



HAL
open science

Impacts et rebonds de projectiles élastiques bicomposites : une approche expérimentale, numérique et théorique

Christophe d'Angelo

► **To cite this version:**

Christophe d'Angelo. Impacts et rebonds de projectiles élastiques bicomposites : une approche expérimentale, numérique et théorique. Mécanique [physics]. Université Côte d'Azur, 2021. Français. NNT : 2021COAZ4099 . tel-03590650

HAL Id: tel-03590650

<https://theses.hal.science/tel-03590650>

Submitted on 28 Feb 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT

Impacts et rebonds de projectiles
élastiques bicomposites :
une approche expérimentale,
numérique et théorique

Christophe D'Angelo

Institut de Physique de Nice (INPHYNI)

**Présentée en vue de l'obtention
du grade de docteur en Physique
d'Université Côte d'Azur**

Dirigée par : Christophe Raufaste
Co-encadrée par : Franck Celestini

Soutenue le : 13 Décembre 2021

Devant le jury, composé de :

Franck Celestini,
Maître de conférences, Université Côte d'Azur

Stéphane Dorbolo,
Senior Research Associate, FRS-FNRS

Thomas Frisch,
Professeur, Université Côte d'Azur

Christophe Raufaste,
Maître de conférences, Université Côte d'Azur

Nicolas Vandenberghe,
Professeur, Aix-Marseille Université

Laurence Viennot,
Professeur émérite, Université de Paris

Impacts et rebonds de projectiles élastiques bicomposites : une approche expérimentale, numérique et théorique

Jury :

Président du jury

Thomas Frisch,
Professeur des universités, Université Côte d'Azur

Rapporteurs

Stéphane Dorbolo,
Senior Research Associate, FRS-FNRS

Nicolas Vandenberghe,
Professeur des universités, Aix-Marseille Université

Examineur

Laurence Viennot,
Professeur émérite, Université de Paris

Directeur de thèse

Christophe Raufaste,
Maître de conférences, Université Côte d'Azur

Co-Directeur de thèse

Franck Celestini,
Maître de conférences, Université Côte d'Azur

Impacts et rebonds de projectiles élastiques bicomposites : une approche expérimentale, numérique et théorique

Les études d'impact et de rebond d'objets sont variées et abordent des systèmes allant de projectiles modèles sphériques à de plus usuels ayant une géométrie complexe et une composition hétérogène. Ainsi, un ballon de basket sera choisi pour son bon rebond alors que l'on utilisera un marteau anti-rebond pour éviter de se blesser en l'utilisant. Dans cette thèse, je considère l'impact de projectiles sur un substrat très massif et rigide dans le but de séparer les effets qui dépendent de la composition des matériaux constituant le projectile de ceux qui relèvent de sa géométrie. En particulier, l'originalité est d'utiliser des projectiles ayant une géométrie simple, mais une constitution bicomposite présentant une partie rigide et une partie molle, qui prises séparément sont plutôt élastiques. L'accent sera mis sur la mesure du coefficient de restitution ainsi que sur certaines caractéristiques de la dynamique d'impact.

Dans une première partie expérimentale, nous proposons un projectile à géométrie cylindrique constitué d'une partie rigide sur laquelle repose une partie molle. Avec de tels projectiles, nous observons que le coefficient de restitution présente une dépendance non-monotone et de nombreuses variations lorsque la proportion de la partie molle varie. Plus la partie rigide est élastique et capable de restituer son énergie de déformation, plus ces variations sont importantes. Une technique d'imagerie rapide nous a permis de mettre en évidence le phénomène de multiples rebonds : la partie rigide du projectile va rebondir plusieurs fois sur le substrat avant que le projectile ne décolle dans sa totalité. À cette étude expérimentale est associé un modèle théorique qui prend en compte un contact viscoélastique entre la partie rigide et le substrat ainsi que la propagation d'ondes dans la partie molle. Ce système simple mais original nous a permis de montrer qu'un choix judicieux de la proportion de la partie molle permet de faire rebondir un objet avec efficacité, ou alors d'amortir presque complètement son rebond.

La deuxième partie de ce travail de thèse est une étude numérique. Le projectile bicomposite est modélisé par une chaîne de masses-ressorts composée de deux parties, chacune ayant une constante de raideur différente. Nous faisons varier systématiquement deux paramètres : le rapport du nombre de masses dans chaque partie et le rapport des constantes de raideur. Ces deux parties peuvent être adhésives ou non, par l'ajout ou le retrait d'un ressort. Ce système corrobore les résultats de la partie expérimentale dans une géométrie sensiblement différente, dominée exclusivement ici par la propagation d'ondes de déformation au sein du projectile. Dans le cas où le projectile est amorti, l'énergie cinétique initiale se retrouve dans les modes de déformation du projectile. Dans certains cas, une modélisation simple basée sur la propagation des ondes de déformation est possible et en accord avec les résultats numériques.

Pour finir, nous avons élaboré des systèmes modèles pour l'étude de l'impact et du rebond d'objets bicomposites à des fins pédagogiques. Ces systèmes peuvent être reproduits facilement par un large panel d'enseignants. Le but est d'amorcer l'enseignement des connaissances sur la notion de rebond à un public d'étudiants ou de lycéens.

Mots clés : impact, rebond, coefficient de restitution, contact de Hertz, déformation élastique, propagation d'onde

Impacts and bounces of bilayered elastic projectiles: an experimental, numerical and theoretical approach

Studies of impacts and bounces of objects are diverse and concern systems from spherical model projectiles to more usual ones with complex geometries and heterogeneous compositions. For example, a basketball is chosen for its good bounce while we use a dead-blow hammer to avoid injury when using it. In this thesis, I consider the impact of projectiles on a very massive and rigid substrate with the aim of separating the effects that depend on the composition of the materials constituting the projectile from those that are related to its geometry. To be specific, the originality is to use projectiles with a simple geometry but a bilayered constitution presenting a rigid part and a soft part, which taken separately are rather elastic. The focus will be on the measurement of the coefficient of restitution as well as some characteristics of the impact dynamics.

In the first experimental part, we propose a projectile with a cylindrical geometry made of a soft part on the top of a rigid part. With such projectiles we observe that the coefficient of restitution shows a non-monotonic dependence and many variations when the proportion of the soft part varies. The more elastic the rigid part is, the greater these variations are. A fast imaging technique allowed us to highlight the phenomenon of multiple bounces: the rigid part of the projectile will bounce several times on the substrate before the entire projectile takes off. A theoretical model is associated to the experimental study. This model takes into account a viscoelastic contact between the rigid part and the substrate, as well as the wave propagation in the soft part. This simple but original system allowed us to show that a wise choice of the proportion of the soft part makes it possible to make an object bounce with efficiency, or to almost completely dampen its bounce.

The second part of this thesis is a numerical study. The bilayered projectile is then modeled by a chain of masses and springs composed of two parts, each with a different stiffness constant. We systematically vary two parameters: the ratio of the number of masses in each part and the ratio of the stiffness constants. These two parts can be adhesive or not, by adding or removing a spring. This system confirms the results of the experimental part in a slightly different geometry, dominated exclusively here by the propagation of deformation waves within the projectile. In the case of a damped projectile, the initial kinetic energy is recovered in the deformation modes of the projectile. In some cases, a simple model based on the propagation of deformation waves is possible and is in agreement with the numerical results.

Finally, we have developed model systems for the study of the impact and bounce of bilayered objects for pedagogical purposes. These systems can be easily reproduced by a large panel of teachers. The goal is to initiate the teaching of the knowledge on the notion of bounce to a public of students or high school students.

Keywords: impact, bounce, coefficient of restitution, Hertz contact, elastic deformation, wave propagation

Remerciements

Comment ne pas commencer ces remerciements par vous deux, Franck et Christophe. Durant ces années à travailler avec vous, d'abord en stage puis en thèse, j'ai énormément appris à vos côtés. Scientifiquement, je crois que c'est votre approche multiple (voir le titre de ma thèse !) devant un problème physique qui dès le départ m'a plu. Cela est bien évidemment possible parce que votre complémentarité n'est plus à démontrer. Cette complémentarité, elle s'est avérée plus qu'utile lorsqu'il a fallu aller au bout des choses : Franck me poussant sur le numérique et Christophe sur la modélisation. Humainement, vous avez toujours su vous rendre disponible et à l'écoute, travailler avec vous s'est toujours fait dans la bienveillance et dans la bonne humeur. Finalement, c'est ça le plus important. Encore un immense merci.

Je remercie évidemment les membres de mon jury de thèse. Mes deux rapporteurs, Stéphane Dorbolo et Nicolas Vandenberghe, pour leurs retours positifs et constructifs sur ce manuscrit de thèse. Laurence Viennot, pour notre collaboration sur l'expérience camion. Et enfin Thomas Frisch, d'avoir accepté d'être président de mon jury.

Ensuite, je tiens à remercier tout particulièrement ceux qui m'ont accompagné et supporté (dans les deux sens du terme) dans ce quotidien de thésard pendant ces trois ans : notre groupe de doctorants, de collègues de travail, d'amis, de potes... Utilisez le mot que vous voulez ça n'a pas d'importance. Ce qui compte, c'est que ces trois dernières années ont été trois belles années, car vous avez tous été là. D'abord (par ordre d'apparition), Duncan et Enzo. Duncan, mon camarade de thèse. Passer ces 3 années sans ta folie, ton humour et nos discussions dans le bureau aurait été bien plus compliqué. Enzo, qui avait déjà un an de thèse au compteur, et qui nous a ouvert la voie sur ce chemin qu'est la thèse. Ensuite, Guillaume et Jordy sont arrivés au labo en tant que stagiaires. C'est à ce moment-là que tout a dérapé, je crois ! Ont alors commencé les repas du midi qui auraient pu durer toute l'après-midi, les barbecues, etc. Guillaume, un "collègue" de travail mais néanmoins indispensable, merci pour toutes ces fois où rien qu'en exposant mes problèmes sur ce tableau tu as apporté un bout de la solution. Jordy, ambassadeur du 6ème étage, toujours présent le midi pour apporter sa bonne humeur et sa répartie. Puis sont arrivés Michel et Lorenzo. Michel, qui voit toujours le meilleur chez les gens et à qui j'envie sa faculté d'être imperturbable lorsqu'il travaille. Lorenzo, mon camarade des pauses biscuits qui se sont vite rendues indispensables dans nos journées de thésard. Et enfin Thibaut, l'un des rares à rire à mes blagues, qui aurait dû arriver dans ce groupe bien plus tôt. Vous avez tous été là dans les bons moments comme dans les plus compliqués, c'est une phrase un peu bateau, mais c'est vrai. Merci pour tout.

Je tiens également à remercier Caroline, Kim, Patricia, Greta et Lisa, les compagnes des zigotos cités précédemment, pour tous ces moments que nous avons passé tous ensemble.

Merci aussi à Amandine, notre post-doc belge préférée, de s'être jointe à ce groupe. Merci aux nombreux stagiaires qui, même s'ils n'ont été que de passages, nous ont tous apporté quelque chose : William, Quentin, Lisa, Siméon, Loïc, Francois-Xavier, Julien, Mathis et Emma. Un

salut particulier pour David qui, à l'heure où j'écris ces lignes, commence sa thèse dans l'équipe. Sans oublier les (nombreux) L3 à être passés dans l'équipe. Un dernier mot pour les autres doctorants et post-doctorants du labo. N'oublions pas que la recherche progresse énormément grâce à toutes ces mains.

Passons maintenant aux choses plus sérieuses, remercions les permanents ! Merci à toute l'équipe Fluides Complexes (Médéric Argentina, Christophe Brouzet, Nathalie Fraysse, Li Fu, Marie-Gabrielle Médiçi, Jésus Sanchez-Rodriguez et Harunori Yoshikawa) pour toutes ces réunions passionnées et passionnantes notamment sur la ligne d'horizon et la Corse ! Merci aussi à Cyrille Claudet pour son implication dans les manips de l'équipe, sans toi nos salles de manip seraient beaucoup trop calmes.

Merci à Elisabeth Lemaire et à Fred Blanc pour nos longues discussions politiques. François Peters, qui à force de venir voir Michel dans notre bureau en est devenu un membre honoraire. Laurent Lobry, pour son calme légendaire.

Merci à Sandra Bosio, une main de velours dans un gant de fer, qui a pris les rênes du service mécanique. Merci de t'être investi totalement dans le laboratoire, notamment pendant le covid. Nous sommes chanceux de t'avoir parmi nous. Merci aussi à Christophe Pitiot et Florian Zumbo, sans eux je n'aurais pas eu de pièces et donc, forcément, pas de manip.

Merci à Pavel Kuzhir pour avoir fait partie de mon comité de suivi de thèse et de m'avoir co-encadré durant mon stage M1.

Merci à tous les enseignants que j'ai rencontrés durant mes premiers pas dans l'enseignement, notamment Ulrich Kuhl, Margherita Turconi, Marcel Carbillet et Sylvie Robbe-Dubois.

Merci à Céline Cohen, Valérie Doya et Claire Michel pour, entre autres, le Nice Physics Camp, les fêtes de la science et les stagiaires de troisième. Ces moments d'échanges avec les plus jeunes ont toujours été extrêmement intéressants.

Merci au service info, Bernard Gay-Para, pour toutes ces discussions où l'on apprend toujours quelque chose, et Jérôme Mauro, qui heureusement nous rappelle que les doctorants, c'est plus ce que c'était.

Merci à Madalena Neri, pour son soutien dans tous ces méandres administratifs et notamment pour l'organisation des JDPN. Ilona Monti-Giliberti, pour son efficacité et sa bonne humeur, et Yaroslava Izmaylov, pour sa bienveillance.

Merci à tous les autres membres de l'Institut de Physique de Nice que j'ai pu croiser durant ces 3 années, ainsi qu'à son directeur Guillaume Huyet.

Je souhaite finalement remercier ma famille. Ma mère, mon frère et mon père. J'ai bien conscience que poursuivre ces longues études a demandé de la patience et certains efforts. Sans votre soutien et vos encouragements, tout cela n'aurait pas été possible. Merci.

Si les chiens ne font pas des chats, pourquoi les entiers feraient-ils des doubles ?

F.C

C'est le bon moment ?

C.R

Dans les ténèbres qui m'enserrent,
Noires comme un puits où l'on se noie,
Je rends grâce aux dieux quels qu'ils soient,
Pour mon âme invincible et fière.

Dans de cruelles circonstances,
Je n'ai ni gémi ni pleuré,
Meurtri par cette existence,
Je suis debout bien que blessé.

En ce lieu de colère et de pleurs,
Se profile l'ombre de la mort,
Je ne sais ce que me réserve le sort,
Mais je suis et je resterai sans peur.

Aussi étroit soit le chemin,
Nombreux les châtements infâmes,
Je suis le maître de mon destin,
Je suis le capitaine de mon âme.

Invictus, William Ernest Henley (1849-1903)

Table des matières

1	Introduction générale	1
1.1	Introduction	2
1.2	État de l'art	3
1.2.1	Les théories pionnières : Saint-Venant et Flamant, Hertz et Rayleigh	6
1.2.2	Modélisation d'impacts d'objets élastiques homogènes	7
1.2.3	Modélisation d'impacts d'objets élastiques hétérogènes	8
1.2.4	Sources de dissipation : plasticité, viscoélasticité et rugosité	11
1.2.5	Résumé sur la restitution partielle d'énergie cinétique	12
1.3	Approches théoriques d'un impact	13
1.3.1	Théorie de Saint-Venant et Flamant	13
1.3.2	Théories de Hertz : de la théorie du contact à la théorie de l'impact	14
1.3.3	Modèle hertzien viscoélastique	18
1.4	Motivation et problématique	19
1.4.1	Plan du manuscrit	19
2	Étude expérimentale et modélisation	21
2.1	Introduction	22
2.2	Matériels et Méthodes	22
2.2.1	Élaboration du projectile bicomposite	22
2.2.2	Montage expérimental	24
2.2.3	Tracking du projectile et mesure de vitesses	25
2.2.4	Diagramme spatio-temporel	26
2.2.5	Détermination de la vitesse de propagation des ondes dans la partie molle	27
2.3	Résultats Expérimentaux	29
2.3.1	Effet de la proportion de la partie molle	29
2.3.2	Effet de la partie molle	33
2.3.3	Effet de la partie rigide	33
2.4	Modélisation	35
2.4.1	Force de contact du substrat sur la partie rigide	35
2.4.2	Force élastique de la partie molle sur la partie rigide	37
2.4.3	Bilan des forces pour le projectile bicomposite : trajectoire de la partie rigide	37
2.4.4	Expression du coefficient de restitution	40
2.4.5	Expression de τ et de t_w	40
2.5	Résultats du modèle et comparaison avec les expériences	41
2.5.1	Trajectoire	41
2.5.2	Temps	42
2.5.3	Coefficient de restitution	42
2.6	Temps caractéristiques du système	44
2.7	Conclusion	45

3	Étude numérique	47
3.1	Introduction	48
3.2	Matériels & Méthodes	48
3.2.1	Modélisation du projectile	48
3.2.2	Résolution des équations du mouvement	50
3.2.3	Caractéristiques du système	51
3.2.4	Effets de taille finie	52
3.3	Résultats pour un projectile bicomposite en adhésion	54
3.3.1	Coefficient de restitution	54
3.3.2	Nombre de rebonds	58
3.3.3	Temps de décollage	59
3.4	Modèle : Propagation d'une onde de déformation élastique	64
3.4.1	Lien entre les propriétés physiques et les paramètres du systèmes	64
3.4.2	Équations du système	64
3.4.3	Hypothèses du modèle	65
3.4.4	Calcul de la déformation : Exemple avec $n = 1$	66
3.4.5	Généralisation pour tout n	69
3.4.6	Modèle pour le cas particulier $t_c = 2t_1$	70
3.4.7	Validité et résultat du modèle	71
3.5	Résultats pour un projectile bicomposite sans adhésion	74
3.5.1	Coefficients de restitution	75
3.5.2	Nombre de rebonds	79
3.5.3	Temps de décollage	80
3.6	Modèle : Propagation d'une onde de déformation élastique, cas sans adhésion	86
3.6.1	Expression de la déformation pour P_1	87
3.6.2	Expression de la déformation pour P_2	88
3.6.3	Validité du modèle	91
3.7	Conclusion	92
4	Expériences modèle pour l'enseignement	95
4.1	Introduction	96
4.2	Étude numérique d'un système 2 masses - 2 ressorts	96
4.2.1	Modélisation du projectile	96
4.2.2	Résolution des équations du mouvement	97
4.2.3	Caractéristiques du système	98
4.2.4	Résultats	98
4.2.5	Discussion	102
4.3	Adaptation d'un pendule de Newton pour l'étude des impacts	102
4.3.1	Matériels & Méthodes	102
4.3.2	Résultats expérimentaux et discussion	105
4.4	Réalisation didactique d'un impact via un camion-jouet	107
4.4.1	Matériels & Méthodes	107
4.4.2	Résultats expérimentaux et discussion	108
4.5	Conclusion	110
5	Conclusion générale	111

A Quelques expériences complémentaires sur les objets hétérogènes	115
A.1 Introduction	116
A.2 Impact d'un projectile non cohésif	116
A.2.1 Principe de l'expérience	116
A.2.2 Résultats et analyse	117
A.2.3 Perspectives	119
A.3 Impact d'un projectile bicomposite : sollicitation transverse de la partie molle .	120
A.3.1 Principe de l'expérience	120
A.3.2 Résultats et analyse	121
A.3.3 Perspectives	121
A.4 Éjection d'une bille posée dans une cage	122
A.4.1 Principe de l'expérience	122
A.4.2 Résultats et analyse	123
A.4.3 Perspectives	125
A.5 Conclusion	126

Chapitre 1

Introduction générale

Sommaire

1.1	Introduction	2
1.2	État de l'art	3
1.2.1	Les théories pionnières : Saint-Venant et Flamant, Hertz et Rayleigh . .	6
1.2.2	Modélisation d'impacts d'objets élastiques homogènes	7
1.2.3	Modélisation d'impacts d'objets élastiques hétérogènes	8
1.2.4	Sources de dissipation : plasticité, viscoélasticité et rugosité	11
1.2.5	Résumé sur la restitution partielle d'énergie cinétique	12
1.3	Approches théoriques d'un impact	13
1.3.1	Théorie de Saint-Venant et Flamant	13
1.3.2	Théories de Hertz : de la théorie du contact à la théorie de l'impact . . .	14
1.3.3	Modèle hertzien viscoélastique	18
1.4	Motivation et problématique	19
1.4.1	Plan du manuscrit	19

1.1 Introduction

Selon le dictionnaire Larousse, un impact est le “fait pour un corps, un projectile de venir en frapper un autre ; un choc”. Un choc est une “rencontre plus ou moins violente et brusque de deux ou plusieurs corps”. Du point de vue physique, c’est une interaction entre deux ou plusieurs objets qui est définie dans le temps et dans l’espace. Cet impact se manifeste notamment par la variation de la vitesse des objets en question.

Lorsque que l’on évoque la variation de vitesse, nous pensons forcément aux lois du mouvement énoncées par Isaac Newton en 1687 dans ses “Philosophiae naturalis principia mathematica” (Principes mathématiques de la philosophie naturelle) [Newton, 1687]. C’est dans cet ouvrage que l’on peut trouver une première mention de la notion de coefficient de restitution, au niveau de la scolie du corollaire VI. Dans cette note, Newton évoque différents travaux présentés à la Royal Society à Londres en 1662. John Wallis, Christopher Wren et Christian Huygens “ont découvert, chacun de leur côté, les lois du choc et de la réflexion des corps durs” à partir d’expériences basées sur le principe de ce qu’on appelle aujourd’hui le pendule de Newton. Newton décrit aussi des expériences qu’il a lui-même réalisées et qui confirment les travaux précédents. C’est à cette occasion qu’il évoque la définition du coefficient de restitution lorsqu’il écrit : “*La quantité de mouvement n’étant jamais changée par le choc, elle se retrouve toujours ou dans la somme des mouvements conspirants¹ ou dans la différence des mouvements opposés.*” Il évoque donc, pour un choc élastique entre deux objets, un coefficient de restitution valant 1 défini par :

$$Cor = \frac{\text{Vitesse relative après le choc}}{\text{Vitesse relative avant le choc}}. \quad (1.1)$$

Dans notre étude, nous allons nous placer dans la situation où un objet va impacter un substrat suffisamment massif et rigide pour le considérer comme immobile et indéformable. Nous pouvons prendre l’exemple d’un ballon de basket. Si nous le laissons tomber sur le sol depuis une certaine hauteur, nous pouvons mesurer sa vitesse avant l’impact, v_b , et sa vitesse après l’impact, v_a . Le rapport de ces vitesses nous donne la définition du coefficient de restitution :

$$Cor = \frac{v_a}{v_b}. \quad (1.2)$$

Nous pouvons alors distinguer plusieurs cas en fonction de la valeur du coefficient de restitution. Tout d’abord, il existe deux cas limites. Le premier correspond à $Cor = 1$. Dans ce cas, le choc est parfaitement élastique et l’objet repart, rebondit, avec la même vitesse avec laquelle il est arrivé. Le second correspond à $Cor = 0$. Dans ce cas, le choc est parfaitement inélastique et l’objet ne repart pas, ne rebondit pas, car sa vitesse après l’impact est nulle. Le coefficient de restitution est donc, en général, compris entre 0 et 1 ; mais il peut aussi être plus grand que 1. Dans ce cas, il témoigne d’un transfert d’énergie cinétique en faveur de l’objet impactant, cela peut être le cas pour un élément particulier d’un objet hétérogène, ou bien via un apport d’énergie externe. Finalement, le coefficient de restitution est une mesure simple mais c’est une donnée essentielle qui nous permet de caractériser un rebond.

Lorsque l’on s’intéresse à la question du rebond d’objets, il existe souvent deux situations opposées : soit le rebond est désiré, soit il ne l’est pas. Dans la plupart des sports de balle, on cherche à avoir un bon rebond, c’est-à-dire un grand coefficient de restitution. Par exemple, pour qu’un ballon de basket soit homologué par la Fédération Internationale de Basketball, celui-ci doit avoir un coefficient de restitution compris entre 0.73 et 0.80 [FIBA, 2020].

¹Qui agissent suivant la même direction



Figure 1.1: À gauche, un marteau anti-rebond rempli de billes d'acier. Au centre, des boules de pétanque anti-rebond. À droite, l'intérieur d'une de ces boules. Respectivement, d'après [KS Tools, 2021], [Décathlon, 2021] et [MS pétanque, 2021].

Il existe aussi des cas pour lesquels le rebond n'est pas voulu. Nous pouvons citer par exemple les marteaux anti-rebond qui permettent de contrôler la frappe des objets [Norcross, 1967]. Ces marteaux sont remplis de billes d'acier et le déplacement relatif de celles-ci va dissiper l'énergie cinétique du marteau après l'impact pour l'empêcher de rebondir. Des chercheurs ont d'ailleurs réalisé une étude sur un système très similaire dont nous parlerons plus loin [Pacheco-Vázquez and Dorbolo, 2013]. Il existe aussi des boules de pétanque anti-rebond (voir figure 1.1). Celles-ci possèdent des nervures internes qui permettent de dissiper l'énergie cinétique. Enfin, nous pouvons citer l'exemple du phénomène de rebond électrique des interrupteurs. En effet, lorsque nous appuyons sur un interrupteur, celui-ci actionne un contacteur métallique et de par son élasticité, le contacteur va rebondir et venir perturber le fonctionnement du circuit électrique [Peschat, 2013].

1.2 État de l'art

La restitution d'énergie cinétique suite à un impact est un sujet qui intéresse de nombreux chercheurs, et cela, depuis longtemps. Ces impacts peuvent concerner des objets plus ou moins élastiques, des systèmes homogènes comme hétérogènes.

Il existe différentes méthodes qui permettent de calculer le coefficient de restitution. En 1945, un chercheur publie un article dans lequel il présente quatre méthodes qui permettent de calculer le coefficient de restitution d'une balle [Briggs, 1945]. La première méthode concerne l'utilisation d'un pendule balistique, pour lequel la balle est frappée par un projectile envoyé par un pistolet à air comprimé. La deuxième méthode est une méthode photographique qui permet de mesurer les vitesses de la balle et d'un objet qui vient la heurter. Ensuite, pour la troisième expérience, il s'agit de faire rebondir une balle sur un plan incliné et de mesurer son angle de réflexion tout en connaissant son angle d'incidence. Enfin, la quatrième expérience, qui est la plus couramment utilisée, est la mesure de la hauteur de rebond d'une balle après l'avoir initialement lâchée d'une certaine hauteur.

Ces différentes méthodes de mesure du coefficient de restitution concernent un objet de forme sphérique, ce qui n'est pas étonnant car la géométrie sphérique est très présente dans les problèmes de rebond. L'une des premières études expérimentales du XX^e siècle remonte à l'année 1918 et concerne justement des sphères [Raman, 1918]. Dans cette étude, Raman étudie le *Cor* entre différentes sphères métalliques en fonction de la vitesse d'impact et il montre que le *Cor* diminue lorsque la vitesse augmente. Les rebonds successifs d'une bille sur un substrat ont aussi été étudiés [E. Falcon et al., 1998]. Dans la physique du sport, l'étude de la dynamique d'une balle qui rebondit est un sujet de recherche important. Différentes balles peuvent être étudiées comme une balle de tennis, une balle de golf ou encore un ballon de basket [Cross, 1999] [P. Müller, Heckel, et al., 2013].

Il est aussi possible d'étudier la situation pour laquelle nous posons une balle de golf sur un ballon de basket et les lâchons d'une certaine hauteur. Cette expérience dite du "Stacked-ball drop" est intéressante, facile à réaliser et très visuelle. L'expérience évoquée peut être vue comme l'impact d'un système bicomposite dont les deux parties sont non cohésives. La balle de golf peut repartir avec une vitesse trois fois plus importante que le ballon de basket. Cette expérience de rebond d'objets non cohésifs peut être réalisée avec deux balles [Cross, 2007] [Berdeni, Champneys, and Szalai, 2015] [P. Müller and Pöschel, 2011] ou bien plusieurs [Mellen, 1995] comme nous pouvons le voir sur la figure 1.2. Nous verrons de manière plus approfondie dans la suite de ce chapitre (voir section 1.2.3) les détails et résultats de cette expérience.



Figure 1.2: Une balle de ping-pong sur une balle de golf sur une balle rebondissante sur un ballon de basket. D'après [Physics Girl, 2015].

Le système précédent nous amène à considérer les impacts de systèmes hétérogènes et les interactions au sein d'un tel système. Des chercheurs ont par exemple étudié le rebond d'une sphère creuse remplie d'un fluide [Killian, Klaus, and Truscott, 2012]. Une partie de l'énergie cinétique initiale va être transférée dans le mouvement du fluide et notamment dans la formation d'un jet, ce qui aboutit à une restitution plus faible pour la sphère. Ils ont aussi mis en évidence l'importance du taux de remplissage sur la restitution, comme nous pouvons le voir sur la figure 1.3, tandis que les caractéristiques du fluide (densité, viscosité) jouent un rôle sur le mouvement de celui-ci sans vraiment affecter le transfert d'énergie en question. Certaines études ont substitué le liquide par un milieu granulaire [Pacheco-Vázquez and Dorbolo, 2013] [Xu et al., 2016]. Par exemple, Pacheco-Vazquez et Dorbolo ont étudié le rebond d'un tube rempli d'une certaine masse de grains. Ils ont montré que plus le taux de remplissage de ce tube augmentait, plus le coefficient de restitution diminuait, comme nous pouvons le voir sur la figure 1.4. L'énergie cinétique est dissipée à travers les collisions entre les grains et la friction entre ceux-ci.

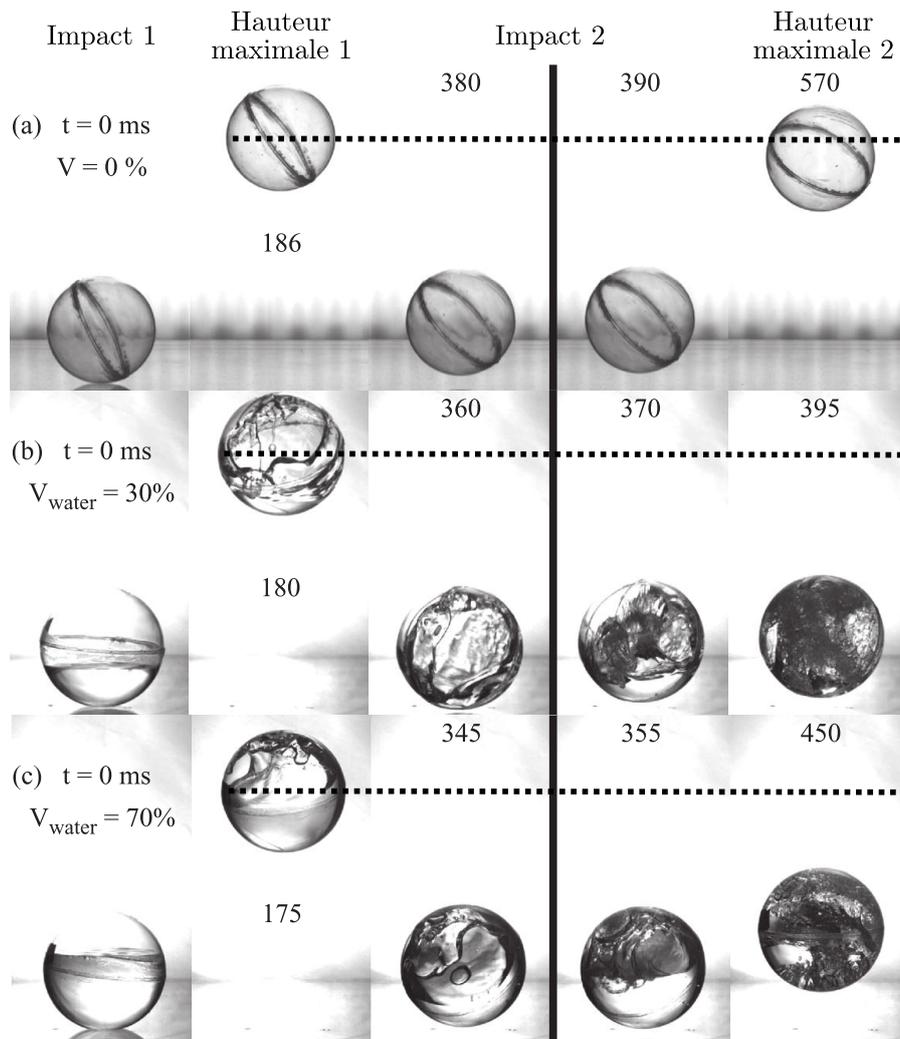


Figure 1.3: Séquence d'images du rebond d'une sphère (a) vide, remplie avec (b) 30% et (c) 70% d'eau. Le premier impact a lieu à $t = 0$ et la barre noire indique le second impact. Les lignes pointillées indique la hauteur maximale atteinte lors du premier rebond. D'après [Killian, Klaus, and Truscott, 2012].

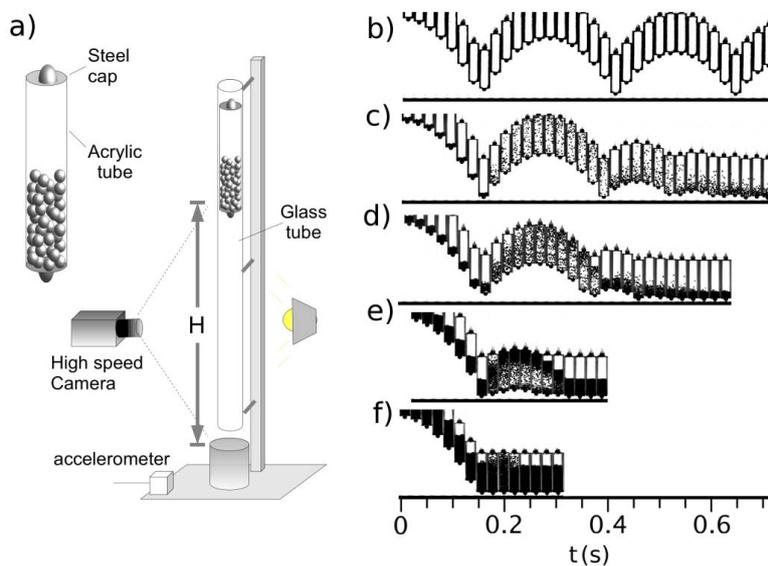


Figure 1.4: (a) Schéma du dispositif expérimental. (b) à (f) Images du rebond d'un cylindre rempli avec différentes masses de grains. D'après [Pacheco-Vázquez and Dorbolo, 2013].

Il est aussi intéressant de voir ce qui se passe à l'échelle microscopique. À cette échelle, les forces sont conservatives et l'énergie initiale du système est répartie dans les nombreux modes internes de celui-ci. Nous pouvons citer par exemple l'impact d'un agglomérat de particules [Cleveland and Landman, 1992] [Raz and Levine, 1996] [Christen et al., 1998] [Andersson and Pettersson, 1998]. Ces impacts peuvent générer transitoirement des pressions, températures et densités très élevées qui peuvent déclencher des réactions chimiques.

Un autre domaine où le coefficient de restitution peut apparaître est celui de l'étude des collisions de véhicules [Monson and Germane, 1999]. De nombreuses études modélisent l'impact d'une voiture contre un mur, ou bien entre deux voitures, en utilisant des systèmes masses-ressorts [Emori, 1968] [Tani and Emori, 1970]. Les grandeurs mesurées présentent des oscillations et des formes complexes qui motivent l'utilisation de simulations des systèmes multicorps pour prendre en compte tous les aspects structurels [Thompson, 1973] [Pereira, Ambrósio, and Dias, 1997].

1.2.1 Les théories pionnières : Saint-Venant et Flamant, Hertz et Rayleigh

Dans cette section, nous allons nous focaliser sur trois théories qui traitent l'impact d'objets élastiques dans des géométries simples. Nous donnerons plus de détails sur les théories de Saint-Venant et Flamant et de Hertz dans la section 1.3.

Saint-Venant et Flamant se sont intéressés à l'impact longitudinal de deux barres élastiques, longues et homogènes [Saint-Venant and Flamant, 1883]. Dans cette théorie, ils considèrent que le contact est dominé par la propagation des ondes de déformation dans le matériau. Prenons le cas de deux barres de même longueur et faites du même matériau. Les ondes de déformation ont alors le temps de faire l'aller-retour dans chaque barre, du fait de la longueur identique, et la restitution d'énergie cinétique sera totale. Prenons maintenant le cas d'une barre plus longue que l'autre, le temps de contact sera donné par le temps nécessaire aux ondes de déformation pour faire l'aller-retour dans la barre la plus courte. Une partie de l'énergie cinétique initiale restera donc sous forme d'énergie de vibration dans la barre la plus longue. Les matériaux étant parfaitement élastiques, l'énergie mécanique du système est conservée, mais la restitution d'énergie cinétique sera partielle.

En pratique, la théorie de Saint-Venant et Flamant ne s'applique pas dans de nombreuses situations car elle considère des objets allongés. Or, dans de nombreux cas, les objets s'éloignent d'une telle géométrie. Par exemple, nous avons pu voir que la géométrie sphérique est très présente dans les problèmes d'impacts. Heinrich Hertz fut l'un des premiers physiciens à théoriser l'impact d'un objet élastique, notamment des sphères [Hertz, 1882]. Sa théorie traite ce phénomène comme un effet quasi-statique : la compression élastique est locale et réversible. Dans sa théorie, il suppose que le temps de contact est suffisamment grand devant le temps nécessaire aux ondes de déformation élastique pour faire plusieurs allers-retours dans le projectile. Dans ces conditions, la restitution d'énergie cinétique sera totale et le coefficient de restitution vaudra 1.

Mais la théorie de Hertz est incomplète car elle prédit une restitution parfaite et ignore tout phénomène de dissipation ou de transfert d'énergie cinétique lors de l'impact. Dans son étude, Lord Rayleigh va étendre le travail effectué par Hertz et prendre en considération l'apparition des vibrations dans le cas de deux sphères qui entrent en collision [Rayleigh, 1906]. Il montre que lorsque la vitesse d'impact est faible devant la vitesse des ondes, la proportion d'énergie

cinétique transférée sous forme d'énergie de vibration est faible. Il dit ceci : “*The general result of our calculation is to show that Hertz's theory of collisions has a wider application than might have been supposed, and that under ordinary conditions vibrations should not be generated in appreciable degree. So far as this conclusion holds, the energy of colliding spheres remains translational, and the velocities after impact are governed by Newton's laws, as deducible from the principles of energy and momentum.*” Il en conclut donc que pour une gamme de vitesses assez large, les effets vibratoires sont négligeables et les vitesses après l'impact sont données par les lois de Newton avec, notamment, la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique.

Pour conclure et se convaincre de la validité de la théorie de Hertz, nous pouvons, par exemple, nous intéresser au travail de Gugan. Dans ce travail, le chercheur étudie l'impact d'une balle de croquet [Gugan, 2000]. Il a montré que, même si 40% de l'énergie cinétique initiale n'aient pas été retrouvés dans l'énergie cinétique finale, le temps de contact et la surface de contact sont bien décrits par la théorie de Hertz. Ce résultat est expliqué par le fait que les valeurs du temps de contact et de la surface de contact sont déterminées lors de la phase de compression, avant que le transfert d'énergie apparaisse.

1.2.2 Modélisation d'impacts d'objets élastiques homogènes

Dans cette section, nous allons voir comment les chercheurs ont modélisé l'impact d'objets élastiques homogènes et quels sont les principaux résultats de leurs travaux sur le coefficient de restitution.

En 1920, Raman s'est intéressé à l'impact d'une sphère sur une plaque de faible épaisseur et a montré que l'apparition d'ondes de flexion est un paramètre d'importance qui peut diminuer significativement la restitution d'énergie cinétique de la sphère [Raman, 1920]. Environ vingt ans plus tard, Zener étudie l'impact normal d'une sphère sur une plaque étendue mais d'épaisseur fine [Zener, 1941]. Il montre que le coefficient de restitution dépend à la fois de la vitesse d'impact et du rapport entre le diamètre de la sphère et l'épaisseur de la plaque. Ces deux paramètres sont à l'origine du transfert d'énergie cinétique sous forme d'énergie de vibration de flexion de la plaque. Ce travail théorique a été confirmé expérimentalement [Tillett, 1954] [Sondergaard, Chaney, and Brennen, 1990].

Toujours concernant l'effet du substrat, nous pouvons citer les travaux théoriques de Hunter et de Reed [Hunter, 1957][Reed, 1985]. Dans ces articles, les chercheurs mettent en évidence qu'une faible partie (environ 1%) de l'énergie cinétique initiale se trouve dans la propagation d'ondes élastiques dans le substrat. Reed propose aussi des résultats expérimentaux qui sont en bon accord avec ces travaux théoriques.

Nous pouvons noter que les travaux de Zener, Hunter et Reed sont aujourd'hui encore un point de comparaison dans de nombreuses études [Boettcher, Russell, and Mueller, 2017] [Boettcher, Kunik, et al., 2017] [Boettcher, Eichmann, and Mueller, 2019]. Une étude a notamment montré que la taille du substrat était importante [Wu, Li, and Thornton, 2005]. Dans cet article, les chercheurs montrent que, s'il y a plusieurs réflexions de l'onde durant le temps de contact, alors la restitution partielle due à la propagation de cette onde est négligeable (environ 1%, ils retrouvent donc les résultats de Hunter et de Reed). En revanche, s'il n'y a pas du tout de réflexion de cette onde, alors une partie importante de l'énergie cinétique se retrouve sous la forme d'ondes dans le substrat.

À la veille des années 2000, Gerl et Zippelius étudient le coefficient de restitution lors de l'impact d'un disque élastique contre un mur rigide [Gerl and Zippelius, 1999]. Ils montrent qu'après la collision, l'énergie cinétique peut être transférée aux modes de déformation de la sphère. Nous pouvons voir cela sur les images de la figure 1.5.

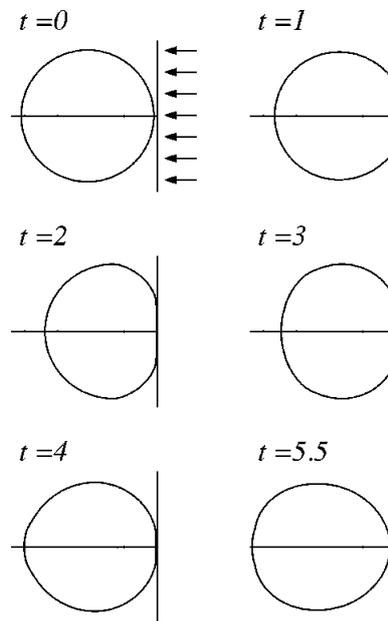


Figure 1.5: Séquence d'images pour un disque impactant un mur rigide. Nous pouvons observer la déformation restante dans le disque après la collision. D'après [Gerl and Zippelius, 1999].

Si nous revenons à l'échelle microscopique, nous pouvons nous focaliser sur les études de l'impact d'une chaîne de masses et de ressorts. En 2000, Basile et Dumont étudient numériquement l'impact d'une chaîne homogène avec un mur rigide [Basile and Dumont, 2000]. Ils montrent que, dans la limite macroscopique (où le nombre de masses-ressorts tend vers l'infini), le coefficient de restitution vaut 1.

1.2.3 Modélisation d'impacts d'objets élastiques hétérogènes

Dans le même article, Basile et Dumont modifient cette chaîne en remplaçant les ressorts initiaux par des ressorts plus mous dans la moitié avant, celle qui vient impacter le mur. Ils étudient alors un système hétérogène et montrent que, même dans la limite thermodynamique, le coefficient de restitution est significativement inférieur à 1 et que l'énergie cinétique est transférée dans les modes de vibration de la chaîne. Sur la figure 1.6, nous pouvons voir que le coefficient de restitution est plus petit que 1 et qu'il dépend du rapport des rigidités des ressorts. Trois ans plus tard, Nagahiro et Hayakawa, en se basant sur les travaux de Basile et Dumont, étudient l'impact d'une chaîne dont les masses sont cette fois-ci reliées par des ressorts non linéaires [Nagahiro and Y. Hayakawa, 2003]. Ils ont montré que le coefficient de restitution dépend fortement de la vitesse d'impact de la chaîne et que cette dépendance est caractérisée par l'énergie potentielle d'interaction entre les masses.

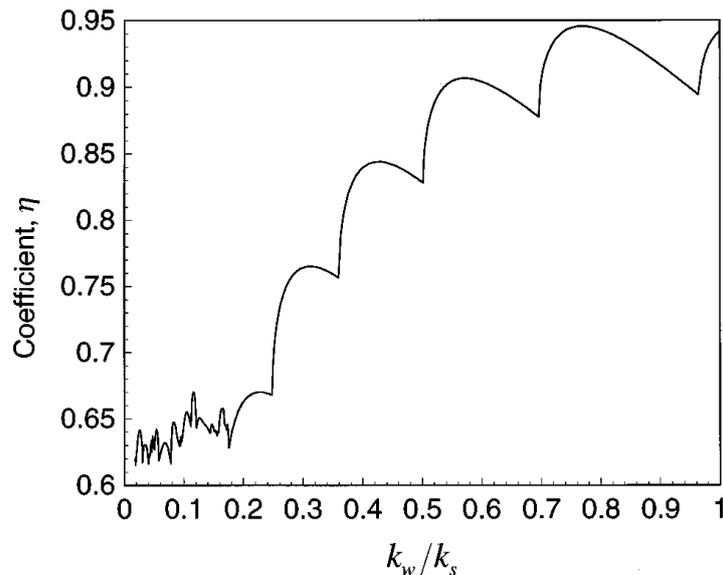


Figure 1.6: Coefficient de restitution en fonction du rapport k_w/k_s pour une chaîne amortie. k_w est la raideur des ressorts de la moitié avant, moitié qui entre en collision. k_s est la raideur des ressorts de la moitié arrière. D'après [Basile and Dumont, 2000].

Plus récemment, Ruan et Yu ont étudié un système masse-ressort à deux degrés de liberté et ont montré que l'impact avec un mur rigide entraîne un transfert d'énergie des degrés de liberté translationnels vers les degrés de liberté vibrationnels [Ruan and Yu, 2016]. La vibration joue un rôle important dans l'absorption de l'énergie cinétique et donc dans une variation importante du coefficient de restitution. Ce transfert dépend du rapport des masses et du rapport des constantes de raideur des ressorts.

Modèle ICM

Nous poursuivons sur les systèmes hétérogènes en prenant l'exemple d'un système non-cohésif. Reprenons comme exemple un ballon de basket. Nous allons poser dessus une balle de tennis et laisser tomber ces 2 objets en même temps. Nous pouvons observer le rebond de ces 2 objets et le fait que la balle de tennis va avoir une vitesse très élevée lors de son éjection. Cette expérience connue sous le nom de "two-ball bounce problem" (problème du rebond à deux balles) est souvent utilisée dans l'enseignement pour illustrer les lois de conservation de l'énergie en mécanique. C'est un phénomène très visuel qui permet d'attiser la curiosité des étudiants, d'autant plus que le problème se résout simplement en considérant la conservation de l'énergie cinétique et la conservation de la quantité de mouvement. De plus, de nombreuses études traitent de ce sujet en prenant en compte divers aspects [Patricio, 2004] [Cross, 2007] [P. Müller and Pöschel, 2011] [Berdeni, Champneys, and Szalai, 2015].

Nous pouvons généraliser ce phénomène en considérant 2 sphères rigides de masse, respectivement, m_1 et m_2 : la masse m_2 est posée sur la masse m_1 comme nous pouvons le voir sur le schéma de la figure 1.7. Nous allons utiliser un modèle d'impact basé sur la mécanique newtonienne dans lequel les interactions vont se faire de manière séquentielle et utiliser l'appellation de modèle ICM pour "Independant Collision Model" [Berdeni, Champneys, and Szalai, 2015]. Dans ce modèle, nous allons considérer les collisions comme étant instantanées. Nous devons aussi faire l'hypothèse qu'il existe une distance de séparation faible entre les 2 masses. Dans la pratique, les collisions ne sont jamais instantanées et les masses sont initialement en contact mais nous verrons tout au long de ce manuscrit que le modèle ICM est un bon choix pour analyser des résultats.

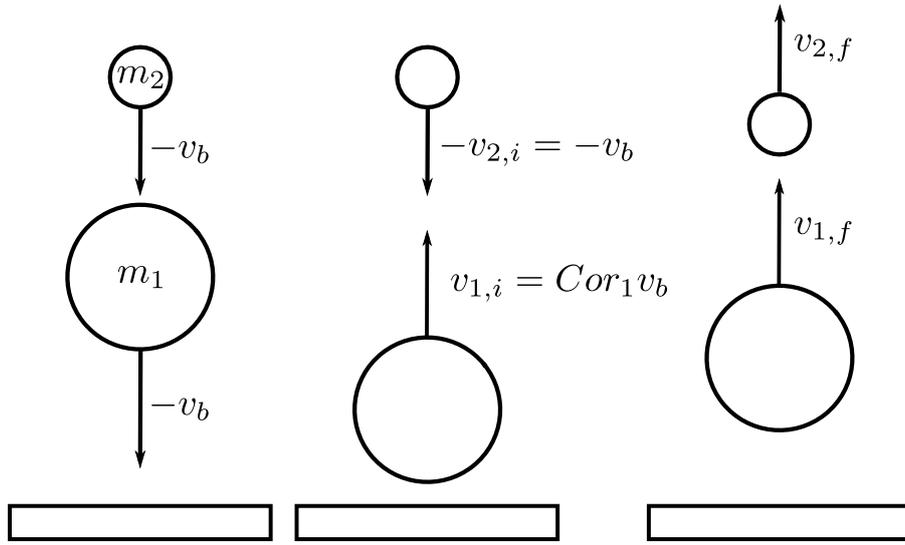


Figure 1.7: Schéma des étapes de l'impact de 2 masses avec le sol pour le modèle ICM. Les collisions sont supposées séquentielles. Pour ce schéma, on se place dans le cas où $v_{1,f} > 0$.

Cas Général : Les 2 masses arrivent en direction du sol avec une vitesse d'impact $-v_b$. La masse m_1 va être la première à impacter le sol et rebondir avec une vitesse $v_{1,i} = Cor_1 v_b$. La présence de Cor_1 va permettre de prendre en compte la restitution partielle lors de l'impact entre la masse m_1 et le sol. Il y a ensuite un deuxième impact entre la masse m_1 et la masse m_2 . Là encore, nous allons introduire un coefficient de restitution, $Cor_{1,2}$, qui va permettre de prendre en compte la restitution partielle lors de l'impact entre les deux masses. Ensuite, les deux masses repartent respectivement avec une vitesse $v_{1,f}$ et une vitesse $v_{2,f}$. Nous avons à notre disposition deux équations pour trouver l'expression de ces deux vitesses. Tout d'abord, la conservation de la quantité de mouvement :

$$m_1 Cor_1 v_b - m_2 v_{2,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f} \quad (1.3)$$

puis l'expression de $Cor_{1,2}$ définie par :

$$Cor_{1,2} = \frac{v_{2,f} - v_{1,f}}{Cor_1 v_b + v_{2,i}}. \quad (1.4)$$

À ce stade, nous pourrions donner une expression des vitesses mais nous allons d'abord introduire x , la proportion de la masse m_2 dans le système défini par

$$x = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (1.5)$$

Finalement, après calcul, nous trouvons les expressions suivantes :

$$v_{1,f} = [Cor_1(1-x) - (1 + Cor_{1,2} + Cor_{1,2}Cor_1)x] v_b \quad (1.6)$$

$$v_{2,f} = [(Cor_1 + Cor_{1,2} + Cor_1Cor_{1,2})(1-x) - x] v_b. \quad (1.7)$$

Nous allons maintenant définir le coefficient de restitution Cor_{ICM} qui est la restitution du centre de masse de ce système définie par :

$$\begin{aligned} Cor_{ICM} &= \frac{(1-x)v_{1,f} + xv_{2,f}}{(1-x)v_b + xv_b} \\ &= Cor_1 - x(1 + Cor_1). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ici, nous pouvons remarquer que le coefficient de restitution du centre de masse ne dépend pas de $Cor_{1,2}$. En effet, le choc entre la masse m_1 et la masse m_2 est un choc interne au système, celui-ci ne va donc pas changer la quantité de mouvement du centre de masse et donc son coefficient de restitution. Nous allons maintenant voir deux cas particuliers en fonction des valeurs de $Cor_{1,2}$ et Cor_1 . Ces deux cas nous seront utiles lorsque nous voudrons comparer nos données expérimentales au modèle ICM.

Cas particulier $Cor_{1,2} = 1$:

$$v_{1,f} = [(1-x) - (2 + Cor_1)x] v_b \quad (1.9)$$

$$v_{2,f} = [(1 + 2Cor_1)(1-x) - x] v_b \quad (1.10)$$

$$Cor_{ICM} = Cor_1 - x(1 + Cor_1) \quad (1.11)$$

Cas particulier $Cor_{1,2} = 1$ et $Cor_1 = 1$:

$$v_{1,f} = (1 - 4x)v_b \quad (1.12)$$

$$v_{2,f} = (3 - 4x)v_b \quad (1.13)$$

$$Cor_{ICM} = 1 - 2x \quad (1.14)$$

Si nous reprenons l'exemple de la balle de tennis posée sur le ballon de basket, alors nous sommes dans le cas où un des objets est plus massif que l'autre, soit $m_1 \gg m_2$, ou bien encore $x \rightarrow 0$. Les équations 1.12 et 1.13 se simplifient alors en :

$$v_{1,f} \approx v_b \quad (1.15)$$

$$v_{2,f} \approx 3v_b. \quad (1.16)$$

Ce modèle permet facilement de comprendre pourquoi la balle de tennis qui rebondit sur un ballon de basket repart avec une vitesse trois fois plus importante que la vitesse à laquelle elle a été lâchée.

1.2.4 Sources de dissipation : plasticité, viscoélasticité et rugosité

Jusqu'à présent, nous avons vu divers mécanismes pour lesquels l'énergie cinétique initiale de l'objet n'était pas transférée en énergie cinétique finale pour le rebond, mais était transférée sous une autre forme (énergie de vibration, énergie de flexion, etc.). Dans cette section, nous allons voir différentes sources de dissipations de cette énergie cinétique initiale.

La plasticité est une source de dissipation lors de l'impact. L'étude de l'indentation d'une sphère sur une surface métallique permet de mettre en évidence que la déformation plastique du substrat est une source de dissipation dans le cas d'un impact [Tabor and Taylor, 1948]. D'autres chercheurs ont étudié l'effet de la vitesse d'impact entre deux sphères [Labous, Rosato, and Dave, 1997] ou entre une sphère et un substrat [Lifshitz and Kolsky, 1964] sur la restitution d'énergie. Ils ont montré que pour de grandes vitesses d'impact, la déformation plastique domine la dynamique. Dans de nombreux systèmes, nous pouvons avoir des situations intermédiaires avec à la fois des déformations plastiques et une propagation d'ondes élastiques dans le matériau [Hutchings, 1979].

Dans l'article précédemment cité ([Labous, Rosato, and Dave, 1997]), les chercheurs ont aussi montré que pour des vitesses d'impact plus faibles, les résultats sont en accord avec un modèle de dissipation viscoélastique. La viscoélasticité est justement une des sources de dissipation

présente dans de nombreux systèmes. Nous pouvons notamment citer le travail de Kuwabara et Kono, qui a été utilisé dans la référence précédente, et qui propose un modèle de contact entre deux sphères viscoélastiques [Kuwabara and Kono, 1987]. Nous donnerons des détails de ce modèle plus loin dans ce manuscrit, car celui-ci nous servira dans notre étude. D'autres études prennent aussi en considération cette nature viscoélastique des matériaux [Murakami and H. Hayakawa, 2014].

La qualité de la surface de contact est aussi un paramètre d'importance. Dans leurs travaux, des chercheurs ont montré que la présence d'imperfections à la surface d'une bille avait pour conséquence une diminution du coefficient de restitution [Lifshitz and Kolsky, 1964]. D'autres chercheurs prennent aussi en considération la loi de Coulomb sur le frottement [Foerster et al., 1994].

1.2.5 Résumé sur la restitution partielle d'énergie cinétique

Pour finir cet état de l'art, nous pouvons noter que de nombreux ouvrages sont consacrés aux contacts et aux impacts [Goldsmith, 1960] [Johnson, 1985] [Stronge, 2000]. Nous pouvons aussi nous intéresser à la thèse d'Eric Falcon qui propose un résumé des différents phénomènes conduisant à une réduction de l'énergie cinétique de l'objet impactant [Eric Falcon, 1997] comme nous pouvons le voir sur la figure 1.8.

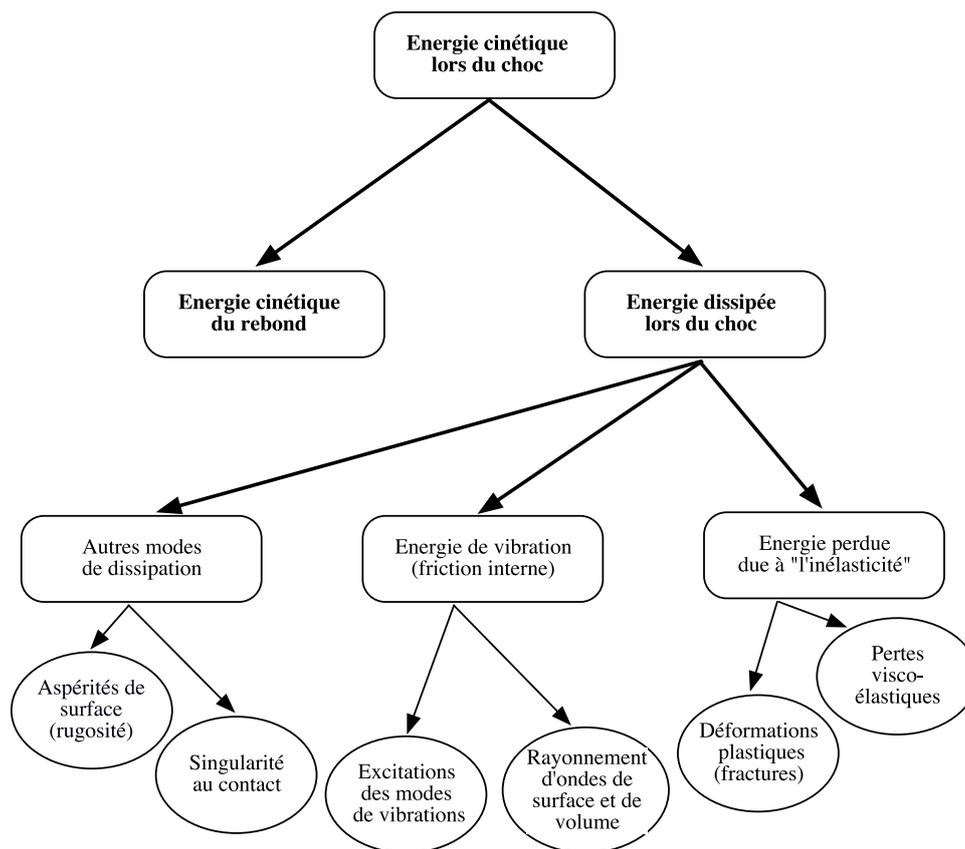


Figure 1.8: Schéma résumant les divers mécanismes intervenant dans une restitution partielle d'énergie cinétique. D'après [Eric Falcon, 1997].

1.3 Approches théoriques d'un impact

« Ut tensio sic vis » : telle extension, telle force. C'est en ces termes que Robert Hooke publia en 1678 [Hooke, 1678] la loi reliant l'allongement d'un ressort à la force qui lui est appliquée. Deux siècles plus tard, c'est Cauchy et Poisson qui établirent les équations de la théorie de l'élasticité c'est-à-dire une description de la mécanique des solides déformables faisant partie intégrante de la mécanique des milieux continus [Landau and Lifchitz, 1986] [Love, 1892].

Nous allons voir comment la loi de Hooke est indispensable à la formulation de deux théories sur l'impact d'objets élastiques. La première, la théorie de Saint-Venant et Flamant, et la deuxième, la théorie de Hertz. Nous avons choisi ces deux théories, ayant des aspects différents, car elles sont très présentes dans la littérature et nous permettent d'introduire des notions utiles à ce manuscrit. Enfin, nous présenterons un modèle viscoélastique basé sur une modification de la théorie de Hertz.

1.3.1 Théorie de Saint-Venant et Flamant

En 1747, Jean Le Rond d'Alembert publie ses "Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration" [d'Alembert, 1747]. L'équation de d'Alembert décrit les phénomènes de propagation d'ondes dans un milieu. Pour retrouver cette équation dans le cas d'ondes de déformation longitudinale, nous pouvons considérer une chaîne de masses m reliées entre elles par des ressorts de constante de raideur k et de longueur à l'équilibre l_0 . La force entre deux masses est donnée par la loi de Hooke $F = -k(l - l_0)$ avec l la distance entre deux masses. Dans la limite des milieux continus, la dynamique de cette chaîne de ressorts est décrite par l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (1.17)$$

avec $u(x, t)$ le déplacement d'un point repéré par sa position initiale x et au temps t et avec $c = \sqrt{\frac{kl_0^2}{m}}$ la vitesse de propagation de l'onde de déformation.

Plus tard en 1883, Saint-Venant et Flamant présentent leurs travaux sur l'effet de la propagation des ondes élastiques dans un matériau [Saint-Venant and Flamant, 1883]. Ils considèrent deux barres élastiques longues, homogènes : l'une des deux vient être impactée longitudinalement à son extrémité comme nous le voyons sur le schéma de la figure 1.9. La surface de contact est plane. Dans cette théorie, l'extrémité de l'objet heurté prend immédiatement la même vitesse que l'objet heurtant au tout début de l'impact puis subit le même mouvement jusqu'à la fin du contact. Le contact est alors dominé par la propagation des ondes de déformation dans le matériau. Le temps de contact sera donné par le temps nécessaire aux ondes pour faire un aller-retour le long de l'objet dans lequel ce phénomène est le plus rapide.

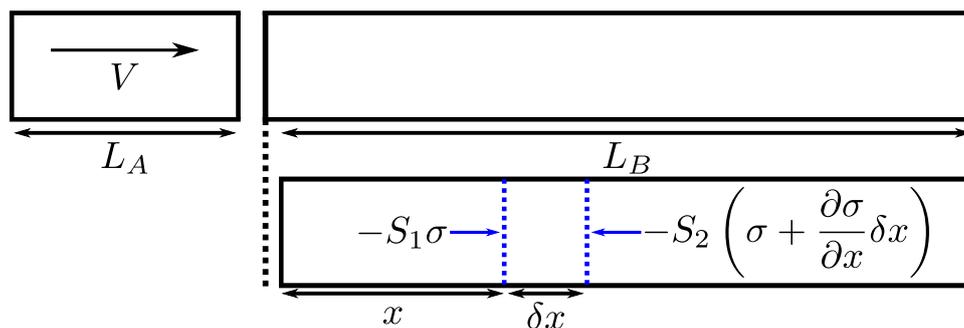


Figure 1.9: Schéma de l'impact d'une barre de longueur L_A sur une barre de longueur L_B .

Nous allons voir comment ce problème est en lien à la fois avec la loi de Hooke et avec l'équation de d'Alembert. Sur le schéma de la figure 1.9, nous pouvons voir que la barre de longueur L_B va être impactée par une barre de longueur L_A ayant une vitesse V . Cela a pour effet la propagation d'une onde de compression dans la barre de longueur L_B démarrant à l'origine O . Afin de se placer seulement dans le cas 1D, nous allons négliger les contraintes et l'inertie selon l'axe y [Meyers, 1994]. Au temps t , le front d'onde s'est propagé à la distance x , au niveau de la section S_1 . Au temps $t + \delta t$, le front d'onde atteint la distance $x + \delta x$, au niveau de la section S_2 . Nous allons donc appliquer le principe fondamental de la dynamique à un élément de volume compris entre la section S_1 et la section S_2 , de masse volumique ρ , de longueur δx , de section S ($S_1 = S_2 = S$) et de masse $S\rho\delta x$. Nous notons u le déplacement de cet élément de volume. La force appliquée sur la section est le produit de la contrainte par la surface, celle-ci est négative ici car nous sommes en compression dans le cas présent. En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur un élément de la barre compris entre x et $x + \delta x$, nous obtenons :

$$-[S\sigma - S(\sigma + \frac{\partial\sigma}{\partial x}\delta x)] = S\rho\delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.18)$$

ou encore

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.19)$$

dans la limite $\delta x \rightarrow 0$ des milieux continus. Comme nous l'avons déjà dit, la loi de Hooke est l'élément essentiel de ce raisonnement. Ici la déformation étant élastique, elle permet de relier la contrainte σ , la déformation ε et le module d'Young E :

$$\sigma = \varepsilon E \quad (1.20)$$

avec ε défini par $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$. Nous retrouvons alors l'équation de d'Alembert à partir de l'équation 1.19, avec c , la vitesse de propagation des ondes définie par :

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (1.21)$$

Dans cet exemple, les deux barres étant du même matériau et L_A étant inférieure à L_B , l'expression du temps de contact est donnée par le temps de propagation des ondes le plus court, soit par :

$$t_w = 2L_A/c. \quad (1.22)$$

L'expression de la vitesse de propagation des ondes de déformation est très importante, car elle nous permettra par la suite de calculer celle-ci à partir des propriétés des matériaux.

1.3.2 Théories de Hertz : de la théorie du contact à la théorie de l'impact

La théorie du contact de Hertz [Hertz, 1896] est une théorie du contact établie par le physicien allemand Heinrich Hertz en 1881. Hertz a calculé la déformation au contact de deux objets rigides homogènes et isotropes ayant des surfaces de contact sphériques dans le cas d'une approche statique et d'une utilisation de l'élasticité linéaire. La loi de Hooke est donc un des principaux ingrédients de la théorie de Hertz.

Les objets considérés sont supposés élastiques uniquement au voisinage de la région de contact. Cette zone de contact est elle-même petite devant la taille de l'objet. Les déformations qui, par hypothèse, doivent être faibles lors du contact doivent aussi se concentrer dans cette

région. Cette théorie s'applique si les objets ont une interface fortement courbée. Il peut s'agir par exemple d'un contact sphère-sphère, sphère-plan ou encore cylindre-plan. Le contact est supposé ponctuel ou linéaire. Enfin, il faut rajouter à cela la nécessité d'avoir des surfaces lisses de manière à négliger les frottements et s'assurer ainsi que la pression exercée ne présente qu'une composante normale.

Éléments de compréhension de la théorie du contact de Hertz

Dans cette section, nous allons donner quelques éléments afin de comprendre la théorie de Hertz. Pour cela, nous allons nous baser sur l'approche qualitative de Leroy [Leroy, 1985]. Dans son article, il s'intéresse au contact entre deux sphères et s'abstient des pré-facteurs et d'un arsenal mathématique complexe, ce qui nous permet de transposer ce raisonnement pour le contact d'une sphère sur un plan. Soit une sphère s de rayon R en appui sur un plan p . Nous pouvons alors définir une surface de contact comme étant un cercle de diamètre $2a$ ainsi qu'une distance d'interpénétration δ comme nous le voyons sur le schéma de la figure 1.10.

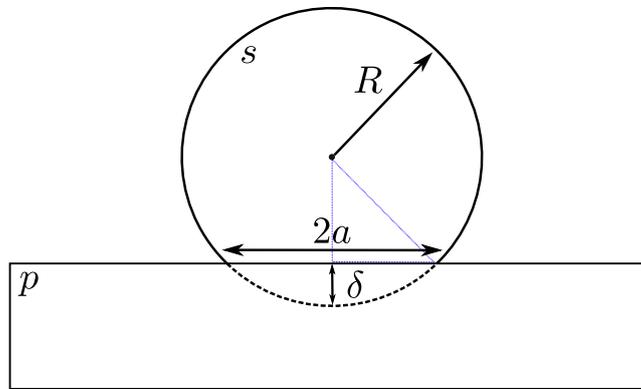


Figure 1.10: Schéma du contact de Hertz dans la géométrie sphère-plan. La sphère s (de rayon R) a pour surface de contact avec le plan p un cercle de rayon a . On note δ , la distance d'interpénétration entre la sphère et le plan.

Comme nous l'avons dit, nous allons utiliser la loi de Hooke pour relier la contrainte σ à la déformation. La contrainte est définie par $\sigma = F/S$ avec S la surface de contact. Nous pouvons voir sur le schéma que $S \sim a^2$. Nous remarquons aussi que $\varepsilon \sim \delta/a$ puisque la déformation est le rapport entre le déplacement dans la zone de contact, δ , et la longueur typique de cette zone de contact, a . À partir de la loi de Hooke $\sigma = E\varepsilon$ et des lois d'échelle précédentes, nous obtenons alors :

$$F/a \sim E\delta. \quad (1.23)$$

Si l'on s'intéresse au triangle bleu sur le schéma et que l'on néglige les termes en δ^2 (car par hypothèse $\delta \ll (R, a)$) alors on trouve $a^2 \sim \delta R$. Nous trouvons alors la loi d'échelle suivante pour la force de Hertz :

$$F_{Hertz} \sim \sqrt{RE}\delta^{3/2}. \quad (1.24)$$

Ainsi nous venons de retrouver la loi de Hertz qui donne la distance d'interpénétration en fonction de la force appliquée. C'est une relation non linéaire et l'expression exacte est donnée par :

$$F_{Hertz} = \frac{4\sqrt{R}}{3} E^* \delta^{3/2} \quad (1.25)$$

avec E^* un module d'Young effectif défini à partir de ν_s , ν_p , E_s et E_p , respectivement les coefficients de Poisson et les modules d'Young de la sphère et du plan, dans la relation suivante

:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_s^2}{E_s} + \frac{1 - \nu_p^2}{E_p}. \quad (1.26)$$

Une autre géométrie d'intérêt est celle du contact entre deux sphères de rayon R_1 et R_2 . Dans ce cas, l'expression de la force de Hertz est donnée par :

$$F_{Hertz} = -\frac{5}{4}k\delta^{3/2} \quad (1.27)$$

avec

$$k = \frac{16}{15}E^* \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1/2}. \quad (1.28)$$

À partir de cette équation, nous pouvons trouver l'expression de k_H qui est un paramètre élastique du contact de Hertz dans la géométrie sphère-plan. Cette géométrie sphère-plan est retrouvée dans la limite $R_1 = R_s$ et $R_2 = R_p$ avec $\frac{1}{R_p} \rightarrow 0$ et $\frac{1}{E_p} \rightarrow 0$. Nous trouvons alors :

$$k_H = \frac{16}{15} \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \sqrt{R_s}. \quad (1.29)$$

Théorie de l'impact de Hertz

Hertz a étendu sa théorie statique du contact élastique à une théorie de l'impact normal entre deux corps élastiques. Lors de l'impact, la déformation locale doit pouvoir être donnée par les équations de la théorie du contact statique. C'est pour cela que la théorie de l'impact de Hertz est dite quasi-statique. La théorie de l'impact de Hertz doit vérifier à la fois les hypothèses d'élasticité et de quasi-staticité.

Concernant l'hypothèse d'élasticité, la théorie ne tiendra pas compte de la dissipation d'énergie au cours de l'impact, toute dissipation par frottements ou déformation plastique est donc négligée. La déformation dans la zone de contact est considérée comme étant réversible.

Concernant l'hypothèse de quasi-staticité, il est nécessaire que la durée de l'impact soit très grande pour permettre un grand nombre d'aller-retour de la propagation d'une onde de déformation élastique dans l'entièreté de l'objet. De cette manière, la propagation de ces ondes n'influence plus le champ des contraintes des objets considérés. On néglige donc dans cette théorie, contrairement à la théorie de Saint-Venant, les effets vibratoires et de propagation d'ondes. Si par exemple les deux objets impactant sont des sphères alors il faut respecter le critère de Love [Love, 1892] :

$$\left(\frac{v}{c} \right)^{1/5} \ll 1 \quad (1.30)$$

avec v la vitesse d'impact et c la vitesse de propagation des ondes. Dans le cas qui nous intéresse, une sphère impactant un plan, le critère de Love n'est plus valable car comme l'un des deux corps possède une dimension très grande devant l'autre alors les ondes émises lors de l'impact ne peuvent pas revenir au point de départ. L'hypothèse de quasi-staticité est alors vérifiée si l'énergie des modes de vibration de l'objet le plus grand est négligeable devant l'énergie totale de l'impact. Cette nouvelle condition correspond alors au critère de Hunter [Hunter, 1957] :

$$\left(\frac{v}{c} \right)^{3/5} \ll 1. \quad (1.31)$$

À partir de ce critère, nous pouvons dire que la vitesse d'impact doit être très petite devant la vitesse des ondes, sinon la quasi-staticité n'est plus valable.

Temps de contact sphère-plan

Si nous continuons à étudier l'impact d'une sphère sur un plan alors, dans le cadre de la théorie de Hertz, la durée du temps de contact est donnée par Guban [Guban, 2000] :

$$t_{Hertz} = 2.9432 \left\{ \frac{15M}{16\sqrt{R}} \left(\frac{1-\nu_s^2}{E_s} + \frac{1-\nu_p^2}{E_p} \right) \right\}^{2/5} U^{-1/5}. \quad (1.32)$$

Pour démontrer ce résultat, nous allons encore baser notre raisonnement sur l'article de Leroy qui traite, de manière qualitative, de l'impact entre deux sphères [Leroy, 1985].

Avant l'impact, l'objet heurtant de masse m se déplace à une vitesse v et a donc l'énergie cinétique initiale suivante :

$$E_c^{ini} \sim mv^2. \quad (1.33)$$

Lors de l'impact, nous pouvons observer une variation de la distance d'interpénétration δ au cours du temps avec $\dot{\delta} = d\delta/dt$. Cette variation correspond à une énergie cinétique de l'objet impactant de masse m qui a pour forme :

$$E_c \sim m\dot{\delta}^2. \quad (1.34)$$

Il faut aussi prendre en compte l'énergie élastique liée à la force de Hertz :

$$E_p \sim F\delta \sim \sqrt{RE^*} \delta^{5/2}. \quad (1.35)$$

La théorie de l'impact de Hertz considère que l'impact est élastique, nous avons donc la conservation de l'énergie suivante :

$$mv^2 \sim m\dot{\delta}^2 + \delta^{5/2} \sqrt{RE^*} \quad (1.36)$$

que nous pouvons réécrire sous la forme :

$$\frac{d\delta}{dt} \sim \left(v^2 - \delta^{5/2} \frac{\sqrt{RE^*}}{m} \right)^{1/2}. \quad (1.37)$$

Nous allons ensuite intégrer cette équation. Entre 0 et t_{Hertz} pour la variable t et entre 0 et δ_{max} pour la variable δ .

$$\int_0^{t_{Hertz}} dt \sim 2 \int_0^{\delta_{max}} \left(v^2 - \delta^{5/2} \frac{\sqrt{RE^*}}{m} \right)^{-1/2} d\delta. \quad (1.38)$$

La distance d'interpénétration maximale δ_{max} est obtenue lorsque $t = t_{Hertz}/2$ ce qui explique le facteur 2 devant l'intégrale. Nous savons aussi que lorsque $t = t_{Hertz}/2$ la vitesse de la sphère impactante devient nulle et par conséquent nous avons $\dot{\delta} = 0$. En utilisant ce résultat dans l'équation 1.36, nous sommes capables d'obtenir l'expression suivante :

$$\delta_{max} \sim \left(\frac{mv^2}{\sqrt{RE^*}} \right)^{2/5}. \quad (1.39)$$

La dernière étape consiste à faire un changement de variable avec la variable x définie par $x = \delta/\delta_{max}$. L'équation se réécrit alors :

$$t_{Hertz} \sim 2 \left(\frac{m}{\sqrt{RE^*}} \right)^{2/5} v^{-1/5} \int_0^1 (1-x^{5/2})^{-1/2} dx \quad (1.40)$$

$$t_{Hertz} \sim \left(\frac{m}{\sqrt{R} E^*} \right)^{2/5} v^{-1/5}. \quad (1.41)$$

*N.B : Nous pourrions résoudre de manière exacte l'intégrale à l'aide des fonctions Gamma : $\int_0^1 (1 - x^{5/2})^{-1/2} dx = \frac{2\sqrt{\pi} \Gamma(2/5)}{5 \Gamma(9/10)} = 1.47$. On peut noter que $2 * 1.47 = 2.94$, on retrouve donc le préfacteur de la formule exacte, même si ici ce n'est pas le but recherché.*

1.3.3 Modèle hertzien viscoélastique

Après avoir vu la théorie de l'impact de Hertz, il est intéressant de parler du modèle proposé par Kuwabara et Kono. Dans cet article [Kuwabara and Kono, 1987], les chercheurs étudient le cas d'un impact entre 2 sphères, l'une de masse m_1 et rayon R_1 et l'autre de masse m_2 et rayon R_2 . Ils proposent un modèle qui prend en compte à la fois la théorie de l'élasticité et les propriétés viscoélastiques des matériaux en présence. Les matériaux sont alors modélisés par un ressort hookéen mis en parallèle avec un amortisseur visqueux (modèle rhéologique connu sous le nom de modèle de Kelvin-Voight).

Dans un premier temps, ils rappellent l'expression de la force de Hertz, notée F_e , reliant la force appliquée à la distance d'interpénétration δ dans le cas d'un impact entre 2 sphères :

$$F_e = -\frac{5}{4}k\delta^{3/2} \quad (1.42)$$

avec k dont l'expression a été donnée à l'équation 1.28. Ensuite, ils rajoutent une composante visqueuse, notée F_v , pour prendre en compte les cas où le coefficient de restitution est inférieur à 1. Ils donnent l'expression suivante :

$$F_v = -\frac{5}{2}k'\sqrt{\delta}\dot{\delta} \quad (1.43)$$

avec

$$k' = \frac{4}{5}E^{*'}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1/2} \quad (1.44)$$

et

$$\frac{1}{E^{*'}} = \frac{1 - \nu_1'^2}{E_1'} + \frac{1 - \nu_2'^2}{E_2'} \quad (1.45)$$

avec E_i' et ν_i' deux coefficients qui correspondent à une prise en compte de la friction. Ils sont définis par $E_i' = 9\xi\eta/(3\xi + \eta)$ et $\nu_i' = (3\xi - 2\eta)/2(3\xi + \eta)$ avec ξ et η deux coefficients de viscosité associés, respectivement, aux déformations en volume et au cisaillement. Nous retrouvons donc

$$F_v = -2E^{*'}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1/2} \sqrt{\delta}\dot{\delta}. \quad (1.46)$$

Finalement ils écrivent une expression de l'équation du mouvement $\mu\ddot{\delta} = F_e + F_v$ avec μ la masse réduite définie par $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$:

$$\mu\ddot{\delta} + \frac{5}{4}k\delta^{3/2} + \frac{5}{2}k'\sqrt{\delta}\dot{\delta} = 0. \quad (1.47)$$

Dans la suite de ce manuscrit, nous appliquerons le modèle de Kuwabara et Kono à notre géométrie, c'est-à-dire à l'impact d'une sphère s sur un plan p infiniment rigide, en gardant les expressions de la composante élastique (équation 1.42) et de la composante visqueuse (équation 1.43).

1.4 Motivation et problématique

En 2017, mon équipe a mis en évidence le phénomène de super-propulsion [Raufaste et al., 2017]. Dans cet article, ils ont étudié le comportement d'une goutte d'eau et d'une bille d'hydrogel éjectées par une catapulte. Leurs expériences ont montré que la vitesse d'éjection de ces projectiles dépendait à la fois de la fréquence propre (liée à la déformation élastique) de ce projectile et de la fréquence de la catapulte. Pour des valeurs spécifiques de ce rapport de fréquences, le projectile part avec une vitesse plus importante (énergie cinétique multipliée par 2.5) que la vitesse d'un objet rigide éjecté dans les mêmes conditions.

À la lumière de ces résultats, l'équipe s'est intéressée à l'éjection d'un projectile bicomposite [Celestini et al., 2020]. Ce projectile est formé de deux parties : une partie rigide et une partie molle. Une fois encore, ce projectile est capable de repartir avec une vitesse plus importante que celle d'un objet rigide. Pour un projectile bicomposite, l'éjection optimale est obtenue lors de la présence d'une couche de partie molle, en contact avec la catapulte, sous la partie rigide. Le gain en énergie cinétique peut atteindre un facteur 3 par rapport à l'éjection d'un projectile rigide.

Ce travail de thèse se place dans ce contexte de recherche sur la dynamique d'objets bicomposites. Durant ma thèse, j'ai étudié la dynamique et le coefficient de restitution lors de l'impact et du rebond d'un projectile élastique bicomposite sur un substrat très massique et rigide. Ces projectiles ont une géométrie simple longiligne mais sont formés d'une partie molle au-dessus d'une partie rigide dont nous allons faire varier la proportion. Ces parties prises séparément sont plutôt élastiques et capables de restituer de l'énergie de déformation. Nous montrerons comment le coefficient de restitution peut varier très fortement en fonction de la proportion de la partie molle. Nous montrerons aussi qu'en choisissant judicieusement ce paramètre, le projectile peut rebondir efficacement ou bien être presque complètement amorti. Nous verrons aussi que le temps de contact de Hertz, pour la partie rigide, et le temps de propagation des ondes de déformation, pour la partie molle, sont des paramètres d'importance.

1.4.1 Plan du manuscrit

Dans un premier temps au chapitre 2, je vais présenter une étude expérimentale sur l'impact de ces objets élastiques. Cette étude sera accompagnée d'une modélisation théorique prenant en compte à la fois la théorie du contact de Hertz et la théorie de Saint-Venant et Flamant. Puis dans le chapitre 3, je présenterai une étude numérique de ces impacts avec une proposition de modèle prenant en considération la mécanique des milieux continus. Je proposerai ensuite une approche didactique de mon travail de thèse à la fois d'un point de vue expérimental et d'un point de vue numérique dans le chapitre 4. Cette approche fait partie d'une collaboration avec Laurence Viennot, chercheuse en didactique de la physique à l'Université de Paris. Pour conclure, nous discuterons ces différents résultats dans le chapitre 5.

Le lecteur pourra aussi trouver une annexe (A) dans laquelle je présente des expériences complémentaires et préliminaires sur des systèmes présentant d'autres géométries d'intérêt.

Chapitre 2

Étude expérimentale et modélisation

Sommaire

2.1	Introduction	22
2.2	Matériels et Méthodes	22
2.2.1	Élaboration du projectile bicomposite	22
2.2.2	Montage expérimental	24
2.2.3	Tracking du projectile et mesure de vitesses	25
2.2.4	Diagramme spatio-temporel	26
2.2.5	Détermination de la vitesse de propagation des ondes dans la partie molle	27
2.3	Résultats Expérimentaux	29
2.3.1	Effet de la proportion de la partie molle	29
2.3.2	Effet de la partie molle	33
2.3.3	Effet de la partie rigide	33
2.4	Modélisation	35
2.4.1	Force de contact du substrat sur la partie rigide	35
2.4.2	Force élastique de la partie molle sur la partie rigide	37
2.4.3	Bilan des forces pour le projectile bicomposite : trajectoire de la partie rigide	37
2.4.4	Expression du coefficient de restitution	40
2.4.5	Expression de τ et de t_w	40
2.5	Résultats du modèle et comparaison avec les expériences	41
2.5.1	Trajectoire	41
2.5.2	Temps	42
2.5.3	Coefficient de restitution	42
2.6	Temps caractéristiques du système	44
2.7	Conclusion	45

2.1 Introduction

Lors de nos expériences, nous avons étudié l'impact d'un projectile bicomposite à géométrie cylindrique sur un substrat. Ce projectile a la particularité d'être composé de deux matériaux, un matériau rigide et un matériau mou. Nous nous intéresserons notamment au cas où les deux parties constituant le projectile sont plutôt élastiques. Pour étudier son impact et son rebond nous avons mesuré son coefficient de restitution à l'aide d'expériences filmées avec une caméra rapide. Nous avons aussi caractérisé la dynamique du projectile pendant la phase du contact avec le substrat.

2.2 Matériels et Méthodes

2.2.1 Élaboration du projectile bicomposite

Notre projectile est composé de deux parties : une partie molle au dessus d'une partie rigide. Nous allons faire varier la proportion en masse de ces deux parties dans le projectile. Nous parlerons plus particulièrement de la proportion de la partie molle dans le projectile. Dans la suite de ce manuscrit nous distinguerons les propriétés des matériaux avec l'indice r si l'on considère le matériau rigide et l'indice s si l'on considère le matériau mou (s pour *soft*). Soit m_r la masse de la partie rigide et m_s la masse de la partie molle. Nous allons alors définir x la proportion de la partie molle en masse dans le projectile comme étant :

$$x = \frac{m_s}{m_r + m_s} = \frac{m_s}{m_{tot}}. \quad (2.1)$$

Nous avons élaboré plusieurs types de projectiles qui correspondent à l'association des différents matériaux que nous allons présenter. Nous pouvons voir ces différents projectiles sur les images de la figure 2.1.

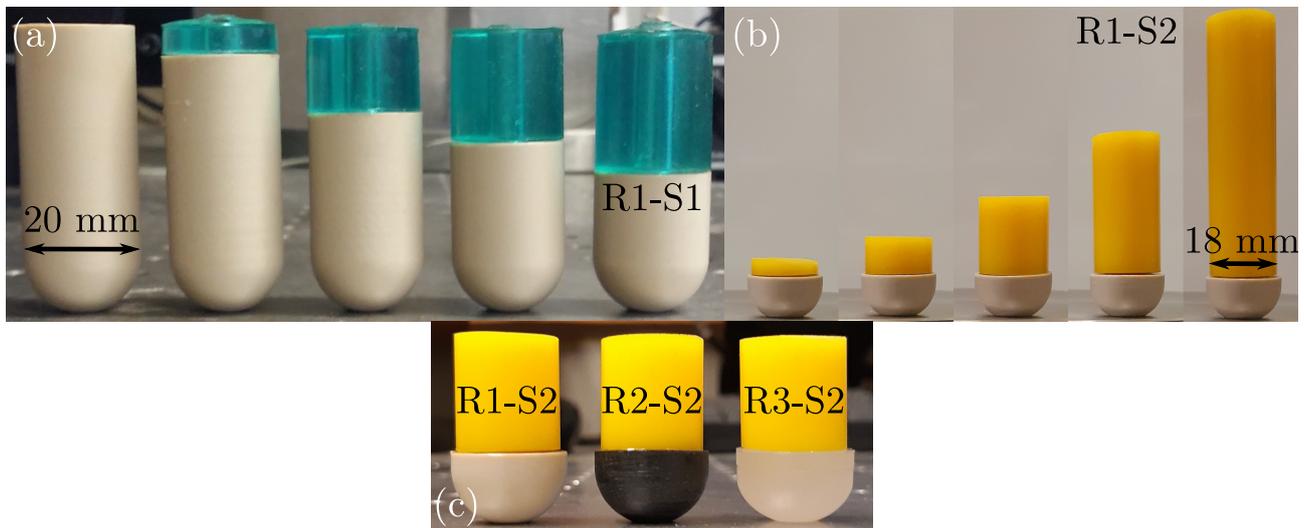


Figure 2.1: (a) Projectiles de type R1-S1. Nous observons une variation de la proportion de la partie molle x tandis que la hauteur totale est fixée. (b) Projectiles de type R1-S2, la hauteur totale varie. (c) Projectiles de type R1-S2, R2-S2 et R3-S2.

La partie rigide peut être constituée de trois matériaux différents. Le premier, noté R1, est en PEEK pour PolyEtherEtherKetone. C'est un thermoplastique notamment utilisé pour la fabrication de prothèses dentaires ou orthopédiques [Schwitalla and W.-D. Müller, 2013] [Kurtz and Devine, 2007], ou encore pour la confection de pièces mécaniques. Le deuxième, noté R2,

est en PA pour PolyAmide. C’est aussi un thermoplastique mais son usage est plus générale, avec par exemple une utilisation pour des pièces mécaniques comme des glissières, des roues et des galets, etc. Enfin le troisième, noté R3, est en PU pour PolyUréthane. Nous avons utilisé de l’*Econ* 80 qui est un PU Shore A 80 de la marque Smooth-On. C’est un caoutchouc notamment utilisé pour la création de moule à faible tirage. Chacun de ces matériaux présente un module d’Young élevé par rapport au module d’Young des matériaux utilisés pour la partie molle. Dans le tableau 2.1, nous pouvons retrouver les différentes caractéristiques de ces matériaux comme par exemple ρ_r la densité, E_r le module d’Young, ν_r le coefficient de Poisson et m_r la masse pour les expériences à partie rigide fixée. Dans ce tableau, nous retrouvons aussi la valeur du coefficient de restitution de la partie rigide seule lors de l’impact avec le substrat, que l’on note Cor_r .

Nom	Matériau	ρ_r (kg.m ⁻³)	E_r (GPa)	ν_r	m_r (g)	v_b (m.s ⁻¹)	Cor_r
R1	PEEK	1320	4	0.4	4.13 ± 0.01	1.59 ± 0.04	0.94 ± 0.04
R2	PA	1130	3	0.39	3.42 ± 0.01	1.64 ± 0.02	0.78 ± 0.03
R3	PU Shore A 80	1060	0.010	0.3 – 0.5	3.59 ± 0.01	1.55 ± 0.03	0.38 ± 0.06

Table 2.1: Caractéristiques de la partie rigide.

Pour la partie molle nous allons utiliser deux matériaux différents. Le premier, noté S1, est un hydrogel de gélatine. Ce gel est un gel physique que nous fabriquons à partir de gélatine de porc en poudre (Sigma-Aldrich, gelatin from porcine skin, gel strength 300, type A). Pour ce faire, nous dissolvons une certaine quantité de poudre dans de l’eau portée à 80° C sous une faible agitation jusqu’à dissolution. Nous versons ensuite cette solution dans un moule cylindrique qui contient une tige en son centre puis nous laissons la solution reposer pendant environ 2 heures. Ce temps permet la réticulation et l’obtention d’un hydrogel, que nous allons considérer comme étant élastique au vu des paramètres expérimentaux de nos séries d’expériences. Les effets viscoélastiques sont donc négligés [Celestini et al., 2020]. La concentration du gel dans l’eau est d’environ 20% en masse. Le deuxième matériau, noté S2, est en PU plus précisément un PU Shore A 30 du fabricant Solution Elastomères. Il existe aussi une différence de géométrie entre S1 qui possède un trou en son centre et S2 qui est un cylindre homogène. Dans le tableau 2.2, nous pouvons retrouver les différentes caractéristiques de ces matériaux à savoir : ρ_s la densité, E_s le module d’Young, d le diamètre, S_s la surface de la base du cylindre et c_s la vitesse de propagation des ondes dans ce matériau.

Nom	Matériau	ρ_s (kg.m ⁻³)	E_s	d (mm)	S_s (mm ²)	c_s (m.s ⁻¹)
S1	Hydrogel	1030	70 kPa	20	302	8.2
S2	PU Shore A 30	1250	1.2 MPa	18	252	30

Table 2.2: Caractéristiques de la partie molle.

La dernière étape pour obtenir notre projectile est simplement de faire adhérer la partie molle sur la partie rigide. La partie rigide est un cylindre de diamètre 20 mm ayant une extrémité en forme de demi-sphère avec un rayon de courbure de 10 mm. Cette forme permet d’avoir un contact ponctuel qui permet à la fois de modéliser un contact de type Hertz et d’obtenir un impact reproductible. Pour la partie molle, S1 est un cylindre de diamètre 20 mm tandis que S2 est un cylindre de diamètre 18 mm. Nous avons travaillé avec quatre types de projectiles comme nous pouvons le voir sur les images de la figure 2.1. Le premier est R1-S1. Ce projectile a la particularité d’avoir une hauteur totale fixe valant $h = 50$ mm. Pour à la fois respecter cette condition et faire varier la proportion de la partie molle dans le projectile, nous avons fait varier la hauteur de la partie rigide (h_r , de 13 à 50 mm) et la hauteur de la partie molle

(h_s). Les trois autres types de projectiles correspondent aux projectiles R1-S2, R2-S2 et R3-S2. Dans ces configurations, le projectile a une hauteur totale h qui varie et une hauteur $h_r = 13$ mm fixe pour la partie rigide.

2.2.2 Montage expérimental

Il existe deux dispositifs expérimentaux. Les deux permettent de lâcher les projectiles d'une certaine hauteur et de les laisser rebondir. Les projectiles sont lâchés sans vitesse initiale d'une hauteur d'environ 15 cm ce qui nous donne une vitesse à l'impact d'environ 1 à 2 m.s⁻¹. Ils viennent impacter un substrat en dural (duraluminium, un alliage d'aluminium et de cuivre) noté ③ sur la figure 2.2. Celui-ci a une masse et un module d'Young grands devant ceux du projectile de manière à le considérer comme immobile et indéformable. Ce substrat a une surface plane et ne présente pas de défaut.

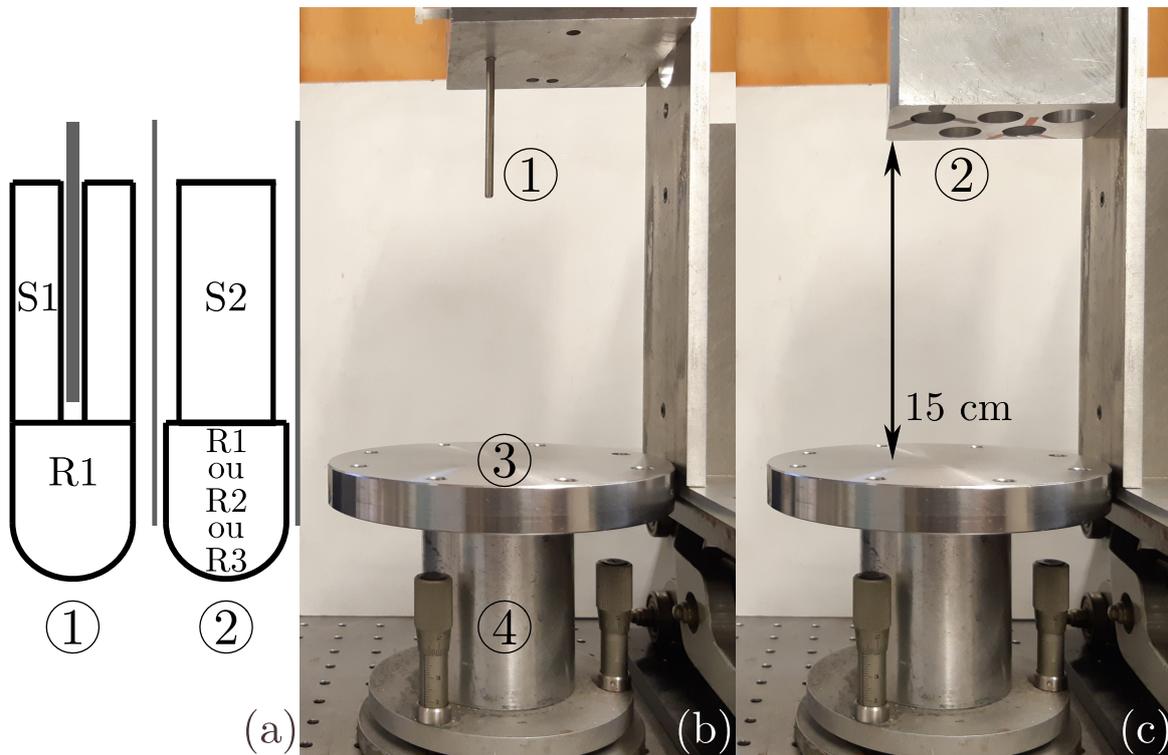


Figure 2.2: (a) Schéma des deux dispositifs expérimentaux. (b) Image du dispositif expérimental ①. (c) Image du dispositif expérimental ②.

Le premier dispositif expérimental, noté ① sur la figure 2.2, concerne les projectiles de types R1-S1 : nous allons insérer le projectile dans une tige au niveau du trou prévu à cet effet lorsque nous avons moulé l'hydrogel et usiné la partie rigide en PEEK. Ce trou est légèrement plus grand que le diamètre de la tige pour laisser glisser le projectile. Le deuxième dispositif expérimental, noté ② sur la figure 2.2, concerne les projectiles avec une partie molle S2. Ces projectiles sont insérés dans un tube de diamètre plus grand (20 mm) que le diamètre de la partie molle (18 mm) et il y a du jeu entre la partie rigide et le tube. C'est donc la partie rigide qui va guider le projectile lors de sa chute à travers le tube.

Nous nous assurons de deux conditions. La première est le respect de l'horizontalité du substrat ③, à l'aide du support trois points noté ④ sur la figure 2.2. La deuxième est d'avoir un impact le plus vertical possible afin de ne travailler que sur un axe et de négliger tous phénomènes de rotation. Nous filmons ces expériences à l'aide d'une caméra rapide que l'on va utiliser à

une vitesse d'acquisition de 2000 ips (images par seconde) afin de visualiser la dynamique de l'impact. Dans quelques situations particulières, une vitesse plus élevée est nécessaire. Nous l'indiquerons le cas échéant.

Pour chaque point de mesure du coefficient de restitution dans ce chapitre, nous avons réalisé dix expériences pour estimer la dispersion des résultats. Cela nous permet donc d'obtenir une valeur moyenne et une incertitude donnée par l'écart-type de la série de mesures.

2.2.3 Tracking du projectile et mesure de vitesses

À partir des films obtenus, nous allons utiliser un algorithme qui va suivre le centre de masse du projectile dans le but de mesurer sa vitesse à l'impact et à la éjection, pour trouver une valeur du coefficient de restitution.

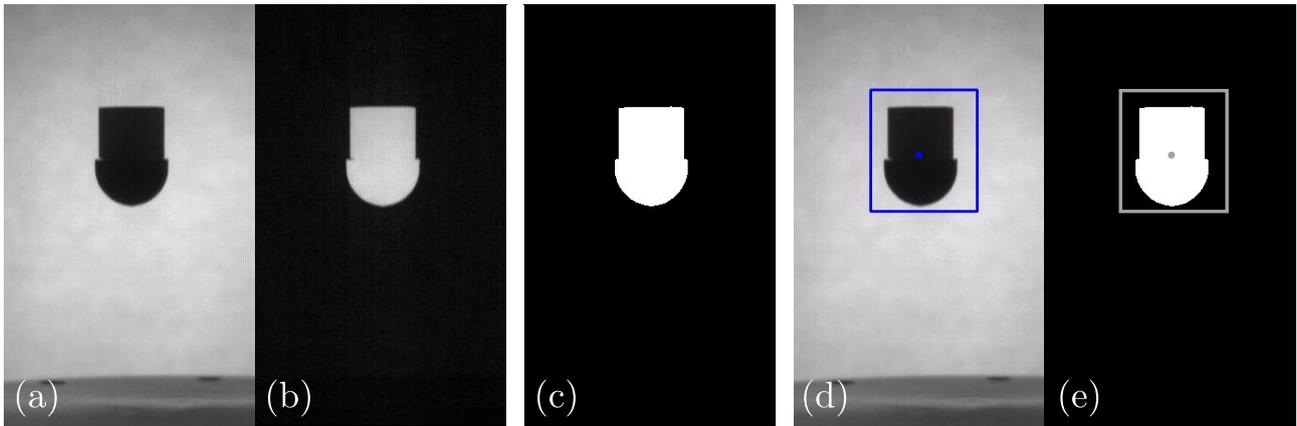


Figure 2.3: Images illustrant le protocole pour le tracking.

Cet algorithme est écrit en langage Python et est basé sur une utilisation du module OpenCv. Nous pouvons observer sur les images de la figure 2.3 les différentes étapes du processus de ce traitement d'image. Dans un premier temps, nous arrêtons le film quand le projectile apparaît en entier sur l'image, nous voyons cela sur l'image (a). Ensuite, nous allons soustraire la première image du film ce qui permet d'enlever le fond. Nous obtenons donc l'image (b). À cette image, nous allons appliquer un seuillage (image (c)) dans le but d'obtenir l'objet en blanc et le fond en noir. Il nous suffit ensuite de sélectionner l'objet sur l'image (d) qui applique la même sélection sur l'image (e). Normalement, OpenCv cherche le centre de masse de cette sélection sur l'image (d), mais dans le cas de notre algorithme nous allons récupérer le centre de masse de l'objet avec le seuil ce qui nous permet d'avoir une précision inférieure au pixel. Pour finir, nous obtenons un fichier contenant la position selon l'axe y (l'axe horizontal) et l'axe z (l'axe vertical) au cours du temps.

Une fois le tracking effectué, nous continuons d'utiliser un algorithme Python pour traiter les résultats obtenus. Nous pouvons donc afficher la position, $z(t)$, du centre de masse de l'objet au cours du temps comme nous pouvons le voir sur le graphique de la figure 2.4(a). Les points bleu clairs représentent $z(t)$. Nous allons ensuite lisser cette courbe à l'aide de l'algorithme de Savitzky-Golay. Cet algorithme effectue un lissage par moyenne glissante sur 5 points. Ce lissage est représenté par la courbe bleu foncé, soit $\bar{z}(t)$. À partir de ces données, nous calculons et lisons la vitesse $v(t)$ du centre de masse du projectile. On représente $\bar{v}(t)$ sur la figure 2.4(b).

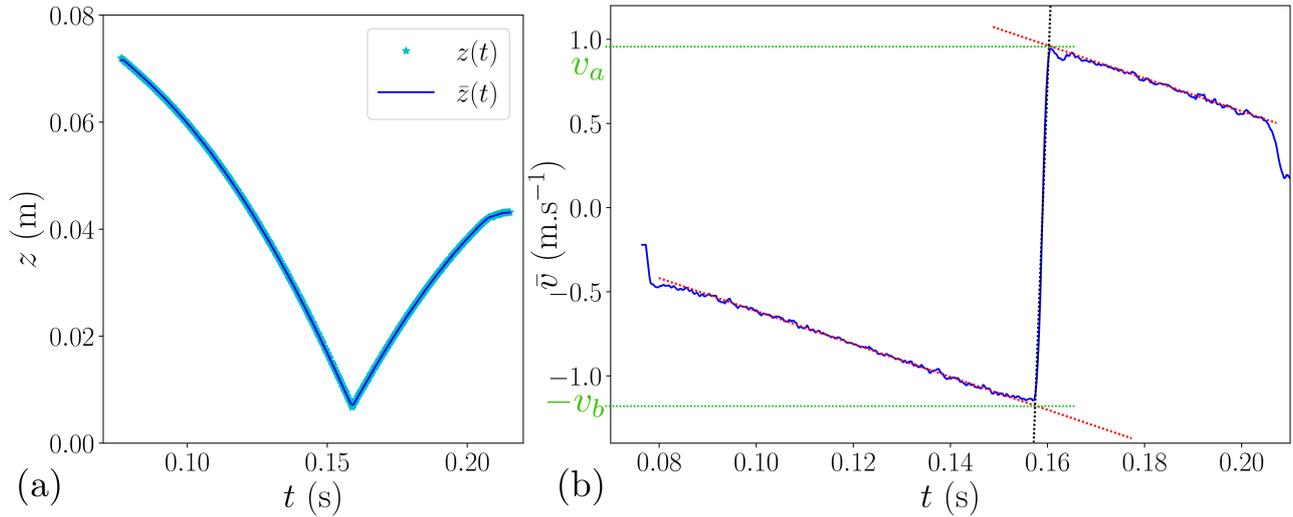


Figure 2.4: (a) Position du centre de masse du projectile au cours du temps. (b) En bleu, vitesse lissée du centre de masse du projectile au cours du temps.

Étant donné que le projectile est seulement soumis à la gravité hors phase d'impact, nous pouvons vérifier la dépendance de la vitesse à celle-ci en interpolant $\bar{v}(t)$ par la formule suivante :

$$\bar{v}(t) = -gt + v_0$$

avec v_0 un paramètre d'ajustement. Les traits pointillés rouges sur la ligne bleue représentent cette interpolation sur chacune des deux parties de la courbe. Il nous faut ensuite déterminer le temps de l'impact et le temps de décollage. Pour déterminer ces deux temps, nous allons réaliser un ajustement linéaire de la vitesse et nous allons alors tracer la ligne pointillée noire qui correspond à la variation de vitesse entre l'impact et le décollage. L'intersection de la ligne pointillée rouge et de la ligne pointillée noire nous donne d'un côté du graphique la vitesse avant l'impact $-v_b$ et de l'autre la vitesse après l'impact v_a . Avec ces deux vitesses, nous sommes capable de mesurer le coefficient de restitution défini par :

$$Cor = \frac{v_a}{v_b} \quad (2.2)$$

avec v_b et v_a , des grandeurs positives.

2.2.4 Diagramme spatio-temporel

À partir de certaines expériences que nous avons filmées, nous allons construire des diagrammes spatio-temporels à l'aide du logiciel ImageJ. Ces expériences ont été réalisées avec les projectiles de types R1-S1 car la dynamique de ce type de projectile est suffisamment lente pour observer les multiples rebonds et la propagation des ondes dans la partie molle. Sur la figure 2.5(b), nous pouvons voir un exemple de diagramme spatio-temporel. Pour construire cette figure, nous avons reporté au cours du temps la ligne de pixels indiquée en pointillé sur la figure 2.5(a). Le diagramme spatio-temporel représente donc l'évolution de cette ligne de pixels (en ordonnée) au cours du temps (en abscisse). Ce type de diagramme est très utilisé pour analyser rapidement la dynamique d'un système, dans notre cas lors de l'impact d'un projectile.

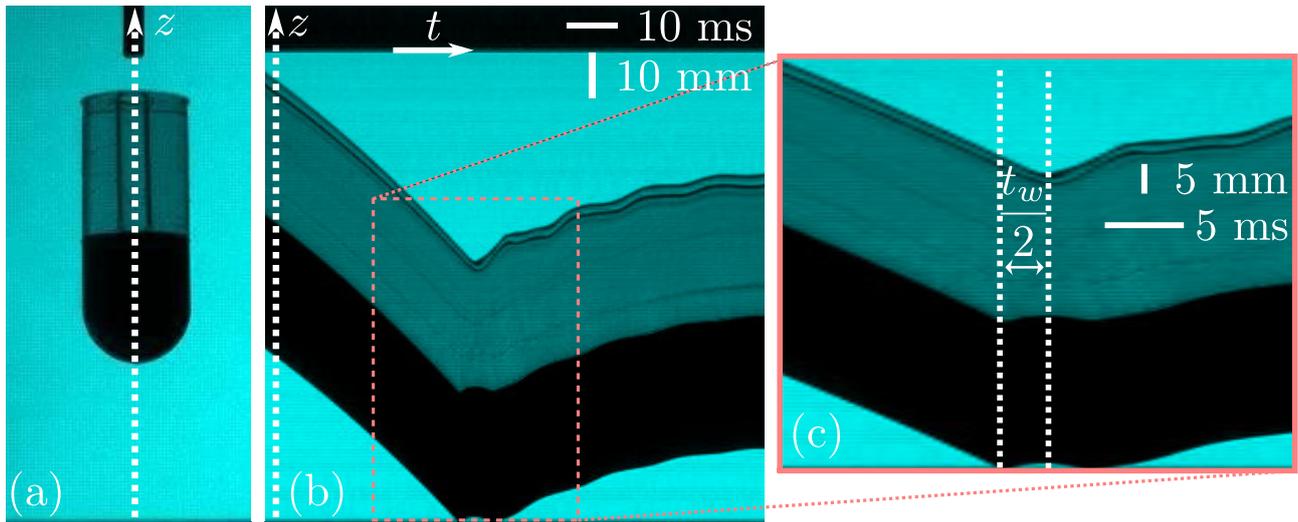


Figure 2.5: (a) et (b) Démonstration de la construction d'un diagramme spatio-temporel. (c) Zoom sur le diagramme spatio-temporel de la figure (b).

2.2.5 Détermination de la vitesse de propagation des ondes dans la partie molle

Sur le diagramme spatio-temporel de la figure 2.5(c), nous pouvons voir (de gauche à droite) une première ligne pointillée qui va indiquer le moment de l'impact entre le projectile R1-S1 et le substrat. La deuxième ligne pointillée va indiquer le moment où la partie supérieure du projectile se déforme, c'est-à-dire l'instant où l'onde de déformation a atteint le sommet de la partie molle S1. Il y a donc un retard, noté $t_w/2$, entre l'instant de l'impact et celui de la perturbation du haut du projectile.

Nous allons ensuite nous intéresser à la variation de ce retard $t_w/2$ avec la hauteur de la partie molle, comme nous pouvons le voir sur le graphique de la figure 2.6. Chaque point de mesure correspond à une proportion de partie molle particulière. Pour chaque point, nous obtenons une valeur moyenne et un écart-type qui correspondent à une série de mesures (dix expériences par proportion comme annoncé précédemment). Nous pouvons observer la tendance suivante : le temps $t_w/2$ croît linéairement avec la longueur de la partie molle.

Nous pouvons interpréter cette variation en termes de propagation d'une onde de déformation. Plus la longueur de la partie molle à parcourir est grande, plus le temps nécessaire à l'onde pour atteindre le haut du projectile sera grand. Étant donné la géométrie cylindrique, l'expression de la vitesse de propagation des ondes dans la partie molle est donnée par :

$$c_s = \frac{2h_s}{t_w} \quad (2.3)$$

avec t_w , le temps nécessaire à l'onde de déformation pour faire l'aller-retour dans la partie molle. En réalisant un ajustement linéaire avec cette formule sur le graphique de la figure 2.6, nous trouvons :

$$c_s = (8.2 \pm 0.2) \text{ m.s}^{-1}. \quad (2.4)$$

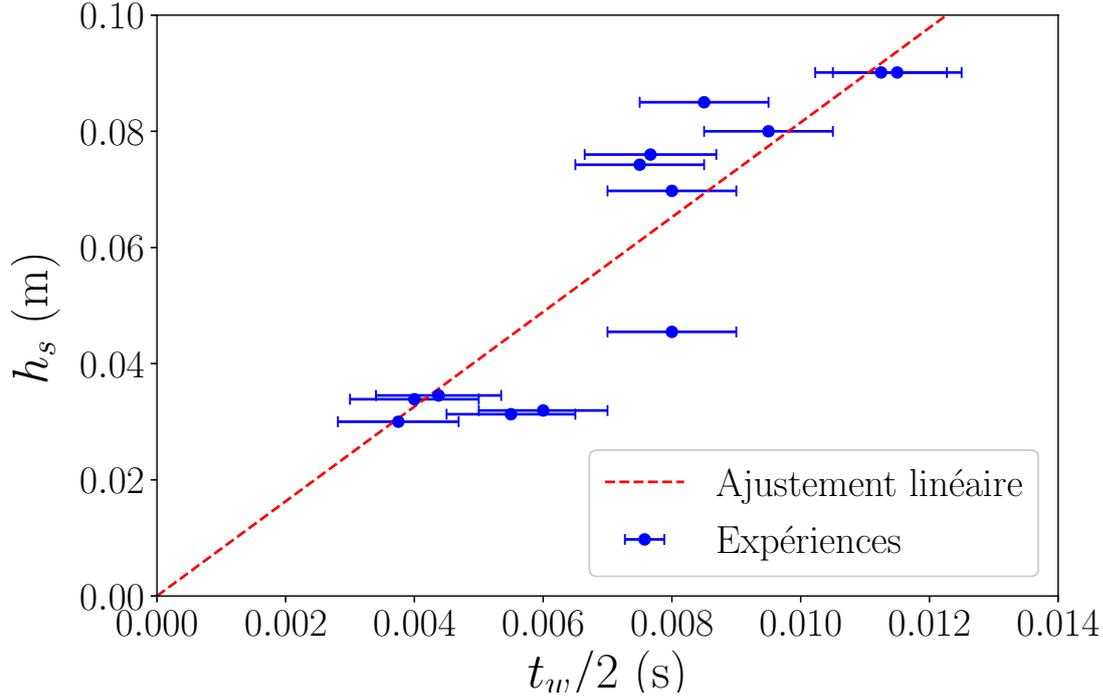


Figure 2.6: Hauteur de la partie molle h_s en fonction de $t_w/2$. L'ajustement linéaire permet de déterminer c_s .

Nous avons aussi mesuré la masse volumique ρ_s de l'hydrogel, celle-ci est de $1030 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Dans le chapitre 1, nous avons déjà vu l'expression de c_s donnée à l'équation 1.21. Nous la rappelons ici :

$$c_s = \sqrt{\frac{E_s}{\rho_s}}. \quad (2.5)$$

Cette expression permet de déterminer une valeur du module d'Young de la partie molle à partir de nos mesures de c_s et ρ_s . Nous trouvons une valeur de $E_s = 70 \text{ kPa}$. L'ordre de grandeur de cette valeur est cohérent avec les valeurs que nous pouvons trouver dans la littérature. Pour finir, nous pouvons préciser que nous avons reproduit un certain nombre de fois le protocole expérimental afin d'obtenir la partie molle S1 pour réaliser nos expériences. Malgré la précision que nous avons apportée à la réalisation de l'hydrogel, nous pouvons nous attendre à de légères variations dans la valeur du module d'Young et donc dans la valeur de c_s . Cela se voit notamment dans la dispersion des points expérimentaux de la figure 2.6 et donc dans l'écart-type de la valeur mesurée de c_s .

Concernant S2, la méthode décrite dans cette section afin de mesurer c_s n'est pas applicable car la vitesse de propagation est plus élevée. La vitesse de propagation c_s sera estimée à partir des valeurs de E_s et ρ_s données par le fabricant. Toutes les valeurs sont récapitulées dans le tableau 2.2.

2.3 Résultats Expérimentaux

2.3.1 Effet de la proportion de la partie molle

Coefficient de restitution

Nous allons dans premier temps nous intéresser au projectile R1-S1. Sur le graphique de la figure 2.7, nous pouvons observer le coefficient de restitution, Cor , en fonction de la proportion de la partie molle, x .

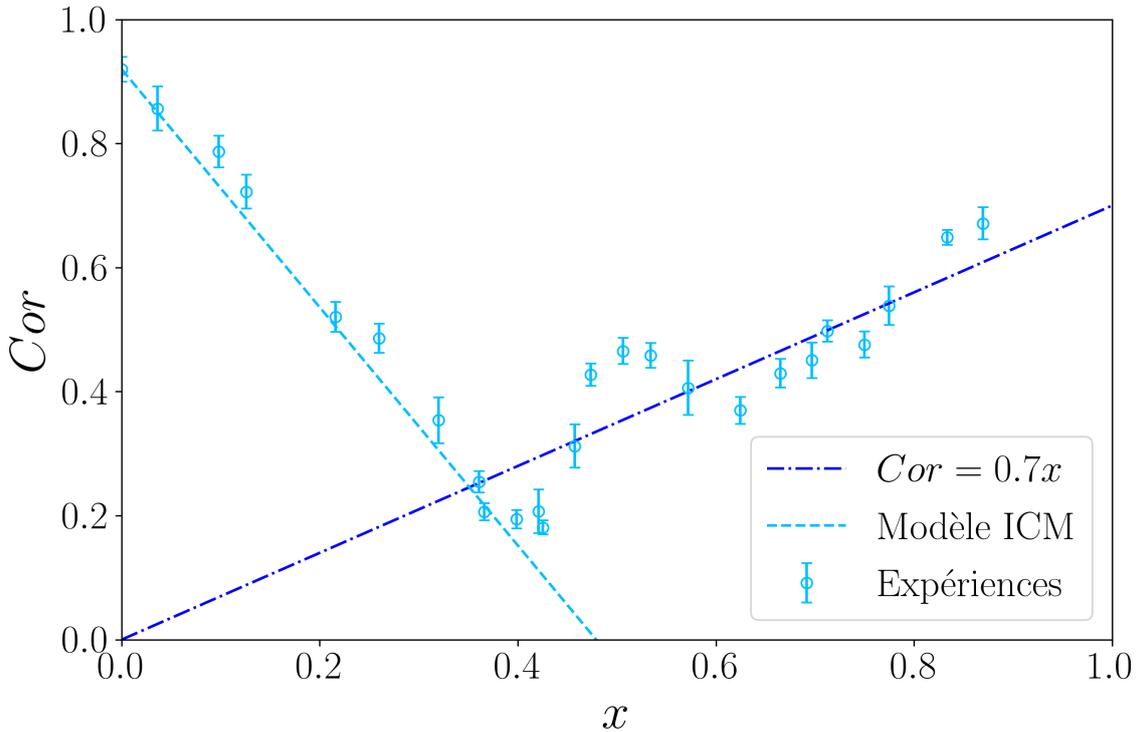


Figure 2.7: Cor en fonction de x pour les projectiles R1-S1. La ligne pointillée bleu clair indique le modèle ICM et la ligne pointillée bleu foncé indique l'asymptote.

Nous pouvons séparer ce graphique en deux zones. Dans la première zone, nous pouvons voir une décroissance linéaire du coefficient de restitution avec l'augmentation de la proportion x . Cette décroissance commence à partir de $Cor(x = 0) = Cor_r = 0.92$ et atteint une valeur minimale de 0.18 pour $x = 0.42$. Nous rappelons que Cor_r est le coefficient de restitution de la partie rigide seule avec le substrat. Au-delà de cette valeur, le coefficient de restitution va augmenter mais cette augmentation présente des oscillations et nous pouvons observer plusieurs extremums locaux.

Une première comparaison peut être faite en appliquant le modèle ICM vu à la section 1.2.3. Ici, R1 correspond à la masse du bas (m_1) et S1 correspond à la masse du haut (m_2). Nous allons alors calculer le coefficient de restitution à l'aide de l'équation 1.11 que nous rappelons ici :

$$Cor_{ICM}(x) = Cor_r - (1 + Cor_r)x. \quad (2.6)$$

Cette formule est représentée par la ligne pointillée bleu clair sur la figure 2.7, nous pouvons remarquer qu'elle est plutôt en bon accord jusqu'à des valeurs de x aux alentours de 0.5. Au delà, les oscillations du Cor semblent atteindre une asymptote oblique (ligne pointillée bleu foncé) atteignant une valeur de 0.7 pour $x = 1$. La cohérence avec l'ICM peut s'expliquer par le

fait que dans ce modèle, nous avons considéré que la partie rigide R1 impacte le substrat puis repart avec une vitesse $Cor_r v_b$, v_b étant la vitesse initiale. Pendant ce temps, la partie molle S1 n'a pas encore réagi et continue sa trajectoire avec une vitesse $-v_b$. Cette hypothèse est valide si nous considérons qu'il existe une grande différence entre le temps de sollicitation de R1 et celui de S1. Cela semble plausible si l'on considère que le temps de contact de R1 est donné par la théorie de Hertz, qui donne un ordre de grandeur de 0.1 ms, et que le temps caractéristique t_w de S1 est donné par la théorie de Saint-Venant et Flamant, qui donne un ordre de grandeur de 1 ms.

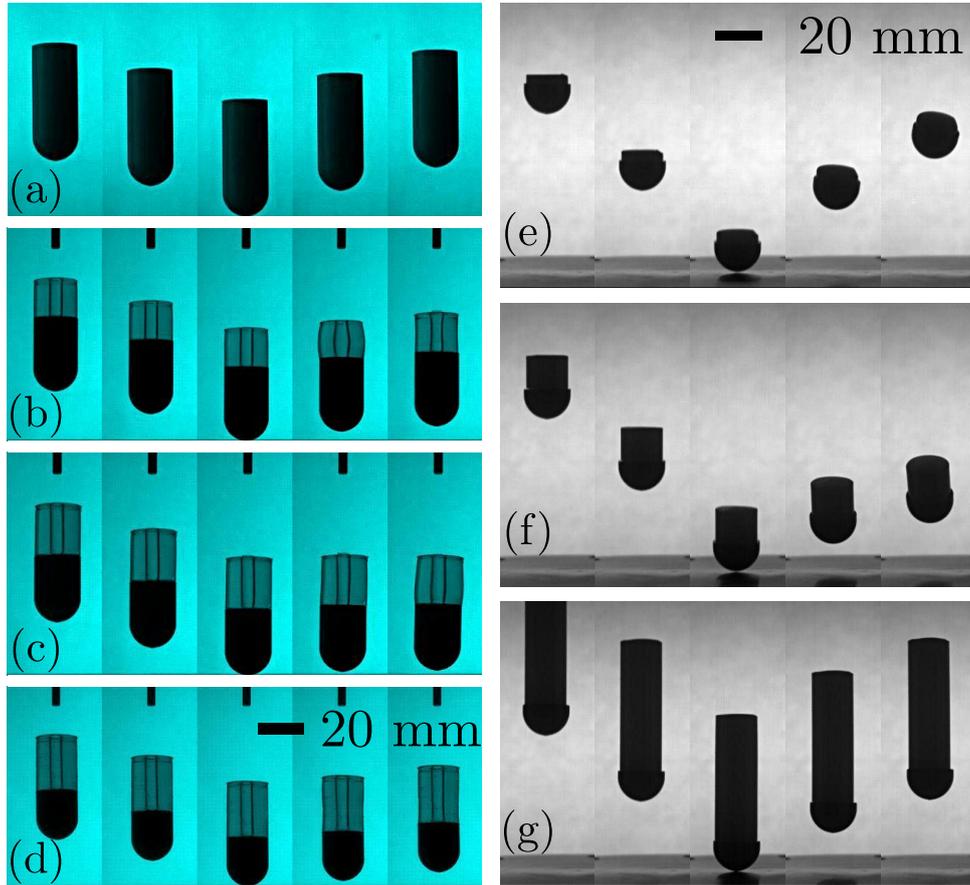


Figure 2.8: Séquences d'images d'un impact. De (a) à (d) : pour un projectile R1-S1 pour quatre proportions différentes ($x = 0, 0.32, 0.42, \text{ et } 0.5$) ($\Delta t = 0.012 \text{ s}$). De (e) à (g) : pour un projectile R1-S2 pour trois proportions différentes ($x = 0.24, 0.53 \text{ et } 0.82$) ($\Delta t = 0.03 \text{ s}$). Nous pouvons retrouver deux films correspondant à ces séquences d'images avec ce [lien](#) (MovieFig3B et MovieFig6B) [D'Angelo et al., 2021].

Sur la figure 2.8, nous pouvons observer une séquence d'images qui montre que la dynamique dépend de manière significative de la proportion de la partie molle x . Sur les films des expériences, nous pouvons remarquer que plus le coefficient de restitution est petit, plus la déformation dans la partie molle est importante. Cela signifie qu'une partie significative de l'énergie cinétique initiale est transférée dans les modes de déformations de la partie molle.

Nombre de rebonds

Dans cette section, nous allons mettre en évidence la présence de multiples rebonds lors de l'impact de nos projectiles bicomposites. Ici, il est important de préciser que ces rebonds ne sont pas liés à la gravité.

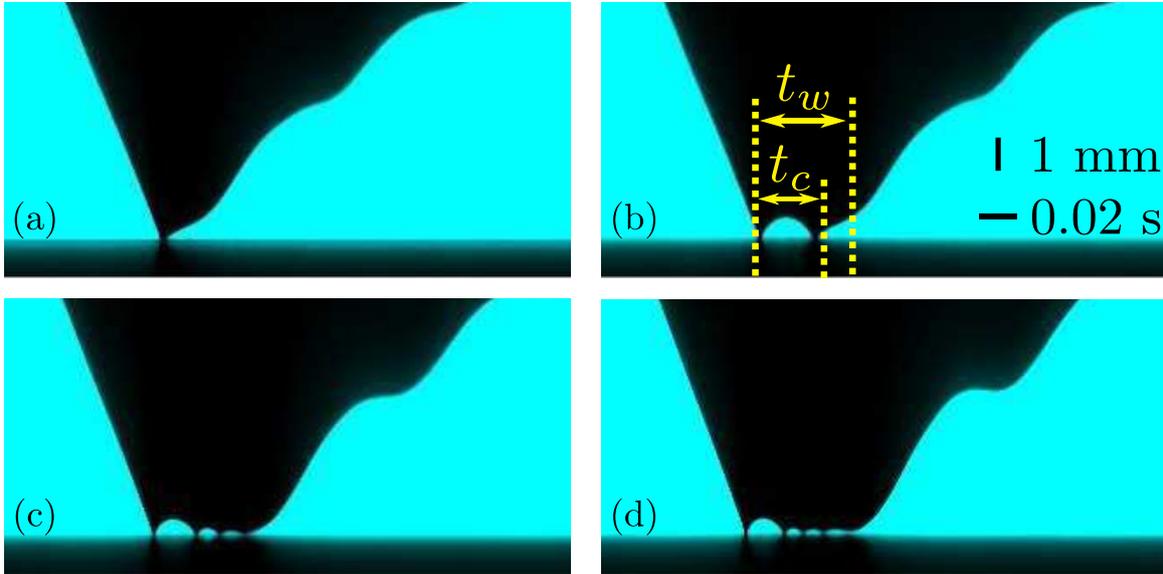


Figure 2.9: Diagrammes spatio-temporels provenant de films à 8000 ips zoomés sur la zone de contact pour quatre projectiles R1-S1 avec différentes proportions et des multiples rebonds. (a) $x = 0.1$, 1 rebond. (b) $x = 0.48$, 2 rebonds. (c) $x = 0.58$, 4 rebonds. (d) $x = 0.62$, 4 rebonds. Nous pouvons retrouver un film correspondant à ces diagrammes spatio-temporels avec ce [lien](#) (MovieFig5A) [D'Angelo et al., 2021].

Sur la figure 2.9, nous pouvons observer quatre diagrammes spatio-temporels correspondant à quatre proportions de partie molle différentes pour les projectiles de types R1-S1. Ces diagrammes sont obtenus à partir de films pour lesquels nous avons zoomé sur la zone de contact entre la partie rigide et le substrat avec une vitesse d'acquisition de 8000 ips. La figure (a) correspond à $x = 0.1$, nous observons 1 seul rebond. La figure (b) correspond à $x = 0.48$ et nous observons 2 rebonds. Enfin sur les figures (c) et (d), respectivement pour $x = 0.58$ et $x = 0.62$, nous pouvons voir 4 rebonds. Ces diagrammes spatio-temporels nous montrent donc que le nombre de rebonds augmente avec la proportion de partie molle.

Nous pouvons alors définir t_c comme étant le temps de contact global, c'est-à-dire le temps entre le début de l'impact et le dernier contact entre la partie rigide et le substrat. Nous pouvons observer que ce temps augmente en fonction de x . Nous pouvons aussi voir, lorsqu'il y a plusieurs rebonds, que ce temps est bien plus grand que le temps d'un seul contact entre la partie rigide et le substrat puisque nous avons une alternance entre des temps de contact courts et des périodes plus longues où le projectile est en l'air. Nous pouvons aussi noter que pour chaque expérience, l'amplitude du rebond entre deux contacts successifs diminue avec le nombre de contacts. Enfin, après le dernier contact, plus précisément à partir de $t = t_w$ lorsque l'onde de déformation a eu le temps de faire l'aller-retour dans la partie molle, la position de la partie rigide oscille dans le temps car le système composé du projectile bicomposite (partie rigide et partie molle) est isolé alors que la partie molle se déforme de façon oscillante.

Pour conclure sur les multiples rebonds, nous présentons la figure 2.10 sur laquelle nous observons quantitativement le nombre de rebonds en fonction de x . Nous observons un com-

portement en palier qui dépend de la proportion x . On peut aussi noter qu'il est difficile de compter le nombre de rebonds : comme nous pouvons le voir sur la figure 2.9(d), il est difficile de déterminer si il y a 4 ou 5 rebonds.

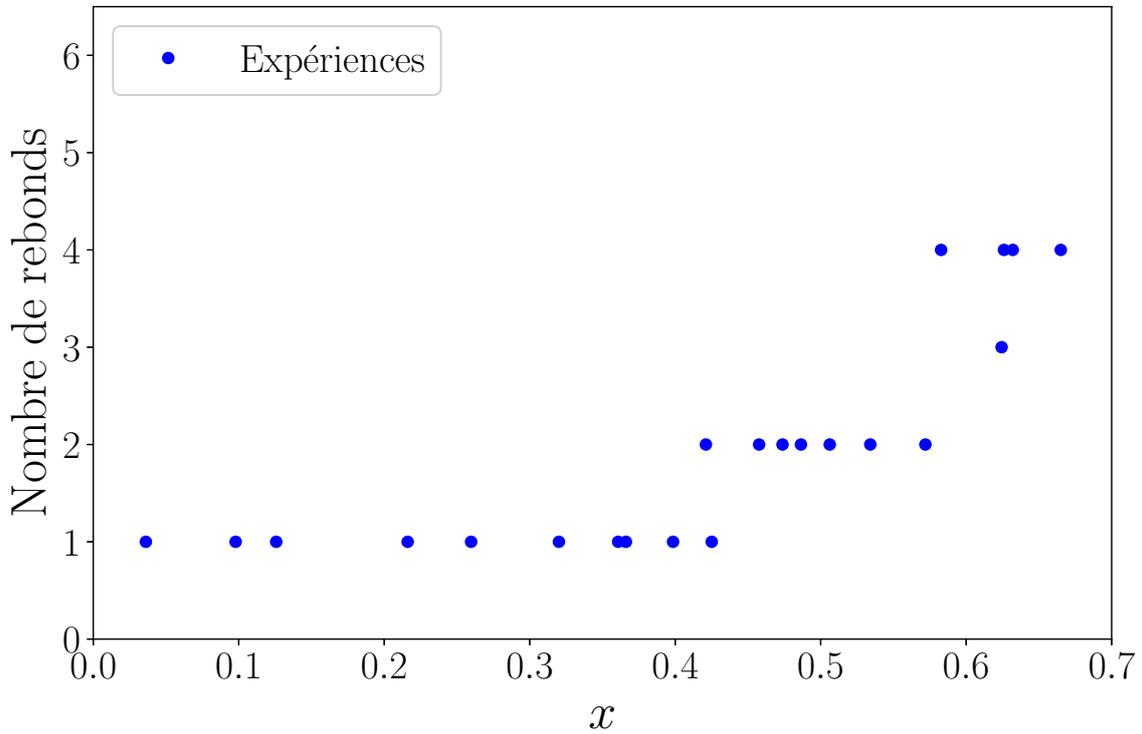


Figure 2.10: Nombre de rebonds en fonction x pour les projectiles R1-S1.

2.3.2 Effet de la partie molle

Dans cette section, nous allons garder la partie rigide mais changer la partie molle afin de travailler avec les projectiles de type R1-S2. Sur la figure 2.8, nous pouvons observer des séquences d'images pour différentes proportions du projectile R1-S2. Sur la figure 2.11, nous allons observer le coefficient de restitution en fonction de x pour R1-S2, tout en superposant les résultats vus précédemment avec R1-S1.

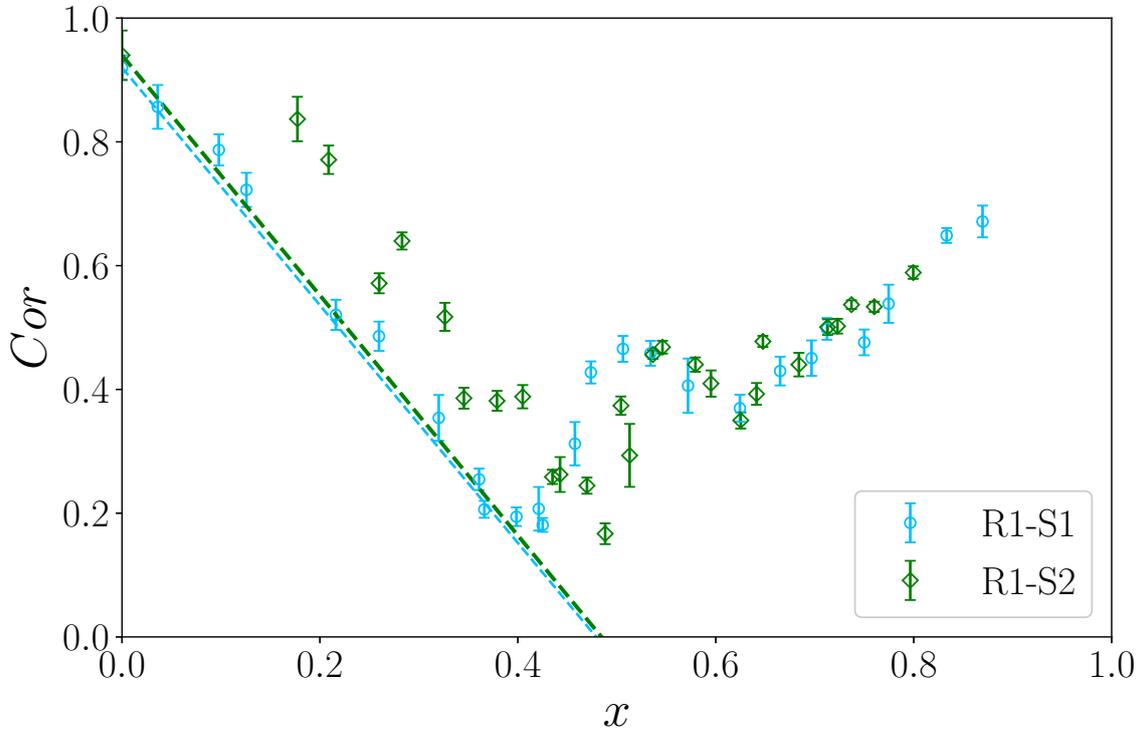


Figure 2.11: Cor en fonction de x . En bleu, pour R1-S1. En vert, pour R1-S2. Les lignes pointillées indiquent le modèle ICM de chaque projectile.

Nous pouvons là encore séparer le graphique en deux zones. Dans la première zone, pour $x < 0.5$, nous observons une décroissance linéaire du Cor . On peut noter que le Cor est supérieur à celui de R1-S1. On remarque aussi qu'il est supérieur aux valeurs obtenues avec le modèle ICM. On utilise toujours la formule 2.6 mais cette fois-ci avec $Cor_r = 0.94$. Concernant la deuxième zone, pour $x > 0.5$, nous retrouvons le même comportement c'est-à-dire une augmentation avec présence d'oscillations guidée par une asymptote oblique.

Nous pouvons remarquer que dans le cas de l'utilisation de S2 comme partie molle, nous n'avons pas pu observer de multiples rebonds. En effet, le module d'Young de S2 étant 17 fois plus grand que celui de S1, la déformation est trop petite pour être observée avec notre méthode optique, mais les multiples rebonds sont probablement présents au vu des résultats obtenus avec S1 et des résultats obtenus par le modèle que nous allons présenter dans la suite de ce chapitre.

2.3.3 Effet de la partie rigide

Dans cette section, nous allons travailler avec la partie molle S2 et faire varier la partie rigide : R1, R2 et R3. Nous avons déjà vu les propriétés de ces différentes parties dans le tableau 2.1. Il est utile de rappeler que le paramètre dont la variation est la plus importante

par rapport aux phénomènes étudiés est le coefficient de restitution de la partie rigide prise séparément (0.94 pour R1, 0.78 pour R2 et 0.38 pour R3).

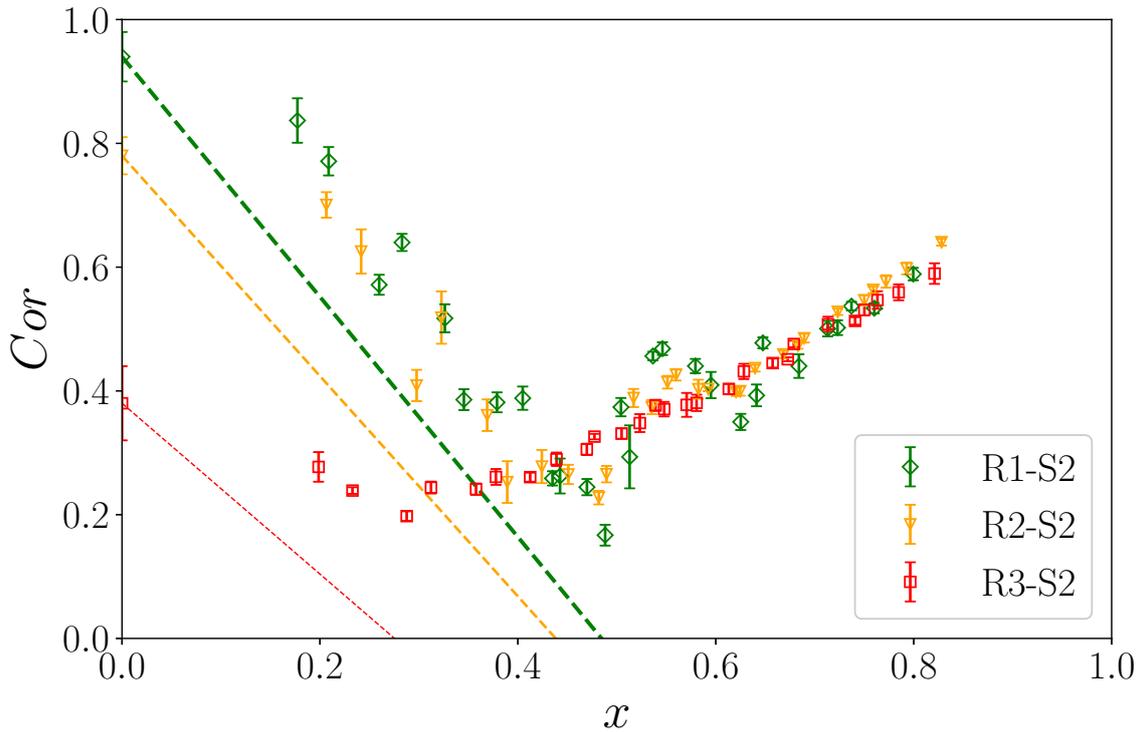


Figure 2.12: Cor en fonction de x . En vert, pour R1-S2. En jaune, pour R2-S2. En rouge, pour R3-S2. Les lignes pointillées indiquent le modèle ICM de chaque projectile.

Nous observons le coefficient de restitution en fonction de la proportion de la partie molle sur le graphique de la figure 2.12. Lorsque $x < 0.4$, nous pouvons encore observer un comportement en décroissance linéaire avec l'augmentation de x . Néanmoins, on peut noter que le coefficient de restitution du projectile bicomposite diminue avec la diminution du coefficient de restitution de la partie rigide. Dans les trois cas, on voit que les résultats expérimentaux ne sont plus en accord avec leurs modèles ICM respectifs. Dans la zone pour laquelle $0.4 < x < 0.6 - 0.7$, on peut remarquer que le nombre et l'amplitude des oscillations vont aussi diminuer à mesure que le Cor_r de la partie rigide diminue. Pour finir, on peut noter que dans les trois cas la même asymptote est retrouvée et que le début de celle-ci dépend de la partie rigide. Elle débute par exemple à $x = 0.7$ pour R1 et $x = 0.4$ pour R3.

2.4 Modélisation

Dans cette section nous allons présenter une modélisation de nos impacts de projectiles élastiques bicomposites. Ce modèle prend en compte à la fois la force de contact entre la partie rigide et le substrat, et la force élastique de la partie molle agissant sur la partie rigide. Le modèle doit aussi décrire le phénomène de multiples rebonds.

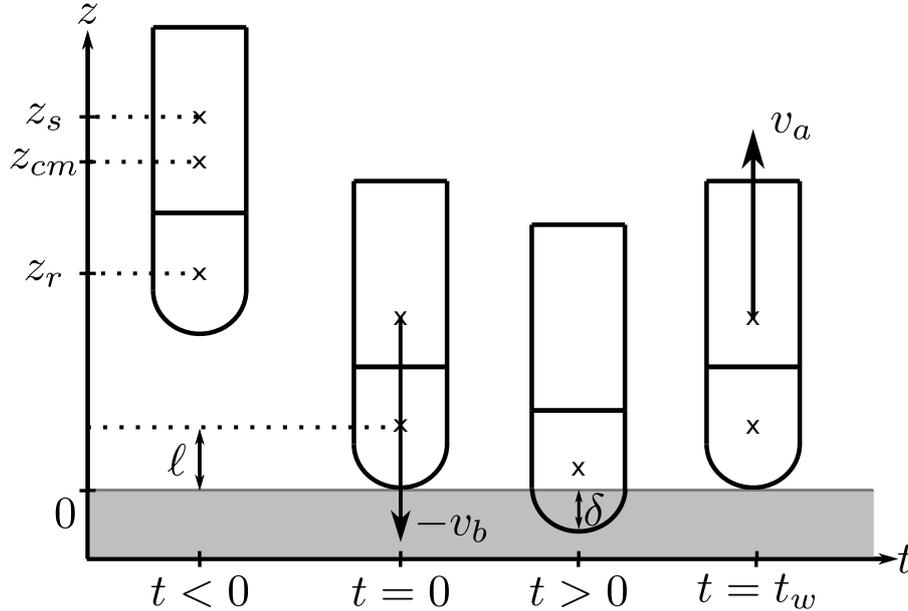


Figure 2.13: Schéma d'un impact et notations utilisées pour le modèle.

2.4.1 Force de contact du substrat sur la partie rigide

Pour modéliser le contact entre la partie rigide et le substrat, il faut considérer la théorie de Hertz, ou plutôt une extension qui prend en compte une contribution dissipative. En effet, tous les matériaux utilisés pour la partie rigide ont des coefficients de restitution inférieurs à 1 (voir tableau 2.1). Ici nous proposons d'utiliser le modèle viscoélastique de Kuwabara et Kono que nous avons déjà présenté dans la section 1.3.3 du chapitre 1 [Kuwabara and Kono, 1987]. Soit z_r , \dot{z}_r et \ddot{z}_r , respectivement la position, la vitesse et l'accélération du centre de masse de la partie rigide. Si l'on considère un projectile constitué uniquement de la partie rigide, seules les forces de contact entrent en jeu dans le principe fondamental de la dynamique :

$$m_r \ddot{z}_r = F_e + F_v \quad (2.7)$$

avec F_e la composante élastique de la force de contact et F_v la composante dissipative de celle-ci. Selon Kuwabara et Kono ces deux forces s'écrivent :

$$F_e \propto \delta^{3/2} \quad F_v \propto \delta^{1/2} \dot{\delta} \quad (2.8)$$

avec δ la distance d'interpénétration entre la partie rigide et le substrat définie par :

$$\delta = \ell - z_r \quad (2.9)$$

où ℓ est la distance initiale entre le centre de masse de la partie rigide et l'extrémité de la partie hémisphérique de celle-ci. Nous pouvons donc réécrire l'équation de la dynamique sous la forme suivante :

$$m_r \ddot{z}_r + \frac{5}{2} k' \sqrt{\ell - z_r} \dot{z}_r + \frac{5}{4} k \sqrt{\ell - z_r} (z_r - \ell) = 0 \quad (2.10)$$

avec k et k' deux paramètres décrivant respectivement la partie élastique et la partie dissipative de la force de contact. Les conditions initiales sont $z_r(0) = \ell$ et $\dot{z}_r(0) = -v_b$.

Ici, afin de faciliter la résolution nous allons adimensionner cette équation en utilisant les variables suivantes :

$$Z = (\ell - z_r)/\delta_{max} \text{ et } T = tv_b/\delta_{max} \quad (2.11)$$

avec

$$\delta_{max} = (v_b^2 m_r / k)^{2/5} \quad (2.12)$$

la distance de pénétration maximale calculée en absence de dissipation. L'équation se réécrit alors sous la forme suivante :

$$\ddot{Z} + \gamma Z^{1/2} \dot{Z} + \frac{5}{4} Z^{3/2} = 0 \quad (2.13)$$

avec

$$\gamma = \frac{5k' \delta_{max}^{3/2}}{2m_r v_b} = \frac{5k'}{2} \left(\frac{v_b}{m_r^2 k^3} \right)^{1/5} \quad (2.14)$$

un paramètre qui permet de quantifier la composante dissipative. Les conditions initiales sont $Z(0) = 0$ et $\dot{Z}(0) = 1$. Toutes les équations ont été écrites, il ne reste plus qu'à les exploiter.

Nous pouvons voir que l'équation 2.13 ne dépend que du paramètre γ . De plus, il n'y a pas de paramètre dans les conditions initiales. Nous allons alors résoudre numériquement cette équation afin de déterminer le temps de contact et la vitesse d'éjection du projectile. Cela nous permet de tracer les courbes théoriques du coefficient de restitution et du temps de contact adimensionné en fonction de γ , comme nous pouvons le voir respectivement sur les figures 2.14(a) et 2.14(b). Expérimentalement, nous avons réalisé deux séries d'expériences avec les parties rigides seules, ce qui nous a permis de mesurer deux quantités : Cor_r et $t_{c,r}$. Nous connaissons aussi la vitesse d'impact v_b . Ces trois quantités vont nous permettre de remonter à la valeur de k et k' .

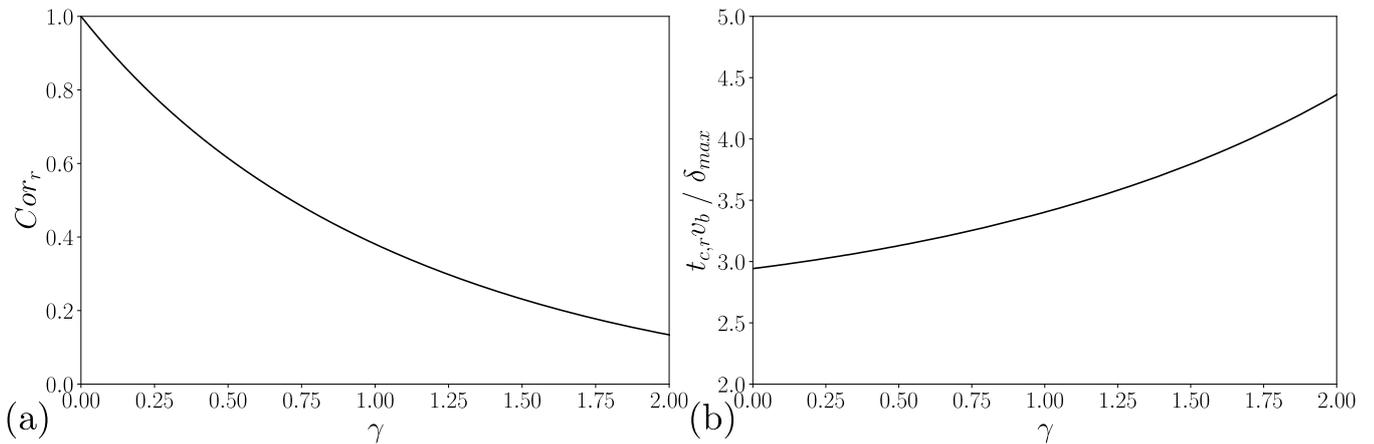


Figure 2.14: (a) Cor en fonction de γ . (b) $t_{c,r}v_b/\delta_{max}$ en fonction de γ .

À partir de la valeur de Cor_r , nous trouvons une valeur de γ grâce à la figure 2.14(a). Ensuite, connaissant γ , $t_{c,r}$ et v_b , nous déterminons la valeur de δ_{max} grâce à la figure 2.14(b). À partir de là, il n'y a plus qu'à utiliser les équations 2.12 et 2.14 pour déterminer k et k' . Ces valeurs sont indiquées pour R1, R2 et R3 dans le tableau 2.3.

Nom	Matériau	Cor_r	$t_{c,r}$ (ms)	k_H (N.m ^{-3/2})	k (N.m ^{-3/2})	k' (N.m ^{-3/2.s})
R1	Peek	0.94 ± 0.04	0.09 ± 0.02	$4.8 \cdot 10^8$	$(6.1 \pm 3.6) \cdot 10^8$	$(5 \pm 5) \cdot 10^2$
R2	Pa	0.78 ± 0.03	0.12 ± 0.02	$3.6 \cdot 10^8$	$(2.9 \pm 1.4) \cdot 10^8$	$(11 \pm 5) \cdot 10^2$
R3	Pu30	0.38 ± 0.06	0.43 ± 0.07	$(1.2 - 1.5) \cdot 10^6$	$(1.6 \pm 0.9) \cdot 10^7$	$(8 \pm 4) \cdot 10^2$

Table 2.3: Caractéristique de la partie rigide pour le modèle.

Il est maintenant intéressant de comparer les résultats obtenus avec la théorie de Hertz. Le premier point notable est le suivant : lorsque $\gamma = 0$, on retrouve bien $Cor_r = 1$ et $t_{c,r} = 2.9\delta_{max}/v_b$ (équation 1.32). Le deuxième point est que les valeurs trouvées de k sont en bon accord avec la valeur de $k_H = \frac{16}{15} \frac{E}{1-\nu^2} \sqrt{d/2}$ que l'on obtient avec la théorie de Hertz (équation 1.29). Le seul bémol ici concerne R3, car il y a un facteur 10 entre k et k_H ce qui met en évidence que le modèle de Kuwabara et Kono n'est pas le plus adéquat pour décrire ce matériau même si, on le verra par la suite, il reste relativement correct pour retrouver les résultats expérimentaux.

2.4.2 Force élastique de la partie molle sur la partie rigide

Nous allons modéliser la partie molle par un matériau continu 1D dans lequel se propage une onde de déformation élastique à une vitesse c_s . Cette onde a pour origine la partie rigide qui vient impacter la partie molle et donc la déformer. La force de contact appliquée par la partie molle sur la partie rigide est reliée à la déformation locale de la partie molle à proximité de l'interface entre les deux parties. Cette déformation vaut $\varepsilon_s = -(v_b + \dot{z}_r)/c_s$, sachant que $v_b + \dot{z}_r$ est la vitesse de l'interface dans le référentiel du centre de masse de la partie molle. Nous prenons alors pour expression de la force élastique :

$$F_{soft} = -\alpha \varepsilon_s E_s S_s \quad (2.15)$$

$$= -\alpha S_s \rho_s c_s (v_b + \dot{z}_r) \quad (2.16)$$

avec S_s la surface de la partie molle et α un facteur géométrique qui permet d'ajuster le contact entre la partie rigide et la partie molle. Cette force est valable tant que l'onde élastique n'a pas fait l'aller-retour dans la partie molle c'est-à-dire tant que $t < t_w = 2h_s/c_s$.

2.4.3 Bilan des forces pour le projectile bicomposite : trajectoire de la partie rigide

Après avoir présenté les deux forces qui s'appliquent sur la partie rigide uniquement, nous allons nous intéresser à la dynamique du centre de masse de la partie rigide. Celle-ci est dirigée par la force de contact qui exerce une force vers le haut et par la force élastique exercée par la partie molle qui pousse le rigide vers le bas. Nous avons donc possiblement un décollage suivi de multiples rebonds si la force élastique est suffisamment forte pour renvoyer la partie rigide vers le bas. Tout cela se passe bien sûr tant que l'onde de déformation n'est pas revenue au niveau de la zone de contact entre la partie rigide et la partie molle, c'est-à-dire tant que $t < t_w$. Nous allons alors avoir deux équations qui régissent le mouvement : une si la partie rigide est en contact avec le substrat et un autre si elle ne l'est pas.

Soit F_1 , la force de contact entre la partie rigide et le substrat :

$$F_1 = -\frac{5}{2} k' \sqrt{\ell - z_r} \dot{z}_r - \frac{5}{4} k \sqrt{\ell - z_r} (z_r - \ell). \quad (2.17)$$

Soit F_2 , la force élastique entre la partie molle et la partie rigide :

$$F_2 = -\alpha S_s \rho_s c_s (v_b + \dot{z}_r). \quad (2.18)$$

Cas 1 : La partie rigide est en contact avec le substrat L'équation du mouvement lorsque la partie rigide est en contact avec le substrat prend en considération ces deux forces et est donnée par :

$$\ddot{z}_r + \left(\frac{5}{2} \frac{k'}{m_r} \sqrt{\ell - z_r} + \frac{1}{\tau} \right) \dot{z}_r + \frac{5}{4} \frac{k}{m_r} \sqrt{\ell - z_r} (z_r - \ell) = -\frac{v_b}{\tau} \quad (2.19)$$

avec

$$\tau = \frac{m_r}{\alpha S_s \rho_s c_s}. \quad (2.20)$$

Cette équation est celle d'un oscillateur amorti (équation ordinaire du second ordre avec termes non linéaires) que nous allons résoudre numériquement afin de trouver $z_r(t)$.

Cas 2 : La partie rigide n'est pas en contact avec le substrat Si le projectile n'est plus en contact, la partie rigide ne ressent alors que F_2 et l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{z}_r + \frac{\dot{z}_r}{\tau} = -\frac{v_b}{\tau}. \quad (2.21)$$

On peut noter que cette équation ordinaire linéaire du second ordre est identique à celle décrivant la chute d'un objet dans un fluide visqueux et a une expression analytique de $z_r(t)$. Avec les conditions initiales $z_r(t_{a,i}) = \ell$ et $\dot{z}_r(t_{a,i}) = v_{a,i}$, nous obtenons l'expression analytique suivante :

$$z_r(t) = \ell + \tau(v_b + v_{a,i}) (1 - e^{-(t-t_{a,i})/\tau}) - v_b (t - t_{a,i}). \quad (2.22)$$

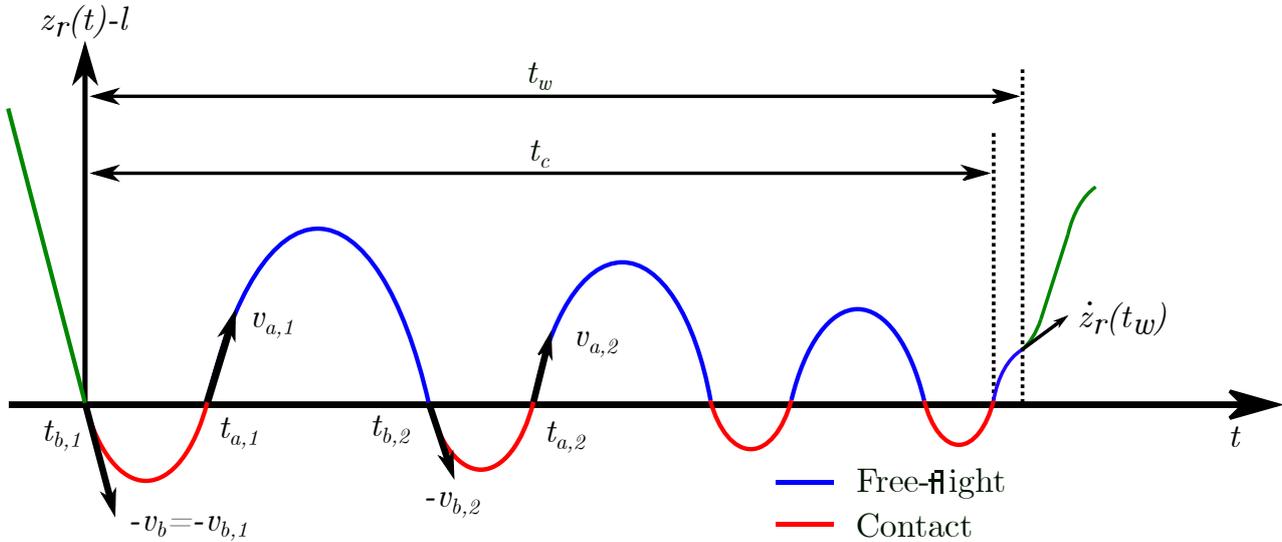


Figure 2.15: Schéma de la trajectoire du centre de masse de la partie rigide.

Le schéma de la trajectoire sur la figure 2.15 permet de poser les notations et d'aborder quelques explications. Soit i , l'indice qui nous permet de repérer le i -ième contact. Celui-ci commence au temps $t_{b,i}$ avec une vitesse d'impact de la partie rigide que l'on note $-v_{b,i}$ et se termine au temps $t_{a,i}$ avec une vitesse d'éjection de la partie rigide que l'on note $v_{a,i}$. Ce contact est régi par l'équation 2.19. Il existe donc possiblement un rebond entre le i -ième et le $(i + 1)$ -ième contact qui commence à $t_{a,i}$ avec une vitesse $v_{a,i}$ et se termine par un nouvel impact au temps $t_{b,i+1}$ avec une vitesse $-v_{b,i+1}$. Ce rebond est régi par l'équation 2.21. On peut finalement relever qu'avec ces notations, nous avons $v_{b,1} = v_b$.

Sur le graphique de la figure 2.16(a), nous observons $z_r(t) - \ell$ en fonction du temps pour un

jeu de paramètres donné. Nous pouvons observer la présence de cinq rebonds dont le dernier est de très faible amplitude et est difficile à voir. Nous voyons aussi la vitesse $\dot{z}_r(t)$ sur le graphique de la figure 2.16(b). Ces résultats sont obtenus de la façon suivante : en rouge, nous avons la résolution numérique de l'équation 2.19 c'est-à-dire la phase de contact, et en bleu, nous utilisons l'équation 2.22 c'est-à-dire la phase de vol. Ces résultats sont obtenus avec les paramètres suivants : $v_b = 1.59 \text{ m.s}^{-1}$, $m_r = 4.13 \text{ g}$, $k = 6.1 \times 10^8 \text{ N.m}^{-3/2}$, $k' = 5 \times 10^2 \text{ N.m}^{-3/2}\text{s}$, et $\tau = 0.51 \text{ ms}$. Ces paramètres correspondent au projectile R1-S2. Nous pouvons remarquer que plus le temps augmente, plus l'amplitude du mouvement (que ce soit la hauteur des rebonds ou la distance de pénétration) diminue. Il existe donc des phénomènes qui diminuent l'énergie cinétique de la partie rigide. Le premier est un transfert de l'énergie cinétique aux modes de vibrations de la partie molle. Le deuxième est simplement lié à la contribution dissipative du contact entre le substrat et la partie rigide.

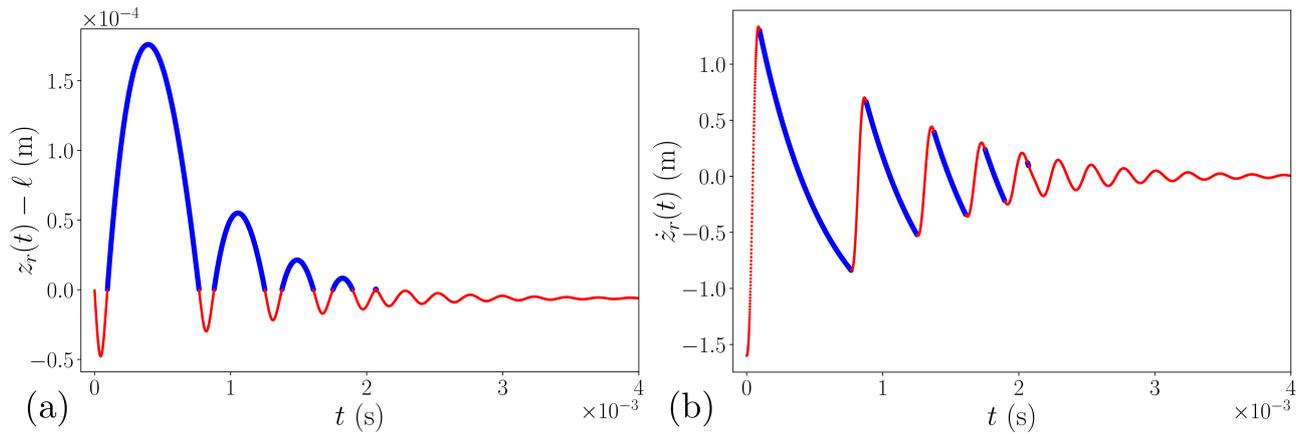


Figure 2.16: (a) $z_r(t) - \ell$ et (b) $\dot{z}_r(t)$ en fonction du temps. Le rouge indique les phases de contact et le bleu indique les phases de vol.

Toujours grâce à la figure 2.16, nous pouvons remarquer que lorsque $z_r = \ell$ il y a une transition entre la phase de contact et la phase de rebond. On peut aussi voir qu'il y a continuité de la vitesse \dot{z}_r . Comme nous l'avons déjà dit, nous faisons l'hypothèse que le modèle est valable pour $t < t_w$. En effet, dans le cas où $t > t_w$ alors la partie molle ne poussera plus la partie rigide vers le bas mais la tirera vers le haut, ce qui provoquera le décollage du projectile. Nous calculerons donc le coefficient de restitution à $t = t_w$. Deux cas de figure se présentent alors à nous. Si la partie rigide n'est plus en contact avec le substrat alors le projectile dans sa totalité n'échangera plus de quantité de mouvement avec le substrat. Ce phénomène peut se voir à la fois sur le schéma de la figure 2.13 et sur les diagrammes spatio-temporels de la figure 2.9. Sur ces figures, nous pouvons voir un changement de courbure pour $z_r(t)$ qui passe de négatif à positif. Si la partie rigide est encore en contact avec le substrat alors cela signifie que $t_w < t_c$ et nous négligeons alors le travail des forces entre t_w et t_c . Cela permet une continuité dans la résolution et ne pose pas de problème lorsque $t_c < t_w$.

Cette dernière hypothèse nous amène à faire attention à ce qui se passe lors du premier contact, lorsque $t_w < t_{c,1}$ avec $t_{c,1} = t_{a,1} - t_{b,1}$, ou encore de manière équivalente $h_s < c_s t_{c,1}/2$. Cela peut en particulier se produire lorsque la partie rigide domine la dynamique du système. Le modèle devrait donc être moins précis lorsque $x \lesssim 0.5$ et $t_w < t_{c,1}$ et nous nous attendons à ce que celui-ci ne marche pas dans le cas limite où $x \rightarrow 0$.

2.4.4 Expression du coefficient de restitution

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés aux équations régissant la partie rigide. Néanmoins, pour calculer le coefficient de restitution nous allons avoir besoin de la vitesse du centre de masse de la partie molle. Étant donné que nous avons vu la force de la partie molle qui agit sur la partie rigide, nous en déduisons la force de la partie rigide qui agit sur la partie molle par le principe d'action-réaction. Nous obtenons alors l'équation du mouvement de la partie molle :

$$\ddot{z}_s = -\frac{F_2(t)}{m_s} = \frac{\alpha S_s \rho_s c_s}{m_s} (v_b + \dot{z}_r(t)) = \frac{1-x}{\tau(x)x} (v_b + \dot{z}_r(t)) \quad (2.23)$$

avec ici et dans ce qui suit, z_s , \dot{z}_s et \ddot{z}_s , respectivement la position, la vitesse et l'accélération du centre de masse de la partie molle. Avec cette équation, on trouve une expression de la vitesse de la partie molle à $t = t_w$, c'est-à-dire à l'éjection :

$$\dot{z}_s(t_w) = v_b(2\alpha - 1) + \frac{(1-x)}{x} \frac{(z_r(t_w) - l)}{\tau(x)}. \quad (2.24)$$

Finalement, nous connaissons la vitesse de la partie molle et de la partie rigide, à l'éjection. Nous pouvons alors calculer le coefficient de restitution, celui-ci est donné par l'expression suivante :

$$Cor(x) = (1-x) \frac{\dot{z}_r(t_w(x))}{v_b} + x \frac{\dot{z}_s(t_w(x))}{v_b} \quad (2.25)$$

$$= (1-x) \frac{\dot{z}_r(t_w(x))}{v_b} + (1-x) \frac{z_r(t_w(x)) - l}{v_b \tau(x)} + x(2\alpha - 1). \quad (2.26)$$

Ici, t_w et τ sont a priori des fonctions de x .

2.4.5 Expression de τ et de t_w

Dans un premier temps, nous rappelons les expressions de τ (équation 2.20) et de t_w (équation 2.3) :

$$\tau = \frac{m_r}{\alpha S_s \rho_s c_s} ; t_w = \frac{2h_s}{c_s} = \frac{2x}{1-x} \alpha \tau. \quad (2.27)$$

Pour les projectiles de types R1-S2, R2-S2, et R3-S2, τ est une constante par rapport à x car m_r est fixée et x varie seulement via la variation de h_s . De plus, v_b , k et k' sont aussi indépendants de x . Finalement, seul t_w dépend de x . Les valeurs de $z_r(t_w)$ et $\dot{z}_r(t_w)$, et par conséquent le calcul du coefficient de restitution, ne vont pas dépendre du type de projectile mais seulement de la proportion x .

Pour les projectiles de types R1-S1, la situation est différente. Dans cette configuration, la hauteur totale $h = h_r + h_s$ est constante et nous changeons la proportion de partie molle x en changeant à la fois m_r la masse de la partie rigide et m_s la masse de la partie molle. Dans ce cas, ces deux masses ont pour expression :

$$m_r = \pi(d/2)^2 \rho_r \left(\frac{2}{3}(d/2) + h_r - d/2 \right) = \pi(d/2)^2 \rho_r (h - d/6 - h_s) \quad (2.28)$$

$$m_s = S_s \rho_s h_s. \quad (2.29)$$

Ici, nous rappelons que la partie molle S1 possède un trou de 4 mm de diamètre en son centre pour le guidage. Sa section S_s n'est donc pas égale à $\pi(d/2)^2$. En se servant de $m_s/x = m_r/(1-x)$ nous pouvons obtenir une expression de h_s en fonction de x :

$$h_s = \frac{x(h - d/6) \rho_r / \rho_s}{x \rho_r / \rho_s + (1-x) S_s / (\pi d^2 / 4)}. \quad (2.30)$$

Pour finir, nous obtenons les expressions suivantes, valables pour R1-S1, qui dépendent de x :

$$\tau(x) = \frac{h_s m_r}{\alpha c_s m_s} = \frac{\rho_r \pi d^2/4 (h-d/6)}{\rho_s S_s} \frac{(1-x)}{\alpha c_s \frac{\rho_r \pi d^2/4}{\rho_s S_s} x + (1-x)} \quad (2.31)$$

$$t_w(x) = \frac{\rho_r \pi d^2/4 (h-d/6)}{\rho_s S_s} \frac{2x}{c_s \frac{\rho_r \pi d^2/4}{\rho_s S_s} x + (1-x)}. \quad (2.32)$$

2.5 Résultats du modèle et comparaison avec les expériences

Nous allons maintenant comparer les résultats expérimentaux et les résultats donnés par le modèle.

2.5.1 Trajectoire

Dans un premier temps, sur la figure 2.17(a), nous allons comparer la trajectoire expérimentale de l'impact d'un projectile R1-S1 avec $x = 0.48$ à celle donnée par le modèle. Plus précisément, la valeur $z_r(t) - \ell$. Expérimentalement, nous avons récupéré la position du bas de la demi-sphère impactante lors du premier rebond. Concernant le modèle, nous avons utilisé l'équation 2.22. Les paramètres τ , $v_{a,1}$, et $t_{a,1}$ sont nos paramètres d'ajustement avec les données expérimentales. Nous pouvons remarquer que la comparaison est très satisfaisante.

Ici, il est intéressant de faire un aparté pour R1-S2. En prenant en compte les paramètres vus dans les tableaux 2.1, 2.2 et 2.3, nous sommes capables d'en déduire une valeur de τ , $v_{a,1}$, et $t_{a,1}$ et d'obtenir la trajectoire associée. L'amplitude du premier rebond prédit par le modèle serait de l'ordre de 0.1 mm, une valeur trop petite pour être observée et donc pour voir de multiples rebonds avec notre méthode optique.

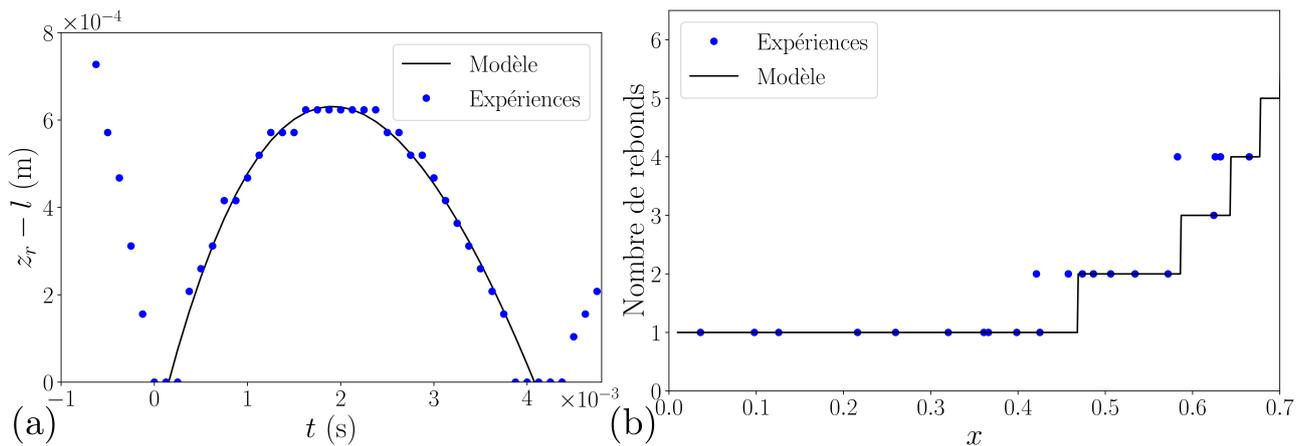


Figure 2.17: Comparaison, pour des projectiles de type R1-S1, entre les valeurs expérimentales et théoriques de : (a) $z_r(t) - \ell$ en fonction du temps et (b) Nombre de rebonds en fonction de x .

Concernant la figure 2.17(b), nous allons superposer les résultats du nombre de rebonds donnés par le modèle aux résultats expérimentaux déjà vus à la figure 2.10. Là encore, la comparaison est très satisfaisante.

2.5.2 Temps

Sur la figure 2.18(a), nous pouvons voir la comparaison entre les valeurs expérimentales et théoriques de τ . Chaque point d'expérience correspond à un point vu sur la figure 2.9. Afin de trouver τ expérimentalement, nous avons appliqué la même méthode que pour la figure 2.17(a), c'est-à-dire que nous avons interpolé la position expérimentale de $z_r(t) - \ell$ avec l'équation 2.22. Les paramètres d'ajustement sont τ , $v_{a,1}$, et $t_{a,1}$. Concernant la valeur théorique, on utilise les valeurs des tableaux 2.1 et 2.2, afin de calculer τ à partir de l'équation 2.27. Pour cette dernière, nous posons $\alpha = 0.86$ et nous expliciterons ce choix plus loin dans le manuscrit. Nous pouvons remarquer que les deux méthodes ont la même tendance même si les valeurs théoriques sont plus élevées.

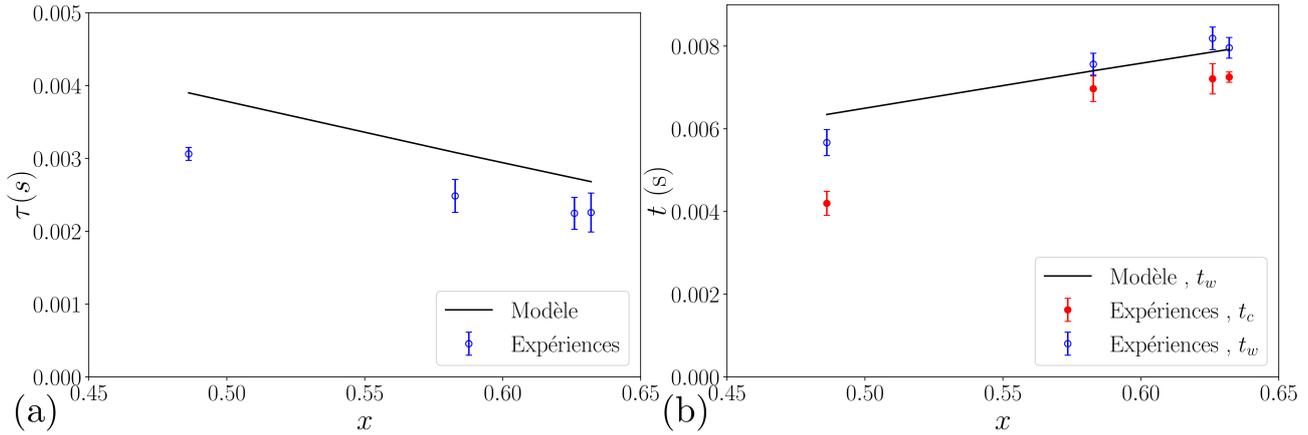


Figure 2.18: Comparaison entre les valeurs expérimentales et théoriques de : (a) τ et (b) t_w en fonction de x . t_c est aussi indiqué.

Sur la figure 2.18(b), nous pouvons voir une comparaison entre les valeurs théoriques et expérimentales de t_w . On montre aussi les valeurs expérimentales de t_c . Les valeurs expérimentales proviennent de mesures réalisées sur les points expérimentaux de la figure 2.9 et les valeurs théoriques sont données par l'équation 2.27 (toujours avec $\alpha = 0.86$). Nous pouvons remarquer que les deux sont plutôt en bon accord.

2.5.3 Coefficient de restitution

Nous allons maintenant nous intéresser à la comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs du modèle pour le coefficient de restitution. Afin de tracer théoriquement celui-ci, nous utilisons les équations 2.26 et 2.27, ainsi que les valeurs vues dans les tableaux 2.1 et 2.2 pour chaque type de projectile.

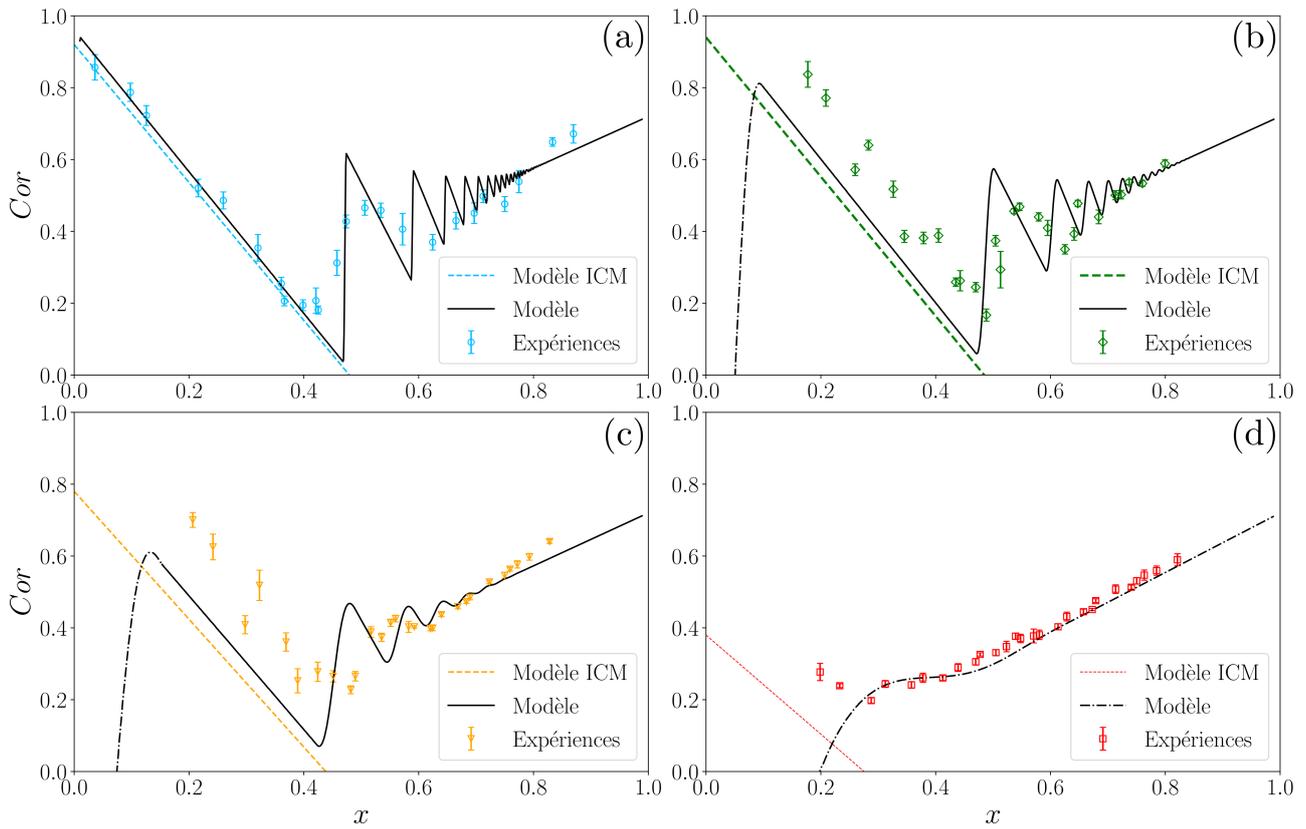


Figure 2.19: Comparaison entre les valeurs expérimentales et théoriques du Cor en fonction de x pour les projectiles de types : (a) R1-S1, (b) R1-S2, (c) R2-S2 et (d) R3-S2. Les lignes sont pleines ou en pointillé en fonction de si t_w est, respectivement, supérieur ou inférieur à $t_{c,1}$.

Pour les projectiles de type R1-S1, R1-S2 et R2-S2, nous pouvons voir que la superposition entre les résultats expérimentaux et le modèle est bonne. Entre $0 < x < 0.5$, on peut observer que le modèle présente une décroissance linéaire tout comme les valeurs expérimentales. Ce modèle prévoit un Cor plus élevé que celui obtenu par le modèle ICM. Néanmoins, excepté pour R1-S1, les valeurs expérimentales sont plus élevées que les valeurs obtenues par ces deux modèles différents. Lorsque $x > 0.5$, nous retrouvons les oscillations observées expérimentalement même si nous pouvons remarquer un léger décalage entre les oscillations des points expérimentaux et celles du modèle.

Pour les projectiles R3-S2, la situation est différente. Nous remarquons d'abord un bon accord avec les valeurs expérimentales tant que $x \gtrsim 0.3$. Pour ce projectile, le modèle prédit que $t_{c,1} > t_w$. Nous sommes dans la situation où les deux forces en présence ne provoquent pas de multiples rebonds, c'est-à-dire que la partie rigide reste au contact du substrat jusqu'à $t = t_w$, c'est pour cela que le modèle est représenté seulement en pointillé. On observe que le comportement asymptotique démarre, expérimentalement, dès $x \sim 0.3$. Cela signifie que le contact avec le substrat va amortir très rapidement le mouvement de la partie rigide.

Dans tous les cas, il faut noter que le seul paramètre que nous avons ajusté est α , dont la valeur est fixée à 0.86 comme expliqué dans le prochain paragraphe. De plus, on peut observer que le modèle ne marche pas quand $x \rightarrow 0$ car comme nous l'avons discuté précédemment cela va correspondre à $t_{c,1} > t_w$. Ces proportions spécifiques apparaissent en pointillé sur la figure.

Comportement asymptotique

Pour conclure sur la comparaison avec le coefficient de restitution, nous pouvons nous intéresser au comportement asymptotique. Celui-ci correspond à limite $x \rightarrow 1$. Dans ce cas, $t_w \rightarrow +\infty$ et on a alors :

$$\dot{z}_r(t_w(x)) \sim 0 \tag{2.33}$$

et

$$z_r(t_w(x)) - \ell \sim -(4m_r v_b / 5k\tau)^{2/3}. \tag{2.34}$$

En remplaçant ces deux équations dans l'expression du coefficient de restitution de l'équation 2.26 on trouve

$$Cor(x)_{x \rightarrow 1} = -(1-x) \left(\frac{16m_r^2}{25k^2\tau^5 v_b} \right)^{1/3} + x(2\alpha - 1) \tag{2.35}$$

$$\sim x(2\alpha - 1). \tag{2.36}$$

Avec $\alpha = 0.86$, on retrouve $Cor(x)_{x \rightarrow 1} = 0.72x$. Cette valeur est cohérente avec la valeur trouvée pour la figure 2.7. C'est pour cela que nous avons choisi $\alpha = 0.86$ pour les résultats présentés. Nous rappelons que α est le seul paramètre ajustable du modèle.

2.6 Temps caractéristiques du système

Dans cette section, nous allons discuter des quatre temps caractéristiques et indépendants du système. Nous avons déjà vu les deux premiers à savoir τ qui est le temps caractéristique des rebonds et t_w le temps nécessaire à l'onde de déformation élastique pour faire l'aller-retour dans la partie molle. Le troisième est T_1 , il correspond au temps caractéristique du contact avec le substrat lié à la composante élastique. Le dernier est T_2 , il correspond au temps caractéristique du contact lié à la composante dissipative. Leurs expressions sont :

$$T_1 = (m_r^2/k^2 v_b)^{1/5} ; T_2 = (m_r^2/k'^2 v_b)^{1/3}. \tag{2.37}$$

Afin que l'impact ne soit pas amorti et qu'il y ait un rebond, il est nécessaire que la composante élastique de la force de contact entre la partie rigide et le substrat soit plus importante que sa composante dissipative. De cette manière, la partie rigide pourra alterner les phases de contact et les phases de vol. C'est cette oscillation du mouvement de la partie rigide qui est à l'origine de l'oscillation du coefficient de restitution en fonction de x , comme nous avons pu le voir dans le modèle. En termes de temps caractéristiques, cette contrainte revient à $T_1 \ll T_2$. Si l'on regarde les valeurs présentées dans le tableau 2.4 alors nous pouvons nous rendre compte que c'est le cas pour les projectiles de types R1-S1, R1-S2 et R2-S2. Cependant pour R3-S2, on remarque que T_1 et T_2 sont du même ordre de grandeur, ce qui signifie que la dissipation est importante et que le coefficient de restitution est significativement plus petit que 1. Cela a aussi pour conséquence la perte du comportement oscillant du coefficient de restitution.

Projectile	T_1 (ms)	T_2 (ms)	τ (ms)	t_w (ms)
R1-S1	0.031	0.35	6.7-1.4	2.8-9.6
R1-S2	0.031	0.35	0.51	0.22-3.5
R2-S2	0.038	0.18	0.42	0.18-2.9
R3-S2	0.127	0.24	0.44	0.19-3.0

Table 2.4: Temps caractéristiques du modèle. Les intervalles pour τ et t_w couvrent des proportions de x entre 0.2 et 0.8.

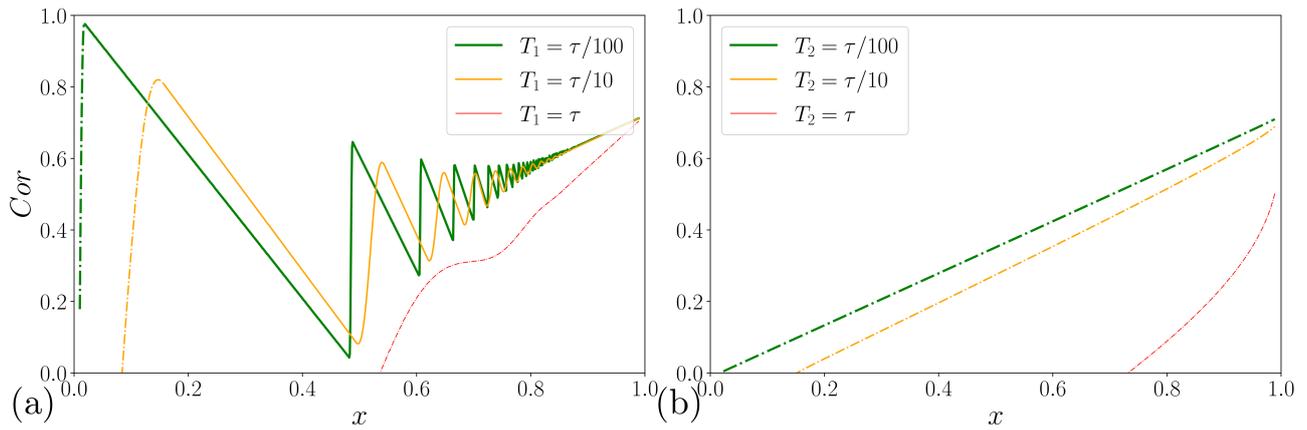


Figure 2.20: Cor en fonction de x pour : (a) le cas limite d'un contact élastique et (b) le cas limite d'un contact dissipatif. Les lignes sont pleines ou en pointillé en fonction de si t_w est, respectivement, supérieur ou inférieur à $t_{c,1}$.

Nous allons nous intéresser aux cas limites pour la partie rigide, tout en gardant une séparation des temps caractéristiques entre la partie rigide et la partie molle. Dans le graphique de la figure 2.20(a), nous nous sommes concentrés sur le cas d'un contact purement élastique en posant $T_2 \rightarrow +\infty$ (ce qui équivaut à $k' = 0 \text{ N.m}^{-3/2}.\text{s}$). Dans un premier temps, nous regardons $T_1/\tau = 0.01$ qui montre une réelle séparation des temps caractéristiques. Nous voyons alors un comportement proche du modèle ICM lorsque $x \lesssim 0.5$ et de nombreuses oscillations lorsque $x \gtrsim 0.5$. Dans le cas où $T_1/\tau = 0.1$, la différence entre les deux temps caractéristiques se réduit et on observe que le Cor est plus élevé pour $x \lesssim 0.5$ et que les oscillations sont plus faibles et plus lisses pour $x \gtrsim 0.5$. Dans le cas où $T_1/\tau = 1$, ces deux temps deviennent comparables. La partie rigide ne rebondit plus avant que l'onde ait fait l'aller-retour. Pour $x \gtrsim 0.5$, le Cor est plus petit et nous n'avons quasiment plus d'oscillations. Pour $x \lesssim 0.5$, comme nous l'avons dit, le modèle n'est plus adapté.

Dans le graphique de la figure 2.20(b), nous nous sommes concentrés sur le cas d'un contact dissipatif en posant $T_1 \rightarrow +\infty$ (ce qui équivaut à $k = 0 \text{ N.m}^{-3/2}$). Dans un premier temps, nous regardons $T_2/\tau = 0.01$. Dans ce cas, on retrouve l'asymptote : $Cor(x) \sim x(2\alpha - 1)$ quelque soit la valeur de x . Pour les deux autres cas, c'est-à-dire lorsque les temps caractéristiques commencent à devenir comparable alors le coefficient de restitution s'éloigne de cette asymptote.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'étude expérimentale de l'impact de projectiles bi-composites (plutôt élastiques). Nous avons vu que le coefficient de restitution présente un caractère non monotone avec dans un premier temps une décroissance linéaire suivie par une augmentation avec des oscillations. Deux effets ont été vus : la proportion de la partie molle fait varier le coefficient de restitution alors que la partie rigide et notamment son coefficient de restitution propre influe sur l'amplitude de ces oscillations. Enfin, un effet inattendu a été mis en évidence, l'apparition de multiples rebonds. Ces multiples rebonds sont dus à la partie molle qui va venir renvoyer la partie rigide vers le substrat.

Du point de vue théorique, nous avons pris en compte deux forces agissant sur la partie rigide. La force de contact entre la partie rigide et le substrat est supposée viscoélastique et est décrite par une extension du modèle de Hertz. La deuxième force est la force élastique provenant de la partie molle qui prend en compte la propagation d'une onde de déformation et le temps

nécessaire à l'aller-retour de celle-ci. Le modèle est en bon accord avec les expériences une fois la prise en compte des différents paramètres expérimentaux, tout cela avec un seul paramètre ajustable, α , décrivant la nature du contact entre les parties rigides et molles.

Enfin, la discussion sur les temps caractéristiques du système a permis de voir comment l'on peut se rapprocher du modèle ICM vers les faibles proportions de la partie molle et d'un comportement qui suit une asymptote pour des grandes proportions de la partie molle.

Chapitre 3

Étude numérique

Sommaire

3.1	Introduction	48
3.2	Matériels & Méthodes	48
3.2.1	Modélisation du projectile	48
3.2.2	Résolution des équations du mouvement	50
3.2.3	Caractéristiques du système	51
3.2.4	Effets de taille finie	52
3.3	Résultats pour un projectile bicomposite en adhésion	54
3.3.1	Coefficient de restitution	54
3.3.2	Nombre de rebonds	58
3.3.3	Temps de décollage	59
3.4	Modèle : Propagation d'une onde de déformation élastique	64
3.4.1	Lien entre les propriétés physiques et les paramètres du systèmes	64
3.4.2	Équations du système	64
3.4.3	Hypothèses du modèle	65
3.4.4	Calcul de la déformation : Exemple avec $n = 1$	66
3.4.5	Généralisation pour tout n	69
3.4.6	Modèle pour le cas particulier $t_c = 2t_1$	70
3.4.7	Validité et résultat du modèle	71
3.5	Résultats pour un projectile bicomposite sans adhésion	74
3.5.1	Coefficients de restitution	75
3.5.2	Nombre de rebonds	79
3.5.3	Temps de décollage	80
3.6	Modèle : Propagation d'une onde de déformation élastique, cas sans adhésion	86
3.6.1	Expression de la déformation pour P_1	87
3.6.2	Expression de la déformation pour P_2	88
3.6.3	Validité du modèle	91
3.7	Conclusion	92

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons modéliser et simuler l'impact d'objets 1D élastique bicomposite. Le but n'est pas de faire une modélisation numérique des résultats expérimentaux exposés dans le chapitre précédent mais de vérifier si avec un autre type de projectile élastique bicomposite nous retrouvons des caractéristiques similaires, notamment les tendances du coefficient de restitution (dépendance avec x et oscillations) ou l'observation de multiples rebonds. Nous modélisons le projectile par une chaîne de masses et de ressorts. Pour chaque masse, nous appliquons la seconde loi de Newton et obtenons une équation différentielle du second ordre qui couple la position de la masse avec celles de ses plus proches voisines. Afin de résoudre ces équations, nous allons nous servir d'un algorithme utilisé pour la dynamique moléculaire.

3.2 Matériels & Méthodes

3.2.1 Modélisation du projectile

Le projectile bicomposite est modélisé par une chaîne de N masses identiques m reliées entre elles par des ressorts dont la longueur à l'équilibre est l_0 . Cette chaîne est constituée de deux parties : dans la partie du bas, P_1 , les masses sont reliées par des ressorts de raideur k_1 ; dans la partie du haut, P_2 , les masses sont reliées par des ressorts de raideur k_2 . Nous allons étudier deux cas. Le premier pour lequel le contact entre P_1 et P_2 est cohésif, on parlera alors de projectile bicomposite en adhésion. Le second pour lequel le contact entre P_1 et P_2 n'est pas cohésif, les deux parties auront la possibilité de se détacher, on parlera alors de projectile bicomposite sans adhésion. Nous pouvons voir une représentation de ce système sur le schéma de la figure 3.1(a).

Nous allons utiliser deux paramètres, x et α , qui vont nous permettre de caractériser un projectile :

$$x = \frac{m_2}{m_1 + m_2} ; \alpha = \frac{k_2}{k_1 + k_2}. \quad (3.1)$$

Avec cette définition x est la proportion en masse de P_2 dans le projectile. Nous avons donc $m_2 = Nxm$ et $m_1 = (1 - x)Nm$. De manière équivalente, α est la proportion en raideur des ressorts de P_2 . On a donc $k_2 = \alpha k$ et $k_1 = (1 - \alpha)k$. Ici, il est important de noter que toutes les grandeurs que nous allons tracer sont des grandeurs sans dimension, et sans perte de généralité nous allons prendre $m = 1$, $k = 1$ et $l_0 = 1$ dans la suite du chapitre.

Nous avons fait varier x et α de sorte à parcourir des valeurs comprises dans l'intervalle $[0.005 ; 0.995]$. Cela avec des pas valant, sauf indications spécifiques, $\Delta x = 0.005$ et $\Delta \alpha = 0.005$.

Concernant le contact entre la chaîne et le substrat, celui-ci est assuré par un ressort de rigidité k_1 . Il est à noter que l'on autorise la masse 1 à faire de multiples rebonds. Pour cela nous considérons qu'il y a contact seulement si ce ressort est en compression. Si le ressort est en extension alors nous considérons qu'il n'y a pas contact. Avec cette définition, nous pouvons compter le nombre de rebonds de la masse 1.

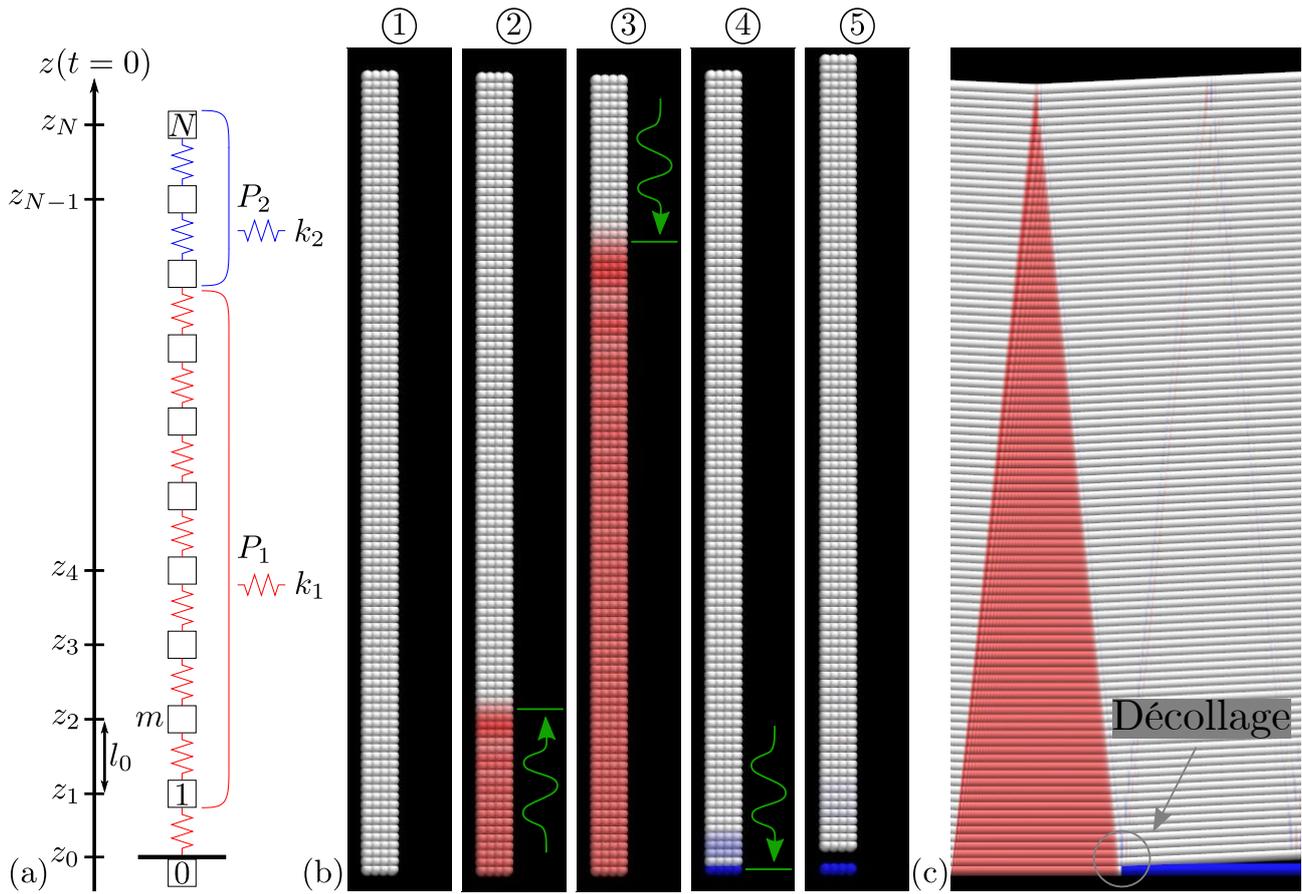


Figure 3.1: (a) Schéma d'une chaîne de masses-ressorts avec $N = 10$ et $x = 0.3$. (b) Séquence d'images et (c) diagramme spatio-temporel d'une chaîne homogène ($\alpha = 0.5$) avec $N = 100$ représentée via *VMD* qui permet de mettre en évidence la propagation de l'onde dans le projectile.

Utilisation de *VMD* pour visualiser le projectile : *Visual Molecular Dynamics* est un programme de visualisation de molécules développé par l'Université de l'Illinois-Urbana-Champaign [Humphrey, Dalke, and Schulten, 1996]. *VMD* permet notamment d'analyser les résultats de simulations de dynamique moléculaire. Dans notre cas, nous utilisons *VMD* pour visualiser un fichier *.xyz* contenant trois colonnes. La première colonne contient la position z_i des masses i selon l'axe z . La deuxième contient la position de ces mêmes masses selon l'axe x , cela nous permet de "dupliquer" trois fois la chaîne afin de représenter quatre chaînes identiques les unes à côtés des autres pour faciliter l'observation. Enfin, la troisième colonne va contenir la déformation $\varepsilon_i = \frac{(z_{i+1} - z_i) - l_0}{l_0}$ du ressort situé au dessus de chaque masse i . La couleur de chaque masse est donnée par cette troisième colonne.

Sur la figure 3.1(b), nous observons une séquence d'image montrant le projectile représenté via *VMD*. Le projectile est d'abord représenté dans son état initial juste avant l'impact sur l'image 1. Les masses ont une couleur blanche ce qui correspond à une déformation nulle du ressort au dessus de celles-ci. Après l'impact, sur l'image 2, on peut observer qu'une onde de déformation commence à se propager dans la chaîne. Cette onde est une onde de compression, elle est indiquée par une flèche verte et les masses prennent alors une couleur rouge qui correspond à une déformation négative. Cette onde va atteindre le haut du projectile et être réfléchiée vers le bas tel que nous le voyons sur l'image 3. Dans ce cas, les masses retrouvent une couleur blanche, c'est donc une onde de relaxation. Cette onde va atteindre la bas du projectile, sur

l'image 4, et la masse 0 devient bleue. La couleur bleu correspond à une élancement du ressort et donc dans le cas de la masse 0 cela indique que le projectile n'est plus en contact avec le substrat. Enfin sur la dernière image, l'image 5, nous voyons bien que le projectile a décollé.

Nous pouvons ensuite observer, sur la figure 3.1(c), le diagramme spatio-temporel obtenu à partir du film de *VMD*. Nous voyons bien la propagation de l'onde de compression puis de relaxation. Le cercle gris va indiquer le passage de l'onde en bas du projectile puis le décollage de celui-ci. Juste après le décollage on observe des allers-retours de l'onde dans le projectile. Ces allers-retours correspondent à de l'énergie piégée dans les modes, énergie qui n'est donc pas transmise sous forme d'énergie cinétique au barycentre.

3.2.2 Résolution des équations du mouvement

Comme vu précédemment, le but de la dynamique newtonienne est de résoudre les équations différentielles obtenues à partir de l'application de la seconde loi de Newton. La résolution de ces équations va nous permettre de déterminer la position de chaque masse à l'instant $t + dt$ connaissant son accélération $a_i(t)$ à l'instant précédent, elle-même calculée en connaissant les forces appliquées. De nombreux algorithmes existent afin de réaliser ce travail, ils se basent en général sur des développements de Taylor. Nous pouvons citer les algorithmes d'Euler, de Runge-Kunta ou encore l'algorithme "prédicteur-correcteur". La plupart des algorithmes de dynamique moléculaire sont basés sur la méthode de Verlet [Allen and Tildesley, 2017]. Ici nous utiliserons l'algorithme de Beeman [Beeman, 1976] qui a l'avantage d'être à la fois rapide et de conserver particulièrement bien l'énergie du système [Levitt, Meirovitch, and Huber, 1983].

Commençons par écrire la seconde loi de Newton pour une masse i :

$$F_i(t) = ma_i(t). \tag{3.2}$$

Nous avons $F_i(t)$ la somme des forces exercées sur la masse i et $a_i(t)$ son accélération au temps t . L'expression de $F_i(t)$ est donnée par :

$$F_i(t) = F_{i+1,i}(t) + F_{i-1,i}(t) \tag{3.3}$$

avec $F_{i,j}(t)$ la force exercée par la masse i sur la masse j . Ces forces sont des forces élastiques qui pour $i \in]1, N[$ ont pour expression:

$$F_{i+1,i}(t) = +k_i [(z_{i+1}(t) - z_i(t)) - l_0] \tag{3.4}$$

$$F_{i-1,i}(t) = -k_i [(z_i(t) - z_{i-1}(t)) - l_0] \tag{3.5}$$

avec

$$k_i = \begin{cases} k_1 & \text{si la masse } i \text{ appartient à } P_1 \\ k_2 & \text{si la masse } i \text{ appartient à } P_2 \end{cases} \tag{3.6}$$

et $l_0 = 1$ qui est la longueur des ressorts à l'équilibre.

Afin de résoudre l'équation du mouvement nous allons appliquer l'algorithme de Beeman. Pour ce faire nous avons besoin de quatre quantités. D'abord $z_i(t)$, $v_i(t)$ et $a_i(t)$, respectivement, la position, la vitesse et l'accélération de la masse i au temps courant t . Nous avons aussi besoin de $a_i(t - dt)$ l'accélération de la masse i au temps précédent $t - dt$. L'algorithme se décompose de la façon suivante :

1. Calcul des nouvelles positions :

$$z_i(t + dt) = z_i(t) + v_i(t)dt + \frac{2}{3}a_i(t)dt^2 - \frac{1}{6}a_i(t - dt)dt^2$$

2. Calcul des nouvelles forces $F_i(t + dt)$ et des accélérations $a_i(t + dt) = F_i(t + dt)/m$ à partir de ces nouvelles positions.
3. Calcul des nouvelles vitesses :

$$v_i(t + dt) = v_i(t) + \frac{1}{3}a_i(t + dt)dt + \frac{5}{6}a_i(t)dt - \frac{1}{6}a_i(t - dt)dt$$

4. Actualisation de $a_i(t)$ et $a_i(t - dt)$ puis itération suivante.

À la fin de la simulation, après le décollage final de la chaîne, nous sommes donc capable de calculer la vitesse du centre de masse et le coefficient de restitution.

Conditions initiales Étant donné qu'il s'agit de modéliser la chaîne à l'instant de l'impact avec chaque élément i séparé d'une distance l_0 et arrivant à une vitesse $-v_b$, cela nous amène aux conditions initiales suivantes :

$$\forall i \neq 0 : \begin{cases} z_i(t = 0) &= i l_0 \\ v_i(t = 0) &= -v_b \\ a_i(t = 0) &= 0 \end{cases} ; i = 0 : \begin{cases} z_0(\forall t) &= 0 \\ v_0(\forall t) &= 0 \\ a_0(\forall t) &= 0 \end{cases} . \quad (3.7)$$

L'élément $i = 0$ correspond au substrat et sera toujours immobile.

Conditions limites Concernant le bord supérieur comme nous pouvons le voir sur le schéma de la figure 3.1, la masse N ne ressent que la force du ressort $N - 1$ ce qui nous amène à

$$F_N(t) = F_{N-1,N}(t) = -k_2 [(z_N(t) - z_{N-1}(t)) - l_0]. \quad (3.8)$$

Concernant le bord inférieur, c'est à dire la masse 1, les conditions sont un peu plus complexes. En effet comme nous l'avons vu précédemment nous allons autoriser la chaîne à faire de multiples rebonds avant le décollage final. Nous prenons en compte la force $F_{0,1}$ seulement si le ressort entre ces deux masses est en compression c'est-à-dire:

$$F_{0,1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } (z_1(t) - z_0(t)) > l_0 \\ -k_1 [(z_1(t) - z_0(t)) - l_0] & \text{si } (z_1(t) - z_0(t)) < l_0 \end{cases} . \quad (3.9)$$

L'expression de $F_1(t)$ est naturellement donnée par :

$$F_1(t) = F_{0,1}(t) + F_{2,1}(t). \quad (3.10)$$

3.2.3 Caractéristiques du système

Il convient maintenant de définir les caractéristiques du système. Si nous reprenons le schéma de la figure 3.1 et appliquons un bilan des forces dans le cadre de cet objet 1D alors nous retrouvons très facilement l'équation de d'Alembert ([d'Alembert, 1747]):

$$\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{k l_0^2}{m}} \quad (3.11)$$

et $u(z, t)$ le déplacement d'une masse repérée par sa position z au temps t . Nous pouvons alors définir c_1 et c_2 , respectivement la vitesse de propagation de l'onde élastique dans P_1 et P_2 :

$$c_1 = \sqrt{\frac{k_1 l_0^2}{m}} ; c_2 = \sqrt{\frac{k_2 l_0^2}{m}} . \quad (3.12)$$

Nous définissons alors t_1 et t_2 , respectivement le temps de propagation de l'onde élastique dans P_1 et P_2 :

$$t_1 = N(1-x)\sqrt{\frac{m}{k_1}} \quad ; \quad t_2 = Nx\sqrt{\frac{m}{k_2}}. \quad (3.13)$$

On peut alors définir $T_1 = 2t_1$ et $T_2 = 2t_2$, le temps que les ondes mettent pour faire l'aller-retour dans les chaînes, respectivement P_1 et P_2 . Ainsi que T_{1e} et T_{2e} la période d'une maille élémentaire, supposée isolée, constituée d'un ressort de raideur, respectivement k_1 et k_2 , et d'une masse m . À partir de ces quatre temps nous devons définir le plus grand temps, T_{max} , présent dans la simulation :

$$T_1 = 2N(1-x)\sqrt{\frac{m}{k_1}} \quad ; \quad T_2 = 2Nx\sqrt{\frac{m}{k_2}} \quad (3.14)$$

$$T_{max} = \max(T_1, T_2) \quad (3.15)$$

ainsi que le plus petit temps, T_{min} :

$$T_{1e} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} \quad ; \quad T_{2e} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}} \quad (3.16)$$

$$T_{min} = \min(T_{1e}, T_{2e}). \quad (3.17)$$

Après avoir défini ces deux temps, nous pouvons fixer les paramètres de la simulation. Premièrement, nous devons choisir dt comme étant inférieur à T_{min} . Deuxièmement, le temps de simulation t_{simu} doit être supérieur à T_{max} . Troisièmement, pour s'assurer de travailler dans l'hypothèse de faible déformation, il faut que la vitesse d'impact v_b soit inférieure aux vitesses de propagation des ondes dans le matériau. Dans la pratique on s'assure que $v_b \ll l_0/T_{max}$, l_0 correspondant à la plus petite échelle spatiale et T_{max} à la plus grande échelle temporelle. Pour satisfaire toutes ces conditions nous avons pris les paramètres suivants en simulation :

$$dt = T_{min}/100 \quad ; \quad t_{simu} = 10T_{max} \quad ; \quad v_b = l_0/(100T_{max}). \quad (3.18)$$

Le dernier temps de la simulation dont nous devons parler est le temps auquel le projectile décolle de façon définitive suite à un rebond ou de multiples rebonds. Ce temps est un résultat de la simulation et nous le nommons t_c .

3.2.4 Effets de taille finie

Dans cette partie nous allons voir l'influence du nombre d'éléments N dans les résultats de notre simulation. Sur la figure 3.2 nous observons le coefficient de restitution en fonction de x pour le cas limite $\alpha = 0.5$. Nous choisissons cette valeur particulière car elle correspond au cas d'une chaîne homogène ($k_1 = k_2 = 0.5$) pour laquelle la restitution devrait être égale à 1 étant donné que la simulation ne contient pas de terme dissipatif. En effet, on observe bien que le Cor est très proche de 1 et que plus N augmente plus l'on se rapproche de cette valeur. Nous avons testé un maximum de $N = 3.10^4$ éléments et obtenons une restitution valant $Cor = 0.99962$. Néanmoins on remarque que pour des valeurs faibles de N le Cor est assez éloigné de 1. Cela peut s'expliquer par le fait que plus la chaîne est longue, moins l'énergie cinétique initiale restera piégée dans les modes de vibrations [Basile and Dumont, 2000].

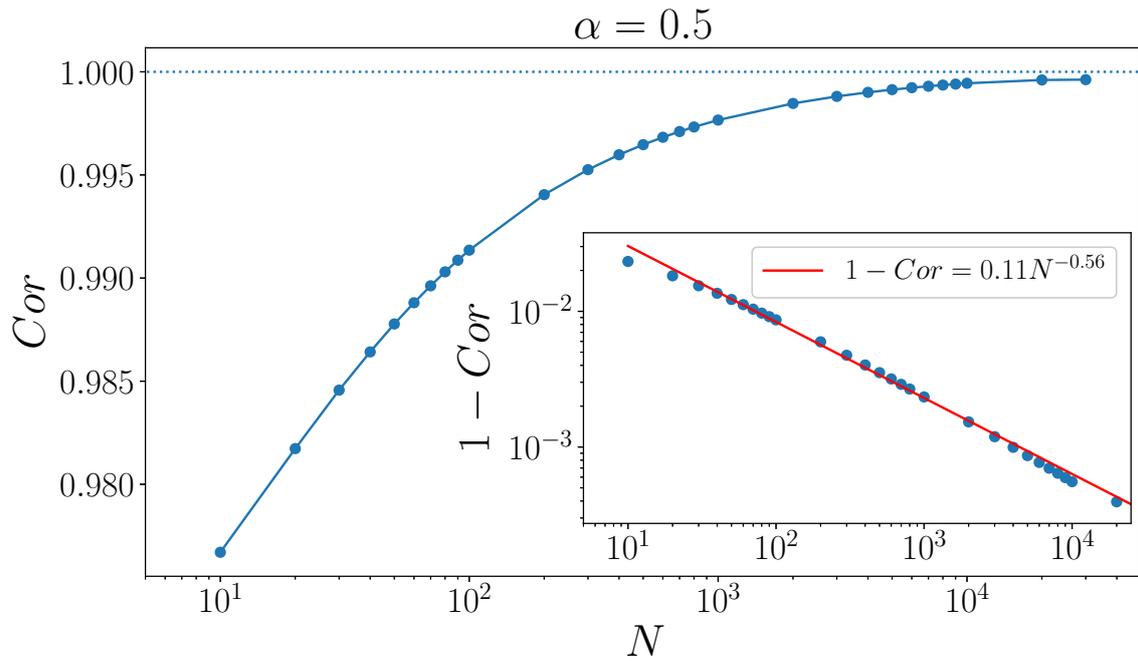


Figure 3.2: Cor en fonction de N avec $\alpha = 0.5$. Dans l'encart, $1 - Cor$ en fonction de N en échelle logarithmique. La ligne rouge est obtenue à partir d'un ajustement des résultats par une loi de puissance dont l'équation est $1 - Cor = 0.11N^{-0.56}$.

Sur le graphique de la figure 3.2, nous pouvons aussi voir un encart dans lequel nous observons $1 - Cor$ en fonction de N en échelle logarithmique sur les deux axes. Ce choix permet de mettre en évidence que les résultats suivent une loi de puissance. Nous avons réalisé un ajustement de nos résultats comme nous pouvons le voir avec la ligne rouge. Cette ligne a pour équation : $1 - Cor = 0.11N^{-0.56}$.

Dans la suite de nos simulations nous avons choisi $N = 10^4$ qui est un bon choix car nous obtenons une erreur relative de l'ordre de 0.1%.

3.3 Résultats pour un projectile bicomposite en adhésion

Dans cette section nous allons montrer les résultats de nos simulations numériques. Ces simulations ont été codées en langage de programmation *C*. Pour chaque simulation, le programme récupère une valeur de x et de α , et un script Linux permet de faire une itération sur ces valeurs afin de parcourir l'intervalle $[0.005 ; 0.995]$ avec un pas de $\Delta x = \Delta \alpha = 0.005$. Pour obtenir un graphique tel que celui que nous allons voir à la figure 3.3, il est nécessaire d'effectuer plus de 39 000 simulations, et en prenant en compte le nombre d'éléments choisi valant $N = 10^4$, l'ordre de grandeur du temps nécessaire pour y parvenir est la semaine.

3.3.1 Coefficient de restitution

Sur la figure 3.3, on peut observer les valeurs du Cor pour toutes les valeurs de x et de α . Nous pouvons séparer ce graphique en trois zones d'intérêt. La première pour des valeurs comprises dans l'intervalle $\alpha \in [0.35 ; 0.70]$, dans cette zone le Cor est compris entre 0.8 et 1. La deuxième zone correspond à des valeurs comprises dans l'intervalle $\alpha \in [0 ; 0.35]$. Dans cette zone, on peut voir que le Cor varie fortement et sur une large plage de valeur pour x et α . La troisième zone correspond quant à elle à des valeurs comprises dans l'intervalle $\alpha \in [0.70 ; 1]$. Dans cette zone le Cor varie moins fortement sur une plage de valeurs de x et α assez similaire.

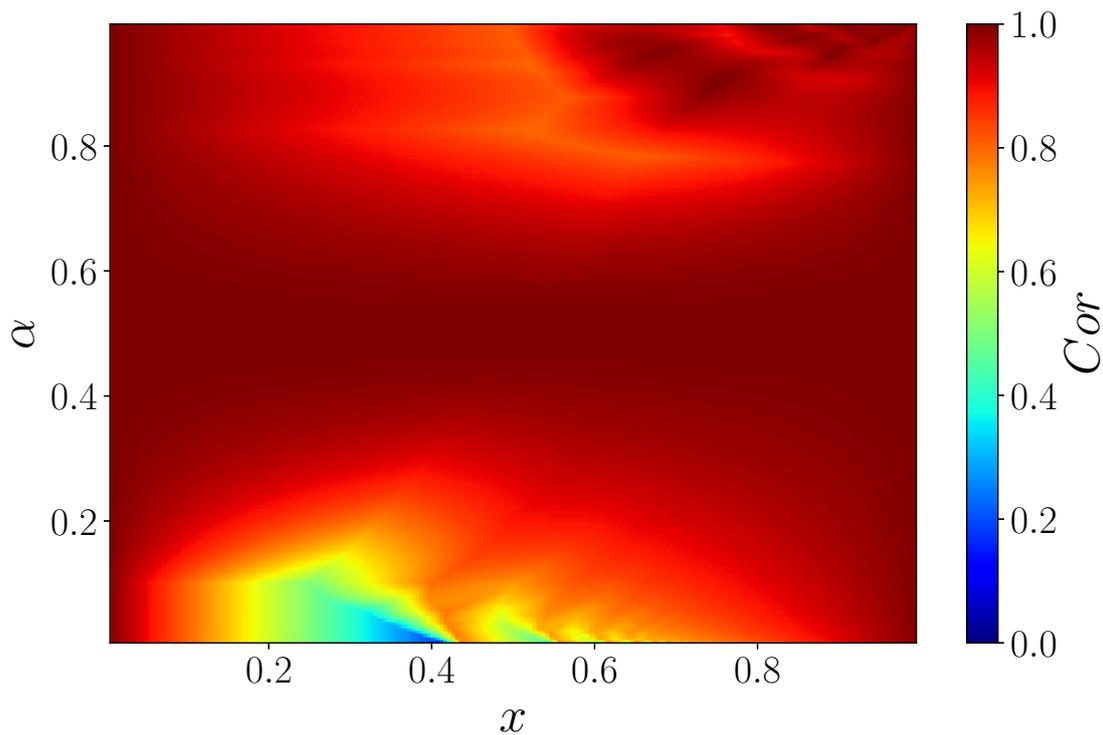


Figure 3.3: Cor en fonction de x et de α .

Il est donc pertinent de s'intéresser aux zones précédemment citées et de regarder en détail la variation du Cor avec x et α . Nous allons alors distinguer 2 cas : $\alpha < 0.5$ et $\alpha > 0.5$.

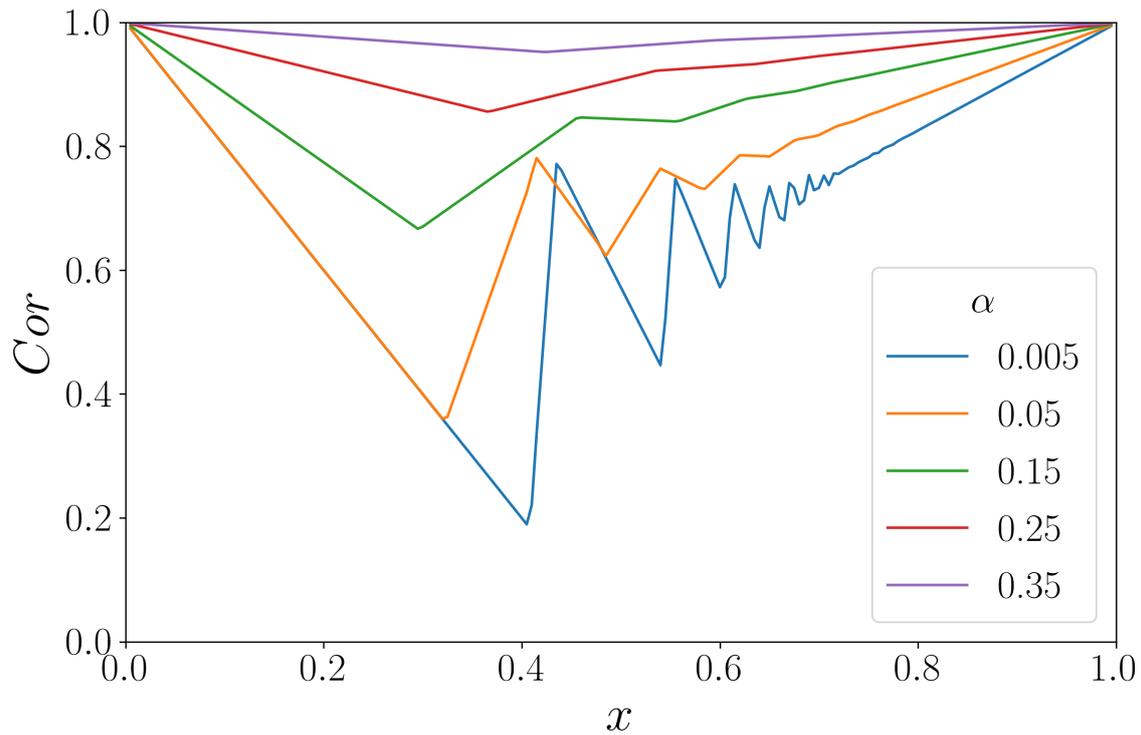


Figure 3.4: Cor en fonction de x pour différentes valeurs de $\alpha < 0.5$.

Lorsque $\alpha < 0.5$, comme observé sur la figure 3.4, c'est-à-dire les cas où P_2 est considéré comme mou devant P_1 , on peut remarquer dans un premier temps une diminution linéaire du Cor avec x puis une augmentation de celui-ci avec la présence d'oscillation. Nous remarquons aussi que plus nous nous rapprochons de $\alpha = 0.5$ plus le Cor va se rapprocher de 1. On note que le coefficient de restitution va varier de manière importante atteignant même un minimum de $Cor = 0.2$ lorsque $x = 0.4$ et $\alpha = 0.001$.

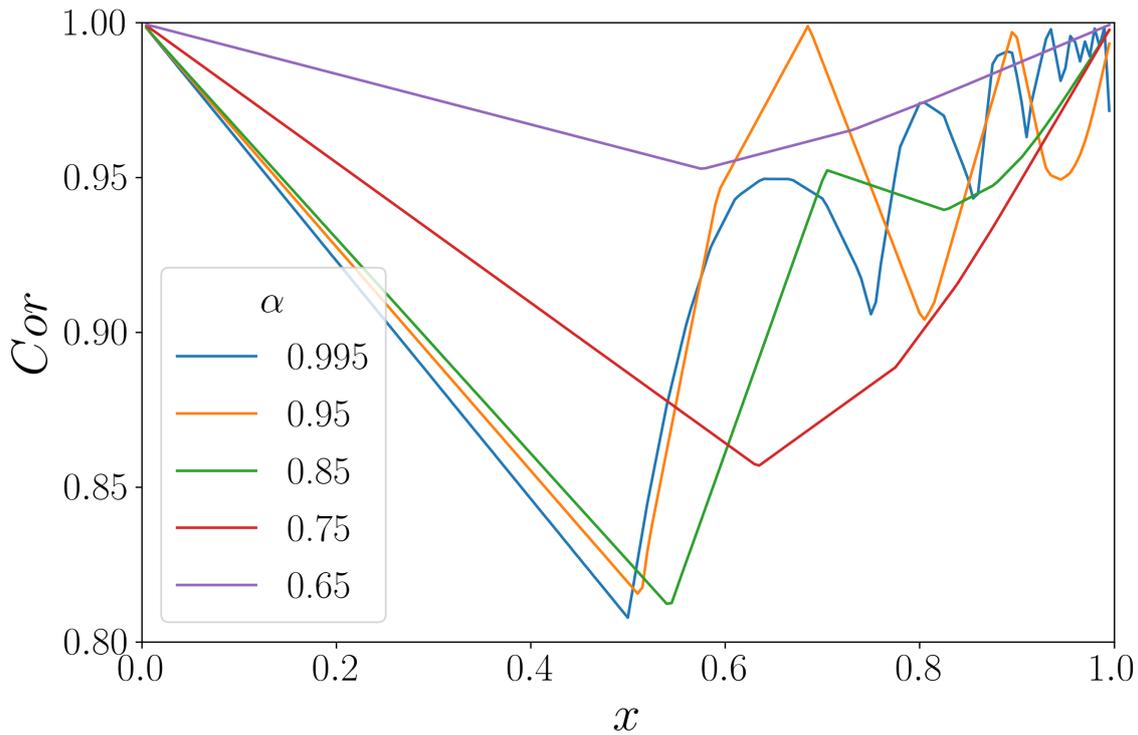


Figure 3.5: Cor en fonction de x pour différentes valeurs de $\alpha > 0.5$. On note que l'échelle de l'axe des ordonnées n'est pas la même que pour la figure 3.4.

Lorsque $\alpha > 0.5$, comme observé sur la figure 3.5, c'est-à-dire les cas où P_2 est rigide devant P_1 , on remarque comme précédemment une diminution linéaire, mais moins importante, du Cor avec x puis une zone où les oscillations sont importantes. Comme tout à l'heure, plus on se rapproche de $\alpha = 0.5$ plus le Cor se rapproche de 1. Cependant nous pouvons remarquer que les variations du Cor sont faibles par rapport au cas précédent, le minimum est seulement de $Cor = 0.81$.

À partir des ces résultats nous sommes donc capables de déterminer la restitution minimale de notre système en fonction de nos paramètres de simulation. Sur la figure 3.6 on observe, en fonction de α , la valeur minimale du Cor (Cor_{min}) et la proportion (x_{min}) correspondant à cette valeur. Nous remarquons que lorsque α tend vers 1 la restitution minimale tend vers 0.8 pour des proportions qui tendent vers 0.5. De plus lorsque α tend vers 0, la restitution minimale tend vers 0.2 et cela pour des proportions qui tendent vers 0.4.

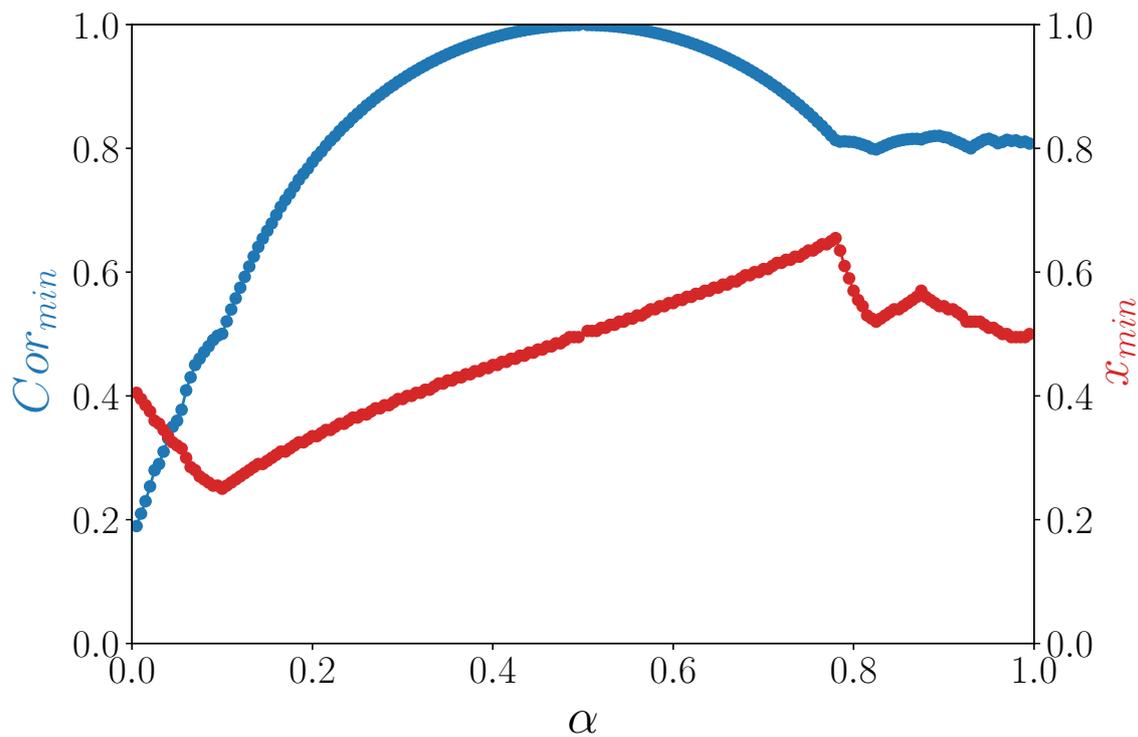


Figure 3.6: Coefficient de restitution minimale (Cor_{min}) et la proportion (x_{min}) pour laquelle ce Cor_{min} est trouvé en fonction de α .

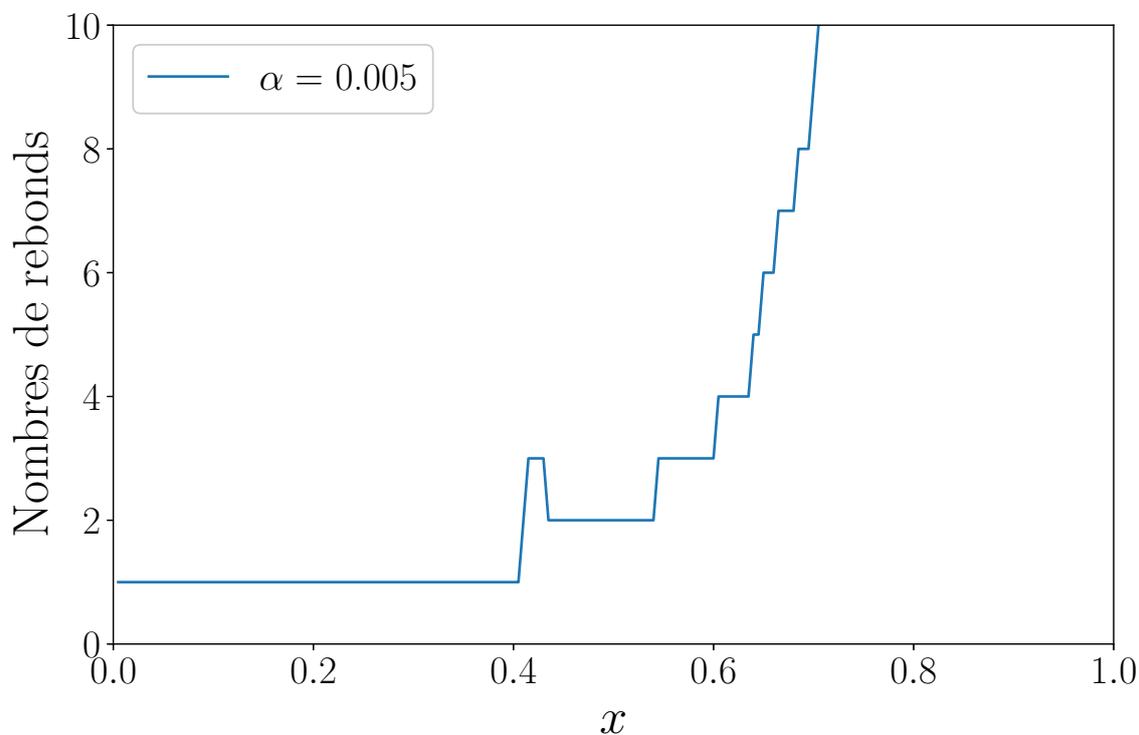


Figure 3.7: Nombre de rebonds pour $\alpha = 0.005$. La limite supérieure est fixée à 10 pour faciliter l'observation.

3.3.2 Nombre de rebonds

Comme expliqué dans la section 4.2.1, dans ces simulations, nous autorisons l'élément du bas à faire de multiples rebonds sur le substrat jusqu'au décollage final de la chaîne. Sur la figure 3.7 nous représentons ce nombre de rebonds en fonction de x pour $\alpha = 0.005$. Ce graphique a une forme en escalier où nous passons de manière discrète de 1 à plus de 10 rebonds en fonction de x . Nous nous arrêtons volontairement à cette valeur à des fins d'observation. Nous pouvons aussi remarquer que pour $0.41 < x < 0.43$ le nombre de rebond passe de 1 à 3 et repasse à 2 pour $x > 0.43$. Ce manque de consistance avec le reste de la courbe nous montre déjà que cette mesure est à prendre avec précaution. Nous y reviendrons plus tard.

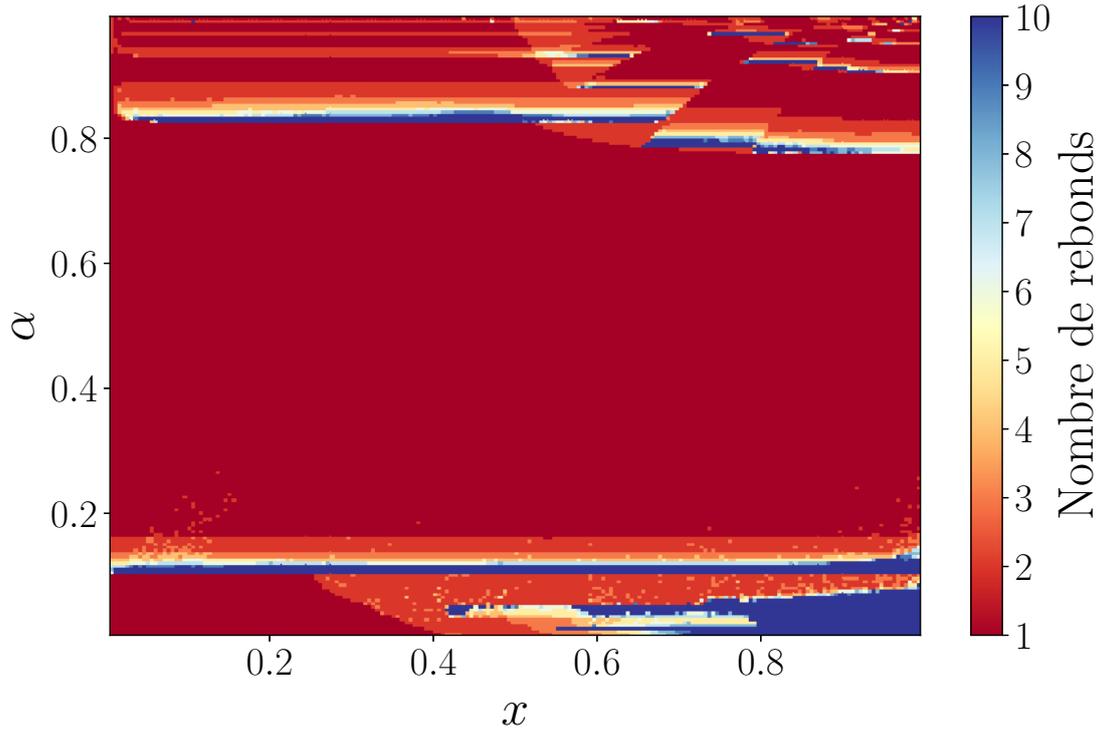


Figure 3.8: Nombre de rebonds pour toutes les valeurs de x de α . La limite supérieure est fixée à 10 pour des facilités d'observation.

Nous allons observer sur la figure 3.8 le nombre de rebonds pour toutes les valeurs de x et α . Nous pouvons remarquer que le nombre de rebonds est très élevé lorsque x tend vers 1 et α tend vers 0, la simulation donne jusqu'à 7000 rebonds dans cette zone. Il a donc été nécessaire sur cette figure de fixer le nombre de rebonds maximal à 10. Cette limite nous permet de distinguer sur une très grande partie du graphique les rebonds allant de 1 à 10 (ou plus). Une fois cette précision apportée nous remarquons que l'on peut séparer le graphique en plusieurs zones. La première zone correspond à l'intervalle $\alpha \in [0.20 ; 0.80]$. Pour celui-ci on observe que le nombre de rebonds vaut 1. La deuxième zone correspond à l'intervalle $\alpha \in [0.80 ; 1]$. Dans cette zone le nombre de rebonds fluctue. La troisième zone se situe dans le bord inférieur gauche où là aussi nous observons un seul rebond. Nous pouvons prendre cette zone comme point de départ et observer ce qui se passe lorsque l'on augmente x . Nous voyons alors que le nombre de rebonds diffère de 1 et pour certaines valeurs de α il est possible de retrouver une augmentation en escalier telle qu'observée sur la figure 3.7. Une dernière remarque que l'on peut faire concerne le caractère bruité de ces résultats. Ceci est lié au bruit numérique associé à la position de la masse 1. On trouve ainsi que le nombre de rebonds est une mesure très sensible à la discrétisation du système (valeur de N), à la définition du comptage des rebonds

(ressort en élongation par rapport à l_0) ou encore à la vitesse d'impact v_b . J'ai effectivement observé que le nombre de rebonds varie si nous changeons le seuil de décollage (une valeur plus grande ou plus petite que l_0), mais le plus important est que la modification de ce seuil n'affecte en rien les autres quantités mesurées et notamment le Cor .

3.3.3 Temps de décollage

Un des derniers résultats apportés par la simulation est le temps de décollage t_c . Afin de pouvoir l'analyser nous allons le normaliser par T_{max} , $2t_1$ et $(2t_1 + 2t_2)$. Nous rappelons que t_1 et t_2 sont, respectivement, le temps de propagation de l'onde élastique dans P_1 et P_2 ; et que $T_{max} = \max(2t_1, 2t_2)$ est le plus grand temps présent dans la simulation. Le lecteur retrouvera les expressions et définitions des différents temps dans la section 3.2.3.

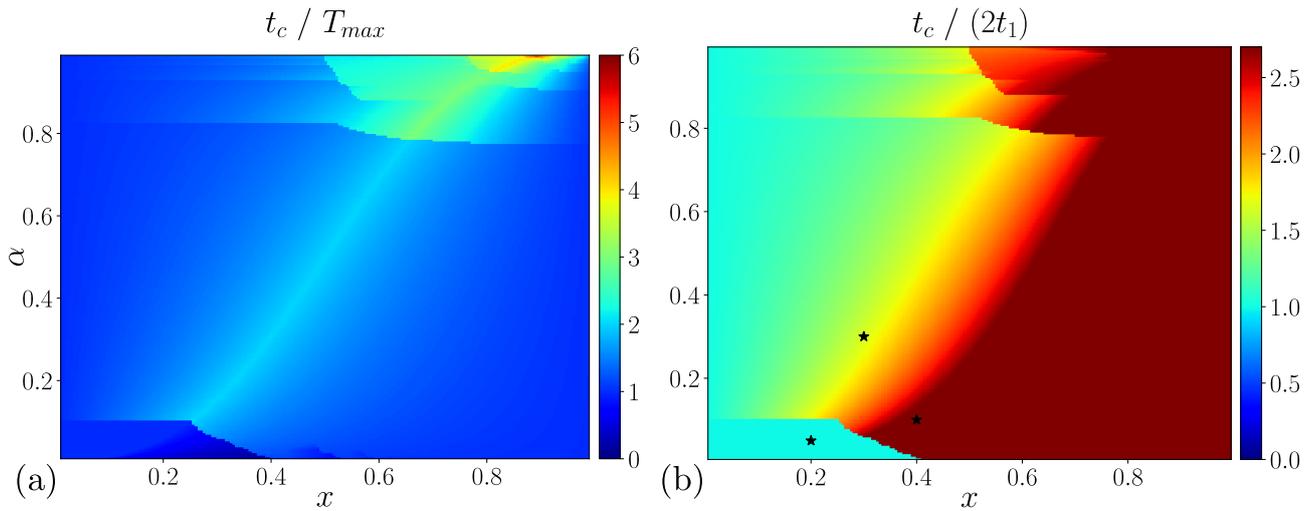


Figure 3.9: (a) $\frac{t_c}{T_{max}}$ et (b) $\frac{t_c}{2t_1}$ en fonction de x et de α . Les étoiles noires indiquent les points dont on verra la visualisation avec *VMD* sur les figures 3.11, 3.12 et 3.13.

Sur la figure 3.9(a), nous observons le temps de contact t_c normalisé par T_{max} . Cette figure nous permet de valider le fait que le temps de simulation $t_{simu} = 10T_{max}$ est supérieur au temps de contact et que la simulation s'arrête bien après le décollage du projectile.

Sur la figure 3.9(b), nous observons le temps de contact t_c normalisé par $2t_1$. Sur cette figure nous observons que dans la zone inférieure gauche le temps de contact vaut $2t_1$, ce qui signifie que le projectile décolle dès que l'onde de déformation a fait l'aller-retour dans P_1 .

Enfin sur la figure 3.10, nous observons le temps de contact t_c normalisé par $(2t_1 + 2t_2)$. Nous pouvons observer que le temps de contact est donné par $(2t_1 + 2t_2)$ sur une très grande partie du graphique. Ce qui signifie que le projectile décolle dès que l'onde a fait l'aller-retour dans la totalité du projectile. Finalement, au vu de ces résultats, nous allons décomposer ce graphique en plusieurs zones. Ce découpage en zone pourra être mis en rapport avec les zones où le nombre de rebonds diffère de 1.

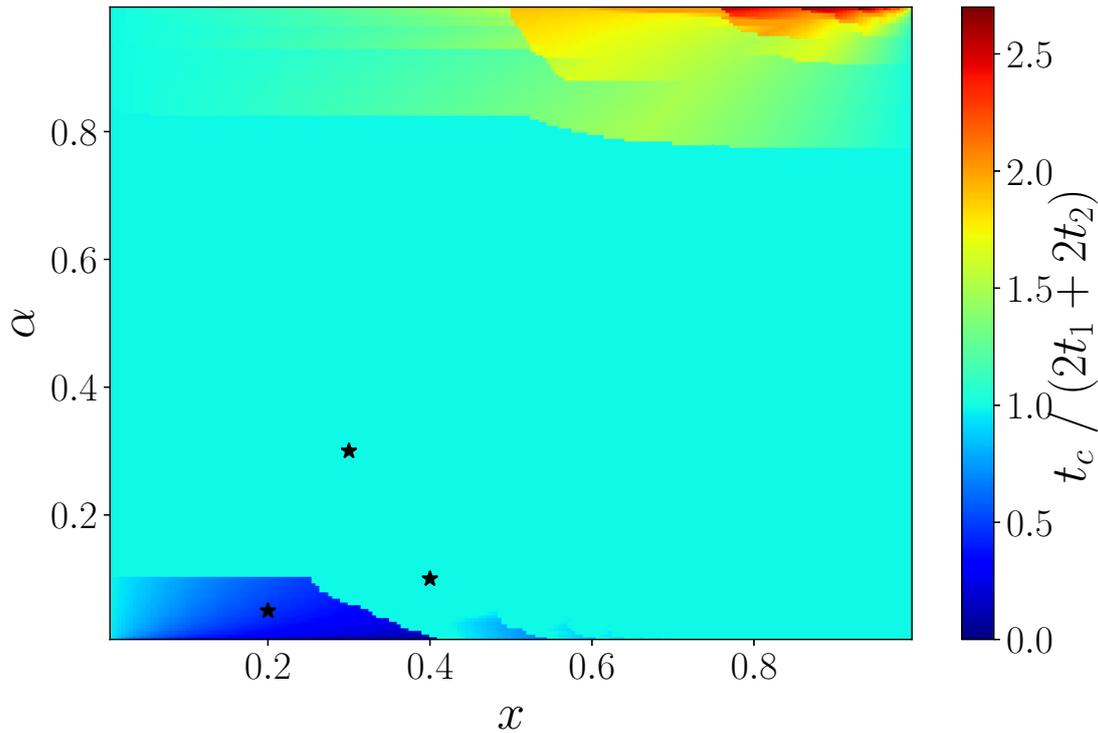


Figure 3.10: $\frac{t_c}{2t_1 + 2t_2}$ en fonction de x et de α . Les étoiles noires indiquent les points dont on verra la visualisation avec *VMD* sur les figures 3.11, 3.12 et 3.13.

La première zone correspond au bord inférieur gauche. Dans celle-ci nous pouvons noter que le temps de contact vaut $t_c = 2t_1$. Dans cette zone nous avons ajouté une étoile noire correspondant à la chaîne ayant comme configuration $x = 0.2$ et $\alpha = 0.05$. Nous allons, à l'aide de *VMD*, visualiser ce point sur la figure 3.11. Sur la figure 3.11(a) nous pouvons voir une séquence d'images montrant le projectile au cours du temps. Sur l'image 1, la chaîne est représentée dans son état initial juste avant l'impact. Les masses sont en blanc ce qui signifie que la déformation des ressorts situés au dessus de chaque masse est nulle. Après l'impact, sur l'image 2, une onde de déformation commence à se propager dans la partie P_1 de la chaîne. Une flèche verte indique cette onde et la couleur rouge des masses indique que la déformation est négative, c'est donc une onde de compression. Cette onde de déformation va arriver à l'interface et se diviser en une partie transmise vers P_2 (flèche or) et une partie réfléchi vers le bas de P_1 (flèche bleue) tel que nous l'observons sur l'image 3. L'onde réfléchi vers le bas de P_1 va finalement arriver en bas de la chaîne, sur l'image 4, la couleur de la masse 0 devient bleue ce qui signifie que le ressort qui lui est associé est en extension et donc que le projectile a décollé. Ces images permettent de bien mettre en évidence que le temps de contact est seulement le temps nécessaire à l'onde pour faire l'aller-retour dans P_1 et que l'onde transmise dans P_2 n'a pas d'effet sur le temps de décollage. Lorsque la partie P_1 est rigide et massive, le temps de décollage de la chaîne est dominé par les propriétés de P_1 . À droite de cette séquence d'images, sur la figure 3.11(b), on trouve le diagramme spatio-temporel du film obtenu par *VMD*. Ce diagramme est un autre moyen de mettre en évidence les observations déjà décrites. Le cercle gris indique le moment où le projectile décolle. On observe après le décollage, la propagation d'ondes rémanentes dans la chaîne.

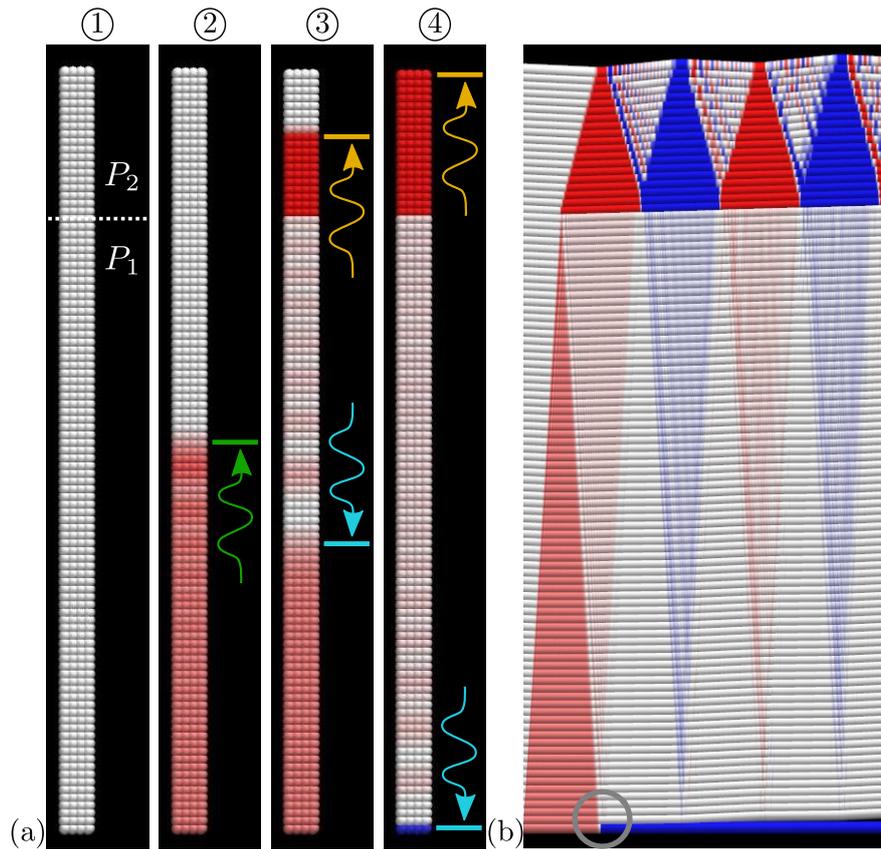


Figure 3.11: Visualisation avec *VMD* de la chaîne avec $x = 0.2$ et $\alpha = 0.05$: Illustration de $t_c = 2t_1$

La deuxième zone, qui est aussi la zone la plus grande du graphique, correspond à la partie centrale de la figure 3.10. Dans cette zone nous observons que $t_c = 2t_1 + 2t_2$. Le temps de contact est donc donné par le temps nécessaire aux ondes pour faire l'aller-retour dans tout le projectile. Là encore nous allons utiliser *VMD* afin de visualiser la chaîne ayant comme configuration $x = 0.3$ et $\alpha = 0.3$, qui correspond à l'étoile noire présente dans cette zone. Nous pouvons observer le résultat sur la séquence d'images de la figure 3.12(a). Sur cette figure nous voyons d'abord, sur l'image 1, la chaîne au repos. Le jeu de couleur des masses correspond au même jeu que pour la figure précédente. Une onde de compression va traverser P_1 , indiquée par la flèche verte sur l'image 2. Cette onde va arriver à l'interface puis se diviser en une partie transmise vers P_2 (flèche or) et une partie réfléchie vers le bas de P_1 (flèche bleue) tel que nous le voyons sur l'image 3. L'onde transmise dans P_2 va atteindre l'interface supérieure et être réfléchie vers le bas de P_2 (flèche or) sur l'image 4. Cette onde réfléchie est arrivée à l'interface et il y a transmission d'une onde de relaxation dans P_1 indiquée par une flèche blanche sur l'image 5. Sur l'image 6, l'onde traverse P_1 pour arriver sur la masse 0 à l'image 7. La couleur de la masse 0 passe en bleu ce qui indique que le projectile décolle. Ces images permettent de bien mettre en évidence que le temps de contact est le temps nécessaire à l'onde pour faire l'aller-retour dans la chaîne. À droite de cette séquence d'images, sur la figure 3.12(b), on trouve le diagramme spatio-temporel du film obtenu par *VMD*. Ce diagramme est un autre moyen de mettre en évidence les observations déjà décrites. Le cercle gris indique le moment où le projectile décolle et on observe les ondes rémanentes dans le projectile.

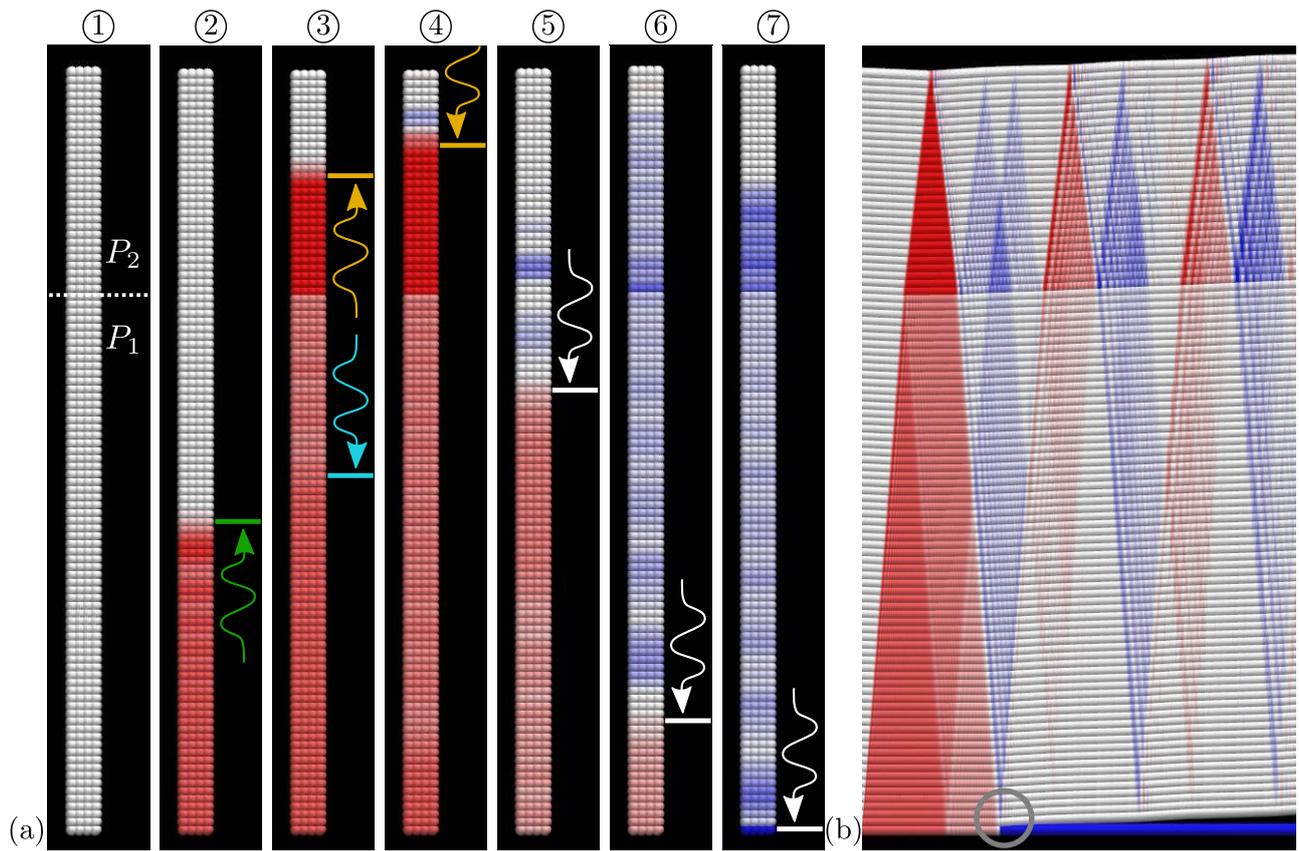


Figure 3.12: Visualisation avec *VMD* de la chaîne avec $x = 0.3$ et $\alpha = 0.3$: Illustration de $t_c = 2t_1 + 2t_2$

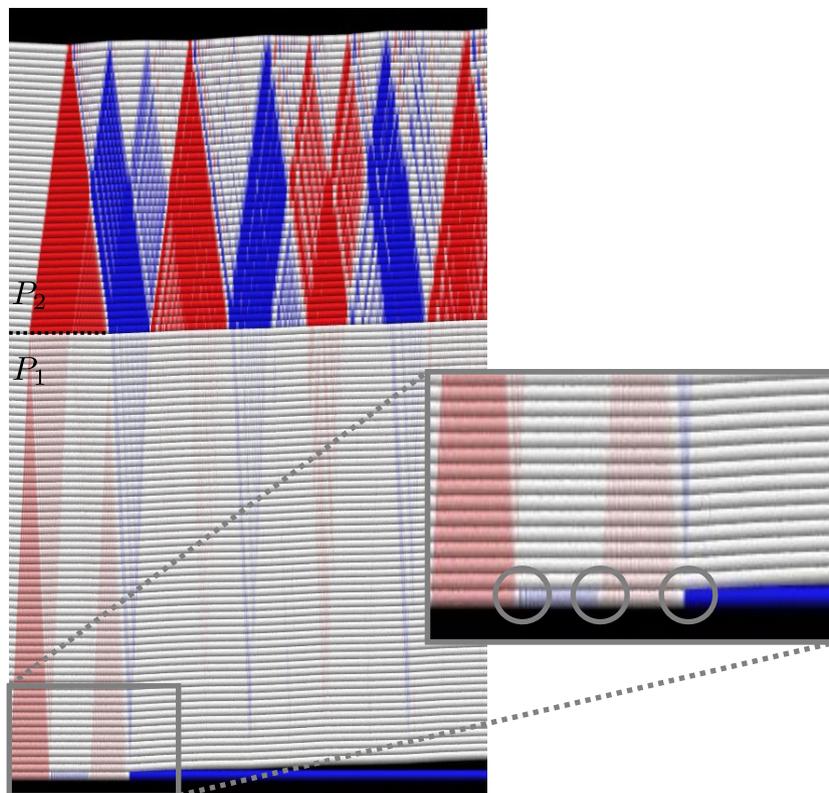


Figure 3.13: Visualisation avec *VMD* de la chaîne avec $x = 0.4$ et $\alpha = 0.1$: Illustration de $t_c = 2t_1 + 2t_2$ avec 2 rebonds. Le premier cercle gris indique le décollage, le deuxième l'atterrissage et le troisième le décollage final.

Toujours dans cette deuxième zone nous pouvons prendre une autre configuration $x = 0.4$ et $\alpha = 0.1$. Cette configuration se situe à la fois dans la zone où $t_c = 2t_1 + 2t_2$ et dans la zone où il y a de multiples rebonds (voir figure 3.8), en l'occurrence 2. Nous pouvons observer le résultat sur le diagramme spatio-temporel de la figure 3.13. Le premier cercle gris indique le décollage de la masse du bas. Le deuxième indique quant à lui l'atterrissage de cette masse. Enfin le troisième signale le décollage final de la chaîne. Cette figure permet de mettre en évidence la présence des multiples rebonds, mais le temps de décollage est toujours donné par le temps nécessaire à l'onde pour faire l'aller-retour dans le projectile.

La troisième et dernière zone correspond à des valeurs de α supérieure à 0.8. Nous remarquons dans cette zone que le temps de contact est plus grand que $2t_1 + 2t_2$. Nous allons faire l'hypothèse que le temps de contact peut s'écrire sous la forme suivante :

$$t_c = n_1 t_1 + 2t_2 \tag{3.19}$$

avec n_1 le nombre d'aller dans la partie P_1 . Nous obtenons donc une expression de n_1 qui dépend de t_c, t_1 et t_2 :

$$n_1 = \frac{t_c - 2t_2}{t_1}. \tag{3.20}$$

Nous allons alors tracer n_1 en fonction de x et α sur la figure 3.14. Sur cette figure on retrouve dans la zone centrale $n_1 = 2$ ce qui correspond sans surprise à $t_c = 2t_1 + 2t_2$. Cette figure nous permet surtout de comprendre ce qui se passe dans la troisième zone. Dans cette zone les valeurs de n_1 sont supérieures à 2 et nous avons des bandes de couleurs qui correspondent à $n_1 = 4, 6, 8$ etc. Cela nous apprend que l'onde va faire un certain nombre d'allers-retours dans P_1 avant que le projectile décolle.

Les différents résultats sur le temps de contact vont nous permettre d'élaborer un modèle prédictif.

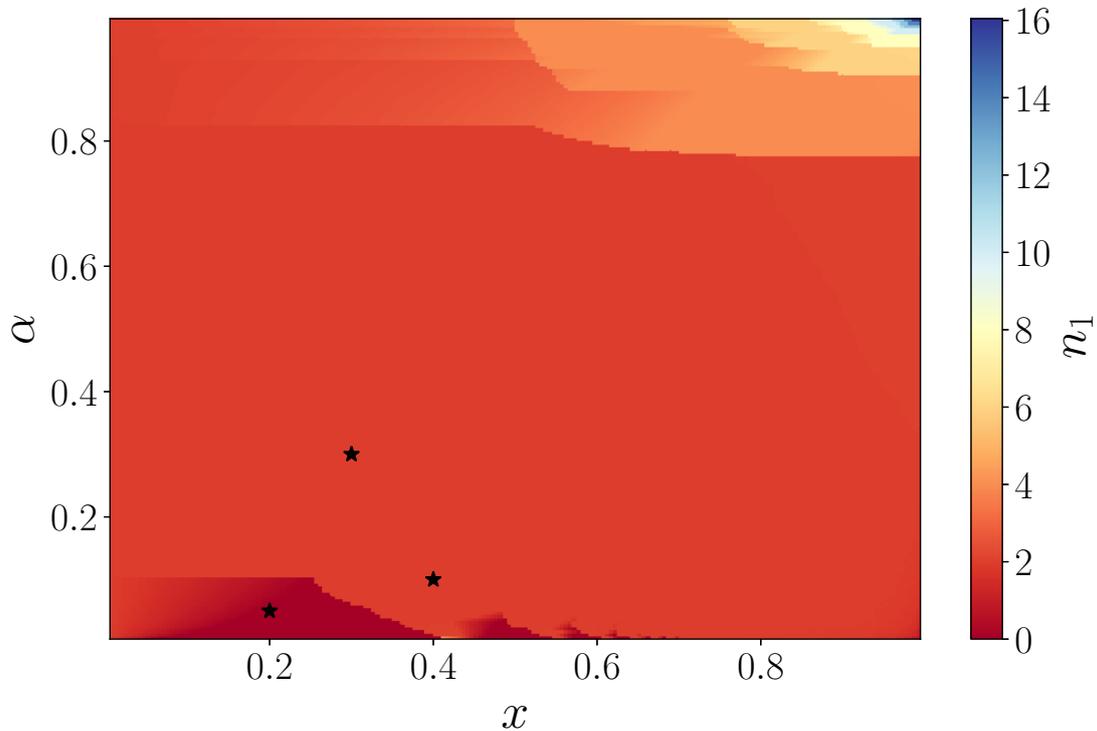


Figure 3.14: n_1 en fonction de x et de α . Les étoiles noires indiquent les points dont on a vu la visualisation avec *VMD* sur les figures 3.11, 3.12 et 3.13.

3.4 Modèle : Propagation d'une onde de déformation élastique

Après avoir vu les résultats de nos simulations numériques nous allons proposer une approche analytique de type milieu continu et voir quels sont les paramètres physiques en jeu. Le projectile est alors décrit comme un cylindre de module d'Young $E_i = k_i l_0 / S$, pour chaque partie P_i , de section S , de masse volumique ρ et de masse totale $m_{tot} = \rho L S$ avec $L = N l_0$. Commençons par appliquer la seconde loi de Newton au barycentre z du projectile :

$$m_{tot} \ddot{z} = -E_1 S \varepsilon \quad (3.21)$$

avec E_1 le module d'Young de la partie basse qui entre en contact avec le substrat, S la surface de contact et ε la déformation du projectile en $z = 0$. De plus nous faisons l'hypothèse que la masse volumique est la même pour P_1 et pour P_2 ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$). Nous allons maintenant l'intégrer entre 0 et t_c :

$$\begin{aligned} \int_0^{t_c} \ddot{z}(t) dt &= -\frac{E_1 S}{m_{tot}} \int_0^{t_c} \varepsilon(t) dt \\ \dot{z}(t_c) - (-v_b) &= -\frac{E_1 S}{\rho S (L_1 + L_2)} \int_0^{t_c} \varepsilon(t) dt \\ \dot{z}(t_c) &= -v_b - \frac{c_1^2}{(L_1 + L_2)} \int_0^{t_c} \varepsilon(t) dt. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Enfin on peut donner l'expression du coefficient de restitution :

$$Cor = \frac{\dot{z}(t_c)}{v_b}. \quad (3.23)$$

Comme nous pouvons l'observer avec les équations 3.22 et 3.23, la déformation ε et notamment son évolution temporelle entre l'impact et l'éjection sont primordiales pour déterminer le coefficient de restitution.

3.4.1 Lien entre les propriétés physiques et les paramètres du système

Comme nous l'avons vu précédemment les expressions des vitesses de propagation sont déduites de l'équation de d'Alembert (voir équation 3.11) et sont données par :

$$c_1 = \sqrt{\frac{k_1 l_0^2}{m}} = \sqrt{\frac{(1-\alpha) k l_0^2}{m}} ; c_2 = \sqrt{\frac{k_2 l_0^2}{m}} = \sqrt{\frac{\alpha k l_0^2}{m}}. \quad (3.24)$$

Dans le chapitre 1, nous avons vu l'expression de la vitesse de propagation des ondes dans un milieu en fonction du module d'Young E et de la masse volumique ρ à l'équation 1.21. Ce qui nous mène à :

$$E_1 = c_1^2 \rho_1 ; E_2 = c_2^2 \rho_2. \quad (3.25)$$

3.4.2 Équations du système

À $t = 0$, l'impact va imposer une vitesse $+v_b$ au bas du projectile dans le référentiel qui se déplace avec le projectile avant impact. Cela déclenche une propagation des ondes dans le

projectile. Dans ce même référentiel, nous savons que la vitesse locale $v(z, t)$ et la déformation locale $\varepsilon(z, t)$ dans le projectile sont reliées via les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} \\ \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \varepsilon(z, t)}{\partial z} \end{cases} \quad (3.26)$$

Ainsi la vitesse et la déformation satisfont l'équation d'onde et chacune de ces grandeurs peut être décomposée en une partie qui se propage dans la direction des z croissants (dont l'indice sera $+$) et une autre qui se propage dans la direction des z décroissants (dont l'indice sera $-$). On a donc $v = v_+ + v_-$ et $\varepsilon = \varepsilon_+ + \varepsilon_-$ avec

$$\begin{cases} v_+(z, t) = v_+(\xi = t - z/c) \\ v_-(z, t) = v_-(\zeta = t + z/c) \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon_+(z, t) = \varepsilon_+(\xi = t - z/c) \\ \varepsilon_-(z, t) = \varepsilon_-(\zeta = t + z/c) \end{cases} \quad (3.27)$$

Avec l'équation 3.26 on a $\frac{dv_+}{d\xi} = -c \frac{d\varepsilon_+}{d\xi}$ and $\frac{dv_-}{d\zeta} = c \frac{d\varepsilon_-}{d\zeta}$. Toujours dans le référentiel du projectile, les conditions initiales donnent simplement :

$$\begin{cases} v_+ = -c\varepsilon_+ \\ v_- = c\varepsilon_- \end{cases} \quad (3.28)$$

Une fois le lien établi entre vitesse et déformation nous allons maintenant présenter les équations de continuité. Dans un premier temps, les équations de continuité, des vitesses et des forces, à l'interface entre P_1 et P_2 sont régies, pour tout t , par les équations suivantes :

$$v_{+,1}(L_1, t) + v_{-,1}(L_1, t) = v_{+,2}(L_1, t) + v_{-,2}(L_1, t) \quad (3.29)$$

$$E_1(\varepsilon_{+,1}(L_1, t) + \varepsilon_{-,1}(L_1, t)) = E_2(\varepsilon_{+,2}(L_1, t) + \varepsilon_{-,2}(L_1, t)). \quad (3.30)$$

Concernant la notation on note donc $v_{+,1}$ la vitesse se propageant vers les z croissants dans la partie P_1 . Ensuite étant donné que nous venons impacter le substrat à une vitesse v_b nous imposons la vitesse au bord inférieur pour tout t :

$$v_{+,1}(0, t) + v_{-,1}(0, t) = +v_b. \quad (3.31)$$

3.4.3 Hypothèses du modèle

Nous faisons deux hypothèses dans notre modèle pour mener à bien les calculs. La première hypothèse est que $t_c = 2t_1 + 2t_2$ avec t_i le temps de propagation de l'onde dans la partie P_i . La deuxième hypothèse concerne le calcul de ε . Pour ce faire nous ne prenons pas en compte les multiples rebonds et considérons un contact unique jusqu'au décollage. Si l'on regarde les figures 3.8 et 3.10 nous remarquons que ces hypothèses concerne la zone la plus grande du graphique (respectivement couleur bleu turquoise et couleur rouge).

Ici, nous définissons une variable n nous permettant de relier t_1 et t_2 :

$$t_2 = nt_1. \quad (3.32)$$

Cette définition nous conduit à obtenir une relation entre x et α :

$$\begin{aligned} t_2 = nt_1 &\Leftrightarrow \frac{L_2}{c_2} = n \frac{L_1}{c_1} \\ \frac{c_1}{c_2} = n \frac{L_1}{L_2} &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} = n \frac{1-x}{x} \\ x &= \frac{n}{n + \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

3.4.4 Calcul de la déformation : Exemple avec $n = 1$

Nous allons commencer avec comme exemple $n = 1$. De cette manière nous avons $t_c = 2t_1 + 2t_2 = 4t_1$ tel que nous le voyons sur le schéma de la figure 3.15.

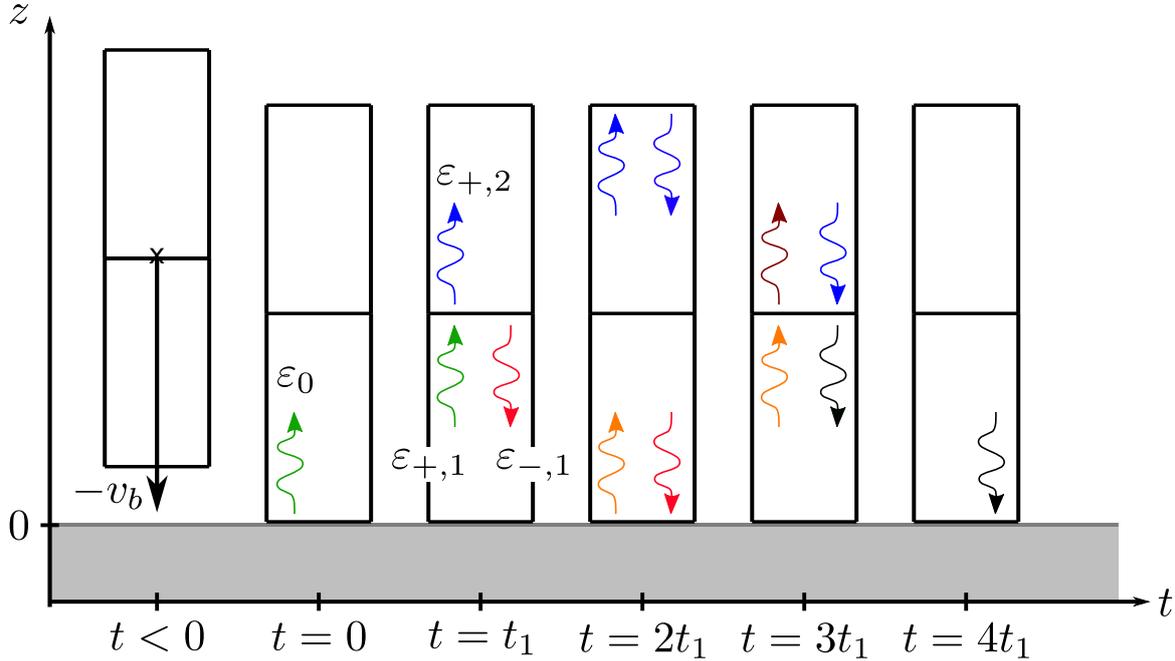


Figure 3.15: Schéma d'un impact du projectile à une vitesse v_b . Nous prenons comme exemple $n = 1$ c'est-à-dire $t_1 = t_2$

À $t = 0$: Impact du projectile

À $t = 0$, le projectile impacte le substrat et une onde de compression est générée. Comme nous l'avons vu, il existe une condition au bord ainsi qu'un lien entre la déformation et la vitesse qui nous amène à :

$$\begin{aligned}
 v_{+,1}(0, t = 0) + v_{-,1}(0, t = 0) &= +v_b \\
 v_{+,1}(0, t = 0) &= +v_b \\
 -c_1 \varepsilon_{+,1}(0, t = 0) &= +v_b \\
 \varepsilon_{+,1}(0, t = 0) &= \frac{-v_b}{c_1}.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Pour la suite on pose :

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{+,1}(0, t = 0) = \frac{-v_b}{c_1}. \tag{3.35}$$

À $t = t_1$: Transmission/ réflexion à l'interface P_1 - P_2

À $t = t_1$, $\varepsilon_{+,1}(0, t = 0)$ atteint l'interface et on a donc

$$\varepsilon_{+,1}(L_1, t = t_1) = \varepsilon_{+,1}(0, t = 0) \tag{3.36}$$

et de ce fait nous avons une transmission dans la partie P_2 et une réflexion dans la partie P_1 . Toujours avec les équations de continuité à l'interface nous pouvons écrire le système suivant:

$$\begin{aligned}
 v_{+,1}(L_1, t = t_1) + v_{-,1}(L_1, t = t_1) &= v_{+,2}(L_1, t = t_1) + v_{-,2}(L_1, t = t_1) \\
 E_1(\varepsilon_{+,1}(L_1, t = t_1) + \varepsilon_{-,1}(L_1, t = t_1)) &= E_2(\varepsilon_{+,2}(L_1, t = t_1) + \varepsilon_{-,2}(L_1, t = t_1))
 \end{aligned}$$

qui se réduit (voir schéma) à

$$\begin{aligned} -c_1\varepsilon_{+,1}(L_1, t = t_1) + c_2\varepsilon_{-,1}(L_1, t = t_1) &= -c_2\varepsilon_{+,2}(L_1, t = t_1) \\ E_1(\varepsilon_{+,1}(L_1, t = t_1) + \varepsilon_{-,1}(L_1, t = t_1)) &= E_2\varepsilon_{+,2}(L_1, t = t_1). \end{aligned}$$

Nous cherchons à avoir l'expression de $\varepsilon_{-,1}(L_1, t = t_1)$:

$$\varepsilon_{-,1}(L_1, t = t_1) = R_{1,2} \varepsilon_{+,1}(L_1, t = t_1) = R_{1,2} \varepsilon_{+,1}(0, t = 0) = R_{1,2} \varepsilon_0 \quad (3.37)$$

avec $R_{1,2}$ le coefficient de réflexion d'une onde arrivant de P_1 sur l'interface $P_1 - P_2$:

$$R_{1,2} = \frac{c_1E_2 - c_2E_1}{c_1E_2 + c_2E_1} = \frac{2c_1E_2}{c_1E_2 + c_2E_1} - 1 = \frac{2\alpha\sqrt{1-\alpha}}{\alpha\sqrt{1-\alpha} + (1-\alpha)\sqrt{\alpha}} - 1. \quad (3.38)$$

En considérant $\varepsilon_{I_{1,2}}$ l'amplitude de l'onde incidente se déplaçant vers les z croissants en direction de l'interface $P_1 - P_2$ et $\varepsilon_{R_{1,2}}$ l'amplitude de l'onde réfléchie à l'interface $P_1 - P_2$, on peut écrire de manière générale :

$$\varepsilon_{R_{1,2}} = R_{1,2}\varepsilon_{I_{1,2}}. \quad (3.39)$$

Avec les équations de continuité nous pouvons aussi définir un coefficient de transmission $T_{1,2}$:

$$T_{1,2} = \frac{2c_1E_1}{c_1E_2 + c_2E_1} = \frac{2(1-\alpha)^{3/2}}{\alpha\sqrt{1-\alpha} + (1-\alpha)\sqrt{\alpha}} \quad (3.40)$$

défini à partir de l'expression générale suivante :

$$\varepsilon_{T_{1,2}} = T_{1,2}\varepsilon_{I_{1,2}} \quad (3.41)$$

avec $\varepsilon_{T_{1,2}}$ l'amplitude de l'onde transmise à l'interface $P_1 - P_2$.

À $t = 2t_1$: Réflexion à l'interface P_1 -Substrat

À $t = 2t_1$, la déformation $\varepsilon_{-,1}(L_1, t = t_1)$ arrive à l'interface et est réfléchie. Nous avons donc:

$$\varepsilon_{-,1}(0, t = 2t_1) = \varepsilon_{-,1}(L_1, t = t_1) = R_{1,2} \varepsilon_0. \quad (3.42)$$

Toujours avec la continuité au bord inférieur on a :

$$v_{+,1}(0, t = 2t_1) + v_{-,1}(0, t = 2t_1) = +v_b$$

qui devient

$$-c_1\varepsilon_{+,1}(0, t = 2t_1) + c_1\varepsilon_{-,1}(0, t = 2t_1) = +v_b.$$

Ce qui nous donne donc la déformation réfléchie au bord inférieur:

$$\varepsilon_{+,1}(0, t = 2t_1) = \varepsilon_{-,1}(0, t = 2t_1) - \frac{v_b}{c_1} = \varepsilon_{-,1}(L_1, t = t_1) - \frac{v_b}{c_1} = R_{1,2}\varepsilon_0 + \varepsilon_0. \quad (3.43)$$

En considérant $\varepsilon_{I_{1,S}}$ l'amplitude de l'onde incidente se déplaçant vers les z décroissants en direction de l'interface $P_1 - \text{Substrat}$ et $\varepsilon_{R_{1,S}}$ l'amplitude de l'onde réfléchie à l'interface $P_1 - \text{Substrat}$, on peut écrire de manière générale :

$$\varepsilon_{R_{1,S}} = \varepsilon_{I_{1,S}} + \varepsilon_0. \quad (3.44)$$

Coefficients de réflexion et de transmission à l'interface $P_1 - P_2$

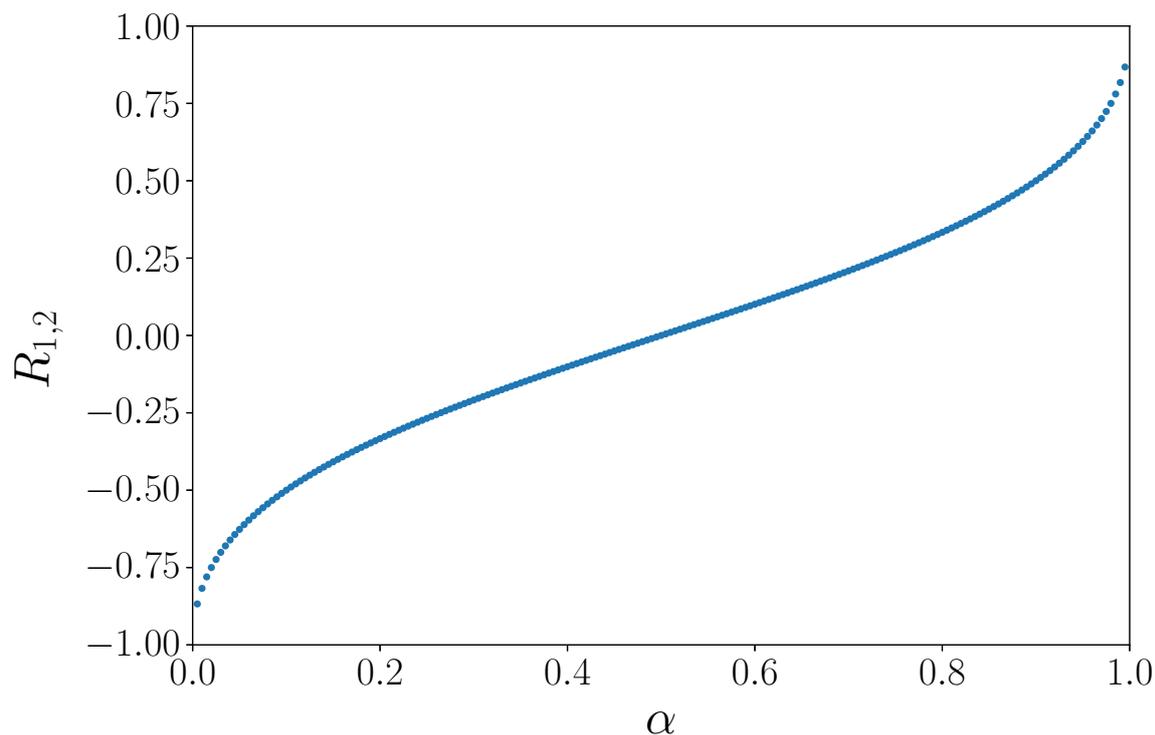


Figure 3.16: Coefficient de réflexion $R_{1,2}$ en fonction de α .

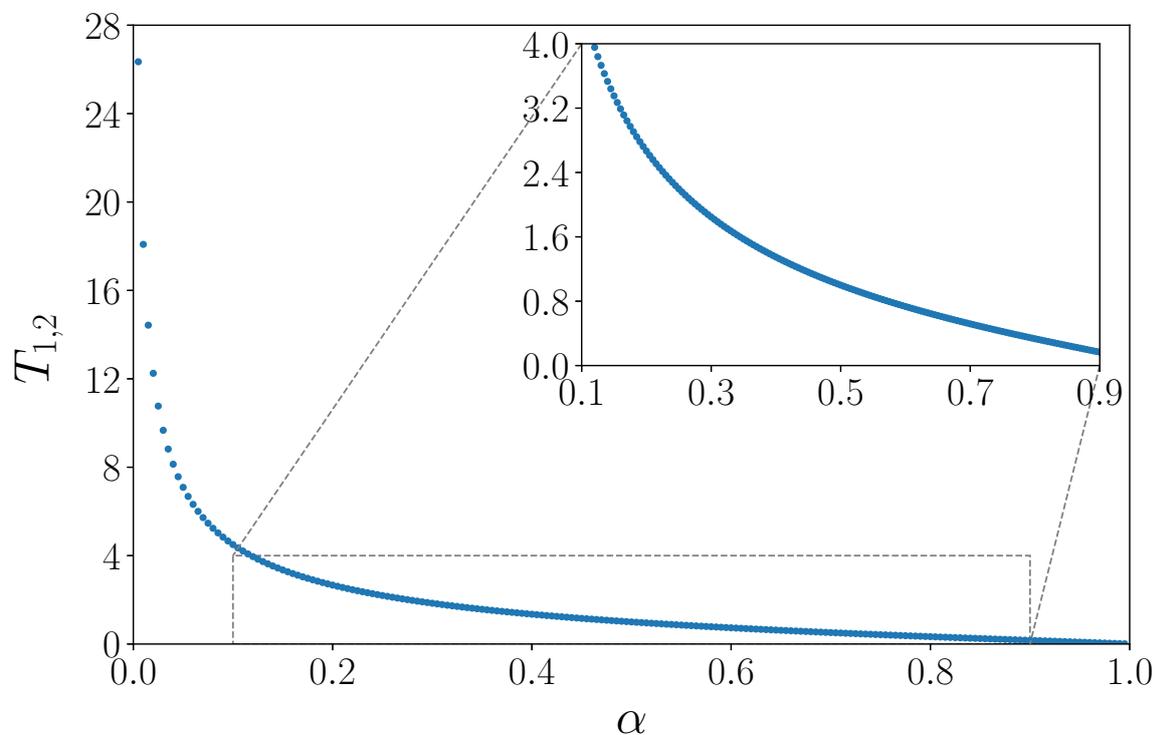


Figure 3.17: Coefficient de transmission $T_{1,2}$ en fonction de α .

Sur les figures 3.16 et 3.17 nous pouvons observer les coefficients de réflexion et de transmission dans le cas d'une onde incidente en direction des z croissants arrivant sur l'interface

$P_1 - P_2$. Nous allons nous intéresser aux trois cas limites pour commenter ces résultats.

Dans le cas où $\alpha \rightarrow 0$, P_1 est très rigide devant P_2 . Nous observons alors qu'il y a une réflexion dans P_1 car $R_{1,2} \rightarrow -1$ ce qui signifie que l'onde de déformation se comporte comme si il y avait un bord libre pour la partie P_1 . On observe aussi que la transmission dans P_2 est grande mais cela cache le fait que $k_1 \gg k_2$. Il y a donc réflexion avec changement de phase (-1) ainsi qu'une grande transmission pour la déformation. Mais si l'on raisonne en terme de force (proportionnelle à $k\varepsilon$) alors il y a une forte réflexion mais pas de transmission.

Dans le cas où $\alpha \rightarrow 1$, alors P_2 est très rigide devant P_1 . Nous observons alors qu'il y a réflexion dans P_1 car $R_{1,2} \rightarrow 1$ ce qui signifie que l'onde de déformation se comporte comme si il y avait un mur rigide pour la partie P_1 . C'est un cas avec $v = 0$ à l'interface et $R_{1,2} = 1$ (si l'onde arrive avec ε_0 alors l'interface en L_1^- sera comprimée avec $2\varepsilon_0$). Par contre, il n'y a pas ou peu de transmission dans P_2 car $T_{1,2} \rightarrow 0$.

Enfin, on retrouve bien dans la limite $\alpha \rightarrow 0.5$, correspondant à un projectile homogène, $R_{1,2} = 0$ et $T_{1,2} = 1$.

Calcul de la déformation

Nous utilisons la formule suivante pour calculer l'intégrale de la déformation en $z = 0$ entre $t = 0$ et $t = t_c$ car c'est la grandeur pertinente pour calculer le *Cor* (voir les équations 3.22 et 3.23) :

$$\int_0^{t_c} \varepsilon(t) dt = \int_0^{2t_1} \tilde{\varepsilon}_0 dt + \int_{2t_1}^{4t_1} \tilde{\varepsilon}_1 dt \quad (3.45)$$

avec $\tilde{\varepsilon}_0$ la déformation pour $0 < t < 2t_1$ et $\tilde{\varepsilon}_1$ la déformation pour $2t_1 < t < 4t_1$. Nous venons de voir les différentes déformations présentes dans le système. On voit que pour $0 < t < 2t_1$ la seule déformation présente est ε_0 . Ce qui nous conduit à :

$$\tilde{\varepsilon}_0 = \varepsilon_{-,1}(0, t = 0) = \varepsilon_0. \quad (3.46)$$

Ensuite pour $2t_1 < t < 4t_1$ il est nécessaire de prendre en compte les déformations qui sont intervenues à $t = 2t_1$. Ce qui nous conduit à :

$$\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_{+,1}(0, t = 2t_1) + \varepsilon_{-,1}(0, t = 2t_1) = 2R_{1,2}\varepsilon_0 + \varepsilon_0. \quad (3.47)$$

3.4.5 Généralisation pour tout n

Jusqu'à présent nous avons vu la déformation pour $n = 1$, c'est-à-dire $t_c = 4t_1$. Maintenant nous allons généraliser notre raisonnement pour tout n réel. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{t_c} \varepsilon(t) dt &= \int_0^{2t_1} \tilde{\varepsilon}_0 dt + \int_{2t_1}^{2t_1+2t_1} \tilde{\varepsilon}_1 dt + \dots + \int_{2t_1+2(k-1)t_1}^{2t_1+2kt_1} \tilde{\varepsilon}_k dt + \dots + \int_{2t_1+2\tilde{n}t_1}^{2t_1+2nt_1} \tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}+1} dt \\ &= 2t_1(\tilde{\varepsilon}_0 + \tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2 + \dots + \tilde{\varepsilon}_k + \dots + \tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}}) + 2t_1(n - \tilde{n})\tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}+1} \end{aligned} \quad (3.48)$$

avec \tilde{n} la partie entière inférieure de n et k un indice entier qui désigne la déformation entre $2t_1 + 2(k-1)t_1$ et $2t_1 + 2kt_1$. Nous avons vu précédemment les détails nous permettant d'obtenir $\tilde{\varepsilon}_0$ et $\tilde{\varepsilon}_1$. Si nous utilisons les équations 3.39 et 3.44 alors nous pouvons en déduire une expression récursive de $\tilde{\varepsilon}_k$. Considérons $\tilde{\varepsilon}_k$ connu, nous allons alors l'injecter dans l'équation 3.39, en le considérant comme étant $\varepsilon_{I,2}$. Nous obtenons donc une expression de $\varepsilon_{R,2}$ que l'on va injecter dans dans l'équation 3.44 en le considérant comme $\varepsilon_{I,S}$. Nous obtenons alors une expression

de $\varepsilon_{R_{1,S}}$ qui n'est rien d'autre que $\tilde{\varepsilon}_{k+1}$. Puis nous recommençons ces opérations. Nous avons donc une expression qui dépend de k :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varepsilon}_k &= R_{1,2}\tilde{\varepsilon}_{k-1} + \tilde{\varepsilon}_0(1 + R_{1,2}) \\
 &= R_{1,2}[R_{1,2}\tilde{\varepsilon}_{k-2} + \tilde{\varepsilon}_0(1 + R_{1,2})] + \tilde{\varepsilon}_0(1 + R_{1,2}) \\
 &= \dots \\
 &= R_{1,2}^k \varepsilon_0 + \varepsilon_0(1 + R_{1,2})(1 + R_{1,2} + \dots + R_{1,2}^{k-1}) \\
 &= \varepsilon_0 \left(R_{1,2}^k + (1 + R_{1,2}) \frac{1 - R_{1,2}^k}{1 - R_{1,2}} \right) \\
 &= \frac{\varepsilon_0}{1 - R_{1,2}} (1 + R_{1,2} - 2R_{1,2}^{k+1}). \tag{3.49}
 \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'avoir l'expression générale suivante :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{t_c} \varepsilon(t) dt &= 2t_1(\tilde{\varepsilon}_0 + \tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2 + \dots + \tilde{\varepsilon}_k + \dots + \tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}}) + 2t_1(n - \tilde{n})\tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}+1} \\
 &= 2t_1 \sum_{k=0}^{\tilde{n}} \tilde{\varepsilon}_k + 2t_1(n - \tilde{n})\tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}+1} \\
 &= \frac{2t_1\varepsilon_0}{1 - R_{1,2}} \left[(\tilde{n} + 1)(1 + R_{1,2}) - 2R_{1,2} \sum_{k=0}^{\tilde{n}} R_{1,2}^k \right] + \frac{2t_1}{1 - R_{1,2}} (n - \tilde{n}) (1 + R_{1,2} - 2R_{1,2}^{\tilde{n}+2}) \\
 &= \frac{2t_1\varepsilon_0}{1 - R_{1,2}} \left[(\tilde{n} + 1)(1 + R_{1,2}) - 2R_{1,2} \left(\frac{1 - R_{1,2}^{\tilde{n}+1}}{1 - R_{1,2}} \right) + (n - \tilde{n}) (1 + R_{1,2} - 2R_{1,2}^{\tilde{n}+2}) \right]. \tag{3.50}
 \end{aligned}$$

À partir des équations 3.22, 3.23, 3.33, 3.38 et 3.50 nous obtenons une expression analytique du coefficient de restitution qui dépend seulement de x et de α :

$$\begin{aligned}
 Cor(x, \alpha) &= -1 - \frac{c_1^2}{(L_1 + L_2)v_b} \int_0^{t_c} \varepsilon(t) dt \\
 &= -1 + \frac{2(1-x)}{(1 - R_{1,2})} \left[(\tilde{n} + 1)(1 + R_{1,2}) - 2R_{1,2} \left(\frac{1 - R_{1,2}^{\tilde{n}+1}}{1 - R_{1,2}} \right) + (n - \tilde{n}) (1 + R_{1,2} - 2R_{1,2}^{\tilde{n}+2}) \right]. \tag{3.51}
 \end{aligned}$$

3.4.6 Modèle pour le cas particulier $t_c = 2t_1$

Jusqu'à présent nous avons fait l'hypothèse que le temps de contact était donné par $t_c = 2t_1 + 2t_2$ et qu'il n'y avait qu'un seul rebond. Ces hypothèses correspondent à une certaine zone de la figure 3.10 comme nous l'avons expliqué dans la section 3.4.3. Nous allons maintenant prendre le cas particulier où il y a toujours un seul rebond mais cette fois-ci le temps de contact est donné par $t_c = 2t_1$. Ce changement sur le temps de contact correspond à la zone inférieur gauche de la figure 3.10. À partir de ce que nous avons vu sur le schéma de la figure 3.15 et des équations 3.35 et 3.46, nous pouvons facilement calculer l'intégrale de la déformation :

$$\int_0^{t_c} \varepsilon dt = 2t_1 \tilde{\varepsilon}_0 \tag{3.52}$$

car nous avons toujours :

$$\tilde{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0. \tag{3.53}$$

Après calcul et simplification, en utilisant les équations 3.22 et 3.23, on trouve :

$$Cor = 1 - 2x. \tag{3.54}$$

Ce résultat est très intéressant car il n'est rien d'autre que le coefficient de restitution donné par le modèle ICM, si l'on considère le centre de masse du système et des chocs élastiques. Cela signifie que dans la limite où le temps de contact est donné par t_1 , donc par P_1 , nous pouvons appliquer simplement le modèle ICM (voir section 1.2.3 pour plus de détails).

3.4.7 Validité et résultat du modèle

Afin de vérifier la validité du modèle nous allons utiliser l'expression analytique du coefficient de restitution obtenue à l'équation 3.51. Nous observons ce résultat sur la figure 3.18. Nous pouvons remarquer que les résultats sont identiques dans la zone de validité du modèle (zone où $t_c = 2t_1 + 2t_2$ et 1 seul rebond qui correspond environ à l'intervalle $\alpha \in [0.10 ; 0.80]$) si l'on compare avec les résultats de la simulation numérique comme déjà observés sur la figure 3.3.

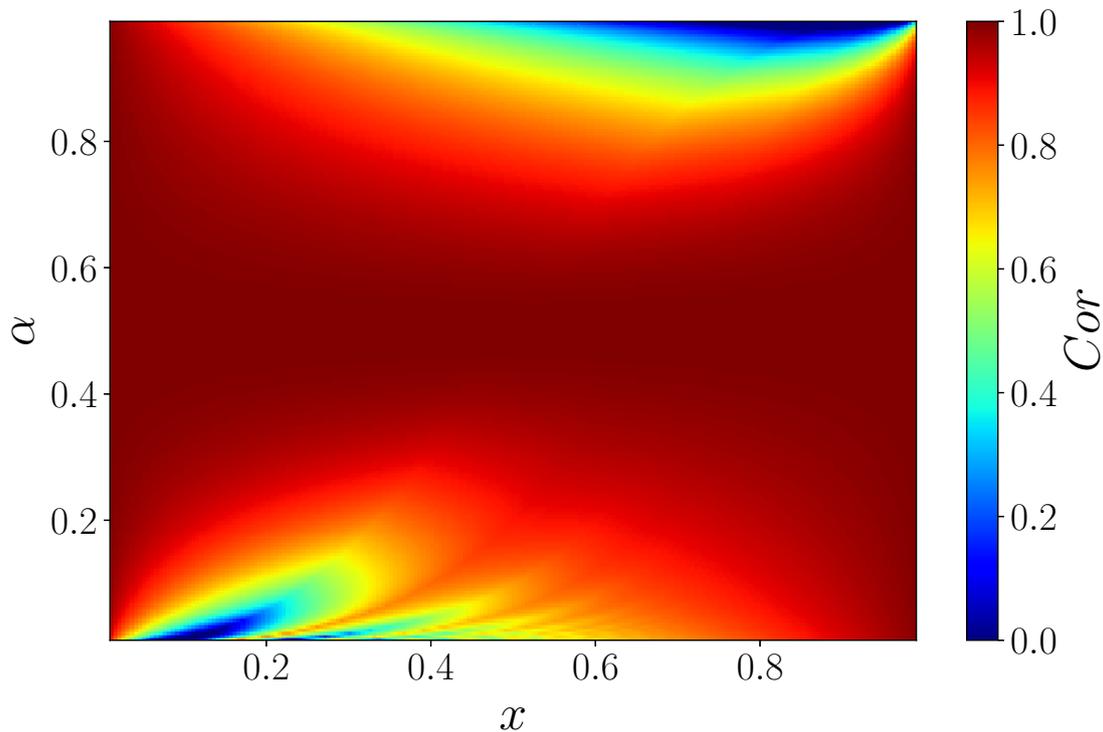


Figure 3.18: Cor en fonction de x et α obtenu avec l'expression analytique de l'équation 3.51.

Nous allons aussi fixer α et varier x et observer le résultat sur la figure 3.19. Nous constatons la superpositions exactes des résultats. Cela n'est pas étonnant puisque la simulation et le modèle sont tous les deux basés sur des phénomènes de propagation d'ondes. Nous pouvons aussi noter que les valeurs entières de n correspondent aux extremums des oscillations du coefficient de restitution comme nous pouvons le voir sur la figure avec $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

Enfin nous allons reprendre l'exemple de $n = 1$ ($t_1 = t_2$) qui correspond à la valeur minimale du coefficient de restitution Cor_{min} pour une valeur de α donnée. Nous avons déjà vu ce résultat sur la figure 3.6. Ici nous allons rajouter la comparaison avec le modèle sur la figure 3.20. On se focalise d'abord sur l'intervalle $0.1 < \alpha < 0.8$ qui correspond à la zone de validité du modèle (zone pour laquelle $t_c = 2t_1 + 2t_2$ et pas de multiples rebonds, zone bleu turquoise de la figure 3.10). On voit bien qu'il y a une superposition entre les valeurs de la simulation (points bleus) et les valeurs du modèle (courbe noire). Cette superposition se retrouve donc aussi sur la comparaison entre les valeurs de x_{min} données par la simulation et le modèle comme observé sur la figure 3.21.

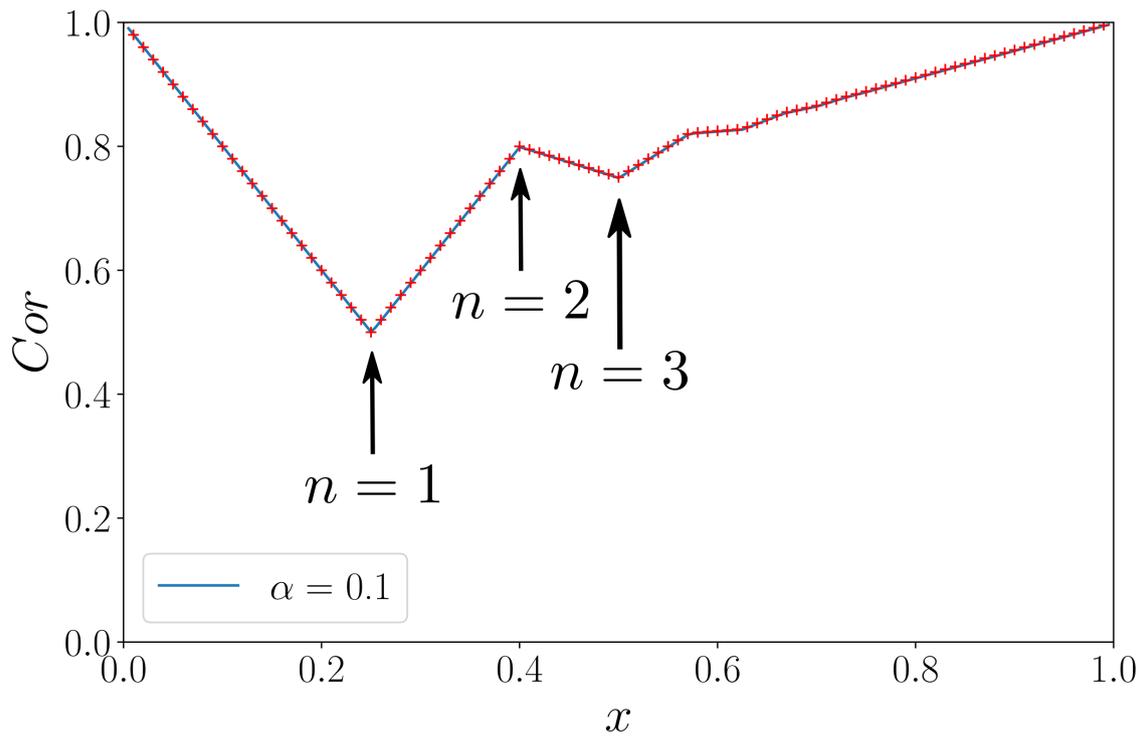


Figure 3.19: Cor pour $\alpha = 0.1$. Comparaison entre les valeurs données par la simulation (trait bleu) et par l'approche analytique (points rouges).

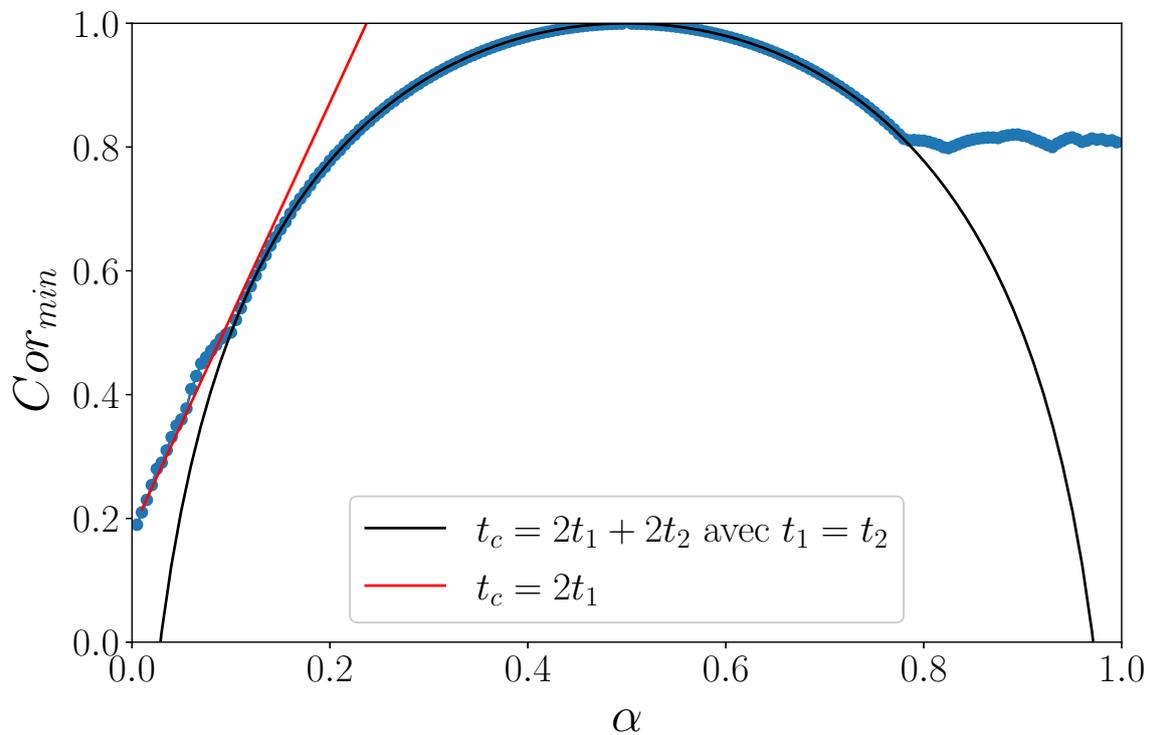


Figure 3.20: Coefficient de restitution minimale (Cor_{min}) en fonction de α . Nous superposons les résultats donnés par le modèle.

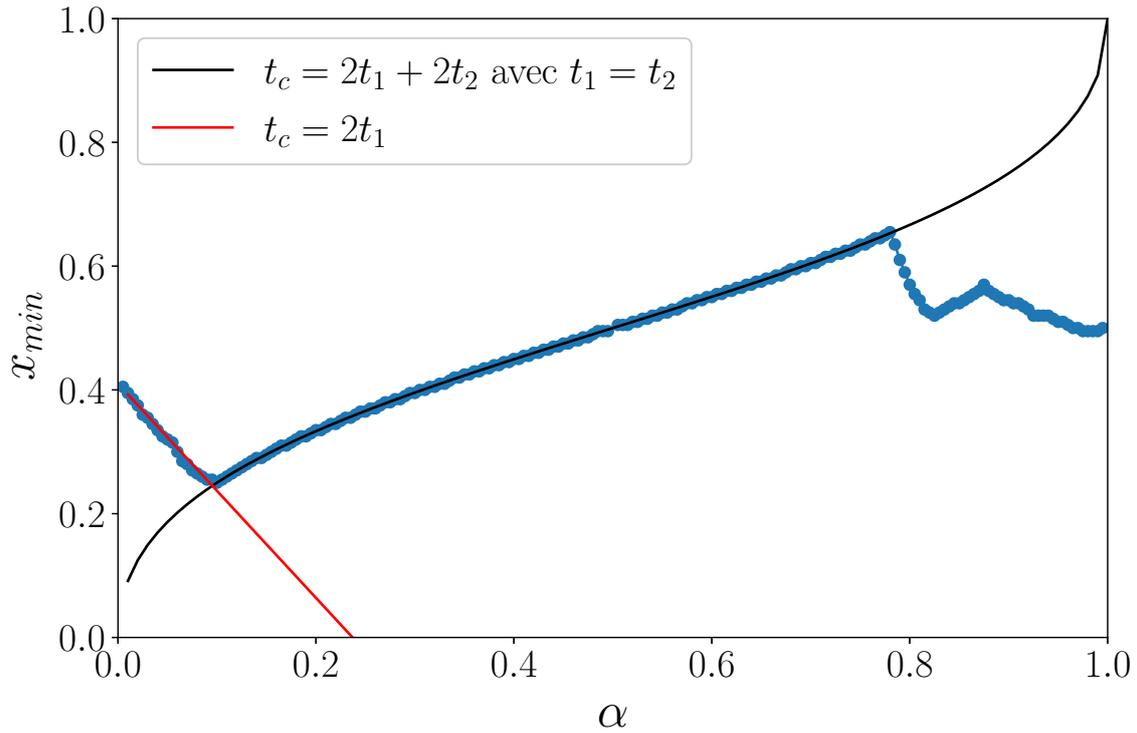


Figure 3.21: La proportion pour laquelle le Cor_{min} est trouvé. Nous superposons les résultats donnés par le modèle.

Toujours sur les figures 3.20 et 3.21, nous allons nous intéresser à la zone $0 < \alpha < 0.1$. Dans cette zone nous allons appliquer le cas particulier pour lequel $t_c = 2t_1$. Cependant il n'existe pas de relation analytique entre x et n (et donc entre x et α voir équation 3.33) pour ce cas. Nous allons alors utiliser les valeurs de la figure 3.21 afin de trouver une relation (ajustement linéaire) entre x et n . Une fois ce lien établi nous sommes alors capables de calculer Cor_{min} et on peut observer la superposition entre les résultats de la simulation (points bleus) et les valeurs de cas particulier (courbe rouge) sur la figure 3.20 dans la zone $0 < \alpha < 0.1$.

Enfin pour la zone $\alpha > 0.8$, nous pouvons remarquer qu'aucune des 2 courbes (rouge ou noir) ne vient se superposer aux résultats de la simulation. Cela s'explique facilement par le fait que pour $\alpha > 0.8$ le temps de contact est plus grand que $t_c = 2t_1 + 2t_2$ (voir figure 3.10) et que de multiples rebonds sont observés (voir figure 3.8). Les 2 hypothèses du modèle ne sont donc plus valides.

3.5 Résultats pour un projectile bicomposite sans adhésion

Dans cette section nous allons changer la chaîne en libérant une contrainte. À partir de maintenant nous autorisons le fait qu'il y ait décollage, décrochage, entre la partie P_1 et la partie P_2 . Pour ce faire nous allons considérer que le contact entre P_1 et P_2 se fait via le dernier ressort de P_1 (voir le schéma de la figure 3.1). Comme pour le contact avec le substrat, la force est effective (et donc le contact est effectif) seulement lorsque le ressort est en compression. Avec ce nouveau système nous allons obtenir le Cor , le temps de décollage t_c et le nombre de rebonds pour la partie P_1 et pour la partie P_2 . Les résultats seront nommés avec en indice 1 ou 2.

Avant de s'intéresser aux résultats concernant les deux parties séparées, il est intéressant de noter que les différences entre les deux systèmes sont faibles concernant le coefficient de restitution du barycentre comme nous le voyons sur la figure 3.22.

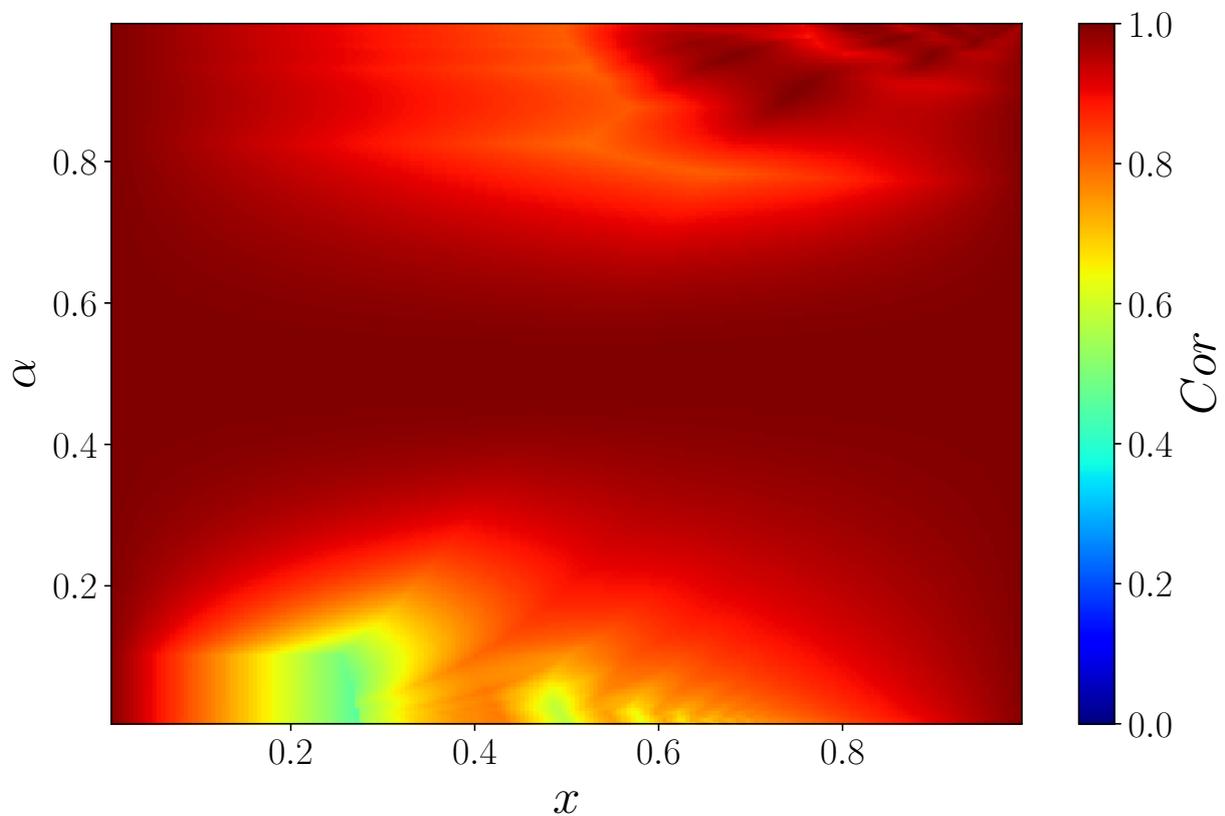


Figure 3.22: Cor en fonction de x et de α pour la chaîne entière.

Par contre comme nous allons le voir, les coefficients de restitution des deux parties prises séparément peuvent fortement dévier du coefficient de restitution global, ce qui veut dire que la partie haute peut potentiellement repartir avec une vitesse significativement plus grande que la partie basse. Nous avons déjà vu ce cas de figure dans l'introduction (chapitre 1), pour le problème du rebond à deux balles et avons vu comment le modèle ICM permet de trouver une vitesse plus grande que la vitesse initiale (section 1.2.3).

3.5.1 Coefficients de restitution

Sur la figure 3.23 on peut observer le coefficient de restitution de P_1 noté Cor_1 . Nous remarquons que celui-ci tend vers 1 lorsque x tend vers 0 ou α tend vers 0.5. On peut aussi séparer le graphique en deux zones selon que $\alpha < 0.5$ ou $\alpha > 0.5$. Enfin lorsque α tend vers 0.5 la restitution tend vers 1.

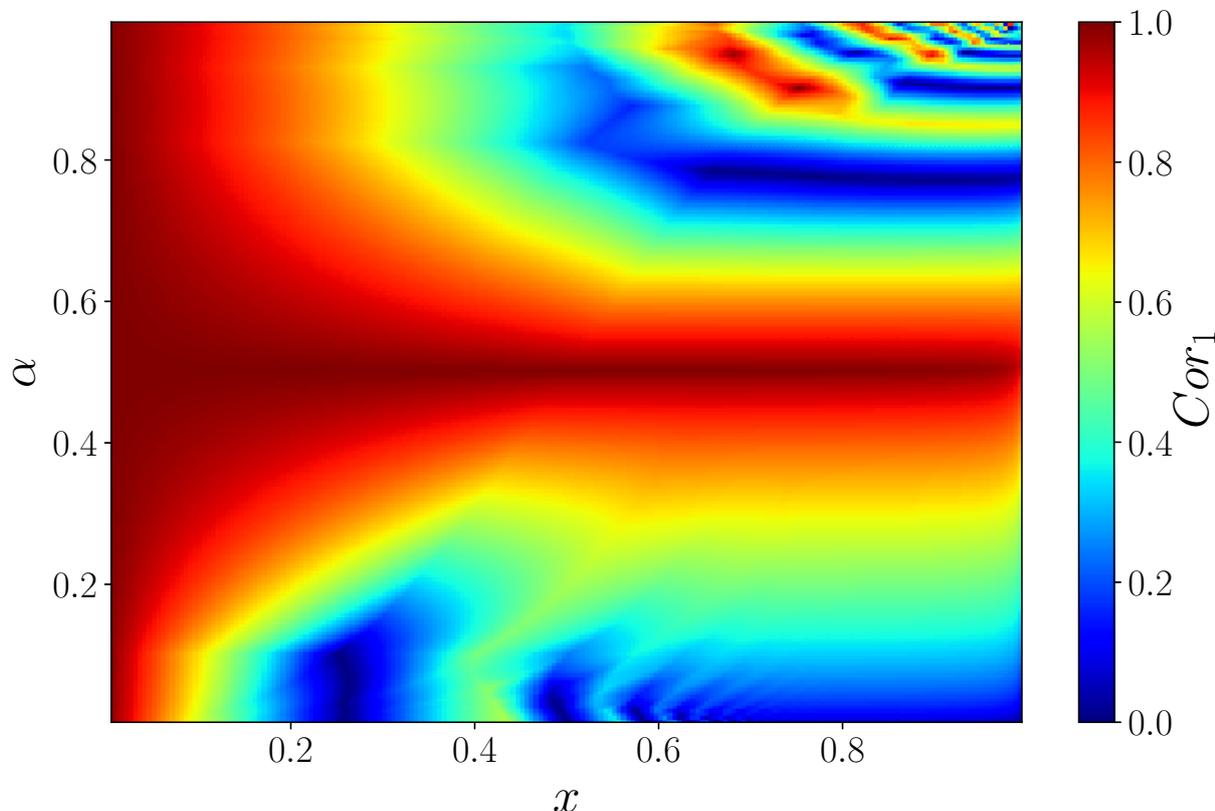


Figure 3.23: Cor_1 en fonction de x et de α pour P_1 .

Sur la figure 3.24, nous observons le Cor_1 en fonction de x pour différents $\alpha < 0.5$. On remarque qu'il y a d'abord une décroissance du coefficient de restitution qui n'est plus linéaire. Puis une oscillation du coefficient de restitution qui en fonction de α présente une amplitude plus ou moins importante. Enfin ces oscillations sont suivies par un plateau. Nous notons que plus α tend vers 0, plus ce plateau diminue et plus l'amplitude des oscillations augmente. À la fin de ces plateaux on voit un "décrochage" final dans la valeur du coefficient de restitution. Sur la figure 3.25, on observe le Cor_1 en fonction de x pour différents $\alpha > 0.5$. Comme dans la zone précédente il y a une diminution du coefficient de restitution puis apparition soit d'un plateau ($0.5 < \alpha < 0.8$) soit d'oscillations ($\alpha > 0.8$). Nous notons que plus α tend vers 1 plus le caractère oscillant est important.

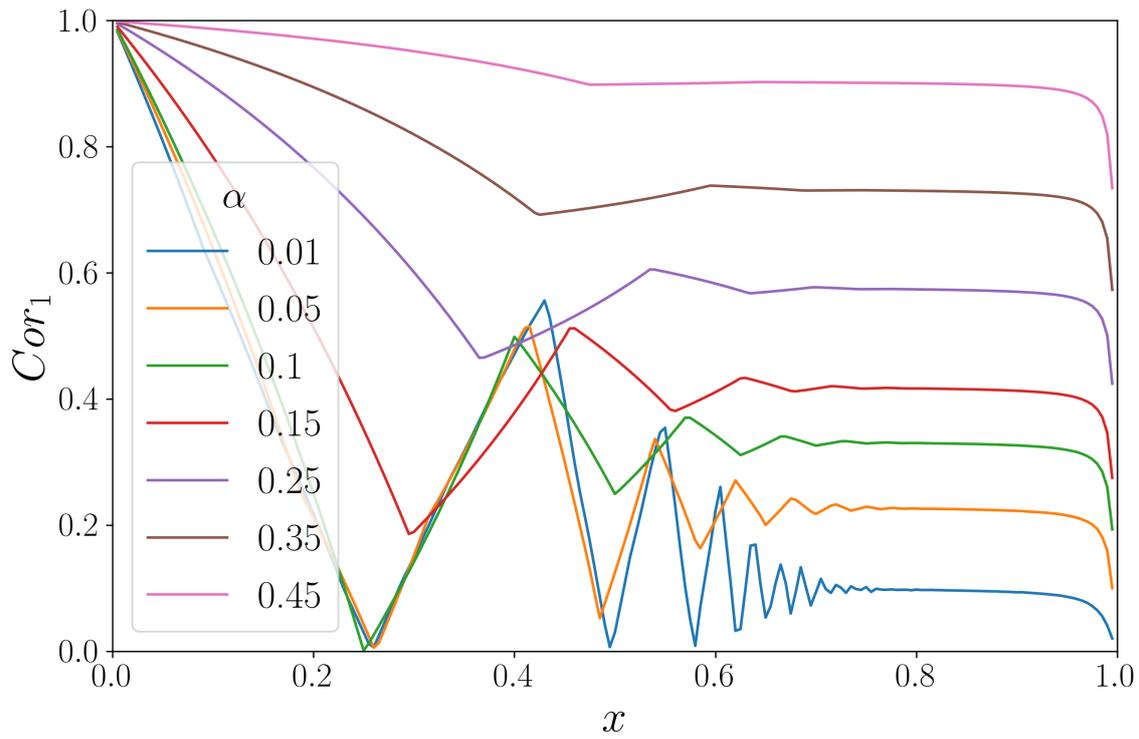


Figure 3.24: Cor_1 en fonction de x et de α pour $\alpha < 0.5$, pour P_1 .

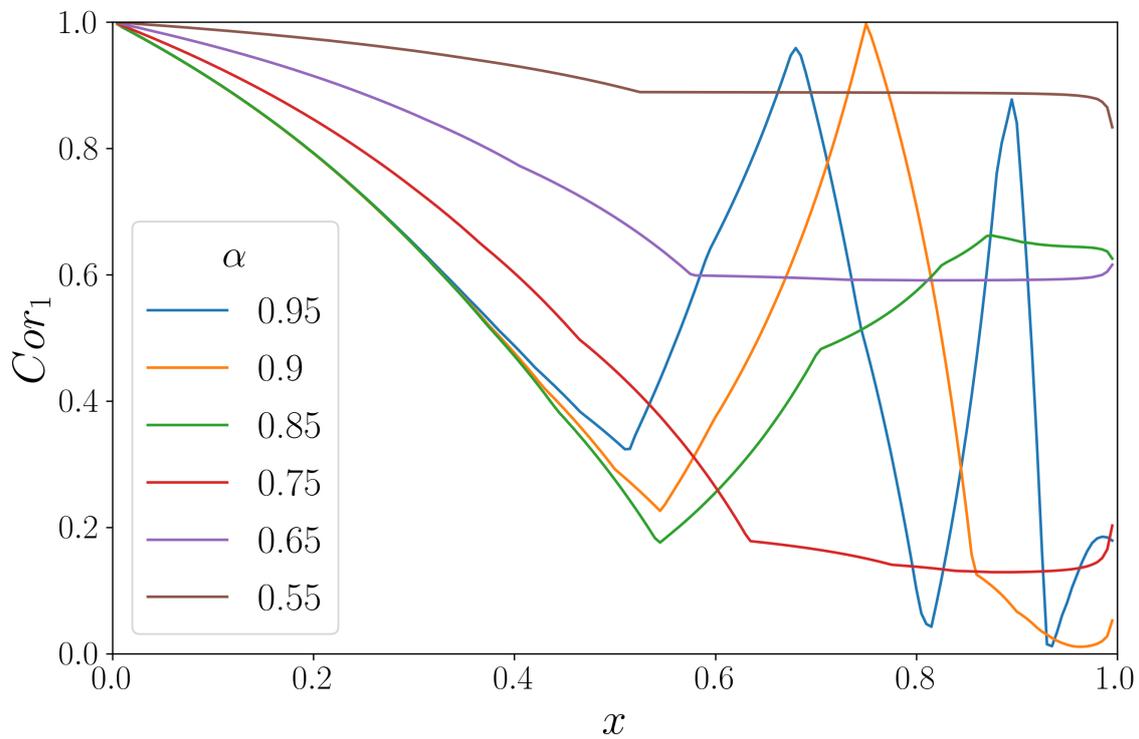


Figure 3.25: Cor_1 en fonction de x et de α pour $\alpha > 0.5$, pour P_1 .

Sur la figure 3.26 on peut observer cette fois-ci le coefficient de restitution de la partie P_2 noté Cor_2 . Nous remarquons que celui-ci est toujours supérieur à 1 contrairement à tout ce que l'on a vu jusqu'à présent. Là encore on peut le séparer en deux zones. Une zone dans laquelle $\alpha < 0.5$ avec un coefficient de restitution qui varie fortement, notamment lorsque x tend vers 0 il tend vers 2.5. Pour la deuxième zone, dans laquelle $\alpha > 0.5$, la restitution varie plus faiblement avec une variation comprise entre 1 et 1.5.

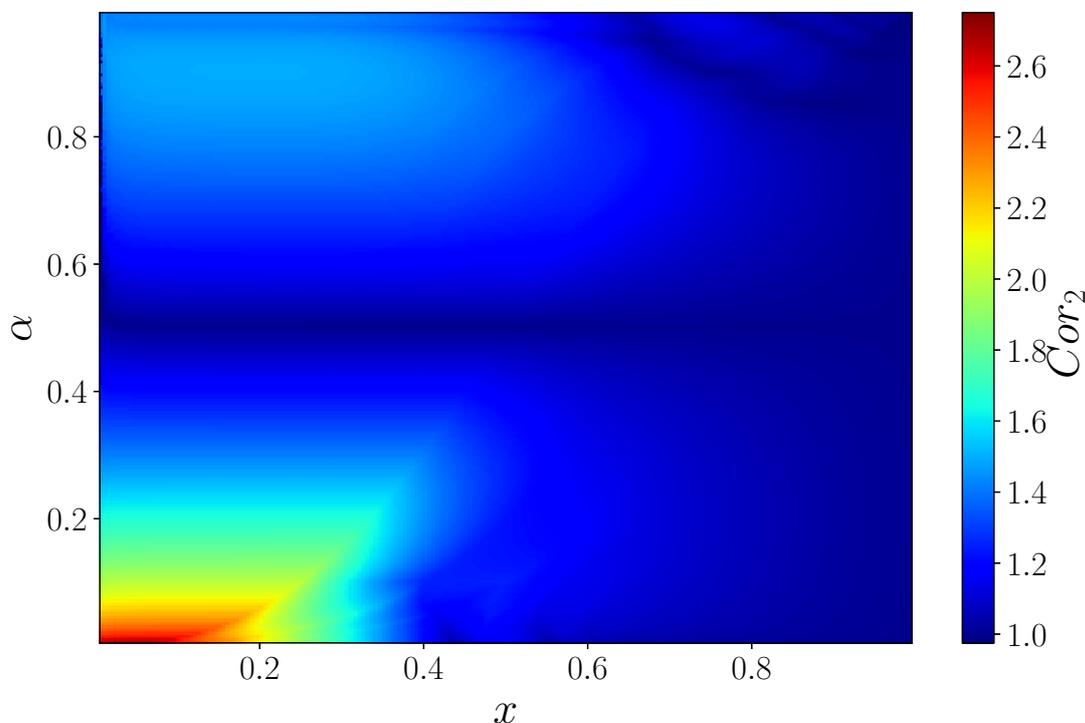


Figure 3.26: Cor_2 en fonction de x et de α pour P_2 .

Sur la figure 3.27, on observe le Cor_2 en fonction de x pour différents $\alpha < 0.5$. Nous voyons d'abord apparaître un plateau avec des valeurs comprises entre 1.10 et 2.50, qui dépendent de la valeur de α . Ces plateaux sont suivis d'une décroissance du coefficient de restitution qui tend vers 1 lorsque x tend vers 1 quelque soit α . Sur la figure 3.28, on observe le Cor_2 en fonction de x pour différents $\alpha > 0.5$. Nous voyons aussi apparaître un plateau avec des valeurs inférieures au cas précédent et des valeurs comprises entre 1 et 1.5. Apparaît ensuite une décroissance du coefficient de restitution et l'apparition d'oscillations lorsque α tend vers 1. Encore une fois, le Cor_2 a toujours une valeur plus grande que 1.

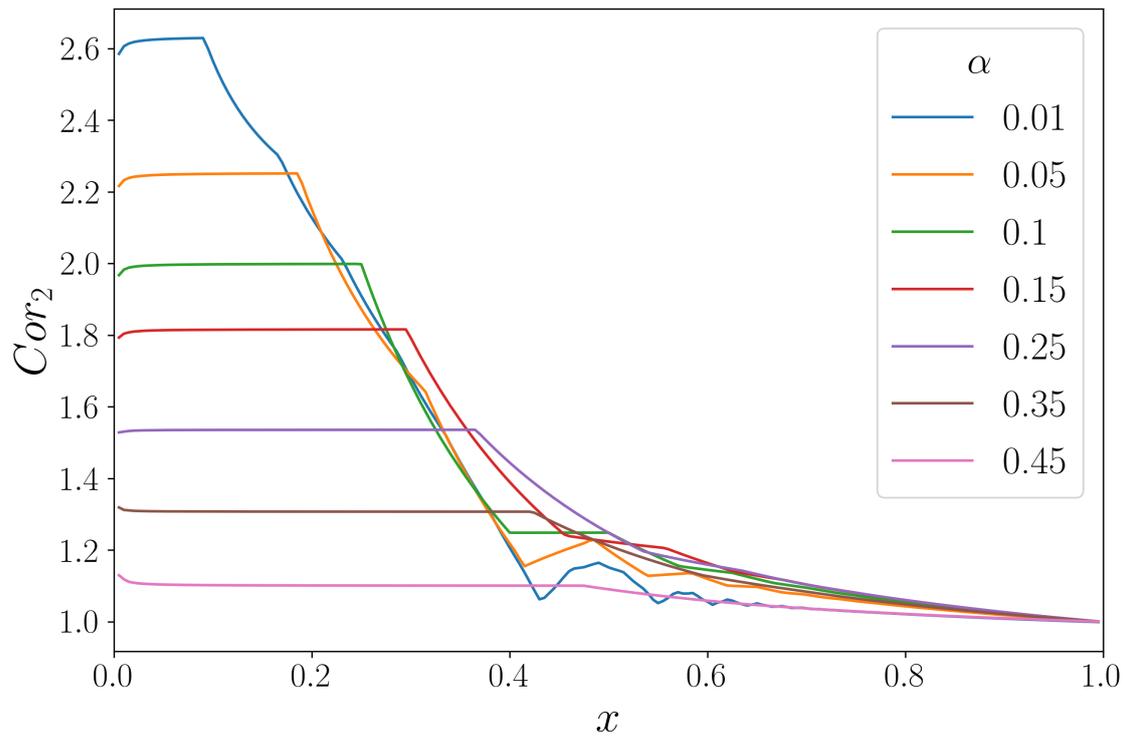


Figure 3.27: Cor_2 en fonction de x et de α pour $\alpha < 0.5$, pour P_2 .

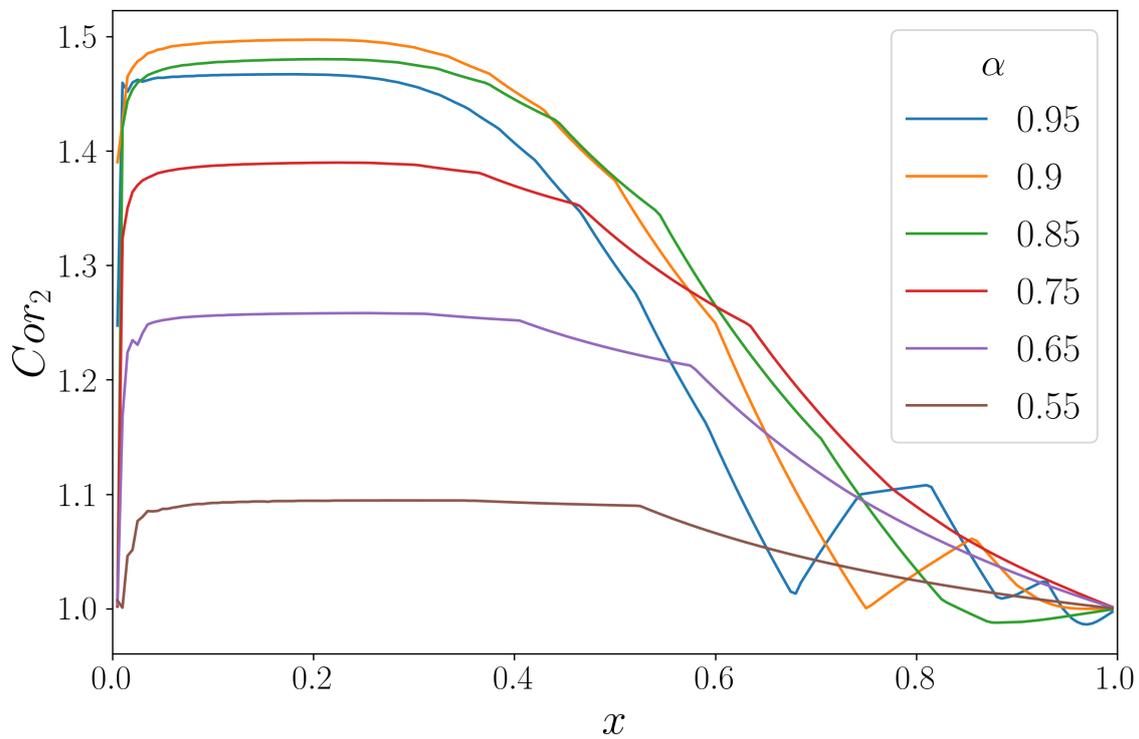


Figure 3.28: Cor_2 en fonction de x et de α pour $\alpha > 0.5$, pour P_2 .

3.5.2 Nombre de rebonds

Nous allons maintenant nous intéresser au nombre de rebonds pour toutes les valeurs de x et α pour la partie P_1 . Nous observons les résultats sur la figure 3.29, ici encore la limite est fixée à 10 rebonds pour faciliter l'observation. Nous pouvons faire les mêmes remarques que pour la chaîne cohésive (voir figure 3.8) c'est-à-dire une séparation en trois zones. La première zone correspond à l'intervalle $\alpha \in [0.20 ; 0.80]$ où l'on observe que le nombre de rebonds vaut 1. La deuxième zone correspond à l'intervalle $\alpha \in [0.80 ; 1]$, zone dans laquelle le nombre de rebonds fluctue. La troisième zone se situe dans le bord inférieur gauche où là aussi nous observons un seul rebond. Globalement, nous remarquons que les figures 3.8 et 3.29 sont très similaires.

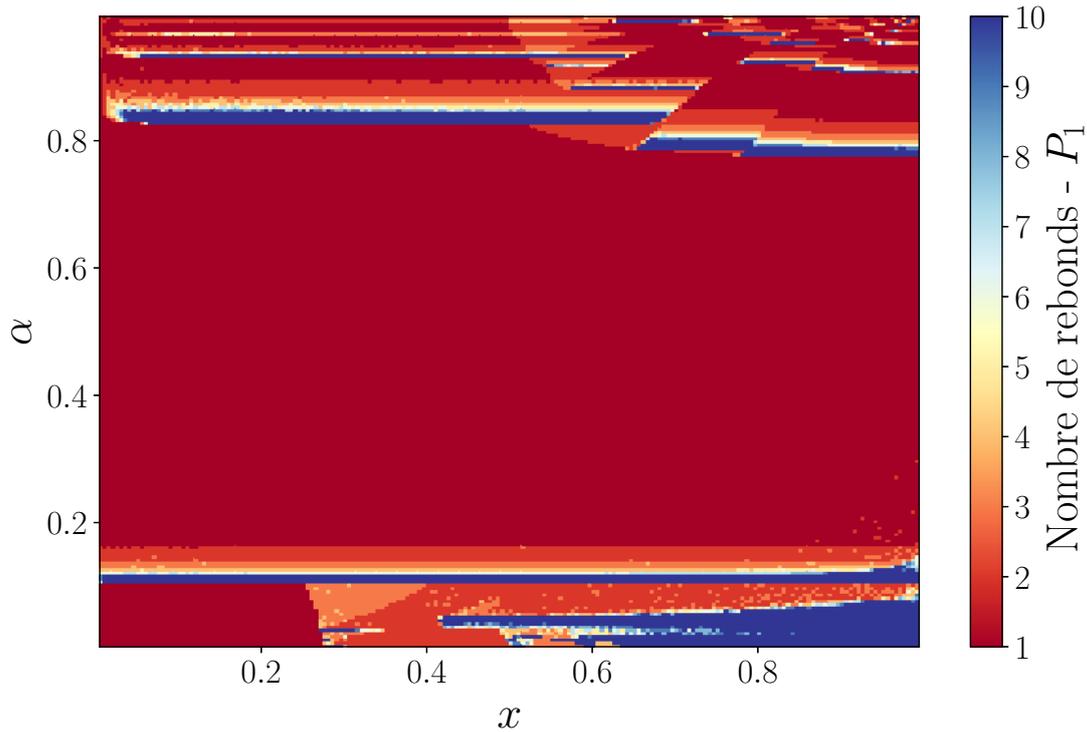


Figure 3.29: Nombre de rebonds pour P_1 . La limite supérieure est fixée à 10 pour des facilités d'observation.

Là encore, il faut souligner le caractère sensible des résultats tel que nous l'avons déjà fait remarquer dans la section sur la chaîne cohésive. Nous aurions pu montrer le nombre de rebonds en fonction de x et α pour la partie P_2 mais les résultats sont encore plus sensibles et bruités. Ils ne permettent pas de dégager des tendances.

3.5.3 Temps de décollage

Comme déjà vérifié pour le projectile en adhésion sur la figure 3.9(a), nous avons aussi vérifié dans le cas du projectile sans adhésion que le temps de simulation est supérieur au temps de contact. Nous allons maintenant nous intéresser au temps de décollage de la partie P_1 pour toutes nos valeurs de x et de α , normalisé par $(2t_1 + 2t_2)$ et nous observons le résultat sur la figure 3.30. Là encore nous pouvons faire les mêmes remarques que pour la figure 3.10. Nous observons que $\frac{t_{c,1}}{2t_1 + 2t_2} = 1$ sur une large partie de la figure (zone centrale). Le temps de contact est donné par le temps nécessaire aux ondes pour faire l'aller-retour dans le projectile. Il existe aussi une corrélation entre les zones où $\frac{t_{c,1}}{2t_1 + 2t_2}$ diffère de 1 et les zones où le nombre de rebonds de P_1 diffère aussi de 1. La deuxième zone remarquable est dans le bord inférieur gauche, dans cette zone nous avons $t_{c,1} = 2t_1$. La dernière zone remarquable est la zone où $\alpha > 0.8$, dans cette zone le temps de contact est supérieur à $2t_1 + 2t_2$.

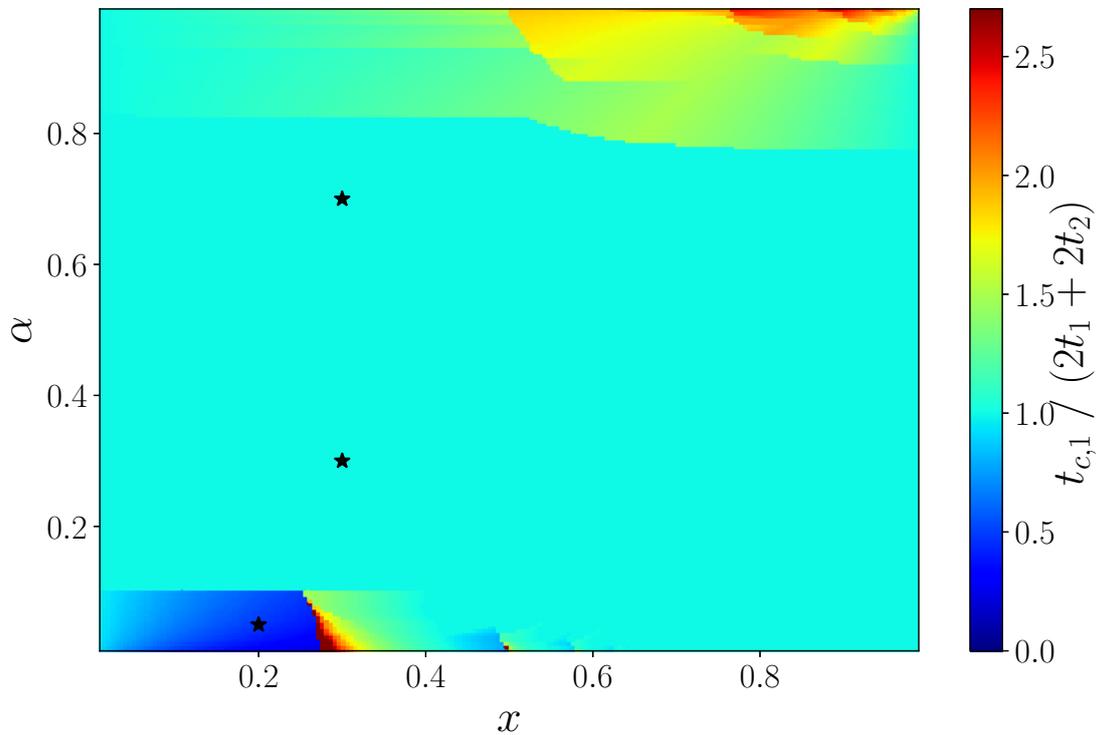


Figure 3.30: $\frac{t_{c,1}}{2t_1 + 2t_2}$ en fonction de x et α pour P_1 . Les étoiles noires indiquent les points dont on verra la visualisation avec *VMD* sur les figures 3.32, 3.33 et 3.34.

Nous allons maintenant nous intéresser au temps de décollage $t_{c,2}$ de la partie P_2 , figure 3.31, pour toutes nos valeurs de x et de α . Il est important de noter que nous imposons une limite supérieure de $\frac{t_{c,2}}{2t_1 + 2t_2} = 2.7$ sur le graphique pour faciliter l'observation. Le graphique présente des discontinuités, notamment autour de $\alpha = 0.5$. Cette discontinuité n'était pas observée pour $t_{c,1}$.

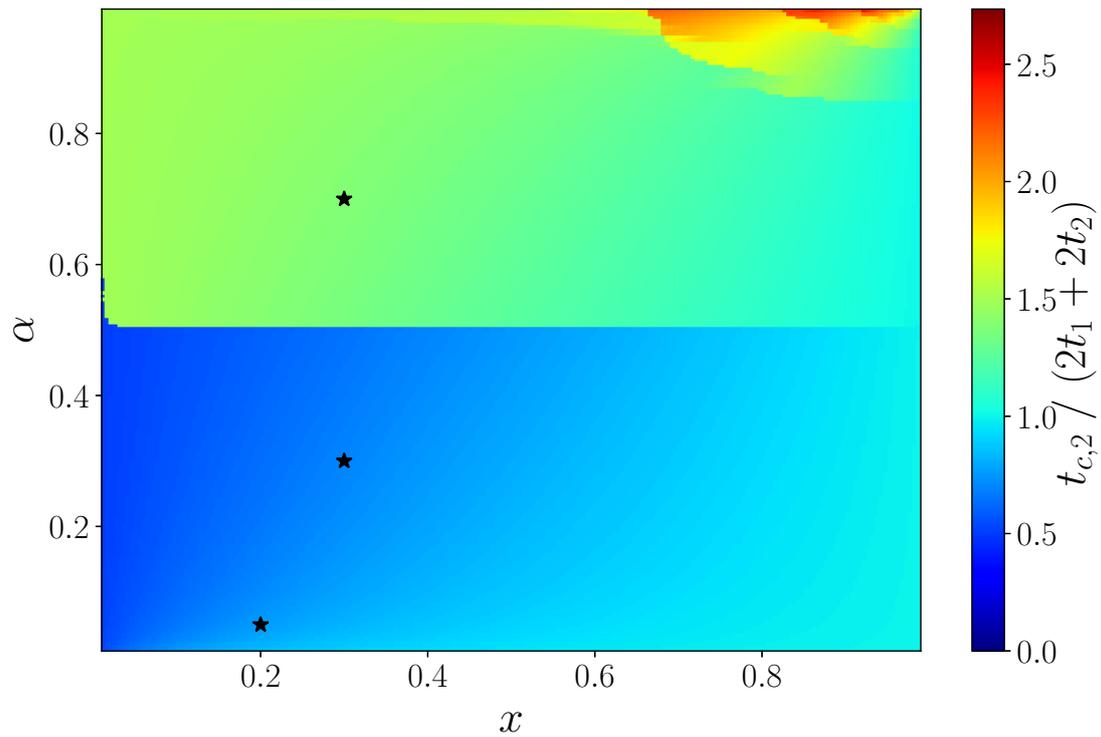


Figure 3.31: $\frac{t_{c,2}}{2t_1 + 2t_2}$ en fonction de x et α pour P_2 . Les étoiles noires indiquent les points dont on verra la visualisation avec *VMD* sur les figures 3.32, 3.33 et 3.34.

Comme nous l'avons fait pour la partie adhésion nous allons utiliser *VMD* afin d'observer trois points spécifiques de ces graphiques qui sont représentés par des étoiles noires. L'observation et l'analyse de ces trois points va nous permettre de comprendre l'effet de t_1 et t_2 sur $t_{c,1}$ et $t_{c,2}$.

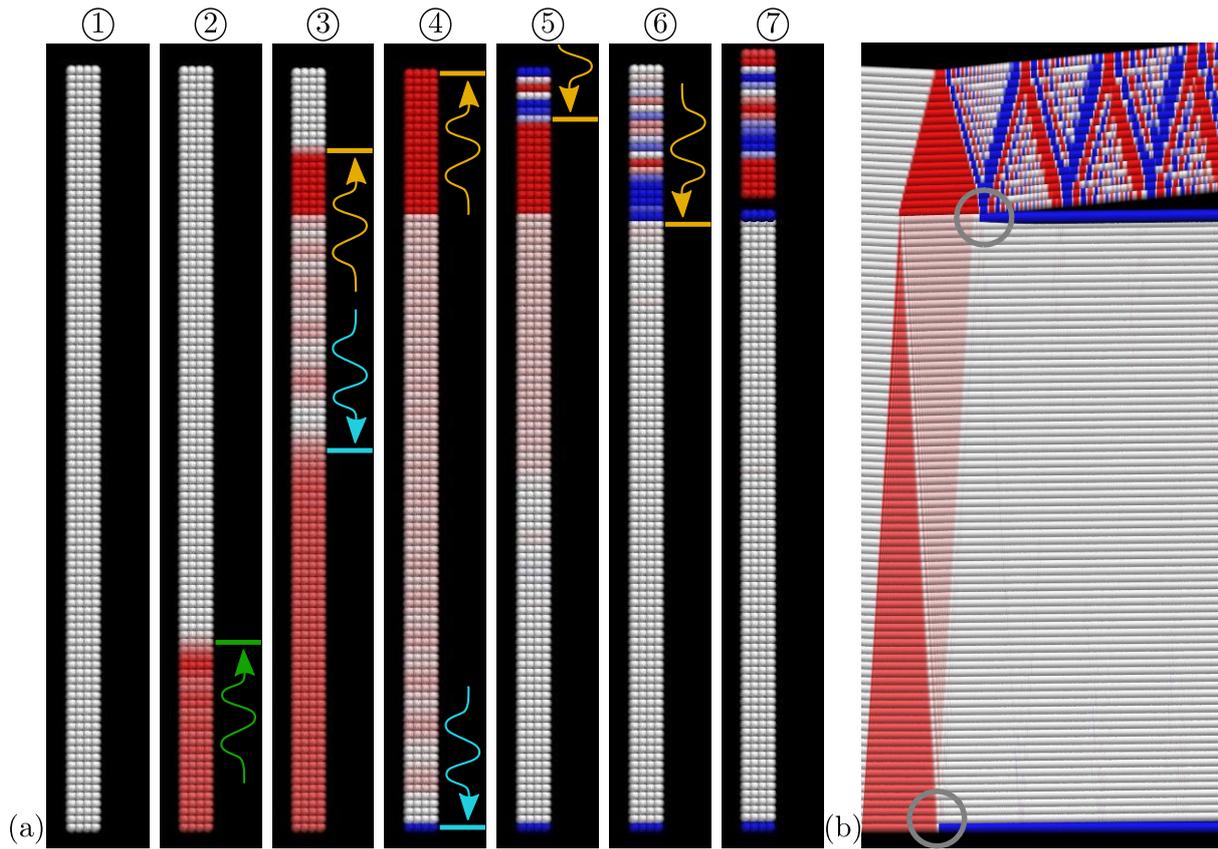


Figure 3.32: Visualisation avec *VMD* de la chaîne avec $x = 0.2$ et $\alpha = 0.05$: Illustration de $t_{c,1} = 2t_1$ et $t_{c,2} = t_1 + 2t_2$.

Le premier point que l'on va observer a une configuration $x = 0.2$ et $\alpha = 0.05$. Sur la séquence d'images de la figure 3.32(a) nous pouvons observer tout d'abord la chaîne au repos sur l'image 1. Les différentes couleurs des masses ont déjà été expliquées et sont identiques aux séquences précédentes, nous ne les expliciterons pas ici. Après l'impact, sur l'image 2, nous voyons la propagation d'une onde de compression indiquée par une flèche verte. Cette onde va atteindre l'interface et se divisée en une partie transmise dans P_2 (flèche or) et une réfléchiée vers le bas de P_1 (flèche bleue) tel que nous le voyons sur l'image 3. Lorsque cette onde arrive en bas de P_1 , image 4, la masse 0 passe en bleu et donc la partie P_1 décolle. Pendant ce temps, sur les images 4 et 5, l'onde représentée par une flèche or va faire l'aller-retour dans P_2 et arriver à l'interface à l'image 6. Lorsque l'onde arrive à l'interface, la partie P_2 décolle. Sur l'image 7, on voit clairement que les deux parties ont décollé avec des vitesses différentes. Ces images permettent de mettre en évidence que

$$t_{c,1} = 2t_1 \text{ et } t_{c,2} = t_1 + 2t_2$$

pour $x = 0.2$ et $\alpha = 0.05$. Le diagramme spatio-temporel de la figure 3.32(b), dont les cercles gris indiquent le décollage de P_1 et P_2 , nous permet de faire les mêmes observations.

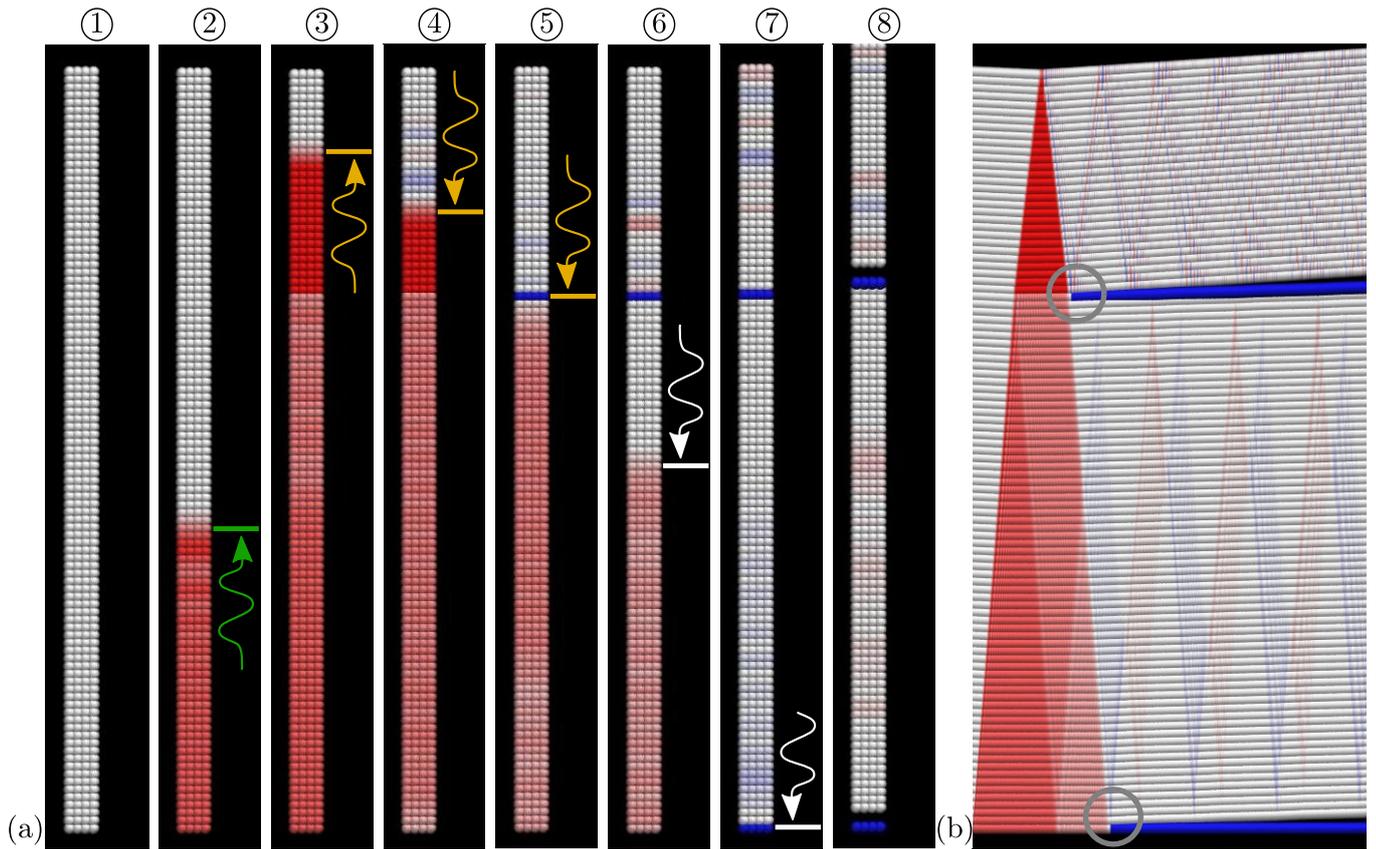


Figure 3.33: Visualisation avec *VMD* de la chaîne avec $x = 0.3$ et $\alpha = 0.3$: Illustration de $t_{c,1} = 2t_1 + 2t_2$ et $t_{c,2} = t_1 + 2t_2$.

Le deuxième point que l'on va observer a une configuration $x = 0.3$ et $\alpha = 0.3$. Sur la séquence d'image de la figure 3.33(a), nous observons d'abord la chaîne au repos sur l'image 1. Sur l'image 2, après l'impact, il y a propagation d'une onde dans la chaîne. Cette onde va se transmettre dans la partie P_2 et va être indiquée par une flèche or sur l'image 3. Cette onde est réfléchiée par le bord supérieur et redescend vers le bas de P_2 comme on le voit sur l'image 4. Cette onde va arriver à l'interface, sur l'image 5, ce qui va provoquer le décollement de la partie P_2 . Une partie de l'onde, indiquée par une flèche blanche sur l'image 6, va ensuite être transmise à P_1 . Lorsque cette onde arrive à la masse 0 la partie P_1 va décoller comme nous le voyons sur l'image 7. Ces images permettent de mettre en évidence que

$$t_{c,1} = 2t_1 + 2t_2 \text{ et } t_{c,2} = t_1 + 2t_2$$

pour $x = 0.3$ et $\alpha = 0.3$. Le diagramme spatio-temporel de la figure 3.33(b) nous permet de faire les mêmes observations.

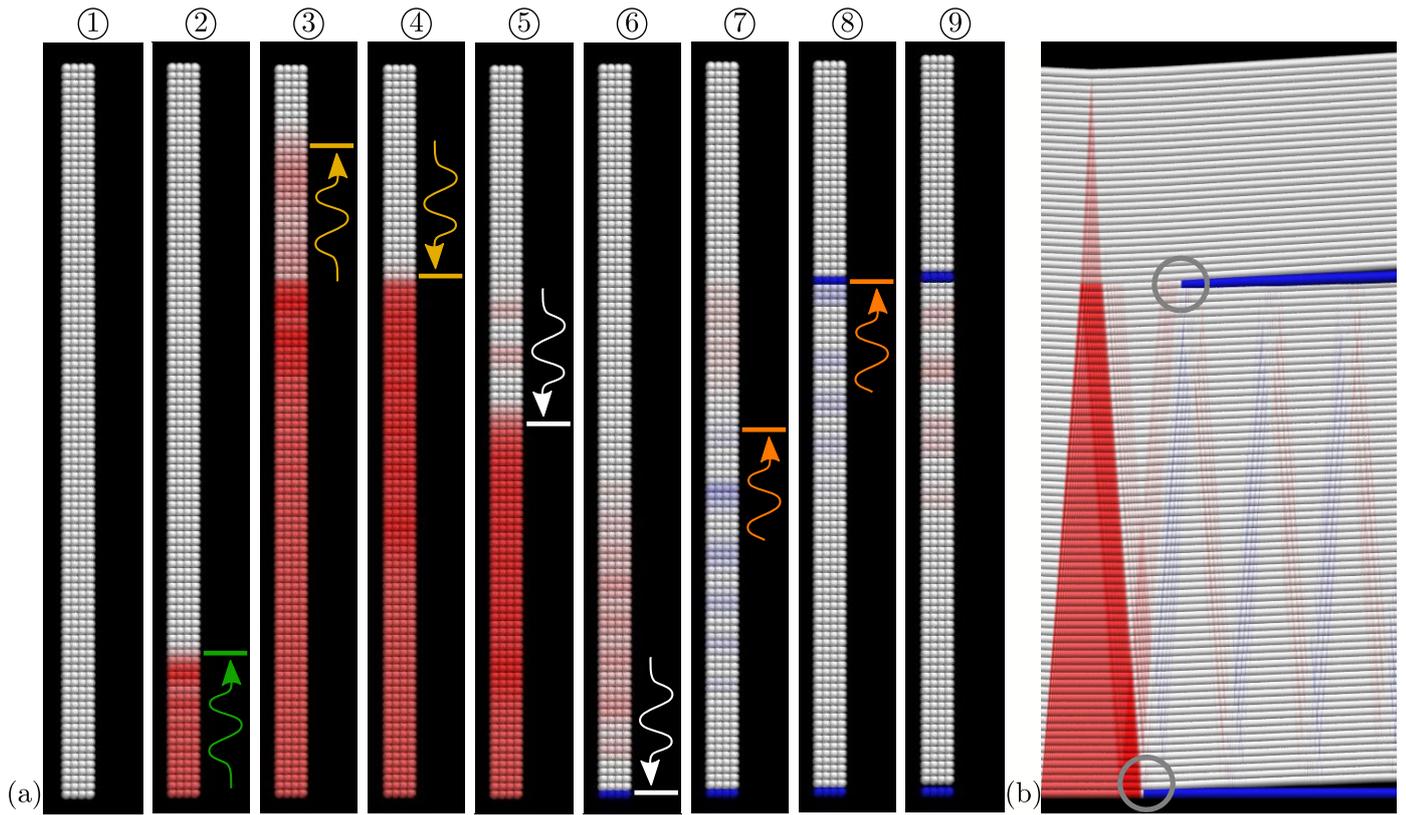


Figure 3.34: Visualisation avec *VMD* de la chaîne avec $x = 0.3$ et $\alpha = 0.7$: Illustration de $t_{c,1} = 2t_1 + 2t_2$ et $t_{c,2} = 3t_1 + 2t_2$.

Le troisième point que l'on va observer a une configuration $x = 0.3$ et $\alpha = 0.7$. Sur la séquence d'images de la figure 3.34(a), nous observons d'abord la chaîne au repos sur l'image 1. Sur l'image 2, après l'impact, il y a propagation d'une onde dans la chaîne indiquée par une flèche verte. Concernant les images 3 et 4 on voit comme précédemment une transmission puis une réflexion de cette onde dans la partie P_2 , indiquée par une flèche blanche. L'onde est ensuite transmise à la partie P_1 comme nous le voyons sur l'image 5 et l'indication de la flèche blanche. Lorsque cette onde arrive en bas de la partie P_1 , sur l'image 6, il y a alors décollage de celle-ci. Une onde est alors réfléchiée dans P_1 , indiquée par une flèche orange sur l'image 7. Cette onde arrive à l'interface, sur l'image 8, et fait décoller la partie P_2 . Sur l'image 9, on voit que les deux parties ont finalement décollé. Ces images permettent de mettre en évidence que

$$t_{c,1} = 2t_1 + 2t_2 \text{ et } t_{c,2} = 3t_1 + 2t_2$$

pour $x = 0.3$ et $\alpha = 0.7$. Le diagramme spatio-temporel de la figure 3.34(b) nous permet de faire les mêmes observations.

Comme dans la partie adhésion nous allons faire l'hypothèse qu'une large partie des configurations possibles peut être décrite sous la forme suivante :

$$\begin{cases} t_{c,1} = n_{1,1}t_1 + 2t_2 \\ t_{c,2} = n_{1,2}t_1 + 2t_2 \end{cases} \quad (3.55)$$

avec $n_{1,1}$ et $n_{1,2}$, respectivement, le nombre d'allers de l'onde dans la partie P_1 et P_2 selon les cas où l'on s'intéresse à $t_{c,1}$ ou bien à $t_{c,2}$. Nous allons alors tracer en fonction de x et de α , $n_{1,1}$ sur la figure 3.35 et $n_{1,2}$ sur la figure 3.36.

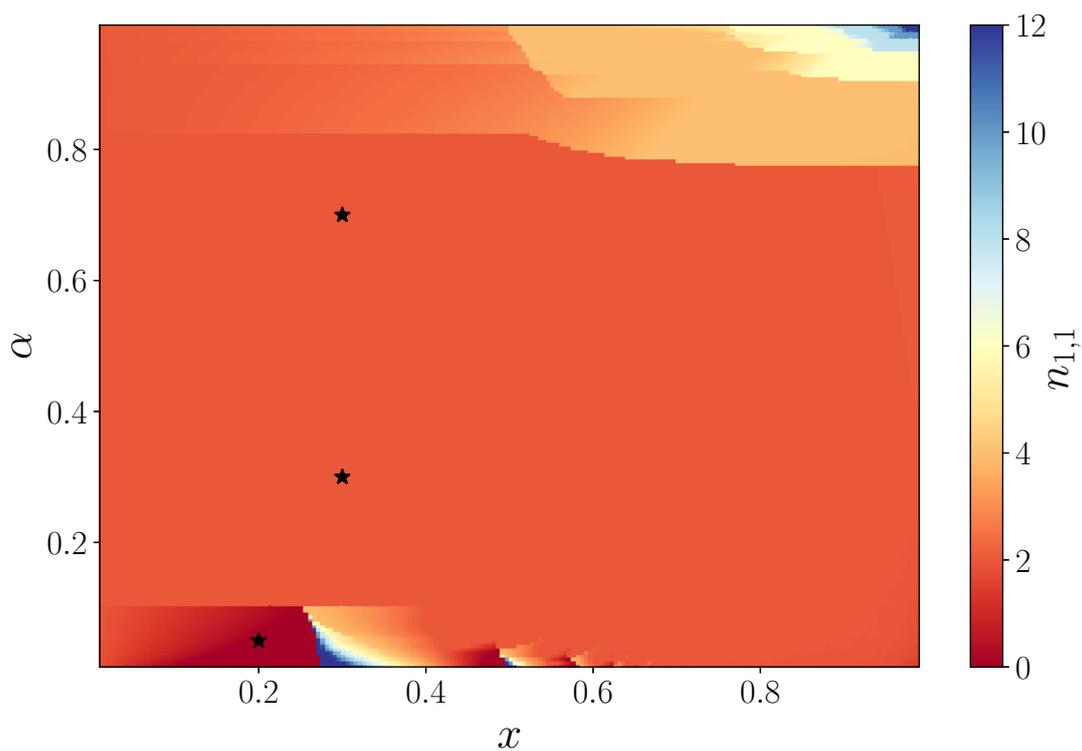


Figure 3.35: $n_{1,1}$ en fonction de x et de α . La limite supérieure est fixée à 12 pour des facilités d’observation. Les étoiles noires indiquent les points dont on a vu la visualisation avec *VMD* sur les figures 3.32, 3.33 et 3.34.

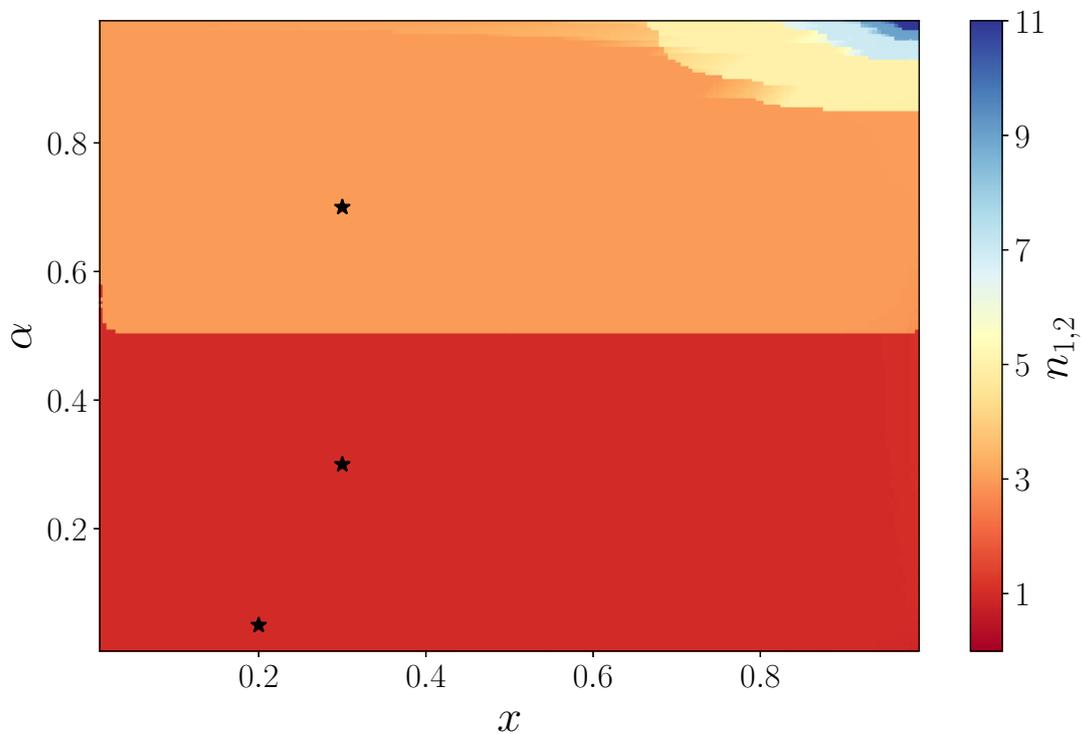


Figure 3.36: $n_{1,2}$ en fonction de x et de α . La limite supérieure est fixée à 11 pour des facilités d’observation. Les étoiles noires indiquent les points dont on a vu la visualisation avec *VMD* sur les figures 3.32, 3.33 et 3.34.

Sur la figure 3.35, nous pouvons observer que les valeurs de $n_{1,1}$ sont paires et valent $n_{1,1} = 2, 4, 6, \text{etc.}$ en fonction des bandes de couleurs. Cela signifie que l'onde fait un certain nombre d'allers-retours dans P_1 avant que la partie P_1 décolle. Sur la figure 3.36, nous pouvons observer que les valeurs de $n_{1,2}$ sont impaires et valent $n_{1,2} = 1, 3, 5, \text{etc.}$ en fonction des bandes de couleurs. Cela signifie que l'onde fait un certain nombre d'allers-retours puis un aller dans P_1 avant que la partie P_2 décolle. Ces valeurs de $n_{1,1}$ et $n_{1,2}$ permettent donc de mieux comprendre les zones présentes sur les figures 3.30 et 3.31, ainsi que de mettre en évidence le lien entre le nombre d'allers de l'onde dans la partie P_1 et l'observation du décollage de l'une ou l'autre des parties.

3.6 Modèle : Propagation d'une onde de déformation élastique, cas sans adhésion

Après avoir vu les résultats de nos simulations numériques nous allons reprendre le modèle de type milieu continu vu à la section 3.4. Ici encore nous considérons que la masse volumique est la même pour P_1 et pour P_2 ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$). Comme précédemment nous allons utiliser la variable n qui nous permet de relier t_1 et t_2 grâce à la relation suivante :

$$t_2 = nt_1 \tag{3.56}$$

avec n un réel. Nous avons aussi \tilde{n} la partie entière inférieure de n et k un entier compris entre 0 et \tilde{n} . Concernant les hypothèses faites dans cette section, elles sont au nombre de trois, et deux d'entre elles sont les mêmes que pour le cas en adhésion. La première est de considérer qu'il n'y a pas de multiples rebonds, ce choix est justifié pour simplifier les calculs. La deuxième concerne le temps de contact de la partie P_1 , nous faisons l'hypothèse que celui-ci est donné par $t_{c,1} = 2t_1 + 2t_2$, c'est-à-dire $n_{1,1} = 2$. Ce choix est motivé au vu des résultats de la figure 3.30 sur laquelle nous voyons que c'est cette valeur de $t_{c,1}$ qui domine le graphique. Enfin, la troisième hypothèse concerne le temps de contact de la partie P_2 . Nous faisons l'hypothèse que celui-ci peut prendre deux valeurs : soit $t_{c,2} = t_1 + 2t_2$, soit $t_{c,2} = 3t_1 + 2t_2$, c'est-à-dire respectivement $n_{1,2} = 1$ et $n_{1,2} = 3$. Le choix de ces valeurs est motivé par les comportements observés sur la figure 3.31, figure sur laquelle nous voyons que le temps de contact est principalement donné par l'une ou l'autre de ces valeurs. De plus, nous rappelons que les équations de continuités présentées sont aussi valables dans cette section.

Commençons par appliquer la seconde loi de Newton à z_{P_2} et z_{P_1} , respectivement les barycentres de la partie P_2 et P_1 :

$$m_2 \ddot{z}_{P_2} = -E_2 S \varepsilon_{P_2} \tag{3.57}$$

$$m_1 \ddot{z}_{P_1} = -E_1 S \varepsilon_{P_1} + E_2 S \varepsilon_{P_2}. \tag{3.58}$$

Comme précédemment nous allons considérer une force élastique agissant sur le bas du projectile qui dépend de E_1 le module d'Young de P_1 , de S la surface de contact et de ε_{P_1} la déformation du projectile en $z = 0$. Nous allons aussi considérer la force élastique qui agit sur z_{P_2} , cette force dépend de E_2 le module d'Young de P_2 , de S la surface de contact et de ε_{P_2} la déformation du projectile en $z = L_1^+$. Nous allons comme précédemment intégrer ces équations entre 0 et respectivement $t_{c,2}$ et $t_{c,1}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{c,2}} \ddot{z}_{P_2}(t) dt &= -\frac{E_2 S}{m_2} \int_0^{t_{c,2}} \varepsilon_{P_2}(t) dt \\ \dot{z}_{P_2}(t_{c,2}) - (-v_b) &= -\frac{E_2 S}{\rho S L_2} \int_0^{t_{c,2}} \varepsilon_{P_2}(t) dt \\ \dot{z}_{P_2}(t_{c,2}) &= -v_b - \frac{c_2^2}{L_2} \int_0^{t_{c,2}} \varepsilon_{P_2}(t) dt \end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{t_{c,1}} \ddot{z}_{P_1}(t) dt &= -\frac{E_1 S}{m_1} \int_0^{t_{c,1}} \varepsilon_{P_1}(t) dt + \frac{E_2 S}{m_1} \int_0^{t_{c,1}} \varepsilon_{P_2}(t) dt \\
 \dot{z}_{P_1}(t_{c,1}) - (-v_b) &= -\frac{E_1 S}{\rho S L_1} \int_0^{t_{c,1}} \varepsilon_{P_1}(t) dt + \frac{E_2 S}{\rho S L_1} \int_0^{t_{c,1}} \varepsilon_{P_2}(t) dt \\
 \dot{z}_{P_1}(t_{c,1}) &= -v_b - \frac{c_1^2}{L_1} \int_0^{t_{c,1}} \varepsilon_{P_1}(t) dt + \frac{c_2^2}{L_1} \int_0^{t_{c,1}} \varepsilon_{P_2}(t) dt.
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Il nous est donc maintenant possible de déterminer analytiquement le coefficient de restitution des deux parties P_1 et P_2 dans le cas où celles-ci ne se trouvent plus en adhésion:

$$Cor_2 = \frac{\dot{z}_{P_2}(t_{c,2})}{v_b} \tag{3.61}$$

$$Cor_1 = \frac{\dot{z}_{P_1}(t_{c,1})}{v_b}. \tag{3.62}$$

De nouveau, la connaissance des déformations ε_{P_1} et ε_{P_2} est primordiale pour déterminer la restitution.

Application du modèle en adhésion

Avant de continuer il convient de faire la remarque suivante. Le modèle déjà vu à la section 3.4 peut s'appliquer ici sans aucune modification si l'on s'intéresse au barycentre z du projectile dans sa globalité. Nous retrouvons alors le coefficient de restitution Cor donné par l'équation 3.51 et représenté sur la figure 3.18. Nous pouvons aussi noter que

$$Cor = (1 - x)Cor_1 + xCor_2. \tag{3.63}$$

Dans la suite nous allons nous focaliser sur Cor_2 mais le Cor_1 peut naturellement se déduire de Cor et Cor_2 .

3.6.1 Expression de la déformation pour P_1

Dans cette section nous allons nous intéresser à l'expression de la déformation de la partie basse de P_1 que l'on note ε_{P_1} . Ce travail a déjà été réalisé dans la section du modèle sans adhésion. Les éléments clés pour déterminer ε_{P_1} sont ε_0 la déformation lié à l'impact du projectile, et $R_{1,2}$ le coefficient de réflexion d'une onde arrivant à l'interface $P_1 - P_2$. Cette expression est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varepsilon}_{P_1,k} &= \tilde{\varepsilon}_k \\
 &= \frac{\varepsilon_0}{1 - R_{1,2}} (1 + R_{1,2} - 2R_{1,2}^{k+1})
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

avec k un indice entier qui désigne la déformation entre $2t_1 + 2(k - 1)t_1$ et $2t_1 + 2kt_1$. Cette expression, déjà vue à l'équation 3.49, peut être obtenue de manière récursive en utilisant les équations 3.39 et 3.44 qui traitent de la réflexion de l'onde de déformation sur l'interface $P_1 - P_2$ et sur l'interface $P_1 - \text{Substrat}$.

Ici, nous faisons l'hypothèse que l'onde du haut qui traverse P_2 n'est pas encore revenue au niveau de l'interface P_1 -Substrat. C'est donc parce que l'on a supposé que $t_{c,1} = 2t_1 + 2t_2$ que cette expression est valable. Cette condition correspond à la zone centrale de la figure 3.30.

3.6.2 Expression de la déformation pour P_2

Dans cette section nous allons nous intéresser à l'expression de la déformation de la partie basse de P_2 que l'on note ε_{P_2} . C'est donc l'occasion de définir le coefficient de réflexion $R_{2,1}$ d'une onde allant vers les z décroissant vers l'interface $P_2 - P_1$. Il est déterminé à partir des équations de continuité et défini par :

$$R_{1,2} = \frac{c_2 E_1 - c_1 E_2}{c_1 E_2 + c_2 E_1}. \quad (3.65)$$

Nous pouvons facilement faire le lien avec $R_{1,2}$ le coefficient de réflexion d'une onde allant vers les z croissant vers l'interface $P_1 - P_2$:

$$R_{1,2} = -R_{2,1}. \quad (3.66)$$

Puisque que nous souhaitons calculer ε_{P_2} nous rappelons que nous avons fait deux hypothèses concernant $t_{c,2}$ le temps de décollage de la partie P_2 : soit $t_{c,2} = t_1 + 2t_2$, soit $t_{c,2} = 3t_1 + 2t_2$. De plus, il va être nécessaire de distinguer 2 cas : le cas où $n > 1$ et celui où $n < 1$. Pour rappel n est tel que $t_2 = nt_1$ et \tilde{n} est sa partie entière inférieure.

Cas $t_2 > t_1$ ($n > 1$) :

Dans le cas où $t_2 > t_1$ c'est-à-dire le cas où $n > 1$ nous pouvons représenter le trajet des ondes sur le schéma suivant.

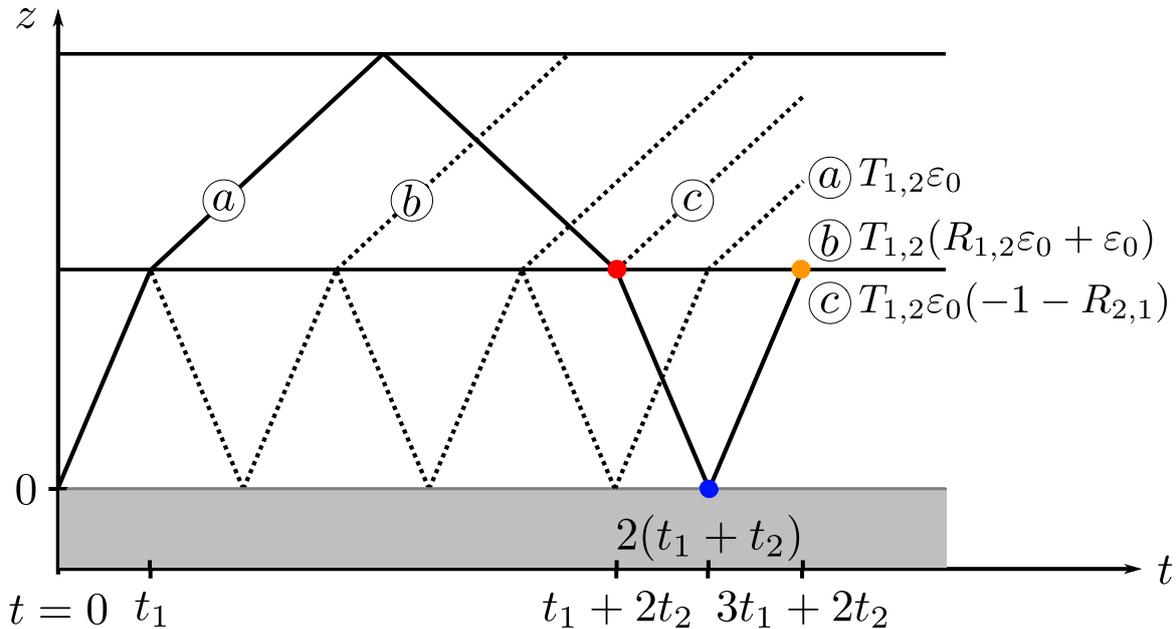


Figure 3.37: Schéma de propagation des ondes dans le projectile dans le cas où $t_2 > t_1$. Pour ce schéma nous faisons un exemple avec $n = 2$.

Sur ce schéma nous voyons la propagation de l'onde de déformation ε_0 qui part du bas du projectile au temps $t = 0$ et arrive à l'interface à $t = t_1$. Ensuite cette onde se divise en une partie réfléchiée dans P_1 ($R_{1,2}\varepsilon_0$) et une partie transmise dans P_2 ($T_{1,2}\varepsilon_0$). Nous observons qu'entre $t = t_1$ et $t_{c,2}$ il y a de multiples allers-retours de l'onde dans la partie P_1 et chaque fois que l'onde atteint l'interface $P_1 - P_2$ il y a transmission d'une partie de l'onde. Sur le schéma nous avons pris l'exemple de $n = 2$. Nous pouvons généraliser ce schéma et trouver l'expression de $\tilde{\varepsilon}_{P_2,k}$ qui est la déformation en $z = L_1^+$ entre $t_1 + 2kt_1$ et $t_1 + 2(k+1)t_1$. Connaissant l'expression

de $\tilde{\varepsilon}_{P_2,0}$ (point a sur le schéma) et $\tilde{\varepsilon}_{P_2,1}$ (point b sur le schéma), nous pouvons en déduire les expressions de $\tilde{\varepsilon}_{P_2,2}$, $\tilde{\varepsilon}_{P_2,3}$ et ainsi de suite. De cette manière nous obtenons $\tilde{\varepsilon}_{P_2,k}$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varepsilon}_{P_2,0} &= T_{1,2}\varepsilon_0 \\
 \tilde{\varepsilon}_{P_2,1} &= T_{1,2}(R_{1,2}\varepsilon_0 + \varepsilon_0) \\
 \tilde{\varepsilon}_{P_2,2} &= T_{1,2}[R_{1,2}(R_{1,2}\varepsilon_0 + \varepsilon_0) + \varepsilon_0] = T_{1,2}(\varepsilon_0 + R_{1,2}\varepsilon_0 + R_{1,2}^2\varepsilon_0) \\
 \tilde{\varepsilon}_{P_2,3} &= T_{1,2}\{R_{1,2}[R_{1,2}(R_{1,2}\varepsilon_0 + \varepsilon_0) + \varepsilon_0] + \varepsilon_0\} = T_{1,2}(\varepsilon_0 + R_{1,2}\varepsilon_0 + R_{1,2}^2\varepsilon_0 + R_{1,2}^3\varepsilon_0) \\
 &\dots = \dots \\
 \tilde{\varepsilon}_{P_2,k} &= T_{1,2}(\varepsilon_0 + R_{1,2}\varepsilon_0 + \dots + R_{1,2}^k\varepsilon_0) \\
 &= T_{1,2}\varepsilon_0 \sum_{i=0}^k R_{1,2}^i \\
 &= T_{1,2}\varepsilon_0 \frac{R_{1,2}^{k+1} - 1}{R_{1,2} - 1}.
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

Dans la première hypothèse pour laquelle $t_{c,2} = t_1 + 2t_2 = t_1 + 2nt_1$ (point rouge sur le schéma) nous avons alors :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{t_{c,2}} \varepsilon_{P_2}(t)dt &= \int_{t_1}^{t_1+2t_1} \tilde{\varepsilon}_{P_2,0}dt + \int_{t_1+2t_1}^{t_1+4t_1} \tilde{\varepsilon}_{P_2,1}dt + \dots + \int_{t_1+2kt_1}^{t_1+2(k+1)t_1} \tilde{\varepsilon}_{P_2,k}dt + \dots + \int_{t_1+2\tilde{n}t_1}^{t_1+2nt_1} \tilde{\varepsilon}_{P_2,\tilde{n}}dt \\
 &= 2t_1(\tilde{\varepsilon}_0 + \tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2 + \dots + \tilde{\varepsilon}_k + \dots + \tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}-1}) + 2t_1(n - \tilde{n})\tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}} \\
 &= 2t_1 \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \tilde{\varepsilon}_{P_2,k} + 2t_1(n - \tilde{n})\tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}} \\
 &= \frac{2t_1T_{1,2}\varepsilon_0}{R_{1,2} - 1} \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} (R_{1,2}^{k+1} - 1) + 2t_1(n - \tilde{n})\tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}} \\
 &= \frac{2t_1T_{1,2}\varepsilon_0}{R_{1,2} - 1} \left[R_{1,2} \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} R_{1,2}^k - \tilde{n} \right] + 2t_1(n - \tilde{n})\tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}} \\
 &= \frac{2t_1T_{1,2}\varepsilon_0}{R_{1,2} - 1} \left[R_{1,2} \frac{R_{1,2}^{\tilde{n}} - 1}{R_{1,2} - 1} - \tilde{n} \right] + 2t_1(n - \tilde{n})\tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}} \\
 &= \frac{2t_1T_{1,2}\varepsilon_0}{R_{1,2} - 1} \left[R_{1,2} \frac{R_{1,2}^{\tilde{n}} - 1}{R_{1,2} - 1} - \tilde{n} + (n - \tilde{n})(R_{1,2}^{\tilde{n}+1} - 1) \right].
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

Dans la deuxième hypothèse nous avons $t_{c,2} = 3t_1 + 2t_2 = 3t_1 + 2nt_1$ (point orange sur le schéma). Comme on peut le voir sur le schéma il faut prendre en compte trois termes supplémentaires dont celui lié au retour de la première onde ayant été transmise à l'interface. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{t_{c,2}} \varepsilon_{P_2}(t)dt &= \int_{t_1}^{t_1+2t_1} \tilde{\varepsilon}_{P_2,0}dt + \int_{t_1+2t_1}^{t_1+4t_1} \tilde{\varepsilon}_{P_2,1}dt + \dots + \int_{t_1+2kt_1}^{t_1+2(k+1)t_1} \tilde{\varepsilon}_{P_2,k}dt + \dots + \int_{t_1+2\tilde{n}t_1}^{t_1+2nt_1} \tilde{\varepsilon}_{P_2,\tilde{n}}dt \\
 &+ \int_{t_1+2nt_1}^{t_1+2(\tilde{n}+1)t_1} \tilde{\varepsilon}_{P_2,\tilde{n}}dt + \int_{t_1+2(\tilde{n}+1)t_1}^{3t_1+2nt_1} \tilde{\varepsilon}_{P_2,\tilde{n}+1}dt + \int_{t_1+2nt_1}^{t_1+2(n+1)t_1} T_{1,2}\varepsilon_0(-1 - R_{2,1})dt \\
 &= \frac{2t_1T_{1,2}\varepsilon_0}{R_{1,2} - 1} \left[R_{1,2} \frac{R_{1,2}^{\tilde{n}} - 1}{R_{1,2} - 1} - \tilde{n} + (n - \tilde{n})(R_{1,2}^{\tilde{n}+1} - 1) \right] \\
 &+ 2t_1(\tilde{n} + 1 - n)\tilde{\varepsilon}_{P_2,\tilde{n}} + 2t_1(n - \tilde{n})\tilde{\varepsilon}_{P_2,\tilde{n}+1} + 2t_1T_{1,2}\varepsilon_0(-1 - R_{2,1}) \\
 &= \frac{2t_1T_{1,2}\varepsilon_0}{R_{1,2} - 1} \left[R_{1,2} \frac{R_{1,2}^{\tilde{n}} - 1}{R_{1,2} - 1} - \tilde{n} + (R_{1,2}^{\tilde{n}+1} - 1) + (n - \tilde{n})(R_{1,2}^{\tilde{n}+2} - 1) + (R_{1,2} - 1)^2 \right].
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

avec \tilde{m} sa partie entière inférieure. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{3t_1+2t_2} \tilde{\varepsilon}_{P_2} &= \int_{t_1}^{t_1+2t_2} \tilde{\varepsilon}_{P_2,0} dt + \int_{t_1+2t_2}^{t_1+4t_2} \tilde{\varepsilon}_{P_2,1} dt + \dots \\
 &+ \int_{t_1+2kt_2}^{t_1+2(k+1)t_2} \tilde{\varepsilon}_{P_2,k} dt + \dots + \int_{t_1+2\tilde{m}t_2}^{t_1+2(\tilde{m}+1)t_2} \tilde{\varepsilon}_{P_2,\tilde{m}} dt + \int_{t_1+2(\tilde{m}+1)t_2}^{t_1+2(m+1)t_2} \tilde{\varepsilon}_{P_2,\tilde{m}+1} dt \\
 &+ \int_{3t_1}^{3t_1+2t_2} T_{1,2} R_{1,2} \varepsilon_0 dt \\
 &= 2t_2 \sum_{k=0}^{\tilde{m}} \tilde{\varepsilon}_{P_2,k} + 2t_2 (m - \tilde{m}) \tilde{\varepsilon}_{P_2,\tilde{m}+1} + 2t_2 T_{1,2} R_{1,2} \varepsilon_0 \\
 &= 2t_2 T_{1,2} \varepsilon_0 \left[\frac{R_{1,2}^{\tilde{m}+1} - 1}{R_{1,2} - 1} + (m - \tilde{m}) (R_{1,2}^{\tilde{m}+1}) + R_{1,2} \right]. \tag{3.73}
 \end{aligned}$$

3.6.3 Validité du modèle

À l'aide des équations présentes dans cette section nous sommes capables d'obtenir une expression analytique du coefficient de restitutions pour la partie P_1 et pour la partie P_2 . Nous voyons les résultats sur les graphiques suivants. Il faut noter que l'exemple $\alpha = 0.25$ permet de monter un résultat pour $t_{c,2} = t_1 + 2t_2$ et $\alpha = 0.75$ permet de monter un résultat pour $t_{c,2} = 3t_1 + 2t_2$. Dans les deux cas nous avons aussi $t_{c,1} = 2t_1 + 2t_2$ et pas de multiples rebonds. On indique aussi $n = 1$ et $n = 2$ sur le graphique. On rappelle que les équations ne sont pas les mêmes si $n < 1$ ou si $n > 1$.

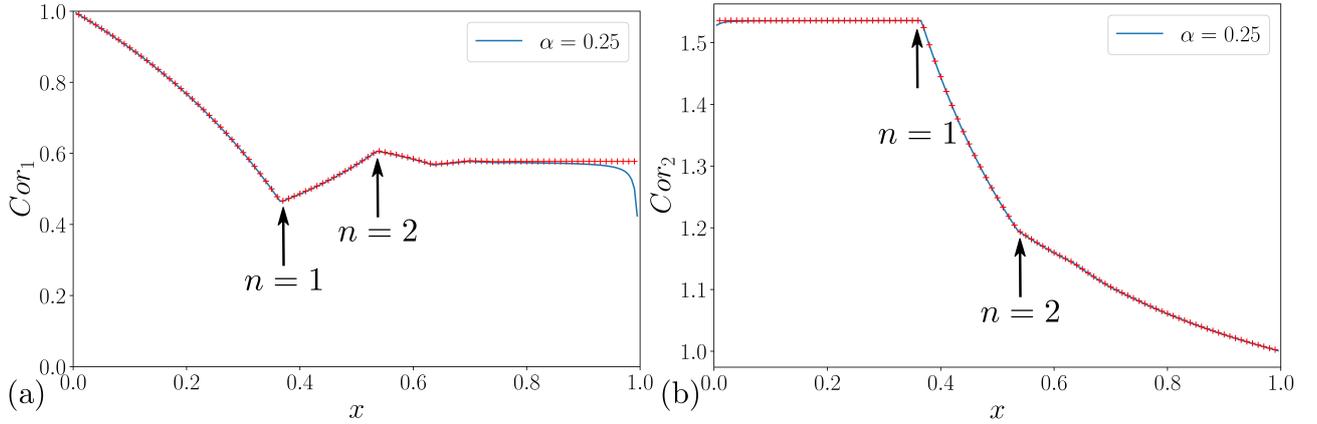


Figure 3.39: (a) Cor_1 et (b) Cor_2 , pour $\alpha = 0.25$. Comparaison entre les valeurs données par la simulation (trait bleu) et par l'approche analytique (points rouges). Les hypothèses sont : $t_{c,1} = 2t_1 + 2t_2$, $t_{c,2} = t_1 + 2t_2$ et pas de multiple rebonds.

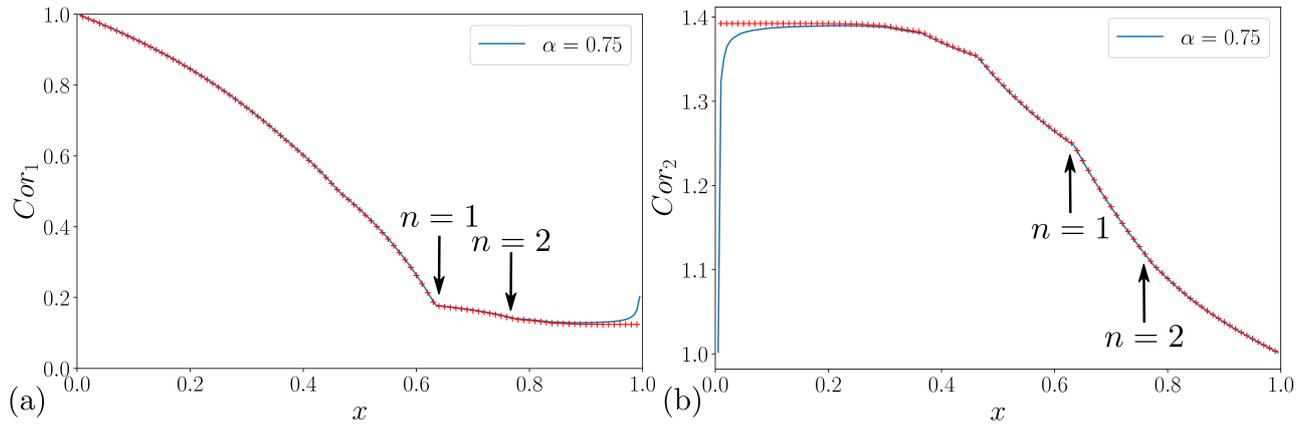


Figure 3.40: (a) Cor_1 et (b) Cor_2 , pour $\alpha = 0.75$. Comparaison entre les valeurs données par la simulation (trait bleu) et par l'approche analytique (points rouges). Les hypothèses sont : $t_{c,1} = 2t_1 + 2t_2$, $t_{c,2} = 3t_1 + 2t_2$ et pas de multiple rebonds.

Nous pouvons mettre en relation ces deux figures avec les figures 3.24, 3.25, 3.27 et 3.28. Dans un premier temps, nous allons nous intéresser au Cor_1 . Nous pouvons remarquer que la décroissance de la restitution à partir de $x = 0$ correspond aux cas où $n < 1$ c'est-à-dire aux cas pour lesquels $t_2 < t_1$. De plus, la présence de plateaux lorsque $x \rightarrow 1$ correspond à la situation où $n \rightarrow +\infty$ c'est-à-dire aux cas pour lesquels $t_2 \gg t_1$. Dans un second temps, nous allons nous intéresser au Cor_2 . Nous pouvons remarquer que la présence de plateaux à partir de $x = 0$ correspond alors à la situation $n < 1$ et donc aux cas pour lesquels $t_2 < t_1$.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats de simulations numériques concernant l'impact d'une chaîne 1D de masses et de ressorts, chaque masse étant soumise à une force élastique linéaire. Nous avons présenté deux systèmes : une chaîne en adhésion et une chaîne sans adhésion. Nous avons fait varier deux paramètres x et α , cela permet de faire varier de façon systématique la masse et la rigidité relatives des deux parties du projectiles bicomposites. Nous mesurons le coefficient de restitution, le temps d'éjection et le nombre de multiples rebonds.

Dans le cas de la chaîne en adhésion, nous avons vu que le coefficient de restitution est proche de 1, pour tout x , lorsque α se situe autour de 0.5. Lorsque α tend vers 1, la valeur du Cor peut légèrement diminuer alors que nous voyons apparaître d'importantes variations du Cor lorsque α tend vers 0, c'est-à-dire lorsque la partie du bas est très rigide devant celle du haut. En effet, par exemple pour $\alpha = 0.05$ et en faisant varier x entre 0 et 1, nous avons vu que le coefficient de restitution variait entre 0.2 et 1 et présentait une décroissance linéaire suivie d'une augmentation avec la présence d'oscillations. Des multiples rebonds peuvent aussi apparaître dans le système mais ceux-ci sont difficiles à quantifier. Ces observations sont communes avec celles de l'étude expérimentale et théorique présentée dans le chapitre 2 et confirment que la configuration partie rigide en bas et partie molle en haut présente une dynamique originale et complexe.

Dans le cas de la chaîne sans adhésion, nous avons vu que le Cor de la partie du bas vaut 1 lorsque α tend vers 0.5 ou bien lorsque x tend vers 0. En dehors de ces cas limites, le coefficient de restitution présente d'importantes variations en fonction de x et α , allant jusqu'à tendre vers 0 pour certaines configurations. Pour la partie du haut, le coefficient de restitution est toujours supérieur à 1. Il tend notamment vers 3 lorsque x et α tendent vers 0, c'est-à-dire quand la partie du haut est légère et molle par rapport à la partie du bas.

Dans les deux cas, nous avons proposé une modélisation théorique valable dans certaines zones du plan (x, α) et basée sur une approche analytique de type milieu continu en prenant en compte la propagation d'une onde de déformation dans le système. Le modèle n'est valable que lorsque l'on évite les zones de multiples rebonds. Lorsque c'est le cas, le modèle et les simulations sont en très bon accord.

Pour conclure, l'utilisation de la simulation numérique nous a permis de faire varier nos paramètres de manière systématique et de venir consolider notre étude sur l'impact d'objets bicomposites.

Chapitre 4

Expériences modèle pour l'enseignement

Sommaire

4.1	Introduction	96
4.2	Étude numérique d'un système 2 masses - 2 ressorts	96
4.2.1	Modélisation du projectile	96
4.2.2	Résolution des équations du mouvement	97
4.2.3	Caractéristiques du système	98
4.2.4	Résultats	98
4.2.5	Discussion	102
4.3	Adaptation d'un pendule de Newton pour l'étude des impacts	102
4.3.1	Matériels & Méthodes	102
4.3.2	Résultats expérimentaux et discussion	105
4.4	Réalisation didactique d'un impact via un camion-jouet	107
4.4.1	Matériels & Méthodes	107
4.4.2	Résultats expérimentaux et discussion	108
4.5	Conclusion	110

4.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'aborder le travail quantitatif et exploratoire réalisé dans le cadre d'une collaboration et de la rédaction d'un article portant sur la didactique de la notion de rebond dans l'enseignement. Cette collaboration s'est déroulée avec Laurence Viennot, chercheuse en didactique de la physique et formatrice d'enseignants à l'Université de Paris.

Lors de ce travail nous nous sommes concentrés sur l'élaboration de systèmes simples, apparentés aux travaux présentés dans ce manuscrit, amenant à une introduction des notions nécessaires à la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu et qui permettent d'illustrer la richesse de comportements lorsque l'on passe d'un système homogène à un système à deux composants. Cette simplification s'est faite à la fois numériquement et expérimentalement. Dans les deux cas, l'enjeu est de proposer des méthodes reproductibles par un large panel d'enseignants.

4.2 Étude numérique d'un système 2 masses - 2 ressorts

D'un point de vue numérique nous avons présenté, dans le chapitre 3, la méthode et les résultats de la simulation de l'impact d'une chaîne composée de N masses reliées entre elles par des ressorts. Dans cette section, nous allons nous intéresser à la simulation d'un système 2 masses - 2 ressorts qui se veut plus simple en termes d'équations et de temps de calcul que la simulation portant sur la chaîne entière. Un système similaire a déjà été décrit par Cross de manière analytique [Cross, 2007]. Cette simulation à deux composants pourrait par exemple être réalisée dans le cadre d'un enseignement numérique pour la physique.

4.2.1 Modélisation du projectile

Nous allons considérer 2 masses, m_1 et m_2 , et 2 ressorts, k_1 et k_2 . Le ressort k_1 reliant la masse m_1 au substrat et le ressort k_2 reliant les masses m_1 et m_2 . La masse m_0 est considérée comme étant le substrat et sera toujours immobile. Nous pouvons voir une représentation de ce système 2 masses - 2 ressorts sur le schéma de la figure 4.1.

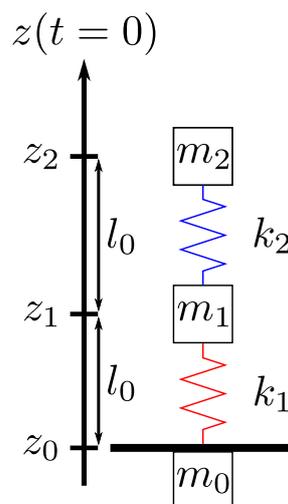


Figure 4.1: Schéma du système 2 masses - 2 ressorts.

Nous allons utiliser les mêmes paramètres du chapitre 3, x et α , qui vont nous permettre de

caractériser notre système :

$$x = \frac{m_2}{m_1 + m_2} ; \alpha = \frac{k_2}{k_1 + k_2}. \quad (4.1)$$

Ici x est la proportion en masse de m_2 dans le projectile. Nous avons donc $m_2 = xm$ et $m_1 = (1 - x)m$ avec $m = 1$. De manière équivalente, α est la proportion en raideur du ressort k_2 . On a donc $k_2 = \alpha k$ et $k_1 = (1 - \alpha)k$ avec $k = 1$.

Comme précédemment si nous faisons varier x et α alors nous le ferons avec des pas $\Delta x = 0.005$ et $\Delta \alpha = 0.005$ en parcourant des valeurs comprises dans l'intervalle $[0.005 ; 0.995]$, sauf si une autre indication est spécifiée.

Il est à noter que l'on autorise la masse m_1 à faire de multiples rebonds. Comme précédemment, nous considérons qu'il y a contact seulement si le ressort k_1 est en compression. Si ce ressort est en extension alors nous considérons qu'il n'y a pas contact. Nous pouvons alors compter le nombre de rebonds de la masse m_1 . Nous allons seulement nous intéresser au cas où les masses m_1 et m_2 restent en contact.

4.2.2 Résolution des équations du mouvement

Commençons par écrire le principe fondamental de la dynamique pour notre système :

$$F_1(t) = m_1 a_1(t) \quad (4.2)$$

$$F_2(t) = m_2 a_2(t). \quad (4.3)$$

Nous avons $F_i(t)$ la somme des forces exercées sur la masse m_i et $a_i(t)$ son accélération au temps t . Les expressions des forces sont données par :

$$F_1(t) = F_{2,1}(t) + F_{0,1}(t) \quad (4.4)$$

$$F_2(t) = F_{1,2}(t) \quad (4.5)$$

avec $F_{i,j}(t)$ la force exercée par la masse i sur la masse j . Ces forces sont des forces élastiques qui pour ont pour expression:

$$F_{2,1}(t) = +k_2 [(z_2(t) - z_1(t)) - l_0] \quad (4.6)$$

$$F_{0,1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } (z_1(t) - z_0(t)) > l_0 \\ -k_1 [(z_1(t) - z_0(t)) - l_0] & \text{si } (z_1(t) - z_0(t)) < l_0 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$F_{1,2}(t) = -k_2 [(z_2(t) - z_1(t)) - l_0] \quad (4.8)$$

avec $l_0 = 1$ la longueur des ressorts à l'équilibre.

Comme vu auparavant, nous allons utiliser l'algorithme de Beeman pour résoudre ces deux équations et trouver à la fin de la simulation le coefficient de restitution du centre de masse [Beeman, 1976]. Pour rappel, le lecteur trouvera plus de détails dans le chapitre 3 section 3.2.2.

Conditions initiales Étant donné qu'il s'agit de modéliser le système à l'instant de l'impact avec chaque masse séparée d'une distance initiale l_0 et arrivant à une vitesse $-v_b$, cela nous amène aux conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} z_0(\forall t) = 0 \\ v_0(\forall t) = 0 \\ a_0(\forall t) = 0 \end{cases} ; \begin{cases} z_1(t=0) = l_0 \\ v_1(t=0) = -v_b \\ a_1(t=0) = 0 \end{cases} ; \begin{cases} z_2(t=0) = 2l_0 \\ v_2(t=0) = -v_b \\ a_2(t=0) = 0 \end{cases} . \quad (4.9)$$

4.2.3 Caractéristiques du système

Il convient maintenant de définir les caractéristiques du système. Soit T_1 et T_2 , respectivement, la période du ressort k_1 et du ressort k_2 :

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}} \quad ; \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_2}}. \quad (4.10)$$

À partir de ces 2 temps nous devons définir le plus grand temps, T_{max} , et le plus petit temps, T_{min} , présent dans la simulation :

$$T_{max} = \max(T_1, T_2) \quad ; \quad T_{min} = \min(T_1, T_2). \quad (4.11)$$

Comme pour la chaîne de masses-ressorts nous allons fixer les paramètres de la simulation à partir de ces 2 temps et de l_0 :

$$dt = T_{min}/100 \quad ; \quad t_{simu} = 10T_{max} \quad ; \quad v_b = l_0/(100T_{max}). \quad (4.12)$$

Le lecteur trouvera plus de détails dans le chapitre 3 section 3.2.3.

4.2.4 Résultats

Coefficient de restitution

Passons maintenant aux résultats de la simulation en commençant par le coefficient de restitution. Sur la figure 4.2, nous pouvons observer le Cor en fonction de x et de α . Nous pouvons séparer la figure en deux zones. La première pour des valeurs de $\alpha > 0.5$. Dans cette zone nous observons que le coefficient de restitution vaut principalement 1 et que lorsque qu'il s'éloigne de cette valeur il est tout de même supérieur à 0.9. Dans la deuxième zone, nous considérons les valeurs de $\alpha < 0.5$. Dans cette zone, le Cor va varier sur une plage de valeurs plus grande. Celui-ci peut par exemple atteindre une valeur minimale d'environ 0.2.

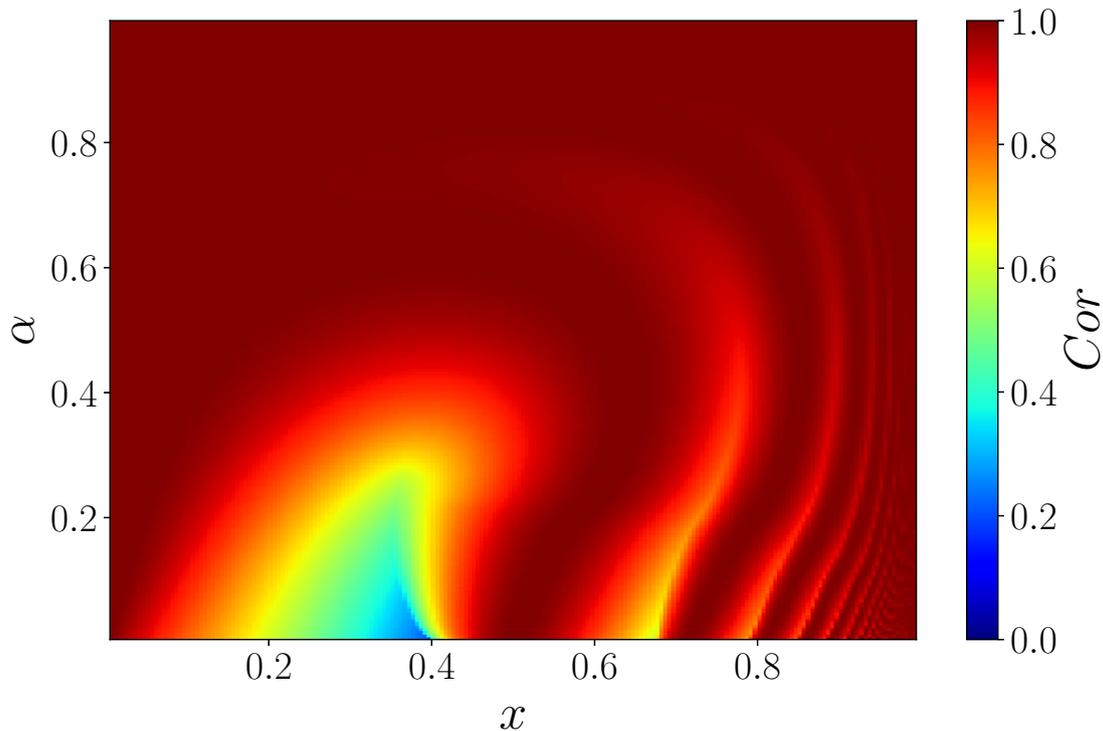


Figure 4.2: Cor en fonction de x et de α .

Nous allons nous intéresser aux zones précédemment citées et regarder dans le détail la variation du Cor avec x et α . Sur la figure 4.3, nous observons la restitution pour des valeurs de $\alpha < 0.5$. Dans cette zone, le ressort k_2 est considéré comme étant mou par rapport au ressort k_1 . On peut observer dans un premier temps qu'il y a une décroissance du Cor lorsque x augmente. Cette décroissance permet d'atteindre des valeurs minimales du Cor comprises entre 0.2 et 0.6 pour des valeurs de x comprises entre 0.35 et 0.40. Cela bien entendu pour des valeurs de α particulières. Dans l'ensemble cette décroissance est linéaire même si l'on observe une courbure au début. Ensuite, nous remarquons que le Cor va augmenter jusqu'à atteindre la valeur de 1 et puis, de nouveau, nous observons une diminution de celui-ci. Cette diminution est en revanche plus faible. Puis ce comportement se répète.

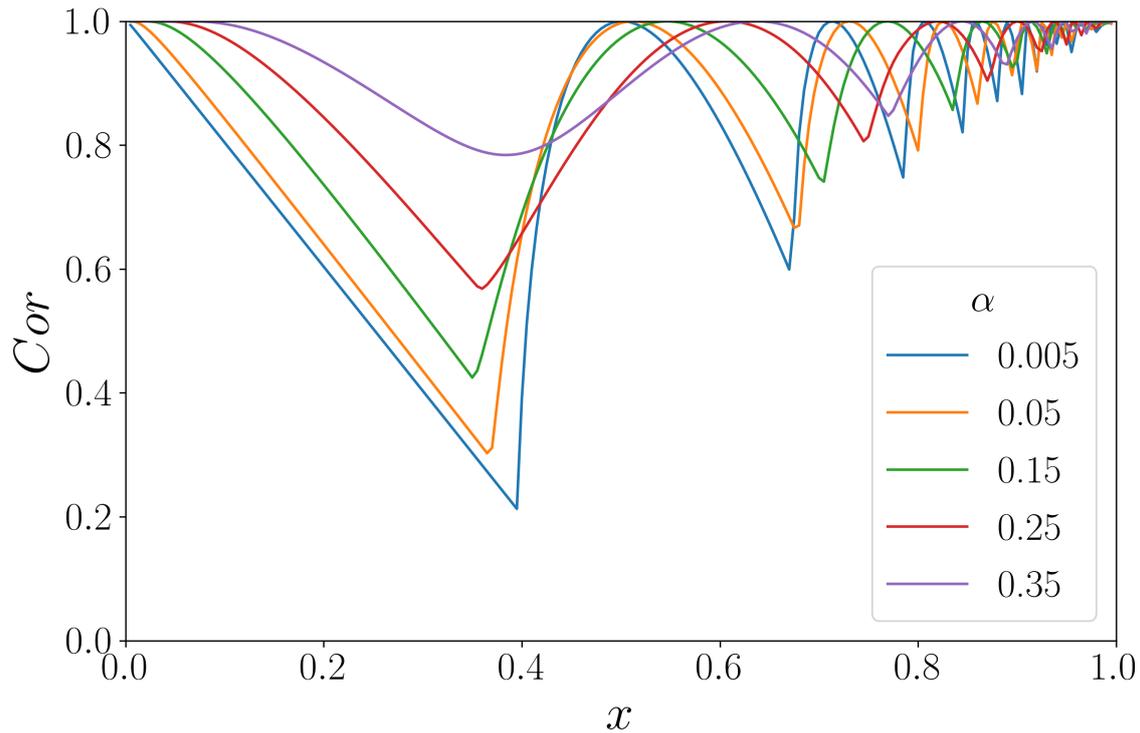


Figure 4.3: Cor en fonction de x pour différentes valeurs de $\alpha < 0.5$.

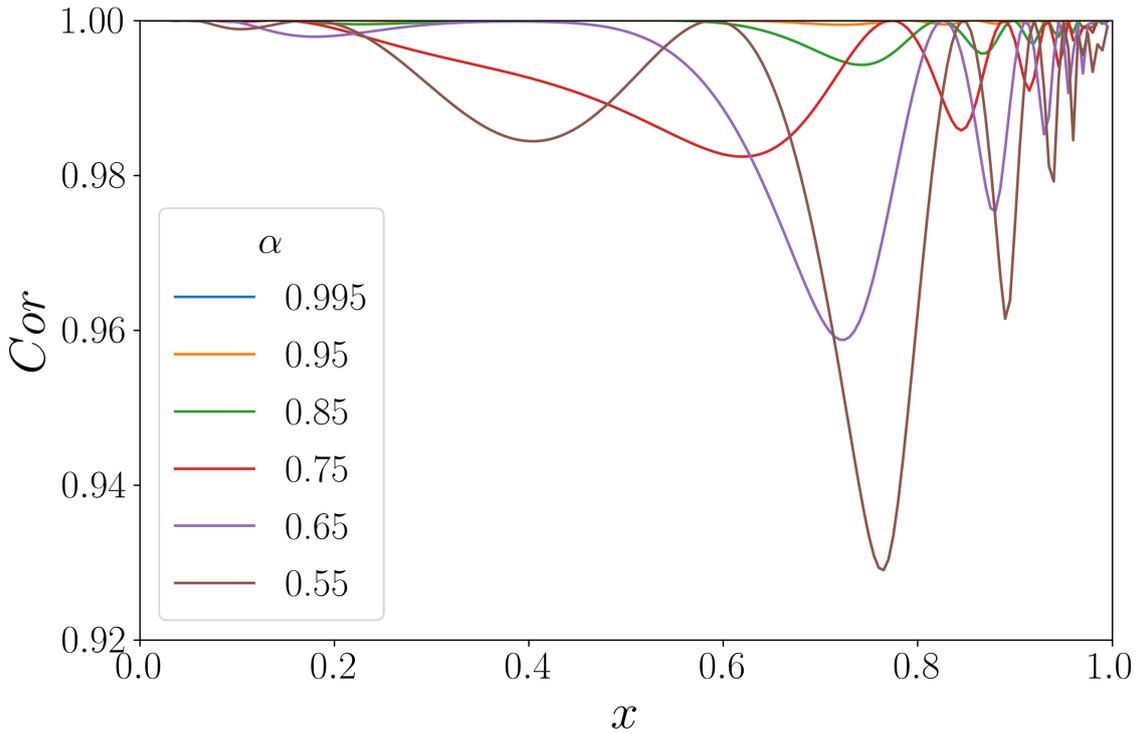


Figure 4.4: Cor en fonction de x pour différentes valeurs de $\alpha > 0.5$.

Sur la figure 4.4, nous observons la restitution pour des valeurs de $\alpha > 0.5$. Dans cette zone, le ressort k_1 est considéré comme étant mou par rapport au ressort k_2 . Nous observons que le coefficient de restitution vaut principalement 1 lorsque $\alpha > 0.85$. Pour des valeurs plus petites, nous observons que le coefficient de restitution va osciller entre 1 et des valeurs beaucoup plus grandes que pour $\alpha < 0.5$. Il est important de noter que la valeur minimale de la restitution est de 0.93 et ce pour $x = 0.76$ et $\alpha = 0.55$.

Nombre de rebonds

Lorsque le ressort k_1 se trouve en extension alors celui-ci ne ressent plus la force du substrat. C'est de cette manière que la masse m_1 est autorisée à effectuer de multiples rebonds et que nous sommes capables de les compter. Nous observons le résultat sur la figure 4.5. Il faut noter que le nombre de rebonds est limité à 10 sur cette figure et cela pour faciliter l'observation. La simulation nous donne un nombre de rebonds maximal de 60. Ensuite nous pouvons remarquer que le nombre de rebonds va être supérieur à 1 dans la zone inférieure droite du graphique. On observe distinctement les zones où il y a 2,3,4,... rebonds. Il est intéressant de noter que le comptage du nombre de rebonds dans ce système est très précis contrairement à celui de la chaîne bicomposite vu au chapitre 3.

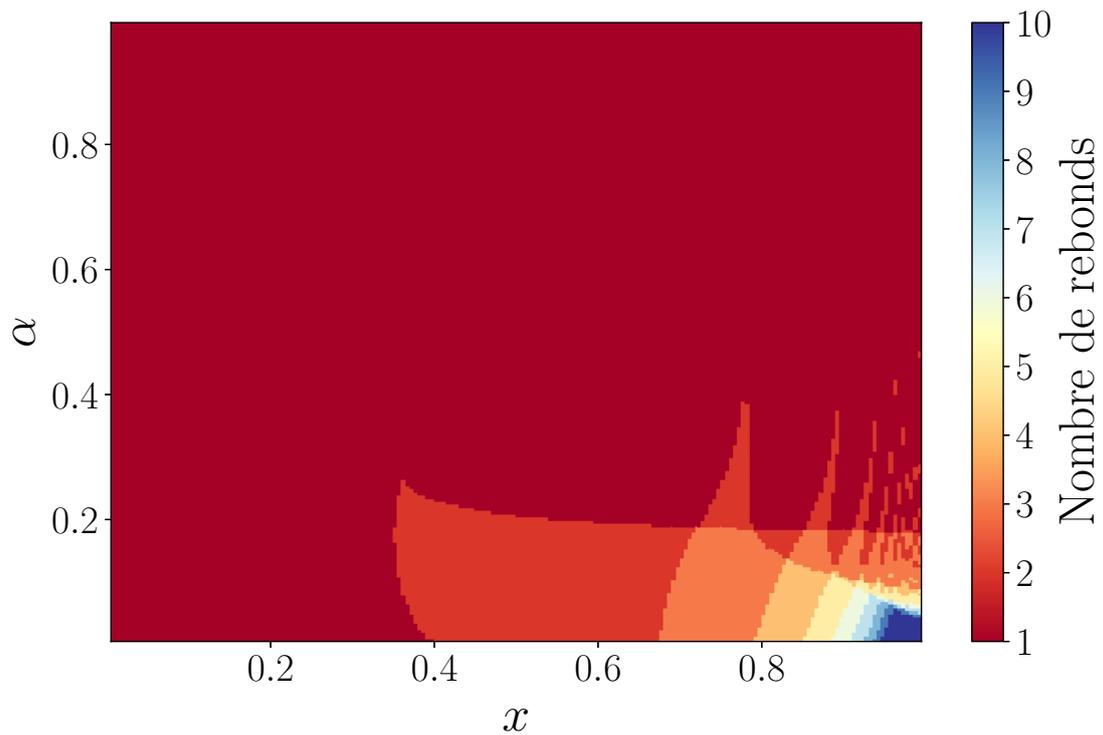


Figure 4.5: Nombre de rebonds pour toutes les valeurs de x de α .

Temps de contact

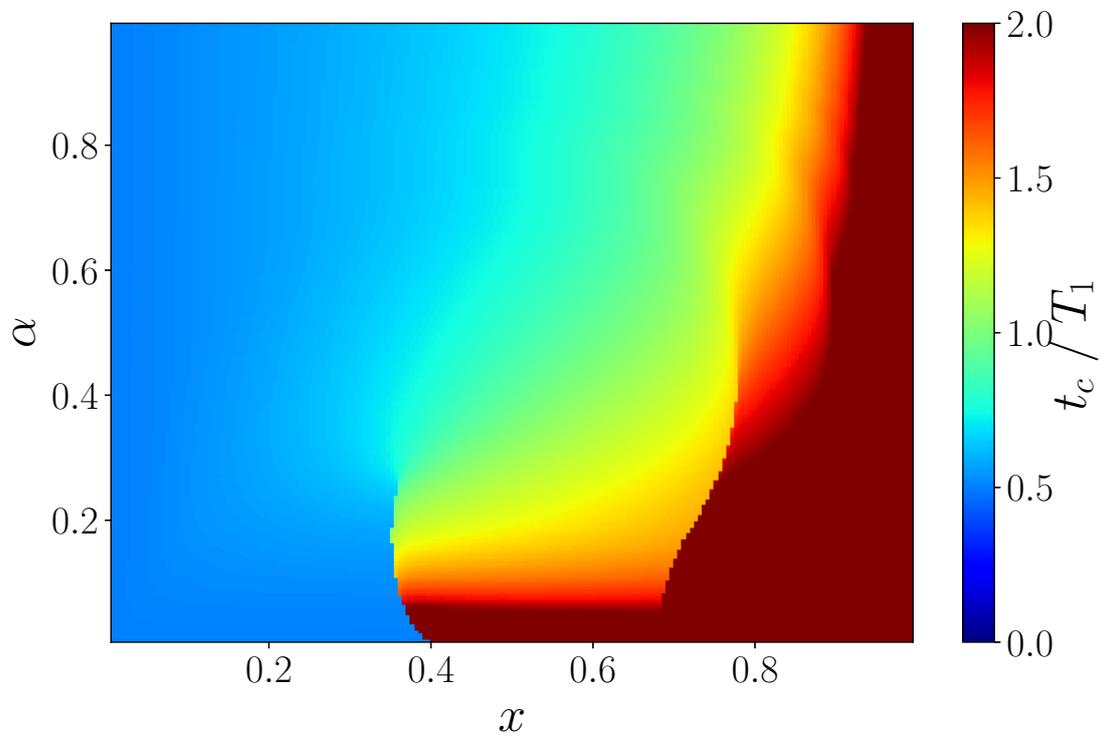


Figure 4.6: $\frac{t_c}{T_1}$ en fonction de x et α . La limite supérieure est fixée à 2 pour des facilités d'observation.

Sur la figure 4.6, nous pouvons observer le temps de contact t_c normalisé par T_1 , la période du ressort k_1 . Il faut noter que la limite supérieure est fixée à 2 pour faciliter l'observation. Sur ce graphique l'on peut voir que lorsque $x \rightarrow 0$, alors $t_c/T_1 \rightarrow 0.5$. Cela signifie que dans une certaine zone, le temps de contact dépend seulement du ressort k_1 . Quand $x > 0.4$, on voit que l'on s'écarte de $t_c/T_1 = 0.5$, la dynamique devient alors plus complexe et il faut prendre en compte d'autres temps du système.

4.2.5 Discussion

À la lumière de ces résultats il semble important de faire une comparaison entre le système 2 masses - 2 ressorts et la chaîne bicomposite, à N masses, en adhésion présentée dans le chapitre 3 section 3.3.

Tout d'abord, au niveau du coefficient de restitution pour $\alpha < 0.5$, nous pouvons observer que les deux systèmes donnent un résultat très similaire. On observe d'abord une décroissance linéaire suivi d'une oscillation du coefficient de restitution. Dans le système 2 masses - 2 ressorts, les oscillations sont de plus grandes amplitudes et la forme est plus sinusoïdale. Dans la chaîne, l'amplitude est plus faible et la forme est plutôt en dents de scie. Enfin, le point majeur est que le minimum de la restitution est dans les deux cas aux alentours de 0.2 et cela pour une proportion aux alentours de 0.4.

Toujours au niveau du coefficient de restitution mais pour $\alpha > 0.5$. Dans les deux cas nous observons que les variations sont de plus faibles amplitudes que dans le cas où $\alpha < 0.5$ (d'un côté entre 0.8 et 1 pour la chaîne, de l'autre entre 0.9 et 1 pour les 2 masses). Cependant il n'y a pas de décroissance linéaire pour le système à 2 masses.

Concernant le nombre de rebonds, le système 2 masses - 2 ressorts est extrêmement précis sur ce résultat tandis que pour la chaîne le résultat est très bruité. Les multiples rebonds sont localisés en bas à droite de la figure, alors qu'il y en avait aussi en haut pour la chaîne à N masses.

Concernant le temps de décollage, nous voyons que le plus petit temps de la simulation se situe en bas à gauche dans les 2 systèmes. Nous observons aussi que les discontinuités sont communes avec la présence de multiples rebonds.

4.3 Adaptation d'un pendule de Newton pour l'étude des impacts

À la suite de nos simulations nous nous sommes demandé comment simplifier notre montage expérimental sur l'impact d'objets bicomposites vu dans le chapitre 2. Nous nous sommes alors orientés vers un pendule de Newton. Nous allons voir qu'avec cet objet nous avons été capable de construire un solide cohésif, d'insérer une fine couche de matériau pour simuler une modification de structure et de contrôler facilement le rapport des masses dans ce solide. Le tout bien évidemment en étant capable de mesurer le coefficient de restitution.

4.3.1 Matériels & Méthodes

Nous avons acheté dans le commerce un pendule de Newton et c'est à partir de l'adaptation de celui-ci que nous avons réalisé nos expériences. Le choix du pendule, outre la facilité à se

procurer facilement ce genre d'objet, a été motivé par le fait que l'objet est déjà prévu pour guider les billes dans un seul plan.

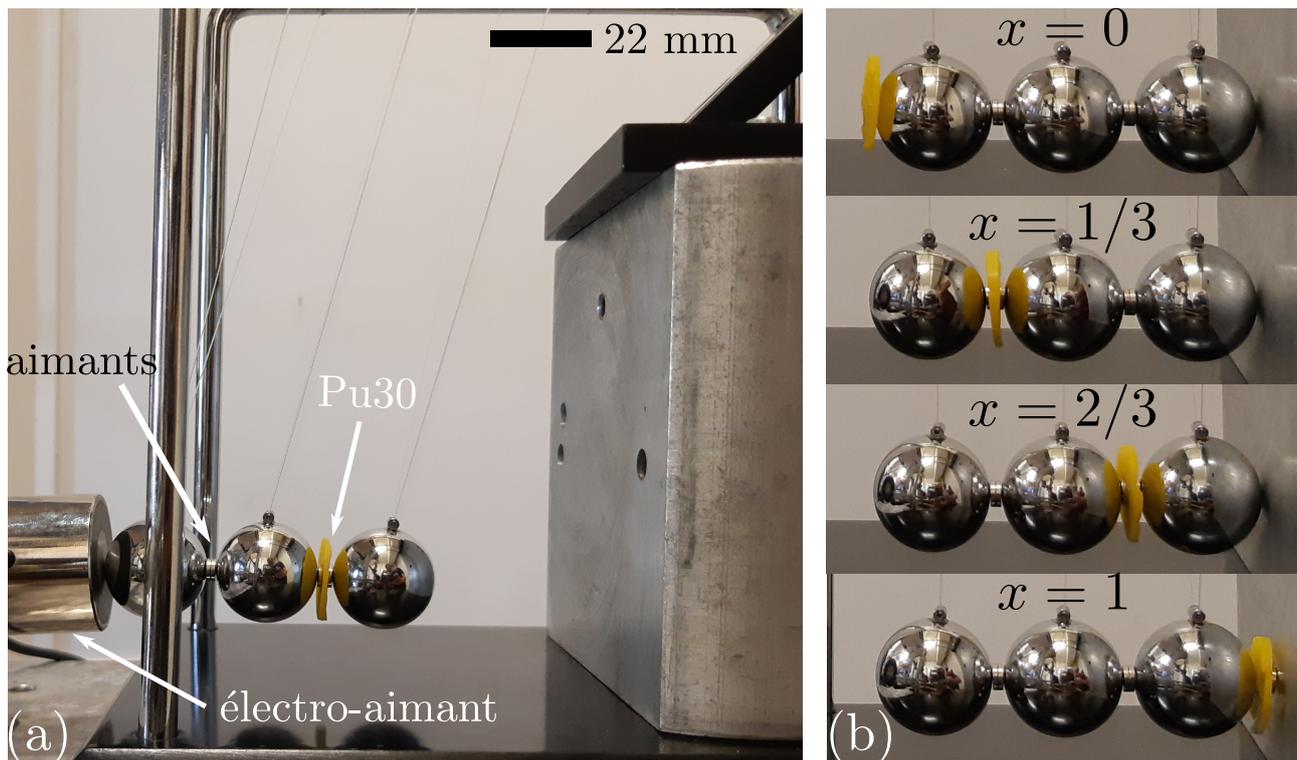


Figure 4.7: (a) Une image du montage expérimental. (b) Les différentes proportions étudiées.

Sur la figure 4.7(a), nous pouvons voir une image de notre montage expérimental. Au centre de cette image nous voyons trois des billes en acier inoxydable de même masse et de même rayon. Nous avons relié ces billes entre elles par de petits aimants. De cette manière nous obtenons un solide cohésif. Les aimants sont des aimants en néodyme qui sont à la fois très puissants et disponibles facilement. Nous pouvons remarquer que ces billes sont séparées par une couche d'élastomère jaune, plus précisément une fine couche de PU Shore A 30, abrégé PU30 dans la suite (voir section 2.2.1). La présence de cette couche permet d'obtenir une modification de la structure de l'objet cohésif. À gauche de ces billes nous avons placé un électroaimant, celui-ci va nous permettre de relâcher les billes du même endroit et donc de contrôler la vitesse d'impact. À droite de ces billes, nous voyons un bloc de dural (duraluminium) sur lequel elles vont venir impacter puis rebondir.

Sur la figure 4.7(b), nous pouvons voir une série d'images montrant les différentes chaînes de billes étudiées. Nous voyons quatre configurations pour lesquelles nous avons placé la couche de PU30 à différents endroits. Nous pouvons alors faire un parallèle entre le schéma de la figure 4.1 concernant la simulation 2 masses - 2 ressorts et ces différents placements. Si nous prenons comme exemple la configuration $x = 2/3$, nous voyons que la couche de PU30 a été placée entre la deuxième bille et la troisième bille (de gauche à droite). En considérant m comme étant la masse totale des trois billes et en considérant que chaque bille a la même masse alors on peut voir sur l'image que $m_1 = (1/3)m$ et $m_2 = (2/3)m$. On retrouve ainsi x , la proportion en masse m_2 dans la chaîne, qui vaut bien $x = 2/3$. Le choix du placement de la couche de PU30 va donc dépendre du rapport de masse que l'on veut obtenir. Toujours dans le but de faire un parallèle avec le schéma de la figure 4.1, nous pouvons aussi imaginer la présence de deux ressorts : le premier sera k_1 et modélisera le contact entre la bille (la plus à gauche) et le substrat (le bloc de dural), le deuxième sera k_2 et modélisera par la couche de PU30. Au vu des modules d'Young

des matériaux en présence, on peut aisément dire que $k_2 \ll k_1$, nous verrons que cela sera utile par la suite lors d'une comparaison entre les résultats expérimentaux et la simulation numérique.

Les expériences sont filmées à l'aide d'une caméra rapide à une fréquence d'acquisition de 250 images par seconde. Cette vitesse d'acquisition peut aussi être obtenue à l'aide de certains smartphones actuels. Sur la figure 4.8, nous pouvons voir une séquence d'image montrant l'impact de la chaîne avec $x = 0$ sur le substrat. À $t = 0$ s, la chaîne est lâchée et commence son mouvement en direction du substrat, vers la droite de l'image, comme l'on peut le voir à l'instant $t = 0.1$ s. La présence d'une flèche blanche indique le sens du mouvement. À l'instant $t = 0.18$ s, la chaîne impacte le substrat et repart vers la gauche de l'image, avec une vitesse plus faible comme nous pouvons l'observer à $t = 0.26$ s. Enfin à $t = 0.35$ s, la chaîne atteint sa position maximale, elle va donc changer de sens et repartir pour impacter de nouveau le substrat, comme on peut l'observer à $t = 0.46$ s. Ce processus va continuer jusqu'à que le pendule perde toute son énergie cinétique.

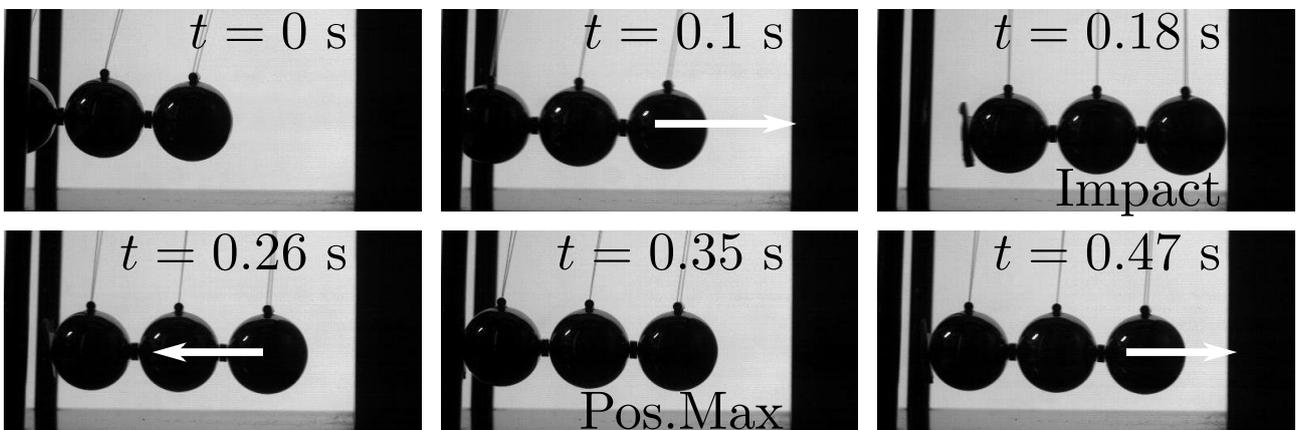


Figure 4.8: Séquence d'images montrant la dynamique de l'impact du pendule. Nous prenons le cas de la configuration $x = 0$ pour l'exemple. La présence de la flèche indique le sens du mouvement.

Concernant l'analyse des films obtenus, nous nous sommes servis de la même démarche vue au chapitre 2. Nous avons "tracké" la bille la plus proche du substrat et mesuré la vitesse à l'impact et celle à l'éjection pour mesurer le Cor . Toujours dans l'optique de simplifier l'on pourra utiliser le logiciel *ImageJ* et obtenir un diagramme spatio-temporel tel que celui de la figure 4.9(b). Pour obtenir ce diagramme nous avons reporté une ligne horizontale de pixels au cours du temps. Cette ligne est représentée en pointillé sur l'image de la figure 4.9(a). Une fois le diagramme spatio-temporel obtenu, il est possible de mesurer le coefficient de restitution via une mesure de la pente de la tangente avant l'impact et de la tangente après l'impact. La pente donnant la vitesse, nous pouvons calculer le Cor . Une autre méthode, qualitative, consiste à calculer le nombre de rebonds sur un intervalle de temps donné. Plus il y a de rebonds, plus la restitution est élevée.

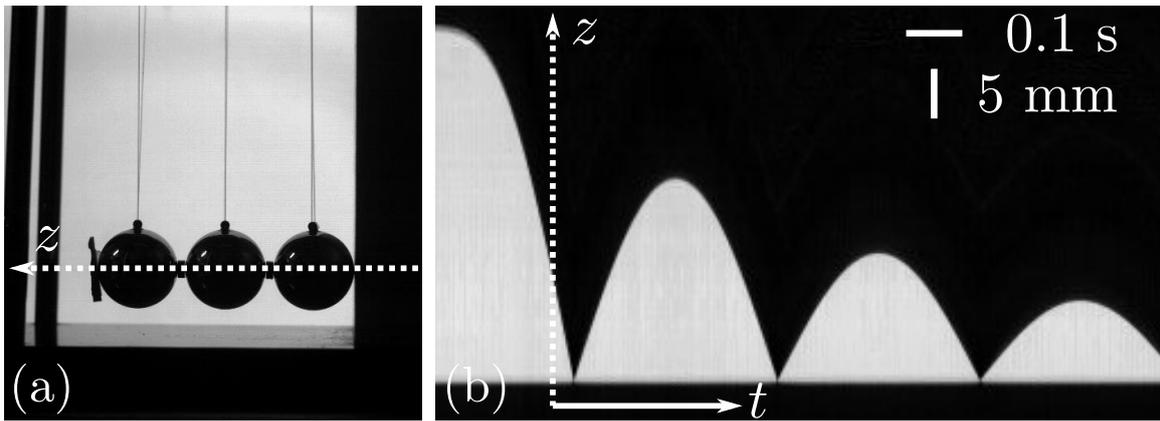


Figure 4.9: (a) Image prise avec la caméra rapide. La ligne pointillée indique le report d'une ligne de pixels pour construire la figure (b). (b) Diagramme spatio-temporel montrant l'impact du système sur le substrat au cours du temps.

4.3.2 Résultats expérimentaux et discussion

Pour chaque configuration, nous avons effectué trois expériences. Le coefficient de restitution est la moyenne de ces trois points et l'incertitude est donnée par l'écart-type. La vitesse d'impact est de l'ordre de $0.3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Nous pouvons retrouver un film des différentes expériences avec ce [lien](#) [D'Angelo, 2021a].

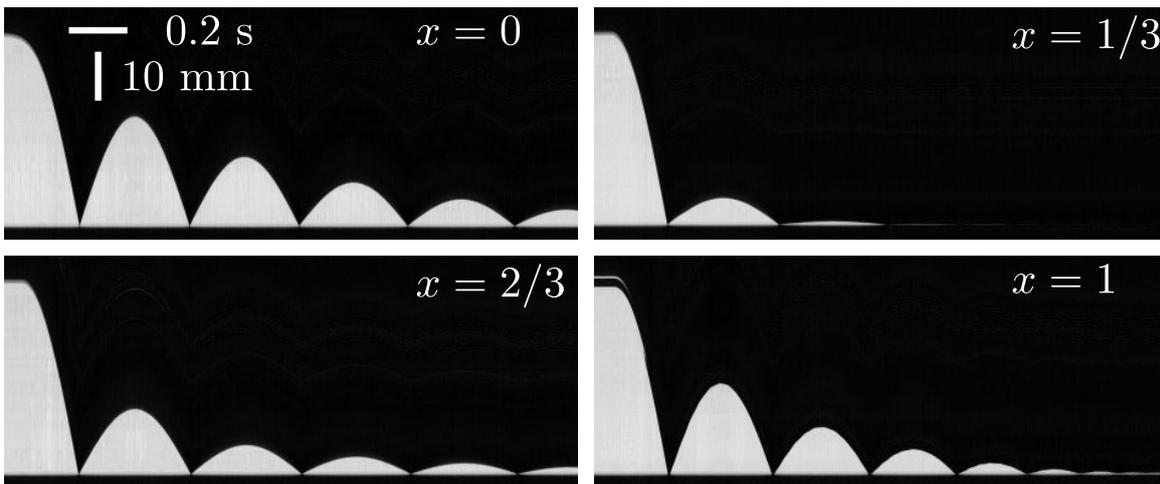


Figure 4.10: Diagramme spatio-temporel montrant la trajectoire du pendule pour chaque proportion étudiée. Le nombre de rebonds sur un intervalle de temps donné renseigne sur le coefficient de restitution.

Sur la figure 4.10, nous pouvons observer les diagrammes spatio-temporels des différentes proportions étudiées. Ces diagrammes ont la même échelle spatiale et temporelle, ce qui permet de voir de manière qualitative que la proportion $x = 1/3$ a la restitution la plus faible et que la proportion $x = 0$ a la restitution la plus élevée. Ce résultat se voit avec la mesure du nombre de rebonds contenu dans le même intervalle temporel.

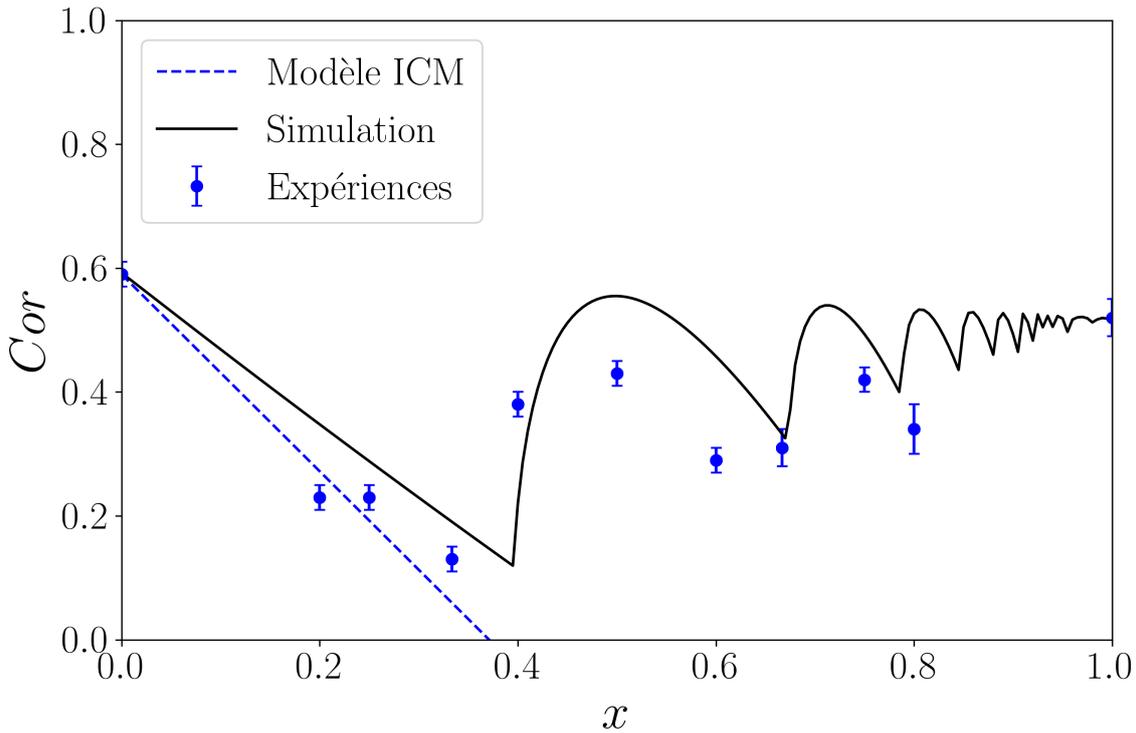


Figure 4.11: Cor en fonction de x . Comparaison entre les résultats expérimentaux, le modèle ICM et la simulation numérique, rééchélonnée, 2 masses - 2 ressorts avec $\alpha = 0.005$.

Sur le graphique de la figure 4.11, nous pouvons observer le coefficient de restitution en fonction de la proportion de masse m_2 dans le système. Sur ce graphique nous avons ajouté le modèle ICM donné par la formule suivante :

$$Cor_{ICM} = Cor_0 - (1 + Cor_0)x \quad (4.13)$$

avec $Cor_0 = Cor(x = 0) = 0.59 \pm 0.02$. Les détails du modèle ICM ont été vus à la section 1.2.3. Nous souhaitons aussi comparer ces résultats avec les résultats de la simulation numérique 2 masses - 2 ressorts. Comme nous l'avons vu précédemment nous avons fait un parallèle entre les différentes configurations étudiées et le schéma de la figure 4.1. Nous avons aussi dit que dans nos expériences nous considérons que $k_2 \ll k_1$, on peut donc faire l'hypothèse que $\alpha \rightarrow 0$. C'est pour cela que nous allons choisir $\alpha = 0.005$. Nous avons déjà vu ce résultat sur la figure 4.3, sur la courbe bleue. Cette simulation ne présentant pas de dissipation nous allons simplement rééchélonner les résultats par la formule suivante :

$$Cor_{rescale} = Cor_{simu} [Cor_0 (1 - x) + Cor_1 x] \quad (4.14)$$

avec $Cor_1 = Cor(x = 1) = 0.52 \pm 0.003$. Ce rééchélonnement est très empirique, il est à analyser avec précautions et ne représente pas un résultat stricto-sensu.

Enfin, nous pouvons noter qu'avec le système présenté sur la figure 4.7, nous avons pu faire les proportions $x = 0$, $x = 1/3$, $x = 2/3$ et $x = 1$. Nous avons ensuite rajouté les points supplémentaires en utilisant 4 boules du pendule ($x = 1/4$, $1/2$ et $3/4$) puis 5 boules du pendule ($x = 1/5$, $2/5$, $3/5$ et $4/5$). Nous observons une diminution de la restitution entre $x = 0$ et $x = 1/3$. Cette décroissance semble linéaire et proche du modèle ICM. Ensuite, nous observons le caractère oscillant des points expérimentaux. Concernant la comparaison avec les résultats rééchélonnés de la simulation, on voit que les points centraux sont plutôt en bon accord. Les points aux extrémités coïncident par construction. Nous pouvons aussi noter la similitude des résultats

avec dans un premier temps une zone en décroissance linéaire puis une zone pour laquelle le Cor augmente avec la présence d'oscillations.

4.4 Réalisation didactique d'un impact via un camion-jouet

Dans la section précédente, nous avons vu un exemple de protocole expérimental simple mettant en évidence l'effet à la fois du rapport de masse et de la structure interne. Dans cette section, nous allons nous focaliser sur la structure de l'objet et non sur la variation du rapport de masse. Pour ce faire, nous avons étudié l'impact d'un camion, avec différents chargements, contre un mur.

4.4.1 Matériels & Méthodes

Nous avons à notre disposition un camion-jouet pick-up disposant d'un espace permettant d'y disposer un chargement. Nous avons élaboré un dispositif expérimental simple dans sa mise en œuvre comme nous allons le voir.

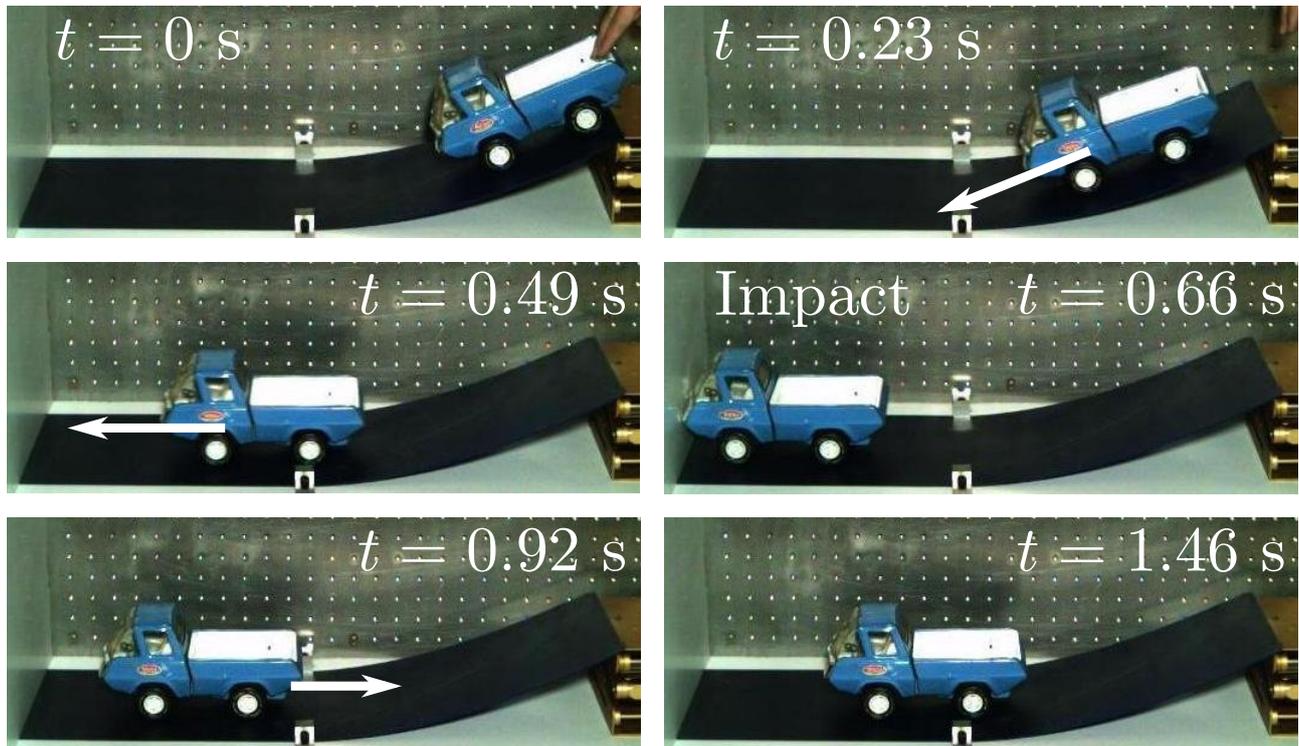


Figure 4.12: Séquences d'images de l'impact du camion vide. Le coefficient de restitution est $Cor = 0.36 \pm 0.03$.

Sur la figure 4.12, nous pouvons observer une séquence d'images de l'impact du camion lorsque celui-ci ne dispose pas d'un chargement. À $t = 0$ s, le camion se trouve à l'extrémité de la piste. Cette piste est simplement une plaque de plastique souple bleue qui est surélevée à son extrémité. Cela nous permet d'assurer à la fois le guidage et de contrôler la vitesse du camion. À $t = 0.23$ s, on observe que le camion se dirige vers la gauche avec une certaine vitesse. La présence d'une flèche blanche donne une indication sur la norme et la direction de la vitesse. À $t = 0.66$ s, le camion va impacter une planche en bois fermement fixée. Après cet impact, le camion va reculer comme nous pouvons le voir à $t = 0.92$ s. Puis il va s'arrêter, ici à $t = 1.46$ s.

Nous avons déposé dans le camion différents chargements dans le but de modéliser différentes structures. Les différents chargements ainsi que leurs masses sont notées dans le tableau 4.1 et nous les voyons sur la figure 4.13. Nous pouvons définir x comme étant la proportion de la masse du chargement sur la masse totale. Nous pouvons noter qu'il y a une faible variation de cette proportion avec les chargements, à l'exception de la bouteille pleine. Sans prendre en compte la bouteille pleine, la proportion moyenne vaut $\bar{x} = 0.35 \pm 0.02$.

Objet	Camion	Bourse	Pièces	Pierre	Bouteille pleine	Bouteille demi-pleine
Masse (g)($\pm 0.5g$)	478	281.0	253.0	222.5	512.5	270.5
Proportion x		0.37	0.35	0.32	0.52	0.36

Table 4.1: Masse du camion et des différents chargements utilisés.

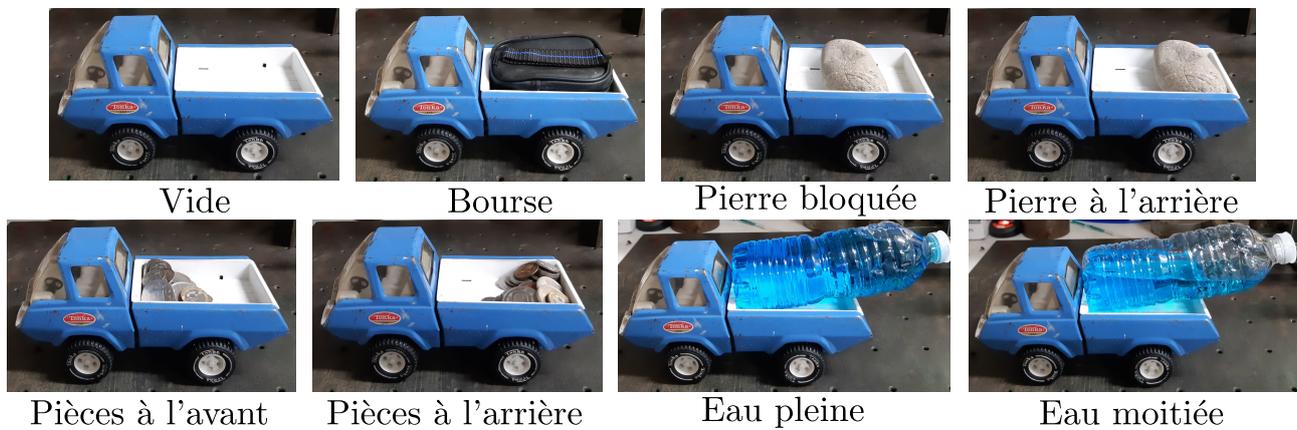


Figure 4.13: Photographies du camion et de ses différents chargements.

Enfin, nous utilisons une caméra rapide avec une vitesse d'acquisition de 100 images par seconde. Afin d'analyser les films obtenus nous avons utilisé la méthode déjà vue précédemment (voir chapitre 1). Nous avons "tracké" la roue avant du camion afin de mesurer la vitesse avant l'impact et la vitesse après l'impact pour mesurer le Cor . Si l'on veut simplifier la méthode, il suffit de s'intéresser au recul du camion, cela donne une indication qualitative de la restitution.

4.4.2 Résultats expérimentaux et discussion

Pour chaque configuration, nous avons effectué une seule expérience. L'incertitude sur le coefficient de restitution est donnée par l'incertitude sur la mesure des vitesses lors de l'analyse des films. La vitesse d'impact est de l'ordre de $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Nous pouvons retrouver un film avec chaque chargement avec ce [lien](#) [D'Angelo, 2021b].

Sur le tableau 4.2, nous pouvons observer le coefficient de restitution en fonction du chargement du camion. Ce que l'on peut noter est que nous sommes dans une série d'expériences de la forme "tout ou rien", c'est-à-dire que soit le coefficient de restitution vaut 0 soit il vaut en moyenne 0.23, valeur inférieure à la restitution du camion vide valant 0.36. Comme nous l'avons vu, la proportion x vaut en moyenne 0.35 et il y a une faible variation de celle-ci. Cela permet de s'abstenir de l'effet du rapport de masse pour se concentrer sur le chargement et notamment sur l'interaction chargement/camion. Ici, il faut noter que pour $\bar{x} = 0.35$, dans le cadre du modèle ICM, nous nous attendons à un faible coefficient de restitution.

Chargement	Cor	Rebond ?	Observations
Vide	0.36 ± 0.03	Oui	Comportement objet homogène
Bourse	0.01 ± 0.02	Non	Pas d'informations
Pierre bloquée	0.26 ± 0.03	Oui	Comportement objet homogène
Pierre à l'arrière	0.01 ± 0.02	Non	Déplacement de la pierre vers l'avant
Pièces à l'avant	0.24 ± 0.03	Oui	Déplacement des pièces vers l'arrière
Pièces à l'arrière	0.00 ± 0.02	Non	Déplacement des pièces vers l'avant
Eau pleine	0.20 ± 0.02	Oui	Compression/décompression de la bouteille
Eau moitié	0.00 ± 0.02	Non	Déplacement de l'eau dans la bouteille

Table 4.2: Coefficient de restitution pour les différents chargements dans le camion.

Nous présentons quatre vidéos et donc quatre systèmes. La première vidéo compare le camion vide et le camion avec la bourse. Nous pouvons remarquer que le camion vide va rebondir et que celui avec la bourse non. Nous choisissons de ne pas révéler le contenu de la bourse pour que cet impact serve d'accroche dans une discussion avec des étudiants. Pour la deuxième vidéo, nous comparons l'impact du camion avec une pierre bloquée sur sa benne et celui avec une pierre déposée à l'arrière, qui a la possibilité de bouger. Nous reviendrons plus tard sur cette expérience. Concernant la troisième vidéo, nous comparons le camion chargé avec des pièces de monnaie à l'avant et des pièces de monnaie à l'arrière. Dans les deux cas, elles sont libres de se mouvoir. Lorsque les pièces sont à l'avant, nous pouvons voir que le choc avec le mur entraîne l'éjection de certaines pièces hors du camion, mais finalement, nous pouvons quand même observer un rebond. Lorsque les pièces sont à l'arrière du camion, nous pouvons voir que celles-ci se déplacent vers l'avant du camion, qu'elles impactent le camion et que le camion ne rebondit pas. Enfin, pour la quatrième vidéo, nous chargeons une bouteille d'eau soit pleine soit remplie à moitié. Lorsque la bouteille d'eau est pleine, on peut voir que celle-ci se déforme à l'impact, semble se relaxer puis le système rebondit en arrière. Lorsque que la bouteille est à moitié remplie, nous pouvons voir que le mouvement de l'eau à l'intérieur de la bouteille est très important et que l'énergie cinétique de l'impact semble se dissiper dans ce mouvement interne. À l'aide de ces observations, nous pouvons faire deux remarques. La première est que la différence entre le temps de sollicitation du camion et le temps de sollicitation de son chargement semble être un paramètre très important. La deuxième est que l'expérience avec les pièces nous montre que contrairement à ce que nous aurions pu penser initialement la dissipation liée aux frottements entre celles-ci ne semble pas jouer un rôle important.

Sur la figure 4.14, nous pouvons observer la séquence d'images de l'impact du camion chargé par une pierre posée à l'arrière de celui-ci. L'observation de cet impact va nous servir à analyser et comprendre les résultats obtenus. À $t = 0$ s, le camion est lâché depuis le haut de la piste et acquiert une vitesse initiale comme nous le voyons à $t = 0.24$ s. La flèche blanche indique la vitesse du camion et la flèche rouge indique la vitesse de la pierre dans le référentiel du laboratoire. À $t = 0.36$ s, le camion va impacter le mur. À $t = 0.37$ s, 0.38 s et 0.39 s, on peut observer deux mouvements distincts : le premier c'est que le camion va reculer, le deuxième c'est que la pierre va se déplacer vers l'avant du camion de part son inertie. La pierre va impacter le camion à $t = 0.40$ s. C'est cet impact qui va arrêter le mouvement du camion. Puis, à $t = 0.42$ s, nous voyons qu'il reste de l'énergie cinétique dans le système puisque la pierre se redirige vers l'arrière du camion et le camion vers le mur mais avec une vitesse très faible. Enfin, à $t = 0.44$ s, la pierre et le camion s'arrêtent, toute l'énergie cinétique du système s'est dissipée. Cet impact du camion, suivi de l'impact entre la pierre et le camion, de part son mouvement relatif, est une belle illustration du fonctionnement du modèle ICM.

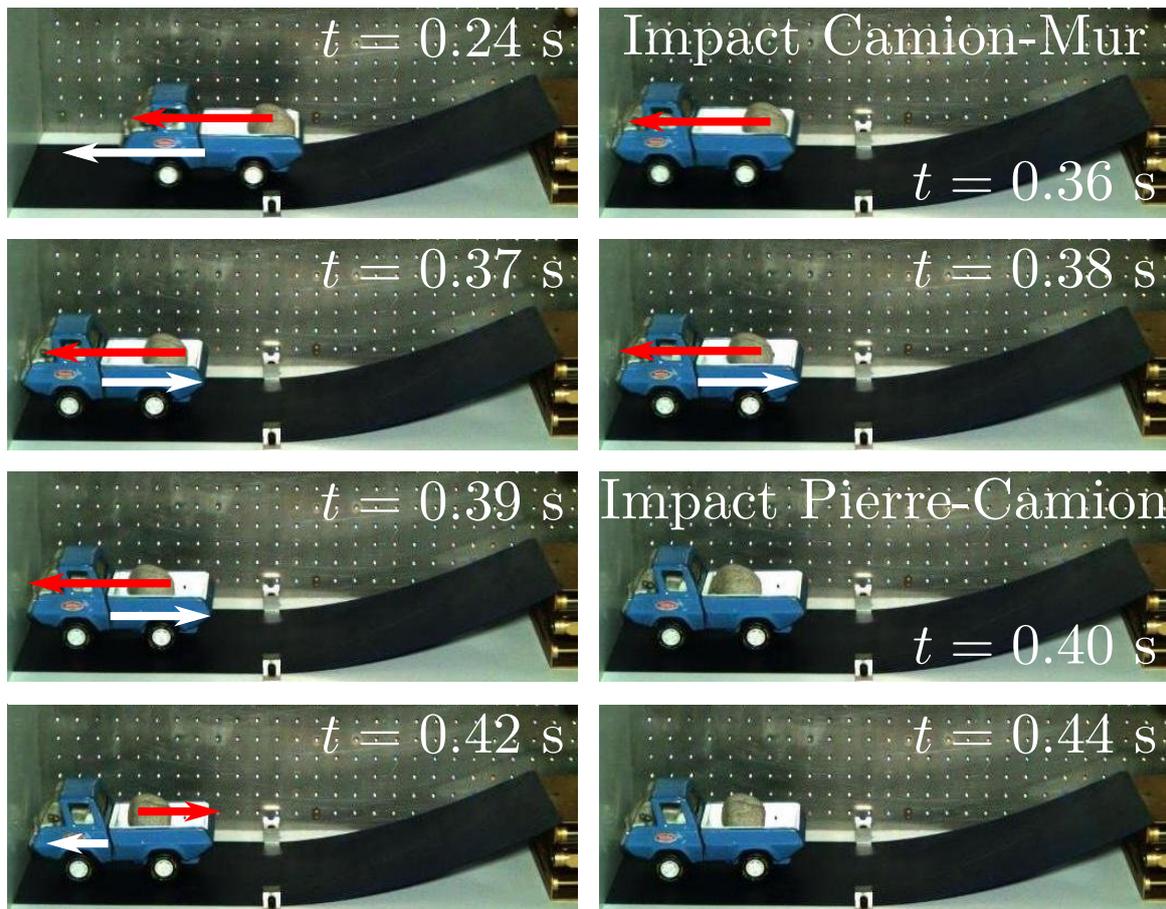


Figure 4.14: Séquences d'images du camion chargé avec une pierre à l'arrière. Le coefficient de restitution est $Cor = 0.01 \pm 0.02$. La flèche rouge indique la vitesse de la pierre, la flèche blanche indique la vitesse du camion.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé des systèmes modèles permettant d'aborder la complexité des notions vues dans ce manuscrit avec un protocole expérimental plus simple et des résultats plus restreints bien que riches en enseignements. Nous avons abordé seulement les problèmes et les observations physiques, et un travail conséquent reste à faire sur l'approche didactique de ces expériences.

La simulation numérique 2 masses - 2 ressorts a permis de montrer que le coefficient de restitution dépend à la fois du rapport de masse et de la rigidité des ressorts. Nous avons aussi mis en évidence la présence de multiples rebonds.

La transformation d'un pendule de Newton a permis de mettre en évidence l'effet significatif du rapport de masse sur le coefficient de restitution concernant un objet dont la structure interne n'est plus homogène. L'expérience sur l'impact d'un camion avec différents chargements se focalise elle aussi sur une modification de la structure. Mais celle-ci permet de mettre en évidence le déplacement relatif du chargement lors de l'impact et de noter que la différence entre les temps de sollicitation du camion et de son chargement est un paramètre d'une grande importance.

Chapitre 5

Conclusion générale

Tout au long de ce manuscrit, nous avons étudié la dynamique de l'impact et du rebond d'un projectile élastique bicomposite sur un substrat très massif et rigide. Nous nous sommes notamment focalisés sur la mesure du coefficient de restitution. Cette étude se place dans un contexte de recherche plus large car les études consacrées aux impacts et aux rebonds sont très variées. Différentes géométries ont été étudiées, allant de l'étude du rebond d'une sphère homogène au crash d'une voiture, en passant par un marteau rempli de billes, objet hétérogène par essence. Différentes propriétés des matériaux sont mises en jeu comme l'élasticité, la viscoélasticité ou la plasticité. Les deux dernières sont des sources évidentes de dissipation d'énergie cinétique alors que la première ne garantit pas toujours d'avoir un coefficient de restitution égal à 1. En effet, le transfert d'énergie cinétique initiale sous la forme d'ondes de déformation élastique peut être un facteur important conduisant à une restitution partielle.

Nous avons d'abord présenté, au chapitre 2, une étude expérimentale de l'impact de projectiles élastiques bicomposites. Ces projectiles, ayant une géométrie cylindrique, sont constitués d'une partie rigide en bas sur laquelle repose une partie plus molle. Nous avons montré que le coefficient de restitution dépendait de la proportion de la partie molle dans le système. Pour des proportions inférieures à 0.5, nous avons observé une décroissance linéaire de la restitution avec l'augmentation de la proportion. Puis, nous avons observé une augmentation du coefficient de restitution avec la présence d'oscillations pour des proportions supérieures à 0.5. En variant la nature des matériaux, nous avons mis en évidence que la restitution de la partie rigide, prise séparément, influe sensiblement sur l'amplitude des oscillations décrites précédemment. Une bonne restitution de la partie rigide conduit à de grandes amplitudes d'oscillations alors que dans le cas opposé, nous obtenons une croissance linéaire du Cor . Pour de grandes proportions de la partie molle, nous avons observé un comportement asymptotique qui ne dépend pas de la partie rigide utilisée. Enfin, grâce à une technique d'imagerie rapide et l'utilisation de matériaux très mous (pour la partie molle) présentant de grandes déformations, nous avons mis en évidence la présence de multiples rebonds lors de l'impact du projectile : le projectile va rebondir de multiples fois sur le substrat avant qu'il ne décolle dans sa totalité.

Suite à ces observations expérimentales, nous avons présenté une modélisation précise de la dynamique du rebond de ces objets bicomposites. Le modèle présenté prend en compte à la fois un contact de Hertz viscoélastique pour décrire le contact entre la partie rigide et le substrat ainsi que le temps de propagation d'une onde de déformation dans la partie molle qui s'appuie sur la théorie de Saint-Venant et Flamant. L'accord obtenu entre le modèle théorique et les résultats expérimentaux est satisfaisant avec l'utilisation d'un seul paramètre ajustable. Nous avons montré, au travers d'une analyse des temps caractéristiques du système, que nous pouvions d'une part nous rapprocher du modèle ICM et d'autre part du comportement asymp-

totique observé pour les grandes proportions de la partie molle. Finalement, nous avons mis en évidence que le choix de la proportion de la partie molle permet de varier sensiblement la restitution d'un projectile bicomposite : d'un rebond presque parfait à un amortissement quasiment de celui-ci. Cette partie de ma thèse a fait l'objet d'un article [D'Angelo et al., 2021].

Après avoir réalisé cette étude expérimentale et théorique, nous nous sommes orientés vers une étude numérique dans le chapitre 3. Nous avons simulé l'impact d'une chaîne 1D bicomposite de masses et de ressorts. Nous avons varié à la fois le rapport du nombre de masses dans chaque partie et le rapport des constantes de raideurs des deux types de ressorts présents dans le système. Deux systèmes sont étudiés : une chaîne en adhésion et une chaîne sans adhésion. Les résultats concernant la chaîne en adhésion, dans le cas où la partie basse est très rigide devant la partie haute, présentent un bon accord avec les caractéristiques expérimentales : une décroissance linéaire de la restitution pour des proportions inférieures à 0.5, une augmentation de la restitution présentant des oscillations ainsi que la présence de multiples rebonds pour des proportions supérieures à 0.5. Ce système confirme les résultats expérimentaux, mais avec une géométrie différente. De plus, l'élément essentiel de cette simulation est la propagation d'ondes de déformation au sein du projectile. Lorsque le projectile est amorti, l'énergie cinétique initiale se retrouve dans les modes de déformation de celui-ci. Pour la chaîne sans adhésion, les coefficients de restitution pour la partie basse et pour la partie haute sont calculés distinctement. Pour la partie basse, il varie entre 0 et 1 alors que pour la partie haute, il peut atteindre des valeurs proches de 3. Une approche analytique de type milieu continu prenant en compte la propagation d'une onde de déformation dans le système a été développée. Lorsque l'on fait l'hypothèse d'un seul rebond, le modèle est en très bon accord avec les simulations numériques.

Nos travaux sur l'impact d'un objet bicomposite élastique ont été abordés d'un point de vue à la fois expérimental, théorique et numérique. Nous résumons cette approche multiple en présentant la figure 5.1. Nous pouvons y observer le coefficient de restitution en fonction de x pour les points expérimentaux et la courbe issue de notre modèle théorique correspondant au projectile R1-S1 (voir chapitre 2), ainsi que les résultats d'une de nos simulations numériques dans la limite où la partie basse est très rigide devant la partie haute.

Dans le cadre d'une collaboration, nous avons proposé des systèmes modèles de projectiles bicomposites dans le but d'effectuer une approche didactique de la notion de rebonds. Ces travaux sont présentés au chapitre 4. Nous avons d'abord simulé un système de 2 masses - 2 ressorts. Ce système permet de simplifier le code numérique utilisé dans le chapitre précédent pour la chaîne de masses-ressorts bicomposite. Nous avons pu observer la dépendance du coefficient de restitution en le rapport de masse et en le rapport des raideurs, ainsi que les multiples rebonds. Dans un second temps, en transformant un pendule de Newton, nous avons étudié l'impact d'un objet dont la structure interne n'est pas homogène. Enfin, nous avons étudié l'impact d'un camion avec différents chargements. Cette expérience permet de mettre en évidence l'effet du déplacement relatif du chargement lors de l'impact sur la valeur du coefficient de restitution. Elle met aussi en évidence que la différence entre le temps de sollicitation du camion et celui de son chargement est un paramètre d'une grande importance. Ces systèmes ont été utilisés car ils peuvent être reproduits très facilement par des enseignants. Ils pourront permettre d'amorcer l'enseignement des connaissances sur la notion de rebond à un public de lycéens ou d'étudiants.

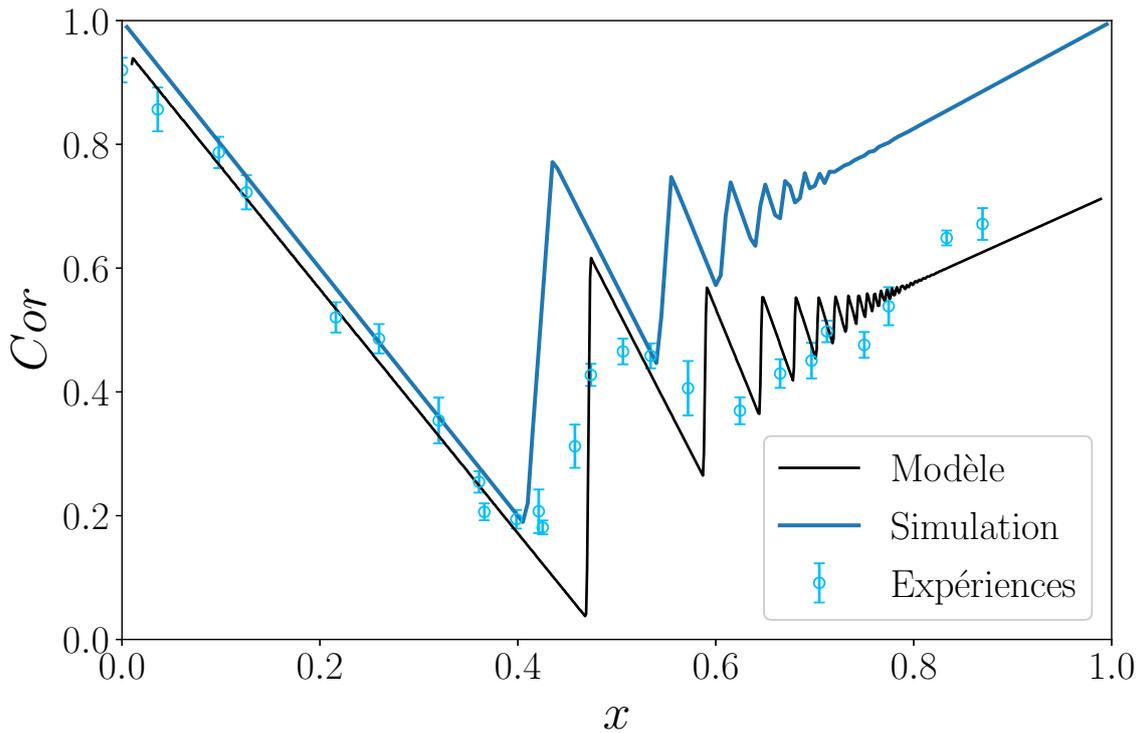


Figure 5.1: Coefficient de restitution en fonction de x . Nous comparons les résultats expérimentaux (cercle bleu) et le modèle théorique (ligne fine noir) correspondant au projectile R1-S1, ainsi que la simulation numérique dans la limite où la partie basse est très rigide devant la partie haute.

En perspective, nous allons donner quelques pistes de recherche pour approfondir les résultats présentés dans ce manuscrit. D'un point de vue théorique, il faudrait aller plus loin dans la prise en compte de la force élastique entre la partie rigide et la partie molle. Pour ce faire, il faudra investiguer plus précisément le rôle du facteur géométrique α introduit dans notre modèle. Numériquement, le comptage du nombre de rebonds a posé problème et celui-ci pourra être amélioré. Expérimentalement, nous pourrions envisager un projectile où la partie molle se trouve sous la partie rigide et dans un premier temps comparer cela aux résultats numériques puis envisager une approche théorique de cette configuration. Dans l'annexe A, nous présenterons quelques résultats expérimentaux sur l'impact de projectiles dans des géométries différentes de celles proposées dans les chapitres de ce manuscrit. Des résultats intéressants ont été observés et peuvent servir de base pour une possible étude à la fois expérimentale, théorique et numérique.

Annexe A

Quelques expériences complémentaires sur les objets hétérogènes

Sommaire

A.1	Introduction	116
A.2	Impact d'un projectile non cohésif	116
A.2.1	Principe de l'expérience	116
A.2.2	Résultats et analyse	117
A.2.3	Perspectives	119
A.3	Impact d'un projectile bicomposite : sollicitation transverse de la partie molle .	120
A.3.1	Principe de l'expérience	120
A.3.2	Résultats et analyse	121
A.3.3	Perspectives	121
A.4	Éjection d'une bille posée dans une cage	122
A.4.1	Principe de l'expérience	122
A.4.2	Résultats et analyse	123
A.4.3	Perspectives	125
A.5	Conclusion	126

A.1 Introduction

Dans cette annexe, nous allons nous intéresser à quatre expériences que j’ai réalisées durant ma thèse. Ces expériences vont montrer la diversité des systèmes à étudier dans le cadre de l’impact d’objets à plusieurs composants.

A.2 Impact d’un projectile non cohésif

Dans cette section, nous allons nous intéresser à une expérience similaire à celle du “Stacked-ball drop”, c’est-à-dire l’étude de l’impact d’un objet non cohésif. Nous allons poser une bille sur un projectile bicomposite et nous intéresser à la fois au coefficient de restitution de la bille et à celui du projectile bicomposite. Nous allons introduire une autre définition de la proportion x . Ici, elle sera la proportion de la masse m_b de la bille dans le système :

$$x = \frac{m_b}{m_{tot}}. \quad (\text{A.1})$$

A.2.1 Principe de l’expérience

Le projectile bicomposite est projectile de type R1-S1, il est donc composé d’une partie rigide en PEEK et d’une partie molle en hydrogel. Nous avons déjà vu les propriétés de ces matériaux dans la section 2.2.1 du chapitre 2. Pour la partie S1, celle-ci a la forme d’un parallélépipède de hauteur $h = 3.62$ mm et de largeur 15 mm. Afin de faire varier la proportion x , nous allons faire varier le rayon des billes ainsi que la hauteur de R1. Pour les billes, qui sont en acier, le rayon varie entre 5.5 et 22 mm. Pour R1, nous avons pris quatre parties R1 différentes pour des hauteurs comprises entre 15 et 45 mm. Nous pouvons voir différents projectiles sur les images de la figure A.1.

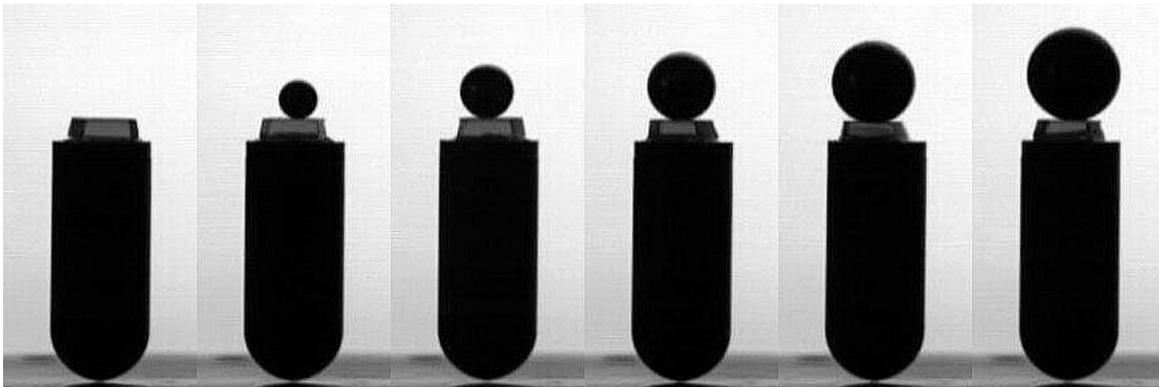


Figure A.1: Images du projectile bicomposite R1-S1 avec une bille posée dessus. Nous avons, de gauche à droite, $x = 0\%$, 10% , 22% , 37% , 52% et 60% .

Nous allons mesurer le coefficient de restitution, d’une part pour la bille (noté Cor_b), et d’autre part pour le projectile bicomposite R1-S1 (noté Cor_{R1-S1}). Nous appliquons la même méthode de tracking et dépouillement que nous avons vu au chapitre 2 dans la section 2.2.3.

A.2.2 Résultats et analyse

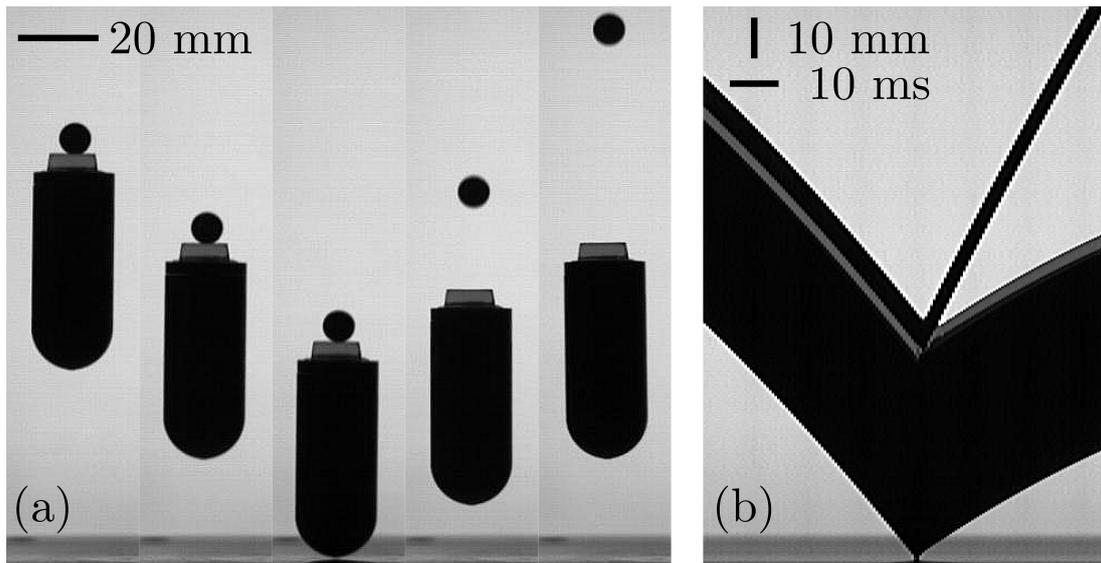


Figure A.2: (a) Séquences d'images d'un impact du projectile bicomposite R1-S1 avec une bille posée dessus pour $x = 10\%$. ($\Delta t = 0.015$ s). (b) Diagramme spatio-temporel de l'impact de ce projectile.

Nous pouvons observer le résultat d'un impact du projectile étudié sur la figure A.2. Cette figure met en évidence la différence de vitesse à l'éjection entre la bille et le projectile R1-S1. Sur le graphique de la figure A.3, nous pouvons observer le coefficient de restitution en fonction de la proportion x . En bleu, nous pouvons voir les points expérimentaux pour la bille et en rouge, ceux pour le projectile R1-S1.

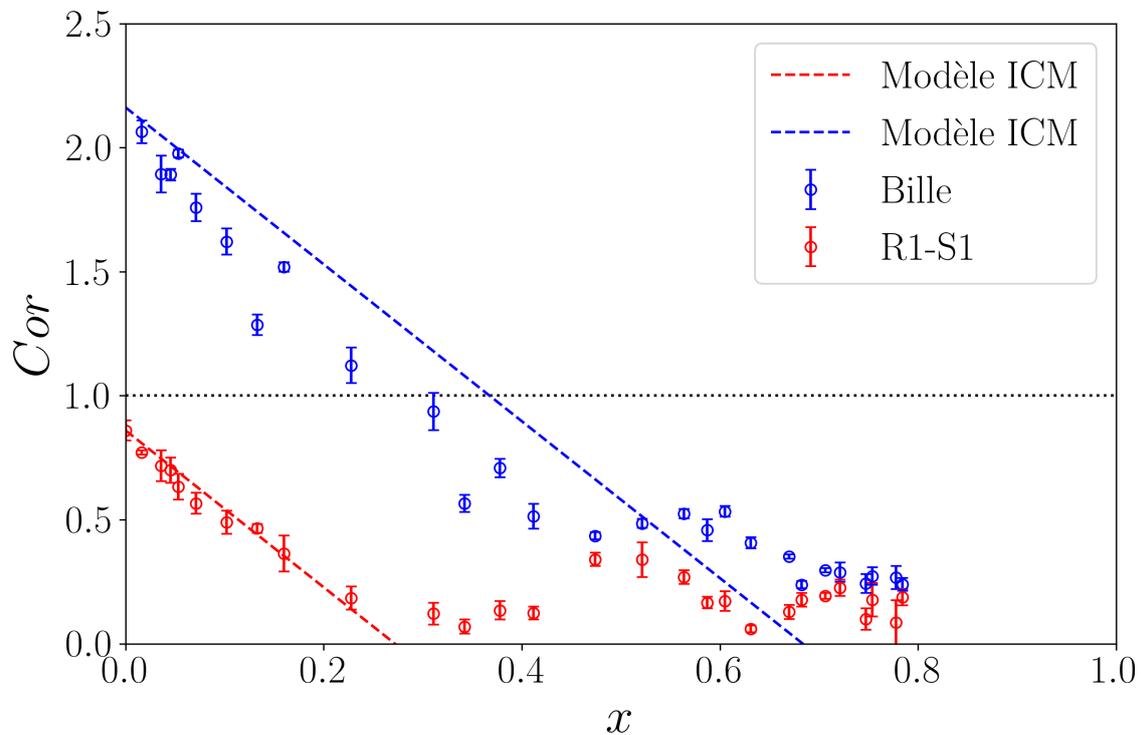


Figure A.3: Cor en fonction de x . En bleu, pour la bille. En rouge, pour R1-S1. Les lignes pointillées indiquent le modèle ICM de chaque objet.

Pour la bille, nous pouvons d'abord observer que le coefficient de restitution tend vers 2 lorsque $x \rightarrow 0$. Cela signifie, que dans la limite où la masse de la bille est petite devant la masse de R1-S1 alors la bille repart avec une vitesse plus élevée que la vitesse initiale du projectile dans sa totalité. Pour R1-S1, la restitution tend vers 1 lorsque $x \rightarrow 0$. Ensuite, nous pouvons observer qu'à la fois pour la bille et pour R1-S1, nous avons une décroissance linéaire de la restitution avec l'augmentation de la proportion x . Pour la bille, le minimum est atteint en $x = 0.35$ avec $Cor_b = 0.05$, ensuite il semble que nous ayons une croissance linéaire avec une valeur maximale en $x = 0.47$ avec $Cor_b = 0.34$. Puis, nous pouvons observer de nouveau une décroissance linéaire suivie d'une augmentation de la restitution. Pour R1-S1, après la décroissance linéaire, nous observons une légère croissance de celui-ci puis une nouvelle diminution. Il est intéressant de noter que pour les grandes proportions, les coefficients de restitution semblent converger aux alentours de 0.3.

Sur le graphique, nous pouvons aussi voir une ligne pointillée bleue et une ligne pointillée rouge. Celles-ci correspondent aux valeurs du coefficient de restitution données par le modèle ICM. Le choix d'appliquer le modèle ICM est justifié par le comportement du système lorsque $x \rightarrow 0$. En effet, nous avons vu que la restitution de la bille tend vers 2 et que celle de R1-S1 tend vers 1. Or dans le modèle ICM, pour le cas d'un choc élastique et dans la limite d'un faible rapport de masse (voir équation 1.15 et 1.16), nous trouvons une restitution de 1 pour la masse m_1 et de 3 pour la masse m_2 . Pour notre expérience, nous allons définir $Cor_1 = Cor_{R1-S1}(x = 0) = 0.86$, comme étant le coefficient de restitution entre le projectile R1-S1 seul et le substrat; et $Cor_{1,2} = 0.70$ le coefficient de restitution entre la bille et le gel. Dans la section 1.2.3, nous avons vu les expressions des vitesses d'éjection d'une masse m_1 (équation 1.6) et d'une masse m_2 (équation 1.7), c'est à partir de ces expressions que nous trouvons le coefficient de restitution de la masse m_1 , ici le projectile R1-S1, et celui de la masse m_2 , ici la bille. Les expressions des vitesses donnent alors

$$Cor_{R1-S1} = Cor_1(1 - x) - (1 + Cor_{1,2} + Cor_{1,2}Cor_1)x \quad (A.2)$$

$$Cor_b = (Cor_1 + Cor_{1,2} + Cor_1Cor_{1,2})(1 - x) - x. \quad (A.3)$$

Finalement, nous pouvons remarquer qu'il existe un bon accord entre les points expérimentaux et la restitution donnée par le modèle ICM pour des valeurs de x inférieure à 0.5. Ces résultats sont une fois de plus l'occasion de montrer l'efficacité de ce modèle malgré une géométrie particulière.

Nous pouvons aussi nous intéresser au nombre de multiples rebonds de R1-S1, comme nous pouvons le voir sur la figure A.4. Comme dans les chapitres 2 et 3, respectivement aux figures 2.10 et 3.7, nous observons que les résultats ont la forme de marches d'escalier.

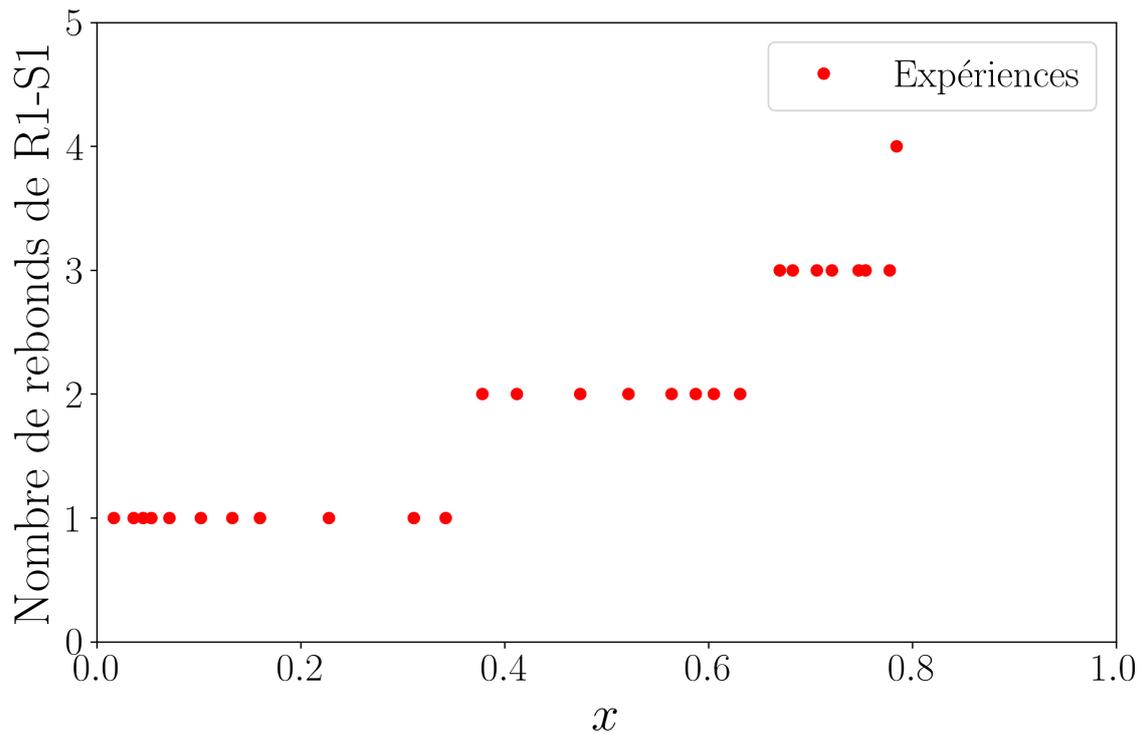


Figure A.4: Nombre de rebonds en fonction x pour R1-S1.

A.2.3 Perspectives

Après avoir observé ces résultats expérimentaux, nous pouvons donner quelques clés qui nous permettraient d'établir un modèle afin de comprendre le fonctionnement de ce système. Dans un premier temps, il faudra prendre en compte le contact entre la partie rigide R1 et le substrat. Ensuite, il faut prendre en compte la compression de la partie molle S1 qui va agir comme un ressort entre la partie rigide R1 et la bille. Enfin, d'un point de vue expérimental, il serait intéressant de remplacer la bille par d'autres matériaux.

A.3 Impact d'un projectile bicomposite : sollicitation transverse de la partie molle

Dans cette section, nous allons nous intéresser à l'impact d'un projectile bicomposite soumis à une sollicitation transverse. Nous allons étudier le rebond d'un tube qui contient soit la partie molle S1, soit la partie molle S2. Comme nous allons le voir, le contact se fait seulement au niveau des parois de ce tube. La sollicitation de la partie molle est donc transverse. Ici, x est la proportion de la partie molle dans le système soit :

$$x = \frac{m_s}{m_{tot}}. \quad (\text{A.4})$$

A.3.1 Principe de l'expérience

Nous étudions l'impact et le rebond d'un projectile bicomposite composé d'un tube contenant une partie molle et ayant comme extrémité la partie rigide R1. Pour la partie molle, nous avons réalisé des expériences avec S1 et avec S2, dont nous avons déjà vu les caractéristiques dans la section 2.2.1. Pour la partie molle S2, nous avons inséré celle-ci dans le tube. Pour la partie molle S1, en revanche, nous avons moulé directement celle-ci dans le tube. Dans les deux cas, nous modifions la proportion x en changeant la hauteur de la partie molle. Le tube, en plexiglass (Polyméthacrylate de méthyle, PMMA), est de longueur 100 mm et de masse 7.05 ± 0.05 g. Le diamètre externe est de 20 mm et le diamètre interne est de 18 mm. L'extrémité de ce tube est un bouchon hémisphérique qui est la partie rigide R1. Cette demi-sphère a un rayon de courbure de 10 mm et une masse de 3.58 g. Enfin, nous pouvons noter que nous avons percé quatre trous dans le tube entre la partie molle et l'extrémité en R1, ces trous permettent une évacuation de l'air. En effet, lors de l'impact, la partie molle va se déformer et en l'absence de ces trous la couche d'air aurait pu agir comme un ressort et venir ajouter un effet supplémentaire dans le système. Nous pouvons noter que nous avons réalisé des points expérimentaux avec le tube non percé et le tube percé, et nous avons pu observer une différence significative du coefficient de restitution entre les deux systèmes. Le tube percé permettait d'obtenir une meilleure restitution.

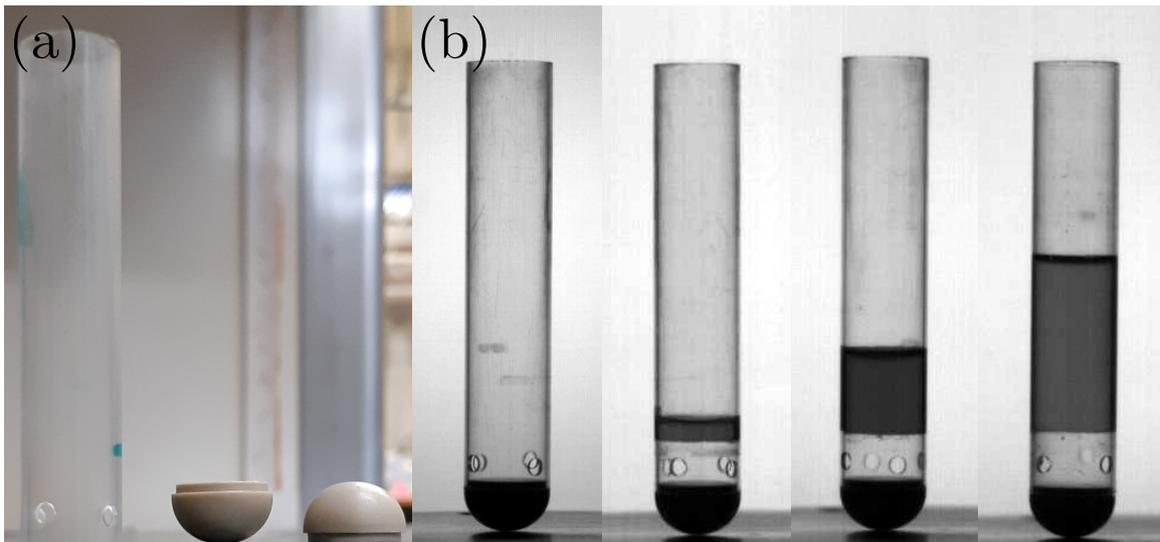


Figure A.5: (a) À gauche, tube en PMMA percé en bas. Au centre et à droite, 2 extrémités en R1. (b) Image des projectiles bicomposites R1-S1 pour $x = 0\%$, 9% , 32% et 50% .

Nous avons utilisé la même méthode de tracking et dépouillement des résultats vu au chapitre 2 section 2.2.3, ici nous l'avons appliquée à l'extrémité en R1.

A.3.2 Résultats et analyse

Sur le graphique de la figure A.6, nous pouvons observer le coefficient de restitution du projectile bicomposite en fonction de x . En bleu, nous pouvons voir les points expérimentaux pour lesquels le tube contient S1 et en vert ceux pour lesquels le tube contient S2. Dans un premier temps, nous pouvons observer, dans les deux cas, une décroissance linéaire avec l'augmentation de la proportion x . Cette décroissance est suivie d'une croissance linéaire pour R1-S1. Pour R1-S2, nous avons peu de points, il est donc difficile de commenter ce qui se passe dans cette zone. A titre de comparaison, nous avons rajouté une asymptote définie par $Cor = 0.7x$ comme nous l'avons fait pour la figure 2.7 de la section 2.3.1.

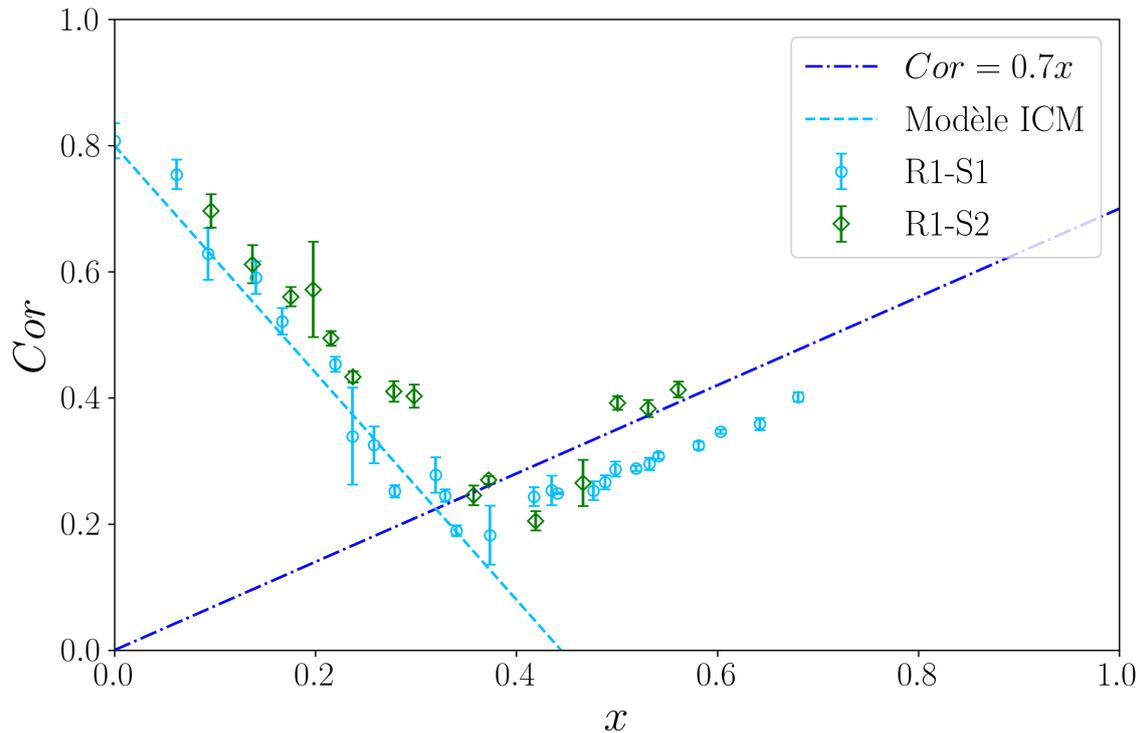


Figure A.6: Cor en fonction de x . En bleu, pour R1-S1. En vert, pour R1-S2. Les lignes pointillées indiquent le modèle ICM de chaque projectile et la ligne pointillée bleu foncé indique l'asymptote.

Enfin, nous avons comparé les résultats à ceux donnés par le modèle ICM. Nous avons utilisé l'équation suivante :

$$Cor_{ICM}(x) = Cor_r - (1 + Cor_r)x \quad (A.5)$$

avec $Cor_r = Cor_{R1-S1}(x = 0) = 0.80$ soit le coefficient de restitution du tube sans partie molle. Le lecteur pourra se référer aux sections 1.2.3 et 2.3.1 pour plus de détails sur le modèle ICM. Nous pouvons remarquer qu'il y a un bon accord entre le modèle ICM et les points expérimentaux dans la zone où $x < 0.4$.

A.3.3 Perspectives

En perspectives, il faudra établir un modèle théorique qui prendra en compte la propagation d'une onde de déformation dans la partie molle. La différence ici est que ces ondes sont liées à une déformation transverse de la partie molle.

A.4 Éjection d'une bille posée dans une cage

Dans cette section, nous allons combiner les deux dispositifs expérimentaux que nous avons présentés dans les sections précédentes. Nous allons étudier le rebond d'une bille posée sur une couche de gel, elle-même moulée dans le tube en plexiglass. Une fois encore, nous allons séparer le coefficient de restitution Cor_{R1-S1} du système bicomposite R1-S1 (tube+gel) et le coefficient de restitution Cor_b de la bille. Dans ces expériences, la proportion x concerne la proportion en masse de la bille. Celle-ci est donc définie par :

$$x = \frac{m_b}{m_{tot}}. \quad (\text{A.6})$$

A.4.1 Principe de l'expérience

Nous allons reprendre le tube en plexiglass de la section précédente et venir y mouler une couche de la partie molle S1 (l'hydrogel) et venir y déposer une bille. Dans ces expériences, nous allons seulement faire varier la masse de la bille. Nous prenons les mêmes billes que dans la section A.2.1 ainsi qu'une couche de partie molle d'épaisseur 6 mm. Nous pouvons voir des exemples sur les images de la figure A.7.

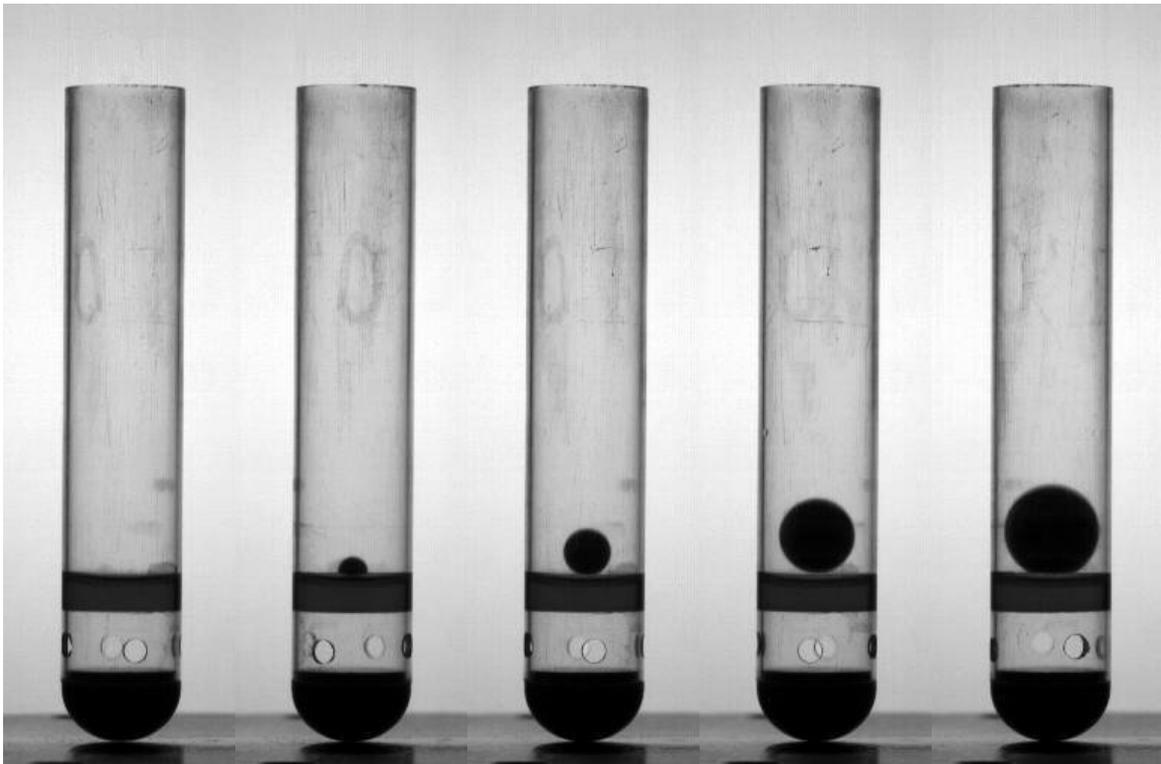


Figure A.7: Images du projectile bicomposite R1-S1 avec une bille posée dessus. Nous avons, de gauche à droite, des billes de diamètres $d = 0, 5, 8, 12$ et 16 mm.

Nous avons utilisé la même méthode de tracking et dépollissement que précédemment, ici nous l'avons appliquée à l'extrémité en R1 pour mesurer la restitution de Cor_{R1-S1} et à la bille pour mesurer Cor_b .

A.4.2 Résultats et analyse

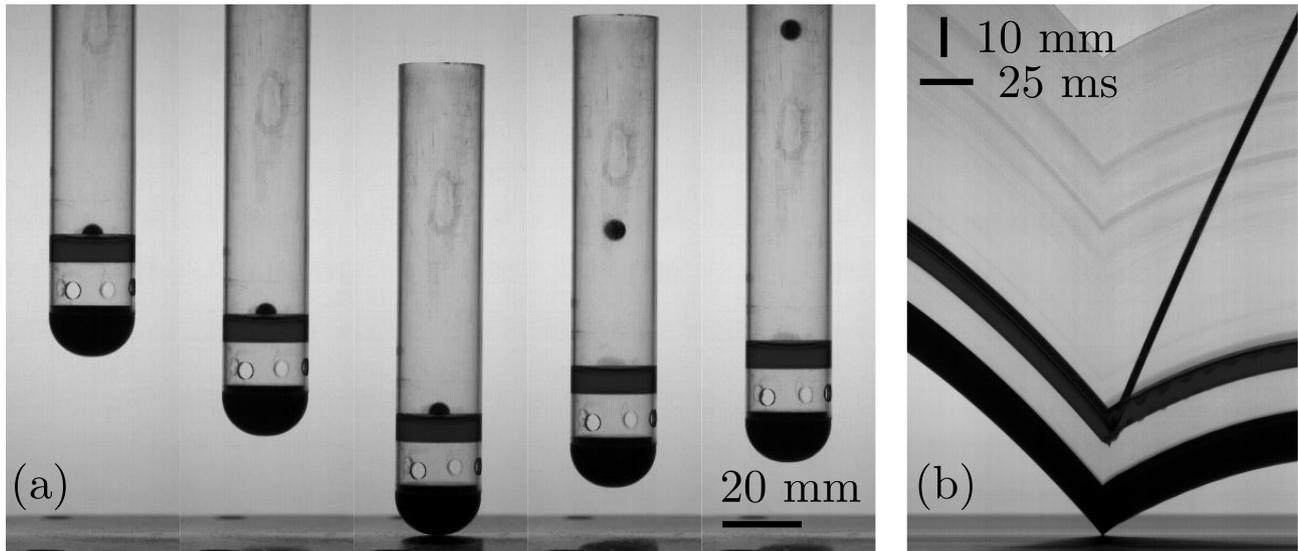


Figure A.8: (a) Séquences d'images d'un impact du projectile bicomposite R1-S1 avec une bille posée dessus pour $d = 5$ mm. ($\Delta t = 0.045$ s). (b) Diagramme spatio-temporel de l'impact de ce projectile.

Nous pouvons observer le résultat d'un impact du projectile étudié sur la figure A.8. Cette figure met, là aussi, en évidence la différence de vitesse à l'éjection entre la bille et le projectile R1-S1. Sur le graphique de la figure A.9, nous pouvons observer le coefficient de restitution, en bleu, de la bille et, en rouge, du projectile R1-S1. Comme dans la section A.2, nous pouvons observer que la restitution de la bille peut être plus grande que 1, elle tend vers 2-2.5 lorsque $x \rightarrow 0$ tandis que nous avons $Cor_{R1-S1}(x = 0) = 0.64$. Ensuite, pour la bille, nous pouvons observer une décroissance linéaire suivie d'une légère remontée de la restitution. Pour R1-S1, nous observons là encore une décroissance linéaire. Cette décroissance semble être suivie d'une remontée elle-même suivie d'une décroissance. La particularité de ce système est que nous pouvons observer que le coefficient de restitution Cor_{R1-S1} de R1-S1 est négatif entre $x = 0.2$ et $x = 0.4$. Cela est dû au fait que R1-S1 repart en direction du substrat une fois que la bille et R1-S1 se sont détachés. Nous pouvons faire le parallèle avec les multiples rebonds présentés dans ce manuscrit. R1-S1 va impacter le substrat et rebondir en direction de la bille tandis que la bille va continuer sa chute. La bille renvoie R1-S1 vers le substrat puis elle est finalement éjectée.

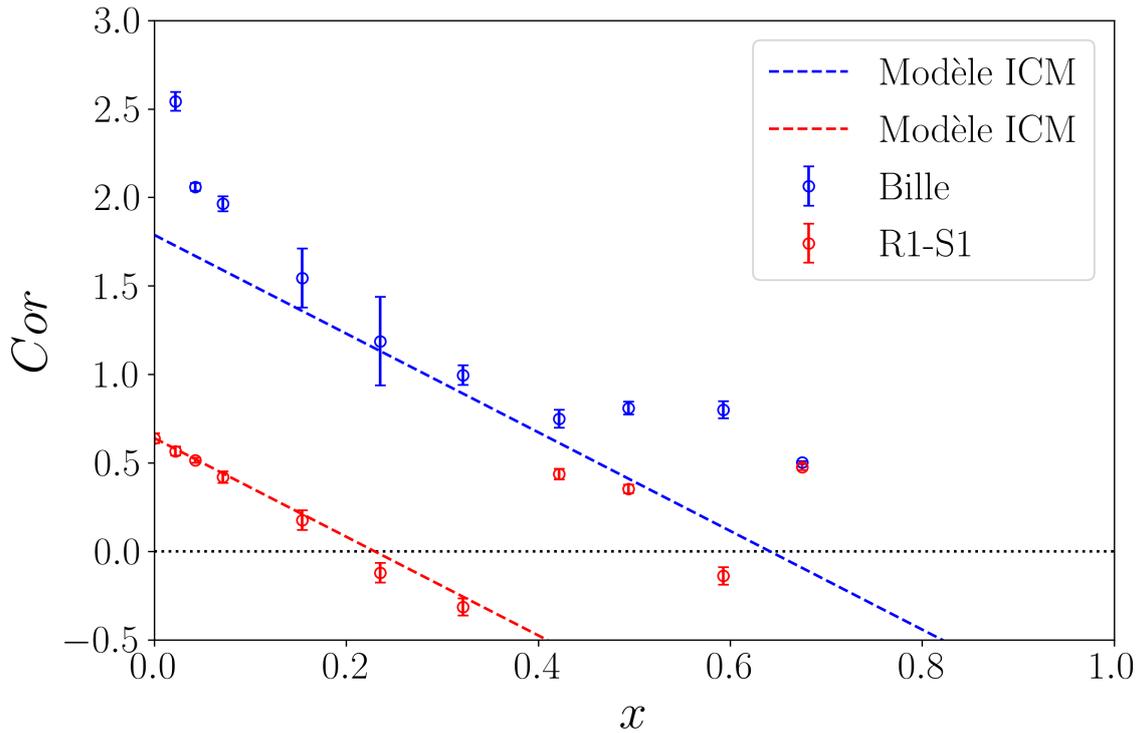
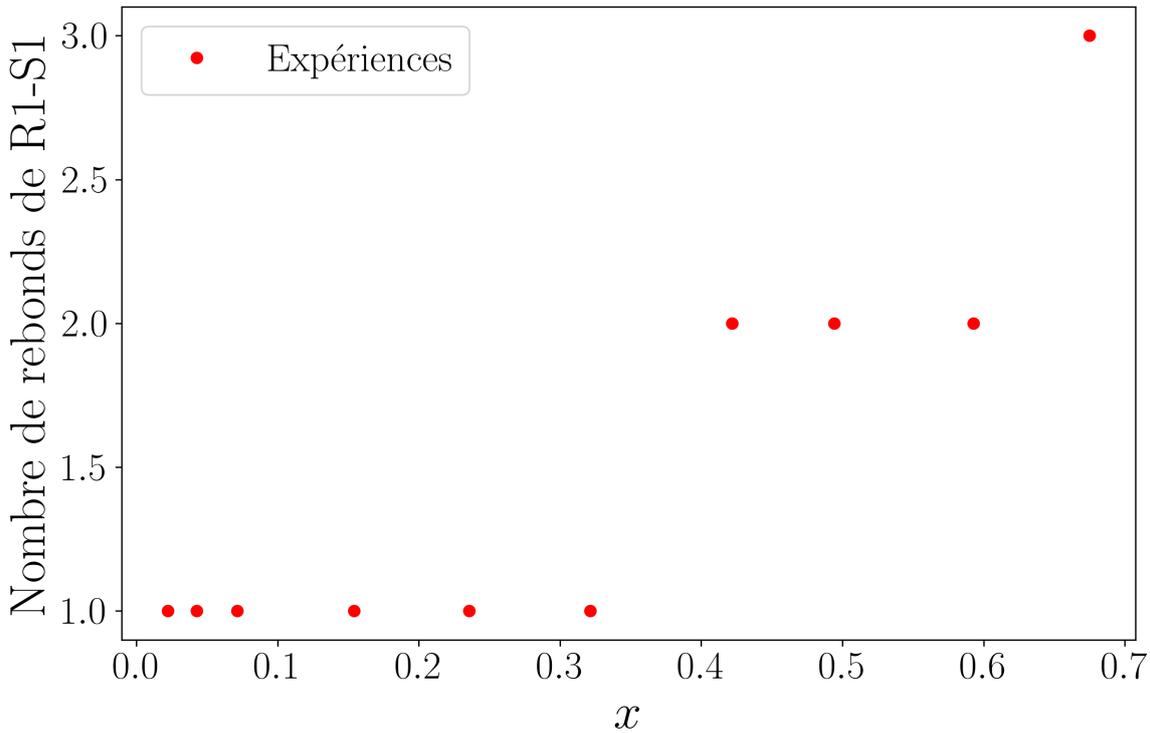


Figure A.9: Cor en fonction de x . En bleu, pour la bille. En rouge, pour R1-S1. Les lignes pointillées indiquent le modèle ICM de chaque objet.

Comme dans la section A.2, nous allons appliquer le modèle ICM à l'aide des équations A.2 et A.3. Dans ces expériences, nous prenons $Cor_1 = Cor_{R1-S1}(x = 0) = 0.64$ le coefficient de restitution entre R1-S1 et le substrat, et $Cor_{1,2} = 0.70$ le coefficient de restitution entre la bille et le gel. Ici, comme précédemment, nous pouvons noter un bon accord entre le modèle ICM et les résultats expérimentaux.

Sur le graphique de la figure A.10, nous pouvons observer le nombre de rebond de R1-S1 en fonction de la proportion x . Comme précédemment, nous observons que le graphique est en marche d'escaliers.

Figure A.10: Nombre de rebonds en fonction x pour R1-S1.

A.4.3 Perspectives

Après l'observation de ces résultats, nous pouvons donner deux pistes de travail. La première est qu'il semble important de faire des expériences supplémentaires entre $x = 0.3$ et $x = 0.5$ ainsi qu'au-delà de la proportion maximale que nous avons réalisée. La deuxième est que, du point de vue théorique, il faudra prendre en considération l'interaction entre la partie molle et la bille. Pour finir, nous proposons un dernier système qu'il sera possible d'étudier : remplacer la bille par un matériau granulaire ou bien un liquide.

Sur la figure A.11, nous pouvons observer le résultat d'une expérience pour laquelle la bille en acier a été remplacée par des billes de verre (3M, Glass Bubbles K46). Nous pouvons observer que l'éjection de celles-ci se fait sous la forme d'un jet ayant une certaine vitesse. La formation de ce jet motive à consulter la littérature variée qui concerne les jets de matériau granulaire [Thoroddsen and Shen, 2000] [Lohse et al., 2004] [Hou et al., 2005] [Royer et al., 2008]. Nous construisons alors un coefficient de restitution entre la vitesse d'impact du projectile et la vitesse d'éjection de ce jet. Ces expériences préliminaires permettent d'obtenir un coefficient de restitution supérieure à 1, puisque celui-ci est globalement compris entre 2 et 3, en fonction de la masse du matériau (respectivement comprise entre 0.05 g et 0.02 g). Nous pouvons aussi noter une oscillation de la couche d'hydrogel après l'impact.

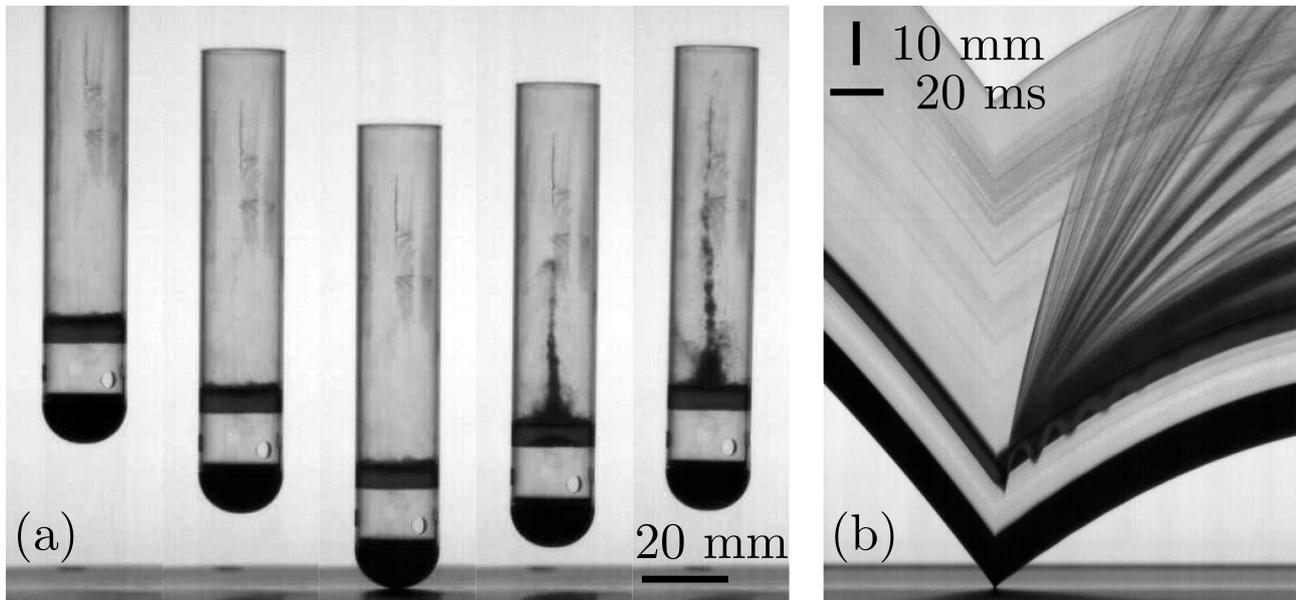


Figure A.11: (a) Séquences d'images d'un impact du tube contenant une couche d'hydrogel. Sur cette couche, des billes de verre sont déposées ($m_{billes} = 0.02$ g). Nous voyons l'éjection de celles-ci après l'impact. ($\Delta t = 0.025$ s). (b) Diagramme spatio-temporel de l'impact de ce projectile.

A.5 Conclusion

Cette annexe a permis de mettre en évidence la diversité des systèmes multi-composants qu'il est possible d'étudier. Ces expériences motivent l'élaboration d'un modèle prenant en compte toutes les interactions présentes dans les systèmes. Une comparaison avec des résultats de simulation numérique pourra aussi être envisagée dans le futur.

Références

- Allen, M. P. and D. J. Tildesley (2017). *Computer simulation of liquids*. Second edition. Oxford University Press. 626 pp. DOI: [10.1093/oso/9780198803195.001.0001](https://doi.org/10.1093/oso/9780198803195.001.0001).
- Andersson, Patrik U. and Jan B. C. Pettersson (Sept. 1998). “Water Cluster Collisions with Graphite Surfaces: Angular-Resolved Emission of Large Cluster Ions”. In: *The Journal of Physical Chemistry B* 102.38, pp. 7428–7433. DOI: [10.1021/jp981889x](https://doi.org/10.1021/jp981889x).
- Basile, Anthony and Randall Dumont (Feb. 1, 2000). “Coefficient of restitution for one-dimensional harmonic solids”. In: *Physical Review E* 61.2, pp. 2015–2023. DOI: [10.1103/PhysRevE.61.2015](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.61.2015).
- Beeman, D. (Feb. 1, 1976). “Some multistep methods for use in molecular dynamics calculations”. In: *Journal of Computational Physics* 20.2, pp. 130–139. DOI: [10.1016/0021-9991\(76\)90059-0](https://doi.org/10.1016/0021-9991(76)90059-0).
- Berdeni, Y., A. Champneys, and R. Szalai (July 8, 2015). “The two-ball bounce problem”. In: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science* 471.2179, p. 20150286. DOI: [10.1098/rspa.2015.0286](https://doi.org/10.1098/rspa.2015.0286).
- Boettcher, Ronny, Sascha Eichmann, and Peter Mueller (May 18, 2019). “Influence of viscous damping and elastic waves on energy dissipation during impacts”. In: *Chemical Engineering Science* 199, pp. 571–587. DOI: [10.1016/j.ces.2019.01.036](https://doi.org/10.1016/j.ces.2019.01.036).
- Boettcher, Ronny, Matthias Kunik, et al. (June 2017). “Revisiting energy dissipation due to elastic waves at impact of spheres on large thick plates”. In: *International Journal of Impact Engineering* 104, pp. 45–54. DOI: [10.1016/j.ijimpeng.2017.02.012](https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2017.02.012).
- Boettcher, Ronny, Alexander Russell, and Peter Mueller (Feb. 1, 2017). “Energy dissipation during impacts of spheres on plates: Investigation of developing elastic flexural waves”. In: *International Journal of Solids and Structures* 106-107, pp. 229–239. DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2016.11.016](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.11.016).
- Briggs, L.J. (Jan. 1945). “Methods for measuring the coefficient of restitution and the spin of a ball”. In: *Journal of Research of the National Bureau of Standards* 34.1, p. 1. DOI: [10.6028/jres.034.001](https://doi.org/10.6028/jres.034.001).
- Celestini, Franck et al. (Oct. 16, 2020). “Contact Layer as a Propelling Advantage in Throwing”. In: *Physical Review Applied* 14.4, p. 044026. DOI: [10.1103/PhysRevApplied.14.044026](https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.14.044026).
- Christen, W. et al. (June 10, 1998). “Collisional energy loss in cluster surface impact: Experimental, model, and simulation studies of some relevant factors”. In: *The Journal of Chemical Physics* 108.24, pp. 10262–10273. DOI: [10.1063/1.476487](https://doi.org/10.1063/1.476487).
- Cleveland, Charles L. and Uzi Landman (July 17, 1992). “Dynamics of Cluster-Surface Collisions”. In: *Science* 257.5068, pp. 355–361. DOI: [10.1126/science.257.5068.355](https://doi.org/10.1126/science.257.5068.355).

- Cross, Rod (1999). “The bounce of a ball”. In: *American Journal of Physics* 67.3, pp. 222–227. DOI: [10.1119/1.19229](https://doi.org/10.1119/1.19229).
- (Nov. 2007). “Vertical bounce of two vertically aligned balls”. In: *American Journal of Physics* 75.11, pp. 1009–1016. DOI: [10.1119/1.2772286](https://doi.org/10.1119/1.2772286).
- d’Alembert, Jean Le Rond (1747). *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*.
- D’Angelo, Christophe (Sept. 23, 2021a). *Impact d’un pendule de Newton modifié*. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=cYpWK53aJcg> (visited on 10/12/2021).
- (Sept. 2021b). *Vidéos du manuscrit*. URL: <https://www.youtube.com/playlist?list=PLkd6VYlNxKUY-ydtJSMYqyPFnQfIn4SwB> (visited on 10/12/2021).
- D’Angelo, Christophe et al. (May 28, 2021). “Impact dynamics of composite elastorigid projectiles onto solid surfaces”. In: *Physical Review E* 103.5, p. 053005. DOI: [10.1103/PhysRevE.103.053005](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.103.053005).
- Décathlon (2021). *Boules de pétanque comptétion MS 2110*. URL: https://www.decathlon.fr/p/boules-de-petanque-competition-ms-2110/_/R-p-X8569592 (visited on 09/07/2021).
- Emori, Richard I. (Feb. 1, 1968). “Analytical Approach to Automobile Collisions”. In: 1968 Automotive Engineering Congress and Exposition, p. 680016. DOI: [10.4271/680016](https://doi.org/10.4271/680016).
- Falcon, E. et al. (June 1998). “Behavior of one inelastic ball bouncing repeatedly off the ground”. In: *The European Physical Journal B* 3.1, pp. 45–57. DOI: [10.1007/s100510050283](https://doi.org/10.1007/s100510050283).
- Falcon, Eric (Jan. 1, 1997). “Comportements dynamiques associés au contact de Hertz : processus collectifs de collision et propagation d’ondes solitaires dans les milieux granulaires”. thesis. Lyon 1.
- FIBA (2020). *Official basketball rules 2020*. URL: <http://www.fiba.basketball/fr/documents> (visited on 09/06/2021).
- Foerster, Samuel F. et al. (Mar. 1, 1994). “Measurements of the collision properties of small spheres”. In: *Physics of Fluids* 6.3, pp. 1108–1115. DOI: [10.1063/1.868282](https://doi.org/10.1063/1.868282).
- Gerl, Franz and Annette Zippelius (Feb. 1, 1999). “Coefficient of restitution for elastic disks”. In: *Physical Review E* 59.2, pp. 2361–2372. DOI: [10.1103/PhysRevE.59.2361](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.59.2361).
- Goldsmith, Werner (1960). *Impact*. Edward Arnold, London.
- Gugan, D. (Oct. 2000). “Inelastic collision and the Hertz theory of impact”. In: *American Journal of Physics* 68.10, pp. 920–924. DOI: [10.1119/1.1285850](https://doi.org/10.1119/1.1285850).
- Hertz, Heinrich (1882). “Ueber die Berührung fester elastischer Körper”. In: *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 92, pp. 156–171. DOI: [10.1515/crll.1882.92.156](https://doi.org/10.1515/crll.1882.92.156).
- (1896). *Miscellaneous papers: with an introd. by Philipp Lenard. Authorised English translation by D.E. Jones and G.A. Schott*. Macmillan. 340 pp.
- Hooke, Robert (1678). *Lectures de potentia restitutiva, or, Of spring explaining the power of springing bodies*.
- Hou, M et al. (2005). “Projectile impact and penetration in loose granular bed”. In: *Science and Technology of Advanced Materials*, p. 6. DOI: [10.1016/j.stam.2005.05.016](https://doi.org/10.1016/j.stam.2005.05.016).

- Humphrey, William, Andrew Dalke, and Klaus Schulten (Feb. 1, 1996). “VMD: Visual molecular dynamics”. In: *Journal of Molecular Graphics* 14.1, pp. 33–38. DOI: [10.1016/0263-7855\(96\)00018-5](https://doi.org/10.1016/0263-7855(96)00018-5).
- Hunter, S. C. (Jan. 1, 1957). “Energy absorbed by elastic waves during impact”. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 5.3, pp. 162–171. DOI: [10.1016/0022-5096\(57\)90002-9](https://doi.org/10.1016/0022-5096(57)90002-9).
- Hutchings, I M (Nov. 14, 1979). “Energy absorbed by elastic waves during plastic impact”. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 12.11, pp. 1819–1824. DOI: [10.1088/0022-3727/12/11/010](https://doi.org/10.1088/0022-3727/12/11/010).
- Johnson, K. L. (May 1985). *Contact Mechanics*. DOI: [10.1017/CB09781139171731](https://doi.org/10.1017/CB09781139171731).
- Killian, Taylor W., Robert A. Klaus, and Tadd T. Truscott (Dec. 2012). “Rebound and jet formation of a fluid-filled sphere”. In: *Physics of Fluids* 24.12, p. 122106. DOI: [10.1063/1.4771985](https://doi.org/10.1063/1.4771985).
- KS Tools (2021). *KS Tools*. URL: <https://www.kstools.fr/> (visited on 09/07/2021).
- Kurtz, Steven M. and John N. Devine (Nov. 1, 2007). “PEEK biomaterials in trauma, orthopedic, and spinal implants”. In: *Biomaterials* 28.32, pp. 4845–4869. DOI: [10.1016/j.biomaterials.2007.07.013](https://doi.org/10.1016/j.biomaterials.2007.07.013).
- Kuwabara, Goro and Kimitoshi Kono (Aug. 20, 1987). “Restitution Coefficient in a Collision between Two Spheres”. In: *Japanese Journal of Applied Physics* 26 (Part 1, No. 8), pp. 1230–1233. DOI: [10.1143/JJAP.26.1230](https://doi.org/10.1143/JJAP.26.1230).
- Labous, Laurent, Anthony D. Rosato, and Rajesh N. Dave (Nov. 1, 1997). “Measurements of collisional properties of spheres using high-speed video analysis”. In: *Physical Review E* 56.5, pp. 5717–5725. DOI: [10.1103/PhysRevE.56.5717](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.56.5717).
- Landau, Lev and Evguéni Lifchitz (1986). *Theory of elasticity*. 2. ed., rev. and enl, repr. 1986. Course of theoretical physics by L. D. Landau and E. M. Lifshitz ; Vol. 7. Pergamon Press. 165 pp. DOI: [10.1016/C2009-0-25521-8](https://doi.org/10.1016/C2009-0-25521-8).
- Leroy, Bernard (Apr. 1985). “Collision between two balls accompanied by deformation: A qualitative approach to Hertz’s theory”. In: *American Journal of Physics* 53.4, pp. 346–349. DOI: [10.1119/1.14164](https://doi.org/10.1119/1.14164).
- Levitt, Michael, Hagai Meirovitch, and R. Huber (Aug. 15, 1983). “Integrating the equations of motion”. In: *Journal of Molecular Biology* 168.3, pp. 617–620. DOI: [10.1016/S0022-2836\(83\)80305-2](https://doi.org/10.1016/S0022-2836(83)80305-2).
- Lifshitz, J.M. and H. Kolsky (Feb. 1964). “Some experiments on anelastic rebound”. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 12.1, pp. 35–43. DOI: [10.1016/0022-5096\(64\)90005-5](https://doi.org/10.1016/0022-5096(64)90005-5).
- Lohse, Detlef et al. (Nov. 3, 2004). “Impact on Soft Sand: Void Collapse and Jet Formation”. In: *Physical Review Letters* 93.19, p. 198003. DOI: [10.1103/PhysRevLett.93.198003](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.198003).
- Love, Augustus (1892). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*.
- Mellen, Walter Roy (Jan. 1995). “Aligner for elastic collisions of dropped balls”. In: *The Physics Teacher* 33.1, pp. 56–57. DOI: [10.1119/1.2344135](https://doi.org/10.1119/1.2344135).
- Meyers, Marc A. (1994). *Dynamic behavior of materials*. Wiley. 668 pp. DOI: [10.1002/9780470172278](https://doi.org/10.1002/9780470172278).

- Monson, Kenneth L. and Geoff J. Germane (Mar. 1, 1999). “Determination and Mechanisms of Motor Vehicle Structural Restitution from Crash Test Data”. In: International Congress & Exposition, pp. 1999–01–0097. DOI: [10.4271/1999-01-0097](https://doi.org/10.4271/1999-01-0097).
- MS pétanque (2021). *MS pétanque, le spécialiste des boules de pétanque !* URL: <https://www.ms-petanque.com/> (visited on 09/07/2021).
- Müller, Patric, Michael Heckel, et al. (June 17, 2013). “Complex Velocity Dependence of the Coefficient of Restitution of a Bouncing Ball”. In: *Physical Review Letters* 110.25. DOI: [10.1103/PhysRevLett.110.254301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.254301).
- Müller, Patric and Thorsten Pöschel (Apr. 25, 2011). “Two-ball problem revisited: Limitations of event-driven modeling”. In: *Physical Review E* 83.4. DOI: [10.1103/PhysRevE.83.041304](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.83.041304).
- Murakami, Ryo and Hisao Hayakawa (Jan. 30, 2014). “Effect of elastic vibrations on normal head-on collisions of isothermal spheres”. In: *Physical Review E* 89.1, p. 012205. DOI: [10.1103/PhysRevE.89.012205](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.89.012205).
- Nagahiro, Shin-ichiro and Yoshinori Hayakawa (Mar. 17, 2003). “Collision of one-dimensional nonlinear chains”. In: *Physical Review E* 67.3, p. 036609. DOI: [10.1103/PhysRevE.67.036609](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.67.036609).
- Newton, Isaac (1687). *Philosophiæ naturalis principia mathematica*.
- Norcross, John C. (Sept. 26, 1967). “Dead-blow hammer head”. U.S. pat. 3343576A. Vaughan and Bushnell Manufacturing Co.
- Pacheco-Vázquez, F. and S. Dorbolo (Dec. 2013). “Rebound of a confined granular material: combination of a bouncing ball and a granular damper”. In: *Scientific Reports* 3.1. DOI: [10.1038/srep02158](https://doi.org/10.1038/srep02158).
- Patricio, P. (Dec. 2004). “The Hertz contact in chain elastic collisions”. In: *American Journal of Physics* 72.12, pp. 1488–1491. DOI: [10.1119/1.1778394](https://doi.org/10.1119/1.1778394).
- Pereira, M. S., J. a. C. Ambrósio, and J. P. Dias (1997). “Crashworthiness Analysis and Design Using Rigid–Flexible Multibody Dynamics with Application to Train Vehicles”. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40.4, pp. 655–687. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19970228\)40:4<655::AID-NME84>3.0.CO;2-N](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970228)40:4<655::AID-NME84>3.0.CO;2-N).
- Peschot, Alexis (2013). “Caractérisation de phénomènes physiques associés à l’ouverture et à la fermeture dans un relais MEMS.” PhD thesis.
- Physics Girl (Jan. 20, 2015). *Stacked Ball Drop*. URL: https://www.youtube.com/watch?v=2UHS883_P60 (visited on 09/07/2021).
- Raman, C. V. (Dec. 1, 1918). “The Photographic Study of Impact at Minimal Velocities”. In: *Physical Review* 12.6, pp. 442–447. DOI: [10.1103/PhysRev.12.442](https://doi.org/10.1103/PhysRev.12.442).
- (Apr. 1, 1920). “On Some Applications of Hertz’s Theory of Impact”. In: *Physical Review* 15.4, pp. 277–284. DOI: [10.1103/PhysRev.15.277](https://doi.org/10.1103/PhysRev.15.277).
- Raufaste, Christophe et al. (Sept. 8, 2017). “Superpropulsion of Droplets and Soft Elastic Solids”. In: *Physical Review Letters* 119.10, p. 108001. DOI: [10.1103/PhysRevLett.119.108001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.108001).
- Rayleigh, L. (Feb. 1, 1906). “XXII. On the production of vibrations by forces of relatively long duration, with application to the theory of collisions”. In: *The London, Edinburgh, and*

- Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 11.62, pp. 283–291. DOI: [10.1080/14786440609463444](https://doi.org/10.1080/14786440609463444).
- Raz, T. and R. D. Levine (Nov. 8, 1996). “On the shattering of clusters by surface impact heating”. In: *The Journal of Chemical Physics* 105.18, pp. 8097–8102. DOI: [10.1063/1.472663](https://doi.org/10.1063/1.472663).
- Reed, J (Dec. 14, 1985). “Energy losses due to elastic wave propagation during an elastic impact”. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 18.12, pp. 2329–2337. DOI: [10.1088/0022-3727/18/12/004](https://doi.org/10.1088/0022-3727/18/12/004).
- Royer, John R et al. (2008). “Birth and growth of a granular jet”. In: *Physical Review E*, p. 14. DOI: [10.1103/PhysRevE.78.011305](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.78.011305).
- Ruan, H.H. and T.X. Yu (Feb. 2016). “The unexpectedly small coefficient of restitution of a two-degree-of-freedom mass-spring system and its implications”. In: *International Journal of Impact Engineering* 88, pp. 1–11. DOI: [10.1016/j.ijimpeng.2015.09.005](https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2015.09.005).
- Saint-Venant, A. and M. Flamant (1883). “Résistance vive ou dynamique des solides. Représentation graphique des lois du choc longitudinal”. In: *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* 97, pp. 127–353.
- Schwitalla, Andreas and Wolf-Dieter Müller (Dec. 1, 2013). “PEEK Dental Implants: A Review of the Literature”. In: *Journal of Oral Implantology* 39.6, pp. 743–749. DOI: [10.1563/AAID-JOI-D-11-00002](https://doi.org/10.1563/AAID-JOI-D-11-00002).
- Sondergaard, R., K. Chaney, and C. E. Brennen (Sept. 1990). “Measurements of Solid Spheres Bouncing Off Flat Plates”. In: *Journal of Applied Mechanics* 112, pp. 694–699. DOI: [10.1115/1.2897079](https://doi.org/10.1115/1.2897079).
- Stronge, W J (2000). *Impact Mechanics*. DOI: [10.1017/9781139050227](https://doi.org/10.1017/9781139050227).
- Tabor, David and Geoffrey Ingram Taylor (Feb. 4, 1948). “A simple theory of static and dynamic hardness”. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 192.1029, pp. 247–274. DOI: [10.1098/rspa.1948.0008](https://doi.org/10.1098/rspa.1948.0008).
- Tani, Masanori and Richard I. Emori (Feb. 1, 1970). “A Study on Automobile Crashworthiness”. In: 1970 Automotive Engineering Congress and Exposition, p. 700175. DOI: [10.4271/700175](https://doi.org/10.4271/700175).
- Thompson, J. E. (Feb. 1, 1973). “Vehicle Crush Prediction Using Finite-Element Techniques”. In: 1973 International Automotive Engineering Congress and Exposition, p. 730157. DOI: [10.4271/730157](https://doi.org/10.4271/730157).
- Thoroddsen, S. T. and Amy Q. Shen (Dec. 14, 2000). “Granular jets”. In: *Physics of Fluids* 13.1, pp. 4–6. DOI: [10.1063/1.1328359](https://doi.org/10.1063/1.1328359).
- Tillett, J. P. A. (Sept. 1954). “A Study of the Impact of Spheres on Plates”. In: *Proceedings of the Physical Society. Section B* 67.9, pp. 677–688. DOI: [10.1088/0370-1301/67/9/304](https://doi.org/10.1088/0370-1301/67/9/304).
- Wu, Chuan-Yu, Long-Yuan Li, and Colin Thornton (Dec. 1, 2005). “Energy dissipation during normal impact of elastic and elastic–plastic spheres”. In: *International Journal of Impact Engineering*. Fifth International Symposium on Impact Engineering 32.1, pp. 593–604. DOI: [10.1016/j.ijimpeng.2005.08.007](https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2005.08.007).

- Xu, Cheng et al. (Sept. 2016). “Bouncing behavior and dissipative characterization of a chain-filled granular damper”. In: *Powder Technology* 297, pp. 367–373. DOI: [10.1016/j.powtec.2016.04.019](https://doi.org/10.1016/j.powtec.2016.04.019).
- Zener, Clarence (Apr. 15, 1941). “The Intrinsic Inelasticity of Large Plates”. In: *Physical Review* 59.8, pp. 669–673. DOI: [10.1103/PhysRev.59.669](https://doi.org/10.1103/PhysRev.59.669).