



**HAL**  
open science

# Influence des caractéristiques des particules dans les mélanges fluides structures

Lamine, Hadji El Sokhna

► **To cite this version:**

Lamine, Hadji El Sokhna. Influence des caractéristiques des particules dans les mélanges fluides structures. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Montpellier; Université Cheikh Anta Diop (Dakar, Sénégal; 1957-..), 2021. Français. NNT : 2021MONT027 . tel-03587313

**HAL Id: tel-03587313**

**<https://theses.hal.science/tel-03587313v1>**

Submitted on 24 Feb 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

En Mathématique Appliquée et Applications des Mathématiques

École doctorale I2S

Unité de recherche IMAG

En partenariat international avec LMDAN, Université Cheikh Anta Diop de Dakar, SENEGAL

## Influence des caractéristiques des particules dans les mélanges fluides structures

Présentée par El Hadji Lamine SOKHNA

Le 14 Avril 2021

Sous la direction de Matthieu HILLAIRET  
et Diaraf SECK

Devant le jury composé de

Daniele DI PIETRO, Professeur, Université de Montpellier (Président du Jury)

Olivier GLASS, Professeur, Université Paris-Dauphine

Matthieu HILLAIRET, Professeur, Université de Montpellier

Idrissa LY, Professeur, Université Cheikh Anta Diop de Dakar

Charlotte PERRIN, Chargée de recherche, CNRS

Yannick PRIVAT, Professeur, Université de Strasbourg

Diaraf SECK, Professeur, Université Cheikh Anta Diop de Dakar

Alassane SY, Professeur, Université Alioune Diop de Bambey

Examineur

Rapporteur

Directeur de thèse

Examineur

Examinatrice

Rapporteur

Directeur de thèse

Examineur



UNIVERSITÉ  
DE MONTPELLIER

Je dédie ce travail à la mémoire de mon père et à tous les enseignants que j'ai rencontrés durant mes études de l'école arabe Alaji Laamin Soxna de Keur Madiabel à l'Université de Montpellier.

*"Les enseignants, ceux du cours maternel autant que ceux des universités, forment une armée noble aux exploits quotidiens, jamais chantés, jamais décorés.*

*Armés toujours en marche, toujours vigilants, armés sans tambour, sans uniforme rutilant. Cette armée-là, déjouant piège et embûches plantes toujours le*

*drapeau du savoir et de la vertu "*

Mariama Ba, Une si longue lettre.



## Remerciements

Je tiens d'abord à remercier mes directeurs de thèse Matthieu Hillairet et Diaraf Seck, qui m'ont apporté leur expertise et leur soutien et de m'avoir proposé ce sujet de thèse passionnant. Toute ma reconnaissance pour leur soutien, leurs précieux conseils, leurs critiques. Merci encore Matthieu pour la confiance que tu m'as accordé d'abord en stage de Master 2 puis en thèse de doctorat.

Je voudrais aussi remercier les Professeurs Yannick Privat et Olivier Glass pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma thèse en acceptant de relire et rapporter ma thèse.

Je remercie également les professeurs Daniele Di Pietro, Idrissa Ly, Charlotte Perrin et Alassane Sy d'avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse.

Je remercie aussi chaleureusement les membres du Laboratoire IMAG de l'Université Montpellier plus particulièrement le Professeur Simon Mendez pour ces conseils et d'avoir accepté plusieurs fois d'être dans mon comité de suivi de thèse.

Je remercie également tous mes collègues doctorants de l'IMAG plus particulièrement à Mario Veruete, Abdourahim Ibrahim, Alexandre Baldare, Robert rapadamnaba, Amina Mecherbet, Gwenaël Peltier.

Je remercie aussi chaleureusement les professeurs Babacar Ndiaye et Pierre Mendy de l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar ainsi que mes collègues doctorants Babacar Djite, Fatimata Sy, Garba, Mohamed.

Je ne remercierai jamais assez mes parents, ma mère Yaa Marie et mon père qui même à l'au-delà veille sur nous, mon plus que frère Moustapha, mes frères et sœurs Khady, Awa, ElHadj, Badiene, Ndeye Seynabou, Mary et mes autres frères, sœurs, nièces et neveux (particulièrement à Bababar Thiam, Pa Omar et Omar Sokhna ).

Je remercie également mes amis Malick Samassa, Momath Diop, Astou Kébé Mbaye Thiam, Pape Alla, Babacar Lo, Rama Gueye, Cheikhou Seck, Bathie Ndiaye, Birome Holo et ma famille montpelliéraine plus particulièrement Fatou Thiam, Adama Diallo, Aicha et Hamidou Diallo, Guéladio Niasse, Christian Kama, Rokhaya Faye et Grand Lamine Ndiaye, Tokola, Rokhaya Faye et les membres de l'AESM.

J'adresse aussi une pensée particulière à mes professeurs du CPAEx de Keur Massar : M. Wagué, M. Mbenar et M. Faye Dionewar.



Influence des caractéristiques des particules dans  
les mélanges fluide structures

El Hadji Lamine SOKHNA

13 juillet 2021





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction Générale</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Dynamique d'un solide quasi-sphérique dans un fluide visqueux</b>	<b>19</b>
2.1	Conventions sur la déformation . . . . .	21
2.1.1	Quelques éléments de géométrie différentielle . . . . .	21
2.1.2	Quelques éléments sur l'écriture de $\partial B_h$ . . . . .	24
2.2	Problème à déformation fixée . . . . .	28
2.2.1	Notion de solution faible . . . . .	29
2.2.2	Résolution et régularité . . . . .	36
2.3	Le cas de la sphère : calculs explicites . . . . .	40
2.3.1	Résolution de (2.5)-(2.6) pour une translation pure . . . . .	40
2.3.2	Résolution de (2.5)-(2.6) pour une rotation pure . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Dérivation par rapport au domaine</b>	<b>51</b>
3.1	Introduction . . . . .	51
3.1.1	Plan du chapitre . . . . .	53
3.1.2	Un peu de dérivation de forme . . . . .	54
3.2	Préliminaires . . . . .	56

3.2.1	Conservation de quelques propriétés du solide . . . . .	56
3.2.2	Quelques lemmes importants . . . . .	58
3.3	Calculs Formels . . . . .	62
3.3.1	Différentiation des équations . . . . .	62
3.3.2	Différentiation des conditions aux bords . . . . .	63
3.3.3	Dérivation de la forme bilinéaire . . . . .	66
3.4	Constructions des formes bilinéaires . . . . .	70
3.5	Régularités et calculs explicites . . . . .	73
3.6	Calcul explicite de la dérivée . . . . .	83
3.6.1	Cas Navier . . . . .	85
3.6.2	Cas Dirichlet . . . . .	93
<b>4</b>	<b>Études du Système dynamique</b>	<b>99</b>
4.1	Stabilité du système dynamique dans le cas Dirichlet . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Chute libre d'un corps axisymétrique dans un fluide parfait</b>	<b>111</b>
5.1	Résumé en français . . . . .	111
5.2	Introduction . . . . .	112
5.2.1	Context . . . . .	113
5.2.2	Main result . . . . .	116
5.3	Application of variational methods to (5.4)-(5.5) . . . . .	118
5.3.1	Resolution of (5.4)-(5.5) . . . . .	118
5.3.2	Computations of bounds for $m_a$ for fixed $h$ . . . . .	120
5.3.3	Proof of Proposition 6 . . . . .	124
5.4	Proof of Theorem 5.1 . . . . .	129
5.4.1	Minimizing $\tilde{m}$ . . . . .	129

5.4.2	Range for $m_a$ . . . . .	130
5.4.3	Asymptotic expansion . . . . .	132
	<b>Bibliographie</b>	<b>135</b>



# Chapitre 1

## Introduction Générale

Dans ce manuscrit, nous nous intéressons aux équations mathématiques qui modélisent le mouvement de certains fluides et leur comportement lorsqu'ils interagissent avec un solide. Nous étudierions en particulier l'influence que peut avoir la forme du solide sur les propriétés de l'écoulement.

### Motivation générale

L'objectif principal dans cette thèse est une approche théorique d'études expérimentales du problème de contact. L'idée est de considérer le comportement d'un solide qui se déplace dans un fluide occupant le demi-espace situé au dessus d'un mur. On souhaite étudier l'influence de la géométrie du solide sur le rebond du solide sur le mur dans un fluide visqueux. Des résultats expérimentaux montrent en effet que, selon les propriétés du solide, les expériences sont difficilement reproductibles [19]. Une explication avancée est que la structure microscopique du bord du solide a une grande influence sur les propriétés du rebond.

Nous nous proposons d'étudier deux phases de la chute du solide au-dessus du mur. Dans la majeure partie de la thèse, nous voulons comprendre comment, dans un fluide visqueux, la structure microscopique affecte la trajectoire du solide quand celui-ci se trouve encore loin du mur. Dans ce premier cadre, le mur n'exerce pas encore son influence et nous résoudrons le problème dans tout l'espace comme si le mur n'était pas présent. Dans une dernière partie, nous considérerons que le fluide est non-visqueux et calculerons comment la structure microscopique affecte le freinage de la particule avant un possible rebond sur le mur.

Du point de vue de l'analyse mathématique, nous serons donc amenés à résoudre des équations fluides dans des domaines infinis. Ce problème qui paraît au premier abord naturel pose de nombreuses difficultés comme l'illustre le paradoxe de Stokes qui nous dit qu'un cylindre  $C$  infini qui se déplace avec une vitesse  $\mathbf{V}$  dans une direction perpendiculaire à son axe, et à vitesse angulaire nulle dans un fluide visqueux ne pas bouger [31]. Cet exemple doit nous mener à prendre des précautions sur le cadre que nous allons poser. Dans le paragraphe qui suit, nous allons écrire le modèle complet des équations qui décrivent ce phénomène de mélange solide et fluide.

## Le Modèle complet

Dans cette section, nous posons les équations décrivant la chute d'un solide sous l'action de la gravité dans un fluide visqueux incompressible.

Pour calculer le mouvement du fluide, on adoptera le point de vue dit eulérien. Ce point de vue consiste à effectuer un bilan de force sur l'élément de volume situé en un point arbitraire  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  du domaine occupé par le fluide.

Les équations les plus usitées pour décrire le mouvement des fluides visqueux incompressibles sont appelées les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \mu \Delta \mathbf{v} - \nabla p + \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

La première équation de (1.1) représente l'équation de conservation de la quantité de mouvement avec  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), v_2(\mathbf{x}), v_3(\mathbf{x}))$  le champ de vitesse,  $p$  le champ de pression  $\rho$  la masse volumique et  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide et  $\mathbf{f}$  une densité de force extérieure.

La seconde équation de (1.1) caractérise l'incompressibilité du fluide (le volume de toute portion de fluide transportée reste inchangé au cours du temps). Ces équations sont posées sur le domaine  $\Omega$ , complémentaire dans  $\mathbb{R}^3$  du domaine occupé par le solide.

Dans ce qui va suivre, nous allons nous concentrer sur l'étude de certains fluides plus **visqueux**. Dans ce cas nous avons une prépondérance des effets de viscosité représentés par le terme "chaleur"  $\Delta \mathbf{u}$  sur les effets d'inertie  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ .

Soient  $U \in \mathbb{R}$  une vitesse caractéristique de l'écoulement étudié et  $L$  une longueur caractéristique. On considère le temps caractéristique  $T = \frac{L}{U}$  et on pose

$$\mathbf{u} := \frac{\mathbf{v}}{U}, \quad \tilde{\mathbf{x}} := \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \tilde{t} := \frac{t}{T}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho U^2}, \quad \tilde{\mathbf{f}} = \frac{L}{\rho U^2} \mathbf{f}. \quad (1.2)$$



L'équation (1.1) devient donc :

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{U}{L}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \frac{U^2}{L}(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) &= \frac{\mu U}{L^2}\Delta\mathbf{u} - \frac{1}{L}\nabla p - \mathbf{f} \\ \frac{\rho U^2}{L}\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) &= \frac{\rho U^2}{L}\left[\frac{\mu}{\rho UL}\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{\rho U^2}\nabla p - \frac{L}{\rho U^2}\mathbf{f}\right]\end{aligned}$$

ou de façon équivalente

$$\begin{cases} \partial_t\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \frac{\mu}{\rho UL}\Delta\mathbf{u} - \nabla\tilde{p} - \tilde{\mathbf{f}} \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

On définit le nombre de Reynolds  $R_e$  de l'écoulement par :

$$R_e = \frac{\text{"Advection"}}{\text{"Diffusion"}} = \frac{\text{"Forces d'inertie"}}{\text{"Forces de viscosité"}} = \frac{\rho\frac{U^2}{L}}{\mu\frac{U}{L^2}} = \frac{\rho UL}{\mu}.$$

On pose de plus  $p' = \frac{\rho LU}{\mu}\tilde{p} = R_e\tilde{p}$  et  $f' = R_e\tilde{f}$ , l'équation (1.3) devient alors

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{R_e}\Delta\mathbf{u} - \frac{1}{R_e}\nabla p' - \frac{1}{R_e}\mathbf{f}' \quad (1.4)$$

Par hypothèse la viscosité du fluide est prépondérante sur l'inertie ( $R_e \ll 1$ ), les équations de Navier-Stokes (1.1) deviennent ainsi :

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{u} - \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.5)$$

Ces équations (1.5) sont appelées les équations de Stokes. Contrairement aux équations de Navier-Stokes, elles sont linéaires.

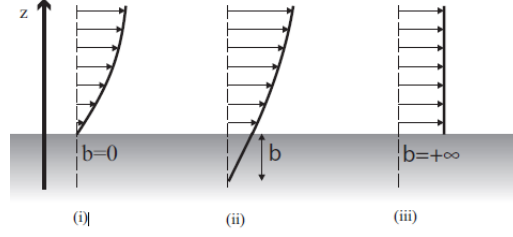


FIGURE 1.1 – Glissement

Dans les mélanges fluide-structures, la présence du solide nous oblige à imposer des conditions aux frontières.

Une description classiquement utilisée est de considérer qu’au bord de la frontière entre le solide et le fluide, les vitesses sont égales. Ainsi si on considère que l’obstacle se déplace avec une vitesse de translation  $\mathbf{V}$  et une vitesse de rotation  $\boldsymbol{\omega}$ , alors on a  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{G})$  où  $\mathbf{G}$  est le centre de masse. Cependant, ce type de description est remise en cause ces dernières années [32].

Une description alternative proposée dans la littérature, si on considère de plus que le solide est imperméable, est de considérer que, sur la normale, la vitesse relative du solide est nulle et, sur les autres directions, la vitesse relative est proportionnelle au taux de déformation

$$\begin{cases} (\mathbf{u} - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ (\mathbf{u} - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{n} = -\lambda D(\mathbf{u})\mathbf{n} \times \mathbf{n} = \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.6)$$

avec  $D(\mathbf{u})$  la partie symétrique du gradient,  $\mathbf{n}$  la normale sortante. Le glissement est proportionnel à la déformation  $D(\mathbf{u})\mathbf{n}$  et le coefficient de proportionnalité  $\lambda$  est un réel strictement positif, homogène à une longueur ;  $\lambda$  est aussi appelé longueur de glissement représentée par  $b$  sur la figure 1.1[[33], Introduction ] ci-dessus.

Le mouvement du solide peut être représenté par les équations classiques de la mécanique du solide. Soit  $O$  le point d'origine de coordonnées  $(0, 0, 0)$  et  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  un repère orthonormé fixé dans l'espace. On décrit la position du solide par le vecteur  $\mathbf{r} = \mathbf{OG}$  et un repère orthonormé  $(G, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$  fixé dans ce solide et décrivant l'orientation relative du solide par rapport au repère  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  fixé dans l'espace. On a alors ces relations cinématiques :

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{V} \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{d}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}_i$$

avec  $\mathbf{V}$  la vitesse de translation du solide et  $\boldsymbol{\omega}$  sa vitesse angulaire.

Autre que les forces extérieures  $\mathbf{f}$ , le solide est soumis aux forces  $F$  et couple  $T$  qu'exercent le fluide sur lui

$$F = \int_{\partial\Omega} \Sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \, d\sigma \quad \text{et} \quad T = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{x} - G) \times \Sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \, d\sigma$$

avec  $\mathbf{u}$  et  $p$  solution de (1.5), (1.6).

Ainsi par la deuxième loi de Newton et le théorème des moments, on a :

$$\begin{cases} m\dot{\mathbf{V}} = F + \mathbf{f}_e \\ J\dot{\boldsymbol{\omega}} = T + \mathcal{M}(\mathbf{f}_e) \end{cases} \quad (1.7)$$

avec  $J \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$  est le tenseur d'inertie et  $\mathcal{M}(\mathbf{f}_e)$  le moment de  $\mathbf{f}_e$ , la résultante des forces extérieures qui s'applique sur le solide.

Nous montrerons que (1.7) est un système dynamique et nous l'étudierons au **chapitre 4**.

## Résultats principaux

Comme nous l'avons rappelé à l'entame de cette introduction, l'objectif de cette thèse est d'étudier l'influence de la géométrie sur le déplacement d'un solide dans un fluide visqueux. Pour cela nous avons proposé un modèle basé sur les équations de Stokes avec différents types de conditions aux bords.

Dans cette section, nous résumons les principaux résultats.

Dans le **Chapitre 2**, on considère les équations (1.5) complétées avec les conditions aux bords de type Navier (1.6) dans le cas où  $\Omega$  est le complémentaire d'un solide de forme quasi-sphérique. Précisément, nous partons de la sphère unité  $B \subset \mathbb{R}^3$  et nous introduisons un champ de vecteurs  $\mathbf{h} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  qui représente une extension à  $\mathbb{R}^3$  du champ de déformation de la sphère. Nous considérons donc que le domaine fluide  $\Omega$  est le complémentaire de l'espace  $B_{\mathbf{h}} = \{\mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in B(0, 1)\}$ . Nous montrons alors existence et unicité d'une solution faible de ce problème. Ce résultat est résumé dans le théorème suivant :

**Théorème 1.1.** *Si  $\|\mathbf{h}\|_{C^2(\overline{B(0,1)})}$  est suffisamment petit, il existe une unique solution faible de (1.5)-(1.6) pour toute valeur de  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3$  et  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ .*

Nous soulignons ici que la notion de solution faible ne concerne que le comportement à l'infini de la solution – pour lequel nous ne donnons pas de description précise. En particulier, nos solutions seront suffisamment régulières pour être des solutions classiques de (1.5).

Dans la **Chapitre 3**, nous nous concentrons sur la variation de la solution de (1.5) par rapport à la variable  $\mathbf{h}$ . Pour le faire, nous choisissons comme domaine de référence la boule unité que nous perturbons par la fonctionnelle  $\mathbf{h}$  comme ci-dessus.

Nous calculerons ensuite le comportement au premier ordre des solutions du problème de Stokes dans le domaine  $\Omega_h$  complémentaire de  $B_h$ . Concrètement nous calculerons le comportement des composantes de la force et du couple qu'exerce le fluide sur le solide :

$$F_h = \int_{\partial B_h} (2D(\mathbf{u}_h)\mathbf{n} - p_h\mathbf{n})d\sigma \quad T_h = \int_{\partial B_h} (\mathbf{x} - G) \times (2D(\mathbf{u}_h)\mathbf{n} - p_h\mathbf{n})d\sigma$$

avec  $(\mathbf{u}_h, p_h)$  solution du problème de Stokes (1.5)-(1.6) dans  $\Omega_h$  et  $\sigma$  l'élément de volume de  $\partial B_h$ .

En effet d'après [22], il existe  $L_i^h \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})(i = 1, \dots, 4)$  telles que  $F_h = -L_1^h\mathbf{V} - L_3^h\boldsymbol{\omega}$  et  $T_h = -L_2^h\mathbf{V} - L_4^h\boldsymbol{\omega}$  avec

$$L_h = \begin{pmatrix} L_1^h & L_3^h \\ L_2^h & L_4^h \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R}),$$

$L_h$  est une matrice symétrique, elle est appelée matrice de résistance hydrodynamique. Il suffit alors de dériver  $L_h$ . On montre que ses composantes peuvent être écrites en fonction d'une forme bilinéaire. Le théorème des fonctions implicites nous garantit alors la régularité de  $\mathbf{h} \mapsto \mathbf{u}_h$ . À partir de ce résultat nous montrons la régularité de  $L_h$  et nous calculons sa dérivée au point  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ .

Le résultat principal est que la dérivée au premier ordre de la matrice  $L_3^h$  est antisymétrique dans le cas Dirichlet.

Dans le **chapitre 4**, nous allons étudier le système dynamique (1.7). Pour le faire, nous allons écrire le système dans le repère du solide  $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$  puisque dans ce repère la matrice de résistance obtenue est constante. On suppose d'abord que la seule force extérieure exerçant sur le solide est la gravitation  $\mathbf{f}_g = \boldsymbol{\eta}$  constante

et parallèle à  $\mathbf{e}_3$ . Le système (1.7) devient alors :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} = -L_1 \mathbf{V} - L_3 \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\eta}, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} = -L_2 \mathbf{V} - L_4 \boldsymbol{\omega}. \end{cases} \quad (1.8)$$

complété par les conditions initiales

$$\bar{\boldsymbol{\eta}}(0) = \bar{\boldsymbol{\eta}}^0, \quad \bar{\mathbf{p}}(0) = \bar{\mathbf{p}}^0 \quad \text{et} \quad \bar{\boldsymbol{\omega}}(0) = \bar{\boldsymbol{\omega}}^0 \quad (1.9)$$

avec  $\bar{\boldsymbol{\eta}}^0, \bar{\mathbf{p}}^0$  et  $\bar{\boldsymbol{\omega}}^0$  données.

Le principal résultat de ce chapitre est que si  $L_3$  est antisymétrique, le problème de Cauchy (1.8), (1.9) a un état d'équilibre stable et un état d'équilibre instable. De plus sous certaines conditions,  $\boldsymbol{\eta}$  converge exponentiellement vite vers le point d'équilibre stable.

Dans le **Chapitre 5**, nous étudions la chute d'un corps axisymétrique au dessus d'un plan dans  $\mathbb{R}^2$ . Et contrairement aux chapitres précédents, on considère dans cette partie que le fluide est parfait (viscosité négligeable devant l'inertie). Dans ce cas les équations de Navier-Stokes (1.1) sont remplacées par les équations d'Euler :

$$\begin{cases} \rho (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) + \nabla p = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \Omega \quad (1.10)$$

avec  $\Omega$  le domaine occupé par le fluide.

On considère en plus que le fluide est un fluide potentiel c'est à dire que le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  est le gradient d'une fonction scalaire  $\varphi$  (i.e.  $\mathbf{u} = \nabla \varphi$ ).

On essayera de comprendre le comportement des solutions lorsque la distance  $h > 0$  entre le mur  $\mathcal{P}$  et l'obstacle  $\mathcal{S}$  tend vers 0. On note

$$\mathcal{S}_h = h\mathbf{e}_2 + \mathcal{S} \quad F_h = \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{\mathcal{S}}_h.$$

Soit  $m$  la masse de  $S$ , on peut compléter ainsi l'équation (1.10) avec des conditions aux bords de type Neumann et les lois de Newton appliquées à  $\mathcal{S}$  :

$$\begin{cases} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \mathcal{P} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = h'(t)\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n} \text{ on } \partial\mathcal{S}_{h(t)} \end{cases} \quad (1.11)$$

$$mh''(t) = \int_{\partial\mathcal{S}(t)} p\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 \, d\sigma \quad (1.12)$$

Nous allons démontrer dans ce chapitre que le comportement des solutions de (1.10),(1.11) (1.12) avec  $\Omega = F_{h(t)}$ , dépendent de la régularité de l'obstacle. Pour cela, nous considérons que le bout de l'obstacle peut être décrit localement par une fonction  $\sigma_h$ . Concrètement on n'étudiera pas exactement la solution du problème mais la masse ajoutée  $m_a(h) := \rho \int_{F_h} |\mathbf{u}_h(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$  avec  $\mathbf{u}_h$  solution du problème (1.10),(1.11) (1.12) et qui potentiel en plus.

Le résultat principal de ce chapitre est :

**Théorème 1.2.** *Soit  $\alpha \geq 1$  et supposons que  $\mathcal{S}$  vérifie certaines conditions de symétrie. Nous avons alors le résultat suivant :*

*Si  $\alpha < 2$  les fonctions  $m_a$  sont bornées quand  $h \rightarrow 0$*

*Si  $\alpha > 2$ , avec  $\sigma_h(x) = h + \kappa|x|^{1+\alpha}$ , on a les comportements asymptotiques*

suivants lorsque  $h \rightarrow 0$  :

$$m_a(h) = c_{\kappa,\alpha} h^{3/(1+\alpha)-1} + O(1), \quad \text{with } c_{\kappa,\alpha} = \int_{\mathbb{R}} \frac{t^2 dt}{1 + |t|^{1+\alpha}} \quad (1.13)$$

$$u_h(x, y) = \nabla^\perp \left[ \frac{x_1 x_2}{\sigma_h(x_1)} \right] \mathbf{1}_{|x_1| < \delta \cap x_2 < \varepsilon} + O(1) \quad \text{in } L^2(F_h). \quad (1.14)$$

Ce problème a été étudié dans [14] et nous avons obtenu des résultats similaires avec des méthodes différentes. L'apport de ce manuscrit est le comportement asymptotique de la masse ajoutée lors que  $h$  tend vers 0 . Il peut être aussi appliqué à la chute d'un corps au dessus d'un plan. D'après [[14], corollary 2 ], lorsque  $\alpha \geq 2$ , le solide va toucher la paroi avec une vitesse nulle sinon ( $\alpha > 2$ ) on aura un choc frontal (vitesse de contact strictement positif).

En résumé, ce présent manuscrit se présente comme suit.

Dans le **premier chapitre** nous posons le problème de l'étude d'une solide à déformation fixée, nous étudions l'existence et l'unicité du problème ainsi que sa régularité. Nous donnerons également les solutions explicites du problème dans le cas où  $\Omega$  est le complémentaire d'une boule. Dans le **chapitre suivant**, nous calculons la déformation par rapport au domaine fixe, et nous montrons également que la déformation liée à l'énergie est antisymétrique dans le cas Dirichlet ( $\lambda = 0$ ). Au **chapitre 4**, nous regardons le problème sous un autre angle, on considère le problème dynamique et nous étudions le système d'équations différentielles lié à la chute du solide. Nous établirons la stabilité asymptotique des solutions de cette équation. Au **dernier chapitre**, on regarde le problème de contact dans un fluide parfait. En effet, nous étudions le chute d'un solide axisymétrique dans un fluide parfait. Nous montrons l'influence de la forme du solide sur le comportement des solutions au moment du contact. Nous donnerons également le comportement



asymptotique de ses solutions.

# Chapitre 2

## Dynamique d'un solide quasi-sphérique dans un fluide visqueux

### Introduction

Dans ce chapitre, on se place dans un domaine extérieur  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  ( $\Omega$  est le complémentaire d'un compact). On considère la résolution du problème de Stokes d'inconnues  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  suivant :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} - \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

complété par des conditions de glissement du type loi de Navier :

$$\begin{cases} (\mathbf{u} - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ (\mathbf{u} - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{n} = -\lambda D(\mathbf{u})\mathbf{n} \times \mathbf{n} = -\frac{\lambda}{2}\Sigma(\mathbf{u}, p)\mathbf{n} \times \mathbf{n} \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.2)$$

Dans ces conditions aux bords, on a noté  $\mathbf{n}$  la normale à  $\partial\Omega$  dirigée vers l'extérieur de  $\Omega$  (i.e. vers l'intérieur de  $B := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ ). Les quantités  $(\mathbf{V}, \boldsymbol{\omega}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  modélisent la vitesse de translation et de rotation d'un objet rigide qui tomberait dans un fluide visqueux sous l'action de la gravité. Les conditions (2.2) représentent alors des conditions d'interface dites de glissement. Le glissement est proportionnel à la déformation  $D(\mathbf{u})\mathbf{n}$  et le coefficient de proportionnalité  $\lambda$  est un réel strictement positif, homogène à une longueur ;  $\lambda$  est aussi appelé longueur de glissement. Dans le cas où  $\lambda = 0$ , on retrouve les conditions de Dirichlet.

On note ici  $D(\mathbf{u})$  la partie symétrique de  $\nabla\mathbf{u}$  et  $\Sigma(\mathbf{u}, p)$  le tenseur des contraintes fluides, donné par la loi de Newton :

$$\Sigma(\mathbf{u}, p) = 2D(\mathbf{u}) - p\mathbb{I}_3.$$

On considère ici plus spécifiquement le cas où  $B$  est une sphère légèrement déformée.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans la première partie on rappelle un modèle classique pour écrire la forme de  $B$  comme un une sphère déformée. On présente également quelques résultats de géométrie importants par la suite. Dans la deuxième partie, on présente la formulation faible du problème (2.1)-(2.2) ainsi que sa résolution. Dans la troisième partie, on donne des formules explicites dans le cas où  $B$  est une sphère de rayon 1.

## 2.1 Conventions sur la déformation

Pour quantifier la façon dont  $B$  est obtenu par déformation d'une sphère, nous allons considérer une sphère de centre 0 et de rayon 1, que nous allons modifier légèrement grâce à la fonctionnelle  $\mathbf{h}$  qui vérifiera certaines propriétés de régularité et de conservation.

Dans la suite, on introduit une fonction  $\mathbf{h} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que l'on suppose  $C^2(\mathbb{R}^3)$ , bornée et à dérivée bornée, et telle que  $\|\nabla \mathbf{h}\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)} < 1$ . On définit alors  $\varphi_{\mathbf{h}} := I_d + \mathbf{h}$  et on note dans la suite :

$$B_{\mathbf{h}} := \varphi_{\mathbf{h}}(B(0, 1)) \quad \Omega_{\mathbf{h}} = \varphi_{\mathbf{h}}(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}(0, 1)).$$

Nous allons montrer ci-dessous que  $\Omega_{\mathbf{h}}$  et  $B_{\mathbf{h}}$  sont deux ouverts de  $\mathbb{R}^3$  de classe  $C^2$ . Ceci nous permettra d'écrire une théorie de résolution du problème de Stokes (2.5)-(2.6) raisonnable à  $\mathbf{h}$  fixée.

### 2.1.1 Quelques éléments de géométrie différentielle

Dans cette partie, on fixe  $\mathbf{h} \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  telle que  $\|\nabla \mathbf{h}\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)} < 1$  et on note  $\varphi = I_3 + \mathbf{h}$ . Pour commencer, on rappelle le lemme classique suivant :

**Lemme 2.1.** *Soit  $\mathbf{h} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une fonction  $C^1$  bornée avec sa dérivée et telle que  $\|\nabla \mathbf{h}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < 1$ , alors  $\varphi : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x})$  réalise un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .*

*Démonstration.* Avec les notations de l'énoncé,  $\varphi$  est  $C^1$  de différentielle  $\nabla \varphi_{\mathbf{x}} = (I + \nabla \mathbf{h}_{\mathbf{x}})$  (où  $I$  représente l'identité sur  $\mathbb{R}^3$ ) injective. En effet  $\nabla \varphi_{\mathbf{x}} k = 0$  équivaut à  $k + \nabla \mathbf{h}_{\mathbf{x}} k = (I + \nabla \mathbf{h}_{\mathbf{x}})k = 0$  ce qui implique  $k = -\nabla \mathbf{h}_{\mathbf{x}} k$ . Or, par hypothèse  $\|\nabla \mathbf{h}_{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^3)} < 1$ , donc  $\|\nabla \mathbf{h}_{\mathbf{x}} k\| < \|k\|$  avec  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^3$ . Ainsi

la seule possibilité pour avoir l'identité ci-avant est  $k = 0$ . Finalement, pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ , on a que  $\nabla\varphi_x$  est un endomorphisme injectif en dimension finie, donc surjectif et  $\varphi$  réalise un  $C^1$ -difféomorphisme local.

Pour passer du local au global, on remarque d'une part que, pour  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| &= \|\varphi(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y}) + \mathbf{h}(\mathbf{y})\| \\ &\leq \|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\| + \|\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\mathbf{y})\| \\ &\leq \|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\| + k \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|; \quad k \text{ coefficient de Lipschitz de } \mathbf{h} \\ \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| &\leq (1 - k)^{-1} \|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\|.\end{aligned}$$

Puisque  $(1 - k)$  est positif. Alors si  $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{y})$ , on a  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , donc  $\varphi$  est injective. D'autre part, pour tout  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ , le processus itératif

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0 &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{b} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_n). \end{cases}$$

fournit une suite convergente qui tend vers une solution de  $\mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ . L'application  $\varphi$  est donc également surjective.

□

Pour appliquer ces notions à la construction de déformation d'objets, on rappelle tout d'abord la notion suivante :

**Définition 2.1.** *On dit qu'un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  est de classe  $C^2$ , si pour tout  $\mathbf{x}$  dans  $\partial\Omega$ , il existe des voisinages  $\mathcal{U}$  de  $\mathbf{x}$  et  $\mathcal{V}$  de  $0 \in \mathbb{R}^3$  et un difféomorphisme  $F$  de classe  $C^2$  de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{U}$  tels que  $F(0) = \mathbf{x}$  et  $F(\mathcal{V} \cap \mathbb{R}_+^3) = \mathcal{U} \cap \Omega$ .*

Dans notre cadre, nous avons le calcul suivant :

**Lemme 2.2.** *Soit  $\mathbf{h} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^2$  telle que  $\|\nabla \mathbf{h}\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)} < 1$ . Avec les notations précédentes, le domaine  $\Omega_h := \varphi_h(\Omega)$  est un ouvert de classe  $C^2$  tel que  $\partial\Omega_h = \varphi_h(\partial\Omega)$ .*

*Démonstration.* Sous les hypothèses de ce lemme, on remarque tout d'abord que  $\partial\Omega_h = \varphi_h(\partial\Omega)$ . En effet, pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , si  $\varphi_h(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{\Omega}_h$  alors par le théorème d'inversion locale, il existe un ouvert  $\mathcal{U}$  contenant  $\mathbf{x}$  tel que  $\varphi_h(\mathcal{U}) \subset \overset{\circ}{\Omega}_h$  donc  $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{\Omega}$ . On montre de même que, si  $\varphi_h(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_h$  alors  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ . Par contraposée, on déduit la propriété voulue.

Prenons maintenant  $\mathbf{y} \in \partial\Omega_h$  et  $\mathbf{x}$  son antécédent par  $\varphi_h$ . Par hypothèse, il existe des ouverts  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  de  $\mathbb{R}^3$  et  $F$  de classe  $C^2$  tels que

$$\begin{cases} F : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V} \\ F(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = \mathcal{V} \cap \mathbb{R}_+^3 \end{cases} \quad \text{avec} \quad F(\mathbf{x}) = 0.$$

Posons  $\mathcal{U}_h = \varphi_h(\mathcal{U})$ ,  $F_h = F \circ \varphi_h^{-1}$  et  $\mathcal{V}_h = \varphi_h(\mathcal{V})$ . Alors  $\mathcal{U}_h$  et  $\mathcal{V}_h$  sont des ouverts (comme image réciproque d'un ouvert par une application continue). De plus  $F_h : \mathcal{U}_h \mapsto \mathcal{V}_h$  est de classe  $C^2$  et satisfait  $F_h(\mathbf{y}) = F(\mathbf{x}) = 0$  et

$$F_h(\mathcal{U}_h \cap \Omega_h) = F(\mathcal{U} \cap \Omega) = \mathcal{V} \cap \mathbb{R}_+^3 = \mathcal{V}_h \cap \mathbb{R}_+^3.$$

Ceci termine la preuve.

□

### 2.1.2 Quelques éléments sur l'écriture de $\partial B_h$

Pour la suite, nous devons également étudier les propriétés de l'endomorphisme de Weingarten sur  $\partial\Omega_h$ . Pour cela, on remarque, que par application des résultats du lemme 2.2,  $\partial\Omega_h$  est naturellement une surface de  $\mathbb{R}^3$  de classe  $C^2$ . On peut alors décrire localement la géométrie de  $\partial\Omega_h$  via les première  $I^h \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et seconde  $II^h \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  formes fondamentales comme suit.

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3; (u, v) \mapsto f(u_1, u_2)$  une paramétrisation locale de la surface  $\partial\Omega_h$ . On rappelle que la matrice de la première forme fondamentale en  $p \in \partial\Omega_h$  notée  $I_p$ , est la matrice du produit scalaire  $\langle \partial_{u_i}, \partial_{u_j} \rangle(a) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  avec  $a \in U$  de  $\mathbb{R}^2$  vérifiant  $f(a) = p$ .

En notant  $\boldsymbol{\nu} = \frac{\partial_{u_1} f \times \partial_{u_2} f}{\|\partial_{u_1} f \times \partial_{u_2} f\|}$ , on appelle par  $II_p$  la seconde forme fondamentale en  $p$  la matrice du produit scalaire  $\langle \boldsymbol{\nu}, \partial_{u_i u_j}^2 f \rangle$ .

On définit alors l'endomorphisme de Weingarten comme étant l'unique application linéaire (ici représentée par une matrice  $W^h$ ) satisfaisant :

$$II^h = W^h I^h \tag{2.3}$$

Dans notre cas où  $\Omega_h$  est obtenu par petite déformation d'une sphère unitaire, on a alors le résultat suivant :

**Lemme 2.3.** *Il existe une constante  $K$  telle que, pour tout  $p \in \partial\Omega_h$  :*

$$|W_p^h + \mathbb{I}_2| \leq K \|\mathbf{h}\|_{C^2(\overline{B(0,1)})}.$$

*Démonstration.* Sans restriction de généralité, on suppose dans la suite que  $p =$

$\varphi_h(\mathbf{e}_3)$ . Rappelons d'abord une paramétrisation adaptée de  $\mathbb{S}^2$  et de  $\partial\Omega_h$ . On pose

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0 : \{u^2 + v^2 < 1\} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \left(u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}\right) \end{aligned}$$

le paramétrage de la boule unité et

$$\mathbf{f}(u, v) = \varphi_h \circ \mathbf{f}_0(u, v),$$

le paramétrage du bord  $\partial\Omega_h$ .

Au voisinage du point  $p = \varphi_h(\mathbf{e}_3)$ , c'est-à-dire pour  $(u, v)$  suffisamment petits, les deux vecteurs tangents à  $\partial\Omega_h$  au point  $\mathbf{f}(u, v)$  sont alors donnés par

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}(u, v)}{\partial u} = \\ \partial_1 \varphi_h \left(u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}\right) - \frac{u}{\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}} \partial_3 \varphi_h \left(u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}(u, v)}{\partial v} = \\ \partial_2 \varphi_h \left(u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}\right) - \frac{v}{\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}} \partial_3 \varphi_h \left(u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}\right) \end{aligned}$$

En particulier, on a, au point  $p = \varphi_h(\mathbf{e}_3)$  :

$$\partial_u \mathbf{f}(0, 0) = \partial_1 \varphi_h(0, 0, 1) \quad \text{et} \quad \partial_v \mathbf{f}(u, v) = \partial_2 \varphi_h(0, 0, 1)$$

Or  $\varphi_h = \mathbb{I}_2 + \mathbf{h}$  et donc  $\partial_i \varphi_h = \mathbf{e}_i + \partial_i \mathbf{h}$ . On peut ainsi calculer la **matrice de la**



première forme fondamentale :

$$I_p^{\mathbf{h}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} |\partial_1 \mathbf{h}|^2 + 2\partial_1 h_1 & \partial_2 h_1 + \partial_1 h_2 + (\partial_1 \mathbf{h}) \cdot (\partial_2 \mathbf{h}) \\ \partial_2 h_1 + \partial_1 h_2 + (\partial_1 \mathbf{h}) \cdot (\partial_2 \mathbf{h}) & |\partial_2 \mathbf{h}|^2 + 2\partial_2 h_2 \end{pmatrix}$$

$$= I_d + O(\|\mathbf{h}\|_{C^1(\overline{B(0,1)})}).$$

D'autre part, le champ de vecteurs normaux unitaires au plan tangent de  $\partial\Omega_{\mathbf{h}}$  est donné par

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\partial_u \mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x})) \times \partial_v \mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}))}{|\partial_u \mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x})) \times \partial_v \mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}))|}$$

pour  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \partial\Omega_{\mathbf{h}}$ .

Avec les expressions précédentes, on a donc, au point  $p$  :

$$\mathbf{n}(p) = \frac{(\mathbf{e}_1 + \partial_1 \mathbf{h}(\mathbf{e}_3)) \times (\mathbf{e}_2 + \partial_2 \mathbf{h}(\mathbf{e}_3))}{\|(\mathbf{e}_1 + \partial_1 \mathbf{h}(\mathbf{e}_3)) \times (\mathbf{e}_2 + \partial_2 \mathbf{h}(\mathbf{e}_3))\|}$$

et étant données les hypothèses sur  $\mathbf{h}$  :

$$|\mathbf{n}(p) - \mathbf{e}_3| \lesssim \|\mathbf{h}\|_{C^1(\overline{B(0,1)})}. \quad (2.4)$$

De plus, on a les dérivées à l'ordre deux suivantes :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}(u, v)}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left( \partial_1 \varphi_{\mathbf{h}}(u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}) \right. \\ \left. - \frac{u}{\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}} \partial_3 \varphi_{\mathbf{h}}(u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}) \right)$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{f}(u, v)}{\partial u^2} = & \partial_{11} \boldsymbol{\varphi}_h - \frac{u}{\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}} \partial_{31} \boldsymbol{\varphi}_h - \frac{1 - v^2}{(1 - u^2 - v^2)^{3/2}} \partial_3 \boldsymbol{\varphi}_h \\ & - \frac{u}{\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}} \left( \partial_{13} \boldsymbol{\varphi}_h - \frac{u}{\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}} \partial_{33} \boldsymbol{\varphi}_h \right), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}(0, 0)}{\partial u^2} = \partial_{11} \boldsymbol{\varphi}_h(0, 0, 1) - \partial_3 \boldsymbol{\varphi}_h(0, 0, 1)$$

De même

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{f}(0, 0)}{\partial v^2} &= \partial_{22} \boldsymbol{\varphi}_h(0, 0, 1) - \partial_3 \boldsymbol{\varphi}_h(0, 0, 1) \\ \frac{\partial^2 \mathbf{f}(0, 0)}{\partial u \partial v} &= \partial_{21} \boldsymbol{\varphi}_h(0, 0, 1) \end{aligned}$$

On peut calculer maintenant les coefficients de **la matrice de la seconde forme fondamentale** dans la base  $\partial_u \mathbf{f}, \partial_v \mathbf{f}$  en rappelant (2.4) (avec les notations de Landau pour  $o$  et  $O$ ) et l'expression de  $\boldsymbol{\varphi}_h$  en termes de  $\mathbf{h}$ . On obtient tout d'abord :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \partial_{uu} \mathbf{f} &= (\mathbf{e}_3 + O(\|\mathbf{h}\|_{C^1(\overline{B(0,1)})})) \cdot (-\mathbf{e}_3 + O(\|\mathbf{h}\|_{C^2(\overline{B(0,1)})})) \\ &= -1 + O(\|\mathbf{h}\|_{C^2(\overline{B(0,1)})}), \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \partial_{vv} \mathbf{f} &= (\mathbf{e}_3 + O(\|\mathbf{h}\|_{C^1(\overline{B(0,1)})})) \cdot (-\mathbf{e}_3 + O(\|\mathbf{h}\|_{C^2(\overline{B(0,1)})})) \\ &= -1 + O(\|\mathbf{h}\|_{C^2(\overline{B(0,1)})}), \end{aligned}$$

enfin

$$\mathbf{n} \cdot \partial_{uv} \mathbf{f} = O(\|\mathbf{h}\|_{C^2(\overline{B(0,1)})}).$$

Finalement, on a montré que  $II_p^h = -\mathbb{I}_2 + O(\|\mathbf{h}\|_{C^2(\overline{B(0,1)})})$ . Comme l'endomorphisme de Weingarten  $W^h$  est caractérisé par la relation (2.3)  $I^h W^h = II^h$  on obtient finalement le résultat énoncé.  $\square$

## 2.2 Problème à déformation fixée

Dans cette section, on se donne une fonction  $\mathbf{h} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que l'on suppose  $C^2(\mathbb{R}^3)$ , bornée et à dérivée bornée, et telle que  $\|\mathbf{h}\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)} < 1$ . On définit alors  $\varphi_h := I_d + \mathbf{h}$  et on suppose que les ouverts  $B$  et  $\Omega$  correspondent respectivement aux ouverts étudiés dans la section précédente :

$$B_h := \varphi_h(B(0,1)) \quad \Omega_h = \varphi_h(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B(0,1)}).$$

On s'intéresse alors à l'**existence et l'unicité des solutions** faibles de l'équation de Stokes dans  $\Omega_h$  :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} - \nabla p = 0 \text{ dans } \Omega_h \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega_h \end{cases} \quad (2.5)$$

avec les conditions aux bords :

$$\begin{cases} (\mathbf{u} - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_h \\ (\mathbf{u} - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{n} = -\lambda D(\mathbf{u}) \mathbf{n} \times \mathbf{n} = -\frac{\lambda}{2} \Sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \times \mathbf{n} \text{ sur } \partial\Omega_h \end{cases} \quad (2.6)$$

où  $(\mathbf{V}, \boldsymbol{\omega}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  sont donnés. La longueur de glissement  $\lambda$  est supposée strictement positive dans toute la section. Comme énoncé précédemment, le cas  $\lambda = 0$  correspond à une condition de type Dirichlet dont on pourra trouver un traitement dans les références classiques (voir par exemple [23, Chapitre 5]).

### 2.2.1 Notion de solution faible

Supposons tout d'abord  $(\mathbf{u}, p)$  solution régulière de (2.5)-(2.6) et prenons  $\mathbf{w} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$  une fonction test telle que :

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \text{ sur } \bar{\Omega}_h \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_h. \quad (2.7)$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale extérieure.

Remarquons alors que,  $\mathbf{u}$  étant à divergence nulle, on a

$$\Delta \mathbf{u} - \nabla p = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} - pI) = \nabla \cdot (2D(\mathbf{u}) - pI).$$

Par suite, il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_h} (\Delta \mathbf{u} - \nabla p) \cdot \mathbf{w} \\ &= \int_{\Omega_h} (\operatorname{div}(2D(\mathbf{u}) - pI)) \cdot \mathbf{w} \\ &= -2 \int_{\Omega_h} D(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{w} + \int_{\partial\Omega_h} (2D(\mathbf{u}) - pI) \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \, d\sigma \\ &= -2 \int_{\Omega_h} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{w}) + \int_{\partial\Omega_h} ((2D(\mathbf{u}) \mathbf{n} - p \mathbf{n}) \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{n}) \, d\sigma \end{aligned}$$

puisque  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\partial\Omega_h$ . Ainsi

$$\begin{aligned}
0 &= -2 \int_{\Omega_h} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{w}) - \frac{2}{\lambda} \int_{\partial\Omega_h} ((\mathbf{u} - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{n}) \, d\sigma \\
&= -2 \int_{\Omega_h} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{w}) - \frac{2}{\lambda} \int_{\partial\Omega_h} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{n}) \, d\sigma \\
&\quad + \frac{2}{\lambda} \int_{\partial\Omega_h} ((\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{n}) \, d\sigma \\
&= -2 \int_{\Omega_h} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{w}) - \frac{2}{\lambda} \int_{\partial\Omega_h} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \, d\sigma + \frac{2}{\lambda} \int_{\partial\Omega_h} (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{w} \, d\sigma
\end{aligned}$$

En résumé, si  $(\mathbf{u}, p)$  est une solution classique de (2.5)-(2.6), on a l'identité :

$$\int_{\Omega_h} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{w}) + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega_h} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \, d\sigma = \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega_h} (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{w} \, d\sigma \quad (2.8)$$

pour tout  $\mathbf{w} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant (2.7). On note par la suite

$$((\mathbf{u}, \mathbf{w}))_h = \int_{\Omega_h} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{w}) + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega_h} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \, d\sigma \quad (2.9)$$

la forme bilinéaire et

$$L(\mathbf{w}) = \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega_h} (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{w} \, d\sigma. \quad (2.10)$$

On peut alors écrire la famille d'identités (2.8) ci-dessus sous la forme simplifiée :

$$((\mathbf{u}, \mathbf{w}))_h = L(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3) \text{ satisfaisant (2.7)}. \quad (2.11)$$

On va montrer plus loin que la fonctionnelle  $\mathbf{u} \mapsto ((\mathbf{u}, \mathbf{w}))_h$  est continue pour la topologie associée à la norme  $L^2$  du gradient. Ceci nous fournit le cadre fonctionnel pour énoncer une formulation faible de notre problème. Pour un domaine extérieur suffisamment régulier (typiquement de bord Lipschitz), on introduit donc :

$$D^{1,2}(\Omega_h) = \{\mathbf{u} \in L^6(\Omega_h) \text{ tel que } \nabla \mathbf{u} \in [L^2(\Omega_h)]^9\}. \quad (2.12)$$

On rappelle ci-dessous les propriétés élémentaires de cet espace qu'on peut retrouver dans [23, Section II.6].

**Proposition 1.** *Étant donné un domaine extérieur  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  de frontière lipschitz,*

1.  $D^{1,2}(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}$$

dans lequel  $C_c^\infty(\bar{\Omega})$  est un sous-espace dense.

2. Il existe un opérateur de trace continu  $D^{1,2}(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$  surjectif et dont le noyau est la fermeture de  $C_c^\infty(\Omega)$  pour la topologie de  $D^{1,2}(\Omega)$  ci-dessus.

Pour la recherche de nos solutions et l'écriture de la formulation faible, nous utiliserons également les notations suivantes. Pour un domaine extérieur  $\Omega$  suffisamment régulier (typiquement lipschitz), nous notons :

$$\mathbb{V}^1(\Omega) = \{\mathbf{u} \in D^{1,2}(\Omega) \text{ tel que } \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\};$$

$$\mathbb{V}_0^1(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{V}^1(\Omega) \text{ tel que } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

On rappelle les propriétés suivantes héritées du cas sans glissement :

**Lemme 2.4.** *Etant donné  $\Omega$  domaine extérieur de classe  $C^2$*

1.  $C_c^\infty(\bar{\Omega}) \cap \mathbb{V}^1(\Omega)$  est dense dans  $\mathbb{V}^1(\Omega)$
2. Pour tout  $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$ , il existe  $\mathbf{u} \in \mathbb{V}^1(\Omega)$  tel que  $\mathbf{u} \times \mathbf{n} = \varphi \times \mathbf{n}$  sur  $\partial\Omega$ .

*Démonstration.* 1. Soit  $\mathbf{u}$  dans  $\mathbb{V}^1(\Omega)$  avec  $\partial\Omega$  Lipschitz.

On dispose de  $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_*$  et  $\mathbf{u}_* \in H^{1/2}(\Omega)$  et satisfait

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_* \cdot \mathbf{n} = 0.$$

On peut alors définir  $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)$  solution de

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} - \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega_h \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega_h \end{cases} \quad (2.13)$$

et  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_*$ .

On pose

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{cases} \mathbf{u} & \text{sur } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \\ \mathbf{v} & \text{sur } \Omega_h \end{cases} \quad (2.14)$$

alors  $\bar{\mathbf{u}} \in H^1(\mathbb{R}^3)$  et  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ .

Donc d'après Galdi, on peut approcher  $\bar{\mathbf{u}}$  par des fonctions  $(\mathbf{u}_n) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$  au sens  $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$ .

2. Soit  $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$ , posons  $\bar{\varphi} = (\varphi - (\varphi \cdot \mathbf{n})\mathbf{n})$ . On a donc  $\bar{\varphi} \in C^1(\partial\Omega)$  et  $\bar{\varphi} \cdot \mathbf{n} = 0$ . On peut alors relever  $\bar{\varphi}$  en posant  $V = B(0, R) \setminus \Omega$  avec  $R$  suffisamment grand pour que  $\partial V = \partial B(0, R) \cup \partial\Omega$  et en considérant  $\mathbf{w}$  le

champ de vitesse solution d'un problème de Stokes

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{w} - \nabla q = 0 & \text{dans } V \\ \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 & \text{dans } V \end{cases} \quad (2.15)$$

avec les conditions aux bords suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{w} = \bar{\varphi} & \text{sur } \partial\Omega \\ \mathbf{w} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial B(0, R) \end{cases} \quad (2.16)$$

Une telle solution existe bel et bien par application du [23, Theorem IV.1.1], la condition aux bords ne prescrivant pas de flux. On peut alors considérer l'extension par 0 de cette solution qui définit un élément de  $\mathbb{V}^1(\Omega)$ .

□

On peut remarquer que ce lemme implique en particulier que  $\mathbb{V}^1(\Omega_h)$  et  $\mathbb{V}_0^1(\Omega_h)$  sont des espaces de Hilbert séparables pour le produit scalaire hérité de  $D^{1,2}(\Omega_h)$ . Avec ces notations, nous introduisons la notion suivante de solution faible dans l'esprit de [23].

**Définition 2.2.** *Étant donnés  $(\mathbf{V}, \boldsymbol{\omega}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , on appelle solution faible de (2.5)-(2.6) tout champ de vecteurs  $\mathbf{u} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$  qui satisfait les propriétés suivantes :*

1.  $\mathbf{u} \in \mathbb{V}^1(\Omega_h)$
2.  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$  sur  $\partial\Omega_h$
3.  $\mathbf{u}$  vérifie (2.8) pour tout  $\mathbf{w} \in \mathbb{V}_0^1(\Omega_h)$ .

Cette définition est satisfaisante au sens suivant :



**Lemme 2.5.** *Etant donné  $(\mathbf{V}, \boldsymbol{\omega}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  et  $\mathbf{u}$  une solution faible de (2.5)-(2.6), on peut construire un champ de pression  $p \in L^2_{loc}(\Omega_h)$  tel que :*

1. (2.5) est satisfait dans  $\mathcal{D}'(\Omega_h)$
2.  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$  au sens de  $H^{1/2}(\Omega_h)$
3.  $(\mathbf{u} - (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})) \times \mathbf{n} = -\frac{\lambda}{2} \Sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \times \mathbf{n}$  au sens de  $\mathcal{D}'(\partial\Omega_h)$ .

*Démonstration.* 1. Soient  $(\mathbf{V}, \boldsymbol{\omega}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{u}$  une solution faible de (2.5)-(2.6) et  $\mathcal{F}$  la fonctionnelle définie sur  $\mathbb{V}^1(\Omega_h)$  par

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\varphi}) = \int_{\Omega_h} D(\mathbf{u}) : D(\boldsymbol{\varphi}) + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega_h} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\sigma - \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega_h} (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\sigma$$

$\mathcal{F}$  est linéaire et continue. En effet, nous montrerons au lemme 2.6 que

$$\boldsymbol{\varphi} \mapsto \int_{\Omega_h} D(\mathbf{u}) : D(\boldsymbol{\varphi}) + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega_h} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\sigma \text{ est continue.}$$

En plus pour tout  $\boldsymbol{\varphi}$  dans  $C_c^\infty(\Omega_h)$  tel que  $\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = 0$ , on a  $\mathcal{F}(\boldsymbol{\varphi}) = 0$ . Donc d'après le théorème de Rham, il existe un  $p \in L^2_{loc}(\Omega_h)$  tel que

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\varphi}) = \int_{\Omega_h} p \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}$$

Par intégration par parties, on a alors

$$-\langle \Delta \mathbf{u}; \boldsymbol{\varphi} \rangle = -\langle \boldsymbol{\varphi}; \nabla p \rangle$$

$$\langle (-\Delta \mathbf{u} + \nabla p); \boldsymbol{\varphi} \rangle = 0$$

avec  $\boldsymbol{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega)$

2. Soit  $\mathbf{u}$  solution faible, on peut décomposer  $\mathbf{u}$  sur le bord suivant

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \text{ dans } H^{1/2}(\Omega_h) \text{ Or } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \text{ au}$$

sens de la trace  $H^{1/2}(\Omega_h)$ . D'après le point précédent, on a donc pour toute fonction test  $\boldsymbol{\varphi} \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap \mathbb{V}_0^1(\Omega)$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega_h} (\mathbf{u} - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\sigma &= -\frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega_h} (\mathbf{u} - (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\sigma \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega_h} ((\mathbf{u} - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{n}) \cdot (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{n}) \end{aligned}$$

D'autre part, par intégration par parties, on a

$$\int_{\Omega_h} D(\mathbf{u}) : D(\boldsymbol{\varphi}) = \int_{\Omega_h} D(\mathbf{u}) : \nabla \boldsymbol{\varphi} = \langle \sigma(\mathbf{u}, p); \boldsymbol{\varphi} \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}.$$

Nous avons donc

$$\int_{\partial\Omega_h} (D(\mathbf{u})\mathbf{n} \times \mathbf{n}) \cdot (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{n}) + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega_h} (\mathbf{u} - (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})) \times \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{n}) \, d\sigma = 0$$

Nous sommes alors en position pour appliquer le Lemme 2.4-2 et, pour toute fonction-test  $\bar{\boldsymbol{\varphi}} \in C^\infty(\partial\Omega)$  construire un relèvement  $\boldsymbol{\varphi}$  de cette condition au bord. Appliquant l'identité ci-dessus à ce relèvement, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle (D(\mathbf{u})\mathbf{n} \times \mathbf{n}) \cdot (\bar{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathbf{n}) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \\ + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega_h} (\mathbf{u} - (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})) \times \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{n}) \, d\sigma = 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire le point 3 de l'énoncé.

□

## 2.2.2 Résolution et régularité

Le résultat principal de cette sous-section est le

**Théorème 2.1.** *Si  $\mathbf{h} \in C^2(\mathbb{R}^3)$  et  $\|\mathbf{h}\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)}$  est suffisamment petit, il existe une unique solution faible de (2.5)-(2.6) pour toute valeur de  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3$  et  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ .*

Le point crucial de la preuve est de montrer la coercivité de la forme bilinéaire  $((\cdot, \cdot))$  définie par (2.9). Malheureusement, cette forme bilinéaire s'exprime en fonction du gradient symétrique. Il est donc nécessaire au préalable de réécrire ce produit scalaire en terme du gradient complet. Pour cela, nous allons appliquer l'identité remarquable suivante :

**Proposition 2.** *Etant donné  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{V}_0^1(\Omega_h) \times \mathbb{V}_0^1(\Omega_h)$  on a :*

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_h = \int_{\Omega_h} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega_h} \left[ \left( \frac{1}{\lambda} - W^h \right) \mathbf{u} \times \mathbf{n} \right] \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) d\sigma.$$

avec  $W^h$  l'endomorphisme de Weingarten.

*Démonstration.* Sous les hypothèses de la proposition, on a  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  et donc  $\Delta \mathbf{u} = 2\operatorname{div}(D(\mathbf{u}))$ . Par intégration par parties, il vient alors :

$$\int_{\partial\Omega_h} \partial_n \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\sigma - \int_{\Omega_h} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} = \int_{\partial\Omega_h} 2D(\mathbf{u})\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\sigma - 2 \int_{\Omega_h} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \quad (2.17)$$

En utilisant alors que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\partial\Omega_h$  on peut simplifier les termes de bords :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_h} \partial_n \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\sigma &= \int_{\partial\Omega_h} (\partial_n \mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) d\sigma \\ \int_{\partial\Omega_h} 2D(\mathbf{u})\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\sigma &= \int_{\partial\Omega_h} (2D(\mathbf{u})\mathbf{n} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) d\sigma \end{aligned}$$

et appliquer [24, lemme 1] qui garantit, avec nos notations que :

$$2D(\mathbf{u})\mathbf{n} \times \mathbf{n} = \partial_n \mathbf{u} \times \mathbf{n} - W^h \mathbf{u} \times \mathbf{n}, \quad \text{sur } \partial\Omega_h,$$

où  $W^h$  est l'endomorphisme de Weingarten calculé dans la section précédente. En substituant ces dernières identités dans (2.17), il vient :

$$2 \int_{\partial\Omega_h} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_h} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_{\partial\Omega_h} (W^h \mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{n})$$

et finalement :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_h} D(\mathbf{u})\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega_h} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma &= \int_{\Omega_h} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \\ &+ \int_{\partial\Omega_h} \left[ \left( \frac{1}{\lambda} - W^h \right) \mathbf{u} \times \mathbf{n} \right] \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{n} \, d\sigma. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ceci termine la preuve. □

**Lemme 2.6.** *Supposons  $\|\mathbf{h}\|_{C^2(\bar{B}(0,1))}$  suffisamment petit. Alors, la forme bilinéaire  $((\cdot, \cdot))_h$  définie par (2.9) est continue et coercive sur  $\mathbb{V}_0^1(\Omega_h)$ .*

*Démonstration.* On rappelle que  $((\cdot, \cdot))$  est définie par :

$$((\mathbf{u}, \mathbf{w}))_h = \int_{\Omega_h} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{w}) + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \, d\sigma$$

Ceci définit clairement une forme bilinéaire (et même symétrique). De plus :

- $((\cdot, \cdot))_h$  est continue sur  $\mathbb{V}_0^1(\Omega_h)$  :

En effet, pour tout  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in [\mathbb{V}_0^1(\Omega_h)]^2$  on a :

$$\begin{aligned} |((\mathbf{u}, \mathbf{v}))| &\leq \left| \int_{\Omega_h} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \right| + \frac{1}{\lambda} \left| \int_{\partial\Omega_h} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma \right| \\ &\lesssim \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_h)} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_h)} + \frac{1}{\lambda} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\partial\Omega_h)} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\partial\Omega_h)} \\ &\lesssim \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \|\mathbf{u}\|_{\mathbb{V}^1(\Omega_h)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbb{V}^1(\Omega_h)} \end{aligned}$$

où on a utilisé la continuité de la trace  $\mathbb{V}_0^1(\Omega_h) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega_h) \subset L^2(\partial\Omega_h)$ .

- $((\cdot, \cdot))_h$  est coercive sur  $\mathbb{V}_0^1(\Omega_h)$  :

En effet, pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbb{V}_0^1(\Omega_h)$  on a, appliquant la Proposition 2 :

$$((\mathbf{u}, \mathbf{u}))_h = \int_{\Omega_h} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \int_{\partial\Omega_h} \left[ \left( \frac{1}{\lambda} - W^h \right) \mathbf{u} \times \mathbf{n} \right] \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \, d\sigma.$$

On peut alors appliquer le lemme 2.3 et :

$$((\mathbf{u}, \mathbf{u}))_h \geq \int_{\Omega_h} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \left( 1 + \frac{1}{\lambda} - O(\|\mathbf{h}\|_{C^2(\overline{B(0,1)})}) \right) \int_{\partial\Omega_h} |\mathbf{u} \times \mathbf{n}|^2 \, d\sigma.$$

soit, pour  $\|\mathbf{h}\|_{C^2(\overline{B(0,1)})}$  suffisamment petit :  $((\mathbf{u}, \mathbf{u})) \geq \|\mathbf{u}\|_{\mathbb{V}_0^1(\Omega_h)}^2$ .

□

Ce lemme est le point crucial de la preuve du Théorème 2.1 suivante :

*Preuve du Théorème 2.1.* Sous les hypothèse du Théorème 2.1, on remarque qu'il existe  $R_{h>0}$  tel que  $\Omega_h \subset B(0, R_h)$ . On peut alors poser :

$$U[\mathbf{V}, \boldsymbol{\omega}] = \nabla \times \left( \chi_{R_h}(\mathbf{x}) \left( \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{x}}{2} + \boldsymbol{\omega} |\mathbf{x}|^2 \right) \right) \quad (2.19)$$

où  $\chi_{R_h}$  est une fonction de troncature  $C^\infty$  telle que

$$\chi_{R_h} = 1 \text{ sur } B(0, R_h) \quad \chi_{R_h} = 0 \text{ hors de } B(0, 2R_h)$$

Il est immédiat que  $U[\mathbf{V}, \boldsymbol{\omega}] \in \mathbb{V}^1(\Omega_h)$  et satisfait

$$U[\mathbf{V}, \boldsymbol{\omega}] \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \partial\Omega_h.$$

Des propriétés de trace de  $\mathbb{V}^1$ , on a donc que la recherche d'une solution faible de (2.5)-(2.6) se ramène donc à trouver  $\mathbf{v} \in \mathbb{V}_0^1(\Omega_h)$  tel que :

$$((\mathbf{v}, \mathbf{w}))_h = L(\mathbf{w}) - ((U[\mathbf{V}, \boldsymbol{\omega}], \mathbf{w}))_h, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{V}_0^1(\Omega_h) \quad (2.20)$$

Or, les propriétés de traces sur  $D^{1,2}(\Omega_h)$  garantissent que  $L$  est une forme linéaire continue sur  $\mathbb{V}_0^1(\Omega_h)$ . Du lemme précédent, pour  $\|h\|_{C^2(\overline{B(0,1)})}$  suffisamment petit, la forme  $((\cdot, \cdot))$  est bilinéaire, continue et coercive sur l'espace de Hilbert  $\mathbb{V}_0^1(\Omega_h)$ . L'existence et l'unicité d'un tel  $\mathbf{v}$  résulte alors de l'application du théorème de Lax-Milgram.  $\square$

Pour pouvoir définir proprement les efforts exercés par une solution faible de (2.5)-(2.6) sur  $\partial B_h$ , nous aurons besoin du lemme suivant [34]

**Proposition 3.** *Soit  $\mathbf{u}$  solution faible du problème de Stokes (2.5)-(2.6) et  $p \in L_{loc}^2(\Omega_h)$  un champ de pression associé. Alors, pour tout  $M > 0$*

$$\mathbf{u} \in H^2(B(0, M) \cap \Omega_h), \quad p \in H^1(B(0, M) \cap \Omega_h).$$

Notons qu'alors, étant donné une solution faible du problème de Stokes (2.5)-

(2.6) de pression associée  $p \in L^2_{loc}(\Omega_h)$  nous avons que  $\mathbf{u} \in H^2$  et  $p \in H^1$  au voisinage de  $\partial\Omega_h$ . Ainsi, nous avons une trace raisonnable pour  $2D(\mathbf{u})\mathbf{n} - p\mathbf{n}$  sur  $\partial\Omega_h$  et les contraintes exercées par l'écoulement  $(\mathbf{u}, p)$  sur  $\partial B_h$  sont bien définies par les formules classiques :

$$F = \int_{\partial B_h} (2D(\mathbf{u})\mathbf{n} - p\mathbf{n})d\sigma \quad T = \int_{\partial B_h} \mathbf{x} \times (2D(\mathbf{u})\mathbf{n} - p\mathbf{n})d\sigma.$$

## 2.3 Le cas de la sphère : calculs explicites

Soit  $B = B(0, 1)$  et  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}$ . On considère ici, la résolution explicite du problème (2.5)-(2.6) dans le cas  $\mathbf{h} = 0$  et  $B = B(0, 1)$  ou  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B(0, 1)}$ . Dans ce qui suit, nous obtenons dans un premier temps la forme analytique de la solution de (2.5)-(2.6). Nous en déduisons ensuite les contraintes exercées par l'écoulement sur la particule  $B$  : la force  $F$  et le couple  $T$ . Du fait de la linéarité du problème (2.5) et de la linéarité de la condition au bord (2.6) vue comme fonction de  $\mathbf{V}$  et  $\boldsymbol{\omega}$ , on remarque qu'on peut décomposer le calcul de la solution de (2.5)-(2.6) et des efforts associé en considérant indépendamment les cas  $\boldsymbol{\omega} = 0$  (cas d'une translation pure) et  $\mathbf{V} = 0$  (cas d'une rotation pure). Ces deux cas sont traités dans les sections suivantes respectivement.

### 2.3.1 Résolution de (2.5)-(2.6) pour une translation pure

Dans cette sous-section, nous commençons par une résolution explicite du système de Stokes :

**Théorème 2.2.** *Etant donné  $\lambda > 0$ , et  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3$  il existe une paire  $(\mathbf{u}, p) \in$*

$\dot{H}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}) \times L^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B})$  solution de (2.5)-(2.6) avec  $\boldsymbol{\omega} = 0$ , donnée par les formules :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \left[ \frac{A_0}{|\mathbf{x}|} + \frac{A_1}{|\mathbf{x}|^3} \right] \mathbf{V} + \left[ \frac{A_0}{|\mathbf{x}|} - \frac{3A_1}{|\mathbf{x}|^3} \right] \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} \quad (2.21)$$

$$p(\mathbf{x}) = 2A_0 \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad (2.22)$$

avec

$$A_0 = \frac{3 + 3\lambda}{4 + 6\lambda} \quad \text{et} \quad A_1 = \frac{1}{4 + 6\lambda}.$$

*Démonstration.* On remarque que les formules donnent des fonctions lisses qui décroissent rapidement à l'infini :

$$|\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})| + |p(\mathbf{x})| \leq C \frac{|\mathbf{V}|}{|\mathbf{x}|^2}$$

si bien qu'on a bien  $\mathbf{u} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B})$  et  $p \in L^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B})$ . Il s'agit donc de justifier que ces fomules fournissent une solution de (2.5)-(2.6). Il serait suffisant ici de vérifier que la formule satisfait bien l'équation. Mais, par souci de clarté, nous donnons la méthode de construction qui permet d'aboutir à cette formule ci-dessous.

Supposons tout d'abord que  $(\mathbf{u}, p)$  est une solution classique de notre problème et définissons,  $\mathbf{w} = \mathbf{rot} \mathbf{u}$  la vorticité associée. En prenant le rotationnel de la première équation de (2.5), on obtient que :

$$\Delta \mathbf{w} = 0 \quad (2.23)$$

En prenant ensuite la divergence de (2.5) on obtient également que :

$$\Delta p = 0 \quad (2.24)$$



On cherche maintenant  $\mathbf{u}$  sous la forme  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{rot}(\nabla f(r) \times \mathbf{V})$  avec  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ . En utilisant l'identité remarquable :

$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{grad}(\mathit{div} \mathbf{v}) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{v})$  satisfaite par tout champ de vecteur  $\mathbf{v}$  régulier, on obtient alors

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\nabla f(r) \times \mathbf{V})) = -\Delta(\mathbf{rot}(f(r)\mathbf{V}))$$

En utilisant (2.23) et en développant l'opérateur  $\mathbf{rot}$  il vient alors :

$$0 = \Delta^2(\nabla \times (f(r)\mathbf{V})) = \Delta^2(\nabla f(r)) \times \mathbf{V}$$

si bien que  $\Delta(\Delta f(r))$  est constante. On impose alors que  $f$  décroisse suffisamment vite à l'infini si bien que cette constante est nulle. En rappelant que sur les fonctions radiale  $\Delta \equiv 1/r^2 d/dr[r^2 d/dr]$ , on obtient après intégration :

$$\Delta f(r) = -\frac{2A_0}{r} + K$$

avec  $A_0$  et  $K$  des constantes réelles. On peut alors utiliser à nouveau la condition que  $f$  décroît suffisamment vite et l'intégration de l'opérateur  $\Delta$ . Ceci donne :

$$f(r) = -A_0 r - \frac{A_1}{r} + A_2,$$

avec  $A_0, A_1, A_2$  des constantes. En remplaçant dans l'expression de  $V$ , on trouve, par suite :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \left(\frac{A_0}{r} + \frac{A_1}{r^3}\right) \mathbf{V} + \left(\frac{A_0}{r} - \frac{3A_1}{r^3}\right) \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}}{r^2}. \quad (2.25)$$

On peut alors retrouver la pression associée en remarquant que, avec les propriétés

satisfaites par  $f$  :

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{u} &= \Delta(\mathbf{rot rot}(f\mathbf{V})) = \Delta(\nabla \mathbf{div}(f\mathbf{V})) - \Delta^2(f\mathbf{V}) \\ &= \nabla[(\nabla \Delta f) \cdot \mathbf{V}].\end{aligned}$$

Par identification, on a donc :

$$p(\mathbf{x}) = (\nabla \Delta f) \cdot \mathbf{V} = 2A_0 \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{x}}{r^3}.$$

Il nous reste à déterminer les constantes  $A_0$  et  $A_1$ . Pour cela, on exploite les conditions aux limites :

$$\begin{cases} (\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ (\mathbf{u} - \mathbf{V}) \times \mathbf{n} = -\lambda D(\mathbf{u})\mathbf{n} \times \mathbf{n} = -\frac{\lambda}{2}\Sigma(\mathbf{u}, p)\mathbf{n} \times \mathbf{n} \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.26)$$

En notant que le bord de  $\Omega$  correspond à  $r = 1$ , on obtient que, sur  $\partial\Omega$  :

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} &= [A_0 + A_1 - 1](\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) + [A_0 - 3A_1](\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \\ &= [2A_0 - 2A_1 - 1]\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\end{aligned}$$

Alors d'après la première condition au bord, on a donc (on suppose ici que la sphère est de rayon 1)

$$2A_0 - 2A_1 - 1 = 0 \quad (2.27)$$

Par la deuxième condition condition au bord, on remarque, que la formule (2.25)

implique

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) = & - \left( \frac{A_0}{r^2} + \frac{3A_1}{r^4} \right) \frac{\mathbf{V} \otimes \mathbf{x}}{r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{A_0}{r} - \frac{3A_1}{r^3} \right) ((\mathbf{V} \cdot \mathbf{x})\mathbb{I}_3 + \mathbf{x} \otimes \mathbf{V}) \\ & - \left( \frac{3A_0}{r^3} - \frac{15A_1}{r^5} \right) \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}}{r^2}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Il s'ensuit que, sur  $\partial\Omega$  où  $r = 1$  et  $\mathbf{n} = -\mathbf{x}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} (D(\mathbf{u})\mathbf{n}) \times \mathbf{n} &= \left[ \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top) \mathbf{x} \right] \times \mathbf{x} \\ &= -3A_1(\mathbf{V} \times \mathbf{x}). \end{aligned}$$

et

$$(\mathbf{u} - \mathbf{V}) \times \mathbf{n} = -[(A_0 + A_1 - 1)](\mathbf{V} \times \mathbf{x}).$$

Ainsi, la deuxième condition au bord se réécrit :

$$A_0 + A_1 - 1 = -3\lambda A_1. \quad (2.29)$$

On trouve les constante explicites en résolvant le système (2.27)-(2.29) en  $(A_0, A_1)$  :

$$A_0 = \frac{3 + 3\lambda}{4 + 6\lambda}, \quad A_1 = \frac{1}{4 + 6\lambda}.$$

Ceci termine la preuve. □

Nous verrons plus loin que la solution calculée ci-dessus est en réalité l'unique solution du problème (2.5)-(2.6) dans cette classe. Associé à cette formule, nous avons les efforts suivants :

**Corollaire 1.** *Dans le cas où le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  et la pression  $p$  sont donnés*

par les formules (2.21) -(2.22), la force  $F$  et le moment  $T$  exercés par  $B$  sur l'écoulement s'écrivent :

$$F = \frac{12\pi}{2 + 3\lambda} \mathbf{V} \quad T = 0$$

*Démonstration.* Par définition, on a :

$$F = \int_{\partial B} \Sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} d\sigma \quad T = \int_{\partial B} \mathbf{x} \times \Sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} d\sigma.$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale dirigée vers l'intérieur de  $B$ . Dans ce cas où  $B$  est la sphère unité, on remarque avec les coordonnées sphériques que

$$\partial B = \{r = 1\} \quad \mathbf{n} = -\mathbf{x}.$$

En particulier, avec l'expression (2.28) pour le calcul de  $\nabla u$ , on a que, sur  $\partial B$  :

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} &= -(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top) \mathbf{x} + p \mathbf{x} \\ &= 6A_1 \mathbf{V} + (6A_0 - 18A_1)(\mathbf{V} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit immédiatement, pour des raisons de symétrie, que  $T = 0$  et :

$$\begin{aligned} F &= 24\pi A_1 \mathbf{V} + 8\pi(1 - 4A_1) \mathbf{V} \\ &= 12\pi \frac{1 + 2\lambda}{2 + 3\lambda} \mathbf{V}. \end{aligned}$$

□

**Remarque.** Dans le cas où  $\lambda = 0$ , on a un problème de Dirichlet et les solutions

sont données par

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{3}{4} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{1}{3|\mathbf{x}|^3} \right) \mathbf{V} + \frac{3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{V})\mathbf{x}}{4} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|^5} - \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \right)$$

et

$$p(\mathbf{x}) = \frac{3\mathbf{V} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}.$$

### 2.3.2 Résolution de (2.5)-(2.6) pour une rotation pure

Nous commençons à nouveau par la résolution explicite du problème de Stokes. Nous calculerons les efforts associé dans un second temps.

**Théorème 2.3.** *Etant donné  $\lambda > 0$ , et  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$  il existe une paire  $(\mathbf{u}, p) \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}) \times L^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B})$  solution de (2.5)-(2.6) avec  $\mathbf{V} = 0$ , donnée par les formules :*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{2}{(3\lambda + 2)} \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad (2.30)$$

$$p(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.31)$$

*Démonstration.* On procède comme auparavant sauf qu'on cherche cette fois-ci une solution  $\mathbf{u}$  de la forme

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{curl}(f(|\mathbf{x}|)\boldsymbol{\omega}).$$

On obtient rapidement que la seule possibilité est qu'il existe une constante  $A \in \mathbb{R}$

à déterminer pour laquelle :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{A}{|\mathbf{x}|^3} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}.$$

En rappelant que  $B$  est une boule si bien que  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{x}$  sont colinéaires sur le bord de  $\Omega$ , on obtient que la première condition au bord est trivialement satisfaite. Il reste à vérifier avec la deuxième condition au bord. Pour cela, on rappelle que sur le bord de  $\Omega$ , on a  $|\mathbf{x}| = 1$  et  $\mathbf{n} = -\mathbf{x}$ . La condition à vérifier s'écrit donc :

$$(\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{x} = [\lambda D(\mathbf{u})\mathbf{x}]\mathbf{x}.$$

Avec les formules explicites ci-dessus, on a, d'une part :

$$D(\mathbf{u}) = -\frac{3A}{2|\mathbf{x}|^5} [(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})]$$

Par conséquent, sur  $\partial\Omega$  où  $|\mathbf{x}| = 1$ , on trouve :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{x} &= (A - 1)(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{x} \\ [D(\mathbf{u})\mathbf{x}] \times \mathbf{x} &= -\frac{3A}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{x}. \end{aligned}$$

La second condition au bord se réécrit donc :

$$A - 1 = -\frac{3\lambda}{2}A$$

dont la seule solution est

$$A = \frac{2}{2 + 3\lambda}.$$

Ceci termine la preuve. □

On en déduit les efforts exercés par cette solution sur la sphère :

**Corollaire 2.** *Dans le cas où le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  et la pression  $p$  sont donnés par les formules (2.30)-(2.31), la force  $F$  et le moment  $T$  exercés par  $B$  sur l'écoulement s'écrivent :*

$$F = 0 \quad T = \frac{16\pi}{2 + 3\lambda} \boldsymbol{\omega}.$$

*Démonstration.* Avec les calculs effectués ci-dessus, on a que, sur le bord de la boule :

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathbf{u}, p)\mathbf{n} &= -2D(\mathbf{u})\mathbf{x} \\ &= 3A(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \end{aligned}$$

Par conséquent, pour des raisons de symétries, il vient que

$$F = \int_{\partial\Omega} \Sigma(\mathbf{u}, p)\mathbf{n} d\sigma = 0.$$

D'autre part sur le bord, on a que :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times \Sigma(\mathbf{u}, p)\mathbf{n} &= 3A \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \\ &= 3A (\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Ainsi, en passant en coordonnées polaires, choisies de telle façon que  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3$ , on

trouve que :

$$\begin{aligned} T &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \times \Sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} d\sigma \\ &= 3A \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \boldsymbol{\omega} (1 - \cos^2(\theta)) d\varphi \sin(\theta) d\theta \\ &= 8\pi A \end{aligned}$$

Finalement, en remplaçant  $A$  par sa valeur, on trouve le résultat escompté :

$$T = \frac{16\pi}{2 + 3\lambda} \boldsymbol{\omega}.$$

□

**Remarque.** Dans le cas où  $\lambda = 0$ , on a un problème de Dirichlet et les solutions sont données

$$\mathbf{v} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \text{ et } q = 0.$$





# Chapitre 3

## Dérivation par rapport au domaine

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'influence de la forme du domaine dans les mélanges fluide-solide. Pour le faire, nous considérons le mouvement d'un fluide visqueux s'écoulant autour d'un solide  $\mathcal{B}$ . On suppose que le mouvement du fluide est modélisé par les équations de Stokes dans un domaine  $\Omega$  qui est le complémentaire d'un compact  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}$ , avec des conditions aux bords de type **Navier** ou **Dirichlet**. Le solide est soumis aux forces et aux contraintes qu'exerce le fluide sur lui et qui dépendent des solutions du problème de Stokes.

Étant donné  $\mathbf{h}$  un champ de vecteurs régulier (par exemple de classe  $C^2$ ) défini sur  $\mathbb{R}^3$ , nous notons  $\Omega_{\mathbf{h}} := \{\mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x}) ; \mathbf{x} \in \Omega\}$ , le nouveau domaine. Nous avons montré aux lemmes 2.1 et 2.2 du Chapitre 2 que si  $\mathbf{h}$  est assez petit (i.e.  $\|\nabla \mathbf{h}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < 1$ ),  $\mathbb{I}_d + \mathbf{h}$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  et le domaine  $\Omega_{\mathbf{h}}$  est

de classe  $C^2$ .

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'influence de la perturbation  $\mathbf{h}$  sur les solutions du problème de Stokes. Nous nous placerons de plus dans le cas où  $\mathbf{h}$  est à support compact dans  $\mathbb{R}^3$ .

On considère alors les équations de Stokes d'inconnues  $\mathbf{u}_h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $p_h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}_h - \nabla p_h = 0 & \text{dans } \Omega_h \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_h = 0 & \text{dans } \Omega_h \end{cases} \quad (3.1)$$

avec des conditions de glissement du type loi de Navier :

$$\begin{cases} (\mathbf{u}_h - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - G_h)) \cdot \mathbf{n}_h = 0 & \text{sur } \partial\Omega_h \\ (\mathbf{u}_h - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - G_h)) \times \mathbf{n}_h = -\lambda D(\mathbf{u}_h) \mathbf{n}_h \times \mathbf{n}_h & \text{sur } \partial\Omega_h. \end{cases} \quad (3.2)$$

avec  $\mathbf{V}$ , la vitesse de translation du solide  $\boldsymbol{\omega}$  sa vitesse de rotation,  $D(\mathbf{u}_h) := \frac{\nabla \mathbf{u}_h + \nabla \mathbf{u}_h^\top}{2}$  la composante symétrique du gradient et  $\Sigma(\mathbf{u}_h, p_h)$  le tenseur de contrainte définie par  $\Sigma(\mathbf{u}_h, p_h) = 2D(\mathbf{u}_h) - p_h I_d$  et  $G_h$  le centre de gravité de l'obstacle. On remarque que  $-\lambda D(\mathbf{u}_h) \mathbf{n}_h \times \mathbf{n}_h = -\frac{\lambda}{2} \Sigma(\mathbf{u}_h, p_h) \mathbf{n}_h \times \mathbf{n}_h$ .

D'après le théorème 2.1 du chapitre 2, si  $\mathbf{h}$  est  $C^2(\mathbb{R}^3)$  et  $\|\mathbf{h}\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)}$  est suffisamment petit, le problème de Stokes perturbé (3.1)-(3.2) admet une unique solution faible et de plus nous avons une régularité locale :

$$\mathbf{u}_h \in H^2(B(0, M) \cap \Omega_h), \quad p_h \in H^1(B(0, M) \cap \Omega_h).$$

Notons qu'alors, étant donné une solution faible du problème de Stokes (3.1)-(3.2) de pression associée  $p_h \in L^2_{loc}(\Omega_h)$  nous avons que  $\mathbf{u}_h \in H^2$  et  $p_h \in H^1$  au voisinage de  $\partial\Omega_h$ . Ainsi, nous avons une trace raisonnable pour  $2D(\mathbf{u}_h) \mathbf{n}_h - p_h \mathbf{n}_h$  sur  $\partial\Omega_h$

et les contraintes exercées par l'écoulement  $(\mathbf{u}_h, p_h)$  sur  $\partial B_h$  sont bien définies par les formules classiques :

$$F_h = \int_{\partial B_h} (2D(\mathbf{u}_h)\mathbf{n}_h - p_h\mathbf{n}_h)d\sigma$$

$$T_h = \int_{\partial B_h} (\mathbf{x} - G_h) \times (2D(\mathbf{u}_h)\mathbf{n}_h - p_h\mathbf{n}_h)d\sigma. \quad (3.3)$$

On définit également une fonctionnelle énergie associée au champ de vecteur  $\mathbf{u}_h$ .

$$E_h = \int_{\Omega_h} |D(\mathbf{u}_h)|^2 + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega_h} |\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - G_h) - \mathbf{u}_h|^2 d\sigma. \quad (3.4)$$

### 3.1.1 Plan du chapitre

Dans la suite, nous allons calculer le comportement au premier ordre des forces et contraintes  $F_h$  et  $T_h$  en fonction de  $\mathbf{h}$ .

Pour le faire, nous procédons comme suit :

1. On remarque que d'après [22], il existe une matrice  $L_h \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$  symétrique telle que

$$\begin{pmatrix} F_h \\ T_h \end{pmatrix} = L_h \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

avec  $L_h = \begin{pmatrix} L_1^h & L_3^h \\ L_2^h & L_4^h \end{pmatrix}$  et  $L_i^h \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  les composantes par bloc de la matrice  $L_h$ .

Le calcul des dérivées de  $F_h$  et  $T_h$  revient alors à l'étude de la matrice  $L_h$ .

2. On définit une forme bilinéaire  $a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$  dans  $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$  avec  $\mathbb{V}$  l'espace fonctionnelle des solutions de (3.1)-(3.2) telle que  $a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = E_h(\mathbf{u}_h)$  définies

au chapitre précédent puis on montre que si  $\mathbf{u}_h$  est solution de (3.1)-(3.2), alors

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & \boldsymbol{\vartheta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1^h & L_3^h \\ L_2^h & L_4^h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix}$$

avec  $\mathbf{v}_h$  solution d'un problème de Stokes de type (3.1)-(3.2) avec une vitesse de translation  $\mathbf{U}$  et une vitesse de rotation  $\boldsymbol{\vartheta}$ .

3. On calcule formellement la dérivée de  $\mathbf{h} \mapsto a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$  au point  $\mathbf{h} = 0$ .
4. On justifie analytiquement ces calculs.
5. On en déduit la dérivée  $L_h$  dans le cas Navier et Dirichlet.

### 3.1.2 Un peu de dérivation de forme

On remarque que les quantités qu'on a définies ci-dessus sont dans un domaine qui dépend de la déformation  $\Omega_h$ . Il nous faudra donc trouver un cadre adéquat pour pouvoir dériver ces quantités.

Pour dériver par rapport à un domaine, nous utilisons les méthodes proposées dans [27, 26, 25, 30].

La dérivation de ces fonctions pose une certaine difficulté liée au fait que le domaine est variable. Si la fonction en jeu admet un prolongement naturel dans  $\mathbb{R}^3$ , on peut surpasser cette difficulté facilement en la prolongeant sur  $\mathbb{R}^3$  tout entier. Sinon on peut composer la fonction par une autre fonction de telle sorte qu'elle soit dans le domaine initial fixé. Mais après il faudra recomposer pour trouver la fonction : par exemple si la fonction  $\mathbf{u}_h$  est dans  $\Omega_h$ , alors la fonction  $\bar{\mathbf{u}}_h = \mathbf{u}_h \circ \boldsymbol{\varphi}_h$  est dans le domaine fixe  $\Omega$ . Ainsi une fois qu'on aura montré la régularité de  $\bar{\mathbf{u}}_h$ , il suffira de recomposer cette fonction par l'inverse de  $\boldsymbol{\varphi}_h$ , pour

retrouver celle de  $\mathbf{u}_h$ .

Si  $\mathbf{h}$  est une fonction vectorielle, il est connu que, pour faire des calculs de différentielles (qui peuvent ici devenir très vite complexes), il est souvent plus agréable de se ramener à une variable réelle (on sait que pour toute  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$ ,  $J'(0)\boldsymbol{\xi} = \frac{d}{dt}J(t\boldsymbol{\xi})$  avec  $t$  un réel positif).

Soit  $t$  réel positif assez petit, on note  $\boldsymbol{\varphi}_{th} = I_d + t\mathbf{h}$  et  $\boldsymbol{\phi}_{th}$  son inverse.

De manière générale et dans tout ce chapitre, nous adopterons les notations suivantes : pour toute fonction  $\mathbf{u}_h$  définie dans le domaine perturbé  $\Omega_{th} := \boldsymbol{\varphi}_{th}(\Omega)$  on définit  $\bar{\mathbf{u}}_{th}$  par :

$$\forall \mathbf{y} \in \Omega, \quad \bar{\mathbf{u}}_{th}(\mathbf{y}) = \mathbf{u}_{th}(\boldsymbol{\varphi}_{th}(\mathbf{y})) \quad (3.6)$$

ou de façon équivalente :

$$\mathbf{u}_{th}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}_{th}(\boldsymbol{\phi}_{th}(\mathbf{x})) \quad \text{avec } \mathbf{x} \in \Omega_{th}. \quad (3.7)$$

Dans ce chapitre, on retrouvera parfois les notations  $\Omega_t$  au lieu de  $\Omega_{th}$ ,  $\mathbf{u}_t$  au lieu de  $\mathbf{u}_{th}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}_t$  à la place de  $\boldsymbol{\varphi}_{th}$  par soucis de simplicité.

Commençons par un lemme crucial qui donne la dérivée  $\bar{\mathbf{u}}_t$  par rapport à celle de  $\bar{\mathbf{u}}_h$ . On trouve la preuve de ce lemme dans [26, lemme 2.1].

**Lemme 3.1.** *Soit  $\boldsymbol{\varphi}_h$  un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbf{h} \mapsto \bar{\mathbf{u}}_h$  définie dans (3.6) dérivable en 0 alors  $\mathbf{h} \mapsto \mathbf{u}_h$  est dérivable en 0 et sa dérivée en 0,  $\mathbf{u}'$  vérifie la relation suivant :*

$$\mathbf{u}' = \bar{\mathbf{u}}' - \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u}. \quad (3.8)$$

avec  $\bar{\mathbf{u}}'$  la dérivée de  $\bar{\mathbf{u}}_h$  en 0.

Nous montrerons plus tard la régularité de  $\mathbf{h} \mapsto \bar{\mathbf{u}}_h$  à la section 3.5, un théorème

central de ce chapitre, à l'aide du théorème des fonctions implicites.

## 3.2 Préliminaires

### 3.2.1 Conservation de quelques propriétés du solide

Nous avons transformé un solide sphérique  $B$  en un autre solide  $B_h$ . Nous supposons que cette transformation laisse inchangée la masse, le centre d'inertie ainsi que la matrice d'inertie. Cette conservation implique des conditions supplémentaires sur la fonction  $\mathbf{h}$ .

**Lemme 3.2.** *Pour que la variation de la masse du centre d'inertie et de la matrice d'inertie de  $B_{th}$  soit nulle en  $t = 0$ , il est suffisant que :*

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0, \int_B \mathbf{h}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = 0 \text{ et } \int_B (\mathbf{h}(\mathbf{y}) \otimes \mathbf{y} + \mathbf{y} \otimes \mathbf{h}(\mathbf{y})) \, d\mathbf{y} = 0.$$

*Démonstration.* On rappelle que la densité du solide est supposée constante.

- Soit  $\rho$  la masse volumique du solide  $B$  alors la masse est  $m_{B_{th}} := \int_{B_{th}} \rho \, d\mathbf{x}$ .

Par changement de variable  $\varphi_{th}$ , on a :

$$\begin{aligned} m_{B_{th}} &:= \int_{B_{th}} \rho \, d\mathbf{x} \\ &= \rho \int_B \det(\nabla \varphi_{th}) \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Or

$$\frac{d}{dt} \left( \rho \int_B \det(\nabla \varphi_{th}) \, d\mathbf{x} \right) = \rho \int_B \operatorname{div} \mathbf{h}.$$

Donc, si  $\operatorname{div} \mathbf{h} = 0$ , on a  $\frac{d}{dt} m_{B_{th}} = 0$ .

- En notant  $G_{th}$ , le centre d'inertie de  $B_{th}$ , alors :

$$\begin{aligned}
G_{th} &= \frac{\rho}{m} \int_{B_{th}} \mathbf{x} \, d\mathbf{x} \\
&= \frac{\rho}{m} \int_B \boldsymbol{\varphi}_{th}(\mathbf{y}) \det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_{th}) \, d\mathbf{y} \text{ par changement de variable} \\
&= \frac{\rho}{m} \left( \int_B \mathbf{y} \det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_{th}) \, d\mathbf{y} + t \int_B \mathbf{h}(\mathbf{y}) \det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_{th}) \, d\mathbf{y} \right) \\
&= \frac{\rho}{m} \left( \int_B \mathbf{y} (1 + t \operatorname{div} \mathbf{h} + o(\mathbf{h})) \, d\mathbf{y} + t \int_B \mathbf{h}(\mathbf{y}) (1 + t \operatorname{div} \mathbf{h} + o(\mathbf{h})) \, d\mathbf{y} \right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{d}{dt} G_{th} = \frac{\rho}{m} \left( \int_B \mathbf{y} \operatorname{div} \mathbf{h} + \int_B \mathbf{h}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right).$$

D'après le point précédent, on a :

$$\int_B \mathbf{h}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = 0 \implies \frac{d}{dt} G_{th} = 0.$$

- Par définition la matrice d'inertie est donnée par  $J_{th} = \int_{B_{th}} \rho \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}$

Alors par changement de variable  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}_{th}(\mathbf{y})$ , on a :

$$\begin{aligned}
J_{th} &= \rho \int_B \boldsymbol{\varphi}_{th}(\mathbf{y}) \otimes \boldsymbol{\varphi}_{th}(\mathbf{y}) \det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_{th}) \, d\mathbf{y} \\
&= \rho \int_B (\mathbf{y} + t\mathbf{h}(\mathbf{y})) \otimes (\mathbf{y} + t\mathbf{h}(\mathbf{y})) \det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_{th}) \, d\mathbf{y} \\
&= \rho \left( \int_B \mathbf{y} \otimes \mathbf{y} + t \int_B \mathbf{h}(\mathbf{y}) \otimes \mathbf{y} + \mathbf{y} \otimes \mathbf{h}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} + o(t^2) \right).
\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{d}{dt} J_{th} = \rho \int_B (\mathbf{h}(\mathbf{y}) \otimes \mathbf{y} + \mathbf{y} \otimes \mathbf{h}(\mathbf{y})) \, d\mathbf{y}.$$

Et on conclut comme précédemment.



□

### 3.2.2 Quelques lemmes importants

Nous allons donner la relation qui relie la normale extérieure  $\mathbf{n}_t$  du domaine perturbé  $B_{th}$  par rapport à la normale extérieure  $\mathbf{n}$  du domaine fixe  $B$  qu'on peut retrouver également dans [30, Theorem 4.4].

On rappelle que, pour un ensemble  $\Omega$  de classe  $C^1$ , la normale extérieure du bord  $\Gamma = \partial\Omega$  peut être caractérisée par les matrices jacobiniennes des cartes locales du bord. Soit  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ ,  $U_x$  un ouvert au voisinage de  $\mathbf{x}$  et  $g_x : U_x \mapsto B = B(0, 1)$  une carte locale du bord. Par définition, l'espace tangent  $T_x\Gamma$  de  $\Gamma = \partial\Omega$ , au point  $\mathbf{x}$  est l'espace vectoriel engendré par les  $N - 1$  vecteurs

$$\{\nabla g_x^{-1}(0)\mathbf{e}_i : 1 \leq i \leq N - 1\}. \quad (3.9)$$

Donc d'après (3.9) un vecteur normal à  $\Gamma$  en  $\mathbf{x}$  est donné par

$$\mathbf{m}_x = -(\nabla g_x)^\top(\mathbf{x})\mathbf{e}_N. \quad (3.10)$$

puisque

$$-\mathbf{m}_x \cdot (\nabla g_x^{-1}(0))\mathbf{e}_i = \nabla g_x^\top(\mathbf{x})\mathbf{e}_N \cdot ((\nabla g_x(\mathbf{x}))^{-1}\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_N \cdot \mathbf{e}_i = \delta_{iN}, 1 \leq i \leq N.$$

Donc le vecteur normal unitaire est donné par

$$\mathbf{n} = -\frac{(\nabla g_x(\mathbf{x}))^\top \mathbf{e}_N}{|(\nabla g_x(\mathbf{x}))^\top \mathbf{e}_N|}, \quad (3.11)$$

On a alors le lemme suivant :

**Lemme 3.3.** *Soit  $\mathbf{n}$  la normale extérieure de  $\Omega$  alors on a :*

$$\mathbf{n}_t \circ \varphi_t = \frac{[\nabla \varphi_t^{-1}]^\top \mathbf{n}}{|[\nabla \varphi_t^{-1}]^\top \mathbf{n}|} \quad (3.12)$$

et

$$\frac{d}{dt} \mathbf{n}_t(\varphi_t(\mathbf{x}))|_{t=0} = -\nabla \mathbf{h}^\top \cdot \mathbf{n} + ((\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}. \quad (3.13)$$

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{x}_t \in \partial B_t$  et  $\mathbf{x}_0 = \varphi_t^{-1}(\mathbf{x}_t)$ . On a une carte  $g_{\mathbf{x}_0}$  de  $\partial B$  en  $\mathbf{x}_0$ .

Alors  $g_{\mathbf{x}_0} \circ \varphi_t^{-1}$  est une carte de  $\partial B_t$  en  $\mathbf{x}_t$ .

On a donc

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_t(\mathbf{x}_t) &= (\nabla g_{\mathbf{x}_0} \circ \varphi_t^{-1}(\mathbf{x}_t))^\top \mathbf{e}_N \\ &= (\nabla g_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0) \nabla \varphi_t^{-1}(\mathbf{x}_t))^\top \mathbf{e}_N \\ &= (\nabla \varphi_t(\mathbf{x}_t))^{-\top} (\nabla g_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0))^\top \mathbf{e}_N \\ &= (\nabla \varphi_t(\mathbf{x}_t))^{-\top} \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Quitte à normer, on obtient le résultat suivant :

$$\mathbf{n}_t \circ \varphi_t = \frac{[\nabla \varphi_t]^{-\top} \mathbf{n}}{|[\nabla \varphi_t]^{-\top} \mathbf{n}|}. \quad (3.14)$$

□

Nous montrons dans le théorème suivant un résultat qui nous permet d'effectuer un changement de variable sur le bord  $\partial\Omega_h$ .

**Théorème 3.1** (Changement de variable sur le bord). Soit  $\Omega$  un domaine de classe  $C^2$ ,  $f$  une fonction suffisamment régulière et  $\mathbf{h}$  une fonction 1-lipschitzienne alors

$$\int_{\partial\Omega_{\mathbf{h}}} f(\mathbf{x}) \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \bar{f}(\mathbf{y}) \left\| (\nabla\varphi_{\mathbf{h}}^{-1})^T \mathbf{n} \right\| \det(\nabla\varphi_{\mathbf{h}}) \, d\sigma$$

.

*Démonstration.* Soit  $f$  une fonction lisse définie dans  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_{\mathbf{h}}} f(\mathbf{x}) \, d\sigma &= \int_{\partial\Omega_{\mathbf{h}}} f(\mathbf{x}) \mathbf{n}_{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{h}} \, d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega_{\mathbf{h}}} f(\mathbf{x}) X \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{h}} \, d\sigma \text{ avec } X \text{ une extension de } \mathbf{n}_{\mathbf{h}} \\ &= \int_{\partial\Omega_{\mathbf{h}}} [f(\mathbf{x})X] \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{h}} \, d\sigma \\ &= \int_{\Omega_{\mathbf{h}}} (X \cdot \nabla f + f \operatorname{div} X) \, d\mathbf{x} \quad \text{par le théorème de Gauss} \end{aligned}$$

En définissant  $\bar{f} = f \circ \varphi_{\mathbf{h}}$  ou  $f = \bar{f} \circ \phi_{\mathbf{h}}$  on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_{\mathbf{h}}} f(\mathbf{x}) \, d\sigma &= \int_{\Omega_{\mathbf{h}}} \left( \nabla \bar{f}(\phi_{\mathbf{h}}(\mathbf{x})) \nabla \phi_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) \right) \bar{X}(\phi_{\mathbf{h}}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega_{\mathbf{h}}} \bar{f}(\phi_{\mathbf{h}}(\mathbf{x})) \operatorname{Trace} \left( \nabla \bar{X}(\phi_{\mathbf{h}}(\mathbf{x})) \nabla \phi_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) \right) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Par changement de variable  $\mathbf{y} = \phi_{\mathbf{h}}(\mathbf{x})$  on a donc

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_{\mathbf{h}}} f(\mathbf{x}) \, d\sigma &= \int_{\Omega} \left( \nabla \bar{f}(\mathbf{y}) \nabla \varphi_{\mathbf{h}}(\mathbf{y})^{-1} \bar{X}(\mathbf{y}) \right) \det \nabla \varphi_{\mathbf{h}}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &\quad + \int_{\Omega} \bar{f}(\mathbf{y}) \operatorname{Trace} \left( \nabla \bar{X}(\mathbf{y}) \nabla \varphi_{\mathbf{h}}(\mathbf{y})^{-1} \right) \det \nabla \varphi_{\mathbf{h}}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Donc en intégrant par parties la première expression, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega_h} f(\mathbf{x}) \, d\sigma &= \int_{\partial\Omega} \bar{f}(\mathbf{y}) n_k (\nabla\varphi_h(\mathbf{y}))_{ki}^{-1} \bar{X}_i(\mathbf{y}) \det(\nabla\varphi_h(\mathbf{y})) \\
&\quad - \int_{\Omega} \bar{f}(\mathbf{y}) \partial_k \left( (\nabla\varphi_h(\mathbf{y}))_{ki}^{-1} \bar{X}_i \det(\nabla\varphi_h(\mathbf{y})) \right) \\
&\quad + \int_{\Omega} \bar{f}(\mathbf{y}) \text{Trace} \left( \nabla\bar{X}(\mathbf{y}) \nabla\varphi_h(\mathbf{y})^{-1} \right) \det(\nabla\varphi_h(\mathbf{y}))
\end{aligned}$$

Or par dérivation

$$\begin{aligned}
T_2 &:= - \int_{\Omega} \bar{f}(\mathbf{y}) \partial_k \left( (\nabla\varphi_h(\mathbf{y}))_{ki}^{-1} \bar{X}_i \det(\nabla\varphi_h(\mathbf{y})) \right) \\
&\quad + \int_{\Omega} \bar{f}(\mathbf{y}) \text{Trace} \left( \nabla\bar{X}(\mathbf{y}) \nabla\varphi_h(\mathbf{y})^{-1} \right) \det(\nabla\varphi_h(\mathbf{y})) \\
&= - \int_{\Omega} \bar{f}(\mathbf{y}) \nabla\varphi_h(\mathbf{y})_{ki}^{-1} (\partial_k X_i) \det(\nabla\varphi_h(\mathbf{y})) \\
&\quad - \int_{\Omega} \bar{f}(\mathbf{y}) X_i \partial_k \left( \nabla\varphi_h(\mathbf{y})^{-1} \det \nabla\varphi_h \right) \\
&\quad + \int_{\Omega} \bar{f}(\mathbf{y}) \partial_k X_j (\nabla\varphi_h(\mathbf{y})^{-1})_{kj} \det \nabla\varphi_h \\
&= - \int_{\Omega} \bar{f}(\mathbf{y}) X_i \partial_k \left( \nabla\varphi_h(\mathbf{y})^{-1} \det \nabla\varphi_h \right) \\
&= - \int_{\Omega} \bar{f}(\mathbf{y}) \sum \partial_k (\text{Com}(\nabla\varphi_h))
\end{aligned}$$

Donc par l'identité de Piola [29, Théorème 2.1], il s'ensuit  $T_2 = 0$ .

Alors, puisque  $X$  est une extension de  $\mathbf{n}$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega_h} f(\mathbf{x}) \, d\sigma &= \int_{\partial\Omega} \bar{f}(\mathbf{y}) n_k (\nabla\varphi_h(\mathbf{y}))_{ki}^{-1} \bar{X}_i(\mathbf{y}) \det \nabla\varphi_h \\
&= \int_{\partial\Omega} \bar{f}(\mathbf{y}) \left( (\nabla\varphi_h^{-1}) \mathbf{n} \right) \cdot \left( (\nabla\varphi_h^{-1})^T \mathbf{n} \right) \frac{\det \nabla\varphi_h}{\|(\nabla\varphi_h^{-1})^T \mathbf{n}\|} \\
&= \int_{\partial\Omega} \bar{f}(\mathbf{y}) \|(\nabla\varphi_h^{-1})^T \mathbf{n}\| \det \nabla\varphi_h.
\end{aligned}$$

□

### 3.3 Calculs Formels

Dans cette section, nous effectuons des calculs formels. On va supposer que les différents champs  $(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)$  sont suffisamment réguliers par rapport à la déformation  $\mathbf{h}$ . Pour calculer les dérivées, on va utiliser la méthode expliquée au début du chapitre[27], on se ramène à une fonction à variable réelle et on dérive par rapport à ce dernier. On rappelle avec les conventions énoncées précédemment, que pour un  $\mathbf{h}$  fixé,  $\mathbf{u}' = \frac{d}{dt}\mathbf{u}_{t|t=0}$ .

#### 3.3.1 Différentiation des équations

Dans cette partie, on dérive les équations (3.1) par rapport à  $\mathbf{h}$  en  $\mathbf{h} = 0$ . D'après (3.1), on obtient une équation satisfaisante dans le domaine  $\Omega_t := \varphi_t(\Omega)$  qui varie avec  $t$ , avec  $\varphi_t = I_d + t\mathbf{h}$

Pour tout point  $\mathbf{x}$  fixé dans  $\Omega$ , un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  il se trouve aussi dans  $\Omega + t\mathbf{h}$  pour un  $t$  assez petit i.e.  $t \in ]0, \epsilon[$  avec  $\epsilon \ll 1$

Ainsi,

$$-\Delta \mathbf{u}_{t\mathbf{h}} + \nabla p_{t\mathbf{h}} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \leq t_{\mathbf{x},\mathbf{h}}. \quad (3.15)$$

Par dérivation par rapport à  $t$  en  $t = 0$ , on obtient :

$$-\Delta \mathbf{u}'(\mathbf{x}) + \nabla p'(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.16)$$

De la même manière,  $\nabla \cdot \mathbf{u}_{th} = 0$  implique par dérivation que :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.17)$$

On obtient ainsi dans le domaine  $\Omega$

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u}' + \nabla p' = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

On remarque que les dérivées de  $\mathbf{u}_h$  et  $p_h$  en  $\mathbf{h} = 0$  sont solutions d'un problème de Stokes dans  $\Omega$ . Nous allons voir maintenant ce qu'il en est des conditions aux bords.

### 3.3.2 Différentiation des conditions aux bords

Comme dans la partie précédente, on va calculer ici les dérivées des équations (3.2) par rapport à  $\mathbf{h}$  au point  $\mathbf{h} = 0$ . D'après (3.2), on obtient des conditions aux bords qui sont satisfaites sur le bord  $\partial\Omega_t = \partial\Omega + t\mathbf{h}$  qui varie avec  $t$ . On rappelle que, pour  $\mathbf{x}$  dans  $\Omega$ , le point  $\mathbf{x} + t\mathbf{h}$  est dans  $\partial\Omega + t\mathbf{h}$ .

Pour dériver les conditions au le bord, on se ramène à un domaine fixe en composant par  $\varphi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + t\mathbf{h}(\mathbf{x})$ .

Ainsi la première équation de (3.2) donne :

$$(\mathbf{u}_t(\varphi_t(\mathbf{x})) - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \varphi_t(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}_t(\varphi_t(\mathbf{x})) = 0$$

En dérivant par rapport à  $t$  à  $t = 0$ , on obtient

$$(\mathbf{u}' + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{h} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{u} - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{n}_t(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}))_{t=0} = 0.$$

Or d'après (3.13) du lemme 3.3

$$(\mathbf{u}' + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{h} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{u} - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot (((\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - (\nabla \mathbf{h})^\top \cdot \mathbf{n}) = 0$$

De plus d'après (3.2)

$$(\mathbf{u} - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot ((\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = 0 \quad \text{et} \quad \left( (\nabla \mathbf{h})^\top \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{u} = (\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}.$$

On obtient donc :

$$[\mathbf{u}' + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{h} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} - \nabla \mathbf{h} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.19)$$

Pour dériver la deuxième composante de l'équation (3.2), on procède de la même façon que la première, en composant par  $\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x})$ , on obtient ainsi :

$$(\mathbf{u}_h(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x})) - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x})) \times \mathbf{n}_t(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x})) = -\lambda D(\mathbf{u}_h(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}))) \mathbf{n}_t(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x})) \times \mathbf{n}_h(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x})) \quad (3.20)$$

On rappelle que  $D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top)$ . En dérivant la partie gauche de (3.20) en  $t = 0$ , on obtient :

$$(\mathbf{u}' + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{h} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) \times \mathbf{n} + (\mathbf{u} - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times (((\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - (\nabla \mathbf{h})^\top \cdot \mathbf{n}).$$

Or

$$(\mathbf{u} - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{n} = -\lambda D(\mathbf{u})\mathbf{n} \times \mathbf{n},$$

nous avons donc :

$$(\mathbf{u}' + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{h} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) \times \mathbf{n} - (\mathbf{u} - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times ((\nabla \mathbf{h})^\top \mathbf{n}) - \lambda((\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n})D(\mathbf{u})\mathbf{n} \times \mathbf{n}. \quad (3.21)$$

En dérivant la partie de droite de (3.20)

$$\begin{aligned} & -\lambda \left[ D[(\mathbf{u}' + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{h})]\mathbf{n} + D(\mathbf{u}) \cdot \left( ((\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - (\nabla \mathbf{h})^\top \cdot \mathbf{n} \right) \right] \times \mathbf{n} \\ & \quad - \lambda [D(\mathbf{u})\mathbf{n}] \times \left( ((\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - (\nabla \mathbf{h})^\top \cdot \mathbf{n} \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

équivalent à

$$\begin{aligned} & -\lambda \left[ D[(\mathbf{u}' + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{h})]\mathbf{n} + 2((\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n})D(\mathbf{u})\mathbf{n} - (\nabla \mathbf{h})^\top \cdot \mathbf{n} \right] \times \mathbf{n} \\ & \quad + \lambda [D(\mathbf{u})\mathbf{n}] \times \left( (\nabla \mathbf{h})^\top \cdot \mathbf{n} \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

En simplifiant par  $-\lambda((\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n})D(\mathbf{u})\mathbf{n} \times \mathbf{n}$  qui apparait dans (3.21) et (3.23), on a la dérivée de la deuxième équation de (3.2) qui donne :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}' + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{h} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) \times \mathbf{n} - (\mathbf{u} - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times ((\nabla \mathbf{h})^\top \mathbf{n}) \\ & = -\lambda \left[ D[(\mathbf{u}' + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{h})]\mathbf{n} + ((\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n})D(\mathbf{u})\mathbf{n} - (\nabla \mathbf{h})^\top \cdot \mathbf{n} \right] \times \mathbf{n} \\ & \quad + \lambda [D(\mathbf{u})\mathbf{n}] \times \left( (\nabla \mathbf{h})^\top \cdot \mathbf{n} \right) \end{aligned}$$

On a alors  $\mathbf{u}'$  solution du problème de Stokes (3.18) dans  $\Omega$  avec les conditions au



bord de type Neumann :

$$\begin{cases} \mathbf{u}' \cdot \mathbf{n} = (\nabla \mathbf{h}(\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} - \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{h}) \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \partial\Omega \\ \mathbf{u}' \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_{\mathbf{V}, \boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{n} \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.24)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\mathbf{V}, \boldsymbol{\omega}} = & -(\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{h} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) \times \mathbf{n} + (\mathbf{u} - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times ((\nabla \mathbf{h})^\top \mathbf{n}) \\ & - \lambda \left[ D[(\mathbf{u}' + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{h})] \mathbf{n} + 2((\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}) D(\mathbf{u}) \mathbf{n} - (\nabla \mathbf{h})^\top \cdot \mathbf{n} \right] \times \mathbf{n} \\ & + \lambda [D(\mathbf{u}) \mathbf{n}] \times ((\nabla \mathbf{h})^\top \cdot \mathbf{n}). \end{aligned}$$

### 3.3.3 Dérivation de la forme bilinéaire

**Définition 3.1.** Soient  $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \boldsymbol{\omega}$  et  $\boldsymbol{\vartheta}$  dans  $\mathbb{R}^3$ . On définit une forme bilinéaire  $a_h$  dans  $\mathbb{V}$  par

$$\begin{aligned} & a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \\ = & \int_{\Omega_h} D(\mathbf{v}_h) : D(\mathbf{u}_h) + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega_h} (\mathbf{U} + \boldsymbol{\vartheta} \times (\mathbf{x} - G) - \mathbf{v}_h) \cdot (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - G) - \mathbf{u}_h) d\sigma. \end{aligned} \quad (3.25)$$

avec  $\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h$  des champs de vitesse.

Dans la suite, on décompose  $a_h = a_s + a_\lambda$  avec

$$\begin{aligned} a_s(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \int_{\Omega_t} D(\mathbf{u}_h(\mathbf{y})) : D(\mathbf{v}_h(\mathbf{y})) \\ a_\lambda(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega_h} (\mathbf{U} + \boldsymbol{\vartheta} \times (\mathbf{x} - G) - \mathbf{v}_h) \cdot (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - G) - \mathbf{u}_h) d\sigma. \end{aligned}$$

Avec ces conventions, on a le lemme suivant :

**Lemme 3.4.**

$$\text{Si } \mathbf{h} \mapsto \mathbf{u}_h \quad \text{et} \quad \mathbf{h} \mapsto \mathbf{v}_h$$

sont assez réguliers, alors la dérivée de  $\mathbf{h} \mapsto a_s(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$  au point  $\mathbf{h} = 0$  est

$$a'_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} D(\mathbf{u}') : D(\mathbf{v}) + \int_{\Omega} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}') + \int_{\partial\Omega} \mathbf{h}_n D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \quad (3.26)$$

avec  $h_n = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}$ .

*Démonstration.* Soit  $a_s(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}_t)$  la forme bilinéaire suivante définie dans  $\Omega_t$

$$a_s(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}_t) = \int_{\Omega_t} D(\mathbf{u}_t(\mathbf{y})) : D(\mathbf{v}_t(\mathbf{y}))$$

On définit  $\bar{\mathbf{u}}_t$  tel que  $\bar{\mathbf{u}}_t \circ \phi_t = \mathbf{u}_t$  et on note

$\tilde{D}(\bar{\mathbf{u}}_t) := \left( (\nabla \bar{\mathbf{u}}_t) \circ \phi_t \right) \nabla \phi_t + \nabla \phi_t^\top (\nabla \bar{\mathbf{u}}_t) \circ \phi_t^\top$ , alors

$$\begin{aligned} a_s(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{v}}_t) &= \int_{\Omega_t} D(\mathbf{u}_t(\mathbf{y})) : D(\mathbf{v}_t(\mathbf{y})) \\ &= \int_{\Omega_t} D(\bar{\mathbf{u}}_t(\phi_t(\mathbf{y}))) : D(\bar{\mathbf{v}}_t(\phi_t(\mathbf{y}))) \\ &= \int_{\Omega_t} \tilde{D}(\bar{\mathbf{u}}_t) : \tilde{D}(\bar{\mathbf{v}}_t) \, d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Pour pouvoir dériver cette expression, on se ramène au domaine fixe en faisant un changement de variable  $\mathbf{y} = \varphi_t(\mathbf{x})$ , on a ainsi :

$$\begin{aligned} a_s(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{v}}_t) &= \\ \frac{1}{4} \int_{\Omega} \left( \nabla \bar{\mathbf{u}}_t \nabla \varphi_t^{-1} + (\nabla \bar{\mathbf{u}}_t \nabla \varphi_t^{-1})^\top \right) : \left( \nabla \bar{\mathbf{v}}_t \nabla \varphi_t^{-1} + (\nabla \bar{\mathbf{v}}_t \nabla \varphi_t^{-1})^\top \right) \det \nabla \varphi_t & \quad (3.27) \end{aligned}$$

Par dérivation de produit et (3.8), on a

$$\frac{d}{dt} (\nabla(\bar{\mathbf{u}}_t) \nabla \varphi_t)_{|t=0} = \nabla(\mathbf{u}' + \mathbf{h} \nabla \mathbf{u}) - \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{h}$$

$$\text{or} \quad \nabla(\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{h}) = (\mathbf{h} \cdot \nabla) \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{h}$$

Donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \nabla \bar{\mathbf{u}}_t \nabla \varphi_t^{-1} + (\nabla \bar{\mathbf{u}}_t \nabla \varphi_t^{-1})^\top \right)_{|t=0} = D(\mathbf{u}') + (\mathbf{h} \cdot \nabla) D(\mathbf{u}) \quad (3.28)$$

De plus

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \mathbf{h} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \right) &= (\nabla \cdot \mathbf{h}) D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \\ &+ [(\mathbf{h} \cdot \nabla) D(\mathbf{u})] : D(\mathbf{v}) + [(\mathbf{h} \cdot \nabla) D(\mathbf{v})] : D(\mathbf{u}) \quad (3.29) \end{aligned}$$

Ainsi par (3.28) et (3.29), on obtient :

$$\begin{aligned} a'_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \nabla \cdot \left( \mathbf{h} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \right) \\ &+ \int_{\Omega} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}') \, d\sigma + \int_{\Omega} D(\mathbf{v}) : D(\mathbf{u}') \, d\sigma \quad (3.30) \end{aligned}$$

Comme  $\Omega$  est de classe  $C^2$ , (3.30) devient par le théorème de Green ,

$$a'_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\partial\Omega} h_n D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \, d\sigma + \int_{\Omega} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}') + \int_{\Omega} D(\mathbf{v}) : D(\mathbf{u}')$$

□

**Lemme 3.5.** *Si*

$$\mathbf{h} \mapsto \mathbf{u}_h \quad \text{et} \quad \mathbf{h} \mapsto \mathbf{v}_h$$

sont suffisamment réguliers, alors la dérivée de  $\mathbf{h} \mapsto a_\lambda(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$  au point  $\mathbf{h} = 0$  est

$$\begin{aligned} a'_\lambda(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{v}' + \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) \cdot (\mathbf{u} - (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}' + \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - (\mathbf{U} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} ((\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{v} - (\mathbf{U} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{u} - (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})). \end{aligned}$$

*Démonstration.* En notant  $a_\lambda$  la partie de gauche de la forme bilinéaire :

$$a_\lambda(\mathbf{u}_{th}, \mathbf{v}_{th}) = \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega_{th}} [\mathbf{v}_{th}(\mathbf{y}) - (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{y} + \mathbf{U})] \cdot [\mathbf{u}_{th}(\mathbf{y}) - (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y})] \, d\sigma \quad (3.31)$$

Donc d'après (3.6)

$$\begin{aligned} a_\lambda(\mathbf{u}_{th}, \mathbf{v}_{th}) &= \\ \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega_{th}} [(\bar{\mathbf{v}}_{th}(\boldsymbol{\phi}_{th}(\mathbf{y})) - (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{y} + \mathbf{U})) \cdot [(\bar{\mathbf{u}}_{th}(\boldsymbol{\phi}_{th}(\mathbf{y})) - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y} + \mathbf{V}))]] \, d\sigma \quad (3.32) \end{aligned}$$

Par un changement de variable  $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + t\mathbf{h}(\mathbf{x})$ , on obtient d'après le théorème 3.1,

$$\begin{aligned} a_\lambda(\mathbf{u}_{th}, \mathbf{v}_{th}) &= \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} [\bar{\mathbf{u}}_{th}(\mathbf{x}) - (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}))] \cdot [\bar{\mathbf{v}}_{th}(\mathbf{x}) - (\mathbf{U} + \boldsymbol{\vartheta} \times \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}))] \\ &\quad \left\| (\nabla \boldsymbol{\varphi}_t^{-1})^\top \mathbf{n} \right\| \det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x})) \, d\sigma \end{aligned}$$

Ainsi en appliquant la formule de dérivation de produit puis en l'évaluant au point

$t = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
a'_\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{v}' + \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{v} - \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h}) \cdot (\mathbf{u} - (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}' + \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) \cdot (\mathbf{v} - (\mathbf{U} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} \operatorname{div} \mathbf{h} (\mathbf{v} - (\mathbf{U} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{u} - (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} ((\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{v} - (\mathbf{U} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{u} - (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}))
\end{aligned}$$

Comme  $\operatorname{div} \mathbf{h} = 0$ , alors

$$\begin{aligned}
a'_\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{v}' + \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{v} - \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h}) \cdot (\mathbf{u} - (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}' + \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) \cdot (\mathbf{v} - (\mathbf{U} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} ((\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{v} - (\mathbf{U} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{u} - (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}))
\end{aligned}$$

□

### 3.4 Constructions des formes bilinéaires

Soit le couple  $(\mathbf{u}_h, p_h)$  solution du problème de Stokes (3.1)-(3.2), on alors par la linéarité du problème de Stokes ce résultat fondamental[22, Section 4.1] :

**Lemme 3.6.** *Si le couple  $(\mathbf{u}_h, p_h)$  est solution du problème de Stokes (3.1)-(3.2) et  $F_h$  et  $T_h$  les forces et contraintes définies dans (3.3) alors il existe des matrices*

$L_1^h, L_2^h, L_3^h$  et  $L_4^h$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que :

$$\begin{cases} F_h = -L_1^h \mathbf{V} - L_3^h \boldsymbol{\omega} \\ T_h = -L_2^h \mathbf{V} - L_4^h \boldsymbol{\omega} \end{cases} \quad (3.33)$$

avec  $L_3^h = L_2^{h\top}$ .

On appelle

$$L_h := \begin{pmatrix} L_1^h & L_3^h \\ L_2^h & L_4^h \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R}),$$

la **matrice de résistance hydrodynamique**. Elle dépend de la forme du solide (donc de  $\mathbf{h}$ ) et est aussi proportionnelle à la viscosité du fluide.

On peut récrire l'équation (3.33) sous forme matricielle (3.33)

$$\begin{pmatrix} F_h \\ T_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1^h & L_3^h \\ L_2^h & L_4^h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Soient  $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\vartheta}) \in \mathbb{R}^3$ , on introduit  $(\mathbf{v}_h, q_h)$  solution du problème de Stokes :

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{v}_h + \nabla q_h = 0 & \text{dans } \Omega_h \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_h = 0 & \text{dans } \Omega_h \end{cases} \quad (3.35)$$

complétés par les conditions aux bords suivantes :

$$\begin{cases} (\mathbf{v}_h - \mathbf{U} - \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_h = 0 & \text{sur } \partial\Omega_h \\ (\mathbf{v}_h - \mathbf{U} - \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{n}_h = -\lambda D(\mathbf{v}_h) \mathbf{n}_h \times \mathbf{n}_h & \text{sur } \partial\Omega_h. \end{cases} \quad (3.36)$$

**Proposition 4.** Soient  $\mathbf{u}_h$  et  $\mathbf{v}_h$  respectivement solutions des problèmes de Stokes

(3.1)-(3.2) et (3.35)-(3.36) alors

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U} & \boldsymbol{\vartheta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1^h & L_3^h \\ L_2^h & L_4^h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} = a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h). \quad (3.37)$$

*Démonstration.* D'après (3.34), on a :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U} & \boldsymbol{\vartheta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1^h & L_3^h \\ L_2^h & L_4^h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} = \mathbf{U} \cdot F_h + \boldsymbol{\vartheta} \cdot T_h.$$

En remplaçant  $F_h$  et  $T_h$  par leurs expressions, on a :

$$\mathbf{U} \cdot F_h + \boldsymbol{\vartheta} \cdot T_h = \mathbf{U} \cdot \int_{\partial\Omega_h} \Sigma(\mathbf{u}_h, p_h) \mathbf{n}_h \, d\sigma + \boldsymbol{\vartheta} \cdot \int_{\partial\Omega_h} (\mathbf{x} - G) \times \Sigma(\mathbf{u}_h, p_h) \mathbf{n}_h \, d\sigma$$

En introduisant et en enlevant  $\mathbf{v}_h$ , on a

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega_h} \mathbf{U} \cdot \Sigma(\mathbf{u}_h, p_h) \mathbf{n}_h \, d\sigma + \int_{\partial\Omega_h} \Sigma(\mathbf{u}_h, p_h) \mathbf{n}_h \cdot (\boldsymbol{\vartheta} \times (\mathbf{x} - G)) \, d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega_h} \mathbf{v}_h \cdot \Sigma(\mathbf{u}_h, p_h) \mathbf{n}_h \, d\sigma - \int_{\partial\Omega_h} (\mathbf{v}_h - \mathbf{U} - \boldsymbol{\vartheta} \times (\mathbf{x} - G)) \cdot \Sigma(\mathbf{u}_h, p_h) \mathbf{n}_h \, d\sigma \end{aligned}$$

Or par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_h} \mathbf{v}_h \cdot \Sigma(\mathbf{u}_h, p_h) \mathbf{n}_h \, d\sigma &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{v}_h \cdot \Sigma(\mathbf{u}_h, p_h)) \, d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i,j} \partial_j ((v_h)_i \Sigma(\mathbf{u}_h, p_h)_{ij}) \, d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i,j} (\partial_j (v_h)_i) \Sigma(\mathbf{u}_h, p_h)_{ij} \, d\sigma \quad \text{car } \sum_j \partial_j (\Sigma(\mathbf{u}_h, p_h)_{ij}) = 0 \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_h} \mathbf{v}_h \cdot \Sigma(\mathbf{u}_h, p_h) \mathbf{n}_h \, d\sigma &= 2 \int_{\Omega} \sum_{i,j} D(\mathbf{u}_h)_{ij} D(\mathbf{v}_h)_{ij} \, d\sigma \\ &= 2 \int_{\Omega} D(\mathbf{u}_h) : D(\mathbf{v}_h) \end{aligned}$$

En utilisant la deuxième équation de (3.2), on a donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \cdot \mathbf{F}_h + \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{T}_h &= 2 \int_{\Omega_h} D(\mathbf{u}_h) : D(\mathbf{v}_h) \\ &\quad + \frac{2}{\lambda} \int_{\partial\Omega_h} (\mathbf{U} + \boldsymbol{\vartheta} \times (\mathbf{x} - G) - \mathbf{v}_h) \cdot (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - G) - \mathbf{u}_h) \, d\sigma \end{aligned}$$

□

Dans la suite, nous allons étudier la régularité de cette forme bilinéaire pour en déduire le comportement en premier ordre des composantes de la matrice de résistance  $L_h$ .

### 3.5 Régularités et calculs explicites

Dans cette partie, nous allons justifier les calculs formels effectués dans la section précédente. Après nous calculerons les dérivées des composantes de la matrice  $L_h$  à l'aide de la forme bilinéaire qui dépend des solutions du problème de Stokes et des vitesses caractéristiques du solide.

On commence par un résultat fondamental : la régularité de  $\mathbf{h} \mapsto \mathbf{u}_h$ .

On rappelle que  $\bar{\mathbf{u}}_h$  est définie de sorte que

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}_h(\phi_h(\mathbf{x}))$$



ou de manière équivalente

$$\bar{\mathbf{u}}_h(\mathbf{y}) = \mathbf{u}_h(\boldsymbol{\varphi}_h(\mathbf{y})).$$

De la même façon, pour un réel  $t$  fixé très petit, on définit  $\bar{\mathbf{u}}_t$  de telle sorte que

$$\mathbf{u}_t(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}_t(\boldsymbol{\phi}_t(\mathbf{x}))$$

ou de manière équivalente

$$\bar{\mathbf{u}}_t(\mathbf{y}) = \mathbf{u}_t(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{y})).$$

Nous allons maintenant exprimer  $a_h$  en fonction de  $\bar{\mathbf{u}}_h$  et de  $\bar{\mathbf{v}}_h$ . On notera  $\mathbf{u}'$  la dérivée de  $t \mapsto \mathbf{u}_t$  par rapport en  $t$  en 0 et  $\bar{\mathbf{u}}'$  la dérivée de  $\bar{\mathbf{u}}_t$  par rapport à  $t$  en 0 on rappelle aussi

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u}_t|_{t=0} := \mathbf{u}' = \bar{\mathbf{u}}' - \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u}.$$

**Théorème 3.2.** *Supposons  $\mathbf{h} \in C^2(\mathbb{R}^3) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$  alors*

$$\begin{aligned} [0, T) &\longrightarrow \mathbb{V}^1(\Omega) \\ t &\longmapsto \bar{\mathbf{u}}_t \end{aligned}$$

*est infiniment dérivable en 0.*

*Démonstration.* Rappelons d'abord que si  $\bar{\mathbf{w}} \in \mathbb{V}_0^1(\Omega)$  alors

$$\mathbf{w}_t := (\text{Com} \nabla \boldsymbol{\phi}_t^\top) \bar{\mathbf{w}} \circ \boldsymbol{\phi}_t \in \mathbb{V}_0^1(\Omega_t). \quad (3.38)$$

En effet

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{w}_t &= \operatorname{div} \left( \operatorname{Com} \nabla \phi_t^\top \right) \bar{\mathbf{w}} \circ \phi_t + \operatorname{Trace} \left( \operatorname{Com} \nabla \phi_t^\top \nabla \bar{\mathbf{w}} \nabla \phi_t \right) \\ &= \operatorname{div} \left( \operatorname{Com} \nabla \phi_t^\top \right) \bar{\mathbf{w}} \circ \phi_t + \operatorname{div} \bar{\mathbf{w}}.\end{aligned}$$

Donc par l'identité de Piola [29, Théorème 2.1],  $\operatorname{div} \left( \operatorname{Com} \nabla \phi_t^\top \right) = 0$  ainsi  $\operatorname{div} \mathbf{w}_t = 0$  sur  $\Omega_t$ . De plus sur  $\partial\Omega_t$ , on rappelle que l'on note  $\mathbf{n}_t$  le vecteur normal et que l'on a :

$$\mathbf{w}_t \cdot \mathbf{n}_t = \left[ \left( \operatorname{Com} \nabla \phi_t^\top \right) \bar{\mathbf{w}} \circ \phi_t \right] \cdot \left[ \left( \frac{[\nabla \phi_t^{-1}]^\top \mathbf{n}}{||[\nabla \phi_t^{-1}]^\top \mathbf{n}||} \right) \circ \phi_t \right]$$

Grâce à la formule de Cramer, ceci se réécrit :

$$\mathbf{w}_t \cdot \mathbf{n}_t = \frac{\det \nabla \phi_t}{||[\nabla \phi_t^{-1}]^\top \mathbf{n}||} (\nabla \phi_t^{-1} \bar{\mathbf{w}} \circ \phi_t) \cdot (\nabla \phi_t^\top \mathbf{n} \circ \phi_t),$$

qui s'annule donc puisque  $\mathbf{w}_t \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

Si  $\mathbf{u}_t$  est solution faible du problème de Stokes (3.1), alors pour tout  $\bar{\mathbf{w}} \in \mathbb{V}_0^1(\Omega)$  avec  $\mathbf{w}_t \in \mathbb{V}_0^1(\Omega_t)$  défini ci-dessus, on a :

$$\int_{\Omega_t} D(\mathbf{u}_t) : D(\mathbf{w}_t) + \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega_t} \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{w}_t = \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega_t} (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{w}_t \quad (3.39)$$

On se ramène donc à appliquer le théorème des fonctions implicites dans  $\mathbb{V}_0^1(\Omega)$ . Pour cela, on remarque que pour  $t$  suffisamment petit, on a  $\Omega_t \subset B(0, R)$  avec  $R = 2$ . On pose donc comme dans (2.19) :

$$\mathbf{U} = \nabla \times \left( \chi_R(\mathbf{x}) \left( \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{x}}{2} + \boldsymbol{\omega} |\mathbf{x}|^2 \right) \right)$$

et

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{U} + (\text{Com}\nabla\phi_t^\top)\bar{\mathbf{v}}_t \circ \phi_t.$$

Avec les notations introduites précédemment, on a donc

$$\bar{\mathbf{u}}_t = \mathbf{U} \circ \varphi_t + \frac{\nabla\varphi_t}{\det\nabla\varphi_t}\bar{\mathbf{v}}_t$$

et en particulier  $t \mapsto \bar{\mathbf{u}}_t$  est dérivable si  $t \mapsto \bar{\mathbf{v}}_t$  (qui est à valeurs dans  $\mathbb{V}_0^1(\Omega)$ ) l'est.

On étudie la régularité de  $t \mapsto \bar{\mathbf{v}}_t$  ci-dessous.

Pour cela, on commence par calculer une équation sous forme faible satisfaite par  $\bar{\mathbf{v}}_t$ . On fixe donc  $\mathbf{w} \in \mathbb{V}_0^1(\Omega)$  et on transcrit la formulation faible satisfaite par  $\mathbf{u}_t$  avec la fonction-test  $\bar{\mathbf{w}}_t$  donnée par (3.38) en fonction de  $\mathbf{w}$ . Ici, on note tout d'abord que :

$$\begin{aligned} D(\mathbf{u}_t) &= \text{Sym} \left( \nabla(\mathbf{U} + (\text{Com}\nabla\phi_t^\top)\bar{\mathbf{v}}_t \circ \phi_t) \right) \\ &= \text{Sym}(\nabla\mathbf{U}) \\ &\quad + \text{Sym} \left( \left( \sum_{j=1}^3 (\bar{\mathbf{v}}_t)_j \circ \phi_t \partial_k (\text{Com}\nabla\phi_t^\top)_{ij} \right)_{i,k} \right) \\ &\quad + \text{Sym} \left( \text{Com}\nabla\phi_t^\top \cdot (\nabla\bar{\mathbf{v}}_t) \circ \phi_t \cdot \nabla\phi_t \right) \end{aligned}$$

ce que l'on réécrit :

$$D(\mathbf{u}_t) = D(\mathbf{U}) + \bar{D}_{\phi_t}^1[\bar{\mathbf{v}}_t \circ \phi_t] + \bar{D}_{\phi_t}^2[\nabla\bar{\mathbf{v}}_t \circ \phi_t]$$

avec  $D$  l'opérateur gradient symétrique classique et  $\bar{D}_{\phi_t}^1, \bar{D}_{\phi_t}^2$  sa modification due

au changement de variable  $\phi_t$ . On a donc les identités ponctuelles :

$$\begin{aligned}\bar{D}_{\phi_t}^1[\mathbf{z}] &= \text{Sym} \left( \left( \sum_{j=1}^3 z_j \partial_k (\text{Com} \nabla \phi_t^\top)_{ij} \right)_{i,k} \right) \\ \bar{D}_{\phi_t}^2[A] &= \frac{1}{\det(\nabla \phi_t)} \text{Sym} (\nabla \phi_t^{-\top} \cdot A \cdot \nabla \phi_t)\end{aligned}$$

pour tout  $(\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3), A) \in \mathbb{R}^3 \times \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . De même, on a

$$D(\mathbf{w}_t) = \bar{D}_{\phi_t}^1[\bar{\mathbf{w}} \circ \phi_t] + \bar{D}_{\phi_t}^2[\bar{\mathbf{w}} \circ \phi_t].$$

On note ici que l'on peut calculer les opérateurs  $\bar{D}_1$  et  $\bar{D}_2$  à travers le changement de variable  $\phi_t$ . En effet, on a :

$$\bar{D}_{\phi_t}^1[\bar{\mathbf{w}} \circ \phi_t] = D_{\varphi_t}^1[\bar{\mathbf{w}}] \circ \phi_t \quad \bar{D}_{\phi_t}^2[\bar{\mathbf{w}} \circ \phi_t] = D_{\varphi_t}^2[\nabla \bar{\mathbf{w}}] \circ \phi_t$$

avec les identités ponctuelles :

$$\begin{aligned}D_{\varphi_t}^1[\mathbf{z}] &= \text{Sym} \left( \left( \sum_{j=1}^3 z_j \partial_k (\text{Com} \nabla \phi_t^\top)_{ij} \circ \varphi_t \right)_{i,k} \right) \\ D_{\varphi_t}^2[A] &= \det(\nabla \varphi_t) \text{Sym} (\nabla \varphi_t^\top \cdot A \cdot \nabla \varphi_t^{-1})\end{aligned}$$

On note que l'on peut exprimer complètement  $\partial_k(\text{Com} \nabla \phi_t^\top) \circ \varphi_t$  en fonction de  $\varphi_t$ . En particulier, par composition, l'application  $t \mapsto \partial_k(\text{Com} \nabla \phi_t^\top) \circ \varphi_t$  est  $C^\infty$  sur un voisinage de 0 à valeur dans  $C_b(\mathbb{R}^3)$  (fonctions continues bornées sur  $\mathbb{R}^3$ ). De plus, le support de cette fonction est incluse dans le support de  $\mathbf{h}$  et donc indépendant de  $t$ .

Par conséquent, (3.39) se réécrit :

$$0 = \int_{\Omega_t} (D(\mathbf{U}) + D_{\phi_t}^1[\bar{\mathbf{v}}_t \circ \phi_t] + D_{\phi_t}^2[\nabla \bar{\mathbf{v}}_t \circ \phi_t]) : (D_{\phi_t}^1[\bar{\mathbf{w}} \circ \phi_t] + D_{\phi_t}^2[\nabla \bar{\mathbf{w}} \circ \phi_t]) \\ - \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{U} + (\text{Com} \nabla \phi_t^\top) \bar{\mathbf{v}}_t \circ \phi_t - (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y})) \cdot ((\text{Com} \nabla \phi_t^\top) \bar{\mathbf{w}} \circ \phi_t)$$

On note  $J_t = \det \nabla \varphi_t$  sur  $\Omega$  et  $\mathfrak{J}_t = \|\nabla \varphi_t^{-T} \mathbf{n}\| J_t$  sur  $\partial\Omega$  on peut alors opérer le changement de variable  $\mathbf{x} = \varphi_t(\mathbf{y})$  (voir le **Théorème 3.1** pour l'intégrale de bord) dans chacune des intégrales impliquées dans la formulation faible. Il vient alors la nouvelle formulation

$$\int_{\Omega} (D_{\varphi_t}^1[\bar{\mathbf{v}}_t] + D_{\varphi_t}^2[\nabla \bar{\mathbf{v}}_t]) : (D_{\varphi_t}^1[\bar{\mathbf{w}}] + D_{\varphi_t}^2[\nabla \bar{\mathbf{w}}]) J_t \\ - \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} \det(\nabla \varphi_t) \nabla \varphi_t^\top \bar{\mathbf{v}}_t \cdot (\det(\nabla \varphi_t) \nabla \varphi_t^\top \bar{\mathbf{w}}) \mathfrak{J}_t \\ = \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{U} \circ \varphi_t - (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \varphi_t)) \cdot (\det(\nabla \varphi_t) \nabla \varphi_t^\top \bar{\mathbf{w}}) \mathfrak{J}_t \\ - \int_{\Omega} D(\mathbf{U}) \circ \varphi_t : (D_{\varphi_t}^1[\bar{\mathbf{w}}] + D_{\varphi_t}^2[\nabla \bar{\mathbf{w}}]) J_t \quad (3.40)$$

Notons ici que, par construction le champ  $\bar{\mathbf{v}}_t$  est l'unique élément de  $\mathbb{V}_0^1(\Omega)$  qui réalise cette identité pour tout  $\bar{\mathbf{w}} \in \mathbb{V}_0^1(\Omega)$ . On note donc  $B_t : \mathbb{V}_0^1(\Omega) \times \mathbb{V}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  (resp.  $L_t : \mathbb{V}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ) la forme quadratique définie par le membre de gauche (resp. la forme linéaire définie au membre de droite) de cette identité. Pour un  $\bar{\mathbf{w}} \in \mathbb{V}_0^1(\Omega)$  donné, cette identité se réécrit donc :

$$B_t[\bar{\mathbf{v}}_t, \bar{\mathbf{w}}] = L_t[\bar{\mathbf{w}}].$$

Comme l'application  $t \mapsto \partial_k(\text{Com} \nabla \phi_t^\top) \circ \varphi_t$  (respectivement  $t \mapsto \varphi_t$ ) est  $C^\infty$  d'un voisinage de 0 à valeurs dans  $C_b(\mathbb{R}^3)$  (respectivement  $C_b^2(\mathbb{R}^3)$ ) à support dans un

compact donné indépendant de  $t$  petit (resp. perturbation de l'identité avec une perturbation à support dans un compact donné), on a que  $t \mapsto B_t$  est  $C^1$  d'un voisinage de 0 à valeur dans les applications bilinéaires continues sur  $\mathbb{V}_0^1(\Omega)$ . De même, le relèvement  $\mathbf{U}$  étant de plus  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^3$  à support compact,  $t \mapsto L_t$  est  $C^1$  d'un voisinage de 0 à valeurs dans  $[\mathbb{V}_0^1(\Omega)]^*$ .

De plus, pour  $t = 0$  on reconnaît :

$$B_0[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = 2 \int_{\Omega} D(\mathbf{v}) : D(\mathbf{w}) - \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w},$$

ce qui correspond à la forme quadratique associée au problème de Stokes avec glissement  $\lambda$  étudié dans le précédent chapitre. On sait d'après cette étude que ce produit scalaire induit un isomorphisme entre  $[\mathbb{V}_0^1(\Omega)]^*$  et  $\mathbb{V}_0^1(\Omega)$ .

Donc d'après le théorème des fonctions implicites, il existe une application  $\boldsymbol{\psi}$  de classe  $C^1$  sur un voisinage de 0 à valeurs dans  $\mathbb{V}_0^1(\Omega)$  telle que  $\boldsymbol{\psi}_t = \bar{\mathbf{v}}_t$  est l'unique solution de

$$B_t[\mathbf{v}_t, \bar{\mathbf{w}}] = L_t[\bar{\mathbf{w}}] \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{V}_0^1(\Omega).$$

Par unicité des solutions du problème de Stokes, on a donc  $\mathbf{v}(t) = \bar{\mathbf{v}}_t$ . Par le lemme de composition [28, lemme 3.1], on a également la régularité de  $\mathbf{u}_t$ .

□

Nous allons maintenant prouver les calculs qu'on a effectués à la section 3.3.3.

**Théorème 3.3.** *Si  $\mathbf{h} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3) \cap C^2(\mathbb{R}^3)$ , notant  $a_{t\mathbf{h}}$  la forme quadratique définie en (3.25) et  $\mathbf{u}_t, \mathbf{v}_t$  les solutions respectives des problèmes de Stokes (3.1)-(3.2) et (3.35)-(3.36), on a que  $t \mapsto a_{t\mathbf{h}}(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}_t)$  est  $C^1$  au voisinage de 0 et sa*

dérivée par rapport à  $t$  en  $t = 0$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
a'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} D(\mathbf{u}') : D(\mathbf{v}) + \int_{\Omega} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}') + \int_{\partial\Omega} h_n D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{v}' + \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{v} - \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h}) \cdot (\mathbf{u} - (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}' + \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) \cdot (\mathbf{v} - (\mathbf{U} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} ((\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v} - (\mathbf{U} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{u} - (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}))
\end{aligned}$$

avec  $h_n = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}$ .

*Démonstration.* D'après le théorème précédent, on a que les applications  $t \mapsto \bar{\mathbf{u}}_t$  et  $t \mapsto \bar{\mathbf{v}}_t$  sont  $C^\infty$  au voisinage de 0 à valeurs dans  $\mathbb{V}^1(\Omega)$ . On obtient ainsi d'après les lemmes 3.4 et 3.5.

$$\begin{aligned}
a'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} D(\mathbf{u}') : D(\mathbf{v}) + \int_{\Omega} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}') + \int_{\partial\Omega} h_n D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{v}' + \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{v} - \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h}) \cdot (\mathbf{u} - (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}' + \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) \cdot (\mathbf{v} - (\mathbf{U} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} ((\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v} - (\mathbf{U} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{u} - (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}))
\end{aligned}$$

avec  $h_n = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}$ . □

**Corollaire 3.** Soient  $\mathbf{u}_t$  et  $\mathbf{v}_t$  solutions respectives des problèmes de Stokes (3.1)-

(3.2) et (3.35)-(3.36) dans  $\Omega$  et  $\mathbf{u}'$  et  $\mathbf{v}'$  solutions de (3.18) alors

$$\begin{aligned}
a'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n})(D(\mathbf{v})\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma \\
&+ \int_{\partial\Omega} (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n})(D(\mathbf{u})\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma \\
&+ \int_{\partial\Omega} \mathbf{h}_n D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{v} - \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h}) \cdot (\mathbf{u} - (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})) \\
&+ \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) \cdot (\mathbf{v} - (\mathbf{U} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})) - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} q(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma \\
&- \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} ((\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v} - (\mathbf{U} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{u} - (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}))
\end{aligned}$$

*Démonstration.* Pour prouver ce résultat, il suffit de montrer ces deux identités :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} D(\mathbf{u}') : D(\mathbf{v}) + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}' \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{U} - \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) = \\
\int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n})(D(\mathbf{v})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} q(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma \quad (3.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}') + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}' \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) = \\
\int_{\partial\Omega} (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n})(D(\mathbf{u})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Comme  $\nabla \mathbf{u}' : q\mathbf{I} = q\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0$  d'après (3.18), alors

$$\int_{\Omega} D(\mathbf{u}') : D(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} D(\mathbf{u}') : \nabla(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} D(\mathbf{u}') : (\nabla \mathbf{v} - q\mathbf{I}).$$



Or

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D(\mathbf{u}') : (\nabla \mathbf{v} - q\mathbf{I}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{ij} (\partial_i u'_j + \partial_j u'_i) (\partial_i v_j - q\delta_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{ij} \partial_i u'_j (\partial_i v_j - q\delta_{ij}) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{ij} \partial_j u'_i (\partial_i v_j - q\delta_{ij}), \end{aligned}$$

donc par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D(\mathbf{u}') : (\nabla \mathbf{v} - q\mathbf{I}) &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \sum_{ij} u'_j (\partial_i v_j - q\delta_{ij}) n_i - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{ij} u'_j (\partial_i \partial_i v_j - \partial_i q\delta_{ij}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \sum_{ij} u'_i (\partial_i v_j - q\delta_{ij}) n_j - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{ij} u'_i (\partial_j \partial_i v_j - \partial_j q\delta_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \sum_{ij} u'_j (\partial_i v_j - q\delta_{ij}) n_i + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \sum_{ij} u'_i (\partial_i v_j - q\delta_{ij}) n_j \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{ij} u'_i (\partial_j q\delta_{ij}) \end{aligned}$$

car  $\Delta v_j - \partial_j q = 0$  et  $\sum_{ij} u'_i (\partial_j \partial_i v_j) = 0$ . De ce fait,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D(\mathbf{u}') : (\nabla \mathbf{v} - q\mathbf{I}) &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}' \cdot (\partial_n \mathbf{v} - q\mathbf{n}) \, d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}' \cdot (\partial_n \mathbf{v}^T - q\mathbf{n}) \, d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{ij} \delta_{ij} u'_i \partial_j q \\ &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}' \cdot (D(\mathbf{v})\mathbf{n} - q\mathbf{n}) \, d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u}' \cdot \nabla q \, d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}' \cdot (D(\mathbf{v})\mathbf{n} - q\mathbf{n}) \, d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} q(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u}' \, d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}' \cdot (D(\mathbf{v})\mathbf{n}) \, d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} q(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma \end{aligned}$$

Par décomposition de  $\mathbf{u}'$ , on a :  $\mathbf{u}' = (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - (\mathbf{u}' \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \mathbf{u}' \cdot (D(\mathbf{v})\mathbf{n}) \, d\sigma &= \int_{\partial\Omega} ((\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - (\mathbf{u}' \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}) \cdot (D(\mathbf{v})\mathbf{n}) \, d\sigma \\
&= \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n})(D(\mathbf{v})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} (D(\mathbf{v})\mathbf{n}) \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{u}' \times \mathbf{n}) \, d\sigma \\
&= \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n})(D(\mathbf{v})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \\
&\quad - \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{v} - \mathbf{U} - \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{u}' \times \mathbf{n}) \, d\sigma \\
&= \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n})(D(\mathbf{v})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma - \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{v} - \mathbf{U} - \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}' \, d\sigma
\end{aligned}$$

car  $(\mathbf{v} - \mathbf{U} - \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0$ . Ce qui termine la démonstration.  $\square$

### 3.6 Calcul explicite de la dérivée

Nous allons calculer dans cette section les dérivées aux premiers ordres des composantes de la matrice de résistance  $L_h = \begin{pmatrix} L_1^h & L_3^h \\ L_2^h & L_4^h \end{pmatrix}$ .

Par développement de Taylor, on peut écrire :

$$L_h = L + L' + o(\mathbf{h}I_6)$$

avec  $L = \begin{pmatrix} L_1 & L_3 \\ L_2 & L_4 \end{pmatrix}$  la matrice de résistance associée au problème de Stokes dans  $\Omega$  et  $L'$  la variation que nous allons calculer dans cette section. On notera les composantes de  $L'$  par  $\begin{pmatrix} L'_1 & L'_3 \\ L'_2 & L'_4 \end{pmatrix}$  qui sont les dérivées de  $\begin{pmatrix} L_1^h & L_3^h \\ L_2^h & L_4^h \end{pmatrix}$ .

**Remarque.** D'après les calculs effectués au chapitre 2, on a :

$$\begin{cases} F = 12\pi \frac{1+2\lambda}{2+3\lambda} \mathbf{V} \\ T = \frac{16\pi}{2+\lambda} \boldsymbol{\omega} \end{cases} \quad (3.43)$$

donc d'après (3.33)  $L_3 = L_2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ .  $L$  est diagonale par bloc. Comme la matrice de résistance est symétrique, donc la perturbation est dominée par la composante du bloc  $L_3$ .

D'après (3.33), la force appliquée dans le cas d'une rotation pure ( $\mathbf{U} = \mathbf{0}$ ) est  $L_3^h \boldsymbol{\vartheta}$ . Donc d'après (3.37)  $\mathbf{V} \cdot L_3^h \boldsymbol{\vartheta} = a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$  avec  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ .

On notera par la suite  $a_3(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) =: \mathbf{U} \cdot L_3^h \boldsymbol{\omega} = a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$  avec  $\mathbf{U} = \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ . Ainsi d'après le corollaire 3,

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \cdot L_3^h \boldsymbol{\omega} = a_3'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n})(D(\mathbf{v})\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma \\ &+ \int_{\partial\Omega} (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n})(D(\mathbf{u})\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma \\ &+ \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \\ &+ \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{V}) \\ &+ \int_{\partial\Omega} h_n D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \\ &- \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} ((\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot (\mathbf{v} - \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \end{aligned}$$

Comme  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{U} = \mathbf{0}$  alors  $\mathbf{u}$  est solution du problème de Stokes pour une translation pure et  $\mathbf{v}$  pour une rotation pure.

**Remarque.** On note  $[[\boldsymbol{\vartheta}]] \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  la matrice antisymétrique associée au produit vectoriel de  $\boldsymbol{\vartheta}$  par un vecteur quelconque ie  $\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{y} = [[\boldsymbol{\vartheta}]]\mathbf{y}$  pour tout  $\mathbf{y}$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

Dans ce cette partie, on évalue la variation de la matrice de résistance par rapport à  $\mathbf{h}$ .

### 3.6.1 Cas Navier

**Lemme 3.7.** *En notant  $\mathbf{u}$  (resp.  $\mathbf{v}$ ) solutions du problème de Stokes pour une translation pure (resp. rotation pure) alors :*

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} h_n D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial B} ((\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot (\mathbf{v} - \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \\ = \frac{9AA_1}{2} \int_{\partial B} (2h_n - \lambda(\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}) [(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{V}]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

*Démonstration.* D'après les résultats obtenus au chapitre 1, on a : - d'une part :

$$\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{A}{r^3} [[\boldsymbol{\vartheta}]] - \frac{3A}{r^3} \mathbf{x} \otimes (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}). \quad (3.45)$$

donc,

$$D(\mathbf{v}) = -\frac{3A}{2|\mathbf{x}|^5} \left( (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \right) \quad (3.46)$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\left( \frac{A_0}{r^2} + \frac{3A_1}{r^4} \right) \frac{\mathbf{V} \otimes \mathbf{x}}{r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{A_0}{r} - \frac{3A_1}{r^3} \right) ((\mathbf{V} \cdot \mathbf{x}) \mathbb{I}_3 + \mathbf{x} \otimes \mathbf{V}) \\ - \left( \frac{3A_0}{r^3} - \frac{15A_1}{r^5} \right) \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}}{r^2}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

alors

$$D(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = - \left( \frac{A_0}{r^2} + \frac{3A_1}{r^4} \right) \frac{\mathbf{V} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes \mathbf{V}}{2r} - \left( \frac{3A_0}{r^3} - \frac{15A_1}{r^5} \right) \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}}{r^2} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{A_0}{r} - \frac{3A_1}{r^3} \right) \left( (\mathbf{V} \cdot \mathbf{x}) \mathbb{I}_3 + \frac{\mathbf{x} \otimes \mathbf{V} + \mathbf{V} \otimes \mathbf{x}}{2} \right) \quad (3.48)$$

Sur  $\partial B, r = 1$ , alors on a :

$$\begin{aligned} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) &= \frac{3A}{4} (A_0 + 3A_1) [(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})_i x_j + x_i (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})_j] (V_i x_j + x_i V_j) \\ &\quad - \frac{3A}{2} (A_0 - 3A_1) [(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})_i x_j + x_i (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})_j] ((\mathbf{V} \cdot \mathbf{x}) \delta_{ij}) \\ &\quad - \frac{3A}{2} (A_0 - 3A_1) [(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})_i x_j + x_i (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})_j] \left( \frac{x_i V_j + V_i x_j}{2} \right) \\ &\quad + \frac{3A}{2} (3A_0 - 15A_1) [(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})_i x_j + x_i (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})_j] (\mathbf{V} \cdot \mathbf{x}) x_i x_j \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) &= \frac{3A}{2} (A_0 + 3A_1) [(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{V}] - \frac{3A}{2} (A_0 - 3A_1) [(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{V}] \\ &= 9AA_1 (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{V} \end{aligned}$$

alors

$$\int_{\partial B} h_n D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) = 9AA_1 \int_{\partial B} h_n (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{V} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot (\mathbf{v} - \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) &= [(\mathbf{u} - \mathbf{V}) \times \mathbf{n}] \cdot [(\mathbf{v} - \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{n}] \\
&= \lambda^2 [(D(\mathbf{u})\mathbf{n}) \times \mathbf{n}] \cdot [(D(\mathbf{v})\mathbf{n}) \times \mathbf{n}] \\
&= \lambda^2 [-3A_1(\mathbf{V} \times \mathbf{x})] \cdot \left[ -\frac{3A}{2}(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{x} \right] \\
&= \frac{9\lambda^2 AA_1}{2} [(\mathbf{V} \times \mathbf{x})] \cdot [(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{x}] \\
&= -\frac{9\lambda^2 AA_1}{2} [(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{V}]
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B} h_n D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial B} ((\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot (\mathbf{v} - \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \\
= \frac{9AA_1}{2} \int_{\partial B} (2h_n - \lambda(\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}) [(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{V}] \quad (3.50)
\end{aligned}$$

□

**Lemme 3.8.** Soient  $\mathbf{u}$  (resp.  $\mathbf{v}$ ) solutions du problème de Stokes pour une translation pure (resp. rotation pure) alors

$$\begin{aligned}
E_2 := \frac{1}{\lambda} \int_{\partial \Omega} (\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{v} - \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{V}) + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial \Omega} (\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \\
3A_1(A-1) \int_{\partial \Omega} \left[ ((\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h}) \right] \cdot \mathbf{V} + \frac{3A}{2} \int_{\partial \Omega} (A_0 + 3A_1)h_n(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{V} \\
- \frac{3A}{2} \int_{\partial \Omega} (A_0 - 3A_1)[\boldsymbol{\vartheta} \cdot (\mathbf{h} \times \mathbf{n})]\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} \quad (3.51)
\end{aligned}$$

*Démonstration.* On note  $\llbracket \boldsymbol{\vartheta} \rrbracket \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  la matrice antisymétrique associée au produit vectoriel de  $\boldsymbol{\vartheta}$  par un vecteur quelconque ie  $\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{y} = \llbracket \boldsymbol{\vartheta} \rrbracket \mathbf{y}$  pour tout  $\mathbf{y}$  dans  $\mathbb{R}^3$ , on a donc :

$$\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \left( -\frac{3A}{r^5} [\mathbf{x} \otimes (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})] + \frac{A}{r^3} \llbracket \boldsymbol{\vartheta} \rrbracket \right)$$

Sur le bord, on a donc

$$\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{v} = A(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h} - 3[(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}]\mathbf{x}) \quad (3.52)$$

Par les conditions au bords on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{v} - \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{V}) &= \int_{\partial\Omega} [(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h} - \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{v}) \times \mathbf{n}] \cdot [D(\mathbf{u})\mathbf{n} \times \mathbf{n}] \\ &= 3A_1(A-1) \int_{\partial\Omega} [(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h}) \times \mathbf{n}] \cdot [\mathbf{V} \times \mathbf{x}] \\ &= 3A_1(A-1) \int_{\partial\Omega} [\mathbf{x} \times ((\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h}) \times \mathbf{n})] \cdot \mathbf{V} \\ &= 3A_1(A-1) \int_{\partial\Omega} [\vartheta_n(\mathbf{h} \times \mathbf{n}) - h_n(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{n})] \cdot \mathbf{V} \end{aligned}$$

De même sur le bord, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -(A_0 + 3A_1)(\mathbf{h} \cdot \mathbf{x})\mathbf{V} + (A_0 - 3A_1)[(\mathbf{V} \cdot \mathbf{x})\mathbf{h} + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{h})\mathbf{x}] \\ &\quad - (3A_0 - 15A_1)(\mathbf{V} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{h} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x} \quad (3.53) \end{aligned}$$

De plus sur le bord  $\mathbf{n} = -\mathbf{x}$  alors,

$$(\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u}) \times \mathbf{n} = (A_0 + 3A_1)h_n(\mathbf{V} \times \mathbf{n}) - (A_0 - 3A_1)V_n(\mathbf{h} \times \mathbf{n}) \quad (3.54)$$

Donc

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) = - \int_{\partial\Omega} [(\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u}) \times \mathbf{n}] \cdot [D(\mathbf{v})\mathbf{n} \times \mathbf{n}] \\
& = \frac{3A}{2} \int_{\partial\Omega} [(A_0 + 3A_1)h_n(\mathbf{V} \times \mathbf{n}) - (A_0 - 3A_1)V_n(\mathbf{h} \times \mathbf{n})] \cdot [(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}] \\
& = \frac{3A}{2} \int_{\partial\Omega} (A_0 + 3A_1)h_n(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{V} - \frac{3A}{2} \int_{\partial\Omega} (A_0 - 3A_1)V_n(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{h}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{v} - \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{V}) + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \\
& = 3A_1(A-1) \int_{\partial\Omega} [\vartheta_n(\mathbf{h} \times \mathbf{n}) - h_n(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{n})] \cdot \mathbf{V} \\
& + \frac{3A}{2} \int_{\partial\Omega} (A_0 + 3A_1)h_n(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{V} - \frac{3A}{2} \int_{\partial\Omega} (A_0 - 3A_1)V_n(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{h} \\
& = \frac{3}{2}(A_1A + AA_0 + 2A_1) \int_{\partial\Omega} h_n(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{V} \\
& + 3A_1(A-1) \int_{\partial\Omega} \vartheta_n(\mathbf{h} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{V} - \frac{3A}{2}(A_0 - 3A_1) \int_{\partial\Omega} V_n(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{h} \quad (3.55)
\end{aligned}$$

□

**Lemme 3.9.** Soient  $\mathbf{u}$  (resp.  $\mathbf{v}$ ) solutions du problème de Stokes pour une translation pure (resp. rotation pure) alors

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n})(D(\mathbf{v})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n})(D(\mathbf{u})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (q\mathbf{u}' + p\mathbf{v}') \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \\
& = 2(A_0 - 3A_1)(A-1) \int_{\partial\Omega} \mathbf{V}_n [(\nabla \mathbf{h} - I_3)(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h})] \cdot \mathbf{n} \\
& - \frac{3}{2} \int_{\partial\Omega} V_n ((4A-1)(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h}) + (1-A)\nabla \mathbf{h}(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})) \cdot \mathbf{n} \quad (3.56)
\end{aligned}$$



*Démonstration.* Comme  $(D(\mathbf{v})\mathbf{n})\mathbf{n} = 0$  d'après (3.46), il reste à calculer

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n})(D(\mathbf{u})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

et

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (q\mathbf{u}' + p\mathbf{v}') \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

Or

$$\begin{aligned} D(\mathbf{u})\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} &= - \left( \frac{A_0}{r^2} + \frac{3A_1}{r^4} \right) \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})}{r} \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \left( \frac{A_0}{r} - \frac{3A_1}{r^3} \right) ((\mathbf{V} \cdot \mathbf{x}) + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})) \\ &\quad - \left( \frac{3A_0}{r^3} - \frac{15A_1}{r^5} \right) \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})^2}{r^2} \end{aligned}$$

et sur le bord ( $r = 1$ ),  $\mathbf{n} = -\mathbf{x}$ , donc

$$\begin{aligned} D(\mathbf{u})\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} &= (A_0 + 3A_1) V_n - 2(A_0 - 3A_1) V_n \\ &\quad + (3A_0 - 15A_1) V_n \\ &= (2A_0 - 6A_1) V_n \end{aligned}$$

D'après (3.24), on a sur  $\partial\Omega$  :

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n} = (\nabla \mathbf{h}(\mathbf{v} - \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h} - \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{h}) \cdot \mathbf{n}$$

Or d'après (3.45)

$$\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{v} = A (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h} - 3[(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}]\mathbf{x}),$$

Donc

$$\begin{aligned}
(\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} &= A(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h} - 3[(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}]\mathbf{x}) \\
&= A((\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{n} + 3(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}) \\
&= 4A(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{n}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h} - \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = (1 - 4A)(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{n}$$

et

$$\nabla \mathbf{h}(\mathbf{v} - \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = (A - 1)\nabla \mathbf{h}(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$$

Donc

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n} = (1 - 4A)(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{n} + (A - 1)\nabla \mathbf{h}(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \quad (3.57)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n})(D(\mathbf{u})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= 2(A_0 - 3A_1)(A - 1) \int_{\partial\Omega} \mathbf{V}_n[\nabla \mathbf{h}(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})] \cdot \mathbf{n} \\
&\quad + 2(A_0 - 3A_1)(1 - 4A) \int_{\partial\Omega} \mathbf{V}_n(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{n} \quad (3.58)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (q\mathbf{u}' + p\mathbf{v}') \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \frac{3}{2} \int_{\partial\Omega} V_n ((4A - 1)(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h}) + (1 - A)\nabla \mathbf{h}(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}$$

□

On obtient ainsi ce théorème en additionnant les résultats ci-dessus :

**Théorème 3.4.** *On a alors*

$$\begin{aligned}
L'_3 = & 2(A_0 - 3A_1 + \frac{3}{2})(A - 1) \int_{\partial\Omega} \mathbf{n}\mathbf{n}^\top \nabla \mathbf{h}[\mathbf{n}] \\
& - \frac{1}{2} ((4 - 13A)(A_0 - 3A_1) - 3(4A - 1)) \int_{\partial\Omega} \mathbf{n}\mathbf{n}^\top [\mathbf{h}] \\
& - \frac{9AA_1}{2} \int_{\partial B} ((2 + B)h_n - \lambda(\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n})[\mathbf{n}] \\
& + 3A_1(A - 1) \int_{\partial\Omega} (\mathbf{h} \times \mathbf{n})\mathbf{n}^\top \quad (3.59)
\end{aligned}$$

avec  $B = \frac{1}{3AA_1}(A_1A + AA_0 + 2A_1)$ .

*Démonstration.* D'après les résultats obtenus ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}
a'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = & 2(A_0 - 3A_1)(A - 1) \int_{\partial\Omega} V_n[\nabla \mathbf{h}(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})] \cdot \mathbf{n} \\
& + 2(A_0 - 3A_1)(1 - 4A) \int_{\partial\Omega} V_n(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{n} \\
& + \frac{3}{2}(A_1A + AA_0 + 2A_1) \int_{\partial\Omega} h_n(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{V} \\
& + 3A_1(A - 1) \int_{\partial\Omega} \vartheta_n(\mathbf{h} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{V} - \frac{3A}{2}(A_0 - 3A_1) \int_{\partial\Omega} V_n(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{h} \\
& + \frac{9AA_1}{2} \int_{\partial B} (2h_n - \lambda(\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}) [(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{V}] \\
& - \frac{1}{2} \int_{\partial B} (\nabla \mathbf{h}(\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} - \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{h}) \cdot \mathbf{n} \\
& - \frac{3}{2} \int_{\partial\Omega} V_n ((4A - 1)(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h}) + (1 - A)\nabla \mathbf{h}(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}
\end{aligned}$$

Donc on a donc par 3.24 :

$$\begin{aligned}
a'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = & -2(A_0 - 3A_1)(A - 1) \int_{\partial\Omega} V_n [\nabla \mathbf{h}(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{n})] \cdot \mathbf{n} \\
& + (2 - \frac{13A}{2})(A_0 - 3A_1) \int_{\partial\Omega} V_n (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{n} \\
& + \frac{9AA_1}{2} \int_{\partial B} ((2 + B)h_n - \lambda(\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}) [(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{V}] \\
& + 3A_1(A - 1) \int_{\partial\Omega} \vartheta_n (\mathbf{h} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{V} \\
& - \frac{3}{2} \int_{\partial\Omega} V_n ((4A - 1)(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h}) + (1 - A)\nabla \mathbf{h}(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}
\end{aligned}$$

avec  $B = \frac{1}{3AA_1}(A_1A + AA_0 + 2A_1)$ . Or  $a_3(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \mathbf{V}^\top L_3^h \boldsymbol{\vartheta}$  alors, on a :

$$\begin{aligned}
L'_3 = & 2(A_0 - 3A_1 + \frac{3}{2})(A - 1) \int_{\partial\Omega} \mathbf{n}\mathbf{n}^\top \nabla \mathbf{h}[\mathbf{n}] \\
& - \frac{1}{2} ((4 - 13A)(A_0 - 3A_1) - 3(4A - 1)) \int_{\partial\Omega} \mathbf{n}\mathbf{n}^\top [\mathbf{h}] \\
& - \frac{9AA_1}{2} \int_{\partial B} ((2 + B)h_n - \lambda(\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}) [\mathbf{n}] \\
& + 3A_1(A - 1) \int_{\partial\Omega} (\mathbf{h} \times \mathbf{n})\mathbf{n}^\top \quad (3.60)
\end{aligned}$$

□

### 3.6.2 Cas Dirichlet

Dans cette partie, nous allons étudier le problème de Stokes avec des conditions de Dirichlet au bord c'est à dire que la vitesse relative du fluide est la même dans toutes les directions ce qui se traduit par  $\lambda = 0$ . Ainsi les équations (3.1)-(3.2)

deviennent :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}_h - \nabla p_h = 0 & \text{dans } \Omega_h \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_h = 0 & \text{dans } \Omega_h \\ \mathbf{u}_h = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} & \text{sur } \partial\Omega_h \end{cases} \quad (3.61)$$

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{v}_h - \nabla q_h = 0 & \text{dans } \Omega_h \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_h = 0 & \text{dans } \Omega_h \\ \mathbf{v}_h = \mathbf{U} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x} & \text{sur } \partial\Omega_h \end{cases} \quad (3.62)$$

On a alors ce résultat qui est une conséquence directe de la proposition 4.

**Proposition 5.** Soient  $\mathbf{u}_h$  et  $\mathbf{v}_h$  respectivement solutions des problèmes de Stokes (3.61) et (3.62) alors

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U} & \boldsymbol{\vartheta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1^h & L_3^h \\ L_2^h & L_4^h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} = \int_{\Omega_h} D(\mathbf{v}_h) : D(\mathbf{u}_h) := a_d(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \quad (3.63)$$

On note  $a_d$  cette forme bilinéaire associée aux solutions du problème de Stokes avec des conditions de Dirichlet.

**Théorème 3.5.** Soient  $\mathbf{u}_h$  et  $\mathbf{v}_h$  solutions des problèmes de Stokes (3.61) et (3.62).

Si de plus on considère que  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{U} = 0$ , alors

$$a'_d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} D(\mathbf{u}') : D(\mathbf{v}) + \int_{\Omega} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}') + \int_{\partial\Omega} h_n D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \quad (3.64)$$

avec  $h_n = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}$ .

*Démonstration.* D'après le théorème 3.3 et le lemme 3.5, la forme bilinéaire  $a'_d$  est

bien régulière et sa dérivée est donnée par cette formule

$$a'_d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} D(\mathbf{u}') : D(\mathbf{v}) + \int_{\Omega} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}') + \int_{\partial\Omega} h_n D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}).$$

Nous rappelons ici que les solutions du problème de Stokes (pour  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus B(0, 1)$ ) avec des conditions de Dirichlet pour une translation pure et une rotation pure donnée respectivement par

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{3}{4} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{1}{3|\mathbf{x}|^3} \right) \mathbf{V} + \frac{3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{V})\mathbf{x}}{4} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|^5} - \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \right) \quad \text{et} \quad p(\mathbf{x}) = \frac{3\mathbf{V} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}. \quad (3.65)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad \text{et} \quad q(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.66)$$

D'après (3.49) on a

$$\int_{\partial B} h_n D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) = 9AA_1 \int_{\partial B} h_n (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{V}$$

Comme  $\lambda = 0$ , alors

$$\int_{\partial\Omega} h_n D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) = -\frac{9}{4} \int_{\partial\Omega} h_n (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{V} \quad (3.67)$$

De plus d'après le corollaire 3, on a

$$\int_{\Omega} D(\mathbf{u}') : D(\mathbf{v}) + \int_{\Omega} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}') = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}' \cdot (D(\mathbf{v})\mathbf{n}) \, d\sigma + \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}' \cdot (D(\mathbf{u})\mathbf{n}) \, d\sigma \quad (3.68)$$

Or d'après 3.46

$$D(\mathbf{v}) = -\frac{3}{2|\mathbf{x}|^5} \left( (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \right) \quad (3.69)$$

Donc

$$D(\mathbf{v})\mathbf{n} = \frac{3}{2|\mathbf{x}|^5} (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \quad (3.70)$$

De plus par dérivation sur le bord, on a  $\mathbf{u}' = -\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u}$  et puis d'après 3.53

$$\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{6}{4} h_n \mathbf{V} + \frac{6}{4} h_n V_n \mathbf{x} \quad (3.71)$$

Ainsi

$$\mathbf{u}' \cdot D(\mathbf{v})\mathbf{n} = -\frac{9}{4} h_n (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{V} \quad (3.72)$$

et d'après (3.48)

$$\begin{aligned} D(\mathbf{u}(\mathbf{x})) &= -\left( \frac{A_0}{r^2} + \frac{3A_1}{r^4} \right) \frac{\mathbf{V} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes \mathbf{V}}{2r} - \left( \frac{3A_0}{r^3} - \frac{15A_1}{r^5} \right) \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}}{r^2} \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \left( \frac{A_0}{r} - \frac{3A_1}{r^3} \right) \left( (\mathbf{V} \cdot \mathbf{x}) \mathbb{I}_3 + \frac{\mathbf{x} \otimes \mathbf{V} + \mathbf{V} \otimes \mathbf{x}}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.73)$$

Donc

$$\begin{aligned} D(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n} &= -\left( \frac{3}{4r^2} + \frac{3}{4r^4} \right) \frac{-\mathbf{V} + V_n \mathbf{x}}{2r} - \left( \frac{9}{4r^3} - \frac{15}{4r^5} \right) \frac{V_n \mathbf{x}}{r^2} \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \left( \frac{3}{4r} - \frac{3}{4r^3} \right) \left( V_n \mathbf{x} + \frac{V_n \mathbf{x} - \mathbf{V}}{2} \right) \\ &= \frac{3}{4} (V_n \mathbf{x} + \mathbf{V}) \end{aligned} \quad (3.74)$$

Or par dérivation sur le bord, on obtient

$$\mathbf{v}' = \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h} - \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

Donc d'après (3.52)

$$\mathbf{v}' = \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{h} - \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{v} = 3[(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}] \mathbf{x} \quad (3.75)$$

Comme sur le bord  $\mathbf{x} = -\mathbf{n}$  alors  $\mathbf{v}' \cdot D(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n} = 0$ . Il s'ensuit alors

$$\begin{aligned} a'_d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} D(\mathbf{u}') : D(\mathbf{v}) + \int_{\Omega} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}') + \int_{\partial\Omega} h_n D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \\ &= -\frac{9}{2} \int_{\partial\Omega} h_n (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{V} \end{aligned}$$

□

**Corollaire 4.** *Dans le cas d'une la composante  $L$  de la matrice de résistance est*

$$L_3 = \frac{9}{2} \int_{\partial\Omega} h_n [\mathbf{x}] \text{ qui est une matrice antisymétrique.}$$





# Chapitre 4

## Études du Système dynamique

### Introduction

Nous considérons dans ce chapitre la dynamique d'un solide dans un fluide visqueux qui se déplace sous l'effet d'une force extérieure uniforme comme la gravité. Plus précisément, nous supposons qu'un corps  $\mathcal{B}$  est immergé dans un fluide visqueux occupant l'espace  $\mathbb{R}^3$  et se déplace sous l'action d'un champ gravitationnel uniforme  $\boldsymbol{\eta}$ . Le mouvement du fluide visqueux est décrit par les équations de Stokes et la dynamique du solide par les lois de Newton classiques. De plus, nous considérons que le solide se déplace dans le fluide avec une vitesse de translation  $\mathbf{V}$  et une vitesse de rotation  $\boldsymbol{\omega}$ .

L'état solide est caractérisé par sa position par le vecteur  $\mathbf{r}$  et un repère orthonormé  $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$ . Ce dernier est fixé dans ce solide et décrit l'orientation relative par rapport au repère  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  fixé dans l'espace. Le vecteur  $\mathbf{r}$  décrit en revanche, la position du centre de masse du solide par rapport à ce repère fixe.

On a alors ces relations cinématiques :

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{V} \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{d}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}_i$$

avec  $\mathbf{V}$  la vitesse de translation du solide et  $\boldsymbol{\omega}$  sa vitesse de rotation.

Autre que la gravitation, le solide est soumis aux forces  $F$  et moments  $T$  qu'exerce le fluide sur lui

$$F = \int_{\partial\Omega} \Sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \, d\sigma \quad \text{et} \quad T = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{x} - G) \times \Sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \, d\sigma$$

avec  $\mathbf{u}$  et  $p$  champ de vitesse et pression du fluide et  $\Sigma$  le tenseur de contraintes.

Ainsi par la deuxième loi de Newton et le théorème des moments, on a :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{0} \\ m\dot{\mathbf{V}} = F + \boldsymbol{\eta} \\ \frac{d(J\boldsymbol{\omega})}{dt} = T. \end{cases} \quad (4.1)$$

avec  $J$  est le tenseur d'inertie et  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  solution du problème de Stokes suivant :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} - \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (4.2)$$

complété par des conditions de glissement du type loi de Navier :

$$\begin{cases} (\mathbf{u} - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ (\mathbf{u} - \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{n} = -\lambda D(\mathbf{u}) \mathbf{n} \times \mathbf{n} = -\frac{\lambda}{2} \Sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \times \mathbf{n} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.3)$$

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les forces et les couples peuvent s'écrire de manière linéaire en fonction de  $\begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix}$  via la matrice de résistance

$L = \begin{pmatrix} L_1 & L_3 \\ L_2 & L_4 \end{pmatrix}$ . On note que la matrice  $L$  dépend a priori de la matrice reliant  $(d_1, d_2, d_3)$  et  $(e_1, e_2, e_3)$ . On peut alors réécrire (4.1) sous forme d'un système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{0} \\ m\dot{\mathbf{V}} = L_1\mathbf{V} + L_3\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\eta} \\ J\dot{\boldsymbol{\omega}} = L_2\mathbf{V} + L_4\boldsymbol{\omega}. \end{cases} \quad (4.4)$$

## 4.1 Stabilité du système dynamique dans le cas Dirichlet

Dans ce qui va suivre nous allons étudier le comportement en temps long de ce système dynamique. Nous allons faire d'abord un changement de variable pour écrire l'équation (4.4) dans le repère mobile  $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$  associé au mobile puisque que sur cette repère les composantes de la matrice de résistance  $L$  sont constantes[21].

Ainsi en écrivant (4.4) dans ce repère  $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$ , c'est à dire  $\bar{L}_k^{ij} = \mathbf{d}_i \cdot$

$L_k \mathbf{d}_j, \bar{\eta}_i = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{d}_i, \bar{\omega}_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{d}_i$  et  $\bar{p}_i = \mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_i$ , il vient :

$$\begin{cases} \dot{\bar{\boldsymbol{\eta}}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{0}, \\ \dot{\bar{\mathbf{p}}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{p}} = -\bar{L}_1 \bar{\mathbf{V}} - \bar{L}_3 \bar{\boldsymbol{\omega}} + \bar{\boldsymbol{\eta}}, \\ \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}} = -\bar{L}_2 \bar{\mathbf{V}} - \bar{L}_4 \bar{\boldsymbol{\omega}}. \end{cases} \quad (4.5)$$

complétées par les conditions initiales

$$\bar{\boldsymbol{\eta}}(0) = \bar{\boldsymbol{\eta}}^0, \quad \bar{\mathbf{p}}(0) = \bar{\mathbf{p}}^0 \quad \text{et} \quad \bar{\boldsymbol{\omega}}(0) = \bar{\boldsymbol{\omega}}^0 \quad (4.6)$$

avec  $\bar{\boldsymbol{\eta}}^0, \bar{\mathbf{p}}^0$  et  $\bar{\boldsymbol{\omega}}^0$  données.

Nous allons démontrer que le système (4.5)-(4.6) possède un point d'équilibre stable et un point d'équilibre instable dans le cas Dirichlet (sans glissement) avec des conditions initiales bien choisies. Dans la suite, on reprend le calcul des efforts pour un solide  $B$  dont la forme est une sphère perturbée. Nous allons donc garder, pour l'étude du système dynamique, le terme principal pour chaque entrée de la matrice :  $L_1, L_2, L_3, L_4$ .

Nous avons calculé au chapitre 2 les composantes  $L_1$  et  $L_3$  de la matrice de résistance hydrodynamique. Ainsi

$$\bar{L}_1 \simeq 6\pi, \quad \bar{L}_4 \simeq 8\pi.$$

Nous avons démontré aussi au chapitre 3 que la composante  $\bar{L}_3$  de la matrice de résistance est antisymétrique. Il existe alors un vecteur  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^3$  tels que  $\bar{L}_3 \boldsymbol{\omega} = \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}$ . Comme  $L$  est symétrique alors  $\bar{L}_2 = -\bar{L}_3$  donc  $\bar{L}_2 \mathbf{p} = \mathbf{H} \times \mathbf{p}$ . En posant

$\mathbf{H} = -\frac{9}{2} \int_{\partial\Omega} h_n(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{V}$ , on a

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\eta} &= 0 \\ \dot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} &= -6\pi\mathbf{p} - \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\eta} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= -8\pi\boldsymbol{\omega} - \mathbf{H} \times \mathbf{p}. \end{cases} \quad (4.7)$$

A priori,  $\mathbf{H}$  est petit car il est donné comme la dérivée au premier ordre de la perturbation de la sphère. Ainsi  $\mathbf{H}$  vérifie  $\|\mathbf{H}\| \ll 1$  et on complète le système avec des conditions initiales :

$$\boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\eta}^0 \in \mathbb{S}^2 \quad (\text{ie } \boldsymbol{\eta}^0 \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \|\boldsymbol{\eta}^0\| = 1) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \mathbf{p}(0) = 0. \quad (4.8)$$

**Théorème 4.1.** *On considère le système d'équations différentielles (4.7) avec les conditions initiales (4.8), alors :*

$\left( \boldsymbol{\eta}_\infty = \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}, \quad \boldsymbol{\omega}_\infty = 0, \quad \mathbf{p}_\infty = -\frac{1}{6\pi} \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|} \right)$  est un **équilibre instable** alors que  $\left( \boldsymbol{\eta}_\infty = -\frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}, \quad \boldsymbol{\omega}_\infty = 0, \quad \mathbf{p}_\infty = \frac{1}{6\pi} \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|} \right)$  est un **équilibre instable**.

Il s'ensuit que, si  $\left| \boldsymbol{\eta}^0 - \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|} \right| \ll 1$  alors  $\boldsymbol{\eta}$  converge **exponentiellement vite** vers le point d'équilibre stable.

Dans la suite on pose par convention  $\frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|} = \mathbf{e}_1$  et  $|\mathbf{H}| \leq \varepsilon$  (avec  $\varepsilon \ll 1$ ). On introduit  $\mathbf{e}_2$  si bien que  $\boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\eta}_0 \in \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$  on peut toujours faire ces hypothèses.

Commençons par ce lemme :

**Lemme 4.1.** *La première composante du vecteur  $\boldsymbol{\omega}$  est nulle i.e  $\omega_1 = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1 = 0$ .*

*Démonstration.* Par définition  $\boldsymbol{\omega}$  est solution de  $\dot{\boldsymbol{\omega}} = -8\pi\boldsymbol{\omega} + \mathbf{p} \times \mathbf{H}$ .

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}_1 &= \frac{d}{dt} \left( \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|} \right) \\
&= -8\pi\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|} + (\mathbf{p} \times \mathbf{H}) \cdot \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|} \\
&= 8\pi\boldsymbol{\omega}_1.
\end{aligned}$$

Or  $\boldsymbol{\omega}_1|_{t=0} = \boldsymbol{\omega}^0 = \mathbf{0}$ , donc par unicité on obtient  $\boldsymbol{\omega}_1(t) = \mathbf{0}$  pour tout réel  $t$ .  $\square$

On peut alors réaliser qu'en réalité :

**Lemme 4.2.**  $\boldsymbol{\omega}$  est colinéaire à  $\mathbf{e}_3$  alors on a :

$$(\mathbf{p}, \boldsymbol{\eta}) \in \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle \quad \text{et} \quad |\boldsymbol{\eta}(t)| = 1 \quad \forall t.$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer qu'on peut construire une solution du système sous cette forme, par unicité, ce sera la solution.

On cherche donc  $\mathbf{p}, \boldsymbol{\eta}$  et  $\boldsymbol{\omega}$  sous la forme

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, 0)^\top, \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, 0)^\top \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\omega} = (0, 0, \varpi)^\top.$$

On note que, sous ces hypothèses :

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\eta} \in \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle, \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} \in \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} \in \langle \mathbf{e}_2 \rangle,$$

les équations

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\eta} = 0 \\ \dot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} = -6\pi\mathbf{p} - \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\eta} \end{cases} \quad (4.9)$$

projetées sur  $\mathbf{e}_3$  donne donc  $0 = 0$ .

De même  $\mathbf{H} \times \mathbf{p} \in \mathbb{R}\mathbf{e}_3$  dans l'équation donc  $\dot{\boldsymbol{\omega}} = -8\pi\boldsymbol{\omega} - \mathbf{H} \times \mathbf{p}$  projetée sur  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  donne  $0 = 0$ .

$$\text{De plus on peut calculer } \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varpi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varpi\eta_2 \\ \varpi\eta_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc on a :

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 - \varpi\eta_2 = 0 \\ \dot{\eta}_2 + \varpi\eta_1 = 0 \end{cases} \iff (\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}). \quad (4.10)$$

De même

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} = \begin{pmatrix} -\varpi\eta_2 \\ \varpi\eta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varpi \end{pmatrix} = -\varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ \varpi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{cases} \dot{p}_1 - \varpi p_2 = -6\pi p_1 + \eta_1 \\ \dot{p}_2 + \varpi p_1 = -6\pi p_2 - \varepsilon\varpi + \eta_2 \end{cases} \iff \dot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} = -6\pi\mathbf{p} + \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\eta} \quad (4.11)$$

Enfin pour  $\varpi$  on obtient de même :

$$\dot{\varpi} = -8\pi\varpi - \varepsilon p_2. \quad (4.12)$$

En conclusion on a le système (4.10)-(4.11)-(4.12) qui garantit que

$$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{\eta}|^2 = 2\dot{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\eta} = -2\varpi\eta_2\eta_1 + 2\varpi\eta_1\eta_2 = 0$$



ce qui implique que  $|\boldsymbol{\eta}(t)|$  est constante donc :

$$|\boldsymbol{\eta}(t)| = |\boldsymbol{\eta}(0)| = 1 \quad \forall t.$$

□

*Démonstration du théorème 4.1.* On s'intéresse maintenant aux systèmes (4.10),(4.11) et(4.12).

On note tout d'abord que, pour avoir un point fixe il faut :

- $\varpi\eta_2 = 0$  et  $\varpi\eta_1 = 0 \implies \varpi = 0$  (en effet  $\eta_1^2 + \eta_2^2 = 1$ )
- $\mathbf{p} = \frac{1}{6\pi}\boldsymbol{\eta}$
- $p_2 = 0$  donc  $\eta_2 = 0 \implies \eta_1 = \pm 1$ .

On trouve ainsi les deux points fixes mentionnés plus haut.

Pour étudier la stabilité de ces points fixes, on réécrit le système (4.10),(4.11) et (4.12) en introduisant que, puisque  $|\boldsymbol{\eta}| = 1$ , on peut l'écrire sous la forme  $(\cos \theta, \sin \theta)$ .

L'équation (4.10) se réécrit alors :

$$\begin{cases} -\dot{\theta} \sin \theta - \varpi \sin \theta = 0 \\ \dot{\theta} \cos \theta + \varpi \cos \theta = 0 \end{cases} \iff \dot{\theta} + \varpi = 0 \quad (4.13)$$

Par conséquent le système (4.10),(4.11) et (4.12) est équivalent à

$$\begin{cases} \dot{\theta} + \varpi = 0 \\ \dot{p}_1 - \varpi p_2 = -6\pi p_1 + \cos \theta \\ \dot{p}_2 + \varpi p_1 = -6\pi p_2 - \varepsilon \varpi + \sin \theta \\ \dot{\varpi} = -8\pi \varpi - \varepsilon p_2 \end{cases} \quad (4.14)$$

pour lequel on reconnaît à nouveau que les points fixes sont

$$\left( \theta = 0, \quad p_1 = \frac{1}{6\pi}, \quad p_2 = 0, \quad \varpi = 0 \right)$$

ou

$$\left( \theta = \pi, \quad p_1 = -\frac{1}{6\pi}, \quad p_2 = 0, \quad \varpi = 0 \right).$$

On rappelle qu'étant donné la forme du système (4.14), le linéarisé de (4.14) autour du point fixe  $(\bar{\theta}, \bar{p}, 0, 0)$  est

$$\begin{cases} \dot{\theta} = -\varpi \\ \dot{p}_1 = -6\pi p_1 - \sin(\bar{\theta})\theta \\ \dot{p}_2 = -6\pi p_2 - (\varepsilon + \bar{p}_1)\varpi + \cos(\bar{\theta})\theta \\ \dot{\varpi} = -8\pi \varpi - \varepsilon p_2. \end{cases} \quad (4.15)$$

Ce que l'on peut écrire sous la forme  $\dot{X} = \bar{A}X$  en prenant l'inconnu

$$X = \begin{pmatrix} \theta \\ p_1 \\ p_2 \\ \varpi \end{pmatrix} \text{ et en notant } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\sin(\bar{\theta}) & -6\pi & 0 & 0 \\ \cos(\bar{\theta}) & 0 & -6\pi & -(\varepsilon + \bar{p}_1) \\ 0 & 0 & -\varepsilon & -8\pi \end{pmatrix}.$$

1. Étude de  $\theta = \pi$ ,  $p_1 = -\frac{1}{6\pi}$ ,  $p_2 = 0$ ,  $\varpi = 0$ .

Dans ce cas, on a

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -6\pi & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -6\pi & -(\varepsilon - \frac{1}{6\pi}) \\ 0 & 0 & -\varepsilon & -8\pi \end{pmatrix}$$

**Remarque.** La deuxième ligne ne dépend que de la deuxième variable. On a donc  $-6\pi$  comme valeur propre et on retire la deuxième variable pour calculer les autres valeurs propres.

On est donc ramener au calcul du spectre de

$$\bar{\mathbb{A}}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -6\pi & -(\varepsilon - \frac{1}{6\pi}) \\ 0 & -\varepsilon & -8\pi \end{pmatrix}$$

dont le polynôme caractéristique est  $\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda+6\pi)(\lambda+8\pi) + \varepsilon - \varepsilon(\varepsilon - \frac{1}{6\pi})$ .

Pour  $\varepsilon = 0$ , les trois racines de ce polynôme sont  $0$ ,  $-6\pi$  et  $-8\pi$ .

Pour  $\varepsilon \ll 1$ , on peut calculer les valeurs propres par le théorème des fonctions implicites.

On obtient donc que pour  $\varepsilon \ll 1$  on a une valeur propre au voisinage de  $-6\pi$ , une au voisinage de  $-8\pi$  (donc tout deux négatives) et la dernière au voisinage de 0. Pour déterminer le signe de cette dernière, on remarque que

$$\lambda_\varepsilon(\lambda_\varepsilon + 6\pi)(\lambda_\varepsilon + 8\pi) + \varepsilon - \lambda_\varepsilon\left(\varepsilon - \frac{1}{6\pi}\right) = 0$$

En différenciant par rapport à  $\varepsilon$ , il vient, en rappelant que  $\lambda_0 = 0$ ,

$$\lambda'_0 \times 6\pi \times 8\pi + 1 = 0 \quad \lambda'_0 = -\frac{1}{48\pi^2}.$$

Pour  $\varepsilon \ll 1$ , on a donc que  $\lambda_\varepsilon < 0$ . Les valeurs propres de  $\mathbb{A}$  sont donc toutes strictement négatives et le point est stable.

2. Étude du cas  $\theta = 0$ ,  $p_1 = \frac{1}{6\pi}$ ,  $p_2 = 0$ ,  $\varpi = 0$ .

Dans ce cas, on a :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -6\pi & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6\pi & -\left(\varepsilon + \frac{1}{6\pi}\right) \\ 0 & 0 & -\varepsilon & -8\pi \end{pmatrix}$$

Comme ci-avant, les valeurs propres de ce système sont  $-6\pi$  et les valeurs

propres de

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -6\pi & -(\varepsilon + \frac{1}{6\pi}) \\ 0 & -\varepsilon & -8\pi \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de cette nouvelle matrice est

$$\chi_{A'}(\lambda) = \lambda(\lambda + 6\pi)(\lambda + 8\pi) - \varepsilon + \lambda\varepsilon(\varepsilon + \frac{1}{6\pi}).$$

En reproduisant les arguments de la page précédente, on trouve que pour  $\varepsilon \ll 1$  cette matrice a trois valeurs propres distinctes :

- une au voisinage de  $-6\pi$ ,
- une au voisinage  $-8\pi$ ,
- une au voisinage de 0 mais strictement positif.

On a donc un point hyperbolique instable.

□

# Chapitre 5

## Chute libre d'un corps axisymétrique dans un fluide parfait

Le contenu de chapitre est un travail [6] réalisé en collaboration avec Matthieu Hillairet et Diaraf Seck accepté pour publication dans *Compte rendu Mathématiques de l'Académie des Sciences*.

### 5.1 Résumé en français

Dans cette note, nous considérons la chute d'un solide axisymétrique dans un fluide parfait au-dessus d'un plan. Il est connu [14] que l'éventualité d'un contact entre le solide et le plan est reliée à l'asymptotique de l'effet de masse ajoutée quand la distance entre le plan et le solide tend vers 0. Nous proposons une nouvelle méthode pour calculer cet effet de masse ajoutée, qui fournit simultanément

l'asymptotique d'un champ de vitesses associé entre le solide et le plan.

## 5.2 Introduction

The study of fluid-solid problems leads to considerable paradoxical difficulties because of possible contacts between the bodies inside the fluid. Indeed, classical theories for solving partial differential equations of fluid mechanics require the fluid domain to be sufficiently smooth (typically it should be locally the graph of a Lipschitz function). However, whatever the smoothness of solid boundaries, contact between solid bodies or between one solid body and the container boundaries yield geometries in which the fluid domain boundaries are no-longer locally lipschitz. This makes "very-weak" any mathematical theory for fluid-solid problems handling contacts (see [15, 3]). Evidences that such theory might be ill-posed are also given (see [16]). Yet, a naive intuition of the fluid-solid problem entails that a realistic mathematical theory should handle collisions.

Hence, numerous studies consider the collision problem whether experimentally [12] or theoretically [7]. In case the fluid is viscous, first theoretical investigations, based on formal asymptotic expansions for the Stokes problem in thin domains (see [2]), highlight that no collision is to be expected. These formal expansions are justified via a sound analysis relying on variational arguments [4, 8]. The no-collision paradox is extended also to the full Newton-Navier Stokes system in [5, 10]. Fewer references investigate the case of an inviscid fluid. If the fluid is potential, existence of finite-time contact is obtained in [11, 14] coupling a lagrangian viewpoint and complex analysis methods. Recently, these contact results are extended to non-potential flows in [1] when the vorticity of the flow is sufficiently small.

In [4], the formulas of [2] are recovered via the introduction of a "reduced functional" method. This method turns out to be very robust since it can be applied to general geometries and boundary conditions. In this note, we show that the reduced-functional method that is introduced for viscous flows can be extended also to study potential flows. In contrast with the complex-analysis tools of [14], this method yields a precise expansion of the flow in the aperture between solid boundaries close to contact. We expect that such a remark is a first step toward a finer comprehension of the smallness condition required by [1] to obtain occurrence of finite-time contacts in the non-potential case.

### 5.2.1 Context

Let consider the following simplified configuration taken from [14]. We denote by  $\mathcal{S}$  an axisymmetric (homogeneous) rigid body. This body falls vertically under the action of gravity in a potential fluid over a fixed horizontal wall  $\mathcal{P}$ . For simplicity, we fix  $\mathcal{P} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } y = 0\}$ . Since the solid moves vertically, the whole configuration is fixed by the distance  $h$  between  $\mathcal{S}$  and  $\mathcal{P}$ . Below we denote with the index  $h$  such a configuration :

$$\mathcal{S}_h = h\mathbf{e}_2 + \mathcal{S} \quad F_h = \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{\mathcal{S}}_h.$$

Implicitly, we assume that, when  $h = 0$  we have the contact configuration.

The unknowns of the fluid-solid interaction problem are then  $(\mathbf{u}, p)$  the fluid velocity-field/pressure and  $h$  the distance between the axisymmetric body and the ramp. In case the fluid is assumed inviscid and incompressible, with constant



density  $\rho_f > 0$ , these unknowns are computed by integrating the pde/ode system :

$$\begin{cases} \rho_f (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) + \nabla p = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad \text{in } F_{h(t)} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \mathcal{P} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = h'(t) \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n} \text{ on } \partial \mathcal{S}_{h(t)} \end{cases} \quad (5.2)$$

$$mh''(t) = \int_{\partial \mathcal{S}(t)} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 \, d\sigma \quad (5.3)$$

The symbol  $\mathbf{n}$  stands here for the outer normal to  $\partial F_{h(t)}$ . More details on the modelling and the resolution of this system can be found in [11, 14]. We recall shortly here that for sufficiently smooth solutions :

- the total kinetic energy :

$$E(t) = \frac{1}{2} m |h'(t)|^2 + \frac{1}{2} \rho_f \int_{F_h} |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 \, d\mathbf{x}$$

is conserved with time

- no fluid vorticity is produced by boundaries so that the vorticity  $\omega$  of the flow is simply transported by the velocity-field  $\mathbf{u}$ .

As a consequence, if the initial data prescribe a potential velocity, the solution to (5.1)-(5.2)-(5.3) is potential also. In that case the velocity-field  $\mathbf{u}$  is computed by stating  $\mathbf{u} = h'(t) \mathbf{u}_{h(t)}$  where, for  $h > 0$ ,  $\mathbf{u}_h$  solves :

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{u}_h = 0 & \text{in } F_h \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_h = 0 & \text{in } F_h \end{cases} \quad (5.4)$$

with boundary conditions

$$\begin{cases} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \mathcal{P} \\ \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n} & \text{on } \partial\mathcal{S}_h \end{cases} \quad (5.5)$$

Such systems yield a unique solution (see below) up to the prescription of the circulation on the internal boundary. For simplicity, we focus herein on circulation-free solutions. So, we prescribe :

$$\int_{\partial\mathcal{S}_h} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}^\perp d\sigma = 0. \quad (5.6)$$

We introduced here the exponent  $\perp$  to denote a rotation of angle  $\pi/2$ . Though equation (5.3) requires the computation of the pressure  $p$  we note that the pressure needs not be computed in the potential case. Indeed, in that case, fixing that the total kinetic energy  $E$  is conserved along trajectories rewrites as an ode for  $h$  which governs the dynamics. This ode can be written as follows :

$$\frac{d}{dt} \left[ |h'|^2 \left( m_s + \rho_f \int_{F_h} |u_h(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right) \right] = 0.$$

Denoting by  $m_a(h)$  the integral appearing in this quantity, we have then (as long as the solution exists and  $h$  remains strictly positive) :

$$h'(t) = h'(0) \sqrt{\frac{m + \rho_f m_a(h)}{m + \rho_f m_a(h(0))}}. \quad (5.7)$$

Possible contacts in finite time (if  $h'(0) < 0$ ) depend then only on the asymptotics of  $m_a$  when  $h \rightarrow 0$ . This quantity  $m_a$  measures the "added-mass effect." Namely, it

stands for the fluid kinetic energy that is associated with the velocity-field  $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}$  on the body  $\mathcal{S}$ . It depends on the only geometrical parameter : the distance  $h$  between  $\mathcal{S}$  and the wall. We refer the reader to [14] for the discussion on the properties that  $m_a$  must satisfy in order to allow/forbid contact. Herein, we are interested in a method which yields simultaneously the asymptotic behavior of  $m_a$  (when  $h \rightarrow 0$ ) and a profile for  $\mathbf{u}_h$ .

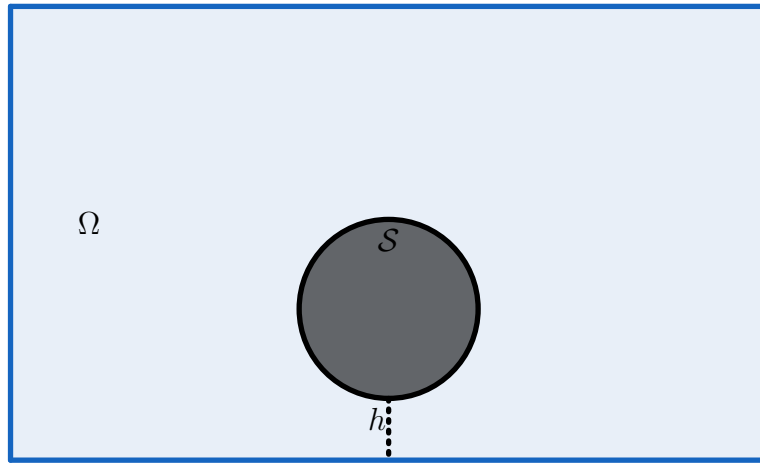


FIGURE 5.1 – Example of a configuration with notations.

### 5.2.2 Main result

To state our main results, we make a little more precise the geometry of the body  $\mathcal{S}$ . We always assume that  $\partial\mathcal{S} \in C^{1,2}$ . We also assume that contact between  $\mathcal{S}$  and  $\mathcal{P}$  only holds in the origin and is of order "1 +  $\alpha$ ." Namely, for  $\alpha \geq 1$  given, we define the assumption :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{There exists } \delta > 0, \varepsilon > 0 \text{ and } \kappa > 0 \text{ such that} \\ \\ x_2 > \varepsilon \quad \forall (x_1, x_2) \in \partial\mathcal{S} \text{ s.t. } |x_1| > \delta \\ \\ x_2 = \kappa|x|^{1+\alpha} \quad \forall (x_1, x_2) \in \partial\mathcal{S} \text{ s.t. } |x_1| < \delta, |x_2| < \varepsilon \end{array} \right\} \quad (A_\alpha)$$

Our main result then reads :

**Théorème 5.1.** *Let  $\alpha \geq 1$  and assume that  $\mathcal{S}$  satisfies  $(A_\alpha)$ . We have the following alternative :*

*If  $\alpha < 2$  the functions  $m_a$  remains bounded when  $h \rightarrow 0$*

*If  $\alpha > 2$ , denoting  $\sigma_h(x) = h + \kappa|x|^{1+\alpha}$ , we have the following asymptotics when  $h \rightarrow 0$  :*

$$m_a(h) = c_{\kappa,\alpha} h^{3/(1+\alpha)-1} + O(1), \quad \text{with } c_{\kappa,\alpha} = \int_{\mathbb{R}} \frac{t^2 dt}{1 + |t|^{1+\alpha}} \quad (5.8)$$

$$u_h(x, y) = \nabla^\perp \left[ \frac{x_1 x_2}{\sigma_h(x_1)} \right] \mathbf{1}_{|x_1| < \delta \cap x_2 < \varepsilon} + O(1) \quad \text{in } L^2(F_h). \quad (5.9)$$

Following [14], this theorem entails that collision is bound to occur in finite time whatever the value of  $\alpha > 1$ . The expansion of  $m_a$  we state here is already obtained in this reference. Nonetheless, we emphasize that we obtain this same result here with a completely different method which yields less technicalities and a better information on the flow  $\mathbf{u}_h$ . In particular, we are able to compute the diverging part of the flow in the case  $\alpha > 3$ .

The outline of these notes is as follows. In the next section we recall the variational viewpoint on system (5.4)-(5.5) and explain the method of reduced functionals. In the last section we perform the explicit computations to extract the asymptotics

of  $m_a$  and  $\mathbf{u}_h$  when  $h \rightarrow 0$ .

## 5.3 Application of variational methods to (5.4)-(5.5)

As explained in the introduction, our proof of **Theorem 5.1** is based on a fine estimate of the behavior of the add-mass function :

$$\begin{aligned} m_a : (0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto \int_{F_h} |\mathbf{u}_h(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \quad (\text{with } \mathbf{u}_h \text{ solution to (5.4)-(5.5)}). \end{aligned}$$

In this section, at first, we recall the basics on the resolution of (5.4)-(5.5). We recall also the variational approach to this problem as presented in [13]. We recall then the method of reduced functionals and how it applies to this problem.

### 5.3.1 Resolution of (5.4)-(5.5)

In what follows, we assume  $\alpha \geq 1$  so that  $\partial\mathcal{S}$  is  $C^2$  globally. We denote

$$L_\sigma^2(F_h) := \{\mathbf{v} \in L^2(F_h) \text{ s.t. } \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}.$$

We endow this space with the  $L^2$ -norm. This makes  $L_\sigma^2(F_h)$  a Hilbert space. We recall that, since  $\partial F_h$  splits into two connected components  $\partial\mathcal{S}_h$  and  $\partial\mathcal{P}$ , which are both at least  $C^2$ , we have (see [17, Chapter 1])

- $E(F_h) := \{v \in C^\infty(\overline{F}_h) \text{ s.t. } \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}$  is dense in  $L_\sigma^2(F_h)$ ;
- There exists a continuous linear operator  $\gamma_n : L_\sigma^2(F_h) \rightarrow H^{-1/2}(\partial F_h)$  such

that, denoting by  $\mathbf{n}$  the outward normal to  $\partial F_h$ , we have  $\gamma_n(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  for any  $\mathbf{v} \in E(F_h)$ ;

—  $E_0(F_h) := \{v \in C_c^\infty(F_h) \text{ s.t. } \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}$  is dense in  $L_{\sigma,0}^2(F_h) := \operatorname{Ker}(\gamma_n)$ .

With these notations, we have :

**Définition 5.1.** We call  $\mathbf{u} \in L_\sigma^2(F_h)$  a weak solution to (5.4)-(5.5)-(5.6) if

i)  $\gamma_n[\mathbf{u}] = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}$  on  $\partial \mathcal{S}_h$  and  $\gamma_n[\mathbf{u}] = 0$  on  $\partial \mathcal{P}$ ,

ii) for any  $\mathbf{w} \in L_{\sigma,0}^2(F_h)$  there holds :

$$\int_{F_h} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0. \quad (5.10)$$

The weak formulation for (5.4)-(5.5) is obtained standardly by remarking that, in the sense of distributions, there holds

$$\langle \nabla \times \mathbf{u}, \psi \rangle = - \int_{F_h} \mathbf{u} \cdot \nabla^\perp \psi, \quad \forall \psi \in C_c^\infty(F_h)$$

If  $\mathbf{u}$  solves (5.4), we obtain then (5.10) with  $\mathbf{w} = \nabla^\perp \psi \in L_{\sigma,0}^2(F_h)$ . Conversely, for arbitrary  $\mathbf{w} = (w_1, w_2) \in E_0(F_h)$ , setting

$$\psi(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} w_2(s, 0) - \int_0^{x_2} w_1(x, s) ds,$$

yields  $\psi \in C_c^\infty(F_h \cup \bar{\mathcal{S}}_h)$  with  $\psi$  constant on  $\bar{\mathcal{S}}_h$  and  $\mathbf{w} = \nabla^\perp \psi$ . Denoting  $\ell_\psi$  the value of  $\psi$  on  $\mathcal{S}_h$ , the weak formulation entails (under the assumption that  $\mathbf{u}$  is

sufficiently smooth to make integration by parts meaningful) :

$$\begin{aligned}\int_{F_h} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} &= \int_{F_h} \mathbf{u} \cdot \nabla^\perp \psi \\ &= \ell_\psi \int_{\partial \mathcal{S}_h} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^\perp d\sigma + \int_{F_h} \psi \nabla \times \mathbf{u}.\end{aligned}$$

Since  $\ell_\psi, \psi$  can be made arbitrary we obtain (5.4)-(5.6).

With this formulation, we have the following well-known result (see [13, p.37],)

**Théorème 5.2.** *Given  $h > 0$  there exists a unique weak solution to (5.4)-(5.5)-(5.6). Furthermore this solution  $\mathbf{u}_h$  minimizes*

$$\inf \left\{ \int_{F_h} |\mathbf{v}|^2, \quad \mathbf{v} \in L_\sigma^2(F_h) \text{ s.t. } \gamma_n[\mathbf{v}] = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n} \text{ on } \partial \mathcal{S}_h \text{ and } \gamma_n[\mathbf{u}] = 0 \text{ on } \partial \mathcal{P} \right\}. \quad (5.11)$$

*Démonstration.* The proof of this theorem yields as a standard application of the Lax-Milgram theorem. □

We remark that the above Theorem includes that the quantity  $m_a$  that we are interested in is the minimum that is achieved by the solution  $\mathbf{u}_h$ . Hence, we do not need to compute the explicit solution  $\mathbf{u}_h$  but rather focus on the minimization problem in order to discuss the behavior of the solution to the dynamical equation (5.7).

### 5.3.2 Computations of bounds for $m_a$ for fixed $h$ .

We now turn to the computations of bounds for the optimization problem (5.11). To this end, we fix  $h > 0$  at first and we adapt the abstract reduced-

functional method from [5]. We shall let  $h$  tend to 0 in order to justify the relevance of the obtained approximation (yielding Theorem 5.1) afterwards.

The framework of the reduced-functional method is the following. We assume that we want to minimize the functional  $m$  on  $Y$ . We assume that we are able to construct a space  $\tilde{Y}$  and a functional  $\tilde{m}$  on the space  $\tilde{Y}$  so that the following holds true :

$$\left. \begin{array}{l} \text{There exist two mappings :} \\ \\ \Psi : Y \rightarrow \tilde{Y} \quad \mathbf{V} : \tilde{Y} \rightarrow Y \\ \\ \text{such that} \\ \\ \tilde{m}(\Psi(\mathbf{v})) \leq m(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in Y. \end{array} \right\} \quad (\text{RF})$$

In this framework, the following lemma holds true

**Lemme 5.1.** *Assume that the minimum of  $\tilde{m}$  is reached in  $\psi_0$ , then there holds :*

$$\inf_{\tilde{Y}} \tilde{m} (= \tilde{m}(\psi_0)) \leq \inf_Y m \leq m(\mathbf{V}[\psi_0]).$$

*Démonstration.* The last inequality is straightforward since  $\mathbf{V}[\psi_0] \in Y$ . As for the first one, we remark that, due to (RF), we have :

$$\inf_{\tilde{Y}} \tilde{m} \leq \tilde{m}(\psi[\mathbf{v}]) \leq m(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in Y.$$

Hence  $\tilde{m}(\psi_0)$  is a bound below for  $\{m(\mathbf{v}), \mathbf{v} \in Y\}$ . This implies the first inequality. □



We emphasize that we do not assume a priori that finding a minimum for  $m$  on  $Y$  is a well-posed problem. This is reminiscent of the fact that the above proposition is relevant if minimizing the functional  $\tilde{m}$  on  $\tilde{Y}$  is a simpler problem. Conversely, the above method is relevant also only if the "reduced functional"  $\tilde{m}$  is sufficiently close to  $m$  in the sense that  $\tilde{m}(\psi_0) \sim m(\mathbf{V}[\psi_0])$ . The key-point is to keep in the functional  $\tilde{m}$  the relevant/dominating terms of the functional  $m$ . This is the motivation of the construction below in the case of the minimization problem (5.11).

We introduce the space

$$Y_h = \{\mathbf{v} \in L^2_\sigma(F_h) \text{ s.t. } \gamma_n[\mathbf{v}] = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n} \text{ on } \partial\mathcal{S}_h, \gamma_n[\mathbf{v}] = 0 \text{ on } \mathcal{P}\}.$$

so that our aim is to minimize the functional

$$m(\mathbf{v}) = \int_{F_h} |\mathbf{v}|^2.$$

Following the ideas of [5] we construct the reduced functional as follows. We denote from now on :

$$\tilde{\mathcal{F}}_h^\delta := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2; x_1 \in ]-\delta, \delta[ \text{ and } x_2 \in ]0, \sigma_h(x)[\}$$

where  $\delta$  is fixed by assumption  $(A_\alpha)$  and we recall that we denote  $\sigma_h(x) = h + \kappa|x|^{1+\alpha}$ . This domain  $\tilde{\mathcal{F}}_h^\delta$  is then the aperture domain between the solid  $\mathcal{S}$  and the ramp  $\mathcal{P}$ , filled with the fluid, when the solid  $\mathcal{S}$  is at distance  $h > 0$  of  $\mathcal{P}$ .

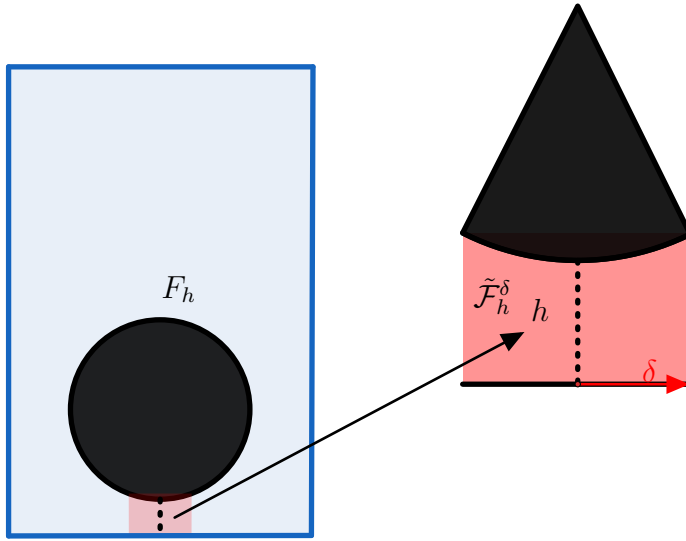


FIGURE 5.2 – On the right a zoom on the gap between  $\mathcal{S}_h$  and the ramp with the domain  $\tilde{\mathcal{F}}_h^\delta$  in red.

We then set

$$\tilde{Y}_h = \{\psi \in H^1(\tilde{\mathcal{F}}_h^\delta) \text{ s.t. } \exists C \in \mathbb{R} \text{ with } \psi(x, 0) = 0 \quad \psi(x, \sigma_h(x)) = C+x \quad \forall x \in ]-\delta, \delta[\}$$

We consider then the energy

$$\tilde{m}(\psi) = \int_{\tilde{\mathcal{F}}_h^\delta} |\partial_2 \psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \quad \forall \psi \in \tilde{Y}_h.$$

The main interest of this construction lies in the following proposition :

**Proposition 6.** *Given  $h > 0$*

*i) There exists a mapping  $\Psi : Y_h \rightarrow \tilde{Y}_h$  such that*

$$\tilde{m}(\Psi[\mathbf{v}]) \leq m(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in Y_h.$$

ii) There exists a mapping  $\mathbf{V} : \tilde{Y}_h \rightarrow Y_h$  such that :

$$\mathbf{V}(\psi) = \nabla^\perp \psi \text{ in } \tilde{\mathcal{F}}_h^\delta \quad \forall \psi \in \tilde{Y}_h.$$

The construction of the mappings  $\Psi$  and  $\mathbf{V}$  is the content of the following subsection. We remark at first that, item i) includes that Lemma 5.1 applies to this construction. Hence, once the above construction is done, the range for  $m_a$  stated in Theorem 5.1 reduces to obtaining the following lemma :

**Lemme 5.2.** *Given  $h > 0$  there exists a unique  $\psi_0 \in \tilde{Y}_h$  achieving  $\tilde{m}(\psi_0) = \min\{\tilde{\psi}, \psi \in \tilde{Y}_h\}$ . Furthermore, when  $h \rightarrow 0$ , we have the following alternative :*

- if  $\alpha < 2$  :  $m(\psi_0)$  and  $m(\mathbf{V}[\psi_0])$  remain bounded ;
- if  $\alpha > 2$  :

$$h^{3/(1+\alpha)} \leq \tilde{m}(\psi_0) \leq m(\mathbf{V}[\psi_0]) \leq h^{3/(1+\alpha)} + O(1). \quad (5.12)$$

### 5.3.3 Proof of Proposition 6

We split this subsection into two paragraphs. The first one is dedicated to the mapping  $\Psi$  while in the second one, we construct and study the mapping  $\mathbf{V}$ .

**Construction of the mapping  $\Psi$ .** Let  $\mathbf{v} \in Y_h \cap C^\infty(\overline{F_h})$ . The smoothness assumption can be relaxed in a second step by a density argument. We fix then  $\Psi[\mathbf{v}] = \psi$  by :

$$\psi(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} v_2(s, 0) ds - \int_0^{x_2} v_1(x, s) ds \quad \forall (x_1, x_2) \in \tilde{\mathcal{F}}_h^\delta$$

This formula yields the unique vector-field vanishing in the origin, so that  $\nabla^\perp \psi = \mathbf{v}$  (we recall that  $\mathbf{v}$  is assumed divergence-free). Since  $\mathbf{v} \in Y_h$  we have then :

- $\psi(x_1, 0) = 0$  (since  $v_2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  on  $\mathcal{P}$ )
- $\psi(x_1, x_2) = C + x_1$  on  $\partial\mathcal{S}_h$  for some constant  $C$  since for  $x \in (-\delta, \delta)$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \psi(x, \sigma_h(x)) &= \partial_1 \psi(x, \sigma_h(x)) + \sigma'_h(x) \partial_2 \psi(x, \sigma_h(x)) \\ &= v_2(x, \sigma_h(x)) - \sigma'_h(x) v_1(x, \sigma_h(x)) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \sqrt{1 + |\sigma'_h(x)|^2} \\ &= n_2 \sqrt{1 + |\sigma'_h(x)|^2} = 1. \end{aligned}$$

Then, we have that  $\psi \in \tilde{Y}_h$ . Furthermore, since  $v_1 = -\partial_2 \psi$  and  $\tilde{\mathcal{F}}_h^\delta \subset F_h$  we also have

$$\begin{aligned} \tilde{m}(\psi) &= \int_{\tilde{\mathcal{F}}_h^\delta} |\partial_2 \psi|^2 \\ &= \int_{\tilde{\mathcal{F}}_h^\delta} |v_1|^2 \leq \int_{F_h} |\mathbf{v}|^2 = m(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

We emphasize that, combining the fact that  $\psi$  vanishes on  $\mathcal{P}$  with a Hardy inequality, we obtain that the mapping  $\Psi$  (constructed on  $Y_h \cap C^\infty(\overline{F_h})$ ) is continuous  $L^2(F_h) \rightarrow H^1(\tilde{\mathcal{F}}_h^\delta)$ . This enables to perform a density argument and create an extension  $\Psi : Y_h \rightarrow \tilde{Y}_h$ . The latter inequality comparing  $\tilde{m}$  and  $m$  extends then to arbitrary  $\mathbf{v} \in Y_h$  by density. This concludes the proof of item i) in Proposition 6.

**Construction of the mapping  $\mathbf{V}$ .** The construction of the mapping  $\mathbf{V}$  is a little more technical. Indeed, let us consider  $\psi \in \tilde{Y}_h \cap C^\infty(\overline{\tilde{\mathcal{F}}_h^\delta})$  and denote  $\mathbf{v} = \mathbf{V}[\psi]$ . Obviously, one wants to fix  $\mathbf{v} = \nabla^\perp \psi$  but this only defines  $\mathbf{v}$  on  $\tilde{\mathcal{F}}_h^\delta$  so that we need

to construct a proper extension.

To construct the extension mapping, we first define a suitable function that truncates outside  $\mathcal{S}$ . For this, we note that under assumption  $(A_\alpha)$ , there exists  $\eta > 0$  such that, for arbitrary  $(x_1, x_2) \in \mathcal{P}$  such that  $|x_1| > \delta/2$  we have  $\text{dist}((x_1, x_2), \mathcal{S}) > \eta$ . Then, we introduce :

- $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  a cut-off function such that  $\zeta = 1$  on  $(-1, 1)$  and  $\zeta = 0$  on  $\mathbb{R} \setminus [-2, 2]$ .
- $\chi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  smooth and satisfying :

$$\text{Supp}(\chi) \subset B((0, 0), \eta/6) \quad \int_{\mathbb{R}^2} \chi = 1.$$

and we set :

$$\tilde{T}(x_1, x_2) = \zeta(3 \text{dist}((x_1, x_2), \mathcal{S})/\eta) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$T = \tilde{T} * \chi \quad \text{with } * \text{ the standard convolution operator.}$$

By construction we have  $T \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  and  $\tilde{T} = 1$  in a  $\eta/3$  neighborhood of  $\mathcal{S}$  and vanishes outside a  $2\eta/3$  neighborhood of  $\mathcal{S}$ . In particular, for arbitrary  $(x_1, x_2) \in \mathcal{S}$  we have  $\tilde{T} = 1$  on  $B((x_1, x_2), \eta/6)$  and  $T(x_1, x_2) = 1$ . On the opposite, if  $\text{dist}((x_1, x_2), \mathcal{S}) > 5\eta/6$  we have that  $\tilde{T} = 0$  on  $B((x_1, x_2), \varepsilon/6)$  and  $T = 0$ .

With this construction at-hand, let  $\psi \in \tilde{Y}_h \cap C^\infty(\overline{\mathcal{F}_h^\delta})$  for simplicity and  $C$  the associated constant such that  $\psi(x_1, x_2) = C + x_1$  on  $\partial\mathcal{S}_h$ . We construct  $\mathbf{v} :=$

$\mathbf{V}[\psi] = \nabla^\perp \tilde{\psi}$  with :

$$\tilde{\psi}(x_1, x_2) = \begin{cases} \zeta(2x_1/\delta)\psi(x_1, x_2) \\ \quad + (1 - \zeta(2x_1/\delta))(x_1 + C)T((x_1, x_2 - h)) \text{ if } (x_1, x_2) \in \tilde{\mathcal{F}}_h^\delta, \\ (x_1 + C)T((x_1, x_2 - h)) \text{ if } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \tilde{\mathcal{F}}_h^\delta. \end{cases}$$

Here are some comments about this construction. Clearly we have that  $\tilde{\psi} \in C^\infty(\overline{\mathcal{F}_h})$ . Indeed, the truncation function  $\zeta$  appearing on the first line is scaled so that  $\tilde{\psi}$  matches smoothly through the lateral boundaries of  $\tilde{\mathcal{F}}_h^\delta$ . So,  $\mathbf{v}$  is computed in a standard way. In  $\tilde{\mathcal{F}}_h^\delta$ , we have,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x_1, x_2) &= \zeta(2x_1/\delta)\nabla^\perp \psi(x_1, x_2) \\ &\quad + (1 - \zeta(2x_1/\delta))\nabla^\perp((x_1, x_2) \mapsto (x_1 + C)T(x_1, x_2 - h)) \\ &\quad (\psi(x_1, x_2) - (x_1 + C)T(x_1, x_2 - h))2/\delta\zeta'(2x_1/\delta)\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

and outside, we have :

$$\mathbf{v}(x_1, x_2) = T(x_1, x_2 - h)\mathbf{e}_2 + (x_1 + C)\nabla^\perp((x_1, x_2) \mapsto T(x_1, x_2 - h)).$$

This entails that  $\mathbf{v}$  satisfies :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{5.13}$$

$$\operatorname{Supp}(\mathbf{v}) \subset \tilde{\mathcal{F}}_h^\delta \cup \{(x_1, x_2) \text{ s.t. } \operatorname{dist}((x_1, x_2), \mathcal{S}_h) < \eta\}. \tag{5.14}$$

Moreover, we have that  $(x_1, x_2) \in \mathcal{S}_h$  if and only if  $(x_1, x_2 - h) \in \mathcal{S}$  so that  $T(x_1, x_2 - h) = 1$  for  $(x_1, x_2) \in \overline{\mathcal{S}}_h$  and  $T(x_1, x_2 - h) = 0$  when  $\operatorname{dist}((x_1, x_2), \mathcal{S}_h) > \eta$ .

This entails the required boundary conditions :

1. if  $(x_1, x_2) \in \mathcal{P}$  we obtain in and outside  $\overline{\tilde{\mathcal{F}}_h^\delta}$  (since  $\psi(x_1, 0) = \partial_1 \psi(x_1, 0) = 0$ )

$$v_2(x_1, x_2) = (1 - \zeta(2x_1/\delta)) \left( T(x_1, x_2 - h) \mathbf{e}_2 + (x_1 + C) \nabla^\perp((x_1, x_2) \mapsto T(x_1, x_2 - h)) \right).$$

We have then two cases, if  $|x_1| < \delta/2$  then  $(1 - \zeta(2x_1/\delta)) = 0$ , if  $|x_1| > \delta/2$  then  $\text{dist}((x_1, x_2), \mathcal{S}_h) > \text{dist}((x_1, x_2), \mathcal{S}) > \eta$  (by construction of  $\eta$ ). We have then defined  $T$  so that  $T(x_1, x_2 - h) = \nabla T(x_1, x_2 - h) = 0$ . We obtain  $v_2(x_1, x_2) = 0$ .

2. if  $(x_1, x_2) \in \partial \mathcal{S}_h$  we have that  $T(x_1, x_2 - h) = 1$  and  $\nabla T(x_1, x_2 - h) = 0$ . Hence,  $\mathbf{v}(x_1, x_2) = \mathbf{e}_2$  outside of  $\tilde{\mathcal{F}}_h^\delta$ . Inside  $\tilde{\mathcal{F}}_h^\delta$  we have  $\psi(x_1, x_2) = (x_1 + C)$  and  $\mathbf{n} \cdot \nabla^\perp \psi(x_1, x_2) = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}$  (remarking again that this corresponds to the tangential derivative of  $\psi$  along  $\partial \mathcal{S}_h$ ). Combining all these properties yields also  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}$ .

Combining (5.13) with these two last items (and recalling that  $\mathbf{v}$  is smooth and has compact support) we obtain that  $\mathbf{v} \in Y_h$ .

To end up the proof of item ii) in Proposition 6, it remains to remark that

$$C = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \psi(x_1, \sigma_h(\delta)) dx_1$$

so that the mapping  $\psi \rightarrow C$  is continuous  $H^1(\tilde{Y}_h) \rightarrow \mathbb{R}$ . The formula for  $\mathbf{V}[\psi]$  defines then (the restriction to  $\tilde{Y}_h \cap C^\infty(\overline{\tilde{\mathcal{F}}_h^\delta})$  of) a continuous linear mapping  $\tilde{Y}_h \rightarrow Y_h$  when  $\tilde{Y}_h$  (resp.  $Y_h$ ) is endowed with the  $H^1$ -topology (resp.  $L^2$  topology).

## 5.4 Proof of Theorem 5.1

We end the paper with the proof of our main result. According to the arguments in the previous section (see in particular Lemma 5.2), this splits into 3 steps :

- first to fix  $h$  and to compute  $\psi_0$  that minimizes  $\tilde{m}$  over  $\tilde{Y}_h$ ,
- second to let  $h \rightarrow 0$ , to compute the asymptotics of the minimum of  $\tilde{m}(\psi_0)$  and compute a bound above for  $m(\mathbf{V}[\psi_0])$ .
- to prove the asymptotic formula (5.9).

These steps correspond to the three subsections below.

### 5.4.1 Minimizing $\tilde{m}$

This part of the proof is straightforward. We state the following proposition for completeness :

**Proposition 7.** *Let  $h > 0$  and*

$$\psi_0(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{\sigma_h(x_1)}, \quad \forall (x_1, x_2) \in \tilde{\mathcal{F}}_h^\delta.$$

*Then  $\psi_0$  realizes the minimum of  $\tilde{m}$  over  $\tilde{Y}_h$ .*

*Démonstration.* It is straightforward that  $\psi_0 \in \tilde{Y}_h$  satisfies  $\partial_{22}\psi_0 = 0$ . Then, given  $\psi \in \tilde{Y}_h$ , we have that  $\varphi = \psi - \psi_0 \in H^1(\tilde{\mathcal{F}}_h^\delta)$  satisfies :

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \sigma_h(x_1)) &= C && \text{for } x_1 \in (-\delta, \delta) \text{ and a constant } C \in \mathbb{R} \\ \varphi(x_1, 0) &= 0 && \text{for } x_1 \in (-\delta, \delta). \end{aligned}$$



Integrating by parts and using symmetry arguments yield :

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} \int_0^{\sigma_h(x_1)} \partial_2 \psi_0(x_1, x_2) \partial \varphi(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\ = \int_{-\delta}^{\delta} C x_1 dx_1 - \int_{-\delta}^{\delta} \int_0^{\sigma_h(x_1)} \partial_{22} \psi_0(x_1, x_2) \varphi(x_1, x_2) dx_2 dx_1 = 0; \end{aligned}$$

and consequently :

$$\tilde{m}(\psi) = \int_{-\delta}^{\delta} \int_0^{\sigma_h(x_1)} |\partial_2 \psi_0(x_1, x_2)|^2 + \int_{-\delta}^{\delta} \int_0^{\sigma_h(x_1)} |\partial_2 \varphi(x_1, x_2)|^2 \geq \tilde{m}(\psi_0)$$

with equality if and only if  $\varphi = 0$  i.e.  $\psi = \psi_0$ . □

### 5.4.2 Range for $m_a$

We start with finding an equivalent for  $\tilde{m}(\psi_0)$ .

**Proposition 8.** *We have two cases*

- if  $\alpha < 2$  the quantity  $\tilde{m}(\psi_0)$  remains bounded when  $h \rightarrow 0$ ,
- if  $\alpha > 2$  the quantity  $\tilde{m}(\psi_0)$  is equivalent to  $c_{\kappa, \alpha} h^{3/(1+\alpha)-1}$  when  $h \rightarrow 0$  with

$$c_{\kappa, \alpha} = \int_{\mathbb{R}} \frac{t^2 dt}{1 + |t|^{1+\alpha}}.$$

*Démonstration.* Replacing with the explicit values of  $\psi_0$  we have that  $\tilde{m}(\psi)_0 = I_h$  with :

$$I_h = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^2}{\sigma_h(x)} dx = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^2}{h + \kappa|x|^{1+\alpha}} dx$$

If  $\alpha < 2$  we have, for arbitrary  $h$

$$I_h \leq \frac{1}{\kappa} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{|x|^{\alpha-1}} dx$$

and  $I_h$  remains bounded when  $h \rightarrow 0$ .

If  $\alpha > 2$  we perform the change of variable  $x = h^{1/1+\alpha}t$ . This yields :

$$\begin{aligned} I_h &= h^{3/(1+\alpha)-1} \int_{-\delta/h^{1/\alpha}}^{\delta/h^{1/\alpha}} \frac{t^2}{1+|t|^{1+\alpha}} dt \\ &\sim h^{3/(1+\alpha)-1} \int_{\mathbb{R}} \frac{t^2}{1+\kappa|t|^{1+\alpha}} dt \end{aligned}$$

This ends the proof. □

We note that, in the case  $\alpha = 2$  we can make similar computations and obtain that

$$\tilde{m}(\psi_0) \sim \frac{2}{3\kappa} |\ln(h)|.$$

We proceed with the upper bound i.e. to compute  $m(\mathbf{v}_0)$  where  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{V}(\psi_0)$ . We note that, since the constant  $C$  associated with  $\psi_0$  vanishes, the extension of  $\psi_0$  that we construct with  $\tilde{\psi}_0$  (see the formula of the previous section) depends on  $h$  only through a translation. Hence the contribution outside  $\tilde{\mathcal{F}}_h^\delta$  to the  $L^2$ -norm of  $\mathbf{v}_0$  remains bounded independent of  $h$ . Since the singularity in the geometry occurs only in the origin when  $h \rightarrow 0$ , we have also that :

$$\int_{\tilde{\mathcal{F}}_h^\delta} |\mathbf{v}_0|^2 = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \int_0^{\sigma_h(x_1)} |\mathbf{v}_0|^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + O(1).$$

and, replacing  $\mathbf{v}_0$  with its values on  $\tilde{\mathcal{F}}_h^\delta$ , we have :

$$m(\mathbf{v}_0) = \tilde{m}(\psi_0) + \int_{-\delta}^{\delta} \int_0^{\sigma_h(x_1)} |\partial_1 \psi_0|^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + O(1).$$

We denote by  $J_h$  the second integral on the right-hand side of this last inequality.

With the explicit values for  $\psi_0$ , we obtain :

$$J_h = \frac{1}{3} \int_{-\delta}^{\delta} \left( \frac{1}{\sigma_h(x_1)} - \frac{x_1 \sigma_h'(x_1)}{\sigma_h(x_1)^2} \right)^2 |\sigma_h(x_1)|^3 dx_1$$

However there exists an absolute constant  $K_0$  such that  $|\sigma_h'(x_1)x_1| \leq K_0 \sigma_h(x_1)$  for  $x_1 \in (-\delta, \delta)$ . Introducing this inequality in the computation of  $J_h$ , we obtain :

$$|J_h| \leq \int_{-\delta}^{\delta} \sigma_h(x_1) dx_1 \leq K_1,$$

with  $K_1$  independent of  $h$ . This ends the computations of the bounds for  $m_a$ .

### 5.4.3 Asymptotic expansion

To complete the proof of Theorem 5.1, we obtain the asymptotics (5.9). For this we re-introduce  $(\mathbf{u}_h)_{h>0}$  the family containing the unique weak solutions to (5.4)-(5.5)-(5.6) and we recal the notations  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{V}[\psi_0]$  that we introduced above. We recall that, for fixed  $h > 0$ , since  $\mathbf{v}_0 \in Y_h$  and  $\mathbf{u}_h$  is a weak solution, we have by definition that :

$$\int_{F_h} \mathbf{u}_h \cdot (\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_0) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \int_{F_h} |\mathbf{u}_h|^2 = \int_{F_h} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_0$$

Consequently, expanding the square and applying this last identity, we obtain :

$$\int_{F_h} |\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_0|^2 = \int_{F_h} |\mathbf{v}_0|^2 - \int_{F_h} |\mathbf{u}_h|^2,$$

However, by construction of the reduced functional method, we have :

$$\tilde{m}(\psi_0) \leq \int_{F_h} |\mathbf{u}_h|^2 \leq \int_{F_h} |\mathbf{v}_0|^2 = m(\mathbf{v}_0).$$

Plugging these bounds in the previous identity yields the expected formula by recalling that  $m(\mathbf{v}_0) = \tilde{m}(\psi_0) + O(1)$  when  $h \rightarrow 0$ . This ends the proof.



# Bibliographie

- [1] D. Coutand. Finite time singularity formation for moving interface Euler equations Preprint. arXiv :1701.01699
- [2] R G Cox. The motion of suspended particles almost in contact. Int. J. Multiphase Flow, 1 :343–371, 1974.
- [3] E. Feireisl. On the motion of rigid bodies in a viscous incompressible fluid. J. Evol. Equ., 3(3) :419–441, 2003.
- [4] D. Gérard-Varet and M. Hillairet. Regularity issues in the problem of fluid structure interaction. Arch. Ration. Mech. Anal., 195(2) :375–407, 2010.
- [5] D. Gérard-Varet and M. Hillairet. Computation of the drag force on a sphere close to a wall : the roughness issue. ESAIM Math. Model. Numer. Anal., 46(5) :1201–1224, 2012.
- [6] M. Hillairet, D. Seck and L. Sokhna. Note on the fall of an axisymmetric body in a perfect fluid over a horizontal ramp. Comptes Rendus Mathématique, 356(11-12) :1156-1166, 2018.
- [7] T.I. Hesla. Collisions of smooth bodies in viscous fluids : A mathematical investigation. PhD thesis, University of Minnesota, October 2005.

- [8] M. Hillairet and T. Kelaï. Justification of lubrication approximation : an application to fluid/solid interactions. Asymptot. Anal., 95(3-4) :187–241, 2015.
- [9] M. Hillairet and T. Takahashi. Collisions in three-dimensional fluid structure interaction problems. SIAM J. Math. Anal., 40(6) :2451–2477, 2009.
- [10] M. Hillairet and T. Takahashi. Blow up and grazing collision in viscous fluid solid interaction systems. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 27(1) :291–313, 2010.
- [11] Jean Houot and Alexandre Munnier. On the motion and collisions of rigid bodies in an ideal fluid. Asymptot. Anal., 56(3-4) :125–158, 2008.
- [12] G. Joseph. Collisional dynamics of macroscopic particles in a viscous fluid. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, May 2003.
- [13] C. Marchioro and M. Pulvirenti. Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids, volume 96 of Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [14] A. Munnier and K. Ramdani. Asymptotic analysis of a Neumann problem in a domain with cusp. Application to the collision problem of rigid bodies in a perfect fluid. SIAM J. Math. Anal., 47(6) :4360–4403, 2015.
- [15] J.A. San Martín, V. Starovoitov, and M. Tucsnak. Global weak solutions for the two-dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid. Arch. Ration. Mech. Anal., 161(2) :113–147, 2002.

- [16] V.N. Starovoïtov. Nonuniqueness of a solution to the problem on motion of a rigid body in a viscous incompressible fluid. J. Math. Sci., 130(4) :4893–4898, 2005.
- [17] R. Temam. Navier-Stokes Equations. North-Holland Pub. Co., 1977.
- [18] Matthieu Hillairet and Takéo Takahashi. Collisions in Three-Dimensional Fluid Structure Interaction Problems. SIAM J. Math. Anal. 40(6) : 2451–2477, 2009.
- [19] G. Joseph, R. Zenit, M. Hunt, and A. Rosenwinkel. Particle–wall collisions in a viscous fluid. Journal of Fluid Mechanics. 433 : 329–346, 2001.
- [20] N. Ghalya. Interactions hydrodynamiques entre une particule solide et une paroi plane avec condition de glissement de Navier. Thèse, École Polytechnique de Paris and École Nationale d’ingénieurs de Tunis .
- [21] O. Gonzalez, O. GRAF and J. H. Maddocks. Dynamics of a rigid body in a Stokes fluid. Journal of Fluid Mechanics. 519 : 133–160, 2004.
- [22] G.P. Galdi. On the Motion of a Rigid Body in a Viscous Liquid : A Mathematical Analysis with Applications. Handbook of Mathematical Fluid Dynamics Vol. 1 Chapter 7, 2002.
- [23] G.P. Galdi. An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations. Springer ., 2011.
- [24] D. Bresch, B. Desjardins, D. Gérard-Varet On compressible Navier–Stokes equations with density dependent viscosities in bounded domains. J. Math. Pures Appl. 87 : 227–235, 2007.
- [25] A. Henrot, M. Pierre Variation et optimisation de formes : Une analyse géométrique. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.



- [26] J. Simon. Differentiation with respect to the domain in boundary value problems. Numer. Anal. and Optimiz., 2(7 & 8) : 649–687, 1980.
- [27] J. Simon. Domain variation for drag in Stokes Flow. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 159 : 28–42, 1991
- [28] F. Murat and J. Simon. Sur le contrôle par un domaine géométrique. Research Report, Paris 6 University. 1976.
- [29] B. Després. Lois de Conservations Eulériennes, Lagrangiennes et Méthodes Numériques. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010.
- [30] M. Delfour and J. P. Zolésio. Shapes and Geometries. Analysis, Differential Calculus, and Optimization, Advances in Design and Control. Second edition Siam 2011.
- [31] G. P. Galdi Stationary Navier–Stokes Problem in a Two-Dimensional Exterior Domain Handbook of Differential Equations : Stationary Partial Differential Equations Vol. 1 Chapter 2 :71–155, 2004.
- [32] E. Lauga, M. Brenner and H. Stone. Microfluidics : The No-Slip Boundary Condition Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics : 1219–1240, 2007.
- [33] P. Joseph. Étude expérimentale du glissement sur surfaces lisses et texturées. Thèse, Université Paris 6. 2005.
- [34] A. Russo and A. Tartaglione On the Navier problem for the stationary Navier–Stokes equations. Journal of Differential Equations : 251 (2011) 2387—2408