n'aurait certainement pas été le même, et pour cela, je lui présente de nouveau l'expression des sentiments que je lui porte.

J'ai enfin une pensée pour Henry Fleckinger, mon professeur de physique chimie en seconde et première au lycée Condorcet, qui m'a initialement transmis sa passion pour les sciences.

Table des matières

Résumé	1
Remerciements	3
Introduction générale	9
1 Diffusion d’ondes élastiques par des sphères dans une matrice solide élastique	15
1.1 Modélisation de la diffusion par une sphère élastique	16
1.1.1 Développement en harmoniques sphériques	17
1.1.2 Onde incidente longitudinale	18
1.1.2.1 Champs de déplacement et vecteurs contraintes	18
1.1.2.2 Application des conditions aux frontières	20
1.1.3 Onde incidente transverse	21
1.1.3.1 Champ de déplacement et vecteurs contraintes	21
1.1.3.2 Application des conditions aux frontières	23
1.1.4 Résonances de corps rigide	25
1.1.4.1 Fréquence de résonance	25
1.1.4.2 Déplacement de corps rigide	27
1.1.5 Section efficace de diffusion	28
1.1.5.1 Onde longitudinale incidente	28
1.1.5.2 Onde transverse incidente	30
1.2 Diffusion multiple	34
1.2.1 Equations générales de la diffusion multiple pour des champs scalaire	34
1.2.2 Independent scattering approximation	35
1.2.3 Quasicrystalline approximation	36
1.2.4 Prise en compte des conversions	38
1.2.5 Diffusion multiple d’ondes transverses	39
1.2.6 Expériences	40
1.3 Conclusion	41
2 Modélisation Diphasique de la Propagation d’Ondes Elastiques	43
2.1 Equations moyennes	44
2.1.1 Moyennage d’ensemble	44
2.1.2 Equations de conservation	46
2.1.3 Conservation de la quantité de mouvement	47

2.1.4	Fermeture de la hiérarchie d'équations	49
2.1.5	Etude de la symétrie des termes de couplage	49
2.2	Calcul des termes d'interaction interphasique	50
2.2.1	Force d'interaction interphasique	50
2.2.1.1	Modélisation acoustique	50
2.2.1.2	Comparaison avec une approche mécanique adaptée aux particules rigides	51
2.2.2	Moment d'interaction interphasique	52
2.2.2.1	Modélisation acoustique	52
2.2.2.2	Comparaison avec une approche mécanique	53
2.2.3	Calcul du Stresslet	53
2.2.3.1	Onde longitudinale incidente	54
2.2.3.2	Onde transverse incidente	55
2.3	Relation de dispersion	56
2.3.1	Onde cohérente longitudinale	57
2.3.1.1	Resolution de la relation de dispersion	57
2.3.1.2	Nombre d'onde en régime basse fréquence	58
2.3.1.3	Comparaison avec l'ISA	59
2.3.2	Onde cohérente transverse	60
2.3.2.1	Résolution de la relation de dispersion	60
2.3.2.2	Comparaison avec l'ISA	61
2.3.3	Prise en compte de l'élasticité des particules	62
2.3.3.1	Influence de l'élasticité sur les termes de couplage	62
2.3.3.2	Influence de l'élasticité sur les nombres d'ondes effectifs	64
2.4	Conclusion	65
3	Méthode d'interférométrie ultrasonore au contact	67
3.1	Principe de l'interferométrie "sandwich"	69
3.1.1	Dispositif expérimental	69
3.1.2	Domaine de validité de la méthode	72
3.1.3	Echantillons test	74
3.1.4	Acquisition des signaux	74
3.1.5	Calcul des coefficients de réflexion et de transmission	75
3.2	Extraction des modules élastiques des échantillons	77
3.2.1	Modélisation d'un milieu multi-couches	77
3.2.2	Résolution du problème inverse	79
3.2.2.1	Identification des solutions	79
3.2.2.2	Détermination par temps de vol	81
3.2.2.3	Détermination à l'aide de plusieurs échantillons d'épaisseurs différentes	82
3.2.3	Incertitudes sur les paramètres extraits	83
3.2.4	Résultats	83
3.3	Limitations du dispositif	84
3.4	Caractérisation de matériaux viscoélastiques homogènes	86
3.4.1	PMMA	86

TABLE DES MATIÈRES

3.4.2	Rhéologie de la résine d'époxy Inclupox HTA	87
3.4.2.1	Rhéologie en cisaillement	87
3.4.2.2	Rhéologie en compression	88
3.5	Conclusion	88
4	Conception et optimisation de matériaux à résonances dipolaires locales	91
4.1	Fabrication des échantillons	93
4.1.1	Choix des matériaux utilisés	93
4.1.2	Protocole de fabrication des métamatériaux	95
4.1.2.1	Insertion des billes dans l'époxy	95
4.1.2.2	Conception couche par couche	97
4.1.2.3	Polissage de l'échantillon	98
4.1.3	Optimisation de l'isotropie des échantillons	98
4.1.3.1	Calcul de l'épaisseur optimale des couches chargées en billes	98
4.1.3.2	Rayon d'exclusion	101
4.1.4	Fraction volumique effective	101
4.1.5	Echantillons fabriqués	102
4.2	Mise en évidence des résonances dipolaires avec la mesure au sandwich	104
4.2.1	Influence des diffuseurs sur les signaux temporels	104
4.2.1.1	Echantillons de type A	104
4.2.1.2	Echantillons de type B	105
4.2.2	Influence des diffuseurs sur les coefficients de réflexion et de transmission	107
4.2.2.1	Echantillons de type A	107
4.2.2.2	Echantillons de type B	109
4.3	Extraction des paramètres effectifs	113
4.3.1	Modèle d'interférences multi-couches	113
4.3.1.1	Modèle à 7 couches	113
4.3.1.2	Modèle 4 couches	115
4.3.2	Sensibilité des coefficients de réflexion et de transmission	116
4.3.3	Vitesse et atténuation effectives	118
4.3.3.1	Méthode d'identification de la branche de solution valide	118
4.3.3.2	Influence du nombre de plans de billes	119
4.3.4	Masse volumique effective	120
4.3.4.1	Influence du nombre de plans de billes	120
4.3.4.2	Equivalence des modèles 4 couches et 7 couches	121
4.3.4.3	Sensibilité aux épaisseurs	122
4.4	Module de cisaillement effectif	122
4.5	Conclusion	123
5	Paramètres effectifs et influence de la microstructure	125
5.1	Vitesses et atténuations des ondes transverses	126
5.1.1	Influence de la concentration de diffuseurs	126
5.1.1.1	Echantillons faiblement concentrés	126
5.1.1.2	Echantillons de concentration $\phi_v^{th} = 10\%$	128

5.1.1.3	Précédente réalisation de propagation bi-modale	130
5.1.2	Variation de la signature des résonances de corps rigide selon la concentration .	131
5.1.3	Libre parcours moyen élastique	132
5.1.4	Dispersion de billes de plomb	133
5.1.5	Influence du rayon d'exclusion	134
5.1.5.1	Rayon d'exclusion faible et modéré	134
5.1.5.2	Rayon d'exclusion important $b = 5R$	136
5.2	Masse volumique effective du matériau chargé en billes	137
5.2.1	Influence de la concentration de diffuseurs	137
5.2.2	Dispersion de billes de plomb	139
5.2.3	Influence du rayon d'exclusion	140
5.3	Paramètres effectifs des ondes longitudinales	141
5.3.1	Influence de la concentration des diffuseurs	142
5.3.2	Dispersion de billes de plomb	144
5.3.3	Influence du rayon d'exclusion	144
5.4	Conclusion	146
	Conclusion générale	149
	Références	153

Introduction générale

Dans un milieu hétérogène, une onde incidente interagissant avec un obstacle donne lieu à différents phénomènes : réflexion et transmission à l'interface entre la matrice et l'obstacle, diffraction par les bords, génération d'ondes de surfaces rayonnant des ondes de volume. Les ondes émises dans la matrice depuis l'obstacle par ces différentes contributions sont appelées des ondes diffusées. Ce phénomène existe avec différents types d'ondes, élastiques ou électromagnétiques. Lorsque le milieu contient plusieurs inhomogénéités, les ondes émises depuis un obstacle sont de nouveau diffusées par un autre et ainsi de suite : on parle alors de diffusion multiple. Ce phénomène se rencontre dans différents milieux tels que les matériaux poreux [1], les solides polycristallins [2] ou composites [3]. La diffusion multiple des ondes est aujourd'hui exploitée dans de nombreux domaines, par exemple le domaine de la pêche pour détecter et dénombrer des bancs de poisson [4], en médecine pour améliorer l'imagerie des micro faisceaux sanguins cérébraux [5]. Elle est aussi présente dans la nature et peut avoir lieu à travers des forêts d'arbres [6].

Le champ de déplacement local dans un milieu hétérogène dépend de deux contributions. La première est celle de l'onde dite balistique qui correspond à la partie de l'onde incidente n'ayant pas été diffusée. La deuxième est celle des ondes diffusées par les obstacles sous l'action de l'onde incidente et des autres ondes diffusées, et dépend alors de la position de chaque obstacle. Dans le cas d'une dispersion aléatoire de diffuseurs, cette contribution change à chaque réalisation d'un même désordre. L'onde cohérente correspond à la composante de l'onde multi-diffusée qui reste identique selon plusieurs réalisations du désordre [7]. Un des principaux objectifs des travaux portant sur la diffusion multiple est de caractériser cette onde cohérente qui est considérée comme se propageant dans un milieu effectif homogène, dont les paramètres effectifs dépendent de la fréquence. Cette onde décroît exponentiellement sur une longueur caractéristique : le libre parcours moyen élastique. Pour des milieux fortement multi-diffusants et des distances de propagation grandes devant le libre parcours moyen élastique, l'intensité de l'onde répond à une équation de transport [8, 9]. Dans le régime propagatif, aussi nommé balistique, les ondes cohérentes sont étudiées théoriquement par plusieurs approches. Une première modélisation classique se base sur la théorie de la diffusion multiple [10]. Il s'agit analytiquement de poser le champ exact dans le milieu hétérogène puis de procéder à une moyenne sur toutes les configurations possibles des diffuseurs. Cette méthode présente l'avantage d'être valide à chaque fréquence et quel que soit le type de diffuseur. Elle mène à une hiérarchie infinie d'équations qui nécessite alors d'être fermée. Cette fermeture se fait classiquement en posant certaines hypothèses. Par exemple, les interactions entre diffuseurs peuvent être négligées par l' "Independent Scattering Approximation" lorsque la concentration d'obstacles est faible [11]. A une concentration supérieure, les interactions entre deux diffuseurs peuvent être prises en compte en introduisant des fonctions de corrélation, comme la "hole correction" par exemple qui interdit le recouvrement entre deux obstacles

[12]. Ces différentes hypothèses sont appliquées selon les corrélations spatiales entre les diffuseurs qui ne sont pas toujours connues. D'autres approches, nommées auto-consistantes, proposent alors de réduire le problème de l'interaction entre plusieurs diffuseurs à l'étude d'un unique obstacle directement dans un milieu effectif [13]. Des versions plus complexes de cette méthode existent avec l'ajout d'une couche du milieu de propagation pure entre le milieu effectif et le diffuseur [14] ou en déterminant les paramètres du milieu effectif qui minimisent les ondes diffusées par l'obstacle dans ce milieu effectif [15]. Ces approches permettent d'obtenir directement les paramètres effectifs du milieu de manière itérative, mais ne proposent pas de formule analytique simple. *A contrario*, une autre méthode, se basant sur la théorie des milieux multiphasiques couplés [16] et développée en régime grande longueur d'onde, permet d'obtenir une relation de dispersion explicite. Elle présente l'avantage que les diverses interactions entre la matrice et les diffuseurs peuvent être considérées, tels des transferts de chaleur par exemple [17]. Ce type de modélisation a été étudié pour différents types de diffuseurs sphériques rigides, élastiques ou liquides pour des milieux dilués [18] ou à plus forte concentration grâce à une approche auto-consistante [19]. Par ailleurs, quelque soit le modèle utilisé, la plupart de ces modélisations concerne très souvent des ondes longitudinales. Seuls quelques modèles étudient les ondes transverses. Par exemple, un modèle de diffusion multiple a été développé initialement pour des ondes électromagnétiques transverses mais n'a pas été adapté au cas élastique [20, 21]. Une approche auto-consistante a été développée par Kanaun et Levin pour des ondes de cisaillement dans les solides mais plusieurs imprécisions rendent l'implémentation de ce modèle difficile [22]. L'investigation d'un modèle de propagation d'ondes de cisaillement dans les solides multi-diffusant apparaît comme nécessaire.

Les différents modèles de diffusion multiple sont souvent comparés avec des mesures expérimentales. En particulier, les milieux fluides contenant des diffuseurs sphériques ont reçu beaucoup d'attention. Ces systèmes présentent l'avantage de disposer de diffuseurs à géométrie simple, facilement modélisables, ainsi que d'une matrice où seules les ondes de compression peuvent se propager. Plusieurs types de particules ont été étudiés, gazeuses, liquides ou solides, dans l'optique d'évaluer des paramètres effectifs ou de valider des modèles de diffusion. Par exemple, la vitesse et l'atténuation effective d'ondes de compressions ont été obtenues pour des dispersions de bulles dans un gel aqueux [23]. L'atténuation et la vitesse effectives présentent respectivement un pic et une dispersion à la résonance monopolaire de Minnaert de bulles [24] et affichent un bon accord avec le modèle de diffusion multiple de Foldy à faible concentration [11]. Lorsque le nombre de bulles augmente les interactions entre diffuseurs ont pour effet de modifier la fréquence à laquelle la transmission est minimale, *i.e.* la fréquence à laquelle l'atténuation effective devient maximale [25]. Des observations similaires ont été obtenues pour des émulsions de gouttes d'huiles dans un gel aqueux où des résonances de Mie dues aux différents modes de diffusion engendrent des pics d'atténuations et des variations de vitesse de phase de l'onde cohérente [26]. Dans ce système, il a été montré que la polydispersité en taille des diffuseurs réduit le nombre de modes de résonances observables [27]. Enfin, les effets de résonances sur les paramètres effectifs cités précédemment ont aussi été observés avec des diffuseurs solides, tels des billes de polystyrène dans une solution saline [28], des billes de verres dans un gel aqueux [29], des particules à coques creuses dans une solution aqueuse [30]. Comparés aux matrices fluides, les matériaux composites à matrice élastique ont reçu peu d'attention. Dans les années 1980, Kinra a étudié la propagation d'ondes cohérentes de compression dans une résine élastique contenant des billes denses en métal [31, 32] ou des billes de verre [33, 34]. Plus récemment, Duranteau *et al.* ont remis à l'ordre du jour ce type de composite avec

des billes de carbure de tungstène [35]. Cependant, la diffusion multiple d'ondes de cisaillement dans ces milieux solides n'a que très peu été expérimentée. Kinra *et al.* ont procédé à quelques mesures de vitesses d'ondes de cisaillement dans des dispersions de billes de verre à basses fréquences par une méthode en immersion à l'angle critique et une lecture du temps de vol de trains d'onde [33, 34]. Plus récemment, des mesures de vitesse et d'atténuation avec un système et une méthode similaires ont été obtenues dans un domaine de fréquence plus élevé où les ondes de cisaillement sont peu dispersives [36]. La propagation des ondes de cisaillement en régime résonant reste à investiguer expérimentalement.

Plusieurs études récentes citées ci-dessus s'inscrivent dans la volonté d'obtenir des paramètres effectifs non ordinaires. En effet, les travaux théoriques de Veselago [37] et Pendry [38] ont montré qu'une réfraction négative d'ondes électromagnétiques peut être atteinte si les deux paramètres régissant la propagation de ces ondes dans un milieu (la constante diélectrique et la perméabilité magnétique) sont négatifs. Une stratégie proposée pour atteindre de tels paramètres négatifs consiste à exploiter des matériaux dans lesquels des résonances sub-longueur d'ondes de diffuseurs ont lieu. Ces matériaux sont appelés métamatériaux localement résonant (LRM en anglais pour "locally resonant metamaterials"). Le concept de LRM découle directement des travaux de Liu *et al.* qui consiste en l'étude d'un réseau périodique de particules d'acier à coque en caoutchouc dans une matrice d'époxy [39]. Les ondes acoustiques s'y propageant présentent une bande d'arrêt dans le domaine des basses fréquences, imputable à la résonance sub-longueur d'onde des particules. Des approches théoriques basées sur l'étude de systèmes masse-ressort [40] ou sur l'établissement des contraintes et déformations moyennes appliquées sur une sphère enrobée [41] ont réussi à démontrer que le déplacement de corps rigide du coeur lourd rend négative la masse volumique effective du milieu étudié à la résonance. Ces travaux ont alors ouvert la voie à de nombreuses autres études qui tentent d'obtenir des effets originaux. Par exemple, pour des matériaux composites à matrice fluide, des plans de bulles proches d'une interface permettent d'améliorer ou de réduire sélectivement la transmission des ondes [42] grâce aux résonances de Minnaert des bulles [24]. De même, des dispersions de billes de silicone poreuses présentent des indices de réfraction négatifs à partir d'une certaine concentration grâce à leurs multiples résonances de Mie [43]. Pour les ondes élastiques dans les solides, l'attention s'est beaucoup portée ces dernières années sur la propagation d'ondes guidées dans des "métasurfaces", avec entre autre le contrôle du mode A_0 des ondes de Lamb grâce à une dispersion de tiges [44], ou encore l'isolement d'ondes sismiques grâce à une forêt d'arbres de tailles variables [45] ou une dispersion d'inclusions cylindriques disposées directement sous la surface [46]. Concernant la propagation d'ondes de volumes dans des matériaux solides, les travaux réalisés sont bien souvent numériques. Des études proposent par exemple des coques creuses ouvertes à un pôle dans une matrice molle [47], des cylindres de caoutchouc remplis d'eau dans une mousse [48], des coeurs denses reliés à la matrice de propagation par des micro-poutres [49], des sphères denses avec un enrobage en caoutchouc ouvert dans une matrice élastique [50]. Le faible nombre d'études expérimentales de la propagation d'ondes de volume dans les LRM solides peut alors s'expliquer par la difficulté de fabriquer de tels objets. Les résonateurs doivent être miniaturisés, ce qui est souvent complexe [51, 52] puis injectés dans des matrices solides. Il est donc nécessaire de se tourner vers des matériaux à géométrie plus simple.

Les échantillons de billes rigides denses dans une matrice élastique proposés par Kinra *et al.* [31, 32] s'inscrivent parfaitement dans ce contexte. Ce système a été étudié analytiquement en dynamique par

Moon et Mow [53], où il a été montré que sous l'action d'une onde incidente, les particules présentent une résonance associée à un mouvement de translation. D'une manière analogue aux billes enrobées de Liu *et al.* [39], ces diffuseurs présentent une résonance de déplacement de corps rigide dipolaire. Cette résonance existe pour la plupart des diffuseurs même si les inclusions ne sont pas rigides, du moment qu'il y a un contraste de densité entre la particule et la matrice [18, 35], et se caractérise par un fort rayonnement d'ondes transverses. L'influence de cette résonance sur la propagation d'ondes longitudinales cohérentes a été clairement identifiée par une dispersion de la vitesse de phase effective couplée à un pic d'atténuation, avec et sans périodicité apparente des billes [54, 55]. Ces effets sont de nouveau similaires à ceux obtenus lors de la propagation d'ondes cohérentes dans des dispersions de bulles, gouttes ou billes élastiques dans des matrices liquides. Plus récemment, une étude expérimentale menée par Duranteau *et al.* [35] comparée avec un modèle de diffusion multiple dans des milieux solides [56] a montré l'importance des conversions d'ondes sur la propagation des ondes cohérentes longitudinales. La diffusion d'une onde transverse par une particule rigide a aussi été étudiée et une résonance de corps rigide supplémentaire en rotation a été théoriquement identifiée par Valier-Brasier et Conoir [57]. Dans ce contexte, l'objectif de la thèse est de mesurer des ondes de cisaillement cohérentes dans de tels matériaux et d'observer l'influence des résonances de corps rigides en translation et en rotation sur ces ondes.

Si la caractérisation des matériaux par des ondes de compression est aujourd'hui bien maîtrisée, celle par des ondes de cisaillement présente encore plusieurs enjeux. Tout d'abord, la méthode classique de transmission d'ondes en immersion au delà de l'angle critique [58], où l'échantillon n'est sondé qu'en cisaillement, est difficilement applicable dans le cas de matériaux dispersifs car l'angle critique dépend de la fréquence. Dans le cas de mesures au contact, l'ajout d'un matériau couplant visqueux pour coupler les capteurs et les échantillons engendre un biais des résultats [59]. De plus, obtenir un couplage reproductible et stable reste compliqué. Les vitesses et atténuations des ondes se propageant dans un matériau inconnu sont généralement extraites en analysant deux échos successifs [60]. Le critère de non recouvrement de ces échos successifs impose cependant une épaisseur minimale des échantillons ce qui est problématique dans le cas de matériaux atténuants. Dans l'optique d'évaluer les paramètres effectifs de matériaux dispersifs en cisaillement, il est alors nécessaire de mettre en place une méthode de mesure précise et adaptée à la propagation dispersive. Une solution proposée est alors d'analyser les interférences d'impulsions larges bandes dans un milieu multi-couche où l'échantillon inconnu est placé entre deux lignes à retard [61]. Cette méthode nécessite l'application d'un modèle de propagation où la rhéologie et les épaisseurs des différents éléments, dont celles des couches de couplant entre les lignes à retard et l'échantillon, doivent être contrôlées.

L'objectif de ce manuscrit est d'étudier la propagation des ondes de cisaillement dans une matrice visco-élastique contenant une répartition aléatoire de billes denses. Pour cela, le travail réalisé se divise en deux parties : théorique avec la modélisation de la propagation d'ondes élastiques dans ce système par une approche multi-phasique, et expérimentale avec le développement et l'utilisation d'un dispositif original de mesure d'ondes de cisaillement.

Le chapitre 1 développe les équations de la diffusion d'une onde plane longitudinale ou transverse par une unique sphère. Il s'agit d'une modélisation générale où les différents champs en présence sont développés sur les harmoniques sphériques. Les résonances de corps rigide sont mises en évidence et

les sections efficaces de diffusion sont présentées. La deuxième partie de ce chapitre présente succinctement des modèles de diffusion multiple couramment utilisés dans la littérature ainsi que des résultats expérimentaux de Kinra *et al.* [31] et Duranteau *et al.* [35]. Le chapitre 2 propose ensuite un modèle de propagation d'ondes élastiques, basé sur les équations de la mécanique des fluides diphasiques [16, 19]. Il s'agit entre autre d'établir les équations de conservation moyennes dans la phase de la matrice et dans la phase des particules. L'étude des différents termes de couplage entre les deux phases permet de clairement identifier l'influence des différents modes de résonance. Finalement, le modèle obtenu est en bon accord quantitatif avec des modèles de diffusion multiple en régime grande longueur d'onde, pour des ondes longitudinales et transverses.

La seconde partie du manuscrit propose une étude expérimentale de la propagation des ondes de cisaillement. En premier lieu, le chapitre 3 présente une méthode expérimentale développée spécialement pour mesurer des ondes de cisaillement dans des milieux visco-élastiques [62, 63]. Le dispositif mis en place, communément appelé le sandwich, propose une mesure où l'échantillon à sonder est placé entre deux épaisses lignes à retard et où l'épaisseur et la rhéologie du couplant appliqué sont connues. Une attention particulière est portée au couplage entre les différents éléments. Les paramètres mécaniques sont ensuite extraits par la résolution d'un problème inverse en modélisant des interférences de Fabry-Pérot dans ce système. Le chapitre 4 présente la fabrication des échantillons de matériaux composites localement résonants qui est accomplie par dépôt successifs de couches d'époxy chargées en billes micrométriques. Ce mode de conception relève plusieurs enjeux, notamment le contrôle de la position des billes et l'homogénéité de la distribution aléatoire. Ce chapitre justifie aussi l'utilisation et l'efficacité du dispositif sandwich pour extraire les paramètres effectifs des ondes de cisaillement cohérentes se propageant dans les échantillons. Enfin, le chapitre 5 propose différents résultats expérimentaux sur les ondes transmises et les ondes réfléchies par la dispersion de billes ainsi que des comparaisons avec des modèles de propagation d'onde cohérentes. Enfin, les influences respectives de la concentration et de la microstructure tels le rayon d'exclusion ou le matériau constituant des billes sont analysées.

Chapitre 1

Diffusion d'ondes élastiques par des sphères dans une matrice solide élastique

La diffusion d'ondes, élastiques ou électromagnétiques, est un phénomène se produisant lorsque un champ incident interagit avec un obstacle. Sous l'effet de ce champ, l'obstacle crée un champ diffusé se propageant depuis cet obstacle en s'éloignant. Ce phénomène peut avoir lieu dans différents types de milieux hétérogène tels que des matériaux poreux [1], polycristallins [2], composites [3] ou sur des surfaces rugueuses [64]. Plusieurs régimes de diffusion existent selon le rapport de la taille caractéristique de l'obstacle et de la longueur d'onde du champ incident. Tout d'abord, le régime de diffusion géométrique [65] a lieu lorsque la longueur d'onde incidente est petite devant la taille de l'obstacle. Dans ce régime, le système peut être évalué de façon géométrique par tracé de rayon. Lorsque la longueur d'onde incidente est comparable à celle de l'obstacle, le régime devient résonant [66]. Le phénomène de diffraction de l'onde incidente domine, ce qui augmente considérablement l'efficacité de la diffusion. Pour finir, lorsque la longueur d'onde incidente est grande devant celle de l'obstacle, le régime est celui de diffusion de Rayleigh [67]. Les directions de diffusion privilégiées ne varient pas avec la fréquence et la puissance des ondes diffusées peut être exprimée selon une série de puissances positives du nombre d'onde incident [68, 69].

Ce manuscrit de thèse a comme objet d'étude des milieux multi-diffusants solides comportant une répartition aléatoire de sphères denses. Il est alors utile dans un premier temps d'appréhender la diffusion théorique d'une onde incidente longitudinale ou transverse dans une matrice élastique isotrope par une unique sphère élastique isotrope. Une modélisation générale, où les champs de l'onde incidente et des ondes diffusées par la sphère sont explicitement posés, est proposée. La géométrie sphérique du problème permet de développer les différents champs en présence sur les harmoniques sphériques. Les coefficients de chaque mode des ondes diffusées sont ensuite déterminés par les conditions à l'interface entre la matrice et la particule. L'analyse des coefficients de diffusion permet de mettre en lumière des résonances de corps rigide des particules sub-longueur d'onde, lorsque leur contraste de densité avec la matrice de propagation est important. Contrairement à des systèmes où les contrastes entre les différents éléments sont peu importants, et étudiés dans régime de Rayleigh classique, les résonances présentes dans ce milieu ont une influence significative sur les ondes diffusées et leurs directions privi-

légères. La diffusion par une répartition aléatoire de ces mêmes diffuseurs est ensuite présentée grâce à la théorie de la diffusion multiple. Ce système est étudié sous différentes hypothèses qui permettent de simplifier le problème en négligeant certaines interactions entre les diffuseurs. Pour finir, quelques résultats expérimentaux dans ce type de système sont présentés.

1.1 Modélisation de la diffusion par une sphère élastique

La diffusion d'une onde incidente sur une sphère de rayon R dans une matrice élastique est étudiée. Il s'agit ici d'introduire les équations générales de la propagation des ondes en présence dans les différents milieux isotropes viscoélastiques. Dans la suite du document, la convention temporelle utilisée est $e^{-j\omega t}$, ω étant la pulsation. Les coordonnées sphériques utilisées (O , \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ , \mathbf{e}_φ) sont illustrés sur la figure 1.1. Ce repère est défini telles que les coordonnées x , y et z du repère cartésien sont exprimées par les relations

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \quad (1.1)$$

et les vecteurs de bases sont

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y. \end{cases} \quad (1.2)$$

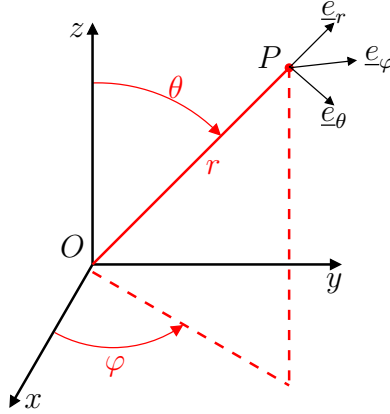


Figure 1.1 – Schéma des coordonnées sphériques.

Dans le cas général, le champ de déplacement est recherché en utilisant la décomposition de Helmholtz [70] et les potentiels scalaire de Debye en coordonnées sphériques [71]

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi_L + \nabla \times \nabla \times (r \Phi_T \mathbf{e}_r) + \nabla \times \nabla \times \nabla \times \left(\frac{r}{k_T} \Phi_S \mathbf{e}_r \right), \quad (1.3)$$

où Φ_L , Φ_T et Φ_S sont des potentiels scalaires, solutions des équations de Helmholtz

$$\begin{cases} \Delta \Phi_L + k_L^2 \Phi_L = 0, \\ \Delta \Phi_T + k_T^2 \Phi_T = 0, \\ \Delta \Phi_S + k_T^2 \Phi_S = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

1.1 Modélisation de la diffusion par une sphère élastique

où

$$\begin{cases} k_L = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}, \\ k_T = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}, \end{cases} \quad (1.5)$$

sont les nombres d'onde longitudinal et transverse. λ et μ sont les coefficients de Lamé et ρ la masse volumique du milieu.

En développant l'équation (1.3), les composantes du déplacement dans la base des coordonnées sphériques s'expriment alors par

$$\begin{cases} u_r = \frac{\partial \Phi_L}{\partial r} + k_T^2 r \Phi_T + r \frac{\partial^2 \Phi_T}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \Phi_T}{\partial r}, \\ u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\Phi_L + \frac{\partial(r\Phi_T)}{\partial r} \right] + \frac{k_T}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi_S}{\partial \varphi}, \\ u_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\Phi_L + \frac{\partial(r\Phi_T)}{\partial r} \right] - k_T \frac{\partial \Phi_S}{\partial \theta}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Le tenseur des contraintes est donné par la loi de Hooke

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}))\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon}, \quad (1.7)$$

avec

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \left[\nabla(\mathbf{u}) + \nabla(\mathbf{u})^T \right], \quad (1.8)$$

le tenseur des déformations. Dans la suite de ce problème, seules les composantes σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ et $\sigma_{r\varphi}$ sont utilisées car elles interviennent dans le vecteur contrainte. Elle s'expriment en fonction des potentiels scalaires par les relations :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -\lambda k_L^2 \Phi_L + 2\mu \frac{\partial^2 \Phi_L}{\partial r^2} + 2\mu \frac{\partial}{\partial r} \left(k_T^2 r \Phi_T + r \frac{\partial^2 \Phi_T}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \Phi_T}{\partial r} \right), \\ \sigma_{r\theta} = \mu \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(2 \frac{\partial(\Phi_L/r)}{\partial r} + \mathcal{L}(\Phi_T) \right) + \frac{k_T r}{\sin \theta} \frac{\partial^2(\Phi_S/r)}{\partial \theta \partial \varphi} \right], \\ \sigma_{r\varphi} = \mu \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(2 \frac{\partial(\Phi_L/r)}{\partial r} + \mathcal{L}(\Phi_T) \right) + k_T r \frac{\partial^2(\Phi_S/r)}{\partial r \partial \theta} \right], \end{cases} \quad (1.9)$$

avec

$$\mathcal{L}(\Phi_T) = 2 \frac{\partial^2 \Phi_T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi_T}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \Phi_T + k_T^2 \Phi_T. \quad (1.10)$$

Dans les prochaines parties, la diffusion par une unique particule de rayon R est calculée séparément dans les cas d'une onde longitudinale ou transverse incidente. Les indices (c) et (d) sont respectivement utilisés pour désigner la matrice et la particule.

1.1.1 Développement en harmoniques sphériques

Les différents champs sont décomposés selon les harmoniques sphériques. Tout d'abord, les potentiels scalaires (1.4) peuvent ainsi se mettre sous la forme générique

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{nm} z_n(kr) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (1.11)$$

où la fonction de Legendre $P_n^m(\cos \theta)$ s'exprime en fonction du polynôme de Legendre $P_n(\cos \theta)$ par la relation

$$P_n^m(\cos \theta) = (-\sin \theta)^m \frac{d^m P_n(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m} = \frac{d^m P_n(\cos \theta)}{d\theta^m}. \quad (1.12)$$

La fonction z_n est une combinaison linéaire des fonctions de Bessel sphériques $j_n(kr)$ et de Neumann sphérique $y_n(kr)$ ou des fonctions de Hankel sphériques de première espèce $h_n^{(1)}(kr)$ et de seconde espèce $h_n^{(2)}(kr)$. Les fonctions de Hankel présentent une singularité en $r = 0$ et décrivent la propagation d'ondes sphériques divergentes. Ces fonctions répondent à la relation de récurrence

$$\frac{dz_n(x)}{dx} = \frac{n}{x} z_n(x) - z_{n+1}(x) = \frac{1}{2} [z_{n-1}(x) - z_{n+1}(x)]. \quad (1.13)$$

Les fonctions de Legendre associées vérifient les relations d'orthogonalité [72] :

$$\int_0^\pi P_n^m(\cos \theta) P_\nu^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} \delta_{n\nu}, \quad (1.14)$$

et

$$\int_0^\pi \frac{P_n^m(\cos \theta) P_\nu^\mu(\cos \theta)}{\sin \theta} \sin \theta d\theta = \frac{(n+m)!}{m(n-m)!} \delta_{m\mu}. \quad (1.15)$$

Deux autres relations impliquant les fonctions de Legendre sont utiles :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left[\frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \frac{dP_\nu^m(\cos \theta)}{d\theta} + m \frac{P_n^m(\cos \theta) P_\nu^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \right] \sin \theta d\theta \\ = \frac{2n(n+1)(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} \delta_{n,\nu} \end{aligned} \quad (1.16)$$

et

$$\int_0^\pi \left[\frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \frac{P_\nu^m(\cos \theta)}{\sin \theta} + \frac{dP_\nu^m(\cos \theta)}{d\theta} \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \right] \sin \theta d\theta = 0 \quad \forall m \neq 0. \quad (1.17)$$

1.1.2 Onde incidente longitudinale

1.1.2.1 Champs de déplacement et vecteurs contraintes

L'onde incidente est une onde plane longitudinale se propageant dans la direction z avec l'amplitude de déplacement u_0 . D'après la décomposition de Helmholtz, le déplacement de l'onde incidente s'exprime par

$$\mathbf{u}_L^i = u_0 e^{jk_L^c z} \mathbf{e}_z = \nabla(\Phi_L^i). \quad (1.18)$$

Le potentiel scalaire Φ_L^i est décomposable sur la base des harmoniques sphériques :

$$\Phi_L^i(r, \theta) = -\frac{j u_0}{k_L^c} e^{jk_L^c z} = -\frac{j u_0}{k_L} \sum_{n=0}^{\infty} j^n (2n+1) j_n(k_L^c r) P_n(\cos \theta), \quad \text{pour } r \geq R. \quad (1.19)$$

En vertu du principe de Curie, le champ incident étant indépendant de l'angle φ , les champs diffusés le sont également. Le déplacement $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_\varphi)$ ne dépend donc que des variables r et θ et la composante u_φ est alors nulle. Du fait de la formule (1.6), il n'y a donc pas d'onde S diffusée ($\Phi_S^p = 0$).

L'interaction de l'onde incidente avec la particule induit l'existence de deux ondes longitudinales et transverses diffusées dans la matrice et deux ondes longitudinales et transverses transmises dans la

1.1 Modélisation de la diffusion par une sphère élastique

particule. Les potentiels de ces ondes ont pour expressions

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_L^c(r, \theta) = -\frac{j u_0}{k_L^c} \sum_{n=0}^{\infty} j^n (2n+1) T_n^{LL} h_n(k_L^c r) P_n(\cos \theta), \quad \forall r \geq R, \\ \Phi_T^c(r, \theta) = -\frac{j u_0}{k_L^c} \sum_{n=1}^{\infty} j^n (2n+1) T_n^{LT} h_n(k_T^c r) P_n(\cos \theta), \quad \forall r \geq R, \\ \Phi_L^d(r, \theta) = -\frac{j u_0}{k_L^c} \sum_{n=0}^{\infty} j^n (2n+1) S_n^{LL} j_n(k_L^d r) P_n(\cos \theta), \quad \forall r \leq R, \\ \Phi_T^d(r, \theta) = -\frac{j u_0}{k_L^c} \sum_{n=1}^{\infty} j^n (2n+1) S_n^{LT} j_n(k_T^d r) P_n(\cos \theta), \quad \forall r \leq R. \end{array} \right. \quad (1.20)$$

T_n^{LL} et T_n^{LT} sont les coefficients de diffusion des ondes longitudinales et transverses dans la matrice et S_n^{LL} et S_n^{LT} sont les coefficients de transmission dans la particule. Les sommes dans les expressions des potentiels des ondes transverses commencent à $n = 1$ car il n'existe pas de mode monopolaire transverse.

En reportant les équations (1.19) et (1.20) dans (1.6), et en tenant compte de l'égalité (1.12) pour $m = 1$, les déplacements normaux et tangentiels dans chaque phase $p = (c, d)$ ont pour expressions

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r^p(r, \theta) = -\frac{j u_0}{k_L^c r} \sum_{n=0}^{\infty} j^n (2n+1) U_n^p(r) P_n(\cos \theta), \\ u_\theta^p(r, \theta) = -\frac{j u_0}{k_L^c r} \sum_{n=1}^{\infty} j^n (2n+1) V_n^p(r) P_n^1(\cos \theta), \end{array} \right. \quad (1.21)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} U_n^c = T_n^{ML} U_n^{(c,L)} + T_n^{MT} U_n^{(c,T)} + U_n^{(i,M)}, \\ V_n^c = T_n^{ML} V_n^{(c,L)} + T_n^{MT} V_n^{(c,T)} + V_n^{(i,M)}, \\ U_n^d = S_n^{ML} U_n^{(d,L)} + S_n^{MT} U_n^{(d,T)}, \\ V_n^d = S_n^{ML} V_n^{(d,L)} + S_n^{MT} V_n^{(d,T)}, \end{array} \right. \quad (1.22)$$

pour $M = L$, avec

$$\left\{ \begin{array}{l} U_n^{(p,L)} = n z_n(k_L^p r) - k_L^p r z_{n+1}(k_L^p r), \\ U_n^{(p,T)} = n(n+1) z_n(k_T^p r), \\ V_n^{(p,L)} = z_n(k_L^p r), \\ V_n^{(p,T)} = (1+n) z_n(k_T^p r) - k_T^p r z_{n+1}(k_T^p r). \end{array} \right. \quad (1.23)$$

Dans la matrice, z_n est la fonction de Hankel sphérique de première espèce h_n (l'incide (1) n'est pas noté dans la suite) car les champs diffusés sont définis pour $r > R$ et divergent vers l'infini. Les fonctions de Hankel de deuxième espèce ne sont pas prises en compte car sont associées à des ondes convergentes. Dans la particule z_n est la fonction de Bessel sphérique de première espèce j_n . Les fonctions de Bessel de deuxième espèce ne sont pas présentes car sont singulières en $r = 0$ et donc mathématiquement non admissibles. Les fonctions $U_n^{(i,L)}$ et $V_n^{(i,M)}$ sont données par les expressions de $U_n^{(c,L)}$ et $V_n^{(c,L)}$ définies dans la formule (1.23) sauf avec $z_n = j_n$ la fonction de Bessel sphérique et non pas la fonction de Hankel sphérique.

En reportant les équations (1.19) et (1.20) dans (1.9), les contraintes normales et tangentielles dans chaque phase $p = (c, d)$ ont pour expressions

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^p(r, \theta) = -\frac{j u_0}{k_L^c r^2} \sum_{n=0}^{\infty} j^n (2n+1) \Sigma_n^p(r) P_n(\cos \theta), \\ \sigma_{r\theta}^p(r, \theta) = -\frac{j u_0}{k_L^c r^2} \sum_{n=1}^{\infty} j^n (2n+1) \tau_n^p(r) \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta}, \end{cases} \quad (1.24)$$

où

$$\begin{cases} \Sigma_n^c = T_n^{ML} \Sigma_n^{(c,L)} + T_n^{MT} \Sigma_n^{(c,T)} + \Sigma_n^{(i,M)}, \\ \tau_n^c = T_n^{ML} \tau_n^{(c,L)} + T_n^{MT} \tau_n^{(c,T)} + \tau_n^{(i,M)}, \\ \Sigma_n^d = S_n^{ML} \Sigma_n^{(d,L)} + S_n^{MT} \Sigma_n^{(d,T)}, \\ \tau_n^d = S_n^{ML} \tau_n^{(d,L)} + S_n^{MT} \tau_n^{(d,T)}, \end{cases} \quad (1.25)$$

pour $M = L$, avec

$$\begin{cases} \Sigma_n^{(p,L)} = [2n(n-1)\mu_p - (\lambda_p + 2\mu_p)(k_L^p r)^2] z_n(k_L^p r) + 4\mu_p k_L^p r z_{n+1}(k_L^p r), \\ \Sigma_n^{(p,T)} = 2n(n^2-1)\mu_p z_n(k_T^p r) - 2n(n+1)\mu_p k_T^p r z_{n+1}(k_T^p r), \\ \tau_n^{(p,L)} = 2\mu_p [(n-1)z_n(k_L^p r) - k_L^p r z_{n+1}(k_L^p r)], \\ \tau_n^{(p,T)} = \mu_p [2(n^2-1) - (k_T^p r)^2] z_n(k_T^p r) + 2\mu_p k_T^p r z_{n+1}(k_T^p r). \end{cases} \quad (1.26)$$

Comme précédemment, z_n est la fonction de Hankel de première espèce h_n dans la matrice, et est la fonction de Bessel Sphérique dans la particule j_n . Les fonctions $\sigma_n^{(i,L)}$ et $\tau_n^{(i,L)}$ sont données par les expressions de $\sigma_n^{(c,M)}$ et $\tau_n^{(c,M)}$ définies dans la formule (1.26) sauf avec $z_n = j_n$ la fonction de Bessel sphérique et non pas la fonction de Hankel sphérique.

1.1.2.2 Application des conditions aux frontières

La détermination des coefficients de diffusion T_n^{LM} et de transmission S_n^{LM} nécessite l'application des conditions aux frontières. Celles-ci consistent en la continuité du déplacement et du vecteur contrainte à la surface $r = R$ de la particule et s'écrivent formellement

$$\begin{cases} u_r^c(R, \theta) = u_r^d(R, \theta), \\ u_\theta^c(R, \theta) = u_\theta^d(R, \theta), \\ \sigma_{rr}^c(R, \theta) = \sigma_{rr}^d(R, \theta), \\ \sigma_{r\theta}^c(R, \theta) = \sigma_{r\theta}^d(R, \theta), \end{cases} \quad (1.27)$$

ou encore, compte tenu des équations (1.21) et (1.24)

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} j^n (2n+1) (U_n^c(R) - U_n^d(R)) P_n(\cos \theta) = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} j^n (2n+1) (V_n^c(R) - V_n^d(R)) P_n^1(\cos \theta) = 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} j^n (2n+1) (\Sigma_n^c(R) - \Sigma_n^d(R)) P_n(\cos \theta) = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} j^n (2n+1) (\tau_n^c(R) - \tau_n^d(R)) P_n^1(\cos \theta) = 0. \end{cases} \quad (1.28)$$

1.1 Modélisation de la diffusion par une sphère élastique

Il s'agit alors de résoudre un système de 4 équations à une infinité d'inconnues que sont les coefficients T_n^{LM} et S_n^{LM} avec $M = L, T$. Dans la suite, les arguments ($r = R$) ne sont pas écrits par souci de lisibilité. En réécrivant la première équation de (1.28),

$$\sum_{n=0}^{\infty} j^n (2n+1) (U_n^c - U_n^d) \int_0^\pi P_n(\cos \theta) P_\nu(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 0, \quad (1.29)$$

et en appliquant la relation d'orthogonalité (1.14), il vient

$$U_n^c - U_n^d = 0, \quad \forall n \geq 0. \quad (1.30)$$

Les équations de (1.28) portant sur les fonction V_n^p , Σ_n^p et τ_n^p sont simplifiées exactement de la même manière en utilisant la relation d'orthogonalité (1.14). Finalement, le système (1.28) se découple en deux système linéaires : pour $n = 0$,

$$\begin{pmatrix} U_0^{(c,L)} & -U_0^{(d,L)} \\ \Sigma_0^{(c,L)} & -\Sigma_0^{(d,L)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0^{LL} \\ S_0^{LL} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} U_0^{(i,L)} \\ \Sigma_0^{(i,L)} \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

et pour $n > 0$,

$$\begin{pmatrix} U_n^{(c,L)} & U_n^{(c,T)} & -U_n^{(d,L)} & -U_n^{(d,T)} \\ V_n^{(c,L)} & V_n^{(c,T)} & -V_n^{(d,L)} & -V_n^{(d,T)} \\ \Sigma_n^{(c,L)} & \Sigma_n^{(c,T)} & -\Sigma_n^{(d,L)} & -\Sigma_n^{(d,T)} \\ \tau_n^{(c,L)} & \tau_n^{(c,T)} & -\tau_n^{(d,L)} & -\tau_n^{(d,T)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_n^{ML} \\ T_n^{MT} \\ S_n^{ML} \\ S_n^{MT} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} U_n^{(i,M)} \\ V_n^{(i,M)} \\ \Sigma_n^{(i,M)} \\ \tau_n^{(i,M)} \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

avec $M = L$.

1.1.3 Onde incidente transverse

1.1.3.1 Champ de déplacement et vecteurs contraintes

L'onde incidente est une onde plane transverse se propageant dans la direction z , polarisée selon x et d'amplitude de déplacement u_0 :

$$\mathbf{u}_T^i = u_0 e^{jk_T^c z} \mathbf{e}_x. \quad (1.33)$$

Ce déplacement est exprimé par un potentiel vecteur :

$$\mathbf{u}^{Ti} = \nabla \times \Psi_T^i = \nabla \times \left(\frac{ju_0}{k_T^c} e^{jk_T^c z} \mathbf{e}_y \right), \quad (1.34)$$

qui peut être à son tour décomposé en deux potentiels, en géométrie sphérique [71]

$$\Psi_T^i = \nabla \times (r \Phi_T^i \mathbf{e}_r) + \nabla \times \nabla \times \left(\frac{r}{k_T^c} \Phi_S^i \mathbf{e}_r \right), \quad (1.35)$$

où Φ_T^i et Φ_S^i se décomposent sur les harmoniques sphériques [73],

$$\begin{cases} \Phi_T^i(r, \theta, \varphi) = \frac{ju_0}{k_T^c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j^n j_n(k_T^c r) P_n^1(\cos \theta) \cos(\varphi), \\ \Phi_S^i(r, \theta, \varphi) = -\frac{u_0}{k_T^c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j^n j_n(k_T^c r) P_n^1(\cos \theta) \sin(\varphi). \end{cases} \quad (1.36)$$

Dans la suite de cette partie, tout potentiel est mis sous cette même forme. L'interaction de l'onde incidente sur une particule élastique engendre l'existence de trois ondes : longitudinales L, transverses T et transverses S diffusées dans la matrice et de trois ondes L, T et S transmises dans la particule. Les potentiels des ondes diffusées dans la matrice et dans la particule ont respectivement pour expressions

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_M^c(r, \theta, \varphi) = \frac{ju_0}{k_T^c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j^n T^{TM} h_n(k_M^c r) P_n^1(\cos \theta) \cos(\varphi), \text{ avec } M = L, T, \text{ pour } r > R, \\ \Phi_S^c(r, \theta, \varphi) = -\frac{u_0}{k_T^c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j^n T^{SS} h_n(k_T^c r) P_n^1(\cos \theta) \sin(\varphi), \text{ pour } r > R, \\ \Phi_M^d(r, \theta, \varphi) = \frac{ju_0}{k_T^c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j^n S^{TM} j_n(k_M^d r) P_n^1(\cos \theta) \cos(\varphi), \text{ avec } M = L, T, \text{ pour } r < R, \\ \Phi_S^d(r, \theta, \varphi) = -\frac{u_0}{k_T^c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j^n S^{SS} j_n(k_T^d r) P_n^1(\cos \theta) \sin(\varphi), \text{ pour } r < R. \end{array} \right. \quad (1.37)$$

T_n^{TM} et S_n^{TM} sont les coefficients de diffusion des ondes $M = L, T$ dans la matrice et dans la particule. T_n^{SS} et S_n^{SS} sont respectivement les coefficients de diffusion des ondes S dans la matrice et dans la particule. Il est important de noter qu'il n'y a pas de coefficients $T_n^{TS}, T_n^{ST}, T_n^{SL}$ car les ondes S sont complètement découplées des ondes L et T [73].

Compte tenu de la forme des potentiels (1.36), (1.37) et des équations (1.6), les déplacements totaux normaux et tangentiels dans la phase $p = (c, d)$ ont respectivement pour expressions

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r^p(r, \theta, \varphi) = \frac{ju_0}{k_T^c r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j^n U_n^p(r) P_n^1(\cos \theta) \cos(\varphi), \\ u_\theta^p(r, \theta, \varphi) = \frac{ju_0}{k_T^c r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j^n \left[V_n^p(r) \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} + W_n^p(r) \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin(\theta)} \right] \cos(\varphi), \\ u_\varphi^p(r, \theta, \varphi) = -\frac{ju_0}{k_T^c r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j^n \left[V_n^p(r) \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin(\theta)} + W_n^p(r) \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \right] \sin(\varphi), \end{array} \right. \quad (1.38)$$

où les fonctions U_n^p et V_n^p sont définies par les formules (1.22) et (1.23) pour $M = T$, et

$$\left\{ \begin{array}{l} W_n^c = T_n^{SS} W_n^{(c,T)} + W_n^{(i,T)}, \\ W_n^d = S_n^{SS} W_n^{(d,T)}, \end{array} \right. \quad (1.39)$$

avec

$$W_n^{(p,T)} = j k_T^p r z_n(k_T^p r). \quad (1.40)$$

Dans la matrice, $z_n = h_n$ et dans la particule $z_n = j_n$. $W_n^{(i,T)}$ est donné par l'expression de $W_n^{(c,T)}$ sauf avec $z_n = j_n$.

D'après l'équation (1.9), les composantes d'intérêt du tenseur des contraintes dans la phase $p = (c, d)$ sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}^p(r, \theta, \varphi) = \frac{ju_0}{k_T^c r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j^n \Sigma_n^p(r) P_n^1(\cos \theta) \cos(\varphi), \\ \sigma_{r\theta}^p(r, \theta, \varphi) = \frac{ju_0}{k_T^c r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j^n \left[\tau_n^p(r) \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} + \xi_n^p(r) \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin(\theta)} \right] \cos(\varphi), \\ \sigma_{r\varphi}^c(r, \theta, \varphi) = -\frac{ju_0}{k_T^c r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j^n \left[\tau_n^p(r) \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin(\theta)} + \xi_n^p(r) \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \right] \sin(\varphi), \end{array} \right. \quad (1.41)$$

1.1 Modélisation de la diffusion par une sphère élastique

où les fonctions où les fonctions Σ_n^p et τ_n^p sont définies par les formules (1.25) et (1.26) pour $M = T$, et

$$\begin{cases} \xi_n^c = T_n^{SS} \xi_n^{(c,T)} + \xi_n^{(i,T)}, \\ \xi_n^d = S_n^{SS} \xi_n^{(d,T)}, \end{cases} \quad (1.42)$$

avec

$$\xi_n^{(p,T)} = j\mu_p k_T^p r [(n-1)z_n(k_T^p r) - k_T^p r z_{n+1}(k_T^p r)]. \quad (1.43)$$

Dans la matrice, $z_n = h_n$ et dans la particule $z_n = j_n$. $\xi_n^{(i,T)}$ est donné par l'expression de $\xi_n^{(c,T)}$ sauf avec $z_n = j_n$.

1.1.3.2 Application des conditions aux frontières

Afin d'obtenir les coefficients de diffusion des ondes longitudinales et transverses dans la matrice et dans la particule, les conditions aux frontières du problème sont appliquées. Ces conditions consistent en la continuité des déplacements et des contraintes à la surface de la particule située en $r = R$ et s'écrivent formellement

$$\begin{cases} u_r^c(R, \theta, \varphi) = u_r^d(R, \theta, \varphi), \\ u_\theta^c(R, \theta, \varphi) = u_\theta^d(R, \theta, \varphi), \\ u_\varphi^c(R, \theta, \varphi) = u_\varphi^d(R, \theta, \varphi), \\ \sigma_{rr}^c(R, \theta, \varphi) = \sigma_{rr}^d(R, \theta, \varphi), \\ \sigma_{r\theta}^c(R, \theta, \varphi) = \sigma_{r\theta}^d(R, \theta, \varphi), \\ \sigma_{r\varphi}^c(R, \theta, \varphi) = \sigma_{r\varphi}^d(R, \theta, \varphi), \end{cases} \quad (1.44)$$

ou encore, compte tenu des formules (1.38) et (1.41) :

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j^n (U_n^c(R) - U_n^d(R)) P_n^1(\cos \theta) \cos(\varphi) = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j^n \left[(V_n^c(R) - V_n^d(R)) \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} + (W_n^c(R) - W_n^d(R)) \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin(\theta)} \right] \cos(\varphi) = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j^n \left[(V_n^c(R) - V_n^d(R)) \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin(\theta)} + (W_n^c(R) - W_n^d(R)) \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \right] \sin(\varphi) = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j^n (\Sigma_n^c(R) - \Sigma_n^d(R)) P_n^1(\cos \theta) \cos(\varphi) = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j^n \left[(\tau_n^c(R) - \tau_n^d(R)) \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} + (\xi_n^c(R) - \xi_n^d(R)) \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin(\theta)} \right] \cos(\varphi) = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j^n \left[(\tau_n^c(R) - \tau_n^d(R)) \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin(\theta)} + (\xi_n^c(R) - \xi_n^d(R)) \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \right] \sin(\varphi) = 0. \end{cases} \quad (1.45)$$

Il s'agit ici d'un système de 6 équations à une infinité d'inconnues que sont les coefficients T_n et S_n des modes n . Dans la suite, les arguments ($r = R$) ne sont pas écrits par souci de lisibilité. Comme dans le cas longitudinal, le problème est simplifié en utilisant les relations d'orthogonalité des polynômes de Legendre. Les égalités portant sur les déplacements normaux et les contraintes normales sont découplées d'une manière similaire au cas longitudinal en utilisant la relation d'orthogonalité (1.14), d'où :

$$\begin{cases} U_n^c - U_n^d = 0, \quad \forall n \geq 1, \\ \Sigma_n^c - \Sigma_n^d = 0, \quad \forall n \geq 1. \end{cases} \quad (1.46)$$

La deuxième équation de (1.45) peut être réécrite

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j^n \left[(V_n^c - V_n^d) \int_0^\pi \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial P_\nu^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \sin \theta \, d\theta \right. \\ \left. + (W_n^c - W_n^d) \int_0^\pi \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin(\theta)} \frac{\partial P_\nu^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \sin \theta \, d\theta \right] = 0, \end{aligned} \quad (1.47)$$

et la troisième équation

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j^n \left[(V_n^c - V_n^d) \int_0^\pi \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin(\theta)} \frac{P_\nu^1(\cos \theta)}{\sin(\theta)} \sin \theta \, d\theta \right. \\ \left. + (W_n^c - W_n^d) \int_0^\pi \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \frac{P_\nu^1(\cos \theta)}{\sin(\theta)} \sin \theta \, d\theta \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.48)$$

En sommant les équations (1.47) et (1.48) et en utilisant les relations d'orthogonalité (1.16) et (1.17), il vient

$$V_n^c - V_n^d = 0, \quad \forall n \geq 1. \quad (1.49)$$

Les équations de (1.45) issues de la continuité des contraintes tangentielles se découpent exactement de la même manière. La deuxième équation de (1.45) peut aussi être réécrite

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j^n \left[(V_n^c - V_n^d) \int_0^\pi \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \frac{P_\nu^1(\cos \theta)}{\sin(\theta)} \sin \theta \, d\theta \right. \\ \left. + (W_n^c - W_n^d) \int_0^\pi \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin(\theta)} \frac{P_\nu^1(\cos \theta)}{\sin(\theta)} \sin \theta \, d\theta \right] = 0, \end{aligned} \quad (1.50)$$

et la troisième équation

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j^n \left[(V_n^c - V_n^d) \int_0^\pi \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin(\theta)} \frac{\partial P_\nu^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \sin \theta \, d\theta \right. \\ \left. + (W_n^c - W_n^d) \int_0^\pi \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial P_\nu^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \sin \theta \, d\theta \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.51)$$

En sommant les équations (1.50) et (1.51) et en utilisant les relations d'orthogonalité (1.16) et (1.17), il vient

$$W_n^c - W_n^d = 0, \quad \forall n \geq 1. \quad (1.52)$$

Les équations de (1.45) issues de la continuité des contraintes tangentielles se découpent exactement de la même manière. Finalement pour $n > 0$, le système (1.45) mène à deux systèmes indépendants, le premier étant le système (1.32) avec $M = T$ et le second étant

$$\begin{pmatrix} W_n^{(c,T)} & -W_n^{(d,T)} \\ \xi_n^{(c,T)} & -\xi_n^{(d,T)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_n^{SS} \\ S_n^{SS} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} W_n^{(i,T)} \\ \xi_n^{(i,T)} \end{pmatrix}. \quad (1.53)$$

Ces deux systèmes indépendants montrent que les ondes transverses S diffusées sont complètement dissociées des ondes longitudinales L et transverse T. Les coefficients de diffusion T_n^{NM} et S_n^{NM} , avec $N, M = L, T$ dépendent d'un système d'équation linéaire très similaire où seul le membre de droite de ces systèmes change selon la nature de l'onde incidente.

1.1.4 Résonances de corps rigide

Les particules sphériques élastiques étudiées dans ce manuscrit sont beaucoup plus denses et rigides que la matrice. L'intérêt est alors porté sur les résonances dipolaires de type corps rigides.

1.1.4.1 Fréquence de résonance

Dans les parties suivantes, l'indice c rapporté à la matrice n'est pas écrit par souci de lisibilité. Dans ce manuscrit, des billes de carbure de tungstène ou de plomb dans une matrice élastique d'époxy sont étudiées. Leurs paramètres mécaniques sont donnés dans le tableau 1.1. Les valeurs pour le carbure de tungstène et le plomb sont tirées de la littérature [74] et celles de l'époxy sont obtenues expérimentalement dans le chapitre 3.

	ρ (kg.m ⁻³)	c_L (m.s ⁻¹)	c_T (m.s ⁻¹)
Carbure de tungstène	14950	7040	4218
Plomb	11500	1978	659
Epoxy	1142	2650	1185

Tableau 1.1 – Paramètres mécaniques des différents matériaux

En première approximation, les billes étudiées sont considérées rigides par rapport à la matrice (c'est à dire $\mu_p/\mu \gg 1$) et avec une masse finie. Ces billes peuvent se déplacer autour de leur position d'équilibre. Dans ce cadre, en régime grande longueur d'onde ($K_L = k_L R \ll 1$), les premiers coefficients de diffusion $n = 1$ des ondes diffusées dans la matrice obtenus avec le système (1.32), peuvent se présenter sous la forme [18, 57] :

$$\begin{cases} T_1^{LL} = -j \frac{(1 - \tilde{\rho}) K_L^3}{3} \frac{K_T^2 + 3jK_T - 3}{K_T^2(2\tilde{\rho} + 1) + 9jK_T - 9}, \\ T_1^{LT} = j(1 - \tilde{\rho}) \frac{K_L K_T^2 e^{-jK_T}}{K_T^2(2\tilde{\rho} + 1) + 9jK_T - 9}, \\ T_1^{TL} = -K_L^2 K_T \cos(K_T) \frac{2(\tilde{\rho} - 1) [j + \tan(K_T)]}{K_T^2(2\tilde{\rho} + 1) + 9jK_T - 9}, \\ T_1^{TT} = -j \cos(K_T) e^{-jK_T} \frac{[(2\tilde{\rho} + 1)K_T^2 - 9] \tan(K_T) + 9K_T}{K_T^2(2\tilde{\rho} + 1) + 9jK_T - 9}, \end{cases} \quad (1.54)$$

où $\tilde{\rho} = \frac{\rho_d}{\rho}$ est le contraste de densité et $K_T = k_T R$.

Les coefficients de diffusion des modes dipolaires (1.54) ont tous le même dénominateur. Cette observation est attendue car les coefficients de diffusion dépendent de la même matrice à inverser. Les résonances correspondent à l'annulation des dénominateurs :

$$K_T^2(2\tilde{\rho} + 1) + 9jK_T - 9 = 0. \quad (1.55)$$

Dans le régime basses fréquences, il n'y a pas de résonance dipolaire en dessous du contraste des densité $\tilde{\rho}_{\text{lim}} = 5/8$. Pour $\tilde{\rho} > \tilde{\rho}_{\text{lim}}$, la racine complexe de cette équation a pour expression

$$K_{T\text{res}} = \frac{3\sqrt{8\tilde{\rho} - 5} - 9j}{2(2\tilde{\rho} + 1)}. \quad (1.56)$$

A ce nombre d'onde adimensionné, la particule atteint une résonance sub-longueur d'onde. Cette résonance a déjà été prédite par Moon et Mow [53]. Une fréquence de résonance et un facteur de qualité s'en déduisent

$$\begin{cases} f_t = \frac{\text{Re}(K_{T_{\text{res}}})c_T}{2\pi R} = \frac{3c_T\sqrt{8\tilde{\rho}-5}}{4\pi R(2\tilde{\rho}+1)}, \\ Q_t = \left| \frac{\text{Re}(K_{T_{\text{res}}})}{2\text{Im}(K_{T_{\text{res}}})} \right| = \frac{1}{6}\sqrt{8\tilde{\rho}-5}. \end{cases} \quad (1.57)$$

Le premier coefficient de diffusion obtenu avec le système (1.53) se simplifie en

$$T_1^{SS} = \frac{(1 - jK_T)K_T^3}{\tilde{\rho}K_T^3 + jK_T^2(\tilde{\rho} + 5) - 15K_T - 15j}. \quad (1.58)$$

Comme précédemment, ce coefficient de diffusion devient maximal lorsque le dénominateur s'annule,

$$\tilde{\rho}K_T^3 + jK_T^2(\tilde{\rho} + 5) - 15K_T - 15j = 0. \quad (1.59)$$

Ce coefficient de diffusion présente donc aussi une résonance, dont le nombre d'onde est obtenu numériquement (voir sur la figure 1.2). La fréquence de résonance et le facteur de qualité de cette résonance sont respectivement notés f_r et Q_r . Finalement, il est observable que ces résonances sont similaires à la résonance monopolaire de Minnaert d'une bulle de gaz dans un liquide, qui dépend de la plus faible compressibilité et de la masse volumique la plus dense du système (respectivement celle des bulles et celle du liquide) [24].

La première résonance, notée t , affecte les ondes L et T , alors que la seconde, noté r , affecte uniquement les ondes S . Dans les deux cas, le contraste de densité $\tilde{\rho}$ est le paramètre clef de ces résonances. La figure 1.2 représente l'évolution des fréquences et des facteurs de qualité de ces deux résonances en fonction de $\tilde{\rho}$, dans le cas d'une particule de rayon $R = 198,5 \mu\text{m}$ et dans une matrice d'époxy.

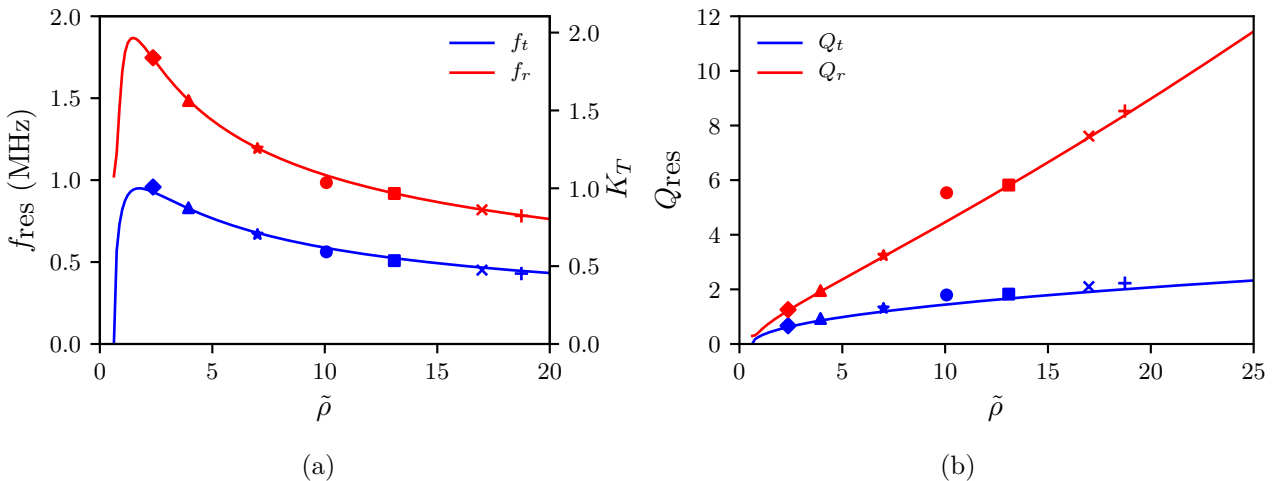


Figure 1.2 – Evolution de (a) la fréquence de résonance et (b) du facteur de qualité en fonction du contraste de densité $\tilde{\rho}$. Les points rouges et bleus correspondent aux résonances t et r obtenues pour des particules élastiques avec en losange de l'Aluminium, en triangle du Titane, en étoile de l'Inox, en rond du Plomb, en carré du Carbure de Tungstène, en croix \times du Tungstène et en croix $+$ du Platiniun.

1.1 Modélisation de la diffusion par une sphère élastique

Les deux résonances présentent des comportements similaires. Le facteur de qualité de la résonance r augmente bien plus rapidement que celui de la résonance t . Lorsque le contraste de densité tend vers l'infini, les deux fréquences de résonances tendent vers 0. La figure 1.2 présente aussi en différents points les fréquences de résonances théoriques pour des particules élastiques, sans avoir recours à l'approximation $\mu_p/\mu \gg 1$, et obtenues en annulant le déterminant des matrices des systèmes (1.32) et (1.53). Ces différents points sont en bon accord avec les courbes obtenues pour des particules rigides, ce qui confirme bien l'hypothèse de rigidité des particules en régime grande longueur d'onde.

1.1.4.2 Déplacement de corps rigide

La figure 1.3 présente les modules des déplacements u_x , u_y et u_z (obtenus en calculant les composantes (1.21) ou (1.38) dans le repère cartésien), normalisés par u_0 sur différents points de la surface de la particule, et respectivement multipliés par les signes de $|u_x|$, $|u_y|$ et $|u_z|$. Les déplacements sont calculés avec les coefficients de diffusion de particules rigides (1.54). Quel que soit le point sur la surface de la particule étudié et le type d'onde incidente, le déplacement selon l'axe y est systématiquement nul. Pour une onde longitudinale incidente, tous les points de la surface de la sphère se déplacent dans la direction z , qui correspond à la direction de propagation de l'onde incidente, et dans le même sens. La sphère a alors un mouvement de translation qui devient maximale à la résonance en translation t [18]. Dans le cas d'une onde transverse incidente, le mouvement est un peu plus complexe car la surface de la particule se déplace simultanément selon l'axe x et selon l'axe z . Le déplacement u_x est symétrique selon φ et le déplacement u_z est antisymétrique. Le déplacement de la particule est alors composé d'un mouvement de translation dans le plan $(0,y,z)$ et d'un mouvement de rotation orienté selon l'axe y . Similairement au cas d'une onde longitudinale incidente, le mouvement de la particule est majoritairement un mouvement de translation à la résonance en translation, dans la direction du déplacement x de l'onde incidente. De plus, le mouvement de rotation devient maximal à la résonance en rotation r [57].

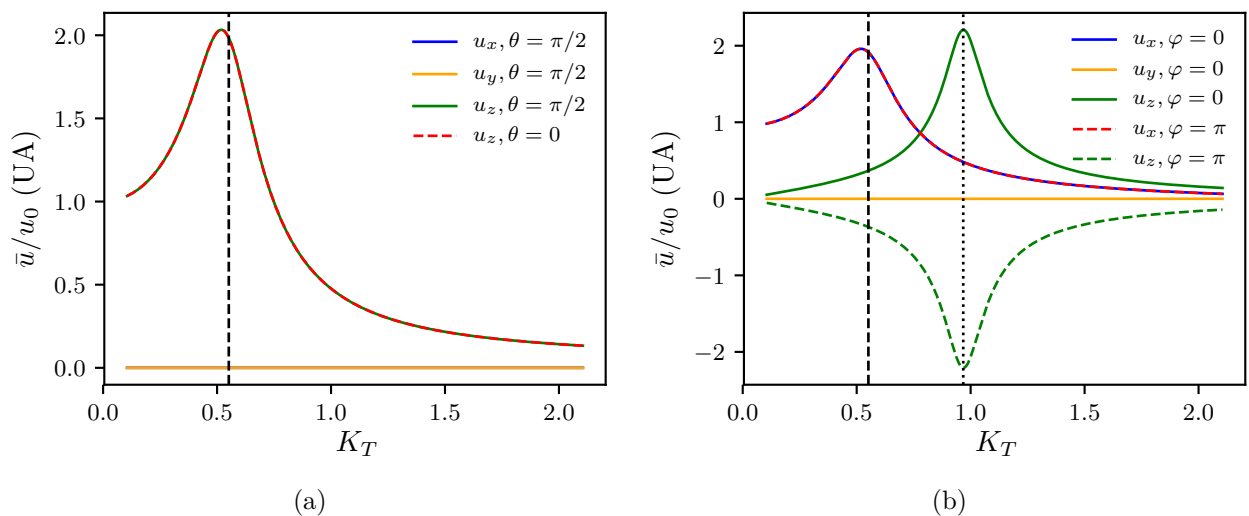


Figure 1.3 – Modules des déplacements u_x , u_y et u_z , normalisés par u_0 , et respectivement multipliés par les signes de $|u_x|$, $|u_y|$ et $|u_z|$, pour (a) une onde longitudinale incidente et $r = R$ et (b) une onde transverse incidente, $r = R$ et $\theta = \pi/2$. Les tirets et pontillés noirs représentent respectivement les fréquences de résonances f_t et f_r .

En résumé, une sphère rigide dense dans une matrice élastique entre en mouvement en la présence d'une onde incidente longitudinale ou transverse. Tel un système masse-ressort, la sphère peut entrer en résonance, gouvernée entre autre par le contraste de densité des deux matériaux. Une première résonance est activée par les ondes L et T et donne à la particule un mouvement de translation. A une fréquence supérieure, une deuxième résonance est activée uniquement par les ondes S et donne à la particule un mouvement de rotation. Cette résonance n'existe que pour une onde transverse incidente alors que la résonance en translation existe pour une onde longitudinale ou transverse incidente. Il est désormais nécessaire d'observer l'influence de ces résonances sur les ondes diffusées dans la matrice.

1.1.5 Section efficace de diffusion

La section efficace de diffusion σ caractérise l'énergie diffusée par un objet. Cette grandeur est définie par le rapport de la puissance des ondes diffusées P_d sur l'intensité acoustique de l'onde incidente I_i . La section efficace de diffusion normalisée par la section géométrique de la sphère est alors :

$$\gamma = \frac{\sigma}{\pi R^2} = \frac{P_d}{I_i} \frac{1}{\pi R^2}. \quad (1.60)$$

L'intensité d'une onde est définie par la moyenne temporelle de la composante radiale du vecteur de Poynting

$$I = -\frac{1}{2} \text{Re}(\boldsymbol{\sigma} \dot{\mathbf{u}}^*) \cdot \mathbf{e}_r. \quad (1.61)$$

La puissance des ondes diffusées est obtenue en intégrant l'intensité diffusée sur une sphère de rayon r très grand devant le rayon de la particule.

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I r^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.62)$$

L'approximation de champ lointain est obtenue en utilisant le développement à grands arguments des fonctions de Hankel sphériques de première espèce dont dépendent les champs des ondes diffusées

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h_n(x) = (-j)^n \frac{e^{jx}}{jx}. \quad (1.63)$$

1.1.5.1 Onde longitudinale incidente

En utilisant le développement (1.63), le champ de déplacement des ondes diffusées dans la matrice de la formule (1.21) se simplifie en

$$\begin{cases} u_r^s(r, \theta) = u_0 u_r^\infty(\theta) \frac{e^{jk_L r}}{r}, \\ u_\theta^s(r, \theta) = u_0 u_\theta^\infty(\theta) \frac{e^{jk_T r}}{r}, \end{cases} \quad (1.64)$$

avec les fonctions de forme

$$\begin{cases} u_r^\infty(\theta) = \frac{-j}{k_L} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) T_n^{LL} P_n(\cos \theta), \\ u_\theta^\infty(\theta) = \frac{-j}{k_L} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) T_n^{LT} P_n^1(\cos \theta) \end{cases} \quad (1.65)$$

Les fonctions de forme définissent l'orientation angulaire des ondes diffusées en champ lointain. Ces fonctions ne dépendent que de l'angle θ . La présence des coefficients de diffusion des ondes L et

1.1 Modélisation de la diffusion par une sphère élastique

T montre que la fonction u_r^∞ est principalement reliée aux ondes longitudinales diffusées et u_θ^∞ aux ondes transverses. La figure 1.4 présente le module des fonctions de forme obtenues pour une bille de carbure tungstène de rayon $R = 198,5 \mu\text{m}$, dans une matrice d'époxy, à la fréquence de résonance f_t . Les vitesses des ondes élastiques et les masses volumiques de ces matériaux sont données dans le tableau 1.1. La dissipation viscoélastique n'est pas prise en compte car elle a peu d'influence sur les mécanismes de diffusion.

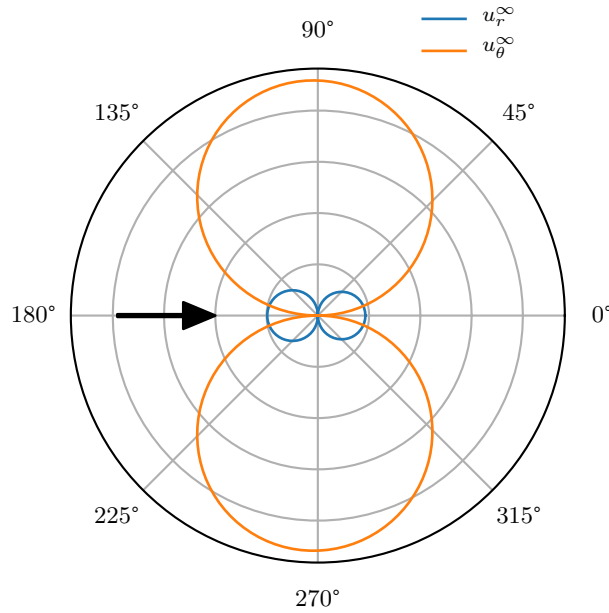


Figure 1.4 – Module des fonctions de forme radiale et tangentielle des ondes diffusées par une bille de carbure de tungstène à la fréquence de résonance f_t , dans le plan (O, z, x) . La flèche noire symbolise la direction de propagation de l'onde longitudinale incidente.

A la résonance en translation, des ondes de cisaillement sont diffusées dans la direction x perpendiculaire à celle de l'onde incidente. De même, des ondes de compression sont diffusées dans la direction z qui correspond à la direction de l'onde incidente, mais avec une amplitude moins importante. Ces différences de direction des ondes diffusées viennent du mouvement de corps rigide des particules à la résonance en translation, qui a la même polarisation que celle de l'onde incidente. Dans ces deux cas, la diffusion est dipolaire. La différence d'amplitude des fonctions de forme à la fréquence de résonance en translation montre que l'onde longitudinale incidente est majoritairement convertie en ondes transverses diffusées sur les côtés. Traiter le cas d'une bille de plomb dans une résine époxy mène exactement aux mêmes observations mais avec une amplitude des fonctions de forme moindre.

En utilisant le développement (1.63), le champ de contrainte des ondes diffusées dans la matrice de la formule (1.24) se simplifie en

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^s(r, \theta) = u_0 j \omega c_L \rho u_r^\infty(\theta) \frac{e^{jk_L r}}{r}, \\ \sigma_{r\theta}^s(r, \theta) = u_0 j \omega c_T \rho A S u_\theta^\infty(\theta) \frac{e^{jk_T r}}{r}. \end{cases} \quad (1.66)$$

En reportant les formules (1.64) et (1.66) dans (1.60) et en utilisant la relation d'orthogonalité (1.14),

la section efficace de diffusion normalisée s'écrit alors $\gamma_L = \gamma_{LL} + \gamma_{LT}$, avec :

$$\begin{cases} \gamma_{LL} = \frac{4}{K_L^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) |T_n^{LL}|^2, \\ \gamma_{LT} = \frac{4}{K_L K_T} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(2n+1) |T_n^{LT}|^2. \end{cases} \quad (1.67)$$

La figure 1.5 présente les sections efficaces de diffusion des ondes longitudinales et transverses diffusées par une bille de carbure de tungstène ou de plomb dans de l'époxy.

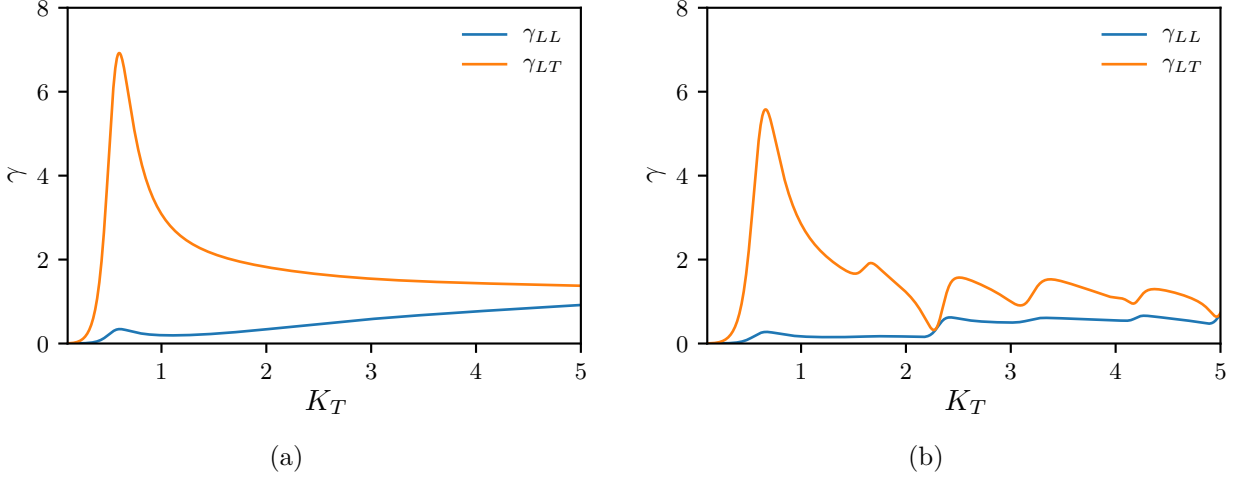


Figure 1.5 – Section efficace de diffusion normalisée en fonction du nombre d'onde adimensionné K_T pour (a) une bille de tungstène et (b) une bille de plomb dans une matrice d'époxy dans le cas d'une onde longitudinale incidente.

Comme mentionné précédemment, le comportement des résultats pour les deux particules à la résonance en translation est similaire. La section efficace de diffusion des ondes longitudinales et transverses présente un maximum atteint pour le nombre d'onde adimensionné $K_T = 0,59$ pour le tungstène et $K_T = 0,66$ pour le plomb. Ces maxima se situent juste après la résonance en translation qui a lieu à $K_T = 0,55$ pour le carbure de tungstène et $K_T = 0,62$ pour le plomb, d'après (1.56). Les différences d'amplitude et de position du pic de la section efficace de diffusion entre le cas du plomb et le cas du carbure de tungstène s'expliquent car le contraste de densité est différent. Pour un contraste moins fort le facteur de qualité (1.57), qui est une fonction purement monotone vis-à-vis de la variable contraste de densité, est moins important. A chaque fréquence, la section efficace de diffusion des ondes transverses est bien plus importante que celle des ondes longitudinales. L'onde incidente est donc majoritairement diffusée en ondes transverses plutôt qu'en ondes longitudinales. Dans le cas de la bille de plomb, la signature d'autres résonances est visible à plus hautes fréquence avec de nouveaux maxima, du fait de sa moins grande rigidité que le carbure de tungstène.

1.1.5.2 Onde transverse incidente

En utilisant le développement (1.63), le champ de déplacement des ondes diffusées dans la matrice de la formule (1.38) se simplifie de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_r^s(r, \theta, \varphi) = u_0 u_r^\infty(\theta, \varphi) \frac{e^{jk_L r}}{r}, \\ u_\theta^s(r, \theta, \varphi) = u_0 u_\theta^\infty(\theta, \varphi) \frac{e^{jk_T r}}{r}, \\ u_\varphi^s(r, \theta, \varphi) = u_0 u_\varphi^\infty(\theta, \varphi) \frac{e^{jk_T r}}{r}, \end{cases} \quad (1.68)$$

1.1 Modélisation de la diffusion par une sphère élastique

avec les fonctions de forme

$$\begin{cases} u_r^\infty(\theta, \varphi) = \frac{j}{k_T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} T_n^{TL} P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi, \\ u_\theta^\infty(\theta, \varphi) = \frac{j}{k_T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[T_n^{TT} \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} + T_n^{SS} \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin(\theta)} \right] \cos(\varphi), \\ u_\varphi^\infty(\theta, \varphi) = \frac{-j}{k_T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[T_n^{TT} \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin(\theta)} + T_n^{SS} \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \right] \sin(\varphi), \end{cases} \quad (1.69)$$

La fonction u_r^∞ est reliée aux ondes longitudinales et les fonctions u_θ^∞ et u_φ^∞ aux ondes transverses T et S. Ces fonctions de formes dépendent des variables θ et φ . La figure 1.6 présente des coupes des modules trois fonctions de formes (1.69), pour une bille de carbure de tungstène de rayon $R = 198,5 \mu\text{m}$, dans une matrice d'époxy, dans différents plans à différentes profondeurs de l'origine à la résonance en translation. Traiter le cas d'une bille de plomb dans une résine époxy mène aux mêmes observations mais avec une amplitude moindre.

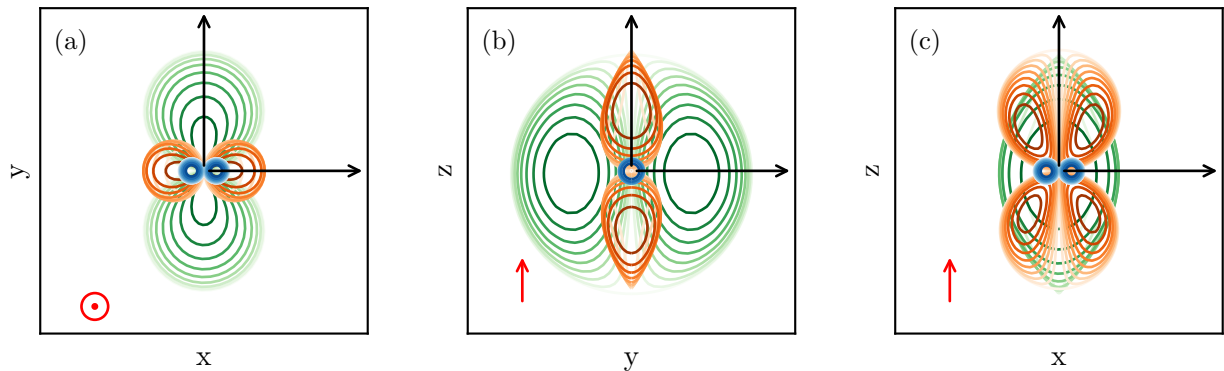


Figure 1.6 – Fonctions de forme à la fréquence f_t en échelle de bleu u_r^∞ , d'orange u_θ^∞ , et de vert u_φ^∞ dans plusieurs plans parallèles à (a) $(0, x, y)$ selon les z croissants, (b) $(0, y, z)$ selon les x croissants et (c) $(0, x, z)$ selon les y croissants. La couleur devient plus claire lorsque la coupe se rapproche du plan à l'origine. La flèche rouge symbolise la direction de propagation de l'onde transverse incidente.

Comme dans le cas d'une onde longitudinale incidente, la diffusion des ondes est dipolaire à la résonance en translation. Des ondes de compression sont diffusées dans la direction x qui correspond à la polarisation du mouvement de corps rigide de la particule à la fréquence de résonance. Il est d'ailleurs observable que les projections des fonctions de forme dans le plan $(0, x, y)$ affichent les mêmes formes que celles de la figure 1.4. Des ondes de cisaillement sont aussi diffusées de manière dipolaire avec une amplitude supérieure à celles des ondes longitudinales. L'onde transverse incidente est donc majoritairement diffusée en ondes transverses.

Les figures 1.7(a), 1.7(b) et 1.7(c) présentent des coupes des trois fonctions de formes (1.69) dans différents plans à différentes profondeurs de l'origine à la résonance en rotation, pour la même configuration que la figure 1.6.

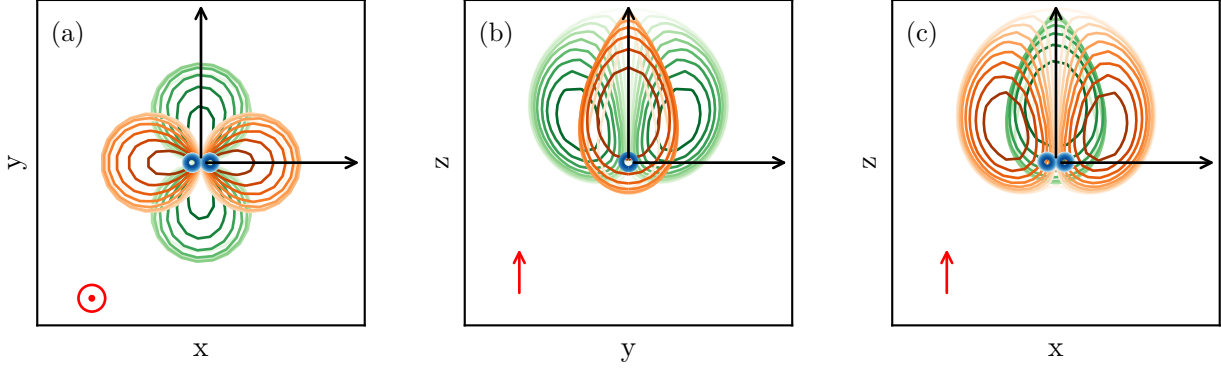


Figure 1.7 – Fonctions de forme à la fréquence f_r en échelle de bleu u_r^∞ , d'orange u_θ^∞ , et de vert u_φ^∞ dans plusieurs plans parallèles à (a) $(0,x,y)$ selon les z croissants, (b) $(0,y,z)$ selon les x croissants et (c) $(0,x,z)$ selon les y croissants. La couleur devient plus claire lorsque la coupe se rapproche du plan à l'origine. La flèche rouge symbolise la direction de propagation de l'onde transverse incidente.

Comme à la résonance en translation, des ondes longitudinales sont diffusées de manière dipolaire dans la direction de déplacement de corps rigide de la particule. Cependant, la diffusion des ondes transverses est bien plus orientée vers l'avant dans le sens de propagation de l'onde incidente. Comme à la résonance en translation, les ondes transverses diffusées ont une amplitude plus importante que les ondes longitudinales.

En utilisant le développement (1.63), le champ de contrainte des ondes diffusées dans la matrice de la formule (1.41) se simplifient en

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r,\theta,\varphi) = u_0 j \omega c_L \rho f_r(\theta,\varphi) \frac{e^{jk_L r}}{r}, \\ \sigma_{r\theta}(r,\theta,\varphi) = u_0 j \omega c_T \rho f_\theta(\theta,\varphi) \frac{e^{jk_T r}}{r}, \\ \sigma_{r\varphi}(r,\theta,\varphi) = u_0 j \omega c_T \rho f_\varphi(\theta,\varphi) \frac{e^{jk_T r}}{r}. \end{cases} \quad (1.70)$$

En injectant les formules (1.68) et (1.70) dans (1.60) et en utilisant les relations d'orthogonalité (1.14), (1.16) et (1.17), la section efficace de diffusion normalisée s'écrit alors $\gamma_T = \gamma_{TL} + \gamma_{TT} + \gamma_{SS}$ avec :

$$\begin{cases} \gamma_{TL} = \frac{1}{2K_L K_T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} |T_n^{TL}|^2, \\ \gamma_{TT} = \frac{1}{2K_T^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) |T_n^{TT}|^2, \\ \gamma_{SS} = \frac{1}{2K_T^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) |T_n^{SS}|^2. \end{cases} \quad (1.71)$$

La figure 1.8 présente les sections efficaces de diffusion des ondes longitudinales et transverses diffusées par une bille de carbure de tungstène ou de plomb dans de l'époxy. Comme dans le cas de l'onde longitudinale incidente, les sections efficaces de diffusion des ondes L et T présentent un maximum atteint dans le régime sub-longueur d'onde. Ce maximum se situe aux mêmes valeurs de nombre d'onde adimensionné que dans le cas de l'onde longitudinale incidente. La section efficace de diffusion des ondes S présentent un maximum à $K_T = 0,99$ pour le carbure de tungstène et $K_T = 1,06$ pour le plomb sachant que la résonance en rotation a lieu à $K_T = 0,96$ pour le carbure de tungstène

1.1 Modélisation de la diffusion par une sphère élastique

et $K_T = 1,08$ pour le plomb, d'après (1.58). Les sections efficaces des ondes transverses sont bien plus importantes que celle des ondes longitudinales. L'énergie est donc majoritairement diffusée sous forme d'ondes de cisaillement.

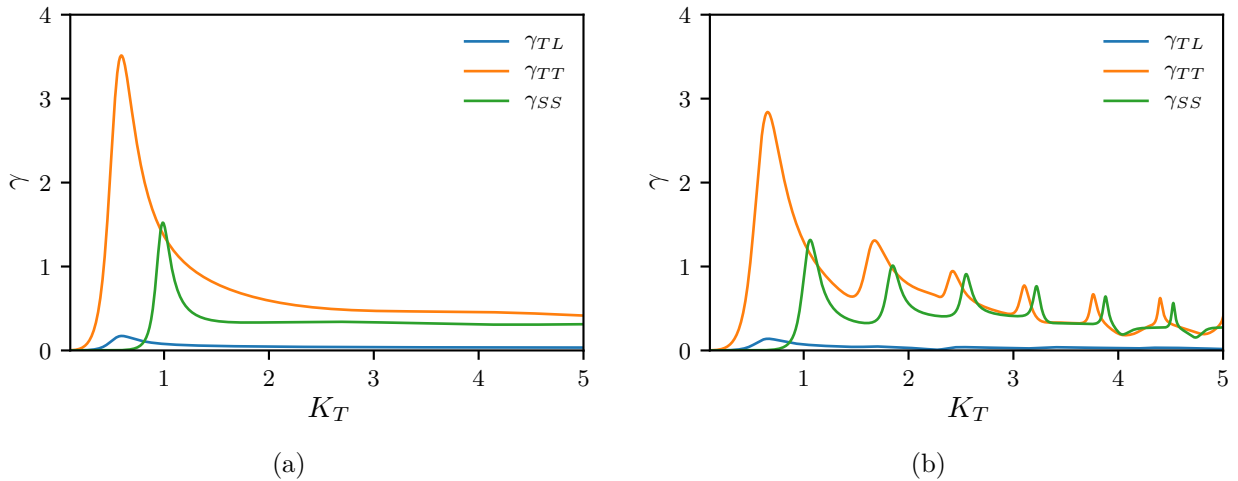


Figure 1.8 – Section efficace de diffusion normalisée pour (a) une bille de tungstène et (b) une bille de plomb dans une matrice époxy dans le cas d'une onde transverse incidente.

Finalement, l'analyse des sections efficaces de diffusion de la figure 1.8 explique les différentes tendances des fonctions de forme des ondes transverses aux résonances. A la résonance en translation, très peu d'onde S est diffusée. La tendance des fonctions de forme des ondes transverses de la figure 1.6 est donc majoritairement due aux ondes T, diffusées de manière dipolaire. En revanche, à la résonance en rotation, des ondes T et S sont diffusées simultanément. La direction de diffusion privilégiée vers l'avant des ondes transverses de la figure 1.7 est alors due aux interférences constructives et destructives des ondes T et S, qui se propagent à la même vitesse, et sont diffusées de manière dipolaire par la particule. La figure 1.9 propose une représentation schématique des ondes diffusées par une particule en champ lointain. La particule A représente la contribution des ondes T diffusées, la particule B la contribution des ondes S diffusées et la particule C la somme de ces deux contributions. Il est à noter sur ce schéma que les amplitudes représentées sont purement indicatives et ne correspondent pas totalement à la réalité car des ondes transverses sont tout de même faiblement diffusées vers l'arrière (voir sur la figure 1.7)

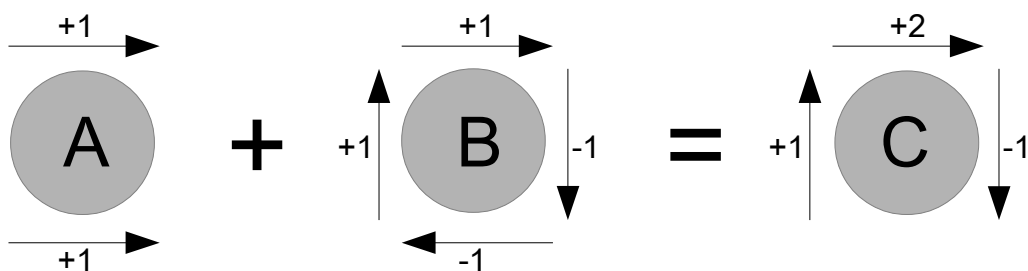


Figure 1.9 – Représentation schématique des ondes transverses diffusées par une particule à la résonance en rotation en champ lointain.

1.2 Diffusion multiple

La diffusion d'une onde longitudinale ou transverse par une unique particule a été modélisée dans la partie précédente. Il s'agit désormais de présenter des modèles traitant de la propagation d'ondes élastiques dans une répartition aléatoire de particules sphériques.

1.2.1 Equations générales de la diffusion multiple pour des champs scalaire

Soit N le nombre de diffuseurs identiques répartis aléatoirement dans un volume V . Les positions des diffuseurs sont repérées par les vecteurs \mathbf{r}_n . L'interaction d'une onde incidente de potentiel $\phi_{\text{inc}}(\mathbf{r})$ avec les diffuseurs engendre la génération de N ondes diffusées de potentiels $\phi_d^n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n)$. A la position \mathbf{r} , le champ total est alors

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^N \phi_d^n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n). \quad (1.72)$$

Ce potentiel tient compte de toutes les interactions entre l'onde incidente et les diffuseurs et de toutes les interactions entre les ondes diffusées par chaque diffuseur. Le champ incident $\phi_i^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_p)$ sur le p -ième diffuseur s'écrit comme la somme de l'onde incidente et des ondes diffusées par tous les autres obstacles :

$$\phi_i^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_p) = \phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \sum_{n \neq p, n=1}^N \phi_d^n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n). \quad (1.73)$$

L'onde diffusée par le p -ième diffuseur est reliée à l'onde incidente sur ce même diffuseur par l'opérateur de transition $T(\mathbf{r}_n)$, propre au couple diffuseur-matrice :

$$\phi_d^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_p) = T(\mathbf{r}_p) \phi_i^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_p). \quad (1.74)$$

En utilisant (1.74), les formules (1.72) et (1.73) s'écrivent

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{r}) = \phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^N T(\mathbf{r}_n) \phi_i^n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n), \\ \phi_i^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_p) = \phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \sum_{n \neq p, n=1}^N T(\mathbf{r}_n) \phi_i^n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n). \end{cases} \quad (1.75)$$

La deuxième équation de (1.75) est un système de N équations à N inconnues, les N champs incidents sur les p -ièmes diffuseurs $\phi_i^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_p)$. Une première manière de procéder est de résoudre ce problème numériquement [75]. Selon les méthodes utilisées, une résolution numérique peut cependant nécessiter un grand temps de calcul. Une deuxième possibilité est de caractériser l'onde cohérente, autrement dit la composante de l'onde totale qui résiste aux interférences entre l'onde incidente et toutes les ondes diffusées. Cette onde peut alors être décrite comme s'étant propagée dans un milieu considéré homogène, avec une vitesse et une atténuation qui dépend de la fréquence.

Les champs étudiés sont alors moyennés sur toutes les positions possibles de diffuseurs dans le volume d'étude V , ce qui permet de s'affranchir de la position des diffuseurs. Ce procédé, appelé moyennage d'ensemble, est appliqué sur un champ local $f(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ exact où la position des N diffuseurs est connue :

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \int_V \dots \int_V f(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) dV_1 \dots dV_N. \quad (1.76)$$

1.2 Diffusion multiple

$p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ est la densité de probabilité de présence de tous les diffuseurs aux positions $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$. Il est utile de définir le moyennage d'ensemble conditionné par la présence d'un diffuseur à une position \mathbf{r}_p , défini par

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{r}_p} = \int_V \dots \int_V f(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{p-1}, \mathbf{r}_{p+1}, \dots, \mathbf{r}_N \mid \mathbf{r}_p) dV_1 \dots dV_{p-1} dV_{p+1} \dots dV_N. \quad (1.77)$$

$p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{p-1}, \mathbf{r}_{p+1}, \dots, \mathbf{r}_N \mid \mathbf{r}_p)$ est la densité de probabilité de présence des diffuseurs aux positions $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{p-1}, \mathbf{r}_{p+1}, \dots, \mathbf{r}_N$, conditionnée par la présence d'un diffuseur en \mathbf{r}_p définie par

$$p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{p-1}, \mathbf{r}_{p+1}, \dots, \mathbf{r}_N \mid \mathbf{r}_p) p(\mathbf{r}_p). \quad (1.78)$$

La distribution étant monodisperse, la densité de probabilité de la position d'un unique diffuseur $p(\mathbf{r}_p)$ est reliée au nombre de diffuseurs par unité de volume par $n(\mathbf{r}_p) = Np(\mathbf{r}_p)$. De même, la moyenne d'ensemble conditionnée par la présence de deux diffuseurs aux positions \mathbf{r}_p et \mathbf{r}_{p+1} s'écrit

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_{p+1}} = \int_V \dots \int_V f(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{p-1}, \mathbf{r}_{p+2}, \dots, \mathbf{r}_N \mid \mathbf{r}_p, \mathbf{r}_{p+1}) dV_1 \dots dV_{p-1} dV_{p+2} \dots dV_N, \quad (1.79)$$

avec

$$p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{p-1}, \mathbf{r}_{p+1}, \dots, \mathbf{r}_N \mid \mathbf{r}_p) = p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{p-1}, \mathbf{r}_{p+2}, \dots, \mathbf{r}_N \mid \mathbf{r}_p, \mathbf{r}_{p+1}) p(\mathbf{r}_{p+1} \mid \mathbf{r}_p). \quad (1.80)$$

Par une procédure similaire à celle décrite ci-dessus, il est possible de définir les moyennes conditionnées par la présence de 3, 4 ... N diffuseurs.

En appliquant les relations (1.76), (1.77) et (1.78) au système (1.75), il vient

$$\langle \phi(\mathbf{r}) \rangle = \phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^N \int_V T(\mathbf{r}_n) \langle \phi_i(\mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{r}_n} p(\mathbf{r}_n) dV_n, \quad (1.81)$$

avec

$$\langle \phi_i(\mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{r}_p} = \phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \sum_{n \neq p, n=1}^N \int_V T(\mathbf{r}_n) \langle \phi_i(\mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_{p+1}} p(\mathbf{r}_{p+1} \mid \mathbf{r}_p) dV_n, \quad (1.82)$$

où $\langle \phi(\mathbf{r}) \rangle$ est le champ moyen dans tout le volume V . $\langle \phi_i(\mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{r}_p}$ est le champ moyen incident sur un diffuseur à la position \mathbf{r} conditionné par la présence d'un diffuseur en \mathbf{r}_p . $\langle \phi_i(\mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_{p+1}}$ représente le champ moyen incident sur un diffuseur à la position \mathbf{r} conditionné par la présence de deux diffuseurs en \mathbf{r}_p et \mathbf{r}_{p+1} . Les équations (1.81) et (1.82) définissent les deux premières équations d'une hiérarchie d'équations. Il est alors nécessaire de couper cette hiérarchie en introduisant un certain nombre d'approximations.

1.2.2 Independent scattering approximation

La première approximation, nommée l'*Independent Scattering Approximation* posée par Foldy [11], consiste à considérer que le champ moyen incident sur un diffuseur à la position \mathbf{r} , conditionné par la présence d'un diffuseur en \mathbf{r}_p correspond au champ moyen qui existerait à cette position si ce diffuseur n'existait pas, autrement dit

$$\langle \phi_i(\mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{r}_p} = \langle \phi(\mathbf{r}) \rangle. \quad (1.83)$$

Cette approximation tend à considérer que le champ moyen incident sur tous les diffuseurs est identique. Cela revient à négliger toutes interactions entre les N diffuseurs. Cette approximation est alors

valide pour une faible concentration de diffuseurs et revient à couper la hiérarchie d'équations à la relation (1.81) :

$$\langle \phi(\mathbf{r}) \rangle = \phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^N \int_V T(\mathbf{r}_n) \langle \phi(\mathbf{r}) \rangle p(\mathbf{r}_n) dV_n. \quad (1.84)$$

La suite de cette partie traite le cas d'une onde plane incidente sur une distribution monodisperse et homogène de diffuseurs identiques. A faible concentration de diffuseurs dans le volume d'étude V , $n(\mathbf{r}_p)$ correspond au nombre de diffuseurs par unité de volume n_0 . Le potentiel scalaire associé à l'onde incidente se propageant dans la direction z et de nombre d'onde k est

$$\phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) = \phi_{\text{inc}}(z) = e^{jkz}. \quad (1.85)$$

L'onde moyennée sur l'ensemble de la distribution est traitée sous la même forme que l'onde incidente, avec un nombre d'onde effectif k_{eff} qui dépend de la distribution

$$\langle \phi(\mathbf{r}) \rangle = e^{jk_{\text{eff}}z}. \quad (1.86)$$

Sans rentrer dans le détail des calculs, en négligeant la diffusion des ondes vers l'arrière devant celle diffusée vers l'avant, le nombre d'onde effectif se pose sous la simple forme

$$k_{\text{eff}}^2 = k^2 + 4\pi n_0 u_r^\infty(0), \quad (1.87)$$

où $u_r^\infty(0)$ est la fonction de forme radiale en champ lointain d'un diffuseur unique vers l'avant, dans le sens de propagation de l'onde incidente. Ce nombre d'onde effectif est initialement obtenu par Foldy pour des diffuseurs ponctuels qui rayonnent de manière isotrope. Les potentiels développés sont des potentiels scalaires. Il s'agit désormais de transposer l'équation (1.87) pour une onde longitudinale incidente sur un dispersion de particules sphériques de rayon R . Le nombre d'onde incident est dans ce cas $k = k_L$. La fonction de répartition radiale utilisée est donnée par l'équation (1.65). Cela constitue une hypothèse forte dans la mesure où le rayonnement des particules n'est clairement pas isotrope. A haute fréquence cependant, la diffusion des ondes longitudinales vers l'avant est bien plus importante que celle vers l'arrière. Il vient donc

$$k_{\text{eff}}^2 = k_L^2 - \frac{4j\pi n_0}{k_L} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) T_m^{LL}. \quad (1.88)$$

En considérant que le terme d'ordre 1 en concentration est petit devant k_L^2 , ce nombre d'onde devient

$$k_{\text{eff}} = k_L - \frac{2j\pi n_0}{k_L^2} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) T_m^{LL}. \quad (1.89)$$

1.2.3 Quasicrystalline approximation

L'*Independent Scattering Approximation* est valide pour une faible concentration de diffuseurs. Dans ce cas, la position d'un diffuseur n'influence pas la position d'un second. Pour des dispersions plus fortes en concentration, il est nécessaire d'utiliser une approximation moins contraignante. La *Quasicrystalline Approximation*, posée par Lax [76], consiste à considérer qu'un champ moyen conditionné par la présence d'une particule est le même que le champ moyen conditionné par la présence de deux particules, autrement dit :

$$\langle \phi_i(\mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_{p+1}} = \langle \phi(\mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{r}_p}. \quad (1.90)$$

1.2 Diffusion multiple

Par cette hypothèse, l'équation (1.82) devient

$$\langle \phi_i(\mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{r}_p} = \phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \sum_{n=1, n \neq p}^N \int_V T(\mathbf{r}_n) \langle \phi(\mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{r}_p} p(\mathbf{r}_{p+1} | \mathbf{r}_p) dV_n, \quad (1.91)$$

Fikioris et Waterman [12] étudient ce problème où les diffuseurs sont des particules sphériques et introduisent la notion de *hole correction* qui impose une distance d'exclusion dans l'intégrale de l'équation (1.91) en posant la densité de probabilité conditionnelle :

$$p(\mathbf{r}_{p+1} | \mathbf{r}_p) = \begin{cases} n_0, & \text{si } |\mathbf{r}_{p+1} - \mathbf{r}_p| < b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.92)$$

b correspond à un rayon d'exclusion fixé à $b = 2R$ ce qui empêche deux particules de s'interpénétrer. Ce paramètre a son importance dans la mesure où il permet de tenir compte de la taille finie des diffuseurs alors que l'ISA considère des diffuseurs ponctuels. Sans rentrer dans le détail des calculs, en considérant une onde longitudinale incidente (1.85) et une onde cohérente longitudinale (1.86), le nombre d'onde effectif est obtenu avec le système infini suivant :

$$A_n = n_0 \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) T_m^{LL} A_m \sum_{p=0}^{\infty} (-j)^p G(0, m | 0, n | p, p) d_p(k_L, k_{\text{eff}} | b), \forall n \geq 0. \quad (1.93)$$

G est le coefficient de Gaunt défini par

$$G(m, n | \mu, \nu | p, q) = (-1)^{m+\mu} (2p+1) \left[\frac{(n+m)! (\nu+\mu)! (p-m-\mu)!}{(n-m)! (\nu-\mu)! (p+m+\mu)!} \right]^2 \begin{pmatrix} n & \nu & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & \nu & p \\ m & \mu & -m-\mu \end{pmatrix} \quad (1.94)$$

où les termes entre parenthèses représentent le symbole de Wigner 3-j [77] et

$$d_p(k_L, k_{\text{eff}} | b) = -\frac{4\pi b^2}{k_{\text{eff}}^2 - k_L^2} j^p \left[k_L h'_p(k_L b) (k_{\text{eff}} b) - k_{\text{eff}} h_p(k_L b) j'_p(k_{\text{eff}} b) \right]. \quad (1.95)$$

Les coefficients A_n correspondent aux coefficients du développement en harmoniques sphériques de l'onde cohérente. j_p et h_p sont respectivement les fonctions de Bessel et de Hankel sphérique de première espèce. Le système (1.93) est un système d'une infinité d'équations à une infinité d'inconnues, les coefficients A_n . Afin que des solutions non triviales existent, le nombre d'onde k_{eff} est déterminé de manière à ce que le déterminant de la matrice de ce système s'annule. Les valeurs des coefficients A_n sont ensuite déterminées en utilisant la valeur de k_{eff} obtenue et le théorème d'extinction donné pour ce problème par

$$k_{\text{eff}} = k_L - \frac{2j\pi n_0}{k_L^2} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) T_m^{LL} A_m. \quad (1.96)$$

Le théorème d'extinction signifie qu'une onde incidente dans un milieu multi-diffusant disparaît pour laisser place à une onde cohérente de même nature dont le nombre d'onde correspond à celui du milieu de propagation à l'ordre 0 en concentration. Il est observable que ce nombre d'onde correspond au coefficient A_m près à (1.89). Les coefficients A_m contiennent alors les informations des interactions entre les diffuseurs.

D'un point de vue mathématique, la distance d'exclusion b est introduite par Fikioris et Waterman pour contourner une singularité et peut donc prendre n'importe quelle valeur. En particulier, Linton

et Martin font tendre ce paramètre vers 0 [78]. Récemment, Rohfrisch *et al.* ont montré que ce paramètre peut être associé à une distance d'exclusion minimale entre diffuseurs [79]. Notamment, lors de la conception d'échantillons cette distance est souvent prise supérieure au diamètre $2R$. Cela conduit à introduire des corrélations à courtes distances entre les diffuseurs.

1.2.4 Prise en compte des conversions

Les équation précédentes sont développées pour un cas purement acoustique où seules des ondes longitudinales existent dans le milieu de propagation. Luppé, Conoir et Norris [56] reprennent alors les équations développées par Fikioris et Waterman en considérant le milieu de propagation comme élastique. Dans ce milieu, des ondes longitudinales et transverses peuvent se propager. Le cas d'une onde longitudinale incidente est traité, les champ développés sont alors scalaires. En tenant compte des conversions d'onde, l'équation (1.82) devient

$$\langle \phi_i^{(p)}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{r}_p} = \delta_{pr} \phi_{\text{inc}}^{(r)}(\mathbf{r}) + \sum_{q=L,T} \sum_{n=1, n \neq k}^N \int_V T^{qp}(\mathbf{r}_n) \langle \phi_i^{(q)}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_{k+1}} p(\mathbf{r}_{k+1} | \mathbf{r}_k) dV_n, \quad (1.97)$$

avec $p, r = L, T$. $T^{qp}(\mathbf{r}_n)$ correspond à l'opérateur de transition d'un diffuseur situé en \mathbf{r}_n , excité par une onde $q = L, T$ et diffusant une onde $p = L, T$. En tenant compte de la *hole correction* (1.92), ces calculs aboutissent au système suivant

$$A_n^{pk} = n_0 \sum_{q=L,T} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) T_m^{qp} A_m^{qk} \sum_{l=0}^{\infty} (-j)^l G(0, m | 0, n | l, l) d_l(k_p, \xi_k, | b), \quad (1.98)$$

où $p, k = L, T$. ξ_L et ξ_T sont respectivement les nombres d'ondes longitudinales et transverses, solutions de l'équation caractéristique de ce système. Le système (1.98) est équivalent au système (1.93) si les conversions d'ondes sont négligées. La résolution de ce système signifie que pour une onde longitudinale incidente, il existe une onde longitudinale et un onde transverse cohérente. Dans l'hypothèse de faible concentration, et supposant que le nombre d'onde effectif L ou T est proche du nombre d'onde L ou T de la matrice de propagation, le développement asymptotique suivant est posé :

$$\xi_p^2 = k_p^2 - 4jn_0\xi_p^{(1)} - 16n_0^2\xi_p^{(2)}, \quad p = L, T. \quad (1.99)$$

De ce fait, il vient

$$\begin{cases} \xi_p^{(1)} = M_{pp}^{(0)}(k_p), \\ \xi_p^{(2)} = M_{pp}^{(1)}(k_p) + \frac{M_{pq}^{(0)}(k_p)M_{qp}^{(0)}(k_p)}{k_p^2 - k_q^2}, \quad p \neq q, \end{cases} \quad (1.100)$$

avec

$$\begin{cases} M_{qp}^{(0)}(k_p) = \frac{\pi}{\sqrt{k_q k_p}} \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{qp}, \\ M_{pp}^{(1)}(k_p) = \frac{\pi}{k_p} \sum_{q=L,T} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{n+\nu} (2n+1)(2\nu+1) T_n^{qp} Q_{n\nu}^{(q)} T_\nu^{pq} \end{cases} \quad (1.101)$$

et

$$Q_{n\nu}^{(q)}(k_p) = \frac{j\pi b}{k_p^2 - k_q^2} (-1)^{n+\nu} \left\{ \frac{j}{k_q b} + \sum_{l=0}^{\infty} G(0, \nu | 0, n | l, l) [k_p b j_l'(k_p b) h_l(k_q b) - k_q b j_l(k_p b) h_l'(k_q b)] \right\}, \quad p \neq q, \quad (1.102)$$

1.2 Diffusion multiple

$$Q_{n\nu}^{(q)}(k_p) = -\frac{j\pi b}{k_p^2 - k_q^2} (-1)^{n+\nu} \sum_{l=0}^{\infty} G(0, \nu | 0, n | l, l) \times \left\{ j_l'(k_p b) (h_l(k_p b) + k_p b h_l'(k_q b)) + \frac{1}{k_p b} \left[(k_p b)^2 - l(l+1) \right] j_l(k_p b) h_l(k_q b) \right\}. \quad (1.103)$$

Lorsque $k_p b$ et $k_q b$ tendent vers 0, la solution précédente se simplifie en

$$\frac{\xi_p^2}{k_p^2} = 1 - \frac{4j\pi n_0}{k_p^3} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) T_m^{pp} - \frac{8\pi^2 n_0^2}{k_p^6} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (2n+1)(2\nu+1) G(0, \nu | 0, n | l, l) \left\{ l T_n^{pp} T_\nu^{pp} + \frac{3k_p^3}{k_q(k_p^2 - k_q^2)} \left(\frac{k_p}{k_q} \right)^2 T_n^{qp} T_\nu^{pq} \right\}. \quad (1.104)$$

Ce modèle considère que les conversions d'ondes interviennent uniquement au 2ème ordre en concentration. En tronquant au premier ordre en concentration, ce nombre d'onde effectif correspond exactement à celui obtenu par Foldy (1.88), généralisé pour des ondes longitudinales.

1.2.5 Diffusion multiple d'ondes transverses

Les modèles développés ci-dessus considèrent tous le cas d'une onde longitudinale incidente. De ce fait les champs sont développés sur les harmoniques sphériques scalaires. Aucun des champs développés ne dépend de l'angle φ . Une onde plane transverse est développée sur les harmoniques sphériques qui prennent en compte la dépendance en l'angle φ de la géométrie du problème. Fikioris et Waterman [21] et Tsang et Kong [20] exposent cette approche en traitant le cas d'ondes électromagnétiques. Les champs en présence sont alors exprimés par des potentiels vecteurs, développés sur deux harmoniques sphériques vectorielles. Il est alors tout à fait envisageable de considérer ce modèle pour la diffusion des ondes de cisaillement par analogie. Les équations (1.81) et (1.82) deviennent alors

$$\langle \Psi(\mathbf{r}) \rangle = \Psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^N \int_V T(\mathbf{r}_n) \langle \Psi_i(\mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{r}_n} p(\mathbf{r}_n) dV_n, \quad (1.105)$$

$$\langle \Psi(\mathbf{r})_i(\mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{r}_p} = \Psi(\mathbf{r})_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \sum_{n=1, n \neq p}^N \int_V T(\mathbf{r}_n) \langle \Psi_i(\mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_{p+1}} p(\mathbf{r}_{p+1} | \mathbf{r}_p) dV_n, \quad (1.106)$$

Le potentiel vecteur associé à l'onde incidente dans la direction z et de nombre d'onde k_T est

$$\Psi_{\text{inc}} = e^{jk_T z} \mathbf{e}_x. \quad (1.107)$$

Le potentiel de l'onde moyenne est traitée sous la même forme que le potentiel de l'onde incidente avec un nombre d'onde k_{eff} :

$$\langle \Psi(\mathbf{r}) \rangle = e^{jk_{\text{eff}} z} \mathbf{e}_x. \quad (1.108)$$

Ecrire un tel potentiel pour l'onde moyenne revient à considérer que la polarisation de l'onde incidente est conservé lors du processus de diffusion multiple. D'une manière analogue au cas scalaire et en prenant compte la "hole correction", le nombre d'onde effectif est solution du système infini suivant :

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = n_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} T_m^{TT} A_m \\ T_m^{SS} B_m \end{pmatrix} \sum_{p=0}^{\infty} (-j)^p G(1, m | -1, n | p, p) g_1(m, n, p) d_p(k_T, k_{\text{eff}} | b) \right. \\ \left. \begin{pmatrix} T_m^{SS} B_m \\ T_m^{TT} A_m \end{pmatrix} \sum_{q=0}^{\infty} (-j)^q G(1, m | -1, n | q, q-1) g_2(m, n, p) d_q(k_T, k_{\text{eff}} | b) \right\} \quad (1.109)$$

avec

$$g_1(m, n, p) = \frac{j^{n+p-m}}{2n(n+1)} \left[2n(n+1)(2n+1) + (n+1)(m-n+p+1)(m+n+p) - n(n-m+p+1)(m+n+p+2) \right] \quad (1.110)$$

et

$$g_2(m, n, p) = \frac{j^{n+p-m}}{2n(n+1)} \left[p^2 - (n-m)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[(n+m+1)^2 - p^2 \right]^{\frac{1}{2}} (2n+1). \quad (1.111)$$

Les coefficients A_n et B_n correspondent aux coefficients des deux harmoniques sphériques vectorielles sur lesquelles est développé le potentiel vecteur de l'onde cohérente. Comme précédemment, l'annulation du déterminant de la matrice de ce système conduit au nombre d'onde effectif. Les coefficients A_n et B_n sont ensuite obtenus grâce au théorème d'extinction qui est ici

$$k_{\text{eff}} = k_T - \frac{j\pi n_0}{k_T^2} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \left[T_m^{TT} A_m + T_n^{SS} B_m \right]. \quad (1.112)$$

Enfin, dans le cadre de l'ISA, Tsang et Kong obtiennent une expression similaire à la relation de Foldy (1.89) pour le cas transverse :

$$k_{\text{eff}} = k_T - \frac{jn_0\pi}{k_T^2} \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1) \left(T_m^{TT} + T_m^{SS} \right). \quad (1.113)$$

1.2.6 Expériences

Expérimentalement, la propagation d'onde cohérentes dans un milieu multidiffusant solide a été assez peu étudiée. Cela est en premier lieu dû à la difficulté de fabriquer des échantillons mais aussi à la complexité des mesures. Néanmoins, Kinra, Ker et Datta [31] proposent des résultats expérimentaux obtenus avec une dispersion de billes de plomb dans une résine d'époxy. La figure 1.10 présente la vitesses des ondes longitudinales dans ces dispersions à différentes concentrations, obtenues par chronométrie issue de la référence.

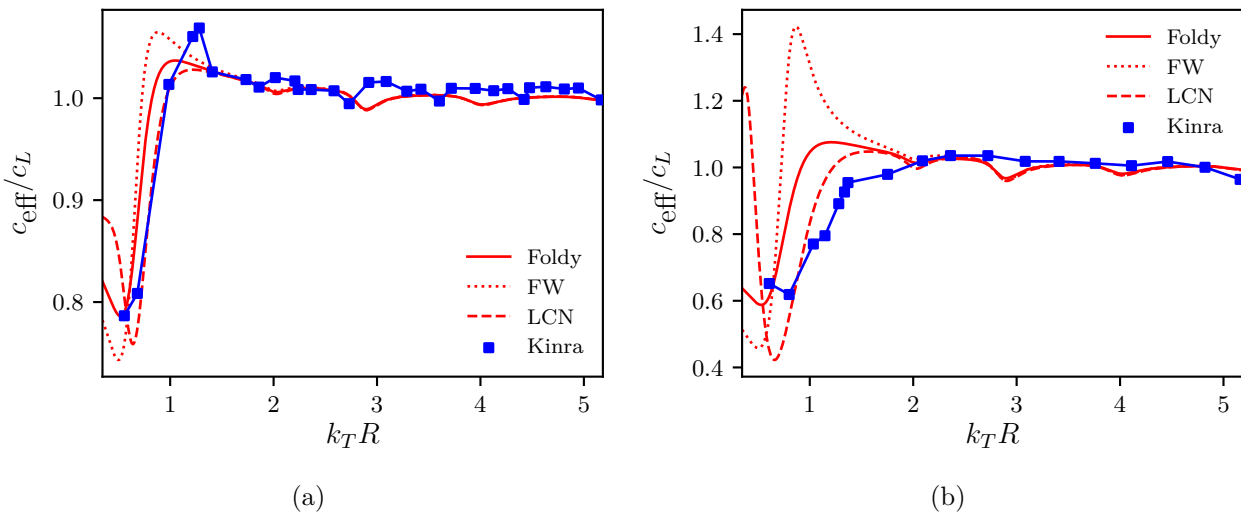


Figure 1.10 – Comparaison de résultats expérimentaux obtenus par Kinra, Ker et Datta [31] dans un milieu composite avec des prévisions théoriques pour (a) une concentration de diffuseurs de 5 % et (b) de 15 %. En trait plein rouge les courbes obtenues avec le modèle de Foldy (1.88), en pointillé rouge avec la formule de Fikioris et Waterman (FW) (1.93), en tiret rouge avec la formule de Luppé, Conoir et Norris (LCN) (1.98)

1.3 Conclusion

La référence [31] ne propose cependant pas de résultats en atténuation. La figure 1.10 présente également les vitesses effectives obtenues grâce aux modèles de Foldy [11], Fikioris et Waterman [12] et Luppé, Conoir et Norris [56]. Les résultats expérimentaux et théoriques affichent un bon accord pour les deux concentrations, d'autant plus avec le modèle de Luppé *et al.* et mettent en évidence un saut de vitesse de phase à approximativement $k_T R = 1$. Cette forte dispersion est d'autant plus importante lorsque la concentration de diffuseurs augmente. Finalement, Kinra, Ker et Datta associent cette dispersion à la résonance en translation des particules.

Plus récemment Duranteau *et al.* [35] ont proposé des résultats expérimentaux obtenus avec des dispersions de billes de carbure de tungstène dans une résine époxy. Les paramètres effectifs des échantillons sont évalués grâce à la mesure d'ondes longitudinales transmises au travers d'un échantillon immergé dans un banc d'eau et une méthode spectrale. La résonance en translation des billes est attendue dans le domaine de fréquence sondé. La figure 1.11 présente la vitesse et atténuation obtenues expérimentalement à une fraction volumique de 5% ainsi que des résultats théoriques. Comme précédemment, les vitesses présentent une forte dispersion à approximativement 0,5 MHz. Cet effet s'associe à un pic d'atténuation à cette même fréquence. Pour finir, les résultats expérimentaux présentent un très bon accord avec les courbes théoriques, d'autant plus avec le modèle LCN qui montre bien l'importance de la conversion des ondes L en ondes T.

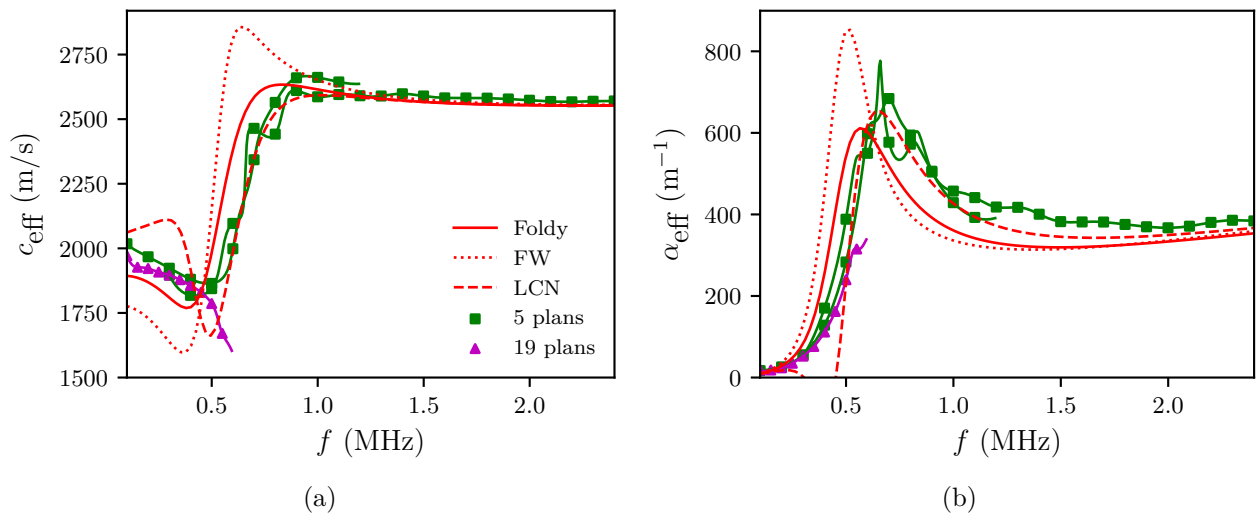


Figure 1.11 – Comparaison de résultats expérimentaux (a) de vitesse et (b) d'atténuation obtenus par Duranteau *et al.* [35] dans un milieu composite avec des prévisions théoriques pour une concentration de diffuseurs de 5 %. En trait plein rouge les courbes obtenues avec la formule de Foldy (1.88), en pointillé rouge avec la formule de Fikioris et Waterman (FW) (1.93), en tiret rouge avec la formule de Luppé, Conoir et Norris (LCN) (1.98)

1.3 Conclusion

La diffusion d'une onde élastique par une particule sphérique unique a été ici décrite théoriquement. Grâce à la décomposition des différents champs en présence sur les harmoniques sphériques et les relations d'orthogonalité des polynômes de Legendre, les amplitudes des modes des ondes L, T et S diffusées sont évaluées indépendamment. L'analyse des coefficients des modes dipolaires $n = 1$ permet d'identifier des résonances sub-longueur d'ondes. Ces résonances sont des résonances de déplacement

de corps rigide en translation pour les ondes L et T et en rotation pour les ondes S. La fréquence et le facteur de qualité de ces résonances dépendent en première approximation du contraste de densité de la matrice et de la particule. A la résonance en translation, les sections efficaces de diffusion et les fonctions de forme révèlent un fort rayonnement dipolaire d'ondes transverses dans la direction perpendiculaire au déplacement de corps rigide. Lors de la résonance en translation, les ondes sont en revanche majoritairement diffusées vers l'avant. Les études théoriques et expérimentales de la diffusion d'ondes longitudinales dans une répartition aléatoire monodisperse ont permis d'établir l'influence de la résonance en translation qui engendre simultanément une forte dispersion de la vitesse et un pic d'atténuation de l'onde cohérente.

Chapitre 2

Modélisation Diphasique de la Propagation d'Ondes Elastiques dans un Matériau Composite à Particules Sphériques

La propagation d'ondes élastiques dans un milieu fluide ou solide contenant une distribution aléatoire de diffuseurs est un sujet fondamental, traité à plusieurs reprises selon différentes approches théoriques. Tout d'abord, les modèles basés sur la théorie de la diffusion multiple ont pour but d'évaluer directement les champs effectifs dans le composite. Ils ont pour avantages que les résultats obtenus sont valides à chaque fréquence et quel que soit le type de diffuseur considéré. Cependant, la hiérarchie infinie d'équations impose généralement l'utilisation de différentes hypothèses afin de fermer le problème tel l'*Independent Scattering Approximation* [11] ou la *Quasicrystalline Approximation* [76]. Récemment, Luppé, Conoir et Norris ont développé un modèle basé sur cette approche pour des matrices solides et qui permet de prendre en compte les conversions d'ondes sur les diffuseurs [56]. Les résultats ont montré un bon accord avec des expériences sur un matériau élastique contenant des particules rigides denses mais présentent néanmoins des atténuations négatives non physiques à des concentrations moyennes [35]. De plus, ce modèle ne tient pas compte de la polarisation des ondes de cisaillement comme cela peut être fait en travaillant sur des ondes électromagnétiques [20]. Finalement, ce type d'approche mène souvent à un système d'équations complexe à résoudre. Un autre type de méthode consiste à réduire le problème d'interaction entre plusieurs particules à l'étude d'une unique particule dans un milieu homogène dont les propriétés correspondent aux propriétés effectives du milieu composite [13]. Contrairement aux modèles de diffusion multiple, ce sont directement les propriétés mécaniques effectives du composite qui sont obtenues, par un processus itératif. Des versions plus précises de cette approche existent, où le milieu effectif et la particule étudiée sont séparés par une couche de la matrice pure [14]. Il peut aussi s'agir de trouver les propriétés effectives du milieu qui minimisent l'amplitude des ondes diffusées vers l'avant par la particule [15]. Quelle que soit la méthode utilisée, ces deux types de modélisation conduisent à un calcul numérique des nombres d'onde effectifs et ne proposent pas toujours de formules explicites. Enfin, ce type d'approche a surtout été établi pour des ondes de compression. Il n'existe, à notre connaissance, à ce jour qu'un seul modèle mécanique pour les ondes de cisaillement [22].

Une autre approche, plus phénoménologique, reposant sur les équations de la mécanique des fluides diphasiques, développées initialement par Buyevich et Shchelchkova [16], propose une alternative intéressante. Cette méthode consiste en la résolution simultanée des équations de conservation moyennes dans les phases associées à la matrice et aux particules. Les équations de conservation moyennes dans chaque phase sont obtenues par un processus de moyennage d'ensemble appliqué sur les équations de conservation locales. Les deux phases sont couplées grâce à différents termes d'interaction. L'étude de ces termes de couplages, qui ne sont pas introduits explicitement dans les autres type de modélisation, se trouve au coeur de cette théorie. De plus, cette méthode a l'avantage de directement présenter une relation de dispersion facilement résoluble. Il a récemment été montré que ce type d'approche permet de prendre en compte les effets de diffusion multiple dans des matrices fluides et est en parfait accord analytique avec des modèles de diffusion multiple lorsque la longueur d'onde devient grande devant la taille des particules [18]. De même, une étude plus poussée a utilisé une approche auto-consistante afin de considérer les interactions entre les particules [19]. Les atténuations effectives obtenues à basses fréquences coïncident avec des mesures expérimentales dans des milieux liquides fortement diffusant [80]. L'objectif est alors d'adapter cette démarche aux matrices solides élastiques.

Dans ce chapitre, une modélisation originale de la propagation des ondes cohérentes longitudinales L et transverses T dans un matériau élastique et isotrope contenant une distribution aléatoire de sphères rigides est proposée. Du fait de son approche fondée sur la dynamique des fluides à deux phases couplées, le modèle est nommé "Coupled Phase Theory" (CPT). Après avoir présenté les équations de conservation dans ce système, une attention particulière est portée au calcul des différents termes de couplage qui sont comparés avec l'étude de la diffusion d'une sphère unique développée dans le chapitre 1. La relation de dispersion est ensuite établie puis résolue pour le cas d'ondes longitudinale et transverse. Les nombres d'onde effectifs sont finalement comparés avec ceux obtenus par des modèles basés sur la théorie de la diffusion multiple en régime grande longueur d'onde.

2.1 Equations moyennes

Le système étudié correspond à un milieu hétérogène contenant une dispersion aléatoire de N billes rigides denses de rayon R et non pénétrables, la phase disperse d , dans un milieu de propagation homogène et isotrope, la phase continue c . Le système considéré n'est soumis à aucune force ou moment volumiques extérieurs.

2.1.1 Moyennage d'ensemble

Moyennage d'ensemble dans tout le mélange : Un moyennage d'ensemble, valide dans chaque phase, est appliqué à ce système sur des dimensions suffisamment grandes devant la taille des particules et la distance entre plus proches voisins, de manière à effectuer un lissage statistique des équations de conservation. Une grandeur physique arbitraire, notée $G(t, \mathbf{r} | C_N)$, est considérée et définie continûment dans les deux phases, au temps t et à la position \mathbf{r} étant donné la position des N particules $C_N = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ dans le système. La moyenne d'ensemble de cette grandeur est alors calculée par

2.1 Equations moyennes

$$g(t, \mathbf{r}) = \langle G(t, \mathbf{r} | C_N) \rangle = \int G(t, \mathbf{r} | C_N) p(t, C_N) dC_N, \quad (2.1)$$

où $p(t, C_N)$ est la fonction de distribution des N sphères dans le volume d'étude. La moyenne d'ensemble $g(t, \mathbf{r})$ a pour effet de considérer le milieu comme homogène et de ne pas tenir compte de la position des particules. Il est aussi possible de définir des moyennages d'ensemble conditionnels

$$g(t, \mathbf{r})_{\mathbf{r}'} = \langle G(t, \mathbf{r} | C_N) \rangle_{\mathbf{r}'} = \int g(t, \mathbf{r} | C_N) p(t, C_{N-1} | \mathbf{r}') dC_{N-1}, \quad (2.2)$$

où $p(t, C_{N-1} | \mathbf{r}')$ est la fonction de distribution des $N - 1$ sphères dans le volume d'étude quand la position d'une N -ième sphère est fixée en \mathbf{r}' . $g(t, \mathbf{r})_{\mathbf{r}'}$ correspond alors à la moyenne d'ensemble de G conditionnée par la présence d'une particule en \mathbf{r}' . Il est tout à fait possible de définir des moyennes conditionnées jusqu'à la présence de N particules. Pour finir, les moyennes inconditionnelles et conditionnelles sont reliées par :

$$g(t, \mathbf{r}) = \int g(t, \mathbf{r})_{\mathbf{r}'} p(t, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.3)$$

où $p(t, \mathbf{r}')$ est la densité de probabilité de trouver l'un des centres d'une des N sphères en \mathbf{r}' , autrement dit la concentration moyenne de particules en \mathbf{r}' et au temps t .

Moyennage d'ensemble chaque phase séparément : Le moyennage d'ensemble est appliqué sur chaque phase séparément. Une fonction de répartition, qui permet de tenir compte du caractère diphasique du système, est introduite :

$$\theta(t, \mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{r} \text{ est dans la phase } c \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.4)$$

La moyenne d'ensemble dans chaque phase s'écrit :

$$\begin{cases} \phi_c(t, \mathbf{r}) g_c(t, \mathbf{r}) = \langle \theta(t, \mathbf{r}) G(t, \mathbf{r} | C_N) \rangle, \\ \phi_d(t, \mathbf{r}) g_d(t, \mathbf{r}) = \langle (1 - \theta(t, \mathbf{r})) G(t, \mathbf{r} | C_N) \rangle, \end{cases} \quad (2.5)$$

où $\phi_p(t, \mathbf{r})$ est la fraction volumique moyenne de la phase p et $g_c(t, \mathbf{r})$ et $g_d(t, \mathbf{r})$ sont respectivement les moyennes d'ensemble de $G(t, \mathbf{r} | C_N)$ dans chaque phase. De plus, les moyennes d'ensemble dans chaque phase peuvent être reliées par les relations :

$$\begin{cases} \phi_c(t, \mathbf{r}) = 1 - \phi_d(t, \mathbf{r}), \\ \phi_d(t, \mathbf{r}) = V_p n(t, \mathbf{r}), \\ g(t, \mathbf{r}) = \phi_d(t, \mathbf{r}) g_d(t, \mathbf{r}) + \phi_c(t, \mathbf{r}) g_c(t, \mathbf{r}) \end{cases} \quad (2.6)$$

où $n(t, \mathbf{r})$ est le nombre de particules par unité de volume et V_p le volume d'une particule. La troisième équation de (2.6) signifie que la moyenne d'ensemble du mélange peut être vue comme une superposition de deux milieux continus interpénétrables et modélisant chaque phase du mélange. Le schéma présenté sur la figure 2.1 issu de la référence [81] résume cette équation.

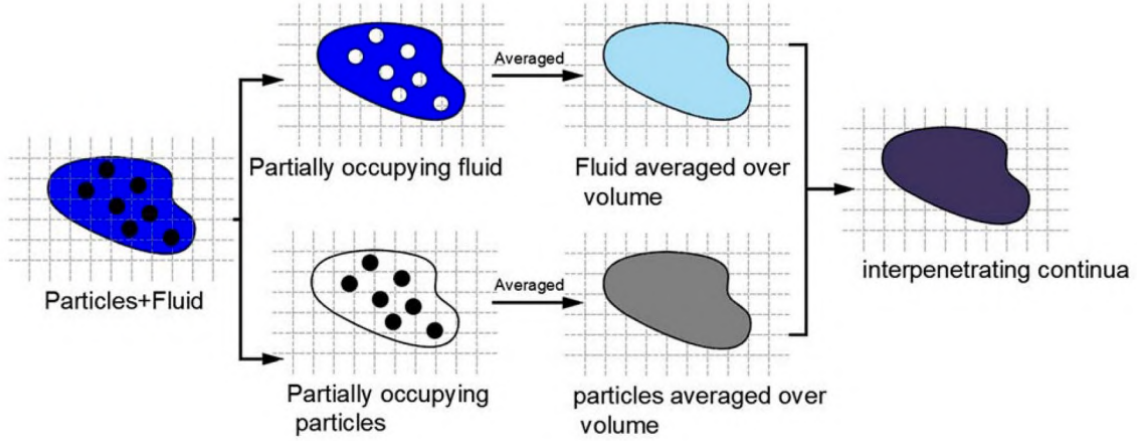


Figure 2.1 – Une illustration schématique du concept de moyennage local et de milieux continus interpénétrables [81].

Sans entrer dans le détail des étapes intermédiaires, le moyennage d'ensemble sur l'entièreté de la phase disperse peut être réduit à l'intégration de la moyenne d'ensemble conditionnée correspondante sur le volume d'une unique particule test :

$$g_d(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{V_p} \int_{\mathbf{x} \leq R} g(t, \mathbf{r} + \mathbf{x})_r d\mathbf{x}, \text{ avec } \mathbf{x} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'. \quad (2.7)$$

2.1.2 Equations de conservation

Dans cette partie, les arguments des fonctions en temps t et en espace \mathbf{r} ne sont pas écrits par souci de lisibilité. Soit une équation de conservation générale locale

$$\frac{dG}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{Q}, \quad (2.8)$$

où G est une quantité conservable définie dans les deux phases et \mathbf{Q} un flux de cette quantité. Les équations de conservation moyennes dans chaque phase sont obtenues en multipliant les deux membres par la fonction de répartition (2.4) et en appliquant le moyennage d'ensemble (2.1). Sans entrer dans le détail des calculs, il vient en négligeant les termes non linéaires :

$$\begin{cases} \frac{\partial(\phi_c g_c)}{\partial t} = \nabla \cdot (\phi_c \mathbf{q}_c) - \langle \mathbf{Q} \nabla \theta \rangle, \\ \frac{\partial(\phi_d g_d)}{\partial t} = \nabla \cdot (\phi_d \mathbf{q}_d) + \langle \mathbf{Q} \nabla \theta \rangle, \end{cases} \quad (2.9)$$

où g_c et g_d sont respectivement les moyennes d'ensemble de G dans les phases continue et disperse et \mathbf{q}_c et \mathbf{q}_d sont respectivement les moyennes d'ensemble de \mathbf{Q} dans les phases continue et disperse. Le terme $\langle \mathbf{Q} \nabla \theta \rangle$ est non nul uniquement aux interfaces entre la phase continue et la phase disperse et décrit les interactions interphasiques. Comme la fonction de distribution $p(t, C_N)$ est indépendante de la variable d'espace \mathbf{r} , l'opérateur de moyennage $\langle \cdot \rangle$ et l'opérateur divergence peuvent commuter. Il est alors facilement démontrable que

$$\langle \mathbf{Q} \nabla \theta \rangle = \langle (1 - \theta) \nabla \cdot \mathbf{Q} \rangle - \nabla \cdot \langle (1 - \theta) \mathbf{Q} \rangle. \quad (2.10)$$

En utilisant les équations (2.5), (2.7) et le théorème de la divergence, il vient

$$\langle \mathbf{Q} \nabla \theta \rangle = n \iint \mathbf{e}_r \cdot \langle \mathbf{Q} \rangle_r dS - \nabla \cdot (\phi_d \mathbf{q}_d). \quad (2.11)$$

2.1 Equations moyennes

Finalement, en injectant l'équation (2.11) dans (2.9), les équations de conservation moyennes dans chaque phase se simplifient sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial(\phi_c g_c)}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{q} - n \iint e_r \cdot \langle \mathbf{Q} \rangle_r dS, \\ \frac{\partial(\phi_d g_d)}{\partial t} = n \iint e_r \cdot \langle \mathbf{Q} \rangle_r dS, \end{cases} \quad (2.12)$$

où \mathbf{q} est la moyenne de \mathbf{Q} sur l'ensemble du mélange. Les deux phases sont couplées à leurs interfaces grâce à l'intégration de la moyenne d'ensemble conditionnelle du flux \mathbf{Q} sur la surface d'une particule test. Les grandeurs G et \mathbf{Q} sont ensuite choisies de manière à obtenir les équations gouvernant la conservation des différentes quantités conservables du système.

2.1.3 Conservation de la quantité de mouvement

Dans les milieux solides, l'équation de propagation des ondes est déterminée grâce à la conservation de la quantité de mouvement et de la loi de comportement. La conservation de la quantité de mouvement est alors établie en posant $G = \rho \partial U / \partial t$, avec ρ la masse volumique locale, U le déplacement local et $\mathbf{Q} = \Sigma$ le tenseur des contraintes locales. En supposant que la phase dispersée est répartie de manière homogène avec la fraction volumique ϕ_0 , il vient

$$\begin{cases} (1 - \phi_0) \rho_c \frac{\partial^2 \mathbf{u}_c}{\partial t^2} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{F}, \\ \phi_0 \rho_d \frac{\partial^2 \mathbf{u}_d}{\partial t^2} = \mathbf{F}, \end{cases} \quad (2.13)$$

où

$$\mathbf{F} = n_0 \iint e_r \cdot \langle \Sigma \rangle_r (r = R) dS. \quad (2.14)$$

Dans ces équations, ρ_p et \mathbf{u}_p sont respectivement les masses volumiques et les déplacements moyens de chaque phase $p = (c, d)$. $n_0 = \frac{\phi_0}{V_p}$ est le nombre volumique de particules. Le terme de couplage entre les deux phases \mathbf{F} correspond à la force d'interaction interphasique. $\langle \Sigma \rangle_r$ est la moyenne du champ de contraintes dans la matrice conditionnée par la présence d'une particule en \mathbf{r} . La deuxième équation de (2.13) correspond à la seconde loi de Newton appliquée à une particule test. Le déplacement \mathbf{u}_d est alors associé au déplacement du centre de masse de la particule test, ou en d'autres termes, au déplacement de corps rigide.

$\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes moyennes de l'ensemble du mélange et est formé de deux contributions [82] :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_c + \boldsymbol{\sigma}_d. \quad (2.15)$$

$\boldsymbol{\sigma}_c$ correspond au tenseur des contraintes moyen dans la phase continue et est calculé en moyennant les contraintes locales Σ :

$$\boldsymbol{\sigma}_c = \langle \theta \Sigma \rangle. \quad (2.16)$$

De plus, les contraintes locales dans la matrice s'expriment selon la loi de Hooke

$$\Sigma = \lambda_c \text{tr}(\mathbf{E}) + 2\mu_c \mathbf{E}, \quad (2.17)$$

où λ_c et μ_c sont les coefficients de Lamé de la phase continue et \mathbf{E} est le tenseur des déformations locales. De ce fait, le tenseur des contraintes moyennes dans la phase continue est :

$$\boldsymbol{\sigma}_c = \lambda_c \langle \theta \text{tr}(\mathbf{E}) \rangle + 2\mu_c \langle \theta \mathbf{E} \rangle. \quad (2.18)$$

Les particules de la phase disperse étant supposées rigides, le tenseur des déformations s'annule dans la phase disperse conduisant aux relations :

$$\begin{cases} \langle \theta \mathbf{E} \rangle = \langle \mathbf{E} \rangle - \langle (1 - \theta) \mathbf{E} \rangle = \langle \mathbf{E} \rangle = \boldsymbol{\epsilon}, \\ \langle \theta \text{tr}(\mathbf{E}) \rangle = \langle \text{tr}(\mathbf{E}) \rangle - \langle (1 - \theta) \text{tr}(\mathbf{E}) \rangle = \langle \text{tr}(\mathbf{E}) \rangle = \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}). \end{cases} \quad (2.19)$$

$\boldsymbol{\epsilon}$ est le tenseur des déformations moyennes de l'ensemble du mélange

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \quad (2.20)$$

et dépend du déplacement moyen du mélange :

$$\mathbf{u} = (1 - \phi_0) \mathbf{u}_c + \phi_0 \mathbf{u}_d. \quad (2.21)$$

Finalement, le tenseur $\boldsymbol{\sigma}_c$ s'écrit

$$\boldsymbol{\sigma}_c = \lambda_c \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} + 2\mu_c \boldsymbol{\epsilon}, \quad (2.22)$$

et correspond donc au tenseur des contraintes qui existerait dans la matrice pure sous l'effet du même gradient de déplacement moyen de l'ensemble du mélange. Par rapport aux équations développées par Buyevich, $\boldsymbol{\sigma}_c$ est ici adapté afin de tenir compte de la compressibilité de la matrice avec l'ajout du terme de dilatation $\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon})$.

$\boldsymbol{\sigma}_d$ correspond à la contribution de la présence des particules sur les contraintes dans la matrice et se calcule avec l'équation (2.7) :

$$\boldsymbol{\sigma}_d = \langle (1 - \theta) \boldsymbol{\Sigma} \rangle = n_0 \int_{\mathbf{x} \leq R} \langle \boldsymbol{\Sigma} \rangle_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} + \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.23)$$

En utilisant le théorème de la divergence, il vient

$$\boldsymbol{\sigma}_d = n_0 \oint (R \mathbf{e}_r) \otimes [\langle \boldsymbol{\Sigma} \rangle_{\mathbf{r}}(r = R) \cdot \mathbf{e}_r] dS - n_0 \int_{\mathbf{x} < R} \mathbf{x} \otimes \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\Sigma} \rangle_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} + \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.24)$$

où le symbole \otimes désigne le produit dyadique de deux tenseurs. Finalement, en supposant que les particules sont rigides et qu'aucun couple extérieur n'est appliqué, le tenseur $\boldsymbol{\sigma}_d$ s'écrit en régime linéaire [16] :

$$\boldsymbol{\sigma}_d = \mathbf{S} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{M}, \quad (2.25)$$

avec

$$\mathbf{S} = n_0 \oint (R \mathbf{e}_r) \otimes [\langle \boldsymbol{\Sigma} \rangle_{\mathbf{r}}(r = R) \cdot \mathbf{e}_r] dS, \quad (2.26)$$

et

$$\mathbf{M} = n_0 \oint (R \mathbf{e}_r) \times [\langle \boldsymbol{\Sigma} \rangle_{\mathbf{r}}(r = R) \cdot \mathbf{e}_r] dS, \quad (2.27)$$

\mathbf{M} est le moment d'interaction interphasique et \mathbf{S} est un tenseur appelé le stresslet. Ces deux expressions se calculent d'une manière assez similaire à la force d'interaction interphasique en intégrant un champ moyen de contrainte conditionné sur la surface d'une particule test.

Contrairement au modèle développé par Valier-Brasier *et al* pour une matrice fluide [18], il n'est pas nécessaire d'établir les équations moyennes de conservation de la masse. Dans le cas de la mécanique des fluides, trois équations fondamentales sont utilisées pour établir l'équation de propagation

2.1 Equations moyennes

des ondes : la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement et une loi d'état. Dans le cas de la mécanique des solides, uniquement la conservation de la quantité de mouvement et la loi de Hooke sont prises en compte. Toutefois, cette dernière loi d'état contient déjà l'information de conservation de la masse, qui est liée à la trace du tenseur des déformations. Il n'y a donc pas besoin d'autres relations que celles du système d'équations (2.13) pour établir la relation de dispersion des ondes cohérentes se propageant dans le milieu hétérogène étudié.

2.1.4 Fermeture de la hiérarchie d'équations

Le système (2.13) concerne des grandeurs moyennes inconditionnelles. Les termes de couplage sont calculés en intégrant sur une particule test un champ de contrainte moyen conditionné par la présence de cette particule. Ce champ conditionné est calculé en appliquant le moyennage d'ensemble conditionnel (2.2) sur (2.9). Procéder à des moyennages d'ensemble conditionnels permet d'obtenir des équations de conservation de champs moyens conditionnés par la présence d'une particule où chaque phase est couplée avec des termes qui dépendent de la position de deux particules. Ces équations sont présentées dans la référence [19]. La même procédure peut être répétée et il en résulte une hiérarchie infinie d'équations interdépendantes avec un nombre croissant de particules à position fixée.

De manière analogue aux équations issues de la diffusion multiple, il s'agit alors de fermer cette hiérarchie. Une manière simple de procéder est de travailler sous l'hypothèse de l'*Independent Scattering Approximation* (ISA), qui néglige les boucles de diffusion, *i.e.* les interactions entre les différentes particules en présence. Cette hypothèse apporte toutefois une limitation sur la concentration de particules. Bien qu'il soit possible de fermer le problème à des ordres supérieurs ou de procéder à une approche auto-consistante [19], seule l'ISA est étudiée dans ce chapitre. Dans ce cadre, le tenseur $\langle \Sigma \rangle_r$ correspond au champ de contrainte exact dans la matrice en présence d'une particule rigide isolée. Il comprend les contributions de l'onde incidente et des ondes diffusées par la particule et peut être calculé exactement à partir d'une décomposition sur les harmoniques sphériques, développée dans le chapitre 1. Bien que ces champs soient établis pour des particules élastiques, leurs formes restent exactement les mêmes pour une particule rigide. Les coefficients de diffusions pour des particules rigides sont facilement obtenus en posant $\mu_p/\mu_c \gg 1$ dans les systèmes (1.32) et (1.53), où μ_p est le module de cisaillement de la phase disperse.

2.1.5 Etude de la symétrie des termes de couplage

Avant de continuer, la symétrie du tenseur des contraintes ajoutées par les particules, défini équation (2.25), est étudiée. Par un calcul indiciel et en ne notant pas les intégrales ainsi que les termes R et n_0 , les composantes du stresslet s'écrivent

$$S_{ij} = e_i \Sigma_{kj} e_k, \quad (2.28)$$

où e_i est une composante du vecteur \mathbf{e}_r et Σ_{kj} est une composante du tenseur Σ . Les composantes du tenseur $\frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{M}$ se mettent sous la forme

$$\left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{M} \right]_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{kmo} e_m \Sigma_{lo} e_l = \frac{1}{2} (e_i \Sigma_{kj} e_k - e_j \Sigma_{ki} e_k). \quad (2.29)$$

Ce tenseur est alors anti-diagonal. Ses composantes correspondent exactement à la partie antisymétrique du stresslet \mathbf{S} , impliquant :

$$\mathbf{S} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{M} = \mathbf{S}^{(s)}, \quad (2.30)$$

où $\mathbf{S}^{(s)}$ se réfère à la partie symétrique du stresslet. En reportant la relation (2.30) dans le système (2.13), les équations de conservation de la quantité de mouvement se mettent finalement sous la forme :

$$\begin{cases} (1 - \phi_0)\rho_c \frac{\partial^2 \mathbf{u}_c}{\partial t^2} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \nabla \cdot \mathbf{S}^{(s)} - \mathbf{F}, \\ \phi_0 \rho_d \frac{\partial^2 \mathbf{u}_d}{\partial t^2} = \mathbf{F}. \end{cases} \quad (2.31)$$

Les contraintes ajoutées par la présence des particules sont alors purement symétriques. La capacité des particules à avoir un mouvement de rotation n'entre donc pas en compte dans la conservation de la quantité de mouvement du système. Toutefois, l'application d'un couple externe s'appliquant sur l'ensemble des particules est susceptible de faire apparaître une partie antisymétrique à $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}$ [82].

2.2 Calcul des termes d'interaction interphasique

Afin d'établir la relation de dispersion des ondes dans l'ensemble du mélange, il est nécessaire de calculer les termes d'interaction interphasiques (2.14) et (2.26) présents dans le système (2.31). Comme énoncé précédemment, l'étude est restreinte à l'ISA. Le champ de contrainte $\langle \boldsymbol{\Sigma} \rangle_r$ est alors associé aux contraintes (1.24) ou (1.41) selon la nature de l'onde incidente, et est noté $\boldsymbol{\Sigma}$ dans la suite de cette partie.

2.2.1 Force d'interaction interphasique

2.2.1.1 Modélisation acoustique

La force d'interaction interphasique se calcule par

$$\mathbf{F} = n_0 \iint e_r \cdot \langle \boldsymbol{\Sigma} \rangle_r (r = R) dS = n_0 R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e_r \cdot \boldsymbol{\Sigma} (r = R) \sin \theta d\theta d\varphi = n_0 \tilde{\mathbf{F}}_M, \quad (2.32)$$

avec $M = L, T$ où $\tilde{\mathbf{F}}_M$ correspond à la force d'interaction entre une particule seule et la matrice élastique. Le détail des calculs suivants est disponible dans les références [18] et [57]. Par souci de lisibilité ($r = R$) n'est pas écrit. Compte tenu des expressions (1.2) des vecteurs e_r , e_θ et e_φ dans le repère cartésien, il vient

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{F}}_L = R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [\sigma_{rr} \cos(\theta) - \sigma_{r\theta} \sin(\theta)] \sin \theta d\theta d\varphi e_z, \\ \tilde{\mathbf{F}}_T = R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [\sigma_{rr} \sin(\theta) \cos(\varphi) + \sigma_{r\theta} \cos(\theta) \cos(\varphi) - \sigma_{r\varphi} \sin(\varphi)] \sin \theta d\theta d\varphi e_x, \end{cases} \quad (2.33)$$

avec les contraintes (1.24) pour la force longitudinale et (1.41) pour la force transverse. Dans les deux cas, la force appliquée sur la phase disperse (*i.e.* sur une particule test unique) est colinéaire à la polarisation de l'onde incidente. Dans la suite de ce chapitre, les indices c rapportés à la phase continue ne sont pas écrits sur les nombre d'ondes, les coefficients de Lamé et la masse volumique, par souci de lisibilité. Finalement, en utilisant des relations d'orthogonalité des polynômes de Legendre présentées dans la partie 1.1.1, les forces d'interaction interphasiques s'écrivent

2.2 Calcul des termes d'interaction interphasique

$$\tilde{F}_M = F_1^M u_0, \text{ avec } M = L, T, \quad (2.34)$$

où

$$\begin{cases} F_1^L = \frac{4\pi}{k_L} \left[\left(\Sigma_1^{(i,L)} + 2\tau_1^{(i,L)} \right) + T_1^{LL} \left(\Sigma_1^{(c,L)} + 2\tau_1^{(c,L)} \right) + T_1^{LT} \left(\Sigma_1^{(c,T)} + 2\tau_1^{(c,T)} \right) \right], \\ F_1^T = \frac{2\pi}{k_T} \left[\left(\Sigma_1^{(i,T)} + 2\tau_1^{(i,T)} \right) + T_1^{TL} \left(\Sigma_1^{(c,L)} + 2\tau_1^{(c,L)} \right) + T_1^{TT} \left(\Sigma_1^{(c,T)} + 2\tau_1^{(c,T)} \right) \right]. \end{cases} \quad (2.35)$$

La force d'interaction interphasique fait apparaître uniquement des termes dipolaires $n = 1$. De plus, les ondes S n'interviennent pas dans la force \tilde{F}_T . Les forces L et T ont une forme très similaire à un facteur $\times 2$ près. Cette différence vient de la décomposition en harmoniques sphériques qui dépend de l'angle φ dans le cas des ondes transverses. L'intégration sur cette variable dans l'équation (2.33) fait alors apparaître un facteur π et non 2π comme pour les ondes longitudinales.

2.2.1.2 Comparaison avec une approche mécanique adaptée aux particules rigides

Les forces (2.34) sont comparées avec celles obtenues par une modélisation mécanique. Norris [83] propose les expressions suivantes pour les forces d'interaction interphasique entre une matrice solide et une particule rigide sous l'effet d'une onde incidente L ou T

$$\begin{cases} F_p^L = \tilde{F}_p^L u_0 = (\lambda + 2\mu) \frac{4\pi R Z_P}{Z + Z_P} \frac{Z + Z_M}{Z_L + Z_M} e^{-jK_L u_0}, \\ F_p^T = \tilde{F}_p^T u_0 = \mu \frac{4\pi R_0 Z_P}{Z + Z_P} \frac{Z + Z_M}{Z_T + Z_M} e^{-jK_T u_0}, \end{cases} \quad (2.36)$$

avec

$$\begin{cases} Z_L = (j\omega)^{-1} 4\pi R (\lambda_c + 2\mu_c) (1 - jK_L), \\ Z_T = (j\omega)^{-1} 4\pi R 2\mu (1 - jK_T), \\ Z_M = j\omega \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_c, \\ Z_p = j\omega \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_p, \\ \frac{1}{Z + Z_M} = \frac{1}{Z_L + Z_M} + \frac{2}{Z_T + Z_M}, \end{cases} \quad (2.37)$$

correspondant à des termes d'impédance des deux phases.

La figure 2.2 présente une comparaison des forces obtenues par une approche acoustique F_1^L et F_1^T (2.35), et par une approche mécanique \tilde{F}_p^L et \tilde{F}_p^T (2.36). La matrice est formée d'une résine époxy élastique. La particule est en carbure de tungstène et de rayon $R = 198,5\mu\text{m}$. Les caractéristiques mécaniques de ces matériaux sont données dans le tableau 1.1. Les deux approches sont complètement équivalentes. Les deux forces L et T présentent un maximum à $K_T = 0,6$ qui correspond à celui présenté chapitre 1 pour lequel les sections efficaces de diffusion des ondes L et T sont maximales. Ces maxima sont donc dus à la résonance en translation des particules. Ce résultat est logique dans la mesure où les coefficients de diffusion T_1^{NM} , $N, M = L, T$ sont présents dans les équations (2.35).

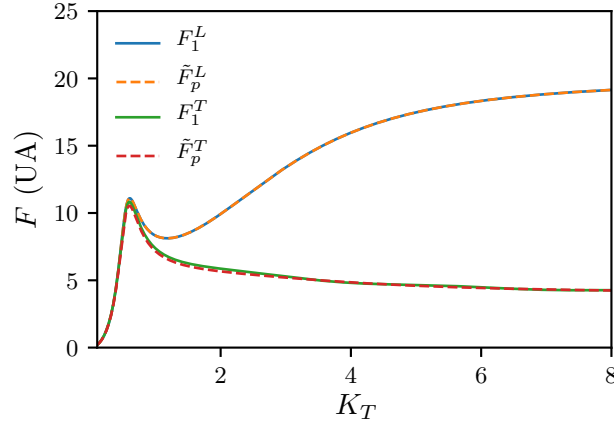


Figure 2.2 – Comparaison des forces d'interaction F_L et F_T obtenues avec une approche mécanique ou acoustique pour une bille de carbure de tungstène dans de l'époxy.

2.2.2 Moment d'interaction interphasique

2.2.2.1 Modélisation acoustique

Le moment d'interaction interphasique est donné par la formule

$$\mathbf{M} = n_0 \iint (R\mathbf{e}_r) \times (\mathbf{e}_r \cdot \langle \boldsymbol{\Sigma} \rangle_r (r = R)) dS = n_0 R^3 \iint \mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\Sigma}) dS = n_0 \tilde{\mathbf{M}}, \quad (2.38)$$

où $\tilde{\mathbf{M}}$ correspond au moment d'interaction entre une particule seule et la matrice élastique, avec

$$\tilde{\mathbf{M}} = R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\Sigma}) \sin(\theta) d\theta d\varphi = R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sigma_{r\theta} \mathbf{e}_\varphi - \sigma_{r\varphi} \mathbf{e}_\theta) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (2.39)$$

Ce calcul est assez similaire à celui de la force d'interaction interphasique. Etant donné la vorticité nulle d'une onde longitudinale, seule une onde transverse génère un moment sur la particule. Les composantes de $\boldsymbol{\Sigma}$ correspondent alors à (1.41). Du fait des expressions (1.2) des vecteurs \mathbf{e}_θ et \mathbf{e}_φ dans le repère cartésien et de la dépendance des contraintes (1.41) en φ , il vient

$$\tilde{\mathbf{M}} = R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sigma_{r\theta} \cos \varphi - \sigma_{r\varphi} \cos \theta \sin \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \mathbf{e}_y. \quad (2.40)$$

En remplaçant les composantes $\sigma_{r\theta}$ et $\sigma_{r\varphi}$ par leurs expressions (1.41) et en intégrant directement sur φ , il vient :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}} = \pi R \frac{j u_0}{k_T} \sum_n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j^n \left[\tau_n^c \int_0^\pi \left(\frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \cos \theta + \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \sin \theta d\theta \right. \\ \left. + \xi_n^c \int_0^\pi \left(\frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \cos \theta + \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \right) \sin \theta d\theta \right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Compte tenu des relations d'orthogonalité sur les polynômes associés de Legendre présentées dans la parties 1.1.1, l'expression de $\tilde{\mathbf{M}}$ devient alors

$$\tilde{\mathbf{M}} = M_1^S \mathbf{u}_0, \quad (2.42)$$

avec

$$M_1^S = \frac{4\pi R}{k_T} \left(\xi_1^{(i,T)} + T_1^{SS} \xi_1^{(c,T)} \right). \quad (2.43)$$

2.2 Calcul des termes d'interaction interphasique

Comme pour la force d'interaction interphasique, le moment fait apparaître des termes dipolaires $n = 1$. De plus, seules les ondes transverses S interviennent dans cette expression. Les ondes L et T n'appliquent donc aucun moment sur la particule.

2.2.2.2 Comparaison avec une approche mécanique

Comme précédemment, cette modélisation acoustique est comparée à une approche mécanique. Norris [83] propose l'expression suivante pour le moment d'interaction interphasique entre une matrice élastique et une particule rigide sous l'effet d'une onde transverse incidente :

$$M_p = \tilde{M}_p u_0 = -\frac{4\pi R^2 \mu}{1 - (jk_T R)^{-1}} \frac{\tilde{Z}_p}{\tilde{Z} + \tilde{Z}_p} e^{-jK_T u_0}, \quad (2.44)$$

avec

$$\begin{cases} Z_p = j\omega \frac{4}{3} R^3 \rho_p, \\ \tilde{Z}_p = \frac{2}{5} R^2 Z_p, \\ \tilde{Z} = 2 \frac{Z_M + Z_T}{R^2 (1 - jK_T)}, \end{cases} \quad (2.45)$$

correspondant aux termes d'impédance en rotation des différentes phases où Z_T et Z_M sont définies dans la formule (2.37).

La figure 2.3 présente une comparaison des moments obtenus par une approche acoustique M_1^S (2.43) et par une approche mécanique \tilde{M}_p (2.44) pour une particule de carbure de tungstène dans une résine époxy. Comme pour la force d'interaction interphasique, les deux approches sont équivalentes et présentent un maximum à $K_T = 0,99$ qui témoigne de la résonance en rotation des particules

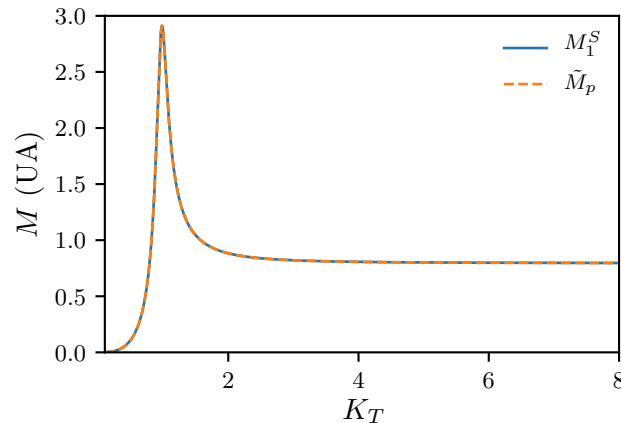


Figure 2.3 – Comparaison du moment d'interaction M obtenu avec une approche mécanique ou acoustique pour une bille de carbure de tungstène dans de l'époxy.

2.2.3 Calcul du Stresslet

Le stresslet est un terme d'interaction original qui se calcule selon la formule

$$\mathbf{S} = n_0 \iint (R \mathbf{e}_r) \otimes (\langle \boldsymbol{\Sigma} \rangle_r (r = R) \cdot \mathbf{e}_r) dS = n_0 R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{e}_r \otimes (\boldsymbol{\Sigma} (r = R) \cdot \mathbf{e}_r) \sin \theta d\theta d\varphi = n_0 \tilde{\mathbf{S}}, \quad (2.46)$$

où $\tilde{\mathbf{S}}$ est le stresslet s'appliquant sur une particule seule. Ce calcul est assez similaire à celui de la force d'interaction interphasique.

2.2.3.1 Onde longitudinale incidente

Dans le cas d'une onde longitudinale incidente, Σ a comme composantes (1.24), ce qui donne

$$\tilde{\mathbf{S}}_L = R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{e}_r \otimes (\sigma_{rr} \mathbf{e}_r + \sigma_{r\theta} \mathbf{e}_\theta) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (2.47)$$

Il est désormais nécessaire de développer le produit dyadique présent dans l'intégrande. Tout d'abord en considérant les expressions (1.2) des vecteurs \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ et \mathbf{e}_φ dans la base de coordonnées cartésiennes, ce produit se met sous la forme

$$\mathbf{e}_r \otimes (\sigma_{rr} \mathbf{e}_r + \sigma_{r\theta} \mathbf{e}_\theta) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \sin \theta \cos \varphi + \sigma_{r\theta} \cos \theta \cos \varphi \\ \sigma_{rr} \sin \theta \sin \varphi + \sigma_{r\theta} \cos \theta \sin \varphi \\ \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Les contraintes σ_{rr} et $\sigma_{r\theta}$ ne dépendant pas de l'angle φ , l'intégration sur cette variable annule toutes les composantes hors diagonales de la matrice (2.48). Le Stresslet est alors un tenseur purement diagonal dont les composantes sont

$$\begin{cases} \tilde{S}_{11} = \tilde{S}_{22} = \pi R^3 \int_0^\pi \left[\sigma_{rr} \sin^2 \theta + \sigma_{r\theta} \frac{\sin(2\theta)}{2} \right] \sin \theta d\theta, \\ \tilde{S}_{33} = 2\pi R^3 \int_0^\pi \left[\sigma_{rr} \cos^2 \theta - \sigma_{r\theta} \frac{\sin(2\theta)}{2} \right] \sin \theta d\theta. \end{cases} \quad (2.49)$$

En remplaçant σ_{rr} et $\sigma_{r\theta}$ par les expressions (1.24), les composantes se mettent sous la forme

$$\begin{cases} \tilde{S}_{11} = \tilde{S}_{22} = -\pi \frac{j u_0}{k_L} R \sum_{n=0}^{\infty} j^n (2n+1) \left[\Sigma_n^c \int_0^\pi P_n(\cos \theta) \sin^2 \theta \sin \theta d\theta \right. \\ \quad \left. + \tau_n^c \int_0^\pi \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta} \frac{\sin(2\theta)}{2} \sin \theta d\theta \right], \\ \tilde{S}_{33} = -2\pi \frac{j u_0}{k_L} R \sum_{n=0}^{\infty} j^n (2n+1) \left[\Sigma_n^c \int_0^\pi P_n(\cos \theta) \cos^2 \theta \sin \theta d\theta - \tau_n^c \int_0^\pi \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta} \frac{\sin(2\theta)}{2} \sin \theta d\theta \right]. \end{cases} \quad (2.50)$$

Deux des intégrales portant sur les Polynômes de Legendre peuvent être réécrites selon

$$\begin{cases} \int_0^\pi P_n(\cos \theta) \sin^2(\theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{3} \int_0^\pi P_n(\cos \theta) P_0(\cos \theta) \sin \theta d\theta - \frac{2}{3} \int_0^\pi P_n(\cos \theta) P_2(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \\ \int_0^\pi P_n(\cos \theta) \cos^2(\theta) \sin \theta d\theta = \frac{1}{3} \int_0^\pi P_n(\cos \theta) P_0(\cos \theta) \sin \theta d\theta + \frac{2}{3} \int_0^\pi P_n(\cos \theta) P_2(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \end{cases} \quad (2.51)$$

Compte tenu des relations d'orthogonalité des polynômes de Legendre présentées dans la partie 1.1.1, les composantes deviennent alors

$$\begin{cases} \tilde{S}_{11} = \tilde{S}_{22} = \left(S_0^L - \frac{S_2^L}{2} \right) u_0, \\ \tilde{S}_{33} = \left(S_0^L + S_2^L \right) u_0, \end{cases} \quad (2.52)$$

avec

$$\begin{cases} S_0^L = -\frac{4j\pi R}{3k_L} \left(\Sigma_0^{(i,L)} + T_0^{LL} \Sigma_0^{(c,L)} \right), \\ S_2^L = \frac{8j\pi R}{3k_L} \left[\left(\Sigma_2^{(i,L)} + 3\tau_2^{(i,L)} \right) + T_2^{LL} \left(\Sigma_2^{(c,L)} + 3\tau_2^{(c,L)} \right) + T_2^{LT} \left(\Sigma_2^{(c,T)} + 3\tau_2^{(c,T)} \right) \right]. \end{cases} \quad (2.53)$$

Le calcul du Stresslet longitudinal fait alors apparaître une contribution monopolaire ($n = 0$) et une contribution quadripolaire ($n = 2$).

2.2 Calcul des termes d'interaction interphasique

2.2.3.2 Onde transverse incidente

Dans le cas d'une onde transverse incidente, Σ a comme composantes (1.41), ce qui donne

$$\tilde{S}_T = R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{e}_r \otimes (\sigma_{rr} \mathbf{e}_r + \sigma_{r\theta} \mathbf{e}_\theta + \sigma_{r\varphi} \mathbf{e}_\varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (2.54)$$

Compte tenu des expressions (1.2) des vecteurs \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ et \mathbf{e}_φ dans la base cartésienne, le produit dyadique se met sous la forme

$$\mathbf{e}_r \otimes (\sigma_{rr} \mathbf{e}_r + \sigma_{r\theta} \mathbf{e}_\theta + \sigma_{r\varphi} \mathbf{e}_\varphi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \sin \theta \cos \varphi + \sigma_{r\theta} \cos \theta \cos \varphi - \sigma_{r\varphi} \sin \varphi \\ \sigma_{rr} \sin \theta \sin \varphi + \sigma_{r\theta} \cos \theta \sin \varphi + \sigma_{r\varphi} \cos \varphi \\ \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

σ_{rr} et $\sigma_{r\theta}$ dépendant de $\cos \varphi$ et $\sigma_{r\varphi}$ dépendant de $\sin \varphi$, l'intégration sur cette variable annule toute les composantes de la matrice (2.55) sauf \tilde{S}_{13} et \tilde{S}_{31} . Les composantes non nulles du Stresslet sont alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{S}_{13} = \frac{j u_0}{k_T} \pi R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j^n \left[\sum_n^c \int_0^\pi P_n^1(\cos \theta) \frac{\sin(2\theta)}{2} \sin \theta d\theta - \tau_n^c \int_0^\pi \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \sin^2 \theta \sin \theta d\theta \right. \\ \left. - \xi_n^c \int_0^\pi \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin(\theta)} \sin^2 \theta \sin \theta d\theta \right], \\ \tilde{S}_{31} = \psi_0 \frac{j u_0}{k_T} \pi R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j^n \left[\sum_n^c \int_0^\pi P_n^1(\cos \theta) \frac{\sin(2\theta)}{2} \sin \theta d\theta \right. \\ \left. + \tau_n^c \int_0^\pi \left[\frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \cos^2 \theta + \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin(\theta)} \cos \theta \right] \sin \theta d\theta \right. \\ \left. + \xi_n^c \int_0^\pi \left[\frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \cos \theta + \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin(\theta)} \cos^2 \theta \right] \sin \theta d\theta \right]. \end{array} \right. \quad (2.56)$$

Compte tenu des relations d'orthogonalité des polynômes de Legendre présentées dans la partie 1.1.1, les composantes deviennent alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{S}_{13} = (S_2^T - S_1^S) u_0, \\ \tilde{S}_{31} = (S_2^T + S_1^S) u_0, \end{array} \right. \quad (2.57)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_2^T = \frac{2j\pi R}{3k_T} \left[(\Sigma_2^{(i,L)} + 3\tau_2^{(i,L)}) + T_2^{TL} (\Sigma_2^{(c,L)} + 3\tau_2^{(c,L)}) + T_2^{TT} (\Sigma_2^{(c,T)} + 3\tau_2^{(c,T)}) \right], \\ S_1^S = \frac{2\pi R}{k_T} (\xi_1^{(i,L)} + T_1^{SS} \xi_1^{(c,T)}). \end{array} \right. \quad (2.58)$$

Contrairement au cas d'une onde longitudinale incidente, une onde transverse ne génère pas de terme monopolaire dans le stresslet, ce qui est logique dans la mesure où il n'existe pas de terme monopolaire transverse. Les termes quadripolaires sont présents et il apparaît un nouveau terme dipolaire de rotation $n = 1$. Ces termes dipolaires correspondent à la partie antisymétrique du Stresslet et ne sont pas utilisés dans le reste du modèle comme précisé dans la partie 2.1.5. De plus, il est bien observable en comparant avec l'équation (2.43) que

$$S_1^S = \frac{M_1^S}{2}. \quad (2.59)$$

La figure 2.4 présente les variations des stresslets monopolaire S_0^L (2.53) et quadripolaires S_2^L (2.53) et S_2^T (2.58), obtenus une bille de carbure de tungstène dans une matrice d'époxy. Les stresslets monopolaire et quadripolaire longitudinaux augmentent continûment avec la fréquence et semblent atteindre un plateau à hautes fréquences. Le stresslet quadripolaire transverse augmente jusqu'à $K_T = 3,5$ puis diminue et semble se stabiliser. Cependant, aucun pic semblable à ceux présents sur les forces et moments d'interaction des figures 2.2 et 2.3 n'apparaît car les particules rigides ne présentent pas de résonance quadripolaire.

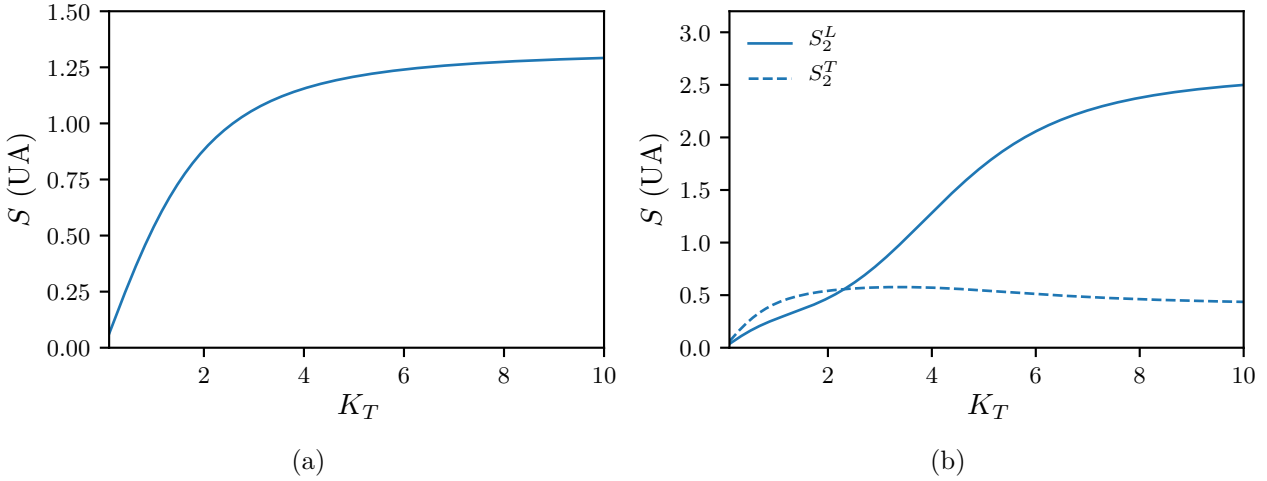


Figure 2.4 – Variation du stresslet (a) monopolaire et (b) quadripolaire pour des billes de carbure de tungstène dans de l'époxy.

2.3 Relation de dispersion

Chaque terme d'interaction du système (2.31) ayant été calculé, il est désormais possible d'établir la relation de dispersion de ce système, nécessaire à la détermination de la célérité et de l'atténuation des ondes cohérentes se propageant dans le milieu hétérogène. Pour cela, il s'agit de considérer que les différentes grandeurs mises en jeu sont des champs harmoniques de pulsation ω , se propageant dans la direction z et de nombre d'onde effectif k_{eff}^M , $M = L, T$. Les déplacements moyens de chaque phase sont alors être mis sous la forme

$$\mathbf{u}_p = \hat{u}_p e^{j(k_{\text{eff}}^M z - \omega t)} \mathbf{e}_i, \text{ avec } p = c, d. \quad (2.60)$$

Ces champs sont polarisés selon $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_z$ ou $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_x$ suivant qu'une onde cohérente longitudinale $M = L$ ou transverse $M = T$ est étudiée. \hat{u}_p est l'amplitude de la perturbation dans la phase $p = (c, d)$. Comme déjà mentionné en début de chapitre, \mathbf{u}_d correspond au déplacement du centre de masse des particules et \mathbf{u}_c correspond au déplacement moyen dans la matrice uniquement. La somme de ces deux déplacements pondérés par les fractions volumiques moyennes de chaque phase donne alors le déplacement moyen \mathbf{u} dans l'ensemble du mélange et correspond à l'onde cohérente dans le milieu effectif.

L'amplitude de l'onde incidente qui intervient dans le calcul des termes d'interaction est associée à l'amplitude du déplacement moyen dans la matrice pure \hat{u}_c . La force et le stresslet ont donc la même forme que les expressions développées précédemment, avec comme amplitude \hat{u}_c au lieu de u_0 . En effet, c'est grâce à ces termes que la phase disperse et la phase continue sont couplées et

2.3 Relation de dispersion

interagissent. Il suffit finalement d'injecter les déplacements moyens de chaque phase (2.60) dans le système (2.31) et d'utiliser les forces ou stresslet adéquats afin d'obtenir la relation de dispersion dont k_{eff}^M est solution. Les opérateurs vectoriels ∇ font directement apparaître des termes jk_{eff}^M , même si ceux-ci sont appliqués sur les termes d'interaction spatialement constants. En effet, l'opérateur ∇ est appliqué sur des grandeurs macroscopiques, à savoir les déplacements moyens, dont les distances caractéristiques, *i.e.* les longueurs d'onde, sont grandes devant la structure microscopique du système. Finalement, la célérité de l'onde effective est associée à la partie réelle du nombre d'onde obtenu et l'atténuation à sa partie imaginaire.

2.3.1 Onde cohérente longitudinale

Le nombre d'onde longitudinal est obtenu en fermant la hiérarchie infinie d'équations au premier ordre ce qui revient à négliger les interactions entre les différentes particules du milieu. Une fois le nombre d'onde effectif du modèle CPT établi, une comparaison avec le modèle de diffusion multiple de Foldy issu de l'*Independent Scattering Approximation* en régime grande longueur d'onde (1.88) est effectuée.

2.3.1.1 Resolution de la relation de dispersion

En injectant l'équation (2.60) avec $M = L$ dans le système (2.31) et en utilisant le stresslet (2.52) et la force (2.35) développés pour une onde incidente longitudinale, il vient

$$\begin{cases} (1 - \phi_0) \rho_c \omega^2 \hat{u}_c = k_{\text{eff}}^L{}^2 (\lambda_c + 2\mu_c) [(1 - \phi_0) \hat{u}_c + \phi_0 \hat{u}_d] + n_0 F_1^L \hat{u}_c - j k_{\text{eff}}^L n_0 (S_0^L + S_2^L) \hat{u}_c, \\ -\phi_0 \rho_d \omega^2 \hat{u}_d = n_0 F_1^L \hat{u}_c. \end{cases} \quad (2.61)$$

La deuxième équation de (2.61) montre que l'amplitude moyenne du déplacement des particules sphériques, *i.e.* de toute la phase disperse, est reliée linéairement à l'amplitude de l'onde incidente, *i.e.* du déplacement moyen dans la matrice. La deuxième équation de (2.61) est injectée dans la première, ce qui mène à l'équation de dispersion :

$$\left(\frac{k_{\text{eff}}^L}{k_L} \right)^2 \left[1 - \phi_0 \left(1 + \frac{F_1^L}{V_p \rho_d \omega^2} \right) \right] - \left[1 - \phi_0 \left(1 + \frac{F_1^L}{V_p \rho_c \omega^2} \right) \right] - j k_{\text{eff}}^L \phi_0 \frac{S_0^L + S_2^L}{V_p \rho_c \omega^2} = 0. \quad (2.62)$$

Il est directement observable que $k_{\text{eff}}^L = k_L$ est solution à concentration nulle. Une solution analytique est recherchée sous la forme d'un développement limité au premier ordre en concentration,

$$\left(\frac{k_{\text{eff}}^L}{k_L} \right)^2 = 1 + \phi_0 \xi_1^2. \quad (2.63)$$

En injectant cette forme de solution dans l'équation (2.62) et en annulant le terme au premier ordre en concentration, il vient

$$\xi_1^2 = j k_L \frac{S_0^L + S_2^L}{V_p \rho_c \omega^2} - \frac{F_1^L}{V_p \rho_c \omega^2} \left(1 - \frac{1}{\tilde{\rho}} \right), \quad (2.64)$$

avec $\tilde{\rho} = \frac{\rho_d}{\rho_c}$ le rapport des masses volumiques de chaque phases. Finalement,

$$\left(\frac{k_{\text{eff}}^L}{k_L} \right)^2 = 1 + \frac{\phi_0}{V_p \rho_c \omega^2} \left[j k_L (S_0^L + S_2^L) - F_1^L \left(1 - \frac{1}{\tilde{\rho}} \right) \right]. \quad (2.65)$$

Ce nombre d'onde effectif présente alors des contributions monopolaires, dipolaires et quadripolaires au premier ordre en concentration, avec des conversions d'ondes qui apparaissent dans F_1^L , S_0^L et S_2^L .

2.3.1.2 Nombre d'onde en régime basse fréquence

Le nombre d'onde (2.65) est étudié dans l'hypothèse de grande longueur d'onde $\lambda_L \gg R$ d'où $K_L \ll 1$. Les fonctions de Bessel et de Hankel d'argument K_L présentes dans la force et le stresslet sont donc développées asymptotiquement. Toutefois, la célérité des ondes transverses étant plus faible que celle des ondes longitudinales, les fonctions d'argument K_T ne sont pas développées asymptotiquement. De plus, en régime grande longueur d'onde la propagation est majoritairement impactée par les deux premiers modes de vibration des particules [84]. La contribution du stresslet quadripolaire (2.53) n'est donc pas prise en compte dans cette étude. Sous ces hypothèses, les formules (2.35) et (2.53) se simplifient ainsi :

$$F_1^L = \frac{4\pi}{k_L} \left[-(\lambda + 2\mu) \frac{K_L^3}{3} + j(\lambda + 2\mu) T_1^{LL} + 2\mu_c (K_T + j) e^{jK_T} T_1^{LT} \right], \quad (2.66)$$

et

$$S_0^L = -\frac{4j\pi R}{3k_L} \left[-(\lambda + 2\mu) K_L^2 + \frac{4\mu K_L^2}{3} + j \left((\lambda + 2\mu) K_L - \frac{4\mu}{K_L} \right) T_0^{LL} \right]. \quad (2.67)$$

En posant [18]

$$t_p = \frac{V_p \rho_c \omega^2 - 6\pi R \mu_c \left(1 - jK_T - \frac{K_T^2}{9} \right)}{V_p \rho_p \omega^2 - 6\pi R \mu_c \left(1 - jK_T - \frac{K_T^2}{9} \right)}, \quad (2.68)$$

les coefficients de diffusion (1.54) peuvent être mis sous la forme

$$\begin{cases} T_1^{LL} = -j \frac{K_L^3}{9} (1 - \tilde{\rho}) t_p, \\ T_1^{LT} = \frac{K_L K_T^2}{18} \frac{e^{-jK_T}}{(j + K_T)} [3 - (2\tilde{\rho} + 1) t_p]. \end{cases} \quad (2.69)$$

Le coefficient T_0^{LL} se calcule avec le système (1.31). En régime grande longueur d'onde, il s'écrit :

$$T_0^{LL} = -j \frac{K_L^3}{3}. \quad (2.70)$$

En injectant ces coefficients dans la force et le stresslet monopolaire, ces derniers se simplifient en

$$F_1^L = -V_p \rho_d \omega^2 t_p, \quad (2.71)$$

et

$$S_0^L = j V_p k_L (\lambda + 2\mu). \quad (2.72)$$

En injectant les formules (2.71) et (2.72) dans l'équation (2.65), il vient finalement

$$\left(\frac{k_{\text{eff}}^L}{k_L} \right)^2 = 1 - \phi_0 [1 + (1 - \tilde{\rho}) t_p]. \quad (2.73)$$

Cette relation est la même que dans la référence [18] obtenue pour des particules sphériques dans un fluide. De même, en injectant (2.71) dans la deuxième équation (2.61), le déplacement moyen de la phase disperse se met sous la forme

$$\hat{u}_d = t_p \hat{u}_c. \quad (2.74)$$

Le coefficient t_p correspond alors à un coefficient de diffusion qui relie le mouvement de corps rigide en translation de la particule à l'amplitude de l'onde incidente, en régime grande longueur d'onde.

2.3 Relation de dispersion

2.3.1.3 Comparaison avec l'ISA

En régime grande longueur d'onde, seuls les deux premiers modes de diffusion des particules impactent l'onde effective [84]. Les termes de diffusion supérieur au mode dipolaire sont alors négligés dans cette étude. En régime grande longueur d'onde, le nombre d'onde effectif de Foldy (1.88) peut alors s'écrire

$$\frac{k_F^L}{k_L^2} = 1 - j \frac{3\phi_0}{K_L^3} (T_0^{LL} + 3T_1^{LL}). \quad (2.75)$$

En remplaçant désormais les coefficients de diffusion (2.69) dans l'équation (2.75), il vient

$$\frac{k_F^2}{k_L^2} = 1 - \phi_0 [1 + (1 - \tilde{\rho})t_p]. \quad (2.76)$$

Les formules (2.73) et (2.76) sont identiques ce qui montre l'équivalence des deux approches à basses fréquences. Ce résultat peut sembler contre intuitif car le modèle CPT tient compte de conversions d'ondes dans le cadre de l'ISA contrairement à la formule de Foldy. De plus, les conversions d'ondes apparaissent ici au premier ordre en concentration alors qu'elles interviennent dans le modèle de Luppé *et. al.* [56] uniquement au second ordre de concentration.

La figure 2.5 présente les vitesses et atténuations des ondes longitudinales cohérentes obtenues avec les formules (2.65) et (1.88) sommée sur 5 modes (de $n = 0$ à $n = 4$), à une concentration fixée de 2 % et pour des diffuseurs dans une matrice époxy ayant une masse volumique croissante, *i.e* pour lesquels le contraste de densité entre la matrice époxy et les diffuseurs augmente. Les paramètres mécaniques de la résine époxy utilisés sont ceux du tableau 1.1 et les particules sphériques ont un rayon $R = 198,5 \mu\text{m}$. L'accord entre le modèle CPT et le modèle de Foldy est très bon en basses fréquences. La signature de la résonance en translation est observable par une forte dispersion de la vitesse effective couplée à un pic d'atténuation. L'augmentation du contraste de densité engendre un décalage de la signature de la résonance vers les basses fréquences et une amélioration du facteur de qualité, comme cela est attendu d'après l'équation (1.57).

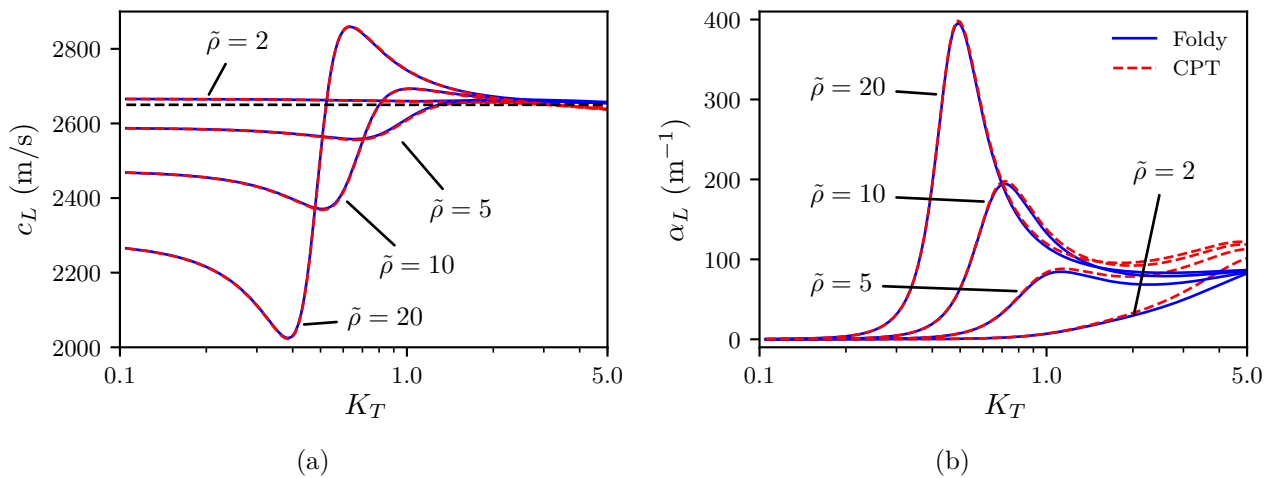


Figure 2.5 – (a) Vitesses et (b) atténuations des ondes longitudinales cohérentes pour une distribution de particules sphériques rigides de masses volumiques croissantes dans une matrice d'époxy à une concentration volumique de 2%. Le trait en tiret noir représente la vitesses des ondes longitudinales dans la matrice pure.

La figure 2.6 présente les vitesses et atténuations des ondes longitudinales cohérentes obtenues pour une répartition aléatoire de billes rigides dans une résine époxy à des fractions volumiques de 2% et 5%. Le contraste de densité est fixé à $\bar{\rho} = 13$, correspondant au contraste de densité entre du carbure de tungstène et la résine époxy. Les courbes obtenues sont de nouveau en très bon accord en basses fréquences. Les vitesses affichent une forte dispersion et les atténuations un pic à respectivement $K_T = 0,62$ et $K_T = 0,64$ selon la concentration, correspondant à la signature de la résonance des particules en translation. Cette résonance est engendrée par les termes dipolaires ($n = 1$) présents dans la force d'interaction interphasique qui atteignent un maximum à cette fréquence. Finalement, l'accord entre le modèle CPT et l'approximation de Foldy avait déjà été vérifié dans le cas d'une matrice fluide [18].

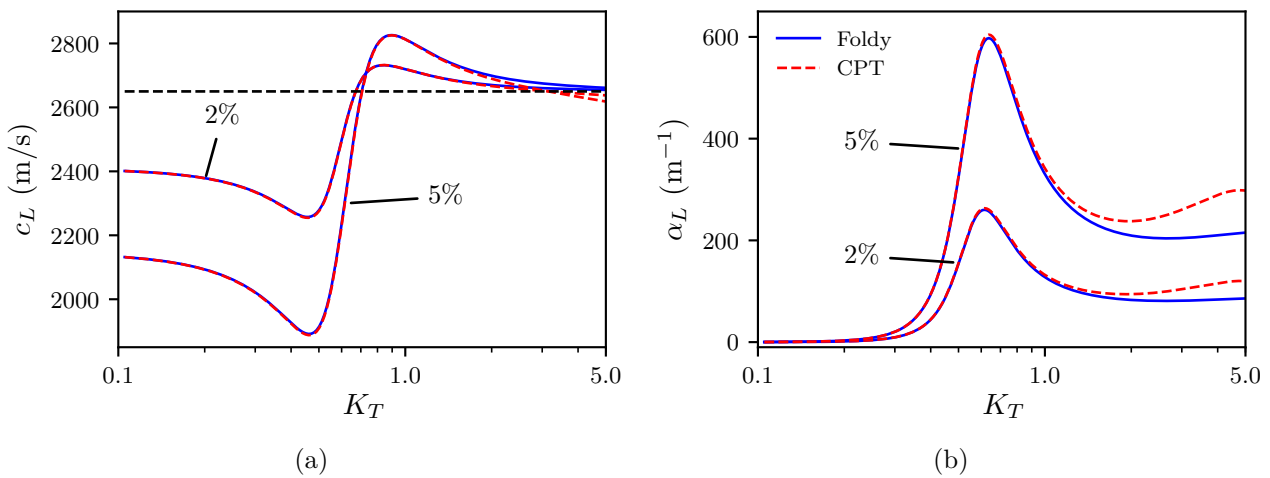


Figure 2.6 – (a) Vitesses et (b) atténuations des ondes longitudinales cohérentes pour une distribution de particules sphériques de carbure de tungstène dans une matrice d'époxy à des concentrations volumiques de 2% et 5%. Le trait en tiret noir représente la vitesse des ondes longitudinales dans la matrice pure.

2.3.2 Onde cohérente transverse

Comme dans le cas longitudinal, le nombre d'onde effectif transverse est établi puis comparé avec un modèle de diffusion multiple issu de l'ISA. Le modèle développé par Tsang et Kong avec l'hypothèse ISA (1.113) et développé pour des ondes électromagnétique est utilisé pour cette comparaison en régime grande longueur d'onde. Les coefficients de diffusion T_n^{TT} et T_n^{SS} utilisés dans l'équation (1.113) correspondent aux coefficients de diffusion des ondes élastiques T et S diffusées par une particule unique établis dans le chapitre 1 et k_T correspond au nombre d'onde des ondes de cisaillement dans la matrice de propagation.

2.3.2.1 Résolution de la relation de dispersion

Le raisonnement pour obtenir la relation de dispersion de l'onde transverse est très similaire au cas longitudinal. En injectant l'équation (2.60) avec $M = T$ dans le système (2.31), le problème devient de nouveau unidimensionnel. Le stresslet (2.57) et la force (2.35) développés pour une onde incidente transverse sont désormais utilisés. Les amplitudes de déplacement moyen des deux phases

2.3 Relation de dispersion

sont à nouveau reliés linéairement par la relation

$$\hat{u}_d = -\frac{F_1^T}{V_p \rho_d \omega^2} \hat{u}_c. \quad (2.77)$$

Avec une méthode de résolution équivalente au cas longitudinal, la relation de dispersion transverse s'écrit :

$$\left(\frac{k_{\text{eff}}^T}{k_T}\right)^2 \left[1 - \phi_0 \left(1 + \frac{F_1^T}{V_p \rho_d \omega^2}\right)\right] - \left[1 - \phi_0 \left(1 + \frac{F_1^T}{V_p \rho_c \omega^2}\right)\right] - j k_{\text{eff}}^T \phi_0 \frac{S_2^T}{V_p \rho_c \omega^2} = 0, \quad (2.78)$$

et a pour solution au premier ordre en concentration

$$\left(\frac{k_{\text{eff}}^T}{k_T^c}\right)^2 = 1 + \frac{\phi_0}{V_p \rho_c \omega^2} \left[j k_T S_2^T - F_1^T \left(1 - \frac{1}{\tilde{\rho}}\right) \right]. \quad (2.79)$$

Ce nombre d'onde a une forme relativement similaire au nombre d'onde effectif longitudinal.

2.3.2.2 Comparaison avec l'ISA

La figure 2.7 présente les vitesses et atténuations des ondes transverse cohérentes obtenues avec les formules (2.79) et (1.113) sommée sur 5 modes à une concentration fixée de 2 % pour des contrastes de densité entre la matrice et les particules rigides croissants. L'accord entre les deux modèles est bon en régime grande longueur d'onde. L'influence de la résonance en translation et sa dépendance au contraste de densité est de nouveau observable, aux mêmes nombres d'onde adimensionnés que dans le cas longitudinal. Cependant, comparé au cas longitudinal, l'accord au delà de la résonance en translation est moins convainquant. En effet, le modèle de Tsang et Kong, qui contient les coefficients de diffusion des ondes T_n^{SS} , présente une dispersion de vitesse et un pic d'atténuation supplémentaire à plus haute fréquence qui correspondent à la signature de la résonance en rotation. Sa dépendance au contraste de densité est la même que celle de la résonance en translation. Le modèle CPT ne parvient cependant pas à mettre en évidence cette résonance car la formule (2.79) ne comporte aucun coefficient de diffusion T_n^{SS} .

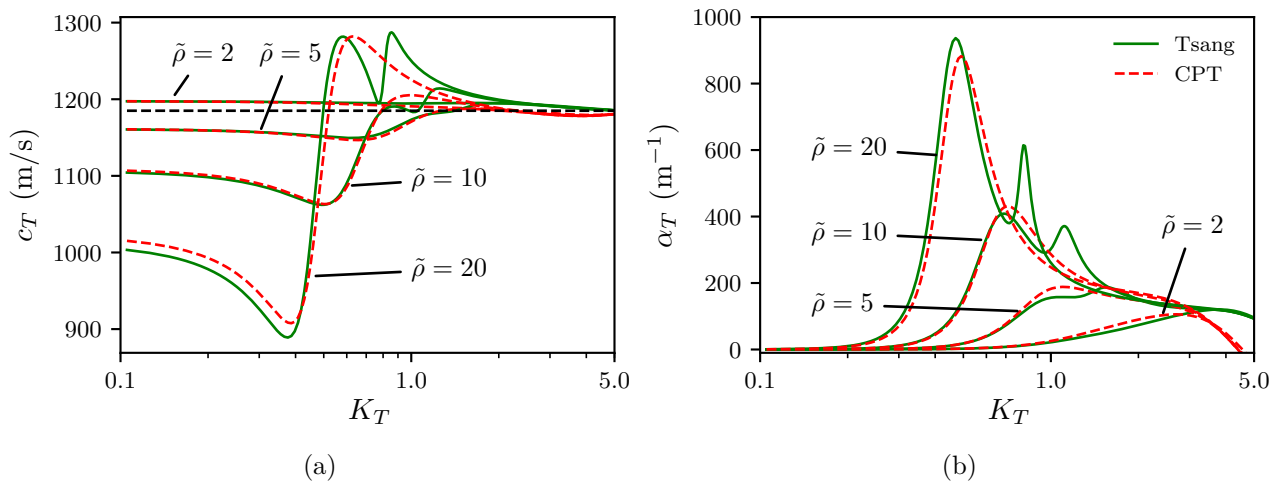


Figure 2.7 – (a) Vitesses et (b) atténuations des ondes transverse cohérentes pour une distribution de particules sphériques rigides de masses volumiques croissantes dans une matrice d'époxy à une concentration volumique de 2%. Le trait en tiret noir représente la vitesse des ondes longitudinales dans la matrice pure.

La figure 2.8 présente les vitesses et atténuations des ondes transverses cohérentes obtenues pour des billes rigides dans de l'époxy, à des concentrations de 2% et 5%, où le contraste de densité est entre le carbure de tungstène et la résine époxy. Les deux approches sont de nouveau en très bon accord en basses fréquences. L'approche de Tsang et Kong présente une dispersion de vitesse et un pic d'atténuation à $K_T = 1$. A cette fréquence le moment d'interaction interphasique présenté figure 2.3 est maximal et la résonance en rotation est atteinte. Enfin, si la contribution des ondes S diffusées est négligée, les deux modèles sont en bon accord quantitatif.

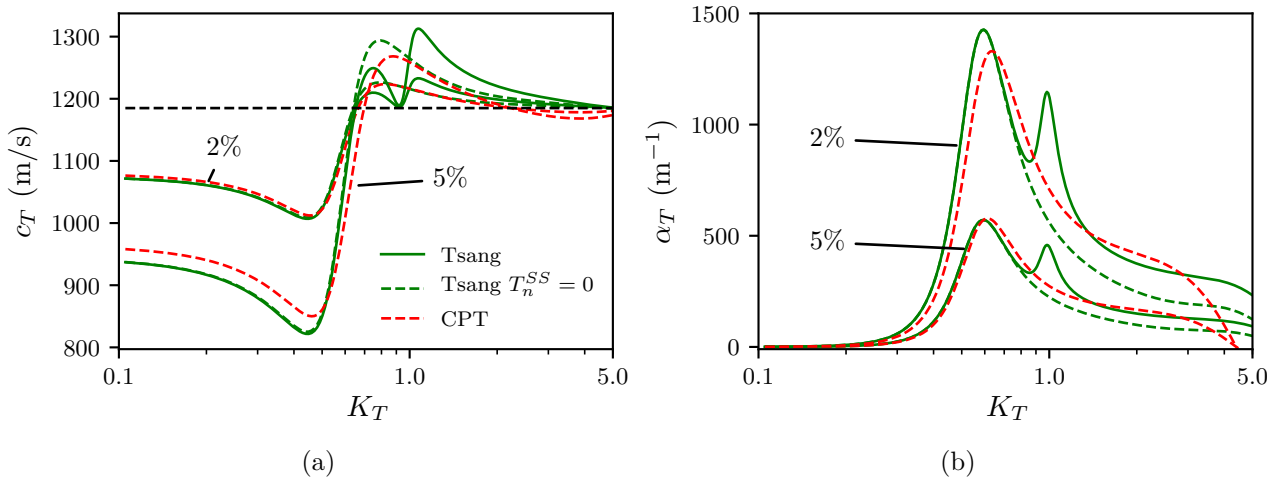


Figure 2.8 – (a) Vitesses et (b) atténuations des ondes transverses cohérentes pour une distribution de particules sphériques de carbure de tungstène dans une matrice d'époxy à des concentrations volumiques de 2% et 5%. Le trait en tiret noir représente la vitesse des ondes longitudinales dans la matrice pure.

2.3.3 Prise en compte de l'élasticité des particules

Les équations de conservation de la quantité de mouvement moyenne dans chaque phase ont été établies dans la partie 2.1.3 pour des particules rigides. Cependant il est tout à fait possible de calculer les termes de couplages, *i.e.* la force, le moment et le stresslet, pour des particules élastiques. Pour ce faire, il s'agit désormais de considérer que le tenseur $\langle \Sigma \rangle_r$ correspond au champ de contrainte exact dans la matrice en présence d'une particule isolée élastique.

2.3.3.1 Influence de l'élasticité sur les termes de couplage

Pour des particules élastiques, les termes de couplage des équations (2.35), (2.43), (2.53) et (2.58) gardent les mêmes formes. Seuls les coefficients de diffusion sont différents. Ils correspondent à ceux obtenus en inversant les systèmes (1.31), (1.32) et (1.53). Les figures 2.9, 2.10 et 2.11 présentent respectivement les forces, moment et stresslet obtenus avec une bille de plomb de rayon $R = 195,5 \mu\text{m}$ dans de l'époxy. Le plomb est un matériau dont la rigidité est bien plus faible que celle du carbure de tungstène. En effet pour le plomb, $\mu_p/\mu_c \approx 3$. Les figures 2.9, 2.10 et 2.11 présentent aussi les termes d'interactions calculés avec les coefficients de diffusion d'une particule rigide.

2.3 Relation de dispersion

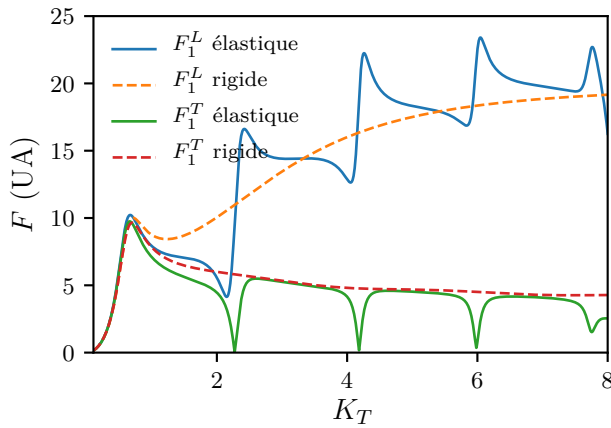


Figure 2.9 – Forces d'interaction interphasique obtenue pour une bille de plomb dans de l'époxy.

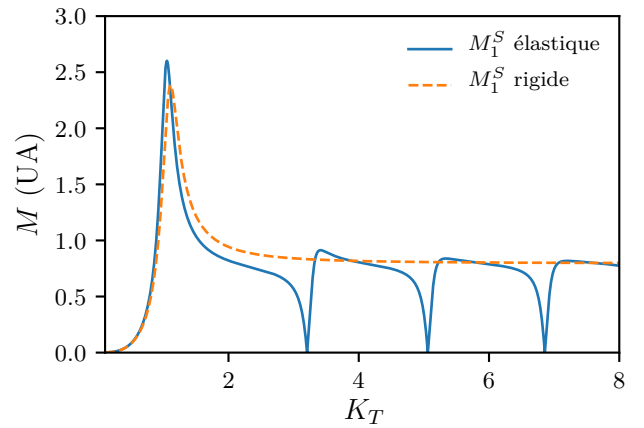
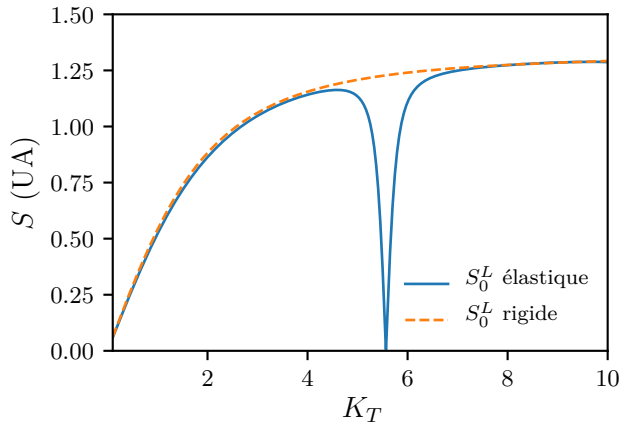
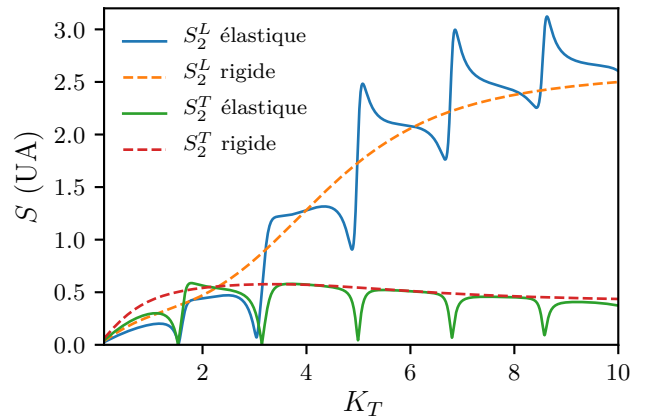


Figure 2.10 – Moment d'interaction interphasique obtenue pour une bille de plomb dans de l'époxy.



(a)



(b)

Figure 2.11 – Variation du stresslet (a) monopolaire et (b) quadripolaire pour des billes de plomb dans de l'époxy.

Les forces obtenues par les deux approches sont équivalentes à basses fréquences. Les forces atteignent un premier maximum à $K_T = 0,67$, dû à la résonance en translation des billes. Cette fréquence est plus élevée que dans le cas du tungstène comme cela a été montré dans le chapitre 1 car le contraste de densité est moins important. Contrairement au cas d'une bille de tungstène, la force longitudinale et la force transverse affichent respectivement des minima et des sauts à des nombres d'onde adimensionnés supérieurs. A ces nombres d'ondes adimensionnés, le déterminant du système (1.53) s'annule pour $n = 1$. Ces comportements témoignent alors de résonances de modes dipolaires L et T dues à l'élasticité des particules. Les mêmes remarques peuvent être appliquées sur le moment d'interaction interphasique. Le premier pic dû à la résonance en rotation s'est décalé à $K_T = 1,06$. De nouveaux minima sont présents à des fréquences supérieures témoignant de résonances de modes dipolaires des ondes S . Le stresslet monopolaire affiche un minimum à $K_T = 5,6$. Ce minimum témoigne d'une résonance monopolaire car le déterminant du système (1.31) s'annule pour ce nombre d'onde adimensionné. Les stresslets quadripolaires présentent des comportements analogue à la force avec des minima dans le cas transverse et des sauts dans le cas longitudinal et témoignent de résonances quadripolaires.

2.3.3.2 Influence de l'élasticité sur les nombres d'ondes effectifs

La figure 2.12 présente les vitesses et atténuation des ondes longitudinales cohérentes obtenues avec l'équation de Foldy (1.88) sommée sur 5 modes et l'équation (2.65) pour des billes de plomb. Les coefficients de diffusions utilisés sont ceux d'une particule élastique. Comme pour le cas d'une particule rigide, les deux approches sont en très bon accord en basses fréquences jusqu'à $K_T = 2,5$. Au delà de ce nombre d'onde, les atténuations obtenues par les deux modèles affichent des amplitudes différentes mais des comportements similaires. La vitesse et l'atténuation présentent la signature de la résonance en translation des particules à $K_T = 0,67$ et $K_T = 0,70$ selon la concentration. A des fréquences supérieures les deux modèles présentent des petits pics d'atténuation et des variations de vitesse de phase, non présents dans le cas du tungstène, et témoignent alors des résonances dues à l'élasticité des particules. A $K_T = 1,70$, le petit pic et la variation de vitesse de phase correspondent à une résonance quadripolaire. Le pic et la dispersion suivante à $K_T = 2,5$ sont cependant dûs à des termes dipolaires.

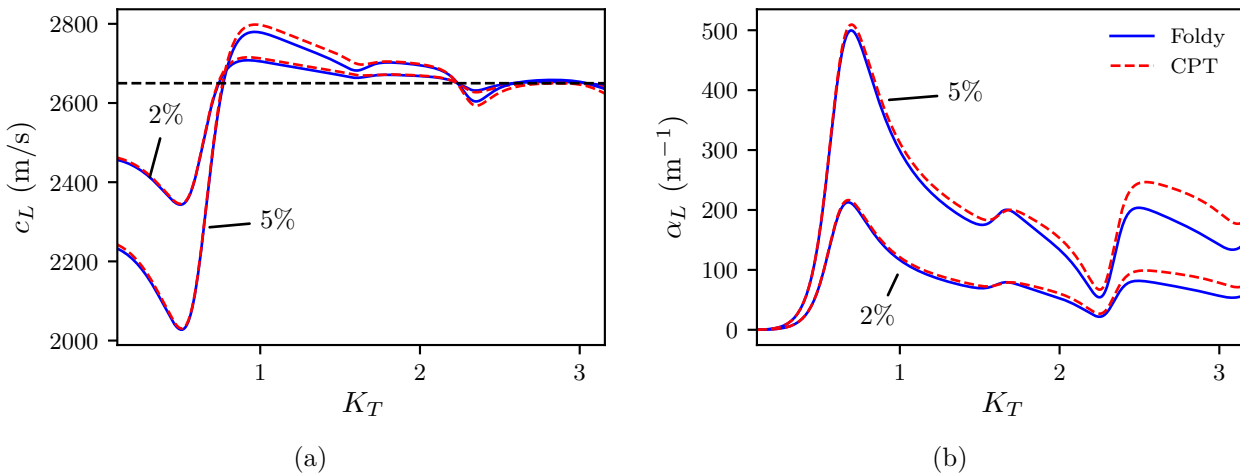


Figure 2.12 – (a) Vitesses et (b) atténuations des ondes longitudinales cohérentes pour une distribution de particules sphériques de plomb dans une matrice d'époxy à des concentrations volumiques de 2% et 5%. Le trait en tiret noir représente la vitesse des ondes longitudinales dans la matrice pure.

La figure 2.13 présente les vitesses et atténuations des ondes transverses cohérentes obtenues avec l'équation de Tsang et Kong (1.113) sommée sur 5 modes et l'équation (2.79) pour des billes de plomb. Les deux approches sont en bon accord en basses fréquences. De plus, le modèle CPT affiche un comportement similaire au cas longitudinal avec l'apparition de variations de vitesses de phase et des pics d'atténuation à plus hautes fréquences. Cependant, le modèle de Tsang et Kong présente des résonances bien plus prononcés, à des fréquences pour lesquelles les sections efficaces de diffusion des ondes T et S de la figure 1.8 présentent des maxima. Dans le cas de la résonance à $K_T = 1,7$ les deux modèles affichent des évolutions similaires. Cette résonance est identifiée comme étant une résonance quadripolaire. A l'inverse, à $K_T = 2,5$ les tendances des deux modèles sont opposées. La comparaison de ces résultats est cependant faussée car le pic du modèle de Tsang et Kong est associé au mode $n = 3$ alors que le creux de d'atténuation du modèle CPT est associé au mode $n = 1$.

2.4 Conclusion

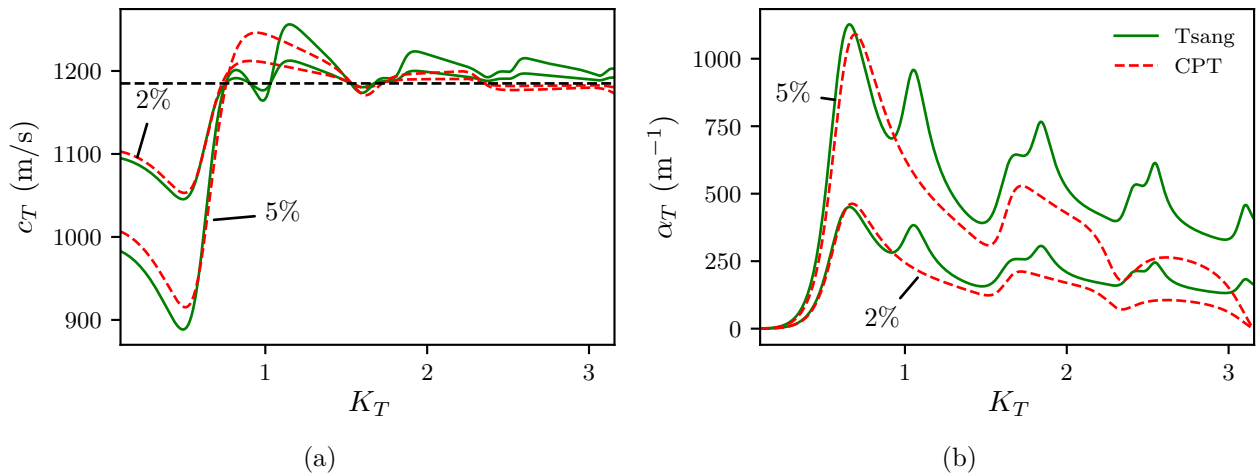


Figure 2.13 – (a) Vitesses et (b) atténuations des ondes transverses cohérentes pour une distribution de particules sphériques de plomb dans une matrice d'époxy à des concentrations volumiques de 2% et 5%. Le trait en tiret noir représente la vitesse des ondes longitudinales dans la matrice pure.

L'accord quantitatif des résultats obtenus en tenant compte de l'élasticité des particules avec des approches basées sur la théorie de la diffusion multiple reste surprenant. En effet, la conservation de la quantité de mouvement moyenne dans les deux phases a été établie grâce aux équations (2.19) qui considèrent les particules rigides. Prendre en compte l'élasticité des particules dans les termes de couplage uniquement semble suffire pour mettre en évidence des résonances de modes quadripolaires, en accord avec des approches basées sur la théorie de la diffusion multiple.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle de propagation d'ondes cohérentes longitudinales et transverses dans une dispersion aléatoire de billes rigides dans une matrice élastique a été développé. Le modèle CPT, initialement fondé sur une approche de mécanique des fluides, a été adapté au cas solide pour une dispersion de billes faiblement concentrée en négligeant les interactions entre les diffuseurs.

Ce modèle a tout d'abord pour avantage de mettre en lumière les interactions entre les deux phases. En effet, le calcul des termes de couplage, issus de l'interaction d'une onde incidente longitudinale ou transverse avec une particule test, permet d'identifier les mécanismes à l'origine des différents modes de diffusion. En premier lieu, la force d'interaction interphasique est à l'origine du mouvement de corps rigide en translation des diffuseurs en basses fréquences. Elle devient maximale lorsque les particules entrent en résonance et diffusent des ondes longitudinales et transverses de manière dipolaires. Il en va de même pour le moment d'interaction interphasique qui est à l'origine du mouvement de corps rigide en rotation des diffuseurs. Le stresslet permet quant à lui de tenir compte des contraintes ajoutées à la phase continue par la présence des particules. Ce terme fait apparaître une contribution monopolaire dans le cas longitudinal uniquement et des contributions quadripolaires. Pour finir, grâce à ces termes d'interaction, il est possible de tenir compte du caractère élastique des diffuseurs et de capter d'autres résonances dipolaires et quadripolaires à des fréquences supérieures à celles des résonances de corps rigide.

La comparaison des nombres d'onde obtenus par cette approche mécanique avec ceux obtenus par une approche plus classique basée sur la théorie de la diffusion multiple et l'ISA a été effectuée. Concernant les ondes longitudinales cohérentes, les deux approches sont en très bon accord en basses fréquences, pour des billes rigides ou élastiques. Les résonances dipolaires et quadripolaires dues à l'élasticité sont bien présentes aux mêmes fréquences mais avec des amplitudes sensiblement différentes. Les mêmes remarques sont applicables pour les ondes transverses cohérentes en dehors du fait que les résonances dipolaires dues à la rotation des particules ne sont pas présentes dans le modèle CPT. Analytiquement, les nombres d'ondes longitudinaux des deux approches sont analytiquement identiques en régime grande longueur d'onde, quand bien même ceux obtenus par la théorie de la diffusion multiple ne tiennent pas compte des conversions d'onde ayant lieu aux interfaces entre les phases continue et disperse.

Les résultats précédents ont sont en très bon accord lorsqu'il s'agit d'identifier les résonances en translation des particules, que ce soit en traitant le cas longitudinal ou le cas transverse. Cependant, le modèle CPT ne parvient pour le moment pas à capter la résonance en rotation des billes sous l'effet d'une onde transverse incidente. En effet, les coefficients de diffusion qui font apparaître la résonance en rotation des particules T_1^{SS} se trouvent dans la partie anti-symétrique du Stresslet mais cette partie est annulée par le moment d'interaction. De plus, aucune partie anti-symétrique n'existe dans le tenseur des contraintes ajoutées $\sigma^{(p)}$ si aucun couple externe ne s'applique sur les particules. Une solution pour prendre en compte la rotation des particules consisterait alors à considérer la matrice comme étant un milieu micropolaire [85]. Ce concept, développé par les frères Cosserat, considère un milieu solide dans lequel chaque point matériel a des degrés de liberté en rotation. Pour le cas particulier des milieux nommés "constrained reduced", ce sont directement les champs de rotation qui engendrent des contraintes dans le milieu, et pas leurs gradients comme cela est le cas pour les champs de déplacement [86]. Ce type de modèle est utilisé pour décrire des milieux élastiques comportant des micro-structures non ordonnées dans lesquelles des rotations microscopiques de ces structures peuvent engendrer une rotation macroscopique. Ce modèle pourrait alors se montrer particulièrement intéressant pour décrire le système étudié ici car les rotations locales des particules ont une influence notable sur l'onde cohérente transverse d'après le modèle de Tsang et Kong.

Chapitre 3

Caractérisation de matériaux atténuants par une méthode d'interférométrie ultrasonore au contact

La caractérisation précise et reproductible de matériaux est un enjeu important pour de nombreuses applications industrielles par exemple en imagerie ou en contrôle non destructif. Contrairement aux essais quasi-statiques, les tests dynamiques permettent d'obtenir des propriétés mécaniques dépendant de la fréquence ce qui est important pour de nombreux matériaux tels les solides viscoélastiques, les composites ou les métamatériaux. Si les propriétés purement élastiques des matériaux isotropes sont facilement mesurables par ultrasons, les pertes par dissipation viscoélastique ou diffusion par des hétérogénéités rendent les mesures plus difficiles.

La génération d'une onde élastique longitudinale (L) ou transverse (T) et la détection après sa propagation ne sont pas toujours aisées. En l'occurrence, la transmission d'une onde en incidence normale d'un milieu 1 à un milieu 2 dépend du coefficient

$$\mathcal{T} = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \quad (3.1)$$

où Z_1 et Z_2 sont respectivement les impédances caractéristiques des milieux 1 et 2. Ces grandeurs sont définies pour des ondes L ou T par le produit de la masse volumique et de la vitesse des ondes L ou T. Le contraste des impédances caractéristiques L de la plupart des matériaux denses (liquides ou solides) existants est assez faible car les modules de compression sont au minimum de l'ordre de quelque GPa. Par exemple, le coefficient de transmission de l'eau vers du caoutchouc en polyuréthane est $\mathcal{T} \approx 0.99$ et celui du polyuréthane vers du duralumin est $\mathcal{T} \approx 0.31$ (les valeurs de rhéologie du polyuréthane sont disponibles dans la référence [87]) La transmission entre ces milieux est donc efficace. Pour le cas de mesures au contact où le transducteur est monté directement sur l'échantillon inconnu, un liquide peu visqueux tel un gel aqueux assure le contact par mouillage et la transmission de l'onde L dans le milieu à sonder [88, 89]. Dans le cas des ondes T, le contraste des impédances caractéristiques peut être très important entre les milieux les plus rigides ($G > 1$ GPa) et les plus déformables ($G < 100$ MPa). Par

exemple, le coefficient de transmission des ondes T du catouchouc en polyuréthane vers du duralumin est $\mathcal{T} \approx 0.1$. Les mesures au contact nécessitent d'une part un couplant suffisamment visqueux ou rigide pour assurer la transmission des ondes entre deux milieux, et d'autre part un matériau liquide pour assurer le couplage par mouillage [60]. Réussir à obtenir un couplage efficace et reproductible entre différents milieux constitue toutefois un réel défi.

La présence d'une couche de couplant à l'interface entre un échantillon et un transducteur engendre un biais dans l'évaluation absolue de la vitesse et de l'atténuation [90, 91]. Différents essais ont été menés afin de pallier ce problème avec par exemple des corrections théoriques sur la phase des ondes [89, 92] ou par l'acquisition de plusieurs signaux dans différentes configurations du système de mesure [59]. Par exemple, la figure 3.1 présente un schéma de l'expérience mise en place dans la référence [59] où l'orientation et le serrage des capteurs sur l'échantillon sont contrôlés grâce à des vis de serrage. Pour pallier cette problématique de couplage, des mesures en immersion ont été proposées [93]. Dans ce cas, les transducteurs et les échantillons sont immergés dans un fluide (généralement de l'eau). L'avantage est que le liquide environnant assure une transmission reproductible et un couplage parfait entre les différents éléments. En incidence normale, ce procédé permet de sonder l'échantillon en compression du fait de la bonne transmission des ondes à l'interface entre le fluide et l'échantillon. Au delà de l'angle critique défini par les lois de Snell-Descartes, l'échantillon est sondé en cisaillement par conversion uniquement [58, 94]. La figure 3.1 présente un schéma de cette mesure issue de la référence [94]. Toutefois, pour des échantillons dispersifs, l'angle critique n'est pas le même à toutes les fréquences ce qui rend cette méthode peu efficace.

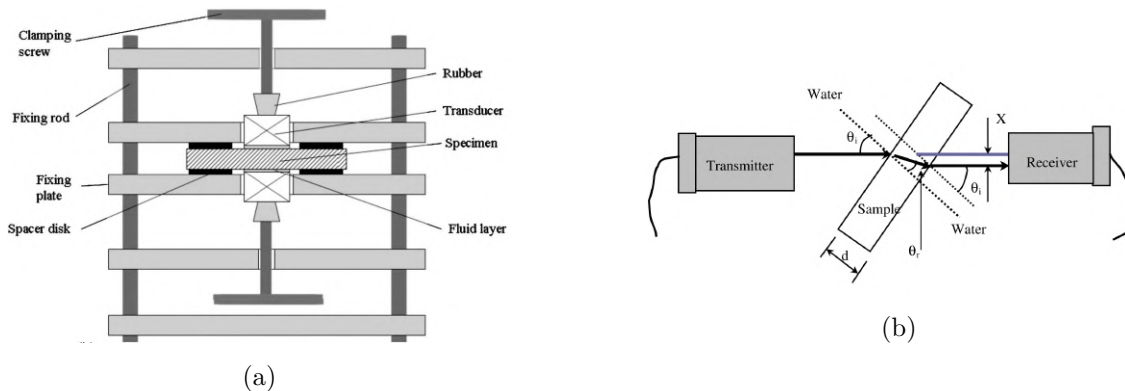


Figure 3.1 – Schéma de différentes expériences ultrasonores : (a) Mesure au contact en incidence normale [59], (b) Mesure en immersion à l'angle critique [58].

Que ce soit au contact ou en immersion, l'extraction des paramètres mécaniques peut être réalisée par des méthodes temporelles ou spectrales. Les approches temporelles reposent sur la mesure du temps d'arrivée (chronométrie) des différents échos réfléchis ou transmis dans un échantillon afin d'en déduire la célérité des ondes. L'atténuation est obtenue en comparant leurs amplitudes [61]. Ces techniques donnent des résultats uniquement à la fréquence centrale d'émission. Il est toutefois possible de procéder avec des trains d'onde sur la bande passante des transducteurs mais cette méthode est longue et impose des restrictions sur l'épaisseur des échantillons. De plus, les méthodes temporelles s'avèrent difficilement applicables dans le cas de matériaux fortement atténuants et dispersifs car deux échos peuvent présenter des formes très différentes. Les approches spectrales ont en revanche pour

3.1 Principe de l'interferométrie "sandwich"

avantage d'obtenir des informations dans un domaine de fréquence dépendant de la bande passante des capteurs. Cela est possible grâce au rapport des deux spectres d'échos successifs dans l'échantillon ou du spectre d'un écho dans l'échantillon et d'un spectre de référence. Que ce soit par les méthodes classiques de chronométrie ou spectrale, les échos doivent être bien distincts dans le temps. Ce critère de non recouvrement induit alors une épaisseur minimale pour les échantillons à sonder. Cette épaisseur minimale s'avère problématique pour des matériaux à forte absorption. Si le recouvrement des échos n'est pas évitable, il est cependant possible de procéder à une analyse fréquentielle des interférences d'impulsions [95, 96] qui requiert l'application d'un modèle de propagation dans un milieu multi-couches.

Afin de caractériser précisément des matériaux fortement dispersifs, une méthode basée sur l'analyse des interférences des échos dans un milieu multi-couches a été développée [62, 63] et est décrite dans ce chapitre. Ce nouveau dispositif, appelé "le sandwich", repose sur la mesure d'ondes élastiques dans un échantillon inséré entre deux lignes à retard [61, 95] et couplé à celles-ci par des couches de couplant à épaisseurs contrôlées. Cette technique repose sur plusieurs stratégies afin de parvenir à un couplage reproductible. Le couplage entre les transducteurs et les lignes à retard est assuré par le contrôle de la masse de couplant et du serrage. Celui entre les lignes à retard et l'échantillon est contrôlé grâce à des cales d'épaisseur et de nouveau le serrage. La rhéologie du couplant utilisé est connue et intégrée dans la modélisation de propagation unidimensionnelle d'ondes planes dans un milieu multi-couches. La mesure repose sur l'acquisition des coefficients de réflexion et de transmission des ondes dans le multi-couches. La comparaison des mesures avec la modélisation du système et la résolution d'un problème inverse permettent finalement d'extraire les paramètres mécaniques inconnus des échantillons.

3.1 Principe de l'interferométrie "sandwich"

3.1.1 Dispositif expérimental

Le principe de la technique sandwich est de mesurer les ondes réfléchies et transmises dans un échantillon solide fin, inséré entre deux blocs de duralumin utilisées comme lignes à retard pour séparer les différents échos. La figure 3.2 présente une photo de ce dispositif.

Lignes à retard : Les lignes à retard ont une épaisseur $L = (59,88 \pm 0,03)$ mm et sont constituées d'un alliage d'aluminium Dural 2017A (AU49) poli miroir. La masse volumique de l'AU49 est $\rho_d = 2790 \text{kg.m}^{-3}$ et les vitesses des ondes de compression et de cisaillement sont respectivement $c_{Ld} = 6268 \text{m.s}^{-1}$ et $c_{Td} = 3117 \text{m.s}^{-1}$. L'indice d fait référence à "delay line".

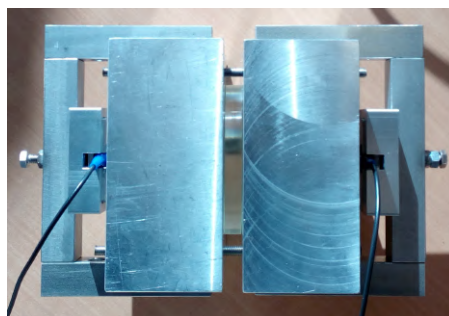


Figure 3.2 – Photo du dispositif sandwich, présenté de façon schématique figure 3.8.

Couplant : Une paire de transducteurs identiques est montée au contact de chaque ligne à retard en utilisant une quantité contrôlée de couplant visqueux *Olympus* SWC-2. Ce matériau est un fluide visqueux à température ambiante ce qui permet d'assurer le contact par mouillage des transducteurs sur les lignes à retard. La masse volumique mesurée au pycnomètre est $\rho_c = 1452 \pm 27 \text{ kg.m}^{-3}$ à température ambiante. La figure 3.3 présente l'évolution du module de cisaillement de ce matériau à $5,0 \pm 0,2^\circ\text{C}$ en fonction de la fréquence [62]. Dans cette gamme de fréquence, la partie réelle du module de cisaillement devient de l'ordre du GPa : le couplant devient alors d'une rigidité semblable à celle d'un solide, tel du PMMA par exemple [60]. Les contrastes des impédances de cisaillement entre les différents éléments deviennent moins importants, ce qui permet une transmission efficace. La rhéologie du module de cisaillement est représentée par un modèle de Zener fractionnaire défini par

$$G_c = \frac{G_0 + G_\infty(j\omega\tau)^\alpha}{1 + (j\omega\tau)^\alpha}. \quad (3.2)$$

G_0 et G_∞ sont respectivement les valeurs basses et hautes fréquences de G et τ est un temps de relaxation. L'exposant α est un paramètre du modèle fractionnaire. La meilleure approximation des données expérimentales par ce modèle permet de déterminer les valeurs suivantes : $G_0 = (1,94 \pm 0,05) \text{ GPa}$, $G_\infty = (3,71 \pm 0,03) \text{ GPa}$, $\tau = (128 \pm 10) \text{ ns}$ et $\alpha = (0,56 \pm 0,03)$.

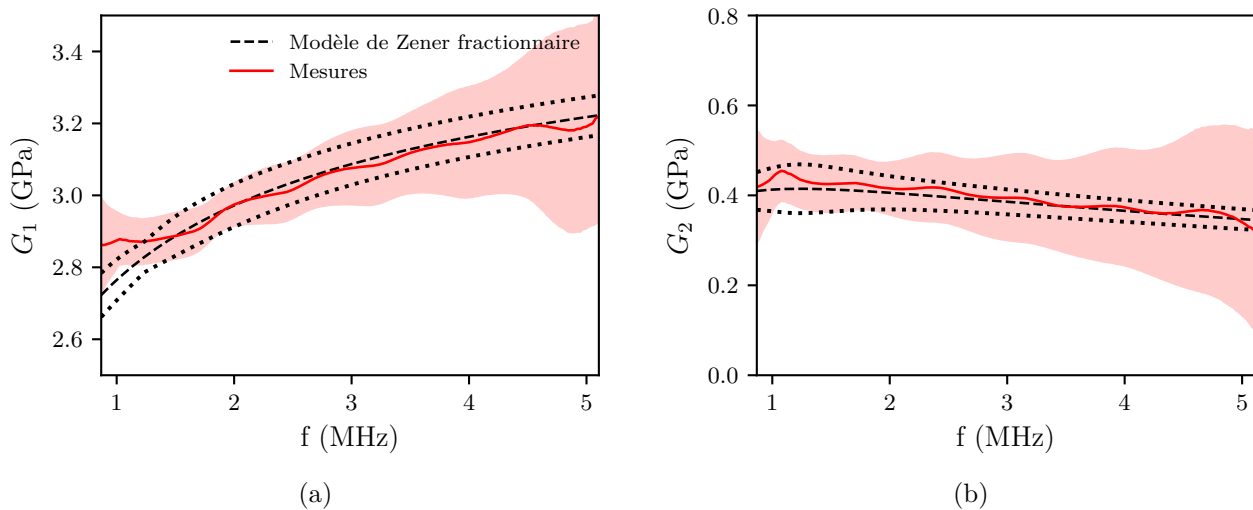


Figure 3.3 – Variation de (a) la partie réelle et (b) la partie imaginaire du module de cisaillement du couplant Olympus SWC-2, pour la paire de capteurs 1 (voir tableau 3.1) pour un échantillon d'épaisseur 1 mm. La zone colorée transparente de part et d'autre des courbes expérimentales correspond à l'incertitude définie dans la partie 3.2.3. Les courbes pointillées noires correspondent à la propagation des erreurs du modèle de Zener fractionnaire.

Couplage transducteurs - lignes à retard : Il n'est pas possible de contrôler l'épaisseur de couplant présent entre la ligne à retard et le capteur. Pour palier ce problème, une masse contrôlée de couplant est déposée uniformément sur la surface des capteurs. Une pression est ensuite appliquée sur les capteurs à l'aide d'une vis de serrage qui applique un couple contrôlé à la clef dynamométrique de $(2,0 \pm 0,2) \text{ N.m}$. La figure 3.4 présente une étude de l'amplitude du premier écho réfléchi sur l'interface libre d'une ligne à retard en fonction de la masse de couplant appliquée uniformément sur un capteur de 0,5 pouce de diamètre. D'après cette mesure, plus la masse de couplant est faible, plus l'amplitude des ondes générées est importante. Pour un tel diamètre, la masse optimale de couplant répartie sur la

3.1 Principe de l'interferométrie "sandwich"

surface des transducteurs est d'environ 5 mg. Pour des raisons de reproductibilité, la masse appliquée sur cette taille de capteur est 7 mg, soit une masse surfacique optimale de $55 \mu\text{g}\cdot\text{mm}^{-2}$. La masse de couplant utilisée avec des capteurs de 1 pouce est de ce fait de 30 mg. Afin de répartir uniformément le couplant sur la surface émettrice des transducteurs, une grande masse est initialement posée sur un support. Le couplant est ensuite disposé uniformément sur la surface émettrice en pressant le capteur sur le support et en effectuant des mouvements circulaires. Le surplus est enlevé et les mouvements circulaires répétés jusqu'à obtenir la masse désirée et une couche homogène contrôlée à l'oeil. Cette procédure est imposée de manière à obtenir un couplage reproductible entre les transducteurs et les lignes à retard et une transmission efficace des ondes dans le système.

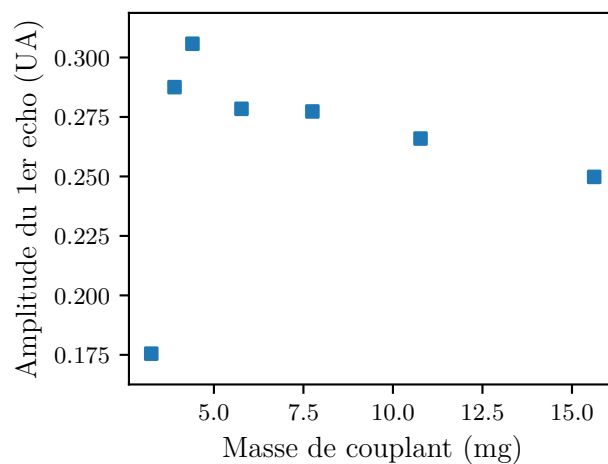


Figure 3.4 – Amplitude du premier écho réfléchi sur l'interface libre d'une ligne à retard en fonction de la masse appliquée sur un transducteur de 0,5 pouce.

Couplage lignes à retard - échantillon : L'échantillon à sonder est placé entre les deux lignes à retard. Le contact est assuré de manière répétable en insérant des couches de couplant d'épaisseur contrôlée entre les différents éléments. Pour cela, des rondelles de diamètre interne $D_w = 50 \text{ mm}$ sont utilisées comme cales d'épaisseur $h = (105 \pm 5) \mu\text{m}$. Le couplant injecté dans les rondelles assure le contact entre les lignes à retard et l'échantillon et les rondelles assurent le parallélisme des différentes interfaces. Les différents éléments du dispositif sont ensuite solidarisés grâce à trois tiges filetées. Le serrage de la totalité du dispositif est assuré avec un couple appliqué d'amplitude $(10,0 \pm 0,2) \text{ N.m}$, contrôlé à la clef dynamométrique. Le dispositif expérimental est finalement placé dans un incubateur réfrigéré à température fixée à $5,0 \pm 0,2^\circ\text{C}$ de manière à assurer des couplages stables dans le temps. La figure 3.5 montre les variations temporelles de l'amplitude et le temps de vol du premier écho s'étant propagé dans tout le dispositif. Le sandwich est placé dans l'incubateur à l'instant initial $t = 0$. Le temps de vol se stabilise au bout de 2 heures alors que l'amplitude se stabilise au bout de 4 heures. Au contraire, à température ambiante, aucune stabilisation de l'amplitude n'est observée après plusieurs heures, voire plusieurs jours. Le protocole décrit ci-dessus assure une mesure très répétable.

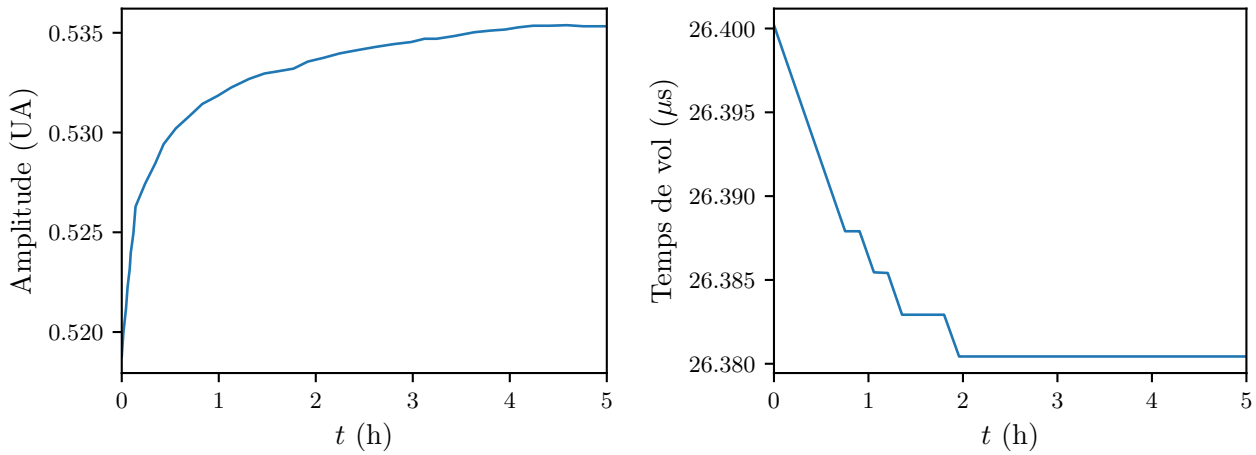


Figure 3.5 – Amplitude et temps de vol du premier écho transmis dans le milieu multicouche lors de la thermalisation.

Emission - réception ultrasonore : Les ondes sont générées par un générateur - récepteur d'impulsions *Olympus* PR5072 à une fréquence de répétition de 100 Hz. Les résistances internes des dipôles émetteur et récepteur sont équilibrées grâce à un schéma électrique. Les signaux sont enregistrés à l'aide d'une carte d'acquisition ayant 14 bits de résolution et une fréquence d'échantillonnage $f_s = 400$ MHz. Les différents capteurs utilisés dans cette expérience sont listés et numérotés dans le tableau 3.1.

	<i>Olympus</i> V152	<i>Olympus</i> V155	<i>Olympus</i> V152-RB	<i>General Electrics</i>
Numéro	1	2	3	4
Type d'onde	Transverse	Transverse	Transverse	Longitudinale
Diamètre (pouce)	0,5	0,5	1	1
Fréquence centrale (MHz)	2,22	4,18	1,05	1
f_{\min} (MHz)	0,84	0,84	0,46	0,93
f_{\max} (MHz)	4,67	4,67	1,16	2,33

Tableau 3.1 – Caractéristiques des transducteurs utilisés. Les fréquences f_{\min} et f_{\max} sont définies dans la partie 3.1.2.

3.1.2 Domaine de validité de la méthode

Le domaine fréquentiel de validité de la technique sandwich est déterminé selon plusieurs critères. Tout d'abord, la bande passante des transducteurs utilisés fixe un premier domaine de fréquence observable, mais ne donne pas un domaine de validité absolu. De ce fait, deux limites inférieures et supérieures, notées respectivement f_{\min} et f_{\max} , sont fixées par la géométrie du dispositif. Pour rappel, le tableau 3.1 indique ces fréquences pour chaque transducteur utilisé.

f_{\max} : La figure 3.6 constitue un schéma de l'ouverture du faisceau acoustique au cours de sa propagation libre dans une ligne à retard. En premier lieu, l'échantillon doit être placé en champ lointain de l'émetteur afin d'être traversé par une onde de phase homogène. La borne de fréquence supérieure est alors $f = f_{\max}$ telle que $z_r \approx k_d a^2 / 2\pi = L$, où z_r est la distance de champ lointain, k_d est le nombre

3.1 Principe de l'interferométrie "sandwich"

d'onde dans le duralumin et a le rayon du transducteur. Au delà de cette fréquence, l'échantillon n'est pas en champ lointain. Autrement dit, $f_{\max} = Lc_{Md}/a^2$ avec $M = L, T$. De plus, dans la gamme de fréquence $f \leq f_{\max}$, l'onde incidente sur l'échantillon peut être considérée comme plane car le critère d'approximation paraxiale des ondes sphériques est respecté : $z_r/\pi L \ll 1 \Leftrightarrow f/\pi f_{\max} \ll 1$.

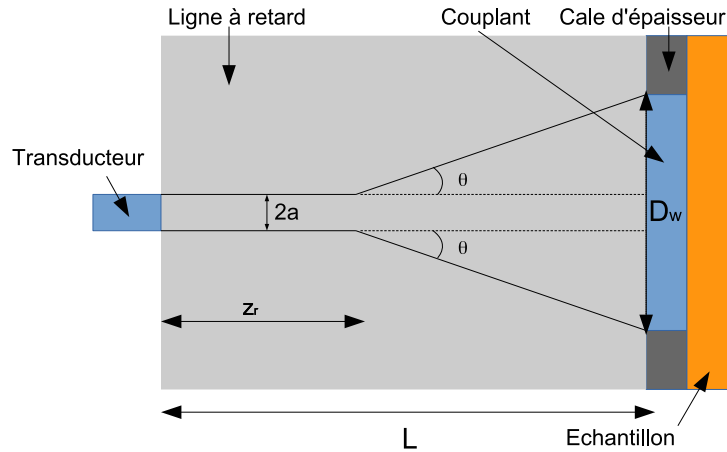


Figure 3.6 – Schématisation de l'ouverture du faisceau acoustique au cours de sa propagation libre dans une ligne à retard jusqu'à la cale d'épaisseur

f_{\min} : La figure 3.7 présente la directivité d'ondes transverses rayonnées dans du duralumin par un transducteur de diamètre 0,5 pouce à une fréquence $f = 1$ MHz. Les positions des premiers zéros de la fonction J_1 sont représentées par les traits en pointillés noirs.

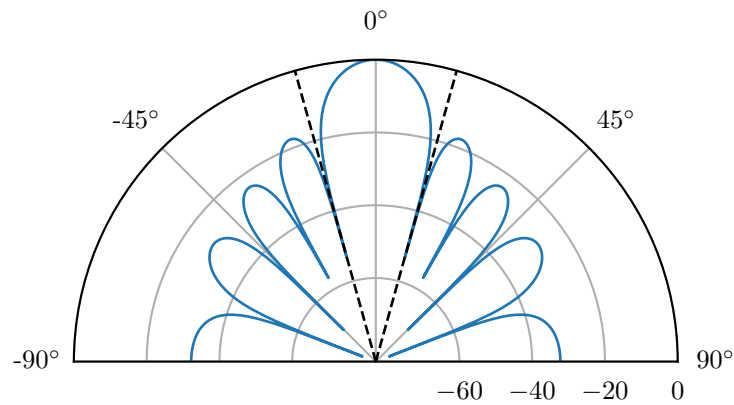


Figure 3.7 – Directivité des ondes transverses rayonnées dans du duralumin à 1 MHz par un piston plan de diamètre 0,5 pouce en échelle logarithmique. Les traits en pointillés noirs symbolisent l'ouverture au premier zéro de la fonction de Bessel $J_1(x)$.

Afin d'éviter la propagation dans les cales d'épaisseur ainsi que des effets de diffraction par les bords de celles-ci, l'ouverture du faisceau généré par le transducteur doit être inférieure au diamètre interne des cales D_w . En modélisant le rayonnement d'un transducteur par le rayonnement d'un piston plan bafflé, l'amplitude de l'onde émise dépend de l'angle de diffraction θ selon la loi :

$$D(\theta) = \frac{2J_1(k_d a \sin \theta)}{k_d a \sin \theta}, \quad (3.3)$$

où $J_1(x)$ est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 1. Cette modélisation simplifiée ne prend

pas en compte les conversions d'ondes par les bords du transducteur et suppose également un baffle infini. Elle reste toutefois une modélisation pratique qui permet de donner des ordres de grandeur d'ouverture du faisceau. En définissant l'ouverture angulaire du faisceau comme correspondant au premier zéro de la fonction de Bessel $J_1(x)$, correspondant à l'argument $x = 3,83$ pour le lobe principal, la borne de fréquence inférieure f_{\min} est telle que :

$$\arcsin [3.83/(k_d a)] = \arctan \left[\frac{D_w - 2a}{2(L - z_r)} \right]. \quad (3.4)$$

3.1.3 Echantillons test

Les échantillons utilisés pour tester la technique de mesure sont en Polyméthacrylate de méthyle (PMMA). Ce matériau, fourni par la société *Gamma-Tec* en plaques d'épaisseur homogène, a l'avantage d'être bien renseigné dans la littérature [60, 97] et facilement usinable à la découpeuse laser. Les échantillons ont une géométrie cylindrique de rayon $R = 4$ cm et d'épaisseur $H = (4,888 \pm 0,005)$ mm et $H = (2,974 \pm 0,005)$ mm. Par commodité, les échantillons sont respectivement nommés échantillons de 5 mm et 3 mm dans la suite de cette partie. Un échantillon de résine d'époxy dont les propriétés sont décrites précisément dans le chapitre 4, d'épaisseur $H = 2.232 \pm 0.005$ mm est aussi à disposition et est nommé échantillon de 2mm.

3.1.4 Acquisition des signaux

La technique du sandwich permet la mesure absolue des coefficients de réflexion \mathcal{R} et de transmission \mathcal{T} du milieu multi-couches couplant-échantillon-couplant précédemment présenté. Une telle mesure est possible en combinant l'acquisition de signaux réfléchis et transmis dans tout le système (configuration figure 3.8a) et de signaux de référence issus de la réflexion sur la surface libre de chaque ligne à retard (configuration figure 3.8b).

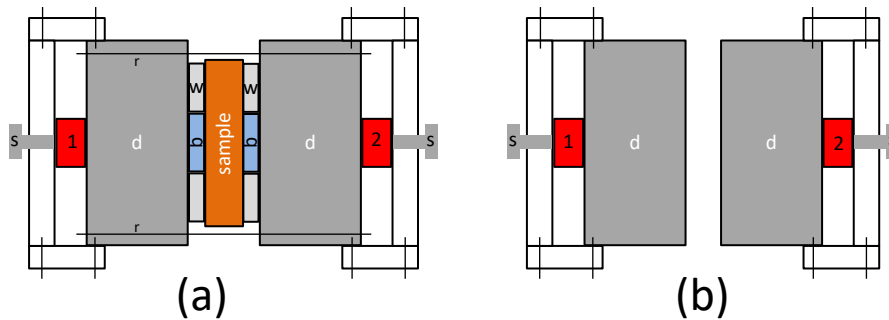


Figure 3.8 – Schéma du sandwich (a) dans la configuration montée et (b) dans la configuration séparée.

Le dispositif est entièrement assemblé et placé dans l'incubateur réfrigéré. Les transducteurs gauche et droite sont respectivement notés 1 et 2. L'amplitude et le temps de vol des ondes transmises de 1 vers 2 sont suivis dans le temps. Lorsque ces deux grandeurs ne varient plus, le dispositif est considéré comme stable en température et la mesure est effectuée. Les signaux transmis de 1 vers 2 et de 2 vers 1 sont acquis et sont respectivement notés s_{t1} et s_{t2} . Les signaux réfléchis par le milieu multicouche de 1 vers 1 (nommé réflexion à gauche) et de 2 vers 2 (réflexion à droite) sont acquis et respectivement notés s_{r1} et s_{r2} . L'échantillon est ensuite retiré du dispositif et le surplus de couplant sur les surfaces libres des lignes à retard est nettoyé. Les signaux de calibrage en réflexion totale de 1 vers 1 et de 2

3.1 Principe de l'interferométrie "sandwich"

vers 2, sur chaque surface libre des lignes à retard, sont finalement acquis et sont respectivement notés s_{c1} et s_{c2} .

La figure 3.9 présente trois signaux temporels (un réfléchi, un transmis et un de calibrage) obtenus avec la paire de capteurs de cisaillement 1 et l'échantillon de PMMA d'une épaisseur de 5 mm. Dans la suite de cette étude, l'intérêt est porté sur la partie des signaux réfléchis qui a fait un unique aller-retour dans la ligne à retard concernée. Pour les signaux transmis, seule la partie qui a fait un unique trajet dans la totalité du dispositif est prise en compte. De ce fait, l'analyse des signaux est délimitée par le trait en pointillé noir sur la figure 3.9. Avant cette limite, les lignes à retard peuvent être considérées comme étant semi-infinies. D'autres échos, non pris en compte, sont visibles au-delà de cette limite.

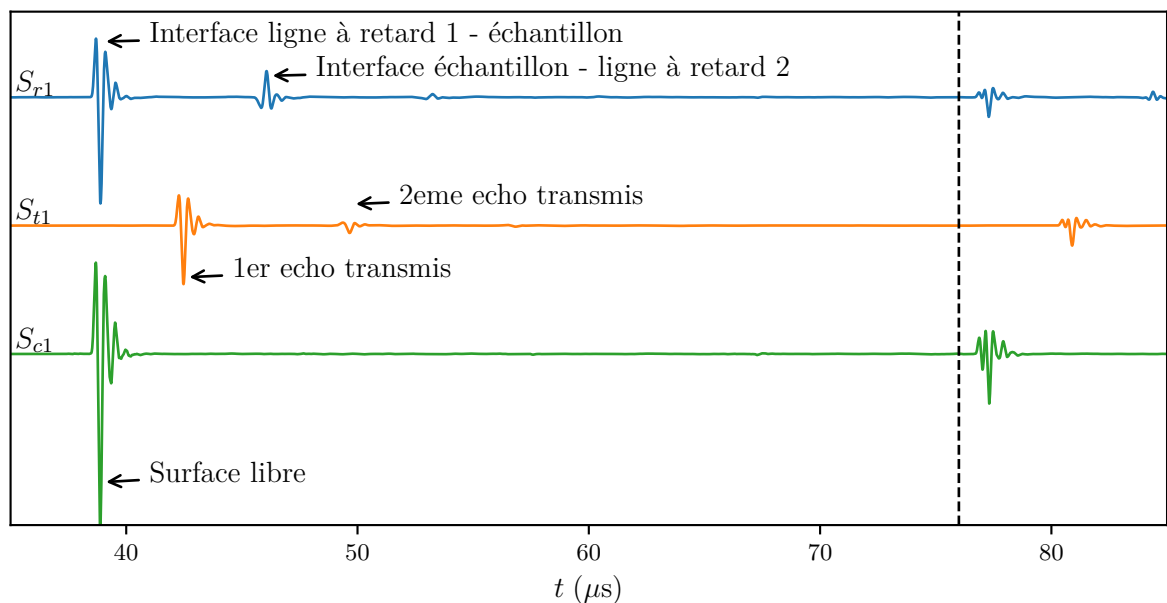


Figure 3.9 – Signaux réfléchis, transmis et de calibrage pour un échantillon de PMMA de 5 mm et la paire de transducteur 1.

Contrairement aux signaux de calibrage, les signaux en réflexion et en transmission présentent une série d'échos supplémentaires, dus aux réflexions internes dans l'échantillon sondé. Ces échos ont une forme relativement similaire, ce qui met en évidence le caractère faiblement dispersif de la propagation dans le PMMA. La variation de polarité des échos dans l'échantillon témoigne du changement de signe de la contrainte lors de la réflexion sur l'interface entre la ligne à retard et l'échantillon et de l'invariance du signe de la contrainte à la réflexion sur l'interface entre l'échantillon et la ligne à retard. Cela est dû au fait que le coefficient de réflexion d'un milieu 1 à un milieu 2 est l'opposé du coefficient de réflexion du milieu 2 au milieu 1.

3.1.5 Calcul des coefficients de réflexion et de transmission

La transformée de Fourier est appliquée aux six signaux temporels acquis précédemment. La fenêtre d'analyse est prise identique pour tous les signaux. Elle commence avant l'arrivée du premier écho en réflexion et finit avant l'arrivée de l'impulsion ayant fait un aller-retour complet dans tout le dispositif (avant le trait en pointillé de la figure 3.9). Du fait de cette fenêtre d'analyse, les lignes

à retard sont considérées comme semi-infinies pour le traitement des signaux. L'hypothèse de champ lointain et l'approximation paraxiale permettent de considérer la propagation d'ondes planes dans chaque élément du système.

Soit $I(\omega)$ le spectre du signal électrique généré par le générateur-récepteur d'impulsions et appliqué à l'émetteur. Soit g_{dm} le coefficient de conversion électro-mécanique du transducteur m à la ligne à retard, exprimé en Pa/V, et g_{md} le coefficient de conversion mécano-électrique de la ligne à retard au transducteur m , exprimé en V/Pa, avec $m = 1, 2$. Compte tenu des hypothèses mentionnées précédemment, les spectres des signaux de calibrage sont modélisés par :

$$S_{cm}(\omega) = -I(\omega)g_{md}g_{dm}e^{2jk_dL_m} \quad \text{avec } m = 1, 2, \quad (3.5)$$

où $k_d = \omega/c_d$ est le nombre d'onde dans les lignes à retard et L_m est l'épaisseur de la ligne à retard m . Le signe négatif de l'expression (3.5) est dû au coefficient de réflexion en contrainte sur la surface libre qui vaut -1. De même, les spectres des signaux en transmission et en réflexion sont modélisés par les expressions

$$\begin{cases} S_{t1}(\omega) = I(\omega)g_{1d}g_{d2}e^{jk_d(L_1+L_2)}\mathcal{T}_1, \\ S_{t2}(\omega) = I(\omega)g_{2d}g_{d1}e^{jk_d(L_1+L_2)}\mathcal{T}_2, \\ S_{rm}(\omega) = I(\omega)g_{md}g_{dm}e^{2jk_dL_m}\mathcal{R}_m, \quad \text{avec } m = 1, 2. \end{cases} \quad (3.6)$$

\mathcal{R}_1 et \mathcal{T}_1 sont respectivement les coefficients de réflexion et de transmission à gauche de l'assemblage couplant-échantillon-couplant et \mathcal{R}_2 et \mathcal{T}_2 sont ceux à droite. Ces grandeurs sont complexes et l'égalité $|\mathcal{R}_m|^2 + |\mathcal{T}_m|^2 = 1$ n'est pas attendue du fait du caractère atténuant de l'assemblage. En combinant les six signaux modélisés par les relations (3.5) et (3.6), le produit des deux coefficients de transmission et les deux coefficients de réflexion sont donnés par les expressions :

$$\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \frac{S_{t1}S_{t2}}{S_{c1}S_{c2}} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_m = \frac{S_{rm}}{S_{cm}}, \quad \text{avec } m = 1, 2. \quad (3.7)$$

Les différences de couplage entre les lignes à retard et les capteurs n'ont pas d'influence sur la mesure des coefficients de réflexion et de transmission du fait de la normalisation par le spectre de calibrage. De plus, le processus de calibrage permet de ne pas considérer les éventuelles différences d'épaisseur des lignes à retard. Compte tenu de la symétrie plane du dispositif, on peut considérer que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}$ et noter \mathcal{T}^2 le produit $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$.

La figure 3.10 présente l'évolution du module et de l'argument des coefficients \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 et \mathcal{T}^2 en fonction de la fréquence pour un échantillon de PMMA d'épaisseur 5 mm et la paire de transducteurs 1 (*i.e.* les spectres obtenus avec les signaux temporels présentés sur la figure 3.9). L'intervalle de fréquence utilisé correspond à peu près à la largeur de la bande passante des capteurs utilisés. En dehors de l'intervalle 0,5-5 MHz, les coefficients divergent car ces fréquences ne sont plus dans la bande passante à -20 dB des transducteurs utilisés. Dans l'intervalle 0,5-5 MHz, le comportement quasi-périodique des coefficients est la signature des multiples interférences des ondes dans les couches couplant-échantillon-couplant. Les coefficients de réflexion \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 sont confondus, ce qui s'explique par la symétrie plane de l'ensemble du multi-couche dans ce domaine de fréquence.

3.2 Extraction des modules élastiques des échantillons

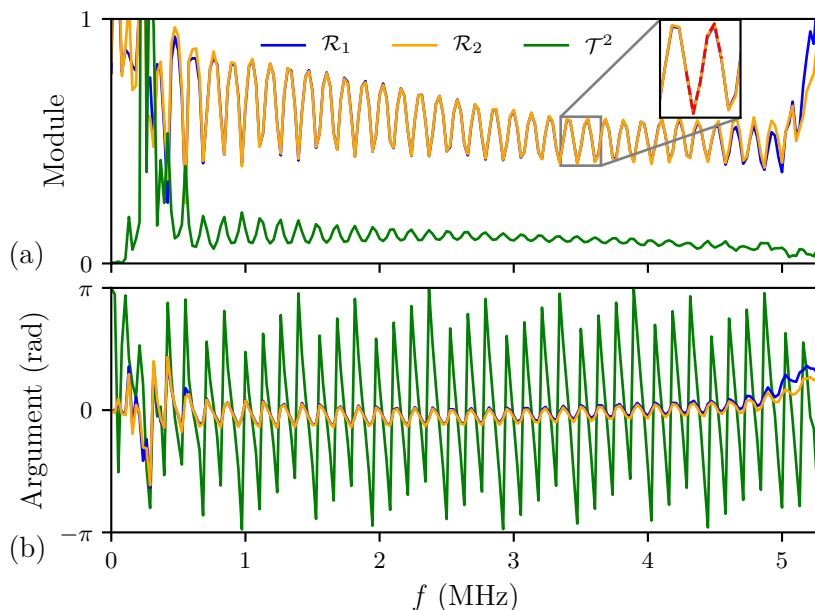


Figure 3.10 – Variation des (a) modules et (b) arguments des coefficients \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 et \mathcal{T}^2 en fonction de la fréquence pour un échantillon de PMMA d'épaisseur 5 mm et la paire de transducteurs 1. La partie de courbe en tiret rouge dans l'encadré correspond à une période d'oscillation sur laquelle l'erreur est minimisée (voir dans la partie 3.2.2.1).

3.2 Extraction des modules élastiques des échantillons

Une fois les coefficients de réflexion et transmission acquis, il s'agit désormais de déterminer les paramètres inconnus des échantillons sondés. Une comparaison entre un modèle d'interférence unidimensionnel et les mesures expérimentales permet alors de les obtenir grâce à la résolution d'un problème inverse. Procéder de cette manière est possible car les interférences de Fabry-Pérot sont bien définies et les ondes en présence peuvent être considérées comme planes.

3.2.1 Modélisation d'un milieu multi-couches

Comme indiqué précédemment, les signaux temporels étudiés sont coupés avant le retour de l'écho s'étant réfléchi sur une interface ligne à retard – capteur. Les lignes à retard peuvent donc être considérées comme semi-infinies. Les épaisseurs des couches de couplant supposées égales et du matériau à sonder sont respectivement notées h et H . La figure 3.11 présente un schéma du système unidimensionnel du modèle développé ci-dessous.

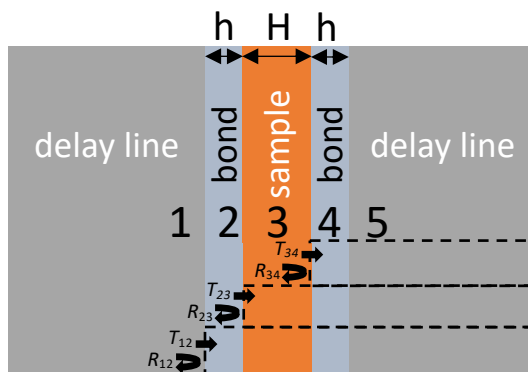


Figure 3.11 – Géométrie et notations du modèle d'interférence 1D

Les nombres d'onde complexes des différentes couches présentées figure 3.11 sont définis par

$$k_i = \omega \sqrt{\frac{\rho_i}{C_i}} \quad \text{avec} \quad i = 1, \dots, 5, \quad (3.8)$$

où ω est la pulsation, ρ_i la densité de la couche i et C_i un module complexe d'élasticité de la couche i . Le module étudié correspond respectivement à G_i le module de cisaillement ou M_i le module de compression selon que les ondes sont générées avec des transducteurs d'ondes transverses ou longitudinales. Les coefficients de réflexion r_{nm} et de transmission t_{nm} en amplitude de contrainte normale entre deux solides semi-infinis d'indices n et m pour une onde incidente dans le solide n sont donnés par

$$\begin{cases} r_{nm} = \frac{\rho_m k_n - \rho_n k_m}{\rho_m k_n + \rho_n k_m}, \\ t_{nm} = \frac{2\rho_m k_n}{\rho_m k_n + \rho_n k_m}. \end{cases} \quad (3.9)$$

En employant la géométrie définie sur la figure 3.11, les couches 1 et 5, d'une part, et 2 et 4, d'autre part, ont des propriétés identiques, conduisant aux équivalences suivantes :

$$\begin{cases} r_{12} = r_{54} = -r_{21} = -r_{45}, \\ t_{12} = t_{54}, \\ t_{21} = t_{45}, \\ r_{23} = r_{43} = -r_{32} = -r_{34}, \\ t_{23} = t_{43}, \\ t_{32} = t_{34}. \end{cases} \quad (3.10)$$

L'onde réfléchi par l'interface entre la couche 1 et l'assemblage 2-3-4-5 correspond à la superposition des ondes réfléchies par l'interface 1-2, avec le coefficient de réflexion r_{12} et des ondes rétrogrades dans la couche 2 issu de l'assemblage 3-4-5 considéré semi-infini. Le coefficient de réflexion \mathcal{R} est donné par la somme infinie :

$$\mathcal{R}_{th} = R_{12} = r_{12} + t_{12}t_{21}R_{23}e^{2jk_2h} + t_{12}t_{21}R_{23}^2r_{21}e^{4jk_2h} + \dots, \quad (3.11)$$

soit

$$\mathcal{R}_{th} = r_{12} + \frac{t_{12}t_{21}}{r_{21}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(R_{23}r_{21}e^{2jk_2h} \right)^n. \quad (3.12)$$

En remarquant la série géométrique,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \quad \text{avec} \quad |\alpha| < 1, \quad (3.13)$$

le coefficient de réflexion se met sous la forme

$$\mathcal{R}_{th} = r_{12} + \frac{t_{12}R_{23}t_{21}e^{2jk_2h}}{1 + r_{12}R_{23}e^{2jk_2h}}. \quad (3.14)$$

Les coefficients R_{23} et R_{34} s'obtiennent de la même manière :

$$R_{23} = r_{23} + \frac{t_{23}R_{34}t_{32}e^{2jk_3H}}{1 + r_{23}R_{34}e^{2jk_3H}} \quad \text{et} \quad R_{34} = -r_{23} - \frac{t_{23}r_{12}t_{32}e^{2jk_2h}}{1 + r_{23}r_{12}e^{2jk_2h}}. \quad (3.15)$$

3.2 Extraction des modules élastiques des échantillons

En employant la même procédure, le coefficient de transmission \mathcal{T} à l'interface entre l'assemblage 1-2-3-4 et la couche 5 se calcule grâce à une somme infinie :

$$\mathcal{T}_{th} = T_{45} = T_{34}t_{21}e^{jk_2h} + r_{21}R_{43}T_{34}t_{21}e^{3jk_2h} + r_{21}^2R_{43}^2T_{34}t_{21}e^{5jk_2h} + \dots, \quad (3.16)$$

soit

$$\mathcal{T}_{th} = \frac{T_{34}t_{21}}{r_{21}R_{43}}e^{jk_2h} \sum_{n=1}^{\infty} (r_{21}R_{43}e^{2jk_2h})^n. \quad (3.17)$$

Compte tenu de la relation (3.13), le coefficient de transmission \mathcal{T}_{th} se met sous la forme :

$$\mathcal{T}_{th} = \frac{T_{34}t_{21}e^{jk_2h}}{1 + r_{12}R_{43}e^{2jk_2h}}, \quad (3.18)$$

avec

$$T_{34} = \frac{T_{23}t_{32}e^{jk_3H}}{1 + r_{23}R_{32}e^{2jk_3H}} \quad \text{et} \quad T_{23} = \frac{t_{12}t_{23}e^{jk_2h}}{1 + r_{32}r_{21}e^{2jk_2h}}. \quad (3.19)$$

Les coefficients de réflexion (3.14) et de transmission (3.18) sont alors ajustés aux mesures expérimentales de \mathcal{R}_m et \mathcal{T}^2 (3.7) de manière à extraire le module élastique inconnu. Cette procédure, appelée problème inverse, est présentée dans la partie suivante.

3.2.2 Résolution du problème inverse

La résolution d'un problème inverse pour extraire des paramètres effectifs a déjà été étudiée. Tout d'abord, Fokin *et al.* proposent d'inverser directement les formules des coefficients de réflexion et de transmission obtenus dans le cas d'un milieu à trois couches en immersion (eau-échantillon-eau) afin d'extraire la vitesse et la masse volumique effectives d'échantillons hétérogènes [98]. Toutefois, cette technique est théorique et un bruit de mesure sur des coefficients expérimentaux mène à des erreurs importantes sur les paramètres extraits. Comme présenté dans la suite de cette partie, le problème inverse conduit à plusieurs solutions. Fokin *et al.* proposent alors d'identifier la solution physique valide en réduisant l'épaisseur de l'échantillon à une demie longueur d'onde à la fréquence centrale dans le matériau étudié. Expérimentalement, après une mesure de coefficient de transmission, Pierre *et al.* utilisent un modèle théorique et sélectionnent la branche de solutions valide grâce à une comparaison avec des modèles rhéologiques [99]. Ce procédé n'est pas envisageable si le type de rhéologie n'est pas connu au préalable. La suite de cette partie propose deux stratégies purement expérimentales afin de sélectionner la solution physiquement valide.

3.2.2.1 Identification des solutions

Les épaisseurs et les propriétés mécaniques des lignes à retard et du couplant sont connues. L'épaisseur des échantillons est mesurée grâce à un pied à coulisse. L'erreur sur cette grandeur est définie par l'écart type d'une dizaine de mesures réparties sur toute la surface de l'échantillon et s'élève à 30 μm . La masse volumique des échantillons est déterminée par pycnométrie. Les modules élastiques de l'échantillon et donc également les nombres d'ondes sont les seules inconnues de ce problème. Ces deux variables étant reliées par la relation (3.8), travailler sur l'une ou l'autre est équivalent. Dans cette partie, l'attention est portée sur le module élastique

$$C(\omega) = C_1(\omega) - jC_2(\omega), \quad \text{avec } C = G \text{ ou } M. \quad (3.20)$$

La solution du problème inverse est recherchée en faisant coïncider les coefficients théoriques (3.14) et (3.18) avec les coefficients expérimentaux. Dans cette optique, une fonction d'erreur définie à chaque fréquence discrète ω_i est à minimiser, en accord avec $C(\omega_i)$:

$$\epsilon_i = | \mathcal{R}_{th}(C(\omega_i)) - \mathcal{R}_m(\omega_i) |^2 + | \mathcal{T}_{th}^2(C(\omega_i)) - \mathcal{T}^2(\omega_i) |^2 \quad \text{avec } m = 1, 2. \quad (3.21)$$

La minimisation de l'erreur est effectuée sur le carré des coefficients de transmission, car calculer \mathcal{T}_{th} à partir de (3.18), engendre une indétermination de la phase à plus ou moins π près. La fonction d'erreur est évaluée dans le plan complexe $(C_1(\omega_i), C_2(\omega_i))$. Comme \mathcal{R}_m et \mathcal{T}^2 oscillent avec ω , l'erreur est minimisée sur une période d'oscillation des signaux afin de lisser les variations locales de C_1 et C_2 , en considérant N points à gauche et à droite de la fréquence étudiée :

$$\bar{\epsilon}_i = \sum_{q=i-N}^{i+N} \epsilon_q. \quad (3.22)$$

Par exemple, la figure 3.10 présente un zoom de la fenêtre d'étude sur laquelle l'erreur est minimisée, symbolisée en pointillé rouge avec $N = 2$. Cette fenêtre est glissante sur tout l'axe des fréquences étudiées.

La figure 3.12a présente la variation de $\bar{\epsilon}$ en échelle logarithmique à la fréquence centrale des capteurs, calculée avec les formules (3.21) pour $m = 2$ et (3.22) pour $N = 2$, pour un échantillon de PMMA d'épaisseur 5 mm et la paire de transducteurs 1 de la figure 3.10. L'erreur obtenue avec (3.21) pour $m = 1$ est très similaire dans ce cas, car les coefficients de réflexion \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 sont confondus. Dans la suite, le module recherché est le module de cisaillement $C = G$.

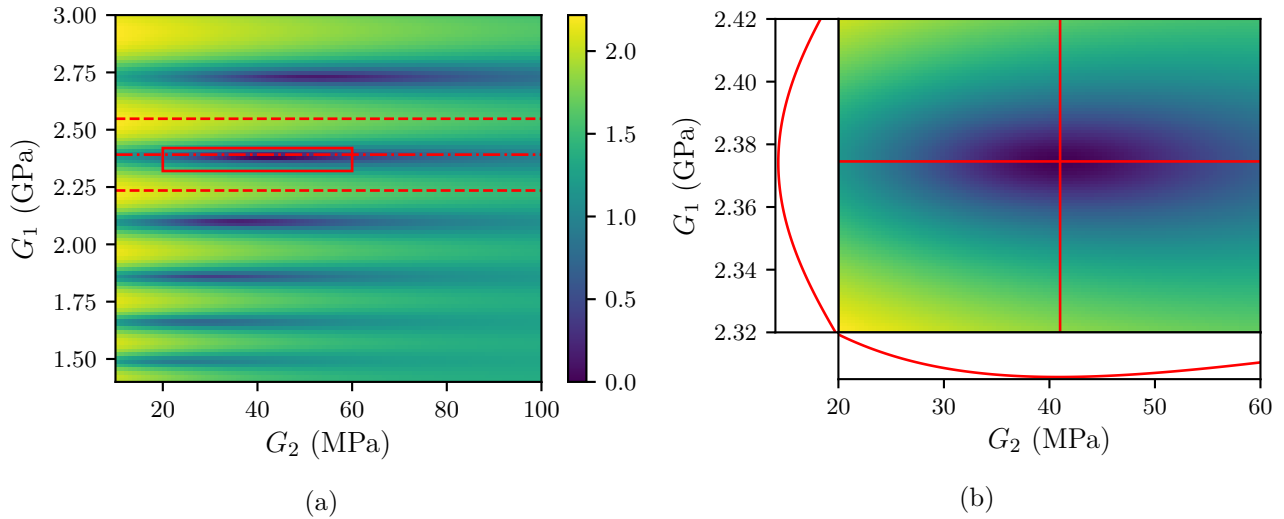


Figure 3.12 – (a) Variation de $\log(\bar{\epsilon}/\min(\bar{\epsilon}))$ calculée à la fréquence centrale en fonction des parties réelles G_1 et imaginaire G_2 du coefficient de cisaillement complexe G pour un échantillon de PMMA d'épaisseur 5 mm et la paire de transducteurs 1. Les traits rouges respectivement en traits-points et en tirets indiquent la valeur de G_1 obtenue par une analyse par temps de vol et son incertitude. (b) Zoom sur la partie encadrée sur (a), où les lignes rouges indiquent les valeurs de G_1 et G_2 où $\bar{\epsilon}$ est minimum. Les courbes rouge de la figure (b) présentent les variations de $\bar{\epsilon}$ autour du minimum le long des deux lignes rouges, en échelle linéaire.

3.2 Extraction des modules élastiques des échantillons

La figure 3.12a montre qu'il existe plusieurs valeurs de G qui minimisent $\bar{\epsilon}$ dans le plan (G_1, G_2) . En effet, \mathcal{R}_{th} et de \mathcal{T}_{th}^2 sont quasi-périodiques en k_3H . L'écart entre deux valeurs consécutives de G_1 qui minimisent l'erreur est fixé par l'épaisseur du matériau sondé et la fréquence étudiée. Chacun de ces minima se déplace continûment sur l'axe des fréquences dans le plan complexe. Il y a donc plusieurs branches de solution dans les plans (f, G_1) et (f, G_2) . Trois de ces branches, notées A , A' et A'' , sont présentées sur les figures 3.14a et 3.14b. Deux stratégies sont présentées dans la suite pour discriminer laquelle de ces branches correspond à la physique de l'échantillon : une analyse par temps de vol et une comparaison des résultats pour des échantillons d'épaisseurs différentes.

3.2.2.2 Détermination par temps de vol

L'analyse des temps de vol des impulsions dans le dispositif est menée pour évaluer la partie réelle du module élastique à la fréquence centrale du transducteur. Le décalage temporel τ entre les deux premiers échos réfléchis est mesuré en calculant l'auto-corrélation de l'enveloppe obtenue par la transformée de Hilbert du signal étudié présenté sur la figure 3.13.

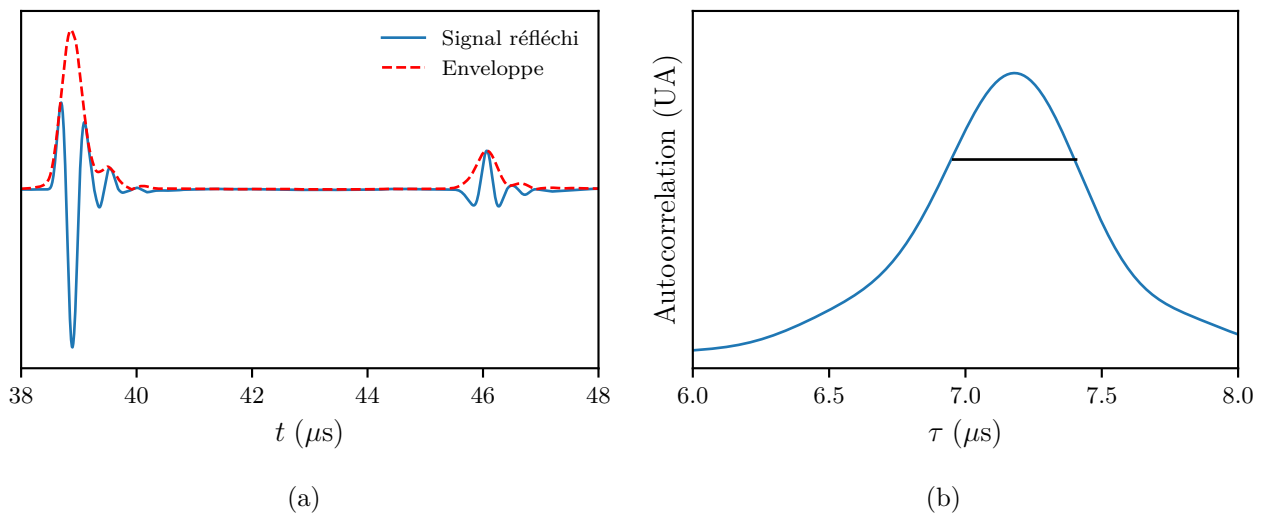


Figure 3.13 – (a) Signal réfléchi pour un échantillon de PMMA d'épaisseur 5 mm et la paire de transducteurs 1 (trait bleu) et l'enveloppe de sa transformée de Hilbert (trait pointillé rouge). (b) Premier pic d'auto-corrélation de l'enveloppe. Le trait noir symbolise la largeur du pic à - 3 dB.

τ est défini comme le décalage temporel correspondant au maximum du premier pic du signal auto-corrélé. L'incertitude sur la lecture de ce temps de vol est définie comme étant la moitié de la largeur de ce pic à -3 dB. Par exemple, le décalage temporel calculé à partir de la figure 3.13 donne $\tau = (7,17 \pm 0,23) \mu\text{s}$. Ce temps correspond à la durée de trajet de l'impulsion ayant fait un aller-retour entre l'interface 1-2 et l'interface 4-5 et est théoriquement donné par,

$$\tau = \frac{4h}{c_b} + \frac{2H}{c}, \quad (3.23)$$

où c et c_b sont les vitesses de groupe des ondes respectivement dans l'échantillon sondé et dans le couplant. En inversant cette formule, il est donc possible de déterminer c à partir de τ à la fréquence centrale des transducteurs utilisés. Dans l'échantillon sondé, comme dans le couplant, la partie imaginaire G_2 est en effet petite devant la partie réelle G_1 et ces matériaux sont peu dispersifs, ce qui permet

d'écrire : $G_1 \approx \rho c^2$. Dans le cas de la figure 3.13, en prenant en compte toutes les incertitudes de mesure, le module de cisaillement mesuré à la fréquence centrale du transducteur est $G_1 = (2,40 \pm 0,16)$ GPa. Comme présenté sur la figure 3.12a, la valeur de la partie réelle du module élastique déterminée par auto-corrélation coïncide à son incertitude près à une des valeurs de G_1 minimisant $\bar{\epsilon}$. Cela permet de sélectionner la solution physiquement valide à $f = f_c$. Par continuité lorsque la fréquence varie, la branche de solutions dans les plans (f, G_1) et (f, G_2) , est dans ce cas présent la branche A .

Identifier la branche valide par cette méthode nécessite que les signaux temporels soient peu atténués et peu dispersifs. Dans le cas où le matériau étudié est très dispersif, la lecture du temps de vol de l'enveloppe des différents échos peut devenir compliquée du fait de leur déformation. De plus, l'approximation $G_1 \approx \rho c^2$ n'est plus valide.

3.2.2.3 Détermination à l'aide de plusieurs échantillons d'épaisseurs différentes

Une autre manière de déterminer la branche de solutions valide est de procéder à l'étude en utilisant deux (ou plus) échantillons du même matériau d'épaisseurs différentes. Le rapport des épaisseurs de doit cependant pas être un entier. Par exemple, les figures 3.14a et 3.14b présentent trois branches de solution obtenues B , B' et B'' , pour la même paire de capteurs et pour un échantillon de PMMA d'épaisseur 3 mm. Comme mentionné auparavant, la distance entre chaque branche de solutions dépend de l'épaisseur de l'échantillon sondé. L'analyse par temps de vol pour l'échantillon de 3 mm mène à choisir la branche B . De plus, les branches A et B sont très proches, alors que les branches A' et B' , d'une part, et A'' et B'' , d'autre part, sont distinctement séparées. La rhéologie d'un matériau ne dépendant pas de son épaisseur, cette étude confirme bien que les branches de solutions physiquement acceptables sont les branches A et B . Cette méthode est plus robuste que la lecture du temps de vol mais nécessite néanmoins plusieurs échantillons pour déterminer la rhéologie d'un matériau.

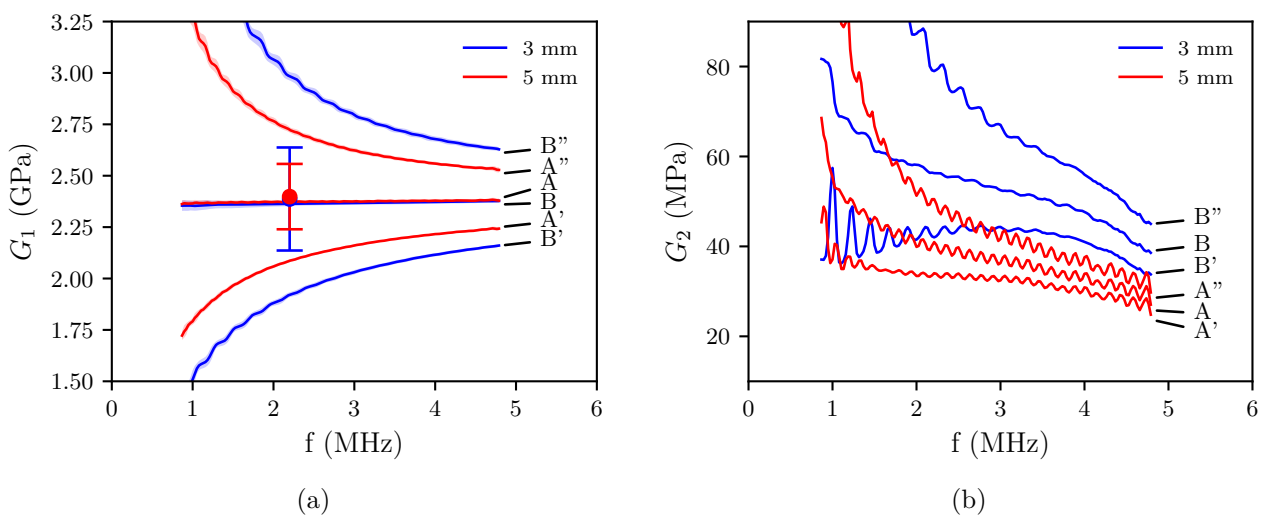


Figure 3.14 – Branches de solution obtenues pour des échantillons de PMMA d'épaisseur 5 mm et 3 mm et la paire de transducteurs 1 par la minimisation de la fonction d'erreur (a) dans le plan (f, G_1) et (b) dans le plan (f, G_2) . A , A' et A'' , et B , B' et B'' sont respectivement rattachées aux échantillons de 3 mm et 5 mm. Les incertitudes ne sont pas affichées sur (b) par souci de lisibilité. Les points et les barres d'erreur sur (a) représentent les valeurs de G_1 obtenus par temps de vol (voir partie 3.2.2.2).

3.2.3 Incertitudes sur les paramètres extraits

Dans le cadre d'une étude rhéologique précise, il est nécessaire de quantifier l'incertitude associée à la résolution du problème inverse (3.21). Cette incertitude est reliée à la sensibilité de la résolution du problème inverse. Elle est donc reliée à la sensibilité de $\bar{\epsilon}$ vis-à-vis des variations de G_1 et G_2 au voisinage de ses minima. Cette incertitude n'est donc pas reliée à l'incertitude sur les paramètres intervenant dans le modèle de propagation mais à celle associée à la procédure d'inversion. Comme montré sur la figure 3.12b qui correspond à un agrandissement de la partie encadrée en rouge de la figure 3.12a, la variation de $\bar{\epsilon}$ autour d'un minimum est quadratique en G_1 et G_2 . Il est convenu que la valeur caractéristique de l'incertitude sur G_1 et G_2 est égale à la moitié de la largeur de l'intervalle de valeurs dans lequel $\bar{\epsilon}$ dépasse son minimum de moins de 3 dB. Cette incertitude est définie en déterminant le polynôme du second degré qui approche le mieux la variation de $\bar{\epsilon}$ en fonction de G_1 ou G_2 , *i.e.* les courbes de la figure 3.12b. Ce polynôme a pour expression (dans le cas de la partie réelle) : $\bar{\epsilon} = \min(\bar{\epsilon}) [1 + (G_1 - G_0)^2/\delta^2]$, où G_0 correspond à la valeur de G_1 pour laquelle $\bar{\epsilon}$ est minimale. L'incertitude sur G_1 est définie comme $\Delta G_1 = \sqrt{\sqrt{2} - 1}\delta \approx 0,64\delta$. La définition de l'incertitude ΔG_2 sur G_2 est la même. Ces incertitudes sont représentées pour chaque fréquence sur les figures 3.3a et 3.3b comme des zones colorées transparentes de part et d'autre de la solution en trait plein.

3.2.4 Résultats

Les précédentes parties ont montré que la branche de solution A des figures 3.14a et 3.14b est la branche physique de l'échantillon de PMMA d'épaisseur 5 mm. Les coefficients théoriques \mathcal{R}_{th} et \mathcal{T}_{th}^2 définis par les équations (3.14) et (3.18), obtenus en utilisant les valeurs de G le long de cette branche, sont présentés sur la figure 3.15. Le très bon accord dans la bande de fréquence étudiée entre \mathcal{R}_{th} , \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 d'une part, et entre \mathcal{T}_{th}^2 et \mathcal{T}^2 d'autre part montre la précision de la résolution du problème inverse. Cette précision est illustrée sur la figure 3.15(c) en étudiant les valeurs de $\bar{\epsilon}$ calculées le long de la branche A . Plus la valeur de $\min(\bar{\epsilon})$ est faible, plus le modèle d'interférence unidimensionnel décrit avec précision la physique du dispositif multicouche et plus les paramètres extraits par le problème inverse sont crédibles. Dans ce cas, $\min(\bar{\epsilon})$ prend des valeurs entre 10^{-3} et 10^{-2} dans le domaine de fréquence défini précédemment $[f_{\min}, f_{\max}]$ et augmente en dehors de ce domaine. Cette observation confirme la validité du modèle dans cette gamme de fréquence.

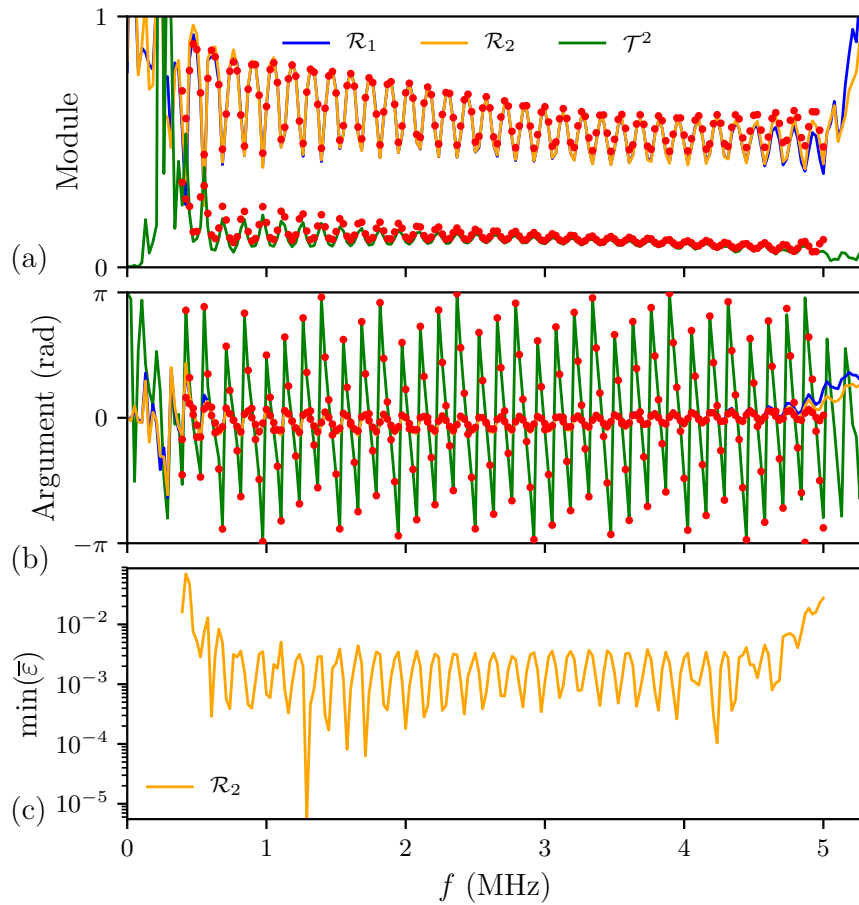


Figure 3.15 – Variation (a) des modules et (b) des arguments des coefficients \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 et \mathcal{T}^2 pour un échantillon de PMMA d'épaisseur 5 mm et la paire de transducteurs 1. Les points rouges correspondent à \mathcal{R}_{th} et \mathcal{T}_{th}^2 définis par les équations (3.14) et (3.18) en utilisant les valeurs de la branche de solutions A des figures 3.14a et 3.14b. (c) Variation de l'erreur résiduelle $\min(\bar{\epsilon})$ le long de la branche A , en utilisant \mathcal{R}_2 dans l'équation (3.21).

3.3 Limitations du dispositif

La figure 3.16 présente les coefficients de réflexion et de transmission obtenus avec un échantillon de PMMA de 5 mm d'épaisseur et la paire de transducteurs 2. Les oscillations de Fabry-Pérot visibles sur les coefficients de réflexion et de transmission sont bien définies jusqu'à 8 MHz alors que la fréquence supérieure pour cette paire de transducteurs est $f_{\max} = 4,67$ MHz. Cette remarque tend à remettre en question la borne supérieure en fréquence du domaine de validité. Dans ce cas, cette borne supérieure est environ $1,5f_{\max}$. Cette observation peut être associée au caractère tridimensionnel du dispositif à hautes fréquences. Dans ce domaine de fréquence, la longueur d'onde des ondes de cisaillement dans le PMMA qui est d'environ $200 \mu\text{m}$ à 7 MHz se rapproche des défauts d'état de surface des échantillons. Par ailleurs, en plus des oscillations de Fabry-Pérot, une deuxième oscillation quasi-périodique lente est visible. Cette oscillation est due aux interférences dans les fines couches de couplant. De plus, les coefficients \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 sont parfaitement confondus jusqu'à 4 MHz mais se décalent au delà de cette fréquence tout en gardant la même tendance (voir le zoom de la figure 3.16).

3.3 Limitations du dispositif

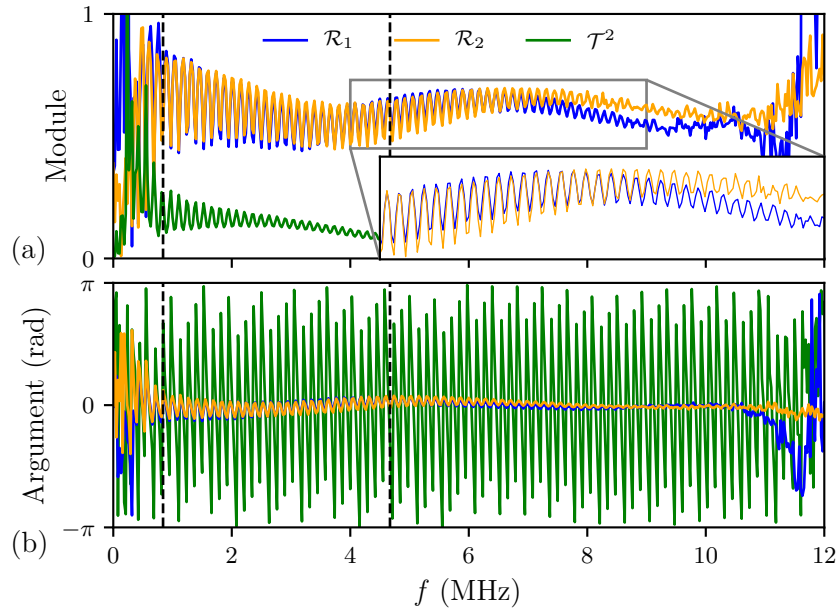


Figure 3.16 – Variation (a) des modules et (b) des phases des coefficient \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 et \mathcal{T}^2 en fonction de la fréquence pour un échantillon de PMMA d'épaisseur 5 mm et et la paire de transducteurs 2. Les traits en tiret noir symbolisent les positions des fréquences f_{\min} et f_{\max} .

Ce décalage des coefficients des réflexion au delà de 4 MHz est dû à des différences d'épaisseur de couplant à gauche et à droite de l'échantillon. La figure 3.17 présente la variation des coefficients théoriques \mathcal{R}_{th} et \mathcal{T}_{th}^2 obtenus en utilisant les valeurs de G le long de la branche de solution valide en résolvant le problème inverse avec \mathcal{R}_2 . Les coefficients de réflexion en points rouges sont obtenus avec l'épaisseur de couplant $h = 105,5 \mu\text{m}$ et ceux en points verts avec une épaisseur de $h' = h + 15 \mu\text{m}$. Les très bons accords entre le coefficient \mathcal{R}_2 et les points rouges et les coefficient \mathcal{R}_1 et les points verts, montrent bien que le décalage des coefficients de réflexion au delà de 4 MHz est dû à des différences d'épaisseurs de couplant.

Il est observable que le désaccord des coefficients de réflexion n'a pas lieu en basse fréquence. La longueur d'onde dans le couplant y est à peu près 15 fois plus grande à 1 MHz que son épaisseur. Dans ce domaine de fréquence, la couche de couplant est assimilable à une interface de collage [100]. La couche de couplant peut être associée à une interface d'épaisseur nulle qui engendre un saut de déplacement tangentiel et non plus une continuité. Il s'agit là du cas de figure idéal pour la transmission des ondes à travers le couplant où son épaisseur n'intervient pas. Réduire l'épaisseur des cales serait un moyen de vérifier le modèle d'interface de collage sur une plus grande gamme de fréquence. Cela nécessiterait néanmoins une grande précision du parallélisme, de la planéité et de l'état de surface des différents composants, difficilement atteignables.

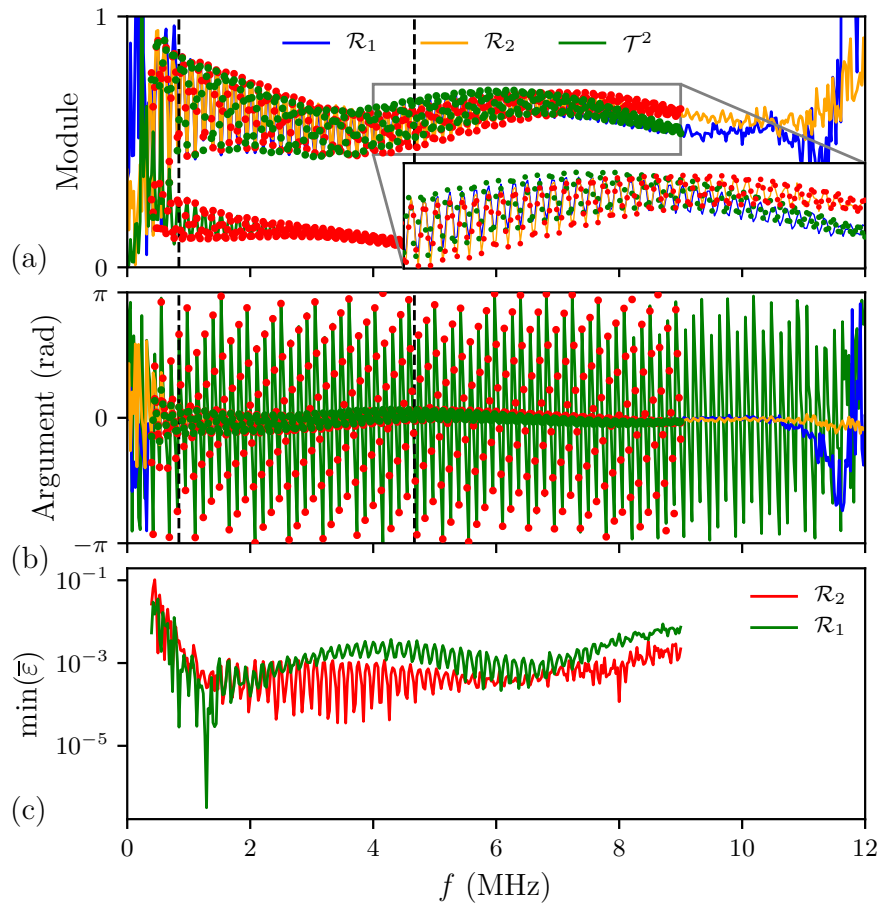


Figure 3.17 – Variation (a) des modules et (b) des arguments des coefficients \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 et \mathcal{T}^2 pour un échantillon de PMMA d'épaisseur 5 mm et la paire de transducteurs 2. Les points correspondent \mathcal{R}_{th} et \mathcal{T}_{th}^2 définis par les équation (3.14) et (3.18) en utilisant les valeurs de la branche de solutions physiquement valide, en rouge pour une épaisseur de couplant de $h = 105,5 \mu\text{m}$ et en vert $h' = h + 15 \mu\text{m}$. (c) Variation de l'erreur résiduelle $\min(\bar{\epsilon})$ le long de la branche, en rouge en utilisant \mathcal{R}_2 et les points rouges et en vert \mathcal{R}_1 et les points verts dans l'équation (3.21). Les traits en tiret noir symbolisent les positions des fréquences f_{\min} et f_{\max} .

3.4 Caractérisation de matériaux viscoélastiques homogènes

Un ensemble de mesures de $G_1(f)$ et $G_2(f)$ est effectué sur les différents matériaux-test présentés dans la section 3.1.3, avec les différents capteurs présentés dans tableau 3.1.

3.4.1 PMMA

La figure 3.18 présente des mesures sur deux échantillons de PMMA d'épaisseurs 3 mm et 5 mm, sondés avec les capteurs de cisaillement 1 et 2. Pour chaque échantillon et chaque paire de capteurs, la mesure est faite deux fois. De petites oscillations sont perceptibles sur les résultats et sont un résidu des interférences de Fabry-Pérot. En effet, leurs amplitudes sont susceptibles d'augmenter si l'erreur n'est pas cumulée sur une période d'oscillation. En dessous de f_{\min} , G_1 et G_2 présentent une forte dispersion. Cela est peu crédible au regard de la rhéologie peu dispersive bien connue de ce matériau. Toutefois, au delà de f_{\max} , les valeurs obtenues avec la paire de capteurs 2 restent cohérentes.

3.4 Caractérisation de matériaux viscoélastiques homogènes

Cela confirme que le critère de champ lointain strict utilisé pour définir f_{\max} est probablement trop restrictif. Les mesures de module de cisaillement des échantillons de PMMA affichent une très bonne concordance pour les différentes épaisseurs et les différents capteurs.

L'écart entre les mesures faites sur des échantillons différents est inférieur à l'incertitude associée à la résolution du problème inverse. Cela montre que le dispositif mis en place ici permet d'obtenir une grande reproductibilité. Un facteur limitant de la reproductibilité de la mesure est le taux d'humidité dans l'air. Celui-ci n'est pas contrôlé et change d'un jour à l'autre. Le couplage est particulièrement sensible aux variations de ce paramètre. Le serrage du dispositif peut lui aussi être une source d'irreproductibilité. Quand bien même le serrage est contrôlé, procéder successivement en 3 points peut entraîner un défaut de placement de l'échantillon si un point a été favorisé.

Les données sont comparées aux valeurs de modules de cisaillement tirées de la littérature [60, 97]. La valeur de G_1 donnée par Asay à 5°C est une valeur extrapolée suite à l'étude en température de cet article, et est en bon accord avec les valeurs obtenues par le problème inverse. La valeur de G_2 proposée par Assay est en bon accord, mais les données fournies par Biwa diffèrent bien que la tendance décroissante soit présente. Toutefois, aucune de ces deux références ne propose d'incertitudes de mesure.

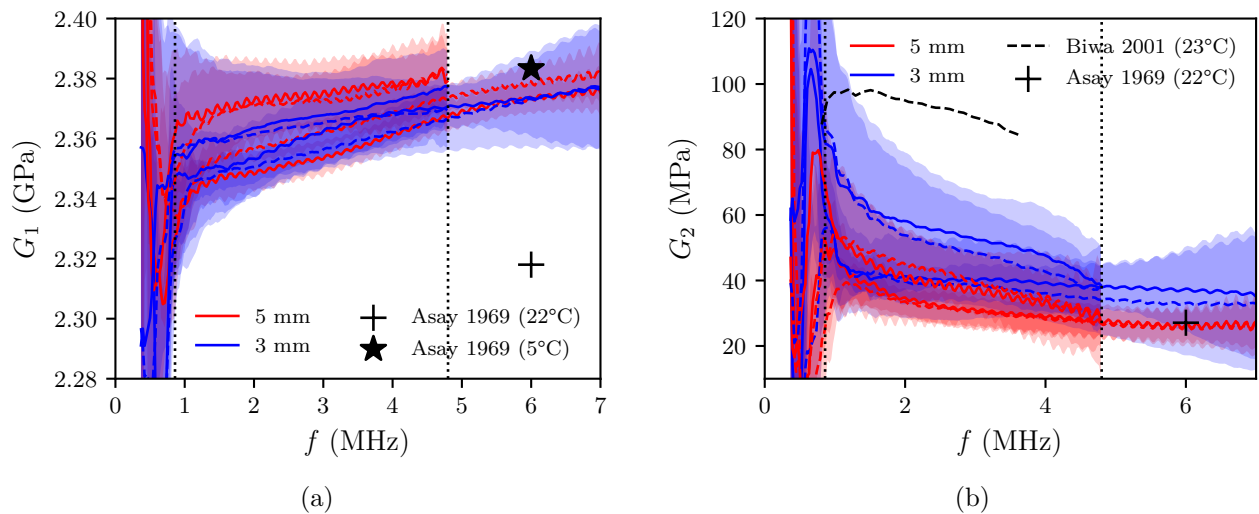


Figure 3.18 – Variation de (a) la partie réelle et (b) la partie imaginaire du module de cisaillement du PMMA, pour les paires de capteurs 1 et 2 respectivement des courbes les plus courtes en fréquences au plus grandes, et pour des échantillons d'épaisseur 3 mm et 5 mm. Les traits pointillés indiquent les fréquences f_{\min} et f_{\max} pour ces capteurs.

3.4.2 Rhéologie de la résine d'époxy Inlupox HTA

3.4.2.1 Rhéologie en cisaillement

La figure 3.19 présente des mesures sur un échantillon d'époxy de 2 mm sondé avec les capteurs de cisaillement 3. L'époxy présente une rhéologie en cisaillement peu dispersive sur la bande de fréquence étudiée. Comme précédemment, il est observable que le critère f_{\max} est très restrictif et que les mesures restent crédibles jusqu'à 2 MHz. Comme précédemment, les valeurs de G divergent à des fréquences inférieurs à f_{\min} .

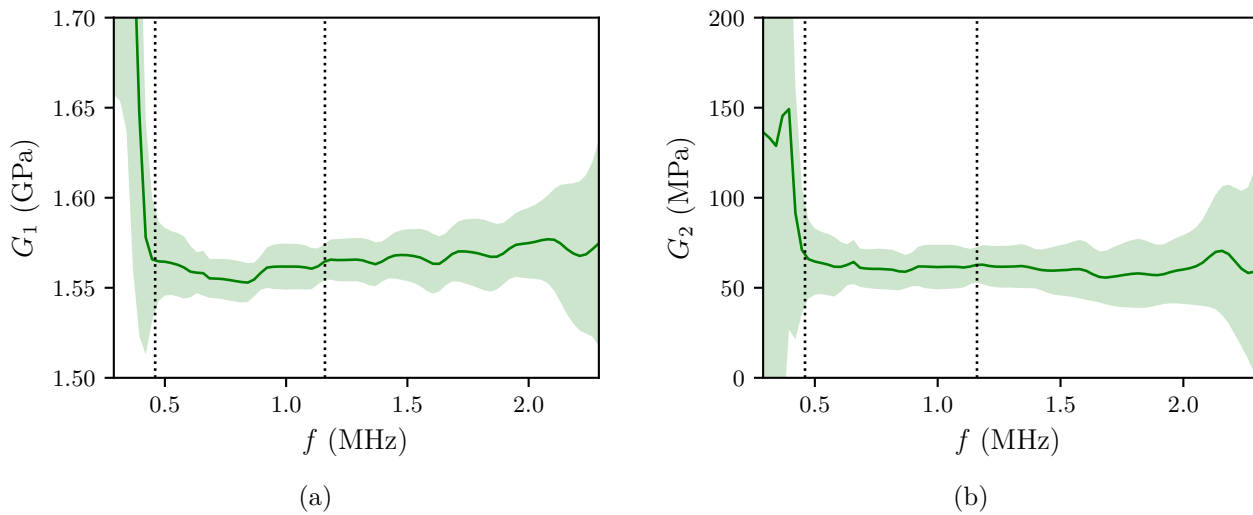


Figure 3.19 – Variation de (a) la partie réelle et (b) la partie imaginaire du module de cisaillement de l'époxy, pour un échantillon d'épaisseur 2mm et la paire de transducteurs 3. Les traits pointillés indiquent f_{\min} et f_{\max} pour ces capteurs.

3.4.2.2 Rhéologie en compression

La figure 3.20 présente des mesures sur un échantillon d'époxy de 2 mm sondé avec les capteurs longitudinaux 4. Comme précédemment, la rhéologie de l'époxy est peu dispersive. L'incertitude relative sur la partie imaginaire est cependant plus importante que celle sur la partie réelle.

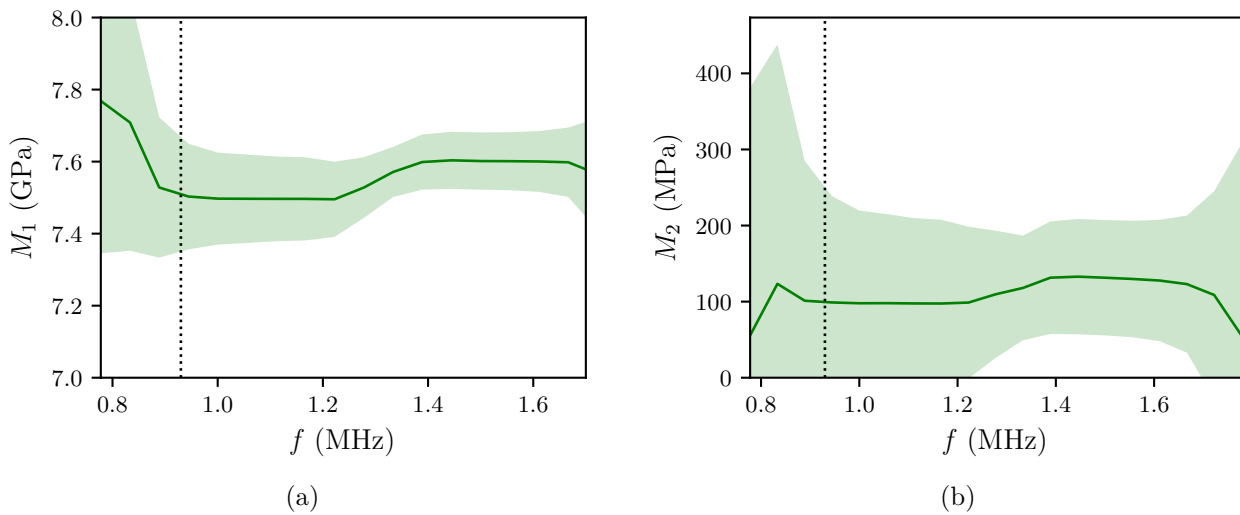


Figure 3.20 – Variation de (a) la partie réelle et (b) la partie imaginaire du module de compression de l'époxy, pour un échantillon d'épaisseur 2mm et la paire de transducteurs 4. Les traits pointillés indiquent f_{\min} pour ces capteurs.

3.5 Conclusion

Le dispositif de mesure présenté dans ce chapitre permet de déterminer le module de cisaillement complexe de milieux visco-élastiques avec une excellente précision grâce à plusieurs innovations techniques. Tout d'abord le contrôle des quantités de couplant et des pressions appliquées sur les

3.5 Conclusion

transducteurs permet de générer de manière optimale des ondes de cisaillement dans le système. De plus, l'influence du couplant injecté entre l'échantillon et les lignes à retard est parfaitement quantifiée du fait de la maîtrise de l'épaisseur et de la rhéologie du couplant. Grâce au protocole développé, le sandwich permet de mesurer avec une grande reproductibilité des interférences de Fabry-Pérot visibles sur les coefficients de réflexion et de transmission de ce multi-couche. L'éventuel recouvrement des différents échos, indésirable dans les techniques classiques, n'est ici pas un critère limitant pour l'évaluation des coefficients de réflexion et transmission. De ce fait, ce banc de mesure n'impose pas d'épaisseur minimale des échantillons. Le contrôle des épaisseurs de chacune des couches du dispositif et la nature plane des ondes permet de comparer les mesures expérimentales à un modèle théorique de propagation unidimensionnel. Les paramètres inconnus de l'échantillon sondé sont alors extraits par la résolution d'un problème inverse où la solution physique est sélectionnée de manière uniquement expérimentale. Le chapitre a présenté des mesures effectuées sur des matériaux-test peu dispersifs. Le prochain chapitre va montrer que le sandwich est tout aussi efficace pour évaluer la rhéologie de matériaux très dispersifs et très atténuants.

Chapitre 4

Conception et optimisation de matériaux à résonances dipolaires locales

Dans les travaux portant sur les métamatériaux localement résonnants (en anglais "locally resonant metamaterial", LRM) peu de réalisations expérimentales existent par rapport aux études numériques. De plus, la plupart des travaux expérimentaux concernent des matrices fluides. Par exemple, des dispersions de bulles [23] ou de gouttes [26] dans un gel aqueux peuvent être obtenues par commande numérique, difficilement applicable dans le cas de matrices solides. A titre illustratif, la figure 4.1a présente un schéma du protocole de fabrication d'une dispersion de bulles dans un gel aqueux issu de la référence [23]. Ce type de dispositif permet le contrôle de la position et de la polydispersité en taille des diffuseurs [27]. L'insertion d'inclusions en volume dans des matrices solides est en revanche plus compliquée. L'utilisation de résines à l'état liquide permet d'insérer des diffuseurs avant réticulation mais un trop fort contraste de densité entre ces diffuseurs et la matrice rend difficile le positionnement. De plus, les résonateurs utilisés sont souvent complexes à miniaturiser. Par exemple, la conception de coques à cœurs denses millimétriques a été investiguée en microfluidique mais le contrôle de la géométrie reste compliqué [52, 51]. Les figures 4.1b et 4.1c présentent respectivement une photo de ces diffuseurs et la polydispersité de leur géométrie et sont issues de la référence [51]. L'utilisation de résonateurs simples à concevoir et à insérer reste un enjeu prépondérant pour les LRM. Dans ce contexte, la stratégie adoptée ici porte sur des dispersions de billes sphériques denses dans une résine. Ce type de matériau a déjà été fabriqué par Kinra et Ker à l'aide de moules troués en procédant couche par couche pour une dispersion de billes périodique [101]. Des échantillons aléatoires ont aussi été fabriqués sur des moules plats et en remuant le plan de travail pour créer le désordre [54]. Cette procédure peut en outre engendrer des amas de billes et donc rendre les dispersions aléatoires non homogènes dans le plan. Sur plusieurs plans de billes, Kinra et Ker pointent néanmoins le souci de l'anisotropie de ces échantillons aléatoires dans leurs épaisseurs [101].

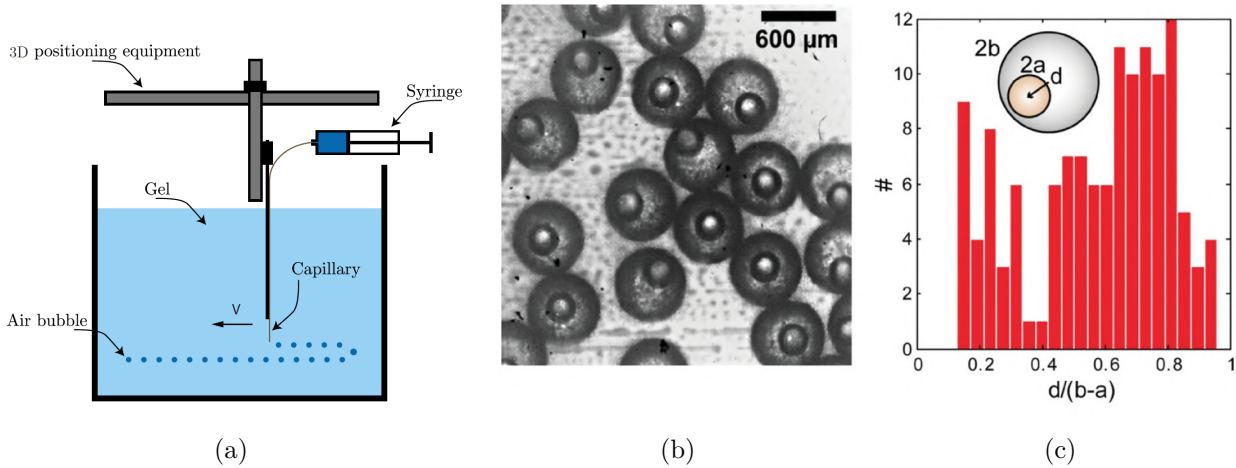


Figure 4.1 – (a) Schéma du protocole de fabrication d’un échantillon bulleux issu de la référence [23] ; (b) Photo et (c) histogramme de la géométrie des particules développées dans la référence [51].

La fabrication des échantillons n’est pas la seule explication du faible nombre d’études expérimentales. La mesure des paramètres effectifs de matériaux multi-diffusants à matrice solide peut aussi se révéler compliquée. Classiquement, il s’agit de caractériser l’onde cohérente, autrement dit la composante de l’onde qui résiste à la moyenne sur le désordre. Cette onde est en théorie obtenue en moyennant les signaux issus de plusieurs réalisations aléatoires du désordre. Accéder expérimentalement à un nombre significatif de réalisations du désordre n’est pas toujours possible. Dans le cas des mesures sans contact, il est néanmoins possible d’obtenir des résultats avec une seule réalisation du désordre. Translater source et récepteur le long d’un échantillon ayant des dimensions suffisamment grandes devant la longueur d’onde permet en effet d’accéder à plusieurs chemins de diffusion. Les signaux obtenus à différentes positions sont moyennés, ce qui donne alors une bonne approximation de l’onde cohérente. Par exemple, la figure 4.2 présente un schéma de la mesure d’ondes cohérentes au travers d’une forêt de tiges cylindriques immergées dans l’eau, où le transducteur source et la barrette multi-éléments translatent transversalement [7, 102]. Cette procédure a aussi été appliquée par Duranteau *et al.* lors de mesures en immersion au travers d’échantillons solides [35]. Cette méthode ne paraît toutefois pas adaptée aux ondes de cisaillement dans des matériaux multiplement diffusants solides.

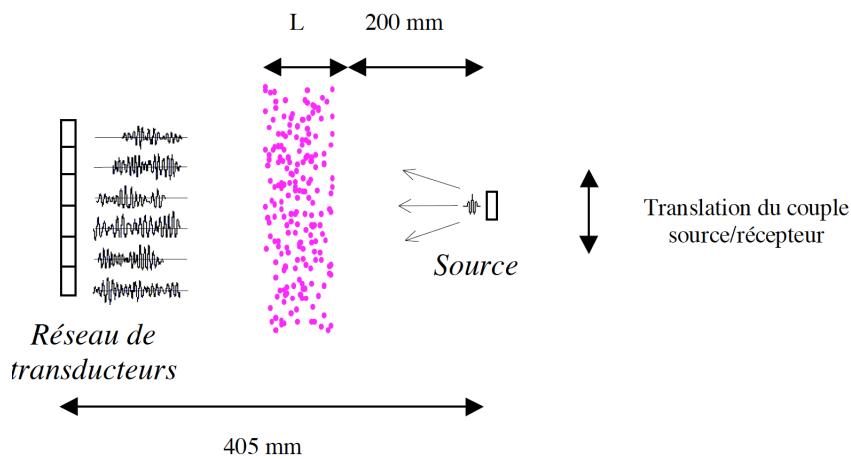


Figure 4.2 – Montage expérimental pour l’étude des signaux transmis à travers une forêt de tiges issu de la référence [7].

4.1 Fabrication des échantillons

Le "Sandwich" présenté dans le chapitre 3 se positionne alors comme un bon candidat dans l'optique d'extraire des paramètres effectifs d'échantillons solides multi-diffusants. Ce dispositif a en effet montré son efficacité pour mesurer les ondes de cisaillement avec une grande précision. De plus, la nature même du modèle d'interférence 1D est de considérer un milieu inconnu homogène dont les propriétés dépendent de la fréquence. La résolution du problème inverse permet alors d'extraire directement les paramètres effectifs du matériau composite homogénéisé. Un seul échantillon étant disponible par cas étudié, la question de la mesure de l'onde cohérente peut être posée. L'utilisation du Sandwich permet l'acquisition de signaux relativement longs qui contiennent la contribution de l'onde balistique ainsi que des ondes multiples diffusées. De plus, les capteurs moyennent les signaux reçus sur leur surface dont le diamètre est grand devant la longueur d'onde étudiée. Le signal acquis est alors considéré comme étant celui de l'onde cohérente.

Ce chapitre est divisé en deux parties. La première a pour but de décrire entièrement le protocole de fabrication des échantillons. Ces échantillons à répartitions aléatoires de billes sont fabriqués par couches disposées successivement. Cela implique tout d'abord de contrôler la distribution de billes afin d'atteindre une concentration volumique visée dans la profondeur. De plus, la stratification des échantillons peut induire une périodicité et éloigner l'échantillon d'une vraie dispersion aléatoire tridimensionnelle. Une attention particulière est alors de mise pour assurer que les diffuseurs soient répartis de la manière la plus isotrope possible. La seconde partie se concentre sur l'utilisation du sandwich pour caractériser les échantillons fabriqués. La présence de plans de billes dans les échantillons sondés influence les coefficients de réflexion et de transmission acquis. Cet impact nécessite alors d'adapter la stratégie mise en place dans le chapitre 3 afin d'extraire les paramètres du milieu effectif. Finalement, une étude des paramètres effectifs obtenus en fonction du nombre de plans de billes est présentée.

4.1 Fabrication des échantillons

Un des principaux enjeux de cette étude est de réussir à maîtriser entièrement la conception des échantillons. Cette première partie présente les différents matériaux utilisés ainsi que le protocole de fabrication. Une attention particulière est portée au contrôle de l'isotropie des distributions en volume. Compte tenu de la méthode couche par couche de fabrication des échantillons, le choix de l'épaisseur des couches est prépondérant pour assurer l'isotropie et l'homogénéité des distributions volumiques de particules.

4.1.1 Choix des matériaux utilisés

Les particules utilisées sont des billes de carbure de tungstène, de masse volumique $\rho_p = 14500 \text{ kg.m}^{-3}$ et de coefficients de Lamé $\lambda_p = 209 \text{ GPa}$ et $\mu_p = 266 \text{ GPa}$. Leur rayon moyen est $R = 198,5 \mu\text{m}$. Le fournisseur, Redhill Precision, assure une faible dispersion de la taille et de la sphéricité des billes ce qui permet de supposer une distribution monodisperse en taille. Le milieu contenant les sphères est la résine époxy Includox HTA. Ce type de matériau est fortement viscoélastique dans le domaine ultrasonore ; ses caractéristiques mécaniques sont données dans la partie 3.4.2. Cette résine a pour avantage d'avoir un temps de durcissement élevé ce qui permet d'y inclure facilement les diffuseurs. Cette durée dépend de la température à laquelle l'époxy est chauffée (3 heures à 60°C , 1 heure à

80°C) mais également de la quantité de résine injectée, le mélange ayant tendance à solidifier plus rapidement par effet de masse. Par ailleurs, la résine dégaze naturellement lors du durcissement, ce qui réduit grandement le nombre de bulles.

La résine époxy est conçue en mélangeant un durcisseur et une résine selon un rapport massique de 45 g de durcisseur pour 100 g de résine. Toutes les masses sont mesurées par une balance de résolution 1 mg. Les deux composants sont versés dans un bécher jetable puis mélangés à la spatule une première fois. La technique du "double-potting" est appliquée, où le contenu du bécher est transvasé dans un second bécher jetable de manière à optimiser le mélange. Un second mélange à la spatule est ensuite appliqué jusqu'à ce que la solution soit complètement incolore, signe que le durcisseur est parfaitement incorporé à la résine. Les mélanges doivent être réalisés lentement de manière à ne pas créer de bulles qui peuvent avoir du mal à disparaître, même lors du dégazage naturel. L'époxy liquide est ensuite prélevée à la seringue. En utilisant la balance de précision, la masse du mélange injectée dans le moule est alors contrôlée en pesant la seringue avant et après l'injection, avec une précision de 30 mg par rapport à la masse visée, ce qui correspond au poids moyen d'une goutte éjectée par la seringue. La fabrication des échantillons étant réalisée par dépôts successifs de plusieurs couches d'époxy, un nouveau mélange est effectué pour chaque couche. Bien que le temps de vie du mélange en pôt soit de 6 heures à 20°C, cette contrainte est imposée pour éviter des différences de rhéologie entre une couche qui aurait été coulée immédiatement après le mélange et une couche coulée après plusieurs heures.

Afin de maîtriser pleinement la conception des échantillons, il est nécessaire de contrôler précisément les épaisseurs des couches d'époxy. La résine se rétracte lors du durcissement comme le montre l'étude présentée sur la figure 4.3. La documentation du fabricant indique que la masse volumique du mélange liquide résine + durcisseur vaut $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$. L'épaisseur attendue e_{th} d'une couche de mélange liquide de masse m coulée dans le moule cylindrique de diamètre D utilisé pour la fabrication des échantillons est donc telle que $e_{th} = m/(\pi D^2/4)$. Après durcissement, l'épaisseur solide e_{exp} est systématiquement inférieure à e_{th} , ce qui indique une contraction de la résine au cours de sa polymérisation. Suite à une étude en trois points, une loi affine est établie afin de déterminer les masses de mélange à couler pour former les couches d'époxy d'épaisseur donnée, présentée sur la figure 4.3. Enfin, cette rétractation fait apparaître un léger ménisque sur les bords de l'échantillon.

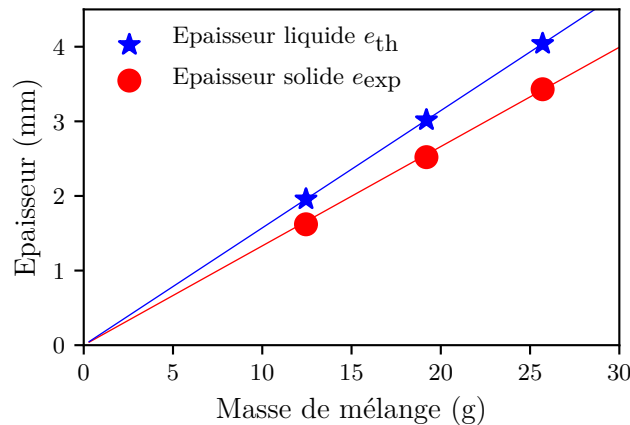


Figure 4.3 – Épaisseurs d'échantillons d'époxy en fonction de la masse de mélange injectée.

4.1.2 Protocole de fabrication des métamatériaux

Le dispositif a été conçu et réalisé en collaboration avec Jean-Marie Citerne de la Tech-Team du campus de Saint-Cyr l'École. L'objectif est d'obtenir un contrôle de la répartition des billes dans une couche d'époxy, de l'épaisseur des différentes couches et de l'épaisseur totale de l'échantillon. De plus, une attention particulière est portée à la planéité et au parallélisme des échantillons.

4.1.2.1 Insertion des billes dans l'époxy

Principe : Le principe de la fabrication d'échantillons à dispersion de billes aléatoire couche par couche est de répartir les billes dans les trous d'un tamis aléatoire puis de les faire tomber sur une couche d'époxy encore adhérente. Après leur chute, leur position à la surface de l'époxy coïncide avec leur position initiale. Cela nécessite de faire tomber les billes d'une hauteur très faible (de l'ordre du millimètre) afin de limiter la dérive due à la vitesse du lâcher initial, et donc de pouvoir placer la surface libre d'époxy au plus près du tamis. La figure 4.4a présente un schéma du dispositif de fabrication.

Moule à épaisseur réglable : Les échantillons sont fabriqués dans un moule cylindrique à épaisseur réglable d'un diamètre intérieur de 90 mm. Le moule est en polyoxyméthylène (POM), un polymère sur lequel l'époxy adhère peu, afin de faciliter le démoulage des échantillons. Pour les besoins de la technique sandwich présentée au chapitre 3, le parallélisme entre les deux faces des échantillons à sonder est impératif. La face supérieure de l'échantillon étant une surface libre perpendiculaire à la gravité, un ensemble de trois vis, visible sur la photo du moule de la figure 4.4b, permet d'assurer l'horizontalité du fond du moule qui définit la face inférieure de l'échantillon. Afin d'accélérer le durcissement de la résine, le moule est placé dans un four où son horizontalité est à nouveau réglée.

Répartition des billes : Les billes sont distribuées dans la matrice grâce à un dispositif de chute encastrable sur le moule. Ce dispositif, présenté sur la figure 4.4, est formé de trois plaques métalliques assemblées. Les deux plaques supérieure et inférieure, toutes deux d'épaisseur $500 \mu\text{m}$, sont percées de trous de diamètre $450 \mu\text{m}$ (tamis). Afin que les trous soient en regard, ces deux plaques sont rendues solidaires par soudure ou collage de leur pourtour et sont percées simultanément. N_s trous répartis sur un disque de diamètre $D = 50 \text{ mm}$ sont percés à l'aide d'une machine-outil à commande numérique selon une distribution aléatoire contrôlée dont une réalisation est représentée sur la figure 4.5a. Une plaque pleine amovible d'épaisseur $50 \mu\text{m}$ est ensuite insérée entre ces deux plaques percées.

Chute des billes : Les trois plaques sont posées horizontalement et chaque trou de la plaque supérieure est rempli d'une seule bille (à cause de ses dimensions, chaque trou ne peut contenir qu'une seule bille). Les trois plaques sont alors montées en encastrement au-dessus du moule. Lorsque la plaque intermédiaire est retirée, les billes passent d'une plaque trouée à l'autre et tombent verticalement sur l'époxy encore adhérente, la plaque inférieure guidant éventuellement leur chute. Les billes adhèrent à l'endroit de leur impact sans rouler ni rebondir. Ce dispositif a pour avantage de contrôler parfaitement la distribution des billes dans chaque plan de l'échantillon. Par exemple, la figure 4.5a présente la distribution visée des billes et la figure 4.5b présente une photo de la distribution obtenue. Afin de ne

pas avoir de trous trop proches et éviter que des billes se touchent, un rayon d'exclusion b entre chaque trou est respecté lors de la conception de la répartition aléatoire. Dans la suite, les plaques trouées sont décrites par une fraction surfacique de trous qui correspond alors à la répartition surfacique des billes dans une couche d'époxy. Enfin, il est parfaitement possible de fabriquer des échantillons périodiques avec ce dispositif.

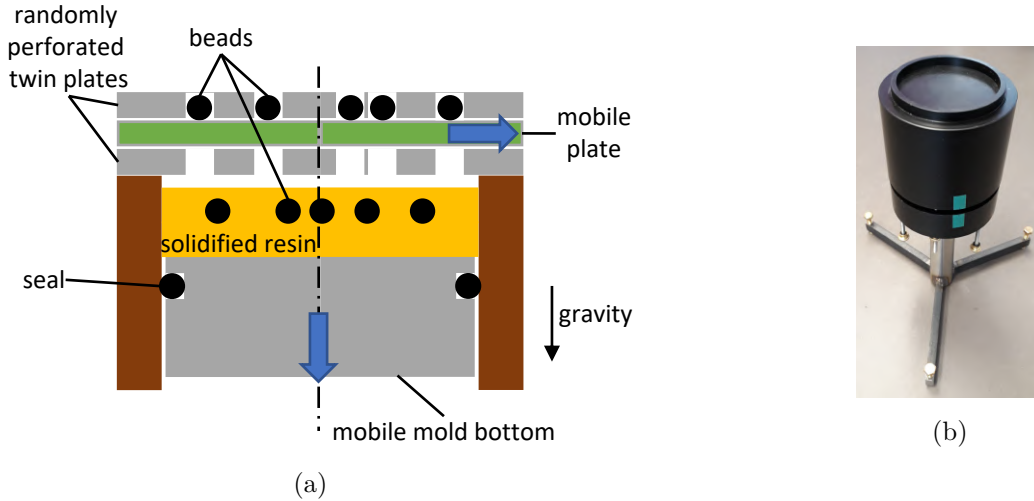


Figure 4.4 – (a) Schéma du dispositif de fabrication et (b) photo du moule. La surface de contact des deux cylindres encastrés est graissée pour un meilleur coulisement. Un joint est placé entre les deux cylindres, proche de la surface, pour éviter que l'époxy ne s'y écoule

L'insertion des particules dans l'époxy est l'étape la plus délicate de la fabrication des échantillons. En effet, du fait de la différence de densité entre la matrice et les billes, ces dernières coulent dans une couche d'époxy liquide. Pour une fraction surfacique importante de billes, la déformation de la surface conduit à la formation d'amas de billes à la surface, comme illustré sur la figure 4.5c. Ce phénomène, connu sous le nom d'effet Cherios [103] vient du fait que les billes ne coulent pas immédiatement mais restent quelques secondes à la surface à cause de la viscosité. Cette durée s'avère suffisante pour former des agrégats dans le cas d'une fraction surfacique élevée à cause de la tension de surface du liquide. Pour éviter cette agrégation, les billes doivent tomber sur de l'époxy non pas liquide mais déjà solidifiée et encore adhérente ("collante") pour éviter qu'elles rebondissent ou roulent à l'impact.

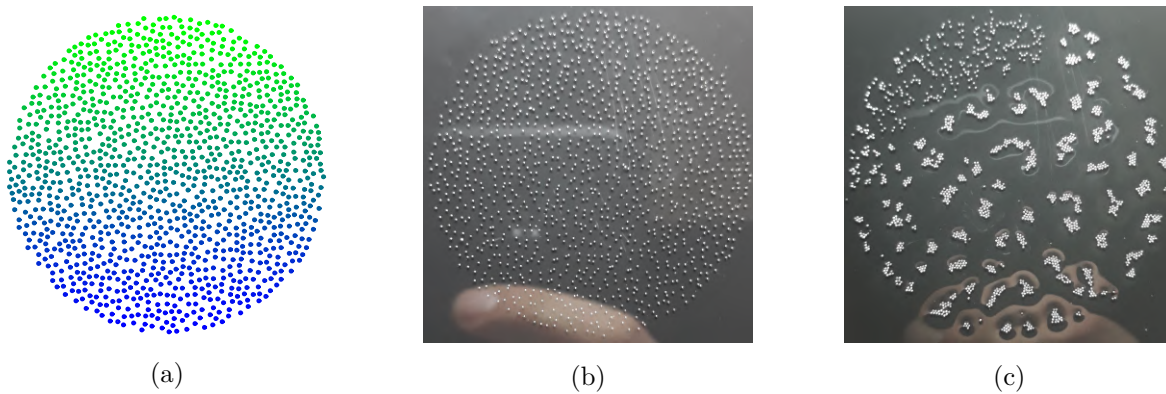


Figure 4.5 – Répartition surfacique de $N_s = 1214$ billes et $b = 5a$. Répartitions (a) visée, (b) obtenue en faisant chuter les billes sur de l'époxy solide et collante, (c) obtenue en faisant chuter les billes dans de l'époxy liquide. La concentration volumique visée, définie partie 4.1.3.1 est de $\phi_v^{th} = 2\%$.

4.1 Fabrication des échantillons

4.1.2.2 Conception couche par couche

La figure 4.6a présente le schéma d'une coupe transverse d'un échantillon, constitué de N plans de billes, dont une répartition surfacique est représentée schématiquement sur la figure 4.6b. Afin d'éviter la présence de billes respectivement sur les surfaces inférieure et supérieure de l'échantillon, deux couches d'époxy pure d'épaisseurs respectives d_1 et d_3 sont ajoutées au début et à la fin de la fabrication de l'échantillon. La période spatiale de l'échantillon étant notée e , l'épaisseur totale de l'échantillon visée est alors $e_{tot} = d_1 + d_3 + d_2$, avec $d_2 = (N - 1)e + 2R$.

La procédure mise en place permet de concevoir des échantillons de manière très reproductible. Tout d'abord, le niveau du moule est réglé grâce aux plaques sur lesquelles il est disposé, sur le plan de travail et dans le four. La surface inférieure du moule reste alors parfaitement horizontale lors de la phase de chute de billes et lors de la phase de durcissement. L'épaisseur du moule est ensuite réglée de manière à correspondre à l'épaisseur de l'échantillon désirée. Pour finir, un démoulant en spray est pulvérisé dans le moule et l'excédent est enlevé grâce à un tissu absorbant.

Le coulage des couches d'époxy se fait selon plusieurs étapes. La première couche d'époxy pure d'épaisseur d_1 est coulée au fond du moule. Une attention particulière est appliquée afin que l'époxy liquide soit bien répartie sur toute la surface. Obtenir une épaisseur inférieure à 0,3 mm pour la première couche d'époxy est très difficile à cause du faible mouillage de l'époxy sur le POM. Le moule est ensuite placé dans le four à une température de 80°C. Une fois cette première couche solidifiée, différentes couches chargées de billes sont coulées successivement. Les billes sont placées dans les trous de la plaque supérieure du dispositif de chute. Une fois disposées, l'unicité de bille par trou est contrôlée au doigt (un relief se fait sentir s'il y a deux billes l'une sur l'autre) et le surplus de billes est retiré. Le dispositif de chute de billes est ensuite encastré en haut du moule puis le tiroir est lentement retiré entraînant la chute des billes sur la couche d'époxy inférieure solidifiée. Une nouvelle couche de résine d'épaisseur e est coulée sur les billes, puis le moule est placé dans le four. Cette procédure est ensuite répétée N fois. Pour les couches suivantes, le dispositif de chute de bille est tourné aléatoirement de sa position précédente dans le cas d'une répartition aléatoire. Pour la dernière couche chargée de billes, l'épaisseur d'époxy déposée est $d_3 + 2a$. Par souci de symétrie, l'épaisseur d_3 est généralement fixée pour être égale à d_1 .

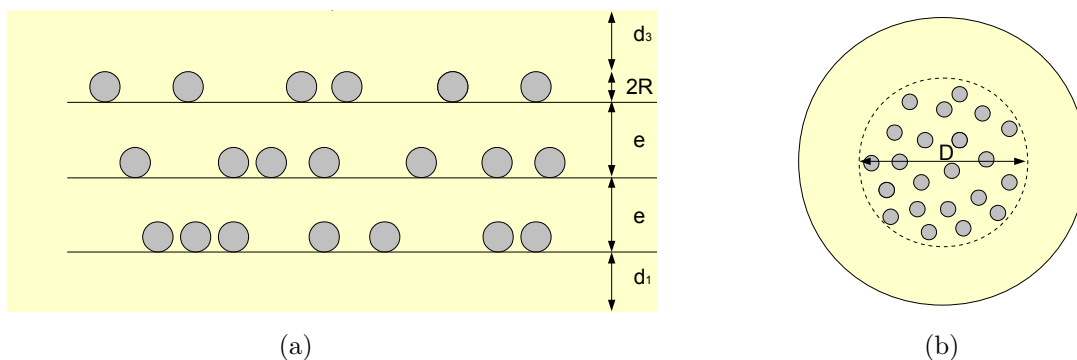


Figure 4.6 – (a) Représentation schématique d'une coupe longitudinale d'un échantillon à trois couches de billes. (b) Représentation schématique de la répartition surfacique des billes.

4.1.2.3 Polissage de l'échantillon

Lorsque la dernière couche d'époxy de l'échantillon est complètement solide, le moule est retiré du four et l'échantillon est démoulé à froid. La surface supérieure de l'échantillon peut présenter un ménisque concave dû à la contraction de la résine lors du durcissement. L'échantillon est donc poncé selon la procédure suivante. Tout d'abord, les variations d'épaisseur à la surface de l'échantillon sont contrôlées grâce à un comparateur sur plusieurs diamètres (il est évidemment impossible de contrôler chaque point de la surface). Si des variations d'épaisseurs sont supérieures à $100 \mu\text{m}$, l'échantillon est alors poli avec du papier de verre humidifié et collé sur une surface en marbre. L'échantillon, disposé dans un support adapté, est ensuite poncé en tenant le support sur les côtés de façon à n'appliquer aucun poids. Des mouvements circulaires aléatoires sont effectués afin de ne pas favoriser certains points de la surface et de conserver le parallélisme des faces. L'échantillon est finalement rincé, les variations d'épaisseurs contrôlées et la procédure répétée jusqu'à atteindre le critère de validité choisi.

4.1.3 Optimisation de l'isotropie des échantillons

4.1.3.1 Calcul de l'épaisseur optimale des couches chargées en billes

L'épaisseur d'une couche d'époxy et le nombre de billes par couche constituent des caractéristiques importantes de l'échantillon en vue d'atteindre une certaine fraction volumique. Il est donc nécessaire de déterminer ces quantités dans le but de concevoir les plaques trouées du dispositif. Tout d'abord, le problème est étudié selon une coupe transversale d'un échantillon, coupant toutes les N_s billes de rayon R d'une même couche. Il s'agit d'étudier la répartition bidimensionnelle de disques de rayon R dans un disque de diamètre D (voir sur la figure 4.6b). La fraction surfacique de diffuseurs, ou de trous sur la plaque, est alors

$$\phi_s = \frac{4N_s R^2}{D^2}. \quad (4.1)$$

Chaque plan de billes est coulé dans une épaisseur contrôlée e d'époxy et l'échantillon contient N couches chargées. Les deux couches d'époxy libres sur les surfaces inférieure et supérieure de l'échantillon ne sont initialement pas prises en compte dans le calcul présenté. La fraction volumique physique de l'échantillon dans sa totalité (couches libres et couches chargées) peut alors légèrement différer de celle visée. Ce point est discuté dans la partie suivante. En notant V_p le volume d'une bille, la fraction volumique de diffuseurs dans l'échantillon est :

$$\phi_v^{th} = \frac{4N_s V_p}{\pi D^2 e} = \frac{4R}{3e} \phi_s \quad (4.2)$$

La fraction volumique ϕ_v^{th} visée dépend du rapport entre ϕ_s et e : pour une concentration ϕ_v^{th} fixée, plus le nombre de billes sur une couche est important, plus la distance e entre chaque plan doit être grande. Si ϕ_s et e sont mal équilibrés, l'échantillon fabriqué peut s'éloigner d'une "vraie" répartition aléatoire dans le volume. Par exemple, la figure 4.7a présente le schéma d'une dispersion surfacique inhomogène de billes, où la concentration n'est pas la même partout avec localement des agrégats de billes (semblables à ceux montrés sur la figure 4.5c), comme cela peut être obtenu si la position des billes n'est pas bien contrôlée dans les plans. Même si la répartition surfacique est homogène, le fait de procéder couche par couche induit une anisotropie dans la profondeur de l'échantillon, comme cela est présenté sur le schéma de la figure 4.7b.

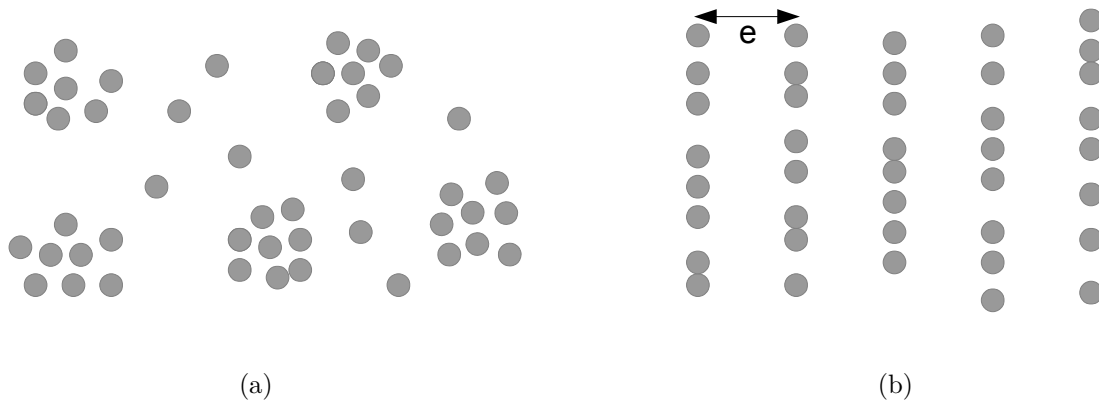


Figure 4.7 – Schéma (a) d'une dispersion surfacique inhomogène et (b) d'une dispersion anisotrope dans la profondeur des échantillons.

Afin obtenir une répartition aléatoire volumique se rapprochant le plus d'une vraie répartition 3D homogène et isotrope, l'épaisseur de chaque couche et la fraction surfacique de billes doivent être choisies judicieusement. Pour cela, la stratégie utilisée repose sur un calcul de longueurs moyennes entre des diffuseurs voisins, définies sur la figure 4.8. La distribution de particules est supposée être isotrope lorsque la distance moyenne d_{s1} entre plus proches voisins centre à centre sur une même couche est égale à la distance entre deux plus proches voisins d_{vs} sur deux couches successives.

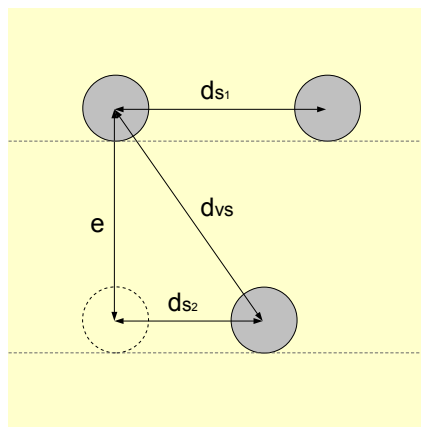


Figure 4.8 – Schéma des distances moyennes entre billes plus proches voisines sur un même plan et sur deux plans successifs.

Le calcul des distances moyennes qui suit a été initialement développé par Bansal et Ardell [104]. La distance moyenne entre deux disques plus proches voisins dans une répartition aléatoire surfacique de concentration ϕ_s est

$$d_{s1}(\phi_s) = \left(2 + \frac{e^{4\phi_s}}{2\phi_s^{\frac{1}{2}}} \Gamma \left[\frac{1}{2}, 4\phi_s \right] \right) R, \quad (4.3)$$

avec la fonction gamma incomplète,

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt. \quad (4.4)$$

Sur la couche inférieure, une bille fictive, représentée par les pointillés sur la figure 4.8, est placée sous la première bille de la couche supérieure, la distance entre leurs centres étant égale à l'épaisseur e

d'une couche. Cette bille fictive peut interpénétrer la bille placée sur la même couche. Dans ce cas, la distance d_{s2} entre deux plus proches voisins interpénétrables sur la couche inférieure est considérée et est donnée par l'expression :

$$d_{s2}(\phi_s) = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\phi_s}}. \quad (4.5)$$

La distance moyenne entre deux plus proches voisins sur deux couches successives a alors pour expression :

$$d_{vs}(\phi_s) = \sqrt{e^2 + d_{s2}^2}. \quad (4.6)$$

L'épaisseur optimale e_{opt} , pour laquelle la répartition en volume est la plus isotrope possible, est solution de la relation

$$\sqrt{e^2 + d_{s2} \left(\frac{3e_{opt}}{4R} \phi_v^{th} \right)^2} = d_{s1} \left(\frac{3e_{opt}}{4R} \phi_v^{th} \right). \quad (4.7)$$

Une fois e_{opt} déterminée, la fraction surfacique optimale $\phi_{s_{opt}}$ est obtenue en utilisant l'équation (4.2). Par exemple, la figure 4.9a présente la variation des distances moyennes entre plus proches voisins dans le cas d'une fraction volumique désirée $\phi_v^{th} = 2\%$, en fonction de l'épaisseur d'une couche e . Pour une telle concentration, l'épaisseur optimale des couches d'époxy est $e_{opt} = 0,45$ mm et le nombre de billes par couche est $N_s = 531$ (voir sur la figure 4.10a). La figure 4.9 présente également la distance moyenne entre deux sphères plus proches voisines dans une répartition aléatoire volumique ϕ_v^{th} définie par

$$d_v = \left(2 + \frac{e^{8\phi_v^{th}}}{3\phi_v^{th\frac{1}{3}}} \Gamma \left[\frac{1}{3}, 8\phi_v^{th} \right] \right) R. \quad (4.8)$$

L'idéal serait que les trois distances d_v , d_{s1} et d_{vs} soient égales, mais cela est inatteignable dans la pratique. En effet, l'égalité $d_{vs} = d_v$ est vraie uniquement pour des concentrations supérieures à 22 % et propose 2 solutions pour e . La figure 4.9b illustre ce propos pour une fraction volumique de 50%. De plus, déterminer l'épaisseur optimale avec $d_v = d_s$ apporterait un trop gros déséquilibre entre les différentes distances. Une fois l'épaisseur d'une couche et le nombre de billes par couche définis pour une fraction volumique choisie, un programme de tirage aléatoire détermine la position des trous sur les plaques du dispositif de chute de billes.

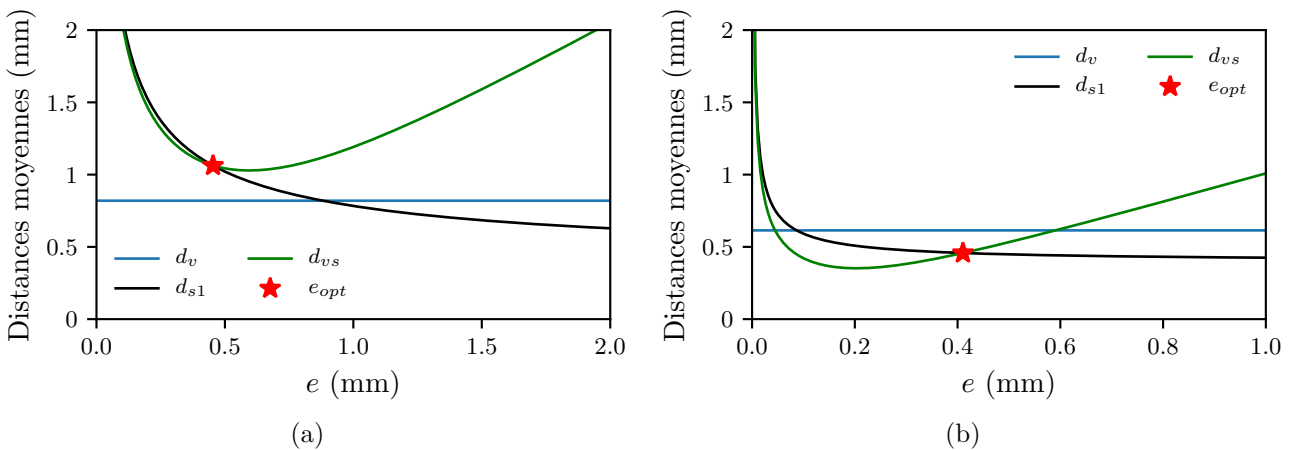


Figure 4.9 – Distances entre plus proches voisins dans le cas d'une fraction volumique désirée à (a) $\phi_v^{th} = 2\%$ et (b) $\phi_v^{th} = 50\%$.

4.1 Fabrication des échantillons

4.1.3.2 Rayon d'exclusion

Théoriquement, selon la formule (4.3), deux billes ne peuvent s'interpénétrer car $d_{s1} > 2R$. Dans la pratique, il n'est pas impossible que quelques billes se touchent après leur chute. Le rayon d'exclusion b permet alors d'améliorer l'isotropie de la distribution et empêche que les billes se touchent. Ce paramètre correspond au rayon d'exclusion des trous et ne coïncide pas exactement avec un "vrai" rayon d'exclusion d'une dispersion 3D réelle. La distance minimale d'exclusion est $b_{min} = 2R$ et la distance maximale est définie par $b_{max} = 2R\sqrt{0,907\phi_s}$ [79]. A ce rayon d'exclusion maximal, calculé mathématiquement pour un milieu infini, la répartition des billes devient périodique. Expérimentalement, cette valeur n'est pas atteignable car les trous sont répartis sur une surface finie. En prenant en compte le rayon d'exclusion 2D b , la distance entre deux plus proches voisins sur une même couche est recalculée en suivant la procédure décrite par Bansal et Ardall et s'écrit alors :

$$d'_{s1}(\phi_s) = \left(2 + \frac{R}{b} \frac{e^{\frac{b^2}{R^2}\phi_s}}{\phi_s^{\frac{1}{2}}} \Gamma \left[\frac{1}{2}, \frac{b^2}{R^2}\phi_s \right] \right) \frac{b}{2}. \quad (4.9)$$

Pour une même concentration volumique visée, une plus grande valeur de b engendre de plus grandes valeurs de d'_{s1} et e et donc un plus grand nombre de billes par couche. La figure 4.10 propose une illustration de l'impact de ce paramètre.

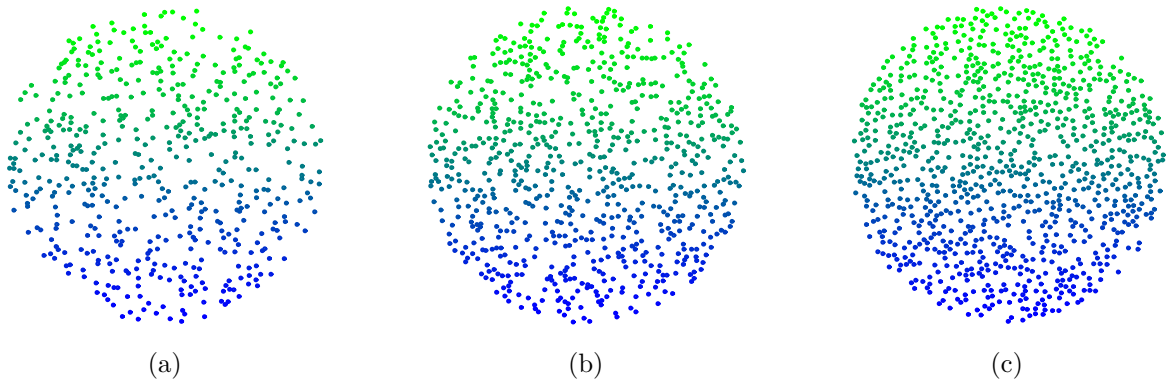


Figure 4.10 – Répartition surfacique de trous obtenus pour plusieurs rayons d'exclusion b en visant une même fraction volumique $\phi_v^{th} = 2\%$, pour (a) $b = 2R$ et $N_s = 531$, (b) $b = 3R$ et $N_s = 764$ et (c) $b = 4R$ et $N_s = 989$.

4.1.4 Fraction volumique effective

Une fois l'échantillon fabriqué, il reste à calculer la concentration de billes expérimentale. En effet, les calculs développés dans la section précédente ne tiennent pas compte des couches d'époxy non chargées aux surfaces libres de l'échantillon. La question de l'épaisseur dans le volume de l'échantillon à utiliser pour le calcul de la concentration se pose alors. Si les épaisseurs d_1 et d_3 d'époxy non chargée sont grandes devant d_2 , la concentration calculée en utilisant l'épaisseur totale de l'échantillon peut fortement s'éloigner de celle visée. De ce fait, seule l'épaisseur d_2 correspondant à la distance entre les deux plans de billes extrêmes est utilisée. Cela est envisageable car les dimensions transverses de l'échantillon sont parfaitement maîtrisée lors de la conception.

En effet, le nombre de billes dans la totalité de échantillon est parfaitement maîtrisé car l'utilisateur s'assure bien que chaque bille est tombée dans le moule grâce à une loupe. L'épaisseur d_1 de la première couche d'époxy non chargée au fond du moule correspond exactement à celle visée car elle n'est pas influencée par d'éventuelles déformations des couches inférieures. Les couches supérieures peuvent quant à elles légèrement différer de celles visées, du fait de l'apparition d'un ménisque sur les couches inférieures. De plus, la présence des billes peut augmenter la hauteur de l'époxy liquide. Ces problèmes seraient quantifiables s'il était possible de mesurer la distance entre chaque plan de billes indépendamment après fabrication. Cela est actuellement techniquement impossible mais un contrôle optique pourrait être envisagé à l'avenir. Malgré cette restriction, les masses d'époxy liquide injectées sont parfaitement contrôlées avec une précision de 30 mg. Les effets précédemment cités ayant un impact relativement faible, il est raisonnable de penser que les distances expérimentales entre chaque plan de billes sont proches de celles visées. Finalement, l'épaisseur totale e_{tot} de l'échantillon est mesurée une dizaine de fois au palmer micrométrique. L'erreur de répétabilité de cette mesure est $\Delta e_{tot} = 30 \mu\text{m}$. La concentration expérimentale de diffuseurs est alors définie par

$$\phi_v = \frac{4NN_sV_P}{\pi D^2 [e_{tot} - d_1 - d_3]}. \quad (4.10)$$

4.1.5 Echantillons fabriqués

De nombreux échantillons ont été fabriqués dans le cadre de ce travail. Les tableaux 4.1 et 4.2 donnent les caractéristiques de chacun. Deux types d'échantillons sont à distinguer. Les premiers sont des échantillons fins où les épaisseurs d_1 et d_3 d'époxy libre sont comparables à l'épaisseur e des couches chargées. Ces échantillons, nommés "type A", sont spécialement fabriqués afin d'étudier l'onde transmise à travers toutes les couches de billes. D'autres échantillons ont des épaisseurs d_1 et d_3 plus grandes que l'épaisseur d'une couche chargée. Ces échantillons, nommés "type B", ont pour but de séparer du signal réfléchi les échos dûs respectivement à la surface de l'échantillon et aux plans de billes. Dans la suite du document, les échantillons sont nommés par leur type et leur numéro, par exemple A1 pour l'échantillon de type A numéro 1. Il sont référés par leur fraction volumique visée.

Il est à noter que la précision de fabrication des échantillons a été améliorée au cours des différents essais réalisés. Par exemple, les échantillons de A6 à A11 et B6 ont été fabriqués avant que la rétractation de l'époxy soit clairement identifiée. Les masses injectées étant néanmoins connues, les épaisseurs en jeu dans ces échantillons ont été recalculées après fabrication à l'aide de la loi affine de la figure 4.3. Dans le cas des échantillons de type A, les épaisseurs d_3 sont calculées après fabrication de l'échantillon et la mesure de l'épaisseur totale, $d_3 = e_{tot} - d_1 - (N - 1)e - 2R$. Comme cette mesure est peu précise, la moitié de l'incertitude $\Delta e_{tot} = 30 \mu\text{m}$ faite sur la lecture de l'épaisseur totale est alors associée à part égale aux épaisseurs d_2 et d_3 , d_1 étant parfaitement maîtrisée, *i.e.* $d_2 = d_2 \pm \Delta d/2$ et $d_3 = d_3 \pm \Delta d/2$. Concernant les échantillons de type B, les épaisseurs d_3 peuvent être absolument quantifiables, selon la procédure décrite dans la partie 4.2.1.2.

4.1 Fabrication des échantillons

Numéro	ϕ_v^{th}	b	N_s	N	$d_1(mm)$	$e(mm)$	$d_3(mm)$	$e_{tot}(mm)$	$\phi_v(\%)$
1	2 %	2R	531	3	0,5	0,453	0,547	2,35	2,04
2	2 %	2R	531	3	0,5	0,453	0,577	2,38	2,04
3	2 %	3R	764	3	0,6	0,654	0,615	2,92	2,24
4	2 %	4R	989	3	0,6	0,805	0,693	3,30	2,47
5	2 %	5R	1214	3	0,6	1,006	0,701	3,71	2,52
6	2 %	5R	1214	1	0,508	0,853	0,525	1,43	5,10
7	2 %	5R	1214	2	0,508	0,853	0,682	2,44	3,24
8	2 %	5R	1214	3	0,508	0,853	0,689	3,30	2,89
9	2 %	5R	1214	4	0,508	0,853	0,746	4,21	2,74
10	5 %	2R	1600	3	0,423	0,431	0,518	2,20	6,36
11	5 %	2R	1600	3	0,423	0,431	0,538	2,22	6,36
12	10 %	2R	2512	3	0,5	0,463	0,587	2,41	9,50
13	10 %	2R	2512	4	0,5	0,463	0,544	2,83	9,39
14	10 %	2R	2512	5	0,5	0,463	0,561	3,31	9,32
15	5 %	2R	1600	3	0,5	0,458	0,457	2,27	6,10
16	10 %	2R	2512	3	0,5	0,463	0,527	2,35	9,50

Tableau 4.1 – Tableau des échantillons de type A.

Numéro	ϕ_v^{th}	b	N_s	N	$d_1(mm)$	$e(mm)$	$d_3(mm)$	$e_{tot}(mm)$	$\phi_v(\%)$
1	2 %	2R	531	7	2,85	0,453	2,913	8,77	2,06
2	2 %	2R	531	15	2,85	0,453	2,931	12,14	1,95
3	2 %	3R	764	7	2,85	0,654	3,280	9,92	2,35
4	2 %	4R	989	7	2,85	0,805	2,885	10,96	2,21
5	2 %	5R	1214	7	2,85	1,006	2,875	12,22	2,18
6	5 %	2R	1600	7	2,52	0,431	2,817	9,17	4,90
7	10 %	2R	2512	1	2,85	0,463	2,975	6,19	11,49
8	10 %	2R	2512	2	2,85	0,463	2,961	6,55	11,34
9	10 %	2R	2512	3	2,85	0,463	3,092	7,24	9,69
10	10 %	2R	2512	4	2,85	0,463	2,503	7,24	8,88
11	10 %	2R	2512	5	2,85	0,463	2,772	7,90	9,2
12	10 %	2R	2512	6	2,85	0,463	2,877	8,45	9,23
13	10 %	2R	2512	7	2,85	0,463	2,573	8,54	9,41
14	5 %	2R	1600	7	2,85	0,458	2,812	8,88	5,8
15	10 %	2R	2512	7	2,85	0,463	2,682	8,74	9,14

Tableau 4.2 – Tableau des échantillons de type B.

4.2 Mise en évidence des résonances dipolaires avec la mesure au sandwich

Le dispositif du sandwich présenté dans le chapitre 3 est utilisé afin de sonder les échantillons de métamatériaux avec des ondes de volume élastiques. La suite de ce chapitre se concentre sur l'étude des ondes transverses uniquement. L'objectif est en effet de réussir à identifier les résonances dipolaires en translation et en rotation des diffuseurs présentées dans le chapitre 1. Pour les matériaux utilisés présentés dans la partie 4.1.1, les fréquences de résonances théoriques de ces résonances, obtenues grâce aux équations (1.59) et (1.57) sont respectivement $f_t = 523$ kHz et $f_r = 919$ kHz. De ce fait, la paire de capteurs 3 du tableau 3.1 centrée en 1 MHz est utilisée.

4.2.1 Influence des diffuseurs sur les signaux temporels

4.2.1.1 Echantillons de type A

L'hétérogénéité des échantillons a un impact significatif sur les signaux temporels acquis. La figure 4.11 présente les signaux temporels réfléchis et transmis dans le sandwich avec un échantillon d'époxy pur d'épaisseur 2,34 mm et l'échantillon A1 d'épaisseur 2,35 mm, chargé en bille à 2% selon 3 plans de billes. L'énergie de l'onde incidente sur l'échantillon est la même dans les deux cas. Que ce soit pour les signaux réfléchis ou transmis, les échos dans l'échantillon chargé sont plus fortement atténués que ceux dans la résine pure. Sur le signal transmis, seul le premier écho est bien défini et correspond au front balistique de l'onde. Cette partie du signal est peu diffusée et se propage alors à une vitesse similaire à celle d'une onde dans l'époxy pur. Le reste du signal contient la superposition des multiples réflexions à l'intérieur de l'échantillon et des ondes diffusées par les plans de bille.

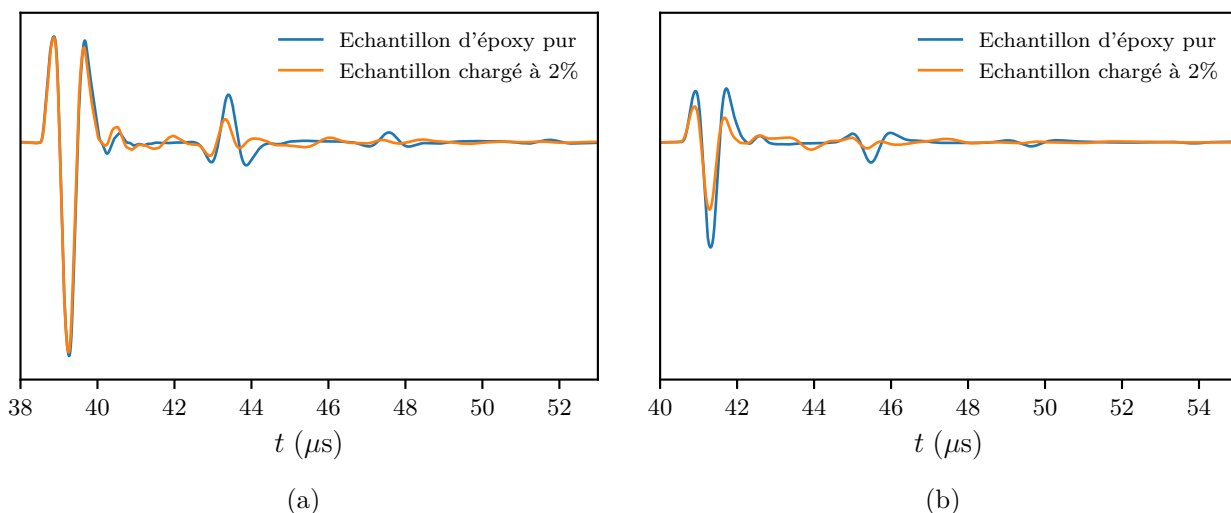


Figure 4.11 – Signaux (a) en réflexion et (b) en transmission d'un échantillon d'époxy pur d'épaisseur 2,34 mm et d'un échantillon d'épaisseur 2,35 mm, chargé de 3 plans de billes concentrées à 2%. Les échelles des ordonnées de (a) et (b) sont identiques.

La figure 4.12 présente une comparaison des signaux transmis et réfléchis pour le même échantillon d'époxy pur et pour l'échantillon A12 d'épaisseur 2,41 mm, chargé à 10% selon 3 plans de billes. Pour une telle concentration, le front balistique du signal transmis est complètement déformé. L'atténuation

4.2 Mise en évidence des résonances dipolaires avec la mesure au sandwich

est visiblement supérieure à celle dans l'échantillon A1. Sur le signal réfléchi, seul le premier écho est clairement identifiable et a une forme similaire à celui obtenu avec l'échantillon A1 avant $t = 40\mu s$. Cela montre que cet écho est principalement dû à la réflexion de l'onde incidente sur la première interface Dural-Couplant-Epoxy rencontrée (face avant de l'échantillon). Compte tenu de la faible épaisseur des couches d'époxy dans les échantillons de type A, la signature du signal rétro-diffusé par les plans de billes est alors noyée dans celle de la réflexion spéculaire à l'interface Dural-Couplant-Epoxy.

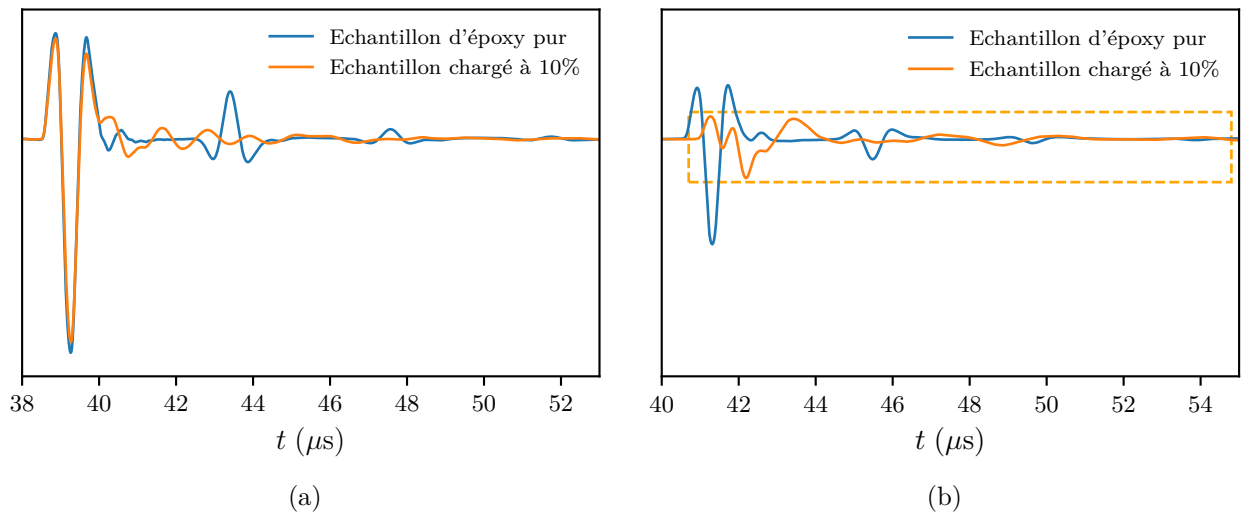


Figure 4.12 – Signaux (a) en réflexion et (b) en transmission d'un échantillon d'époxy pur d'épaisseur 2,34 mm et d'un échantillon d'épaisseur 2,41 mm chargé selon 3 plans de billes concentrées à 10%. Les échelles des ordonnées de (a) et (b) sont identiques. L'amplitude du signal orange dans la partie encadrée de la figure (b) est multiplié par 3.

4.2.1.2 Échantillons de type B

Les échantillons de type B sont spécialement fabriqués afin d'observer l'onde issue de la rétro-diffusion cohérente par les plans de billes. Ces échantillons ont des épaisseurs de couches d'époxy libres d_1 et d_3 suffisamment importantes pour séparer la contribution du signal réfléchi à l'interface Dural-Couplant-Epoxy de celle du signal rétro-diffusé par les plans de billes. Les valeurs de d_1 et d_3 sont fixées en tenant compte de la durée d'une impulsion centrée à 1 MHz et de la vitesse des ondes de cisaillement dans l'époxy pur. La figure 4.13 présente des signaux réfléchis par 3 échantillons B1, B6 et B13. Ces échantillons ont tous 7 plans de billes entre deux couches d'époxy épaisses et disposent d'une concentration de billes visée respectivement de 2%, 5% et 10%. Le premier écho est identique pour les 3 échantillons et correspond à la contribution de l'interface Dural-Couplant-Epoxy. Le deuxième écho correspond à la rétro-diffusion par les plans de billes. Plus la fraction volumique augmente, plus l'amplitude du deuxième écho est grande. De plus, cette partie du signal a une forme similaire dans le cas des échantillons chargés à 5% et 10%. Le temps d'arrivée diffère dans le cas de l'échantillon chargé à 5% car $d_1 = 2.54$ mm, contrairement aux échantillons chargés à 2% et 10% pour lesquels $d_1 = 2.85$ mm. Enfin, les ondes transmises sont quasiment indétectables pour les échantillons chargés à 5% et 10%.

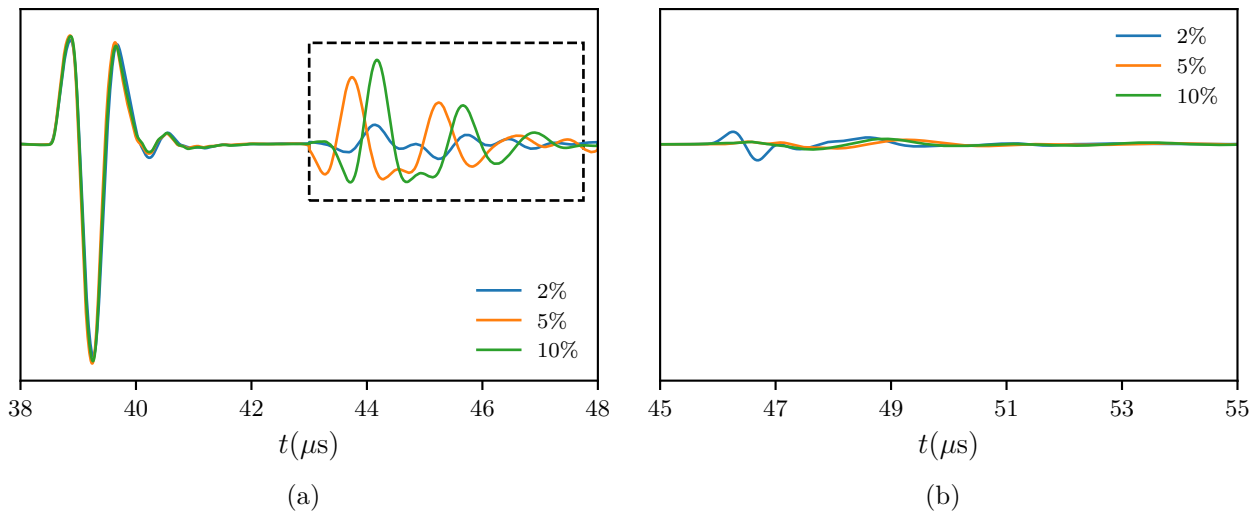


Figure 4.13 – Signaux (a) en réflexion et (b) en transmission d'échantillons chargés de 7 plans de billes, pour des concentration de 2%, 5% et 10%. La partie encadrée du signal est amplifiée d'un facteur $\times 4$ en amplitude. Les échelle des ordonnées de (a) et (b) sont identiques.

Remarque : Les échantillons de type B permettent de déterminer précisément les épaisseurs des zones avec et sans billes. Pour les deux types d'échantillon, l'épaisseur d_1 est parfaitement contrôlée. Dans le cas des échantillons B, la différence de temps de vol des signaux réfléchis par les billes à gauche et à droite permet d'obtenir une quantification précise de d_3 . La figure 4.14 présente les signaux réfléchis à gauche S_{r1} et à droite S_{r2} obtenus avec l'échantillon B13. Les premiers échos à gauche et à droite, correspondant à la réflexion à l'interface du dispositif, arrivent au même instant. Les deuxièmes échos arrivent avec un décalage temporel évalué par intercorrélacion. Dans le cas des signaux présentés, ce décalage est $\Delta t = 0,47\mu\text{s}$. En connaissant la vitesse des ondes transverses dans l'époxy à 1 MHz, il vient : $d_1 = d_3 + 0,28$ mm. Pour finir, les échos réfléchis sur la dispersion de billes à gauche et à droite ont la même forme, ce qui témoigne bien du caractère cohérent de cette partie du signal.

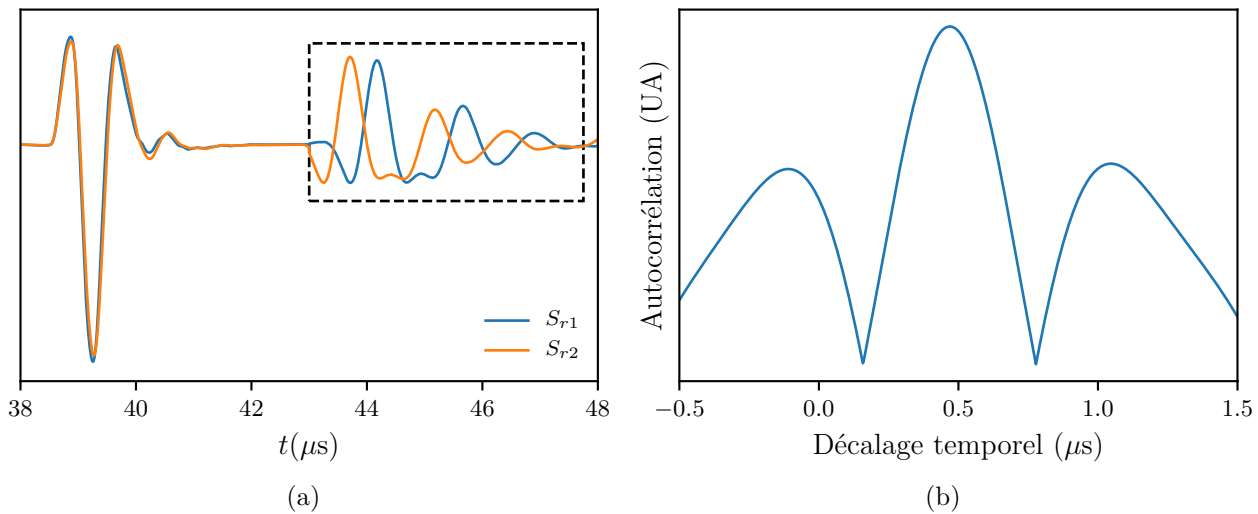


Figure 4.14 – (a) Signaux en réflexion à gauche et à droite d'un échantillon chargé de 7 plans de billes concentré à 10%. La partie encadrée du signal est agrandie d'un facteur $\times 4$ en amplitude. (b) Valeur absolue de l'intercorrélacion des signaux encadrés sur (a).

4.2.2 Influence des diffuseurs sur les coefficients de réflexion et de transmission

4.2.2.1 Échantillons de type A

Influence du nombre de plans : La présence des billes dans les échantillons a pour effet d'atténuer et de déformer les échos mesurés par le dispositif sandwich. Cela influe directement sur les coefficients de réflexion et de transmission obtenus par la procédure présentée dans la partie 3.1.5. Les figures 4.15 et 4.16 présentent respectivement les modules et phases déroulées des coefficients de transmission \mathcal{T}^2 et de réflexion gauche \mathcal{R}_1 et droite \mathcal{R}_2 , obtenus avec les échantillons A6, A7, A8 et A9. Ces échantillons ont tous une même concentration visée de 2% et sont présentés par ordre croissant du nombre de couches de billes, de mêmes épaisseurs.

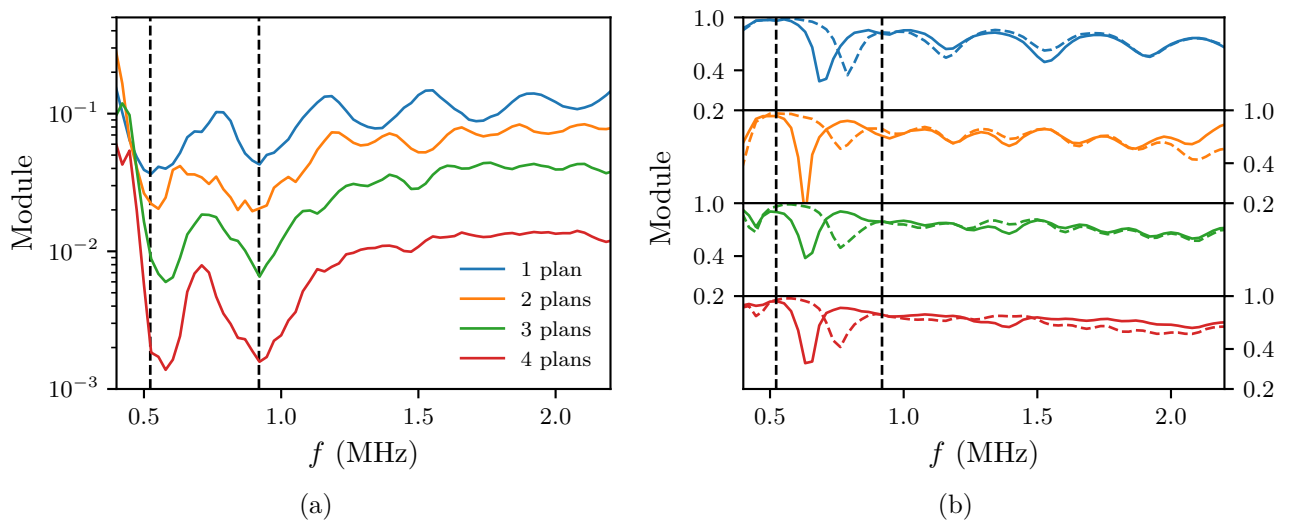


Figure 4.15 – Modules des coefficients (a) \mathcal{T}^2 et (b) \mathcal{R}_1 (en trait plein) et \mathcal{R}_2 (en tirets), obtenus pour des échantillons de type A chargés à 2%. Les tirets noirs représentent les fréquences de résonances en translation f_t et en rotation f_r .

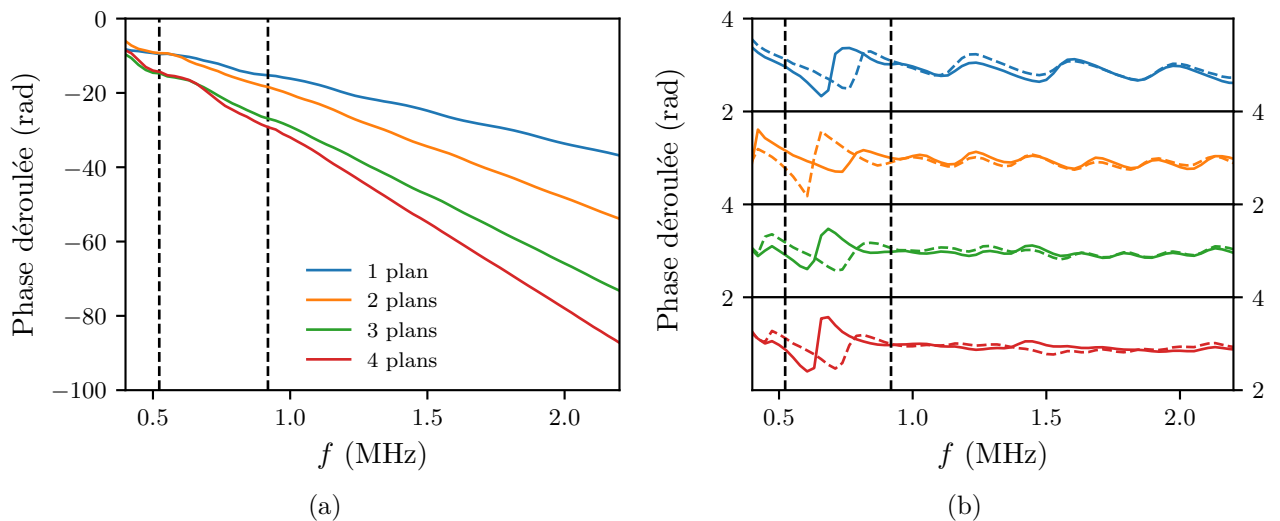


Figure 4.16 – Phases déroulées des coefficients (a) \mathcal{T}^2 et (b) \mathcal{R}_1 (en trait plein) et \mathcal{R}_2 (en tirets), obtenues pour des échantillons de type A chargés à 2%. Les tirets noirs représentent les fréquences de résonances en translation f_t et en rotation f_r .

Il est tout d'abord observable sur la figure 4.15 que plus le nombre de plans augmente, plus le module du coefficient de transmission est faible. En effet, pour des échantillons ayant les mêmes propriétés en volume, l'amplitude des ondes transmises est d'autant plus faible que l'épaisseur de ce matériau est grande. Au delà de 1 MHz environ, les oscillations de Fabry-Pérot s'atténuent avec l'augmentation du nombre de couches chargées car l'atténuation des échos multiples augmente avec l'épaisseur. La pente de la phase des coefficients de transmission de la figure 4.16 augmente avec le nombre de plans de billes, c'est à dire avec l'épaisseur.

Les coefficients de transmission présentent une grande sensibilité vis-à-vis du nombre de plans de billes. Tout d'abord, deux creux distincts émergent à environ 0,6 MHz et 1 MHz sur le module. A ces mêmes fréquences, correspond un changement de la pente de la phase déroulée du coefficient de transmission. Ces fréquences sont proches des fréquences théoriques auxquelles ont lieu les résonances d'une bille de tungstène dans la résine d'époxy. La fréquence la plus basse correspond à la fréquence de résonance en translation f_t et la fréquence la plus haute correspond à la fréquence de résonance en rotation f_r . Les coefficients de réflexion ne présentent cependant pas de tendance significative à ces mêmes fréquences, quelque soit le nombre de plans de billes. En revanche, pour tous les échantillons présentés, les coefficients de réflexion à gauche et à droite présentent des formes similaires mais décalées avec respectivement des creux à environ 0,7 MHz et 0,8 MHz. Pour des fréquences supérieures à 1 MHz, les coefficients de réflexion à gauche et à droite semblent cependant se confondre.

Influence de la concentration : Les figures 4.17 et 4.18 présentent respectivement les modules et phases des coefficients de transmission \mathcal{T}^2 et de réflexion \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 obtenus avec les échantillons A1, A10 et A12. Ces échantillons ont tous une épaisseur totale proche et sont présentés par ordre croissant de fraction volumique de billes.

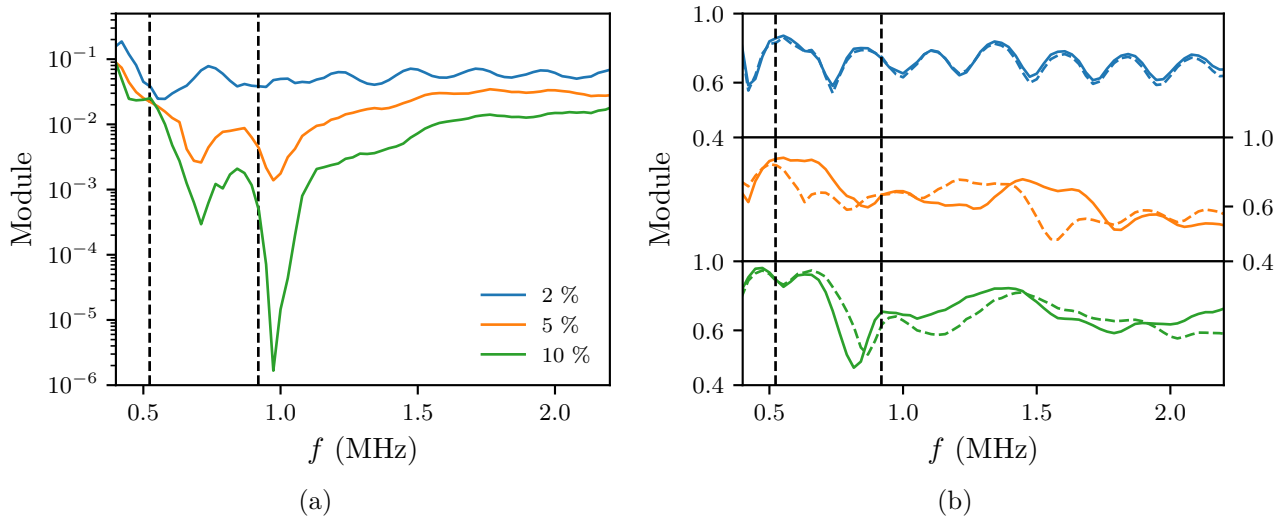


Figure 4.17 – Modules des coefficients (a) \mathcal{T}^2 et (b) \mathcal{R}_1 (en trait plein) et \mathcal{R}_2 (en tirets), obtenus pour des échantillons de type A chargés à 2%, 5% et 10% sur 3 plans de billes. Les tirets noirs représentent les fréquences de résonance en translation f_t et en rotation f_r .

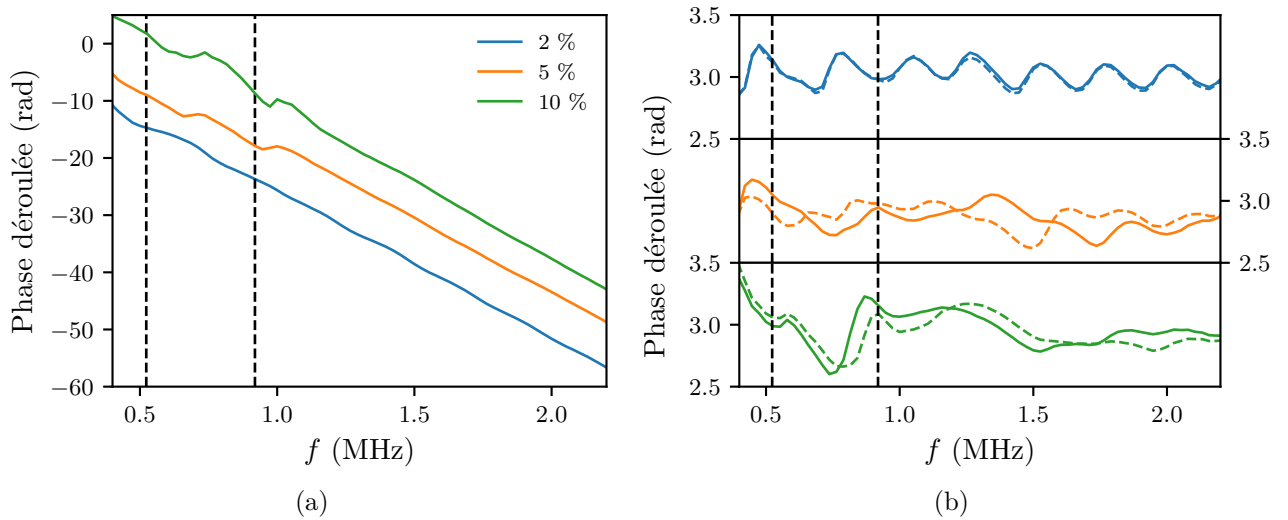


Figure 4.18 – Phases déroulées des coefficients (a) \mathcal{T}^2 et (b) \mathcal{R}_1 (en trait plein) et \mathcal{R}_2 (en tirets), obtenues pour des échantillons de type A chargés à 2%, 5% et 10% sur 3 plans de billes. Les tirets noirs représentent les fréquences de résonances en translation f_t et en rotation f_r .

Comme observé précédemment, les signatures des résonances des billes en translation et en rotation sont identifiables sur les coefficients de transmission, par un creux sur le module et par un changement de pente sur la phase déroulée. Ces événements ont lieu à environ 0,6 MHz et 1 MHz pour l'échantillon à 2% et à environ 0,7 MHz et 1 MHz pour les deux autres. La fréquence de la signature de la résonance en translation augmente avec la concentration. Cela n'est pas le cas pour celle de la résonance en rotation qui ne varie pas avec la fraction volumique de billes. Lorsque la concentration de billes augmente, les signatures des résonances sont plus prononcées : les creux de modules sont plus piqués et les variations de pente des phases sont plus importantes. Ces changements sont bien plus marqués pour la résonance en rotation. Comme sur les figures 4.15 et 4.16, les coefficients de réflexion n'affichent de nouveau pas de tendance nette avec l'évolution de la concentration. Les coefficients de réflexion gauche et droite sont très différents dans les cas à 5% et 10%.

Les observations faites sur les figures 4.15, 4.16, 4.17 et 4.18 montrent la sensibilité des coefficients de transmission contrairement aux coefficients de réflexion. Quelque soit la concentration et le nombre de couches de billes des échantillons, ces coefficients se caractérisent par la présence de deux creux sur le module et deux changements de pente sur la phase, à environ 0,6 MHz et 1 MHz. Ces résultats renforcent l'idée de n'exploiter que les coefficients de transmission issus des mesures sur les échantillons de type A.

4.2.2.2 Echantillons de type B

Influence du nombre de plans : Les figures 4.19 et 4.20 présentent respectivement les modules et phases déroulées des coefficients de transmission \mathcal{T}^2 et de réflexion \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 , obtenus avec les échantillons de B7 à B13. Ces échantillons ont tous une même concentration visée de 10% et sont présentés par ordre croissant du nombre de couches de billes, de mêmes épaisseurs.

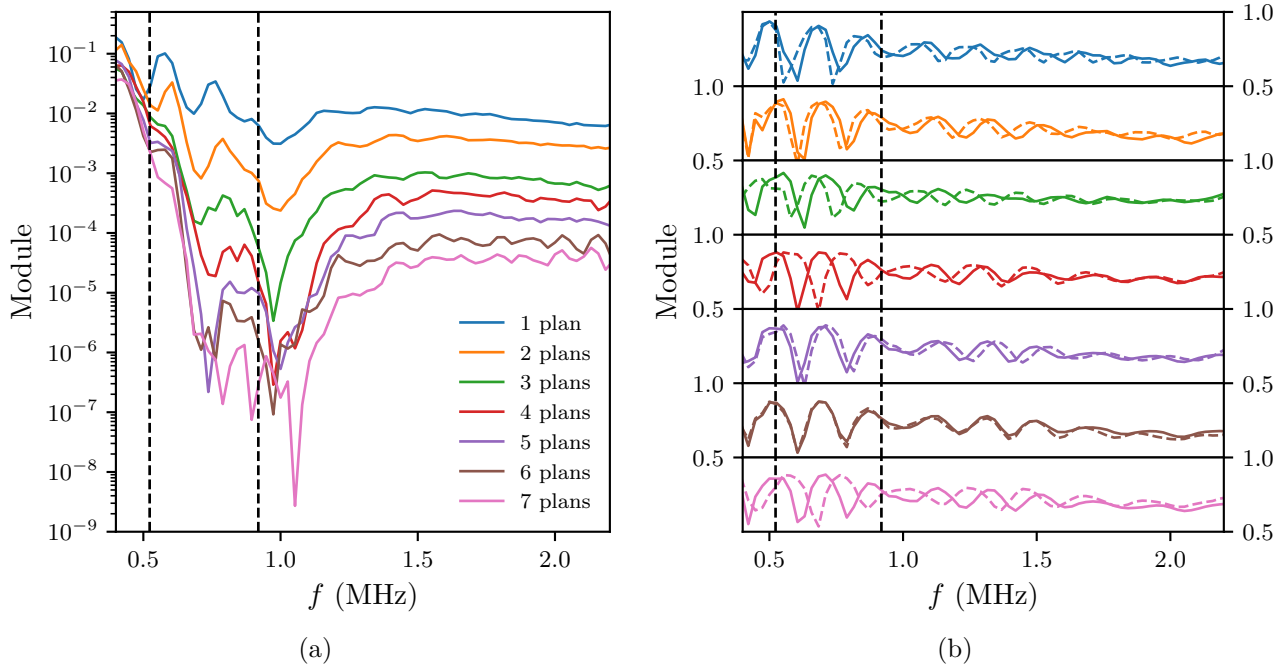


Figure 4.19 – Modules des coefficients (a) \mathcal{T}^2 et (b) \mathcal{R}_1 (en trait plein) et \mathcal{R}_2 (en tirets), obtenus pour des échantillons de type B chargés à 10%. Les tirets noirs représentent les fréquences de résonances en translation f_t et en rotation f_r .

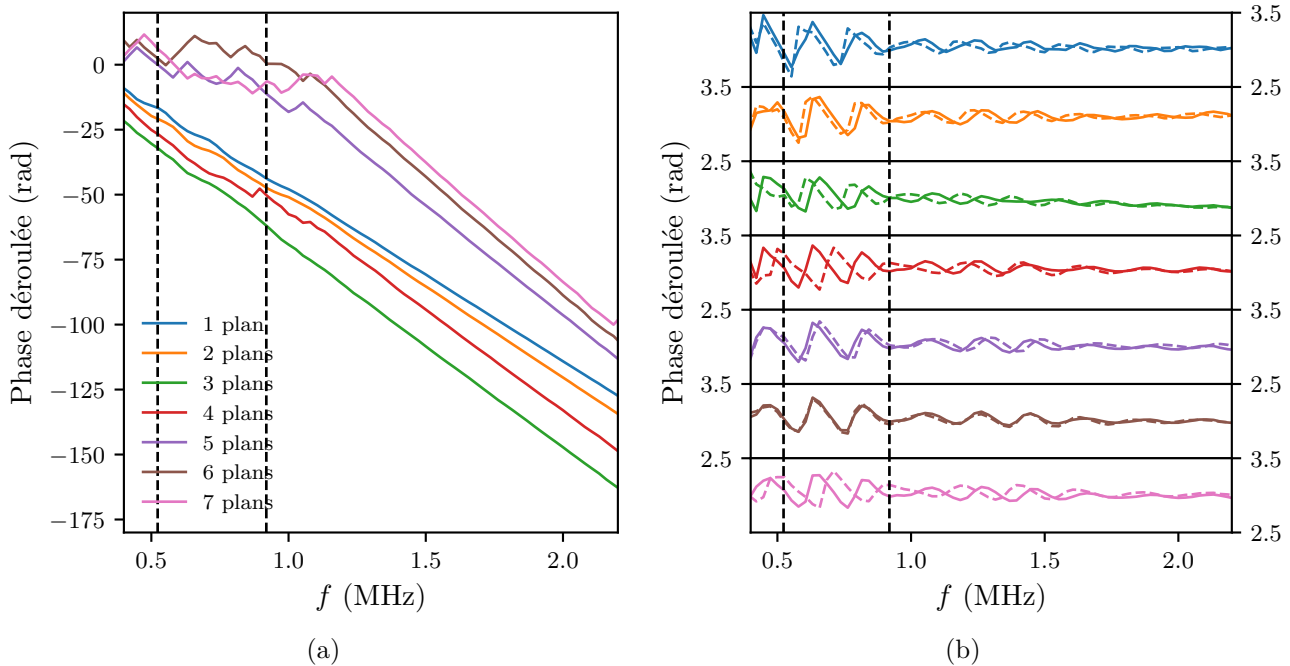


Figure 4.20 – Phases déroulées des coefficients (a) \mathcal{T}^2 et (b) \mathcal{R}_1 (en trait plein) et \mathcal{R}_2 (en tirets), obtenus pour des échantillons de type B chargés à 10%. Les tirets noirs représentent les fréquences de résonances en translation f_t et en rotation f_r .

Tout d'abord, comme pour les échantillons de type A, le module du coefficient de transmission diminue avec l'augmentation du nombre de plans chargés. Les signatures des résonances en translation et rotation des particules sont de nouveau visibles. Pour les échantillons chargés à 5, 6 et 7 plans, ces

4.2 Mise en évidence des résonances dipolaires avec la mesure au sandwich

modules sont cependant très bruités entre 0,5 et 1,5 MHz. Les courbes correspondant à ces échantillons ne sont plus espacées aussi régulièrement que celles correspondant aux échantillons de 1 à 4 plans de billes. De plus, les phases des échantillons chargés à 5, 6 et 7 plans ne sont pas bien déroulées à des fréquences inférieures à 1,2 MHz. Les changements de pente aux fréquences de résonances sont mal définis.

A l'inverse des échantillons de type A, les modules et phases des coefficients de réflexion ont tous une forme et des amplitudes similaires, quelque soit le nombre de plans de billes en présence. Dans chaque cas, les coefficients de réflexion à gauche et à droite ont exactement la même forme mais peuvent afficher un décalage en fréquence (hormis pour l'échantillon chargé à 6 plans de billes). Ceci correspond au fait que les échos réfléchis sur les plans de bille à gauche et à droite, utilisés pour calculer les coefficients de réflexion, sont identiques mais affichent un décalage temporel. Par exemple, les signaux présentés sur la figure 4.14 sont utilisés pour calculer les coefficients de réflexion de l'échantillon à 7 plans de billes des figures 4.19 et 4.20. Ce décalage temporel est alors imputable à la différence d'épaisseur de d_1 et d_3 de part et d'autre de la dispersion de billes et induit donc un décalage fréquentiel. Pour l'échantillon chargé à 6 plans de billes, les coefficients de réflexion à gauche et à droite sont confondus car les échos sur les plans de billes arrivent au même instant. Dans le cas des figures 4.15 et 4.16, une différence d'épaisseur de d_1 et d_3 n'est pas suffisante pour expliquer le désaccord car les coefficients à gauche et à droite ont tendance à en se remettre en phase au delà de 1 MHz. Ceux des figures 4.19 et 4.20 sont en revanche décalés à toutes les fréquences.

Influence de la concentration : Les figures 4.21 et 4.22 présentent respectivement les modules et phases des coefficients de transmission \mathcal{T}^2 et de réflexion \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 , obtenus avec les échantillons B1, B6 et B13. Ces échantillons ont une épaisseur totale proche et sont présentés par ordre croissant de fraction volumique de billes.

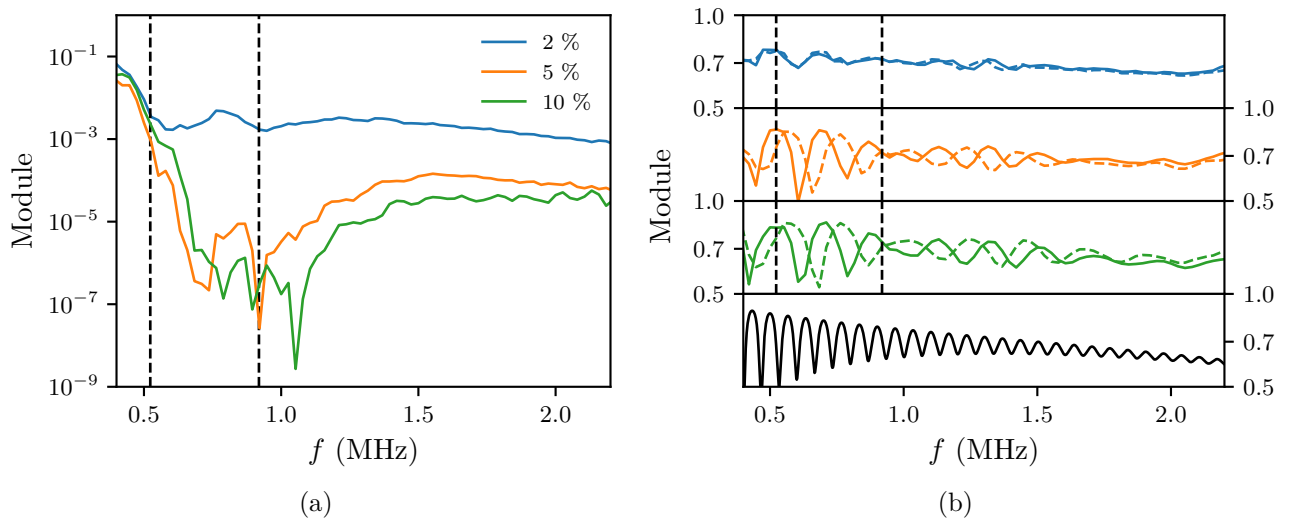


Figure 4.21 – Modules des coefficients (a) \mathcal{T}^2 et (b) \mathcal{R}_1 (en trait plein) et \mathcal{R}_2 (en tirets), obtenus pour des échantillons de type B chargés à différentes fractions volumiques selon 7 plans de billes. La courbe noire représente le module du coefficient de réflexion théorique d'un échantillon d'époxy d'épaisseur 8,77mm. Les tirets noirs représentent les fréquences de résonances en translation f_t et en rotation f_7 .

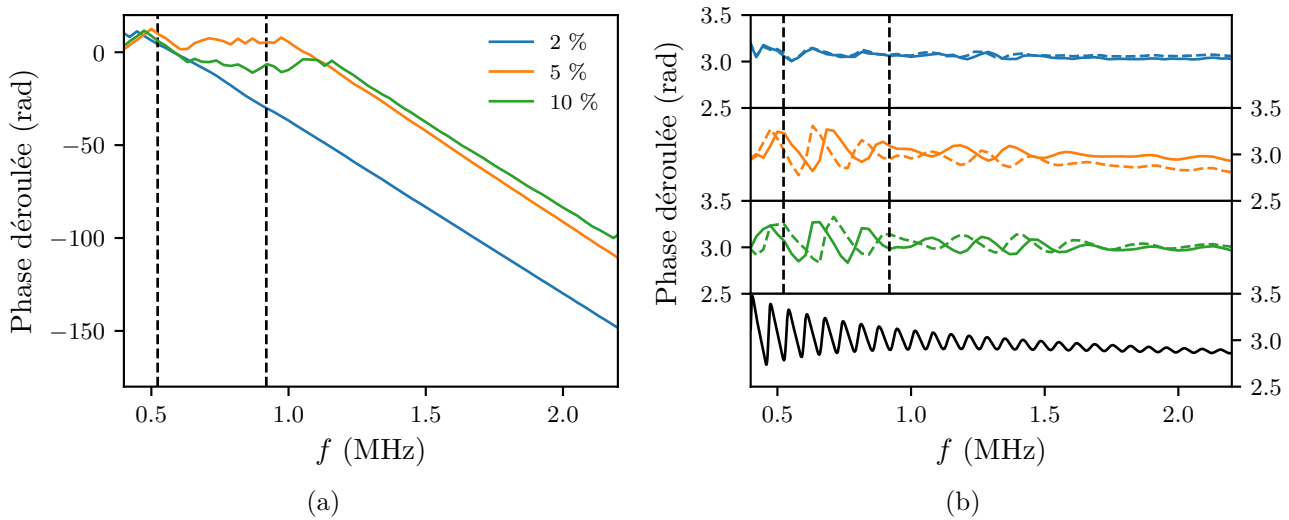


Figure 4.22 – Phases déroulées des coefficients (a) \mathcal{T}^2 et (b) \mathcal{R}_1 (en trait plein) et \mathcal{R}_2 (en tirets), obtenus pour des échantillons de type B chargés à différentes fractions volumiques selon 7 plans de billes. La courbe noire représente la phase du coefficient de réflexion théorique d’un échantillon d’époxy d’épaisseur 8,77mm. Les tirets noirs représentent les fréquences de résonances en translation f_t et en rotation f_r .

Comme précédemment, les modules des coefficients de transmission diminuent lorsque la concentration de billes augmente. Ces modules présentent de nouveau les signatures des résonances avec deux creux qui sont cependant mal définis et très bruités pour les échantillons chargés à 5% et 10%. Les coefficients de réflexion ont une nouvelle fois des formes similaires à celles observées sur les figures 4.19 et 4.20.

La signature de la diffusion par les billes n’est pas facilement identifiable sur les coefficients de réflexion des figures précédentes. Les figures 4.21 et 4.22 présentent le coefficient de réflexion théorique d’un échantillon d’époxy pur d’épaisseur 8,77 mm (la moyenne des épaisseurs des échantillons B1, B6 et B13). La rhéologie de l’époxy est celle présentée partie 3.4.2 et le modèle utilisé est le modèle d’interférence multi-couche présenté partie 3.2.1. La nette différence avec les résultats des échantillons chargés montre que les coefficients de réflexion des échantillon de type B contiennent bien des informations sur la diffusion par les billes. En effet, la largeur fréquentielle d’une oscillation de Fabry-Pérot dépend des épaisseurs mises en jeu dans l’échantillon. Plus l’échantillon est épais, plus ces oscillations sont rapprochées. Les oscillation visibles systématiquement sur les coefficients de réflexion des échantillons chargés pour des fréquences inférieures à 1 MHz, sont plus larges que celles proposées par un échantillon d’époxy pur. Elles témoignent alors de l’effet des billes sur la propagation. Cependant, aucun effet significatif aux fréquences de résonances en translation et rotation n’est observable sur les coefficients de réflexion.

Les observations faites sur les figures 4.19, 4.20, 4.21 et 4.22 montrent alors la sensibilité des coefficients de réflexion vis-à-vis du nombre de plans chargés et de la concentration. Bien qu’ils présentent les signatures des résonances de billes, les coefficients de transmission des échantillons de type B sont bien plus bruités que ceux des échantillons de type A. Ces résultats renforcent l’idée de n’exploiter que les coefficients de réflexion issus des mesures sur les échantillons de type B.

4.3 Extraction des paramètres effectifs

Une fois les coefficients de transmission et de réflexion acquis, les paramètres effectifs des échantillons sont extraits par la résolution du problème inverse similaire à celui présenté dans la partie 3.2.2. Comme les oscillations de Fabry-Pérot ne sont pas visibles dans la plupart des mesures, la fonction erreur (3.21) est minimisée sur 3 points uniquement et non pas sur la longueur d'une oscillation. Les modèles multi-couches utilisés considèrent que les échantillons sont constitués de plusieurs couches de matériaux homogènes dans lesquels se propagent des ondes. Les paramètres extraits correspondent alors directement aux paramètres du milieu effectif qui rend le mieux compte de la propagation des ondes cohérentes dans les dispersions de billes. Les paramètres effectifs accessibles par cette technique sont le nombre d'onde k_{eff} et la masse volumique ρ_{eff} . Le nombre d'onde effectif est défini par

$$k_{\text{eff}} = \frac{\omega}{c_{\text{eff}}} + j\alpha_{\text{eff}}, \quad (4.11)$$

où sa partie réelle dépend de la vitesse de phase c_{eff} et sa partie imaginaire de l'atténuation α_{eff} . La masse volumique effective est également complexe et définie par la relation

$$\rho_{\text{eff}} = \rho'_{\text{eff}} + j\rho''_{\text{eff}}. \quad (4.12)$$

Le module de cisaillement effectif peut ensuite être obtenu par

$$G_{\text{eff}} = \frac{\omega^2 \rho_{\text{eff}}}{k_{\text{eff}}^2}. \quad (4.13)$$

4.3.1 Modèle d'interférences multi-couches

Le modèle d'interférence à cinq couches utilisé pour résoudre le problème inverse dans le chapitre 3 n'est pas adapté aux échantillons car il revient à considérer la totalité de l'échantillon comme un milieu homogène. En effet, les échantillons fabriqués disposent de deux couches d'époxy non chargées d'épaisseurs respectives d_1 et d_3 . Les billes sont réparties uniquement dans une épaisseur $d_2 = d - d_1 - d_3$. Deux nouveaux modèles d'ondes planes unidimensionnels sont alors mis en place pour les deux types d'échantillon à disposition.

4.3.1.1 Modèle à 7 couches

Un premier modèle d'interférences à sept couches (ligne à retard - couplant - epoxy - epoxy chargé - epoxy - couplant - ligne à retard) est utilisé de manière à dissocier les zones de l'échantillon sondées avec et sans billes. Son application est en premier lieu possible car les caractéristiques de l'époxy sont parfaitement connues dans la gamme de fréquence étudiée. Cependant les modèles d'interférence unidimensionnels sont établis pour des couches ayant des interfaces clairement définies. Ce n'est pas le cas dans le système étudié ici car il n'y a pas de réelles interfaces entre les couches d'époxy libres et les couches d'époxy chargées. La solution idéale serait de réussir à quantifier l'épaisseur effective du milieu diffusant mais cela est difficilement réalisable au préalable de la mesure. Une hypothèse simple est alors de considérer que l'épaisseur effective de la dispersion de billes correspond à l'épaisseur du volume où se trouve la totalité des billes. Il s'agit donc de l'épaisseur d_2 définie par la distance entre les deux plans de billes extrêmes. Finalement, ce modèle peut être appliqué aux deux types d'échantillons.

Le modèle à sept couches est équivalent au modèle 5 couches présenté dans le chapitre 3, avec une couche supplémentaire au milieu du système. La figure 4.23 présente un schéma du système unidimensionnel du modèle développé ci dessous.

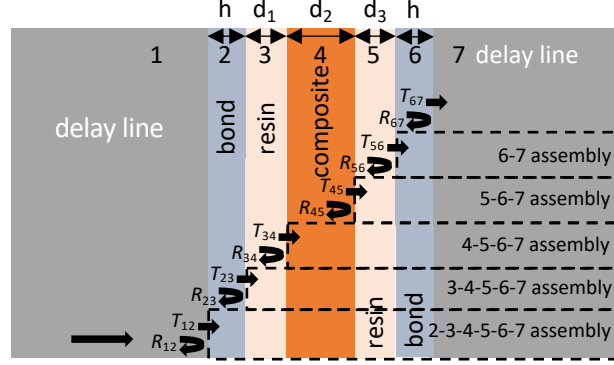


Figure 4.23 – Géométrie et notations du modèle d'interférence 1D à 7 couches

Par symétrie centrale, les couches 1 et 7, 2 et 6, et 3 et 5 ont des propriétés identiques, ce qui conduit aux équivalences :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{12} = r_{76} = -r_{21} = -r_{67}, \\ t_{12} = t_{76}, \\ t_{21} = t_{67}, \\ r_{23} = r_{65} = -r_{32} = -r_{56}, \\ t_{23} = t_{65}, \\ t_{32} = t_{56}, \\ r_{34} = r_{54} = -r_{43} = -r_{45}, \\ t_{34} = t_{54}, \\ t_{43} = t_{45}. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

r_{nm} et t_{nm} sont définis par l'équation (3.9) du chapitre 3. Sans développer les calculs, le coefficient de réflexion à gauche du dispositif est

$$\mathcal{R}_{th1} = r_{12} + \frac{t_{12}R_{23}t_{21}e^{2jk_2h}}{1 - r_{21}R_{23}e^{2jk_2h}}, \quad (4.15)$$

avec

$$R_{23} = r_{23} + \frac{t_{23}R_{34}t_{32}e^{2jk_3d_1}}{1 - r_{32}R_{34}e^{2jk_3d_1}}, \quad (4.16)$$

$$R_{34} = r_{34} + \frac{t_{34}R_{45}t_{43}e^{2jk_4d_2}}{1 - r_{43}R_{45}e^{2jk_4d_2}}, \quad (4.17)$$

$$R_{45} = r_{45} + \frac{t_{45}R_{56}t_{54}e^{2jk_5d_3}}{1 - r_{54}R_{56}e^{2jk_5d_3}}, \quad (4.18)$$

$$R_{56} = r_{56} + \frac{t_{56}R_{67}t_{65}e^{2jk_6h}}{1 - r_{65}R_{67}e^{2jk_6h}}, \quad (4.19)$$

$$R_{67} = r_{67}. \quad (4.20)$$

4.3 Extraction des paramètres effectifs

Le coefficient de transmission de la droite vers la gauche du dispositif est

$$\mathcal{T}_{th2} = \frac{t_{21}T_{32}e^{jk_2h}}{1 - r_{21}R_{23}e^{2jk_2h}}, \quad (4.21)$$

avec

$$\mathcal{T}_{32} = \frac{t_{32}T_{43}e^{jk_3d_1}}{1 - r_{32}R_{34}e^{2jk_3d_1}}, \quad (4.22)$$

$$\mathcal{T}_{43} = \frac{t_{43}T_{54}e^{jk_4d_2}}{1 - r_{43}R_{45}e^{2jk_4d_2}}, \quad (4.23)$$

$$\mathcal{T}_{54} = \frac{t_{54}T_{65}e^{jk_5d_3}}{1 - r_{54}R_{56}e^{2jk_5d_3}}, \quad (4.24)$$

$$\mathcal{T}_{65} = \frac{t_{65}T_{76}e^{jk_6h}}{1 - r_{65}R_{67}e^{2jk_6h}}, \quad (4.25)$$

$$\mathcal{T}_{76} = t_{76}. \quad (4.26)$$

Les coefficients de réflexion à droite du dispositif \mathcal{R}_{th2} et le coefficient de transmission de la gauche vers la droite \mathcal{T}_{th1} ne sont pas écrits ici. Ce modèle présente l'avantage de pouvoir tenir compte du fait que les distances d_1 et d_3 ne sont pas nécessairement identiques.

4.3.1.2 Modèle 4 couches

Dans le cas des échantillons B, l'amplitude des ondes transmises peut devenir pratiquement nulle (voir sur la figure 4.13). De plus, aucun écho dû à l'interface epoxy-couplant-ligne à retard ne revient sur le transducteur opposé. Dans cette situation, le système peut alors être décrit par un modèle de propagation à 4 couches ligne à retard-couplant-époxy-époxy chargée, où l'époxy chargée est un milieu semi-infini. La figure 4.24 présente un schéma du système unidimensionnel du modèle développé ci-dessous. Les épaisseurs des couches libres d'époxy sont d_1 à gauche et d_3 à droite.

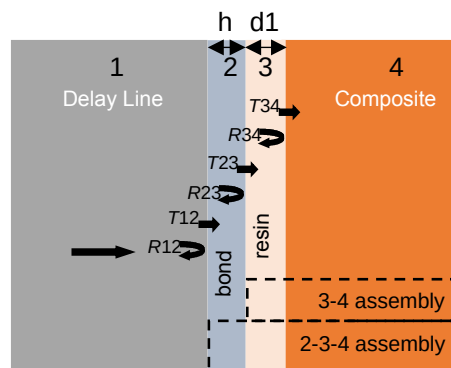


Figure 4.24 – Géométrie et notations du modèle d'interférence 1D à 4 couches.

Ce modèle aboutit uniquement à un coefficient de réflexion défini par l'équation (4.15), avec d_1 ou d_3 dans (4.16) si la réflexion est traitée respectivement à gauche ou à droite et $R_{34} = r_{34}$.

4.3.2 Sensibilité des coefficients de réflexion et de transmission

Les échantillons de types A et B sont exploités dans la suite respectivement pour la transmission et la réflexion. Il est alors utile de vérifier la sensibilité des coefficients de réflexion et de transmission vis-à-vis des paramètres effectifs inconnus. Pour cela, les variations relatives des coefficients \mathcal{R} et \mathcal{T}^2 en fonction des variations relatives des paramètres effectifs sont étudiées. Par exemple, la sensibilité de \mathcal{R} à la vitesse effective est déterminée en évaluant le rapport

$$\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_0}(\epsilon) = \frac{\mathcal{R}(c_{\text{eff}}(1 + \epsilon), \alpha_{\text{eff}}, \rho'_{\text{eff}}, \rho''_{\text{eff}})}{\mathcal{R}(c_{\text{eff}}, \alpha_{\text{eff}}, \rho'_{\text{eff}}, \rho''_{\text{eff}})}. \quad (4.27)$$

ϵ est un paramètre fixé arbitrairement à 1 %. Cette analyse de sensibilité est menée en utilisant les coefficients théoriques obtenus par le modèle à sept couches. Les valeurs initiales des paramètres effectifs pour calculer \mathcal{R}_0 et \mathcal{T}_0^2 sont fixées avec des valeurs représentatives obtenues dans la suite : $c_{\text{eff}} = 1200 \text{ m.s}^{-1}$, $\alpha_{\text{eff}} = 1500 \text{ m}^{-1}$, $\rho'_{\text{eff}} = 1100 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\rho''_{\text{eff}} = 500 \text{ kg.m}^{-3}$. Les distances d_1 , d_2 et d_3 sont fixées de manière à correspondre à des épaisseurs représentatives d'échantillons de type A ou B. Pour l'analyse des échantillons de type A, les épaisseurs sont $d_1 = d_3 = 0,5 \text{ mm}$ et $d_2 = 1,5 \text{ mm}$ et pour l'analyse des échantillons de type B, elles ont pour valeurs $d_1 = d_3 = 3 \text{ mm}$ et $d_2 = 3,5 \text{ mm}$.

La figure 4.25 présente les variations relatives du module et de l'argument de \mathcal{T}^2 obtenus à 1 MHz avec les paramètres initiaux précédents pour les épaisseurs représentatives des échantillons A. La valeur absolue de la pente des droites présentées définit la sensibilité des coefficients à la variation des paramètres mis en jeu. Plus la pente est forte plus le coefficient est sensible au paramètre étudié. Dans ce cas, il est observable que le module de \mathcal{T}^2 est plus affecté par une variation de l'atténuation et que son argument est plus affecté par une variation de la vitesse.

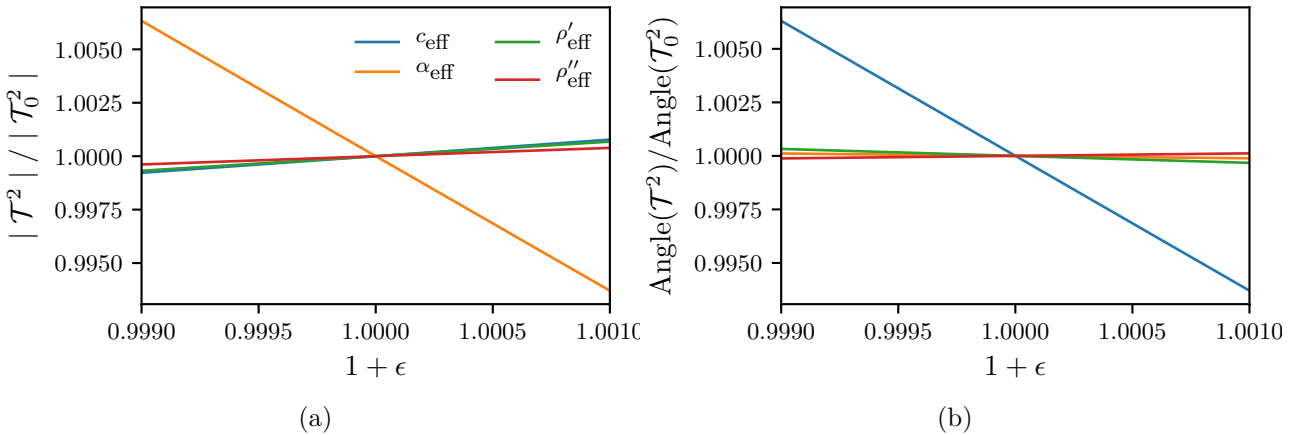


Figure 4.25 – Variations relatives (a) du module et (b) de l'argument de \mathcal{T}^2 en fonction des variations relatives des paramètres initiaux.

La figure 4.25 ne représente la sensibilité de \mathcal{T}^2 qu'à une seule fréquence. La figure 4.26 montre la variation de la valeur absolue des pentes des droites de la figure 4.25 en fonction de la fréquence. A chaque fréquence, le module de \mathcal{T}^2 est plus sensible à l'atténuation qu'aux autres paramètres et son argument est plus sensible à la vitesse. Ces résultats encouragent alors à extraire le nombre d'onde effectif (4.11) du coefficient de transmission obtenu avec les échantillons de type A.

4.3 Extraction des paramètres effectifs

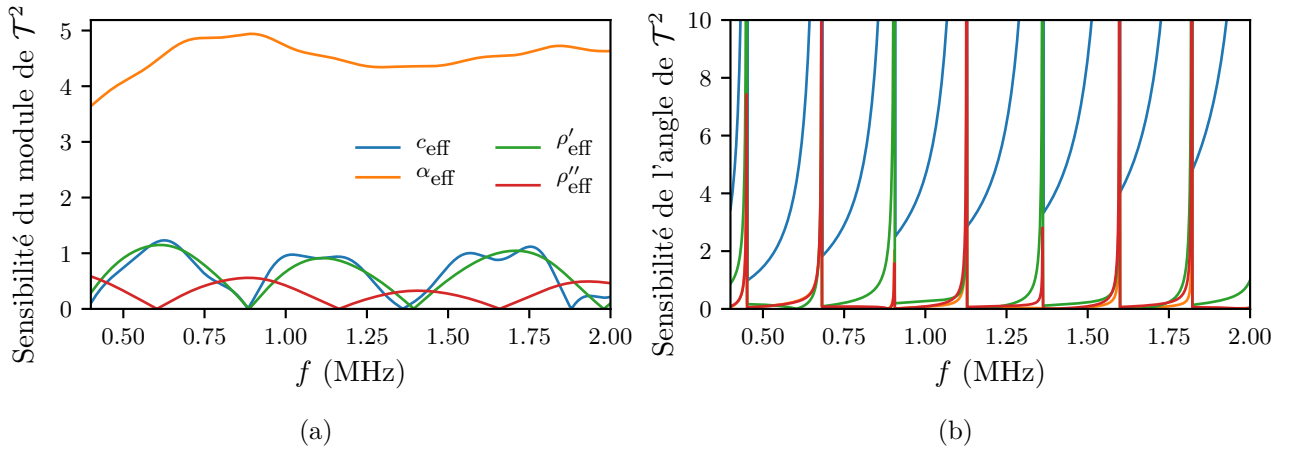


Figure 4.26 – Variations de la sensibilité a) du module et (b) de l'argument de \mathcal{T}^2 en fonction de la fréquence.

De même manière, la figure 4.27 présente les variations de la sensibilité du module et de l'argument de \mathcal{R} en fonction de la fréquence avec les paramètres initiaux précédents pour les épaisseurs représentatives des échantillons B. La sensibilité étant périodique en fréquence, la figure 4.27 illustre les courbes sur une seule période. La sensibilité du module et de l'argument de \mathcal{R} sont similaires. Le coefficient de réflexion présente une sensibilité presque identique à la vitesse et à la partie réelle de la masse volumique. Le coefficient de réflexion est légèrement plus sensible à la partie imaginaire de la masse volumique qu'à l'atténuation. \mathcal{R} est donc sensible à ρ' et ρ'' . La détermination du nombre d'onde effectif étant effectuée par l'analyse en transmission sur les échantillons de type A, les échantillons de type B sont alors étudiés dans un second temps afin d'extraire la masse volumique effective de la dispersion de billes.

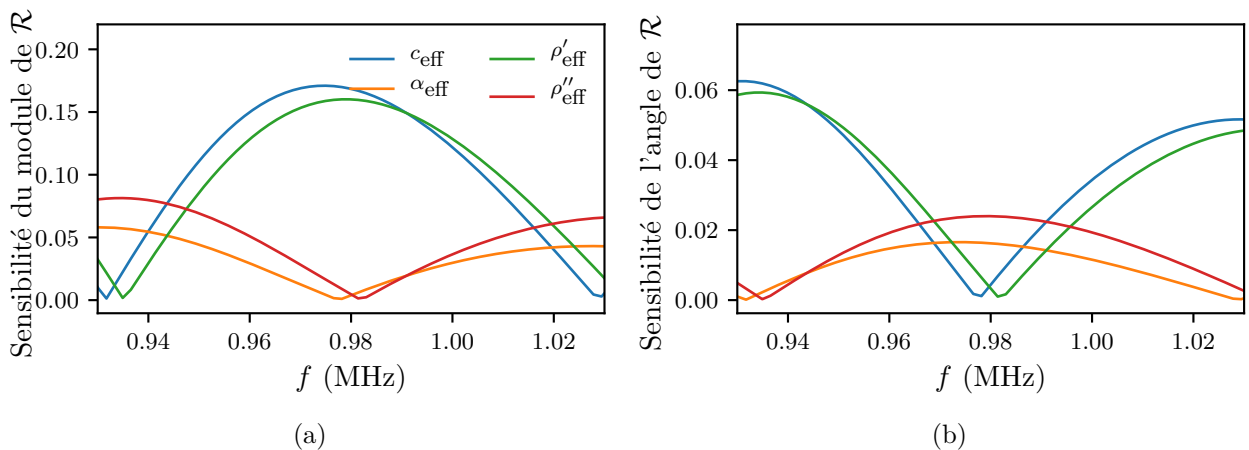


Figure 4.27 – Variation de la sensibilité (a) du module et (b) de l'argument de \mathcal{R} en fonction de la fréquence.

Finalement, la figure 4.28 présente un schéma résumant l'extraction des paramètres effectifs à une concentration volumique de billes donnée. Tout d'abord, le nombre d'onde effectif est extrait grâce à la résolution du problème inverse appliqué sur le coefficient de transmission de l'échantillon de type A. Cela est fait en utilisant le modèle 7 couches et en considérant que la masse volumique de la dispersion de bille correspond à celle de la matrice pure. La masse volumique effective est ensuite extraite grâce à la résolution du problème inverse appliqué sur le coefficient de réflexion à gauche et à droite de

l'échantillon de type B. Cela est fait en utilisant le modèle 4 ou 7 couches et le nombre d'onde effectif obtenu précédemment. Pour finir, le module de cisaillement effectif est calculés avec l'équation (4.13)

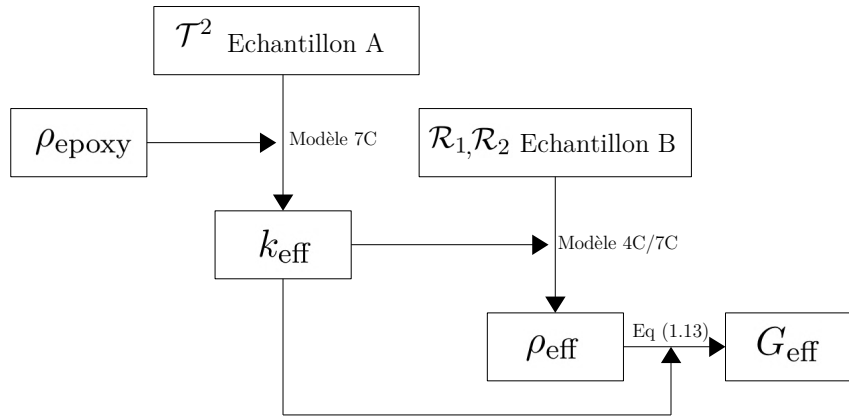


Figure 4.28 – Schéma de la procédure d'extraction des paramètres effectifs.

4.3.3 Vitesse et atténuation effectives

La vitesse et l'atténuation effective sont solutions du problème inverse appliqué aux coefficients de transmission des échantillons de type A en utilisant le modèle d'interférences à sept couches. La fonction erreur (3.21) est évaluée dans le plan complexe $(c_{\text{eff}}, \alpha_{\text{eff}})$. Le coefficient de transmission des échantillons de type A étant peu sensible à la masse volumique, celle-ci est prise égale à la masse volumique de l'époxy pur. Dans la suite, les barres d'incertitudes représentent l'incertitude due à la résolution du problème inverse cumulée avec l'incertitude de mesure de l'épaisseur de l'échantillon est $30 \mu\text{m}$.

4.3.3.1 Méthode d'identification de la branche de solution valide

La résolution du problème inverse aboutit à plusieurs solutions. La sélection de la branche de solution physique est toutefois moins évidente pour les matériaux chargés en billes, qui sont très dispersifs, que pour des matériaux homogènes. Tout d'abord, déterminer des temps de vol à la fréquence centrale des transducteurs se montre complexe car les échos sont déformés. En effet, la fréquence centrale des capteurs est très proche de celle de la résonance en rotation. Utiliser des échantillons de différentes épaisseurs est envisageable, mais compliqué car augmenter l'épaisseur d'un échantillon chargé revient à ajouter un ou plusieurs plans de bille. De ce fait, l'amplitude de l'onde peut se retrouver grandement réduite et la comparaison difficile.

Une solution consiste alors à tenir compte des modèles développés au chapitre 1. A hautes fréquences la plupart des résultats théoriques présentés dans le chapitre 1 sont en accord [105]: les paramètres effectifs du milieu chargé en billes tendent vers les paramètres de la matrice de propagation. Compte tenu de cette observation, la branche de solution du problème inverse valide est alors celle qui se rapproche des valeurs de l'époxy à haute fréquence. La figure 4.29 montre trois branches de

4.3 Extraction des paramètres effectifs

solution notées A, B et C dans les plans (f, c_{eff}) et (f, α_{eff}) , obtenues avec l'échantillon A8, *i.e.* avec le coefficient de transmission représenté en vert des figures 4.15 et 4.16. Sur cette figure, les atténuations des trois solutions ont la même forme avec des amplitudes légèrement différentes. Toutefois, seule la vitesse de la branche A tend vers celle de l'époxy à haute fréquence. La branche A est alors considérée comme la solution valide.

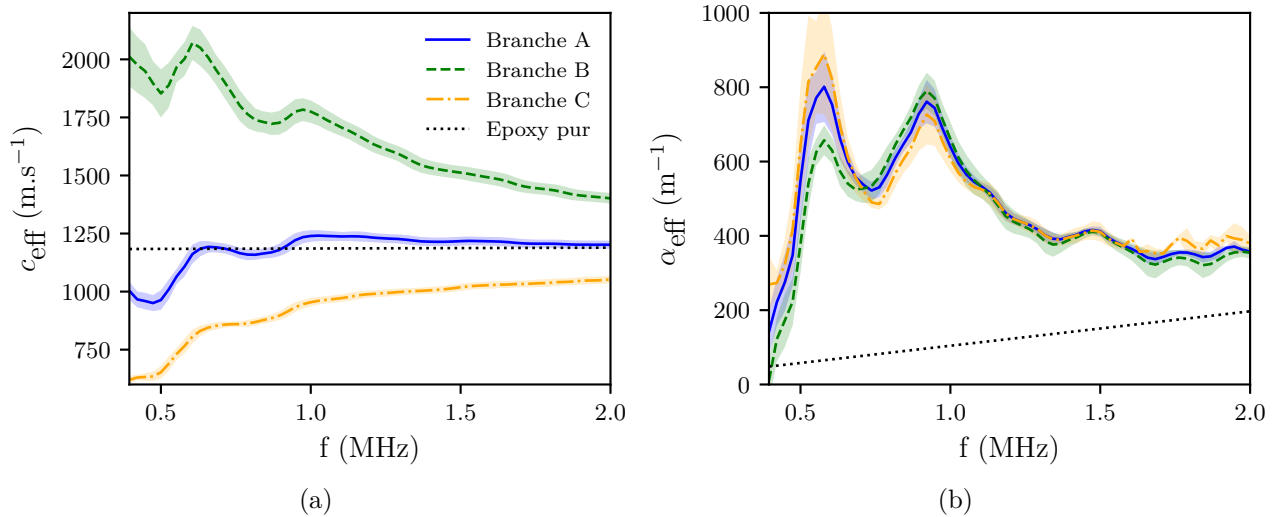


Figure 4.29 – Branches de solution (a) dans le plan (f, c_{eff}) et (b) dans le plan (f, α_{eff}) pour un échantillon chargé à 2% selon 3 plans de billes.

4.3.3.2 Influence du nombre de plans de billes

La figure 4.30 présente les vitesses et atténuations effectives obtenues avec les échantillons A6 à A9, *i.e.* avec les coefficients de transmission des figures 4.15 et 4.16. L'incertitude de la vitesse est très importante dans le cas de l'échantillon constitué d'un unique plan de billes et n'est pas présentée par souci de lisibilité. Toutes les courbes pour un nombre de plan supérieur à 1 affichent des comportements similaires, notamment pour les échantillons à 3 et 4 plans qui sont presque identiques. Des pics d'atténuation et des dispersions de vitesse de phase se situent aux fréquences de résonance en translation et en rotation. Ces effets apparaissent donc comme les signatures des résonances de corps rigide, respectivement en translation et en rotation, des billes dans la matrice de propagation. Ces résultats constituent la première mise en évidence expérimentale de la résonance des particules en rotation. L'échantillon monoplan présente lui aussi des effets aux fréquences de résonances mais avec des amplitudes très différentes des autres échantillons. Cela est probablement dû au fait que l'hypothèse de milieu effectif pour une dispersion de billes alignées sur un même plan est discutable. En effet, l'épaisseur d_2 du milieu effectif correspond pour cet échantillon au diamètre d'une unique bille.

Obtenir des comportements et des amplitudes similaires pour des échantillons à différents nombres de plans de billes tend à valider la capacité du dispositif multi-couches à mesurer des ondes de cisaillement cohérentes transmises à travers ce type de système. De plus, ce résultat montre que l'hypothèse de régime propagatif est valable pour ce type de matériau et pour un faible nombre de plans de billes. Finalement les effets observés à la résonance en translation sont les mêmes que ceux obtenus par Duranteau [35] et Kinra [31] avec une onde longitudinale incidente, présentés au chapitre 1.

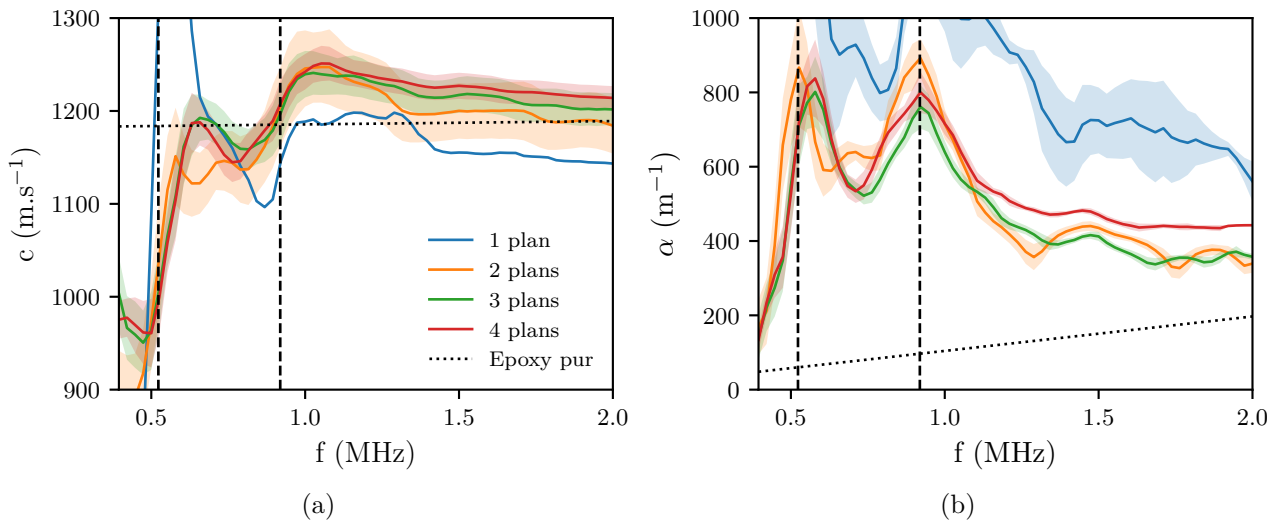


Figure 4.30 – (a) Vitesses et (b) atténuations des ondes de cisailment cohérentes pour des échantillons chargés à 2% selon différents nombres de plans de billes. Les tirets noirs représentent les fréquences théoriques f_t et f_r .

4.3.4 Masse volumique effective

La masse volumique effective définie par l'équation (4.12) est extraite des coefficients de réflexion obtenus avec les échantillons de type B. La fonction erreur (3.21) est alors évaluée dans le plan complexe ($\rho'_{\text{eff}}, \rho''_{\text{eff}}$). La partie 4.3.2 a montré que les coefficients de réflexion des échantillons de type B sont sensibles à la vitesse effective. La vitesse injectée dans le modèle d'interférence du problème inverse est alors celle obtenue par la mesure des échantillons de type A, à une concentration de billes donnée. Contrairement aux précédentes résolutions de problème inverse, celui-ci ne présente qu'une unique solution dans un domaine de masse volumique effective acceptable. Il n'est alors pas nécessaire de mettre en place de méthode permettant de sélectionner la branche de solution physique.

4.3.4.1 Influence du nombre de plans de billes

La figure 4.31 présente la masse volumique effective obtenue avec les échantillons B7 à B13, *i.e.* avec les coefficients de réflexion des figures 4.19 et 4.20. Le modèle utilisé est le modèle d'interférence 7 couches. Le modèle d'interférence 4 couches n'est pas utilisé ici car les amplitudes des ondes transmises à travers les échantillons à faible nombre de plans de bille ne sont pas négligeables. L'utilité du modèle d'interférence 4 couches est présentée dans la prochaine partie. Les barres d'incertitude des échantillons à 1, 2 et 3 plans ne sont pas présentées par souci de lisibilité. Pour un nombre de plans supérieur à 3, les résultats affichés ne dépendent pas du nombre de plans de billes. Des pics sur les parties réelles et imaginaire se situent respectivement à 0,6 et 0,7 MHz, c'est à dire à des fréquences proches des creux de transmissions observés sur les figures 4.17 et 4.19, et sont alors associés à la résonance en translation des billes. Après cette résonance la masse volumique de la dispersion oscille autour de celle de l'époxy pure. Ces oscillations sont un résidu du processus de fit et peuvent être réduites en moyennant la fonction erreur (3.22) sur un plus grand nombre de points. Moyenner sur un plus grand nombre de points a néanmoins comme effet d'augmenter la taille des barres d'incertitude. Contrairement aux figures 4.17, les figures 4.18 et 4.21 ne présentent aucun changement significatif à la fréquence de résonance en rotation.

4.3 Extraction des paramètres effectifs

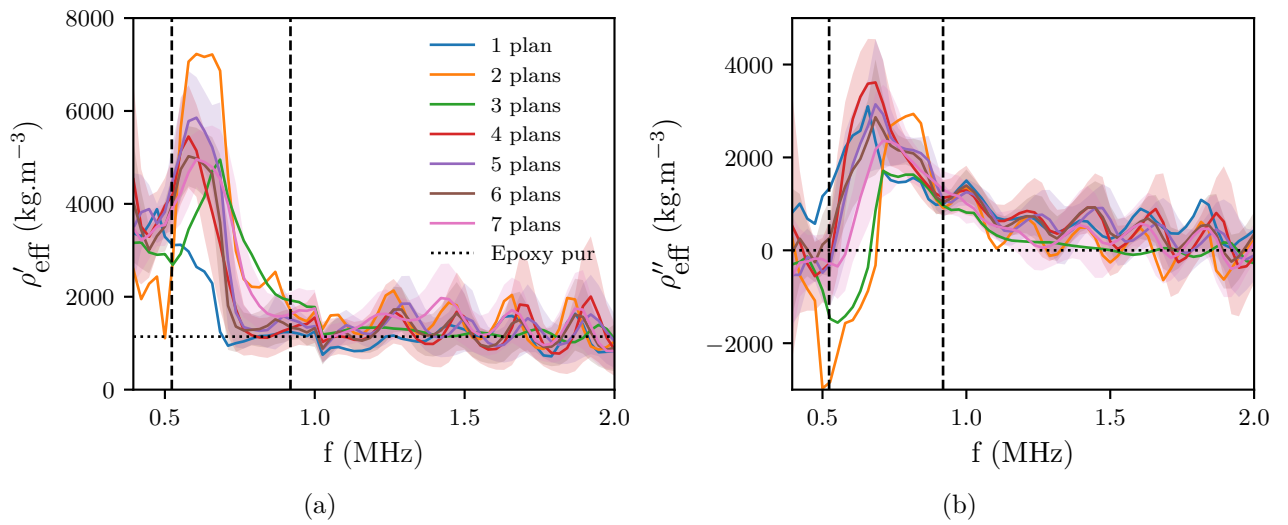


Figure 4.31 – (a) Parties réelle et (b) imaginaire des masses volumiques effectives des dispersions de billes pour des échantillons chargés à 10% selon différents nombres de plans chargés de billes. Les tirets noirs représentent les fréquences théoriques f_t et f_r .

Obtenir des comportements et des amplitudes similaires pour des échantillons à différents nombres de plans de bille tend à valider la capacité du dispositif multi-couches à mesurer des ondes de cisaillement cohérentes rétro-diffusées par ce type de système et démontre la réalité de la notion de masse volumique effective à incidence nulle.

4.3.4.2 Equivalence des modèles 4 couches et 7 couches

La figure 4.32 présente les différences relatives entre les masses volumiques effectives obtenues par les modèles 7 couches et 4 couches, présentés partie 4.3.1.

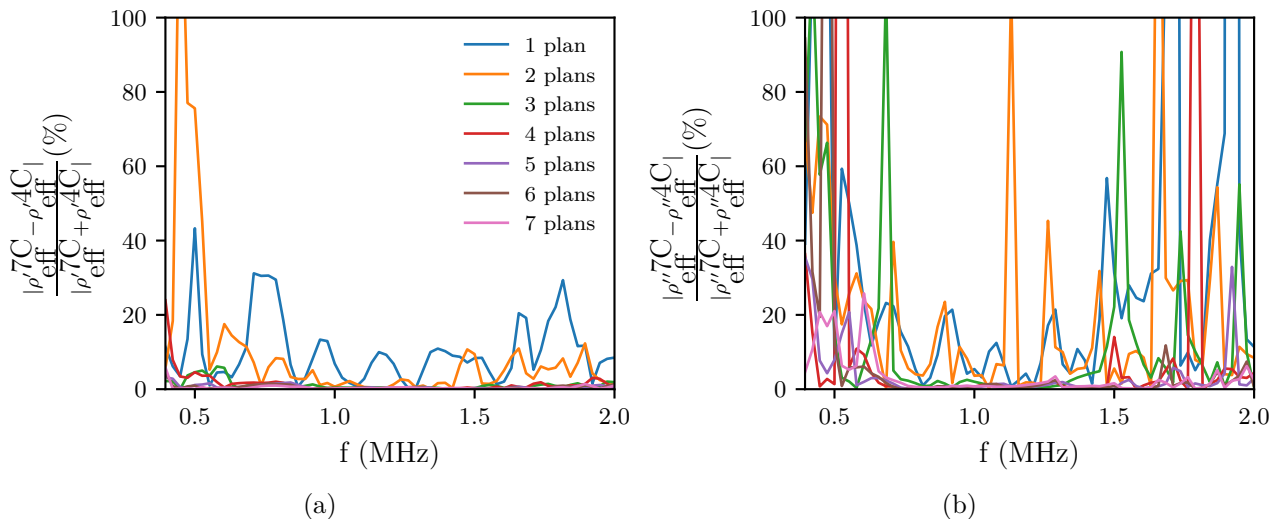


Figure 4.32 – Différences relatives des (a) parties réelles et (b) parties imaginaires des masses volumiques effectives obtenues avec les modèles d'interférence 7 couches et 4 couches, pour des échantillons chargés à 10% selon différents nombres de plans chargés de billes.

Pour les échantillons ayant un nombre de plans de billes supérieur à 3, les résultats obtenus par les deux modèles diffèrent de moins de 10%. Cela signifie que l'atténuation à travers les échantillons

à 4, 5, 6 et 7 plans chargés est si importante que les échos réfléchis par les interfaces époxy chargée-époxy et époxy-couplant-dural sont suffisamment faibles pour être négligés. Ces dispersions de billes peuvent alors être considérées comme semi-infinies. Ce résultat est valide pour la concentration de billes étudiée ici de 10%. Il est probable que l'accord entre les deux modèles d'interférences s'obtienne avec un nombre de plans chargés supérieur pour une concentration de billes inférieure.

4.3.4.3 Sensibilité aux épaisseurs

La mesure de masse volumique effective est réalisable car les épaisseurs d'époxy non chargées sont parfaitement connues et maîtrisées. La figure 4.33 présente les masses volumiques obtenues avec l'échantillon B13 en faisant varier l'épaisseur $d_1 = 2,85$ mm utilisée dans le modèle d'interférence d'une erreur arbitraire de $\pm\Delta d_1 = 0,1$ mm. Les épaisseurs d_3 sont ensuite calculées par la méthode décrite dans la partie 4.2.1.2. Les courbes obtenues affichent des comportements similaires mais les amplitudes et positions des pics sont très différentes. Une mauvaise connaissance des épaisseurs d_1 et d_3 engendre alors une mauvaise quantification des variations de masses volumiques effectives.

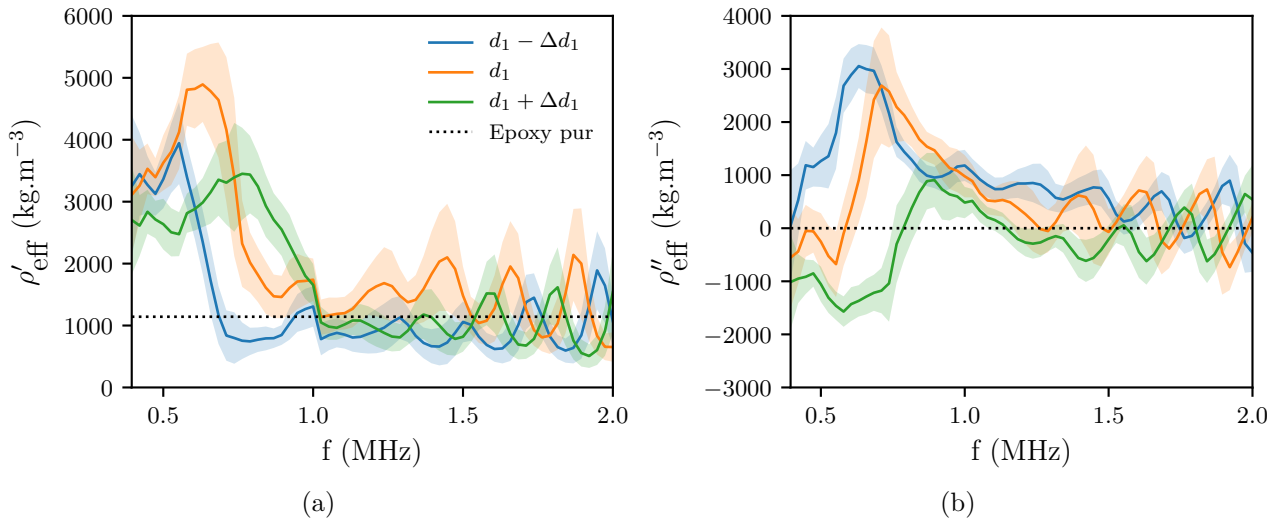


Figure 4.33 – (a) Partie réelle et (b) partie imaginaire de la masse volumique effective de la dispersion de bille pour un échantillon chargé à 10% en faisant varier d_1 .

4.4 Module de cisaillement effectif

Le module de cisaillement effectif, défini par l'équation 4.13, est calculé après avoir extrait k_{eff} des échantillons de type A et ρ_{eff} des échantillons de type B. La figure 4.34 présente les modules de cisaillement effectifs calculés avec les paramètres effectifs extraits des échantillons A1 et B1, A10 et B6 et A12 et B13. Les deux échantillons d'une paire sont fabriqués en utilisant le même dispositif de chute de billes. Les vitesses, atténuations et masses volumiques effectives de ces échantillons sont données dans le chapitre 5. Ici, un pic est observé sur la partie réelle du module de cisaillement pour des concentrations de billes de 5% et 10%, associé à la résonance en translation des billes. A ces mêmes fréquences, la partie imaginaire de la dispersion concentrée à 5% est positive et celle la dispersion concentrée à 10% est négative. La dispersion chargée à 2% présente des valeurs proches de celles de l'époxy.

4.5 Conclusion

Il est néanmoins difficile d'interpréter ces résultats dans l'absolu. En effet, les pics des parties réelles ont des amplitudes comparables aux oscillations ayant lieu à plus hautes fréquences. De plus, les incertitudes sont très importantes. Cela est dû au fait que le module de cisaillement effectif est issu de 2 mesures de paramètres effectifs extraits de 2 échantillons différents. Les incertitudes de mesures sont alors cumulées. De plus, les résultats peuvent être faussés si les fractions volumiques des échantillons de type A et de type B sont différentes comme cela peut être le cas ici pour les échantillons A10 et B6 par exemple. La plupart des tentatives faites pour mesurer les modules de cisaillement effectifs se sont révélées infructueuses. Dans la suite de ce manuscrit, le module de cisaillement effectif n'est alors pas calculé.

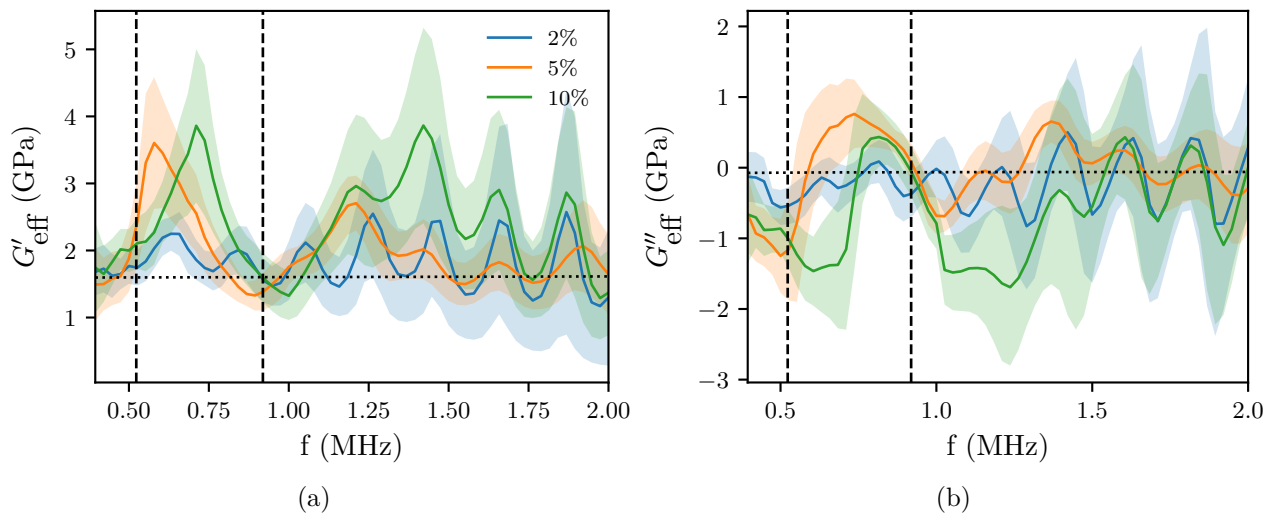


Figure 4.34 – (a) Parties réelles et (b) parties imaginaires des modules de cisaillement effectifs des dispersions de billes selon différentes concentrations volumiques. Les tirets noirs représentent les fréquences théoriques f_t et f_r .

4.5 Conclusion

L'enjeu du travail présenté dans ce chapitre est de réussir à fabriquer des échantillons faits de dispersions aléatoires de billes denses dans une résine époxy visco-élastique. Obtenir une répartition de billes aléatoire dans la profondeur d'un échantillon et pas uniquement sur un plan paraît simple mais présente plusieurs défis. En effet, le procédé de fabrication couche par couche de l'échantillon induit une infinité de combinaisons possibles de nombre de billes dans un plan et d'épaisseurs des couches d'époxy entre deux plans de billes pour atteindre une fraction volumique de billes désirée. Ces deux paramètres sont alors fixés de manière à égaliser la distance entre deux billes plus proches voisines sur un même plan et sur 2 plans consécutifs. De plus, il est possible d'intervenir sur le rayon d'exclusion entre les billes d'un même plan afin d'homogénéiser la distribution aléatoire. Finalement, deux types d'échantillons sont fabriqués. Il s'agit respectivement d'échantillons "fins" (type A) où "épais" (type B) où la dispersion de billes se situe entre deux couches "fines" ou "épaisses" d'époxy non chargées de part et d'autre de l'échantillon.

Ces deux types d'échantillons présentent chacun des avantages dans l'optique de les sonder avec le dispositif de mesure sandwich. Les échantillons de type A permettent d'obtenir une bonne évalua-

tion du coefficient de transmission des ondes à travers les plans de billes. Les échantillons de type B permettent quant à eux de capter la rétro-diffusion cohérente d'une onde incidente par les plans de billes. Une étude des coefficients de réflexion et transmission en fonction du nombre de plans de billes et de la concentration de diffuseurs a ensuite permis de mettre en évidence le caractère cohérent des ondes acquises par le dispositif. La résolution du problème inverse est adaptée avec entre autres un nouveau modèle d'interférences unidimensionnel afin d'extraire des paramètres effectifs. Les vitesses et atténuations sont alors extraites des coefficients de transmission des échantillons de type A et les masses volumiques effectives sont obtenues grâce aux coefficients de réflexion des échantillons de type B. Les signatures des résonances locales sont identifiées sur les paramètres effectifs extraits. En effet, la résonance des billes en translation est observable avec une forte dispersion sur la vitesse, un pic d'atténuation et un pic sur la masse volumique effective. De plus, la résonance en rotation des billes sous l'action d'une onde transverse incidente a été observée pour la première fois. Son influence est la même que celle de la résonance en translation sur la vitesse et l'atténuation mais est nulle sur la masse volumique effective.

La fabrication de matériaux solides multi-diffusants ainsi que l'évaluation de leurs paramètres effectifs sont désormais parfaitement maîtrisées. Il s'agit désormais d'étudier plus en détail l'influence des résonances locales en faisant varier les paramètres de la dispersion de billes tels que la concentration, le rayon d'exclusion ou encore le matériau constituant des billes.

Chapitre 5

Paramètres effectifs et influence de la microstructure

Un des principaux objectifs de l'étude de matériaux hétérogènes est de réussir à déterminer leurs comportements effectifs. Il s'agit en l'occurrence de définir des paramètres mécaniques dépendant de la fréquence d'excitation caractérisant ces matériaux s'ils étaient considérés comme homogènes [106]. En basse fréquence, la longueur d'onde étant bien plus grande que la taille caractéristique des diffuseurs, les ondes sont très peu dispersives et les paramètres effectifs sont obtenus par des techniques d'homogénéisation statiques. Lorsque la longueur d'onde se rapproche de la taille caractéristique des obstacles, des résonances de diffuseurs peuvent être activées et les ondes deviennent alors très dispersives. Les techniques d'homogénéisation statiques ne suffisent alors plus et des techniques d'homogénéisation dynamiques, basées sur la théorie de la diffusion multiple par exemple, doivent être appliquées.

Suite aux travaux de Veselago [37] puis du Pendry [38], l'obtention de paramètres effectifs non ordinaires a longtemps été un but visé par les recherches menées sur les métamatériaux. Un arrangement périodique de particules d'acier encapsulées d'une coque en caoutchouc enfouies dans une matrice époxy a été une des premières réalisations à présenter une bande d'arrêt dans le domaine des basses fréquences [39]. Cet effet est dû à la résonance sub-longueur d'onde du cœur dense dans sa coque souple. Divers modèles théoriques ont démontré que cette résonance induit une masse volumique effective négative autour de la fréquence de résonance [41]. Un module de compression effectif négatif a été obtenu plus tard par Fang *et al.* avec des chaînes de résonateurs de Helmholtz [107] dans un guide d'onde. Des matériaux plus complexes couplant deux types de résonateurs, peuvent également afficher simultanément deux paramètres effectifs négatifs [108], et ainsi présentent une bande d'arrêt (ces matériaux sont communément appelés "doubles négatifs"). Ce phénomène de double négativité peut aussi être atteint en exploitant différentes résonances d'un même diffuseur [109]. Cependant ces types de matériaux périodiques sont difficilement applicables aux ondes élastiques dans le domaine ultrasonore compte tenu des problèmes de miniaturisation et de la forte dissipation dans les matériaux mous (élastomères).

Des paramètres effectifs négatifs peuvent être obtenus dans des matériaux composites aléatoires ou non en exploitant des résonances d'inclusions de petite taille par rapport à la longueur d'onde. Par exemple, les matériaux bulleux produisent une très forte atténuation engendrée par la résonance mo-

nopolaire sub-longueur d'onde similaire à la résonance de Minnaert [25] et sont décrits théoriquement comme ayant une compressibilité effective négative. La combinaison des résonances de Mie monopolaire et dipolaire de billes de silicone poreux dans un gel acqueux a mis en lumière la présence d'un indice de réfraction négatif autour des fréquences de résonance [43]. Plus récemment, Lanoy *et al.* ont obtenu une double négativité en utilisant une dispersion de paires de bulles corrélées qui profite de la résonance dipolaire due au mouvement en opposition de phase des bulles [110]. Ces mesures concernent exclusivement les ondes longitudinales. Dans ces études, les phénomènes observés s'accompagnent d'une intense atténuation qui limite de potentielles applications. La mesure d'ondes élastiques au travers d'échantillons multi-diffusants et localement résonnants reste toutefois un enjeu primordial. En particulier, l'influence de la microstructure sur les ondes élastiques dans des matériaux solides a été peu étudiée. De plus, il n'existe pas de travaux portant sur les paramètres effectifs d'ondes de cisaillement cohérentes.

Le chapitre 4 a montré l'efficacité du dispositif sandwich pour extraire les paramètres effectifs de dispersions de billes denses dans une matrice viscoélastique. De plus, deux résonances de corps rigides proches ont été identifiées. Ce chapitre a alors comme objectif de présenter la variation des paramètres effectifs extraits selon plusieurs paramètres tels que la concentration, le rayon d'exclusion ou encore le matériau constituant les billes.

5.1 Vitesses et atténuations des ondes transverses

Comme mentionné dans le chapitre 4, la vitesse et l'atténuation des ondes cohérentes sont extraites des coefficients de transmission dans le sandwich des échantillons de type A. L'objectif est ici d'étudier l'influence des résonances de corps rigides sur les paramètres effectifs. Dans cette partie, l'attention est portée en particulier sur les paramètres effectifs des ondes de cisaillement. Les échantillons étudiés sont pour la plupart chargés avec 3 plans de billes uniquement car le chapitre précédent a montré que ce nombre est suffisant pour obtenir les paramètres effectifs de la dispersion en transmission.

5.1.1 Influence de la concentration de diffuseurs

5.1.1.1 Echantillons faiblement concentrés

Les figures 5.1 et 5.2 présentent les vitesses et atténuations effectives obtenues respectivement avec des échantillons chargés à 2% A1 et A2 et avec des échantillons chargés à 5% A10 et A11. Chaque paire d'échantillons est obtenue en visant les mêmes épaisseurs et le même nombre de plans de billes. Deux échantillons constituent deux réalisations différentes du désordre des diffuseurs car le dispositif de chute de billes est orienté différemment à chaque couche. La reproductibilité des courbes correspondant à deux réalisations d'une même distribution visée montre que la technique donne bien accès à la partie cohérente de l'onde transmise.

Les signatures des résonances en translation et rotation des particules sont clairement visibles. L'atténuation effective augmente avec la concentration et les pics aux résonances sont bien plus prononcés. De plus, il est remarquable que l'amplitude du pic d'atténuation de la résonance en rotation devient plus importante que celle de la résonance en translation lorsque la concentration augmente.

5.1 Vitesses et atténuations des ondes transverses

Les dispersions des vitesses de phase aux résonances sont plus prononcées lorsque la concentration augmente. A hautes fréquences, l'atténuation a une tendance linéaire de même pente que celle de l'époxy pure, et augmente avec la concentration. Les vitesses tendent toutes vers une valeur proche de celle de l'époxy pure.

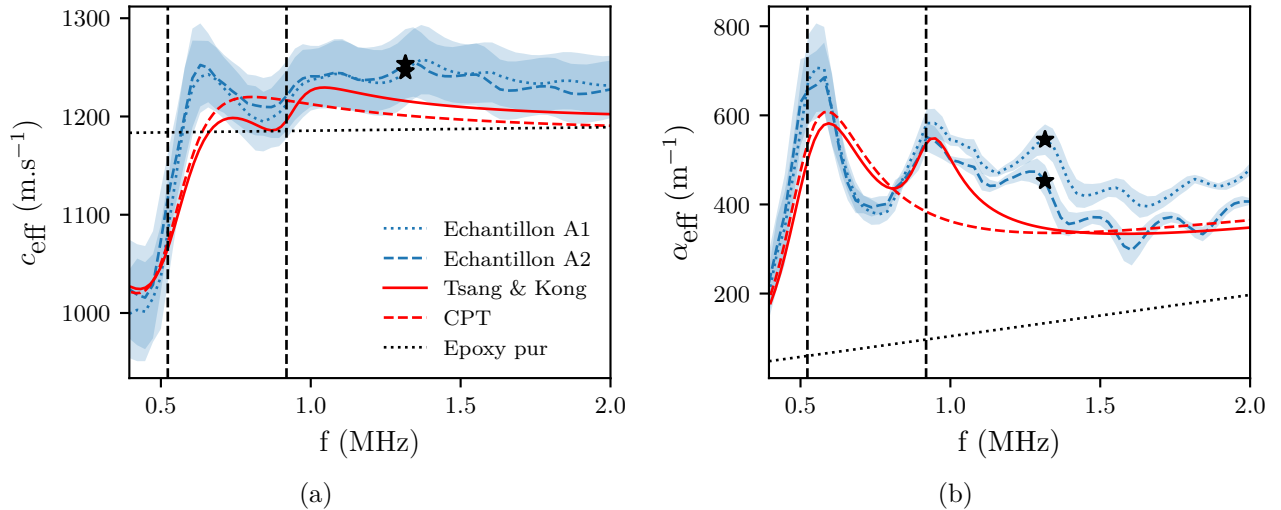


Figure 5.1 – (a) Vitesses et (b) atténuations des ondes de cisailment cohérentes pour des échantillons chargés 2%. Les tirets noirs correspondent aux fréquences théoriques f_t et f_r . Les étoiles correspondent aux premières fréquences de Bragg de chaque échantillon.

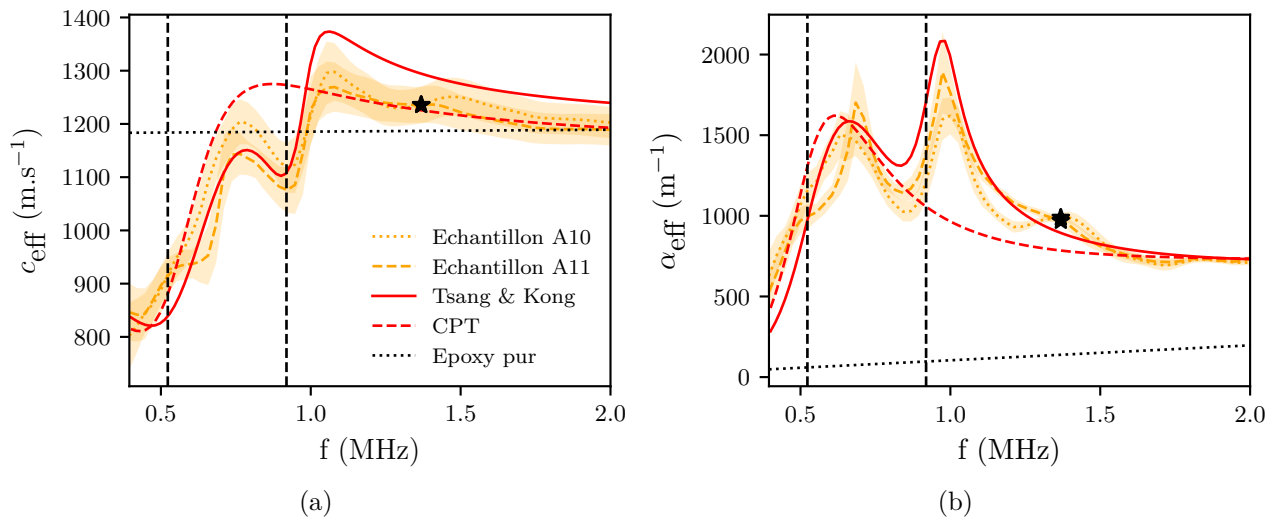


Figure 5.2 – (a) Vitesses et (b) atténuations des ondes de cisailment cohérentes pour des échantillons chargés 5%. Les tirets noirs correspondent aux fréquences théoriques f_t et f_r . Les étoiles correspondent aux premières fréquences de Bragg de chaque échantillon.

Les figures 5.1 et 5.2 présentent aussi les vitesses et atténuations obtenues avec le modèle CPT (2.79) ainsi que les vitesses et atténuations solutions de l'équation de dispersion issue de la QCA de Tsang et Kong [20] représentée dans le chapitre 1 par l'équation (1.109). Cette équation est évaluée sur les 5 premiers modes $m = 1 - 5$. Les résultats théoriques sont acquis en considérant la rhéologie de l'époxy présentée dans le chapitre 3 et des composantes mécaniques des billes de carbure de tungstène

données dans le tableau 1.1. Les concentrations utilisées sont les valeurs de ϕ_v associées aux échantillons A1 et A10 du tableau 4.1. Pour rappel, le modèle de Tsang et Kong est développé pour des ondes transverses électromagnétiques et ne tient pas compte des conversions d'ondes ayant lieu dans ce milieu. Cependant, l'étude des sections efficaces de diffusion d'une bille de carbure de tungstène dans la résine époxy présentée dans le chapitre 1 montre que les conversions d'ondes transverses-longitudinales sont très faibles dans le domaine de fréquence étudié. La comparaison des mesures expérimentales avec ce modèle de diffusion multiple d'ondes transverses est alors adéquate. A la résonance en translation, les vitesses et atténuations effectives théoriques des deux approches sont en très bon accord quantitatif avec les mesures. En effet, les résultats présentent des dispersions de vitesse de phase ainsi que des pics d'atténuation d'amplitudes similaires. Comme précisé dans le chapitre 2 le modèle CPT ne parvient pas à mettre en évidence la résonance en rotation. En revanche sur le modèle développé par Tsang et Kong, la signature de la résonance en rotation est bien présente. Le pic d'atténuation de cette résonance devient supérieur à celui de celle en translation quand la concentration augmente comme sur les résultats expérimentaux. Une explication de ce comportement peut être associée au fait que la diffusion des ondes transverses à la résonance en rotation est bien plus orientée vers l'avant que lors de la résonance en translation, comme cela a été montré dans le chapitre 1.

Enfin, les figures 5.1 et 5.2 présentent les premières fréquences de Bragg [111] de ces échantillons. Ce type de fréquence correspond à une fréquence de coupure due à la périodicité du milieu et est calculé par la formule $f_B = c_T/2e$, avec c_T la vitesse des ondes transverses et e la distance entre deux plans de bille. Pour les épaisseurs de couches chargées des ces échantillons, cette fréquence est environ de $f_B = 1,3$ MHz. A cette fréquence, les atténuations effectives augmentent légèrement. De plus, lorsque la fréquence augmente, les atténuations des échantillons chargés à 2% oscillent. Le pic d'atténuation à la fréquence de Bragg est moins prononcé dans le cas de l'échantillon chargé à 5% et l'atténuation n'oscille pas à plus hautes fréquences. Les effets d'atténuations associés à la périodicité du milieu sont noyés dans l'atténuation due au désordre lorsque la concentration de billes augmente.

5.1.1.2 Echantillons de concentration $\phi_v^{th} = 10\%$

L'étude de certains échantillons chargés avec une forte concentration de diffuseurs peut se révéler plus difficile. En effet, il arrive que la solution physique du problème inverse "saute" de branche de solution. La figure 5.3 montre 3 branches de solutions obtenues pour les échantillons A12, A13 et A14. Ces échantillons sont chargés à 10% et sont présentés par ordre croissant du nombre de plans de billes. Tout d'abord, comme sur la figure 4.29, l'atténuation de chaque branche de solution est quasiment identique. La position du premier pic d'atténuation fluctue d'un échantillon à l'autre entre 0,7 MHz et 0,8 MHz environ. Cette évolution n'affiche pas de logique et peut être associée à de légères variations dans la fabrication de ces échantillons. La position du second pic ne varie pas en fréquence et les courbes coïncident compte tenu de leurs incertitudes. Dans le cas de l'échantillon chargé à 5 plans, ce pic d'atténuation est mal défini car le module du coefficient de transmission associé est très bruyé. Finalement, aucun effet notable n'est visible à la première fréquence de Bragg de $f_B = 1,3$ MHz.

Des différences notables sont en revanche visibles sur les vitesses des différentes branches. A hautes fréquences, les vitesses de la branche B sont toutes éloignées d'environ 7,5% de celle de l'époxy. Les vitesses des branches A obtenues à 3, 4 et 5 plans sont respectivement éloignées de 13,3%, 8,7% et

5.1 Vitesses et atténuations des ondes transverses

de 5,8% de celle de l'époxy. Selon le critère de validité défini dans la partie 4.3.3.1, la branche de solutions physiques est la branche A pour l'échantillon à 5 plans, et la branche B pour l'échantillon à 3 plans. Les proches différences relatives des vitesses des branches A et B avec celle de l'époxy pour l'échantillon à 4 plans ne permettent pas de déterminer quelle est la solution valide. Les paramètres effectifs définis par ce critère dépendent grandement de l'épaisseur de ces échantillons, ce qui n'est physiquement pas acceptable. Une manière de déterminer la solution dans le cas de ces échantillons est alors d'évaluer les branches qui se recouvrent pour différentes épaisseurs. Sur la figure 5.3, les branches B sont confondues au-dessus de 1 MHz et correspondent alors à la solution physique. En dessous de 1 MHz, les branches A des échantillons à 3 et 4 plans sont confondues avec la branche C de l'échantillon à 5 plans. La solution physique change donc de branche de solution à 1 MHz. Cela peut s'expliquer par le fait que la résolution fréquence par fréquence du problème inverse peut confondre les branches de solution lorsque les variations de vitesses sont trop importantes. Cette spécificité de la résolution du problème inverse est observable à 1 MHz où les incertitudes dues à la résolution du problème inverse sont très grandes. Pour finir, le changement de branche de solution n'a aucun impact sur l'évaluation de l'atténuation effective.

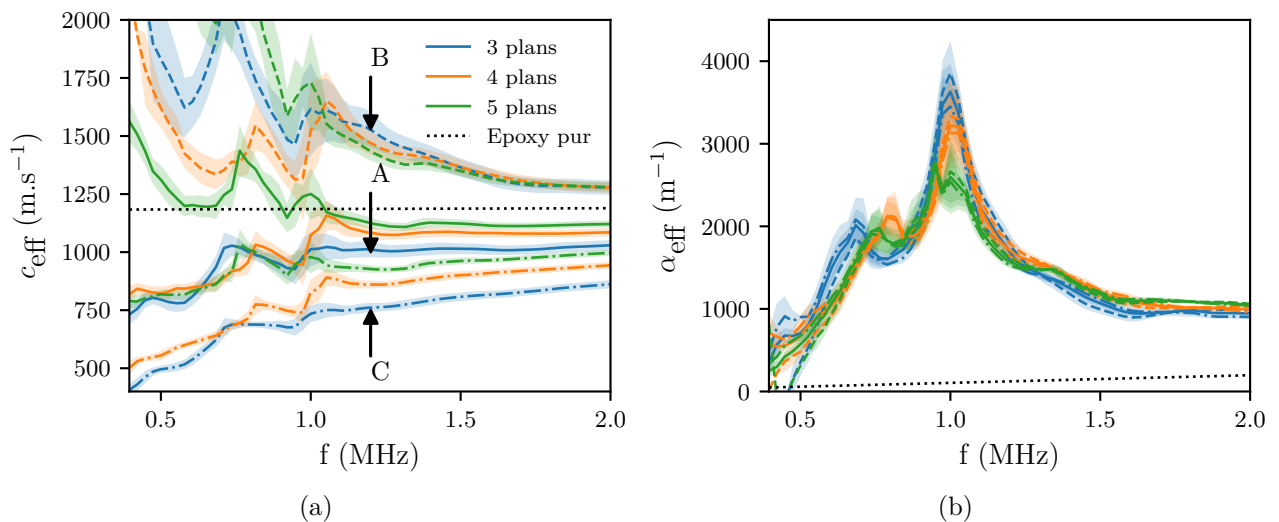


Figure 5.3 – (a) Vitesses et (b) atténuations des ondes de cisailment cohérentes pour des échantillons chargés à 10% sur un différent nombre de plans de billes. En trait plein la branche A, en tiret la branche B et en tiret point la branche C.

La figure (5.4) présente la vitesse et l'atténuation effective de l'échantillon A12, ainsi que les résultats obtenus avec le modèle de Tsang et Kong sommé sur 5 modes $m = 1 - 5$ (1.109). Les données expérimentales correspondent à celles de la branche B au-dessus de 1 MHz et à celles de la branche A en dessous de 1 MHz, présentées figure (5.3). La concentration utilisée dans le modèle est la valeur de ϕ_v associées à l'échantillon A12 du tableau 4.1. Pour de tels paramètres, l'équation caractéristique du système (1.109) propose deux solutions et donc deux modes de propagation des ondes transverses cohérentes. Ces modes sont ainsi nommés "mode 1" et "mode 2" et apparaissent numériquement pour ce système à des fractions volumiques supérieures à 8%. Pour des fréquences inférieures à 1 MHz, les résultats expérimentaux coïncident avec le mode 1 dont l'atténuation est la plus faible des deux modes. À l'inverse, pour des fréquences supérieures à 1 MHz, les résultats expérimentaux coïncident avec le mode 2 dont l'atténuation est également la plus faible des deux modes dans ce domaine de

fréquence. La transition entre les deux modes a lieu à la fréquence de résonance en rotation où les atténuations des deux modes sont égales. Même s'il est possible que les deux modes d'ondes transverses se propagent, la méthode utilisée, basée sur la minimisation de l'écart entre la transmission mesurée et la transmission d'un seul mode par le sandwich, ne détecte que le mode dont l'atténuation est la plus faible. A une fréquence donnée, le dispositif est alors capable de détecter uniquement le mode ayant la plus grande énergie après propagation dans l'échantillon. Ce changement de mode détectable à f_r explique le saut de célérité visible sur la figure 5.4. La figure 5.4 présente aussi le modèle de Tsang et Kong où seul le mode dipolaire $m = 1$ est pris en compte. Dans ce cas, le système (1.109) ne présente qu'une seule solution qui est en moins bon accord avec les résultats expérimentaux. Cela montre que le mode quadripolaire $m = 2$, dû à la déformation des particules, joue un rôle décisif dans l'apparition de deux modes de propagation, même si sa résonance a lieu à bien plus haute fréquence.

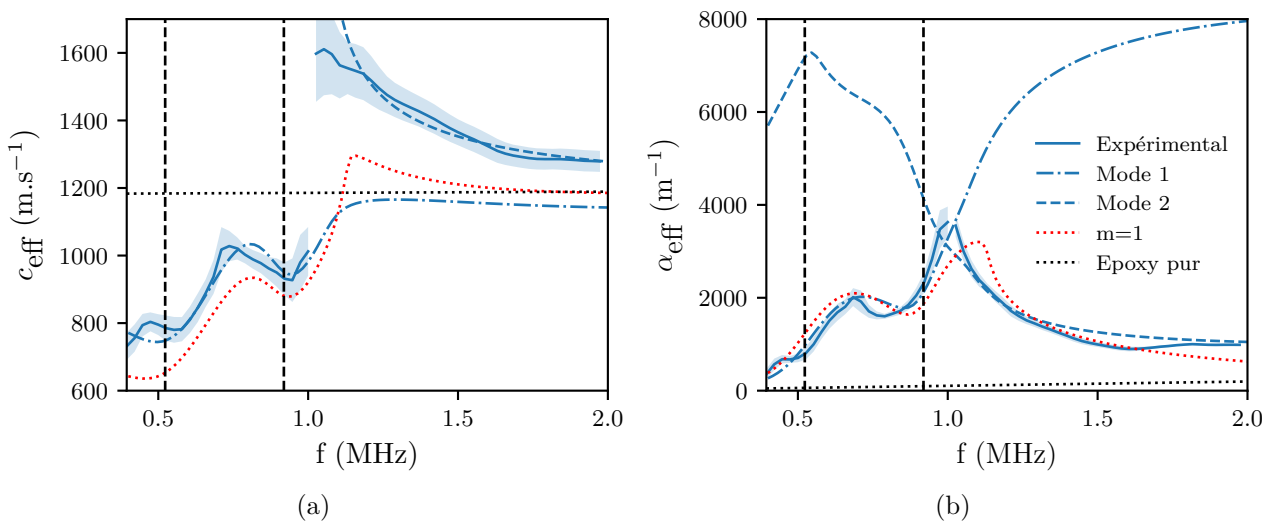


Figure 5.4 – Comparaison de (a) la vitesse et (b) l'atténuation effectives expérimentales, obtenues avec l'échantillon A14, avec la vitesse et l'atténuation prédites par le modèle de Tsang et Kong (1.109), sommé sur 5 modes ou sur $m = 1$ mode. Les tirets noirs correspondent aux fréquences théoriques f_t et f_r .

5.1.1.3 Précédente réalisation de propagation bi-modale

Obtenir deux modes de propagation a déjà été réalisé pour des suspensions colloïdales de sphères [112, 113]. La figure 5.5 présente les vitesses d'ondes de compression obtenues dans des dispersions de sphères de PMMA de 650 nm de diamètre dans un mélange liquide de dodécane et de disulfure de carbone issues de la référence [112]. Ces mesures sont effectuées par spectroscopie Brillouin. Pour une concentration de 10%, seul un mode de propagation existe et la vitesse des ondes correspond à celle de la matrice liquide. Pour des concentrations supérieures à 20 %, deux modes de propagation existent. Le mode 1 a une vitesse de propagation inférieure à celle de la matrice, qui augmente avec la fréquence et diminue avec la concentration. Ce mode de propagation est associé au couplage entre les différentes sphères par la propagation d'ondes de Stoneley aux interfaces fluides-solides. La mode 2 a une vitesse de propagation supérieure à celle de la matrice, qui diminue avec la fréquence et augmente avec la concentration. Ce mode est interprété comme une onde s'étant propagée à travers le fluide et les particules. Lorsque la fréquence augmente, les deux modes paraissent tendre vers une valeur asymptotique, celle du mode 2 convergeant vers la vitesse du fluide.

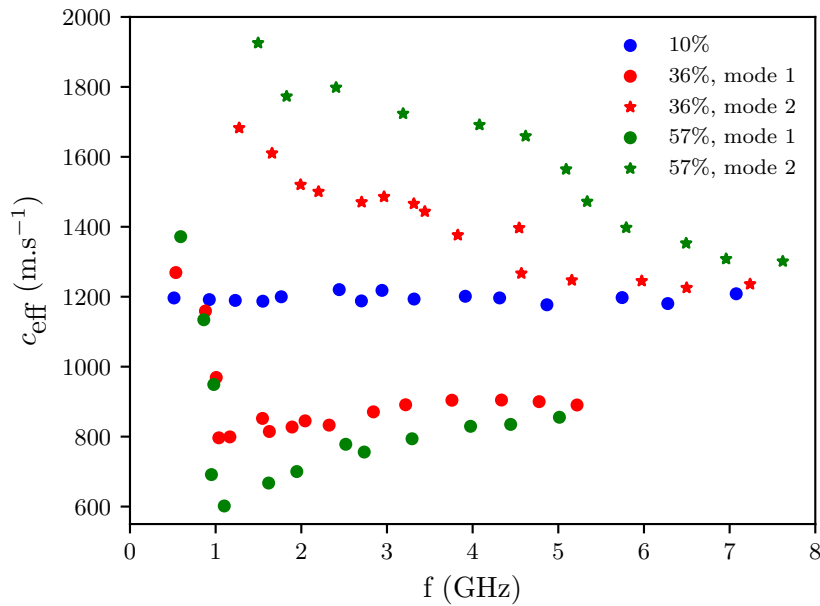


Figure 5.5 – Vitesse de phase d’ondes de compression dans une suspension de billes de PMMA immergées dans un liquide selon différentes concentrations. Les données sont issues de la référence [112].

Finalement, le mode 2 de propagation des ondes de compression dans cette suspension colloïdale affiche une tendance similaire à celle obtenue pour la dispersion de billes denses dans la résine visco-élastique, mais pour une concentration de diffuseurs bien plus importante. L’origine de l’existence de ces deux modes n’a cependant pas l’air d’être la même dans les deux systèmes. La physique de cette propagation bi-modale reste alors à étudier dans le système étudié dans ce manuscrit : origine du seuil, caractéristiques des deux modes, rôle des résonances et de leurs éventuels couplages.

5.1.2 Variation de la signature des résonances de corps rigide selon la concentration

La signature de la résonance en translation a tendance à se décaler en fréquence quand la concentration varie. La figure 5.6a présente la fréquence à laquelle se situent les pics d’atténuation aux résonances en translation et en rotation, présentés figures 5.1, 5.2 et 5.4. Le pic à la résonance en translation se situe environ à 0,55 MHz à 2%, se décale jusqu’à 0,66 MHz pour une concentration de 5% et à 0,7 MHz pour une concentration de 10%. Leroy *et al* ont déjà observé cette évolution avec des ondes de compression à travers des dispersions de bulles [25]. Cette évolution a aussi été observée par les mesures réalisées par Duranteau *et al* [35] et Kinra [55], pour une dispersion de billes de métal denses dans une résine visco-élastique et une onde longitudinale incidente. Les résultats de ces deux références sont présentés sur la figure 5.6b. Dans chaque cas présenté sur la figure 5.6, la fréquence de la signature des résonances de corps rigide semble évoluer linéairement avec la concentration. Ces résultats signifient probablement que l’augmentation de la concentration de particules a tendance à favoriser l’interaction entre diffuseurs voisins, ce qui a pour effet de modifier les fréquences de résonance de corps rigide. Cependant, à l’inverse de la résonance en translation, le pic de résonance en rotation varie très peu. La concentration de particules semble donc avoir moins d’influence sur la résonance en rotation que sur la résonance en translation. Le dernier point de la figure 5.6a obtenu à 10% en rotation est à considérer avec précaution étant donné qu’il ne s’agit visiblement pas d’un vrai pic mais du passage

d'un mode de propagation à un autre. Enfin, cette différence de sensibilité à la concentration a déjà été mise en lumière par Fedotovskii théoriquement dans un système périodique de sphères denses dans une matrice élastique par une approche type masse ressort [114].

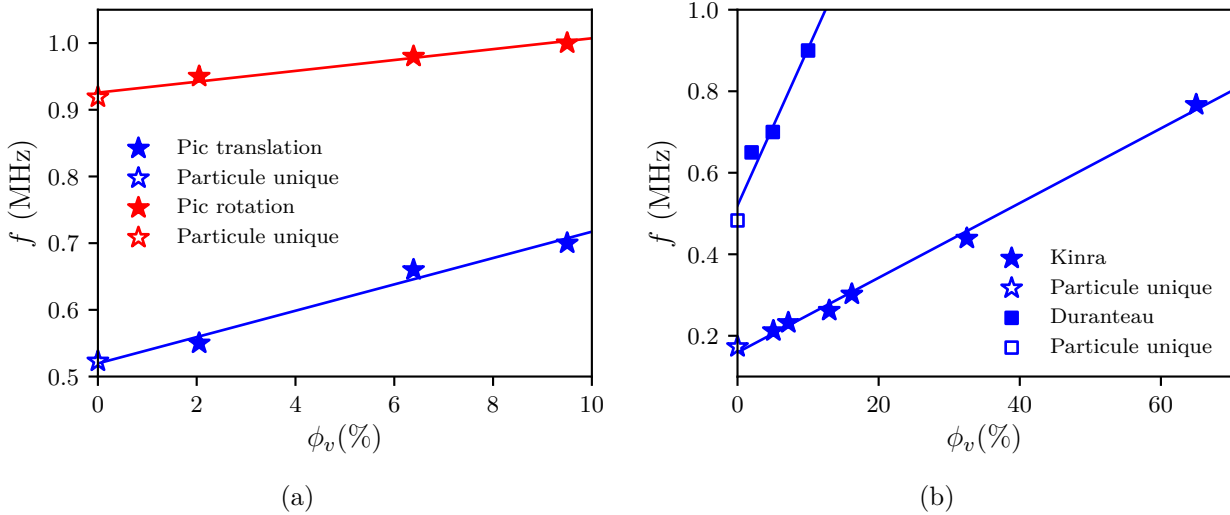


Figure 5.6 – Fréquence des pics d'atténuation associés aux résonances de corps rigide en fonction de la concentration (a) pour des ondes transverses, (b) pour des ondes longitudinales issues des références [35, 55]. Les points vides correspondent aux fréquences de résonances théoriques d'une particule unique.

5.1.3 Libre parcours moyen élastique

Le libre parcours moyen élastique, aussi appelé coefficient d'extinction, est défini par

$$l_e = \frac{1}{2\text{Im}(k_{\text{eff}})}. \quad (5.1)$$

Il s'agit d'une longueur caractéristique de décroissance de l'intensité de l'onde cohérente. Il est classiquement considéré que pour des distances de propagation supérieures à quelques libres parcours moyen élastiques, l'onde cohérente n'existe plus et l'énergie répond à une loi de diffusion, et non plus de propagation. Cette considération a été remise en question expérimentalement. Par exemple, Zhang *et al.* [9] ont montré que le régime diffusif est atteint pour des épaisseurs d'échantillon supérieures à 4 libres parcours moyen pour des dispersions aléatoires 3D de billes de verre dans un gel aqueux. Cependant, des mesures remettent ce critère en question. Tourin [7] arrive à distinguer des traces d'ondes cohérentes se propageant dans une dispersion de tiges immergées dans l'eau jusqu'à 15 libres parcours moyen. Plus récemment, Duranteau *et al.* [35] ont observé le régime propagatif pour des épaisseurs d'échantillon solide jusqu'à 10 fois supérieures au libre parcours moyen.

La figure 5.7 présente les libres parcours moyens élastiques obtenus pour les échantillons A1, A10 et A12 (*i.e.* les inverses des atténuations présentées sur les figures 5.1, 5.2 et 5.4), normalisés par les épaisseurs d'échantillons d_2 respectives. Tout d'abord, pour chaque concentration de diffuseurs, l'épaisseur de la partie de l'échantillon chargée en billes est systématiquement plus grande que le libre parcours moyen. Aux pics d'atténuations correspondent logiquement des creux du libre parcours moyen élastique. Ici, l'onde cohérente est observable pour des longueurs d_2 jusqu'à 10 fois supérieures au libre parcours moyen à 1 MHz pour l'échantillon chargé à 10%. A des concentrations de 5% et

5.1 Vitesses et atténuations des ondes transverses

10%, le libre parcours moyen devient même inférieur au diamètre d'une bille. Comme attendu, cette quantité dépend alors grandement du milieu et du type d'onde étudié. Pour ce type de matériau, le passage du régime balistique au régime diffusif reste à investiguer.

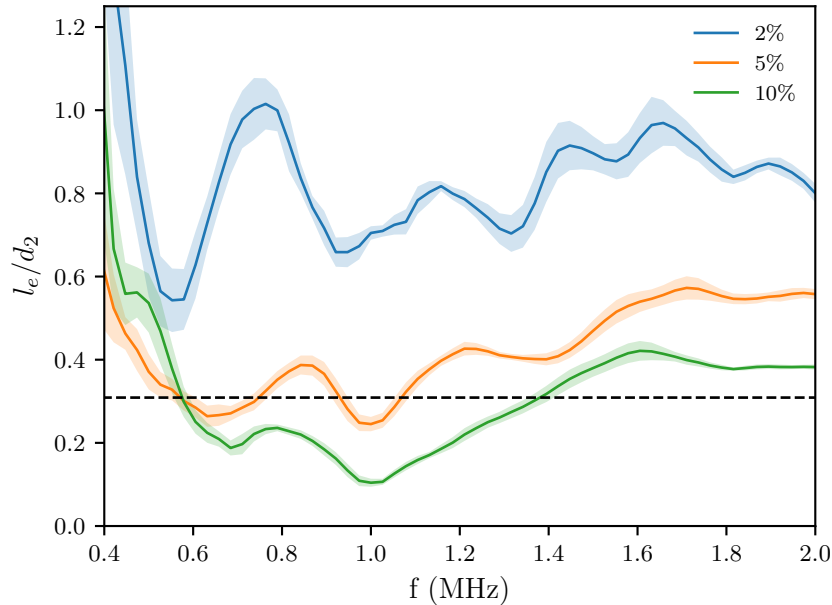


Figure 5.7 – Libre parcours moyen élastique normalisé des échantillons chargés selon différentes concentrations. Les tirets noirs représentent le diamètre d'une bille divisée par la distance d_2 moyenne des 3 échantillons.

5.1.4 Dispersion de billes de plomb

Dans les chapitres 1 et 2, des résonances dues à l'élasticité des diffuseurs ont été théoriquement identifiées, à des fréquences supérieures à celles des résonances de corps rigide f_t et f_r . Cette partie a pour objectif de les identifier expérimentalement. La figure 5.8 présente les vitesses et atténuations effectives obtenues avec les échantillons A15 et A16 respectivement chargés à 5% et 10% avec des billes de plomb. Les paramètres mécaniques de ce matériau sont présentées dans le tableau 1.1. Tout d'abord, la masse volumique du plomb est plus faible que celle du tungstène, $\tilde{\rho} \approx 10$ contre $\tilde{\rho} \approx 13$. Les résonances de corps rigide des particules sont attendues à des fréquences supérieures, $f_t = 584$ kHz et $f_r = 1026$ kHz, obtenues grâce aux équations (1.57) et (1.59). La mesure est effectuée avec la paire de capteurs 2, (voir dans le tableau 3.1), centrés à 4,18 MHz et qui ont une bande passante plus importante.

La figure 5.8 présente les vitesses et atténuations obtenues avec des échantillons chargés à 5% A15 et 10% A16. Tout d'abord, les signatures des résonances des billes en translation et en rotation sont de nouveau présentes. Sans que cela soit très significatif, les pics d'atténuation des résonances se sont respectivement décalés à 0,8 MHz et 1,1 MHz. Comme dans le cas des billes de carbure de tungstène, l'évolution de ces résonances suit le même comportement avec une dispersion des vitesses et des pics d'atténuation plus prononcés lorsque la concentration de diffuseurs augmente. Les pics d'atténuation sont cependant moins importants que ceux des figures 5.1, 5.2 et 5.4. De plus, les deux échantillons semblent présenter une faible dispersion de vitesse et une légère augmentation de l'atténuation à environ 2,5 MHz qui peut être alors la signature d'une résonance supplémentaire. La

figure 5.8 présente aussi les vitesses et atténuations obtenues avec le modèle de Tsang et Kong, pour la concentration de l'échantillon A21. Les courbes expérimentales affichent un bon accord sur les deux résonances de corps rigides. Cependant, la comparaison de ces résultats est assez peu concluante à des fréquences supérieures à celle de la résonance en rotation. En effet, le modèle présente des signatures prononcées de résonances dues à la déformation des particules qui ne sont pas présentes sur les courbes expérimentales. Néanmoins, les résultats théoriques mettent en évidence un pic d'atténuation à 2,5 MHz. Bien qu'il ne soit pas aussi prononcé, ce pic est présent sur les courbes expérimentales. Ce pic peut cependant être dû à la deuxième interférence de Bragg qui a lieu théoriquement à $f_B = 2,3$ MHz. Il est alors difficile de conclure quant à l'interprétation de ce pic. Pour finir, l'atténuation issue du modèle a tendance à diminuer jusqu'à 4 MHz et augmenter ensuite, alors que l'atténuation expérimentale ne fait que croître après 2 MHz. Il est à noter que Kinra *et al.* qui ont travaillé sur les billes de plomb n'ont eux non plus pas observé de résonances supplémentaires à hautes fréquences [31, 55].

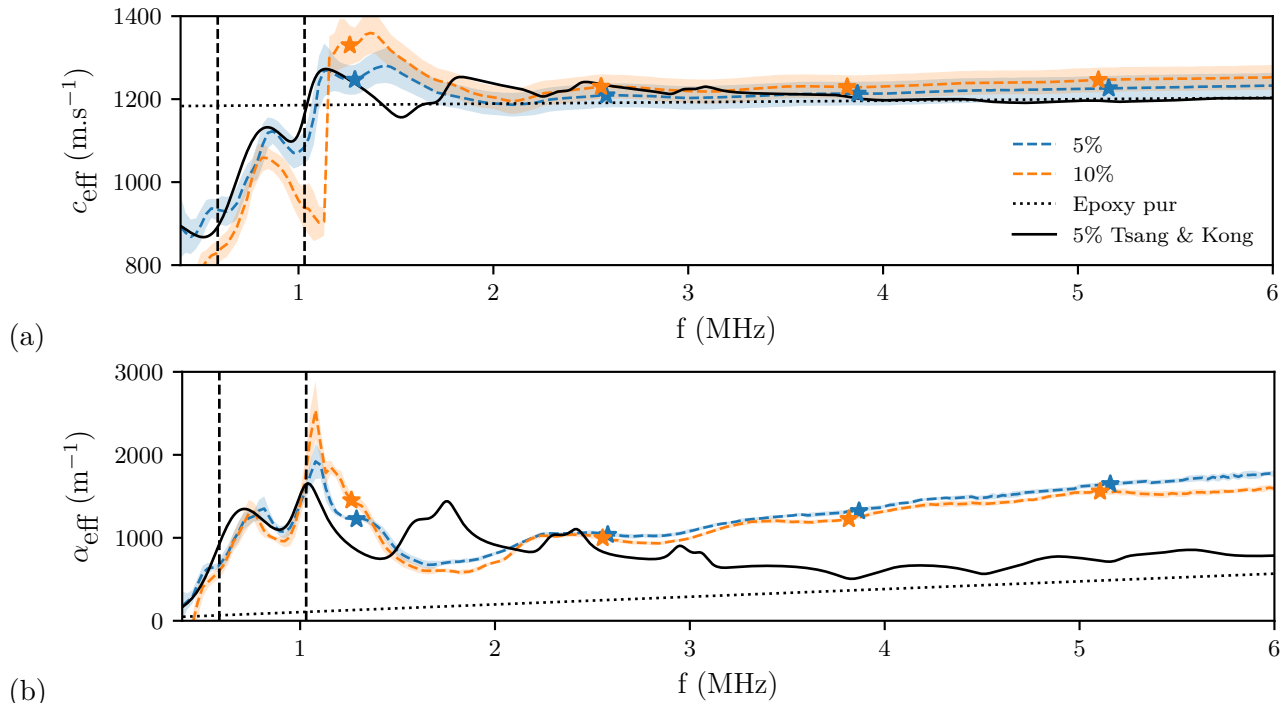


Figure 5.8 – (a) Vitesse et (b) atténuation de l'onde de cisaillement cohérente pour des échantillons chargés à 5% et 10% avec des billes de plomb. Les tirets noirs correspondent aux fréquences théoriques f_t et f_r . Les étoiles correspondent aux quatre premières fréquences de Bragg de chaque échantillon.

5.1.5 Influence du rayon d'exclusion

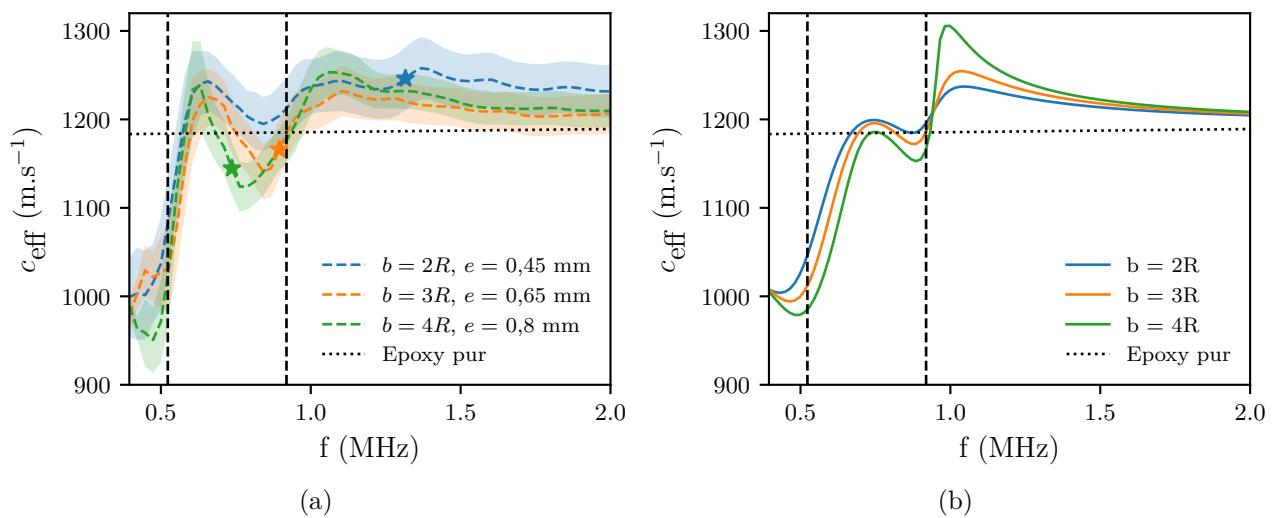
5.1.5.1 Rayon d'exclusion faible et modéré

Le but de cette étude est d'étudier l'influence de l'homogénéité du désordre sur la propagation des ondes cohérentes. Pour rappel, pour une même fraction volumique visée, le désordre peut être homogénéisé en modifiant le rayon d'exclusion b , présenté dans la partie 4.1.3.2. Ce paramètre permet de modifier la distance entre billes plus proches voisines. Les figures 5.9a et 5.10a présentent les vitesses et atténuations obtenues avec les échantillons A1, A3, A4. Ces échantillons ont tous une concentration visée de 2% et ont un rayon d'exclusion croissant, respectivement $2R$, $3R$, $4R$, avec R le rayon d'une bille. Les répartitions surfaciques des billes de ces échantillons sont présentées sur la figure 4.10. Ces

5.1 Vitesses et atténuations des ondes transverses

échantillons ont simultanément un nombre de billes par couche croissant et une épaisseur de couche chargée croissante (voir sur le tableau 4.1). Les signatures des résonances en translation et en rotation sont de nouveau observables aux mêmes fréquences. La baisse de vitesse effective avant la résonance en translation est d'autant plus prononcée que b augmente. Le pic d'atténuation à la résonance rotation augmente avec le rayon d'exclusion. Le rayon d'exclusion a un impact moins important sur le pic d'atténuation de la résonance en translation. Les figures 5.9a et 5.10a présentent aussi les premières fréquences de Bragg de chaque échantillon. L'échantillon $b = 2R$ présente un pic à l'une d'elles. Une est confondue avec la fréquence de résonance en rotation pour l'échantillon $b = 3R$ et aucun effet significatif n'y est observable pour l'échantillon $b = 4R$.

Les figures 5.9b et 5.10b présentent respectivement les vitesses et atténuations obtenues par le modèle de Tsang et Kong. Comme mentionné chapitre 1, le paramètre b de l'équation (1.109) est considéré comme correspondant au rayon d'exclusion. Ce paramètre est alors fixé respectivement à $2R$, $3R$ ou $4R$, que sont les rayons d'exclusion 2D des dispersions surfacique de billes des échantillons A1, A3 et A4. La concentration de diffuseurs utilisée correspond à la concentration moyenne des échantillons A1, A3 et A4, soit $\phi_v = 2,3\%$. Plus le rayon d'exclusion est important, plus l'amplitude des pics d'atténuation augmente et plus les variations de vitesse sont prononcées. Quelques points de ressemblance sont remarquables avec les résultats expérimentaux. Tout d'abord, les dispersions des vitesses expérimentales et théoriques présentent des positions relatives similaires entre 0,7 MHz et 0,9 MHz. De plus, les amplitudes des pics d'atténuation à la résonance en rotation suivent les mêmes tendances. Cela n'est en revanche pas le cas pour les pics d'atténuation à la résonance en translation qui restent expérimentalement fixes quand b varie. Les différences des solutions expérimentales et théoriques sont certainement imputables au fait que la répartition expérimentale des billes s'éloigne de celle théoriquement étudiée. En effet, la distance b présentée ici ne correspond pas à un réel rayon d'exclusion 3D entre deux billes mais à une distance moyenne entre 2 plus proches voisins sur un même plan.



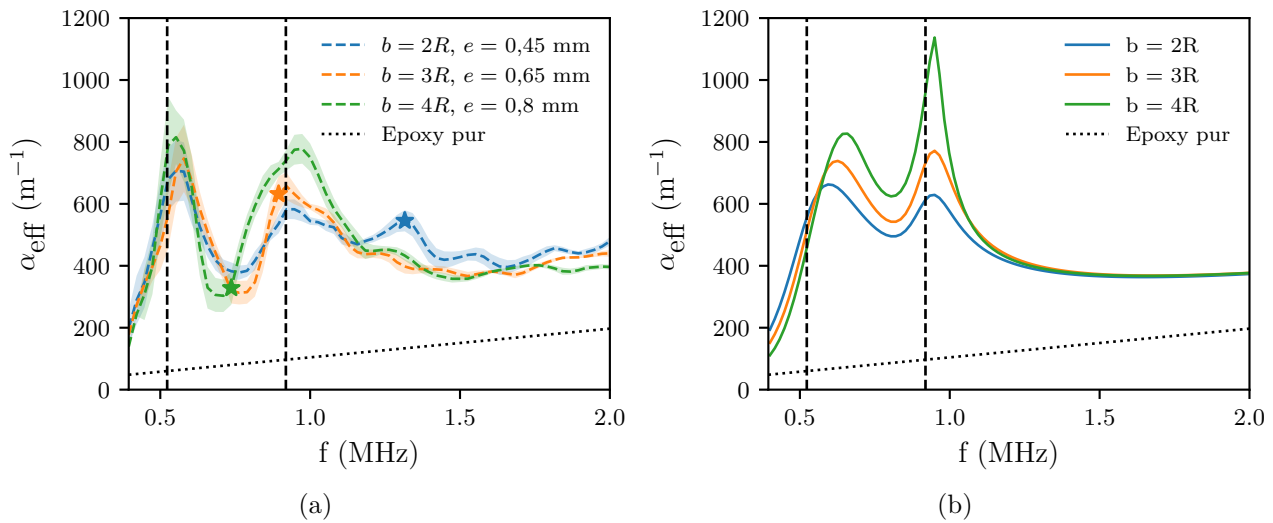


Figure 5.10 – Atténuations des ondes de cisailment cohérentes (a) pour des échantillons chargés à 2% avec un rayon d'exclusion b croissant et (b) obtenues avec le modèle de Tsang et Kong. Les tirets noirs correspondent aux fréquences théoriques f_t et f_r . Les étoiles correspondent aux premières fréquences de Bragg de chaque échantillon.

5.1.5.2 Rayon d'exclusion important $b = 5R$

Des échantillons au rayon d'exclusion $b = 5R$ ont aussi été étudiés. La figure 5.11 présente les vitesses et atténuations obtenues avec l'échantillon A5. La répartition surfacique des billes de ces échantillons est présentée sur la figure 4.5a. La figure 5.11 présente aussi les vitesses et atténuations obtenues avec l'échantillon A8 qui a été fabriqué en utilisant la même répartition surfacique de billes mais avec une distance entre chaque plan de billes moins importante.

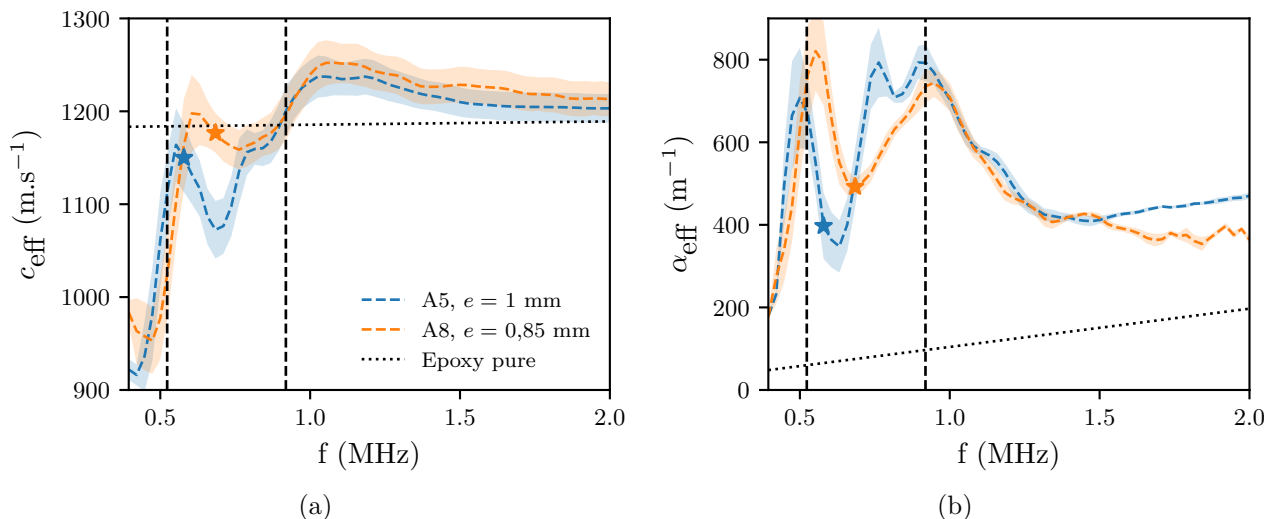


Figure 5.11 – (a) Vitesse et (b) atténuation de l'onde de cisailment cohérent pour les échantillons A5 et A8 chargés à 2% avec un rayon d'exclusion $b = 5R$ et une épaisseur de couche décroissante. Les tirets noirs correspondent aux fréquences théoriques f_t et f_r . Les étoiles correspondent aux premières fréquences de Bragg de chaque échantillon.

Les deux échantillons présentent des disparités entre 0,5 MHz et 1 MHz. Tout d'abord, le premier

5.2 Masse volumique effective du matériau chargé en billes

pic de vitesse à la résonance en translation est moins important pour l'échantillon A5. De plus, un pic d'atténuation supplémentaire est présent à 0,75 MHz environ pour l'échantillon A5, non présent sur l'échantillon A8. Cette différence peut être associée à la différence de distance entre chaque plan de billes. Les figures 5.9 et 5.10 présentent aussi la première fréquence de Bragg de ces échantillons. Elle est ici de 0,6 MHz pour l'échantillon A5 et de 0,7 MHz pour l'échantillon A8. Cependant, aucun effet significatif n'est présent sur les atténuations de ces échantillons. Il est alors difficile de conclure quant à l'apparition du pic supplémentaire sur l'échantillon A5.

Enfin, la figure 5.12 présente la vitesse et l'atténuation obtenues théoriquement par le modèle de Tsang et Kong, avec $b = 5R$ et pour une concentration de $\phi_v = 2,52\%$, correspondant à celle de l'échantillon A5. Pour de tels paramètres, le modèle de Tsang et Kong présente 2 modes de propagation similaires à ceux de la figure 5.4. Ces deux modes de propagation théoriques ne sont cependant pas mis en évidence par les résultats expérimentaux de la figure 5.11.

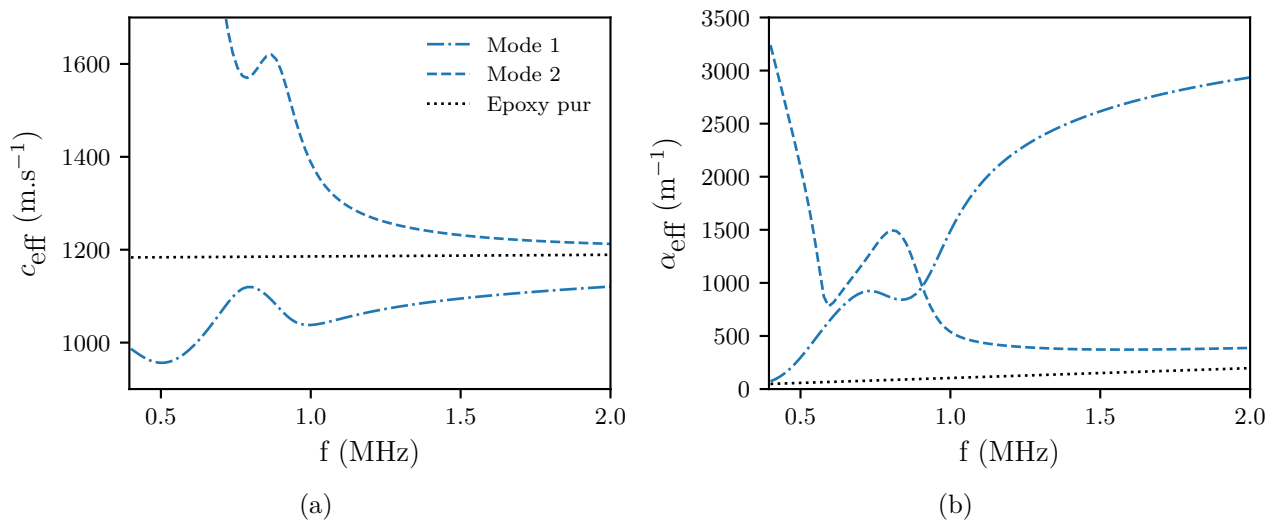


Figure 5.12 – (a) Vitesses et (b) atténuations des deux modes de propagation des ondes de cisaillement cohérentes obtenues avec le modèle de Tsang et Kong (1.109), sommé sur 5 modes, pour une concentration de billes de $\phi_v = 2,5\%$ et un rayon d'exclusion $b = 5R$.

5.2 Masse volumique effective du matériau chargé en billes

Comme mentionné dans le chapitre 4, la masse volumique effective de la dispersion de billes est extraite des coefficients de réflexion dans le sandwich des échantillons de type B. Les échantillons étudiés sont pour la plupart chargés avec 7 plans de billes uniquement.

5.2.1 Influence de la concentration de diffuseurs

La figure 5.13 présente les masses volumiques effectives obtenues avec les échantillons B1, B6 et B13, *i.e.* avec les coefficients de réflexion présentés sur les figures 4.21 et 4.22. Les vitesses et atténuations effectives utilisées pour le problème inverse sont respectivement celles obtenues avec les échantillons A1, A15 et A17, représentés sur les figures 5.1, 5.2 et 5.4. Sur l'échantillon chargé à 2% aucun effet n'est particulièrement visible. Il est à noter que le même résultat a été obtenu pour un

échantillon chargé à la même concentration ayant 14 plans de billes successifs. L'absence d'effet à une telle concentration n'est donc pas due à un trop faible nombre de plans de billes. L'échantillon chargé à 5% présente des maxima locaux sur les parties réelle et imaginaire à respectivement 0,55 MHz et 0,65 MHz. Ces pics sont aussi présents sur l'échantillon chargé à 10% à 0,62 et 0,72 MHz. Ces maxima témoignent alors de la résonance en translation des billes. Comme précédemment sur la vitesse et l'atténuation, la fréquence de résonance en translation augmente avec la concentration. De plus, l'amplitude du pic de la partie réelle augmente avec la concentration. En revanche, le pic de la partie imaginaire diminue avec la concentration. Cette observation est cependant à considérer avec prudence car les barres d'incertitudes sont importantes dans la gamme de fréquence investiguée. Au delà de ces maxima, la masse volumique effective oscille autour des valeurs de l'époxy pur. Sur ces courbes, aucune influence notable de la résonance en rotation n'est observable. Pour finir, le comportement de la masse volumique effective correspond à la tendance de celle obtenue théoriquement pour des ondes longitudinales par Fedotovskii et Vereschagina, en se basant sur un système masse ressort [115]. Cet article présente aussi des mesures tirées de leur sixième référence (en russe et difficile à trouver en version anglaise), apparemment obtenues avec une dispersion de billes de plomb dans une matrice de caoutchouc, et dont la tendance correspond aux résultats présentés ici.

Ces données expérimentales sont comparées avec des valeurs de masses volumique effectives obtenues théoriquement avec le modèle de Tsang et Kong. Cela est fait en compilant la formule 42 de la référence [20] qui correspond au coefficient de réflexion théorique \mathcal{R} d'une onde en incidence normale sur une répartition aléatoire de billes. La masse volumique effective est ensuite calculée en considérant que ce coefficient de réflexion est celui entre deux milieux semi-infinis par

$$\rho_{\text{eff}} = \frac{\rho_c k_{\text{eff}}}{k_c} \frac{1 + \mathcal{R}}{1 - \mathcal{R}}. \quad (5.2)$$

Les masses volumiques effectives théoriques présentent des pics sur la partie réelle et la partie imaginaire. Le premier pic correspond à la résonance en translation. A cette résonance, les courbes théoriques et expérimentales affichent un accord qualitatif. En effet, les parties réelles suivent les mêmes évolutions avec la concentration et les valeurs en basses fréquence sont en très bon accord. Les amplitudes des pics sont cependant moins importantes et leurs positions sont décalées à des fréquences inférieures. Les mêmes remarques peuvent être faites sur la partie imaginaire. Le fait que les pics de ρ_{eff} soient plus marqués expérimentalement que théoriquement est peut-être dû au fait que les diffuseurs sont répartis sur des plans, ce qui peut engendrer plus d'interférences constructives entre les ondes rétro-diffusées. Cela mènerait alors à une réflexion plus importante que celle obtenue sur une dispersion aléatoire 3D de billes parfaitement isotrope. Pour finir, contrairement aux données expérimentales, la masse volumique théorique à 10 % présente un pic sur la partie réelle à 1,3 MHz et à 1,1 MHz sur la partie imaginaire. Si les coefficients de diffusion T_n^{SS} sont considérés comme nuls lorsque l'équation (1.109) est évaluée, ces pics ne sont pas présents sur la densité effective, ce qui indique que ces pics sont dus à la résonance en rotation. Cependant la manifestation de la rotation des particules est absente des mesures expérimentales. A ce propos, une étude théorique basée sur un système masse ressort menée par Fedotovskii a montré que la résonance en translation influence uniquement la masse volumique effective alors que la résonance en rotation influence le module de cisaillement effectif [114]

5.2 Masse volumique effective du matériau chargé en billes

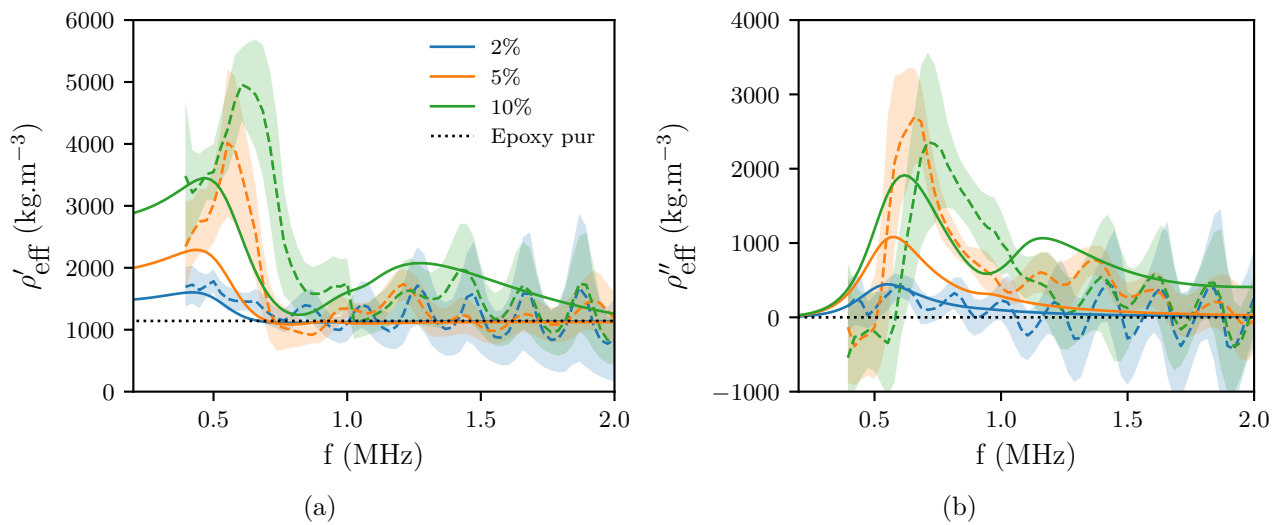


Figure 5.13 – (a) Parties réelles et (b) parties imaginaires des masses volumiques effectives d'échantillons chargés à 2%, 5% et 10%. Les courbes en tiret sont obtenues expérimentalement. Les courbes en trait plein correspondent aux masses volumiques effectives obtenues avec le modèle de Tsang et Kong et l'équation (5.2).

5.2.2 Dispersion de billes de plomb

La figure 5.14 présente les masses volumiques effectives obtenues avec les échantillons B14 et B15. Dans ce cas, les vitesses et atténuations présentées sur la figure 5.8 sont utilisées pour la résolution du problème inverse. Les barres d'incertitudes pour l'échantillon à 5% sont très importantes et ne sont pas présentées par souci de lisibilité.

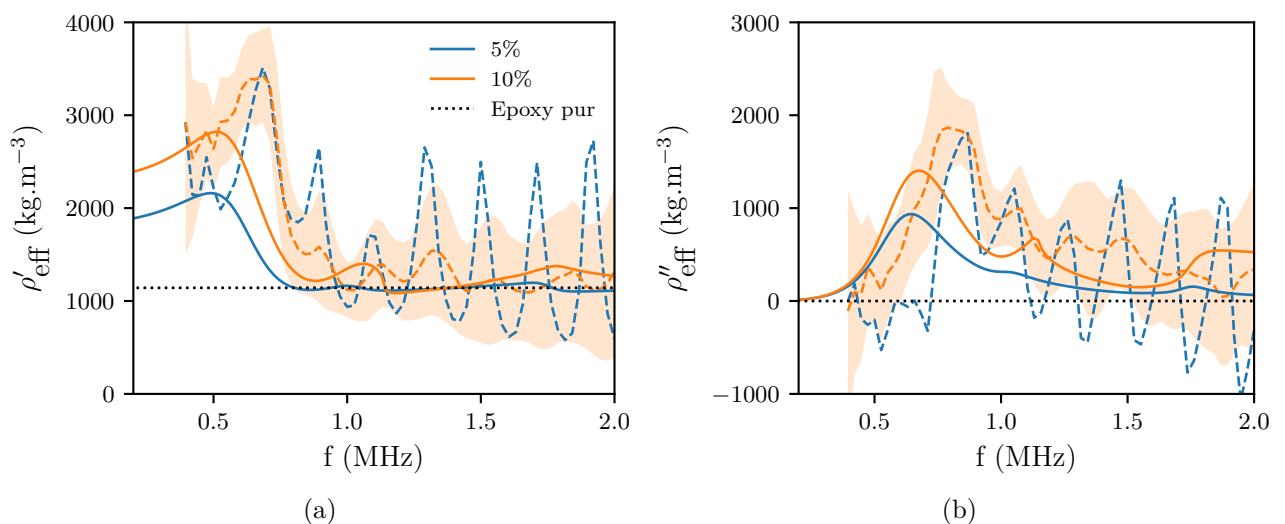


Figure 5.14 – (a) Parties réelles et (b) parties imaginaires des masses volumiques effectives d'échantillons chargés à 5% et 10% avec des billes de plomb. Les courbes en tiret sont obtenues expérimentalement. Les courbes en trait plein correspondent aux masses volumiques effectives obtenues avec le modèle de Tsang et Kong et l'équation (5.2).

Tout d'abord, l'échantillon à 10% présente comme dans le cas du tungstène un pic sur la partie réelle et sur la partie imaginaire. Le pic sur la partie réelle a toutefois une amplitude moins importante

et a lieu à une fréquence supérieure comme attendu. Cependant, la masse volumique effective obtenue avec l'échantillon chargé à 5% est très bruitée. Les pics des parties réelles et imaginaires sont confondus avec ceux de l'échantillon à 10%. Ce résultat est surprenant dans la mesure où les répartitions surfaciques des billes sont les mêmes que celles des échantillons B8 et B10 qui ont permis d'obtenir la figure 5.13.

La figure 5.14 présente les masses volumiques effectives obtenues avec le modèle de Tsang et Kong et l'équation (5.2). Comme précédemment, à une concentration de diffuseurs de 10%, les masses volumiques sont en accord qualitatif avec les résultats expérimentaux. Les mêmes décalages en amplitudes et en fréquences sont observés.

5.2.3 Influence du rayon d'exclusion

La figure 5.15 présente les masses volumiques effectives obtenues avec les échantillons B1, B3, B4 et B5. Ces échantillons ont tous une concentration visée de 2% et un rayon d'exclusion croissant : $2R$, $3R$, $4R$ et $5R$. Il est observable sur les échantillons $2R$, $3R$ et $4R$, qu'à mesure que le rayon d'exclusion augmente, les signatures de la résonance en translation apparaissent. Les parties imaginaires des échantillons $3R$ et $4R$ sont proches alors que les parties réelles sont très différentes. De plus, le pic de la partie réelle de l'échantillon $b = 4R$ atteint une amplitude proche de ceux des échantillons chargés à 5% et 10 % présentés sur la figure 5.13. Les résultats pour l'échantillon $b = 5R$ présentent de nouveau un comportement différent des autres avec des pics bien plus importants et décalés en fréquence. Les incertitudes à ces pics sont cependant très importantes. Au delà de 1 MHz, les masses volumiques effectives des échantillons sont confondues et oscillent autour de celle de l'époxy pure.

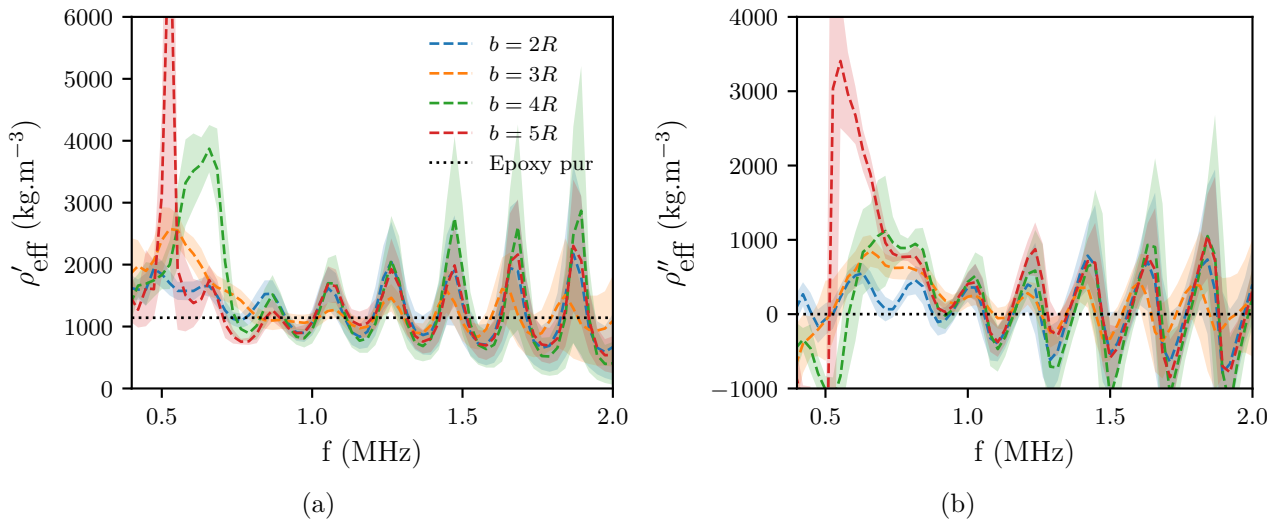


Figure 5.15 – (a) Parties réelles et (b) parties imaginaires des masses volumiques effectives d'échantillons chargés à 2% avec un rayon d'exclusion croissant.

La figure 5.16 présente la masse volumique effective obtenue avec le modèle de Tsang et Kong et l'équation (5.2), pour différents rayons d'exclusion. La concentration de diffuseurs utilisée est la concentration moyenne des 4 échantillons de la section précédente, soit 2,2 %. Tout d'abord, la variation des courbes théoriques obtenues sont faibles pour $b = 2R$ et $b = 3R$. Pour $b = 4R$ et $b = 5R$, la signature de la résonance en rotation est visible à 1 MHz. Cependant, ces résultats théoriques sont

5.3 Paramètres effectifs des ondes longitudinales

très différents de ceux obtenus expérimentalement. L'interprétation de ces écarts peut être la même que celle soulevée lors de l'étude en concentration. En effet, même si la concentration volumique visée de diffuseurs dans ces échantillons est la même, la concentration surfacique des billes augmente avec le rayon d'exclusion (voir sur le tableau 4.2). Comme les diffuseurs sont répartis plan par plan, il est possible que l'onde retro-diffusée par la répartition de bille soit amplifiée par cette sur-concentration surfacique due à la structure en plan des dispersions de billes.

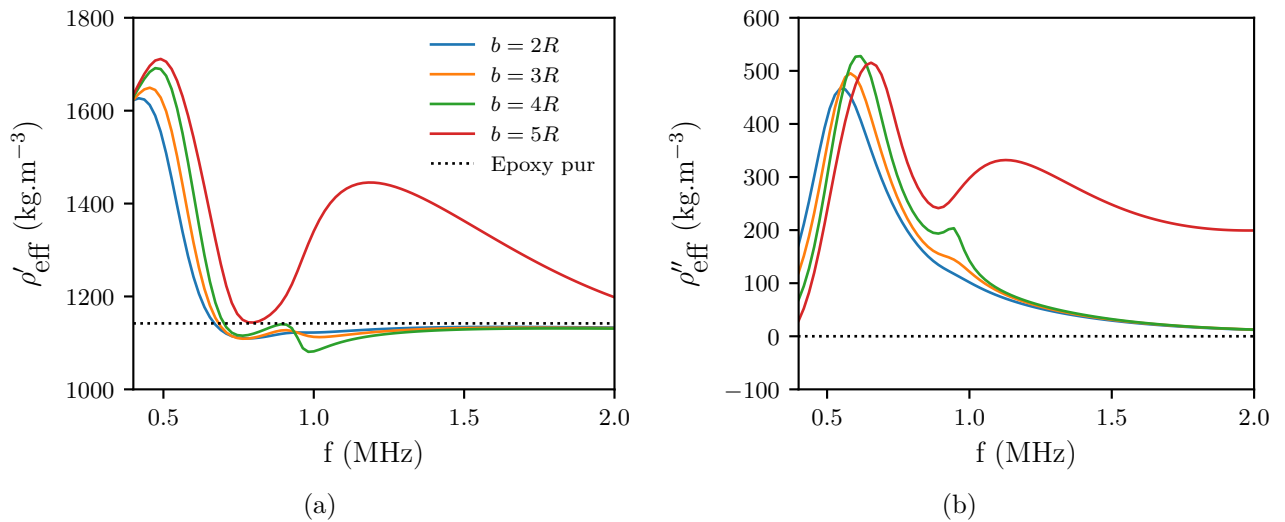


Figure 5.16 – (a) Parties réelles et (b) parties imaginaires des masses volumiques effectives obtenues avec le modèle de Tsang et Kong et l'équation (5.2), avec une concentration de diffuseurs de 2,2% et un rayon d'exclusion croissant.

5.3 Paramètres effectifs des ondes longitudinales

Des mesures d'ondes longitudinales cohérentes ont été effectuées avec un banc en immersion en transmission en incidence normale, développé dans le cadre de la thèse de Quentin Baudis. La mesure repose sur l'acquisition de signaux au travers d'un échantillon et d'un signal de référence obtenu en l'absence de l'échantillon. En déplaçant l'échantillon transversalement par rapport à l'axe acoustique, plusieurs signaux sont acquis afin d'accéder à différents trajets de diffusion, puis moyennés. Le coefficient de transmission de l'échantillon est ensuite évalué par le rapport du spectre du signal de l'onde s'étant propagé dans l'échantillon et du signal de référence. Un problème d'optimisation est ensuite résolu en ajustant le coefficient de transmission théorique obtenu par le modèle d'interférence 5 couches présenté dans le chapitre 3 (les 5 couches étant eau - époxy - dispersion de bille - époxy - eau), sur le coefficient de transmission expérimental. Procéder à l'extraction de paramètres effectifs par ce processus d'optimisation donne des résultats similaires qu'avec une méthode de traitement classique de différence de phase, l'avantage étant qu'il n'est pas nécessaire de fenêtrer les signaux. Enfin, seules les vitesses et atténuations effectives sont accessibles étant donné que les signaux réfléchis ne sont pas acquis.

Il est à noter que le sandwich n'a pas été utilisé pour caractériser les ondes longitudinales car la géométrie de celui-ci n'est pas tout à fait adaptée. En effet, l'échantillonnage des paramètres effectifs extraits dépend de la longueur de la fenêtre d'analyse qui se termine avant qu'un deuxième écho dans

les lignes à retard ne revienne sur les capteurs. Comme la vitesse des ondes de compression dans les liges à retard est environ deux fois plus élevée que celle des ondes de cisaillement, la fenêtre d'analyse est alors deux fois plus petite. De ce fait, les oscillations de Fabry-Pérot sont mal définies. Il est alors très difficile d'extraire les paramètres effectifs par la résolution du problème inverse.

5.3.1 Influence de la concentration des diffuseurs

Les figures 5.17, 5.18 et 5.19 présentent les vitesses et atténuations effectives des ondes longitudinales obtenues avec les échantillons A1, A10 et A12, et ayant respectivement une concentration de diffuseurs de 2%, 5% et 10%. Ces données sont comparées avec le nombre d'onde longitudinal du modèle CPT (2.65) et celui du modèle de Luppé, Conoir et Norris (LCN) [56] présenté dans le chapitre 1 par l'équation (1.98). Le modèle LCN est sommé sur 5 modes et les conversions d'ondes sont prises en compte au second ordre en concentration grâce à la QCA.

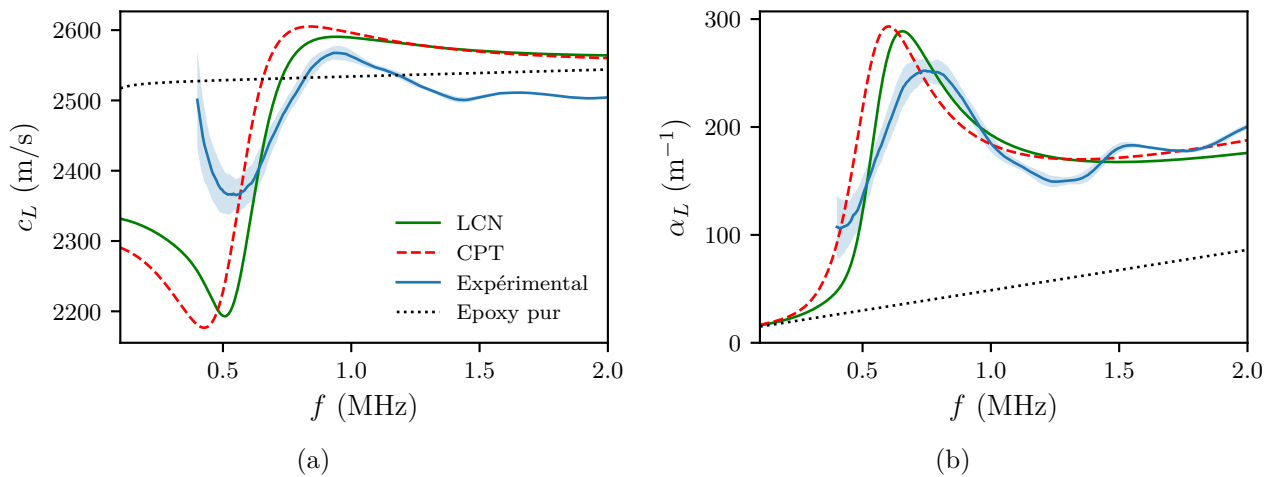


Figure 5.17 – Comparaison (a) des vitesses et (b) atténuations des ondes longitudinales cohérentes obtenues expérimentalement et théoriquement avec le modèle CPT et le modèle de Luppé, Conoir et Norris (LCN), pour une concentration de billes de 2 %.

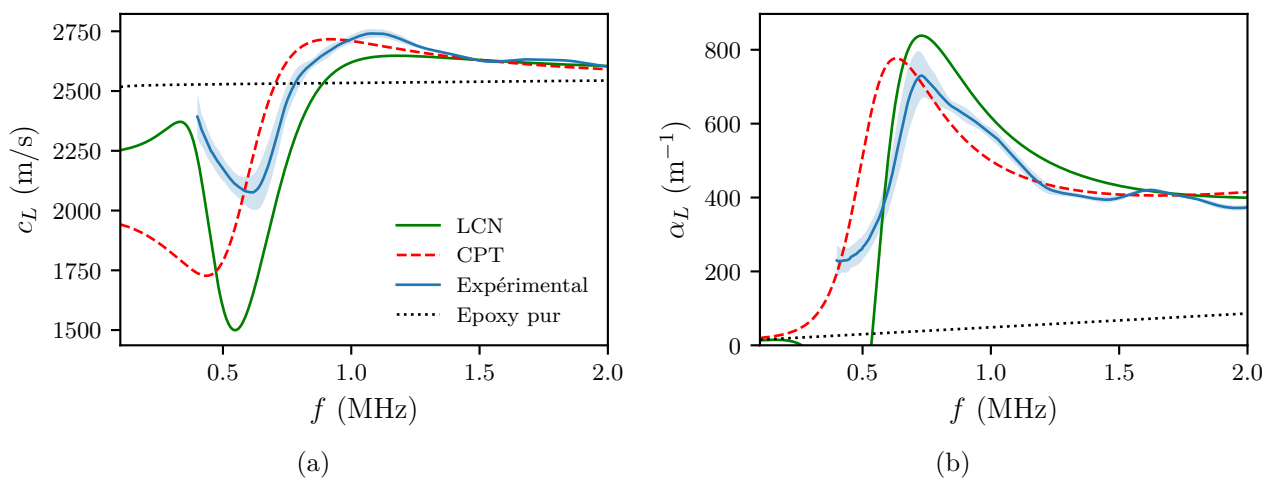


Figure 5.18 – Comparaison (a) des vitesses et (b) atténuations des ondes longitudinales cohérentes obtenues expérimentalement et théoriquement avec le modèle CPT et le modèle de Luppé, Conoir et Norris (LCN), pour une concentration de billes de 5 %.

5.3 Paramètres effectifs des ondes longitudinales

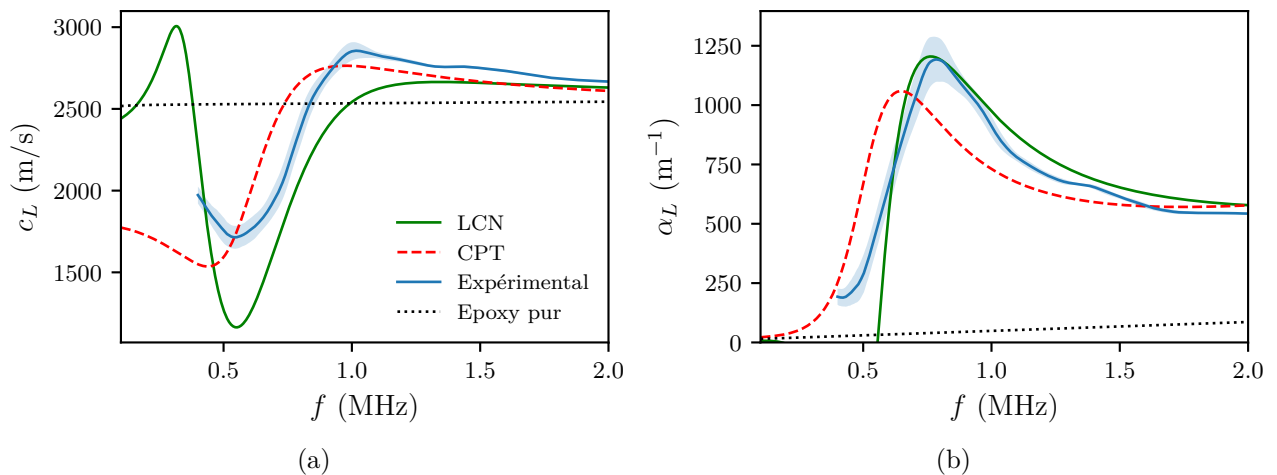


Figure 5.19 – Comparaison (a) des vitesses et (b) atténuations des ondes longitudinales cohérentes obtenues expérimentalement et théoriquement avec le modèle CPT et le modèle de Luppé, Conoir et Norris (LCN), pour une concentration de billes de 10 %.

Les deux approches sont en bon accord quantitatif avec les données expérimentales, jusqu'à 2 MHz ($K_L \approx 1$), pour des concentrations de 2% et 5%. La dispersion de la vitesse du modèle CPT est plus prononcée que celle de la vitesse expérimentale à la résonance en translation. Les positions et les amplitude des pics d'atténuation expérimentales et théoriques sont néanmoins proches. Le modèle CPT offre alors une bonne description de la propagation des ondes longitudinales cohérentes pour des dispersions faiblement concentrées. Pour une concentration de 10%, le modèle LCN est en meilleur accord avec les courbes expérimentales que le modèle CPT. Cette observation est logique dans la mesure où ce modèle tient compte des interactions entre les diffuseurs lorsque la concentration augmente, alors que le modèle CPT les néglige.

La figure (5.20) présente l'évolution de la fréquence du pic d'atténuation des ondes cohérentes longitudinales et transverses en fonction de la concentration.

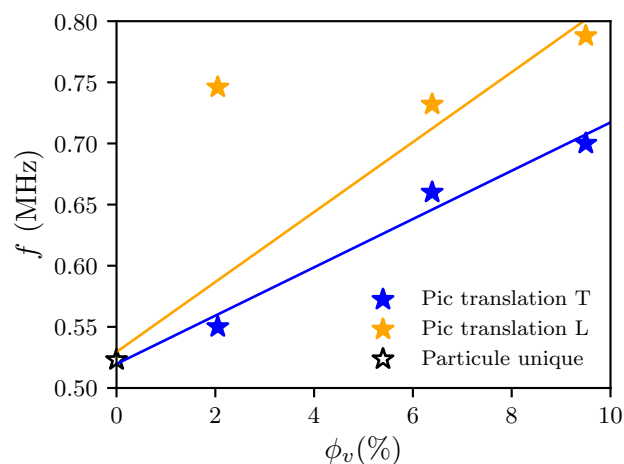


Figure 5.20 – Fréquence des pics d'atténuation associés aux résonances en translation en fonction de la concentration pour des ondes longitudinales ou transverses.

Il est observable que le pic d'atténuation de la résonance en translation dans le cas longitudinal a

lieu à plus hautes fréquences. La position du pic à 2% semble néanmoins surévaluée (sa position sur la figure 5.17 est supérieure à celle attendue théoriquement), ce point n'est donc pas pris en compte dans l'évaluation de la tendance linéaire présentée sur la figure (5.20).

5.3.2 Dispersion de billes de plomb

La figure 5.21 présente les vitesses et atténuations obtenues avec les échantillons chargés à 5% A15 et 10% A16. Ces résultats sont comparés au modèle LCN. D'une manière équivalente au cas transverse, les résultats théoriques et expérimentaux sont en bon accord à la résonance en translation. Les pics d'atténuation se situent respectivement à des fréquences de 0,8 MHz et 0,83 MHz. Au delà de la résonance en translation, le modèle présente plusieurs variations de vitesse et d'atténuations prononcées. Des variations de vitesses et d'atténuations expérimentales sont aussi présentes mais avec une amplitude moindre et à des fréquences décalées. En revanche, les deux échantillons présentent des évolutions équivalentes et respectent les mêmes tendances lorsque la fréquence augmente. Finalement, les différences de résultats expérimentaux et théoriques peuvent supposément être associées au fait que les billes utilisées sont en réalité constituées d'un alliage de plomb à 90% et d'étain à 10%. L'étain étant plus rigide que le plomb, la rhéologie des billes utilisées n'est certainement pas la bonne. En conséquence, les résonances d'ordres supérieures imputables à l'élasticité peuvent être amoindries.

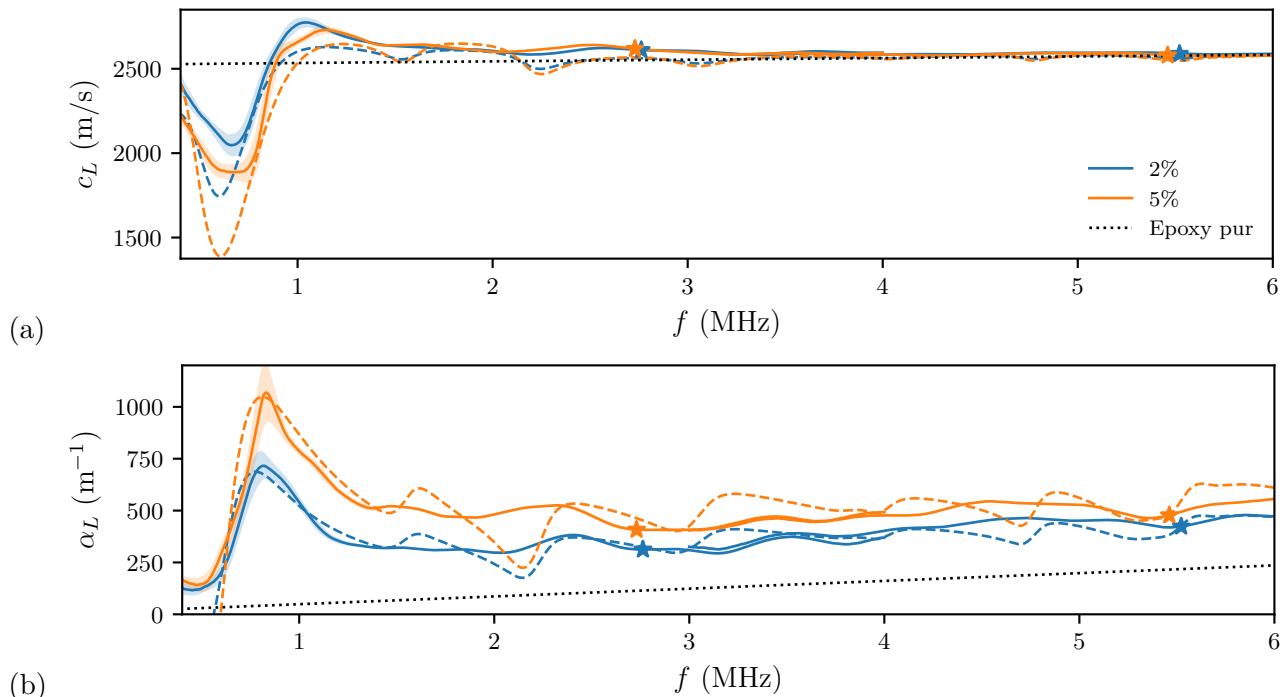


Figure 5.21 – (a) Vitesses et (b) atténuations des ondes longitudinales cohérentes pour des échantillons chargés 5% et 10% avec des billes de plomb, en traits pleins. Les courbes en tiret correspondent aux résultats obtenus avec le modèle LCN.

5.3.3 Influence du rayon d'exclusion

Les figures 5.22a et 5.23a présentent les vitesses et atténuations longitudinales obtenues avec les échantillons A1, A3, A4 et A5. Ces échantillons ont tous une concentration visée de 2% et ont un rayon d'exclusion croissant, respectivement $b = 2R$, $3R$, $4R$ et $5R$. Les figures 5.22b et 5.23b présentent

5.3 Paramètres effectifs des ondes longitudinales

respectivement les vitesses et atténuations obtenues par le modèle LCN en faisant varier le paramètre b de l'équation (1.98) considéré comme étant le rayon d'exclusion entre particules. L'accord quantitatif entre les données expérimentales et les résultats du modèle est très bon. Dans les deux cas, lorsque le rayon d'exclusion augmente, la dispersion de vitesse de phase est plus prononcée et le pic d'atténuation augmente. De plus, la position de la signature de la résonance en translation varie expérimentalement très peu (hormis pour le cas de l'échantillon A1). Enfin, la figure 5.23a présente la première fréquence de Bragg de ces échantillons, calculée par la formule $f_B = c_L/2e$, avec c_L la vitesse des ondes longitudinales dans l'époxy et e la distance entre 2 plans de bille. Il est observable que des augmentations locales d'atténuation sont proches de ces fréquences.

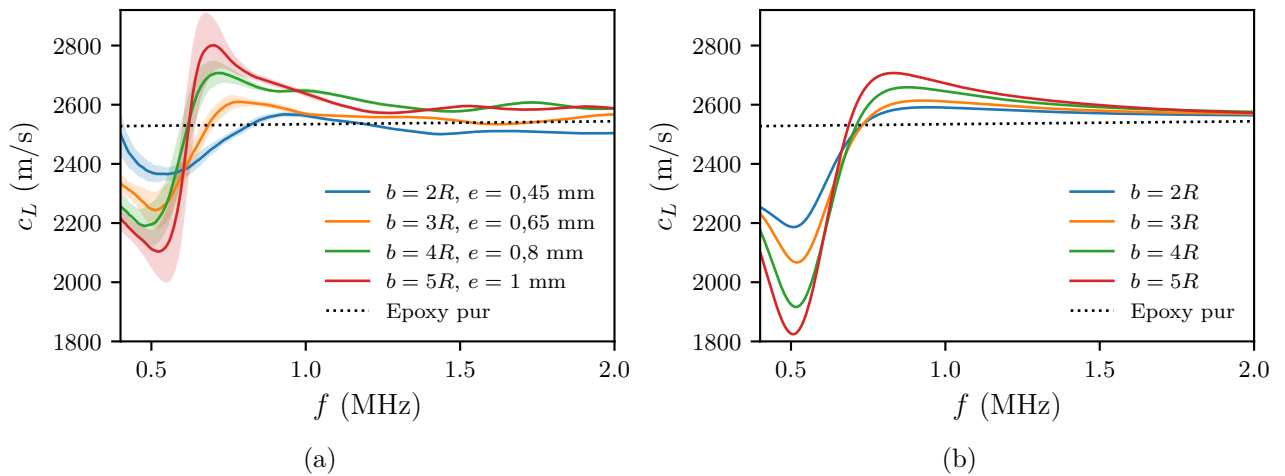


Figure 5.22 – Vitesses des ondes longitudinales cohérentes (a) pour des échantillons de type A chargés à 2% avec un rayon d'exclusion b croissant et (b) obtenues avec le modèle LCN

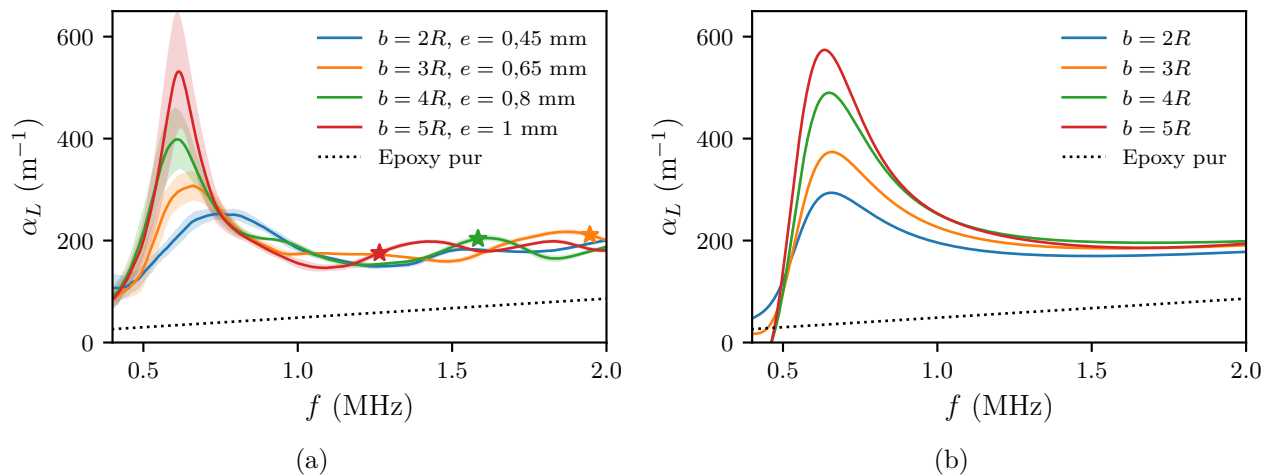


Figure 5.23 – Atténuations des ondes de longitudinales cohérentes (a) pour des échantillons de type A chargés à 2% avec un rayon d'exclusion b croissant et (b) obtenues avec le modèle LCN. Les étoiles correspondent aux premières fréquences de Bragg de chaque échantillon.

La figure 5.24 présente les vitesses et atténuations obtenues avec les échantillons A5 et A8 qui ont la même répartition surfacique de billes mais des épaisseurs de couches chargées différentes. Les résultats sont comparés avec le modèle LCN où les concentrations utilisées sont celles des échantillons

A8 et A5. Contrairement au cas de l'étude des ondes transverses, l'échantillon A5 ne présente pas de pic supplémentaire. La distance entre chaque plan a donc une influence sur la signature de la résonance en translation des billes, mais il est difficile de conclure sur son influence réelle sans une étude plus poussée. Enfin, des augmentations d'atténuation sont bien visibles pour les deux échantillons à des fréquences proches de la première fréquence de Bragg, et avec un décalage en fréquence similaire.

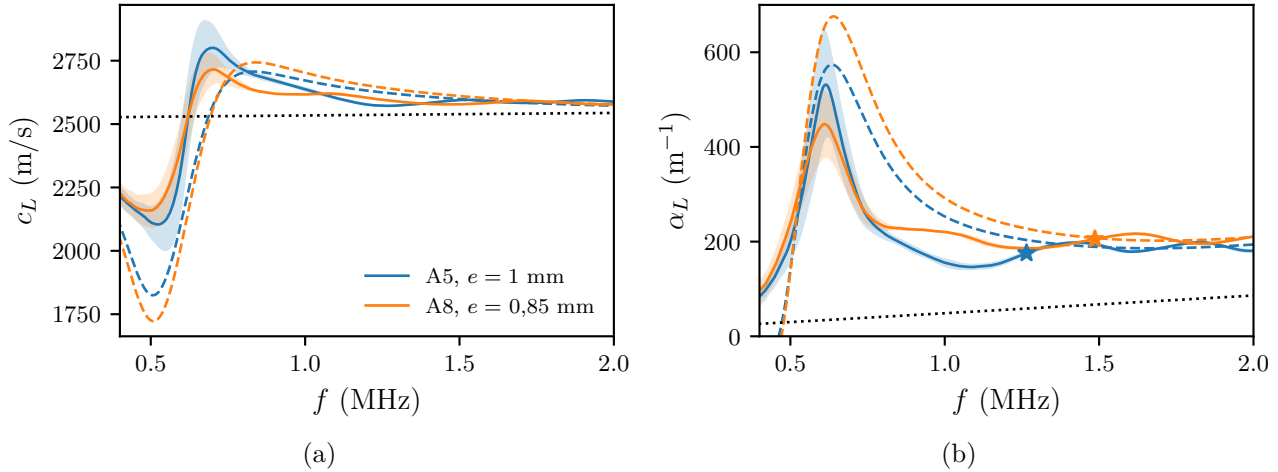


Figure 5.24 – Vitesses des ondes longitudinales cohérentes (a) pour les échantillons A5 et A8 chargés à respectivement à 2,52% et 2,89% avec un rayon d'exclusion $b = 5R$ et des épaisseurs de couches chargées décroissantes. Les courbes en tiret correspondent aux résultats obtenus avec le modèle LCN. Les étoiles correspondent aux premières fréquences de Bragg de chaque échantillon.

5.4 Conclusion

Ce chapitre a proposé une étude des paramètres effectifs de dispersions aléatoires de sphères denses dans une résine visco-élastique. L'utilisation du dispositif sandwich s'est révélée efficace pour la mesure des ondes de cisaillement cohérentes et l'extraction des vitesses, atténuations et masses volumiques effectives. Tout d'abord une étude en concentration a montré l'influence des résonances de corps rigides des diffuseurs sur la vitesse et l'atténuation des ondes de cisaillement. De plus, les résultats obtenus sont en très bon accord avec un modèle de diffusion multiple initialement développé pour des ondes électromagnétiques. A une concentration de 10% de diffuseurs, les ondes transverses présentent deux modes de propagation distincts, le changement de mode se produisant lors de la résonance en rotation. La plupart des échantillons de type A spécialement fabriqués afin d'étudier les ondes de cisaillement transmises ont présenté des atténuations très importantes. Pour des concentrations de billes moyennes, le libre parcours moyen élastique est susceptible de devenir inférieur au diamètre des billes, remettant ainsi en question le critère d'extinction de l'onde cohérente. Suite à cela, la masse volumique effective a été évaluée grâce à des mesures de rétro-diffusion cohérente. Une étude en concentration a montré l'émergence de la signature de la résonance en translation par des pics sur les parties réelle et imaginaire de la masse volumique effective. Ce comportement est prévu par le même modèle de diffusion multiple que précédemment mais avec des amplitudes moins importantes, probablement dû au fait que les billes sont réparties sur des plans, ce qui maximise la réflexion. Contrairement aux prévisions théoriques, l'influence de la résonance en rotation n'est cependant pas observable sur la masse volumique effective. Enfin, deux autres études ont été menées. L'étude effectuée avec des billes de plomb

5.4 Conclusion

n'a pas su présenter des résonances engendrées par l'élasticité des particules. L'étude menée sur la microstructure avec des ondes longitudinales et transverses a montré l'augmentation des variations de vitesse et des amplitudes des pics d'atténuation avec le rayon d'exclusion.

Conclusion générale

Le cadre général dans lequel s'est inscrit ce travail de thèse est celui de la diffusion multiple dans des matériaux solides. L'objectif principal était en particulier d'étudier théoriquement et expérimentalement la diffusion d'ondes de cisaillement, qui jusqu'à présent n'avaient globalement reçu que peu d'attention. Ce travail s'est alors porté sur un système simple constitué d'une dispersion aléatoire de billes denses dans une matrice élastique, qui a également été investiguée avec des ondes de compression.

Au cours des deux premiers chapitres, la diffusion des ondes de volume dans ce système a été étudiée théoriquement et un modèle de propagation a été établi. La diffusion d'une onde plane longitudinale (L) ou transverse (T) sur une sphère unique, étudiée par une approche acoustique en développant les différents champs sur les harmoniques sphériques, a mis en lumière des résonances de déplacement de corps rigide sub-longueur d'onde en translation, et en rotation uniquement pour une onde transverse incidente. A ces résonances, l'analyse des sections efficaces de diffusion a montré que l'énergie est majoritairement diffusée sous la forme d'ondes de cisaillement, de manière dipolaire à la résonance en translation et piquée vers l'avant à la résonance en rotation. La diffusion d'ondes élastiques par une dispersion aléatoire de ces diffuseurs a ensuite été développée par une approche basée initialement sur la mécanique des fluides diphasiques qui a été adaptée au cas des matrices solides. L'établissement des équations de conservation des quantités de mouvement moyennes dans chaque phase par un processus de moyennage d'ensemble a conduit à définir des termes de couplages entre la matrice et les particules. Ces termes font intervenir les résonances de corps rigide ainsi que de nouvelles résonances à des fréquences supérieures du fait de l'élasticité des particules. La relation de dispersion a ensuite été établie pour des ondes longitudinales et transverses dans une dispersion faiblement concentrée. Les nombres d'ondes effectifs obtenus ont affiché un bon accord quantitatif en régime grande longueur d'onde avec des modèles de diffusion multiple où l'*Independent Scattering Approximation* est appliquée. De plus, le nombre d'onde effectif longitudinal a présenté un accord analytique avec la formule de Foldy en basses fréquences, comme cela avait déjà été obtenu dans le cas de matrices fluides. Enfin, même si ce modèle a été développé initialement pour des particules rigides, il fait apparaître les mêmes tendances que des modèles de diffusion multiple lorsque l'élasticité des diffuseurs est prise en compte dans les termes de couplage uniquement.

La deuxième partie de ce manuscrit a présenté des mesures expérimentales d'ondes de cisaillement cohérentes dans des dispersions de billes denses enfouies dans une résine époxy. Pour répondre aux enjeux de la mesure d'ondes de cisaillement, un dispositif original, nommé «sandwich», a été développé. Cette technique s'est montrée particulièrement robuste et efficace pour évaluer les paramètres d'échantillons fins et atténuants et a été validée avec des échantillons de matériaux homogènes visco-

élastiques. Des échantillons de matériaux solides multi-diffusants ont ensuite été fabriqués. Grâce à un protocole de fabrication par dépôt successif de couches d'époxy chargées en billes, la concentration et la microstructure des échantillons ont été parfaitement contrôlées. Deux types d'échantillons ont alors été élaborés afin d'étudier successivement les ondes transmises à travers les dispersions de billes puis les ondes rétro-diffusées. Le dispositif sandwich s'est de nouveau révélé parfaitement efficace pour mesurer des ondes de cisaillement cohérentes dans ce type d'échantillon. Les vitesses et atténuations effectives ont été extraites des ondes cohérentes transmises dans le milieu. L'influence de la résonance en translation, et pour la première fois, celle de la résonance en rotation, ont été clairement identifiées par une dispersion de vitesse couplée à un pic d'atténuation. De même, la masse volumique effective du milieu a été obtenue grâce aux signaux rétro-diffusés sur les plans de billes et a présenté un pic sur ses parties réelle et imaginaire à la résonance en translation. Les résultats expérimentaux obtenus sont en très bon accord avec le modèle de diffusion multiple de Tsang et Kong qui met aussi en évidence les résonances de corps rigide. Enfin, l'augmentation du rayon d'exclusion s'est manifestée par une signature de l'influence des résonances plus prononcée sur les paramètres effectifs des ondes cohérentes.

En conclusion, les résultats obtenus offrent plusieurs perspectives. Tout d'abord, le modèle de diffusion multiple de Tsang et Kong initialement développé pour des ondes électromagnétiques a montré des accords particulièrement satisfaisants avec des résultats expérimentaux. Adapter cette modélisation au cas des ondes élastiques, où des conversions d'ondes ont lieu, apparaît comme une première perspective. De plus, dans l'optique d'une comparaison avec les réalisations expérimentales, la prise en compte des fonctions de corrélations dans ce modèle pourrait être envisageable afin de tenir compte du caractère plan par plan des échantillons. De plus, les résultats expérimentaux et le modèle de Tsang et Kong ont exposé l'existence de deux modes de propagation distincts lorsque la concentration de diffuseurs est importante. Le passage d'un mode à un autre se produit visiblement à une fréquence proche de celle de la résonance dipolaire en rotation des billes où les atténuations des deux modes sont similaires. Cependant, ces deux modes n'existent théoriquement que si le mode quadripolaire est pris en compte même si sa résonance a lieu à plus hautes fréquences. La physique de cette propagation bi-modale reste alors une question ouverte. Enfin, même si le modèle CPT a présenté un bon accord avec celui de Tsang et Kong en basses fréquences, il n'est pas parvenu à inclure l'influence de la résonance en rotation des particules sur l'onde transverse. Considérer la matrice comme étant un milieu micro-polaire constituerait alors une piste à explorer dans l'optique d'inclure les contraintes en rotation présentes dans ce milieu.

Expérimentalement, des échantillons ayant une même dispersion surfacique de billes mais des épaisseurs de couches chargées, différentes d'environ seulement un dixième de longueur d'onde, ont présenté des comportements différents. Ces résultats encouragent alors à étudier plus en profondeur l'effet de l'anisotropie de ces échantillons sur les ondes cohérentes, par exemple en fixant une concentration volumique visée et en faisant varier simultanément le nombre de billes par plan ainsi que les distances entre deux plans. Un autre objectif peut être celui de la caractérisation plus précise des paramètres effectifs du milieu. En effet, bien que le modèle de Tsang et Kong ait montré un bon accord concernant les paramètres effectifs des ondes de cisaillement, les masses volumiques effectives des dispersions de billes ont été théoriquement sous-évaluées. Cela est probablement dû au fait que les billes ont été réparties sur des plans. Il serait alors utile de se concentrer sur la fabrication d'échantillons solides qui

se rapprocheraient plus d'une dispersion aléatoire tri-dimensionnelle, où les diffuseurs ne seraient pas répartis sur des plans. De plus, trouver un nouveau protocole de fabrication semble nécessaire dans l'optique d'évaluer en simultané les coefficients de transmission et de réflexion de dispersions de billes dans un unique échantillon. Cela permettrait une caractérisation complète des paramètres effectifs du milieu, dont le module de cisaillement qui n'a pas été obtenu ici. Enfin, la mesure de la densité effective obtenue avec des ondes longitudinales demande d'adapter le dispositif sandwich. A plus long terme, fabriquer des échantillons périodiques pourrait permettre de maximiser les conversions d'ondes. En effet, l'importante diffusion d'ondes transverses par les billes au résonances de corps rigide pourrait peut être permettre de changer la nature d'une onde longitudinale incidente dans ce milieu en une onde transverse. Enfin, les échantillons ont présenté des atténuations très importantes, obtenues avec de très faibles épaisseurs, pour des ondes de volume en compression et en cisaillement. La résonance en translation de corps rigide affectant communément les ondes L et les ondes T, les ondes guidées de type Rayleigh ou Lamb, qui sont des combinaisons de ces ondes, doivent être particulièrement impacté par cette résonance. L'onde de Rayleigh, les modes de Love et certains modes de Lamb doivent également être affectés par la résonance en rotation. L'exploitation de ces résonances sur les ondes guidées apparaît donc comme une piste prometteuse en vue de l'isolation sismique ou vibratoire.

Références

- [1] V. Tournat, V. Pagneux, D. Lafarge et L. Jaouen, Multiple scattering of acoustic waves and porous absorbing media, *Physical Review E*, **70**, 2004.
- [2] F. Stanke et G. Kino, A unified theory for elastic wave propagation in polycrystalline materials, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **75**, 1984.
- [3] S. Datta, H. Ledbetter, Y. Shindo et A. Shah, Phase velocity and attenuation of plane elastic waves in a particle-reinforced composite medium, *Wave Motion*, **10**, 1988.
- [4] B. Tallon, P. Roux, G. Matte, J. Guillard et S. Skipetrov, Mesoscopic wave physics in fish shoals, *AIP Advance*, **10**, 2020.
- [5] C. Errico, J. Pierre, S. Pezet, Y. Desailly, Z. Lenkei, O. Couture et M. Tanter, Ultrafast ultrasound localization microscopy for deep super-resolution vascular imaging, *Nature*, **527**, 2015.
- [6] M. Price, K. Attenborough et N. Heap, Sound attenuation through trees: Measurements and models, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **84**, 1988.
- [7] A. Tourin, *Diffusion multiple et renversement du temps des ondes ultrasonores*, Thèse de doctorat, Université Paris 7, 1999.
- [8] J. Page, H. Schriemer, I. Jones, P. Sheng et D. Weitz, Classical wave propagation in strongly scattering media, *Physica A*, **241**, 1997.
- [9] Z. Zhang, I. Jones, H. Schriemer, J. Page, D. Weitz et P. Sheng, Wave transport in random media : The ballistic to diffusive transition, *Physical Review E*, **60**, 1999.
- [10] P. Martin, Multiple scattering by multiple scatterers, *ESAIM: Proceedings*, **26**, 2009.
- [11] L. Foldy, The multiple scattering of waves i. general theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers, *Physical Review*, **67**, 1945.
- [12] J. Fikioris et P. Waterman, Multiple scattering of waves. ii. "hole corrections" in the scalar case, *Journal of Mathematical Physics*, **5**, 1964.
- [13] F. Sabina et J. Willis, A simple self-consistent analysis of wave propagation in particulate composite, *Wave motion*, **10**, 1988.
- [14] M. Mahbub Alam, V. Pinfield, F. Luppé et P. Maréchal, Effective dynamic properties of random complex media with spherical particles, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **2019**, 2019.
- [15] S. Kanaun, V. Levin et F. Sabina, Propagation of elastic waves in composites with random set of spherical inclusions (effective medium approach), *Wave motion*, **40**, 2003.
- [16] Y. Buyevich et I. Shchelchkova, Flow of dense suspensions, *Progress in Aerospace Sciences*, **18**, 1978.

- [17] J. Evans et K. Attenborough, Coupled phase theory for sound propagation in emulsions, *The Journal of Acoustical Society of America*, **102**, 1997.
- [18] T. V. Brasier, J.-M. C. et F Coulouvrat et J.-L. Thomas, Sound propagation in dilute suspensions of spheres : Analytical comparison between coupled phase model and multiple scattering theory, *Journal of Acoustical Society of America*, **134**, 2015.
- [19] M. Baudoin, J.-L. Thomas, F. Coulouvrat et D. Lhuillier, An extended coupled phase theory for the sound propagation in polydisperse concentrated suspensions of rigid particles, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **121**, 2007.
- [20] L. Tsang et J. Kong, Effective propagation constants for coherent electromagnetic wave propagation in media embedded with dielectric scatters, *Journal of Applied Physics*, **53**, 1982.
- [21] J. Fikioris et P. Waterman, Multiple scattering of waves. iii. the electromagnetic case, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **123**, 2012.
- [22] S. Kanaun et V. Levin, Propagation of shear elastic waves in composites with a random set of spherical inclusions (effective field approach), *International journal of solids and structures*, **42**, 2005.
- [23] V. Leroy, A. Strybulevych, J. Page et M. Scanlon, Sound velocity and attenuation in bubbly gels measured by transmission experiments, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **123**, 2008.
- [24] M. Minnaert, Xvi. on musical air-bubbles and the sounds of running water, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **16**, 1933.
- [25] V. Leroy, A. Strybulevych, M. Scanlon et J. Page, Transmission of ultrasound through a single layer of bubbles, *The European Physical Journal E*, **29**, 2009.
- [26] T. Brunet, S. Raffy, B. Mascaro, J. Leng, R. Wunenburger, O. Mondain-Monval, O. Poncelet et C. Aristégui, Sharp acoustic multipolar-resonances in highly monodisperse emulsions, *Applied Physic Letters*, **101**, 2012.
- [27] B. Mascaro, T. Brunet, O. Poncelet, C. Aristégui, S. Raffy, O. Mondain-Monval et J. Leng, Impact of polydispersity on multipolar resonant scattering in emulsions, *The Journal of Acoustical Society of America*, **133**, 2013.
- [28] J. Mobeley, K. Waters, C. Hall, J. Marsh, M. Hughes, G. Brandenburger et J. Miller, Measurements and predictions of the phase velocity and attenuation coefficient in suspensions of elastic microspheres, *The Journal of Acoustical Society of America*, **106**, 1999.
- [29] I. Alig et D. Lellinger, Frequency dependence of ultrasonic velocity and attenuation in two-phase composite systems with spherical scatterers, *Journal of Applied Physics*, **72**, 1992.
- [30] K. Kubo, T. Norisuye, T. Tran, D. Shibata, H. Nakinishi et Q. Tran-Cong-Miyata, Sound velocity and attenuation coefficient of hard and hollow microparticle suspensions observed by ultrasound spectroscopy, *Ultrasonics*, **62**, 2015.
- [31] V. Kinra, E. Ker et S. Datta, Influence of particulate resonance of wave propagation in a random particulate composite, *Mechanics research communication*, **9**, 1982.
- [32] V. Kinra et V. Dayal, A new technique for ultrasonic-nondestructive evaluation of thin specimens, *Experimental Mechanics*, **82**, 1988.

- [33] V. Kinra, M. Petraitis et S. Datta, Ultrasonic wave propagation in a random particulate composite, *International Journal of Solids and Structures*, **16**, 1979.
- [34] V. Kinra et A. Anad, Wave propagation in a random particulate composite at long and short wavelengths, *International Journal of Solids and Structures*, **18**, 1982.
- [35] M. Duranteau, T. Valier-Brasier, J.-M. Conoir et R. Wunenburger, Random acoustic metamaterial with a subwavelength dipolar resonance, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **139**, 2016.
- [36] C. Layman, N. Sanjeeva Murthy, R. Yang et J. Wu, The interaction of ultrasound with particulate composites, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **119**, 2005.
- [37] V. Veselago, The electrodynamic of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ , *Soviet Physics Uspekhi*, **10**, 1968.
- [38] J. Pendry, Negative refraction makes a perfect lens, *Physical Review Letters*, **85**, 2000.
- [39] Z. Liu, X. Zhang, Y. Mao, Y. Zhu, Z. Yang, C. Chan et P. Sheng, Locally resonant sonic materials, *Science*, **289**, 2000.
- [40] G. Milton et J. Willis, On modifications of newton's second law and linear continuum elastodynamics, *Proceedings of the Royal Society*, **463**, 2007.
- [41] X. Zhou et G. Hu, Analytic model of elastic metamaterials with local resonances, *Physical Review B*, **79**, 2009.
- [42] A. Bretagne, A. Tourin et V. Leroy, Enhanced and reduced transmission of acoustic waves with bubble metascreens, *Applied Physics Letters*, **99**, 2011.
- [43] T. Brunet, A. Merlin, B. Mascaró, K. Zimny, J. Leng, O. Poncelet, C. Aristegui et O. Mondain-Monval, Soft 3d acoustic metamaterial with negative index, *Nature Materials*, **14**, 2014.
- [44] M. Ruppin, F. Lemoult, G. Lerosey et P. Roux, Experimental demonstration of ordered and disordered multiresonant metamaterials for lamb waves, *Physical Review Letters*, **112**, 2014.
- [45] A. Colombi, P. Roux, S. Guenneau, P. Gueguen et R. Craster, Forests as a natural seismic metamaterial: Rayleigh wave bandgaps induced by local resonances, *Scientific Reports*, **6**, 2016.
- [46] S. Brûlé, E. Javelaud, S. Enoch et S. Guenneau, Experiments on seismic metamaterials: Molding surface waves, *Physical Review Letters*, **112**, 2014.
- [47] C. Ding, L. Hao et X. Zhao, Two-dimensional acoustic metamaterial with negative modulus, *Journal of applied physics*, **108**, 2010.
- [48] Y. Wu, Y. Lai et Z. Zhang, Elastic metamaterials with simultaneously negative effective shear modulus and mass density, *Physical Review Letters*, **107**, 2011.
- [49] P. Wang, F. Casadei, S. Shan, J. Weaver et K. Bertoldi, Harnessing buckling to design tunable locally resonant acoustic metamaterials, *Physical Review Letters*, **113**, 2014.
- [50] L. Lu, M. Otomori, T. Yamada, T. Yamamoto, K. Izui et S. Nishiwaki, Topology optimization of acoustic metamaterials with negative mass density using a level set-based method, *Mechanical Engineering Journal*, **1**, 2014.
- [51] L. Lukyanova, L. Seon, A. Aradian, O. Mondain-Monval, J. Leng et R. Wunenburger, Millifluidic synthesis of polymer core-shell micromechanical particles: Toward micromechanical resonators for acoustic metamaterials, *Journal of Applied Polymer Science*, **128**, 2013.

- [52] R. Tadmouri, M. Romano, L. Guillemot, O. Mondain-Monval, R. Wunenburger et J. Leng, Millifluidic production of metallic microparticles, *Soft Matter*, **8**, 2012.
- [53] F. Moon et C. Mow, Wave propagation in a composite material containing dispersed rigid spherical inclusions, *Santa Monica, CA: RAND Corporation*, 1970.
- [54] N. Day, C. Zhu et V. Kinra, Wave propagation in a layer containing a random or periodic distribution of inclusions, *Review of progress in quantitative nondestructive evaluation*, **14**, 1995.
- [55] V. Kinra, N. Day, K. Maslov, B. Henderson et G. Diderich, The transmission of longitudinal wave through a layer of spherical inclusions with a random or periodic arrangement, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **46**, 1998.
- [56] F. Luppé, J.-M. Conoir et A. Norris, Effective wave numbers for thermo-viscoelastic media containing random configurations of spherical scatterers, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **131**, 2011.
- [57] T. V. Brasier et J.-M. Conoir, Propagation of coherent transverse waves : Influence of the translational and rotational subwavelength resonances, *Journal of Acoustical Society of America*, **142**, 2017.
- [58] J. Wu, Determination of velocity and attenuation of shear waves using ultrasonic spectroscopy, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **99**, 1996.
- [59] M. Treiber, J. Kim, L. Jacobs et J. Qu, Correction for partial reflection in ultrasonic attenuation measurements using contact transducers, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **125**, 2009.
- [60] J. Asay, D. Lamberson et A. Guenther, Pressure and temperature dependence of the acoustic velocities in polymethylmethacrylate pressure and temperature dependence of the acoustic velocities in polymethylmethacrylate, *Journal of Applied Physics*, **40**, 1969.
- [61] E. Papadakis, Ultrasonic attenuation in thin specimens driven through buffer rods, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **44**, 1968.
- [62] G. Lefebvre, R. Wunenburger et T. Valier-Brasier, Ultrasonic rheology of visco-elastic materials using shear and longitudinal waves, *Applied Physics Letters*, **112**, 2018.
- [63] A. Simon, G. Lefebvre, R. Wunenburger et T. Valier-Brasier, Viscoelastic shear modulus measurement of thin materials by interferometry at ultrasonic frequencies, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **146**, 2019.
- [64] J. Shen et A. Maradudin, Multiple scattering of waves from random rough surfaces, *Physical Review B*, **22**, 1980.
- [65] G. Quentin, Approximation de l'"optique géométrique", dans N. Gespa, rédacteur, *La diffusion acoustique par des cibles élastique de forme géométrique simple*, Cedocar, 1987.
- [66] G. Mie, Beiträge zur optik trüber medien, speziell kolloidaler metallösungen, *Annalen der Physik*, **252**, 1908.
- [67] Rayleigh, Xxxiv. on the transmission of light through an atmosphere containing small particles in suspension, and on the origin of the blue of the sky, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **47**, 1899.

- [68] C. Ying et R. Truel, Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical obstacle in an isotropically elastic solid, *Journal of Applied Physics*, **27**, 1956.
- [69] N. Einspruch, E. Witterholt et J. Truel, Scattering of a plane transverse wave by a spherical obstacle in an elastic medium, *Journal of Applied Physics*, **31**, 1960.
- [70] J. Staton, *Electromagnetic theory*, IEEE Press, 2007.
- [71] C. Wilcox, Debye potentials, *Journal of Mathematics and Mechanics*, **6**, 1957.
- [72] Abramowitz, Milton et Stegun, *Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications Inc., 1965.
- [73] D. Brill, G. Gaunaurd et H. Uberall, Resonance theory of elastic shear-wave scattering from spherical fluid obstacles in solids, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **67**, 1980.
- [74] A. Briggs et O. Kolosov, *Acoustic Microscopy*, Oxford University Press, 2010.
- [75] A. Rohfritsch, J.-M. Conoir, R. Marchaino et T. Valier-Brasier, Numerical simulation of two-dimensional multiple scattering of sound by a large number of circular cylinders, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **145**, 2019.
- [76] M. Lax, Multiple scattering of waves ii. the effective field in dense systems, *Physical Review*, **85**, 1951.
- [77] P. Martin, *Multiple Scattering - Interaction of Time-Harmonic Waves with N Obstacles*, Cambridge University Press, 2006.
- [78] C. Linton et P. Martin, Multiple scattering by random configurations of circular cylinders: Second-order corrections for the effective wavenumber, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **117**, 2005.
- [79] A. Rohfritsch, J.-M. Conoir, T. Valier-Brasier et R. Marchaino, Influence of the microstructure of two-dimensional random heterogeneous media on propagation of acoustic coherent waves, *Physical Review E*, **101**, 2020.
- [80] M. Baudoin, J.-L. Thomas et F. Coulouvrat, On the influence of spatial correlations on sound propagation in concentrated solutions of rigid particles, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **123**, 2008.
- [81] A. Ibrahiml et M. Meguid, Coupled flow modelling in geotechnical and ground engineering : An overview, *International Journal of Geosynthetics and Ground Engineering*, **6**, 2020.
- [82] G. Batchelor, The stress system in a suspension of force-free particles, *Journal of fluid mechanics*, **41**, 1970.
- [83] A. Norris, Faxen relations in solids - a generalized approach to particle motion in elasticity and viscoelasticity, *Journal of Acoustical Society of America*, **123**, 2008.
- [84] R. Challis, M. Povey, M. Mather et A. Holmes, Ultrasound techniques for characterizing colloidal dispersions, *Reports on progress in physics*, **68**, 2005.
- [85] E. Cosserat et F. Cosserat, *Théorie des corps déformables*, A Hermann et fils, 1909.
- [86] E. Grekova et R. Abreu, Isotropic linear viscoelastic reduced cosserat medium: an acoustic metamaterial and a first step to model geomedium, dans B. Alabi, H. Altenbach, F. dell’Isola, V. Eremeyev et A. Öchsner, rédacteurs, *New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics. Advanced Structured Materials*, tome 108, chapitre 14, 165–185, Springer, 2019.

- [87] P. Mott, C. Michael Roland et R. Cosaro, Acoustic and dynamic mechanical properties of a polyurethane rubber, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **111**, 2002.
- [88] R. Roderick et J. Truell, The measurement of ultrasonic attenuation in solids by the pulse technique and some results in steel, *Journal of Applied Physics*, **23**, 1952.
- [89] J. Williams et J. Lam, On the measurement of ultrasonic velocity in solids, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **30**, 1958.
- [90] S. Eros et J. Reitz, Elastic constants by the ultrasonic pulse echo method, *Journal of Applied Physics*, **29**, 1958.
- [91] M. Redwood, Problems in the propagation of ultrasonic pulses in solids, *Ultrasonics*, **2**, 1964.
- [92] B. Sturtevant, C. Pantea et D. Sinha, Evaluation of the transmission line model for couplant layer corrections in pulse-echo measurements, *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, **40**, 2013.
- [93] B. Hartmann et J. Jarzynski, Immersion apparatus for ultrasonic measurements in polymers, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **56**, 1974.
- [94] S. Siva Shashidhara Reddy, K. Balasubramaniam, C. Krishnamurthy et M. Shankar, Ultrasonic goniometry immersion techniques for the measurement of elastic moduli, *Composite Structures*, **67**, 2005.
- [95] E. Papadakis, K. Fowler et L. Lynnworth, Ultrasonic attenuation by spectrum analysis of pulses in buffer rods: Method and diffraction corrections, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **53**, 1973.
- [96] F. Simonetti et P. Cawley, Ultrasonic interferometry for the measurement of shear velocity and attenuation in viscoelastic solids, *Journal of the Acoustical Society of America*, **115**, 2004.
- [97] S. Biwa, N. Ito et N. Ohno, Elastic properties of rubber particles in toughened pmma : ultrasonic and micromechanical evaluation, *Mechanics of Materials*, **33**, 2001.
- [98] V. Fokin, M. Albati, C. Sun et X. Zhang, Method for retrieving effective properties of locally resonant acoustic metamaterials, *Physical review B*, **76**, 2007.
- [99] J. Pierre, F. Elias et V. Leroy, A technique for measuring velocity and attenuation of ultrasound in liquid foams, *Ultrasonics*, **53**, 2013.
- [100] J. De Belleval, M. Potel et P. Gatignol, Milieux homogènes et homogènes stratifiés, modèle linéaire de propagation, dans *Matériaux et acoustique 1*, chapitre 1, Lavoisier, 2006.
- [101] V. Kinra et E. Ker, An experimental investigation of pass bands and stop bands in two periodic particulate composites, *International Journal of Solids and Structures*, **19**, 1983.
- [102] A. Derode, A. Tourin et M. Fink, Random multiple scattering of ultrasound. i. coherent and ballistic waves, *Physical Review E*, **64**, 2001.
- [103] A. Lagarde, C. Josserand et S. Protière, The capillary interaction between pairs of granular rafts, *Soft Matter*, **28**, 2019.
- [104] P. Bansal et A. Ardell, Average nearest-neighbor distances between uniformly distributed finite particles, *Metallography*, **5**, 1972.
- [105] L. Anson et R. Chivers, Ultrasonic velocity in suspensions of solids - a comparison of theory and experiment, *Journal of Physics D : Applied Physics*, **26**, 1993.

RÉFÉRENCES

- [106] A. Srivastava, Elastic metamaterials and dynamic homogenization: a review, *International Journal of Smart and Nano Materials ISSN:*, **6**, 2005.
- [107] N. Fang, D. Xi, J. Xu, M. Ambathi, W. Srituravanich, C. Sun et X. Zhang, Ultrasonic metamaterials with negative modulus, *Nature Materials*, **4**, 2006.
- [108] S. Lee, C. Park, Y. Seo, Z. Wang et C. Kim, Composite acoustic medium with simultaneously negative density and modulus, *Physical Review Letter*, **104**, 2010.
- [109] J. Li et C. Chan, Double-negative acoustic metamaterial, *Physical Review E*, **70**, 2004.
- [110] M. Lanoy, J. Page, G. Loresey, F. L. anf A Tournin et V. Leroy, Acoustic double negativity induced by position correlations within a disordered set of monopolar resonators, *Physical Review B*, **96**, 2016.
- [111] J.-M. Lourtioz, H. Benisty, V. Berger, J.-M. Gérard, D. Maystre et A. Tchelnokov, *Les cristaux photoniques ou la lumière en cage*, Lavoisier, 2003.
- [112] J. Liu, L. Ye, D. Weitz et P. Sheng, Novel acoustic excitations in suspensions of hard-sphere colloids, *Physical Review Letters*, **20**, 1990.
- [113] P. Sheng, X. Jing et M. Zhou, Beyond the effective medium: quasi modes in disordered media, *Physica A*, **207**, 1994.
- [114] V. Fedotovskii, Transverse waves in a dispersive metamaterial with spherical inclusions, *Acoustical Physics*, **61**, 2015.
- [115] V. Fedotovskii et T. Vereschagina, Resonance dispersion of the longitudinal waves in disperse composites, *Acoustical Physics*, **56**, 2010.