



**HAL**  
open science

## Contributions à la mesure et à la gestion du risque de base en assurance

Pierre Montesinos

► **To cite this version:**

Pierre Montesinos. Contributions à la mesure et à la gestion du risque de base en assurance. Gestion et management. Université de Lyon, 2021. Français. NNT : 2021LYSE1009 . tel-03591718

**HAL Id: tel-03591718**

**<https://theses.hal.science/tel-03591718>**

Submitted on 28 Feb 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N°d'ordre NNT :  
2021LYSE1009

## **THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON**

opérée au sein de  
**l'Université Claude Bernard Lyon 1**

**École Doctorale N° 484**  
**Sciences Économiques et de Gestion**

**Spécialité de doctorat : Sciences de Gestion**

Soutenue publiquement/à huis clos le 29/01/2021, par :  
**Pierre Montesinos**

---

# **Contributions à la mesure et à la gestion du risque de base en assurance**

---

Devant le jury composé de :

Fabio Bellini, Professeur à l'Università Milano-Bicocca  
Elena Di Bernardino, Professeure à l'Université Côte d'Azur  
Hélène Cossette, Professeure à l'Université Laval  
Frédéric Planchet, Professeur à l'Université Lyon 1  
Julien Trufin, Professeur à l'Université Libre de Bruxelles

Rapporteur  
Rapporteuse  
Examinatrice  
Examineur  
Examineur

Stéphane Loisel, Professeur à l'Université Lyon 1

Directeur de thèse

Claude Lefèvre, Professeur Émérite à l'Université Libre de Bruxelles

Invité



# Résumé

*mots-clés* : risque de base ; asymétrie d'information ; réassurance optimale ; taux de rétention ; ordre convexe ; ordre  $s$ -convexe ; Beta-unimodalité ; contractions aléatoires.

L'amélioration des connaissances relatives aux événements climatiques a permis l'émancipation puis la généralisation des couvertures indicielles en assurance. La spécificité de ces solutions de transfert de risque est qu'elles fournissent une indemnisation subordonnée aux valeurs prises par un indice externe plutôt qu'à la perte subie par l'acheteur de protection. L'existence d'une différence entre le montant de l'indemnisation et la perte subie constitue un risque particulier : le risque de base. Ainsi, dans cette thèse, nous nous intéressons à la mesure du risque de base en proposant une méthode de quantification, puis nous examinons certaines des problématiques liées à sa gestion.

Les deux premiers chapitres concernent la mesure des conséquences du risque de base inhérent aux transactions indicielles, en cohérence avec les réglementations prudentielles assurantielles et bancaires. Le Chapitre 1 examine le cas d'une obligation catastrophe à déclenchement paramétrique. Dans ce cadre, l'influence du taux de destruction sur l'exposition conduit naturellement à s'intéresser à des pertes Beta-unimodales puisque la perte s'obtient comme le produit de l'exposition et du taux de destruction. Le Chapitre 2 propose une modélisation du risque de base motivée par la présence d'un *background risk*, résultant en une contraction aléatoire, correspondant là encore à la multiplication de deux variables indépendantes. Dans les deux situations, la méthode de quantification est fondée sur la décomposition multiplicative de la variable considérée afin de générer des scénarios extrêmes de risque de base, à partir des propriétés des ordres  $s$ -convexes.

La thèse s'intéresse ensuite dans le Chapitre 3 à la gestion du risque de base. Ce dernier est dédié à l'arbitrage entre le risque de base inhérent aux transactions indicielles et l'asymétrie d'information présente dans les transactions indemnitaires. Cet arbitrage est abordé via la formulation de problèmes bilatéraux de réassurance optimale, incluant un assureur exposé à un risque potentiellement assurable

par une couverture indicielle et prenant en compte l'exposition initiale d'un réassureur. A l'aide de résultats sur l'ordre convexe, le Chapitre 3 compare les formes optimales de réassurance issues des transferts indiciels avec et sans risque de base à celles correspondant aux transactions indemnitaires avec ou sans asymétrie d'information. Ainsi, le Chapitre 3 parvient à montrer que l'intensité de l'asymétrie d'information est, pour un indice et un niveau de risque de base donnés, déterminante dans le choix du type de la transaction.

Enfin, le Chapitre 4 généralise la réassurance traditionnelle aux contrats de partenariat, s'éloignant quelque peu du risque de base. Dans ce nouvel environnement, le réassureur peut aider l'assureur à augmenter la taille de son portefeuille. En retour, le réassureur peut utiliser le risque transféré par l'assureur pour se couvrir contre son exposition initiale. Le développement de ce chapitre est fondé sur le taux de rétention de l'assureur, couplé à une approche géométrique permise par l'ordre convexe. Le partenariat optimal est examiné du point de vue unilatéral puis élargi au cadre bilatéral, introduisant la notion de Pareto-optimalité. Dans le contexte de ce chapitre, le partenariat apparaît comme étant plus efficient que la réassurance traditionnelle.

# Abstract

*Keywords:* basis risk; asymmetry of information; optimal reinsurance; retention rate; convex order;  $s$ -convex order; Beta-unimodality; random contractions.

The better knowledge of climate related events has led to the emancipation and the generalization of index-based insurance coverages. The specificity of these risk transfer solutions relies on the fact that they trigger a payout depending on the values taken by an external index rather than on the loss suffered by the protection buyer. The existence of a difference between the indemnity triggered by the index and the observed loss results in a particular risk: the so-called basis risk. Thus, in this thesis, we first focus on the measurement of this risk by proposing a quantification methodology, then we examine some of the problems related to its management.

The first two chapters are concerned with the measurement of the consequences of the basis risk inherent in index-based transactions, in accordance with the insurance and banking prudential regulations. In Chapter 1, we examine the case of a parametric trigger catastrophe bond. In this specific context, the influence of the destruction rate on the exposure naturally leads us to focus on Beta-unimodal distributions since the loss is obtained as the product of the exposure with the destruction rate. The model for basis risk introduced in Chapter 2 is motivated by the literature on *background risk* and results in a random contraction, i.e. the basis risk is seen as the multiplication of two independent random variables. In both chapters, the method proposed to quantify the consequences of basis risk relies on these multiplicative decompositions in order to generate worst-case scenarios of basis risk, thanks to theoretical properties of  $s$ -convex orders.

Basis risk management is analyzed in Chapter 3. This chapter is dedicated to the trade-off between the basis risk inherent in index-based transactions and the asymmetry of information contained in indemnity-based transactions. These drawbacks are examined through the formulation of bilateral optimal reinsurance problems, including an insurer exposed to a risk which could be insured with an

index-based coverage. The bilateral problems also take into account the initial exposure of a reinsurer. Using results related to convex order, we compare in Chapter 3 the optimal forms of reinsurance of index-based transactions with or without basis risk with those corresponding to indemnity-based transactions with or without asymmetry of information. In Chapter 3, we eventually succeed in showing that asymmetry of information is, for a given index and a given level of basis risk, a determining factor in the choice of the type of transaction.

The last chapter generalizes traditional reinsurance by considering partnership contracts. In this new framework, the reinsurer can help the insurer to potentially increase the size of its portfolio. In return, the reinsurer can use the risk transferred by the insurer as natural hedge against her initial exposure. The development of this chapter is based on the insurer's retention rate, coupled with a geometric approach allowed by the convex order. The optimal partnership is first examined from a unilateral point of view and then extended to the bilateral framework, introducing the notion of Pareto-optimality. In the context of this chapter, partnership contracts appear to be more efficient than traditional reinsurance.

# Table des matières

Résumé	iii
Abstract	v
Table des matières	vii
Liste des figures	ix
Liste des tableaux	xi
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
Preliminaires . . . . .	1
Structure de la thèse et de l'introduction générale . . . . .	5
I. Contextualisation du risque de base . . . . .	7
II. La modélisation du risque de base . . . . .	21
III. La mesure et la quantification du risque de base . . . . .	41
IV. La gestion du risque de base . . . . .	55
Bibliographie . . . . .	72
<b>1 Bornes <math>s</math>-convexes sur les distributions Beta-unimodales et applications à l'évaluation du risque de base</b>	<b>91</b>
Abstract . . . . .	91
1.1 Introduction . . . . .	91
1.2 Beta-unimodal distributions . . . . .	95
1.3 Orderings of convex-type . . . . .	98
1.4 Bounds of convex-type . . . . .	103
1.5 Basis risk assessment . . . . .	109
1.6 Numerical illustrations . . . . .	118
Bibliography . . . . .	125
<b>2 Gestion du risque de base dans un cadre d'assurance indicielle et contractions aléatoires</b>	<b>131</b>
Abstract . . . . .	131
2.1 Introduction and motivation . . . . .	132
2.2 Some properties of randomly scaled variables . . . . .	135
2.3 Convex ordering of randomly scaled relation . . . . .	141



2.4	Quantifying two-sided basis risk . . . . .	145
2.5	Determining basis risk limits and budget . . . . .	149
2.6	Illustration of the methodology . . . . .	151
	Bibliography . . . . .	161
<b>3</b>	<b>Optimalité des transactions indicielles et indemnitaires : arbitrage entre asymétrie d'information et risque de base</b>	<b>167</b>
	Abstract . . . . .	167
3.1	Introduction . . . . .	168
3.2	Problem formulation . . . . .	172
3.3	An alternative characterization of the set of counter-monotonic risk reducers . . . . .	176
3.4	Perfect index-based transaction . . . . .	183
3.5	Perfect indemnity-based transaction . . . . .	190
3.6	Perfect index-based transaction VS Indemnity-based transaction with asymmetry of information . . . . .	195
3.7	On the basis risk in the index-based transaction . . . . .	198
3.8	Conclusion . . . . .	202
	Bibliography . . . . .	205
<b>4</b>	<b>De la réassurance optimale au partenariat optimal : une approche basée sur le taux de rétention</b>	<b>211</b>
	Abstract . . . . .	211
4.1	Introduction . . . . .	212
4.2	Preliminaries on unilateral optimal reinsurance in convex order . . . . .	214
4.3	On unilateral optimal partnership contract . . . . .	217
4.4	A bilateral risk sharing framework . . . . .	222
4.5	On bilateral optimal reinsurance . . . . .	225
4.6	On bilateral optimal partnership contract . . . . .	228
	Bibliography . . . . .	231
	<b>Conclusion et Perspectives de recherche</b>	<b>235</b>

# Liste des figures

01	A gauche : $S_\nu^\beta$ définie par l'Equation (19) (pointillés noirs) et $S_{SL}$ (courbe bleue); A droite : $x - g_\nu^\beta(x)$ (pointillés noirs) et $x - I_{SL}(x)$ (courbe bleue). . . . .	61
11	Differences $\mathbb{E}[\phi(Y_{max}^{(2)})] - \mathbb{E}[\phi(Y)]$ (solid red curve) and $\mathbb{E}[\phi(Y_{max}^{(3)})] - \mathbb{E}[\phi(Y)]$ (dashed black curve) when $\phi(x) = \exp(-\lambda x)$ , $x \in [0, 1]$ , and with $\lambda > 0$ . . . . .	106
12	Differences $\mathbb{E}[\phi(Y_{max}^{(2)})] - \mathbb{E}[\phi(Y)]$ (solid red curve) and $\mathbb{E}[\phi(Y_{max}^{(3)})] - \mathbb{E}[\phi(Y)]$ (dashed black curve) when $\phi(x) = \exp(-\lambda x)$ , $x \in [0, 1]$ , and with $\lambda \in \mathbb{R}$ . . . . .	107
13	The penalty function $h_n(x - c)$ when $\eta = 0.8, \gamma = 1.2, c = 5, d = 2.5, b = 10$ and $n = 2$ . Dashed line represents $ x - c $ , i.e. $g_1(x - c)$ . . . . .	114
21	Densities of $X$ (dashed black line) and $\hat{X}$ (solid blue line) when $Y \sim \Gamma(4, 2)$ , and $S$ and $\hat{S} \sim \text{Beta}((-1, 1), \alpha, \beta)$ with $(\alpha, \beta) = (2, 2)$ and $(0.2, 0.2)$ , respectively. . . . .	139
22	Graphs of $C_4[X_{max}^{(s)}(a)]$ when $Z \sim \Gamma(5, 2)$ in case (i), for $s = 2$ (solid line), $s = 3$ (dashed line), $s = 4$ (dotted line) and with $S \sim S_a(1, 4)$ (top left), $S_a(4, 1)$ (top right), $U_a$ (bottom left), $S_a(0.5, 0.5)$ (bottom right). . . . .	153
31	Function $\tilde{Z}$ (bold solid line) and the corresponding shapes of $F_{-Y}^{-1}$ (dashed line) and $F_X^{-1}$ (dotted line). . . . .	182
32	Prices of the stop-loss (solid blue line) and of a $I \in \mathcal{I}$ (dashed black line) as functions of the expectation. . . . .	186
41	Left hand side: $S_\nu^\beta$ defined by Equation (4.4) (dashed black line) and $S_{SL}$ (solid blue line); Right hand side: $x - g_\nu^\beta(x)$ (dashed black line) and $x - I_{SL}(x)$ (solid blue line). . .	220
42	Left hand side: the retention rate of the stop-loss (solid blue line) and a possible $\bar{s}$ (dashed black line). Right hand side: $I_{SL}$ (solid blue line) and $\bar{g}$ (dashed black line). . .	220
43	Left hand side: $\phi(\nu, \lambda = 0.2, \theta = 1)$ . Right hand side: $\phi(d, \lambda = 0.8, \theta = 1)$ . . . . .	227



# Liste des tableaux

11	The values of $\mathbb{E}[ X - c ]$ and its lower and upper bounds under Beta-unimodality or not, when $Y$ is uniform on $[0, b]$ , $b = 10, c = 2$ and $\alpha = 4, \beta = 2$ . . . . .	111
12	Values of $BR_{h_4}^{(s)}$ and $BR_{h_\infty}^{(s)}$ for $s = 2, 3, 4$ , when $c = \mathbb{E}[SY]$ and $d = 1.05\mathbb{E}[SY]$ . . . . .	120
13	Values of $BR_{h_4}^{(s)}$ and $BR_{h_\infty}^{(s)}$ for $s = 2, 3, 4$ , when $c = 0.95\mathbb{E}[SY]$ and $d = 1.05\mathbb{E}[SY]$ . . . . .	120
14	Values of $BR_{h_4}^{(s)}$ and $BR_{h_\infty}^{(s)}$ for $s = 2, 3, 4$ , when $c = 1.05\mathbb{E}[SY]$ and $d = 1.05\mathbb{E}[SY]$ . . . . .	120
15	Values of $BR_{h_4}^{(s)}$ and $BR_{h_\infty}^{(s)}$ for $s = 2, 3, 4$ , when $c = 1.15\mathbb{E}[SY]$ and $d = 1.05\mathbb{E}[SY]$ . . . . .	121
16	The parameters used in the 100 scenarios of the illustration given in Section 1.6. . . . .	124
21	Basis risk limits $a^{(s)}$ when $Z \sim \Gamma(5, 2)$ in cases (i), (ii), (iii), for $s = 2, 3, 4$ , with $\pi = 0.625$ and $S \sim U_a$ or $S_a(4, 1)$ . . . . .	154
22	Basis risk limits $\hat{a}$ when $Z \sim \Gamma(5, 2)$ in cases (i), (ii), (iii), with $\gamma = 0.05$ and $S \sim U_a$ . . . . .	154
23	Basis risk limits $a^{(2)}$ when $Z \sim P(1, 2.8)$ in cases (i), (ii), (iii), with $\pi = 0.3889$ and $S \sim U_a$ or $S_a(4, 1)$ . . . . .	155



# Introduction générale

## Préliminaires

Fortes de la sophistication des sources de données, les couvertures assurantielles se sont diversifiées et le marché traditionnel du transfert de risque est à compléter depuis une trentaine d'années par une myriade de produits tels que les obligations catastrophe ou l'assurance indicielle ou paramétrique.

Ces nouvelles classes de produits modifient profondément l'appréhension de l'assurance (Culp (2002), Banks (2004)) puisque le paradigme usuel de l'indemnisation basée sur la perte effectivement subie est parfois caduc. Dorénavant, l'indemnisation issue d'un transfert paramétrique est subordonnée à un indice censé refléter la perte.

En 2003, 54% des obligations catastrophe étaient structurées avec un déclenchement basé sur un indice exogène tandis que 43% étaient purement indemnitaires. En 2019, la part de l'indemnitaire atteint 65.2% alors que la part des déclenchements paramétriques ne représente plus que 4.2% des émissions.

Dans le même temps, la Banque Mondiale, via son programme intitulé *Global Index Insurance Facility* (GIIF), à l'instar de l'*InsuResilience Global Partnership for Climate and Disaster Risk Finance and Insurance Solutions* lancé à la conférence des Nations Unies de Bonn sur le climat en 2017 sont les égéries de la mouvance internationale concernant l'assurance paramétrique. A titre d'exemple, le GIIF est à l'origine du développement de plus de 5.5 millions de contrats bénéficiant à plus de 27 millions d'individus dans plusieurs régions d'Afrique et d'Asie Centrale, mais aussi dans les Caraïbes, en Océanie et en Amérique du Sud.

Pourtant, en dépit des efforts colossaux fournis par la communauté internationale, une multitude d'études de terrain, à l'image de celles menées par Jensen *et al.* (2016, 2018) au Kenya, fissure la puissance manifeste des poids lourds que sont ces programmes internationaux : la pénétration des produits d'assurance paramétrique proposés reste, ici et là, relativement basse. Parmi les causes identifiées, le **risque de base** est pointé du doigt.

Ce risque de base sera le fil conducteur de cette thèse de doctorat. Il est inhérent aux transactions paramétriques puisqu'il correspond, succinctement, au risque qu'il existe une différence entre la perte subie et l'indemnité reçue issue de la couverture paramétrique spécialement structurée pour couvrir cette perte.

Ainsi, l'actuaire, en tant que généraliste capable de valoriser et d'évaluer les conséquences futures et probables d'un engagement financier, est confronté à la modification du marché et, *in fine*, à la mesure et la gestion du risque de base. Ces nouvelles formes d'assurance sont, malgré tout, à la fois sources intarissables de couvertures innovantes, véhicules d'une assurance résiliante (Greatrex *et al.* (2015), Jensen et Barrett (2017)) et garantes de la pénétration de l'assurance (Cummins et Weiss (2009), Mobarak et Rosenzweig (2013)). La compréhension des risques sous-jacents à ces formes de couvertures est donc primordiale pour leur développement. A défaut, « cela reviendrait à vendre des tickets de loterie sous le label de l'assurance » (Jensen *et al.* (2016)).

Dès lors, cette thèse propose deux axes d'étude articulés autour du risque de base. D'abord, nous élaborons une méthodologie qui vise à quantifier les conséquences du risque de base dans le référentiel de l'acheteur de protection indicielle. La quantification du risque de base est motivée par la [Solvency II Commission Delegated Regulation \(2015\)](#), qui indique expressément que tout risque de base important devrait se refléter dans le calcul du capital de solvabilité requis. A défaut, la solution de transfert de risque ne devrait pas être prise en compte. La méthode que j'ai choisie adopte une approche de gestion globale basée sur des scénarios construits à partir de l'information disponible sur la différence entre la perte subie et l'indemnisation reçue. Alors, l'acheteur de protection indicielle est en mesure, en fonction de son appétence au risque de base, de quantifier l'impact d'un niveau d'incertitude sur la différence entre la perte subie et l'indemnité reçue et de définir des limites pour le risque de base dans différentes configurations, plus ou moins favorables. Cela m'a permis de développer un outil d'aide à la décision cohérent qui éclaire l'acheteur de protection sur son exposition au risque de base. La présentation théorique de cette méthodologie fait l'objet des Chapitres 1 et 2.

La motivation portant le second axe de cette thèse repose sur une considération pratique concrète. Puisque l'indemnité issue d'une couverture indicielle ne dépend pas de la perte mais d'indicateurs physiques décrivant un phénomène naturel, l'utilisation du transfert indiciel permet de n'être exposé qu'à des risques naturels purs, et parfois négativement corrélés. Cette situation apparaît par exemple, en observant l'alternance des cycles El Niño et La Niña<sup>1</sup> (Glantz (2001)), ou en considérant les risques de

---

1. El Niño et La Niña sont des cycles météorologiques influant sur l'intensité des cyclones, en particulier aux USA. Le cycle La Niña a tendance à augmenter l'intensité et la fréquence des cyclones tandis que le cycle El Niño correspond plutôt à des intensités plus faibles. Une présentation plus détaillée est donnée dans les Sections II.3.2 et IV.2.2.

mortalité et de longévité (Barrieu *et al.* (2012)). Ainsi, une assurance indicielle adossée à un phénomène El Niño (ou au risque de longévité) émise par un réassureur exposé au phénomène La Niña (ou au risque de mortalité) constitue une couverture naturelle pour ce dernier. Le réassureur n'est exposé qu'à la manifestation des phénomènes naturels, et non aux pertes indemnitaires. Il bénéficie ainsi d'une diversification pure et s'affranchit de l'**asymétrie d'information** inhérente aux transactions indemnitaires. En revanche, l'acheteur de cette couverture indicielle fera nécessairement face à un risque de base. Cet arbitrage entre risque de base et asymétrie d'information constitue le fil conducteur du Chapitre 3.

Sur la base des résultats techniques du Chapitre 3, le Chapitre 4 propose de dépasser le cadre de la réassurance traditionnelle pour proposer une forme d'échange issue d'un partenariat entre un assureur et un réassureur. Dans ce partenariat, l'assureur bénéficie de l'aide du réassureur pour augmenter la taille de son portefeuille. Le réassureur bénéficie, quant à lui, d'une forme de diversification puissante entre sa position initiale et le risque transféré par l'assureur.

Plus précisément, cette thèse se focalise dans les Chapitres 1 et 2 sur la modélisation de la différence entre la perte subie et l'indemnité issue de la couverture paramétrique. Le Chapitre 1 appréhende le risque de base issu d'une obligation catastrophe à déclenchement indiciel, impliquant un modèle catastrophe où l'intensité du phénomène physique est modélisée par un taux de destruction venant gréver la valeur de l'exposition. La perte est modélisée par la multiplication du taux de destruction avec l'exposition. Etant donné la forme particulière des deux variables impliquées, nous introduisons alors les distributions **Beta-unimodales**.

Dans le Chapitre 2, nous modélisons directement la différence entre la perte subie et l'indemnité déclenchée par une solution de transfert indiciel, c'est-à-dire le risque de base. Le risque de base peut découler de l'erreur commise lors de la construction de l'indice. Dans le cas idéal, cette erreur a une distribution symétrique et unimodale. Sur la base de la caractérisation de Shepp (1962) de ces types de distributions, le risque de base peut s'écrire comme le produit d'une loi uniforme sur  $(-1, 1)$  avec une variable aléatoire positive, indépendante de la première. La différence peut également venir de la présence d'un risque externe menant à une incertitude sur le lien entre l'indice et la perte. En utilisant l'approche développée par la littérature sur le *background risk*, à l'image de Franke *et al.* (2006), le risque de base peut aussi s'écrire comme le produit de deux variables aléatoires indépendantes. Enfin, en reprenant le cas d'une obligation catastrophe à déclenchement indiciel, le risque de base découle de l'incertitude de la destruction sur les zones où l'indice est moins performant. Comme pour le Chapitre 1, la perte résiduelle s'écrit comme la multiplication d'un taux de destruction avec l'exposition. Dans chacun des cas, l'indice est calibré de façon à ce qu'en moyenne la différence soit la plus faible possible. L'indice peut alors sous ou surestimer la perte. Il en résulte que le risque peut être positif ou négatif. Dans chacun de ces exemples, le risque de base est représenté par la multiplication de



deux variables aléatoires indépendantes. A partir de la représentation des variables unimodales et symétriques de Shepp (1962), le Chapitre 2 propose une extension résultant en une classe de variables malléables, définissant ainsi les **contractions aléatoires**. Cette malléabilité permet de prendre en compte différentes configurations du risque de base.

Enfin, dans le Chapitre 4, bien qu'il ne traite pas à proprement parler du risque de base, nous introduisons le **taux de rétention** comme la proportion du risque initial restant à la charge de l'assureur après intervention de la réassurance. L'approche proposée dans le Chapitre 4 correspond là encore, à la multiplication de deux variables aléatoires : le risque initial et le taux de rétention. Notons que dans ce chapitre, les deux variables impliquées dans la multiplication ne sont pas indépendantes. Grâce au partenariat, le taux de rétention de l'assureur peut dépasser 1, ce qui est contraire au cadre de la réassurance traditionnelle. Nous verrons néanmoins que l'échange issu du partenariat optimal est plus efficient que la réassurance traditionnelle.

Motivée par la réglementation prudentielle assurantielle, et marginalement par la réglementation prudentielle bancaire, notre méthode de quantification du risque de base est fondée sur la constitution de jeux de scénarios, dont la sévérité dépend de l'information disponible sur la perte (Chapitre 1), ou directement sur le risque de base (Chapitre 2). La construction et la comparaison de ces scénarios reposent sur un fondement théorique puissant : les ordres convexes de degrés supérieurs, dits **ordres  $s$ -convexes**. Ces ordres garantissent l'existence de distributions extrêmes construites à partir de l'information disponible sur la variable aléatoire considérée. L'obtention de ces distributions extrêmes pour les contractions aléatoires permet la génération des scénarios, donnant lieu à la mesure des conséquences de la présence du risque de base dans les transactions indicielles.

Dans une optique de gestion du risque de base, la méthodologie fondée sur les distributions extrêmes et les ordres convexes de degrés supérieurs propose à l'acheteur de protection indicielle un outil d'aide à la décision. Cet outil l'éclaire sur l'efficacité de la couverture, tout en lui permettant de se fixer les limites de son acceptation des conséquences du risque de base.

Enfin, la gestion est abordée d'un point de vue du transfert de risque dans les Chapitres 3 et 4. Puisque le risque de base est inhérent à l'assurance indicielle autant que l'est l'asymétrie d'information à l'assurance indemnitaire, nous comparons dans le Chapitre 3 leur influence sur le choix de la forme de transfert dans un problème bilatéral de **réassurance optimale**. Le Chapitre 4 fait écho au résultat fondateur de Van Heerwaarden *et al.* (1989) qui assurent que lorsque le prix de la réassurance est déterminé par l'espérance de la perte, la *stop-loss* est la forme de réassurance qui minimise la rétention de l'assureur à l'**ordre convexe**. Par conséquent, l'ordre convexe est l'élément clé de ces deux derniers chapitres. Il se caractérise par la *tail value-at-risk*, qui joue le rôle de mesure des préférences d'un

assureur et d'un réassureur dans le cadre de transactions paramétrique et indemnitaires dans le Chapitre 3. L'ordre convexe permet également une approche géométrique claire, développée particulièrement dans le Chapitre 4 à l'aide du taux de rétention.

## Structure de la thèse et de l'introduction générale

Dans cette thèse, nous présenterons quelques contributions à la mesure, à la quantification et à la gestion du risque de base associé aux couvertures indiciaires. Cette thèse s'articule en quatre chapitres, précédés d'une introduction générale. Celle-ci fournit les motivations sous-jacentes à nos recherches et résume les principales contributions de nos résultats. Les contributions de la thèse sont, quant à elles, détaillées dans les quatre chapitres.

1. Le Chapitre 1 reprend l'article « On  $s$ -convex bounds for Beta-unimodal distributions with applications to basis risk assessment », co-écrit avec Claude Lefèvre et Stéphane Loisel, publié au *Scandinavian Actuarial Journal*. Nous y développons une méthode d'évaluation des conséquences du risque de base liées à une obligation catastrophe à déclenchement indiciaire dans le cadre d'un modèle catastrophe avec taux de destruction suivant une loi Beta. Cette approche, concentrée sur la modélisation de la perte, introduit une première forme de contraction aléatoire : la Beta-unimodalité. L'évaluation des conséquences du risque de base est fondée sur la génération de scénarios d'incertitude extrême. Ces scénarios sont construits à partir des ordres  $s$ -convexes et de l'information disponible sur l'exposition à la catastrophe naturelle (qui jouera le rôle du facteur contracté). Pour chaque scénario, nous fournissons les formes fermées des bornes sur les mesures du risque de base retenues. Le chapitre est clôturé par une application numérique mettant en oeuvre la méthodologie proposée.
2. Le Chapitre 2 est issu de l'article « Basis Risk Management in an index-based insurance framework under randomly scaled uncertainty », co-écrit avec Claude Lefèvre et Stéphane Loisel, en révision à *Insurance : Mathematics & Economics*. Fondée sur les réglementations prudentielles assurantielles et bancaires, nous proposons une méthode de quantification du risque de base issu des transferts indiciaires, du point de vue de l'acheteur de protection. Motivée par les modèles de régression utilisés pour calibrer les indices et par la représentation multiplicative et additive du *background risk*, l'hypothèse générale de ce chapitre est la modélisation de la distribution du risque de base par les contractions aléatoires. Grâce à la malléabilité de cette classe de variables aléatoires, nous générons des scénarios d'incertitude extrême, cette fois-ci, à partir de l'information disponible sur le facteur contractant. Les mesures des conséquences du risque de base sont plus complètes que celles du Chapitre 1. D'un point de vue de la gestion du risque de base, elles prennent en compte les limites d'acceptation de ce risque déterminées par l'acheteur de protection et fournissent une indication sur le coût « caché » de la transaction indiciaire induit par le risque de base.

3. Le Chapitre 3 est tiré de l'article « Optimality of indemnity and index-based transactions : the trade-off between asymmetry of information and basis risk », co-écrit avec Pauline Barrieu, Anne Eyraud-Loisel et Stéphane Loisel et soumis à *Risk Analysis*. Nous examinons le rôle de l'asymétrie d'information dans les transactions indemnitaires ainsi que le rôle du risque de base dans les transactions indicielles. La finalité est de mesurer leur influence dans le choix du type de transfert. Les transactions sont abordées dans un cadre bilatéral, en considérant simultanément les préférences de l'acheteur et celles du vendeur de protection. La comparaison des transactions se fait en prenant en compte l'exposition initiale du vendeur de protection. Nous isolons dans un premier temps les transactions parfaites (sans risque de base, sans asymétrie) et fournissons les formes des transferts optimaux. En utilisant ces transactions comme références, nous parvenons à montrer que l'intensité de l'asymétrie d'information est, pour un indice et un niveau de risque de base donnés, déterminante dans le choix du type de la transaction.
4. Le Chapitre 4 correspond à l'article « From optimal reinsurance to optimal partnership contract : a retention rate approach », co-écrit avec Pauline Barrieu, Anne Eyraud-Loisel et Stéphane Loisel et soumis à l'*ASTIN Bulletin*. Nous introduisons un cadre de partenariat optimal entre un assureur et un réassureur. Ce cadre est une généralisation de la réassurance traditionnelle au sens où l'assureur est autorisé à avoir un taux de rétention supérieur à 1. Nous ouvrons l'étude de l'optimalité du partenariat par un cadre unilatéral, permettant de faire le lien avec le résultat classique de réassurance unilatérale optimale. Nous élargissons ensuite le problème à un cadre bilatéral, en intégrant les préférences du réassureur. Après avoir montré l'existence de solutions Pareto-optimales, nous résolvons d'abord le problème de réassurance optimale qui servira de référence. Ensuite, nous examinons les problèmes de partenariat optimal lorsque le taux de rétention est borné, puis non borné. Dans tous les cas, la solution issue du partenariat est plus efficiente que la réassurance traditionnelle.

La suite de cette introduction générale s'articule en quatre sections. La première est dédiée à la contextualisation du risque de base. Nous présentons le marché de la réassurance traditionnelle et introduisons les formes de couvertures usuelles que nous retrouverons tout au long des Chapitres 3 et 4, ainsi que le taux de rétention. Les imperfections associées à la réassurance traditionnelle nous mèneront ensuite à aborder les formes alternatives de transfert de risque, en nous focalisant sur le cas d'une obligation catastrophe à déclenchement paramétrique. Ainsi, nous dessinons les traits du cadre d'étude du Chapitre 1, qui nous servira d'illustration dans le Chapitre 2. Ce cheminement nous conduit naturellement à définir le risque de base et à présenter ses impacts.

La seconde section détaille la modélisation du risque de base et concerne alors particulièrement les Chapitres 1 et 2. A cet égard, nous examinons la structure des modèles catastrophe pour en extraire

la représentation de la perte utilisée dans le Chapitre 1. Les distributions Beta-unimodales sont alors détaillées avec un rappel des principales propriétés. Ensuite, nous discutons des sources du risque de base dans la constitution et le choix de l'indice. En mettant en lumière différentes situations de risque de base, nous faisons apparaître les contractions aléatoires. La section se termine sur la présentation des résultats associés à cette classe de variables.

La troisième section développe la méthode de quantification du risque de base utilisée dans les Chapitres 1 et 2. Après avoir justifié notre approche par les textes réglementaires, nous introduisons les outils théoriques sur lesquels est fondée la méthode. Ainsi, nous élargissons le périmètre de la section aux Chapitres 3 et 4 dans lesquels l'ordre convexe joue un rôle prépondérant. Pour terminer, nous détaillons les fondements théoriques en lien avec la génération des distributions extrêmes.

Pour finir, la quatrième section traite de la gestion du risque de base. La section s'ouvre sur le point de vue adopté dans les Chapitres 1 et 2, en présentant succinctement l'utilité de la méthode de quantification du risque de base. Enfin, nous évoquons les problèmes étudiés dans les Chapitres 3 et 4, en introduisant l'asymétrie d'information, la Pareto-optimalité et les résultats techniques propres à ces chapitres.

## **I. Contextualisation du risque de base**

La compréhension du risque de base nécessite de présenter succinctement les mécanismes usuels de transferts de risque assurantiel. Dans cette thèse de doctorat, les mécanismes de transfert sont appréhendés par une dichotomie claire, à l'image de celle du Chapitre 3, puisqu'ils sont perçus comme étant soit indemnitaires, soit paramétriques. En réalité, les stratégies de transfert prennent la plupart du temps la forme d'un empilement de couvertures, mêlant différents types de produits. Le lecteur pourra se référer aux livres de [Gorge \(2016\)](#) ou de [Carter \(2013\)](#) qui proposent une présentation fournie des mécanismes hybrides de couverture du risque. Dans ce qui suit, nous distinguerons le marché traditionnel, représenté par la réassurance, et le marché alternatif, dont la présentation se focalise sur les produits à déclenchement paramétrique. Alors, nous mettrons en lumière le risque de base en discutant de sa définition et en exhibant son impact sur la demande en transactions paramétriques.

### **I.1 Le marché de la réassurance traditionnelle**

Pour rappel, un contrat de réassurance est un accord dans lequel une partie (le réassureur) s'oblige à indemniser une autre partie (le réassuré, l'assureur direct, la compagnie cédante, ou encore la cédante) pour une part spécifique de son risque assuré. En retour, la cédante paie au réassureur une prime de réassurance. La prime de réassurance peut prendre différentes formes, influant alors sur le type de

réassurance choisi par l'acheteur. Nous approfondirons ce point dans la Section IV de l'introduction générale et dans les Chapitres 3 et 4, mais pour le moment, gardons simplement à l'esprit que la réassurance est l'assurance de l'assureur, qui comme ses assurés, paie une prime fixe pour se délester de tout ou partie de son risque aléatoire. Bien que des similitudes dans le mécanisme de transfert existent entre l'assurance et la réassurance, les types de risques et leurs magnitudes, les données disponibles pour la modélisation des risques, les possibilités de diversification, l'offre et la demande et la régulation font de la réassurance un marché distinct de l'assurance primaire. Le livre d'[Albrecher et al. \(2017\)](#) s'avère être une référence de choix pour la compréhension de ces problématiques.

[Cole et McCullough \(2006\)](#), [Garven et Lamm-Tennant \(2003\)](#) ou [Gron \(1999\)](#) ont montré que les compagnies d'assurance sont indissociables des compagnies de réassurance. La compagnie d'assurance met en place des mécanismes de transfert de risques qui lui permettront tour à tour de réduire la probabilité de faire face à des pertes trop importantes, de stabiliser les résultats financiers, de réduire le capital réglementaire, d'augmenter la capacité de souscription ou encore d'avoir accès à la diversification. La littérature académique s'est largement intéressée à l'utilisation de ces mécanismes de transfert, à l'image de [Bargès et al. \(2013\)](#), [Schmidli et al. \(2002\)](#) ou [Gajek et Zagrodny \(2004b\)](#) qui mêlent réassurance et probabilité de ruine. [Asimit et al. \(2015\)](#) s'intéressent au rôle du transfert traditionnel dans un cadre de solvabilité et [Filipović et Kupper \(2008\)](#) proposent une étude sur les bénéfices de la diversification.

Le marché de la réassurance concentre la part des risques transférés par les assureurs directs aux réassureurs. D'après [AM Best Company \(2020\)](#), la capacité du marché de la réassurance, définie comme le montant maximal de réassurance disponible sur le marché, était de 368 milliards de dollars en 2006 contre 530 milliards en 2019. Notons que les six acteurs majeurs<sup>2</sup> concentrent plus d'un quart de la capacité de souscription. Aussi, la réassurance met en place des mécanismes de transfert entre les réassureurs, appelés rétro-cession, qui renforcent l'interconnexion entre les acteurs de ce marché. De nombreux travaux sont menés sur le risque systémique afin de tenter de prendre la mesure d'une telle imbrication, à l'image de [Kanno \(2016\)](#), [Chen et al. \(2020\)](#) ou encore [Chen et Sun \(2020\)](#). D'un autre côté, cet entrelacement des intérêts a donné naissance à une branche de la littérature qui s'est intéressée assez tôt à la problématique du partage du risque entre ces différents acteurs que nous détaillerons à la Section IV. Le Chapitre 3 s'insère dans cette dynamique en examinant un échange de réassurance traditionnelle entre un réassureur et un assureur afin de le comparer à un échange basé sur une couverture indiciaire. Aussi le Chapitre 4 élargit l'ensemble des contrats de réassurance admissibles afin de proposer des formes de partage du risque assurantiel qui remettent en question les contraintes usuellement imposées à la forme des couvertures traditionnelles.

---

2. Dans l'ordre du montant des primes reçues en 2019 (millions de dollars) : Swiss Re Ltd (39 649), Munich Reinsurance Company (35 282), Hannover Ruck SE (22 096), SCOR SE (16 176), Berkshire Hathaway Inc. (16 089) et les Lloyd's (10 433) ; source : [AM Best Company \(2020\)](#).

L'intérêt de la présentation du marché de la réassurance traditionnelle réside, au delà de la contextualisation du risque de base, dans l'explication des contraintes imposées à l'ensemble des contrats de réassurance, puis dans la description de certaines formes de couvertures.

### I.1.1 Formes de couvertures usuelles et taux de rétention

Afin d'illustrer notre propos, nous considérons un assureur et nous notons pour l'instant  $X$  la variable aléatoire positive ou nulle représentant sa perte. La réassurance prend alors la forme d'un contrat spécifiant la part de la perte  $X$  cédée au réassureur. En pratique, la part de perte cédée au réassureur peut s'écrire comme une fonction de la perte initiale de l'assureur. Cette fonction, appelée fonction de perte cédée, obéit à plusieurs contraintes caractérisant l'échange de réassurance.

Tout d'abord, la fonction de perte cédée doit être positive de façon à ce que le flux monétaire associé à la perte ne soit qu'à la charge du réassureur. En d'autres termes, la réassurance représente un transfert de risque plus qu'un partage de risque dans le sens où le réassureur et l'assureur s'entendent sur la façon dont l'assureur va transférer son risque au réassureur. Le partage de risque correspondrait à la situation où l'assureur et le réassureur prendraient tous les deux en charge tout ou partie du risque de l'autre. Cette distinction caractérise l'échange de réassurance et le différencie d'un partage financier du risque où le signe et la taille du risque transféré n'importent pas.

La réassurance traditionnelle souffre d'asymétrie d'information sur le risque cédé par l'assureur au réassureur. D'un côté l'assureur a une connaissance fine de son risque et de sa politique de souscription, bénéficiant ainsi d'une information privée. En revanche, la connaissance privée de l'assureur se limite au périmètre de son portefeuille. De l'autre côté, le réassureur a une connaissance globale du risque puisqu'il peut compléter l'information partielle transmise par l'assureur par l'information fournie par les autres assureurs avec qui il commerce. Alors, la connaissance privée du réassureur est plus large mais partielle. Par exemple, dans le cadre d'une couverture avec franchise, l'assureur ne va mettre à disposition du réassureur que les sinistres dont la taille dépasse la franchise : le réassureur fait donc face à de l'information tronquée. Ces avantages informatifs sont mis en évidence par les travaux de [Yan et Hong \(2015\)](#) et le chapitre 1 du livre [Albrecher \*et al.\* \(2017\)](#) présente les enjeux statistiques associés aux données tronquées. Pour pallier à la sélection adverse inhérente à l'information privée dont disposent les assureurs (mise en évidence par exemple par [Garven \*et al.\* \(2014\)](#)), l'hypothèse retenue par la littérature est que la fonction de perte cédée soit non-décroissante et 1-Lipschitz (introduite par [Huberman \*et al.\* \(1983\)](#)). De cette façon, l'assureur et le réassureur voient leurs charges s'accroître en même temps que la perte augmente. Le Chapitre 3 apporte un éclairage sur le rôle de l'asymétrie d'information dans le choix du type de couverture ; nous reviendrons à cet égard plus longuement sur les problématiques liées à l'asymétrie d'information dans la Section IV de cette introduction.

En notant  $I$  une fonction de perte cédée, l'ensemble des contrats de réassurance admissibles  $\mathcal{I}$  est

donc formellement défini comme

$$\mathcal{I} = \{I \mid I \text{ est positive, non-décroissante et 1-Lipschitz}\}. \quad (1)$$

Notons que les trois contraintes impliquent qu'une fonction de perte cédée  $I$  dans  $\mathcal{I}$  vérifie  $0 \leq I(x) \leq x$ , pour  $x \geq 0$  et  $x - I(x) \leq y - I(y)$  avec  $0 \leq x \leq y$ . Considérer l'ensemble  $\mathcal{I}$  permet donc de traiter avec des fonctions de perte cédée qui mènent à une rétention croissante en la perte. Ce point est crucial dans l'approche géométrique développée dans les Chapitres 3 et 4. Aussi, dans le Chapitre 4, nous relâchons les hypothèses de croissance et de positivité sur l'ensemble  $\mathcal{I}$ , tout en conservant celle sur la croissance de la rétention. Cette modification de l'ensemble des contrats de réassurance nous mènera à construire des formes de couvertures à la croisée de la réassurance et du partage de risque.

Pour le moment, notons que la réassurance considère deux quantités : la fonction de perte cédée  $I(X)$  et la rétention  $X - I(X)$ . Le choix de la meilleure fonction de perte cédée a été un problème soulevé très tôt dans la littérature actuarielle, faisant ressortir quelques formes de réassurance types. Bien que naturelle, cette problématique à l'apparence claire est en réalité truffée d'embûches et soulève une cascade de questions sous-jacentes : que veut dire « meilleure » ? Puisque la réassurance fait intervenir au moins deux acteurs, comment prendre en compte les préférences de chacun d'eux ? La connaissance de leurs préférences est-elle accessible ?

La littérature a apporté des réponses à chacune d'entre elles ; nous y reviendrons dans la Section IV dédiée au transfert de risque. Une des contributions de la thèse, présentée dans les Chapitres 3 et 4, est la mise en évidence du rôle de l'exposition initiale du réassureur dans le choix de la forme de réassurance optimale dans un contexte bilatéral, c'est-à-dire en prenant en compte les préférences de l'assureur et du réassureur.

D'ailleurs, notons que la recherche de la forme optimale de réassurance, en dépit des considérations sur les critères d'optimalité, implique de travailler dans l'ensemble  $\mathcal{I}$ . Par conséquent, les techniques de résolution associées aux problèmes de partage de risque comme les inf-convolutions introduits dans la Section IV (Barrieu et El Karoui (2005) et Jouini *et al.* (2008)) sont à utiliser avec mesure malgré la ressemblance des problèmes initiaux puisqu'elles ne tiennent pas compte de la restriction de l'espace admissible. La méthode utilisée dans les Chapitres 3 et 4 pour déterminer la forme de réassurance dans des contextes bilatéraux consiste à identifier une forme de réassurance classique en tant que sous-ensemble de solutions, puis à résoudre le problème d'optimisation dans cet espace de dimension réduite.

La forme de réassurance classique qui apparaît dans les Chapitres 3 et 4 est le *stop-loss*, ou excédent de perte. Dans ce cas, l'assureur transfère l'intégralité des sinistres dont la taille dépasse un seuil

prédéterminé, noté  $d$ . En d'autres termes,

$$I(X) = (X - d)_+ \text{ et } X - I(X) = X \wedge d,$$

où  $x \wedge d = \min(x, d)$  et  $(x - d)_+ = \max(0, x - d)$ . Le stop-loss est mis en lumière dans les travaux d'Arrow (1963) puis de Raviv (1979) ainsi que par sa connexion avec l'ordre convexe notamment à travers le résultat fondateur de Van Heerwaarden *et al.* (1989). En effet, Van Heerwaarden *et al.* (1989) démontrent que lorsque la prime de réassurance n'est déterminée que par l'espérance de la fonction de perte cédée, alors le stop-loss est la forme de réassurance qui minimise la rétention à l'ordre convexe. En particulier, le Chapitre 4 propose une forme de partage de risque qui permet d'obtenir une rétention plus faible à l'ordre convexe que celle obtenue avec un stop-loss. L'approche développée dans ce chapitre repose en partie sur le taux de rétention.

Pour une forme de réassurance  $I$  dans  $\mathcal{I}$ , le taux de rétention noté  $S_I$  est défini par

$$S_I = \frac{X - I(X)}{X}.$$

Le taux de rétention est donc une variable aléatoire qui représente la proportion de la perte restant à la charge de l'assureur après intervention de la réassurance. La rétention est alors donnée par la multiplication du taux de rétention avec la perte, c'est-à-dire  $X - I(X) = S_I X$ . Cette forme multiplicative constitue la première apparition des contractions aléatoires, bien que  $S_I$  et  $X$  ne soient pas nécessairement indépendants.

Lorsque  $I$  prend la forme d'un *quota-share*, le réassureur ne couvre qu'une proportion positive, notée  $\alpha$ , de la perte de l'assureur. L'optimalité du quota-share a fait l'objet d'études approfondies, à l'image de celles de Borch (1960b,c, 1962), Lampaert et Walhin (2005), ou Tan *et al.* (2009). Le taux de rétention  $S_{QS}$  d'un quota-share de proportion  $\alpha \geq 0$  est alors  $S_{QS} = 1 - \alpha$ . Le quota-share est d'ailleurs la seule forme de contrat dont le taux de rétention est indépendant de la perte.

Le taux de rétention du stop-loss de rétention  $d \geq 0$  est quant à lui donné par

$$S_{SL} = \mathbb{1}_{\{X \leq d\}} + \frac{d}{X} \mathbb{1}_{\{X > d\}}.$$

Nous verrons au Chapitre 4 que le taux de rétention facilite la mise en place d'une approche géométrique permettant de discuter de la suprématie à l'ordre convexe du stop-loss.

Pour terminer, il est possible de créer d'autres formes de réassurance à partir de ces contrats « types ». A titre d'exemple, le *change-loss* correspond à l'application d'un quota-share après celle d'un stop-loss. Dans ce cas,  $I(X) = \alpha(X - d)_+$ . Le change-loss apparaît comme la forme optimale de réassurance dans les travaux de Gajek et Zagrodny (2000), Gajek et Zagrodny (2004a) et de Kaluszka (2001). Aussi, la soustraction de deux stop-loss donne lieu à un *single-layer*, c'est-à-dire un contrat où  $I(X) =$



$(X - d_1)_+ - (X - d_2)_+$  avec  $0 < d_1 < d_2$ . Les travaux d'Asimit *et al.* (2020), entre autres, démontrent l'optimalité du single-layer.

### I.1.2 Des couvertures imparfaites

Malgré la sophistication des montages de réassurance, il existe des risques pour lesquels la couverture de réassurance ne s'applique pas. C'est le cas des risques concernés par les clauses d'exclusion, comme les guerres civiles ou les pandémies. Ils sont présentés comme des risques non assurables, aussi parfois appelés en anglais *background risk*. Le *background risk* fait aussi référence à l'amplification de la valeur de la perte due à l'augmentation des prix des matériaux de construction et de la main d'oeuvre après le passage d'une catastrophe naturelle ; nous y reviendrons dans la section II.3.2. La littérature s'est attachée à considérer cette séparation entre risque assurable et risque non-assurable. Les travaux fondateurs de Kihlstrom *et al.* (1981), Doherty et Schlesinger (1983), Gollier (1996), Gollier et Pratt (1996), Finkelshtain *et al.* (1999) puis ceux de Tsetlin et Winkler (2005) et Franke *et al.* (2006, 2011) s'interrogent sur le rôle de la présence d'un aléa supplémentaire sur la prise de décision. Nous retrouverons d'ailleurs une partie de cette littérature dans les motivations du Chapitre 2. Dans le même temps, la littérature actuarielle s'est emparée du sujet en offrant une série de travaux sur la forme de la couverture de réassurance optimale lorsque l'assureur est exposé à un risque non-assurable, que ce soit par clause d'exclusion (Chi et Liu (2017)) ou par la présence d'un risque systémique. La richesse de cette branche de la littérature réside dans la prise en compte de la corrélation qui lie les deux types de risques, à l'instar des travaux de Dana et Scarsini (2007), Cai et Wei (2012), Lu *et al.* (2012), Chi et Tan (2015), et très récemment Chi et Wei (2018), Lu *et al.* (2018) et Fan (2019).

Il en résulte que la réassurance traditionnelle n'apporte que des couvertures imparfaites, au sens où l'acheteur de protection fait face à un risque existant, mais non pris en compte dans la couverture. A cet égard, Swiss Re<sup>3</sup> note que l'écart entre les pertes assurées et les pertes subies augmente dans presque toutes les régions du globe, réduisant de fait la capacité des individus, des entreprises et finalement des nations à se remettre de chocs majeurs. Cet écart de protection (*protection gap*) se définit comme la portion des pertes économiques non couvertes par de l'assurance. Cet écart découle en réalité d'une disparité des taux de pénétration de l'assurance entre les régions du globe. Ce taux est calculé pour un pays donné en exprimant le total des primes d'assurance en pourcentage du produit intérieur brut (PIB) du pays, et indique dans quelle mesure le secteur de l'assurance contribue à l'économie nationale. Dès lors, si des régions bénéficient d'un taux de pénétration de l'assurance élevé, d'autres souffrent d'un faible niveau de couverture comme le montrent les études récentes de Pradhan *et al.* (2015, 2016). A titre d'exemple, 60% des maisons construites aux Etats-Unis le sont dans des zones qui seraient prioritairement affectées par des feux de forêt. Sont-elles pour autant couvertes contre ce risque ? Nous pourrions également relever que seulement 2% des habitants des zones à risque sismique

---

3. Source: [SwissRe.com](https://www.swissre.com)

d'Italie ont souscrit une assurance les protégeant...

L'année 2019 illustre avec pertinence la disparité du taux de pénétration de l'assurance. En effet, une grande partie des sinistres de 2019 provient de régions où la pénétration de l'assurance demeure faible, à l'image de la Chine, de l'Inde, du Bangladesh et de l'Iran<sup>4</sup>. Entre mars et avril, l'Iran a fait face à une vague d'inondations, causant une perte économique de l'ordre de 8.3 milliards de dollars quand les pertes assurées atteignent à peine 0.2 milliard. Pour le cas de l'Inde et du Bangladesh, le cyclone Fani a causé 8.1 milliards de pertes économiques pour 0.5 milliard de pertes assurées. Une saison des moussons particulièrement intense vient s'ajouter à une année coûteuse pour la région avec plus de 10 milliards de dollars de pertes économiques alors que seulement 2.5 milliards de pertes sont couvertes. Suivant le même schéma, les moussons de juillet et d'août ont engendré 15 milliards de pertes économiques pour la Chine, qui ne bénéficiait que de 0.7 milliard de couverture. A l'opposé, le Japon a essuyé des pertes économiques s'élevant à 25 milliards de dollars liées aux deux typhons Faxai (7 et 9 septembre) et Hagibis (6 au 12 octobre) mais présentait un taux de couverture de 60% avec 15 milliards de dollars de pertes assurées.

En dehors de la présentation technique des couvertures traditionnelles de réassurance, la finalité de cette brève présentation du marché de la réassurance permet de mettre en lumière deux points. D'abord, malgré une augmentation remarquable de la capacité des réassureurs, celle-ci n'en demeure pas moins limitée et orientée sur les marchés nord-américains, européens et japonais. Ensuite, cette orientation du marché, à mettre en relation avec des aspects culturels historiques, met en exergue la disparité de la pénétration de l'assurance entre les régions du globe. Il en résulte que l'écart de protection est un challenge criant pour les régions comme l'Asie, l'Amérique Latine et l'Afrique, où la part des pertes non couvertes pèse plus de 90%. Evidemment conscients du rôle de l'assurance dans le développement économique, les gouvernements de ces régions, accompagnés par des organismes internationaux - Banque Mondiale en tête - explorent les solutions d'assurance compatibles avec les problématiques locales, incluant la mise en place d'assurances paramétriques.

## **I.2 Transfert alternatif et risque de base**

Nous l'avons explicité dans la partie précédente, la réassurance traditionnelle est caractérisée par une fonction écrite exactement sur la perte de l'assureur. Autrement dit, l'acheteur de réassurance traditionnelle est indemnisé (contractuellement) par rapport à la perte qu'il subit.

Parallèlement, il existe des outils de transfert de risque dont l'indemnité n'est pas subordonnée à la perte subie mais plutôt à une condition externe, spécifiée contractuellement. Ces véhicules de transfert

---

4. Source : [Aon Securities \(2019\)](#)

de risque, dits alternatifs peuvent prendre différentes formes en fonction de la finalité qu'ils servent. Deux catégories peuvent toutefois être distinguées. La première est caractérisée par celle des porteurs de risque pour laquelle nous pouvons citer à titre d'exemple les captives d'assurance (Graeff *et al.* (2017)). La seconde catégorie se caractérise par un produit nécessitant une transaction, à l'image des garanties de pertes industrielles (*Industry Loss warranties*, ILW), des obligations catastrophe et plus largement des titres adossés sur les risques assurantiels (*Insurance Linked Securities*, ILS), des dérivés climatiques (*Weather Derivatives*, WD) et de toutes les transactions dites d'assurance indicieelle.

Malgré la diversité des formes de transfert alternatif, nous développons particulièrement le cas d'une obligation catastrophe à déclenchement paramétrique. Ce choix réside d'abord dans le fait que cette forme de transaction est explicitement traitée dans le Chapitre 1 de la thèse, ensuite parce que le fonctionnement général de l'indemnisation issue de ce type de couverture indicieelle est en réalité commun à toutes les autres.

### **I.2.1 Le transfert indicieel : le cas d'une obligation catastrophe à déclenchement paramétrique**

Les obligations catastrophe (*Cat bond*), représentatives des ILS, sont nées suite à l'ouragan Andrew de 1992 pour faire face à la crispation de capacité de la réassurance traditionnelle. Le *Cat bond* est une émission sur les marchés financiers de dette assurantielle liée à des événements catastrophe. L'intérêt premier des émetteurs (*sponsor*) est l'accès à une capacité supplémentaire et potentiellement supérieure à celle de la réassurance traditionnelle, en particulier pour les risques concernés. D'un autre côté, les investisseurs voient en ce type de produit un moyen de diversification, justement parce que les risques impliqués dans les obligations catastrophe sont décorrélés (hormis à un niveau extrême) des marchés financiers.

Les flux financiers, constitués des primes de l'émetteur et des montants investis par les investisseurs, sont rassemblés dans un *Special Purpose Vehicle* (SPV). Les tenants et les aboutissants de ce véhicule d'investissement, en tant que structure financière, ne seront pas abordés ici mais une présentation approfondie des enjeux se trouve dans Barrieu et Albertini (2009). Notons simplement que cette structure ad hoc, que nous pourrions définir comme une entité à l'abri de la faillite dont les opérations sont limitées à l'acquisition et au financement d'actifs spécifiques, est en charge de la rémunération des investisseurs. Les investisseurs sont rémunérés périodiquement tant qu'aucun événement catastrophe contractuellement décrit ne déclenche d'indemnisation. Si aucun événement n'est survenu durant toute la durée d'existence de l'obligation, les investisseurs récupèrent leur capital initial, augmenté des coupons périodiques. A l'inverse, si un événement catastrophe survient pendant la durée de vie de l'obligation alors le SPV indemnise l'émetteur, comme le stipule le contrat. Notons que l'obligation catastrophe est la plupart du temps structurée en tranches de perte. Ces tranches sont caractérisées par un seuil minimal

(*attachment point*) et un seuil maximal (*exhaustion point*). Comme pour les obligations classiques, il y a une hiérarchie entre les tranches : lorsqu'une perte survient, l'indemnité est issue du capital alloué à la première, puis à la deuxième et ainsi de suite. Le taux de rémunération des investisseurs dépend bien entendu de la tranche. Plus elle a de chance d'être consommée, plus le taux de rémunération est élevé. Les probabilités de dépasser les seuils des tranches sont des quantités clés dans la structuration des obligations catastrophe.

La notion d'élément déclencheur joue un rôle primordial puisqu'il détermine si l'émetteur est indemnisé, et de l'autre côté, si les investisseurs perdent tout ou partie de leur capital.

Il existe différents types de déclenchements (*triggers*), nommément indemnitaires, basés sur la perte modélisée ou sur la perte du secteur, et paramétriques. A la différence des trois premières, la forme de déclenchement paramétrique ne se base pas sur la perte (qu'elle soit réelle, modélisée ou relative à la perte globale du secteur) mais sur des paramètres objectifs de la catastrophe naturelle, comme par exemple, la vitesse du vent ou le niveau des précipitations.

C'est cette forme d'indemnisation qui caractérise le transfert indiciel. Au lieu de recevoir une indemnisation prenant la forme d'une fonction écrite exactement sur sa perte, l'acheteur de protection reçoit une indemnité adossée à la valeur prise par un indice reflétant les conditions climatiques d'un événement et/ou d'une période. Le Chapitre 1 propose de s'intéresser à la modélisation de la perte au sein d'une obligation catastrophe en utilisant une approche basée sur le taux de destruction. Lorsque celui-ci est déterminé par une loi Beta, alors la perte se définit comme le produit de ce taux avec l'exposition. Il en résulte une variable dite Beta-unimodale. La valeur ajoutée du Chapitre 1 ne réside pas dans la modélisation de la perte en tant que telle, mais plutôt dans l'utilisation de la décomposition liée à la Beta-unimodalité. La Beta-unimodalité est primordiale pour la construction de scénarios extrêmes dans le cadre de la méthodologie de quantification du risque de base associé à une obligation catastrophe à déclenchement indiciel. La Section II reviendra en détail sur les développements théoriques associés à la Beta-unimodalité. La Section III présentera la méthode de quantification et les outils mathématiques associés.

Si la structure financière du cat bond lui est propre, la forme du déclenchement est en revanche commune aux formes de transfert indiciel, également appelé transfert paramétrique, ou directement assurance paramétrique. Plus généralement, en reprenant la dichotomie énoncée au début de la première Section, dans cette thèse nous appelons « transfert indemnitaire » toutes les solutions de transfert de risque dont l'indemnité est basée uniquement sur la perte subie par l'acheteur de protection. De l'autre côté, nous appelons « transfert indiciel » toutes les solutions de transfert de risque dont l'indemnité est subordonnée, totalement ou partiellement, à la valeur prise par un indice censé refléter la perte.

L'assurance agricole est l'exemple phare de l'utilisation de ces formes de transfert indiciel. Bien qu'il existe des produits en Europe et en Amérique du Nord, le terrain le plus fertile pour le développement de ces formes de transfert est les pays émergents ou en voie de développement. En effet, l'utilisation de ces solutions de transfert indiciel est encouragée par les institutions internationales à l'image de la Banque Mondiale via le Mécanisme Mondial pour l'Assurance Indicielle (*Global Index Insurance Facility*, GIIF). Depuis 2009, ce programme s'emploie à fournir un accès au financement aux petits agriculteurs et aux micro-entrepreneurs à travers la conception de solutions de transfert indiciel. Selon les documents officiels du programme, l'accès à l'assurance offre un moyen aux personnes les plus vulnérables de réduire leurs difficultés financières, de préserver leurs sources de revenus et leur sécurité alimentaire, et de développer une capacité d'adaptation aux risques ultérieurs. Ces nouvelles formes d'assurance, véhicules d'une assurance résiliante (Greatrex *et al.* (2015), Jensen et Barrett (2017)) et garantes de la pénétration de l'assurance (Cummins et Weiss (2009), Mobarak et Rosenzweig (2013)) apparaissent comme un outil puissant dans l'accompagnement du développement de nombreux pays. Ainsi, le GIIF est à l'origine du développement de plus de 5.5 millions de contrats bénéficiant à plus de 27 millions d'individus dans plusieurs régions d'Afrique et d'Asie Centrale, mais aussi dans les Caraïbes, en Océanie et en Amérique du Sud.

Le Chapitre 3 porte une attention particulière au transfert indiciel. En effet, l'avantage principal d'une transaction indicielle est qu'elle évacue totalement l'asymétrie d'information entre le vendeur et l'acheteur de protection puisque l'indemnité ne dépend que de conditions indépendantes de la perte<sup>5</sup>. Par conséquent, l'avantage collatéral est de pouvoir utiliser la saisonnalité naturelle de certains phénomènes pour lisser son exposition mais aussi et surtout d'utiliser la corrélation négative issue de phénomènes naturels opposés dans le but de maximiser les bénéfices de la diversification. Déjà évoquée dans l'introduction, une assurance indicielle adossée à un phénomène El Niño (ou au risque de longévité) émise par un réassureur exposé à un risque correspondant à la manifestation de La Niña (ou exposé au risque de mortalité) constitue une couverture naturelle pour le réassureur. Alors, l'acceptation de cette couverture indicielle par l'acheteur de protection pose question puisque, comparée à une couverture indemnitaire, ce dernier ne va pas être couvert sur sa perte effectivement subie, mais plutôt par rapport aux paramètres reflétant l'intensité du phénomène naturel sous-jacent. Nous comprenons rapidement que ce type de transaction peut poser un problème majeur. Que se passe-t'il si l'acheteur de protection n'est en fait que très peu sensible à la manifestation d'El Niño ou n'est que très peu exposé au risque de longévité? Le Chapitre 3 détaillera l'impact de la différence entre l'indemnisation issue de la solution de transfert indiciel et la perte effectivement subie sur le choix du type de transfert : indiciel versus indemnitaire.

---

5. En nuanciant, la complexité de certains produits et/ou le manque d'éducation financière de certaines populations constituent des formes d'asymétrie d'information.

## I.2.2 Définition du risque de base

Le transfert indiciel fait partie intégrante de la palette d'outils de transfert de risque. Les modifications qu'il apporte sur le marché traditionnel en font un complément idéal alors que le changement de paradigme qu'il opère attire un nombre croissant d'acteurs originellement étrangers au risque assurantiel. Malgré cet enthousiasme, le transfert indiciel souffre d'un mal qui le caractérise : le risque de base. Alors que nous avons jusqu'à présent évoqué sa présence sans réellement nous pencher sur ce risque, il convient maintenant de le définir avec précision. Les Chapitres 1 et 2 sont basés sur sa mesure et sa quantification, dans différents contextes, et le Chapitre 3 le convoque en tant que facteur déterminant dans l'arbitrage entre le choix d'une transaction indicielle et une transaction indemnitaire.

Commençons par noter que nous parlerons uniquement du risque de base assurantiel en opposition au risque de base financier, dont la présentation est pour le moment volontairement omise pour des raisons de clarté. Nous le présentons succinctement à la Section III pour expliquer les motivations sous-jacentes à la méthode de quantification développée dans les Chapitres 1 et 2, mais le lecteur intéressé est renvoyé aux travaux de [Figlewski \(1984\)](#) pour une introduction pratique.

A l'aide du récent travail de [Clement \*et al.\* \(2018\)](#), nous identifions plusieurs définitions du risque de base dans la littérature dédiée à l'étude de la demande des solutions de transfert indiciel. [Giné \*et al.\* \(2007\)](#) le définissent comme étant la corrélation entre l'indemnisation issue de la solution de transfert et le risque assuré, ou plus largement, la corrélation entre l'indemnisation issue de la solution de transfert et la richesse du bénéficiaire de cette solution de transfert indiciel. Dans le même esprit, le risque de base est perçu via la corrélation entre les valeurs prises par l'indice et celles prises par la perte du bénéficiaire de la solution de transfert indiciel dans les études menées par [Awondo \*et al.\* \(2013\)](#), [Barnett \*et al.\* \(2005\)](#), [Deng \*et al.\* \(2007\)](#), [Heimfarth et Musshoff \(2011\)](#), [Mobarak et Rosenzweig \(2012\)](#), [Musshoff \*et al.\* \(2011\)](#), [Mobarak et Rosenzweig \(2012\)](#) et [Musshoff \*et al.\* \(2011\)](#). Ensuite [Elabed \*et al.\* \(2013\)](#), [Hill \*et al.\* \(2013\)](#) et [Karlan \*et al.\* \(2014\)](#) définissent le risque de base comme la probabilité que l'acheteur de protection paramétrique ne soit pas indemnisé alors qu'il a subi une perte. Enfin, [Castillo \*et al.\* \(2012\)](#), [Norton \*et al.\* \(2013\)](#), [Chantarat \*et al.\* \(2013\)](#), [Dercon \*et al.\* \(2014\)](#) ainsi que [Jensen \*et al.\* \(2016, 2018\)](#) appréhendent le risque de base comme la différence entre le montant de la perte subie et le montant versé par la structure assurantielle.

Dès lors, il apparaît que la définition du risque de base est à dissocier de la mesure utilisée pour le quantifier. Les méthodes de quantification seront abordées dans un second temps. Par conséquent, les définitions faisant intervenir les corrélations et les probabilités sont écartées et nous préférons celles introduisant le risque qu'il existe une différence entre le montant de la perte et le montant débloqué par

l'indice. En réalité, cette dernière approche correspond même à la définition du risque de base que nous adopterons dans cette thèse de doctorat. En effet, nous définissons, à la manière de [Ross et Williams \(2009\)](#), le risque de base comme *le risque qu'il existe une différence dans les paiements entre la perte subie et ceux issus d'un mécanisme de transfert de risque structuré pour se prémunir contre ces pertes*.

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que la norme [Solvency II Commission Delegated Regulation \(2015\)](#) définit le risque de base comme « le risque découlant de la situation dans laquelle l'exposition couverte par la technique d'atténuation du risque ne correspond à l'exposition au risque de l'entreprise d'assurance ou de réassurance ». Il en résulte que la définition que nous retenons est un cas particulier de risque de base, spécifique aux transferts indiciels. A cet égard, nous reviendrons sur l'appréhension normative du risque de base dans la Section III lorsque nous présenterons les motivations associées au développement d'une méthode de quantification du risque de base.

Grâce à cette définition, la raison pour laquelle il ne peut pas y avoir de risque de base dans la réassurance traditionnelle apparaît clairement : l'indemnisation issue de la structure de transfert de risque correspond à une observation de la perte, réduisant fatalement la différence à 0.

Cette différence est traitée de deux façons dans la thèse. D'abord, les Chapitres 1 et 2 l'appréhendent en tant que soustraction entre les pertes et les remboursements reçus pour y faire face. Dans le Chapitre 1, nous nous plaçons dans le cadre d'une obligation catastrophe et nous modélisons la perte comme une loi Beta-unimodale. Nous proposons ensuite une méthode de quantification de la différence entre la valeur prise par la perte et la valeur de l'indemnité issue de l'indice.

Dans le Chapitre 2, le cadre d'étude est radicalement modifié puisque nous modélisons directement la différence entre la perte et l'indemnité indicielle, toutes deux perçues comme des variables aléatoires. Motivé par les modèles de régressions notamment utilisés en assurance agricole et par la décomposition de la perte issue de la littérature sur le *background risk*, le chapitre étend la représentation des variables unimodales et symétriques de [Shepp \(1962\)](#). Il en résulte une classe malléable appelée les contractions aléatoires, qui permet de modéliser différentes configurations du risque de base. Dans les deux chapitres, la méthode de quantification du risque de base fait intervenir, comme le recommande les réglementations prudentielles assurantielles et bancaires, la génération de scénarios extrêmes, construits à partir de l'information disponible sur la variable considérée (l'exposition à la catastrophe naturelle dans le Chapitre 1, le facteur contractant dans le Chapitre 2). La dernière étape consiste en la mesure des conséquences du risque de base dans chacun des scénarios. Nous fournissons ainsi à l'acheteur de protection indicielle un outil de gestion du risque de base fondé sur son appétence au risque, qui lui permet de se fixer des limites pour le risque de base et de calculer le budget de risque de base dans chacun des scénarios.

Ensuite, la différence entre la perte subie et l'indemnité issue de la couverture indicielle est perçue en

tant que non égalité dans le Chapitre 3. Nous considérons d'un côté un transfert indiciel où l'indice ne reflète pas exactement la perte subie. De l'autre côté nous examinons un transfert indemnitaire souffrant d'asymétrie d'information. La finalité du chapitre est de comparer le rôle du risque de base et le rôle de l'asymétrie d'information dans le choix du type de transfert final. Nous montrons que pour une qualité d'indice donnée, l'asymétrie d'information est déterminante dans le choix du type de la transaction.

### I.2.3 Impact du risque de base

Vers la fin des années 1990, le constat concernant les formes de couvertures traditionnelles proposées pour l'agriculture est sans équivoque. Comme le montrent Hazell (1992) et Skees *et al.* (1999), ces formes souffrent de prix trop élevés, elles sont entachées par l'aléa moral et la sélection adverse et nécessitent l'intervention d'un expert pour attester de la perte.

En revanche, les avantages des transactions indicielles, comme le rappellent Clarke *et al.* (2012) sont nombreux. Elles évitent le processus d'évaluation des pertes, elles réduisent l'aléa moral et la sélection adverse, elles accélèrent l'indemnisation, réduisent les coûts administratifs et évitent toute ingérence politique. Par conséquent, cette forme de transfert a été présentée à ses débuts comme une alternative viable aux solutions existantes ; citons par exemple les travaux de Jensen et Barrett (2017), Barnett *et al.* (2008), Miranda et Farrin (2012), Hess et Hazell (2009) et Manuamorn (2007).

Pour appuyer cet enthousiasme flagrant, un bon nombre d'expériences et d'études de terrain ont été déployées dans les pays en voie de développement. Le but de ces études est de mesurer l'attirance des populations locales envers ces nouvelles formes d'assurance. Le constat qui en résulte est teinté d'une nuance plus sombre : la demande pour ces formes novatrices est en réalité, assez basse. Les études identifient les causes de cette faible demande et mettent tour à tour en avant le manque de sensibilisation à l'assurance et la finance (Mobarak et Rosenzweig (2012), Gaurav (2015), Cole *et al.* (2013) et Collier *et al.* (2009)), le manque de confiance (Giné et Yang (2009)), et des contraintes de crédit (Giné *et al.* (2007) et Binswanger-Mkhize (2012)).

En parallèle de ces raisons que nous pourrions imputer à des facteurs culturels, il en est une qui est de toute autre nature : le risque de base. En effet, les études ciblées de Hill *et al.* (2019), Jensen *et al.* (2018) et Karlan et Morduch (2009) montrent que l'explication prépondérante est l'incertitude associée à la couverture d'assurance en elle-même. Les travaux de terrain de Elabed *et al.* (2013) et Elabed et Carter (2013, 2014, 2015) abondent en ce sens : les potentiels acheteurs sont peu attirés par ces formes d'assurance à cause du risque de base.

Le marché des obligations catastrophe subit également les conséquences du risque de base. Alors que 54% des obligations catastrophe étaient à déclenchement paramétrique en 2003, ce type de déclenchement ne représente plus que 4.2% des émissions en 2019. Dans le même temps, la part des déclen-



chements indemnitaires est passée de 43% à 65%. Néanmoins, le raisonnement qui consiste à affirmer que cette modification de la tendance du marché n'est due qu'au risque de base est à nuancer, comme nous y invite la lecture de [Spry \(2009\)](#). En effet, l'auteur affirme que les investisseurs se sont en réalité accoutumés au risque indemnitaires assurantiel. La proportion importante d'émissions paramétriques - et donc l'acceptation d'un certain niveau de risque de base par les *sponsors* - se justifiait par une connaissance imparfaite du marché assurantiel de la part des investisseurs. Notons que [Dionne et al. \(2000\)](#) ont montré que les relations de long terme entre l'acheteur et l'émetteur de protection permettent de mettre en place des transferts performants, mais mènent à un verrouillage de l'information qui est au bénéfice des deux parties, tant qu'elles contractualisent ensemble. Dans le même esprit que [Spry \(2009\)](#), [Jean-Baptiste et Santomero \(2000\)](#) examinent l'effet de l'asymétrie d'information sur le transfert de risque, concluant que l'asymétrie influence à la fois le prix et le montant de protection acheté. Dès lors que le marché devient suffisamment mature et développé, l'asymétrie d'information entre les émetteurs et les investisseurs est largement réduite. Par conséquent, la part des émissions paramétriques sur le marché des obligations catastrophe n'est restreinte qu'à des cas où le risque de base est structurellement limité et le marché est dominé par des déclenchements indemnitaires. Cette asymétrie d'information entre les acteurs est l'objet d'étude du Chapitre 3 dans lequel nous parvenons à une conclusion similaire. Tant que l'asymétrie d'information est relativement faible, le marché est dominé par des transactions indemnitaires. En revanche, dès que l'asymétrie d'information est trop importante, le marché se tourne vers des solutions de transfert indiciel.

Ainsi s'achève la première section de l'introduction générale dédiée à la contextualisation du risque de base. En parallèle, nous avons dessiné les motivations associées à chaque chapitre. La mesure et la quantification du risque de base sont abordées dans les Chapitre 1 et 2 dans différents contextes à partir de la Beta-unimodalité et des contractions aléatoires. Le Chapitre 3 poursuit l'examen du rôle du risque de base et de l'asymétrie d'information dans le choix du type de transaction dans un cadre bilatéral de partage de risque. Enfin le Chapitre 4 propose un cas de partenariat optimal basé sur le taux de rétention de l'assureur, d'abord dans un contexte unilatéral puis étendu au cas bilatéral.

La suite de l'introduction générale est découpée en trois sections principales dédiées à la modélisation du risque de base (Section II), à sa mesure et à sa quantification (Section III) et sa gestion (Section IV). Dans chacune de ces sections, nous présentons nos motivations, nous rappelons - quand cela est nécessaire - les fondements théoriques utilisés et nous mettons en lumière la démarche adoptée et les résultats principaux des chapitres associés.

A cet égard, la section suivante présente la façon dont est modélisé le risque de base dans les Chapitres 1 et 2 et introduit les contributions associées aux variables Beta-unimodales puis aux contractions aléatoires.

## II. La modélisation du risque de base

Après avoir défini le risque de base et présenté son impact sur la demande de solutions de transfert indiciel, nous présentons la façon dont il intervient dans les deux premiers chapitres de la thèse.

Le Chapitre 1 traite de la quantification du risque de base issu d'une obligation catastrophe à déclenchement indiciel. En utilisant le cadre des modèles catastrophe, l'incertitude repose sur la modélisation de la perte, l'indice étant déterministe au sein de chaque scénario catastrophe. La perte est modélisée par un taux de destruction suivant une loi Beta venant gréver la valeur de l'exposition : nous introduisons alors la classe de lois Beta-unimodales.

La motivation du Chapitre 2 est fondée sur les enjeux liés à l'indice, qui constituent les sources du risque de base. A partir des méthodes de construction des indices, nous étendons la représentation des erreurs unimodales et symétriques en introduisant les contractions aléatoires, dont nous rappelons les propriétés.

### II.1 Les modèles catastrophe

Les problématiques liées à l'émission d'une obligation catastrophe et sa structuration ne sont pas abordées, ni dans ce qui va suivre, ni dans le corps du Chapitre 1. Le lecteur intéressé par ces questions peut se reporter au manuel de [Barrieu et Albertini \(2009\)](#).

L'approche adoptée dans le Chapitre 1 est basée sur l'utilisation d'un modèle catastrophe (modèle « cat »). D'après [Grossi et al. \(2005\)](#), ces modèles sont apparus suite à l'essor du marché des obligations catastrophe initié dans les années 1990, à la suite de l'ouragan Andrew. L'intensité de la perte liée à l'ouragan a remis en question l'approche actuarielle traditionnelle : se baser uniquement sur le passé pour prédire le futur n'apporte manifestement pas une réponse adéquate étant donné la rareté des phénomènes naturels catastrophiques. L'industrie s'est adaptée à ces nouveaux risques en fournissant des modèles de simulations de catastrophes naturelles. La science de la modélisation des catastrophes naturelles, du moins via le prisme actuariel, est basée sur deux principes fondamentaux : la compréhension de l'aléa induit par un phénomène naturel sur le portefeuille et la gestion de l'exposition du portefeuille à ce phénomène.

La compréhension de l'aléa atteint un niveau de complexité remarquable. Elle nécessite d'identifier les facteurs météorologiques impliqués dans l'apparition d'un ouragan, d'une tornade ou d'un séisme, et d'être capable de les modéliser de façon à « fabriquer » et faire évoluer dans l'espace la catastrophe.

La gestion de l'exposition du portefeuille requiert d'importantes connaissances sur le risque assuré. Au delà d'être capable de localiser précisément les objets assurés, il faut surtout être en mesure de transposer l'effet de la catastrophe en un montant financier. Par exemple, le coût de la destruction

d'un bâtiment dépendra des matériaux qui le constituent, de la date de construction ou encore de ce qu'il abrite. Aussi, le coût de la main d'oeuvre et des matériaux est variable en fonction du lieu d'occurrence de la catastrophe naturelle. La demande en matériaux de construction et en main d'oeuvre augmentant subitement suite au passage d'une catastrophe, le prix de reconstruction d'un bâtiment peut alors s'envoler.

Comme l'indiquent [Brookes \(2009\)](#) et [Ross et Williams \(2009\)](#), quels que soient les modèles météorologiques sous-jacents et les méthodes de quantification des catastrophes sur les objets assurés, les logiciels de simulation de catastrophes naturelles peuvent être divisés en quatre composantes appelées modules : aléa (*hazard*), inventaire (*inventory*), vulnérabilité (*vulnerability*) et financier (*financial*). Cette décomposition en quatre modules se retrouve par exemple dans les travaux de [Grossi et al. \(2005\)](#) et [Ewing \(2011\)](#).

### II.1.1 Le module aléa

Le premier module est celui où la catastrophe naturelle est simulée. Cela consiste en la génération de  $n \in \mathbb{N}$  scénarios catastrophes. Pour se référer à un scénario en particulier, nous dirons scénario  $i$ , où  $i = 1, \dots, n$ . Chaque scénario  $i$  contient des valeurs des indicateurs climatiques, menant à des conditions plus ou moins favorables pour la survenance d'une catastrophe naturelle. Par exemple, les indicateurs physiques dans le cadre d'un risque ouragan sont la vitesse du vent, la pression atmosphérique, le niveau des précipitations ou la température. Dans le cas d'un risque sismique, ils correspondent plutôt à la localisation de l'épicentre et à l'intensité des magnitudes. Au sein de chaque scénario  $i$ , nous avons accès à la température, à la vitesse du vent et au niveau des précipitations, et ces valeurs sont fixées pour chaque scénario : les indicateurs physiques sont déterministes sachant le scénario. Ce point est primordial dans l'approche développée dans le Chapitre 1, nous y reviendrons dans la présentation du module de financier. En revanche, chaque scénario  $i$  est affublé d'une probabilité d'occurrence, notée  $p_i$ .

[Ewing \(2011\)](#) et [Ross et Williams \(2009\)](#) préviennent que le module aléa est sujet à une incertitude non négligeable, introduite comme une incertitude épistémique. Selon [Daneshkhah \(2004\)](#), cette incertitude est due à un manque de connaissance sur le système modélisé, en opposition à l'incertitude aléatoire qui vient de l'aléa pur de la catastrophe. En termes actuariels, l'incertitude épistémique correspond au risque de modèle. Les sources de cette incertitude viennent des données, tant sur l'historique que sur la qualité et surtout du manque de compréhension du phénomène climatique ou géologique. Nous reviendrons sur les impacts de l'incertitude dans la section II.3.1.

### II.1.2 Le module inventaire

Ce module représente l'exposition de l'acheteur de protection au risque catastrophe considéré. L'exposition correspond à la valeur de remplacement du bien assuré. Chaque composante du portefeuille est classifiée en fonction de critères objectifs de façon à obtenir une valeur de remplacement, et de façon à saisir la sensibilité à l'aléa. Dans le cadre de bâtiments, les informations sont collectées sur la structure du toit, le type de logement, le type de matériaux utilisés, le nombre d'étages et l'âge (Grossi *et al.* (2005)). Dans la modélisation des catastrophes, on les appelle des modificateurs de bâtiment (*building modifiers*; Ewing (2011)). Si le bâtiment est assuré, la nature de la police d'assurance et les éventuels franchises et plafonds doivent aussi être renseignés.

La littérature s'accorde à dire que ce module souffre d'une incertitude loin d'être négligeable. Ewing (2011), Grossi (2005) et Brookes (2009) indiquent que la précision de la localisation pose problème. Par essence des risques considérés, les modèles catastrophe couvrent généralement un ou plusieurs pays, ou du moins des zones géographiques étendues. Le nombre de biens potentiellement assurables est énorme. Selon Ewing (2011), obtenir des informations sur les modificateurs de bâtiment pour l'ensemble du portefeuille serait extrêmement difficile (et non rentable). En pratique, les informations sur les propriétés sont collectées pour une zone d'étude « type » et les résultats sont extrapolés au niveau régional. Lors de cette extrapolation, il y a forcément de la perte d'information, résultant en une incertitude sur le niveau de vulnérabilité réelle du portefeuille comme le montrent Pinelli *et al.* (2011). Cette référence propose d'ailleurs une présentation très détaillée des enjeux associés au module inventaire d'un logiciel de modélisation de catastrophes naturelles. Enfin, Brookes (2009) soulève le problème de la granularité des données de localisation. Lorsque la seule information disponible est le code postal, alors le bâtiment est automatiquement placé au centre de gravité du département (ou de la zone considérée), qui peut être, par exemple, sur la terre ferme. L'exposition de ce bâtiment à un ouragan côtier est nulle, alors qu'il peut en réalité se trouver en front de mer. Ce problème est également soulevé par Hamid *et al.* (2011), qui se préoccupent du cas de la Floride.

Dans le cadre du Chapitre 1, cette discussion sur l'incertitude associée à la détermination de l'exposition nous amène à la conclusion suivante. En reprenant l'approche développée dans Pinelli *et al.* (2011), l'exposition est représentée par une variable aléatoire, notée  $Y_i$ , au sein de chaque scénario catastrophe  $i$ . Cette variable  $Y_i$  est non négative et bornée, au maximum par la valeur totale du portefeuille. Nous verrons dans le Chapitre 1 que les bornes du support de la variable  $Y_i$  peuvent être raffinées et que ces bornes sont propres à chaque scénario généré par le module aléa.

### II.1.3 Le module vulnérabilité

Cette composante du modèle transforme l'intensité du phénomène climatique en un coût financier. En repartant de la classification du portefeuille faite dans le module inventaire, le module vulnérabilité détermine dans quelle mesure les biens assurés vont être touchés par le phénomène catastrophique généré dans le module aléa. Les modificateurs de bâtiment interviennent dans ce module pour déterminer l'impact de la catastrophe. A titre d'illustration, une construction ancienne en bois et un bâtiment récent en béton armé ne réagiront pas de la même façon face à la même catastrophe.

Pour chaque scénario catastrophe  $i$ , le module vulnérabilité contient une fonction de destruction, qui prend en entrée les caractéristiques des bâtiments spécifiées dans le module inventaire et les indicateurs physiques issus du scénario généré dans le module aléa. A chaque scénario correspond donc un taux de destruction qui vient gréver la valeur de l'exposition. Ce taux de destruction souffre de l'incertitude associée à la composition des bâtiments et de l'incertitude associée à la trajectoire et à l'intensité de la catastrophe.

Cette double incertitude mène à représenter l'impact de la catastrophe sur le portefeuille par un taux de destruction aléatoire. Cette approche est adoptée entre autres, par [Sampson \*et al.\* \(2014\)](#), [Walker \(2011\)](#), [Cossette \*et al.\* \(2003\)](#) et [Dutang \*et al.\* \(2017\)](#). Elle consiste à dire que l'impact de la catastrophe sur le portefeuille est modélisé par une loi Beta dans chaque scénario  $i$ , notée  $S_i$ . Pour rappel, la loi Beta prend ses valeurs entre 0 et 1 et se caractérise par deux paramètres,  $\alpha_i$  et  $\beta_i$ . La présentation statistique de la loi est reléguée à la section II.2. Notons toutefois que l'indexation des paramètres de la loi permet de lier l'intensité de la destruction aux valeurs des indicateurs physiques générées par le module aléa. Finalement, la perte associée au scénario  $i$  correspond à la destruction du portefeuille : en notant  $X_i$  cette perte, nous obtenons  $X_i = S_i Y_i$ .

Dans la suite, nous supposons que  $S_i$  et  $Y_i$  sont indépendantes. A l'échelle du scénario, le taux de destruction est indépendant de l'exposition qu'il impacte. En revanche, à l'échelle globale, le taux de destruction n'est pas nécessairement indépendant de l'exposition globale. Aussi, la construction du modèle permet de lier l'intensité de la catastrophe aux paramètres des lois du taux de destruction et de l'exposition. Par exemple, dans le cadre d'un ouragan, les paramètres de la loi Beta représentant le taux de destruction sont construits comme des fonctions de la vitesse du vent, du niveau des précipitations et de tous les indicateurs physiques retenus dans le module aléa. De la même manière, l'exposition est simulée en fonction de la trajectoire de la tempête. Il existe donc un lien entre niveau de l'exposition et intensité de la destruction. A cet égard, les scénarios utilisés et donnés en Annexes du Chapitre 1 proposent une majorité de cas où le taux de destruction est lié à l'exposition de façon à ce que des événements de grande ampleur puissent être reliés à des expositions conséquentes.

Il en résulte donc une perte  $X_i$  construite par la multiplication de deux variables aléatoires indépen-

dantes, dont l'une suit une loi Beta. En termes probabilistes, la perte issue du module vulnérabilité est une variable aléatoire Beta-unimodale. Les propriétés de ces variables sont à la base de la méthode développée dans le Chapitre 1. En particulier, l'hypothèse d'indépendance permet une décomposition de la perte utile à la quantification de l'incertitude issue de la modélisation ; nous y reviendrons dans la section III.2.

#### II.1.4 Le module financier

Le dernier module constituant le modèle catastrophe est celui qui donne le montant de la perte finale, en tenant compte de la structure de couverture. C'est ici qu'intervient l'indemnisation issue de l'obligation catastrophe. Nous l'avons présenté dans la section I.2.1 et rappelé au début de la Section II, nous ne traitons dans le Chapitre 1 que du cas d'une obligation catastrophe à déclenchement indiciel.

Jusqu'à présent, la valeur des indicateurs physiques dans les différents scénarios générés dans le module aléa n'ont été impliqués que du côté de la modélisation de la perte. Dans ce module, ils sont associés à la modélisation de l'indemnité. Dans le cadre d'une obligation catastrophe à déclenchement indiciel, l'indemnité est adossée aux valeurs prises par un indice censé refléter la perte. Cet indice est justement construit à partir des indicateurs physiques sélectionnés dans le module aléa. Nous nous pencherons sur les enjeux propres de la constitution des indices dans la section II.3. Pour le moment considérons que l'indice est construit comme une fonction de ces indicateurs. A chaque scénario  $i$  correspond un jeu de valeurs pour chaque indicateur physique : la valeur de l'indice, notée  $c_i$ , est donc déterministe dans chaque scénario. La probabilité d'occurrence  $p_i$  du scénario  $i$  conditionne la distribution des valeurs de l'indice. Il faut donc générer un grand nombre de scénarios dans le module aléa pour pouvoir représenter un éventail de situations climatiques suffisamment large pour contenir des situations de catastrophes naturelles.

La finalité du modèle catastrophe est de fournir différentes quantités comme la probabilité que la perte franchisse le seuil minimal de la tranche (*exceedance probability*), la probabilité de dépasser le seuil maximal de la tranche (*probability of exhaustion*) ou encore la perte moyenne dans la tranche.

Le risque de base, défini comme la différence entre la perte et le montant de l'indemnité issue de la couverture indicielle, correspond donc à la différence entre  $X_i$  et  $c_i$ , dans chaque scénario. L'enjeu du Chapitre 1 est de proposer une méthode de quantification de l'impact de la différence en prenant en compte l'incertitude associée à la modélisation de la perte et en particulier de l'exposition. Pour cela, il fait intervenir des fonctions dites de pénalité introduites dans la section III.1.1. En notant  $\phi$  une de

ces fonctions, le Chapitre 1 se concentre sur la quantification de la quantité suivante :

$$\sum_{i=1}^n p_i \mathbb{E}[\phi(S_i Y_i^{(s)} - c_i)], \quad (2)$$

en reprenant les notations introduites dans chaque module, et où  $Y_i^{(s)}$  correspond à la distribution extrême d'ordre  $s$  de  $Y_i$ , développée dans la section III.3.2. Ces distributions extrêmes sont à la base de la prise en compte de l'incertitude associée à l'exposition dans la quantification du risque de base.

La section suivante introduit formellement les variables Beta-unimodales qui apparaissent de façon naturelle dans le module vulnérabilité. Dans le cadre du Chapitre 1, la variable de la perte est fabriquée comme la multiplication d'une variable distribuée suivant une loi Beta avec une autre variable indépendante. Dans le Chapitre 2, nous élargissons la forme Beta-unimodale en une classe plus large : celle des contractions aléatoires. L'obtention de contractions aléatoires découle de la décomposition des variables unimodales et symétriques due à [Shepp \(1962\)](#). La multiplication de deux variables indépendantes est à la base de la méthode de quantification du risque de base décrite dans la Section III de l'introduction et développée dans les Chapitres 1 et 2. Le Chapitre 4 considère un cas de multiplication de variables non-indépendantes à travers le taux de rétention déjà succinctement introduit dans la section I.1.1, et qui est plus longuement abordé dans la Section IV.

## II.2 Les distributions Beta-unimodales

Jusqu'à présent la Beta-unimodalité a été introduite comme la multiplication d'une variable aléatoire positive avec une variable aléatoire distribuée selon une loi Beta et indépendante de la première. Pour rappel, la fonction de densité de loi Beta, notée  $f_S$ , est

$$f_S(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\mathcal{B}(\alpha, \beta)}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres positifs de forme. Le dénominateur correspond à la fonction Beta, c'est-à-dire  $\mathcal{B}(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha + \beta)$  où  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ . Dans la suite nous noterons  $S \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$  lorsque la variable aléatoire  $S$  est distribuée selon une loi Beta de paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ . En fonction des valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , la densité est concentrée plutôt vers les faibles valeurs (cas où  $\alpha \leq \beta$ ) ou plutôt vers les grandes valeurs (cas où  $\beta \leq \alpha$ ). Lorsque  $\alpha = \beta$ , alors la densité est symétrique autour de  $1/2$ . Cette malléabilité de la loi Beta justifie son utilisation en tant que distribution du taux de destruction dans les modèles catastrophe. La paramétrisation de la loi permet de refléter l'intensité de la catastrophe. Le caractère "Beta" est alors explicite, et il ne reste qu'à présenter l'unimodalité.

D'un point de vue statistique, le mode se définit comme la valeur la plus représentée dans un échantillon. Lorsqu'une variable aléatoire générique  $A$  admet une fonction de répartition alors elle est dite unimodale en  $a$  si elle vérifie la définition suivante.

**Définition 1.** (*Khintchine (1938)*) Une variable aléatoire  $A$  ou sa fonction de répartition  $F_A$  est dite unimodale en  $a$  si  $F_A$  est convexe pour  $x < a$  et concave pour  $x > a$ .

Dans le cas des variables Beta-unimodales, le sens de « unimodal » n'est pas exactement celui de la Définition 1, mais correspond plutôt au sens de [Khintchine \(1938\)](#). En réalité, une variable Beta-unimodale n'est pas forcément unimodale au sens de la Définition 1 ; il suffit par exemple de multiplier une loi Beta(0.6, 0.3) avec une loi Gamma de paramètres 5 et 5 pour s'en convaincre.

### II.2.1 Une extension de l'unimodalité

Dans son article initial, [Khintchine \(1938\)](#) s'intéresse aux variables unimodales au sens de la Définition 1. En particulier, l'auteur démontre qu'une variable  $X$  est unimodale (en 0) au sens de la Définition 1 si et seulement si il existe une variable  $U$  uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$  et une variable  $Y$ , indépendante de  $U$ , telles que  $X =_d U \times Y$ . En remarquant qu'une variable uniforme sur  $[0, 1]$  n'est rien d'autre qu'une loi Beta(1, 1), alors la décomposition de [Khintchine \(1938\)](#) mène à la définition de la Beta-unimodalité.

**Définition 2.** (*Définition 1.2.1 du Chapitre 1*) Une variable aléatoire définie sur  $\mathbb{R}_+$  est dite Beta-unimodale si elle peut s'écrire sous la forme

$$X =_d SY,$$

où  $Y$  est une variable continue positive, et  $S$  est un facteur contractant distribué selon une loi Beta et indépendant de  $Y$ .

L'intérêt probabiliste de la Beta-unimodalité est qu'elle englobe les formes d'unimodalité (au sens de la décomposition en une multiplication de deux variables aléatoires indépendantes) classiques de la littérature.

La Beta-unimodalité pour  $\alpha = \beta = 1$  correspond à l'unimodalité de [Khintchine \(1938\)](#).

Les distributions  $\beta$ -monotones introduites par [Williamson \(1956\)](#) et utilisées dans différents contextes de probabilité appliquée par [McNeil et Nešlehová \(2009\)](#) et [Lefèvre et Loisel \(2013\)](#) sont obtenues quand  $\alpha = 1$ .

Lorsque  $\beta = 1$ , nous obtenons les distributions  $\alpha$ -unimodales discutées par [Olshen et Savage \(1970\)](#) et mises en oeuvre dans un contexte proche de celui du Chapitre 1 dans [Brockett et al. \(2016\)](#).



Le Chapitre 1 présente la littérature associée à ces formes particulières, mais notons tout de même que la Beta-unimodalité est traitée en détail dans le livre de Bertin *et al.* (2013), et des propriétés supplémentaires sont disponibles dans les articles de Pakes et Navarro (2007), Hashorva (2013), et Hashorva et Pakes (2010).

Les relations impliquant un facteur contractant ont trouvé un écho particulier dans la littérature actuarielle. Elles représentent les effets d'un environnement économique (Galambos et Simonelli (2004), Tang et Tsitsiashvili (2004), Asimit *et al.* (2016)), la présence d'un risque systémique (Côté et Genest (2019)) ou une dépendance de la taille des sinistres (Hashorva (2003), Hashorva et Ji (2014)).

## II.2.2 Les résultats principaux

Nous le verrons dans la section III.2.2, la méthode développée dans le Chapitre 1, puis généralisée au Chapitre 2, fait intervenir les moments des variables considérées. Dans le cadre des lois Beta-unimodales, l'obtention des moments est directe grâce à l'indépendance entre  $S$  et  $Y$ . Si il existe, le moment d'ordre  $k \in \mathbb{N}^*$  d'une variable Beta-unimodale est donné par

$$\mathbb{E}[X^k] = \left( \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha + j}{\alpha + \beta + j} \right) \mathbb{E}[Y^k].$$

Dans le Chapitre 1, la Beta-unimodalité de la perte issue d'une catastrophe naturelle découle de la modélisation : l'exposition à la catastrophe naturelle est supposée aléatoire et l'intensité de la catastrophe est représentée par un taux de destruction aléatoire, distribué selon une loi Beta. La question « la variable observée est-elle Beta-unimodale ? » n'est pas traitée dans la thèse. En revanche, nous soulevons ici la difficulté d'y apporter une réponse au détour des rappels des propriétés vérifiées par les distributions Beta-unimodales. Ces propriétés sont par exemple démontrées par Pakes et Navarro (2007), et le Chapitre 1 rappelle ces démonstrations puisqu'elles permettent d'acquérir la gymnastique nécessaire à l'utilisation des lois Beta, et par extension Beta-unimodales. L'exemple flagrant est la preuve de la Proposition 1.3.3 du Chapitre 1, qui apporte une caractérisation des ordres convexes de degrés supérieurs dans le cas des variables Beta-unimodales. En fonction de l'information disponible, le caractère Beta-unimodal d'une variable permet d'obtenir la loi de  $X$  à partir de celle de  $Y$ , ou alors d'observer  $X$ , et d'en déduire la loi de  $Y$ . Dans ce qui suit,  $\bar{F}_X$  correspond à la fonction de survie de la variable  $X$ .

**Proposition 1.** (*Pakes et Navarro (2007); Proposition 1.2.1 du Chapitre 1*) *Si  $X$  est Beta-unimodale avec  $X = SY$ , alors  $\bar{F}_X$  est donnée par*

$$\bar{F}_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha (I_\beta \phi_Y)(x),$$

où la fonction  $\phi_Y$  dépend de  $\bar{F}_Y$  puisque  $\phi_Y(t) = \bar{F}_Y(t)t^{-\alpha-\beta}$  et la fonction  $I_\beta\phi_Y$  est définie comme

$$(I_\beta\phi_Y)(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_x^\infty (t-x)^{\beta-1} \phi_Y(t) dt.$$

La fonction  $I_\beta\phi_Y$  correspond à l'intégrale fractionnaire de Weyl de la fonction  $\phi_Y$ . Le calcul intégral de Weyl n'est utilisé que comme un outil dans la thèse. Le lecteur intéressé par une présentation détaillée de cette technique peut se reporter aux livres de [Miller et Ross \(1993\)](#) et [Debnath et Bhatta \(2006\)](#). La Proposition 1 correspond au cas du Chapitre 1, où nous utilisons la connaissance des lois de  $Y$  et de  $S$  pour en déduire celle de  $X$ . L'inverse marche aussi : déterminer la loi de  $Y$  en connaissant celle  $X$ , et nous obtenons le résultat suivant.

**Proposition 2.** (*Pakes et Navarro (2007)*; Proposition 1.2.2 du Chapitre 1) Si  $X$  est Beta-unimodale avec  $X =_d SY$ , alors  $\bar{F}_Y$  est donnée par

$$\bar{F}_Y(x) = (-1)^n x^{\alpha+\beta} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (I_\delta D^n \psi_X)(x), \quad (3)$$

où la fonction  $\psi_X$  dépend de  $\bar{F}_X$  puisque  $\psi_X(t) = \bar{F}_X(t)t^{-\alpha}$ , où  $D^n$  est l'opérateur de la dérivée à l'ordre  $n$ ,  $n$  étant le plus petit entier  $\geq \beta$ , et enfin où  $\delta = n - \beta \in [0, 1)$ .

En pratique, ces liens entre  $X$  et  $Y$  permettent d'obtenir la version « Beta-unimodalisée » du risque  $Y$ , ou alors de récupérer la distribution du  $Y$  caché dans  $X$ . Nous remarquons que l'obtention de la loi de  $Y$  est conditionnée aux valeurs de paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  de la loi Beta. Dès lors, caractériser la Beta-unimodalité supposerait de pouvoir identifier ces paramètres. La difficulté réside dans le constat suivant : pour un  $X$  Beta-unimodal donné, les valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  ne sont pas uniques. Ce constat repose sur la propriété de décomposition des lois Beta (et non Beta-unimodales) présentée dans le papier de [Hashorva \(2013\)](#). En effet, lorsque  $S_1 \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$  est indépendante de  $S_2 \sim \text{Beta}(\lambda, \gamma)$  avec  $\lambda = \alpha + \beta$ , alors

$$S_1 S_2 =_d S_3, \quad (4)$$

où  $S_3 \sim \text{Beta}(\alpha, \beta + \gamma)$ . Autrement dit, toute variable suivant une loi Beta est décomposable en deux variables indépendantes, elles-mêmes distribuées selon une loi Beta. Lorsque la variable est unimodale au sens de la Définition 1, alors elle est automatiquement Beta-unimodale par la décomposition de [Khintchine \(1938\)](#) et l'Equation (4). Un autre exemple de variable Beta-unimodale est donné dans [Galambos et Simonelli \(2004\)](#) : si  $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ , alors

$$X =_d SY,$$

directement avec  $Y \sim \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$  et  $S \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ ,  $S$  étant indépendante de  $Y$ . Autrement dit, la loi Gamma est Beta-unimodale.

Dans le Chapitre 1, l'influence du taux de destruction sur l'exposition conduit naturellement à s'intéresser à des pertes Beta-unimodales. L'approche développée dans le Chapitre 1 se base sur la Beta-unimodalité de la perte en tant que décomposition pour en extraire le maximum d'information. En d'autres termes, l'obtention des distributions de  $X$  et de  $Y$ , bien qu'elle constitue un résultat propre aux lois Beta-unimodales, ne constitue pas une contribution de la thèse. La contribution de la thèse associée aux lois Beta-unimodales réside dans la détermination des distributions extrêmes issues des ordres convexes de degrés supérieurs. L'hypothèse nécessaire à l'obtention de ces distributions est l'indépendance entre le facteur contractant et la variable  $Y$ . En conséquence, la méthode proposée au Chapitre 1 s'étend à tous les cas où  $S$  est positif et borné.

### II.2.3 Une possible extension

La littérature sur le taux de destruction propose d'élargir la loi Beta classique en considérant les lois Beta avec excès de 0 (*0-inflated Beta*), avec excès de 1 (*1-inflated Beta*) et avec excès de 0 et de 1 (*01-inflated Beta*); citons par exemple [Sampson et al. \(2014\)](#) et [Dutang et al. \(2017\)](#). Dans un tout autre contexte, ces lois se retrouvent dans la littérature sur la modélisation des défauts des paiements dans le cadre de la représentation du taux de recouvrement. Du point de vue du créancier, ce taux correspond à la proportion aléatoire du montant initial récupérée après défaut du débiteur. Le lecteur est renvoyé vers les travaux de [Bruche et González-Aguado \(2010\)](#), de [Altman et al. \(2004\)](#) qui proposent une revue de l'utilisation du taux de recouvrement ou vers la thèse de [Oliveira \(2016\)](#). Aussi, les travaux de [Ospina et Ferrari \(2010, 2012\)](#) montrent la pertinence de l'utilisation des lois Beta avec excès de 0, de 1 et de 01.

L'intuition naturelle derrière ces lois est d'utiliser un mélange de deux distributions : une loi Beta et une loi dégénérée sur 0 et/ou 1. Dans le cas où la masse en 0 est augmentée (0-inflated Beta), alors cela signifie que la catastrophe est inoffensive dans la plupart des scénarios. À l'inverse, augmenter la masse en 1 (1-inflated Beta) revient à augmenter la probabilité que la catastrophe détruise l'intégralité du portefeuille exposé.

Formellement, ces lois sont fabriquées de la façon suivante. Notons  $B$  une variable suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $1 - p$ , et considérons  $S \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ , indépendante de  $B$ . Alors la loi 0-inflated Beta, notée  $S_0$ , et la loi 1-inflated Beta, notée  $S_1$  sont données par

$$S_0 = BS \quad \text{et} \quad S_1 = 1 - B + BS.$$

Ainsi,  $\mathbb{P}(S_0 = 0) = p = \mathbb{P}(S_1 = 1)$ . Les moments des lois 0-inflated Beta et 1-inflated Beta s'obtiennent directement par

$$\mathbb{E}[S_0^k] = (1 - p)\mathbb{E}[S^k] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[S_1^k] = (1 - p)\mathbb{E}[S^k] + p, \quad k \in \mathbb{N}.$$

La loi 01-inflated Beta est construite à l'aide de deux variables distribuées selon des lois de Bernoulli, indépendantes entre elles et de  $S$  que nous notons  $B_0$  et  $B_1$ .  $B_0$  suit une loi de Bernoulli de paramètre

$1 - p_0$  ;  $B_1$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p_1$ . Alors la loi 01-inflated Beta, notée  $S_{01}$  est donnée par

$$S_{01} = B_0 S + B_1(1 - B_0).$$

Dans ce cas  $\mathbb{P}(S_{01} = 0) = p_0(1 - p_1)$  et  $\mathbb{P}(S_{01} = 1) = p_0 p_1$ . Les moments s'obtiennent également directement grâce à l'indépendance,

$$\mathbb{E}[S_{01}^k] = (1 - p_0)\mathbb{E}[S^k] + p_0 p_1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

La méthode développée dans le Chapitre 1 peut directement être adaptée à ces lois Beta modifiées. Nous verrons dans la suite que l'hypothèse fondamentale sur laquelle est basée la méthode du Chapitre 1, généralisée dans le Chapitre 2, repose sur l'indépendance entre le facteur contractant  $S$  et le facteur contracté  $Y$ , et pas directement sur la loi de chacune des deux variables.

### II.3 L'indice : source du risque de base

Jusqu'à présent, l'indice a été présenté comme l'élément responsable du déclenchement de l'indemnisation dans une solution de transfert indiciel. Par définition du risque de base, l'indice est entièrement responsable de sa présence. Si l'indice était parfait, alors il refléterait exactement la perte, et la différence entre perte subie et l'indemnité reçue serait réduite à néant. Autrement dit, un indice parfait correspond à une transaction indemnitaire. Pour les raisons évoquées lors de la présentation du modèle catastrophe, il existe une incertitude sur l'exposition du portefeuille et une incertitude sur la modélisation des indicateurs physiques. Les incertitudes associées à l'indice mènent inexorablement à la présence d'un risque de base. Il est temps maintenant de détailler les sources du risque de base associées au processus de construction de l'indice.

#### II.3.1 Taxonomie des sources du risque de base

Chaque source d'erreur dans la constitution de l'indice mène à un type de risque de base. En reprenant la taxonomie issue des travaux de [Dalhaus et Finger \(2016\)](#), nous pouvons isoler trois types d'erreur, et donc trois types de risque de base. D'abord, le risque de base peut être temporel, venant de l'erreur dans l'isolation des phénomènes météorologiques impliqués dans la genèse de la sinistralité. Ensuite, le risque de base peut être spatial, correspondant à une erreur dans la source des données. Enfin, le risque de base peut être issu de la modélisation en elle-même ; nous parlerons alors de risque de base de conception (*design basis risk*). Ces erreurs sont toutes dues à l'incertitude présente dans les modules du modèle de catastrophes naturelles. Nous allons voir qu'elles sont en réalité inhérentes à la constitution d'un indice.

Comme le notent [Vroege et al. \(2019\)](#), le risque de base temporel se décompose en deux types. Il peut correspondre à une mauvaise agrégation temporelle des observations, par exemple lorsque les données

sont disponibles mensuellement alors que la vulnérabilité des cultures est plutôt liée à des temps plus courts. Ce cas est traité dans [Conradt et al. \(2015\)](#) et [Dalhaus et al. \(2018\)](#). Le deuxième cas de risque de base temporel survient lorsque la phénologie<sup>6</sup> est erronée. En pratique, cela correspond à une erreur dans la temporalité de la mesure en elle-même : la mesure n'est pas prise au bon moment. Dans le cas des obligations catastrophe, ce type de risque de base correspondrait à ne pas regarder la bonne fenêtre temporelle pour la prédiction d'un ouragan. La réduction du risque de base temporel présuppose une connaissance fine de la genèse des phénomènes catastrophiques.

La description du risque de base spatial a reçu une attention particulière dans les récentes analyses de [Gayathri \(2014\)](#), [Vroege et al. \(2019\)](#), [Gaurav et Chaudhary \(2020\)](#). D'une façon générale, le risque de base spatial, aussi appelé risque de base géographique dans [Woodard et Garcia \(2008a\)](#), correspond au cas où les mesures constituant l'indice ne sont pas prises à l'endroit de l'objet assuré. Cela se produit lorsque les indices sont basés sur des mesures de stations météorologiques distantes. Nous verrons dans la section suivante comment les risques de base spatial et temporel détériorent la qualité de l'indice. Le risque de base spatial est particulièrement présent dans les régions en voie de développement, où la densité des moyens de mesure est faible. Plus largement, le risque de base spatial apparaît dès lors qu'il n'existe pas de données météorologiques locales, et à l'échelle de l'objet assuré. Il existe des techniques d'interpolation entre les différentes stations météorologiques qui permettent, en quelque sorte, de « rapprocher » la mesure de l'objet assuré. Ces techniques sont par exemple développées dans les travaux de [Heimfarth et Musshoff \(2011\)](#), [Norton et al. \(2015\)](#) et très récemment, de [Boyd et al. \(2019\)](#).

Enfin, le risque de base de conception est décrit par [Ross et Williams \(2009\)](#) et [Vroege et al. \(2019\)](#). Il est défini comme le fait que l'indice retenu n'est pas une bonne approximation des sources sous-jacentes à la variabilité de la perte.

La réduction des sources du risque de base est donc un facteur d'amélioration de la qualité des indices. Plus la mesure est continue, plus il est aisé de choisir la période de mesure la plus pertinente. Grâce à l'amélioration de la résolution et à des indices spécifiques comme le NDVI<sup>7</sup>, l'imagerie satellite est devenue un moyen prometteur de réduire le risque de base temporel, puisqu'elle permet de capter les phénomènes biologiques propres à la culture considérée. Cet argument est notamment avancé par [Dalhaus et Finger \(2016\)](#), [Dalhaus et al. \(2018\)](#), [Biffis et Chavez \(2017\)](#), [Li et al. \(2019\)](#) ou [Piette \(2019\)](#). En France, il existe par exemple une assurance indicielle sur les prairies, l'Assurance des Prai-

---

6. La phénologie est l'étude de l'apparition d'événements périodiques dans le monde vivant, déterminée par les variations saisonnières du climat.

7. Normalized Difference Vegetation Index : c'est un indicateur graphique permettant d'évaluer le niveau de vert dans la végétation.

ries, qui utilise l'imagerie satellite pour mesurer l'ampleur des dégâts et déclencher, le cas échéant, une indemnisation ; Roumigué *et al.* (2015). Aussi, il existe une problématique d'échelle et de granularité, soulevée par Woodard et Garcia (2008b) et Gornott et Wechsung (2016). De Leeuw *et al.* (2014) et Leblois et Quirion (2013) proposent deux excellentes revues traitant du potentiel des nouvelles sources de données dans le développement de l'assurance paramétrique.

D'un autre côté, la compréhension des phénomènes sous-jacents constitue un vecteur d'amélioration des indices et de réduction du risque de base. L'importance de la phénologie est mise en avant par Conradt *et al.* (2015). A plus grande échelle, l'amélioration de la compréhension des phénomènes dits El Niño et La Niña permet de créer des solutions d'assurance paramétrique basées sur le modèle climatique ENSO<sup>8</sup> à l'image des travaux de Khalil *et al.* (2007), Nadolnyak et Vedenov (2013) ou Morana et Sbrana (2019) pour une contribution plus récente. A titre d'exemple, il existe un projet européen, ReNovRisk, qui a pour objectif de développer et d'adapter les observations et les outils numériques de modélisation des aléas associés aux cyclones tropicaux (vent, houle, submersion marine, crues, inondations, érosion et glissement de terrain de grande ampleur) à l'échelle de la Réunion et de la zone océan Indien. En plus des satellites et autres stations météorologiques, ReNovRisk s'est associé au centre de soins de Kelonia et teste un système mobile de mesures inédit : des balises GPS directement installées sur les carapaces de tortues marines.

Même dans le meilleur des cas, il existera une différence entre la perte et la valeur de l'indemnité déclenchée par l'indice, ne serait-ce parce que l'exposition de l'acheteur de protection est modifiée entre le moment de la souscription et le moment de la survenance. Cette problématique est mentionnée comme un risque de base dynamique par Ross et Williams (2009).

### II.3.2 Le risque de base résulte de l'indice

En pratique, la qualité de l'indice découle d'un arbitrage sur le prix, qu'il convient de prendre en compte. Plus l'indice est précis et nécessite des méthodes de mesure complexes, plus le prix de la couverture indiciaire est élevé. Généralement, le choix de l'indice se fait après analyse du rôle des indicateurs physiques dans la sinistralité. La disponibilité et la qualité des données sont également des facteurs clivants. Il existe des indices classiques, dont l'utilisation est largement répandue. Nous pouvons citer

---

8. El Niño - Southern Oscillations est un modèle climatique récurrent impliquant des changements de température des eaux dans le centre et l'est de l'océan Pacifique tropical. Sur des périodes allant de trois à sept ans environ, les eaux de surface d'une grande partie de l'océan Pacifique tropical se réchauffent ou se refroidissent de 1°C à 3°C par rapport à la normale. Ce modèle oscillant de réchauffement et de refroidissement affecte directement la distribution des précipitations dans les tropiques et peut avoir une forte influence sur les conditions météorologiques aux États-Unis et dans d'autres régions du monde. Le livre de Glantz (2001) présente les impacts du phénomène sur le climat et la société.

les indices basés sur les précipitations qui comparent les intensités d’une sécheresse, à l’image du SPI<sup>9</sup> introduit dans McKee *et al.* (1993) et sa variante SPEI<sup>10</sup> développée par Vicente-Serrano *et al.* (2010). Dans le cadre des catastrophes naturelles, il existe également des indices spécifiques, comme le *Carvill Hurricane Index*, qui est basé sur la vitesse maximale du vent, sur le *Radius to Maximum Winds*<sup>11</sup> et sur la région impactée; Brookes (2009).

En parallèle et en particulier pour l’assurance indiciaire agricole, la littérature s’est concentrée sur la mise en place d’indices plus précis grâce à l’évolution des sources de données et à l’évolution de la phénologie. Gornott et Wechsung (2016) examinent le rôle de la radiation solaire, des précipitations et de l’évapotranspiration sur la croissance de plants de maïs. Li *et al.* (2019) proposent d’utiliser un indice hybride formé d’indicateurs classiques comme le *Vapor Pressure Deficit*<sup>12</sup>, la température moyenne de l’air, le niveau des précipitations, et d’indicateurs issus de l’imagerie satellite comme l’*Enhanced Vegetation Index*<sup>13</sup> et la température du sol.

D’ailleurs, Li *et al.* (2019) donnent une représentation pédagogique de l’indice, qui nous sert d’illustration dans cette introduction. En se replaçant dans le contexte du modèle catastrophe et notant  $c_i$  la valeur de l’indice dans le scénario  $i$ , alors

$$c_i = f(\text{variables phénologiques}_i) + g(\text{imagerie satellite}_i),$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions d’ajustement qui lient les variables phénologiques et les variables issues des images satellites à la perte observée. Au sein de chaque scénario  $i$ , l’indice prend la valeur  $c_i$  avec probabilité  $p_i$ . De façon plus générale, comme la perte, l’indemnité issue de l’indice peut être modélisée par une variable aléatoire que nous notons  $Z$  dans la suite de cette introduction. Le risque de base correspond à la différence entre la perte aléatoire et l’indemnité aléatoire issue de la structure de transfert indicial. Nous attirons l’attention du lecteur sur la notation : à partir de maintenant, la perte de l’assureur est notée  $L$  tandis que la notation  $X$  est réservée aux formes multiplicatives. Dans ce qui suit,  $X$  correspond au risque de base. Dans le cas d’un indice parfait,  $Z = L$ . Dans le cas d’un indice idéal, comme celui proposé par Gornott et Wechsung (2016), la différence entre l’indemnité issue de l’indice  $Z$  et la perte subie  $L$  est distribuée selon une loi normale centrée et de variance faible. Dans

---

9. Standard Precipitation Indices : en fonction de l’historique de précipitations considéré, il reflète l’humidité du sol (1 mois), les tendances de précipitations (6 à 9 mois) ou les débits des cours d’eau et le niveau des réserves des nappes phréatiques (12 mois).

10. Standardised Precipitation-Evapotranspiration Index : il est semblable au SPI mais tient compte en plus de la température.

11. Cela correspond à la distance entre le centre d’un cyclone (l’oeil) et la localisation des vents maximums du cyclone.

12. Le *Vapor Pressure Deficit* correspond à la différence entre la quantité d’humidité dans l’air et la quantité d’humidité que l’air peut contenir lorsqu’il est saturé. Une fois l’air saturé, l’eau se condensera pour former une pellicule d’eau sur les cultures, à l’image de la rosée. Ce cas, correspondant à un VPD faible, favorise la pourriture de la plantation, qui « étouffe » sous la pellicule d’eau. Dans le cas d’un VPD élevé, l’air est très sec, augmentant les besoins en eau des cultures.

13. L’EVI est une version améliorée du NDVI qui permet de prendre en compte la physiologie de la culture.

ce cas, le risque de base  $L - Z$  peut être représenté par la multiplication de deux variables aléatoires indépendantes. En effet, Shepp (1962) démontre qu’une variable aléatoire  $X$  est unimodale et symétrique par rapport à 0 si et seulement si  $X = U_1 Y$ , où  $U_1$  est uniformément distribuée sur  $(-1, 1)$  et  $Y$  est une variable aléatoire positive et indépendante de  $U_1$ . Cette forme parfaite n’est pas forcément réaliste, et une généralisation de cette forme multiplicative  $U_1 Y$  serait souhaitable.

De façon plus générale, le risque de base apparaît dès lors que la perte ne dépend pas que de facteurs climatiques. Par exemple, dans le cadre de risque catastrophe, le coût associé à l’augmentation de la demande en matériaux de construction et de la main d’oeuvre apporte une variabilité supplémentaire difficilement quantifiable par l’indice. Ce phénomène est appelé l’amplification de la perte (*loss amplification*) et est décrit notamment par Ross et Williams (2009). En revanche l’indice prend en compte le coût moyen de ce risque dans sa composition. Il est donc raisonnable d’avoir un indice tel que  $\mathbb{E}[L] = \mathbb{E}[Z]$ . L’amplification de la perte peut alors être sous ou sur-estimée par l’indice. Cette variabilité supplémentaire, non représentée dans l’indice climatique, est assimilée à un risque externe venant modifier le lien entre la perte  $L$  et l’indemnité issue de l’indice  $Z$ . Ce risque externe est appelé *background risk* dans la littérature, et bénéficie de plusieurs représentations sur lesquelles nous allons nous baser pour modéliser le risque de base dans le Chapitre 2.

Selon Franke *et al.* (2006), le *background risk* prend la forme d’un facteur multiplicatif  $R$  qui vient modifier les valeurs de l’indice, i.e. la perte est donnée par  $L = RZ$ . Puisque l’indice est en moyenne performant,  $\mathbb{E}[R] = 1$ . Dans ce cas, la perte peut être écrite comme  $L = Z + SZ$ , où  $\mathbb{E}[S] = 0$ . Le risque de base s’écrit alors comme  $X = SZ$ . Notons que cette décomposition indépendante est également retenue dans Hashorva et Ji (2014), Asimit *et al.* (2016), Furman *et al.* (2019) et Côté et Genest (2019). Franke *et al.* (2011) et Tsetlin et Winkler (2005) proposent d’élargir la modélisation du *background risk* en considérant qu’il a un impact tant additif que multiplicatif sur la perte. En transposant leur cadre d’étude à notre contexte, alors la perte est donnée par  $L = Z + SY$ , avec  $\mathbb{E}[S] = 0$ . Dans ce cas,  $Y$  correspond à la perte émanant d’une zone identifiée comme étant particulièrement sensible à l’amplification de la perte comme par exemple une zone à haute densité urbaine. En supposant que l’indice est correctement calibré, alors cette zone particulière ne représente qu’une faible portion du portefeuille. Ici aussi, l’indice peut sous ou sur-estimer la perte totale à cause de la variabilité associée à l’amplification de la perte  $Y$  propre à la zone urbaine. Alors  $S$  est le facteur correspondant à l’amplification de la perte qui n’est pas pris en compte dans l’indice, il peut être positif ou négatif. Encore une fois, le risque de base correspond à un produit,  $X = SY$ .

La décomposition de Franke *et al.* (2011) peut également correspondre au cas d’une obligation catastrophe à déclenchement paramétrique. L’indice, à cause des incertitudes associées aux modules aléa et inventaire des modèles catastrophe, ne reflète pas parfaitement les zones impactées par la catastrophe



naturelle. En particulier, les risques de base spatial et temporel détériorent la qualité de l'indice. Lors de sa constitution, il est possible d'identifier les zones où ces risques sont les plus à même de se manifester. Par exemple, une zone urbaine aura un maillage de stations météo plus fin que celui d'une zone rurale. Alors, il est possible d'identifier ces zones et d'en déduire une estimation de l'exposition agrégée. A cause de l'incertitude associée à la valeur de l'exposition dans ces zones, l'exposition est aléatoire, représentée par la variable aléatoire positive  $Y$ . A l'échelle du portefeuille, l'indice est performant en moyenne mais moins dans ces zones spécifiques où il va vraisemblablement sous ou sur-estimer la perte. A partir des éléments évoqués dans la section II.1.3 sur le module vulnérabilité, il apparaît naturel de représenter la différence entre la perte  $L$  et la perte modélisée par l'indice  $Z$  comme la destruction résiduelle  $S$  de l'exposition  $Y$ . Là encore, le risque de base  $X = L - Z$  s'écrit  $X = SY$ .

Il découle de cette discussion que le risque de base  $X = L - Z$  peut naturellement être représenté sous la forme  $X = SY$ , où  $Y$  est connu et peut parfois être dépendant de  $Z$ . Le cas de la dépendance entre  $Y$  et  $Z$  est d'ailleurs pertinent dans le cadre des modèles de régression puisqu'il permet de prendre un compte une potentielle endogénéité. En effet, les risques de base spatial et temporel résultent de contraintes pratiques, comme la faible qualité des mesures ou l'ignorance de l'influence d'un facteur climatique sur la taille ou l'intensité de la catastrophe naturelle. A titre d'exemple, [Bussay et al. \(2015\)](#) montrent que le signe de la corrélation entre le rendement d'un champ de maïs et la variable *water limited above ground biomass*<sup>14</sup> (WLB) s'inverse en juillet. Ignorer cette variable peut alors conduire à une corrélation négative ou positive entre le risque de base et l'indemnité issue de l'indice, dépendant du moment où elle est déclenchée.

Ainsi, dans le Chapitre 2, nous modélisons le risque de base comme le produit de deux variables aléatoires indépendantes, tel que  $X = SY$ . Par construction,  $S$  peut être négative et positive, tandis que  $Y$  est positive. Bien que [Tsetlin et Winkler \(2005\)](#) traitent la dépendance entre  $S$  et  $Y$  puis entre  $Z$  et  $Y$ , nous nous limitons dans la thèse à une potentielle dépendance entre  $Z$  et  $Y$  et supposons que  $S$  et  $Y$  sont indépendantes. En d'autres termes, nous représentons le risque comme une contraction aléatoire. La présentation de ces variables constitue l'objet de la prochaine section.

## II.4 Les contractions aléatoires

L'idée initiale de la représentation du risque de base en tant que différence entre la perte et l'indemnité reçue découle de la caractérisation des lois unimodales et symétriques de [Shepp \(1962\)](#), rappelée dans ce qui suit. Intuitivement, lorsque l'indice reflète idéalement la perte, le terme d'erreur dans la régression est centré avec une variance faible à l'image de la loi normale. Néanmoins, nous l'avons vu dans la section précédente, la décomposition multiplicative du risque de base apparaît de façon relativement naturelle lorsque nous adoptons le point de vue du *background risk*. Fondamentalement, le risque de

---

14. Cette variable lie quantité d'eau dans le sol et système racinaire de la plante.

base découle d'ailleurs d'un *background risk*, difficilement quantifiable par l'indice. Si l'indice était en mesure de prendre en compte la variabilité associée à ce risque sous-jacent, alors l'indice tendrait à refléter exactement la perte : la transaction ne serait plus indicielle mais indemnitare. De ce point de vue, l'approche basée sur le *background risk* pour représenter la perte est, semble-t-il, relativement pertinente.

Dans cette section, nous montrons dans quelle mesure la classe des contractions aléatoires permet de générer différentes formes de distributions pour  $X = SY$ . Notons que l'incertitude principale dans la représentation multiplicative du risque de base est liée au facteur  $S$ . Le facteur  $Y$  est certes aléatoire, mais sa distribution est connue. En revenant aux exemples précédents,  $Y$  correspond à la perte émanant d'une zone identifiée comme étant particulièrement sensible à l'amplification de la perte ou à l'exposition aléatoire des zones moins bien représentées par l'indice.

#### II.4.1 Définition et ses résultats associés

La forme la plus générale considérée dans le Chapitre 2 est celle des contractions aléatoires, que nous définissons de la façon suivante.

**Définition 3.** (*Définition 2.1.1 du Chapitre 2*) Une variable aléatoire réelle  $X$  est une contraction aléatoire si elle s'écrit sous la forme

$$X =_d SY, \quad (5)$$

où  $Y$  est une variable aléatoire positive et  $S$  est une variable aléatoire réelle, bornée et indépendante de  $Y$ .

Nous dirons que la variable  $S$  est le facteur contractant, et la variable  $Y$  est le facteur contracté. Cette représentation en produit de deux variables aléatoires indépendantes fait écho aux distributions Beta-unimodales, puisqu'il suffit que  $S \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ . Pour rappel, [Shepp \(1962\)](#) démontre qu'une variable aléatoire  $X$  est unimodale et symétrique par rapport à 0 si et seulement si  $X =_d U_1 Y$ , où  $U_1$  est uniformément distribuée sur  $(-1, 1)$  et  $Y$  est une variable aléatoire positive et indépendante de  $U_1$ . Dans ce cas, la distribution de  $X$  est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( x \int_x^\infty \frac{f_Y(y)}{y} dy + F_Y(x) + 1 \right), & x \geq 0, \\ \frac{1}{2} \left( x \int_{-x}^\infty \frac{f_Y(y)}{y} dy + (1 - F_Y(-x)) \right), & x \leq 0. \end{cases} \quad (6)$$

L'Equation (2.1) correspond à la Proposition 2.2.1 du Chapitre 2.

L'unimodalité ne sont pas des propriétés nécessairement vérifiées et souhaitables pour la modélisation de la distribution du risque de base. Par exemple dans le cas où  $Y$  représente l'exposition de zones mal représentées par l'indice et  $S$  le taux de destruction résiduel, rien n'indique que  $X = SY$  soit symétrique ou unimodal.

Ayant présenté la Beta-unimodalité comme une extension de la caractérisation des lois unimodales de [Khintchine \(1938\)](#), l'idée naturelle du Chapitre 2 est d'abord de remplacer la variable  $U_1$  uniforme sur  $(-1, 1)$  par une variable  $U_a$  uniforme sur  $(-a, a)$ , puis de remplacer cette variable uniforme par une variable distribuée selon une loi Beta décentrée sur  $(-a, a)$ . Le lecteur peut se reporter à [Hanson \(1991\)](#) et [Carnahan \(1989\)](#) pour une présentation complète de cette loi. De cette façon, les lois unimodales et symétriques deviennent un cas particulier, puisqu'elles correspondent au cas où  $a = 1$  et où les paramètres de la loi Beta sont égaux à 1.

La loi Beta décentrée, notée  $S_a$ , est obtenue directement à partir d'une loi Beta usuelle, puisque

$$S_a =_d 2a\tilde{S} - a = a(2\tilde{S} - 1), \quad (7)$$

où  $\tilde{S} \sim \text{Beta}((0, 1), \alpha, \beta)$ . A partir de maintenant, nous spécifions le support de la loi Beta. Par exemple  $\tilde{S} \sim \text{Beta}((0, 1), \alpha, \beta)$  est une variable aléatoire distribuée selon une loi Beta usuelle, dont le support est  $(0, 1)$ . Pour rappel, la méthode de quantification du risque de base développée dans le Chapitre 2 nécessite d'avoir accès aux moments de la variable considérée, en l'occurrence celle représentant le risque de base. L'Equation (7) permet facilement de récupérer les moments d'une loi Beta décentrée à partir de ceux de la loi Beta usuelle. Aussi, l'indépendance entre  $S_a$  et  $Y$  mène à l'obtention des moments de  $X$ .

Plus précisément, la densité de  $S_a \sim \text{Beta}((-a, a), \alpha, \beta)$  est donnée par

$$f_{S_a}(x) = \frac{(x+a)^{\alpha-1}(a-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)(2a)^{\alpha+\beta-1}}, \quad -a \leq x \leq a.$$

Nous pouvons obtenir la forme de la distribution de  $X$  lorsque nous connaissons celle de  $Y$ . En réalité, seul le cas où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des entiers positifs mène à une forme claire de la distribution de  $X$ . Dans ce cas, nous obtenons la Proposition 3 correspondant à la Proposition 2.2.2 du Chapitre 2.

**Proposition 3.** (*Proposition 2.2.2 du Chapitre 2*) Soit  $X =_d S_a Y$  avec  $S_a \sim \text{Beta}((-a, a), n, m)$ ,  $n, m$

étant des entiers positifs. Alors,

$$F_X(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(S_a \leq 0) + \frac{1}{2^{n+m-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{n-k-1} \mathbb{P}\left(\tilde{S}_{k+1}Y \leq \frac{x}{a}\right), & x \geq 0, \\ \frac{1}{2^{n+m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+m-1}{m-k-1} \mathbb{P}\left(\hat{S}_{k+1}Y > \frac{-x}{a}\right), & x \leq 0, \end{cases} \quad (8)$$

où

$$\begin{cases} \tilde{S}_{k+1} \sim \text{Beta}((0, 1), k+1, m), \\ \hat{S}_{k+1} \sim \text{Beta}((0, 1), k+1, n). \end{cases}$$

Passons maintenant à la présentation de résultats obtenus concernant l'unimodalité et la symétrie des contractions aléatoires.

#### II.4.2 Une classe malléable

Depuis le début de la section II.4, nous affirmons que les contractions aléatoires constituent une classe malléable au sens où une variable de cette classe n'est pas nécessairement symétrique, ni unimodale. Nous allons maintenant apporter les justifications formelles de ces affirmations.

Dans un premier temps, examinons le caractère unimodal d'une contraction aléatoire. L'étude de l'unimodalité du produit de variables indépendantes remonte aux travaux de [Ibragimov \(1956\)](#) et [Cuculescu et Theodorescu \(1998\)](#). [Ibragimov \(1956\)](#) s'est attaché à caractériser l'unimodalité de la somme de deux variables indépendantes. A partir de cette caractérisation, [Cuculescu et Theodorescu \(1998\)](#) ont introduit la notion *multiplicative strong unimodality* (MSU). Une variable  $A$  est dite MSU si le produit  $AB$  est encore unimodal où  $B$  est une variable indépendante de  $A$ . Il montre que toutes les variables  $A$  unimodales en 0 sont MSU, et que le produit  $AB$  est unimodal en 0, pour tout  $B$  indépendant de  $A$ .

A partir des travaux de [Cuculescu et Theodorescu \(1998\)](#), nous obtenons directement les deux résultats suivants.

**Proposition 4.** (*Proposition 2.2.3 du Chapitre 2*) Soit  $X \stackrel{d}{=} SY$  une contraction aléatoire.

*i) Si  $S$  ou  $Y$  est unimodale en 0, alors  $X$  est unimodale en 0.*

*ii) Si  $S$  et  $Y$  sont unimodales, et que  $S$  ou  $Y$  est MSU, alors  $X$  est unimodal.*

En particulier, le point *i)* est vérifié pour  $X \stackrel{d}{=} U_a Y$ , où  $U_a$  est uniformément distribuée sur  $(-a, a)$ . De la Proposition 4, nous déduisons qu'il existe des cas où le produit  $S_a Y$  n'est pas unimodal. D'après [Alimohammadi et al. \(2016\)](#),  $S_1$  est MSU si et seulement si  $\alpha > 0$  et  $\beta \geq 1$  : il suffit alors de prendre

$\alpha < 1$  et  $\beta < 1$  et  $Y$  non unimodale en 0 pour que le produit ne soit pas unimodal. Nous renvoyons à l'exemple de la Section 2.2.2 du Chapitre 2 pour une illustration claire de la situation.

En particulier, la contraction aléatoire peut être bimodale, ce qui est intéressant dans certains cas. Par exemple, lorsque le risque considéré est le risque de crue, alors la perte associée à une crue est hautement dépendante du niveau de montée des eaux, particulièrement dans les zones urbanisées. Cette forte sensibilité au niveau de la crue amène [Sampson et al. \(2014\)](#) à modéliser le taux de destruction par une loi 01-inflated Beta. Si la crue ne dépasse pas le niveau critique, alors la destruction est faible voire nulle. En revanche, dès que la crue dépasse ce niveau critique, la destruction est directement importante. Supposons maintenant que la zone urbaine ne représente qu'une petite portion du portefeuille couvert par une solution indicielle. Si l'indice est construit à l'échelle du portefeuille, la variabilité de la perte dans cette zone ne sera pas correctement représentée. Si une faible crue survient, le taux de destruction associé sera plutôt faible (masse en 0) et l'indice aura tendance à surestimer l'impact de la perte. Au contraire, si une crue intense survient, alors le taux de destruction associé sera vraisemblablement élevé (masse en 1), mais l'indice sous-estimera probablement la perte. En notant  $Y$  l'exposition de la zone urbanisée, et  $S$  le taux de destruction résiduel (positif ou négatif) venant de l'intensité de la crue, alors il est raisonnable de supposer que le risque de base  $X = SY$  est bimodal.

Pour terminer la discussion de l'unimodalité des contractions aléatoires, notons qu'il est difficile d'obtenir le mode de façon calculatoire. La raison principale est la complexité de la forme de la densité de  $X$ . En revanche, il peut être aisément obtenu de façon numérique notamment à l'aide des méthodes développées par [Basu et DasGupta \(1997\)](#), [Sato \(1987\)](#) ou encore [Gavriliadis \(2008\)](#).

Abordons maintenant la question de la symétrie de la distribution d'une contraction aléatoire. Il existe plusieurs définitions de la symétrie plus ou moins intuitives. Nous l'avons déjà évoqué, la variable  $A$  est symétrique par rapport à  $x_0$  si sa densité  $f_A$  vérifie  $f_A(x_0 + x) = f_A(x_0 - x)$  pour tout  $x$ . Autrement dit,  $A$  est symétrique par rapport à  $x_0$  si  $A - x_0 \stackrel{d}{=} x_0 - A$ . Dans le contexte de contractions aléatoires, ces définitions ne sont pas idéales au sens où nous ne disposons pas de formes générales pour la densité ou pour la fonction de répartition d'une contraction aléatoire. Par conséquent, l'étude de la symétrie d'une contraction aléatoire fait intervenir une définition plus complexe, basée sur la transformée de Mellin. Pour une variable aléatoire positive  $A$ , la transformée de Mellin notée  $\mathcal{M}_A$  est donnée par

$$\mathcal{M}_A(s) = \int_0^{+\infty} x^s dF_A(x).$$

Pour éviter de surcharger l'introduction, le lecteur est renvoyé à la Section 2.2.3 du Chapitre 2 qui présente en détail la transformée de Mellin dans le cadre des contractions aléatoires. Pour plus de résultats associés à cette transformée, le lecteur intéressé pourra également se reporter aux livres de [Galambos et Simonelli \(2004\)](#) ainsi qu'aux travaux de [Simonelli \(2001\)](#) et de [Hamedani et Volkmer](#)

(2003). Le résultat important concernant la symétrie d'une contraction aléatoire est obtenu dans la Proposition 2.2.4 du Chapitre 2, que nous rappelons ici.

**Proposition 5.** (*Proposition 2.2.4 du Chapitre 2*) Une contraction aléatoire  $X =_d SY$  est symétrique par rapport à 0 si et seulement si  $S$  est symétrique par rapport à 0.

A partir des Propositions 4 and 5, nous obtenons que si le facteur contractant  $S_a$  est tel que  $S_a \sim \text{Beta}((-a, a), \alpha, \alpha)$  avec  $\alpha \geq 1$ , alors  $S_a$  et  $X$  sont des variables unimodales et symétriques par rapport à 0. Si  $S$  n'est pas symétrique sur  $(-a, a)$  et que  $Y$  est unimodale en 0 (par exemple, c'est le cas lorsque  $Y$  est distribuée selon une loi exponentielle), alors  $X$  est unimodale en 0 mais pas symétrique.

Finalement, la classe des contractions aléatoires est une classe malléable. Les contractions aléatoires peuvent être symétriques et unimodales, mais peuvent aussi s'affranchir de ces contraintes pour prendre des formes relativement libres. L'intérêt technique de prendre le risque de base comme une contraction aléatoire réside dans l'utilisation de la décomposition en variables indépendantes, qui est à la base de la méthode de quantification du risque de base.

### III. La mesure et la quantification du risque de base

Dans le cadre de la réglementation prudentielle assurantielle et bancaire, la compagnie d'assurance (ou de réassurance) doit être en mesure de quantifier l'impact du risque de base contenu dans la solution de transfert. De façon plus générale, le potentiel acheteur de protection indicelle a tout intérêt à être capable de quantifier l'efficacité de la couverture avant d'y souscrire.

A ce stade de l'introduction, le risque de base assurantiel a été complètement décrit, alors que le risque de base financier a été volontairement omis (voir section I.2.2). Ici, il n'intervient que parce que l'approche de sa quantification proposée par le [Comité de Bâle sur le contrôle bancaire \(2016\)](#) et détaillée dans la section III.1.2 motive celle que nous adoptons dans les Chapitres 1 et 2. Le risque de base financier n'est pas unique, et dépend du produit considéré. A titre d'exemple, le [Comité de Bâle sur le contrôle bancaire \(2016\)](#) définit le risque de base lié aux taux d'intérêt comme le risque qui décrit l'incidence des variations relatives aux taux d'intérêt pour les instruments financiers avec des échéances similaires mais dont la tarification repose sur des indices de taux différents. Par exemple, un actif dont le taux est indexé sur le Libor financé par un passif référencé sur les bons du Trésor américains est une source de ce risque de base.

#### III.1 Une quantification basée sur des scénarios

Quantifier le risque de base présuppose de choisir une mesure. Cette mesure doit refléter la qualité de l'indice du point de vue du porteur de risque. Pour ouvrir cette troisième section, considérons un

exemple artificiel, mais éloquent.

Notons comme précédemment  $L$  la perte subie par un assureur et supposons que cette perte est bornée par  $m > 0$ . En plus, supposons  $\mathbb{E}[L] = m/2$ , et notons  $\sigma_L^2$  la variance de la perte. Considérons maintenant que l'assureur souscrive une réassurance proportionnelle de niveau  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ . En notant  $\nu$  le capital,  $\pi$  la prime, intéressons-nous à la probabilité  $\mathbb{P}(\nu - L + \pi > 0)$ . Par construction la prime contient un chargement de sécurité positif tel que  $\pi \geq m/2$  : la prime est au moins égale à la valeur moyenne de la perte. Cette probabilité correspond à la probabilité que le capital augmenté des primes permette de faire face à la sinistralité  $L$ . En supposant que l'assureur cède une proportion  $\alpha$  de ses primes, la probabilité devient après réassurance,

$$\mathbb{P}(\nu - (1 - \alpha)L + (1 - \alpha)\pi > 0) = \mathbb{P}\left(\frac{\nu}{1 - \alpha} - L + \pi > 0\right).$$

Le capital  $\nu$  a donc été « gonflé » en  $\nu/(1 - \alpha)$ . Remplaçons maintenant la couverture sur la perte  $L$  par une couverture sur un indice  $Z$  et considérons le pire cas possible : celui où  $Z = m - L$ . Alors  $\mathbb{E}[Z] = m/2$  et  $\text{Var}(Z) = \text{Var}(L) = \sigma_L^2$ . L'indice est donc en moyenne identique à la perte, et a la même variabilité. Lorsque la prime est basée sur la variance et l'espérance de la couverture, la prime de réassurance est égale à la prime de la transaction indiciaire sur  $Z$  (en pratique les chargements de sécurité diffèrent, mais supposons-les constants). Alors,

$$\mathbb{P}(\nu - L + \alpha Z + (1 - \alpha)\pi > 0) = \mathbb{P}(\nu + \alpha m - (1 + \alpha)L + (1 - \alpha)\pi > 0).$$

Nous obtenons aisément que  $\mathbb{P}(\nu - (1 - \alpha)L + (1 - \alpha)\pi > 0) \geq \mathbb{P}(\nu - L + \alpha Z + (1 - \alpha)\pi > 0)$ . Surtout,  $\mathbb{P}(\nu - L + \pi > 0) \geq \mathbb{P}(\nu - L + \alpha Z + (1 - \alpha)\pi > 0)$ . Autrement dit, la couverture indiciaire empire la situation initiale. L'espérance et la variance de l'indice ne sont pas des mesures adéquates. La position finale  $L + Z$  est en fait pire que la position initiale  $L$ , puisque  $L - Z = 2L - m$ . Bien que son espérance soit nulle, la variance est quatre fois plus grande que celle de la position initiale. Ce très court exemple artificiel permet de soulever plusieurs questions. La plus générale qui soit est quand est-ce qu'une transaction indiciaire est préférée à la réassurance traditionnelle ? C'est l'objet du Chapitre 3. Ensuite, comment mesurer l'efficacité d'un indice et donc l'intensité du risque de base ? C'est l'objet de la section qui suit.

### III.1.1 Mesurer le risque de base à l'aide de fonctions de pénalité

En se remémorant la définition de [Giné et al. \(2007\)](#), le risque de base y est mesuré à l'aide de la corrélation entre l'indemnisation issue de l'assurance paramétrique et la richesse du bénéficiaire de la couverture assurantielle. Néanmoins, [Zeng \(2000\)](#) décrie cette mesure en affirmant qu'elle ne correspond pas à un point de vue actuariel au sens où elle ne peut pas servir de base quantitative directe à un acheteur de protection pour déterminer si le risque de base d'une solution paramétrique l'emporte sur

les avantages associés à cette forme de transfert. Par exemple, considérons cette fois-ci que  $Z$  s'écrive sous la forme

$$Z = -\varepsilon L + m(1 + \varepsilon)/2,$$

où  $0 < \varepsilon \leq 1$  pour que  $Z$  soit positif. Alors le coefficient de corrélation linéaire entre  $L$  et  $Z$  est toujours égal à  $-1$ , quelle que soit la valeur de  $\varepsilon$ . Si le prix ne dépend que de l'espérance et de la variance, alors le prix de  $Z$  diminue lorsque  $\varepsilon$  diminue.

Pour remédier à cela, il propose une mesure alternative correspondant à la probabilité conditionnelle que l'indemnisation issue de l'assurance soit nulle sachant que la perte subie dépasse un seuil donné. Cette mesure a par conséquent conduit bon nombre de travaux à appréhender le risque via cette approche, à l'image de [Elabed \*et al.\* \(2013\)](#) et [Elabed et Carter \(2015\)](#) qui mesurent le risque de base comme la probabilité que l'acheteur de protection ne soit pas indemnisé par l'indice alors que sa perte atteint un niveau tel qu'il aurait souhaité l'être. L'inconvénient de cette approche est qu'elle donne une valeur d'occurrence sans informer sur la taille de la potentielle différence. [Ross et Williams \(2009\)](#) indiquent qu'il est plus pertinent de s'intéresser à la probabilité que le manque à gagner dépasse un certain seuil, que nous noterons  $d$ , définit par l'acheteur de protection, i.e.  $\mathbb{P}(L - Z > d \mid Z > 0)$ .

Malgré cette amélioration, les auteurs affirment qu'il est plus judicieux de se concentrer à la valeur moyenne de la différence lorsqu'elle est positive, et par extension, à la valeur moyenne de la différence lorsque celle-ci dépasse un certain seuil. [Ross et Williams \(2009\)](#) étendent donc les mesures du risque de base à ces quantités, données par  $\mathbb{E}[L - Z \mid L - Z > d]$ .

L'espérance correspond bien au manque à gagner moyen, lorsque celui-ci dépasse un certain seuil. En dépit de son aspect global, cette forme de mesure souffre de sa linéarité au sens où

$$\mathbb{E}[m \times (L - Z) \mid L - Z > d] = m \times \mathbb{E}[L - Z \mid L - Z > d], \quad m \geq 0.$$

Considérer une différence  $m$  fois plus grande mène à une mesure, elle aussi,  $m$  fois plus grande. Pour remédier à cela, [Jensen \*et al.\* \(2016\)](#), [Woodard et Garcia \(2008a\)](#) et [Vedenov et Barnett \(2004\)](#) introduisent une façon alternative de mesurer le risque de base, à l'aide de la semi variance, c'est-à-dire  $\mathbb{E}[\max(L - Z, 0)^2] = \mathbb{E}[(L - Z)_+^2]$ . L'introduction de la fonction carré permet de s'affranchir de la linéarité de l'espérance et d'attribuer une croissance de l'impact des conséquences de la différence supérieure à la croissance de la différence elle-même. Cette fois-ci,

$$\mathbb{E}[(m \times (L - Z))_+^2] = m^2 \times \mathbb{E}[(L - Z)_+^2],$$

et si  $m > 1$  alors  $\mathbb{E}[(m \times (L - Z))_+^2] > m \times \mathbb{E}[(L - Z)_+^2]$ . Notons également que [Gaurav et Chaudhary \(2020\)](#) représentent le risque de base spatial comme une fonction non-linéaire de la distance entre les stations météorologiques.



La forme des mesures retenues dans les Chapitres 1 et 2 est motivée par l'article 208 alinéa 1 de [Solvency II Commission Delegated Regulation \(2015\)](#), qui stipule que « lorsque les entreprises d'assurance ou de réassurance transfèrent des risques de souscription au moyen de contrats de réassurance ou de véhicule de titrisation [...], l'effet d'atténuation du risque de ces arrangements contractuels est attribué aux calculs fondés sur des scénarios d'une manière qui [...] reflète l'effet économique des protections fournies ». A cet égard, les Chapitres 1 et 2 proposent de prendre en compte le référentiel du porteur de risque pour déterminer les conséquences du risque de base. Ce référentiel correspond en quelque sorte à une représentation de l'aversion au risque de base. L'acheteur de protection détermine son appétence au risque de base ainsi que sa capacité d'absorption des pertes. La forme de la mesure retenue prend en considération le niveau d'acceptation du risque de base pour en déterminer les conséquences.

A titre d'exemple, le Chapitre 1 introduit des mesures de la forme suivante,

$$\mathbb{E}[\eta(Z - L)_+] + \mathbb{E}[\gamma(L - Z)_+] + \mathbb{E}[\gamma(L - Z - d)_+^{n-1}], \quad (9)$$

où  $\eta, \gamma$  et  $d$  sont des réels positifs et  $n$  est un entier positif. Ainsi, la mesure considérée pénalise la différence en fonction de son signe et de sa taille. Dans l'Equation 9, tant que la différence  $L - Z$  est positive et reste en dessous du seuil  $d$ , son impact se traduit par la valeur de  $\mathbb{E}[\gamma(L - Z)_+]$ . En revanche, dès qu'elle dépasse le seuil d'acceptation  $d$ , l'impact de la différence est drastiquement augmenté via le terme  $\mathbb{E}[\gamma(L - Z - d)_+^{n-1}]$ .

La taille de la différence joue d'ailleurs un rôle prépondérant dans les conséquences du risque de base. En effet, pénaliser une différence sans se soucier de sa taille par rapport à celle de la valeur prise par l'indice (ou par la valeur de la perte) conduit à obtenir la même mesure lorsque la perte vaut 2 et l'indice 1 que quand la perte vaut 100 et l'indice 99 : la mesure fournira dans les deux cas l'impact d'une différence de 1. D'un point de vue de la gestion du risque de base, l'indice dans le premier cas ne représente que 50% de la perte contre 99% dans le second cas. La mesure devrait permettre de pénaliser davantage l'indice du cas 1 et que l'indice du cas 2. Le Chapitre 2 apporte une réponse concrète à ce défaut des mesures basées uniquement sur la différence en introduisant le rapport de la différence (c'est-à-dire la taille du risque de base) sur la valeur de l'indice. Formellement, un exemple de mesure du risque de base considérée dans le Chapitre 2 est

$$\mathbb{E} \left[ (|L - Z| + (L - Z - d)_+^{n-1}) \times \left( 1 + \left( \frac{L - Z}{Z} - r \right)_+^{n-1} \right) \right], \quad (10)$$

où  $d$  et  $r$  sont des réels positifs et  $n$  est un entier supérieur ou égal à 1. Cette fois-ci, la mesure pénalise la différence en fonction de sa taille (terme de gauche), mais aussi en fonction de sa taille par rapport à celle de l'indice (terme de droite), où les seuils  $d$  et  $r$  sont renseignés par l'acheteur de la couverture paramétrique. Dans l'Equation 10, le terme de droite ajoute une pénalité supplémentaire dès que le

risque de base devient trop grand par rapport à l'indice.

Dans les Chapitres 1 et 2, les mesures du risque de base sont appelées des fonctions de pénalité : elles assignent une valeur à l'intensité du risque de base qui dépend du niveau de tolérance du porteur de risque. Les Chapitres 1 et 2 développent différentes formes de fonctions. En particulier, le Chapitre 2 définit formellement les fonctions de pénalité généralisées, qui permettent d'intégrer la taille du risque de base par rapport à celle de l'indice. Pour le moment, gardons à l'esprit que les fonctions de pénalité mesurent les conséquences du risque de base. Nous reviendrons sur ces fonctions dans la section III.2.2 au moment de définir les fonctions convexes de degrés supérieurs.

Dans le cadre du Chapitre 1, la modélisation catastrophe menait à une perte  $L$  Beta-unimodale et à l'indice  $Z$  non aléatoire au sein de chaque scénario climatique  $i$ . En reprenant les notations du Chapitre 1, la perte est donnée par  $X_i = S_i Y_i$  et la valeur de l'indice est  $c_i$  pour chaque scénario  $i$ .

Dans le cadre du Chapitre 2, nous modélisons directement la différence  $L - Z = X$  où  $X$  est une contraction aléatoire, i.e.  $X = SY$ . Dans les deux chapitres, ces décompositions sont à la base de la méthode de quantification du risque de base, puisqu'elles permettent de « séparer » les sources d'incertitude dans les modélisations. Dans le cas du Chapitre 1, l'incertitude porte plutôt sur l'exposition alors qu'elle est associée au facteur contractant dans le Chapitre 2. A partir de cette incertitude, nous générons des scénarios extrêmes qui correspondent à des configurations de risque plus ou moins favorables.

L'approche de quantification basée sur des scénarios d'incertitude extrême est motivée par la réglementation prudentielle assurantielle et bancaire.

### III.1.2 La quantification réglementaire du risque de base

La motivation de la quantification du risque de base est reliée à la réglementation assurantielle. Tout au long de ce paragraphe nous allons nous référer aux articles 209 et 210 de [Solvency II Commission Delegated Regulation \(2015\)](#), puis aux paragraphes 2.7, 3.1, 3.3 et 4.22 de la [Notice Solvabilité II \(2015\)](#). Afin d'éviter de paraphraser ces articles, nous n'en donnons que les éléments principaux. Nous invitons le lecteur intéressé à se reporter à ces deux documents normatifs pour un énoncé précis.

La [Solvency II Commission Delegated Regulation \(2015\)](#) indique que lorsque les risques de base importants ne sont pas reflétés dans le calcul du capital de solvabilité requis, la technique d'atténuation du risque ne devrait pas être prise en compte. Le paragraphe 3.1 de la [Notice Solvabilité II \(2015\)](#) précise que le risque de base n'est pas important si « l'exposition couverte par la technique d'atténuation du risque est de nature suffisamment similaire à celle de l'exposition au risque de l'entreprise ».

Aussi, le paragraphe 2.7 de la [Notice Solvabilité II \(2015\)](#) traite explicitement du cas de l'émission d'une obligation catastrophe. Il y est indiqué que « si une entreprise émet des obligations catastrophe ne répondant pas aux exigences des techniques d'atténuation du risque » énoncées aux articles 209 et 210 alors « leur traitement dans la formule standard ne peut pas se traduire par un allègement des exigences de capital ». Par conséquent, il est donc primordial de pouvoir quantifier le risque de base associé à l'obligation catastrophe à déclenchement indiciel du Chapitre 1.

De façon générale, le paragraphe 4.22 de la [Notice Solvabilité II \(2015\)](#) indique que « les entreprises n'appliquent de contrats à caractère non indemnitaire au titre de la formule standard que s'il peut être démontré que le niveau de risque de base n'est pas important ».

Ainsi, le cadre réglementaire assurantiel nous conforte dans l'intérêt de proposer une méthode de quantification du risque de base.

Le paragraphe 3.3 de la [Notice Solvabilité II \(2015\)](#) donne une indication de la façon dont la quantification doit être abordée. En effet, l'acheteur de protection indicielle doit établir « si les contrats de réassurance et les véhicules de titrisation ont un comportement différent de celui des polices d'assurances de l'entreprise pour une série complète de scénarios de risque en raison de différences de modalités ». Il en résulte qu'une approche basée sur des scénarios est à privilégier. Ces scénarios doivent représenter différentes configurations de risque de base, de façon à pouvoir en mesurer son impact dans chacune d'entre elles.

Dans un cadre normatif différent, cette approche est aussi recommandée par la réglementation bancaire. En effet le [Comité de Bâle sur le contrôle bancaire \(2016\)](#) stipule que les banques faisant face à un risque de base significatif doivent se fixer des limites de tolérance au risque de base appropriées (paragraphe 30). Ces limites peuvent être déterminées à partir de l'appétence au risque de base définie par l'entité le subissant (Principe 9 du [Comité de Bâle sur le contrôle bancaire \(2016\)](#)). La méthodologie contenue dans cette norme indique que « le risque de base peut être mesuré grâce à la génération de scénarios au sein desquels il y a une divergence significative dans les différents taux de base auxquels la banque est particulièrement exposée ». En transposant cette approche au cadre assurantiel, notre méthode de quantification du risque de base dans le cadre des transactions indicielles est fondée sur la génération de scénarios menant à des cas extrêmes de risque de base.

Finalement la norme indique expressément qu'il incombe à l'acheteur de transaction indicielle - donc au porteur du risque de base - de démontrer que ce risque de base n'est pas important. A défaut, la stratégie de transfert ne peut pas être prise dans le calcul du capital de solvabilité. En accord avec le cadre réglementaire, l'approche de quantification développée dans les Chapitres 1 et 2 repose sur la génération de scénarios extrêmes à partir de la décomposition multiplicative de la variable d'intérêt dans

chacun des chapitres. Le Chapitre 1 utilise la Beta-unimodalité de la perte pour générer les scénarios à partir de l'incertitude associée à l'exposition du portefeuille à une catastrophe naturelle. Le Chapitre 2 modélise la différence entre la perte subie et l'indemnité reçue issue d'une solution de transfert indiciel par une contraction aléatoire. Une fois les scénarios générés, nous mesurons l'impact du risque de base dans le référentiel du porteur de risque à l'aide des fonctions de pénalité. Nous verrons dans la Section IV de cette introduction comment utiliser les valeurs obtenues dans chacun des scénarios.

Pour le moment, concentrons nous sur la génération des scénarios. Elle découle d'un cadre théorique complet, lié à l'ordre convexe et à son extension : l'ordre convexe de degrés supérieurs.

### III.2 Les outils fondamentaux

L'approche des Chapitres 1 et 2 nécessite de générer des scénarios extrêmes pour le risque de base. L'outil fondamental sous-jacent à la génération de ces scénarios correspond aux ordres convexes de degrés supérieurs. Ces ordres sont une extension de l'ordre convexe usuel. L'ordre convexe est également au coeur des Chapitres 3 et 4, mais il est utilisé à travers une autre approche, dont nous donnons les prémices. L'utilisation de l'ordre convexe dans ces chapitres nécessite de développer un point de vue différent, que nous réservons à la Section IV.

Ici, nous rappelons l'approche « fonctionnelle » de l'ordre convexe, en présentant les caractérisations principales qui nous serviront dans la suite. Le lecteur intéressé par plus de détails pourra se reporter à [Shaked et Shanthikumar \(2007\)](#) qui présentent une excellente revue des ordres stochastiques. [Denuit et al. \(2006\)](#) proposent une approche plus actuarielle, tandis que [Müller et Stoyan \(2002\)](#) développent une approche plus mathématique, notamment en fournissant des preuves techniques.

#### III.2.1 Introduction à l'ordre convexe et caractérisations essentielles

Concernant les Chapitres 1 et 2, l'ordre convexe consiste en une introduction naturelle facilitant la compréhension des ordres convexes de degrés supérieurs. Dans ces chapitres, les ordres convexes sont appréhendés par une approche « fonctionnelle », correspondant à une première caractérisation de ces ordres.

Les Chapitres 3 et 4 ont recours à une approche « préférentielle » des ordres convexes, basée sur une caractérisation de l'ordre par la tail value-at-risk notée TVaR. Ces chapitres sont fondés sur une condition menant à l'ordre convexe qui permet de développer une approche géométrique claire.

Notons que l'ordre convexe est utilisé pour discuter de la variabilité associée à la somme de deux risques dans le Chapitre 3. Les résultats obtenus sont aussi invoqués dans le Chapitre 4. Afin de ne pas surcharger cette partie, nous présenterons les résultats associés à la somme de deux variables aléatoires dans la Section IV au moment où nous abordons les problèmes examinés dans ces chapitres.

L'ordre convexe fait partie d'une classe d'ordres appelée les ordres stochastiques sur les intégrales (*integral stochastic orderings*) qui consiste à réduire la comparaison de variables aléatoires à l'espérance de fonctions issues d'une certaine classe. Ces fonctions sont appelées les générateurs de l'ordre considéré. En considérant deux variables aléatoires  $A$  et  $B$ , l'ordre stochastique sur les intégrales  $\leq_\star$  généré par la classe de fonctions  $\mathcal{U}_\star$  est défini par

$$A \leq_\star B \iff \mathbb{E}[t(A)] \leq \mathbb{E}[t(B)] \text{ pour toute fonction } t \in \mathcal{U}_\star.$$

En toute généralité, la terminologie « sur les intégrales » provient de l'ordre sur les espérances. Grâce à cette approche, l'ordre convexe correspond naturellement au cas où les fonctions  $t$  sont convexes. Afin de les identifier, nous les notons  $\phi$ . Pour le moment, nous disons classiquement qu'une fonction  $\phi$  est convexe sur un intervalle  $I$  lorsque pour tous  $x_1$  et  $x_2$  de  $I$  et tout  $\lambda \in [0, 1]$  nous avons

$$\phi(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda\phi(x_1) + (1 - \lambda)\phi(x_2).$$

L'ordre convexe se définit formellement comme suit.

**Définition 4.** Une variable aléatoire  $A$  est dite plus petite qu'une variable aléatoire  $B$  à l'ordre convexe, noté  $A \leq_{cx} B$ , si  $\mathbb{E}[\phi(A)] \leq \mathbb{E}[\phi(B)]$  pour toute fonction convexe  $\phi$ .

Il découle de la Définition 4 que la comparaison de deux variables à l'ordre convexe ne peut se faire que si elles ont les mêmes moyennes.

Aussi, en prenant  $\phi(x) = x^2$ , alors  $A \leq_{cx} B \Rightarrow \text{Var}(A) \leq \text{Var}(B)$ . Pour cette raison, l'ordre convexe est associé à la comparaison de la variabilité, en opposition à la comparaison de la taille. Comparer la taille des variables aléatoires revient à comparer leur fonction de répartition, nous amenant à la dominance stochastique de premier ordre. En notant  $\leq_{ST}$  cet ordre, alors

$$A \leq_{ST} B \iff \mathbb{P}(B \leq x) \leq \mathbb{P}(A \leq x) \iff \mathbb{P}(A > x) \leq \mathbb{P}(B > x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Notons d'ailleurs au passage que l'ordre  $\leq_{ST}$  est aussi un ordre stochastique sur les intégrales puisque  $A \leq_{ST} B \iff \mathbb{E}[t(A)] \leq \mathbb{E}[t(B)]$ , pour toute fonction  $t$  croissante. La terminologie dominance stochastique « du premier ordre » s'explique par la forme des fonctions  $t$  : lorsqu'elles sont dérivables,  $\leq_{ST}$  requiert que leur dérivée première soit positive. En adoptant ce point de vue, l'ordre convexe correspond à la dominance stochastique du second ordre puisqu'il requiert que les dérivées secondes des fonctions  $\phi$  soient positives. Cette discussion nous mène à une représentation intuitive de l'ordre convexe de degré supérieur (sous entendu, supérieur à 2). L'ordre  $s$ -convexe,  $s \in \mathbb{N}$ , nécessite que les dérivées d'ordre  $s$  des fonctions  $t$  soient positives. Nous présentons en détail l'ordre de degré supérieur dans la section suivante, mais gardons en tête que la présentation des ordres par les fonctions génératrices permet une compréhension intuitive de la construction de l'ordre considéré.

Les Chapitres 1 et 2 utilisent cette définition de l'ordre convexe pour obtenir des ordres sur les variables Beta-unimodales et plus généralement sur les contractions aléatoires. Par exemple, notons  $X_1 = SY_1$  et  $X_2 = SY_2$  deux variables Beta-unimodales et supposons que  $Y_1 \leq_{cx} Y_2$ . Alors

$$\mathbb{E}[\phi(SY_1)] \leq \int_0^1 \mathbb{E}[\phi(sY_1)] dF_S(s) \leq \int_0^1 \mathbb{E}[\phi(sY_2)] dF_S(s) = \mathbb{E}[\phi(SY_2)], \quad (11)$$

pour toute fonction convexe  $\phi$ , grâce à l'indépendance entre  $S$  et  $(Y_1, Y_2)$ . Des cas légèrement plus généraux sont présentés dans les Chapitres 1 et 2, mais ils découlent tous de cette approche.

Pour prouver que deux variables sont ordonnées à l'ordre convexe, il faut montrer que l'inégalité de la Définition 4 est valable pour toutes les fonctions convexes. Cela revient au premier abord à travailler en dimension infinie. Fort heureusement, il existe une représentation de la convexité qui permet de réduire la comparaison pour toutes les fonctions convexes à une condition de dimension 1.

En effet, la Proposition 2.8.4 de [Denuit \*et al.\* \(2006\)](#) indiquent que toute fonction convexe  $\phi$  continue sur  $[a, b]$  est la limite uniforme d'une suite de fonctions

$$f_n(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \sum_{j=0}^n \beta_j^{(n)} (x - t_j^{(n)})_+,$$

où  $\beta_j^{(n)} \geq 0$ ,  $t_j^{(n)} \in [a, b]$  pour  $j = 1, \dots, n$  et  $\alpha_1, \alpha_2$  sont des constantes réelles. Comparer  $A$  et  $B$  à l'ordre convexe revient à comparer  $\mathbb{E}[(A - t_j^{(n)})_+]$  avec  $\mathbb{E}[(B - t_j^{(n)})_+]$ , pour n'importe quel point  $t_j^{(n)}$ . Nous obtenons de cette représentation des fonctions convexes une seconde caractérisation de l'ordre convexe.

### Caractérisation de l'ordre convexe par les primes stop-loss.

$$A \leq_{cx} B \iff \mathbb{E}[(A - d)_+] \leq \mathbb{E}[(B - d)_+], \quad \forall d \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Les fonctions intervenant dans le terme de droite de l'Equation (12) correspondent aux primes pures de stop-loss sur  $A$  et  $B$ . Pour cette raison, ordonner à l'ordre convexe revient à ordonner les primes stop-loss de variables ayant les mêmes moyennes. Notons au passage que le Chapitre 3 utilise un ordre convexe partiel au sens où l'ordre sur les primes stop-loss n'est requis qu'à partir d'un certain niveau. Les résultats associés à cet ordre sont propres au contexte du Chapitre 3, nous y renvoyons directement le lecteur.

Pour accentuer l'obtention de la prochaine caractérisation de l'ordre convexe, la TVaR de niveau  $p \in [0, 1]$  est donnée pour le moment par

$$\text{TVaR}_p(A) = \inf_{u \in \mathbb{R}} \left\{ u + \frac{1}{1-p} \mathbb{E}[(A - u)_+] \right\} = \text{VaR}_p(A) + \frac{1}{1-p} \mathbb{E}[(A - \text{VaR}_p(A))_+], \quad (13)$$

où  $\text{VaR}_p(A) = \inf\{x \mid \mathbb{P}(A \leq x) \geq p\}$ . Considérons maintenant que  $A \leq_{cx} B$  alors pour  $p \in (0, 1)$ ,

$$\begin{aligned} \text{TVaR}_p(A) &\leq \text{VaR}_p(B) + \frac{1}{1-p} \mathbb{E}[(A - \text{VaR}_p(B))_+], \\ &\leq \text{VaR}_p(B) + \frac{1}{1-p} \mathbb{E}[(B - \text{VaR}_p(B))_+] = \text{TVaR}_p(B). \end{aligned}$$

Autrement dit,  $A \leq_{cx} B \Rightarrow \text{TVaR}_p(A) \leq \text{TVaR}_p(B)$ , pour tout  $p \in (0, 1)$ . L'implication inverse est aussi vraie, ce qui permet d'obtenir une seconde caractérisation de l'ordre convexe par la TVaR.

### Caractérisation de l'ordre convexe par la TVaR.

$$A \leq_{cx} B \iff \text{TVaR}_p(A) \leq \text{TVaR}_p(B), \quad \forall p \in (0, 1). \quad (14)$$

La TVaR est utilisée dans les Chapitres 3 et 4 pour mesurer les préférences d'un assureur et d'un réassureur en tant que mesure de risque ; nous y reviendrons dans la Section IV. Finalement, retenons que l'ordre convexe nécessite de comparer des variables aléatoires ayant la même espérance. Passons maintenant à son extension, l'ordre convexe de degré supérieur.

#### III.2.2 L'ordre $s$ -convexe

L'approche adoptée dans la partie précédente a le mérite de rendre naturelle l'extension de l'ordre convexe au degré supérieur, notée ordre  $s$ -convexe,  $s \in \mathbb{N}$ . Alors que l'ordre convexe se définit par des fonctions convexes, l'ordre  $s$ -convexe se définit par les fonctions  $s$ -convexes, qu'il convient de définir.

La définition la plus complète de la convexité d'ordre supérieur fait appel à la notion de différence divisée, qui ne requiert pas la différentiabilité de la fonction considérée. Plaçons nous sur un intervalle fermé  $[a, b]$  avec  $-\infty < a < b < \infty$ . Notons  $[x_0, \dots, x_s; \phi]$  la différence divisée d'ordre  $s$  de la fonction  $\phi$  aux points  $x_0 < x_1 < \dots < x_s \in [a, b]$ . Alors  $[x; \phi] = \phi(x)$  et

$$[x_0, \dots, x_k; \phi] = \frac{[x_1, \dots, x_k; \phi] - [x_0, \dots, x_{k-1}; \phi]}{x_s - x_0}, \quad k = 1, \dots, s.$$

Alors, une fonction  $\phi$  est  $s$ -convexe sur  $[a, b]$  si  $[x_0, \dots, x_s; \phi] \geq 0$  est vérifiée pour tous points  $x_0 < x_1 < \dots < x_s \in [a, b]$ . En particulier lorsque la dérivée d'ordre  $s$  de la fonction  $\phi$  existe, alors  $\phi$  est  $s$ -convexe si et seulement si  $\phi^{(s)} \geq 0$ . Les fonctions 1-convexes sont les fonctions croissantes, les fonctions 2-convexes sont les fonctions convexes usuelles. Dans ce qui suit, nous notons  $\mathcal{U}_{s-cx}^{[a,b]}$  la classe des fonctions  $s$ -convexes sur  $[a, b]$ . Le lecteur intéressé par plus de détails sur les fonctions convexes d'ordres supérieurs pourra se référer par exemple à [Popoviciu \(2013\)](#), [Farwig et Zwick \(1985\)](#) ou [Karlin et Studden \(1966\)](#).

Notons que les fonctions de pénalité introduites dans les Equations (9) et (10) sont des fonctions  $s$ -convexes. Plus généralement, les mesures utilisées dans les Chapitres 1 et 2 sont des fonctions convexes

d'ordre supérieur pour pouvoir mesurer les conséquences du risque de base dans chacun des scénarios.

L'ordre  $s$ -convexe est donc naturellement généré par les fonctions  $s$ -convexes, nous obtenons ainsi la définition suivante.

**Définition 5.** (*Définition 1.3.2 du Chapitre 2*) Soient  $A$  et  $B$  deux variables aléatoires prenant leurs valeurs dans  $[a, b]$ .  $A$  est dite plus petite que  $B$  à l'ordre  $s$ -convexe, noté  $A \leq_{s-cx}^{[a,b]} B$ , si  $\mathbb{E}[\phi(A)] \leq \mathbb{E}[\phi(B)]$  pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{U}_{s-cx}^{[a,b]}$ .

Alors que l'ordre convexe nécessitait l'égalité de l'espérance (c'est à dire l'égalité du moment d'ordre 1), l'ordre  $s$ -convexe requiert l'égalité des  $s - 1$  premiers moments. En revenant au cadre des contractions aléatoires (incluant les distributions Beta-unimodales), il est possible d'ordonner deux contractions aléatoires à l'ordre  $s$ -convexe, en fonctionnant de la même façon que pour l'Equation (11).

Les Chapitres 1 et 2 ne contiennent pas de contribution théorique sur les ordres  $s$ -convexes. [Denuit et al. \(1998, 1999\)](#) et [Shaked et Shanthikumar \(2007\)](#) apporteront plus de précisions au lecteur intéressé. En revanche, nous utilisons les propriétés de ces ordres pour générer les scénarios extrêmes à partir de la décomposition du risque de base  $X$  en produit de deux variables aléatoires indépendantes. Avant de présenter la théorie sous-jacente à la génération de ces scénarios, il convient de présenter une dernière classe de fonctions qui nous permettra d'ordonner la sévérité des scénarios en fonction de l'incertitude.

De façon imagée, une fonction  $s$ -convexe a sa dérivée d'ordre  $s$  positive. Lorsque toutes les dérivées d'ordre 1 à  $s$  sont croissantes, la fonction est dite  $s$ -croissante convexe. Alors, une fonction  $s$ -croissante convexe est en particulier  $(s - k)$ -convexe,  $k = 0, \dots, s - 1$ .

Nous disposons maintenant de tous les outils pour présenter l'utilisation principale des ordres  $s$ -convexes : la génération des distributions  $s$ -extrêmes.

### III.3 Les scénarios extrêmes

La méthode de quantification du risque de base fait intervenir la génération de scénarios associés à des cas extrêmes de risque de base. Les ordres  $s$ -convexes bénéficient d'un cadre théorique dans lequel il est possible de générer des distributions extrêmes au sens  $s$ -convexe, en fonction de l'information disponible sur la variable considérée.

#### III.3.1 Les espaces de moments

Nous l'avons vu plus haut, ordonner des variables à l'ordre  $s$ -convexe revient à travailler avec des variables ayant les mêmes  $s - 1$  premiers moments. Dans notre contexte, nous fabriquons la contraction



aléatoire  $X$  à partir de  $S$  et  $Y$ . Le facteur contractant  $S$  est supposé borné, ses moments sont donc bien définis. En revanche  $Y$  n'est pas nécessairement borné, l'existence de ses moments peut poser problème. En particulier dans le Chapitre 2, nous supposons que  $Y$  est distribué selon une loi de Pareto; il conviendra alors de vérifier des conditions d'existence pour pouvoir mettre en oeuvre la méthodologie de quantification du risque de base.

Deux points doivent être vérifiés pour pouvoir obtenir des distributions extrêmes au sens  $s$ -convexe : un support borné et la connaissance des  $s$ -premiers moments. Les variables ayant le même support et les mêmes  $s - 1$  premiers moments appartiennent au même espace de moments. Dans la suite, cet espace est noté  $\mathcal{B}_s([a, b], \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{s-1})$ . Il représente toutes les variables aléatoires  $A$  dont le support est  $[a, b]$  et qui vérifient  $\mathbb{E}[A^k] = \mu_k, k = 1, \dots, s - 1$ .

Dans les Chapitres 1 et 2, nous considérons que les moments du risque de base sont connus ou estimables. En réalité, il convient de vérifier que la séquence  $\mu_1, \dots, \mu_{s-1}$  constitue bien une séquence de moments. Par exemple, il n'existe pas de variable aléatoire dont le support est  $[0, 10]$  vérifiant  $\mu_1 = 2$  et  $\mu_2 = 3$ . La Proposition 4.1 de [Denuit \(2002\)](#) décrit complètement les conditions à vérifier pour qu'un espace de moment soit non-vide. A titre d'exemple, les conditions pour les trois premiers moments sont

$$\begin{aligned} a &< \mu_1 < b, \\ \mu_1^2 &< \mu_2 < \mu_1(a + b) - ab, \\ \frac{(\mu_2 - \mu_1 a)^2 + a\mu_2(\mu_1 - a)}{\mu_1 - a} &< \mu_3 < \frac{b\mu_2(b - \mu_1) - (b\mu_1 - \mu_2)^2}{b - \mu_1}. \end{aligned}$$

Les espaces de moment sont des espaces de Krein-Milman : ils peuvent être vus comme l'enveloppe convexe-fermée de leurs points extrémaux. Les points extrémaux de l'espace  $\mathcal{B}_s([a, b], \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{s-1})$  sont des distributions qui ne peuvent pas être exprimées comme une combinaison linéaire de deux éléments distincts de  $\mathcal{B}_s([a, b], \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{s-1})$ , dans le sens où

$$F = uF_1 + (1 - u)F_2, 0 < u < 1 \Rightarrow F + F_1 = F_2.$$

L'ensemble des points extrémaux de  $\mathcal{B}_s([a, b], \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{s-1})$  joue un rôle important dans l'obtention de bornes sur les quantités de type  $\mathbb{E}[\phi(A)]$  comme nous allons le voir dans ce qui suit. Le lecteur intéressé par plus de détails sur les espaces de moments peut se reporter par exemple au Chapitre II.3 de [De Vylder \(1996\)](#).

### III.3.2 Les distributions extrêmes

Une fois que l'espace des moments est connu et non-vide, [Denuit et al. \(1999\)](#) ont montré qu'il existait deux variables, notées  $A_{min}^{(s)}$  et  $A_{max}^{(s)}$ , telles que

$$A_{min}^{(s)} \leq_{s-cx}^{[a,b]} A \leq_{s-cx}^{[a,b]} A_{max}^{(s)}, \quad \forall A \in \mathcal{B}_s([a, b], \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{s-1}).$$

Ces variables  $A_{min}^{(s)}$  et  $A_{max}^{(s)}$  sont des points extrémaux de  $\mathcal{B}_s([a, b], \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{s-1})$ . Dans ce qui suit,  $A_{min}^{(s)}$  et  $A_{max}^{(s)}$  sont appelées distributions extrêmes au sens  $s$ -convexe. En ré-écrivant les inégalités à l'ordre  $s$ -convexe sous la forme fonctionnelle, alors  $A_{min}^{(s)}$  et  $A_{max}^{(s)}$  sont telles que

$$\mathbb{E}[\phi(A_{min}^{(s)})] \leq \mathbb{E}[\phi(A)] \leq \mathbb{E}[\phi(A_{max}^{(s)})], \quad (15)$$

pour toute fonction  $s$ -convexe  $\phi$ .

Proposer des bornes sur les formes  $\mathbb{E}[\phi(A)]$  pour  $A \in \mathcal{B}_s([a, b], \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{s-1})$  a fait l'objet de nombreux travaux dont ceux de De Vylder (1982), De Vylder (1983), De Vylder et Goovaerts (1982), Hürlimann (1998), Kaas et Goovaerts (1985, 1986) et Brockett et Cox (1985). La contribution récente de Brockett *et al.* (2016) se rapproche du contexte des Chapitres 1 et 2. Denuit *et al.* (1999) décrivent la méthode pour obtenir les distributions extrêmes au sens  $s$ -convexe, que nous rappelons dans le corps du Chapitre 1.

A titre d'illustration, les distributions extrêmes au sens 2-convexe dans  $\mathcal{B}_s([a, b], \mu_1)$  sont

$$A_{min}^{(2)} = \mu_1 \quad \text{et} \quad A_{max}^{(2)} = \begin{cases} a & \text{avec probabilité } p = \frac{\mu_1 - a}{b - a} \\ b & \text{avec probabilité } q = \frac{b - \mu_1}{b - a}. \end{cases}$$

Bien qu'élémentaires, ces distributions offrent une interprétation directe de la méthode dont elles sont à l'origine. A l'ordre 2,  $A_{min}^{(2)}$  a une variance nulle, et  $A_{max}^{(2)}$  ne prend que les valeurs extrêmes de l'intervalle considéré. Les probabilités associées sont déterminées pour que la moyenne soit  $\mu_1$ . Lorsque le moment suivant est connu, alors les distributions extrêmes sont adaptées de sorte qu'elles restent dans l'espace de moments considéré tout en minimisant ou maximisant l'ordre de degré suivant. Notons que la constitution des bornes à l'ordre  $s$  nécessite de connaître les moments jusqu'à l'ordre  $s - 1$ .

Dans le cadre des contractions aléatoires (y compris les distributions Beta-unimodales), la détermination des distributions extrêmes au sens  $s$ -convexe repose sur l'hypothèse d'indépendance entre la facteur contracté et le facteur contractant. Par exemple dans le cadre du Chapitre 1, l'exposition  $Y$  est supposée bornée, et la perte est donnée par la variable Beta-unimodale  $X = SY$ . Nous obtenons alors que

$$X_{min}^{(s)} = SY_{min}^{(s)} \quad \text{et} \quad X_{max}^{(s)} = SY_{max}^{(s)}.$$

Dans le cadre du Chapitre 2, les distributions extrêmes au sens  $s$ -convexe pour le risque de base  $X$  sont construites à partir du facteur contractant  $S$  puisque la variable  $Y$  n'est pas forcément bornée.

Savoir qu'une variable est une contraction aléatoire (bornée) permet d'améliorer la qualité des bornes issues des distributions extrêmes au sens  $s$ -convexe. En effet, l'ensemble des contractions aléatoires à valeurs dans  $[a, b]$  et vérifiant les contraintes de moments  $\mu_1, \dots, \mu_{s-1}$  est inclus dans  $\mathcal{B}_s([a, b], \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{s-1})$ .

Alors en notant  $\tilde{X}_{min}^{(s)}$  et  $\tilde{X}_{max}^{(s)}$  les distributions extrêmes lorsque l'on ignore que  $X$  est une contraction aléatoire, nous obtenons

$$\tilde{X}_{min}^{(s)} \leq_{s-cx} X_{min}^{(s)} \leq_{s-cx} X \leq_{s-cx} X_{max}^{(s)} \leq_{s-cx} \tilde{X}_{max}^{(s)}.$$

Dans les Chapitres 1 et 2, les distributions extrêmes d'ordre  $s$  constituent les scénarios extrêmes. Au sein de chaque scénario, les conséquences du risque de base sont mesurées à l'aide de fonctions de pénalité. Pour pouvoir obtenir des inégalités similaires à l'Equation 15, les fonctions de pénalité doivent être au moins  $s$ -convexes. Puisque nous considérons les distributions extrêmes au sens  $k$ -convexe,  $k = 2, \dots, s$ , les fonctions de pénalité doivent en réalité être  $s$ -croissantes convexes. Cette contrainte est d'ailleurs primordiale pour pouvoir comparer les scénarios entre eux.

En effet, il est souhaitable que les scénarios correspondant à l'incertitude associée au risque de base puissent être classés en fonction du niveau d'incertitude. Autrement dit, nous souhaitons générer des scénarios dont les conséquences sont croissantes avec le niveau d'incertitude. Dans le contexte des distributions extrêmes au sens  $s$ -convexe, l'incertitude est représentée par le nombre de moments connus. Par exemple, les distributions extrêmes au sens 2-convexe ne sont basées que sur l'espérance du risque de base, alors que les distributions extrêmes au sens 3-convexe font intervenir les deux premiers moments. Dans le scénario 3-convexe, nous connaissons « mieux » le risque de base : il est donc raisonnable de s'attendre à ce que le scénario 3-convexe mène à des conséquences moins importantes que celles issues du scénario 2-convexe. Or  $X_{max}^{(3)} \in \mathcal{B}_s([a, b], \mu_1, \mu_2) \subset \mathcal{B}_s([a, b], \mu_1)$  implique que

$$\mathbb{E}[\phi(X)] \leq \mathbb{E}[\phi(X_{max}^{(2)})] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\phi(X_{max}^{(3)})] \leq \mathbb{E}[\phi(X_{max}^{(2)})]$$

mais pas que  $\mathbb{E}[\phi(X)] \leq \mathbb{E}[\phi(X_{max}^{(3)})] \leq \mathbb{E}[\phi(X_{max}^{(2)})]$ .

La réponse théorique à cette discussion correspond à la Proposition 2.3.3 du Chapitre 2 : pour pouvoir ordonner les conséquences de l'incertitude associée au risque de base en fonction de l'information disponible sur celle-ci, il suffit que la fonction de pénalité soit  $s$ -croissante convexe, où  $s$  est l'ordre du dernier moment connu plus 1. Par exemple si les trois moments sont connus, alors la fonction de pénalité doit être 4-croissante convexe.

Alors, en repartant de l'Equation 2, l'enjeu du Chapitre 1 est de fournir les valeurs des quantités suivantes,

$$\sum_{i=1}^n p_i \mathbb{E}[\phi(S_i Y_{i,min}^{(s)} - c_i)] \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n p_i \mathbb{E}[\phi(S_i Y_{i,max}^{(s)} - c_i)].$$

Dans ce chapitre, la forme du taux de destruction permet d'obtenir des formes relativement claires pour les fonctions de pénalité considérées. Nous les donnons d'ailleurs jusqu'à l'ordre 4 pour des fonctions de pénalité linéaires (sections 1.5.1 et 1.5.2), puissances (section 1.5.3) et exponentielles (section 1.5.4).

Dans le Chapitre 2, les distributions extrêmes au sens  $s$ -convexe sont obtenues à partir du facteur contractant. Compte tenu de la présence du rapport  $X/Z$  dans la constitution de ces fonctions, les formes des bornes sont plus lourdes que celles du Chapitre 1, nous renvoyons le lecteur à l'Annexe du Chapitre 2 pour plus de détails.

Ainsi s'achève la section dédiée à la mesure et la quantification du risque de base. La dernière étape de la thèse consiste en la gestion du risque de base. Appréhendée d'abord dans la continuité des Chapitres 1 et 2, nous discutons de l'utilisation possible de la méthode de quantification du risque de base en tant qu'outil de gestion de ce risque.

Ensuite, nous développons particulièrement les questions abordées dans les Chapitres 3 et 4 de la thèse. Dans ces chapitres, nous changeons radicalement de point de vue pour se placer dans un contexte de transfert de risque optimal, faisant intervenir un assureur et un réassureur. Dans le Chapitre 3, nous examinons le rôle du risque de base et de l'asymétrie d'information sur le choix de la forme de la transaction : indicielle ou indemnitaire. Le Chapitre 4 s'inscrit dans la lignée théorique du Chapitre 3, mais adopte une vision encore différente. Nous y développons un échange basé sur la collaboration entre un assureur et un réassureur, sortant ainsi du cadre de la réassurance traditionnelle.

## **IV. La gestion du risque de base**

Les Chapitres 1 et 2 décrivent une méthode de quantification du risque de base qu'il convient maintenant d'interpréter d'un point de vue de la gestion de ce risque.

Le seconde partie de cette dernière section développe les contributions de la thèse au transfert de risque dans un cadre statique. Nous présentons les problèmes considérés et l'outil mathématique nécessaire à leur résolution : l'ordre convexe. Bien qu'il ait déjà été abordé dans la section III.2.1 de l'introduction, nous apportons des compléments importants. En particulier, les problèmes de partage optimal considérés dans les deux chapitres font intervenir un réassureur en prenant en compte son exposition initiale. Nous apporterons les solutions de chacun des problèmes considérés dans les deux chapitres sur la base d'un résultat technique en lien avec l'ordre convexe sur des sommes de variables aléatoires non-indépendantes.

### **IV.1 La méthode de quantification comme outil de gestion**

La quantification du risque de base est motivée par la réglementation prudentielle assurantielle et bancaire. Après avoir généré des scénarios d'incertitude extrême, l'acheteur de protection mesure les conséquences du risque de base dans chacun de ces scénarios à l'aide de fonctions de pénalité. La forme de la fonction de pénalité est choisie par l'acheteur de protection, de façon à ce qu'elle reflète son

appétence au risque de base. Dès lors, la méthodologie peut être utilisée de deux façons, principalement abordées dans les sections 2.5.1 et 2.5.2 du Chapitre 2.

D’abord, l’acheteur de protection peut se fixer un budget pour le risque de base et en déduire dans chacun des scénarios la taille limite du risque de base qu’il est en mesure d’accepter. La section 2.5.1 du Chapitre 2 détaille les étapes de la démarche. De ce point de vue, la méthode consiste en un outil de gestion du risque de base. Si l’indice considéré mène à des conséquences qui dépassent trop fréquemment le budget alloué au risque de base, alors des décisions peuvent être prises par le comité de direction quant à la pertinence du transfert indiciel. Ainsi, la méthode permet de sélectionner ou de rejeter un indice. Cette approche permet également de prouver dans quelle mesure l’acheteur de protection est immunisé contre le risque de base.

D’un autre côté, l’acheteur de protection peut utiliser la méthodologie pour déduire le coût du risque de base associé aux limites qu’il s’impose sur l’incertitude. Grâce à la forme des fonctions de pénalité, l’acheteur de protection se fixe un seuil pour la probabilité que le risque de base  $X$  ne soit pas plus grand qu’un pourcentage de la valeur de l’indice. A partir de ce seuil, la méthodologie lui permet de déduire la taille maximale du facteur contractant correspondant. Nous en déduisons alors le montant du budget de risque de base dans chacun des scénarios. De ce point de vue, l’acheteur de protection est en mesure d’estimer le coût nécessaire pour être immunisé contre le risque de base.

Les contributions apportées par les Chapitres 1 et 2 de la thèse ont maintenant toutes été présentées. La particularité des modélisations utilisées dans ces deux chapitres leur confère une place importante dans cette introduction, qui ne reflète pas nécessairement la hiérarchie des contributions associées aux quatre chapitres de la thèse. Malgré tout, la présentation des motivations sous-jacentes à l’utilisation des variables Beta-unimodales et des contractions aléatoires nécessitait un niveau de développement conséquent, complémentaire aux justifications apportées dans les Chapitres 1 et 2.

La fin de cette introduction générale est dédiée aux Chapitres 3 et 4, constituant les principales contributions au transfert de risque.

## **IV.2 Contributions au transfert de risque**

Dans les Chapitres 3 et 4 de la thèse, nous abordons des problématiques associées au transfert de risque optimal dans deux contextes différents d’un point de vue technique. Dans le Chapitre 3, l’ensemble des formes de transfert admissibles correspond à l’ensemble  $\mathcal{S}$  décrit au début de l’introduction par l’Equation (1). Autrement dit, le Chapitre 3 se place dans un cadre de transfert assimilable à celui de la réassurance traditionnelle. En revanche, la problématique consiste à comparer l’efficacité d’un transfert indiciel avec celle d’un transfert indemnitaire dans un cadre bilatéral en prenant en compte

les préférences d'un assureur (acheteur de protection) et d'un réassureur (vendeur de protection). Les détails propres à chaque problème seront présentés dans la section IV.2.2.

D'un autre côté, le Chapitre 4 propose d'élargir le cadre de la réassurance traditionnelle en développant des transferts de risque basés sur un potentiel partenariat entre l'assureur et le réassureur. Il découle de ce partenariat que l'assureur peut augmenter la taille d'une partie de son portefeuille, par exemple grâce à un outil de souscription mis à disposition par le réassureur. Dès lors, l'ensemble des formes de transfert admissibles n'est plus restreint à l'ensemble  $\mathcal{S}$ . Dans ce cadre précis, le Chapitre 4 examine le problème du partenariat optimal d'un point de vue unilatéral, qui sert de base théorique lors de la prise en compte du cadre bilatéral.

Avant de passer aux contributions de chacun de ces deux chapitres, nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que nous ne traiterons que du transfert optimal dans un cadre statique. Conscients de l'existence d'un cadre dynamique, nous ne l'aborderons pas, ni dans la suite de cette introduction, ni dans les Chapitres 3 et 4. Le lecteur intéressé par ce cadre d'étude pourra se référer au livre de Schmidli (2007) pour une introduction au contrôle stochastique en assurance, puis par exemple à Schmidli (2001) ou Choulli *et al.* (2003) pour l'étude de la réassurance proportionnelle et à Asmussen *et al.* (2000) ou Taksar et Markussen (2003) pour la réassurance non-proportionnelle.

Dans ce qui suit, nous considérons un assureur dont la perte est notée  $Y$  et un réassureur initialement exposé à un risque  $X$ . Cette variable  $X$  n'est pas supposée être une contraction aléatoire.

#### IV.2.1 De la réassurance au partenariat optimal : le point de vue unilatéral

La section I.1.1 au début de l'introduction a donné les prémices des notions détaillées dans les sections qui vont suivre. D'après la section I.1.1, la réassurance traditionnelle présuppose des formes de transfert de risques particuliers, contraints sur la forme et le signe des flux de l'échange. Formellement, cela revient à travailler dans l'ensemble  $\mathcal{S}$  défini à l'Equation (1), que nous rappelons ici par souci de clarté,

$$\mathcal{S} = \{I \mid I \text{ est positive, non-décroissante et 1-Lipschitz}\}.$$

Dans le cadre du Chapitre 4, nous nous intéressons à une généralisation de la réassurance traditionnelle en proposant une forme de transfert basée sur un potentiel partenariat entre un assureur et un réassureur. Dans ce partenariat, l'assureur peut augmenter la taille de son portefeuille, par exemple grâce à un outil de souscription mis à disposition par le réassureur. Pour le moment, examinons le côté de l'assureur, c'est-à-dire que nous adoptons un point de vue unilatéral. Ensuite, nous traiterons du cas bilatéral, en incluant explicitement le réassureur dans la formulation du problème.

En se souvenant que le taux de rétention correspond à la proportion de la perte restant à la charge de l'assureur après intervention de la forme du transfert de risque (voir section I.1.1), le taux de rétention dans la réassurance traditionnelle est nécessairement plus petit ou égal à 1. Le fait que le partenariat permette à l'assureur d'augmenter la taille de son portefeuille signifie que son taux de rétention peut être plus grand que 1, se traduisant par une forme de transfert qui n'est plus nécessairement positive et croissante. Le Chapitre 4 propose alors de travailler dans un espace de forme de transfert de risque modifié, noté  $\mathcal{G}$ , qui ne vérifie plus qu'une seule contrainte : la croissance de la rétention. Formellement, l'ensemble modifié  $\mathcal{G}$  est défini comme suit

$$\mathcal{G} = \{g : x \mapsto g(x) \mid x - g(x) \leq y - g(y) \quad \forall x \leq y \in \mathbb{R}\}.$$

Le problème unilatéral examiné dans le Chapitre 4 est une transposition de celui étudié par [Van Heerwaarden \*et al.\* \(1989\)](#) qu'il convient de rappeler ici. Les auteurs s'intéressent à la forme de réassurance traditionnelle qui permet de minimiser la rétention de l'assureur à l'ordre convexe. En effet, dans le cas où le prix de la réassurance n'est déterminé que par l'espérance de la couverture, il devient possible de comparer les rétentions à l'ordre convexe. En particulier, [Van Heerwaarden \*et al.\* \(1989\)](#) introduisent les critères d'optimisation *tail averse* comme étant ceux qui préservent l'ordre stop-loss et montrent que la plupart des fonctions objectifs vérifient cette propriété : maximisation de l'espérance d'utilité, minimisation de différents principes de primes, minimisation du coefficient d'ajustement dans un processus de Poisson composé, minimisation de la probabilité de ruine ou encore minimisation de la variance du risque retenu. Dès lors, le résultat principal [Van Heerwaarden \*et al.\* \(1989\)](#) est le suivant : lorsque la prime de réassurance n'est déterminée que par l'espérance de la couverture et que l'assureur cherche à minimiser un critère d'optimisation tail averse, alors la forme de réassurance optimale est le stop-loss.

En utilisant la caractérisation de l'ordre convexe par la TVaR (14), le problème consiste à trouver le contrat  $I^* \in \mathcal{I}$  tel que

$$\text{TVaR}_\alpha(Y - I^*(Y)) \leq \text{TVaR}_\alpha(Y - I(Y)), \quad \forall I \in \mathcal{I}, \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (16)$$

En résumé, [Van Heerwaarden \*et al.\* \(1989\)](#) montrent que  $I^*$  vérifiant 16 est un stop-loss.

Notons au passage que le résultat de [Van Heerwaarden \*et al.\* \(1989\)](#) offre une explication claire de la suprématie du stop-loss dans les problèmes de réassurance optimale, à l'image des travaux de [Borch \(1960a\)](#), [Arrow \(1963\)](#), [Kahn \(1961\)](#), [Pesonen \(1967\)](#), [Ohlin \(1969a\)](#) et [Pesonen \(1984\)](#). Dans la littérature, le problème unilatéral (16) a connu de nombreuses évolutions, qui vont de la modification du principe de prime à la forme du critère d'optimisation choisi. La littérature est très fournie, mais nous pouvons distinguer deux salves de contributions principales, correspondant à une évolution du critère d'optimisation. La première branche de la littérature, représentée par [Gajek et Zagrodny \(2000, 2004a\)](#) et [Kaluszka \(2001, 2004, 2005\)](#), cherche la forme optimale de réassurance lorsque la quantité à optimiser est une mesure de risque définie via des *harm functions*, comme la variance, la valeur absolue, la

partie positive ou encore la semi-variance. Dans ces travaux, différents types de primes sont considérés. La deuxième branche de la littérature est née de l'avènement des mesures de risque suite aux travaux de Artzner *et al.* (1999). Alors, le critère d'optimisation choisi est expressément une mesure de risque comme la VaR, la TVaR et ses dérivées. Parmi les nombreuses contributions, nous pouvons citer Cai et Tan (2007), Cai *et al.* (2008), Balbás *et al.* (2009) et Cheung (2010b), puis Chi et Tan (2011), Tan *et al.* (2011) Chi (2012), Chi et Tan (2013) et enfin Cai et Weng (2016) et Cheung et Lo (2017) pour des contributions plus récentes.

Dans le cadre du Chapitre 4, nous transposons le Problème (16) à l'ensemble  $\mathcal{G}$ , en considérant toujours que la prime  $\pi$  est déterminée par l'espérance de la perte cédée, c'est-à-dire  $\pi = (1 + \theta)\mathbb{E}[g(Y)]$ . Dans la suite, nous travaillons à prix fixé, i.e. à espérance fixée. Pour mettre en évidence ce point, nous nous plaçons alors dans l'ensemble  $\mathcal{G}_\nu$ , donné par

$$\mathcal{G}_\nu = \{g \in \mathcal{G} \mid \mathbb{E}[g(Y)] = \nu\}.$$

Plus précisément, nous considérons le cas où le taux de rétention de l'assureur  $S_g$  est borné (correspondant à la situation où l'outil de souscription fourni par le réassureur limite l'augmentation de la taille du portefeuille de l'assureur) et le cas où le taux de rétention n'est pas borné. Dans le premier cas, l'ensemble des formes de partenariat admissibles est donné par l'ensemble  $\mathcal{G}_\nu^\beta$ , défini comme suit.

$$\mathcal{G}_\nu^\beta = \{g \in \mathcal{G}_\nu \mid S_g(x) \leq \beta, \forall x \in \mathbb{R}^+\}.$$

Le Chapitre 4 se concentre dans un premier temps sur le point de vue unilatéral, où l'objectif de l'assureur est de trouver les contrats dans  $\mathcal{G}_\nu^\beta$  puis dans  $\mathcal{G}_\nu$  qui minimisent sa rétention à l'ordre convexe, c'est-à-dire les contrats qui réalisent les infima suivants

$$\inf_{g \in \mathcal{G}_\nu^\beta} \{\text{TVaR}_\alpha(Y - g(Y))\}, \quad (17)$$

puis

$$\inf_{g \in \mathcal{G}_\nu} \{\text{TVaR}_\alpha(Y - g(Y))\}. \quad (18)$$

L'obtention des solutions de ces problèmes découle de l'approche géométrique proposée par Ohlin (1969b) qu'il convient de rappeler ici.

**Proposition 6.** (Lemma 3 dans Ohlin (1969b)) Soit  $A$  une variable aléatoire, et  $u_1$  et  $u_2$  deux fonctions non-décroissantes telles que  $\mathbb{E}[u_1(Y)] = \mathbb{E}[u_2(A)] < +\infty$ . Si il existe  $y_0$  tel que

$$u_2(y) \leq u_1(y) \text{ pour } y \leq y_0,$$

$$u_2(y) \geq u_1(y) \text{ pour } y \geq y_0,$$

alors  $u_1(A) \leq_{cx} u_2(A)$ .



La Proposition 6 indique qu'il suffit que deux contrats se croisent une seule fois pour pouvoir les ordonner à l'ordre convexe. Aussi, puisque les contrats d'assurance sont des éléments de  $\mathcal{G}$  (ou ses espaces dérivés), alors les rétentions sont des fonctions croissantes. Nous pouvons donc appliquer la Proposition 6 directement aux rétentions, et adopter une approche géométrique claire sur le taux de rétention, en adaptant le théorème 3.3.2 de Van Heerwaarden *et al.* (1989). Nous obtenons alors

**Théorème 1.** (*directement adapté de Van Heerwaarden et al. (1989)*) Soient  $g_1, g_2 \in \mathcal{G}_\nu$ . S'il existe un  $y_0 \geq 0$  tel que  $S_{g_1}(y) \leq S_{g_2}(y)$  pour  $0 \leq y \leq y_0$  et  $S_{g_1}(y) \geq S_{g_2}(y)$  pour  $y > y_0$ , alors  $S_{I_2}Y = Y - I_2(Y) \leq_{cx} S_{I_1}Y = Y - I_1(Y)$ .

Résoudre les problèmes (17) et (18) revient donc à construire les taux de rétention qui croisent tous les autres dans chacun des espaces considérés. Suite à une discussion sur la forme des taux de rétention, nous obtenons alors les solutions de chacun des deux problèmes. La solution du Problème (17) est donnée par

$$S_\nu^\beta(x) = \beta \mathbb{1}_{\{x \leq \tilde{d}\}} + \frac{\beta \tilde{d}}{x} \mathbb{1}_{\{x > \tilde{d}\}}, \quad (19)$$

où  $\tilde{d}$  est tel que  $\mathbb{E}[(Y - \tilde{d})_+] = \mu - \frac{\nu}{\beta}$ . Nous remarquons que  $S_\nu^\beta$  correspond au taux de rétention d'un stop-loss de rétention  $\tilde{d}$  multiplié d'un facteur arbitraire  $\beta$ . L'assureur multiplie la taille de son portefeuille par  $\beta$  pour les petits sinistres mais continue de transférer les risques plus grands que  $\beta \tilde{d}$  pour ne pas voir sa TVaR augmenter. Pour plus de clarté, la Figure 01 représente la forme du taux de rétention  $S_\nu^\beta$  (en pointillés noirs à gauche) et la fonction de perte cédée associée (en pointillés noirs à droite). Les courbes bleues correspondent au taux de rétention du stop-loss (à gauche) et sa fonction de perte cédée associée (à droite).

Puisque dans le Problème (18) le taux de rétention n'est pas borné, le meilleur taux de rétention (à l'ordre convexe) est celui où la portion horizontale du taux de rétention est la plus faible. Nous obtenons ainsi la solution du Problème (18), donnée par

$$g^*(x) = x - \mathbb{E}[Y] + \nu.$$

Le Chapitre 4 interprète les solutions de chacun de ces problèmes unilatéraux, nous y renvoyons directement le lecteur. Notons toutefois que la forme de ces solutions permet d'écrire que

$$S_{g^*}Y \leq_{cx} S_\nu^\beta Y \leq_{cx} S_{SL}Y.$$

Autrement dit, le partenariat optimal unilatéral permet d'obtenir une rétention plus faible à l'ordre convexe que celle issue du stop-loss : nous avons ainsi démontré dans notre cadre d'étude qu'à prix égal, le partenariat est plus efficient que la réassurance traditionnelle.

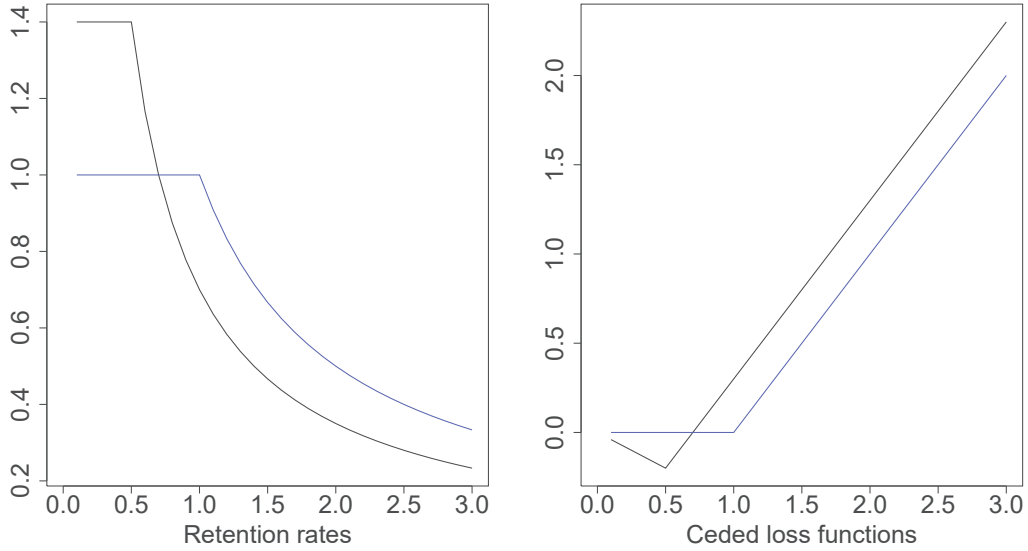


FIGURE 01 – A gauche :  $S_\nu^\beta$  définie par l'Equation (19) (pointillés noirs) et  $S_{SL}$  (courbe bleue); A droite :  $x - g_\nu^\beta(x)$  (pointillés noirs) et  $x - I_{SL}(x)$  (courbe bleue).

Dans la suite du Chapitre 4, nous élargissons le partenariat optimal au cadre bilatéral, qui correspond à une extension du cadre du Chapitre 3. Dans celui-ci, nous étudions le rôle du risque de base et celui de l'asymétrie d'information dans le choix du type de la transaction, entre indicielle et indemnitare. La formulation du problème général implique un réassureur disposant d'une exposition initiale particulière contre laquelle le risque transféré par l'assureur constitue une couverture naturelle. La section suivante présente les motivations sous-jacentes à cette forme particulière puis formule les problèmes traités dans le Chapitre 3. Pour terminer, nous présentons la Pareto-optimalité introduite dans le contexte du partenariat optimal du Chapitre 4 comme la généralisation de la formulation des problèmes traités dans le Chapitre 3.

#### IV.2.2 Le transfert bilatéral et Pareto-optimalité

A partir des travaux de Borch (1960b,c, 1962), l'étude de la réassurance optimale a pris en compte les préférences du réassureur dans la formulation du problème de partage de risque et introduit la Pareto-optimalité. Reprise par Raviv (1979) dans le cadre de l'utilité espérée, l'approche bilatérale de la réassurance optimale a connu, comme pour l'approche unilatérale, un engouement particulier dans la littérature actuarielle. Parmi les nombreuses contributions, celles de Gerber (1978), Barrieu et Scandolo (2008), Cai *et al.* (2017), Asimit *et al.* (2020) jouent un rôle particulier dans la thèse; nous y reviendrons dans ce qui suit. Aussi les récentes contributions de Jiang *et al.* (2018), Asimit et Boonen (2018) et Asimit *et al.* (2020) se concentrent sur la détermination des solutions Pareto-optimales en

considérant différentes formes de mesures et contraintes de prix. [Albrecher et al. \(2017\)](#) proposent une revue de la littérature qui apportera les détails de la littérature sur la réassurance bilatérale au lecteur intéressé.

Notons pour terminer que la thèse traite de la réassurance optimale (et son extension au partenariat optimal) mais n'aborde pas les problématiques de partage optimal, en lien avec un partage « financier » du risque dans lequel l'espace des formes de transfert n'est pas contraint. Le lecteur est renvoyé vers [Barrieu et El Karoui \(2005\)](#), [Jouini et al. \(2008\)](#) et [Embrechts et al. \(2018\)](#) pour une introduction à ces problématiques. Nous utiliserons marginalement une technique de résolution issue de cette littérature, les inf-convolutions présentées dans la section IV.2.3, dans le cadre d'un problème bilatéral traité dans le Chapitre 3.

Dans les Chapitres 3 et 4, le réassureur impliqué dans la transaction est exposé à un risque initial, noté  $X$ . La prise en compte de l'exposition initiale du réassureur constitue, dans le cadre de la littérature sur la réassurance optimale, une nouveauté qui donnera lieu à des contributions techniques sur la comparaison de sommes de variables aléatoires dépendantes, que nous aborderons dans la section IV.2.3. Pour le moment, nous motivons et développons les problèmes traités dans les Chapitres 3 et 4.

La motivation principale du Chapitre 3 découle d'un problème pratique que le gérant d'un fonds d'*insurance linked securities* a porté à notre attention. Nous l'avons vu tout au long de cette introduction, les transactions indicielles sont basées sur des indices et non sur les pertes effectives subies par l'acheteur de protection, contrairement aux transactions indemnitaires. Par conséquent, le vendeur de protection indicielle n'est exposé qu'au risque climatique pur et non au risque indemnitaire. En supposant que son exposition dépende suffisamment d'un phénomène naturel donné, il peut dans certains cas utiliser des phénomènes naturels « inverses » qui serviront de couverture contre son exposition initiale. Le Chapitre 3 fait référence à deux exemples de tels phénomènes : l'alternance des cycles El Niño et La Niña, et les risques de longévité et mortalité. Les deux exemples sont précisément détaillés dans le corps du chapitre. Pour faciliter la compréhension des motivations, nous développons nos propos avec l'illustration liée aux cycles El Niño et La Niña, déjà évoqués plus haut dans cette introduction.

De façon schématique, [Glantz \(2001\)](#) et [Wallace et Vogel \(1994\)](#) montrent que la saison des ouragans en Amérique du Nord est particulièrement intense lors des cycles La Niña mais que le phénomène est à la fois source de sécheresse dans le sud des Etats-Unis. A l'inverse, El Niño entraîne une augmentation de la température de l'Océan Pacifique, qui limite la formation d'ouragans dans l'Océan Atlantique. Par contre, El Niño provoque des précipitations anormalement élevées dans le sud des Etats-Unis, favorisant ainsi le risque d'inondation. Par conséquent, un réassureur exposé au risque ouragan (dont l'occurrence est favorisé pendant La Niña) peut se couvrir en réassurant de façon indicielle le risque inondation d'un assureur (particulièrement dépendant de El Niño). Alors, ce réassureur limitera la

variance globale de son portefeuille et s'affranchira des problématiques associées à l'asymétrie d'information, déjà évoqués à la section I.1.1. En revanche, si l'assureur n'est pas réellement exposé au phénomène El Niño, il fait face au risque de base inhérent à la forme indicielle de la transaction. Cet assureur aurait alors plutôt tendance à préférer une couverture indemnitaire. Dès lors, cet arbitrage entre risque de base et asymétrie d'information constitue l'objet d'étude du Chapitre 3.

Dans ce chapitre, la perte de l'assureur est supposée pouvoir se décomposer en deux parties indépendantes,  $Y$  et  $S$ . La composante  $Y$  représente le risque paramétrique (par exemple lié à El Niño) tandis que la composante  $S$  correspond à l'aléa résiduel. Nous supposons que l'assureur et le réassureur mesurent leurs préférences respectivement par la  $\text{TVaR}_\alpha$  et  $\text{TVaR}_\beta$ ,  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ . Cette hypothèse permet de prendre en compte une disparité dans les niveaux de prudence de chacun des deux participants, tout en conservant l'approche basée sur l'ordre convexe. Pour mettre en lumière le rôle du risque de base et celui de l'asymétrie d'information, nous représentons le marché du transfert de risque de deux façons : le transfert peut être soit indiciel, soit indemnitaire.

Pour chacun des types de transfert, nous considérons dans un premier temps les transactions parfaites, c'est-à-dire sans risque de base dans la transaction indicielle et sans asymétrie d'information dans la transaction indemnitaire. Dans ces cas là, le problème indiciel consiste à trouver le contrat qui réalise l'infimum suivant

$$\begin{cases} \inf_{I \in \mathcal{I}} \text{TVaR}_\alpha(S + Y - I(Y) + \pi) \\ \text{s.t. } \text{TVaR}_\beta(X + I(Y) - \pi) \leq \text{TVaR}_\beta(X), \end{cases} \quad (20)$$

tandis que le problème indemnitaire correspond à obtenir la forme de réassurance qui réalise l'infimum donné par

$$\begin{cases} \inf_{I \in \mathcal{I}} \text{TVaR}_\alpha(S + Y - I(Y + S) + \pi) \\ \text{s.t. } \text{TVaR}_\beta(X + I(Y + S) - \pi) \leq \text{TVaR}_\beta(X). \end{cases} \quad (21)$$

Dans les deux cas, le réassureur propose un prix de telle sorte que sa situation finale n'empire pas sa situation initiale. Notons que dans la formulation du Problème (20), la couverture  $I$  ne concerne bien que le risque paramétrique  $Y$  de l'assureur alors qu'elle prend en compte  $Y + S$  dans le cadre de la transaction indemnitaire (Problème (21)). Ensuite, la convexité des problèmes, couplée à l'invariance par translation de la  $\text{TVaR}$  permettent d'identifier la forme de la prime comme

$$\pi(I(\cdot)) = \text{TVaR}_\beta(X + I(\cdot)) - \text{TVaR}_\beta(X).$$

Ainsi, nous sortons du cadre de la détermination du prix par l'espérance de la perte cédée. Grâce à la forme de la prime  $\pi$ , les Problèmes (20) et (21) peuvent être donnés sous une forme réduite. Dans le cas de la transaction indicielle parfaite, le problème revient à chercher le contrat qui réalise l'infimum

donné par

$$\inf_{I \in \mathcal{I}} \{\text{TVaR}_\alpha(S + Y - I(Y)) + \text{TVaR}_\beta(X + I(Y))\},$$

et par

$$\inf_{I \in \mathcal{I}} \{\text{TVaR}_\alpha(S + Y - I(Y + S)) + \text{TVaR}_\beta(X + I(Y + S))\},$$

dans le cas de la transaction indemnitaire parfaite. Le Chapitre 3 apporte les solutions de chacun de ces deux premiers problèmes qui serviront de références pour comparer les cas incluant le risque de base, et l'asymétrie d'information. La section suivante expose les outils nécessaires à l'obtention des solutions de chacun de ces problèmes. Pour le moment, notons  $\mathcal{E}_{\text{Index}}$  et  $\mathcal{E}_{\text{Indemnity}}$  la situation finale optimale dans les transactions indicielle et indemnitaire parfaites. Le premier résultat que nous obtenons consiste à dire que

$$\mathcal{E}_{\text{Indemnity}} \leq \mathcal{E}_{\text{Index}}.$$

La transaction indemnitaire parfaite est toujours préférée à la transaction indicielle parfaite.

L'étape suivante dans le Chapitre 3 consiste à ajouter du risque de base dans la transaction indicielle et de l'asymétrie d'information dans la transaction indemnitaire. Le risque de base découle du fait que le réassureur ne propose en réalité pas une couverture indicielle adossée à la perte paramétrique  $Y$  de l'assureur mais plutôt à un indice  $W$ . En cohérence avec les motivations des Chapitres 1 et 2, l'indice  $W$  est tel que  $W \leq_{cx} Y$ . De cette façon l'indice est en moyenne égal à la perte paramétrique, mais ne capte pas toute sa variabilité. La variable  $W$  est affublée d'autres hypothèses techniques dans le corps du Chapitre 3; nous y renvoyons directement le lecteur. Le problème issu de la transaction indicielle prenant en compte le risque de base revient à trouver le contrat  $I \in \mathcal{I}$  qui réalise l'infimum suivant

$$\inf_{I \in \mathcal{I}} \{\text{TVaR}_\alpha(S + Y - I(W)) + \text{TVaR}_\beta(X + I(W))\}.$$

Notons que la couverture proposée par le réassureur est bien adossée à  $W$  et plus à  $Y$ . Nous parvenons à résoudre ce problème d'optimisation et en notant  $\mathcal{E}_{\text{Index Basis Risk}}$  la situation finale optimale dans ce cas, nous obtenons que

$$\mathcal{E}_{\text{Index}} \leq \mathcal{E}_{\text{Index Basis Risk}}.$$

Autrement dit, l'ajout du risque de base détériore, comme nous l'attendions, la qualité de la transaction indicielle.

Pour terminer, nous prenons l'asymétrie d'information dans la transaction indemnitaire. Pour cela, nous nous basons sur les travaux de [Cutler et Zeckhauser \(1999\)](#) qui montrent que l'asymétrie d'information peut être de deux types. D'abord, l'asymétrie d'information peut toucher la distribution de la variable considérée mais pas son amplitude. Cette approche est connue sous le nom de croyances hétérogènes dans la littérature et est par exemple mise en oeuvre dans les travaux de [Acciaio et Svindland \(2009\)](#),

Ghossoub (2017, 2016), Boonen (2016) ou encore Boonen et Ghossoub (2019). Techniquement, cela conduit à considérer que l'assureur et le réassureur voient la perte sous des mesures de probabilité différentes : ainsi, le même évènement n'a pas la même probabilité d'occurrence. La modélisation de l'asymétrie d'information par les croyances hétérogènes n'est pas celle retenue dans la thèse.

Ensuite, Cutler et Zeckhauser (1999) affirment que l'asymétrie d'information peut porter sur la taille de la perte. Dans ce cas, les auteurs considèrent que la perte est multipliée par un facteur reflétant les croyances de l'assureur et du réassureur alors que Jean-Baptiste et Santomero (2000) proposent d'ajouter une variable aléatoire positive à la perte initiale de façon à influencer sur sa taille. Dans le Chapitre 3, nous retenons une approche qui allie ces deux points de vue, puisque nous représentons l'asymétrie d'information par une composante aléatoire additive  $w\tilde{S}$ , où  $w \geq 0$  et  $\tilde{S}$  est positive et indépendante de la perte  $Y + S$  de l'assureur. Dans cette mesure, nous considérons une asymétrie sur la probabilité ( $w = 1$ ) et sur la magnitude en fonction de la taille de  $w$ .

Le problème issu de la transaction indemnitaire avec asymétrie d'information revient cette fois à trouver le contrat  $I \in \mathcal{I}$  qui réalise l'infimum suivant

$$\inf_{I \in \mathcal{I}} \{ \text{TVaR}_\alpha(Y + S - I(Y + S)) + \text{TVaR}_\beta(X + I(Y + S + w\tilde{S})) \}.$$

Notons que l'asymétrie d'information n'intervient que du côté du réassureur : il tarifie la couverture  $I$  à partir de sa perception de la perte de l'assureur, qu'il voit comme  $Y + S + w\tilde{S}$  au lieu de  $Y + S$ . En revanche l'assureur continue de recevoir une couverture indemnitaire, donc sur sa perte  $Y + S$ . A l'inverse des cas précédents, nous n'apportons pas la forme explicite de la solution de ce problème. En revanche, en notant

$$\psi(w) = \inf_{I \in \mathcal{I}} \{ \text{TVaR}_\alpha(\tilde{Y} - I(\tilde{Y})) + \text{TVaR}_\beta(X + I(\tilde{Y} + w\tilde{S})) \} - \text{TVaR}_\beta(X), \quad w \geq 0,$$

nous parvenons à répondre à la question initiale motivant le Chapitre 3, à propos du rôle du risque de base et de l'asymétrie d'information sur le choix du type de la transaction. La fonction  $\psi$  correspond à la situation finale optimale issue de la transaction indemnitaire avec une asymétrie d'information d'intensité  $w$ .

Alors, l'apport pratique principal du Chapitre 3 est que nous montrons que l'intensité de l'asymétrie d'information est responsable du choix de la forme de la transaction au sens où il existe deux valeurs  $w^*$  et  $\tilde{w}$  vérifiant  $w^* \leq \tilde{w}$  telles que

$$\mathcal{E}_{\text{Indemnity}} = \psi(0) \leq \psi(w_1) \leq \mathcal{E}_{\text{Index}} \leq \psi(w_2) \leq \mathcal{E}_{\text{Index Basis Risk}} \leq \psi(w_3), \quad (22)$$

où  $w_1 \leq w^*$ ,  $w_2 \in [w^*, \tilde{w}]$  et  $w_3 \geq \tilde{w}$ .

Pour un niveau de risque de base donné, l'inégalité (22) montre que l'intensité de l'asymétrie est déterminante dans le choix du type de la transaction. Lorsque l'asymétrie d'information est modérément

faible ( $w \leq w^*$ ), la transaction indemnitaire est préférée à la transaction indicielle parfaite. La prise en compte du risque de base permet de décaler cette préférence jusqu'au niveau  $\tilde{w}$  d'intensité de l'asymétrie d'information. Enfin, si l'asymétrie d'information est trop importante ( $w \geq \tilde{w}$ ), c'est la forme indicielle qui est préférée. Dans le cadre du Chapitre 3, l'asymétrie n'intervient que du côté du réassureur, se répercutant ainsi sur le prix. A cet égard, ce résultat est cohérent avec les travaux de [Jean-Baptiste et Santomero \(2000\)](#) qui affirment que l'asymétrie d'information affecte à la fois les coûts de la réassurance et le montant de réassurance souscrit. Aussi, le résultat principal du Chapitre 3 permet de faire la lumière, du moins partiellement, sur l'évolution du marché des obligations catastrophe en cohérence avec l'explication qualitative apportée par [Spry \(2009\)](#). Pour rappel, alors que la part des obligations catastrophe à déclenchement paramétrique était comparable à celle des obligations catastrophe à déclenchement indemnitaire en 2003, le déclenchement paramétrique ne représente qu'une faible portion du marché en 2019, tandis que la part des déclenchements indemnitaires a continué d'augmenter. [Spry \(2009\)](#) explique que cela est dû au fait que les investisseurs se sont aujourd'hui accoutumés au risque indemnitaire assurantiel, alors que la proportion importante d'émissions paramétriques - et donc l'acceptation d'un certain niveau de risque de base par les sponsors - se justifiait par une connaissance imparfaite du marché assurantiel de la part des investisseurs. Cette conclusion est exactement reflétée par l'inégalité (22) : l'intensité de l'asymétrie s'est peu à peu réduite, correspondant à une décroissance de  $w$ , permettant ainsi de passer des transactions indicielles aux transactions indemnitaires.

Pour terminer cette section, revenons au cadre du partenariat du Chapitre 4 afin de présenter le problème bilatéral qui y est étudié. Comme dans le Chapitre 3, le cadre bilatéral fait intervenir un réassureur exposé à un risque initial  $X$ . Aussi, nous continuons de supposer que ce risque  $X$  peut être couvert par le risque  $Y$  transféré par le réassureur. Dans le cadre du partenariat, le réassureur bénéficie ainsi d'une couverture naturelle contre son exposition initiale.

Comme dans le cadre unilatéral, le cadre bilatéral s'intéresse en réalité à trois problèmes. Dans un premier temps nous examinons le problème de réassurance optimale et travaillons alors dans l'espace  $\mathcal{I}$ . Ensuite, nous nous penchons sur le partenariat optimal dans le cas où le taux de rétention est borné, et nous travaillons dans l'ensemble  $\mathcal{G}^\beta$ . Enfin, nous relâchons cette contrainte et nous clôturons le chapitre sur l'étude du partenariat optimal dans l'ensemble  $\mathcal{G}$ . Les résultats qui vont suivre sont valables pour les trois ensembles. Nous notons alors  $\mathcal{A}$  l'ensemble des contrats admissibles, et notons  $f$  la forme du transfert. En se souvenant que le prix d'un contrat  $f$  est donné par  $(1 + \theta)\mathbb{E}[f(Y)]$  dans ce chapitre, nous notons

$$R_f = Y - f(Y) + (1 + \theta)\mathbb{E}[f(Y)] \quad \text{et} \quad C_f = X + f(Y) - (1 + \theta)\mathbb{E}[f(Y)],$$

où  $R_f$  correspond à la rétention de l'assureur, et  $C_f$  représente la situation finale du réassureur.

Le cadre bilatéral du Chapitre 4 est basé sur la Pareto-optimalité, abordée dans la section 4.4.2 de

ce chapitre. Dans le cadre bilatéral, la Pareto-optimalité se définit comme l'équilibre où l'assureur ne peut minimiser davantage sa mesure de risque sans détériorer la mesure du réassureur. D'une façon formelle, la Pareto-optimalité se définit ainsi.

**Définition 6.** (*Définition 4.4.1 du Chapitre 4*) Un contrat  $f^*$  est Pareto-optimal dans  $\mathcal{A}$  si il n'existe pas de contrat  $f \in \mathcal{A}$  tel que  $TVaR_\alpha(R_f) \leq TVaR_{f^*}(R_{f^*})$  et  $TVaR_\alpha(C_f) \leq TVaR_{f^*}(C_{f^*})$ , où au moins une des deux inégalités est stricte.

Gerber (1978) et Barrieu et Scandolo (2008), entre autres, ont montré que trouver un partage Pareto optimal revient à minimiser une combinaison convexe des mesures de chacun des participants. Alors, en repartant de ce résultat, et en utilisant les contributions récentes de Cai *et al.* (2017) et Asimit *et al.* (2020), le Chapitre 4 s'intéresse à la résolution de problèmes dont la forme générale consiste à trouver le contrat  $f \in \mathcal{A}$  qui réalise l'infimum suivant

$$\inf_{f \in \mathcal{A}} \{\lambda TVaR_\alpha(R_f) + (1 - \lambda)TVaR_\beta(C_f)\}, \quad (23)$$

où  $\lambda$  et  $1 - \lambda$  représentent les pouvoirs de négociation respectifs de l'assureur et du réassureur. Bien que l'approche diffère, notons que le cas  $\lambda = 1/2$  correspond aux problèmes parfaits traités dans le Chapitre 3.

Résoudre le Problème (23) consiste à donner les solutions pour chacune des valeurs de  $\lambda$  : il convient alors de s'assurer qu'elles existent.

Pour cela, notons  $\mathcal{S} = \cup_{\lambda \in (0,1)} \mathcal{S}_\lambda$  où

$$\mathcal{S}_\lambda = \arg \inf_{f \in \mathcal{A}} \{\lambda TVaR_\alpha(R_f) + (1 - \lambda)TVaR_\beta(C_f)\}$$

est l'ensemble des solutions du Problème (23), pour chaque  $\lambda \in (0, 1)$ . Alors nous déduisons des travaux de Asimit *et al.* (2020) le théorème suivant, assurant l'existence des solutions Pareto-optimales.

**Théorème 2.** (*adapté de Asimit et al. (2020), Théorème 4.4.1 du Chapitre 4*)

$$f \in \mathcal{A} \text{ est Pareto-optimale} \iff f \in \mathcal{S}.$$

Ainsi, résoudre le Problème (23) permet d'obtenir les solutions Pareto-optimales dans l'ensemble  $\mathcal{A}$ . Le Chapitre 4 se termine par la résolution des Problèmes (23) pour  $\mathcal{A} = \mathcal{I}$  (section 4.5), pour  $\mathcal{A} = \mathcal{G}^\beta$  (section 4.6.1) et pour  $\mathcal{A} = \mathcal{G}$  (section 4.6.2).

Comme dans le cas unilatéral, nous parvenons à montrer que le partenariat optimal est plus efficient que la réassurance traditionnelle.



L'apport de la modélisation des problèmes précédents réside dans la prise en compte de la position initiale du réassureur. Comme nous l'avons présenté au début de cette section, nous supposons que le réassureur utilise le risque transféré par l'assureur pour se couvrir contre son risque initial. Il convient maintenant de préciser la nature formelle de ce lien, et de fournir les techniques nécessaires à l'obtention des résultats présentés tout au long de cette section.

### IV.2.3 Les résultats techniques liés à l'exposition initiale du réassureur

Dans le cadre unilatéral, la détermination des résultats du Chapitre 4 est basée, nous l'avons vu sur une approche géométrique due à [Ohlin \(1969b\)](#) qui permet une comparaison claire des rétentions à l'ordre convexe et donc d'obtenir une hiérarchie dans les préférences de l'assureur.

Mettons un instant de côté notre motivation liée à l'utilisation des transferts indiciels comme couverture naturelle pour le réassureur. En revanche, ce réassureur continue de mesurer ses préférences à l'aide de la  $\text{TVaR}_\beta$ ,  $\beta \in [0, 1]$ . Dans le cadre bilatéral, la difficulté majeure dans l'obtention de la solution des problèmes précédemment présentés provient de la présence de l'exposition initiale du réassureur, puisque les intérêts de l'assureur et du réassureur sont a priori opposés.

Supposons pour l'instant que le réassureur n'a pas d'exposition initiale, i.e.  $X = 0$ , et considérons deux contrats de réassurance  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$  qui se croisent comme dans la Proposition 6. Dans ce cas, nous obtenons que  $I_1(Y) \leq_{cx} I_2(Y)$ , i.e. le réassureur préfère le contrat  $I_1$  et  $Y - I_2(Y) \leq_{cx} Y - I_1(Y)$ , c'est-à-dire que l'assureur préfère le contrat  $I_2$ .

Ajoutons maintenant une exposition initiale  $X$  indépendante de  $Y$ . En réalité, ce cas ne change pas l'opposition des intérêts puisque  $I_1(Y) \leq_{cx} I_2(Y) \Rightarrow I_1(Y) + X \leq_{cx} I_2(Y) + X$ . Bien entendu, le cas indépendant ne nous intéresse guère, et la question théorique sous-jacente à la motivation présentée dans le Chapitre 3 revient à se demander s'il existe des cas où le réassureur pourrait préférer  $I_2$  à  $I_1$ .

La problématique des intérêts opposés n'intervient que parce que nous restreignons l'espace des contrats admissibles. Lorsqu'aucune contrainte n'est requise sur la forme du transfert, alors il est possible d'obtenir directement la forme de l'échange (et plus de la réassurance) optimale. Prenons par exemple le Problème (21) de la section précédente, pour lequel nous relâchons toutes les contraintes à propos de l'ensemble de contrats. Au lieu de chercher un  $I \in \mathcal{I}$  nous cherchons une variable  $F \in \mathcal{X}$  où  $\mathcal{X}$  représente l'ensemble des variables impliquées dans la transaction. Alors le problème revient à trouver la variable  $F^*$  qui réalise l'infimum suivant

$$\inf_{F \in \mathcal{X}} \{ \text{TVaR}_\alpha(S + Y - F) + \text{TVaR}_\beta(X + F) \}. \quad (24)$$

Posons  $U = Y + S - F$  et  $V = X + Y + S$ , alors

$$\inf_{F \in \mathcal{X}} \{\text{TVaR}_\alpha(Y + S - F) + \text{TVaR}_\beta(X + F)\} = \inf_{U \in \mathcal{X}} \{\text{TVaR}_\alpha(U) + \text{TVaR}_\beta(V - U)\}.$$

En reprenant les notations de [Barrieu et El Karoui \(2005\)](#), l'infimum impliqué dans l'Equation (24) devient une inf-convolution, i.e.

$$\inf_{U \in \mathcal{X}} \{\text{TVaR}_\alpha(U) + \text{TVaR}_\beta(V - U)\} = \text{TVaR}_\beta \square \text{TVaR}_\alpha(V).$$

Dans le cadre particulier de la TVaR, [Jouini et al. \(2008\)](#) montrent que la solution de cette inf-convolution est donnée par

$$\text{TVaR}_\beta \square \text{TVaR}_\alpha(V) = \text{TVaR}_{\alpha \wedge \beta}(V). \quad (25)$$

Il résulte alors que si  $\beta \leq \alpha$ , alors  $F^* = Y + S$ . Dans ce cas, l'assureur transfère tout son risque au réassureur. C'est d'ailleurs la solution retrouvée dans le Chapitre 3.

En revanche, si  $\alpha \leq \beta$ , alors  $F^* = -X$  : l'assureur prend en charge le risque du réassureur. Cette forme de partage n'est pas admissible du point de vue de la réassurance traditionnelle. Notons en dernier lieu que la détermination de l'Equation (25) ne se base pas sur le lien de dépendance qui peut potentiellement exister entre  $X$  et  $Y$ .

Puisque dans les Chapitres 3 et 4 nous travaillons dans des ensembles de forme de transfert restreints, il convient de proposer une méthode qui permette de résoudre chacun des problèmes considérés. Dans le cadre de la motivation initiale concernant l'utilisation des transferts paramétriques par le réassureur en tant que couverture naturelle contre son exposition, nous nous sommes intéressés dans le Chapitre 3 à déterminer les conditions sous lesquelles  $X$  et  $Y$  sont tels que

$$I_1(Y) \leq_{cx} I_2(Y) \Rightarrow X + I_2(Y) \leq_{cx} X + I_1(Y).$$

Par exemple, nous nous demandons quand est-ce que le réassureur a intérêt à vendre un stop-loss plutôt qu'un quota-share. Plus généralement, nous cherchons à caractériser l'ensemble  $\mathcal{D}$  défini comme suit.

$$\mathcal{D}(X) = \{Y \mid X + Y \leq_{cx} X + Z, \forall Z \leq_{cx} Y\}.$$

Cet ensemble décrit bien l'ensemble des positions  $Y$  qu'il faut ajouter à  $X$  pour minimiser la variabilité de la position  $X + Y$ . Dans la littérature actuarielle, il existe des résultats liant la somme de variables aléatoires dépendantes et l'ordre convexe dont certains sont utiles au développement des résultats du Chapitre 3 ; citons par exemple les travaux de [Dhaene et Goovaerts \(1996\)](#), [Dhaene et al. \(2002\)](#), et plus récemment [Cheung \(2010a\)](#), [Cheung et Lo \(2013\)](#) et [Chaoubi et al. \(2020\)](#).

En particulier, [Cheung et al. \(2014\)](#) s'intéressent à un ensemble qu'ils appellent l'ensemble des *risk reducers* de  $X$ , a priori assez proche de notre ensemble  $\mathcal{D}(X)$ . En effet, [Cheung et al. \(2014\)](#) définissent

l'ensemble des risk reducers, noté  $R(X)$ , comme l'ensemble des  $Y$  tels que

$$X + Y \leq_{cx} X + \mathbb{E}[Y].$$

Alors, l'inégalité convexe est exactement de l'ensemble  $\mathcal{D}(X)$  en particulier pour  $Z = \mathbb{E}[Y]$ . Notons au passage que l'espérance vérifie bien  $\mathbb{E}[Y] \leq_{cx} Y$  puisque le moment d'ordre 1 est la distribution minimale au sens 2-convexe. Plus précisément, [Cheung et al. \(2014\)](#) travaillent avec l'ensemble des risk reducers anti-monotones, noté  $H(X)$  et défini par

$$H(X) = \{Y \mid (X, Y) \text{ est anti-monotone}\}.$$

Arrêtons-nous un instant sur la notion d'anti-monotonie. L'Annexe du Chapitre 3 contient plusieurs définitions de cette notion, mais celle qui nous intéresse particulièrement ici est celle donnée par [Denneberg \(1994\)](#). En effet, l'auteur assure que  $(A, B)$  est comonotone s'il existe une variable  $C$  et deux fonctions croissantes  $u$  et  $v$  telles que  $A = u(C)$  et  $B = v(C)$ . En prenant  $u = \text{Id}$ , alors  $(A, B)$  est comonotone si et seulement si  $B = v(A)$ . Enfin,  $A$  et  $B$  sont anti-monotones si  $A$  et  $-B$  sont comonotones. Il résulte que si  $(A, B)$  est anti-monotone, alors il existe une fonction croissante  $v$  telle que  $B = -v(A)$ . Ainsi, [Cheung et al. \(2014\)](#) montrent que  $Y \in H(X) \iff Y = -h(X)$ , où  $h$  est une fonction croissante et 1-Lipschitz.

Le premier résultat que nous obtenons concernant l'ensemble  $\mathcal{D}(X)$  est le suivant.

**Lemme 1.** (*Lemme 3.3.1 du Chapitre 3*) *Si  $Y \in \mathcal{D}(X)$ , alors  $(X, Y)$  est anti-monotone.*

Alors, les éléments de l'ensemble  $H(X)$  introduit par [Cheung et al. \(2014\)](#) constituent des candidats potentiels pour être des éléments de  $\mathcal{D}(X)$ . En réalité, nous parvenons à montrer le théorème suivant, qui consitue l'une des principales contributions techniques de la thèse.

**Théorème 3.** (*Théorème 3.3.2 du Chapitre 3*)

$$Y \in \mathcal{D}(X) \iff Y \in H(X).$$

A partir du Théorème 3, nous montrons le résultat suivant, qui sera à la base de la détermination des solutions des problèmes bilatéraux considérés dans les Chapitres 3 et 4 de la thèse.

**Proposition 7.** (*Proposition 3.4.2 du Chapitre 3*) *Soit  $Y \in H(X)$  et  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}_\nu$ . Si  $I_1(Y) \leq_{cx} I_2(Y)$ , alors*

$$X + I_2(Y) \leq_{cx} X + I_1(Y).$$

Autrement dit, lorsque  $Y$  est un risk reducer anti-monotone avec  $X$ , alors le réassureur et l'assureur ont des intérêts communs : tous les deux préfèrent le contrat contenant le plus de variabilité. Du point de vue de l'assureur, cela lui permet de se délester de sa variabilité pour réduire sa mesure finale. Du côté du réassureur, cela lui permet de maximiser l'efficacité de la couverture naturelle que représente le risque  $Y$  pour son exposition initiale  $X$ .

Supposer que  $Y$  est un élément de  $H(X)$  permet d'utiliser la fonction de lien  $h$  dans une approche géométrique pour ordonner les préférences du réassureur. Ainsi, l'hypothèse fondamentale faite dans les Chapitres 3 et 4 de la thèse est de considérer que le risque de l'assureur  $Y$  est un élément de l'ensemble  $H(X) = \mathcal{D}(X)$ .

Dans le cadre du Chapitre 3, nous supposons uniquement que  $Y$  est un élément de  $H(X)$  sans que  $S+Y$  le soit. De cette façon, nous imposons la corrélation négative entre la position initiale du réassureur  $X$  et le risque paramétrique  $Y$  de l'assureur. La perte totale  $S+Y$  ne souffre pas de cette contrainte. Pour terminer, notons que l'hypothèse  $Y \in H(X)$  revient à supposer une corrélation négative pure entre les risques de l'assureur et du réassureur. Cette hypothèse est en pratique pas réellement vérifiée. En revenant à l'exemple de l'alternance des cycles El Niño et La Niña, les phénomènes ont des tendances inversées mais il est possible qu'un ouragan de grande intensité survienne lors d'un cycle El Niño. Aussi,  $Y \in H(X)$  revient à supposer que le risque du réassureur est toujours plus grand que le risque de l'assureur en raison de la forme de la fonction  $h$  liant ces deux risques. Cette contrainte est moins gênante en pratique, étant donné par exemple l'accumulation du risque ouragan en Floride chez les réassureurs. Malgré les inconvénients pratiques inhérents à cette hypothèse, elle demeure néanmoins une première approximation raisonnable pour représenter le lien entre les risques de l'assureur et du réassureur dans notre contexte. Elle a également le mérite de mettre en lumière un point important qu'il conviendra de prendre en compte dans des recherches futures : étudier le rôle de la dépendance entre le risque transféré au réassureur et sa position initiale présuppose d'analyser à la fois la structure de dépendance et la taille des risques introduits. En effet, relâcher l'hypothèse d'anti-monotonie entre l'exposition du réassureur et le risque transféré par l'assureur constitue l'une des quatre pistes de recherche proposée dans la partie Conclusion et Perspectives de recherche.

Ainsi s'achève l'introduction générale. Tout au long de ses quatre sections, nous avons mis en lumière à la fois les motivations et les contributions propres à chaque chapitre, permettant, nous l'espérons, d'en faciliter la lecture.

## Bibliographie

- Beatrice ACCIAIO et Gregor SVINDLAND : Optimal risk sharing with different reference probabilities. *Insurance : Mathematics and Economics*, 44(3):426–433, 2009.
- Hansjörg ALBRECHER, Jan BEIRLANT et Jozef L TEUGELS : *Reinsurance : Actuarial and Statistical Aspects*. Wiley, 2017.
- Mahdi ALIMOHAMMADI, Mohammad Hossein ALAMATSAZ et Erhard CRAMER : Convolutions and generalization of logconcavity : implications and applications. *Naval Research Logistics (NRL)*, 63(2):109–123, 2016.
- Edward ALTMAN, Andrea RESTI et Andrea SIRONI : Default recovery rates in credit risk modelling : a review of the literature and empirical evidence. *Economic Notes*, 33(2):183–208, 2004.
- AM BEST COMPANY : Best’s Market Segment Report, 2020.
- AON SECURITIES : Weather, Climate & Catastrophe Insight, 2019.
- Kenneth J ARROW : Uncertainty and the welfare economics of medical care. *American Economic Review*, 53(5):941–973, 1963.
- Philippe ARTZNER, Freddy DELBAEN, Jean-Marc EBER et David HEATH : Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 9(3):203–228, 1999.
- Alexandru V ASIMIT, Ka Chun CHEUNG, Wing Fung CHONG et Junlei HU : Pareto-optimal insurance contracts with premium budget and minimum charge constraints. *Insurance : Mathematics and Economics*, 95:17–27, 2020.
- Alexandru V ASIMIT, Yichun CHI et Junlei HU : Optimal non-life reinsurance under Solvency II Regime. *Insurance : Mathematics and Economics*, 65:227–237, 2015.
- Alexandru V ASIMIT, Raluca VERNIC et Ricardas ZITIKIS : Background risk models and stepwise portfolio construction. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 18(3):805–827, 2016.
- Vali ASIMIT et Tim J BOONEN : Insurance with multiple insurers : a game-theoretic approach. *European Journal of Operational Research*, 267(2):778–790, 2018.
- Søren ASMUSSEN, Bjarne HØJGAARD et Michael TAKSAR : Optimal risk control and dividend distribution policies : example of excess-of loss reinsurance for an insurance corporation. *Finance and Stochastics*, 4(3):299–324, 2000.

- Sebastain Nde AWONDO, Gauri S DATTA, Octavio A RAMIREZ et Esendugue Greg FONSAH : Small area estimation of insurance premiums and basis risk. Rapport technique, 2013. Annual Meeting, February 2-5, 2013, Orlando, Florida from Southern Agricultural Economics Association.
- Alejandro BALBÁS, Beatriz BALBÁS et Antonio HERAS : Optimal reinsurance with general risk measures. *Insurance : Mathematics and Economics*, 44(3):374–384, 2009.
- Erik BANKS : *Alternative Risk Transfer : Integrated Risk Management Through Insurance, Reinsurance, and the Capital Markets*. Wiley, 2004.
- Mathieu BARGÈS, Stéphane LOISEL et Xavier VENEL : On finite-time ruin probabilities with reinsurance cycles influenced by large claims. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2013(3):163–185, 2013.
- Barry J BARNETT, Christopher B BARRETT et Jerry R SKEES : Poverty traps and index-based risk transfer products. *World Development*, 36(10):1766–1785, 2008.
- Barry J BARNETT, J Roy BLACK, Yingyao HU et Jerry R SKEES : Is area yield insurance competitive with farm yield insurance? *Journal of Agricultural and Resource Economics*, pages 285–301, 2005.
- Pauline BARRIEU et Luca ALBERTINI : *The Handbook of Insurance-Linked Securities*. Wiley, 2009.
- Pauline BARRIEU, Harry BENSUSAN, Nicole EL KAROUÏ, Caroline HILLAIRET, Stéphane LOISEL, Claudia RAVANELLI et Yahia SALHI : Understanding, modelling and managing longevity risk : key issues and main challenges. *Scandinavian actuarial journal*, 2012(3):203–231, 2012.
- Pauline BARRIEU et Nicole EL KAROUÏ : Inf-convolution of risk measures and optimal risk transfer. *Finance and stochastics*, 9(2):269–298, 2005.
- Pauline BARRIEU et Giacomo SCANDOLO : General Pareto optimal allocations and applications to multi-period risks. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 38(1):105–136, 2008.
- Sanjib BASU et Anirban DASGUPTA : The mean, median, and mode of unimodal distributions : a characterization. *Theory of Probability & Its Applications*, 41(2):210–223, 1997.
- Emile MJ BERTIN, Ioan CUCULESCU et Radu THEODORESCU : *Unimodality of Probability Measures*, volume 382. Springer, 2013.
- Enrico BIFFIS et Erik CHAVEZ : Satellite data and machine learning for weather risk management and food security. *Risk Analysis*, 37(8):1508–1521, 2017.
- Hans P BINSWANGER-MKHIZE : Is there too much hype about index-based agricultural insurance? *Journal of Development studies*, 48(2):187–200, 2012.
- Tim J BOONEN : Optimal reinsurance with heterogeneous reference probabilities. *Risks*, 4(3):26, 2016.

- Tim J BOONEN et Mario GHOSOUB : On the existence of a representative reinsurer under heterogeneous beliefs. *Insurance : Mathematics and Economics*, 88:209–225, 2019.
- Karl BORCH : An attempt to determine the optimum amount of stop loss reinsurance. In : Transactions of the 16th International Congress of Actuaries I, 597–610, 1960a.
- Karl BORCH : Reciprocal reinsurance treaties seen as a two-person co-operative game. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1960(1-2):29–58, 1960b.
- Karl BORCH : The safety loading of reinsurance premiums. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1960(3-4):163–184, 1960c.
- Karl BORCH : Equilibrium in a reinsurance market. *Econometrica*, 30(3):424–444, 1962.
- Milton BOYD, Brock PORTH, Lysa PORTH et Daniel TURENNE : The impact of spatial interpolation techniques on spatial basis risk for weather insurance : an application to forage crops. *North American Actuarial Journal*, 23(3):412–433, 2019.
- Patrick L BROCKETT et Samuel H COX : Insurance calculations using incomplete information. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1985(2):94–108, 1985.
- Patrick L BROCKETT, Samuel H COX, Richard D MACMINN et Bo SHI : Best bounds on measures of risk and probability of ruin for Alpha unimodal random variables when there is limited moment information. *Applied Mathematics*, 7(08):765, 2016.
- Ben BROOKES : Risk modelling and the role and benefits of cat indices. In Pauline BARRIEU et Luca ALBERTINI, éditeurs : *The Handbook of Insurance-Linked Securities*, chapitre 7, pages 83–100. Wiley, 2009.
- Max BRUCHE et Carlos GONZÁLEZ-AGUADO : Recovery rates, default probabilities, and the credit cycle. *Journal of Banking & Finance*, 34(4):754–764, 2010.
- Attila BUSSAY, Marijn van der VELDE, Davide FUMAGALLI et Lorenzo SEGUINI : Improving operational maize yield forecasting in Hungary. *Agricultural Systems*, 141:94–106, 2015.
- Jun CAI, Haiyan LIU et Ruodu WANG : Pareto-optimal reinsurance arrangements under general model settings. *Insurance : Mathematics and Economics*, 77:24–37, 2017.
- Jun CAI et Ken Seng TAN : Optimal retention for a stop-loss reinsurance under the VaR and CTE risk measures. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 37(1):93–112, 2007.
- Jun CAI, Ken Seng TAN, Chengguo WENG et Yi ZHANG : Optimal reinsurance under VaR and CTE risk measures. *Insurance : Mathematics and Economics*, 43(1):185–196, 2008.

- Jun CAI et Wei WEI : Optimal reinsurance with positively dependent risks. *Insurance : Mathematics and Economics*, 50(1):57–63, 2012.
- Jun CAI et Chengguo WENG : Optimal reinsurance with expectile. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2016(7):624–645, 2016.
- JV CARNAHAN : Maximum likelihood estimation for the 4-parameter Beta distribution. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 18(2):513–536, 1989.
- Robert L CARTER : *Reinsurance*. Springer, 2013.
- Maria Jose CASTILLO, Stephen BOUCHER et Michael CARTER : Will i be paid after a loss ? evaluating conventional versus index insurance contracts in Ecuadorean agriculture. Rapport technique, UC Davis Working paper., 2012.
- Sommarat CHANTARAT, Andrew G MUDE, Christopher B BARRETT et Michael R CARTER : Designing index-based livestock insurance for managing asset risk in Northern Kenya. *Journal of Risk and Insurance*, 80(1):205–237, 2013.
- Ihsan CHAOUBI, Hélène COSSETTE, Simon-Pierre GADOURY et Etienne MARCEAU : On sums of two counter-monotonic risks. *Insurance : Mathematics and Economics*, 92:47–60, 2020.
- Hua CHEN, J David CUMMINS, Tao SUN et Mary A WEISS : The reinsurance network among US Property–Casualty insurers : Microstructure, insolvency risk, and contagion. *Journal of Risk and Insurance*, 87(2):253–284, 2020.
- Hua CHEN et Tao SUN : Tail risk networks of insurers around the globe : An empirical examination of systemic risk for G-SIIs vs Non-G-SIIs. *Journal of Risk and Insurance*, 87(2):285–318, 2020.
- Ka Chun CHEUNG : Characterizing a comonotonic random vector by the distribution of the sum of its components. *Insurance : Mathematics and Economics*, 47(2):130–136, 2010a.
- Ka Chun CHEUNG : Optimal reinsurance revisited—a geometric approach. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 40(1):221–239, 2010b.
- Ka Chun CHEUNG, Jan DHAENE, Ambrose LO et Qihe TANG : Reducing risk by merging counter-monotonic risks. *Insurance : Mathematics and Economics*, 54:58–65, 2014.
- Ka Chun CHEUNG et Ambrose LO : Characterizations of counter-monotonicity and upper comonotonicity by (tail) convex order. *Insurance : Mathematics and Economics*, 53(2):334–342, 2013.
- Ka Chun CHEUNG et Ambrose LO : Characterizations of optimal reinsurance treaties : a cost-benefit approach. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2017(1):1–28, 2017.



- Yichun CHI : Optimal reinsurance under variance related premium principles. *Insurance : Mathematics and Economics*, 51(2):310–321, 2012.
- Yichun CHI et Fangda LIU : Optimal insurance design in the presence of exclusion clauses. *Insurance : Mathematics and Economics*, 76:185–195, 2017.
- Yichun CHI et Ken Seng TAN : Optimal reinsurance under VaR and CVaR risk measures : a simplified approach. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 41(2):487–509, 2011.
- Yichun CHI et Ken Seng TAN : Optimal reinsurance with general premium principles. *Insurance : Mathematics and Economics*, 52(2):180–189, 2013.
- Yichun CHI et Ken Seng TAN : Optimal incentive compatible insurance with background risk. *Available at SSRN 2589438*, 2015.
- Yichun CHI et Wei WEI : Optimum insurance contracts with background risk and higher-order risk attitudes. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 48(3):1025–1047, 2018.
- Tahir CHOULLI, Michael TAKSAR et Xun Yu ZHOU : A diffusion model for optimal dividend distribution for a company with constraints on risk control. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 41(6):1946–1979, 2003.
- Daniel J CLARKE, Olivier MAHUL et Niraj VERMA : Index based crop insurance product design and ratemaking : the case of modified NAIS in India. Rapport technique, The World Bank, 2012.
- Kristina Yuzva CLEMENT, WJ Wouter BOTZEN, Roy BROUWER et Jeroen CJH AERTS : A global review of the impact of basis risk on the functioning of and demand for index insurance. *International Journal of Disaster Risk Reduction*, 28:845–853, 2018.
- Cassandra R COLE et Kathleen A MCCULLOUGH : A reexamination of the corporate demand for reinsurance. *Journal of Risk and Insurance*, 73(1):169–192, 2006.
- Shawn COLE, Xavier GINÉ, Jeremy TOBACMAN, Petia TOPALOVA, Robert TOWNSEND et James VICKERY : Barriers to household risk management : Evidence from India. *American Economic Journal : Applied Economics*, 5(1):104–35, 2013.
- Benjamin COLLIER, Jerry SKEES et Barry BARNETT : Weather index insurance and climate change : opportunities and challenges in lower income countries. *The Geneva Papers on Risk and Insurance-Issues and Practice*, 34(3):401–424, 2009.
- COMITÉ DE BÂLE SUR LE CONTRÔLE BANCAIRE : Risque de taux d'intérêt dans le portefeuille bancaire. *Banque des Règlements Internationaux*, 2016.

- Sarah CONRADT, Robert FINGER et Martina SPÖRRI : Flexible weather index-based insurance design. *Climate Risk Management*, 10:106–117, 2015.
- Hélène COSSETTE, Thierry DUCHESNE et Étienne MARCEAU : Modeling catastrophes and their impact on insurance portfolios. *North American Actuarial Journal*, 7(4):1–22, 2003.
- Marie-Pier CÔTÉ et Christian GENEST : Dependence in a background risk model. *Journal of Multivariate Analysis*, 172:28–46, 2019.
- Ioan CUCULESCU et Radu THEODORESCU : Multiplicative strong unimodality. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, 40(2):205–214, 1998.
- Christopher L CULP : *The ART of Risk Management : Alternative Risk Transfer, Capital Structure, and the Convergence of Insurance and Capital Markets*, volume 142. Wiley, 2002.
- J David CUMMINS et Mary A WEISS : Convergence of insurance and financial markets : Hybrid and securitized risk-transfer solutions. *Journal of Risk and Insurance*, 76(3):493–545, 2009.
- David M CUTLER et Richard J ZECKHAUSER : Reinsurance for catastrophes and cataclysms. In Kenneth FROOT, éditeur : *The financing of Catastrophe Risk*, pages 233–274. University of Chicago Press, 1999.
- Tobias DALHAUS et Robert FINGER : Can gridded precipitation data and phenological observations reduce basis risk of weather index-based insurance? *Weather, Climate, and Society*, 8(4):409–419, 2016.
- Tobias DALHAUS, Oliver MUSSHOF et Robert FINGER : Phenology information contributes to reduce temporal basis risk in agricultural weather index insurance. *Scientific reports*, 8(1):1–10, 2018.
- Rose-Anne DANA et Marco SCARSINI : Optimal risk sharing with background risk. *Journal of Economic Theory*, 133(1):152–176, 2007.
- A.E. DANESHKHAH : Uncertainty in probability risk assessment : A review. Rapport technique, The University of Sheffield, 2004.
- Jan DE LEEUW, Anton VRIELING, Apurba SHEE, Clement ATZBERGER, Kiros M HADGU, Chandrashekhara M BIRADAR, Humphrey KEAH et Calum TURVEY : The potential and uptake of remote sensing in insurance : A review. *Remote Sensing*, 6(11):10888–10912, 2014.
- F Etienne DE VYLDER : Best upper bounds for integrals with respect to measures allowed to vary under conical and integral constraints. *Insurance : Mathematics and Economics*, 1(2):109–130, 1982.
- F Etienne DE VYLDER : Maximization, under equality constraints, of a functional of a probability distribution. *Insurance : Mathematics and Economics*, 2(1):1–16, 1983.

- F Etienne DE VYLDER et Marc J GOOVAERTS : Analytical best upper bounds on stop-loss premiums. *Insurance : Mathematics and Economics*, 1(3):163–175, 1982.
- F.E. DE VYLDER : *Advanced Risk Theory. A Self-Contained Introduction*. Editions de l'Université Libre de Bruxelles - Swiss Association of Actuaries. Bruxelles, 1996.
- Lokenath DEBNATH et Dambaru BHATTA : *Integral Transforms and Their Applications*. Chapman and Hall, 2006.
- Xiaohui DENG, Barry J BARNETT et Dmitry V VEDENOV : Is there a viable market for area-based crop insurance? *American Journal of Agricultural Economics*, 89(2):508–519, 2007.
- Dieter DENNEBERG : *Non-Additive Measure and Integral*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1994.
- Michel DENUIT : S-convex extrema, Taylor-type expansions and stochastic approximations. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2002(1):45–67, 2002.
- Michel DENUIT, Etienne DE VYLDER et Claude LEFÈVRE : Extremal generators and extremal distributions for the continuous s-convex stochastic orderings. *Insurance : Mathematics and Economics*, 24(3):201–217, 1999.
- Michel DENUIT, Jan DHAENE, Marc GOOVAERTS et Rob KAAS : *Actuarial Theory for Dependent Risks : Measures, Orders and Models*. Wiley, 2006.
- Michel DENUIT, Claude LEFÈVRE et Moshe SHAKED : The s-convex orders among real random variables, with applications. *Mathematical Inequalities and Their Applications*, 1(4):585–613, 1998.
- Stefan DERCON, Ruth Vargas HILL, Daniel CLARKE, Ingo OUTES-LEON et Alemayehu Seyoum TAFESSE : Offering rainfall insurance to informal insurance groups : Evidence from a field experiment in Ethiopia. *Journal of Development Economics*, 106:132–143, 2014.
- Jan DHAENE, Michel DENUIT, Marc J GOOVAERTS, Rob KAAS et David VYNCKE : The concept of comonotonicity in actuarial science and finance : theory. *Insurance : Mathematics and Economics*, 31(1):3–33, 2002.
- Jan DHAENE et Marc J GOOVAERTS : Dependency of risks and stop-loss order. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 26(2):201–212, 1996.
- Georges DIONNE, Neil DOHERTY et Nathalie FOMBARON : Adverse selection in insurance markets. *In Handbook of Insurance*, pages 185–243. Springer, 2000.
- Neil A DOHERTY et Harris SCHLESINGER : The optimal deductible for an insurance policy when initial wealth is random. *Journal of Business*, pages 555–565, 1983.

- Christophe DUTANG, Markus GESMANN et Giorgio SPEDICATO : Exposure rating, destruction rate models and the mbbefd package. 2017.
- Ghada ELABED, Marc F BELLEMARE, Michael R CARTER et Catherine GUIRKINGER : Managing basis risk with multiscale index insurance. *Agricultural Economics*, 44(4-5):419–431, 2013.
- Ghada ELABED et Michael CARTER : Basis risk and compound-risk aversion : evidence from a WTP experiment in Mali. Rapport technique, Agricultural and Applied Economics Association, 2013.
- Ghada ELABED et Michael CARTER : Ex-ante impacts of agricultural insurance : Evidence from a field experiment in mali. *University of California at Davis*, 2014.
- Ghada ELABED et Michael R CARTER : Compound-risk aversion, ambiguity and the willingness to pay for microinsurance. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 118:150–166, 2015.
- Paul EMBRECHTS, Haiyan LIU et Ruodu WANG : Quantile-based risk sharing. *Operations Research*, 66(4):936–949, 2018.
- Chris EWING : Spatial uncertainty in catastrophe modelling. *Association for Geographic Information*, 2011.
- Yulian FAN : The solution of the optimal insurance problem with background risk. *Journal of Function Spaces*, 2019, 2019.
- Reinhard FARWIG et Daniel ZWICK : Some divided difference inequalities for  $n$ -convex functions. *Journal of mathematical analysis and applications*, 108(2):430–437, 1985.
- Stephen FIGLEWSKI : Hedging performance and basis risk in stock index futures. *The Journal of Finance*, 39(3):657–669, 1984.
- Damir FILIPOVIĆ et Michael KUPPER : Optimal capital and risk transfers for group diversification. *Mathematical Finance : An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*, 18(1):55–76, 2008.
- Israel FINKELSHTAIN, Offer KELLA et Marco SCARSINI : On risk aversion with two risks. *Journal of Mathematical Economics*, 31(2):239–250, 1999.
- Guenter FRANKE, Harris SCHLESINGER et Richard C STAPLETON : Risk taking with additive and multiplicative background risks. *Journal of Economic Theory*, 146(4):1547–1568, 2011.
- Günter FRANKE, Harris SCHLESINGER et Richard C STAPLETON : Multiplicative background risk. *Management Science*, 52(1):146–153, 2006.

- Edward FURMAN, Yisub KYE et Jianxi SU : Multiplicative background risk models with non-exchangeable dependencies : Theory and applications. Working paper, 2019.
- Lesław GAJEK et Dariusz ZAGRODNY : Insurer's optimal reinsurance strategies. *Insurance : Mathematics and Economics*, 27(1):105–112, 2000.
- Lesław GAJEK et Dariusz ZAGRODNY : Optimal reinsurance under general risk measures. *Insurance : Mathematics and Economics*, 34(2):227–240, 2004a.
- Lesław GAJEK et Dariusz ZAGRODNY : Reinsurance arrangements maximizing insurer's survival probability. *Journal of Risk and Insurance*, 71(3):421–435, 2004b.
- Janos GALAMBOS et Italo SIMONELLI : *Products of Random Variables : Applications to Problems of Physics and to Arithmetical Functions*. CRC press, 2004.
- James R GARVEN, James I HILLIARD et Martin F GRACE : Adverse selection in reinsurance markets. *The Geneva Risk and Insurance Review*, 39(2):222–253, 2014.
- James R GARVEN et Joan LAMM-TENNANT : The demand for reinsurance : theory and empirical tests. *Insurance and Risk Management*, 7(3):217–237, 2003.
- Sarthak GAURAV : Are rainfed agricultural households insured? evidence from five villages in Vidarbha, India. *World Development*, 66:719–736, 2015.
- Sarthak GAURAV et Vaibhav CHAUDHARY : Do farmers care about basis risk? evidence from a field experiment in India. *Climate Risk Management*, 27:100201, 2020.
- PN GAVRILIADIS : Moment information for probability distributions, without solving the moment problem. I : Where is the mode? *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 37(5):671–681, 2008.
- S GAYATHRI : Spatial basis risk and weather indexed crop insurance. Rapport technique, Mutuality Matters. DHAN Collective., 2014.
- Hans U GERBER : Pareto-optimal risk exchanges and related decision problems. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 10(1):25–33, 1978.
- Mario GHOSOUB : Optimal insurance with heterogeneous beliefs and disagreement about zero-probability events. *Risks*, 4(3):29, 2016.
- Mario GHOSOUB : Arrow's theorem of the deductible with heterogeneous beliefs. *North American Actuarial Journal*, 21(1):15–35, 2017.

- Xavier GINÉ, Robert TOWNSEND et James VICKERY : Patterns of rainfall insurance participation in rural India. *World Bank Economic Review*, 22(3):539–566, 2007.
- Xavier GINÉ et Dean YANG : Insurance, credit, and technology adoption : Field experimental evidence from Malawi. *Journal of development Economics*, 89(1):1–11, 2009.
- Michael H GLANTZ : *Currents of Change : Impacts of El Niño and La Niña on Climate and Society*. Cambridge University Press, 2001.
- Christian GOLLIER : Optimum insurance of approximate losses. *Journal of Risk and Insurance*, pages 369–380, 1996.
- Christian GOLLIER et John W PRATT : Risk vulnerability and the tempering effect of background risk. *Econometrica*, pages 1109–1123, 1996.
- Guillaume GORGE : *Insurance Risk Management and Reinsurance*. Lulu.com, 2016.
- Christoph GORNOTT et Frank WECHSUNG : Statistical regression models for assessing climate impacts on crop yields : A validation study for winter wheat and silage maize in Germany. *Agricultural and Forest Meteorology*, 217:89–100, 2016.
- Fabien GRAEFF, Nicolas LEBOISNE, Stéphane LOISEL, Darasovann THACH *et al.* : La captive, un outil d’Enterprise Risk Management toujours efficient sous Solvabilité II ? Rapport technique, 2017.
- Helen GREATREX, James HANSEN, Samantha GARVIN, Rahel DIRO, Margot LE GUEN, Sari BLAKELEY, Kolli RAO et Daniel OSGOOD : Scaling up index insurance for smallholder farmers : Recent evidence and insights. 2015.
- Anne GRON : Insurer demand for catastrophe reinsurance. *In The Financing of Catastrophe Risk*, pages 23–50. University of Chicago Press, 1999.
- Patricia GROSSI : *Catastrophe Modeling : a New Approach to Managing Risk*. Springer, 2005.
- Patricia GROSSI, Howard KUNREUTHER et Don WINDELER : An introduction to catastrophe models and insurance. *In Catastrophe Modeling : A New Approach to Managing Risk*, pages 23–42. Springer, 2005.
- GG HAMEDANI et Hans VOLKMER : A characterization of symmetric random variables. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 32(4):723–728, 2003.
- Shahid S HAMID, Jean-Paul PINELLI, Shu-Ching CHEN et Kurt GURLEY : Catastrophe model-based assessment of hurricane risk and estimates of potential insured losses for the state of Florida. *Natural Hazards Review*, 12(4):171–176, 2011.

- Bradley A HANSON : Method of moments estimates for the four-parameter Beta compound Binomial model and the calculation of classification consistency indexes. *American College Testing Program Research Rep. No. 91-5*, 1991.
- Enkelejd HASHORVA : On the number of near-maximum insurance claim under dependence. *Insurance : Mathematics and Economics*, 32(1):37–49, 2003.
- Enkelejd HASHORVA : On Beta-product convolutions. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2013(1):69–83, 2013.
- Enkelejd HASHORVA et Lanpeng JI : Random shifting and scaling of insurance risks. *Risks*, 2(3):277–288, 2014.
- Enkelejd HASHORVA et Anthony G PAKES : Tail asymptotics under Beta random scaling. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 372(2):496–514, 2010.
- Peter BR HAZELL : The appropriate role of agricultural insurance in developing countries. *Journal of International Development*, 4(6):567–581, 1992.
- Leif Erec HEIMFARTH et Oliver MUSSHOF : Weather index-based insurances for farmers in the North China Plain. *Agricultural Finance Review*, 2011.
- Ulrich HESS et Peter HAZELL : Sustainability and scalability of index-based insurance for agriculture and rural livelihoods. Rapport technique, International Food Policy Research Institute, 2009.
- Ruth Vargas HILL, John HODDINOTT et Neha KUMAR : Adoption of weather-index insurance : learning from willingness to pay among a panel of households in rural Ethiopia. *Agricultural Economics*, 44 (4-5):385–398, 2013.
- Ruth Vargas HILL, Neha KUMAR, Nicholas MAGNAN, Simrin MAKHIJA, Francesca de NICOLA, David J SPIELMAN et Patrick S WARD : Ex ante and ex post effects of hybrid index insurance in Bangladesh. *Journal of development economics*, 136:1–17, 2019.
- Gur HUBERMAN, David MAYERS et Clifford W SMITH JR : Optimal insurance policy indemnity schedules. *The Bell Journal of Economics*, pages 415–426, 1983.
- Werner HÜRLIMANN : Extremal moment methods and stochastic orders. *Application in Actuarial Science. Monograph manuscript*, 1998.
- Il'dar Abdullovich IBRAGIMOV : On the composition of unimodal distributions. *Theory of Probability & Its Applications*, 1(2):255–260, 1956.
- Eslyn L JEAN-BAPTISTE et Anthony M SANTOMERO : The design of private reinsurance contracts. *Journal of Financial Intermediation*, 9(3):274–297, 2000.

- Nathaniel JENSEN et Christopher BARRETT : Agricultural index insurance for development. *Applied Economic Perspectives and Policy*, 39(2):199–219, 2017.
- Nathaniel D JENSEN, Christopher B BARRETT et Andrew G MUDE : Index insurance quality and basis risk : Evidence from northern Kenya. *American Journal of Agricultural Economics*, 98(5):1450–1469, 2016.
- Nathaniel D JENSEN, Andrew G MUDE et Christopher B BARRETT : How basis risk and spatiotemporal adverse selection influence demand for index insurance : Evidence from northern Kenya. *Food Policy*, 74:172–198, 2018.
- Wenjun JIANG, Hanping HONG et Jiandong REN : On pareto-optimal reinsurance with constraints under distortion risk measures. *European Actuarial Journal*, 8(1):215–243, 2018.
- Elyes JOUINI, Walter SCHACHERMAYER et Nizar TOUZI : Optimal risk sharing for law invariant monetary utility functions. *Mathematical Finance : An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*, 18(2):269–292, 2008.
- Robert KAAS et Marc J GOOVAERTS : Bounds on distribution functions under integral constraints. *Bulletin de l'Association Royale des Actuaires Belges*, (79):45–60, 1985.
- Robert KAAS et Marc J GOOVAERTS : Best bounds for positive distributions with fixed moments. *Insurance : Mathematics and Economics*, 5(1):87–92, 1986.
- Paul Markham KAHN : Some remarks on a recent paper by Borch. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 1(5):265–272, 1961.
- Marek KALUSZKA : Optimal reinsurance under mean-variance premium principles. *Insurance : Mathematics and Economics*, 28(1):61–67, 2001.
- Marek KALUSZKA : An extension of arrow's result on optimality of a stop loss contract. *Insurance : Mathematics and Economics*, 35(3):527–536, 2004.
- Marek KALUSZKA : Optimal reinsurance under convex principles of premium calculation. *Insurance : Mathematics and Economics*, 36(3):375–398, 2005.
- Masayasu KANNO : The network structure and systemic risk in the global non-life insurance market. *Insurance : Mathematics and Economics*, 67:38–53, 2016.
- D. KARLAN et J. MORDUCH : Access to Finance : Credit Markets, Insurance, and Saving. In Dani RODRIK et Mark ROSENZWEIG, éditeurs : *Handbook of Development Economics*, chapitre 71. Amsterdam : North Holland, 2009.



- Dean KARLAN, Robert OSEI, Isaac OSEI-AKOTO et Christopher UDRY : Agricultural decisions after relaxing credit and risk constraints. *The Quarterly Journal of Economics*, 129(2):597–652, 2014.
- Samuel KARLIN et William J. STUDDEN : *Tchebycheff Systems : with Applications In Analysis and Statistics*. Wiley, 1966.
- Abedalrazq F KHALIL, Hyun-Han KWON, Upmanu LALL, Mario J MIRANDA et Jerry SKEES : El Niño–Southern Oscillation–based index insurance for floods : Statistical risk analyses and application to Peru. *Water Resources Research*, 43(10), 2007.
- A Ya KHINTCHINE : On unimodal distributions. *Izvestiya Nauchno-Issledovatel'skogo Instituta Matematiki i Mekhaniki*, 2(2):1–7, 1938.
- Richard E KIHLMSTROM, David ROMER et Steve WILLIAMS : Risk aversion with random initial wealth. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 911–920, 1981.
- Ilse LAMPAERT et Jean-Francois WALHIN : On the optimality of proportional reinsurance. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2005(3):225–239, 2005.
- Antoine LEBLOIS et Philippe QUIRION : Agricultural insurances based on meteorological indices : realizations, methods and research challenges. *Meteorological Applications*, 20(1):1–9, 2013.
- Claude LEFÈVRE et Stéphane LOISEL : On multiply monotone distributions, continuous or discrete, with applications. *Journal of Applied Probability*, 50(3):827–847, 2013.
- Yan LI, Kaiyu GUAN, Albert YU, Bin PENG, Lei ZHAO, Bo LI et Jian PENG : Toward building a transparent statistical model for improving crop yield prediction : Modeling rainfed corn in the US. *Field Crops Research*, 234:55–65, 2019.
- ZhiYi LU, LePing LIU, JianYu ZHANG et LiLi MENG : Optimal insurance under multiple sources of risk with positive dependence. *Insurance : Mathematics and Economics*, 51(2):462–471, 2012.
- Zhiyi LU, Shengwang MENG, Leping LIU et Ziqi HAN : Optimal insurance design under background risk with dependence. *Insurance : Mathematics and Economics*, 80:15–28, 2018.
- Ornsaran Pomme MANUAMORN : Scaling up microinsurance : the case of weather insurance for small-holders in India. Rapport technique, World Bank, Agriculture & Rural Development Department, 2007.
- Thomas B MCKEE, Nolan J DOESKEN, John KLEIST *et al.* : The relationship of drought frequency and duration to time scales. *In Proceedings of the 8th Conference on Applied Climatology*, volume 17, pages 179–183. Boston, 1993.

- Alexander J MCNEIL et Johanna NEŠLEHOVÁ : Multivariate Archimedean copulas, d-monotone functions and  $l_1$ -norm symmetric distributions. *The Annals of Statistics*, 37(5B):3059–3097, 2009.
- Kenneth S MILLER et Bertram ROSS : *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. Wiley, 1993.
- Mario J MIRANDA et Katie FARRIN : Index insurance for developing countries. *Applied Economic Perspectives and Policy*, 34(3):391–427, 2012.
- Ahmed Mushfiq MOBARAK et Mark R ROSENZWEIG : Selling formal insurance to the informally insured. 2012. Yale University Economic Growth Center Discussion Paper No. 1007.
- Ahmed Mushfiq MOBARAK et Mark R ROSENZWEIG : Informal risk sharing, index insurance, and risk taking in developing countries. *American Economic Review*, 103(3):375–80, 2013.
- Claudio MORANA et Giacomo SBRANA : Climate change implications for the catastrophe bonds market : An empirical analysis. *Economic Modelling*, 81:274–294, 2019.
- Alfred MÜLLER et Dietrich STOYAN : *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*, volume 389. Wiley, 2002.
- Oliver MUSSHOF, Martin ODENING et Wei XU : Management of climate risks in agriculture—will weather derivatives permeate? *Applied economics*, 43(9):1067–1077, 2011.
- Denis A NADOLNYAK et Dmitry V VEDENOV : Information value of climate forecasts for rainfall index insurance for pasture, rangeland, and forage in the Southeast United States. *Journal of Agricultural and Applied Economics*, 45(1379-2016-113780):109–124, 2013.
- Michael NORTON, Stephen BOUCHER et Leslie VERTERAMO CHIU : Geostatistics, basis risk, and index insurance. Rapport technique, 2015. Agricultural and Applied Economics Association and Western Agricultural.
- Michael T NORTON, Calum TURVEY et Daniel OSGOOD : Quantifying spatial basis risk for weather index insurance. *The Journal of Risk Finance*, 2013.
- NOTICE SOLVABILITÉ II : Notice Solvabilité II : calcul du SCR en formule standard. Rapport technique, Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution, 2015.
- Jan OHLIN : A generalization of a result by Borch and Kahn on the optimal properties of stop loss reinsurance. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 5:250, 1969a.
- Jan OHLIN : On a class of measures of dispersion with application to optimal reinsurance. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 5(2):249–266, 1969b.

- Júnior Mauro Ribeiro OLIVEIRA : Models for inflated data applied to credit risk analysis. 2016.
- Richard A OLSHEN et Leonard J SAVAGE : A generalized unimodality. *Journal of Applied Probability*, 7(1):21–34, 1970.
- Raydonal OSPINA et Silvia LP FERRARI : Inflated Beta distributions. *Statistical Papers*, 51(1):111, 2010.
- Raydonal OSPINA et Silvia LP FERRARI : A general class of zero-or-one inflated Beta regression models. *Computational Statistics & Data Analysis*, 56(6):1609–1623, 2012.
- Anthony G PAKES et Jorge NAVARRO : Distributional characterizations through scaling relations. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, 49(2):115–135, 2007.
- Erkki PESONEN : On optimal properties of the stop loss reinsurance. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 4(2):175–176, 1967.
- Martti I PESONEN : Optimal reinsurances. *Scandinavian actuarial journal*, 1984(2):65–90, 1984.
- Pierrick PIETTE : Can satellite data forecast valuable information from USDA reports? evidences on corn yield estimates. 2019.
- J-P PINELLI, G PITA, K GURLEY, B TORKIAN, S HAMID et C SUBRAMANIAN : Damage characterization : Application to Florida public hurricane loss model. *Natural Hazards Review*, 12(4):190–195, 2011.
- Tiberiu POPOVICIU : Sur quelques propriétés des fonctions d’une ou de deux variables réelles. *Mathematica*, 7:1–85, 2013.
- Rudra P PRADHAN, B Mak ARVIN, Neville R NORMAN, Mahendhiran NAIR et John H HALL : Insurance penetration and economic growth nexus : Cross-country evidence from ASEAN. *Research in International Business and Finance*, 36:447–458, 2016.
- Rudra P PRADHAN, Mak B ARVIN et Neville R NORMAN : Insurance development and the finance-growth nexus : Evidence from 34 OECD countries. *Journal of Multinational Financial Management*, 31:1–22, 2015.
- Artur RAVIV : The design of an optimal insurance policy. *The American Economic Review*, 69(1):84–96, 1979.
- David ROSS et Jillian WILLIAMS : Basis risk from the cedant’s perspective. In Pauline BARRIEU et Luca ALBERTINI, éditeurs : *The Handbook of Insurance-Linked Securities*, chapitre 5, pages 49–64. Wiley, 2009.

- Antoine ROUMIGUIÉ, Anne JACQUIN, Grégoire SIGEL, Hervé POILVÉ, Bruno LEPOIVRE et Olivier HAGOLLE : Development of an index-based insurance product : validation of a forage production index derived from medium spatial resolution fcover time series. *GIScience & Remote Sensing*, 52 (1):94–113, 2015.
- Christopher C SAMPSON, Timothy J FEWTRELL, Fiachra O’LOUGHLIN, Florian PAPPENBERGER, P BATES, Jim E FREER et Hannah L CLOKE : The impact of uncertain precipitation data on insurance loss estimates using a flood catastrophe model. *Hydrology and Earth System Sciences*, 18:2305–2324, 2014.
- Ken-iti SATO : Modes and moments of unimodal distributions. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 39(2):407–415, 1987.
- Hanspeter SCHMIDLI : Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2001(1):55–68, 2001.
- Hanspeter SCHMIDLI : *Stochastic Control in Insurance*. London : Springer, 2007.
- Hanspeter SCHMIDLI *et al.* : On minimizing the ruin probability by investment and reinsurance. *The Annals of Applied Probability*, 12(3):890–907, 2002.
- Moshe SHAKED et J George SHANTHIKUMAR : *Stochastic Orders*. Springer, 2007.
- Larry A SHEPP : Symmetric random walk. *Transactions of the American Mathematical Society*, 104 (1):144–153, 1962.
- Italo SIMONELLI : Convergence and symmetry of infinite products of independent random variables. *Statistics & Probability Letters*, 55(1):45–52, 2001.
- JR SKEES, Peter HAZELL et Mario MIRANDA : New approaches to public/private crop yield insurance. Rapport technique, Environment and Production Technology Division (EPTD) Discussion Paper 55, International Food Policy Research Institute (IFPRI), 1999.
- SOLVENCY II COMMISSION DELEGATED REGULATION : Commission Delegated Regulation (EU) 2015/35 supplementing Directive 2009/138/EC of the European Parliament and of the Council on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance (Solvency II). *Official Journal of European Union*, 2015.
- Jonathan SPRY : Non-life insurance securitization : market overview, background and evolution. In Pauline BARRIEU et Luca ALBERTINI, éditeurs : *The Handbook of Insurance-Linked Securities*, chapitre 5, pages 9–18. Wiley, 2009.

- Michael I TAKSAR et Charlotte MARKUSSEN : Optimal dynamic reinsurance policies for large insurance portfolios. *Finance and Stochastics*, 7(1):97–121, 2003.
- Ken Seng TAN, Chengguo WENG et Yi ZHANG : VaR and CTE criteria for optimal quota-share and stop-loss reinsurance. *North American Actuarial Journal*, 13(4):459–482, 2009.
- Ken Seng TAN, Chengguo WENG et Yi ZHANG : Optimality of general reinsurance contracts under CTE risk measure. *Insurance : Mathematics and Economics*, 49(2):175–187, 2011.
- Qihe TANG et Gurami TSITSIASHVILI : Finite-and infinite-time ruin probabilities in the presence of stochastic returns on investments. *Advances in Applied Probability*, 36(4):1278–1299, 2004.
- Iliia TSETLIN et Robert L WINKLER : Risky choices and correlated background risk. *Management Science*, 51(9):1336–1345, 2005.
- AE VAN HEERWAARDEN, Robert KAAS et Marc J GOOVAERTS : Optimal reinsurance in relation to ordering of risks. *Insurance : Mathematics and Economics*, 8(1):11–17, 1989.
- Dmitry V VEDENOV et Barry J BARNETT : Efficiency of weather derivatives as primary crop insurance instruments. *Journal of Agricultural and Resource Economics*, pages 387–403, 2004.
- Sergio M VICENTE-SERRANO, Santiago BEGUERÍA et Juan I LÓPEZ-MORENO : A multiscalar drought index sensitive to global warming : the Standardized Precipitation Evapotranspiration Index. *Journal of climate*, 23(7):1696–1718, 2010.
- Willemijn VROEGE, Tobias DALHAUS et Robert FINGER : Index insurances for grasslands—a review for Europe and North-America. *Agricultural Systems*, 168:101–111, 2019.
- George R WALKER : Modelling the vulnerability of buildings to wind : a review. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 38(9):1031–1039, 2011.
- JM WALLACE et S VOGEL : Reports to the nation on our changing planet : El Niño and climate prediction. *NOAA Brochure*, 3, 1994.
- Richard Edmund WILLIAMSON : Multiply monotone functions and their Laplace transforms. *Duke Mathematical Journal*, 23(2):189–207, 1956.
- Joshua D WOODARD et Philip GARCIA : Basis risk and weather hedging effectiveness. *Agricultural Finance Review*, 68(1):99–117, 2008a.
- Joshua D WOODARD et Philip GARCIA : Weather derivatives, spatial aggregation, and systemic risk : implications for reinsurance hedging. *Journal of Agricultural and Resource Economics*, pages 34–51, 2008b.

Zhiqiang YAN et Liang HONG : Testing for asymmetric information in reinsurance markets. *The Geneva Papers on Risk and Insurance-Issues and Practice*, 40(1):29–46, 2015.

Lixin ZENG : On the basis risk of industry loss warranties. *The Journal of Risk Finance*, 2000.



## Chapitre 1

# Bornes $s$ -convexes sur les distributions Beta-unimodales et applications à l'évaluation du risque de base

*Ce chapitre reprend l'article "On  $s$ -convex bounds for Beta-unimodal distributions with applications to basis risk assessment", co-écrit avec Claude Lefèvre et Stéphane Loisel, publié au Scandinavian Actuarial Journal.*

### Abstract

This paper is concerned with properties of Beta-unimodal distributions and their use to assess the basis risk inherent to index-based insurance or reinsurance contracts. To this extent, we first characterize  $s$ -convex stochastic orders for Beta-unimodal distributions in terms of the Weyl fractional integral. We then determine  $s$ -convex extrema for such distributions, focusing in particular on the cases  $s = 2, 3, 4$ . Next, we define an Enterprise Risk Management framework that relies on Beta-unimodality to assess these hedge imperfections, introducing several penalty functions and worst case scenarios. Some of the results obtained are illustrated numerically via a representative catastrophe model.

*Keywords:* Risk management; Parametric index; Basis risk; Beta-unimodality;  $s$ -convex stochastic orders;  $s$ -convex extrema.

### 1.1 Introduction

In catastrophe modeling applied to insurance-linked securities, so-called Beta-unimodal distributions naturally appear in the assessment of basis risk since destruction rates are often represented by Beta



random variables. This paper provides bounds of convex-type for Beta-unimodal distributions and aims to build a framework for measuring basis risk which involves penalty functions of different forms. Before recalling Beta-unimodal distributions, let us explain how they appear in catastrophe modeling and how they can be useful for basis risk measurement in index-based securitization mechanisms.

Thanks to reinsurance or risk transfers, insurers can cede parts of their risk portfolios to other parties through some form of agreement to reduce the likelihood of paying a large obligation resulting from an insurance claim. Insurers need to transfer some of their risks and reinsurance is a well-known risk management tool. We refer the reader to [Cole and McCullough \(2006\)](#), [Garven and Lamm-Tennant \(2003\)](#) and [Gron \(1999\)](#), for example, and to the books by [Carter \(2013\)](#) for a general presentation and by [Albrecher et al. \(2017\)](#) for the actuarial aspects.

Alternative risk transfers (ART) correspond to the part of the insurance market that allows companies to purchase coverage and transfer risks without having to resort to traditional commercial insurance. The ART market includes risk retention groups, insurance pools, captive insurers and a number of insurance products issued on the capital market such as contingent capital, derivatives and insurance-linked securities (ILS). In this paper we are particularly concerned with a specific class of ILS, namely the parametric transactions, as opposed to other types of transactions: indemnity, modeled loss and indexed to industry loss. We refer to [Cummins and Weiss \(2009\)](#) and [Cummins and Barrieu \(2013\)](#), for example, and to the books by [Banks \(2004\)](#) and [Culp \(2011\)](#) for a clear presentation of the ART and by [Barrieu and Albertini \(2009\)](#) for a complete focus on ILS.

The securitization of insurance risk is today deeply rooted as an alternative transfer of risks; see e.g. [Golden et al. \(2007\)](#), [Cummins and Weiss \(2009\)](#) and [Cummins and Barrieu \(2013\)](#). In fact, the capital market provides additional capacity for insurance risk, many products offer multi-year coverages, and trading of insurance risk on the secondary market creates price transparency. Moreover, capital market transactions reduce the credit risk of the cedent vis-à-vis reinsurers, since the proceeds of the transaction remain in the appropriate vehicle and are invested as collateral. Within the ILS class, the catastrophe bond has been in the spotlight since Hurricane Andrew in 1992.

In fact, the insurance industry was pushed to the limits of its solvency in 1992. Given the infrequent nature of large-scale catastrophic (cat) events, actuarial and statistical methods do not provide a complete picture. As a result, the disaster modeling industry has grown rapidly, making cat models key input for measuring, pricing and managing cat risks. A cat model is generally broken down into four components, namely hazard, inventory, vulnerability and loss.

The hazard component consists of a set of stochastic events, i.e. a large deterministic number  $N$  of catastrophic event scenarios which together provide a representation of the events that can cause losses, and an associated modeled occurrence rate for each.

The inventory component represents the exposure. It consists of the portfolio of sites subject to catastrophic risk. The items in the inventory are classified in terms of aspects that affect the amount of damage suffered by a structure for a given level of hazard. In the paper, we assume that the exposure in each scenario is not perfectly known, in agreement with several works by [Ewing \(2011\)](#), [Pinelli et al. \(2011\)](#), [Hamid et al. \(2011\)](#) and [Grossi \(2005\)](#). This may be due to the fact that the trajectory of the event is uncertain (spatial uncertainty) or because the buyer of the protection does not know its exposure when the event occurs: for example, information about the property is collected for a typical sampled study area and the results are extrapolated to the regional level. Moreover, the sites subject to cat risks generated in each scenario may differ. So, let  $Y_i$  be a positive random variable representing the exposure of the scenario  $i = 1, \dots, N$ . This variable is obviously bounded by the value of the entire portfolio, i.e. the loss cannot be greater than the total portfolio  $m > 0$ , say. The hazard component generating localized events, the portfolio is not (necessarily) fully exposed in each scenario. Consequently, we will assume that for each scenario  $i$ , there is an interval  $(a_i, b_i)$  ( $0 \leq a_i < b_i \leq m$ ) for which  $a_i \leq Y_i \leq b_i$  holds almost surely.

The vulnerability component assesses the degree to which structures, their contents and other insured property are likely to be damaged by the hazard. In other words, this component provides the intensity exerted by the cat event on the portfolio under exposure. A common way to represent the intensity of the event is to use the damage ratio, also called destruction ratio or proportion of loss, and which is represented by a random variable with Beta distribution. We refer e.g. to [Sampson et al. \(2014\)](#), [Walker \(2011\)](#), [Cossette et al. \(2003\)](#), [Dutang et al. \(2017\)](#) and to the books by [Gorge \(2016\)](#) and [Charpentier \(2014\)](#). Thus, the destruction ratio for each scenario  $i$  is a variable  $S_i$  whose distribution is Beta  $(\alpha_i, \beta_i)$ . In what follows, the effective loss in scenario  $i$  will then be a bounded positive random variable  $X_i$  defined as  $X_i = S_i Y_i$ .

The loss component translates the expected physical damage into monetary loss taking into account any insurance structures. Within the loss component, the insurance structures can be of different forms depending on the type of trigger. Three main types of trigger can be distinguished, namely indemnity, industry loss and parametric. In indemnity transactions, modeling is based on the insurance loss itself. Industry loss based structures are essentially a pool-indemnity solution. A simple form is the industry loss warranties whereby the trigger is the total industry loss in a particular region. A parametric transaction uses the measured physical properties of a cat event as the trigger. It is typically based on an index of the event hazard: a payment to the protection buyer depends on the values taken by an index built from the physical parameters of a natural disaster (such as wind speed, precipitation level, earthquake magnitude). As with any non-indemnity structure, a parametric index contains the probability that the payment under the structure does not match the loss experience. In the present paper, this parametric risk is called basis risk.

Basis risk is a well-established concept in insurance and finance. This corresponds to the difference in

payment between own losses incurred and a structured risk transfer mechanism to protect against these losses (Ross and Williams (2009)). In finance, basis risk is often borne by banks managing deposits payable on demand and short-term interest rate risk, or by financial institutions using cross-hedging techniques. In life insurance, the payoffs of most mortality bonds are based on national populations mortality evolution, leaving the cedent (insurer or reinsurer) with basis risk also. Insurance and financial firms are not the only ones facing basis risk. The recent development of parametric insurance, particularly in emerging countries and in agriculture insurance, represents a great hope for the rise of a more inclusive insurance, provided that the basis risk to which the policyholder is exposed remains under control.

As announced above, in our cat modeling framework, the loss  $X_i$  for scenario  $i$  is represented as the product  $X_i = S_i Y_i$  of a random variable  $Y_i$  with values in a bounded positive interval  $(a_i, b_i)$  by a random destruction ratio  $S_i$  with a Beta  $(\alpha_i, \beta_i)$  distribution independent of  $Y_i$ . This independence assumption between the destruction rate and the exposure seems to be reasonable for any given scenario. Note however that when considering all scenarios, there can exist some dependence since the parameters of the Beta distribution are not always identical. For example, certain scenarios  $j$  corresponding to an extreme storm would probably imply a more significant exposure as well as a higher destruction rate. This would lead to using a severe distribution for  $Y_j$  and Beta parameters  $(\alpha_j, \beta_j)$  which make  $S_j$  also important.

In probability terminology,  $X_i$  is then said to have a Beta-unimodal distribution. The relation  $X_i = S_i Y_i$  corresponds to a Beta random scaling. Such relations with a scaling of arbitrary distribution have been proposed to describe the effects of various factors, including an economic environment (Galambos and Simonelli (2004), Tang and Tsitsiashvili (2004), Asimit et al. (2016)), a systemic background risk (Côté and Genest (2019)) or a dependence structure of claim sizes (Hashorva (2003), Hashorva and Ji (2014)). Special attention has been paid to asymptotics of these relations; see e.g. Yang and Wang (2013), Cline and Samorodnitsky (1994), Hashorva et al. (2010). The case of Beta-unimodality considered here has been thoroughly investigated in the book by Bertin et al. (2013); see also Hashorva and Pakes (2010), Hashorva (2013), Pakes and Navarro (2007). This concept covers several forms of unimodality introduced in the literature: usual unimodal distributions (Khintchine (1938)),  $\beta$ -monotone distributions (Williamson (1956); see also McNeil and Nešlehová (2009), Lefèvre and Loisel (2013) in applied probability) and  $\alpha$ -unimodal distributions (Olshen and Savage (1970); see Brockett et al. (2016) in insurance).

The motivation of the present work is to propose a simple way to quantify the basis risk inherent to parametric risk transfers by adopting an Enterprise Risk Management (ERM) point of view. The ERM approach typically involves the measurement of hedge imperfections and the identification of worst case scenarios. In our method, we measure the consequences of these hedge imperfections by introducing penalty functions. In their paper, Brockett et al. (2016) derived lower and upper bounds

for expectations of the form  $\mathbb{E}[\phi(X)]$  when  $X$  has an  $\alpha$ -unimodal distribution and  $\phi$  is a function of convex-type. In fact, this topic is important to our risk management problem. We want to pursue its study when  $X$  has now a Beta-unimodal distribution, using explicitly a class of convex type stochastic orders called  $s$ -convex. The theory of  $s$ -convex orders is developed in [Denuit et al. \(1998, 1999\)](#), and associated bounding problems were examined by e.g. [De Vylder \(1982, 1983\)](#), [De Vylder and Goovaerts \(1982\)](#), [Brockett and Cox \(1985\)](#), [Hürlimann \(1998\)](#), [Kaas and Goovaerts \(1985, 1986\)](#).

Our key contribution is to characterize  $s$ -convex orderings and derive  $s$ -convex bounds for Beta-unimodal distributions. In addition, we use these results and penalty functions to estimate the consequences of basis risk inherent to parametric transactions in an ERM framework. In particular, we will show that the knowledge of higher moments of the random exposure is useful to reduce the uncertainty around basis risk. More precisely, the paper is organized as follows. In [Section 1.2](#), we recall the concept of Beta-unimodality and give some key properties in terms of the Weyl fractional integral. In [Section 1.3](#), we introduce the (known) class of  $s$ -convex stochastic orders and we use it to compare Beta-unimodal distributions. In [Section 1.4](#), we continue the analysis by deriving  $s$ -convex extrema for Beta-unimodal distributions, with particular interest on the cases  $s = 2, 3, 4$ . In [Section 1.5](#), we propose a framework that uses Beta-unimodality to assess the basis risk. We consider different penalty functions, symmetric or not, to measure the impact of the basis risk and to deduce the worst case scenarios. In [Section 1.6](#), we numerically illustrate some of the results obtained via a simplified but representative catastrophe model.

## 1.2 Beta-unimodal distributions

We present in this section key definitions and properties on Beta-unimodal distributions. A detailed analysis with applications can be found in the book by [Bertin et al. \(2013\)](#) and e.g. the papers by [Pakes and Navarro \(2007\)](#), [Hashorva \(2013\)](#), [Hashorva and Pakes \(2010\)](#).

**Definition 1.2.1.** *An  $\mathbb{R}_+$ -valued random variable  $X$  has a continuous Beta-unimodal distribution if it has the product representation*

$$X =_d SY, \tag{1.1}$$

where  $Y$  is a positive continuous random variable, and  $S$  is a random contracting factor independent of  $Y$  and of Beta distribution.

The Beta density function of  $S$  is

$$f_S(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\mathcal{B}(\alpha, \beta)}, \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{1.2}$$

where  $\alpha$  and  $\beta$  are positive shape parameters ( $\mathcal{B}(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha + \beta)$ ). For clarity, it is convenient to set  $S \sim S(\alpha, \beta)$ . If  $X$  is Beta-unimodal, then

$$\mathbb{E}[X^i] = \mathbb{E}[S^i]\mathbb{E}[Y^i] = \left( \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\alpha + j}{\alpha + \beta + j} \right) \mathbb{E}[Y^i], \quad i \in \mathbb{N}^*. \quad (1.3)$$

The relation (1.3) will play a key role in the sequel, in particular when it comes to building convex type bounds.

### 1.2.1 Particular unimodalities

The cases where  $\alpha = 1$  and/or  $\beta = 1$  are the subject of special attention. Let  $U$  denote a  $[0, 1]$ -uniform random variable.

(1) If  $\alpha = \beta = 1$ ,  $f_S(x) = 1$ , i.e.,  $S(1, 1) =_d U$ . Then, (1.1) becomes

$$X =_d UY, \quad (1.4)$$

and by a famous theorem of [Khintchine \(1938\)](#),  $X$  has a unimodal distribution in the usual sense (with a mode at 0).

(2) If  $\alpha = 1$ ,  $f_S(x) = \beta(1 - x)^{\beta-1}$ , i.e.,  $S(1, \beta) =_d (1 - U^{1/\beta})$ . Then, (1.1) becomes

$$X =_d (1 - U^{1/\beta})Y, \quad (1.5)$$

and  $X$  is often said to have a  $\beta$ -monotone distribution. Multiple monotonicity of functions was analyzed in details by [Williamson \(1956\)](#) when  $\beta$  is any real  $\geq 1$ . It has various fields of application, especially when  $\beta$  is a positive integer  $n$ . In statistics, the estimation problem of  $n$ -monotone densities was examined, e.g., by [Balabdaoui and Wellner \(2007\)](#). As shown by [McNeil and Nešlehová \(2009\)](#), the generator of a  $n$ -dimensional Archimedean copula generator is a  $n$ -monotone function. Applications to ruin problems were discussed by [Constantinescu et al. \(2011\)](#). Similarly, [Chi et al. \(2009\)](#) pointed out that the same monotonicity holds for the generator of a  $n$ -dimensional Schur-constant vector. [Lefèvre and Loisel \(2013\)](#) studied properties and stochastic orderings for  $n$ -monotone densities, with illustrations in insurance.

(3) If  $\beta = 1$ ,  $f_S(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ , i.e.,  $S(\alpha, 1) =_d U^{1/\alpha}$ . Then, (1.1) becomes

$$X =_d U^{1/\alpha}Y, \quad (1.6)$$

and  $X$  is generally said to have an  $\alpha$ -unimodal distribution. This concept of generalized monotonicity was introduced and investigated by [Olshen and Savage \(1970\)](#). Recently, [Brockett et al. \(2016\)](#) deal with bounding problems on the expectation of such distributions.

### 1.2.2 Link between $X$ and $Y$

Beta-unimodality allows us to obtain information on  $X$  or  $Y$  depending on the initial information. As shown e.g. in [Pakes and Navarro \(2007\)](#), the two survival functions  $\bar{F}_X$  of  $X$  and  $\bar{F}_Y$  of  $Y$  are closely related. The result is worth proving again.

**Proposition 1.2.1.** *If  $X$  is Beta-unimodal with  $X =_d SY$ , then  $\bar{F}_X$  is given by*

$$\bar{F}_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha (I_\beta \phi_Y)(x), \quad (1.7)$$

where the function  $\phi_Y$  depends on  $\bar{F}_Y$  by

$$\phi_Y(t) = \bar{F}_Y(t) t^{-\alpha-\beta},$$

and the function  $I_\beta \phi_Y$  is defined as

$$(I_\beta \phi_Y)(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_x^\infty (t-x)^{\beta-1} \phi_Y(t) dt, \quad (1.8)$$

i.e., it corresponds to the Weyl fractional integral of  $\phi_Y$ .

*Proof.* Since  $X$  is Beta-unimodal, we get

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > x) &= \mathbb{P}(YS > x) = \int_0^1 \mathbb{P}(sY > x) f_S(s) ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_x^\infty (t-x)^{\beta-1} \bar{F}_Y(t) t^{-\alpha-\beta} dt, \end{aligned} \quad (1.9)$$

using the definition (1.2) of  $f_S$ , which is (1.7) in the notation of the statement.  $\square$

For the Weyl integral calculus, the reader is referred e.g. to the books by [Miller and Ross \(1993\)](#), [Debnath and Bhatta \(2006\)](#). A converse to (1.7) holds too.

**Proposition 1.2.2.** *If  $X$  is Beta-unimodal with  $X =_d SY$ , then  $\bar{F}_Y$  is given by*

$$\bar{F}_Y(x) = (-1)^n x^{\alpha+\beta} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + \beta)} (I_\delta D^n \psi_X)(x), \quad (1.10)$$

where the function  $\psi_X$  depends on  $\bar{F}_X$  by

$$\psi_X(t) = \bar{F}_X(t) t^{-\alpha},$$

and  $D^n$  is the derivative of order  $n$  which is the smallest integer  $\geq \beta$ , and  $\delta = n - \beta \in [0, 1)$ .

*Proof.* From (1.7), we have

$$(I_\beta \phi_Y)(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \psi_X(x), \quad (1.11)$$

where  $\psi_X$  is defined above. As announced, let  $\delta \in [0, 1)$  be such that  $\beta + \delta = n \in \mathbb{N}$ . An important property of the fractional integral operator is that

$$I_\delta I_\beta = I_{\delta+\beta} = I_n.$$

Thus, applying  $I_\delta$  to both sides of (1.11) yields

$$(I_n \phi_Y)(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + \beta)} (I_\delta \psi_X)(x). \quad (1.12)$$

Another well-known property of the integral operator is that

$$D^k I_n = (-1)^k I_{n-k}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad \text{and} \quad D^n (I_\delta \psi_X) = I_\delta D^n \psi_X.$$

Taking the derivative  $D^n$  in (1.12) then gives

$$(-1)^n \phi_Y(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + \beta)} (I_\delta D^n \psi_X)(x).$$

It remains to insert the definition of  $\phi_Y$ , and we deduce the formula (1.10). □

Such a link between  $X$  and  $Y$  can be interesting in practice. Indeed, it provides us with the distribution of  $X$  when  $X$  is known to be a Beta version of a given risk, and vice versa.

### 1.3 Orderings of convex-type

A main objective of our work is to determine bounds on the expectation  $\mathbb{E}[\phi(X)]$  for a class of functions of convex-type and when  $X$  has a Beta-unimodal distribution. This subject is treated by [Brockett et al. \(2016\)](#) in the particular case where  $X$  is  $\alpha$ -unimodal. The authors there apply a method based on the Markov-Krein theorem and Chebychev systems (see [Brockett and Cox \(1985\)](#) and, for a general theory, [Karlin and Studden \(1966\)](#)). Their method, strong enough, requires the function  $\phi$  to be differentiable, which can be restrictive for various applications (see later). When this assumption does not hold, they follow an approach based on the results of [Kemperman \(1987\)](#) for the geometry of the moment problem.

The method we propose below is developed in the context of the  $s$ -convex extrema discussed in [Denuit et al. \(1998, 1999\)](#). An advantage is that the function  $\phi$  does not have to be differentiable to construct bounds on  $\mathbb{E}[\phi(X)]$ . Basic reminders and their applications are presented in Section 1.3.1 and 1.3.2, respectively.

### 1.3.1 $s$ -convex orders

Let us start by giving the definition of an  $s$ -convex function ( $s$  being a positive integer). We use for that a strong concept that does not rely on differentiability (see e.g. Popoviciu (2013), Farwig and Zwick (1985), Karlin and Studden (1966)).

Consider a compact interval  $[a, b]$  with  $-\infty < a < b < \infty$ . Let  $[x_0, \dots, x_s; \phi]$  be the forward divided difference of the function  $\phi$  on the nodes  $x_0, \dots, x_s \in [a, b]$ . Specifically,  $[x_k; \phi] = \phi(x_k)$ ,  $k = 0, \dots, s$ , and by recursion,

$$[x_0, \dots, x_k; \phi] = \frac{[x_1, \dots, x_k; \phi] - [x_0, \dots, x_{k-1}; \phi]}{x_k - x_0}, \quad k = 1, \dots, s.$$

This operator is a standard mathematical tool in numerical analysis. It can be expressed as a linear combination of  $\phi(x_0), \dots, \phi(x_k)$  by

$$[x_0, \dots, x_k; \phi] = \sum_{j=0}^k \frac{\phi(x_j)}{(x_j - x_0) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_k)}.$$

**Definition 1.3.1.** *A real function  $\phi$  defined on  $[a, b]$  is  $s$ -convex if*

$$[x_0, \dots, x_s; \phi] \geq 0,$$

*holds for any choice of distinct points  $x_0, \dots, x_s$  in  $[a, b]$ .*

Nevertheless, certain properties of differentiability are verified by  $s$ -convex functions  $\phi$  on  $[a, b]$ . So,  $\phi^{(s-2)}$ ,  $s \geq 2$ , exists and is continuous,  $\phi_+^{(s-1)}$  exists, is right-continuous and is increasing. If  $\phi^{(s)}$  exists, then  $\phi$  is  $s$ -convex if and only if  $\phi^{(s)} \geq 0$ .

We can now give the definition of the  $s$ -convex orders (see e.g. Denuit et al. (1998, 1999), Shaked and Shanthikumar (2007)). Let  $\mathcal{U}_{s-cx}^{[a,b]}$  be the class of all  $s$ -convex real functions  $\phi$  on  $[a, b]$ .

**Definition 1.3.2.** *Let  $Y_1$  and  $Y_2$  be two random variables valued in  $[a, b]$ . Then,  $Y_1$  is smaller than  $Y_2$  in the  $s$ -convex order ( $Y_1 \leq_{s-cx}^{[a,b]} Y_2$ ) if*

$$\mathbb{E}[\phi(Y_1)] \leq \mathbb{E}[\phi(Y_2)] \quad \text{for all functions } \phi \in \mathcal{U}_{s-cx}^{[a,b]}. \quad (1.13)$$

Note that the 1-convex is the classic order in distribution ( $\leq_d$ ) and the 2-convex order is the usual convex order ( $\leq_{cx}$ ). Since a polynomial of degree  $s - 1$  (or less) is an  $s$ -convex function, the  $s$ -convex order (1.13) implies that

$$\mathbb{E}[Y_1^i] = \mathbb{E}[Y_2^i], \quad 1 \leq i \leq s - 1. \quad (1.14)$$

Thus, only the variables that share the same first  $s - 1$  moments can be compared in the  $s$ -convex sense. That property must be completed to provide a characterization of the  $s$ -convex order. This can be done



using the stop-loss transforms of order  $s - 1$  (for  $Y$ :  $\mathbb{E}[(Y - t)_+^{s-1}]$ ,  $t \in [a, b]$ ) or the iterated survival functions of order  $s - 1$  (for  $Y$ :  $\bar{F}_Y^{[s-1]}(x)$  with  $\bar{F}_Y^{[0]}(x) = \bar{F}_Y(x)$  and for  $k \geq 1$ ,  $\bar{F}_Y^{[k]}(x) = \int_x^\infty \bar{F}_Y^{[k-1]}(t)dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ).

**Characterization 1.3.1.**  $Y_1 \leq_{s-cx}^{[a,b]} Y_2$  when (1.14) holds and

$$\mathbb{E}[(Y_1 - t)_+^{s-1}] \leq \mathbb{E}[(Y_2 - t)_+^{s-1}], \quad t \in [a, b], \quad (1.15)$$

or, equivalently,

$$\bar{F}_{Y_1}^{[s-1]}(x) \leq \bar{F}_{Y_2}^{[s-1]}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.16)$$

### 1.3.2 Under Beta-unimodality

Let us go back to our framework of Beta-unimodal random variables  $X =_d SY$  with  $Y$  valued in  $[a, b] \in \mathbb{R}_+$ . A natural question is to know under which conditions a stochastic order on  $Y$  can be transferred on  $X$ . The following result will often be used later.

**Proposition 1.3.1.** *Let  $X_1 =_d SY_1$  and  $X_2 =_d SY_2$  be Beta-unimodal with the same  $S$  independent of  $(Y_1, Y_2)$ . If  $Y_1 \leq_{s-cx}^{[a,b]} Y_2$ , then  $X_1 \leq_{s-cx}^{[0,b]} X_2$ .*

*Proof.* From (1.14), (2.11), it is clear that if  $Y_1 \leq_{s-cx}^{[a,b]} Y_2$ , then  $xY_1 \leq_{s-cx}^{x[a,b]} xY_2$  for any  $x \in [0, 1]$ , where

$$x[a, b] = \left\{ u \in \mathbb{R} \mid \frac{u}{x} \in [a, b] \right\} = [xa, xb].$$

For  $\phi \in \mathcal{U}_{s-cx}^{[0,b]}$ , then

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi(X_1)] &= \int_0^1 \mathbb{E}[\phi(xY_1) | S = x] dF_S(x) \\ &\leq \int_0^1 \mathbb{E}[\phi(xY_2) | S = x] dF_S(x) = \mathbb{E}[\phi(X_2)], \end{aligned} \quad (1.17)$$

as desired. □

A similar result is valid when the scaling factors  $S_1, S_2$  are identically distributed.

**Proposition 1.3.2.** *Let  $X_1 =_d S_1Y_1$  and  $X_2 =_d S_2Y_2$  be Beta-unimodal with  $S_1, S_2$  identically distributed and independent of  $(Y_1, Y_2)$ . If  $Y_1 \leq_{s-cx}^{[a,b]} Y_2$ , then  $X_1 \leq_{s-cx}^{[0,b]} X_2$ .*

*Proof.* This can be shown using a simple coupling argument. Instead, we proceed directly and exploit the assumptions made on  $S_1, S_2$  to write

$$\mathbb{E}[\phi(X_1)] = \int_0^1 \mathbb{E}[\phi(xY_1) | S_1 = x] dF_{S_1}(x) = \int_0^1 \mathbb{E}[\phi(xY_1)] dF_{S_1}(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \mathbb{E}[\phi(xY_1)] dF_{S_2}(x) \\
&\leq \int_0^1 \mathbb{E}[\phi(xY_2)] dF_{S_2}(x) = \mathbb{E}[\phi(X_2)],
\end{aligned}$$

the inequality following from  $Y_1 \leq_{s-cx}^{[a,b]} Y_2$ . This yields the announced result.  $\square$

Note that the results of Propositions 1.3.1 and 1.3.2 do not use that the scaling factors are of Beta distribution. In fact, they remain true for any scaling distribution. Suppose now that  $Y_1, Y_2$  are not ordered and, for instance, valued in  $\mathbb{R}_+$ . Then,  $X_1, X_2$  can be compared in a convex sense through the characterization 3.1.

**Proposition 1.3.3.** *Let  $X_1 =_d S_1 Y_1$  and  $X_2 =_d S_2 Y_2$  be Beta-unimodal with  $S_1, S_2$  independent of  $(Y_1, Y_2)$ . Then,  $X_1 \leq_{s-cx}^{[0,\infty)} X_2$  when (1.14) holds with  $X_1$  and  $X_2$  and, for  $x \geq 0$ ,*

$$\frac{1}{\mathcal{B}(\alpha_1, \beta_1)} \int_x^\infty \bar{F}_{Y_1}(t) t^{s-2} [(I_{s-1} \chi_{S_1})(x/t)] dt \leq \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha_2, \beta_2)} \int_x^\infty \bar{F}_{Y_2}(t) t^{s-2} [(I_{s-1} \chi_{S_2})(x/t)] dt, \quad (1.18)$$

where  $I_{s-1}(\chi_{S_i})$  is the Weyl fractional integral (1.8) of the function

$$\chi_{S_i}(t) = t^{\alpha_i} (1-t)^{\beta_i-1}, \quad i = 1, 2.$$

*Proof.* We will require that the condition (1.16) be satisfied. For this, we must explicitly express the iterated survival function  $\bar{F}_X^{[s]}(x)$ ,  $x \geq 0$ . The proof is based on two reasoning by induction.

First, we show that for  $x \geq 0$ ,

$$\bar{F}_X^{[s]}(x) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \int_x^\infty \bar{F}_Y(t) t^{s-1} \bar{F}_{\hat{S}}^{[s-1]}(x/t) dt, \quad (1.19)$$

where  $\hat{S} \sim S(\alpha + 1, \beta)$  is a Beta variable of parameters  $(\alpha + 1, \beta)$ .

For  $s = 1$ , we have from (1.9)

$$\begin{aligned}
\bar{F}_X^{[1]}(x) &= \int_{t=x}^\infty P(X > t) dt = \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha, \beta)} \int_{t=x}^\infty \int_{u=t}^\infty t^\alpha (u-t)^{\beta-1} \bar{F}_Y(u) u^{-(\alpha+\beta)} du dt \\
&= \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha, \beta)} \int_{u=x}^\infty \bar{F}_Y(u) u^{-(\alpha+\beta)} \int_{t=x}^u t^\alpha (u-t)^{\beta-1} dt du \\
&= \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha, \beta)} \int_{u=x}^\infty \bar{F}_Y(u) u^{-(\alpha+1)} \int_{t=x}^u t^\alpha (1-t/u)^{\beta-1} dt du \\
&= \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha, \beta)} \int_{u=x}^\infty \bar{F}_Y(u) \int_{y=x/u}^1 y^\alpha (1-y)^{\beta-1} dy du \\
&= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \int_{u=x}^\infty \bar{F}_Y(u) \bar{F}_{\hat{S}}(x/u) du,
\end{aligned}$$

using the definition above of  $\hat{S}$ . This corresponds to the relation (1.19) for  $s = 1$ . Assuming that (1.19) holds for the  $k$ -th iterated, we obtain

$$\begin{aligned}
\bar{F}_X^{[k+1]}(x) &= \int_{y=x}^{\infty} \bar{F}_X^{[k]}(y) dy = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \int_{y=x}^{\infty} \int_{t=y}^{\infty} \bar{F}_Y(t) t^{k-1} \bar{F}_{\hat{S}}^{[k-1]}(y/t) dt dy \\
&= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \int_{t=x}^{\infty} \bar{F}_Y(t) t^{k-1} \int_{y=x}^t \bar{F}_{\hat{S}}^{[k-1]}(y/t) dy dt \\
&= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \int_{t=x}^{\infty} \bar{F}_Y(t) t^k \int_{u=x/t}^1 \bar{F}_{\hat{S}}^{[k-1]}(u) du dt \\
&= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \int_{t=x}^{\infty} \bar{F}_Y(t) t^{k-1} \bar{F}_{\hat{S}}^{[k]}(x/t) dt,
\end{aligned}$$

which gives (1.19) for the  $k + 1$ -th iterated as desired.

Second, we show that for  $x \in [0, 1]$ ,

$$\bar{F}_{\hat{S}}^{[s]}(x) = \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha + 1, \beta)} \frac{x^{\alpha+1+s}}{s!} \int_x^1 t^{-(\alpha+\beta+1+s)} (t-x)^{\beta-1} (1-t)^s dt. \quad (1.20)$$

For  $s = 1$ , we have from (1.2)

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{\hat{S}}^{[1]}(x) &= \int_x^1 \mathbb{P}(S > y) dy = \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha + 1, \beta)} \int_{y=x}^1 \int_{u=y}^1 u^{\alpha} (1-u)^{\beta-1} du dy \\
&= \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha + 1, \beta)} \int_{u=x}^1 u^{\alpha} (1-u)^{\beta-1} (u-x) du \\
&= \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha + 1, \beta)} \int_{u=x}^1 u^{\alpha+1} (1-u)^{\beta-1} (1-x/u) du \\
&= \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha + 1, \beta)} x^{\alpha+2} \int_x^1 t^{-(\alpha+\beta+2)} (t-x)^{\beta-1} (1-t) dt,
\end{aligned}$$

which is in accordance with (1.20). Assuming (1.20) for the  $k$ -th iterated, we get

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{\hat{S}}^{[k+1]}(x) &= \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha + 1, \beta)} \frac{1}{k!} \int_{y=x}^1 y^{\alpha+1+k} \int_{t=y}^1 t^{-(\alpha+\beta+1+k)} (t-y)^{\beta-1} (1-t)^k dt dy \\
&= \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha + 1, \beta)} \frac{1}{k!} \int_{t=x}^1 t^{-(\alpha+\beta+1+k)} (1-t)^s \int_{y=x}^t y^{\alpha+1+s} (t-y)^{\beta-1} dy dt \\
&= \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha + 1, \beta)} \frac{1}{k!} \int_{t=x}^1 t^{-(\alpha+2+k)} (1-t)^k \int_{y=x}^t y^{\alpha+1+k} (1-y/t)^{\beta-1} dy dt \\
&= \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha + 1, \beta)} \frac{1}{k!} \int_{t=x}^1 (1-t)^k \int_{u=x/t}^1 u^{\alpha+1+k} (1-u)^{\beta-1} du dt \\
&= \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha + 1, \beta)} \frac{1}{k!} \int_{u=x}^1 u^{\alpha+1+k} (1-u)^{\beta-1} \int_{t=x/u}^1 (1-t)^s dt du \\
&= \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha + 1, \beta)} \frac{1}{(k+1)!} \int_x^1 u^{\alpha+1+k} (1-u)^{\beta-1} (1-x/u)^{k+1} du,
\end{aligned}$$

which becomes (1.20) for  $s = k + 1$  after the change of variable  $x/u = t$ .

It now suffices to insert (1.20) in (1.19) and we find that

$$\begin{aligned}
\bar{F}_X^{[s]}(x) &= \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha, \beta)} \frac{1}{(s-1)!} \int_{t=x}^{\infty} \bar{F}_Y(t) t^{s-1} (x/t)^{\alpha+s} \\
&\quad \int_{y=x/t}^1 y^{-(\alpha+\beta+s)} (y-x/t)^{\beta-1} (1-y)^{s-1} dy dt \\
&= \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha, \beta)} \frac{1}{(s-1)!} \int_{t=x}^{\infty} \bar{F}_Y(t) t^{s-1} \int_{u=x/t}^1 u^{\alpha+s-1} (1-x/tu)^{s-1} (1-u)^{\beta-1} du dt \\
&= \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha, \beta)} \frac{1}{(s-1)!} \int_{t=x}^{\infty} \bar{F}_Y(t) t^{s-1} \int_{u=x/t}^1 u^{\alpha} (1-u)^{\beta-1} (u-x/t)^{s-1} du dt \\
&= \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha, \beta)} \frac{1}{(s-1)!} \int_x^{\infty} \bar{F}_Y(t) t^{s-1} [(I_s \chi_S)(x/t)] dt, \tag{1.21}
\end{aligned}$$

using the above notation for  $s$ . The condition (1.18) then follows from (1.16), (1.21) with  $\bar{F}_X^{[s-1]}$ .  $\square$

## 1.4 Bounds of convex-type

Having introduced the class of  $s$ -convex stochastic orders, we can now focus on the construction of lower or upper  $s$ -convex bounds for a given set of risks. Remember that by virtue of (1.14), an  $s$ -convex ordering is only possible between random variables which possess the same first  $s-1$  moments. Therefore, we consider the space  $\mathcal{B}_s([a, b], \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{s-1})$  of all the variables valued in  $[a, b]$  and with the  $s-1$  fixed moments  $\mu_i = \mathbb{E}[Y^i]$ ,  $1 \leq i \leq s-1$ .

Of course, for this space to be non-empty, the  $\mu_i$  must satisfy some constraints between them. This question is discussed e.g. in [Denuit \(2002\)](#). We only mention here that the constraints for the first three are

$$\begin{aligned}
a &< \mu_1 < b, \\
\mu_1^2 &< \mu_2 < \mu_1(a+b) - ab, \\
\frac{(\mu_2 - \mu_1 a)^2 + a\mu_2(\mu_1 - a)}{\mu_1 - a} &< \mu_3 < \frac{b\mu_2(b - \mu_1) - (b\mu_1 - \mu_2)^2}{b - \mu_1}. \tag{1.22}
\end{aligned}$$

Constraints on moments of higher orders can also be expressed in a similar way.

### 1.4.1 $s$ -convex extrema

The problem of bounding quantities of the form  $\mathbb{E}[\phi(Y)]$  when  $Y \in \mathcal{B}_s([a, b], \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{s-1})$  has been widely studied in the literature. Hereafter, we follow [Denuit et al. \(1999\)](#) and define the random variables  $Y_{min}^{(s)}$  and  $Y_{max}^{(s)}$  such that for all random variables  $Y \in \mathcal{B}_s([a, b], \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{s-1})$ ,

$$Y_{min}^{(s)} \leq_{s-cx}^{[a,b]} Y \leq_{s-cx}^{[a,b]} Y_{max}^{(s)},$$

meaning that for all real functions  $\phi \in \mathcal{U}_{s-cx}^{[a,b]}$ ,

$$\mathbb{E}[\phi(Y_{min}^{(s)})] \leq \mathbb{E}[\phi(Y)] \leq \mathbb{E}[\phi(Y_{max}^{(s)})].$$

As pointed out earlier,  $\phi$  does not need to be differentiable as is supposed in the recent paper of Brockett and Cox (1985). Other references on this subject are e.g. De Vylder (1982), De Vylder (1983), De Vylder and Goovaerts (1982), Hürlimann (1998), Kaas and Goovaerts (1985, 1986). We recall the result proved by Denuit et al. Denuit et al. (1999) which distinguishes the even ( $2s$ ) and odd ( $2s + 1$ ) degrees of convex ordering. For  $j \in \mathbb{N}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , define the reals  $\mu_0 = 0$  and

$$\mu_{j,x} = \mu_j - x\mu_{j-1} \quad \text{and} \quad \mu_{j,xy} = \mu_{j,x} - y\mu_{j-1,x}.$$

**Proposition 1.4.1.** *In  $\mathcal{B}_{2s}([a, b], \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2s-1})$ ,  $Y_{min}^{(2s)}$  has  $s$  support points  $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_s$  inside  $(a, b)$  which are the roots of the equation*

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^s \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_s \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{s+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{s-1} & \mu_s & \mu_{s+1} & \cdots & \mu_{2s-1} \end{vmatrix} = 0,$$

with positive masses  $q_1, q_2, \dots, q_s$  which are the solution of the Vandermonde system

$$q_1\theta_1^k + q_2\theta_2^k + \cdots + q_s\theta_s^k = \mu_k, \quad k = 0, 1, \dots, s-1,$$

while  $Y_{max}^{(2s)}$  has  $s+1$  support points  $a < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{s-1} < b$ , the  $\theta_i$  being the roots of the equation

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{s-1} \\ \mu_{2,ab} & \mu_{3,ab} & \mu_{4,ab} & \cdots & \mu_{s+1,ab} \\ \mu_{3,ab} & \mu_{4,ab} & \mu_{5,ab} & \cdots & \mu_{s+2,ab} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{s,ab} & \mu_{s+1,ab} & \mu_{s+2,ab} & \cdots & \mu_{2s-1,ab} \end{vmatrix} = 0,$$

with positive masses  $p_a, q_1, q_2, \dots, q_{s-1}, p_b$  which are the solution of the Vandermonde system

$$p_a a^k + q_1 \theta_1^k + q_2 \theta_2^k + \cdots + q_{s-1} \theta_{s-1}^k + p_b b^k = \mu_k, \quad k = 0, 1, \dots, s.$$

In  $\mathcal{B}_{2s+1}([a, b], \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2s})$ ,  $Y_{min}^{(2s+1)}$  has  $s+1$  support points  $a < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_s$ , the  $\theta_i$  being the roots of the equation

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^s \\ \mu_{1,a} & \mu_{2,a} & \mu_{3,a} & \cdots & \mu_{s+1,a} \\ \mu_{2,a} & \mu_{3,a} & \mu_{4,a} & \cdots & \mu_{s+2,a} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{s,a} & \mu_{s+1,a} & \mu_{s+2,a} & \cdots & \mu_{2s,a} \end{vmatrix} = 0,$$

with positive masses  $p_a, q_1, q_2, \dots, q_s$  which are the solution of the Vandermonde system

$$p_a a^k + q_1 \theta_1^k + q_2 \theta_2^k + \dots + q_{s-1} \theta_{s-1}^k + q_s \theta_s^k = \mu_k, \quad k = 0, 1, \dots, s,$$

while  $Y_{max}^{(2s+1)}$  has  $s+1$  support points  $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_s < b$ , the  $\theta_i$  being the roots of the equation

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^s \\ \mu_{1,b} & \mu_{2,b} & \mu_{3,b} & \cdots & \mu_{s+1,b} \\ \mu_{2,b} & \mu_{3,b} & \mu_{4,b} & \cdots & \mu_{s+2,b} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{s,b} & \mu_{s+1,b} & \mu_{s+2,b} & \cdots & \mu_{2s,b} \end{vmatrix} = 0,$$

with positive masses  $q_1, q_2, \dots, q_s, p_b$  which are the solution of the Vandermonde system

$$q_1 \theta_1^k + q_2 \theta_2^k + \dots + q_{s-1} \theta_{s-1}^k + q_s \theta_s^k + p_b b^k = \mu_k, \quad k = 0, 1, \dots, s.$$

## 1.4.2 Comparison of extrema

Once the bounds are obtained for a given  $s$ , a natural question is the order of the bounds themselves. As an additional moment reduces the space of moments and improves knowledge on the random variable, one might expect that the  $s$ -convex bound is sharper than the  $(s-1)$ -convex in the  $(s-1)$ -convex sense.

Obviously,  $\mathcal{B}_s([a, b], \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{s-1}) \subset \mathcal{B}_{s-1}([a, b], \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{s-2})$  given the same  $\mu_i$ ,  $1 \leq i \leq s-2$ . As  $Y_{min}^{(s)}, Y_{max}^{(s)} \in \mathcal{B}_s([a, b], \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{s-1})$ , we thus have

$$Y_{min}^{(s-1)} \leq_{(s-1)-cx}^{[a,b]} Y_{min}^{(s)}, \quad \text{and} \quad Y_{max}^{(s)} \leq_{(s-1)-cx}^{[a,b]} Y_{max}^{(s-1)}.$$

However, we will show with a counterexample that the implication  $Y \leq_{s-cx}^{[a,b]} Y_{max}^{(s)} \Rightarrow Y \leq_{(s-1)-cx}^{[a,b]} Y_{max}^{(s)}$  does not always hold.

**Example.** Let  $Y = {}_d U$ , a  $[0, 1]$ -uniform random variable. Thus,  $\mu_1 = 1/2$  and  $\mu_2 = 1/3$  (which satisfy the condition of (1.22)). Consider the function  $\phi : x \in [0, 1] \rightarrow \phi(x) = \exp(-\lambda x)$  where  $\lambda > 0$ . Then,  $\phi^{(2)}(x) > 0$  and  $\phi^{(3)}(x) < 0$ , i.e.  $\phi$  is 2-convex, but not 3-convex.

We look at the convex upper bound, for instance. From the extreme distributions obtained by Proposition 1.4.1, we directly obtain for  $s = 2$  and  $s = 3$

$$Y_{max}^{(2)} = \begin{cases} 0 & \text{with probability } \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{with probability } \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{and} \quad Y_{max}^{(3)} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{with probability } \frac{3}{4}, \\ 1 & \text{with probability } \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Figure 11 gives the differences  $\mathbb{E}[\phi(Y_{max}^{(2)})] - \mathbb{E}[\phi(Y)]$  (solid red curve) and  $\mathbb{E}[\phi(Y_{max}^{(3)})] - \mathbb{E}[\phi(Y)]$  (dashed black curve) as a function of  $\lambda > 0$ . We see that  $\mathbb{E}[\phi(Y_{max}^{(2)})] \geq \mathbb{E}[\phi(Y)]$  while  $\mathbb{E}[\phi(Y)] \geq \mathbb{E}[\phi(Y_{max}^{(3)})]$ .

The first inequality was expected since the function  $\phi$  is 2-convex. The second inequality means that the 3-convex maximum is a lower, and not upper, 2-convex bound.

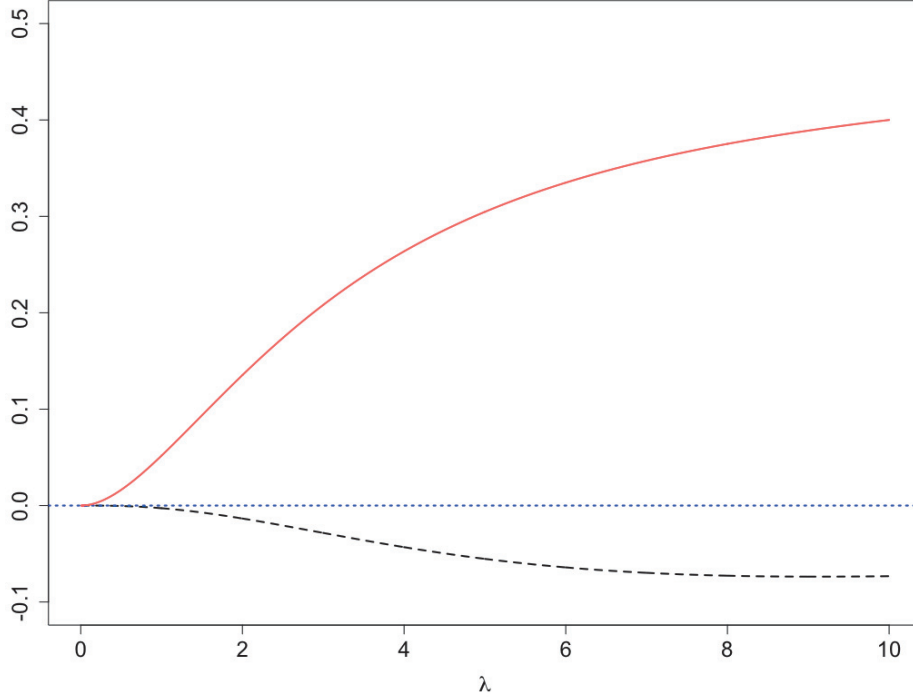


Figure 11 – Differences  $\mathbb{E}[\phi(Y_{max}^{(2)})] - \mathbb{E}[\phi(Y)]$  (solid red curve) and  $\mathbb{E}[\phi(Y_{max}^{(3)})] - \mathbb{E}[\phi(Y)]$  (dashed black curve) when  $\phi(x) = \exp(-\lambda x)$ ,  $x \in [0, 1]$ , and with  $\lambda > 0$ .

When does knowing more moments than the degree of convexity allow for sharper bounds? Suppose that  $\lambda$  may be negative. Figure 12 gives the same differences as Figure 11 but this time with  $\lambda \in \mathbb{R}$ . When  $\lambda < 0$ , we observe that both curves of differences are positive. Besides, as the dashed black curve is always under the solid red one, we deduce that  $\mathbb{E}[\phi(Y_{max}^{(2)})] \geq \mathbb{E}[\phi(Y_{max}^{(3)})] \geq \mathbb{E}[\phi(Y)]$ . Thus, knowing the moment  $\mu_2$  implies a decrease of the upper bound. This is not surprising since the function  $\phi$  is both 2 and 3-convex when  $\lambda < 0$ .

In general, the convex bounds are ordered as follows: for  $k \leq s$ ,

$$Y_{min}^{(k)} \leq_{k-cx}^{[a,b]} \dots \leq_{(s-2)-cx}^{[a,b]} Y_{min}^{(s-1)} \leq_{(s-1)-cx}^{[a,b]} Y_{min}^{(s)} \leq_{s-cx}^{[a,b]} Y,$$

$$Y \leq_{s-cx}^{[a,b]} Y_{max}^{(s)} \leq_{(s-1)-cx}^{[a,b]} Y_{max}^{(s-1)} \leq_{(s-2)-cx}^{[a,b]} \dots \leq_{k-cx}^{[a,b]} Y_{max}^{(k)}.$$

Since each ordering is for a different convexity degree, the extremal distributions cannot be compared with the same function  $\phi$ . However, when the function  $\phi$  is both  $(s-1)$  and  $s$ -convex, then  $Y \leq_{(s-1)-cx}^{[a,b]}$

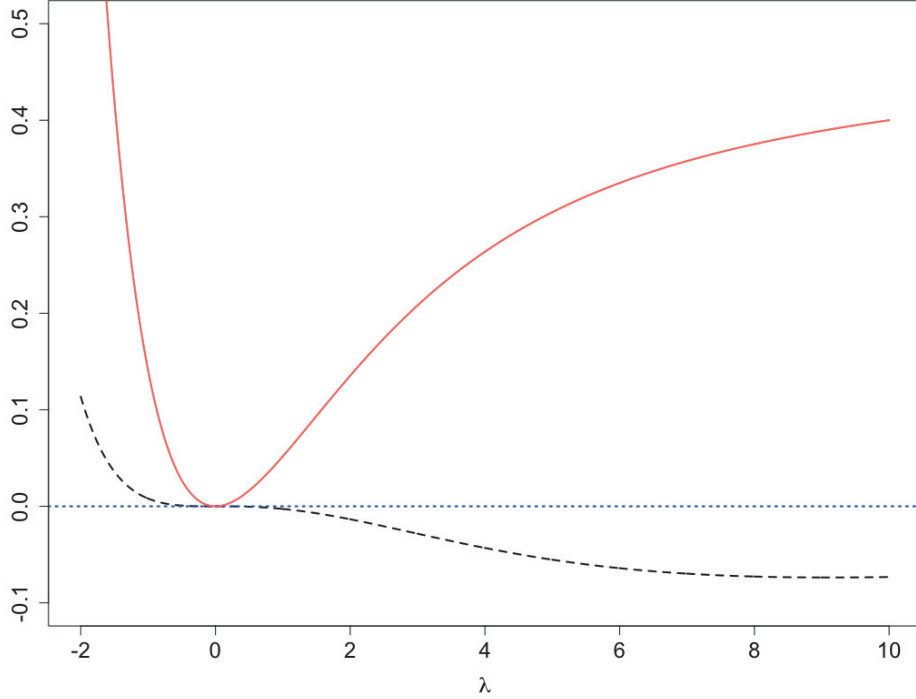


Figure 12 – Differences  $\mathbb{E}[\phi(Y_{max}^{(2)})] - \mathbb{E}[\phi(Y)]$  (solid red curve) and  $\mathbb{E}[\phi(Y_{max}^{(3)})] - \mathbb{E}[\phi(Y)]$  (dashed black curve) when  $\phi(x) = \exp(-\lambda x)$ ,  $x \in [0, 1]$ , and with  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$Y_{max}^{(s)} \leq_{(s-1)-cx}^{[a,b]} Y_{max}^{(s-1)}$ , i.e. knowing the  $(s-1)$ -th moment reduces the  $(s-1)$ -convex upper bound. This result can be formalized by using the notion of  $s$ -increasing convex order (see e.g. [Shaked and Shanthikumar \(2007\)](#)). A standard example is with the moment generating function considered by e.g. [Denuit \(1999\)](#) and [Brockett and Cox \(1985\)](#); [Brockett et al. \(2016\)](#). This point is not detailed for the sake of brevity.

### 1.4.3 Under Beta-unimodality

A simple way to construct convex extrema for Beta-unimodal variables is to apply the scaling factor  $S$  to the convex extrema of the starting variable.

**Proposition 1.4.2.** *If  $X$  is Beta-unimodal with  $X =_d SY$ , and  $Y \in \mathcal{B}_s([a, b], \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{s-1})$ , then  $X \in \mathcal{B}_s([0, b], \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{s-1})$  where*

$$\nu_i = \left( \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\alpha + j}{\alpha + \beta + j} \right) \mu_i, \quad 1 \leq i \leq s-1, \quad (1.23)$$



and the  $s$ -convex extrema for  $X$  are

$$X_{min}^{(s)} =_d SY_{min}^{(s)}, \quad \text{and} \quad X_{max}^{(s)} =_d SY_{max}^{(s)}, \quad (1.24)$$

where  $Y_{min}^{(s)}$  and  $Y_{max}^{(s)}$  are provided by the extreme distributions given in Proposition 1.4.1.

*Proof.* The relation (1.23) between the moments  $\mu_i = \mathbb{E}[Y^i]$  and  $\nu_i = \mathbb{E}[X^i]$  comes from (1.3). The distributional identity (1.24) is a direct consequence of Proposition 1.3.1.  $\square$

From Propositions 1.4.1 and 1.4.2, we obtain the  $s$ -convex extrema for Beta-unimodal random variables. This is done below for  $s = 2, 3, 4$ . Denote by  $\mathcal{B}_s(\alpha, \beta; [0, b]; \nu_1, \dots, \nu_{s-1})$  the space of all the random variables which are Beta-unimodal with scaling factor  $S(\alpha, \beta)$ , are valued in the interval  $[0, b]$  and have the first  $s - 1$  fixed moments  $\nu_i = \mathbb{E}[X^i]$ .

**Corollary 1.4.1.** *Let  $Y \in \mathcal{B}_s([a, b], \mu_1, \dots, \mu_{s-1})$ .*

In  $\mathcal{B}_2(\alpha, \beta; [0, b]; \nu_1)$ ,  $X_{min}^{(2)} \leq_{2-cx}^{[0, b]} X \leq_{2-cx}^{[0, b]} X_{max}^{(2)}$ , where

$$X_{min}^{(2)} = S\mu_1,$$

$$X_{max}^{(2)} = \begin{cases} Sa & \text{with probability } p_{max}^{(2)} = \frac{b - \mu_1}{b - a}, \\ Sb & \text{with probability } q_{max}^{(2)} = \frac{\mu_1 - a}{b - a}. \end{cases}$$

In  $\mathcal{B}_3(\alpha, \beta; [0, b]; \nu_1, \nu_2)$ ,  $X_{min}^{(3)} \leq_{3-cx}^{[0, b]} X \leq_{3-cx}^{[0, b]} X_{max}^{(3)}$ , where

$$X_{min}^{(3)} = \begin{cases} Sa & \text{with probability } p_{min}^{(3)} = \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{\mu_2 - \mu_1^2 + (\mu_1 - a)^2}, \\ S \frac{\mu_2 - a\mu_1}{\mu_1 - a} & \text{with probability } q_{min}^{(3)} = \frac{(\mu_1 - a)^2}{\mu_2 - \mu_1^2 + (\mu_1 - a)^2}, \end{cases}$$

$$X_{max}^{(3)} = \begin{cases} S \frac{b\mu_1 - \mu_2}{b - \mu_1} & \text{with probability } p_{max}^{(3)} = \frac{(b - \mu_1)^2}{\mu_2 - \mu_1^2 + (b - \mu_1)^2}, \\ Sb & \text{with probability } q_{max}^{(3)} = \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{\mu_2 - \mu_1^2 + (b - \mu_1)^2}. \end{cases}$$

In  $\mathcal{B}_4(\alpha, \beta; [0, b]; \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ ,  $X_{min}^{(4)} \leq_{4-cx}^{[0, b]} X \leq_{4-cx}^{[0, b]} X_{max}^{(4)}$ , where

$$X_{min}^{(4)} = \begin{cases} Sr_- & \text{with probability } p_{min}^{(4)} = \frac{r_+ - \mu_1}{r_+ - r_-}, \\ Sr_+ & \text{with probability } q_{min}^{(4)} = \frac{\mu_1 - r_-}{r_+ - r_-}, \end{cases}$$

where

$$\begin{cases} r_- = \frac{\mu_3 - \mu_1\mu_2 - \sqrt{(\mu_3 - \mu_1\mu_2)^2 - 4(\mu_2 - \mu_1)^2(\mu_1\mu_3 - \mu_2^2)}}{2(\mu_2 - \mu_1^2)}, \\ r_+ = \frac{\mu_3 - \mu_1\mu_2 + \sqrt{(\mu_3 - \mu_1\mu_2)^2 - 4(\mu_2 - \mu_1)^2(\mu_1\mu_3 - \mu_2^2)}}{2(\mu_2 - \mu_1^2)}, \end{cases}$$

and

$$X_{max}^{(4)} = \begin{cases} Sa & \text{with probability } 1 - p_{max}^{(4)} - q_{max}^{(4)}, \\ Sx_{max}^{(4)} & \text{with probability } p_{max}^{(4)}, \\ Sb & \text{with probability } q_{max}^{(4)}, \end{cases}$$

where

$$\begin{cases} x_{max}^{(4)} = \frac{\mu_3 - (a+b)\mu_2 + ab\mu_1}{\mu_2 - (a+b)\mu_1 + ab}, \\ p_{max}^{(4)} = \frac{b\mu_1 - \mu_2 + a(\mu_1 - b)}{(x_{max}^{(4)} - a)(b - x_{max}^{(4)})}, \\ q_{max}^{(4)} = \frac{\mu_2 - x_{max}^{(4)}\mu_1 + a(x_{max}^{(4)} - \mu_1)}{(b-a)(b - x_{max}^{(4)})}. \end{cases}$$

Obviously, the extrema have been improved when we know that  $X$  is Beta-unimodal. If the extrema in  $\mathcal{B}_s([0, b]; \nu_1, \dots, \nu_{s-1})$  without knowing the Beta-unimodality of  $X$  are denoted by  $\tilde{X}_{min}^{(s)}, \tilde{X}_{max}^{(s)}$ , then

$$\tilde{X}_{min}^{(s)} \leq_{s-cx}^{[0,b]} X_{min}^{(s)}, \quad \text{and} \quad X_{max}^{(s)} \leq_{s-cx}^{[0,b]} \tilde{X}_{max}^{(s)}.$$

## 1.5 Basis risk assessment

As explained in the Introduction, the objective of this article is to provide a means of quantifying the basis risk inherent in an index-based transaction. This type of transaction involves using a catastrophe modeling software to generate stochastic events. Let  $N$  be the number of stochastic events and  $p_i$  be the occurrence rate of the scenario  $i = 1, \dots, N$ . The  $p_i$  are usually obtained from a physical model or from estimated return periods of natural disasters. In each of them, the event trajectory is uncertain, which leads to an uncertain exposure (see e.g. Ewing (2011), Pinelli et al. (2011), Hamid et al. (2011) or Grossi (2005)). Therefore, the exposure is represented by a positive bounded random variable  $Y_i$  depending on the event  $i$ . This random variable is bounded, of course, by the value  $m$  ( $> 0$ ) of the whole portfolio. Moreover, the hazard component generates localized events so that the portfolio is not necessarily fully exposed. However, for each scenario, a deterministic zone is impacted, and some buildings are automatically destroyed. This leads to the assumption of a minimum loss  $a_i$  and a maximum loss  $b_i$ . Thus, we assume that each  $Y_i$  takes values almost surely in some interval  $(a_i, b_i)$  where  $0 \leq a_i < b_i \leq m$ .

Following a common practice (see e.g. [Sampson et al. \(2014\)](#), [Walker \(2011\)](#), [Cossette et al. \(2003\)](#), [Dutang et al. \(2017\)](#), [Gorge \(2016\)](#), [Charpentier \(2014\)](#)), the destruction ratio in scenario  $i$  is modeled by a random variable  $S_i$  with Beta distribution of parameters  $(\alpha_i, \beta_i)$  and which is independent of the exposure  $Y_i$ . This assumption of independence is reasonable since the destruction ratio depends on the event rather than the exposure. Of course, the two variables  $S_i$  and  $Y_i$  depend on  $i$ , so that the parameters  $(\alpha_i, \beta_i)$  can be adapted to have a relationship between the destruction ratio and the exposure level. The effective loss  $X_i$  on scenario  $i$  is then given by  $X_i = S_i Y_i$ .

In the paper, we focus on the so-called parametric or basis risk. For each scenario, the physical parameters corresponding to the reference index can be recovered. Thus, if the index in scenario  $i$  takes the value  $c_i$ , the basis risk in this scenario is  $X_i - c_i$  with  $X_i = S_i Y_i$ . As the exposure  $Y_i$  takes values in  $(a_i, b_i)$  by hypothesis (and  $S_i \in (0, 1)$ ) by definition), we almost surely have

$$a_i - c_i \leq X_i - c_i \leq b_i - c_i.$$

The basis risk can therefore be two-sided in practice. When the reimbursement is greater than the actual loss, this means that additional protection has been purchased and an additional risk premium has been paid, which is usually suboptimal. When the refund is less than the actual loss, the problem is clearly more serious. To some extent, we thus expect the loss component to provide a means of measuring the impact of basis risk. The literature provides some key indicators for measuring basis risk such as the expected conditional shortfall or the probability of certain levels of shortfall, also known as false negative probability, expected non-negative shortfall given loss, probability of shortfall in excess of a threshold given non-zero loss. We refer e.g. to [Brookes \(2009\)](#), [Ross and Williams \(2009\)](#), [Jensen et al. \(2018\)](#), [Takahashi et al. \(2018\)](#) and [Elabed et al. \(2013\)](#).

In the spirit of these measures, we introduce below different penalty functions which allow us to quantify the basis risk  $X_i - c_i$  through measuring its effects. For this, we also assume that certain first moments of the loss  $X_i = S_i Y_i$  are known or can be estimated. By bounding the expected value of the penalty functions, we are then able to determine the worst scenarios that actually correspond to the extrema  $s$ -convex extrema. More precisely, the global impact of the basis risks  $X_i - c_i$  for the  $n$  scenarios is measured by the quantity

$$BR_\phi = \sum_{i=1}^N p_i \mathbb{E}[\phi(X_i - c_i)], \quad (1.25)$$

where  $p_i$  is the likelihood of scenario  $i$  and  $\phi$  represents some specific penalty function. We use the  $s$ -convex extrema for each  $X_i$ , but for convenience we will limit ourselves to the cases where  $s = 2, 3, 4$ . These extrema allow us to derive lower and upper bounds for the measurement  $BR$ . From now on, we consider only one scenario for clarity; thus, the index  $i$  is superfluous and deleted.

### 1.5.1 Symmetric penalty function

We start by assuming a symmetric impact of the basis risk  $X - c$ . To this end, we use the absolute value as a penalty function  $g_1$ , i.e.

$$g_1(X - c) = |X - c|. \quad (1.26)$$

The function  $g_1$  is 2-convex (only) on  $\mathbb{R}$ . Thus, if  $\nu_1 = \mathbb{E}[X]$  is known, we can reason in the space  $\mathcal{B}_2(\alpha, \beta; [0, m]; \nu_1)$  for which the 2-convex extrema are provided by Corollary 1.4.1. Set  $J_{\alpha, \beta}(x) \equiv \mathbb{P}[S(\alpha, \beta) > x]$ , the Beta survival function. After a simple calculation of integrals, we obtain the following bounds for  $\mathbb{E}[g_1(X - c)]$ .

**Proposition 1.5.1.** *In  $\mathcal{B}_2(\alpha, \beta; [0, b]; \nu_1)$ , the lower bound for  $\mathbb{E}[|X - c|]$  is*

$$\mathbb{E}[|X_{min}^{(2)} - c|] = c[1 - 2J_{\alpha, \beta}(c/\mu_1)] - \nu_1[1 - 2J_{\alpha+1, \beta}(c/\mu_1)], \quad (1.27)$$

and the upper bound is

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_{max}^{(2)} - c|] &= p_{max}^{(2)}[c(1 - 2J_{\alpha, \beta}(c/a)) - (a\alpha/(\alpha + \beta))(1 - 2J_{\alpha+1, \beta}(c/a))] \\ &\quad + q_{max}^{(2)}[c(1 - 2J_{\alpha, \beta}(c/b)) - (b\alpha/(\alpha + \beta))(1 - 2J_{\alpha+1, \beta}(c/b))]. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Note that without the assumption of Beta-unimodality, i.e. in the space  $\mathcal{B}_2([0, b]; \nu_1)$ , the bounds for  $\mathbb{E}[|X - c|]$  are

$$\mathbb{E}[|\tilde{X}_{min}^{(2)} - c|] = |\nu_1 - c|, \quad \text{and} \quad \mathbb{E}[|\tilde{X}_{max}^{(2)} - c|] = c + \nu_1(b - 2c)/b. \quad (1.29)$$

**Example.** Let  $Y \stackrel{d}{=} U$ , a  $[0, b]$ -uniform random variable, and choose the parameters  $\alpha = 4, \beta = 2, b = 10$  and  $c = 2$ . Table 21 gives the values of  $\mathbb{E}[|X - c|]$  and its bounds (1.27), (1.28), (1.29). As indicated before, the assumption of Beta-unimodality allows us to get sharper bounds. Incidentally, we note that  $\mathbb{E}[|\tilde{X}_{min}^{(3)} - c|] = 2.3528$  and  $\mathbb{E}[|\tilde{X}_{max}^{(3)} - c|] = 0.3999$ , which again illustrates the discussion made in Section 1.4.3.

Bounds	Beta-unimodality	Values for $\mathbb{E}[g_1]$
$\mathbb{E}[ \tilde{X}_{min}^{(2)} - c ]$	No	1.3333
$\mathbb{E}[ X_{min}^{(2)} - c ]$	Yes	1.4084
$\mathbb{E}[ X - c ]$	-	2.0005
$\mathbb{E}[ X_{max}^{(2)} - c ]$	Yes	3.3361
$\mathbb{E}[ \tilde{X}_{max}^{(2)} - c ]$	No	4.0000

Table 11 – The values of  $\mathbb{E}[|X - c|]$  and its lower and upper bounds under Beta-unimodality or not, when  $Y$  is uniform on  $[0, b]$ ,  $b = 10, c = 2$  and  $\alpha = 4, \beta = 2$ .

**Remark.** Brockett et al. (2016) derived 2-cx bounds on  $\mathbb{E}[|X - c|]$  when  $X$  is  $\alpha$ -unimodal, with  $Y$  takes values over  $[0, b]$ . This situation is a particular case of Beta-unimodality that corresponds to the case where  $S \sim S(\alpha, 1)$  (see Section 1.2.1). We are going to show that our bounds correct a (minor) error in their result.

Under  $\alpha$ -unimodality (i.e., when  $\beta = 1$ ), defining a function  $f$  given by

$$f(y) = \begin{cases} c - \frac{\alpha}{\alpha + 1}y, & y \in [0, c], \\ -c + \frac{\alpha}{\alpha + 1}y + 2\frac{c^{\alpha+1}}{(\alpha + 1)y^\alpha}, & y \in [c, b]. \end{cases} \quad (1.30)$$

our bounds (1.27), (1.28) take the simple form

$$\mathbb{E}[|X_{min}^{(2)} - c|] = f(\nu_1(\alpha + 1)/\alpha), \quad (1.31)$$

$$\mathbb{E}[|X_{max}^{(2)} - c|] = (1 - \nu_1(\alpha + 1)/\alpha b)f(0) + (\nu_1(\alpha + 1)/\alpha b)f(b). \quad (1.32)$$

For their part, Brockett et al. (2016) defined a function  $g$  by

$$g(y) = \frac{\alpha}{y^\alpha} \int_0^y t^{\alpha-1} |t - c| dt, \quad (1.33)$$

when, as here, the mode is 0 and  $0 \leq y \leq b$ , and proved that the 2-convex bounds are given by (1.31), (1.32) with  $g$  substituted for  $f$ . In addition, they claimed that the function (1.33) is equivalent to

$$g(y) = \begin{cases} c - \frac{\alpha}{\alpha + 1}y, & y \in [0, c], \\ \frac{\alpha}{\alpha + 1}(y - c) + \frac{c^{\alpha+1}}{(\alpha + 1)y^\alpha}, & y \in [c, b], \end{cases} \quad (1.34)$$

and the expression (1.34) was used in their Theorem 4, pages 776-777. In fact, an integral calculation shows that, as expected,  $g$  given by (1.33) is well identical to  $f$  given by (1.30). However, (1.33) differs from (1.34) when  $y \in [c, b]$ .

## 1.5.2 Piecewise linear penalty function

From (1.26), the function  $g_1$  similarly accounts for overestimation and underestimation of the risk. This can be too simplistic because minimizing a risk is often very dangerous. To remedy it, a natural generalization of  $g_1$  is to consider different slopes for the positive and negative differences of the basis risk  $X - c$ . Thus, introducing the functions

$$f_1(x) = \eta(c - x)_+, \quad \text{and} \quad f_2(x) = \gamma(x - c)_+, \quad x \in [0, b],$$

where  $\eta, \gamma > 0$ , we define a penalty function  $g_2$  by

$$g_2(X - c) = f_1(X) + f_2(X). \quad (1.35)$$

As the functions  $f_1, f_2$  are 2-convex on  $\mathbb{R}$ , we may argue exactly as for Proposition 2.2.4 to get bounds for  $\mathbb{E}[f_1(X)], \mathbb{E}[f_2(X)]$ . From (1.35), bounds for  $\mathbb{E}[g_2(X - c)]$  directly follow.

**Proposition 1.5.2.** *In  $\mathcal{B}_2(\alpha, \beta; [0, b]; \nu_1)$ , the lower bounds for  $\mathbb{E}[f_1(X)]$  and  $\mathbb{E}[f_2(X)]$  are*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f_1(X_{min}^{(2)})] &= \eta [c(1 - J_{\alpha, \beta}(c/\mu_1)) - \nu_1(1 - J_{\alpha+1, \beta}(c/\mu_1))], \\ \mathbb{E}[f_2(X_{min}^{(2)})] &= \gamma [\nu_1 J_{\alpha+1, \beta}(c/\mu_1) - c J_{\alpha, \beta}(c/\mu_1)],\end{aligned}$$

and the upper bounds are

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{f_1(X_{max}^{(2)})\} &= \eta \left\{ p_{max}^{(2)} [c(1 - J_{\alpha, \beta}(c/a)) - (a\alpha/(\alpha + \beta))(1 - J_{\alpha+1, \beta}(c/a))] \right. \\ &\quad \left. + q_{max}^{(2)} [c(1 - J_{\alpha, \beta}(c/b)) - (b\alpha/(\alpha + \beta))(1 - J_{\alpha+1, \beta}(c/b))] \right\}, \\ \mathbb{E}\{f_2(X_{max}^{(2)})\} &= \gamma \left\{ p_{max}^{(2)} [(a\alpha/(\alpha + \beta))J_{\alpha+1, \beta}(c/a) - cJ_{\alpha, \beta}(c/a)] \right. \\ &\quad \left. + q_{max}^{(2)} [(b\alpha/(\alpha + \beta))J_{\alpha+1, \beta}(c/b) - cJ_{\alpha, \beta}(c/b)] \right\}.\end{aligned}$$

### 1.5.3 Power-type penalty function

Nevertheless, the function  $g_2(x - c)$  is piecewise linear, which can still be too constraining. For example, after the level  $c$ , when the uncertainty increases by  $\epsilon$ , the consequences will remain the same, regardless of the initial level. This is not particularly troublesome for small values of  $\epsilon$ , but this can be unrealistic for larger values of  $\epsilon$ . It is therefore useful to have a penalty function that impacts the basis risk in a more general non-linear way.

As a general rule, a penalty function should increase the impact of a basis risk  $X - c$  that occurs at a higher level. To model such an effect, we introduce a power-type function

$$\phi_n(x) = \gamma [(x - c) - d]_+^{n-1}, \quad x \in [0, b],$$

which depends on two new parameters  $d > 0$  and  $n \in \mathbb{N}_0$ . The parameter  $d$  can be viewed as a critical level because the difference  $x - c$  only has a negative impact if it is greater than  $d$ . It is linked to the level of risk that the company is willing to take to achieve its strategic objectives: depending on the company's risk appetite and its capacity to absorb losses, the company chooses a more or less conservative penalty function. This choice is decided by the board of directors and can be difficult to make. A similar difficulty arises when identifying the utility function of each part in optimal risk sharing. The parameter  $n$  is used to manage the level of consequences produced by the observed difference. Note that  $x - c > d + 1$  implies  $\phi_{n+1}(x) > \phi_n(x)$  for all  $n$ , i.e. the higher the  $n$ , the greater the impact.

By combining  $\phi_n$  with the previous  $g_2$ , we define the penalty function

$$h_n(X - c) = f_1(X) + f_2(X) + \phi_n(X), \tag{1.36}$$

which shows three types of possible consequences. First, a negative value for the difference  $X - c$  means that the payout given by the index  $c$  overestimates the loss  $X$  (Zone 1 in Figure 13). In this case, if an insurer wishes to purchase parametric reinsurance coverage based on the same index, the premium paid will be too high and the insurer will be over-hedged. In fact, the more negative the difference, the more unnecessary reinsurance is important. Second, a positive value for the difference  $X - c$  means that the value taken by the index  $c$  underestimates the loss  $X$ , and the penalty  $\phi_n$  displays two different levels of consequences. If  $X - c$  remains under the critical level  $d$  (Zone 2 in Figure 13), the amount of parametric reinsurance coverage will be too small and the insurer will be under-hedged. Conversely, if the  $X - c$  exceeds the critical level  $d$  (Zone 3 in Figure 13), the consequences get worse. One possible reason could be that the insurer decides not to take reinsurance at all because the index is never greater than its acceptable loss, which forces it to draw on its reserve or even to drive it to the bankruptcy.

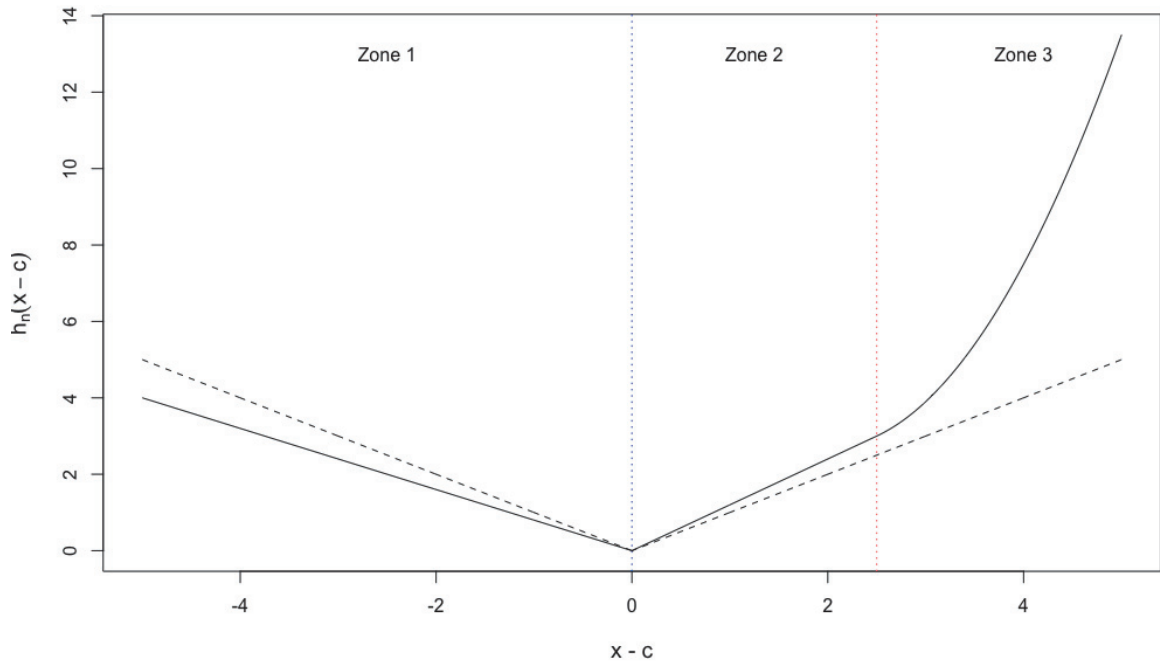


Figure 13 – The penalty function  $h_n(x - c)$  when  $\eta = 0.8, \gamma = 1.2, c = 5, d = 2.5, b = 10$  and  $n = 2$ . Dashed line represents  $|x - c|$ , i.e.  $g_1(x - c)$ .

We want to get bounds on the expected penalty  $\mathbb{E}[h_n(X - c)]$ . For that, we will deduce bounds on  $\mathbb{E}[\phi_n(X)]$ . It can be checked that the function  $\phi_n(x)$  is  $n$ -increasing convex on  $\mathbb{R}$ , i.e. it is  $k$ -convex for all  $k = 2, \dots, n$ . Therefore,  $s$ -convex bounds can only be considered for  $s = 2, \dots, n$ . We assume below that  $n \geq 4$  and  $s = 2, 3, 4$ .

As a preliminary, we determine the expectation  $l_n(x, y) \equiv \mathbb{E}[(Sx - y)_+^{n-1}]$ ,  $x, y > 0$ , that will serve to express the bounds.

**Lemma 1.5.1.**

$$l_n(x, y) = \mathbf{1}_{\{x > y\}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^k y^k x^{n-1-k} J_{\alpha+n-1-k, \beta} \left( \frac{y}{x} \right) \frac{\Gamma(\alpha+n-1-k)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+n-1-k)\Gamma(\alpha)}. \quad (1.37)$$

*Proof.* Since  $S \sim S(\alpha, \beta)$ ,  $l_n(x, y) = 0$  if  $x \leq y$ . For  $x > y$ ,

$$\begin{aligned} l_n(x, y) &= \int_{y/x}^1 (sx - y)^{n-1} f_S(s) ds, \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^k y^k x^{n-1-k} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{y/x}^1 s^{\alpha+n-1-k-1} (1-s)^{\beta-1} ds, \end{aligned}$$

hence (1.37) using again the notation  $J_{\alpha, \beta}(x) = \mathbb{P}[S(\alpha, \beta) > x]$ .  $\square$

From Corollary 1.4.1 and using Lemma 1.5.1, we then find the following bounds for  $\mathbb{E}[\phi_n(X)]$ ,  $n \geq 4$ , in the spaces  $\mathcal{B}_s(\alpha, \beta; [0, b]; \nu_1, \dots, \nu_{s-1})$  for  $s = 2, 3, 4$ .

**Proposition 1.5.3.** *Choose  $n \geq 4$ . In  $\mathcal{B}_2(\alpha, \beta; [0, b]; \nu_1)$ , the lower bound for  $\mathbb{E}[\phi_n(X)]$  is*

$$\mathbb{E}[\phi_n(X_{min}^{(2)})] = \gamma l_n(\mu_1, c + d),$$

and the upper bound is

$$\mathbb{E}[\phi_n(X_{max}^{(2)})] = \gamma \left[ p_{max}^{(2)} l_n(a, c + d) + q_{max}^{(2)} l_n(b, c + d) \right].$$

In  $\mathcal{B}_3(\alpha, \beta; [0, b]; \nu_1, \nu_2)$ , the lower bound for  $\mathbb{E}[\phi_n(X)]$  is

$$\mathbb{E}[\phi_n(X_{min}^{(3)})] = \gamma \left[ p_{min}^{(3)} l_n(a, c + d) + q_{min}^{(3)} l_n\left(\frac{\mu_2 - a\mu_1}{\mu_1 - a}, c + d\right) \right],$$

and the upper bound is

$$\mathbb{E}[\phi_n(X_{max}^{(3)})] = \gamma \left[ p_{max}^{(3)} l_n\left(\frac{b\mu_1 - \mu_2}{b - \mu_1}, c + d\right) + q_{max}^{(3)} l_n(b, c + d) \right].$$

In  $\mathcal{B}_4(\alpha, \beta; [0, b]; \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ , the lower bound for  $\mathbb{E}[\phi_n(X)]$  is

$$\mathbb{E}[\phi_n(X_{min}^{(4)})] = \gamma \left[ \frac{r_+ - \mu_1}{r_+ - r_-} l_n(r_-, c + d) + \frac{\mu_1 - r_-}{r_+ - r_-} l_n(r_+, c + d) \right],$$

and the upper bound is

$$\mathbb{E}[\phi_n(X_{max}^{(4)})] = \gamma \left[ (1 - p_{max}^{(4)} - q_{max}^{(4)}) l_n(a, c + d) + p_{max}^{(4)} l_n(x_{max}^{(4)}, c + d) + q_{max}^{(4)} l_n(b, c + d) \right].$$



For the desired expectation  $\mathbb{E}[h_n(X - c)]$ , we now deduce from (1.36) and Propositions 1.5.2, 1.5.3 that for  $n \geq 4$  and  $s = 2, 3, 4$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f_1(X_{min}^{(2)})] + \mathbb{E}[f_2(X_{min}^{(2)})] + \mathbb{E}[\phi_n(X_{min}^{(s)})] &\leq \mathbb{E}[h_n(X - c)] \\ &\leq \mathbb{E}[f_1(X_{max}^{(2)})] + \mathbb{E}[f_2(X_{max}^{(2)})] + \mathbb{E}[\phi_n(X_{max}^{(s)})]. \end{aligned}$$

By the  $n$ -increasing convexity of  $\phi_n$ , we note also that for  $s = 2, 3$ ,

$$\mathbb{E}[\phi_n(X_{min}^{(s)})] \leq \mathbb{E}[\phi_n(X_{min}^{(s+1)})] \leq \mathbb{E}[\phi_n(X)], \text{ and } \mathbb{E}[\phi_n(X)] \leq \mathbb{E}[\phi_n(X_{max}^{(s+1)})] \leq \mathbb{E}[\phi_n(X_{max}^{(s)})].$$

#### 1.5.4 Exponential-type penalty function

The function  $\phi_n(x)$  being increasing convex of finite order  $n$ , the number of usable moments of  $X$  is necessarily limited. This motivates us to consider a function  $\phi_\infty(x)$  which is increasing convex of infinite order, i.e. typically of exponential form. Thus, we define  $\phi_\infty(x)$  by

$$\phi_\infty(x) = \gamma \{ \exp(\kappa[(x - c) - d]_+) - 1 \}, \quad x \in [0, b],$$

in which the term  $-1$  is introduced to guarantee  $\phi_\infty(x) = 0$  for  $x \leq c + d$  as before. The new parameter  $\kappa > 0$  handles the impact of the difference  $x - c$ . The resulting penalty function is then given by

$$h_\infty(X - c) = f_1(X) + f_2(X) + \phi_\infty(X). \quad (1.38)$$

The exponential form of  $\phi_\infty$  has the advantage of allowing the use of all available moments of  $X$ . For example, if the first three moments are known, it is natural to consider the function  $\phi_4$ . Suppose now that the fourth moment can be estimated later. Two choices are then possible: either ignore this new information since  $\phi_4$  is not 5-convex, or replace  $\phi_4$  with  $\phi_5$  in order to exploit this information, which leads to modify the model. With the function  $\phi_\infty$  function, having an extra moment does not change the model, it only allows for sharper bounds.

To obtain bounds on  $\mathbb{E}[h_\infty(X - c)]$ , we must first derive bounds on  $\mathbb{E}[\phi_\infty(X)]$ . As a preliminary, we determine the expectation  $\mathbb{E}\{\exp[\kappa(Sx - y)_+]\}$ ,  $x, y > 0$ , that is involved in these calculations. For that, we will use the concept of partial moment generating function of a variable  $X$  (see e.g. Winkler et al. Winkler et al. (1972)). It is the integral, if it exists, defined from  $y$  to  $z$  by

$$\mathcal{M}_y^z(t) = \int_y^z e^{tx} dF_X(x), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.39)$$

**Lemma 1.5.2.**

$$\mathbb{E}\{\exp[\kappa(Sx - y)_+]\} = 1 - J_{\alpha, \beta}(y/x) + \exp(-\kappa y) \mathcal{M}_{y/x \wedge 1}^1(\kappa x). \quad (1.40)$$

*Proof.* Since  $S \sim S(\alpha, \beta)$ , a direct integration yields

$$\mathbb{E}\{\exp[\kappa(Sx - y)_+]\} = \int_0^{y/x \wedge 1} f_S(s) ds + \exp(-\kappa y) \int_{y/x \wedge 1}^1 \exp(\kappa x s) f_S(s) ds,$$

which becomes (1.40) using the notation  $J_{\alpha, \beta}$  and (1.39).  $\square$

From Corollary 1.4.1 and applying Lemma 1.5.2, we deduce the following bounds for  $\mathbb{E}[\phi_\infty(X)]$  in the spaces  $\mathcal{B}_s(\alpha, \beta; [0, b]; \nu_1, \dots, \nu_{s-1})$  for  $s = 2, 3, 4$ .

**Proposition 1.5.4.** *In  $\mathcal{B}_2(\alpha, \beta; [0, b]; \nu_1)$ , the lower bound for  $\mathbb{E}[\phi_\infty(X)]$  is*

$$\mathbb{E}[\phi_\infty(X_{min}^{(2)})] = \gamma \left[ -J_{\alpha, \beta} \left( \frac{c+d}{\mu_1} \right) + \exp(-\kappa(c+d)) \mathcal{M}_{\frac{c+d}{\mu_1} \wedge 1}^1(\kappa \mu_1) \right],$$

and the upper bound is

$$\mathbb{E}[\phi_\infty(X_{max}^{(2)})] = \gamma q_{max}^{(2)} \left[ -J_{\alpha, \beta} \left( \frac{c+d}{b} \right) + \exp(-\kappa(c+d)) \mathcal{M}_{\frac{c+d}{b}}^1(\kappa b) \right].$$

In  $\mathcal{B}_3(\alpha, \beta; [0, b]; \nu_1, \nu_2)$ , the lower bound for  $\mathbb{E}[\phi_\infty(X)]$  is

$$\mathbb{E}[\phi_\infty(X_{min}^{(3)})] = \gamma q_{max}^{(3)} \left[ -J_{\alpha, \beta} \left( \frac{c+d}{x_{min}^{(3)}} \right) + \exp(-\kappa(c+d)) \mathcal{M}_{\frac{c+d}{x_{min}^{(3)}} \wedge 1}^1(\kappa x_{min}^{(3)}) \right],$$

with  $x_{min}^{(3)} = (\mu_2 - a\mu_1)/(\mu_1 - a)$ , and the upper bound is

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi_\infty(X_{max}^{(3)})] &= \gamma p_{max}^{(3)} \left[ -J_{\alpha, \beta} \left( \frac{c+d}{x_{max}^{(3)}} \right) + \exp(-\kappa(c+d)) \mathcal{M}_{\frac{c+d}{x_{max}^{(3)}} \wedge 1}^1(\kappa x_{max}^{(3)}) \right] \\ &+ \gamma q_{max}^{(3)} \left[ -J_{\alpha, \beta} \left( \frac{c+d}{b} \right) + \exp(-\kappa(c+d)) \mathcal{M}_{\frac{c+d}{b}}^1(\kappa b) \right], \end{aligned}$$

with  $x_{max}^{(3)} = (b\mu_1 - \mu_2)/(b - \mu_1)$ .

In  $\mathcal{B}_4(\alpha, \beta; [0, b]; \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ , the lower bound for  $\mathbb{E}[\phi_\infty(X)]$  is

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi_\infty(X_{min}^{(4)})] &= \gamma p_{min}^{(4)} \left[ -J_{\alpha, \beta} \left( \frac{c+d}{r_-} \right) + \exp(-\kappa(c+d)) \mathcal{M}_{\frac{c+d}{r_-} \wedge 1}^1(\kappa r_-) \right] \\ &+ \gamma q_{min}^{(4)} \left[ -J_{\alpha, \beta} \left( \frac{c+d}{r_+} \right) + \exp(-\kappa(c+d)) \mathcal{M}_{\frac{c+d}{r_+} \wedge 1}^1(\kappa r_+) \right], \end{aligned}$$

and the upper bound is

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi_\infty(X_{max}^{(4)})] &= \gamma p_{max}^{(4)} \left[ -J_{\alpha, \beta} \left( \frac{c+d}{x_{max}^{(4)}} \right) + \exp(-\kappa(c+d)) \mathcal{M}_{\frac{c+d}{x_{max}^{(4)}} \wedge 1}^1(\kappa x_{max}^{(4)}) \right] \\ &+ \gamma q_{max}^{(4)} \left[ -J_{\alpha, \beta} \left( \frac{c+d}{b} \right) + \exp(-\kappa(c+d)) \mathcal{M}_{\frac{c+d}{b}}^1(\kappa b) \right]. \end{aligned}$$

For the expectation  $\mathbb{E}[h_\infty(X - c)]$ , we now get from (1.38) and Propositions 1.5.2, 1.5.4 that for  $s = 2, 3, 4$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f_1(X_{min}^{(2)})] + \mathbb{E}[f_2(X_{min}^{(2)})] + \mathbb{E}[\phi_\infty(X_{min}^{(s)})] &\leq \mathbb{E}[h_\infty(X - c)] \\ &\leq \mathbb{E}[f_1(X_{max}^{(2)})] + \mathbb{E}[f_2(X_{max}^{(2)})] + \mathbb{E}[\phi_\infty(X_{max}^{(s)})]. \end{aligned}$$

The remark made before about the comparison of the bounds when  $s = 2, 3$  remains valid for  $\mathbb{E}(\phi_\infty)$ . For an appropriate penalty function, the greater the number of known moments, the sharper the bounds on the expected penalty functions.

## 1.6 Numerical illustrations

Most licenses for cat modeling software are expensive, which has prevented us from using actual data. However, thanks to the close links between the authors and certain reinsurance companies, we were able to generate  $N = 100$  scenarios of simulated data very similar to typical real-world data sets (which often include several thousand scenarios).

Each scenario  $i$  is characterized by its occurrence rate  $p_i$ , the parameters  $(\alpha_i, \beta_i)$  of the Beta distribution of the destruction ratio  $S_i$ , and the information available on the exposure  $Y_i$ , i.e. its range  $(a_i, b_i)$  and several first moments. To generate this information on the moments of  $Y_i$ , we used the moments of distributions that are traditional in cat modeling. So, the event set involves 67 scenarios where the exposure moments are obtained from a scaled Beta distribution and 33 scenarios where the exposure moments are derived from a truncated Pareto distribution. These two distributions are discussed in an actuarial context in e.g. Clark (2013) and Beirlant et al. (2014); a short presentation is given in the Appendix.

We considered five types of scenarios, depending on the size of uncertainty, the intensity of the destruction ratio and the link between the loss and the destruction ratio.

- Scenarios 1 to 5 represent cases where the exposure is limited and of Beta type, but the intensity of the event is either small or large. Thus,  $a_i, b_i$  are relatively small whereas  $\alpha_i, \beta_i < 1$ .
- In scenarios 6 to 66, the destruction ratios are sorted according to their riskiness. In fact, the higher  $\alpha_i$  and the lower  $\beta_i$ , the greater the probability that the destruction ratio is close to 1. In addition, the corresponding  $Y_i$  is a scaled Beta variable and is generated so that its mean is decreasing. In other words, a large event is linked to a huge exposure.
- Scenarios 67 to 96 look like the previous ones, except that the exposure  $Y_i$  is a truncated Pareto variable. Here too, the probability that the destruction ratio takes values close to 1 decreases from the scenario 67 to 96.
- Until now, all scenarios  $i = 1, \dots, 96$  had the same probability of occurrence  $p_i = 1.0\%$ . This time, we take  $p_{97} = 3.0\%$ . That scenario represents the case where the event potentially involves

a huge exposure in the sense that  $Y_{97}$  is Beta( $[40, 80], 0.5, 0.5$ ) with a lot of uncertainty (which could come, for example, from the fact that a very big city can be hit or not). To that extent, the exposure is somehow close to 40 or 80. In addition, the destruction ratio is often close to 1.

- Finally, the scenarios 98, 99, 100 involve significant exposures as well as destruction ratios shifted to the right. Thus, these three scenarios can be considered the most dangerous. It seems reasonable to assume that these scenarios do not all have the same frequency, hence the choices  $p_{98} = 0.5\%$ ,  $p_{99} = 0.4\%$ ,  $p_{100} = 0.1\%$ .

Those 100 scenarios encompass lighter and heavier tailed risks (even if there is a finite total exposure), and feature different levels of risk, uncertainty, and correlations between destruction rates and exposures, like in the real world. The full description of scenarios is given in Table 16 of the Appendix.

A major objective of this illustration is to highlight the role of the penalty function, the index and the impact of information on exposure on the sharpness of the bounds. The penalty functions  $h_n$  given by (1.36) and  $h_\infty$  given by (1.38) are defined with the parameters  $\eta = 0.8$ ,  $\gamma = 1.2$ ,  $n = 4$  and  $\kappa = 0.2$ . Tables 12 to 15 provide the  $s$ -convex bounds for  $X_i$  when  $s = 2, 3, 4$  and the corresponding impact of the basis risk  $BR_\phi^{(s)}$  given by (1.25) when  $\phi$  is  $h_4$  or  $h_\infty$ .

In Table 12, the index value is  $c_i = \mathbb{E}[S_i Y_i]$  and the critical level is  $d_i = 1.05\mathbb{E}[S_i Y_i]$ . As expected, the 4-convex bounds are much sharper than the 3 and 2-convex bounds. Equivalently, the worst case scenario in the 4-convex sense is less severe than in the 3 or 2-convex sense. This conclusion is common to the following three tables. To reduce the basis risk, the insurer must logically refine the information on exposures, for example by knowing higher moments.

In Tables 13 to 15, we choose  $c_i = 0.95\mathbb{E}[S_i Y_i]$ ,  $c_i = 1.05\mathbb{E}[S_i Y_i]$ ,  $c_i = 1.15\mathbb{E}[S_i Y_i]$  respectively, with the same  $d_i$  as before. Thus, the values chosen for  $c_i$  are between 95% and 115% of the expected loss: if  $c_i$  is less than 95% of the expected loss, the cedent would not be willing to buy protection, and if  $c_i$  is greater than 115% of the expected loss, it is likely that the cost of the transaction is too high. We observe that the bounds are very sensitive to the value of  $c_i$ . This is natural since the index defines the basis risk. We draw attention to the fact that the choice of penalty function, its form and its parameters should be driven by the risk appetite of the protection buyer and not for a purpose of optimization. In other words, the threshold level  $d_i$  should be the same whatever the retained index-based structure, while the minimization of the basis risk measurement should be done by modifying the index value  $c_i$ , and not the penalty function nor its parameters.

$s$ -convex bounds	$BR_{h_4}^{(s)}$	$BR_{h_\infty}^{(s)}$
2-cx lower bound	317.599	4.436
3-cx lower bound	534.484	4.581
4-cx lower bound	1 053.163	4.754
X	1 356.515	7.785
4-cx upper bound	1 863.618	26.737
3-cx upper bound	3 389.789	103.215
2-cx upper bound	18 647.031	1 577.784

Table 12 – Values of  $BR_{h_4}^{(s)}$  and  $BR_{h_\infty}^{(s)}$  for  $s = 2, 3, 4$ , when  $c = \mathbb{E}[SY]$  and  $d = 1.05\mathbb{E}[SY]$ .

$s$ -convex order	$BR_{h_4}^{(s)}$	$BR_{h_\infty}^{(s)}$
2-cx lower bound	487.918	4.842
3-cx lower bound	870.181	5.045
4-cx lower bound	1 603.361	5.276
X	1 956.715	8.589
4-cx upper bound	2 540.901	30.907
3-cx upper bound	4 299.803	118.657
2-cx upper bound	21 149.301	1 779.437

Table 13 – Values of  $BR_{h_4}^{(s)}$  and  $BR_{h_\infty}^{(s)}$  for  $s = 2, 3, 4$ , when  $c = 0.95\mathbb{E}[SY]$  and  $d = 1.05\mathbb{E}[SY]$ .

$s$ -convex order	$BR_{h_4}^{(s)}$	$BR_{h_\infty}^{(s)}$
2-cx lower bound	215.974	4.194
3-cx lower bound	342.337	4.299
4-cx lower bound	706.460	4.431
X	959.211	7.163
4-cx upper bound	1 399.546	23.395
3-cx upper bound	2 741.775	90.257
2-cx upper bound	16 697.651	1 401.555

Table 14 – Values of  $BR_{h_4}^{(s)}$  and  $BR_{h_\infty}^{(s)}$  for  $s = 2, 3, 4$ , when  $c = 1.05\mathbb{E}[SY]$  and  $d = 1.05\mathbb{E}[SY]$ .

$s$ -convex order	$BR_{h_4}^{(s)}$	$BR_{h_\infty}^{(s)}$
2-cx lower bound	110.008	4.173
3-cx lower bound	164.702	4.229
4-cx lower bound	350.635	4.311
X	526.320	6.703
4-cx upper bound	860.462	18.580
3-cx upper bound	1 940.151	70.117
2-cx upper bound	13 885.964	1 111.376

Table 15 – Values of  $BR_{h_4}^{(s)}$  and  $BR_{h_\infty}^{(s)}$  for  $s = 2, 3, 4$ , when  $c = 1.15\mathbb{E}[SY]$  and  $d = 1.05\mathbb{E}[SY]$ .

**In conclusion.** We started by identifying  $s$ -convex extrema for bounded random variables obtained by a random scaling of Beta type. Thanks to this, we were able to evaluate the basis risk in a parametric transaction using penalty functions of different forms. We also showed the impact of information, in terms of moments, on the assessment of the basis risk. So, within the proposed framework, we have provided a (partial) answer to the key question: how much does the basis risk cost? In a future paper, we will examine other situations where the basis risk is unbounded and where the independence between the destruction ratio and the exposure level is questionable.

**Appendix.** Let us recall the definition of the two distributions used to model the exposure  $Y_i$ .

A scaled Beta distribution enlarges the support of the usual Beta distribution. It again depends on two positive parameters,  $u_i, v_i$  say, but is now defined on an interval  $[a_i, b_i]$ . Specifically, if  $W_i$  is a Beta( $u_i, v_i$ ) variable, then  $Y_i$  is a Beta( $[a_i, b_i], u_i, v_i$ ) variable means that

$$Y_i = (b_i - a_i)W_i + a_i.$$

The moments of a scaled Beta distribution follow directly.

The variable  $Y_i$  has a truncated Pareto distribution of real parameter  $u_i$  when its distribution function is

$$F_{Y_i}(x) = \begin{cases} \frac{1 - (a_i/x)^{u_i}}{1 - (a_i/b_i)^{u_i}}, & a_i \leq x \leq b_i, \quad \text{if } u_i \neq 0, \\ \frac{\ln(x/a_i)}{\ln(b_i/a_i)}, & a_i \leq x \leq b_i, \quad \text{if } u_i = 0. \end{cases}$$

Note that for  $u_i = -1$ , this is reduced to the uniform distribution over  $[a_i, b_i]$ . All moments of a truncated Pareto exist and are given by

$$\mathbb{E}[Y_i^k] = \frac{u_i a_i^k}{u_i - k} \frac{1 - (a_i/b_i)^{u_i - k}}{1 - (a_i/b_i)^{u_i}}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \text{if } u_i \neq 0, k.$$

When  $u_i = 0$  or  $k$ , the moments become  $\ln(b_i/a_i)$ .

For reproducibility purposes, we give in detail below the parameters used for the 100 scenarios of the illustration described in Section 1.6. The notations S-B and T-P refer to the scaled Beta and truncated Pareto distributions.

$i$	$p_i$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$Y_i$	$a_i$	$b_i$	$u_i$	$v_i$
1	0.01	0.5	0.5	S-B	10	20	5	1
2	0.01	0.6	0.5	S-B	12	30	5	1
3	0.01	0.4	0.6	S-B	5	35	4	2
4	0.01	0.6	0.6	S-B	8	15	3	2
5	0.01	0.5	0.5	S-B	8	20	3	2
6	0.01	7	2	S-B	60	80	5	2
7	0.01	6.9	2.1	S-B	58.8	79	5	2
8	0.01	6.8	2.2	S-B	56.8	78	5	2
9	0.01	6.7	2.3	S-B	54.8	77	5	2
10	0.01	6.6	2.4	S-B	52.8	76	5	2
11	0.01	6.5	2.5	S-B	50.8	75	5	2
12	0.01	6.4	2.6	S-B	48.8	74	5	2
13	0.01	6.3	2.7	S-B	46.8	73	5	2
14	0.01	6.2	2.8	S-B	44.8	72	5	2
15	0.01	6.1	2.9	S-B	42.8	71	5	2
16	0.01	6.0	3.0	S-B	40.8	70	5	2
17	0.01	5.9	3.1	S-B	38.8	69	5	2
18	0.01	5.8	3.2	S-B	36.8	68	5	2
19	0.01	5.7	3.3	S-B	34.8	67	5	2
20	0.01	5.6	3.4	S-B	32.8	66	5	2
21	0.01	5.5	3.5	S-B	30.8	65	5	2
22	0.01	5.4	3.6	S-B	28.8	64	5	2
23	0.01	5.3	3.7	S-B	26.8	63	5	2
24	0.01	5.2	3.8	S-B	24.8	62	5	2
25	0.01	5.1	3.9	S-B	22.8	61	5	2

$i$	$p_i$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$Y_i$	$a_i$	$b_i$	$u_i$	$v_i$
26	0.01	5.0	4.0	S-B	20.8	60	5	2
27	0.01	4.9	4.1	S-B	20	59	5	2
28	0.01	4.8	4.2	S-B	20	58	5	2
29	0.01	4.7	4.3	S-B	20	57	5	2
30	0.01	4.6	4.4	S-B	20	56	5	2
31	0.01	4.5	4.5	S-B	20	55	5	2
32	0.01	4.4	4.6	S-B	20	54	5	2
33	0.01	4.3	4.7	S-B	20	53	5	2
34	0.01	4.2	4.8	S-B	20	52	5	2
35	0.01	4.1	4.9	S-B	20	51	5	2
36	0.01	4.0	5.0	S-B	20	50	5	2
37	0.01	3.9	5.1	S-B	20	49	5	2
38	0.01	3.8	5.2	S-B	20	48	5	2
39	0.01	3.7	5.3	S-B	20	47	5	2
40	0.01	3.6	5.4	S-B	20	46	5	2
41	0.01	3.5	5.5	S-B	20	45	5	2
42	0.01	3.4	5.6	S-B	20	45	4.8	2.3
43	0.01	3.3	5.7	S-B	20	45	4.6	2.6
44	0.01	3.2	5.8	S-B	20	45	4.4	2.9
45	0.01	3.1	5.9	S-B	20	45	4.2	3.2
46	0.01	3.0	6.0	S-B	20	45	4.0	3.5
47	0.01	2.9	6.1	S-B	20	45	3.8	3.8
48	0.01	2.8	6.2	S-B	20	45	3.6	4.1
49	0.01	2.7	6.3	S-B	20	45	3.4	4.4
50	0.01	2.6	6.4	S-B	20	45	3.2	4.7



$i$	$p_i$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$Y_i$	$a_i$	$b_i$	$u_i$	$v_i$
51	0.01	2.5	6.5	S-B	20	45	3.0	5.0
52	0.01	2.4	6.6	S-B	20	45	2.8	5.3
53	0.01	2.3	6.7	S-B	20	45	2.6	5.6
54	0.01	2.2	6.8	S-B	20	45	2.4	5.9
55	0.01	2.1	6.9	S-B	20	45	2.2	6.2
56	0.01	2.0	7.0	S-B	20	45	2.0	6.5
57	0.01	1.9	7.1	S-B	20	45	1.8	6.8
58	0.01	1.8	7.2	S-B	20	45	1.6	7.1
59	0.01	1.7	7.3	S-B	20	45	1.4	7.4
60	0.01	1.6	7.4	S-B	20	45	1.2	7.7
61	0.01	1.5	7.5	S-B	20	45	1	8.0
62	0.01	1.4	7.6	S-B	20	45	1	8.3
63	0.01	1.3	7.7	S-B	20	45	1	8.6
64	0.01	1.2	7.8	S-B	20	45	1	8.9
65	0.01	1.1	7.9	S-B	20	45	1	9.2
66	0.01	1.0	8.0	S-B	20	45	1	9.5
67	0.01	4	1.1	T-P	10	60	4	-
68	0.01	3.9	1.2	T-P	10	50	4	-
69	0.01	3.8	1.3	T-P	10	40	4	-
70	0.01	3.7	1.4	T-P	15	35	4	-
71	0.01	3.6	1.5	T-P	10	35	4	-
72	0.01	3.5	1.6	T-P	10	35	4.5	-
73	0.01	3.4	1.7	T-P	10	35	4.5	-
74	0.01	3.3	1.8	T-P	10	35	4.5	-
75	0.01	3.2	1.9	T-P	10	35	4.5	-

$i$	$p_i$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$Y_i$	$a_i$	$b_i$	$u_i$	$v_i$
76	0.01	3.1	2.0	T-P	10	35	4.5	-
77	0.01	3.0	2.1	T-P	10	35	4.5	-
78	0.01	2.9	2.2	T-P	10	35	4.5	-
79	0.01	2.8	2.3	T-P	10	35	4.5	-
80	0.01	2.7	2.4	T-P	10	35	4.5	-
81	0.01	2.6	2.5	T-P	10	35	4.5	-
82	0.01	2.5	2.6	T-P	10	35	4.5	-
83	0.01	2.4	2.7	T-P	2	30	4.5	-
84	0.01	2.3	2.8	T-P	2	30	5	-
85	0.01	2.2	2.9	T-P	2	30	5	-
86	0.01	2.1	3.0	T-P	2	30	5	-
87	0.01	2.0	3.1	T-P	2	30	5	-
88	0.01	1.9	3.2	T-P	2	30	5	-
89	0.01	1.8	3.3	T-P	2	30	5	-
90	0.01	1.7	3.4	T-P	2	30	5	-
91	0.01	1.6	3.5	T-P	2	30	5	-
92	0.01	1.5	3.6	T-P	2	30	5	-
93	0.01	1.4	3.7	T-P	2	30	5	-
94	0.01	1.3	3.8	T-P	2	30	5	-
95	0.01	1.2	3.9	T-P	2	30	5	-
96	0.01	1.1	4.0	T-P	2	30	5	-
97	0.03	4	1	S-B	40	80	0.5	0.5
98	0.005	5	1	T-P	10	100	5	-
99	0.004	6	1	T-P	20	100	4	-
100	0.001	8	1	T-P	35	100	3.1	-

Table 16 – The parameters used in the 100 scenarios of the illustration given in Section 1.6.

## Acknowledgements

We are grateful to the referee and editor for their helpful comments and suggestions. C. Lefèvre received the support from the Chair *DIALog* sponsored by CNP Assurances, and S. Loisel the support from the Chair *Actuariat Durable* sponsored by Milliman Paris as well as the Chair *Data Analytics and Models for Insurance* sponsored by BNP Paribas Cardif.

## Bibliography

- Hansjörg Albrecher, Jan Beirlant, and Jozef L Teugels. *Reinsurance: Actuarial and Statistical Aspects*. Wiley, 2017.
- Alexandru V Asimit, Raluca Vernic, and Ricardas Zitikis. Background risk models and stepwise portfolio construction. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 18(3):805–827, 2016.
- Fadoua Balabdaoui and Jon A Wellner. Estimation of a  $k$ -monotone density: limit distribution theory and the spline connection. *The Annals of Statistics*, 35(6):2536–2564, 2007.
- Erik Banks. *Alternative Risk Transfer: Integrated Risk Management Through Insurance, Reinsurance, and the Capital Markets*. Wiley, 2004.
- Pauline Barrieu and Luca Albertini. *The Handbook of Insurance-Linked Securities*. Wiley, 2009.
- Jan Beirlant, Isabel Fraga Alves, Ivette Gomes, and Mark M Meerschaert. Extreme value statistics for truncated Pareto-type distributions. *arXiv preprint arXiv:1410.4097*, 2014.
- Emile MJ Bertin, Ioan Cuculescu, and Radu Theodorescu. *Unimodality of Probability Measures*, volume 382. Springer, 2013.
- Patrick L Brockett and Samuel H Cox. Insurance calculations using incomplete information. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1985(2):94–108, 1985.
- Patrick L Brockett, Samuel H Cox, Richard D MacMinn, and Bo Shi. Best bounds on measures of risk and probability of ruin for Alpha unimodal random variables when there is limited moment information. *Applied Mathematics*, 7(08):765, 2016.
- Ben Brookes. Risk modelling and the role and benefits of cat indices. In Pauline Barrieu and Luca Albertini, editors, *The Handbook of Insurance-Linked Securities*, chapter 7, pages 83–100. Wiley, 2009.
- Robert L Carter. *Reinsurance*. Springer, 2013.

- Arthur Charpentier. *Computational Actuarial Science with R*. CRC press, 2014.
- Yichun Chi, Jingping Yang, and Yongcheng Qi. Decomposition of a Schur-constant model and its applications. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44(3):398–408, 2009.
- David R Clark. A note on the upper-truncated Pareto distribution. In *Casualty Actuarial Society E-Forum*, pages 1–22, 2013.
- Daren BH Cline and Gennady Samorodnitsky. Subexponentiality of the product of independent random variables. *Stochastic Processes and their Applications*, 49(1):75–98, 1994.
- Cassandra R Cole and Kathleen A McCullough. A reexamination of the corporate demand for reinsurance. *Journal of Risk and Insurance*, 73(1):169–192, 2006.
- Corina Constantinescu, Enkelejd Hashorva, and Lanpeng Ji. Archimedean copulas in finite and infinite dimensions with application to ruin problems. *Insurance: Mathematics and Economics*, 49(3):487–495, 2011.
- Hélène Cossette, Thierry Duchesne, and Étienne Marceau. Modeling catastrophes and their impact on insurance portfolios. *North American Actuarial Journal*, 7(4):1–22, 2003.
- Marie-Pier Côté and Christian Genest. Dependence in a background risk model. *Journal of Multivariate Analysis*, 172:28–46, 2019.
- Christopher L Culp. *Structured Finance and Insurance: the ART of Managing Capital and Risk*. Wiley, 2011.
- J David Cummins and Pauline Barrieu. Innovations in insurance markets: hybrid and securitized risk-transfer solutions. In *Handbook of Insurance*, pages 547–602. Springer, 2013.
- J David Cummins and Mary A Weiss. Convergence of insurance and financial markets: Hybrid and securitized risk-transfer solutions. *Journal of Risk and Insurance*, 76(3):493–545, 2009.
- F Etienne De Vylder. Best upper bounds for integrals with respect to measures allowed to vary under conical and integral constraints. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1(2):109–130, 1982.
- F Etienne De Vylder. Maximization, under equality constraints, of a functional of a probability distribution. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2(1):1–16, 1983.
- F Etienne De Vylder and Marc J Goovaerts. Analytical best upper bounds on stop-loss premiums. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1(3):163–175, 1982.
- Lokenath Debnath and Dambaru Bhatta. *Integral Transforms and Their Applications*. Chapman and Hall, 2006.

- Michel Denuit. The exponential premium calculation principle revisited. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 29(2):215–226, 1999.
- Michel Denuit. S-convex extrema, Taylor-type expansions and stochastic approximations. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2002(1):45–67, 2002.
- Michel Denuit, Claude Lefèvre, and Moshe Shaked. The s-convex orders among real random variables, with applications. *Mathematical Inequalities and Their Applications*, 1(4):585–613, 1998.
- Michel Denuit, Etienne De Vylder, and Claude Lefèvre. Extremal generators and extremal distributions for the continuous s-convex stochastic orderings. *Insurance: Mathematics and Economics*, 24(3):201–217, 1999.
- Christophe Dutang, Markus Gesmann, and Giorgio Spedicato. Exposure rating, destruction rate models and the mbbefd package. 2017.
- Ghada Elabed, Marc F Bellemare, Michael R Carter, and Catherine Guirking. Managing basis risk with multiscale index insurance. *Agricultural Economics*, 44(4-5):419–431, 2013.
- Chris Ewing. Spatial uncertainty in catastrophe modelling. *Association for Geographic Information*, 2011.
- Reinhard Farwig and Daniel Zwick. Some divided difference inequalities for  $n$ -convex functions. *Journal of mathematical analysis and applications*, 108(2):430–437, 1985.
- Janos Galambos and Italo Simonelli. *Products of Random Variables: Applications to Problems of Physics and to Arithmetical Functions*. CRC press, 2004.
- James R Garven and Joan Lamm-Tennant. The demand for reinsurance: theory and empirical tests. *Insurance and Risk Management*, 7(3):217–237, 2003.
- Linda L Golden, Mulong Wang, and Chuanhou Yang. Handling weather related risks through the financial markets: considerations of credit risk, basis risk, and hedging. *Journal of Risk and Insurance*, 74(2):319–346, 2007.
- Guillaume Gorge. *Insurance Risk Management and Reinsurance*. Lulu.com, 2016.
- Anne Gron. Insurer demand for catastrophe reinsurance. In *The Financing of Catastrophe Risk*, pages 23–50. University of Chicago Press, 1999.
- Patricia Grossi. *Catastrophe Modeling: a New Approach to Managing Risk*. Springer, 2005.
- Shahid S Hamid, Jean-Paul Pinelli, Shu-Ching Chen, and Kurt Gurley. Catastrophe model-based assessment of hurricane risk and estimates of potential insured losses for the state of Florida. *Natural Hazards Review*, 12(4):171–176, 2011.

- Enkelejd Hashorva. On the number of near-maximum insurance claim under dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, 32(1):37–49, 2003.
- Enkelejd Hashorva. On Beta-product convolutions. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2013(1):69–83, 2013.
- Enkelejd Hashorva and Lanpeng Ji. Random shifting and scaling of insurance risks. *Risks*, 2(3):277–288, 2014.
- Enkelejd Hashorva and Anthony G Pakes. Tail asymptotics under Beta random scaling. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 372(2):496–514, 2010.
- Enkelejd Hashorva, Anthony G Pakes, and Qihe Tang. Asymptotics of random contractions. *Insurance: Mathematics and Economics*, 47(3):405–414, 2010.
- Werner Hürlimann. Extremal moment methods and stochastic orders. *Application in Actuarial Science. Monograph manuscript*, 1998.
- Nathaniel D Jensen, Andrew G Mude, and Christopher B Barrett. How basis risk and spatiotemporal adverse selection influence demand for index insurance: Evidence from northern Kenya. *Food Policy*, 74:172–198, 2018.
- Robert Kaas and Marc J Goovaerts. Bounds on distribution functions under integral constraints. *Bulletin de l'Association Royale des Actuaire Belges*, (79):45–60, 1985.
- Robert Kaas and Marc J Goovaerts. Best bounds for positive distributions with fixed moments. *Insurance: Mathematics and Economics*, 5(1):87–92, 1986.
- Samuel Karlin and William J. Studden. *Tchebycheff Systems: with Applications In Analysis and Statistics*. Wiley, 1966.
- Johannes HB Kemperman. Geometry of the moment problem. In *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, pages 16–53. AMS, 1987.
- A Ya Khintchine. On unimodal distributions. *Izvestiya Nauchno-Issledovatel'skogo Instituta Matematiki i Mekhaniki*, 2(2):1–7, 1938.
- Claude Lefèvre and Stéphane Loisel. On multiply monotone distributions, continuous or discrete, with applications. *Journal of Applied Probability*, 50(3):827–847, 2013.
- Alexander J McNeil and Johanna Nešlehová. Multivariate Archimedean copulas, d-monotone functions and  $l_1$ -norm symmetric distributions. *The Annals of Statistics*, 37(5B):3059–3097, 2009.

- Kenneth S Miller and Bertram Ross. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. Wiley, 1993.
- Richard A Olshen and Leonard J Savage. A generalized unimodality. *Journal of Applied Probability*, 7(1):21–34, 1970.
- Anthony G Pakes and Jorge Navarro. Distributional characterizations through scaling relations. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, 49(2):115–135, 2007.
- J-P Pinelli, G Pita, K Gurley, B Torkian, S Hamid, and C Subramanian. Damage characterization: Application to Florida public hurricane loss model. *Natural Hazards Review*, 12(4):190–195, 2011.
- Tiberiu Popoviciu. Sur quelques propriétés des fonctions d’une ou de deux variables réelles. *Mathematica*, 7:1–85, 2013.
- David Ross and Jillian Williams. Basis risk from the cedant’s perspective. In Pauline Barrieu and Luca Albertini, editors, *The Handbook of Insurance-Linked Securities*, chapter 5, pages 49–64. Wiley, 2009.
- Christopher C Sampson, Timothy J Fewtrell, Fiachra O’Loughlin, Florian Pappenberger, P Bates, Jim E Freer, and Hannah L Cloke. The impact of uncertain precipitation data on insurance loss estimates using a flood catastrophe model. *Hydrology and Earth System Sciences*, 18:2305–2324, 2014.
- Moshe Shaked and J George Shanthikumar. *Stochastic Orders*. Springer, 2007.
- Kazushi Takahashi, Christopher B Barrett, and Munenobu Ikegami. Does index insurance crowd in or crowd out informal risk sharing? Evidence from rural Ethiopia. *American Journal of Agricultural Economics*, 101(3):672–691, 2018.
- Qihe Tang and Gurami Tsitsiashvili. Finite-and infinite-time ruin probabilities in the presence of stochastic returns on investments. *Advances in Applied Probability*, 36(4):1278–1299, 2004.
- George R Walker. Modelling the vulnerability of buildings to wind: a review. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 38(9):1031–1039, 2011.
- Richard Edmund Williamson. Multiply monotone functions and their Laplace transforms. *Duke Mathematical Journal*, 23(2):189–207, 1956.
- Robert L Winkler, Gary M Roodman, and Robert R Britney. The determination of partial moments. *Management Science*, 19(3):290–296, 1972.
- Yang Yang and Yuebao Wang. Tail behavior of the product of two dependent random variables with applications to risk theory. *Extremes*, 16(1):55–74, 2013.



## Chapitre 2

# Gestion du risque de base dans un cadre d'assurance indicielle et contractions aléatoires

*Ce chapitre reprend l'article "Basis risk management in an index-based insurance framework under randomly scaled uncertainty", co-écrit avec Claude Lefèvre et Stéphane Loisel, en révision à Insurance : Mathematics and Economics.*

### Abstract

Motivated by the recommendations of regulatory authorities, this paper proposes a method to quantify the basis risk inherent to index-based risk mitigation structures using the notion of randomly scaled variables. Different properties of this type of variables are briefly reviewed, and their ordering in the  $s$ -convex sense is discussed in detail. The  $s$ -extremal distributions of randomly scaled variables consist in worst case scenarios. Within each scenario, we assess the consequences of the basis risk through a fairly general penalty function, taking into account the risk limits established by the protection buyer. This method eventually allows us to discuss the materiality of basis risk in an index-based insurance framework. The methodology is illustrated by a few simple cases.

*JEL Classification:* C44,C63, G13,G22, G31.

*Keywords:* Basis risk; Index-based insurance; Randomly scaled variables;  $s$ -convex orderings and extrema.



## 2.1 Introduction and motivation

Motivated by the recommendations of regulatory authorities, we propose a method to model and quantify the basis risk inherent to index-based risk mitigation structures.

According to the [Solvency II Commission Delegated Regulation \(2015\)](#), basis risk “results from the situation in which the exposure covered by the risk-mitigation technique does not correspond to the risk exposure of the insurance undertaking”.

In practice, the index used in the parametric insurance or reinsurance transaction is calibrated thanks to physical indicators involved in the genesis of the climate related event. Physical indicators are for instance wind speed, precipitation levels or also satellite imagery ([De Leeuw et al. \(2014\)](#) and [Leblois and Quirion \(2013\)](#) among others). The statistical technique behind the constitution of the index often relies on regressions; see [Shi et al. \(2013\)](#) for a review. From here and subsequently, we denote as  $L$  and  $Z$  the positive random variables representing the loss and the indemnity triggered by the index, respectively. In our framework, basis risk correspond to the resulting error term in the regression, i.e.  $X = L - Z$ . As in [Gornott and Wechsung \(2016\)](#), there exist perfect situations where the error is normally distributed. In this particular case,  $X$  is unimodal and symmetric and [Shepp \(1962\)](#) provide a characterization of these random variables, namely  $X = U_1 Y$ , where  $Y$  is a positive random variable and  $U_1$  is independent from  $Y$  and uniformly distributed over  $(-1, 1)$ .

However, [Ross and Williams \(2009\)](#) highlight that the choice of index can not be made in isolation of other soft factors, such as transparency, which have a bearing on price. This often results in reducing the complexity of the index and participates in increasing the basis risk. The quality of an index also suffers from practical constraints such as the lack of measures and a partial knowledge of the genesis of the catastrophe event. It results in either a noise in the measurement or in the omission of a key variable in the constitution of the index. These cases are referred to as spatial and temporal basis risks and may lead to endogeneity, i.e. a correlation between the index and the basis risk; see e.g. [Vroege et al. \(2019\)](#), [Dalhaus et al. \(2018\)](#) and [Gayathri \(2014\)](#). As an illustration, [Bussay et al. \(2015\)](#) shows that the sign of correlation between crop yield and water limited above ground biomass (WLB)<sup>1</sup> flips in the first half of July. Ignoring this effect is a potential case of endogeneity. Therefore, the basis is more likely to have a non symmetric distribution corresponding to an under or overestimation of the loss by the index; see for instance the example given by [Ross and Williams \(2009\)](#). It is relevant to represent basis as a generalization of the form  $U_1 Y$ . One natural candidate corresponds to randomly scaled distributions which appear naturally in several situations.

First, basis risk occurs since the loss faced by the insurer does not only depend on climate related

---

1. In a nutshell, it reveals the link between water and rooting system.

variables. A well known effect of catastrophe event is the so-called loss amplification. It corresponds to the estimated increase in the cost of goods and services after a large event; see [Ross and Williams \(2009\)](#). Loss amplification is taken into account in the calibration of the index, but the uncertainty associated to its intensity yields either a positive or a negative difference. Consequently, loss amplification can be identified as a systematic or background risk. According to [Franke et al. \(2006\)](#), this background risk can be multiplicative, i.e.  $L = \tilde{S}Z$  where  $\mathbb{E}[\tilde{S}] = 1$  and  $Z$  is independent from  $\tilde{S}$ . The loss can hence be rewritten as  $L = Z + SZ$  where  $\mathbb{E}[S] = 0$ , i.e. the basis risk  $X$  is given by  $SZ$ . The sign of  $S$  reflects either an overestimation or an underestimation of the loss amplification by the index. Note that  $X = SZ$  is a particular case of endogeneity. The independent multiplicative form is also mentioned in e.g. [Hashorva and Ji \(2014\)](#), [Asimit et al. \(2016\)](#), [Furman et al. \(2019\)](#) and [Côté and Genest \(2019\)](#). Later, [Franke et al. \(2011\)](#) deals with both additive and multiplicative background risk. Transposing the setting of [Franke et al. \(2011\)](#) to our framework yields  $L = Z + SY$ . In this case,  $Y$  corresponds to the loss emanating from a particular area highly sensitive to the loss amplification. Assuming the index is correctly calibrated, the area represents only a little portion of the overall portfolio; for instance a urbanized region where the protection buyer is under represented. It is then reasonable to assume that  $Y \leq Z$ . Depending on the intensity of the loss amplification estimated by the index, the sign of the difference can be either positive or negative: so does  $S$ .

Second,  $L = Z + SY$  could also represent the case of a parametric catastrophe bond in which the imperfection of the index leads to a misrepresentation of the areas impacted by the catastrophe event; see [Barrieu and Albertini \(2009\)](#) for a detailed presentation of catastrophe bonds. The index-based insurance or reinsurance often covers large geographical areas. In an urbanized area, it is likely to have access to granular measures of the physical indicators used to calibrate the index. However, in rural regions, the low density of weather data stations deteriorates the quality of the index. For instance, let  $Y$  be the known aggregated exposure of these rural regions. The randomness of  $Y$  comes from the uncertainty associated to the effect of a natural catastrophe on the exposure. The index performs well at a global scale, but poorly in these specific regions, if they are impacted. Catastrophe models often represent the intensity of the catastrophe event by a random destruction rate; see [Cossette et al. \(2003\)](#) and [Sampson et al. \(2014\)](#) among others. It describes how the exposure is affected by the catastrophe event. Consequently, the form  $L = Z + SY$  naturally appears,  $S$  being the residual destruction rate on the misrepresented areas. Because the index either increases or decreases the loss in the rural areas,  $S$  is either positive or negative, with a non necessary symmetric distribution. The basis risk  $X$  is therefore given by  $X = SY$ . [Tsetlin and Winkler \(2005\)](#) consider the case where  $Z$  and  $Y$  are dependent, and the case where  $S$  and  $Y$  are dependent. In our framework, we only address the case where the index-based loss  $Z$  is dependent from the indemnity-based loss  $Y$  to take a potential endogeneity into account.

It results from this discussion that the term  $X = L - Z$  can be naturally represented as a continuous randomly scaled variable.

**Definition 2.1.1.** *A real-valued random variable  $X$  has a randomly scaled distribution if it has the product representation  $X =_d SY$ , where  $Y$  is a non-negative random variable and  $S$  is a real-valued random scaling factor, bounded and independent of  $Y$ .*

We point out that in all the previous cases, the random variable is  $Y$  known whereas the main uncertainty relies on the scaling factor  $S$ . This class of random variable is quite malleable since a randomly scaled variable is not necessarily unimodal neither symmetric.

From a probability point of view, randomly scaled variables are the natural extension of the characterization of unimodal distributions due to [Khintchine \(1938\)](#) and [Shepp \(1962\)](#). It is interesting here to mention that the usual concept of unimodality has been generalized in different ways. Thus,  $X$  has a distribution called  $\alpha$ -unimodal,  $\alpha > 0$ , when  $X =_d S^{1/\alpha}Y$  for some variable  $Y$  and with  $S$  uniform on  $(0, 1)$  independently of  $Y$  ([Olshen and Savage \(1970\)](#)). On the other hand,  $X$  has a  $\beta$ -unimodal distribution,  $\beta > 0$ , when  $X =_d (1 - S^{1/\beta})Y$  with  $S$  still uniform on  $(0, 1)$  and independent of  $Y$  (following the work of [Williamson \(1956\)](#) on multiple monotone functions). More generally,  $X$  has a Beta-unimodal distribution when  $X =_d SY$  where  $S$  has a Beta distribution (see the book of [Bertin et al. \(2013\)](#) for a detailed analysis). Also, random scaling relations have received some attention in theoretical and applied probability. Distributional characterizations by such relations are established by [Pakes and Navarro \(2007\)](#). Asymptotics of products of random variables are studied by e.g. [Cline and Samorodnitsky \(1994\)](#), [Hashorva et al. \(2010\)](#) and [Yang and Wang \(2013\)](#).

Basis risk is addressed by both the insurance and the banking regulatory authorities. In the insurance framework, the quantification of this risk is motivated by the [Solvency II Commission Delegated Regulation \(2015\)](#) which indicates that any cover provided by a risk transfer transaction needs to be clearly defined and should not result in any material basis risk (from the Articles 209 to 215). Further, it is stated that material basis risk should be reflected in the calculation of the Solvency Capital Requirement. If not, the risk mitigation technique should not be recognised.

In the financial context, the [Basel Committee on Banking Supervision \(2016\)](#) explicitly recommends to take the basis risk related to interest rates into account to quantify the change in economic value (see paragraph 4.2 of the bespoke regulatory document).

Therefore, the quantification of basis risk is a mandatory task that shall be performed to examine the materiality of basis risk in the index-based transaction.

The [Solvency II Commission Delegated Regulation \(2015\)](#) indicates that the economic effect of the index-based protection shall be captured when it comes to evaluating the impact of basis risk. We point out that banks with significant exposures to (financial) basis risk should establish risk tolerances appropriate for this risk according to the [Basel Committee on Banking Supervision \(2016\)](#). In addi-

tion, both of these prudential regulations advocate to adopt a worst-case scenarios approach, to better reflect the sensitivity of the exposure to basis risk.

In light of these recommendations, our quantification methodology consists in generating extremal distributions for different scaling factors so that it modifies the shape of the distribution of the product  $X = SY$ , i.e. it provides several configurations of basis risk. When the randomly scaled factor  $Y$  is seen as a function of  $Z$ , dealing with different scaling factors  $S$  emphasizes the positive or negative correlation between the basis risk and the indemnity triggered by the index. These extremal distributions correspond to  $s$ -convex extremal distributions studied by [Denuit et al. \(1998, 1999\)](#) and [Hürlimann \(2008\)](#). Note that bounding problems are a classical subject in actuarial risk theory; see e.g. [De Vylder \(1982, 1983\)](#), [De Vylder and Goovaerts \(1982\)](#), [Kaas and Goovaerts \(1985, 1986\)](#), [Brockett and Cox \(1985\)](#), [Denuit and Lefèvre \(1997\)](#), [Lefèvre and Utev \(2001\)](#).

In each scenario, we measure the consequences of basis risk using a family of flexible and representative penalty functions. These functions take into account the risk tolerances of the protection buyer to better reflect the impact of basis risk. These functions generalize more realistically the penalty functions examined in [Lefèvre et al. \(2020\)](#). At the end of the process, we obtain a budget for basis risk compliant with the tolerances for basis risk initially established by the protection buyer.

The paper is organized as follows. In Section 2.2, we present some properties of randomly scaled variables. In particular, we demonstrate how malleable they are, focusing on the unimodality and symmetry of their distribution. In Section 2.3, we discuss the stochastic ordering in the  $s$ -convex sense of such random variables and we obtain the first associated extremal distributions. In Section 2.4, we introduce a fairly general class of penalty functions to quantify the basis risk. In Section 2.5, we provide a simple and efficient way to set basis risk limits to eventually derive a compliant budget for basis risk. Section 2.6 illustrates the methodology by some specific examples including light and heavy tail distributions for the index.

## 2.2 Some properties of randomly scaled variables

In this Section, we justify the use of randomly scaled variables in the assessment of basis risk as a way to overcome the symmetry and unimodality assumptions present in the well-known product representation of [Khintchine \(1938\)](#) and [Shepp \(1962\)](#). Because the quantification methodology relies on the modification of the distribution of the basis risk, we demonstrate why random contractions stand for a malleable class allowing to represent cases where the index over or underestimates the loss. Therefore it is worth presenting the roles of both  $Y$  and  $S$  in the final shape of the distribution of  $X$ . We first reexamine the distributional relation  $X =_d SY$  in a general framework (Section 2.2.1). Next,

we discuss the properties of unimodality (Section 2.2.2) and symmetry (Section 2.2.3) of this relation. In this Section, we deal with a known  $Y$ . In the Appendix, we give some elementary results for the case where  $X$  is known and we try to recover the distribution of  $Y$  hidden in it.

### 2.2.1 On the distribution of $X =_d SY$

We will focus on two cases of interest in the following: first when the random scaling factor is uniform on  $(-1, 1)$ , then when it follows a scaled Beta distribution. In these two cases, we provide the general form of the distribution of  $X$  when we know the ones of  $Y$  and of the scaling factor  $S$ .

#### Uniform scaling factor

As a first step, we are interested in generating an ideal case from the known random variable  $Y$  so that the resulting basis is unimodal and symmetric. Based on the decomposition of unimodal distribution of [Khintchine \(1938\)](#), [Shepp \(1962\)](#) showed that the distribution of  $X$  is symmetric when it is expressed as  $X =_d U_1 Y$  where  $U_1$  is uniform on  $(-1, 1)$ ,  $Y$  is non-negative and  $U_1$  and  $Y$  are independent (see e.g. [Dharmadhikari and Joag-Dev \(1988\)](#), Theorem 1.5). This case is important in our work since it corresponds to the typical case where the basis risk  $X$  has a symmetric unimodal distribution (normal, for example).

When  $Y$  is known, the form of the scaling factor  $U_1$  directly leads to the distribution of the resulting  $U_1 Y = X$ , given in Proposition 2.2.1. For a random variable  $X$ , denote by  $f_X$  its probability density function when it exists and by  $F_X$  its cumulative distribution function.

**Proposition 2.2.1.** *(directly adapted from Shepp's decomposition) Let  $X =_d U_1 Y$  where  $U_1$  is uniform on  $(-1, 1)$ ,  $Y$  is non-negative and  $U_1$  and  $Y$  are independent. Then,*

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( x \int_x^\infty \frac{f_Y(y)}{y} dy + F_Y(x) + 1 \right), & x \geq 0, \\ \frac{1}{2} \left( x \int_{-x}^\infty \frac{f_Y(y)}{y} dy + (1 - F_Y(-x)) \right), & x \leq 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

#### Beta scaling factor

Instead of a uniform scaling  $U_1$ , a direct extension consists in using a variable  $U_a$  uniform on the interval  $(-a, a)$ ,  $a > 0$ . More generally, we can work with a scaling  $S_a$  defined on  $(-a, a)$  with a scaled Beta distribution, also known as the translated Beta distribution or the four-parameter Beta distribution, and which allows to enlarge the support  $(0, 1)$  of the usual Beta distribution; see e.g. [Hanson \(1991\)](#) and [Carnahan \(1989\)](#). Even though the support of the scaling factor is enlarged to  $(-a, a)$ , the underlying motivation that drives the idea to consider a Beta scaling factor instead of a

Uniform one follows actually from the extension to the unimodality of [Khintchine \(1938\)](#) into Beta-unimodality (see e.g; [Bertin et al. \(2013\)](#)). Dealing with a translated Beta distribution is the natural extension of the decomposition of [Shepp \(1962\)](#).

Specifically,  $S_a$  has a scaled Beta distribution with parameters  $\alpha, \beta > 0$  over  $(-a, a)$ , denoted by  $S_a \sim \text{Beta}((-a, a), \alpha, \beta)$ , if

$$S_a =_d 2a\tilde{S} - a = a(2\tilde{S} - 1), \quad (2.2)$$

where  $\tilde{S} \sim \text{Beta}((0, 1), \alpha, \beta)$  is the standard Beta distribution on  $(0, 1)$ . So,  $S_a$  takes values in  $(-a, a)$ , its density is given by

$$f(x) = \frac{(x+a)^{\alpha-1}(a-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)(2a)^{\alpha+\beta-1}}, \quad -a \leq x \leq a,$$

and its moments of  $S_a$  are easily obtained from (2.2).

Now, we want to see the effect of the scaling factor when we randomly scale the known  $Y$ . With  $U_a$ , the distribution of  $X =_d U_a Y$  is easily found. With  $S_a$ , this is not that simple. One case that works well, however, is where  $(\alpha, \beta) = (n, m)$  where  $n, m$  are two integers greater than 1. The proof of this proposition is given in Appendix.

**Proposition 2.2.2.** *Let  $Y$  and  $S_a \sim \text{Beta}((-a, a), n, m)$ ,  $n, m$  being positive integers,  $Y$  and  $S_a$  being independent and define  $X$  as  $X =_d S_a Y$ . Then,*

$$F_X(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(S_a \leq 0) + \frac{1}{2^{n+m-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{n-k-1} \mathbb{P}\left(\tilde{S}_{k+1} Y \leq \frac{x}{a}\right), & x \geq 0, \\ \frac{1}{2^{n+m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+m-1}{m-k-1} \mathbb{P}\left(\hat{S}_{k+1} Y > \frac{-x}{a}\right), & x \leq 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

where

$$\begin{cases} \tilde{S}_{k+1} \sim \text{Beta}((0, 1), k+1, m), \\ \hat{S}_{k+1} \sim \text{Beta}((0, 1), k+1, n). \end{cases}$$

### Tail impact of the scaling

An interesting question is how the scaling factor  $S$  affects the tail distribution of  $X =_d SY$ . In particular, would it be possible, for example, for  $X$  to become light-tailed when  $Y$  is heavy-tailed? In fact, this topic has been studied in many papers, including [Embrechts and Goldie \(1980\)](#), [Cline and Samorodnitsky \(1994\)](#), [Tang \(2008\)](#), [Hashorva and Pakes \(2010\)](#) and [Hashorva et al. \(2010\)](#).

For the sake of brevity, we only mention one result here due to [Cline and Samorodnitsky \(1994\)](#). Suppose that  $S$  has bounded support as considered above. Then, these authors proved (see their

Corollary 2.5) that if  $F_Y$  is sub-exponential, then  $F_X$  too. We recall that subexponential distributions are a special class of heavy-tailed distributions which decrease more slowly than any exponential tail. So, in a nutshell, the tail of  $X$  belongs to the same class as that of  $Y$  when  $S$  is bounded.

Another way to see the influence of  $S$  is to use the notion of stochastic orders. This is the subject of Section 2.3.

### 2.2.2 On the unimodality of $X =_d SY$

Let us examine the transfer of unimodality in a randomly scaled variable. In general, convolutions of unimodal distributions are not unimodal. From this observation, [Ibragimov \(1956\)](#) defined the following concept of strong unimodality: a variable  $A$  is strongly unimodal if the convolution of  $A$  with any unimodal variable  $B$  is again unimodal. He proved that a strongly unimodal variable  $A$  is absolutely continuous and its density  $f_A$  is logconcave.

More recently, [Cuculescu and Theodorescu \(1998\)](#) introduced the concept of multiplicative strong unimodality: a variable  $A$  is multiplicative strongly unimodal if the product  $AB$  with any independent unimodal variable  $B$  is again unimodal. It is easily seen that all variables  $A$  unimodal at 0 are multiplicative strong unimodal and the product  $AB$  with  $B$  independent unimodal is unimodal at 0. They proved an analogue of Ibragimov's theorem stating that a variable  $A$  unimodal but not at 0 is multiplicative strongly unimodal iff it is one-sided and absolutely continuous and its density  $f_A$  satisfies  $f_A(\pm e^t)$  logconcave where it does not vanish. Furthermore, any non-negative variable  $A$  is multiplicative strongly unimodal iff  $\log A$  is strongly unimodal.

From these results, we directly draw the following consequences.

**Proposition 2.2.3.** *Take  $Y$  and  $S$  such that  $X =_d SY$  is a randomly scaled variable.*

(i) *If  $S$  or  $Y$  is unimodal at 0, then  $X$  is unimodal at 0. In particular, it is true when  $X =_d U_a Y$ .*

(ii) *If both  $S$  and  $Y$  are unimodal, and  $S$  or  $Y$  is multiplicative strongly unimodal, then  $X$  is unimodal.*

Of course, unimodality is not always transferred. We give a simple illustration involving a scaled Beta distribution.

**Example.** Consider the scaling factor  $S_1 \sim \text{Beta}((-1, 1), \alpha, \beta)$ . It is known (see e.g. [Alimohammadi et al. \(2016\)](#)) that  $S_1$  is multiplicative strongly unimodal iff  $\alpha > 0$  and  $\beta \geq 1$ . Under this condition, by Proposition 2.2.3 (ii),  $X =_d S_1 Y$  is unimodal when  $Y$  is unimodal.

Suppose now that the scaling factor is  $\hat{S}_1 \sim \text{Beta}((-1, 1), \alpha, \beta)$  with parameters  $\alpha < 1$  and  $\beta < 1$ . Then  $\hat{X} = \hat{S}_1 Y$  is no longer necessarily unimodal. Figure 21 represents the density of  $X$  (dashed black

line) and  $\hat{X}$  (solid blue line) when  $Y \sim \Gamma(4, 2)$ , and  $S$  and  $\hat{S}$  are Beta distributed with  $(\alpha, \beta) = (2, 2)$  and  $(0.2, 0.2)$ , respectively. Note that  $Y$  is unimodal at  $3/2$  and multiplicative strongly unimodal, but  $\hat{S}$  is not unimodal. We see that the density of  $\hat{X}$  is bimodal, and not unimodal which is not surprising by Proposition 2.2.3 (ii).

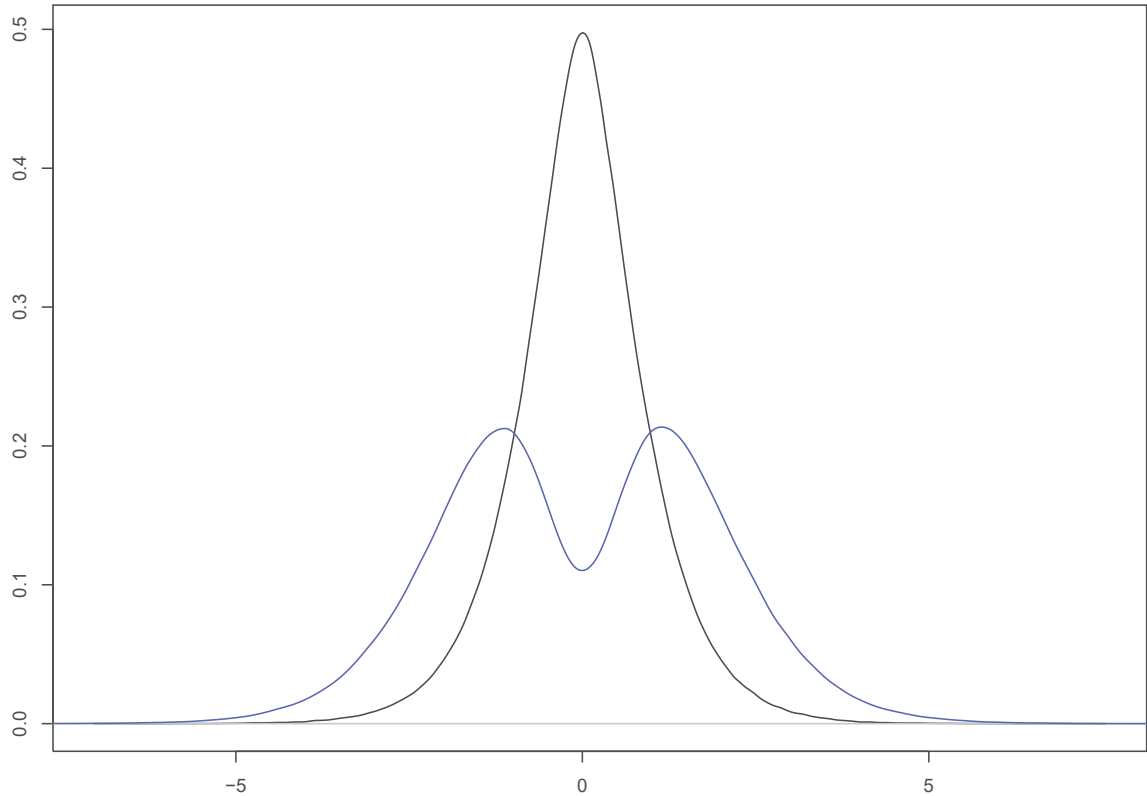


Figure 21 – Densities of  $X$  (dashed black line) and  $\hat{X}$  (solid blue line) when  $Y \sim \Gamma(4, 2)$ , and  $S$  and  $\hat{S} \sim \text{Beta}((-1, 1), \alpha, \beta)$  with  $(\alpha, \beta) = (2, 2)$  and  $(0.2, 0.2)$ , respectively.

Depending on the unimodality of  $S$  and  $Y$ , the resulting  $X = SY$  is not necessarily unimodal. For example, in a dense urbanized area, the impact of a flood is very sensitive to its height. Specifically, [Sampson et al. \(2014\)](#) indicate that the destruction rate for flood risk is usually given by a 01-inflated Beta distribution, i.e. a destruction rate with a mass at 0, a mass at 1 and an intermediary range drawn from a Beta distribution. The index can be well defined on average and at the scale of the portfolio, but can poorly capture the variability of the loss in this precise dense urbanized area. If a small flood occurs (small destruction rate due to the mass at 0), the index is likely to overestimate



its impact. On the opposite, if a large flood occurs (large destruction rate due to the mass at 1), the index will rather underestimate the loss. If  $Y$  represents the random exposure of this area, and if  $S$  is the residual (positive or negative) destruction rate of the area emanating from the flood, the resulting basis risk is likely to be bimodal in this example. In a radically different context, we point out that inflated Beta distributions are also involved in credit default modeling; see e.g. [Ospina and Ferrari \(2010\)](#).

Determining the mode of the resulting randomly scaled variable  $X$  is far from easy due to complicated calculations. However, once the distribution of  $X$  is known, the mode can be quite easily obtained numerically (see e.g. [Sato \(1987\)](#), [Gavriliadis \(2008\)](#)). We move on to the somewhat related question of the symmetry of  $X$ .

### 2.2.3 On the symmetry of $X =_d SY$

The malleability of random contractions also relies on the asymmetry of these random variables. As for the unimodality, we highlight the role of  $Y$  and of  $S$  in the symmetry (or asymmetry) of the resulting  $X = SY$ .

There exist several possible characterizations of symmetry. Two very intuitive definitions are as follows: a variable  $A$  is symmetric about  $x_0$  when  $A - x_0 =_d x_0 - A$ , or when its density satisfies  $f_A(x_0 + x) = f_A(x_0 - x)$  for all  $x$ . In our situation, these definitions are not practical because the distribution of  $X =_d SY$  can be difficult to obtain.

Accordingly, we use an alternate definition of symmetry which uses the Mellin transform. This transform is a key tool for studying the behavior of products of random variables, in particular their property of symmetry. The reader is referred to the book by [Galambos and Simonelli \(2004\)](#) and e.g. to [Simonelli \(2001\)](#) and [Hamedani and Volkmer \(2003\)](#). For a nonnegative random variable  $A$ , the Mellin transform of  $A$  is the integral, assumed finite,

$$\mathcal{M}_A(s) = \int_0^{+\infty} x^s dF_A(x),$$

where  $s$  is a complex number. For an arbitrary variable  $A$  with  $A^+ = \max\{A, 0\}$  and  $A^- = \max\{-A, 0\}$  its positive and negative parts, the Mellin transform of  $A$  is then defined as

$$\mathcal{M}_A(s) = \mathcal{M}_{A^+}(s) + \gamma \mathcal{M}_{A^-}(s),$$

where  $\gamma$  is a formal indeterminate with  $\gamma^2 = 1$ . This transform exists for all  $s$  in some complex strip  $\{s : a \leq \operatorname{Re}(s) \leq b\}$  where  $a \leq 0 \leq b$ .

Setting  $s = it$  with  $t$  real, the Mellin transform  $M_A(t)$  uniquely determines its distribution of  $A$ . Another nice property lies in the fact that the Mellin transform of the product of independent random

variables is the product of their Mellin transforms. So, for a randomly scaled variable  $X =_d SY$ ,

$$\mathcal{M}_X(s) = \mathcal{M}_S(s)\mathcal{M}_Y(s) = [\mathcal{M}_{S^+}(s) + \gamma\mathcal{M}_{S^-}(s)]\mathcal{M}_Y(s).$$

Furthermore, it can be shown that  $A$  is symmetric about 0 iff  $\mathcal{M}_{A^+}(s) = \mathcal{M}_{A^-}(s)$  for all  $s$  in some strip containing the imaginary axis (it is enough to consider  $s = it$ ); see Galambos and Simonelli (2004), page 29. Note that for  $X =_d SY$ , the symmetry of  $X$  about 0 depends only on the distribution of  $S$  since  $Y$  is non-negative. More precisely, we have the following result.

**Proposition 2.2.4.**  *$X =_d SY$  is symmetric about 0 iff  $S$  is symmetric about 0.*

*Proof.* By definition,  $X$  is symmetric about 0 iff

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{M}_{X^+}(s) - \mathcal{M}_{X^-}(s) \\ &= [\mathcal{M}_{S^+}(s) - \mathcal{M}_{S^-}(s)]\mathcal{M}_Y(s), \end{aligned}$$

and thus when  $\mathcal{M}_{S^+}(s) = \mathcal{M}_{S^-}(s)$  as announced. □

From Propositions 2.2.3 and 2.2.4, we have, for example, that

- if the scaling factor is  $S_a \sim \text{Beta}((-a, a), \alpha, \alpha)$  with  $\alpha \geq 1$ , then  $S_a$  and  $X$  are unimodal and symmetric about 0,
- if  $S$  is non-symmetric on  $(-a, a)$  and  $Y$  unimodal at 0 (such as an exponential), then  $X$  is unimodal at 0 and non-symmetric about 0.

Knowing how the distribution of the product  $SY$  behaves when the scaling factor is modified is at the basis of the quantification methodology. The next Section examines the way we use the available information on  $S$  and on  $Y$  and the theory of  $s$ -convex orders to generate the extremal scenarios.

## 2.3 Convex ordering of randomly scaled relation

The theory of stochastic orders has a variety of uses in theoretical and applied probability, and especially in actuarial science. Much of this theory can be found in the comprehensive books by Shaked and Shanthikumar (2007) and Müller and Stoyan (2002). An important class of stochastic orders is provided by the orders called  $s$ -convex,  $s$  positive integer, whose properties have been studied in depth by Denuit et al. (1998, 1999). These orders are the key tool used in this section to compare randomly scaled relations. For the sake of brevity, we will only recall a few elements on the  $s$ -convex orders when necessary. The purpose of this section is twofold. It first extends the result given by Lefèvre et al. (2020) on the transfer of orders  $s$ -convex in the case of random scaling relationships of Definition 2.1.1.

Then, it provides the  $s$ -convex extremal distributions in this more general framework. The extrema represent the worst possible scenarios based on partial information about the scaling factor  $S$ .

### 2.3.1 Transfer of $s$ -convex orders

Let  $\mathcal{S}$  be a subinterval of the real line  $\mathbb{R}$  and, for  $s$  fixed positive integer, let  $\mathcal{U}_{s-cx}^{\mathcal{S}}$  be the class of all  $s$ -convex functions  $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ . Convexity of higher degree is studied by e.g. Popoviciu (1942, 2013), Kuczma (2009), Rajba (2011). Recall that when differentiable (to simplify),  $\phi$   $s$ -convex means that  $\phi^{(s)} \geq 0$  on  $\mathcal{S}$ . The induced  $s$ -convex stochastic order is denoted by  $\leq_{s-cx}^{\mathcal{S}}$ . More precisely, any two random variables  $X_1, X_2$  with values in  $\mathcal{S}$  satisfy  $X_1 \leq_{s-cx}^{\mathcal{S}} X_2$  when  $\mathbb{E}[\phi(X_1)] \leq \mathbb{E}[\phi(X_2)]$  for all functions  $\phi \in \mathcal{U}_{s-cx}^{\mathcal{S}}$ .

Consider the random variables  $S$  and  $Y$  in Definition 2.1.1, and define their supports as  $\text{supp}(S) = [a, b] \subset \mathbb{R}$  and  $\text{supp}(Y) = \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}_+$  with  $\bar{y} = \sup(\mathcal{D})$ ,  $\underline{y} = \inf(\mathcal{D})$ . It is obvious that when  $X = SY$ , then  $\text{supp}(X) = \mathcal{A}$  where

$$\mathcal{A} = \begin{cases} (a\underline{y}, b\bar{y}) & \text{if } 0 \leq a < b < +\infty, \\ (a\bar{y}, b\bar{y}) & \text{if } a \leq 0 < b < +\infty, \\ (a\bar{y}, b\underline{y}) & \text{if } -\infty < a < b \leq 0. \end{cases}$$

When two scaling factors  $S_1, S_2$  are ordered in the  $s$ -convex sense, it is natural to wonder if this stochastic order transfers to the corresponding randomly scaled variables  $X_1, X_2$ .

**Proposition 2.3.1.** *Let  $X_1 = S_1Y$  and  $X_2 = S_2Y$  two randomly scaled variables. If  $S_1 \leq_{s-cx}^{[a,b]} S_2$ , then  $X_1 \leq_{s-cx}^{\mathcal{A}} X_2$ .*

*Proof.* Since  $S_1 \leq_{s-cx}^{[a,b]} S_2$ , we know that  $yS_1 \leq_{s-cx}^{[ya, yb]} yS_2$  for all  $y \geq 0$  (e.g. Denuit et al. (1998)). Thus, for any function  $\phi \in \mathcal{U}_{s-cx}^{\mathcal{A}}$ , we get

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi(X_1)] &= \int_0^\infty \mathbb{E}[\phi(yS_1)] dF_Y(y) \\ &\leq \int_0^\infty \mathbb{E}[\phi(yS_2)] dF_Y(y) = \mathbb{E}[\phi(X_2)], \end{aligned}$$

using the independence between  $Y$  and  $S_1, S_2$ . This means that  $X_1 \leq_{s-cx}^{\mathcal{A}} X_2$ . □

Clearly, Proposition 2.3.1 still holds when the roles of  $S$  and  $Y$  are reversed, i.e. when the starting order is on  $Y$  instead of  $S$ . This is the case usually discussed in the papers on unimodality (e.g. Denuit et al. (1998, 1999), Brockett et al. (2016), Lefèvre et al. (2020)). A similar result is also valid when the scaling relations are defined from two random variables  $Y_1, Y_2$  which are identically distributed.

Proposition 2.3.1 can be taken a step further by considering a product of random scaling factors. An interesting application is in finance or insurance when assets are valued over several periods. In this spirit, let us cite [Courtois and Denuit \(2008\)](#) who derives convex bounds on an iterative process used for pricing options. For our framework, consider on a horizon  $n$  successive random discount rates  $Z_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . The comparison of quantities like  $\mathbb{E}(Z_1 \dots Z_n S)$  for two different distributions of  $S$  is a subject of obvious interest. In fact, Proposition 2.3.1 extends directly as long as  $(Z_1, \dots, Z_n)$  is independent of  $(S_1, S_2)$ .

### 2.3.2 Construction of $s$ -convex extrema

Convex ordering results can be used to derive convex extrema for random variables. Remember that a  $s$ -convex order between two variables implies that both have the same first  $s - 1$  moments. Thus, the  $s$ -convex extrema for a random variable  $X$  of support  $\mathcal{A}$  must belong to the space of random variables, denoted  $\mathcal{B}(\mathcal{A}; \nu_1, \dots, \nu_{s-1})$ , with support  $\mathcal{A}$  and first  $s - 1$  moments  $\nu_k = \mathbb{E}(X^k)$ ,  $k = 1, \dots, s - 1$ . Specifically, the  $s$ -convex minimum and maximum, denoted  $X_{min}^{(s)}$  and  $X_{max}^{(s)}$ , are such that  $X_{min}^{(s)} \leq_{s-cx} X \leq_{s-cx} X_{max}^{(s)}$  for all  $X \in \mathcal{B}(\mathcal{A}; \nu_1, \dots, \nu_{s-1})$ .

As  $s$ -convex orders are transferable from  $S$  to  $X$ , this is also the case for the  $s$ -convex extrema. These extrema then allow us to bound expectations  $\mathbb{E}[\phi(X)]$  when  $\phi \in \mathcal{U}_{s-cx}^{\mathcal{A}}$ .

**Proposition 2.3.2.** *Let  $X = SY$  be a randomly scaled variable, and suppose that the distribution of  $Y$  is given. If  $S \in \mathcal{B}([a, b]; \rho_1, \dots, \rho_{s-1})$  and  $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{D}; \mu_1, \dots, \mu_{s-1})$ , then  $X \in \mathcal{B}(\mathcal{A}; \nu_1, \dots, \nu_{s-1})$  where*

$$\nu_k = \rho_k \mu_k, \quad k = 1, \dots, s - 1, \quad (2.4)$$

and the  $s$ -convex extrema for  $X$  are obtained from those of  $S$  by

$$X_{min}^{(s)} = S_{min}^{(s)} Y, \quad \text{and} \quad X_{max}^{(s)} = S_{max}^{(s)} Y. \quad (2.5)$$

*Proof.* The relations (2.4) follow from the independence between  $S$  and  $Y$ . The extrema (2.5) are a direct consequence of Proposition 2.3.1.  $\square$

Thus, the  $s$ -convex extrema of any randomly scaled variable  $X$  are obtained in two steps. First, the extrema for the random scaling factor  $S$  are determined by applying the results given in [Denuit et al. \(1999, 2000\)](#), provided that the first  $s - 1$  moments  $\rho_k$  are known. Second, the extrema for  $X$  are obtained by multiplying the previous extrema by the random variable  $Y$ . For  $s = 1, \dots, 4$ , the extrema in question can be easily written explicitly but they are omitted for the sake of brevity.

In fact, Proposition 2.3.2 only requires the variable  $Y$  for its first  $s - 1$  moments  $\mu_k$ . So, concerning the maximum, we can also write that

$$X \leq_{s-cx}^{\mathcal{A}} \begin{cases} S_{max}^{(s)} Y \\ SY_{max}^{(s)} \end{cases} \leq_{s-cx}^{\mathcal{A}} S_{max}^{(s)} Y_{max}^{(s)} \leq_{s-cx}^{\mathcal{A}} \tilde{X}_{max}^{(s)},$$

where  $\tilde{X}_{max}^{(s)}$  is the general  $s$ -convex maximum in  $\mathcal{B}(\mathcal{A}; \nu_1, \dots, \nu_{s-1})$ .

### 2.3.3 Comparison of $s$ -convex extrema

The  $s$ -convex extremal distribution on the scaling factor  $S$  corresponds to the worst possible scenario of order  $s$  in our quantification of basis risk. A priori, it is expected that the scenarios can be compared based on the information available. For example, since the 2-convex extrema uses only the first moment while the 3-convex extrema uses the first two moments, the 3-convex worst case scenario should be less severe than for 2-convex. We discuss this point below in the case of the maximum.

Let  $X$  be an arbitrary random variable in  $\mathcal{B}(\mathcal{A}; \nu_1, \dots, \nu_{s-1})$ ,  $s \geq 4$  (not necessarily randomly scaled). By definition,  $X_{max}^{(3)} \in \mathcal{B}(\mathcal{A}; \nu_1, \nu_2) \subset \mathcal{B}(\mathcal{A}; \nu_1)$ , so that for any function  $\phi \in \mathcal{U}_{2-cx}^{\mathcal{A}}$ , both inequalities  $\mathbb{E}[\phi(X_{max}^{(3)})] \leq \mathbb{E}[\phi(X_{max}^{(2)})]$  and  $\mathbb{E}[\phi(X)] \leq \mathbb{E}[\phi(X_{max}^{(2)})]$  hold. However, there is no guarantee that the sequence of inequalities  $\mathbb{E}[\phi(X)] \leq \mathbb{E}[\phi(X_{max}^{(3)})] \leq \mathbb{E}[\phi(X_{max}^{(2)})]$  is satisfied; an illustrative example is given in Lefèvre et al. (2020). Still, in our framework, such a sequence of inequalities should be able to be true for some class of functions  $\phi$ .

Formally, since  $\mathcal{B}(\mathcal{A}; \nu_1, \dots, \nu_{s-1}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{A}; \nu_1, \dots, \nu_{s-2})$ , then  $X_{max}^{(s)} \leq_{(s-1)-cx} X_{max}^{(s-1)}$ , and applying the same reasoning,

$$X \leq_{s-cx} X_{max}^{(s)} \leq_{(s-1)-cx} X_{max}^{(s-1)} \leq_{(s-2)-cx} \dots \leq_{2-cx} X_{max}^{(2)},$$

which can be rewritten as

$$\mathbb{E}[\phi_s(X)] \leq \mathbb{E}[\phi_s(X_{max}^{(s)})] \leq \mathbb{E}[\phi_{s-1}(X_{max}^{(s-1)})] \leq \dots \leq \mathbb{E}[\phi_2(X_{max}^{(2)})], \quad (2.6)$$

for all function  $\phi_k \in \mathcal{U}_{k-cx}^{\mathcal{A}}$ ,  $k = 2, \dots, s$ . The functions  $\phi_k$  in (2.6) generally differ from each other. An exception where all  $\phi_k$  can be taken identical ( $= \phi$  say) occurs if  $\phi$  is  $s$ -increasing convex on  $\mathcal{A}$ , i.e.  $\phi$  is  $k$ -convex for all  $k = 2, \dots, s$ . When differentiable (to simplify), this means that  $\phi^{(k)} \geq 0$  on  $\mathcal{A}$ ,  $2 \leq k \leq s$ . The class of such functions is denoted  $\mathcal{U}_{(2,s)-icx}^{\mathcal{A}}$  where the indices  $(2, s)$  remind that the  $k$ -convexity is required for  $k$  ranging from 2 to  $s$ . The induced  $(2, s)$ -increasing convex stochastic order is denoted by  $\leq_{(2,s)-icx}^{\mathcal{A}}$ .

**Proposition 2.3.3.** *Let  $X \in \mathcal{B}(\mathcal{A}; \nu_1, \dots, \nu_{s-1})$ , not necessarily randomly scaled. Then, for all functions  $\phi \in \mathcal{U}_{(2,s)-icx}^{\mathcal{A}}$ ,*

$$\mathbb{E}[\phi(X)] \leq \mathbb{E}[\phi(X_{max}^{(s)})] \leq \mathbb{E}[\phi(X_{max}^{(s-1)})] \leq \dots \leq \mathbb{E}[\phi(X_{max}^{(2)})], \quad (2.7)$$

in other words,

$$X \leq_{(2,s)-icx} X_{max}^{(s)} \leq_{(2,s)-icx} X_{max}^{(s-1)} \leq_{(2,s)-icx} \dots \leq_{(2,s)-icx} X_{max}^{(2)}.$$

*Proof.* By definition of  $X$ ,  $X_{max}^{(s)}$  and  $\phi$ , we have  $\mathbb{E}[\phi(X)] \leq \mathbb{E}[\phi(X_{max}^{(s)})]$ . Moreover,  $X_{max}^{(s)} \in \mathcal{B}(\mathcal{A}, \nu_1, \dots, \nu_{s-1}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{A}, \nu_1, \dots, \nu_{s-2})$ , so that  $\mathbb{E}[\phi(X_{max}^{(s)})] \leq \mathbb{E}[\phi(X_{max}^{(s-1)})]$ . Therefore, we deduce that  $\mathbb{E}[\phi(X)] \leq \mathbb{E}[\phi(X_{max}^{(s)})] \leq \mathbb{E}[\phi(X_{max}^{(s-1)})]$ . By iteration, we obtain the desired sequence of inequalities (2.7).  $\square$

In the literature, it is usual to speak of a function which is  $k$ -convex for all  $k = 1, \dots, s$  as being a function  $s$ -increasing convex or  $s$ -monotone (see e.g. Popoviciu (1942), Williamson (1956), Maksa and Páles (2009), McNeil and Nešlehová (2009)). The class of these functions, denoted  $\mathcal{U}_{s-icx}^{\mathcal{A}}$ , will also be useful later. It can be characterized as follows when  $\mathcal{A}$  admits a finite left end point,  $a$  say. For  $k \geq s$ , define a function  $\varphi_k$  by

$$\varphi_k(x) = \sum_{j=0}^{s-1} \gamma_j (x-a)^j + \sum_{j=0}^{k-s} \beta_j (x-t_j)_+^{s-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.8)$$

where the coefficients  $\gamma_j$  and  $\beta_j$  are non-negative constants, and  $t_0 < t_1 < \dots < t_{k-s} \in \mathcal{A}$ . Then, every  $\phi \in \mathcal{U}_{s-icx}^{\mathcal{A}}$  is the uniform limit of a sequence of functions  $\varphi_k$  of the form (2.8) as  $k \rightarrow \infty$  (Popoviciu (1942), Theorem 8). We will also consider the induced stochastic order  $\leq_{s-icx}^{\mathcal{A}}$ , called  $s$ -increasing convex and studied e.g. by Lefèvre and Utev (1996) and Denuit et al. (1998).

The fact that the  $k$ -convex maxima,  $2 \leq k \leq s$ , can be ordered in the same  $(2, s)$ -increasing convex order is called the severity requirement. We therefore require that the worst scenarios be sorted according to their risk. Sections 2.4 and 2.5 relate to the next two steps to quantify the basis risk.

## 2.4 Quantifying two-sided basis risk

Our method aims to measure the impact of basis risk using a fairly general class of penalty functions. One advantage of these penalties is to incorporate the ratio between the size of the uncertainty and the size of the index.

### 2.4.1 Motivation

According to Lefèvre et al. (2020), a penalty function is useful to aggravate the consequences of a large difference between the actual loss and the value of the index. Thus, a suitable penalty function should transform a linear impact into a convex one. For clarity, we begin by presenting a penalty function similar to the one proposed in that paper.

The basis risk being bilateral, we define two functions to measure the consequences of uncertainty. On the one hand, a negative basis risk is taken into account via a positive function  $f$  defined by

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ : x \rightarrow \begin{cases} a_1x + a_2x^2 & \text{if } x \leq 0, \\ 0 & \text{if } x \geq 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

where the coefficients verify  $a_1 \leq 0$  and  $a_2 \geq 0$ . Thus,  $f(x)$  is a polynomial of degree 2 which is decreasing convex in  $x$ . On the other hand, a positive basis risk is taken into account via a positive function  $\phi_n$  defined by

$$\phi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ : x \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0, \\ \phi_n(x) & \text{if } x \geq 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

where  $\phi_n \in \mathcal{U}_{n-icx}^{\mathbb{R}_+}$  for some positive integer  $n$ , i.e.  $\phi_n$  is a uniform limit of functions given in (2.8) for  $s = n$ . Thanks to the exponent  $n$ ,  $\phi_n$  is able to aggravate the consequences of a positive uncertainty. When the basis risk is 0, we have of course  $f(0) = \phi_n(0) = 0$ .

**Definition 2.4.1.** (*Initial penalty function*)

Let  $f$  and  $\phi_n$  be the measurement functions given by (2.9) and (2.10). A function  $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  is an initial penalty function if it can be written as

$$g_n(x) = f(x) + \phi_n(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Note from (2.11) that the function  $g_n$  is  $k$  convex for  $2 \leq k \leq n$ , i.e.  $g_n \in \mathcal{U}_{(2,n)-icx}^{\mathbb{R}_+}$  as desired in Section 2.3.3. When  $n = 1$ ,  $\phi_1$  is only increasing and  $f$  is decreasing:  $g_1 = f + \phi_1$  is convex (but not necessarily differentiable).

For example, the function  $g_n$  defined by

$$g_n(x) = |x| + (x - d)_+^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.12)$$

for some parameter  $d$ , fulfills the conditions of an initial penalty function. By the term  $|x|$ , it takes into account symmetrically the negative and positive values of uncertainty. By the term  $(x - d)_+^{n-1}$ , it implies a critical level  $d$  such that if the uncertainty is greater than  $d$ , the consequences of the basis risk worsen considerably (depending on the value of  $n$ ).

The penalty function (2.12) focuses on the size of the uncertainty but without looking at the size of the index. This may not be very representative of reality. So, consider a loss of  $L = 200$  and an index of  $Z = 100$ , which gives  $X = 100$  and the penalty  $g_n(100)$ . In parallel, consider this time  $L = 200,000$  and  $Z = 199,900$ , so that  $X = 100$  and the penalty has the same amount  $g_n(100)$ . However, the difference  $X = 100$  corresponds to the size of the index in the first case but only 0.05% of the index in the second case. Thus, it seems natural that a penalty function relates the size of the uncertainty to the size of the index.

## 2.4.2 Generalized penalty function

To this end, we assume that there is a threshold  $r > 0$  for the value of basis risk relative to the value of the index in the following sense. Let  $x \in \mathbb{R}$  be the size of the uncertainty and  $z \in \mathbb{R}_+$  the size of the index. This threshold  $r$  represents the maximum acceptable level for the ratio  $x/z$ . When the ratio  $x/z$  is less than  $r$ , the basis risk is carried over as is. On the contrary, when the ratio is greater than  $r$ , its consequences are amplified by a factor  $h_n(x/z) > 1$ .

Formally, we introduce a continuous function  $h_n : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty) : x/z \rightarrow h_n(x/z)$  which satisfies the conditions

$$\begin{aligned} h_n(x/z) &= 1 \text{ for } x/z \leq r, \quad h_n(x/z) > 1 \text{ for } x/z > r, \\ \text{and } h_n &\in \mathcal{W}_{n-icx}^{\mathbb{R}_+} \text{ for some positive integer } n. \end{aligned} \quad (2.13)$$

In very simplified terms, the conditions (2.13) indicate that the higher the ratio, the greater the consequences.

For example, a simple possible function  $h_n$  is

$$h_n(x/z) = 1 + (x/z - r)_+^{n-1}, \quad x/z \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

We are now ready to define a generalized penalty function  $\xi_n$ .

**Definition 2.4.2.** (*Generalized penalty function*)

Let  $g_n$  be an initial penalty function (2.11), and  $h_n$  an impact function satisfying (2.13). A function  $\xi_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ : (x, x/z) \rightarrow \xi(x, x/z)$  is a generalized penalty function if it can be written as

$$\xi_n(x, x/z) = h_n(x/z) g_n(x), \quad x, x/z \in \mathbb{R}. \quad (2.15)$$

Thus, the impact function  $h_n$  behaves as a multiplicative factor which increases the initial consequences of the basis risk. This factor has an amplifying effect only if the relative size of the uncertainty exceeds a critical level  $r$  (if  $r \rightarrow \infty$ ,  $\xi_n = g_n$ ). For example, combining (2.12) and (2.14) yields

$$\xi_n(x, x/z) = [|x| + (x - d)_+^{n-1}][1 + (x/z - r)_+^{n-1}], \quad x, x/z \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

Note that  $h_n$  and  $\phi_n$  are both increasing convex with the same degree  $n$ . This is not mandatory and is done only to simplify the presentation. It is now important to look at the degree of convexity involved for  $\xi_n$ .

**Proposition 2.4.1.** *For any given index value  $z$ , the function  $\xi_n(x) \equiv \xi_n(x, x/z)$  belongs to  $\mathcal{W}_{(2,n)-icx}^{\mathbb{R}_+}$ .*



*Proof.* From (2.15),  $r > 0$  and the definitions of  $g_n, h_n$ , the penalty function  $\xi_n$  is given by

$$\xi_n(x) = f(x) + h_n(x/z) \phi_n(x), \quad x, x/z \in \mathbb{R}. \quad (2.17)$$

Thus, to get the announced result, it suffices to establish that in (2.17), the product  $h_n(x/z)\phi_n(x)$  is  $n$ -increasing in  $x$ .

Let us show that if two positive functions  $h, l \in \mathcal{U}_{s-icx}^{\mathcal{A}}$ , then their product  $h.l \in \mathcal{U}_{s-icx}^{\mathcal{A}}$ . This implication is known (see e.g. Popoviciu (2013)) but its proof is briefly sketched below. First, recall the definition of a  $k$ -convex function  $h$  in terms of its  $k$ -th divided differences, namely  $[x_0, \dots, x_k; h] \geq 0$  for any distinct points  $x_0, \dots, x_k \in \mathcal{A}$ . Now, the  $k$ -th divided differences of  $h.l$  can be expanded as

$$[x_0, \dots, x_k; h.l] = \sum_{k=0}^k [x_0, \dots, x_{k-j}; h][x_{k-j}, \dots, x_s; l].$$

By assumption, the functions  $h, l$  are positive and  $\in \mathcal{U}_{s-icx}^{\mathcal{A}}$  (i.e.  $k$ -convex for  $1 \leq k \leq s$ ). Thus, we may assert that  $[x_0, \dots, x_{s-k}; f] \geq 0$  and  $[x_{s-k}, \dots, x_s; \phi] \geq 0$  for  $0 \leq k \leq s$ , so that  $[x_0, \dots, x_s; h.l] \geq 0$ . Note that for  $k > s$ ,

$$[x_0, \dots, x_k; h.l] = [x_0, \dots, x_k; h]l(x_k) + \sum_{j=1}^k [x_0, \dots, x_{k-j}; h][x_{k-j}, \dots, x_k; l],$$

but the sign of  $[x_0, \dots, x_k; f]$  being unknown this time, the same conclusion does not hold.  $\square$

### 2.4.3 Basis risk measure in worst case scenarios

We must now quantify the consequences of the basis risk  $X$  in each worst case scenario. For this, we calculate the (positive) measure associated with  $X$ , denoted  $C_n \equiv C_n(X)$ , which corresponds to the average value of the generalized penalty (2.15) for  $X$ , i.e.  $C_n = \mathbb{E}[\xi_n(X, X/Z)]$ . Note that for  $Z$  fixed,  $C_n(X)$  is convex in  $X$ .

Since  $X =_d SY$ , let us first return to the extrema for the random scaling factor  $S$  of support  $[a, b]$ . The  $s$ -convex extremal distributions are known to be atomic, with a distinction between the even degrees ( $s = 2k$ ) and odd ( $s = 2k + 1$ ) (Denuit et al. (1999)). In  $\mathcal{B}_{2k}([a, b], \rho_1, \dots, \rho_{2k-1})$ ,  $S_{min}^{(2k)}$  has  $k$  support points  $\theta_1 < \dots < \theta_k$  with masses  $q_1, \dots, q_k$ , while  $S_{max}^{(2k)}$  has  $k + 1$  support points  $a < \theta_1 < \dots < \theta_{k-1} < b$  with masses  $p_a, q_1, \dots, q_{k-1}, p_b$ . In  $\mathcal{B}_{2k+1}([a, b], \rho_1, \dots, \rho_{2k})$ ,  $S_{min}^{(2k+1)}$  has  $k + 1$  support points  $a < \theta_1 < \dots < \theta_k < b$  with positive masses  $p_a, q_1, \dots, q_k$ , while  $S_{max}^{(2k+1)}$  has  $k + 1$  support points  $\theta_1 < \dots < \theta_k < b$  with masses  $q_1, \dots, q_k, p_b$ . All these points and masses are determined by solving certain matricial equations not recalled here.

Now, applying Proposition 2.3.2 directly provides the  $s$ -convex extrema for the basis risk  $X$  of support  $\mathcal{A}$ . Since the penalty  $\xi_n$  is  $(2, n)$ -increasing convex, we can deduce the corresponding extremal risk

measures as being  $C_n(X_{min}^{(s)})$  and  $C_n(X_{max}^{(s)})$  when  $n \geq s$ . Moreover, Proposition 2.3.3 holds and the severity requirement is fulfilled. This result is given below for the maximum and with  $s = 2, 3, 4$ .

**Proposition 2.4.2.** *Let  $C_n$  be the expectation of the generalized penalty function (2.15). For  $s = 2, 3, 4$  and  $n \geq s$ ,*

$$C_n(X_{max}^{(2)}) = \frac{b - \rho_1}{b - a} C_n(aY) + \frac{\rho_1 - a}{b - a} C_n(bY),$$

$$C_n(X_{max}^{(3)}) = \frac{(b - \rho_1)^2}{(b - \rho_1)^2 + \rho_2 - \rho_1^2} C_n(\theta_1 Y) + \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{(b - \rho_1)^2 + \rho_2 - \rho_1^2} C_n(bY),$$

where  $\theta_1 = \rho_1 - (\rho_2 - \rho_1^2)/(b - \rho_1)$ , and

$$C_n(X_{max}^{(4)}) = p_a C_n(aY) + q_1 C_n(\tilde{\theta}_1 Y) + p_b C_n(bY),$$

where  $\tilde{\theta}_1 = [\rho_3 - \rho_2(a + b) + ab\rho_1]/[\rho_2 - \rho_1(a + b) + ab]$ , and

$$q_1 = \frac{(\rho_2 - \rho_1(a + b) + ab)^3}{(\rho_3 - \rho_2(2a + b) + \rho_1(2ab + a^2) + a^2b)(\rho_3 - \rho_2(a + 2b) + \rho_1(2ab + b^2) + ab^2)},$$

$$p_a = \frac{b - \mu_1 - q_1(b - a)}{b - a}, \quad p_b = 1 - p_a - q_1.$$

In addition, for  $X \in \mathcal{B}(\mathcal{A}; \nu_1, \nu_2, \nu_3)$  and  $n \geq 4$ ,

$$C_n(X) \leq C_n(X_{max}^{(4)}) \leq C_n(X_{max}^{(3)}) \leq C_n(X_{max}^{(2)}).$$

## 2.5 Determining basis risk limits and budget

Our method allows to derive the limits of the basis risk when a given budget is available. These limits correspond to the maximum acceptable uncertainty window and will be determined using the previous basis risk measure associated with a certain penalty function. The reciprocal question is also interesting, i.e. the determination of the required budget taking into account an acceptable threshold for the basis risk.

### 2.5.1 Allowable limits for basis risk

The basis risk budget is the monetary amount that makes it possible to deal with the consequences of basis risk as measured before. Consider that the entity facing basis risk is able to define a budget  $\pi > 0$  based on an Enterprise Risk Management criterion, for example risk appetite. The basis risk limits are represented by the extreme values taken by the scaling factor. Hereafter, we will assume that  $S \equiv S(a) \in \mathcal{B}((-a, a), \rho_1, \dots, \rho_{s-1})$ ,  $s \geq 1$ , where  $a > 0$  thus specifies the range of  $S(a)$ .

Now, for scenario  $s$ , the basis risk limits are given through the value of the parameter  $a$ , denoted  $a^{(s)}$ , such that

$$C_n[X_{max}^{(s)}(a^{(s)})] = \pi, \tag{2.18}$$

where  $X_{max}^{(s)}(a) = S_{max}^{(s)}(a)Y$  (in obvious notation).

By choosing this value  $a^{(s)}$ , we fully manage the weight of uncertainty in the size of the ultimate loss.

The basis risk budget provides us with a criterion for selecting an index. To this end, we introduce the probability that the ratio between the value  $Y$  of the uncertainty and the value  $Z$  of the index exceeds a predefined level  $l > 0$ , i.e.

$$\mathbb{P}[S(a)Y/Z > l] \equiv h_l(a). \quad (2.19)$$

Typically,  $l$  will be identical to  $r$ , the threshold used in the definition of the generalized penalty function (2.13). Let us fix this probability to the value  $\gamma$  where  $\gamma$  will be small in practice. Given a fixed basis risk budget, we first solve (2.18) to get a value  $a^{(s)}$  for scenario  $s$ . Then, we calculate from (2.19) the associated probability  $\gamma^{(s)}$  by

$$\gamma^{(s)} = h_l(a^{(s)}). \quad (2.20)$$

So, if  $\gamma^{(s)}$  given by (2.20) is not satisfactory for the basis risk carrier, then a feasible solution is to change the index  $Z$ .

## 2.5.2 Budget required for basis risk

Consider the inverse problem of determining the basis risk budget from an acceptable risk threshold. More precisely, we fix the probability  $\gamma$  defined in (2.19), then we derive the basis risk limits and the associated budget required.

Define the variable  $V(a) = [S(a) + a]/2a$ , which has values in  $(0, 1)$ , and let  $f_{Y/Z}$  be the density of the ratio of the uncertainty to the index. For any  $l > 0$ , we have

$$h_l(a) \equiv \mathbb{P}[S(a)Y/Z > l] = \int_{l/a}^{\infty} \mathbb{P}[V(a) > (1 + l/at)/2] f_{Y/Z}(t) dt. \quad (2.21)$$

**Lemma 2.5.1.** *The function  $h_l(a)$  is continuous, non-decreasing and tends to*

$$h(\infty) \equiv \lim_{a \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(V(a) > 1/2), \quad (2.22)$$

*independently of  $l$ , providing the limit exists.*

*Proof.* The continuity of  $h_l$  is straightforward. Set  $\tilde{a} = a + \varepsilon$  with  $\varepsilon > 0$ , and take  $t \geq l/\tilde{a}$ . Since  $t/\tilde{a} < t/a$  and  $l/\tilde{a}t < l/at$ , we get from (2.21)

$$\begin{aligned} h_l(\tilde{a}) &= \int_{l/\tilde{a}}^{\infty} \mathbb{P}[V(a) > (1 + l/\tilde{a}t)/2] f_{Y/Z}(t) dt \geq \int_{l/a}^{\infty} \mathbb{P}[V(a) > (1 + l/\tilde{a}t)/2] f_{Y/Z}(t) dt \\ &\geq \int_{l/a}^{\infty} \mathbb{P}[V(a) > (1 + l/at)/2] f_{Y/Z}(t) dt = h_l(a), \end{aligned}$$

i.e.  $h_l$  is non-decreasing. The horizontal asymptote, if it exists, is obviously given by (2.22).  $\square$

Thus, the (possibly generalized) inverse of the function  $h_l$  is well defined. Assuming that (2.22) holds, we choose  $\gamma$  (small) in the range  $(0, h(\infty))$  and can then determine a value  $\hat{a}$  such that

$$\hat{a} = h_l^{-1}(\gamma). \quad (2.23)$$

In other words, solving (2.23) gives the basis risk limit induced by the parameter  $\gamma$ .

For each scenario  $s$ , we now deduce the corresponding basis risk budget  $\pi_\gamma^{(s)}$  as

$$\pi_\gamma^{(s)} = C_n[X_{max}^{(s)}(\hat{a})]. \quad (2.24)$$

The budget (2.24) leads to affordable consequences of basis risk, that is, uncertainties that do not weigh more than  $l$  times the size of the index in the total losses, with a chosen probability  $\gamma$ . Clearly, this also makes it possible to select sufficiently efficient indices.

## 2.6 Illustration of the methodology

In this Section, we apply the proposed methodology by first identifying the  $s$ -convex extrema for the basis risk, then choosing a generalized penalty function and finally solving the two previous problems of limits and budget.

To emphasize the importance of the sizes of the uncertainty and the index, we consider three different situations for the underlying variable  $Y$ . Given an index  $Z$ , we suppose that (i)  $Y = Z$ , (ii)  $Y = \sqrt{Z}$ , or (iii)  $Y = \tilde{Z}$  where  $\tilde{Z}$  is an independent copy of  $Z$ . In cases (i) and (ii), the basis risk is correlated with the indemnity triggered by the index. Case (ii) corresponds to a particular case where the loss amplification only affects a portion of the loss, correlated and smaller than the index-based loss. In particular with  $S_a$  as random scaling factor we have in case (i)  $\text{Cov}(Z, SZ) = \sigma_Z^2 \mathbb{E}[S_a]$  and  $\text{Cov}(Z, S\sqrt{Z}) = (\mathbb{E}[Z^{3/2}] - \mathbb{E}[Z]^{3/2})\mathbb{E}[S_a]$ . The covariance only depends on the parameters  $\alpha$  and  $\beta$  of the scaling factor  $S_a$ . In case (iii),  $\text{Cov}(Z, S\tilde{Z}) = 0$ . These three cases correspond to unimodal and symmetric basis risk when  $\alpha = \beta$ . By considering several values for these parameters, we generate more or less favorable configurations of basis risk.

Thus, in cases (i) and (ii), the basis risk  $X =_d SY$  depends on the index  $Z$ , unlike in case (iii). Note that in case (i), the loss simply becomes  $L = X + Z = (S + 1)Z$ , i.e.  $L$  is a randomly scaled variable.

Moreover, we want to discuss the two situations where the index  $Z$  has light or heavy tailed distributions. To this end, we take for  $Z$  a Gamma distribution  $Z \sim \Gamma(\kappa, \eta)$  with  $\kappa, \eta > 0$ , of density  $f(x) = (\eta^\kappa / \Gamma(\kappa)) x^{\kappa-1} \exp(-\eta x)$ ,  $x > 0$ , or a Pareto distribution  $Z \sim P(\omega, \zeta)$  with  $\omega, \zeta > 0$ , of density  $f(x) = \zeta \omega^\zeta / x^{\zeta+1}$ ,  $x > \omega$ .

For the scaling factor  $S$ , we choose a uniform or scaled Beta distribution on  $(-a, a)$ . It is denoted by  $U_a$  or  $S_a(\alpha, \beta) \sim \text{Beta}((-a, a), \alpha, \beta)$ , respectively.

As a generalized penalty function, we take a slight variant of (2.16) defined by

$$\xi_n(x, x/z) = (x - d)_+^{n-1} [1 + (x/z - r)_+^{n-1}], \quad x, x/z \in \mathbb{R}.$$

The basis risk measure is  $C_n(X) = E[\xi_n(X, X/Z)]$ . Its value in worst case scenarios is given by Proposition 2.4.2 for  $s = 2, 3, 4$  and  $n \geq s$ . This requires to calculate  $C_n(cY)$  where  $c = a, b, \theta_1, \tilde{\theta}_1$ , i.e.

$$C_n(cY) = \mathbb{E}\{(cY - d)_+^{n-1} [1 + (cY/Z - r)_+^{n-1}]\}.$$

The expression of  $C_n(cY)$  is given in Appendix for the cases (i), (ii), (iii) and when  $Z$  is either Gamma or Pareto distributed.

For this situation, the probability  $h_l(a)$  defined in (2.19) can also be determined rather easily when the scaling factor is a variable  $U_a$  uniform over  $(-a, a)$ . However, there is no particularly simple expression when the scaling factor is of type Beta.

**Proposition 2.6.1.** *Suppose that  $S =_d U_a$ . Then, the probability  $h_l(a)$ , for  $l > 0$ , is given by (i) when  $Y = Z$ ,*

$$h_l(a) = (a - l)_+ / 2a;$$

(ii) when  $Y = \sqrt{Z}$ , and if  $Z \sim \Gamma(\kappa, \eta)$ ,

$$h_l(a) = \frac{1}{2} \mathbb{P}[Z < (a/l)^2] - \frac{l}{2a} \frac{\Gamma(\kappa + 1/2)}{\eta^{1/2} \Gamma(\kappa)} \mathbb{P}[Z_{\kappa+1/2} < (a/l)^2],$$

where  $Z_{\kappa+1/2} \sim \Gamma(\kappa + 1/2, \eta)$ , while if  $Z \sim P(\omega, \zeta)$  with  $\omega > 1/2$ ,

$$h_l(a) = \frac{1}{2} \left( 1 - \omega^\zeta [\omega \vee (a/l)^2]^{-\zeta} \right) - \frac{l\zeta\omega^\zeta}{2a(\zeta - 1/2)} \left( \omega^{1/2-\zeta} - [\omega \vee (a/l)^2]^{1/2-\zeta} \right);$$

(iii) when  $Y = \tilde{Z}$ ,  $\tilde{Z}$  being an independent copy of  $Z$ , and if  $Z \sim \Gamma(\kappa, \eta)$  with  $\kappa > 1$ ,

$$h_l(a) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(\tilde{Z}/Z > l/a) - \frac{l}{2a} \frac{\Gamma(\kappa - 1)\Gamma(\kappa + 1)}{\Gamma(\kappa)^2} \mathbb{P}(\tilde{Z}_{\kappa-1}/Z_{\kappa+1} > l/a),$$

where  $\tilde{Z}_{\kappa-1} \sim \Gamma(\kappa - 1, \eta)$ ,  $Z_{\kappa+1} \sim \Gamma(\kappa + 1, \eta)$ , while if  $Z \sim P(\omega, \zeta)$ ,

$$h_l(a) = \begin{cases} \frac{1}{4(\zeta + 1)} (a/l)^\zeta, & \text{if } l \geq a, \\ \frac{1}{2} - \frac{l\zeta^2}{2a(\zeta^2 - 1)} + \frac{1}{4(\zeta - 1)} (l/a)^\zeta, & \text{if } l < a. \end{cases}$$

### 2.6.1 Light tailed index distribution

We start by considering a light tailed distribution for the index  $Z$ . For example, choose  $Z \sim \Gamma(\kappa = 5, \eta = 2)$ . Then, we take  $n = 4$ , so that  $\xi_n$  is 4-increasing convex, and we set  $r = l = 0.05$  and  $d = 0.1\mathbb{E}(Z) = 0.25$ .

Figure 22 shows the graph of  $C_4[X_{max}^{(s)}(a)]$  in case (i) as a function of  $a$ , for the three scenarios  $s = 2$  (solid line),  $s = 3$  (dashed line),  $s = 4$  (dotted line), and when the scaling factor is  $S_a(1, 4)$  (top left),  $S_a(4, 1)$  (top right),  $U_a$  (bottom left),  $S_a(0.5, 0.5)$  (bottom right). As expected, the more moments there are, the sharper the boundaries, i.e. the solid curve is always above the dashed line which is itself above the dotted line. Moreover, we see that the bounds with  $S_a(4, 1)$  take the largest values. The reason is that the basis risk  $X =_d S_a(4, 1)Y$  has a non-symmetric distribution shifted to the right with a positive mode, thus increasing the size of the uncertainty. On the contrary,  $X =_d S_a(1, 4)Y$  has a non-symmetric distribution shifted to the left with a negative mode, which leads to lower bounds. We also observe that the factors  $U_a$  and  $S_a(0.5, 0.5)$  give comparable results. In fact,  $\mathbb{E}(U_a) = \mathbb{E}(S_a(0.5, 0.5)) = 0$  so that the 2-convex bounds are the same.

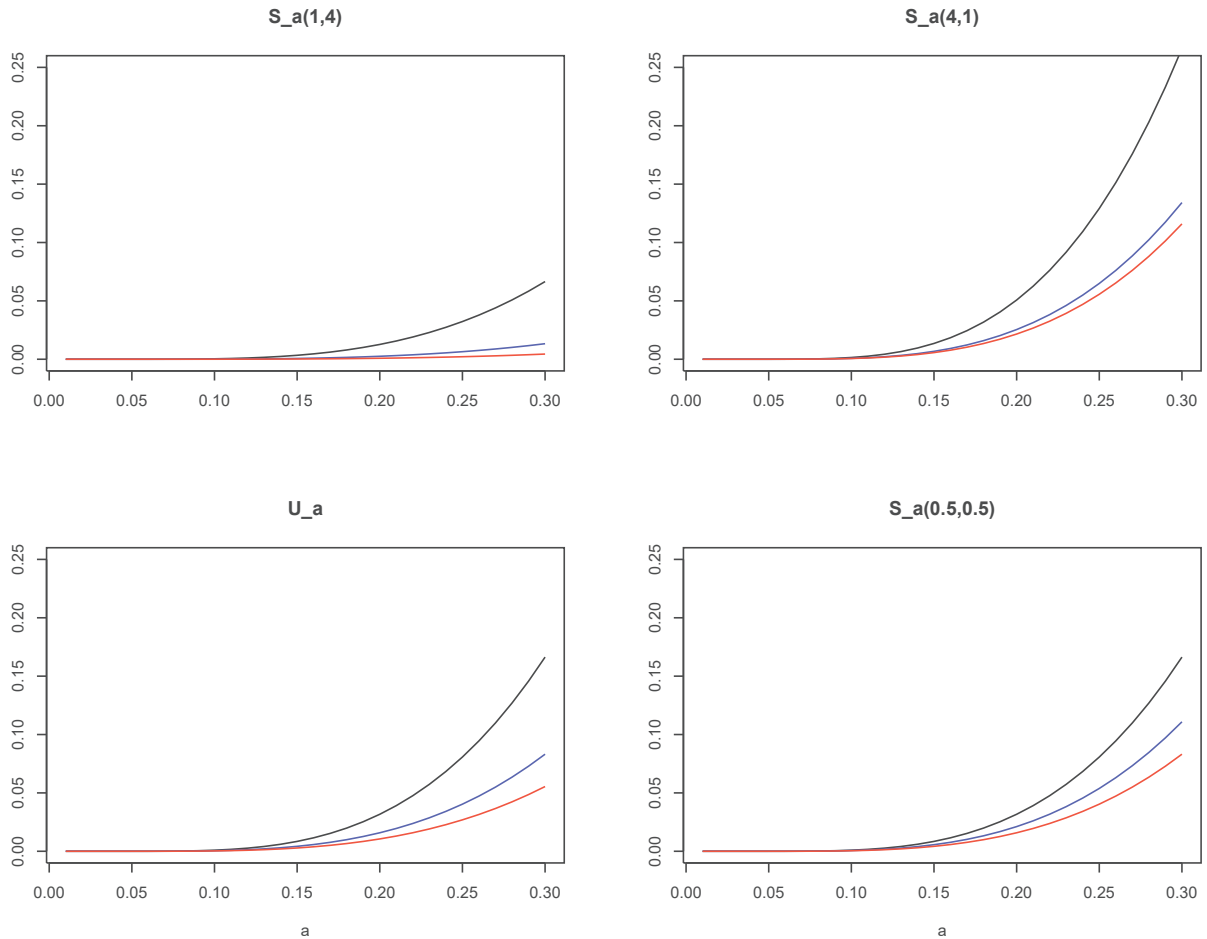


Figure 22 – Graphs of  $C_4[X_{max}^{(s)}(a)]$  when  $Z \sim \Gamma(5, 2)$  in case (i), for  $s = 2$  (solid line),  $s = 3$  (dashed line),  $s = 4$  (dotted line) and with  $S \sim S_a(1, 4)$  (top left),  $S_a(4, 1)$  (top right),  $U_a$  (bottom left),  $S_a(0.5, 0.5)$  (bottom right).

Let us focus on the two scaling factors  $U_a$  and  $S_a(4, 1)$ . Suppose that the budget is  $\pi = 0.25\mathbb{E}(Z) = 0.625$ . Table 21 provides the basis risk limits  $a^{(s)}$  calculated from (2.18) in cases (i), (ii), (iii), for the three scenarios  $s = 2, 3, 4$ .

$s$ -cx orders	$U_a$			$S_a(4, 1)$		
	$Y = Z$	$Y = \sqrt{Z}$	$Y = \tilde{Z}$	$Y = Z$	$Y = \sqrt{Z}$	$Y = \tilde{Z}$
2	0.4254	0.7950	0.3405	0.3752	0.7053	0.3117
3	0.5121	0.9483	0.3867	0.4497	0.8392	0.3546
4	0.5701	1.0496	0.4158	0.4657	0.8693	0.3653

Table 21 – Basis risk limits  $a^{(s)}$  when  $Z \sim \Gamma(5, 2)$  in cases (i), (ii), (iii), for  $s = 2, 3, 4$ , with  $\pi = 0.625$  and  $S \sim U_a$  or  $S_a(4, 1)$ .

Note that in each case,  $a^{(s)}$  increases with  $s$ , the order of convexity. This is explained by the amount of information available, i.e. the number of moments used to calculate the  $s$ -convex extrema. The higher the convex order  $s$ , the more information there is, and therefore the greater the limit  $a^{(s)}$  for a given basis risk budget. Moreover, for any fixed scenario  $s$ , case (iii) leads to the lowest value for  $a^{(s)}$  and case (ii) to the highest. This can be partially explained by the fact  $\mathbb{P}(\sqrt{Z} > x) \leq \mathbb{P}(Z > x)$  for  $x \geq 1$ . We also underline that case (iii) highlights the importance of having taken into account the ratio  $X/Z$  (instead of  $X$ ). Indeed, it is obvious that  $\mathbb{E}[g_n(Z)] = \mathbb{E}[g_n(\tilde{Z})]$  when  $g_n(x) = (x - c)_+^{n-1}$ , so that the cases (i) and (iii) are then equivalent. However, from the ERM perspective adopted here, these two cases no longer have the same consequences.

Conversely, suppose that the probability (2.19) is given by  $\gamma = 0.05$ . Table 22 presents the resulting basis risk limits  $\hat{a}$  calculated from (2.23) in cases (i), (ii), (iii), when  $S \sim U_a$ .

	$Y = Z$	$Y = \sqrt{Z}$	$Y = \tilde{Z}$
$\hat{a}$	0.0555	0.07881	0.03679

Table 22 – Basis risk limits  $\hat{a}$  when  $Z \sim \Gamma(5, 2)$  in cases (i), (ii), (iii), with  $\gamma = 0.05$  and  $S \sim U_a$ .

The corresponding basis risk budget  $\pi_\gamma^{(s)}$  is provided by (2.24). Clearly, small values of  $\gamma$  gives small values of  $\hat{a}$  and therefore small values of  $\pi_\gamma^{(s)}$ . By Propositions 2.3.3 and 2.4.1,  $\pi_\gamma^{(s)}$  decreases when the convex order  $s$  increases. So, in case i) for  $s = 2, 3, 4$ , we obtain  $\pi_\gamma^{(s)} = 10.8429/10^6, 5.4214/10^6, 3.6143/10^6$ , respectively.

## 2.6.2 Heavy tailed index distribution

We continue by considering a heavy tailed distribution for the index  $Z$ . For example, choose  $Z \sim P(\omega, \zeta)$ . The expectation  $C_n(cY)$  in cases (i), (ii), (iii) is guaranteed for  $\zeta > n - 1, \zeta > (n - 1)/2$  and

$\zeta > 2(n - 1)$ , respectively (see Appendix). So, for  $n = 4$ , the condition in case (iii) is that the first 6 moments of  $Z$  exist, which is a constraining assumption. For this reason, we suppose that  $2 < \zeta < 4$  so that only  $n = 2$  is allowed. In this case, the generalized penalty function is 2-convex, thus only the 2-convex bound can be calculated.

Consider again the two scaling factors  $U_a$  and  $S_a(4, 1)$ . Table 23 gives the basis risk limits  $a^{(2)}$  in case (i), (ii), (iii) for  $Z \sim P(\omega = 1, \zeta = 2.8)$ , when  $r = 0.05$ ,  $d = 0.1\mathbb{E}(Z) = 0.1556$  and  $\pi = 0.25\mathbb{E}(Z) = 0.3889$ .

s-cx order	$U_a$			$S_a(4, 1)$		
	$Y = Z$	$Y = \sqrt{Z}$	$Y = \tilde{Z}$	$Y = Z$	$Y = \sqrt{Z}$	$Y = \tilde{Z}$
2	0.5212	0.7850	0.4330	0.4406	0.6787	0.3628

Table 23 – Basis risk limits  $a^{(2)}$  when  $Z \sim P(1, 2.8)$  in cases (i), (ii), (iii), with  $\pi = 0.3889$  and  $S \sim U_a$  or  $S_a(4, 1)$ .

As before, we see that the penalization of the ratio  $Y/Z$  plays a key role in determining the basis risk limits. The uncertainty in case (iii) is clearly smaller than that of case (i). In addition, case (ii) is the one where the ratio is the smallest, making the overall penalty less severe and leading to an increase in the basis risk limits.

**In summary.** We have presented a methodology to quantify the basis risk inherent in an index-based insurance transactions. The methodology is based on worst case scenario approach which is motivated by the regulatory authorities. The consequences of basis risk are measured using penalty functions which are built to reflect the risk appetite of the protection buyer. Finally, the basis risk limits as well as the required budget are deducted. This budget represents the price of the average consequences of a mismatch between the value taken by the index and the actual loss incurred. If the cost of basis risk exceeds the budget allocated to this risk, then the purchase of the index-based protection has to be overseen by the risk committee or by the board. In light of the recommendations of the regulatory authorities, the materiality of the basis risk can be examined thanks to our methodology.

To close, it could be interesting to relax the assumption that the scaling factor and the scaled factor are independent; this is left for further research.

## Acknowledgements

We thank the editor and the referees for helpful comments and suggestions. C. Lefèvre received the support from the Chair *DIALog* sponsored by CNP Assurances, and S. Loisel the support from the Chair *Actuariat Durable* sponsored by Milliman Paris as well as the Chair *Data Analytics and Models for Insurance* sponsored by BNP Paribas Cardif.



## Appendix

### Complements to Section 2.2: from $X$ to $Y$

In Section 2.2, we assume that  $Y$  is known, and we obtain the distribution of the resulting  $X = SY$ , for different scaling factors  $S$ . Here, we rapidly present the reverse problem, by assuming  $X$  is known. We provide two side results which give the distribution of  $Y$  hidden in  $X$ .

**Proposition 2.6.2.** *Let  $X$  be unimodal and symmetric. Then  $X = U_1Y$  and*

$$F_Y(x) = 2F_X(x) - 1 - 2xf_X(x), \quad x \geq 0. \quad (2.25)$$

*Proof.* When  $X$  is known to be symmetric and unimodal, then From (2.1) for  $x \geq 0$ , we have

$$\int_x^\infty \frac{f_Y(y)}{y} dy = \frac{2F_X(x)}{x} - \frac{1}{x} - \frac{F_Y(x)}{x}. \quad (2.26)$$

By differentiating (2.26) with respect to  $x$ , we then obtain the announced result.  $\square$

For example, if  $X$  is normally distributed with mean 0 and variance  $\sigma^2$ , the density of  $Y$  is as follows.

**Example.** Let  $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Thus, its distribution can be represented as  $X =_d U_1Y$ . From (2.25), the density of  $Y$  is then given by

$$f_Y(x) = \frac{2x^2}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \geq 0.$$

When  $X$  is symmetric about 0, the Mellin transform of  $Y$  can be easily recovered. Again, the distribution of  $Y$  hidden in an observed  $X$  can be obtain as follows.

**Proposition 2.6.3.** *If  $X =_d SY$  is symmetric about 0, then*

$$\mathcal{M}_Y(s) = \mathcal{M}_{X^+}(s)/\mathcal{M}_{S^+}(s).$$

*Proof.* Since  $X$  is symmetric by assumption,  $S$  too by Proposition 2.2.4. Therefore,  $\mathcal{M}_X(s) = \mathcal{M}_{X^+}(s)(1 + \gamma)$  and  $\mathcal{M}_S(s) = \mathcal{M}_{S^+}(s)(1 + \gamma)$ . It now suffices to use the independence between  $S$  and  $Y$ .  $\square$

**Example.** Let us return to  $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . By definition,  $X$  and  $U_1$  are symmetric about 0. A simple calculation shows that for  $\Re(s) > -1$ ,

$$\mathcal{M}_{X^+}(s) = \frac{\sigma^s 2^{(s-1)/2}}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right), \quad \text{and} \quad \mathcal{M}_{U_1^+}(s) = \frac{1}{2(s+1)}.$$

From Proposition 2.6.3, the Mellin transform of  $Y$  is then given by

$$\mathcal{M}_Y(s) = \frac{\sigma^s 2^{(s+1)/2} (s+1)}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right).$$

Using a well-known formula,  $\mathcal{M}_Y(s)$  can be reversed to provide the density  $f_Y(x)$  obtained before.

**Proof of Proposition 2.2.2.** As a preliminary, consider a Beta-unimodal variable  $X =_d SY$ , i.e. when  $S \sim \text{Beta}((0,1), \alpha, \beta)$  and  $Y$  a non-negative variable independent of  $S$ . Then, the distribution function of  $X$  can be expressed as follows (see Pakes and Navarro (2007)):

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha (I_\beta \phi_{\alpha+\beta})(x), \quad (2.27)$$

where the function  $\phi_{\alpha+\beta}$  is linked to  $F_Y$  by

$$\phi_{\alpha+\beta}(t) = F_Y(t) t^{-\alpha-\beta},$$

and the function  $I_\beta \phi_{\alpha+\beta}$  is defined as

$$(I_\beta \phi_{\alpha+\beta})(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_x^\infty (t-x)^{\beta-1} \phi_{\alpha+\beta}(t) dt,$$

which corresponds to the Weyl fractional integral of  $\phi_{\alpha+\beta}$  (e.g. Miller and Ross (1993), Debnath and Bhatta (2006)). In addition, the survival distribution of  $X$  has an expression similar to (2.27) but in which the function  $\phi_{\alpha+\beta}(t)$  is replaced by the function  $\bar{\phi}_{\alpha+\beta}(t) = \bar{F}_Y(t) t^{-\alpha-\beta}$ .

Now, let  $X =_d S_a Y$  where  $S_a \sim \mathcal{B}((-a, a), n, m)$ ,  $n, m$  being positive integers. First, take  $x \geq 0$ . Obviously,

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(S_a \leq 0) + \int_0^a \mathbb{P}(Y \leq x/u) f_{S_a}(u) du. \quad (2.28)$$

Denoting by  $I_a$  the integral in (2.28), we get

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)\Gamma(m)(2a)^{m+n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-k-1} \int_0^a F_Y(x/u) u^k (a-u)^{m-1} du \\ &= \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)\Gamma(m)(2a)^{m+n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n+m-k-2} x^{k+1} \int_{x/a}^{+\infty} F_Y(t) t^{-m-(k+1)} \left(t - \frac{x}{a}\right)^{m-1} dt \\ &= \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)\Gamma(m)2^{m+n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{x}{a}\right)^{k+1} \int_{x/a}^{+\infty} F_Y(t) t^{-(k+1)-m} \left(t - \frac{x}{a}\right)^{m-1} dt \\ &= \frac{1}{2^{m+n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{n-k-1} \frac{\Gamma(m+k+1)}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{a}\right)^{k+1} (I_m \phi_{k+1+m})\left(\frac{x}{a}\right), \end{aligned}$$

and from (2.27) applied to  $\tilde{S}_{k+1} \sim \mathcal{Beta}((0, 1), k + 1, m)$ ,

$$I_a = \frac{1}{2^{m+n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{n-k-1} \mathbb{P}\left(\tilde{S}_{k+1} Y \leq \frac{x}{a}\right),$$

which gives (2.3).

When  $x \leq 0$ , we have

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-a}^0 \bar{F}_Y(x/u) f_{S_a}(u) du \equiv J_a.$$

So, this time,

$$\begin{aligned} J_a &= \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)\Gamma(m)(2a)^{m+n-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} a^{m-k-1} \int_0^a \bar{F}_Y(-x/u) u^k (a-u)^{n-1} du \\ &= \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)\Gamma(m)(2a)^{m+n-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} \left(\frac{-x}{a}\right)^{k+1} \int_{-x/a}^{+\infty} \bar{F}_Y(u) u^{-(k+1)-n} \left(u - \frac{-x}{a}\right)^{n-1} du \\ &= \frac{1}{2^{m+n-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+m-1}{m-k-1} \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{-x}{a}\right)^{k+1} (I_n \bar{\phi}_{k+1+n}) \left(\frac{-x}{a}\right), \end{aligned}$$

and from (2.27) rewritten for  $\mathbb{P}(\hat{S}_{k+1} Y > x)$  with  $\hat{S}_{k+1} \sim \mathcal{Beta}((0, 1), k + 1, n)$ ,

$$J_a = \frac{1}{2^{m+n-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+m-1}{m-k-1} \mathbb{P}\left(\hat{S}_{k+1} Y > \frac{-x}{a}\right),$$

i.e. again the desired formula (2.3).

**Existence of  $C_n(cY)$  in Section 2.6.** In this part, we work with the expectation  $C_n(X) = E[\xi_n(X, X/Z)]$ , assuming that it exists. Let us examine this question below. Precisely, it is necessary to calculate for that the quantities

$$\mathbb{E}[(cY - d)_+^{n-1}], \quad \text{and} \quad \mathbb{E}[(cY - d)_+^{n-1} (cY/Z - r)_+^{n-1}].$$

Consider the case (i), i.e. when  $Y = Z$ . Then,

$$\mathbb{E}[(cY - d)_+^{n-1}] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-d)^{n-1-k} c^k \int_{d/c}^{\infty} y^k dF_Y(y).$$

If  $Z \sim \Gamma(\kappa, \eta)$ ,

$$\int_{d/c}^{\infty} y^k dF_Y(y) = \frac{\Gamma(\kappa+k)}{\eta^k \Gamma(\kappa)} \mathbb{P}(Z_{\kappa+k} > d/c),$$

where  $Z_{\kappa+k} \sim \Gamma(\kappa+k, \eta)$ .

If  $Z \sim P(\omega, \zeta)$  with  $\zeta > n - 1$ ,

$$\int_{d/c}^{\infty} y^k dF_Y(y) = \frac{\zeta}{\zeta - k} \omega^k \mathbb{P}(Y_{\zeta-k} > y_\omega),$$

where  $Y_{\zeta-k} \sim P(\omega, \zeta - k)$  and  $y_\omega = \max(d/c, \omega)$ .

Consider the case (ii), i.e. when  $Y = \sqrt{Z}$ . Then,

$$\mathbb{E}[(c\sqrt{Z} - d)_+^{n-1}] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-d)^{n-1-k} s^k \int_{(d/c)^2}^{\infty} z^{k/2} dF_Z(z),$$

and, provided that  $c/r > d/c$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(c\sqrt{Z} - d)_+^{n-1} (c/\sqrt{Z} - r)_+^{n-1}] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \binom{n-1}{j} c^{k+j} (-d)^{n-1-k} (-r)^{n-1-j} \int_{(d/c)^2}^{(c/r)^2} z^{(k-j)/2} dF_Z(z). \end{aligned}$$

If  $Z \sim \Gamma(\kappa, \eta)$ ,

$$\int_{(d/c)^2}^{\infty} z^{k/2} dF_Z(z) = \frac{\Gamma(\kappa + k/2)}{\eta^{k/2} \Gamma(\kappa)} \mathbb{P}(Z_{\kappa+k/2} > (d/c)^2),$$

where  $Z_{\kappa+k/2} \sim \Gamma(\kappa + k/2, \eta)$ , and

$$\int_{(d/c)^2}^{(c/r)^2} z^{(k-j)/2} dF_Z(z) = \frac{\Gamma(\kappa + (k-j)/2)}{\Gamma(\kappa) \eta^{(k-j)/2}} [\mathbb{P}(Z_{\kappa+(k-j)/2} \leq c/r) - \mathbb{P}(Z_{\kappa+(k-j)/2} \leq d/c)],$$

where  $Z_{\kappa+(k-j)/2} \sim \Gamma(\kappa + (k-j)/2, \eta)$  as long as  $\kappa > (n-1)/2$ .

If  $Z \sim P(\omega, \zeta)$  with  $\zeta > (n-1)/2$ ,

$$\int_{(d/c)^2}^{\infty} z^{k/2} dF_Z(z) = \frac{\zeta}{\zeta - k/2} \omega^{k/2} \mathbb{P}(Y_{\zeta-k/2} > z_\omega),$$

where  $Y_{\zeta-k/2} \sim P(\omega, \zeta - k/2)$  and  $z_\omega = \max((d/c)^2, \omega)$ , and

$$\int_{(d/c)^2}^{(c/r)^2} z^{(k-j)/2} dF_Z(z) = \frac{\zeta \omega^\zeta}{\zeta - (k-j)/2} [z_\omega^{(k-j)/2-\zeta} - (c/r)^{(k-j)/2-\zeta}].$$

Consider the case (iii), i.e. when  $Y = \tilde{Z}$ . Then,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(c\tilde{Z} - d)_+^{n-1} (c\tilde{Z}/Z - r)_+^{n-1}] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \binom{n-1}{j} c^{k+j} (-d)^{n-1-k} (-r)^{n-1-j} \mathcal{I}(k, j), \end{aligned}$$

where

$$\mathcal{I}(k, j) = \int_{d/c}^{\infty} \int_0^{cy/r} y^{k+j} z^{-j} dF_Z(z) dF_Z(y).$$

If  $Z \sim \Gamma(\kappa, \eta)$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(k, j) &= \frac{\eta^\kappa}{\Gamma(\kappa)} \int_{d/c}^{\infty} y^{k+j} \int_0^{cy/r} z^{-j} e^{-\eta z} z^{\kappa-1} dz dF_Z(y) \\ &= \frac{\Gamma(\kappa-j)}{\Gamma(\kappa)} \eta^j \int_{d/c}^{\infty} y^{k+j} \mathbb{P}(Z_{\kappa-j} \leq cy/r) dF_Z(y), \end{aligned}$$

where  $Z_{\kappa-j} \sim \Gamma(\kappa-j, \eta)$ . Bounding  $\mathbb{P}(Z_{\kappa-j} \leq cy/r)$  by 1 leads to

$$\mathcal{I}(k, j) \leq \frac{\Gamma(\kappa-j)}{\Gamma(\kappa)^2} \frac{\Gamma(\kappa+k+j)}{\eta^k} \mathbb{P}(Z_{\kappa+k+j} > d/c),$$

where  $Z_{\kappa+k+j} \sim \Gamma(\kappa+k+j, \eta)$  as long as  $\kappa > n-1$ .

If  $Z \sim P(\omega, \zeta)$  with  $\zeta > 2(n-1)$ ,

$$\mathcal{I}(k, j) = \frac{\zeta^2 \omega^{\zeta-j}}{(\zeta+j)(\zeta-k-j)} y_\omega^{k+j-\zeta} - \frac{\zeta^2 \omega^{2\zeta}}{\zeta+j} \mathcal{J}(k, j),$$

where  $y_\omega = \max(d/c, \omega)$  and

$$\mathcal{J}(k, j) = \begin{cases} (r/c)^{\zeta+j} \frac{y_\omega^{k-2\zeta}}{2\zeta-k}, & \text{if } y_\omega > r\omega/c, \\ \frac{\omega^{-(\zeta+j)}}{\zeta-k-j} [y_\omega^{k+j-\zeta} - (r\omega/c)^{k+j-\zeta}] + (r/c)^{k+j-\zeta} \frac{\omega^{k-2\zeta}}{2\zeta-k}, & \text{if } y_\omega < r\omega/c. \end{cases}$$

## Bibliography

- Mahdi Alimohammadi, Mohammad Hossein Alamatsaz, and Erhard Cramer. Convolutions and generalization of logconcavity: implications and applications. *Naval Research Logistics (NRL)*, 63(2): 109–123, 2016.
- Alexandru V Asimit, Raluca Vernic, and Ricardas Zitikis. Background risk models and stepwise portfolio construction. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 18(3):805–827, 2016.
- Pauline Barrieu and Luca Albertini. *The Handbook of Insurance-Linked Securities*. Wiley, 2009.
- Basel Committee on Banking Supervision. Interest rate risk in the banking book. *Bank for International Settlements*, 2016.
- Emile MJ Bertin, Ioan Cuculescu, and Radu Theodorescu. *Unimodality of Probability Measures*, volume 382. Springer, 2013.
- Patrick L Brockett and Samuel H Cox. Insurance calculations using incomplete information. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1985(2):94–108, 1985.
- Patrick L Brockett, Samuel H Cox, Richard D MacMinn, and Bo Shi. Best bounds on measures of risk and probability of ruin for Alpha unimodal random variables when there is limited moment information. *Applied Mathematics*, 7(08):765, 2016.
- Attila Bussay, Marijn van der Velde, Davide Fumagalli, and Lorenzo Seguini. Improving operational maize yield forecasting in Hungary. *Agricultural Systems*, 141:94–106, 2015.
- JV Carnahan. Maximum likelihood estimation for the 4-parameter Beta distribution. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 18(2):513–536, 1989.
- Daren BH Cline and Gennady Samorodnitsky. Subexponentiality of the product of independent random variables. *Stochastic Processes and their Applications*, 49(1):75–98, 1994.
- Hélène Cossette, Thierry Duchesne, and Étienne Marceau. Modeling catastrophes and their impact on insurance portfolios. *North American Actuarial Journal*, 7(4):1–22, 2003.
- Marie-Pier Côté and Christian Genest. Dependence in a background risk model. *Journal of Multivariate Analysis*, 172:28–46, 2019.
- Cindy Courtois and Michel Denuit. Convex bounds on multiplicative processes, with applications to pricing in incomplete markets. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42(1):95–100, 2008.
- Ioan Cuculescu and Radu Theodorescu. Multiplicative strong unimodality. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, 40(2):205–214, 1998.

- Tobias Dalhaus, Oliver Musshoff, and Robert Finger. Phenology information contributes to reduce temporal basis risk in agricultural weather index insurance. *Scientific reports*, 8(1):1–10, 2018.
- Jan De Leeuw, Anton Vrieling, Apurba Shee, Clement Atzberger, Kiros M Hadgu, Chandrashekhar M Biradar, Humphrey Keah, and Calum Turvey. The potential and uptake of remote sensing in insurance: A review. *Remote Sensing*, 6(11):10888–10912, 2014.
- F Etienne De Vylder. Best upper bounds for integrals with respect to measures allowed to vary under conical and integral constraints. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1(2):109–130, 1982.
- F Etienne De Vylder. Maximization, under equality constraints, of a functional of a probability distribution. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2(1):1–16, 1983.
- F Etienne De Vylder and Marc J Goovaerts. Analytical best upper bounds on stop-loss premiums. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1(3):163–175, 1982.
- Lokenath Debnath and Dambaru Bhatta. *Integral Transforms and Their Applications*. Chapman and Hall, 2006.
- Michel Denuit and Claude Lefèvre. Some new classes of stochastic order relations among arithmetic random variables, with applications in actuarial sciences. *Insurance: Mathematics and Economics*, 20(3):197–213, 1997.
- Michel Denuit, Claude Lefèvre, and Moshe Shaked. The s-convex orders among real random variables, with applications. *Mathematical Inequalities and Their Applications*, 1(4):585–613, 1998.
- Michel Denuit, Etienne De Vylder, and Claude Lefèvre. Extremal generators and extremal distributions for the continuous s-convex stochastic orderings. *Insurance: Mathematics and Economics*, 24(3):201–217, 1999.
- Michel Denuit, Claude Lefèvre, and Moshe Shaked. On s-convex approximations. *Advances in Applied Probability*, 32(4):994–1010, 2000.
- Sudhakar Dharmadhikari and Kumar Joag-Dev. *Unimodality, Convexity, and Applications*. Academic Press, 1988.
- Paul Embrechts and Charles M Goldie. On closure and factorization properties of subexponential and related distributions. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 29(2):243–256, 1980.
- Guenter Franke, Harris Schlesinger, and Richard C Stapleton. Risk taking with additive and multiplicative background risks. *Journal of Economic Theory*, 146(4):1547–1568, 2011.
- Günter Franke, Harris Schlesinger, and Richard C Stapleton. Multiplicative background risk. *Management Science*, 52(1):146–153, 2006.

- Edward Furman, Yisub Kye, and Jianxi Su. Multiplicative background risk models with non-exchangeable dependencies: Theory and applications. Working paper, 2019.
- Janos Galambos and Italo Simonelli. *Products of Random Variables: Applications to Problems of Physics and to Arithmetical Functions*. CRC press, 2004.
- PN Gavriliadis. Moment information for probability distributions, without solving the moment problem. I: Where is the mode? *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 37(5):671–681, 2008.
- S Gayathri. Spatial basis risk and weather indexed crop insurance. Technical report, Mutuality Matters. DHAN Collective., 2014.
- Christoph Gornott and Frank Wechsung. Statistical regression models for assessing climate impacts on crop yields: A validation study for winter wheat and silage maize in Germany. *Agricultural and Forest Meteorology*, 217:89–100, 2016.
- GG Hamedani and Hans Volkmer. A characterization of symmetric random variables. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 32(4):723–728, 2003.
- Bradley A Hanson. Method of moments estimates for the four-parameter Beta compound Binomial model and the calculation of classification consistency indexes. *American College Testing Program Research Rep. No. 91-5*, 1991.
- Enkelejd Hashorva and Lanpeng Ji. Random shifting and scaling of insurance risks. *Risks*, 2(3):277–288, 2014.
- Enkelejd Hashorva and Anthony G Pakes. Tail asymptotics under Beta random scaling. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 372(2):496–514, 2010.
- Enkelejd Hashorva, Anthony G Pakes, and Qihe Tang. Asymptotics of random contractions. *Insurance: Mathematics and Economics*, 47(3):405–414, 2010.
- Werner Hürlimann. Extremal moment methods and stochastic orders. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 15(3):153–301, 2008.
- Il'dar Abdullovič Ibragimov. On the composition of unimodal distributions. *Theory of Probability & Its Applications*, 1(2):255–260, 1956.
- Robert Kaas and Marc J Goovaerts. Bounds on distribution functions under integral constraints. *Bulletin de l'Association Royale des Actuaire Belges*, (79):45–60, 1985.
- Robert Kaas and Marc J Goovaerts. Best bounds for positive distributions with fixed moments. *Insurance: Mathematics and Economics*, 5(1):87–92, 1986.



- A Ya Khintchine. On unimodal distributions. *Izvestiya Nauchno-Issledovatel'skogo Instituta Matematiki i Mekhaniki*, 2(2):1–7, 1938.
- Marek Kuczma. *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities: Cauchy's Equation and Jensen's Inequality*. Springer, 2009.
- Antoine Leblois and Philippe Quirion. Agricultural insurances based on meteorological indices: realizations, methods and research challenges. *Meteorological Applications*, 20(1):1–9, 2013.
- Claude Lefèvre and Sergey Utev. Comparing sums of exchangeable Bernoulli random variables. *Journal of Applied Probability*, 33(2):285–310, 1996.
- Claude Lefèvre and Sergey Utev. Comparison of individual risk models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 28(1):21–30, 2001.
- Claude Lefèvre, Stéphane Loisel, and Pierre Montesinos. On  $s$ -convex bounds for Beta-unimodal distributions with applications to basis risk assessment. To appear in *Scandinavian Actuarial Journal*, 2020.
- Gyula Maksa and Zsolt Páles. Decomposition of higher-order Wright-convex functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 359(2):439–443, 2009.
- Alexander J McNeil and Johanna Nešlehová. Multivariate Archimedean copulas,  $d$ -monotone functions and  $l_1$ -norm symmetric distributions. *The Annals of Statistics*, 37(5B):3059–3097, 2009.
- Kenneth S Miller and Bertram Ross. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. Wiley, 1993.
- Alfred Müller and Dietrich Stoyan. *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*, volume 389. Wiley, 2002.
- Richard A Olshen and Leonard J Savage. A generalized unimodality. *Journal of Applied Probability*, 7(1):21–34, 1970.
- Raydonal Ospina and Silvia LP Ferrari. Inflated Beta distributions. *Statistical Papers*, 51(1):111, 2010.
- Anthony G Pakes and Jorge Navarro. Distributional characterizations through scaling relations. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, 49(2):115–135, 2007.
- Tiberiu Popoviciu. Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (ix). *Bulletin Mathématique de la société Roumaine des Sciences*, 43(1/2):85–141, 1942.
- Tiberiu Popoviciu. Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles. *Mathematica*, 7:1–85, 2013.

- Teresa Rajba. New integral representations of  $n$ -th order convex functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 379(2):736–747, 2011.
- David Ross and Jillian Williams. Basis risk from the cedant’s perspective. In Pauline Barrieu and Luca Albertini, editors, *The Handbook of Insurance-Linked Securities*, chapter 5, pages 49–64. Wiley, 2009.
- Christopher C Sampson, Timothy J Fewtrell, Fiachra O’Loughlin, Florian Pappenberger, P Bates, Jim E Freer, and Hannah L Cloke. The impact of uncertain precipitation data on insurance loss estimates using a flood catastrophe model. *Hydrology and Earth System Sciences*, 18:2305–2324, 2014.
- Ken-iti Sato. Modes and moments of unimodal distributions. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 39(2):407–415, 1987.
- Moshe Shaked and J George Shanthikumar. *Stochastic Orders*. Springer, 2007.
- Larry A Shepp. Symmetric random walk. *Transactions of the American Mathematical Society*, 104(1):144–153, 1962.
- Wenjiao Shi, Fulu Tao, and Zhao Zhang. A review on statistical models for identifying climate contributions to crop yields. *Journal of Geographical Sciences*, 23(3):567–576, 2013.
- Italo Simonelli. Convergence and symmetry of infinite products of independent random variables. *Statistics & Probability Letters*, 55(1):45–52, 2001.
- Solvency II Commission Delegated Regulation. Commission Delegated Regulation (EU) 2015/35 supplementing Directive 2009/138/EC of the European Parliament and of the Council on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance (Solvency II). *Official Journal of European Union*, 2015.
- Qihe Tang. From light tails to heavy tails through multiplier. *Extremes*, 11(4):379, 2008.
- Iliia Tsetlin and Robert L Winkler. Risky choices and correlated background risk. *Management Science*, 51(9):1336–1345, 2005.
- Willemijn Vroege, Tobias Dalhaus, and Robert Finger. Index insurances for grasslands—a review for Europe and North-America. *Agricultural Systems*, 168:101–111, 2019.
- Richard Edmund Williamson. Multiply monotone functions and their Laplace transforms. *Duke Mathematical Journal*, 23(2):189–207, 1956.
- Yang Yang and Yuebao Wang. Tail behavior of the product of two dependent random variables with applications to risk theory. *Extremes*, 16(1):55–74, 2013.



## Chapitre 3

# Optimalité des transactions indicielles et indemnitaires : arbitrage entre asymétrie d'information et risque de base

*Ce chapitre reprend l'article "Optimality of indemnity-based and index-based transactions : a trade-off between asymmetry of information and basis risk", co-écrit avec Pauline Barrieu, Anne Eyraud-Loisel et Stéphane Loisel, soumis à Risk Analysis.*

### Abstract

Motivated by real world practitioner problem, we investigate the role of the asymmetry of information related to indemnity-based transactions and the one of basis risk inherent to index-based transactions on the choice of the type of transaction. We consider a reinsurer with an initial exposure and we examine a bilateral reinsurance design problem for both of the transactions. We first obtain the solution of these problems in the perfect cases (no asymmetry and no basis risk). By doing so, we provide an alternative characterization of the set of counter-monotonic risk reducers developed in [Cheung et al. \(2014\)](#). Next, we introduce the asymmetry of information in the indemnity-based transaction and a basis risk in the index-based transaction. We then demonstrate that the asymmetry of information is responsible for the choice of the type of the transaction.

*Keywords:* Risk management; Asymmetry of information; Basis risk; Risk sharing.

### 3.1 Introduction

For a long time reinsurance contracts have been the only way to hedge against catastrophic events and weather related damages. However, these catastrophic events, such as hurricane Andrew in 1992, have made the reinsurance market face a significant pressure in capacity. In order to broaden the reinsurance capacity, another way of transferring the risk has emerged, namely the index-based reinsurance, modifying the traditional indemnity paradigm. Instead of being backed to the policyholder's realized loss, index-based transactions trigger a payout based on the values of an external index.

Despite the progress made to better understand the physical process of a natural catastrophe or the phenology related to various fields of agriculture, index-based transactions suffer from basis risk. Defined as the risk that a protection buyer's own losses exceed the payments under a risk transfer mechanism structured to hedge against these losses by [Ross and Williams \(2009\)](#), the level of basis risk is directly related to the success of these types of transactions; e.g. [Jensen et al. \(2016, 2018\)](#). According to [Vroege et al. \(2019\)](#) and [Dalhaus and Finger \(2016\)](#), basis risk can be split in three different types, namely spatial basis risk, temporal basis risk and design basis risk. Spatial basis risk occurs when the weather related data used to calibrate the index is too far from the insured area or the weather related event. Temporal basis risk emerges due to a biased temporal aggregation of observations (for instance monthly instead of daily records; [Dalhaus et al. \(2018\)](#)) or when the measure is done at an incorrect point in time (too late or too soon; [Conradt et al. \(2015\)](#)). To this extent, satellite imagery has been found to have a large potential to reduce temporal basis risk; see [De Leeuw et al. \(2014\)](#). Finally, design basis risk includes all remaining discrepancies between modeled indemnity and realized loss.

In the literature, basis risk is represented either through an additional random variable playing the role of a noise between the true loss and the indemnity triggered by the index-based insurance, as in [Briys et al. \(1993\)](#), or by assuming that the distribution of the true loss and the one of the indemnity triggered by the index are structurally different, as it is mentioned in [Barrieu and El Karoui \(2002\)](#). Here, we model the basis risk by assuming that the index proposed by the reinsurer is, on average, equal to the index-based loss of the insurer, but is less variable.

Concerning the indemnity-based transaction, asymmetry of information stands for its major drawback.

Asymmetry of information is inherent to the contracting relationship between the reinsurer and the insurer. On the one hand, the insurer is more likely to have a precise knowledge of her loss, even though this knowledge is restricted to her portfolio. [Garven et al. \(2014\)](#) empirically demonstrate that the insurer's private information is a source of adverse selection. On the other hand, the reinsurer has a deeper knowledge of the underlying risk, since she benefits from the claim risk profiles of other insurers she is in business with. These informational advantages have been highlighted for example in the work by [Yan and Hong \(2015\)](#). However, Chapter 1 of [Albrecher et al. \(2017\)](#) points out that because of the type and magnitude of risks under consideration, the reinsurance is mainly concerned with tails and

extreme risks. For instance, in the case of a stop-loss, the reinsurer has access to truncated data: as the insurer is reluctant to share her private information, she only transfers to the reinsurer the claims that exceed the retention threshold. To this extent, both the insurer and the reinsurer have private but partial information impacting their reinsurer-primary insurer contracting relationship.

In particular, [Jean-Baptiste and Santomero \(2000\)](#) examine the effect of asymmetric information on the trading of underwriting risk between insurers and reinsurers, concluding that such information asymmetry affects both the cost of reinsurance and the amount of reinsurance purchased. Many studies focus on the role of asymmetry of information in the relation between the insurer and the reinsurer; see [Dionne et al. \(2000\)](#) for a survey. In a nutshell, it is shown that long-term contracts allow for an improved risk sharing, but lead to an information lock-in which is beneficial from both the insurer and the reinsurer as long as the relationship is preserved. [Cutler and Zeckhauser \(1999\)](#) highlight that the asymmetry of information is separated in two types. First, the asymmetry can be on the probability of a loss but not its magnitude. This way of dealing with asymmetry of information consists in assuming that the insurer and the reinsurer have heterogeneous beliefs concerning the distribution of the random loss. This way is paved by [Acciaio and Svindland \(2009\)](#), [Ghossoub \(2017, 2016\)](#), [Boonen \(2016\)](#) or [Boonen and Ghossoub \(2019\)](#). Technically, this leads to consider different underlying probability measures for the insurer and the reinsurer: hence the same outcome does not have the same probability of occurrence. On the other hand, the asymmetry can be over the magnitude of the loss. In this case, the asymmetry of information is represented either as multiplicative factors corresponding to the insurer's and the reinsurer's point of view ([Cutler and Zeckhauser \(1999\)](#)) or as an additive random variable ([Jean-Baptiste and Santomero \(2000\)](#)) affecting the size of the original loss.

In our setting, the asymmetry of information combines the two types of asymmetry since we assume that it is represented by an additional random variable  $w\tilde{S}$ , where  $w \geq 0$  and  $\tilde{S}$  is non-negative and independent from the insurer's loss. To this extent, we encompass the asymmetry in probability (when  $w = 1$ ) and the asymmetry in the magnitude depending on the values of  $w$ .

Our paper is motivated by a practitioner's comment concerning the use of index-based transactions as a way to benefit from a pure diversification effect. In fact, when an insurer or a reinsurer is highly exposed to a risk, the first solution she has to naturally hedge against it is to invest in a product backed to a risk moving in the opposite direction. Such a situation occurs for instance with the alternation of El Niño and La Niña cycles (e.g. in [Glantz \(2001\)](#)) or by considering mortality and longevity risks ([Barrieu et al. \(2012\)](#)). Consequently, an insurance product backed to an El Niño phenomenon (or to longevity risk) issued by a reinsurer exposed to a catastrophic risk related to La Niña (or to mortality risk) consists in a natural hedge against her initial exposure. In other words, dealing with index-based insurance allows the issuer to target (almost) purely negatively correlated risks. However, an index-

based insurance leaves the protection buyer, typically an insurer exposed to El Niño (or to longevity risk), with a non negligible basis risk whereas an indemnity-based insurance makes the protection seller face some asymmetry of information.

This opposite trend motivates us to investigate the role of the asymmetry of information in the indemnity-based transaction and the role of the basis risk in the index-based transaction on the choice of the type of transaction.

The trade-off between indemnity-based and index-based transactions has been studied mainly by [Finken and Laux \(2009\)](#) and [Subramanian and Wang \(2018\)](#). First, [Finken and Laux \(2009\)](#) demonstrates that an index-based transaction is insensitive to information asymmetry, and provided that basis risk is not too high, the introduction of contracts with parametric or index triggers provides insurers with an alternative to reinsurance contracts. However, the reinsurance market considered in this study consists only in proportional contracts. In addition, the seller of the index-based coverage is assumed to be risk neutral, making the price depend only on the expected value of the protection buyer's loss, restricting thus the setting. On the other hand, [Subramanian and Wang \(2018\)](#) compare the trade-off between the information advantage of reinsurers against the lower costs of risk-sharing with capital markets, by considering a risk neutral insurer.

In this paper, we consider two bilateral reinsurance design problems, involving a non-risk neutral insurer and a non-risk neutral reinsurer. One problem concerns the index-based transaction, the other focuses on the indemnity-based one. To this extent, we assume that the insurer's risk can be decomposed in two independent components, namely  $Y$  and  $S$ . We state that  $Y$  corresponds to the part of the risk that can be represented by an index, whereas  $S$  stands for the residual risk, i.e. the risk that is not taken into account in the index. In a nutshell, the index-based transaction is based on  $Y$  whereas the indemnity-based transaction is based on  $Y + S$ . Considering the insurer faces a two-component wise risk is not new. It has been widely studied in the literature, usually referred to as background risk, uninsurable risk or random initial wealth; e.g. [Dana and Scarsini \(2007\)](#), [Lu et al. \(2012\)](#), [Lu et al. \(2018\)](#) or [Kihlstrom et al. \(1981\)](#) and [Finkelshtain et al. \(1999\)](#) among others.

However, the added value of our setting lies in the fact that we assume that the reinsurer has an initial exposure, which is not independent from the insurer's risk.

Actually, the description of the correlation structure linking the reinsurer's initial exposure to the insurer's risk stands for one the main result of the paper. In fact, motivated by the usual opposition between the insurer's and the reinsurer's interests on the bearing of the risk, we wonder under which condition the reinsurer could use the insurer's risk as a natural hedge for her initial exposure. This discussion eventually leads us to provide an alternative characterization of the set of counter-monotonic

risk reducers, recently introduced and developed in [Cheung et al. \(2014\)](#) and [He et al. \(2016\)](#).

In addition, the pricing rule of both the index-based and indemnity-based transactions are not determined by the expected value premium principle. More precisely, the preferences of both the insurer and the reinsurer are represented by tail value-at-risk (TVaR).

Bilateral risk sharing problems have received a lot of attention, and various model settings have been studied since the seminal works of [Borch \(1960b,a, 1962\)](#), [Arrow \(1963\)](#) and [Raviv \(1979\)](#). The contributions range from the way of representing the preferences (roughly speaking either using utility functions as in [Raviv \(1979\)](#), or risk measures as in [Cheung et al. \(2019\)](#)) to the optimization constraints imposed (see for instance [Huang and Yin \(2019\)](#) for a short but insightful presentation of the classical constrained problems). Some authors focus on the characterization of optimal transactions, e.g. [Wang and Wei \(2020\)](#), whereas others enlarge the framework considering several reinsurers ([Asimit and Boonen \(2018\)](#)) or multiple indemnity environments such as [Asimit et al. \(2020\)](#); see in addition the comprehensive handbook of [Albrecher et al. \(2017\)](#) for a deep overview of the contributions.

From a practical point of view, our key contribution lies in the fact that we explicitly exhibit the role of the asymmetry of information in the choice of the type of the transaction, for a given index and level of basis risk.

More precisely, the paper is organized as follows. In Section 3.2, we motivate and present the general form of the two problems. Section 3.3 is devoted to the description of the link between the insurer's risk and the reinsurer's initial exposure. In particular, we provide a convex inequality consisting in a new characterization of the set of counter-monotonic risk reducers, recently introduced in [Cheung et al. \(2014\)](#). In Section 3.4, we give, after a stepwise construction of the solution, the form of the optimal perfect index-based reinsurance contract (in the sense there is no basis risk). We demonstrate that the optimal reinsurance is of stop-loss form, to eventually obtain full index-based reinsurance as solution of the index-based transaction. Section 3.5 is dedicated to the perfect indemnity-based transaction, i.e. without asymmetry of information. We begin by demonstrating a crossing-type result concerning the preferences of the reinsurer, and we eventually provide the form of the best indemnity-based transaction. Section 3.6 is concerned with the asymmetry of information. We first compare the two perfect transactions, ending by highlighting the role of the asymmetry of information. We close the paper with Section 3.7, where we introduce a basis risk in the index-based transaction. As before, we obtain full index-based reinsurance as optimal risk transfer, and we compare this solution with the indemnity-based transaction with asymmetry.



## 3.2 Problem formulation

All random variables discussed in this paper are defined on a common probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , and are assumed to be non-negative and integrable. For a given random variable  $A$ , we denote as  $\mathcal{S}_A$  its support and we write  $A \perp\!\!\!\perp B$  when  $A$  is independent from another random variable  $B$ . Let  $\mathcal{X}$  be the space of all random variables involved in the reinsurance transactions. Furthermore, we assume the underlying probability space is atomless.

### 3.2.1 Motivation

We now develop the practitioner's ideas that motivated this paper: hedging of La Niña risk with El Niño risk, as well as hedging mortality risk with longevity risk.

El Niño and La Niña are opposite phases of what is known as the El Niño-Southern Oscillation (ENSO) cycle. The ENSO cycle is a scientific term that describes the fluctuations in temperature between the ocean and atmosphere in the east-central Equatorial Pacific. According to the National Oceanic and Atmospheric Administration<sup>1</sup>, El Niño usually causes increased rainfall and sometimes destructive flooding in the Southern United States, during the fall through spring. La Niña, however, usually causes drier weather in the South, but the Northwest tends to be colder and wetter than average. Even though El Niño occurs in the Pacific Ocean, it often reduces the number of hurricanes that form in the Atlantic Ocean. Conversely, La Niña events tend to be related to an increase in the number of Atlantic hurricanes. Such negatively correlated events are in practice used as natural hedge. This is why dealing with index-based insurance allows the reinsurer to target (almost) purely negatively correlated risks, and to issue a product free of adverse selection and asymmetry of information. On the other hand, the protection buyer, typically an insurer exposed to a El Niño related event, faces a basis risk that may make the index-based transaction be non-acceptable: the insurer, if she is not enough exposed to the index-based risk, refuses the index-based coverage in favor of a traditional indemnity-based contract. This trade-off is at the basis of our motivation, since we aim at enhancing the role of asymmetry of information and basis risk in the choice of the type of the transaction, taking into account the preferences of both the insurer and the reinsurer.

There is an accumulation of mortality risk in the insurance and reinsurance network, due to the high number of policyholders in the United States who, in their 50's, purchase death insurance when converting a lump sum into a deferred annuity (starting at retirement age). Large reinsurers are typically very exposed to US mortality for ages 50-65. Therefore they are particularly keen on a potential "natural hedge", consisting in accepting longevity risk transfers from pension funds and from their insurers.

---

1. see [Wallace and Vogel \(1994\)](#).

To quantify the preferences of the two participants, we assume that the insurer and the reinsurer measure their situations using  $\text{TVaR}_\alpha$  and  $\text{TVaR}_\beta$ , respectively,  $\alpha, \beta \in (0, 1)$ . The fact we deal with TVaR can be justified as follows. First, it allows for distinguishing the preferences of the insurer ( $\text{TVaR}_\alpha$ ) to the ones of the reinsurer ( $\text{TVaR}_\beta$ ) by setting different values for  $\alpha, \beta \in (0, 1)$ , resulting thus in different levels of prudence. Second, an ordering on the TVaR is equivalent to an ordering in the convex sense, making possible to set a geometrical approach instead of an analytical one; see [Denuit et al. \(2006\)](#) and [Shaked and Shanthikumar \(2007\)](#) for a detailed and exhaustive presentations of stochastic orders. To lighten the paper and make the reading easier, the definition of TVaR and the presentation of convex order are relegated to Appendix 3.8.

We consider the insurer's exposure is represented by the nonnegative random variable  $\tilde{Y}$  such that

$$\tilde{Y} = Y + S,$$

where  $Y$  represents the index-based risk, i.e. the random part that can be modeled by a parametric index, whereas  $S$  stands for the random part that is not taken into account by the index. For example in our illustration,  $Y$  represents the longevity risk or a risk related to El Niño. Assuming all the information related to the index-based risk is concentrated in  $Y$ , we set  $S \perp\!\!\!\perp Y$ . In what follows,  $\mathbb{E}[Y] = \mu$ . Considering the insurer faces a two-component wise risk is not new. It has been widely studied in the literature, usually referred to as background risk, uninsurable risk or random initial wealth; e.g. [Dana and Scarsini \(2007\)](#), [Lu et al. \(2012\)](#), [Lu et al. \(2018\)](#) or [Kihlstrom et al. \(1981\)](#) and [Finkelshtain et al. \(1999\)](#) among others.

On the other hand, we consider a reinsurer who has an initial exposure represented by the nonnegative random variable  $X$ . Taking into account the reinsurer's initial exposure received, as far as we are aware of the literature on optimal reinsurance design, only little attention. From here and subsequently, we assume  $S \perp\!\!\!\perp X$ , i.e. the residual risk of the insurer (the one which is not related to El Niño or longevity in our illustration) is independent from the reinsurer's background risk (her initial exposure to La Niña or to the mortality risk in our illustration). This random variable  $S$  plays the role of a noise between the pure natural risks  $Y$  and  $X$ . Because of the importance of the link between the insurer's index-based risk  $Y$  and the reinsurer's initial exposure  $X$  in our setting, we relegate its presentation to Section 3.3 which is fully dedicated to the description of the correlation structure between these two risks. For the moment, we only focus on the presentation of the risk transfer solutions available on the market.

We consider the reinsurance market is able to provide two types of transactions, namely indemnity-based transaction or index-based transaction. The first one is based on the full risk of the insurer  $\tilde{Y}$  whereas the index-based transaction only takes into account its index-based risk  $Y$ . Whatever the type

of the transaction, the set of admissible contracts denoted as  $\mathcal{I}$  is defined as

$$\mathcal{I} = \{I(\cdot) \mid I \text{ is nonnegative, non-decreasing and } 1 - \text{Lipschitz}\}.$$

An element of  $\mathcal{I}$  is called a ceded loss function. A technical by-product is that every ceded loss function in  $\mathcal{I}$  is absolutely continuous with  $I(0) = 0$ . The Lipschitz requirement was first introduced by Huberman et al. (1983), and then adopted in various papers, e.g. in Cheung (2010), Chi and Tan (2015) or Lu et al. (2018). It is usually referred to as the incentive compatible constraint and is introduced as a way of reducing *ex-post* moral hazard by requiring that both the protection buyer and the protection seller pay more for a larger realization of the loss.

**Remark 3.2.1.** *In a very recent work, Gerber et al. (2019) consider the expected utility framework and show that when the reinsurance premium is determined according to a zero utility principle (for example, an exponential principle or an expectile<sup>2</sup> principle), it is shown, by means of Borch's Theorem, that the optimal reinsurer's payment is a function of the total claim amount and that this function satisfies the so-called 1-Lipschitz condition. Consequently, what we and many others impose as hypotheses at the outset is basically theoretically related to optimal risk sharing.*

Convex order requires to deal with quantities having the same expected value. To this extent, when the expectation of the contract is fixed, the set of feasible contracts reduces to

$$\mathcal{I}_\nu = \{I(\cdot) \in \mathcal{I} \mid \mathbb{E}[I(\cdot)] = \nu\}.$$

### 3.2.2 Presentation of the index and the indemnity-based transactions

Whatever the type of the transaction, we assume the insurer seeks to minimize her risk measure  $\text{TVaR}_\alpha$  whereas the reinsurer agrees on selling her a coverage  $I \in \mathcal{I}$  against an amount  $\pi$  if and only if her final exposure is not deteriorated. In the index-based case, the problem can be stated as

$$\begin{cases} \inf_{I \in \mathcal{I}} \text{TVaR}_\alpha(S + Y - I(Y) + \pi) \\ \text{s.t. } \text{TVaR}_\beta(X + I(Y) - \pi) \leq \text{TVaR}_\beta(X), \end{cases} \quad (\mathcal{P}_1)$$

whereas the problem in the indemnity-based transaction is

$$\begin{cases} \inf_{I \in \mathcal{I}} \text{TVaR}_\alpha(S + Y - I(Y + S) + \pi) \\ \text{s.t. } \text{TVaR}_\beta(X + I(Y + S) - \pi) \leq \text{TVaR}_\beta(X). \end{cases} \quad (\bar{\mathcal{P}}_1)$$

Note that the difference between Problems  $(\mathcal{P}_1)$  and  $(\bar{\mathcal{P}}_1)$  is the risk taken into account in the coverage  $I$ . The index-based transaction (Problem  $(\mathcal{P}_1)$ ) provides a coverage only on the index-based risk  $Y$

---

2. The reader is referred to Bellini et al. (2014) for a clear presentation of expectiles and to Bellini and Di Bernardino (2017) for an application in risk management.

whereas the indemnity-based transaction (Problem  $(\bar{\mathcal{P}}_1)$ ) depends on the full risk  $Y + S$ . In our illustration, in the index-based case, the reinsurer benefits from the pure negative correlation between her exposure to La Niña (respectively, mortality risk) and the insurer's exposure to the El Niño related event (respectively, longevity risk). In the indemnity-based transaction, this negative correlation is diluted by the presence of  $S$ .

Next, note that for the moment there is no basis risk since the coverage in the index-based transaction is backed to the exact index-based risk of the insurer. In the same spirit, the indemnity-based transaction does not suffer from asymmetry of information since the coverage is based on the exact total risk of the insurer. To this extent, Problems  $(\mathcal{P}_1)$  and  $(\bar{\mathcal{P}}_1)$  correspond to perfect transactions and stand for the references in the remaining of the paper. Later, we will insert an asymmetry of information (Section 3.6) and a basis risk in Section 3.7, to eventually highlight the role of each of these drawbacks in the choice of the type of the transaction.

Next, the translation invariance of TVaR together with the convexity of Problems  $(\mathcal{P}_1)$  and  $(\bar{\mathcal{P}}_1)$  allow us to identify the pricing rule, given by

$$\pi(I(\cdot)) = \text{TVaR}_\beta(X + I(\cdot)) - \text{TVaR}_\beta(X).$$

The strength of our model partially relies on the fact neither the insurer nor the reinsurer is risk neutral. As a result, the price of a coverage  $I$  only depends on the reinsurer's risk measure, avoiding the unrealistic assumption of a linear pricing. Consequently, we obtain the following reduced form

$$\inf_{I \in \mathcal{I}} \{ \text{TVaR}_\alpha(S + Y - I(Y)) + \text{TVaR}_\beta(X + I(Y)) \}, \quad (\mathcal{P}_2)$$

in the index-based case whereas the indemnity-based problem is reduced to

$$\inf_{I \in \mathcal{I}} \{ \text{TVaR}_\alpha(S + Y - I(Y + S)) + \text{TVaR}_\beta(X + I(Y + S)) \}. \quad (\bar{\mathcal{P}}_2)$$

Finally, we do not take into account a price constraint in the formulation of the problems. To this extent, we expect, at least in the perfect transactions, that the insurer will prefer the indemnity-based one, since it provides her a perfect coverage on her loss. In addition, dealing with non-budget-constrained problem allows us to focus only on the role of asymmetry of information and basis risk. If, for instance, we observe a shift in the choice of the type of transaction when we add asymmetry of information, then this shift is only due to this asymmetry and not to a price constraint.

### 3.3 An alternative characterization of the set of counter-monotonic risk reducers

This Section is devoted to the description of the link between the insurer's index-based risk  $Y$  and the reinsurer's initial background risk  $X$ .

Now we are aware that mortality and longevity or the alternation of El Niño and La Niña cycles naturally lead to risks moving in opposite directions so that dealing with index-based insurance allows the reinsurer to target (almost) purely negatively correlated risks, and to issue a product free of adverse selection and asymmetry of information. The fact the reinsurer can use index-based risks to hedge against her initial exposure means that she agrees on taking the insurer's index-based risk.

We are going to demonstrate that this case is only possible if we consider a "good" correlation structure between the reinsurer's initial exposure  $X$  and the parametric risk  $Y$  the direct insurer faces.

#### 3.3.1 From opposite to common interests

To better understand the role of the initial exposure of the reinsurer, we first come back to the usual paradigm stating that the insurer and the reinsurer have opposite interests on the bearing of the risk. Before we proceed further, we recall that a random variable  $A$  precedes another random variable  $B$  in the convex order, denoted as  $A \leq_{cx} B$ , if and only if  $\mathbb{E}[\phi(A)] \leq \mathbb{E}[\phi(B)]$  for all convex function  $\phi$ . In addition to this definition, the convex order is directly related to TVaR in the sense that  $A \leq_{cx} B$  if and only if  $\text{TVaR}_p(A) \leq \text{TVaR}_p(B)$  holds for all  $p \in [0, 1)$ ; see Appendix 3.8 for a deeper presentation of the convex order. Also, we draw the attention on the Lemma 4.2.2 given in Appendix 3.8, which stands for a useful tool that allows for a clear geometrical comparison of reinsurance contracts.

Now, let us consider that the reinsurer has no exposure (i.e.  $X = 0$ ) and let  $I_1$  and  $I_2$  be two elements of  $\mathcal{I}_\nu$  such that  $I_1$  up-crosses  $I_2$  as in Lemma 4.2.2. Then  $I_1(Y) \leq_{cx} I_2(Y)$ .

On the one hand

$$\text{TVaR}_\alpha(Y - I_2(Y)) \leq \text{TVaR}_\alpha(Y - I_1(Y)),$$

i.e. the insurer is keen on transferring her variability whereas, on the other hand,

$$\text{TVaR}_\beta(I_1(Y)) \leq \text{TVaR}_\beta(I_2(Y)), \tag{3.1}$$

the reinsurance a priori does not agree on receiving the variability of the insurer. In a nutshell, the insurer and the reinsurer have conflicting interests on the bearing of the risk.

The added value of the paper partially lies on the fact that we consider the reinsurer is the one who experiences an initial exposure, contrary to the literature on background risk already mentioned. By

Equation (3.1), as long as the reinsurer faces only the risk the insurer wants to transfer, she can not have an interest in bearing the insurer's risk. In addition, in reality, the reinsurer does not have such a binary choice (either no exposure or an exposure on the insurer's risk) since it is more likely that the reinsurer already has initial exposure on several lines of business, justifying the formulation of Problems  $(\mathcal{P}_1)$  and  $(\bar{\mathcal{P}}_1)$ .

First, assume  $X$  is independent from  $Y$ , then  $I_1(Y) \leq_{cx} I_2(Y) \Rightarrow X + I_1(Y) \leq_{cx} X + I_2(Y)$  for  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}_\nu$ . In other words, the independence between the initial exposure  $X$  and the additional risk transferred by the insurer does not modify the fact the insurer and the reinsurer have conflicting interests on the bearing of the risk. Obviously, the initial exposure  $X$  is not necessarily independent from the additional risk  $Y$ . From then on, the dependence structure between  $(Y, X)$  plays a key role in the determination of the optimal reinsurance contract. We point out that [Cai and Wei \(2012\)](#) (see also [Lu et al. \(2012\)](#)) show that under a particular<sup>3</sup> positive dependence structure, the insurer and the reinsurer still have conflicting interests.

The purpose of the sequel of this Section is to understand under which condition the reinsurer could be interested in bearing the insurer's risk. In fact, since we aim at modeling the diversification effect of the index-based exposures, we would like to consider a framework where the reinsurer could, for instance in our illustration, use the insurer's exposure related to El Niño (respectively, to longevity risk) to hedge against her exposure to La Niña (respectively, to mortality risk). As a first step, we behave as if the reinsurer has a choice between two insurers, one being exposed to a risk  $Y_1$  the other being exposed to a risk  $Y_2$  where  $Y_1$  is a perfect manifestation of the natural risk (related to El Niño or to longevity) whereas  $Y_2$  is not totally related to it. To do so, we use the correlation order to show that the more negatively dependent the initial position of the reinsurer and the insurer's index-based risk, the lower the risk measure of the reinsurer. Although the correlation order is presented in Appendix 3.8, we recall its definition for the sake of clarity.

**Definition of correlation order.** (*Denuit et al. (2006)*)

Consider two random couples  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  and  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$  in  $\mathcal{R}(F_1, F_2)$ . If

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) \leq F_{\mathbf{Y}}(x_1, x_2), \text{ for all } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,$$

then  $\mathbf{X}$  is said to be smaller than  $\mathbf{Y}$  in the correlation order (denoted by  $\mathbf{X} \leq_{CORR} \mathbf{Y}$ ).

As announced, the next proposition illustrates the role of the dependence between the initial exposure of the reinsurer and the risk borne by the insurer on the reinsurer's preferences.

---

3. namely when  $X$  is stochastically increasing in  $Y$ ; see [Denuit et al. \(2006\)](#), [Müller and Stoyan \(2002\)](#) for a full presentation of notions of dependence between two random variables.

**Proposition 3.3.1.** *Let  $\Lambda = (X, Y_1), \Theta = (X, Y_2) \in \mathcal{R}(F_1, F_2)$ . If  $\Lambda \leq_{CORR} \Theta$  then*

$$TVaR_\beta(X + I(Y_1)) \leq TVaR_\beta(X + I(Y_2)), \quad \forall I \in \mathcal{I}.$$

*Proof.* Since  $\Lambda \leq_{CORR} \Theta$ , and  $I \in \mathcal{I}$  is in particular non-decreasing, we have  $(I(Y_1), X) \leq_{CORR} (I(Y_2), X)$ . In a second step,  $X + I(Y_1) \leq_{cx} X + I(Y_2)$  in virtue of Proposition 3.8.1.  $\square$

From Proposition 3.3.1, we can see the correlation between the reinsurer's exposure to El Niño and the insurer's index-based risk drives the ordering of the reinsurer's TVaR. Combined with the result of Cai and Wei (2012), Proposition 3.3.1 indicates that if there is a candidate so that the reinsurer and the insurer have common interests, then the initial exposure and the risk borne by the insurer have to be negatively correlated. As it is pointed out in Cheung et al. (2014), "if one wants to reduce the risk of a position by merging it with an additional asset, the first property that comes to mind is that this additional asset and the original position should move in different directions".

### 3.3.2 On the pure negative correlation between $X$ and $Y$

This subsection provides the full characterization of the link between the reinsurer's initial background risk and the insurer's index-based risk. Saying that the reinsurer and the insurer have common interests on the bearing of the risk means, for instance, that a stop-loss is cheaper than the corresponding (in the sense of equality of the expectations) quota-share. Formally, we introduce the following set:

$$\mathcal{D}(X) = \{Y \mid X + Y \leq_{cx} X + Z \quad \forall Z \leq_{cx} Y\}. \quad (3.2)$$

The set  $\mathcal{D}(X)$  encompasses all the positions  $Y$  such that the merged position  $X + Y$  is preferred to any other position  $X + Z$  although  $Z$  is less variable than  $Y$ . Theorem 3.3.2 below stands for one of the main results of the paper since we provide a new characterization of the set  $H(X) = \{Y \mid (Y, X + Y) \text{ is counter-monotonic}\}$  introduced in Cheung et al. (2014). Before we proceed further into the mathematical presentation of the concept, let us stop on the genesis of it, following a way paved by Cheung et al. (2014) and He et al. (2016) about the concept of risk reducers defined as follows.

**Definition 3.3.1.** (Cheung et al. (2014)) *For a given integrable random variable  $X$ , a random variable  $Y$  is said to be a risk reducer for  $X$ , denoted by  $Y \in R(X)$ , if*

$$X + Y \leq_{cx} X + \mathbb{E}[Y].$$

Motivated by the idea that a random addition can reduce the risk of a given risky position, both of the papers are dedicated to the description of the set  $R(X)$ . Cheung et al. (2014) deal with counter-monotonic risk reducers, i.e. with random variables  $Y \in R(X)$  such that  $(Y, X)$  is counter-monotonic.

To this extent, they introduced the set  $H(X) = \{Y \mid (Y, X + Y) \text{ is counter-monotonic}\}$  and show on the one hand that any element of  $H(X)$  is a counter-monotonic risk reducer for  $X$  and on the other hand that  $Y \in H(X)$  if and only if there exists a non-decreasing 1-Lipschitz function  $h$  such that  $Y = -h(X)$ . Then the concept is enlarged by He et al. (2016) where a structural characterization of the set  $R(X)$  is given. In addition, in the particular case where  $(X, X + Y)$  is comonotonic, they show that fully dependent risk reducers (in the sense there exists a measurable function  $w$  such that  $Y = w(X)$ ) are not necessarily counter-monotonic with  $X$ .

In the literature, some papers deal with the dual problem, i.e. characterizing the set of random variables  $Y$  such that  $X + \mathbb{E}[Y] \leq_{cx} X + Y$ . They are often related to study on risk aversion with two risks (Finkelshtain et al. (1999)), initial random wealth (Huang et al. (2013)) or background risk (Franke et al. (2006, 2011)); see also Denuit and Mesfioui (2017) for an actuarial oriented reference.

Based on the insight sensed in Proposition 3.3.1, we first demonstrate the following result.

**Lemma 3.3.1.** *If  $Y \in \mathcal{D}(X)$  then  $(Y, X)$  is counter-monotonic.*

*Proof.* Let  $Y^*$  be a random variable identically distributed as  $Y$  and counter-monotonic with  $X$ . By Lemma (3.8.3),  $X + Y^* \leq_{cx} X + Y$ . On the other hand, since  $Y^* \leq_{cx} Y$ , then  $X + Y \leq_{cx} X + Y^*$  by hypothesis. By Theorem 1 of Cheung and Lo (2015), a counter-monotonic random vector is characterized by the minimality of the sum of its components with respect to convex order, i.e.  $(Y, X)$  is counter-monotonic.  $\square$

Although the counter-monotonicity was expected to reduce the variability of the position  $X + Y$ , it is not a sufficient condition for  $Y$  to be an element of  $\mathcal{D}(X)$ . In fact, assume  $X$  takes values in  $(0, m)$  and let  $Y = 1.1(m - X)$  and  $Z = m - X + 0.1\mathbb{E}[(m - X)]$ . Then  $Z \leq_{cx} Y$ . However,  $X + Y = -0.1X + 1.1m$  and  $X + Z = -0.1\mathbb{E}[X] + 1.1m$ , yielding  $X + Z \leq_{cx} X + Y$  and  $Y$  is thus not an element of the set  $\mathcal{D}(X)$ .

From Cheung et al. (2014), the condition  $(Y, X + Y)$  is counter-monotonic implies the counter-monotonicity of  $(Y, X)$ : an element of the set  $H(X)$  satisfies the necessary condition and is hence a potential candidate to be in  $\mathcal{D}(X)$ . Based on this comment, we are now ready to express the main technical result of this paper.

**Theorem 3.3.2.**

$$Y \in H(X) \iff Y \in \mathcal{D}(X). \tag{3.3}$$



*Proof.* " $\Rightarrow$ " Let  $Y \in H(X)$ . Then, for all  $Z \leq_{cx} Y$  and all  $\alpha \in [0, 1]$ , we have,

$$\begin{aligned} TVaR_\alpha(X + Y) &= TVaR_\alpha(X) - TVaR_\alpha(-Y) \\ &\leq TVaR_\alpha(X) - TVaR_\alpha(-Z) \\ &\leq TVaR_\alpha(X + Z) + TVaR_\alpha(-Z) - TVaR_\alpha(-Z) \\ &= TVaR_\alpha(X + Z), \end{aligned}$$

yielding  $X + Y \leq_{cx} X + Z$ .

□

" $\Leftarrow$ " The sketch of the proof is largely based on the one of Theorem 2 of [Cheung et al. \(2014\)](#). However, the point of view adopted here to characterize the set  $H(X)$  is radically different.

Let  $Y \in \mathcal{D}(X)$ . From the Lemma 3.3.1,  $(X, Y)$  is counter-monotonic. In this case, there is an equivalence between  $(Y, X + Y)$  is counter-monotonic and the function  $\phi(\cdot) = F_X^{-1}(\cdot) - F_{-Y}^{-1}(\cdot)$  is non-decreasing; see Lemma 5 of [Cheung et al. \(2014\)](#).

The proof relies on a contradiction. We first consider that  $Y \notin H(X)$  by assuming  $\phi$  defined above is not non-decreasing and we construct a random variable  $Z^*$  (Step 1) verifying  $Z^* \leq_{cx} Y$  (Step 2). The third step consists in showing that  $X + Y \not\leq_{cx} X + Z^*$ .

- Step 1: *constructing an appropriate random variable  $Z^*$* . Assume by contradiction that  $\phi$  is not non-decreasing on  $(0, 1)$ . Then, there exists  $\alpha, \beta \in (0, 1)$  with  $\alpha < \beta$  such that

$$F_{-Y}^{-1}(\beta) - F_{-Y}^{-1}(\alpha) > F_X^{-1}(\beta) - F_X^{-1}(\alpha).$$

Since  $F_{-Y+c}^{-1} = F_{-Y}^{-1} + c$  for any constant  $c$ , we may assume without loss of generality that  $F_{-Y}^{-1}$  has been shifted either upward or downward by a suitable amount such that

$$F_{-Y}^{-1}(\beta) > F_X^{-1}(\beta) \quad \text{and} \quad F_X^{-1}(\alpha) > F_{-Y}^{-1}(\alpha).$$

Now define a function  $\tilde{Z}$  on  $(0, 1)$  such by

$$\tilde{Z}(u) = \begin{cases} F_X^{-1}(u) & \text{if } u \in [\alpha - \varepsilon_1, \alpha] \cup [\beta - \varepsilon_2, \beta], \\ F_{-Y}^{-1}(u) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$  are positive numbers chosen in such a way that

$$\begin{aligned} F_X^{-1}(u) &> F_{-Y}^{-1}(u) \quad \text{for } u \in J_1 = [\alpha - \varepsilon_1, \alpha], \\ F_X^{-1}(u) &< F_{-Y}^{-1}(u) \quad \text{for } u \in J_2 = [\beta - \varepsilon_2, \beta], \\ \mathbb{E}[-Y] &= \mathbb{E}[-Z^*], \end{aligned}$$

in which  $Z^*$  is the random variable defined as  $Z^* = -\tilde{Z}(U)$ , where  $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$ , which exists due to the atomless assumption on our underlying probability space. The existence of such  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$  is guaranteed by the left continuity of  $F_{-Y}^{-1}$  and  $F_X^{-1}$ . The resulting function  $\tilde{Z}$  is illustrated by the bold line in Figure 31.

- Step 2: *showing that  $Z^* \leq_{cx} Y$ .* For  $t \in (-\infty, F_X^{-1}(\beta - \varepsilon_2)] = I_1$ ,

$$\{u \in (0, 1) | F_{-Y}^{-1}(u) \leq t\} \supset \{u \in (0, 1) | \tilde{Z}(u) \leq t\}.$$

For  $t \in [F_X^{-1}(\beta - \varepsilon_2), +\infty) = I_2$ ,

$$\{u \in (0, 1) | F_{-Y}^{-1}(u) \leq t\} \subset \{u \in (0, 1) | \tilde{Z}(u) \leq t\}.$$

As a result,

$$F_{\tilde{Z}(U)} \begin{cases} \leq F_{-Y} & \text{for } t \in I_1, \\ \geq F_{-Y} & \text{for } t \in I_2. \end{cases}$$

So  $F_{\tilde{Z}(U)}$  and  $F_{-Y}$  cross once and since  $\mathbb{E}[-Y] = \mathbb{E}[\tilde{Z}(U)]$  by construction, we conclude that  $\tilde{Z}(U) \leq_{cx} -Y$ . From Theorem 3.A.12 in [Shaked and Shanthikumar \(2007\)](#), we eventually obtain  $Z^* = -\tilde{Z}(U) \leq_{cx} Y$ .

- Step 3: *showing  $X + Y \not\leq_{cx} X + Z^*$ .* Note that  $X + Y$  and  $X + Z^*$  differ only when  $U \in J_1 \cup J_2$ , in which case  $X + Z^* = 0$  but  $X + Y$  never vanishes. Therefore, we have

$$\mathbb{E}[|X + Y|] - \mathbb{E}[|X + Z^*|] = \int_{J_1 \cup J_2} |F_X^{-1}(t) - F_{-Y}^{-1}(t)| dt > 0,$$

which implies that  $X + Y \not\leq_{cx} X + Z^*$ .

In conclusion, we have constructed a random variable  $Z^*$  such that  $Z^* \leq Y$  but  $X + Y \not\leq_{cx} X + Z^*$ :  $Y \notin \mathcal{D}(X)$  contradictin our hypothesis. Hence  $\phi$  must be non-decreasing on  $(0, 1)$ , or equivalently,  $(X + Y, Y)$  must be counter-monotonic. We have established that  $Y \in \mathcal{D}(X) \Rightarrow Y \in H(X)$ .

□

We eventually have

$$Y \in H(X) \iff Y \in \mathcal{D}(X) \iff Y = -h(X), \quad (3.4)$$

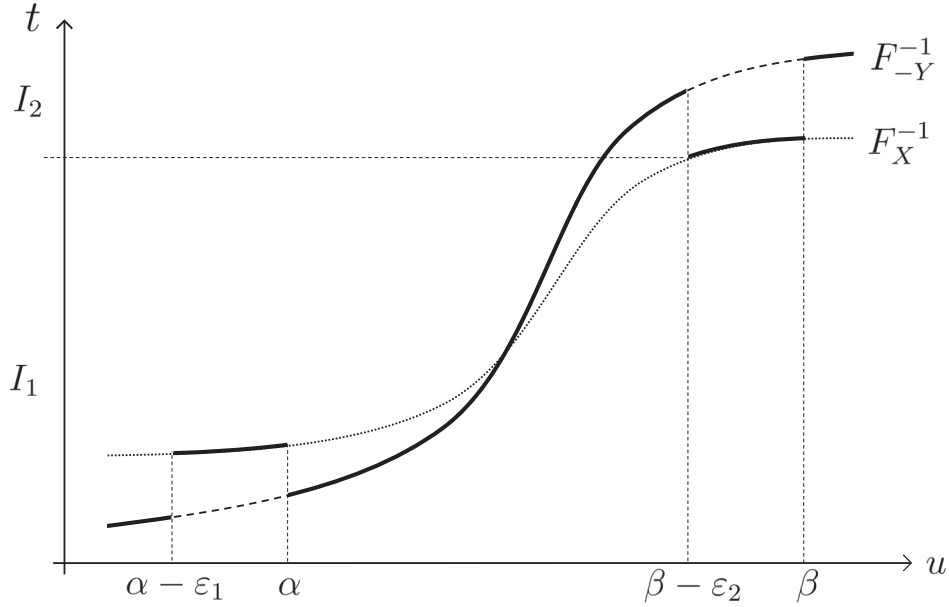


Figure 31 – Function  $\tilde{Z}$  (bold solid line) and the corresponding shapes of  $F_{-Y}^{-1}$  (dashed line) and  $F_X^{-1}$  (dotted line).

$h$  being a non-decreasing and 1-Lipschitz function.

Taking  $Y \in H(X)$  corresponds to a pure negative correlation between the reinsurer's and the insurer's initial exposures. Coming back to the motivation of the paper, this is not always the case in practice. ENSO phenomenon strongly modulates the occurrence and severity of wind related claims in North and South America in opposite manners. There is also a strong negative correlation between mortality and longevity risks which is recognized in the standard formula of Solvency II. However, those negative correlations do not perfectly correspond to counter-monotonicity, which could bring an additional basis risk. For example, Swiss Re developed the so-called Kortis bond to manage this residual basis risk in the case where mortality risk in the US for ages 50 to 65 is hedged with longevity risk of UK retirees. For the sake of simplicity, given that those risks are strongly negatively correlated, we ignore the potential residual basis risk and assume pure negative correlation between  $X$  and  $Y$ .

In addition, the fact that the function  $h$  is 1-Lipschitz means that the event related to the insurer's initial exposure is smaller than the largest event related to the reinsurer's exposure. This is the case for the ENSO illustration, where the largest events occur on the East Coast of the USA. Regarding longevity risk, there is potentially a huge risk transfer market but in practice, only a few transactions

have occurred so far.

Therefore, taking  $Y \in H(X)$  stands for a reasonable first approximation.

As we will see in the remaining of the paper, the new characterization of the set  $H(X)$  stands for a useful tool. In fact, when  $Y \in H(X)$ , the merged position  $X + I(Y)$ ,  $I$  being an element of  $\mathcal{I}$ , can be rewritten as  $X + I(-h(X))$ : it only depends on  $X$ . Consequently, the initial difficulty related to the sum of two dependent random variable is weakened. Furthermore, we do not impose any condition on the size of  $Y$  with respect to the one of  $S$ , i.e. the parametric risk  $Y$  of the insurer can possibly represent a little proportion of her overall exposure. Based on this discussion, we assume, unless otherwise stated, that  $Y \in H(X)$  in the remaining of the paper.

The problem is now explicitly described, and we shift our attention to the initial motivation of the paper: the investigation of the role of the asymmetry of information in the indemnity-based transaction and the one of basis risk in the index-based transaction on the choice of the type of the transaction. The remaining tasks consist in solving the Problems  $(\mathcal{P}_2)$  and  $(\bar{\mathcal{P}}_2)$  to provide the references of the index-based (Section 3.4) and indemnity-based transactions (Section 3.5). Then, we insert an asymmetry of information in the indemnity-based transaction and we examine how the asymmetry modifies the preferences between the perfect transactions (Section 3.6). Finally, we insert a basis risk in the index-based transaction in Section 3.7. The added value of the paper relies in the fact we explicitly demonstrate that, for a given quality of the index-based transaction, the intensity of the asymmetry of information between the insurer and the reinsurer drives the choice on the type of the transaction.

### 3.4 Perfect index-based transaction

We first deal with the perfect index-based transaction in the sense we assume the reinsurer provides a coverage on the exact parametric risk of the insurer. In our illustration, this could correspond to the case where the insurer is exposed in an area particularly sensitive to El Niño (respectively, to longevity risk) so that the reinsurer can use the insurer's index-based risk  $Y$  to naturally hedge against her La Niña exposure (respectively, to mortality risk).

As a reminder, the optimization problem in the perfect index-based case is given by Problem  $(\mathcal{P}_2)$ , namely

$$\inf_{I \in \mathcal{I}} \{\text{TVaR}_\alpha(S + Y - I(Y)) + \text{TVaR}_\beta(X + I(Y))\}. \quad (\mathcal{P}_2)$$

Technically, we demonstrate that when  $Y \in H(X)$ , the index-based transaction allows for identifying an optimal subset in the sense we manage to reduce the dimension of the problem from infinite ( $\forall I \in \mathcal{I}$ ) to one to eventually obtain the form of the general solution of Problem  $(\mathcal{P}_2)$ .

Before we proceed further, we first obtain two consequences (Propositions 3.4.1 and 3.4.2) related to

the assumption that  $Y \in H(X)$ . Based on these propositions, we then derive an intermediary result (Proposition 3.4.3) that is at the basis of the derivation of the solution of Problem ( $\mathcal{P}_2$ ).

### 3.4.1 An intermediary result

First of all, we fix the expectation and we hence deal with the set  $\mathcal{I}_\nu$ . We use the characterization of the set  $H(X)$  given by Theorem 3.3.2 to deduce that when  $Y \in H(X)$ , the reinsurer is keen on accepting the convexity of the insurer. To do so, we begin by demonstrating that when the reinsurance contract  $I$  is an element of  $\mathcal{I}$ , then  $I(Y)$  is still a counter-monotonic risk reducer for  $X$ .

**Proposition 3.4.1.** *Let  $Y \in H(X)$  and  $I \in \mathcal{I}$ . Then  $I(Y) \in H(X)$ .*

*Proof.* By Equation (3.4),  $I(Y) = I(-h(X)) = -(-I(-h(X)))$ . Consequently, we only need to verify that  $v : x \mapsto -I(-h(x))$  is non-decreasing and 1-Lipschitz.

Let  $0 \leq x \leq y$ . We directly obtain using the fact both  $I$  and  $h$  are non-decreasing functions that  $v(x) \leq v(y)$ . Next,

$$v(y) - v(x) \leq h(y) - h(x) \leq y - x.$$

As a result,  $I(Y) = -v(X)$  where  $v$  is non-decreasing and 1-Lipschitz, i.e.  $I(Y) \in H(X)$ . □

The following proposition states that when the risk initially borne by the insurer is a counter-monotonic risk reducer for  $X$ , the reinsurer wants the coverage to be as convex as possible.

**Proposition 3.4.2.** *Let  $Y \in H(X)$  and  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}_\nu$ . If  $I_1(Y) \leq_{cx} I_2(Y)$ , then*

$$X + I_2(Y) \leq_{cx} X + I_1(Y).$$

*Proof.* The proof combines Proposition 3.4.1 with Theorem 3.3.2. □

Proposition 3.4.2 echoes the discussion previously held concerning the common interests. When the insurer's index-based risk is purely negatively correlated to the reinsurer's initial background risk, the reinsurer wants the contract to contain as insurer's index-based variability as possible, to benefit from the natural diversification.

Now let us focus on the insurer's side. Theorem 3.3.2 of [Van Heerwaarden et al. \(1989\)](#) states that the stop-loss verifies  $Y - (Y - d)_+ \leq_{cx} Y - I(Y)$  for all  $I \in \mathcal{I}_\nu$  where  $d$  is such that  $\mathbb{E}[(Y - d)_+] = \nu$ . By independence between  $S$  and  $Y$ ,  $S + Y - (Y - d)_+ \leq_{cx} S + Y - I(Y)$  still holds for all  $I \in \mathcal{I}_\nu$ . As a result, the insurer wants the coverage  $I$  to be the most convex for a given expectation. Note that for a given  $\nu \geq 0$ ,  $I(y) = (y - d)_+$  with  $d$  such that  $\mathbb{E}[(Y - d)_+] = \nu$  is the supremum convex in  $\mathcal{I}_\nu$ . As a result, the stop-loss minimizes the situation of the reinsurer in virtue of Proposition 3.4.2 and it is

at the same time the most efficient form of reinsurance from the insurer's point of view. Therefore we naturally obtain the following proposition.

Let  $I \in \mathcal{I}_\nu$  and define

$$\mathcal{E}_{I,\nu} := \text{TVaR}_\alpha(S + Y - I(Y)) + \text{TVaR}_\beta(X + I(Y)),$$

and

$$\mathcal{E}_{SL,\nu} := \text{TVaR}_\alpha(S + Y \wedge d) + \text{TVaR}_\beta(X + (Y - d)_+),$$

where  $d$  is such that  $\mathbb{E}[(Y - d)_+] = \nu$ .

**Proposition 3.4.3.** *Let  $Y \in H(X)$  and  $0 \leq \nu \leq \mu$ . Let  $d$  be such that  $\mathbb{E}[(Y - d)_+] = \nu$ . Then,*

$$\mathcal{E}_{SL,\nu} \leq \mathcal{E}_{I,\nu}, \quad \forall I \in \mathcal{I}_\nu.$$

*Proof.* The proof is immediate combining Theorem 3.3.2 of [Van Heerwaarden et al. \(1989\)](#) for the insurer's side and Proposition 3.4.2 for the reinsurer's side.  $\square$

This preliminary result, although it yields the best coverage for a fixed expectation, does not stand for the solution of Problem  $(\mathcal{P}_2)$ . However, this result is at the basis of the general solution of Problem  $(\mathcal{P}_2)$ , since the next step consists in linking the expectation to the price.

### 3.4.2 An optimal subset

We recall that the price in Problem  $(\mathcal{P}_2)$  is given by  $\pi(I(Y)) = \text{TVaR}_\beta(X + I(Y)) - \text{TVaR}_\beta(X)$ . The goal of the Section is to work with a fixed price, instead of a fixed expectation. To this extent, let  $\pi^* \geq 0$  and define the set of coverages in  $\mathcal{I}$  with price  $\pi^*$ , namely

$$\mathcal{I}^* = \{I \in \mathcal{I} \mid \pi(I(Y)) = \pi^*\}.$$

Next, for  $I \in \mathcal{I}^*$ , let

$$\mathcal{E}_I^* := \text{TVaR}_\alpha(S + Y - I(Y)) + \text{TVaR}_\beta(X + I(Y)),$$

and

$$\mathcal{E}_{SL}^* := \text{TVaR}_\alpha(S + Y \wedge d) + \text{TVaR}_\beta(X + (Y - d)_+),$$

where  $d$  is such that  $\pi((Y - d)_+) = \pi^*$ . We are able to reduce the dimension of Problem  $(\mathcal{P}_2)$  from infinite to one.

**Theorem 3.4.1.** *Let  $Y \in H(X)$  and  $\pi^* \geq 0$ . Then*

$$\mathcal{E}_{SL}^* \leq \mathcal{E}_I^*, \quad \forall I \in \mathcal{I}^*.$$

*Proof.* We already know from Proposition 3.4.3 that for a given expectation, the stop-loss is the optimal form of reinsurance. The agenda of the proof is hence to link the expectation to the price. First, note that  $d \mapsto \text{TVaR}_\beta(X + (Y - d)_+)$  is decreasing, i.e.  $\nu \mapsto \text{TVaR}_\beta(X + (Y - d_\nu)_+)$  is increasing, where  $d_\nu$  is such that  $\mathbb{E}[(Y - d_\nu)_+] = \nu$ . In addition, Proposition 3.4.2 ensures that for a given expectation  $\nu$ ,

$$\text{TVaR}_\beta(X + (Y - d_\nu)_+) \leq \text{TVaR}_\beta(X + I(Y)), \quad \forall I \in \mathcal{I}_\nu.$$

As a result, the situation can be represented schematically as in Figure 32.

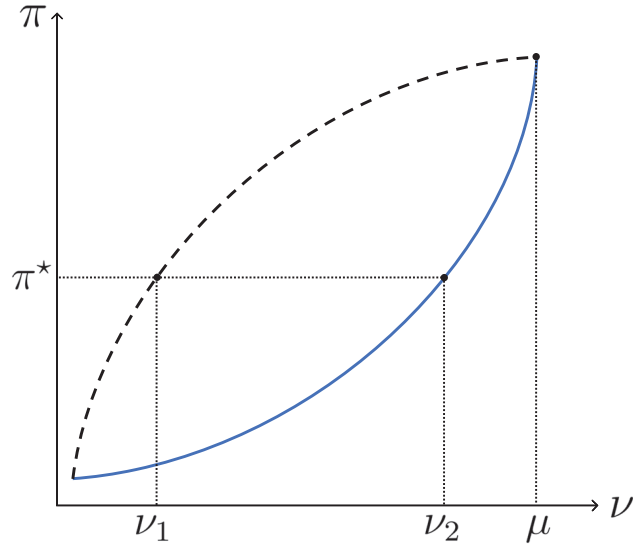


Figure 32 – Prices of the stop-loss (solid blue line) and of a  $I \in \mathcal{I}$  (dashed black line) as functions of the expectation.

First, we choose a price, say  $\pi^*$  represented in Figure 32. This price yields a range of corresponding expectations  $[0, \nu_2]$  where  $\nu_2$  is the expectation of the stop-loss whose price is  $\pi^*$ . The retention of this stop-loss is denoted as  $d_{\nu_2}$ . For a contract  $I \in \mathcal{I}^*$ , denote by  $\nu_1$  its expectation.

Assume  $\nu_1 > \nu_2$ . In this case, there is a stop-loss whose expectation is  $\nu_1$  and with a price lower than  $\pi^*$ . This is not possible since the price is a non-decreasing function of the expectation of the stop-loss. Consequently, there is no contract  $I_{\nu_1}$  such that  $\nu_1 > \nu_2$  at the price  $\pi^*$ . Note that we do not need to show that the price is an increasing function of the expectation for all the coverage  $I \in \mathcal{I}$ . The crucial point is that  $I \in \mathcal{I}^* \Rightarrow \mathbb{E}[I(Y)] \leq \nu_2$ .

Now we wonder if there exists a coverage  $I \in \mathcal{I}^*$  with  $\mathbb{E}[I(Y)] \leq \nu_2$  that makes the insurer better off than with the stop-loss whose expectation is  $\nu_2$  (and retention  $d_{\nu_2}$ , and price  $\pi^*$ ).

We denote by  $\mathcal{I}_{\leq \nu_2}^*$  the set of contracts  $I \in \mathcal{I}^*$  such that  $\mathbb{E}[I(Y)] \leq \nu_2$ . First, let  $\nu_1 \leq \nu_2$  and define

$I_{\nu_1} \in \mathcal{S}_{\leq \nu_2}^*$  as a ceded-loss function verifying  $\mathbb{E}[I_{\nu_1}(Y)] = \nu_1$ . Next, denote as  $I_{SL, \nu_2}$  the ceded loss function of the stop-loss with retention  $d_{\nu_2}$ . Then there are two cases:

- i) Case 1:  $I_{\nu_1}$  and  $I_{SL, \nu_2}$  cross once, i.e. there exists a  $x_0$  such that  $I_{SL, \nu_2}(x) \leq I_{\nu_1}(x)$  for  $x \leq x_0$  and  $I_{SL, \nu_2}(x) \geq I_{\nu_1}(x)$  for  $x \geq x_0$ . In addition,  $\mathbb{E}[I_{SL, \nu_2}(Y)] \geq \mathbb{E}[I_{\nu_1}(Y)]$ . Consequently, we obtain by Theorem 3.3.1 of [Goovaerts et al. \(1990\)](#) that  $Y - I_{SL, \nu_2}(Y) \leq_{icx} Y - I_{\nu_1}(Y)$ .
- ii) Case 2: for all  $x \geq 0$ ,  $I_{\nu_1}(x) \leq I_{SL, \nu_2}(x)$ . Therefore, we directly obtain for  $t \in \mathbb{R}$  that  $(x - I_{SL, \nu_2}(x) - t)_+ \leq (x - I_{\nu_1}(x) - t)_+$  yielding  $Y - I_{SL, \nu_2}(Y) \leq_{icx} Y - I_{\nu_1}(Y)$ .

As a result, for a given price  $\pi^*$ , the insurer prefers the stop-loss whose price is  $\pi^*$ .  $\square$

When the price is fixed, the most efficient form of reinsurance is a stop-loss backed to the index-based risk of the insurer. Recalling that the stop-loss is the form of reinsurance having the higher variance, the reinsurer wants to fully benefit from the diversification effect since the index-based risk of the insurer is perfectly negatively correlated to her initial exposure. On the one hand, the diversification effect makes the stop-loss be the cheapest contract in  $\mathcal{S}_{\nu}$ ; on the other hand, the stop-loss leads to the smaller retention in the convex sense for the insurer's point of view. The proof of Theorem 3.4.1 modifies the point of view, from the expectation to the price.

As a result, Problem  $(\mathcal{P}_2)$  reduces to

$$\min_{d \in \mathcal{S}_Y} \{ \text{TVaR}_{\alpha}(S + (Y \wedge d)) + \text{TVaR}_{\beta}(X + (Y - d)_+) \}. \quad (\mathcal{P}_3)$$

Basically, Theorem 3.4.1 stands for an important milestone in the derivation of the general solution of Problem  $(\mathcal{P}_2)$ : it reduces the dimension from infinite ( $I \in \mathcal{I}$ ) to one, namely the retention of the stop-loss. The last remaining task is thus to derive the optimal value for  $d$ .

### 3.4.3 Optimal reinsurance in the perfect index-based transaction

In this Section, we provide the full solution of Problem  $(\mathcal{P}_3)$ . To do so, we split the proof in three results (namely Proposition 3.4.4, Lemma 3.4.2 and eventually Theorem 3.4.3) to make the reading easier and to better reflect the adopted reasoning.

First of all, we assume the risk measure of the reinsurer is merely  $\text{TVaR}_0 = \mathbb{E}$  whereas we still have  $\alpha \geq 0$ . Even though this case is of little interest in practice since it corresponds to a risk neutral reinsurer, it is however at the basis of the general solution. With the aforementioned risk measures, the problem reduces to

$$\min_{d \in \mathcal{S}_Y} \{ \text{TVaR}_{\alpha}(S + Y \wedge d) + \mathbb{E}[(Y - d)_+] \}. \quad (\mathcal{P}_3 \text{ bis})$$

Note that the initial exposure of the reinsurer is not involved thanks to the linearity of the expectation. We provide the solution of Problem  $(\mathcal{P}_3 \text{ bis})$  in the following proposition.



**Proposition 3.4.4.** *Let  $Y \in H(X)$  and let  $\alpha \geq 0$  and  $\beta = 0$ . Then  $d = 0$  solves Problem ( $\mathcal{P}_3$  bis).*

*Proof.* Consider the problem without the random variable  $S$ . Proposition 2.4.5 from [Denuit et al. \(2006\)](#) gives,

$$\text{TVaR}_\alpha(Y \wedge d + \mathbb{E}[(Y - d)_+]) \geq \mathbb{E}[Y \wedge d] + \mathbb{E}[(Y - d)_+] = \mathbb{E}[Y] = \text{TVaR}_\alpha(\mathbb{E}[Y]). \quad (3.5)$$

Equation (3.5) holds for all  $\alpha \in [0, 1]$ , i.e.  $Y \wedge d + \mathbb{E}[(Y - d)_+] \geq_{cx} \mathbb{E}[Y]$ . Since  $S \perp\!\!\!\perp Y$ , we eventually have that

$$\text{TVaR}_\alpha(S) + \mathbb{E}[Y] \leq \text{TVaR}_\alpha(S + Y \wedge d) + \mathbb{E}[(Y - d)_+]. \quad (3.6)$$

In other words,  $I = \text{Id}$  or equivalently  $d = 0$  leads to the solution of Problem ( $\mathcal{P}_3$  bis).  $\square$

Second, we go back to the case where  $\alpha, \beta > 0$ . We know that stop-loss is the optimal form of reinsurance. As a result, the first natural task is to compare in the convex sense the ceded loss functions of two stop-loss with different retentions. To do so, let us consider two stop-loss contracts with retentions  $d$  and  $\tilde{d}$  such that  $d < \tilde{d}$  and define for  $x \geq 0$

$$A(x) = (x - d)_+ - \int_d^{+\infty} \bar{F}_Y(u) du \quad \text{and} \quad B(x) = (x - \tilde{d})_+ - \int_{\tilde{d}}^{+\infty} \bar{F}_Y(u) du. \quad (3.7)$$

Note that  $A(Y)$  and  $B(Y)$  correspond to centered stop-loss in the sense that  $\mathbb{E}[A(Y)] = \mathbb{E}[B(Y)] = 0$ . Then the following lemma holds true.

**Lemma 3.4.2.** *Let  $A$  and  $B$  be defined as in Equation (3.7). Then  $B(Y) \leq_{cx} A(Y)$ .*

*Proof.* Note that both  $A$  and  $B$  are increasing functions in  $x$ . In addition, for  $0 \leq x \leq d$ ,  $A(x) \leq B(x)$  and for  $x \geq \tilde{d}$ ,

$$A(x) - B(x) = \tilde{d} - d - \int_d^{\tilde{d}} \bar{F}_Y(u) du \geq (\tilde{d} - d)(F_Y(d)) > 0.$$

In particular for  $x_0 = d + \int_d^{\tilde{d}} \bar{F}_Y(u) du \leq \tilde{d}$ ,  $A(x_0) = B(x_0)$ . In other words, there exists a  $x_0$  such that  $A(x) \leq B(x)$  for  $x \leq x_0$  and  $A(x) \geq B(x)$  for  $x \geq x_0$ . In addition,  $\mathbb{E}[A(Y)] = \mathbb{E}[B(Y)]$  and  $A$  and  $B$  are increasing functions. By Lemma 4.2.2, we obtain  $B(Y) \leq_{cx} A(Y)$ .  $\square$

In the stochastic orders terminology, it is said that  $(Y - \tilde{d})_+ \leq_{dil} (Y - d)_+$ ; see [Shaked and Shanthikumar \(2007\)](#).

We are now ready to shift our attention to the third step, i.e. solving Problem ( $\mathcal{P}_3$ ).

**Theorem 3.4.3.** *Full reinsurance ( $d = 0$ ) solves Problem ( $\mathcal{P}_3$ ).*

*Proof.* We note that  $A$  and  $B$  defined by Equation (3.7) are non decreasing and 1-Lipschitz functions. Then in particular  $A(Y) \in H(X)$  by Proposition 3.4.1. By Theorem 3.3.2,

$$B(Y) \leq_{cx} A(Y) \Rightarrow X + A(Y) \leq_{cx} X + B(Y).$$

This leads to

$$\text{TVaR}_\beta(X + (Y - d)_+ - \mathbb{E}[(Y - d)_+]) \leq \text{TVaR}_\beta(X + (Y - \tilde{d})_+ - \mathbb{E}[(Y - \tilde{d})_+]). \quad (3.8)$$

In particular, Equation (3.8) holds for  $d := 0$ , i.e.  $\text{TVaR}_\beta(X + Y - \mathbb{E}[Y]) \leq \text{TVaR}_\beta(X + (Y - \tilde{d})_+ - \mathbb{E}[(Y - \tilde{d})_+])$ .

Combining it to Equation (3.6), we obtain

$$\begin{aligned} & \text{TVaR}_\alpha(S + Y - (Y - d)_+) + \text{TVaR}_\beta(X + (Y - d)_+) \\ &= \text{TVaR}_\alpha(S + Y \wedge d) + \mathbb{E}[(Y - d)_+] + \text{TVaR}_\beta(X + (Y - d)_+) - \mathbb{E}[(Y - d)_+] \\ &\geq \text{TVaR}_\alpha(S) + \mathbb{E}[Y] + \text{TVaR}_\beta(X + (Y - d)_+) - \mathbb{E}[(Y - d)_+] \\ &\geq \text{TVaR}_\alpha(S) + \mathbb{E}[Y] + \text{TVaR}_\beta(X + Y - \mathbb{E}[Y]) \\ &= \text{TVaR}_\alpha(S) + \text{TVaR}_\beta(X + Y). \end{aligned}$$

□

The interpretation of Theorem 3.4.3 naturally follows from the one of Theorem 3.4.1. Recall that  $Y \in H(X)$  means that the insurer's risk is always smaller than the reinsurer's background risk and it stands for a natural hedge against the reinsurer's initial exposure. Consequently, the reinsurer wants to take as much insurer's index-based risk as possible, without running the risk that her merged position becomes too risky. From the insurer's point of view, transferring her full index-based risk is the best she could do since the index-based transaction provides protection only against this type of risk. Moreover, her residual risk is independent from her index-based risk, i.e. she can not use  $S$  to naturally hedge against  $Y$ .

Finally, we have fully solved the optimization problem related to the perfect index-based transaction: full index-based transfer is the solution. The final situation in the perfect index-based transaction is given by

$$\mathcal{E}_{\text{Index}} := \text{TVaR}_\alpha(S) + \text{TVaR}_\beta(X + Y) - \text{TVaR}_\beta(X),$$

for all  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ .

### 3.5 Perfect indemnity-based transaction

The second type of coverage provided by the reinsurer is a traditional one, based on the full exposure of the insurer. In our illustration, traditional reinsurance does not distinguish the El Niño related event or the longevity risk from the overall insurer's risk. As for the index-based transaction, we only consider here the perfect indemnity-based transaction in the sense we do not add any asymmetry of information between the insurer and the reinsurer. To this extent, this setting stands for the indemnity-based reference transaction. As a reminder, the optimization problem in this case corresponds to Problem  $\bar{\mathcal{P}}_2$ , given by

$$\inf_{I \in \mathcal{I}} \{ \text{TVaR}_\alpha(S + Y - I(Y + S)) + \text{TVaR}_\beta(X + I(Y + S)) \}. \quad (\bar{\mathcal{P}}_2)$$

The goal of the Section is then to solve it to obtain the best perfect indemnity-based transaction. Contrary to the index-based transaction, it appears to be quite difficult to obtain an optimal subset. The main reason is that  $S + Y \notin H(X)$  and all the discussion of the Section 3.4 on the index-based transaction does not hold any more. The perfect negative correlation between the reinsurer's exposure to La Niña (respectively, to mortality risk) and the insurer's risk related to El Niño (respectively, to longevity risk) is weakened by the presence of the residual risk  $S$ . If the residual risk is too big, i.e. if the insurer's index-based risk does not weight as much as expected in her overall risk, then the diversification effect is lost and the reinsurer can not use the insurer's risk to hedge against her background risk. On the other hand, we expect that if the residual component remains small in front of the size of the index-based risk, the overall exposure of the insurer should almost be a natural hedge for the reinsurer. To this extent, we guess that if  $S$  is sufficiently small,  $Y + S$  should "almost" be in  $H(X)$ .

#### 3.5.1 Weakening of common interests

We open the study of the indemnity-based transaction by trying to quantify the "almost" part previously discussed. The fact  $Y \in H(X)$  leads to the inequality of Proposition 3.4.2 in the convex sense, i.e. it holds for all the levels  $\beta \in [0, 1]$ , is quite restrictive since the reinsurer is only interested in one particular level. In other words, we would like to lighten this constraint to focus on particular levels instead of all of them. This leads us to the tail convex order, introduced and developed in [Nam et al. \(2011\)](#) and [Cheung and Vanduffel \(2009\)](#).

**Definition 3.5.1.** (*Nam et al. (2011)*) *A random variable  $A$  is said to precede another random variable  $B$  in tail convex order if there exists some  $t^*$  such that*

- i)  $\mathbb{P}(A \geq t^*) > 0$ ,
- ii)  $\mathbb{E}[A] = \mathbb{E}[B]$ ,
- iii)  $\mathbb{E}[(A - t)_+] \leq \mathbb{E}[(B - t)_+]$  for all  $t \geq t^*$ .

In this case, we write  $A \leq_{tcx(t^*)} B$ .

The tail convex order can be interpreted as “ $A$  is less dangerous than  $B$  beyond the threshold  $t^*$ ”. We recall the definition of  $p_0$ -tail value at risk order due to Bello et al. (2020).

**Definition 3.5.2.** (Bello et al. (2020)) Let  $A$  and  $B$  be two random variables and  $p_0 \in [0, 1)$ . Then  $A$  is said to be smaller than  $B$  in the  $p_0$ -tail value at risk order, denoted as  $A \leq_{p_0-tvar} B$  if

$$TVaR_p(A) \leq TVaR_p(B), \quad \forall p > p_0.$$

As expected, there exists an adapted equivalence between tail convex order and  $p_0$ -tail value at risk order, recalled in the next proposition from Bello et al. (2020).

**Proposition 3.5.1.** (Bello et al. (2020)) Let  $A$  and  $B$  be two random variables. Then

$$A \leq_{p_0-tvar} B \iff A \leq_{tcx(t^*)} B, \quad \text{with } t^* = F_A^{-1}(p_0).$$

We naively hoped that the approach consisting in dealing with convex order to identify an optimal subset still holds. Actually, we are going to show that this approach based on (tail) convex ordering is drastically weakened when we relax the assumption that the transferred risk by the insurer to the reinsurer is a counter-monotonic risk reducer for the reinsurer’s exposure. Even though we eventually shift our point of view in subsection 3.5.2 to solve Problem  $(\bar{\mathcal{P}}_2)$ , here we clearly highlight the difficulty faced by our initial approach. Despite the fact we barely provide an optimal subset here, we demonstrate some worthwhile results.

To this extent, we need to require  $S, Y$  and  $X$  to be bounded, restricting again the framework. We denote as  $s_{max} = \max(\mathcal{S}_S)$ , and we define  $x_{max}$  and  $y_{max}$  in obvious notation. Nevertheless, we are now able to adapt the characterization of the set  $H(X)$  to the case of tail convex order. By doing so, we show that when the supremum of the support of  $S$  is not too large, then the reinsurer still prefers the more “tail convex” contract. This is formally stated in the following theorem.

**Theorem 3.5.1.** Assume  $S, Y$  and  $X$  are bounded with  $Y \in H(X)$  and  $S \perp\!\!\!\perp (X, Y)$ . In addition let  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}_\nu$  such that there exists a  $z_0$  verifying  $I_2(z) \leq I_1(z)$ ,  $z \leq z_0$  and  $I_1(z) \leq I_2(z)$ ,  $z \geq z_0$ . Then the following assertions hold:

i) If  $s_{max} \leq z_0$ , then there exists a  $t^*$  such that

$$X + I_2(Y + S) \leq_{tcx(t^*)} X + I_1(Y + S).$$

ii) If  $s_{max} > z_0$ , then there exists a  $\tilde{t}^*$  such that

$$X + I_1(Y + S) \leq_{tcx(\tilde{t}^*)} X + I_2(Y + S).$$

*Proof.* Case *i*):  $s_{max} \leq z_0$ . By (3.4),  $Y = -h(X)$ . For each  $s$ , there exists an  $x_0(s)$  such that

$$-h(x_0(s)) = z_0 - s.$$

Define

$$g_1(x, s) = x + I_1(-h(x) + s) \quad \text{and} \quad g_2(x, s) = x + I_2(-h(x) + s).$$

For a fixed  $s$ ,  $g_1(x, s) \leq g_2(x, s)$  for  $x \leq x_0(s)$  and  $g_1(x, s) \geq g_2(x, s)$  for  $x \geq x_0(s)$ . The function  $s \mapsto x_0(s)$  is a non-decreasing function of  $s$ , yielding  $x_0(s_{max}) \geq x_0(s)$  for all  $s$ . As a result, let  $t^* = g_2(x_0(s_{max}), s_{max})$  and we obtain

$$\mathbb{E}[(g_2(X, S) - t)_+] \leq \mathbb{E}[(g_1(X, S) - t)_+], \quad \forall t \geq t^*.$$

Case *ii*): If  $s_{max} > z_0$ , then for  $s > z_0$ ,

$$g_2(x, s) \geq g_1(x, s) \quad \forall x \in [x_{min}, x_{max}].$$

Define the function  $v : x \mapsto g_2(x, z_0)$ . Since  $v$  is a non-decreasing function of  $x$ ,

$$v(x_{max}) \geq v(x) \quad \forall x \in [x_{min}, x_{max}].$$

As a result, let  $\tilde{t}^* = v(x_{max}) = x_{max} + I_2(y_{min} + z_0)$  and we have

$$\mathbb{E}[(g_2(X, S) - t)_+] \geq \mathbb{E}[(g_1(X, S) - t)_+], \quad \forall t \geq \tilde{t}^*.$$

□

Note that the values of  $t^*$  and  $\tilde{t}^*$  given in the proof are over-estimated. That is why these expressions do not appear in the statements of Theorem 3.5.1, but only their existence. The fact  $S, Y$  and  $X$  must be bounded is, from a practitioner point of view not as restrictive as it appears. For instance, one could consider that we are within a layer of loss. Nevertheless, the consequences of Theorem 3.5.1 are twofold. On the one hand, when two contracts cross beyond  $s_{max}$  and depending on the value of  $t^*$ , the reinsurer prefers the same contract as the insurer. In other words, the insurer and the reinsurer have common interests in this case. Coming back to our illustration, the reinsurer can still use the overall insurer's risk to hedge against her initial exposure to La Niña or to mortality risk. On the other hand, in the situation of case *ii*), depending on the value of  $\tilde{t}^*$  the insurer and the reinsurer do not share the same view concerning the preferred contract: since the reinsurer can not use the insurer's overall exposure as a natural way to hedge against her initial background risk, the reinsurer raises her asked premium to cope with the additional risk she will potentially bear. However, this does not prevent the contract  $I_2$  (the more convex) to be the preferred contract on overall.

The main strength of Theorem 3.5.1 lies in the fact that we are able to identify the form of the optimal reinsurance contract, at least for small expectations. In fact, since we know the stop-loss is up-crossed by all the elements of the set  $\mathcal{I}_\nu$ , then it is the form that yields the smaller value of the reinsurer's risk measure while the retention does not exceed a predefined threshold. This is formally summed-up in the next proposition.

**Proposition 3.5.2.** *Let  $\beta \in [0, 1]$ . If there exists  $d \in ]s_{max}, s_{max} + y_{max}[$  such that  $\beta^* = F_X(h^{-1}(-(d - s_{max}))) \leq \beta$  then*

$$TVaR_\beta(X + (Y + S - d)_+) \leq TVaR_\beta(X + I_\nu(Y + S)), \forall I_\nu \in \mathcal{I}_\nu,$$

where  $\nu = \mathbb{E}[(Y + S - d)_+]$ .

*Proof.* Let  $d > 0$  be the retention of a stop-loss such that  $\mathbb{E}[(S + Y - d)_+] = \nu$ . If  $I_\nu \in \mathcal{I}_\nu$  crosses the stop-loss at  $\tilde{z}_0 > d$ , then there exists a positive value  $\varepsilon$  so that  $\tilde{z}_0 = d + \varepsilon$ . Using the fact  $h$  is non-decreasing and 1-Lipschitz,

$$h^{-1}(-(d - s_{max})) \geq h^{-1}(-(d + \varepsilon - s_{max})) + \varepsilon.$$

Actually,  $t_1 = h^{-1}(-(d - s_{max}))$  is the  $t^*$  given in the proof of Theorem 3.5.1 corresponding to a contract that crosses the stop-loss with retention  $d$  at  $d$  and  $t_2 = h^{-1}(-(d + \varepsilon - s_{max})) + \varepsilon = h^{-1}(-(d + \varepsilon - s_{max})) + \tilde{z}_0 - d$  is the  $t^*$  given in the proof of Theorem 3.5.1 of a contract  $I_\nu$  that crosses the stop-loss with retention  $d$ . Consequently, when  $t_1 \geq t_2$

$$F_{X+(Y+S-d)_+}(t_1) \geq F_{X+(Y+S-d)_+}(t_2).$$

Moreover, we easily obtain that  $F_{X+(Y+S-d)_+}(t_1) = F_X(t_1)$ . If  $F_X(t_1) \leq \beta$ , then by the link between tail convex order and  $p_0$ -tail value at risk order,  $TVaR_\beta(X+(Y+S-d)_+) \leq TVaR_\beta(X+I_\nu(Y+S))$ .  $\square$

Let  $d^*$  be the greatest  $d \in ]s_{max}, s_{max} + y_{max}[$  such that  $\beta^* = F_X(h^{-1}(-(d - s_{max}))) \leq \beta$ , let  $\nu_d$  be the expectation of the stop-loss with retention  $d^*$  and denote its price as  $\pi_{d^*}$ . From Proposition 3.5.2, we can affirm that if  $I \in \mathcal{I}_\nu$ , with  $\nu \leq \nu_d$ , then the stop-loss is cheaper than  $I$ . However, we can not affirm that  $I \in \{I \in \mathcal{I} \mid \pi(I(Y + S)) = \pi_{d^*}\} \Rightarrow \mathbb{E}[I(S + Y)] \leq \nu_2$ . As a result, the stop-loss can not be identified as the optimal form of reinsurance if we do not add a constraint on the expectation. However, even though we are not able to identify an optimal subset, we provide the general solution of Problem  $(\bar{\mathcal{P}}_2)$  in the next subsection.

### 3.5.2 Optimal reinsurance in the perfect indemnity-based transaction

Not being able to isolate an optimal subset does not prevent one from solving Problem  $(\bar{\mathcal{P}}_2)$ . However, it does if one would have been interested in solving a budget constrained equivalent of this Problem. Nevertheless, when  $\alpha \geq \beta$ , we obtain the following result.

**Theorem 3.5.2.** *Let  $\alpha \geq \beta$ . The solution of Problem  $(\bar{\mathcal{P}}_2)$  is full reinsurance.*

*Proof.* We provide two ways of proving the result. Proof *i)* is straightforward whereas Proof *ii)* is heavier and involves inf-convolution.

i) Since  $\alpha \geq \beta$ , we have

$$\begin{aligned} & \text{TVaR}_\alpha((S + Y) - I(S + Y)) + \text{TVaR}_\beta(X + I(S + Y)) \\ & \geq \text{TVaR}_\beta((S + Y) - I(S + Y)) + \text{TVaR}_\beta(X + I(S + Y)) \\ & \geq \text{TVaR}_\beta((S + Y) - I(S + Y) + X + I(S + Y)) = \text{TVaR}_\beta(X + S + Y). \end{aligned}$$

ii) We drop the optimal reinsurance point of view and adopt the risk sharing one. This means that instead of looking for the best contract  $I \in \mathcal{I}$ , we consider the following problem:

$$\inf_{F \in \mathcal{X}} \{ \text{TVaR}_\alpha(Y + S - F) + \text{TVaR}_\beta(X + F) \}. \quad (3.9)$$

Let  $U = Y + S - F$  and  $V = X + Y + S$ , then

$$\inf_{F \in \mathcal{X}} \{ \text{TVaR}_\alpha(Y + S - F) + \text{TVaR}_\beta(X + F) \} = \inf_{U \in \mathcal{X}} \{ \text{TVaR}_\alpha(U) + \text{TVaR}_\beta(V - U) \}.$$

Using the usual notation  $\square$  representing the inf-convolution (see Barrieu and El Karoui (2005)), we have

$$\inf_{U \in \mathcal{X}} \{ \text{TVaR}_\alpha(U) + \text{TVaR}_\beta(V - U) \} = \text{TVaR}_\beta \square \text{TVaR}_\alpha(V).$$

From Jouini et al. (2008), we have that

$$\text{TVaR}_\beta \square \text{TVaR}_\alpha(V) = \text{TVaR}_{\alpha \wedge \beta}(V).$$

When  $\alpha \geq \beta$ ,

$$\text{TVaR}_\beta \square \text{TVaR}_\alpha(V) = \text{TVaR}_\beta(V) = \text{TVaR}_\beta(X + Y + S).$$

In other words,  $U^* = 0$ , yielding  $F^* = Y + S$ . The insurer transfers the full loss to the reinsurer.  $\square$

First, note that  $\alpha \geq \beta$  means the insurer is more or as prudent as the reinsurer. From then on, the interpretation of Theorem 3.5.2 is as follows. The reinsurer still uses the index-based risk of the insurer to hedge against her initial background risk, and the independence of the residual risk does not add too much variability to the merged position. At least, the price asked by the reinsurer to bear  $S$  is less than the value given by the insurer to her exposure: the insurer has then interest in buying full reinsurance.

From a technical point of view, note that Theorem 3.5.2 does not require the random variables to be bounded. In addition, the result is not based on the fact that  $Y \in H(X)$ . In other words, Theorem

3.5.2 stands for a very robust result in the sense that it holds true whatever the link between  $Y$  and  $X$ .

In the case where  $\alpha \geq \beta$ , we are eventually able to identify both the best perfect index-based and the best perfect indemnity-based transactions. This time, the final situation in the perfect indemnity-based transaction is given by

$$\mathcal{E}_{\text{Indemnity}} := \text{TVaR}_\beta(X + Y + S) - \text{TVaR}_\beta(X).$$

The natural next step is to compare the best index-based transaction with the best indemnity-based transaction.

### 3.6 Perfect index-based transaction VS Indemnity-based transaction with asymmetry of information

Now, it is time to come back to our main motivation: the investigation of the role of the asymmetry of information in the indemnity-based transaction and the one of basis risk in the index-based transaction on the choice of the type of the transaction.

In this Section, we first demonstrate that the perfect indemnity-based transaction is more efficient than the perfect index-based one (Proposition 3.6.1) in order to have a basis of comparison. Then we insert an asymmetry of information in the indemnity-based transaction, to eventually discuss its role in the final choice.

#### 3.6.1 Perfect knowledge of the insurer's total exposure

Assume for the moment that both of the transactions are perfect in the sense that there is no basis risk in the index-based transaction and there is no asymmetry of information in the indemnity-based transaction.

Since we explicitly know the optimal solutions of Problems  $(\mathcal{P}_1)$  and  $(\bar{\mathcal{P}}_1)$  when  $\alpha \geq \beta$ , we obtain the following result.

**Proposition 3.6.1.** *When  $\alpha \geq \beta$  the insurer always prefers the indemnity-based transaction.*

*Proof.* As a reminder,  $\mathcal{E}_{\text{Index}} = \text{TVaR}_\alpha(S) + \text{TVaR}_\beta(X + Y) - \text{TVaR}_\beta(X)$ . We directly obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{Index}} - \mathcal{E}_{\text{Indemnity}} &= \text{TVaR}_\alpha(S) + \text{TVaR}_\beta(X + Y) - \text{TVaR}_\beta(X + Y + S) \\ &\geq \text{TVaR}_\beta(S) + \text{TVaR}_\beta(X + Y) - \text{TVaR}_\beta(X + Y + S) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$



yielding the announced result.  $\square$

The interpretation is clear: when the insurer is not budget-constrained, she prefers purchasing full indemnity reinsurance instead of full index reinsurance. This is due to the fact we assume the reinsurer is less prudent or as prudent as the insurer. To this extent, the value given by the insurer to her residual risk is higher than the one given by the reinsurer: the insurer has then interest in transferring her residual risk to the reinsurer. In our illustration, from the reinsurer's point of view, she still benefits from the diversification effect between her La Niña related risk (respectively, to mortality risk) and the insurer's exposure to El Niño (respectively, to longevity risk). Taking the residual risk of the insurer leads to an increased price, but this price raise is still lower than the amount paid by the insurer if she had kept her residual risk.

In practice, the trade-off between index-based and indemnity-based transactions has to be done between basis risk and asymmetry of information. This is why we first address the role of the asymmetry of information in the following subsection.

### 3.6.2 Asymmetry of information

Here, we represent the asymmetry of information by assuming the reinsurer perceives the loss  $Y + S$  as  $Y + S + w\tilde{S}$  where  $\tilde{S}$  is non-negative random variable and  $w \in \mathbb{R}^+$ . It combines the points of view adopted by [Cutler and Zeckhauser \(1999\)](#) (multiplicative factor) and [Jean-Baptiste and Santomero \(2000\)](#) (additional random variable). Assume that  $\tilde{S}$  is independent from all the other random variables. As a result, the reinsurer is prudent in the sense that she only adds a positive amount to the insurer's loss, and this amount depends on the size of  $w$ . In a nutshell, we follow the work paved by [Cutler and Zeckhauser \(1999\)](#) by dealing with both an asymmetry on the distribution and on the magnitude of the loss.

The problem of the indemnity-based transaction is hence modified as follows, with the notation  $\tilde{Y} = S + Y$ :

$$\inf_{I \in \mathcal{I}} \{ \text{TVaR}_\alpha(\tilde{Y} - I(\tilde{Y})) + \text{TVaR}_\beta(X + I(\tilde{Y} + w\tilde{S})) \}.$$

Note that the asymmetry of information only appears on the reinsurer's side. In other words, the asymmetry of information does not modify the shape of the coverage (for example, a stop-loss remains a stop-loss) but its price. The general solution is far from easy to obtain. Nevertheless, this minimization can be seen as a function of  $w$ . To this extent, let

$$\psi(w) = \min_{I \in \mathcal{I}} \{ \text{TVaR}_\alpha(\tilde{Y} - I(\tilde{Y})) + \text{TVaR}_\beta(X + I(\tilde{Y} + w\tilde{S})) \} - \text{TVaR}_\beta(X), \quad w \geq 0. \quad (3.10)$$

Note that we intentionally take into account the term  $\text{TVaR}_\beta(X)$  in the definition of the function  $\psi$ . To this extent, we can directly compare  $\psi(w)$  with  $\mathcal{E}_{\text{Index}}$  and  $\mathcal{E}_{\text{Indemn}}$ . As a result, we demonstrate

in Proposition 3.6.2 that depending on the intensity of the asymmetry of information, the index-based transaction is the preferred one.

**Proposition 3.6.2.** *Define the function  $\psi$  as in Equation (3.10). If  $\alpha \geq \beta$ , then there exists  $w^*$  such that*

$$\mathcal{E}_{Index} \leq \psi(w), \forall w \geq w^*.$$

*Proof.* First, by definition of  $\tilde{S}$ ,  $\tilde{Y} \leq \tilde{Y} + w\tilde{S}$  and for  $I \in \mathcal{I}$ ,  $X + I(\tilde{Y}) \leq X + I(\tilde{Y} + w\tilde{S})$ , yielding

$$\text{TVaR}_\beta(X + I(\tilde{Y} + w\tilde{S})) \geq \text{TVaR}_\beta(X + I(\tilde{Y})),$$

and

$$\text{TVaR}_\alpha(\tilde{Y} - I(\tilde{Y})) + \text{TVaR}_\beta(X + I(\tilde{Y} + w\tilde{S})) \geq \inf_{I \in \mathcal{I}} \{\text{TVaR}_\alpha(\tilde{Y} - I(\tilde{Y})) + \text{TVaR}_\beta(X + I(\tilde{Y}))\}.$$

We eventually obtain

$$\psi(w) \geq \psi(0) = \mathcal{E}_{Indemn}, \forall w \geq 0.$$

In particular, the best indemnity-based transaction with asymmetry of information is always less efficient than the best one without asymmetry of information.

Now let  $0 \leq w_1 \leq w_2$ . Again by the same arguments, we obtain  $\psi(w_1) \leq \psi(w_2)$ : the function  $\psi$  is non-decreasing. Then we obtain

$$\max_{w \in \mathbb{R}^+} \psi(w) = \text{TVaR}_\alpha(\tilde{Y}),$$

corresponding to the case where it is better for the insurer to not buy any reinsurance at all. On the other hand,

$$\begin{aligned} \text{TVaR}_\alpha(\tilde{Y}) &\geq \inf_{I \in \mathcal{I}} \{\text{TVaR}_\alpha(\tilde{Y} - I(Y)) + \text{TVaR}_\beta(X + I(Y))\} - \text{TVaR}_\beta(X) \\ &= \text{TVaR}_\alpha(S) + \text{TVaR}_\beta(X + Y) - \text{TVaR}_\beta(X) = \mathcal{E}_{Index}. \end{aligned}$$

As a result, let  $w^* = \inf\{w \in \mathbb{R}^+ \mid \psi(w) \geq \mathcal{E}_{Index}\}$ , and since  $\psi$  is non-decreasing,

$$\psi(w) \geq \mathcal{E}_{Index}, \forall w \geq w^*.$$

□

A direct consequence of Proposition 3.6.2 is that  $\mathcal{E}_{Index} \geq \psi(w)$  for all  $w \leq w^*$ . In other words, if the asymmetry of information is predominant, its presence modifies the preferences of the insurer and makes her prefer the index-based transaction. When the reinsurer overestimates the size of the residual risk of the insurer, she dramatically raises the premium asked for traditional reinsurance: in our illustration, from her point of view, the reinsurer can not benefit from the diversification effect

between her exposure to La Niña or to mortality risk and the insurer's exposure to El Niño or to longevity risk. On the other hand, when the asymmetry of information remains at low intensity, it corresponds to an "almost perfect" indemnity-based transaction, and we go back to the interpretation of Proposition 3.6.1

Nevertheless, Proposition 3.6.2 holds when there is no basis risk in the coverage of the index-based transaction. Actually, we show in the next Section that basis risk worsens the final situation of the insurer and depending on the size of the asymmetry of information and the intensity of basis risk, the insurer may still prefer the indemnity-based transaction with asymmetry.

### 3.7 On the basis risk in the index-based transaction

Until now the index-based transaction has been assumed to be perfect in the sense that the reinsurer offers an index-based coverage backed to the exact index-based risk of the insurer. In reality, the index used by the reinsurer does not necessarily correspond to the parametric risk of the insurer, for instance because there is no weather related data in the area where the insurer is exposed (this case is referred to as spatial basis risk; Dalhaus and Finger (2016)), or even because the insurer does not perfectly know the manner her risk is weather related (this case is known as temporal basis risk; Dalhaus and Finger (2016)). Another reason is because the index-based risk of the insurer is not the one which is perfectly negatively correlated to the exposure of the reinsurer. For instance, in our illustration the insurer could be only partially exposed to phenomena like El Niño or longevity risk, making her index-based risk be not as good as another index perfectly related to this phenomena from the reinsurer's point of view. As a result, the fact the coverage provided by the reinsurer does not perfectly match the loss experienced by the insurer leaves the insurer with an imperfect coverage, resulting in a basis risk. As a reminder, this basis risk corresponds to "the risk that a protection buyer's own losses exceed the payments under a risk transfer mechanism structured to hedge against these losses" according to Ross and Williams (2009).

In this short last Section we enlarge the work to the case where the coverage offered by the reinsurer is based on an index which is not exactly the same as the insurer's one.

#### 3.7.1 Basis risk and optimal transaction

First of all, we assume the reinsurer is the one who proposes the index, and she chooses it such that she can benefit from the diversification effect between the index and her initial exposure. In other words, by denoting  $W$  the random variable representing the index, we assume  $W \in H(X)$ . The modified problem can be stated as:

$$\inf_{I \in \mathcal{I}} \{ \text{TVaR}_\alpha(S + Y - I(W)) + \text{TVaR}_\beta(X + I(W)) \}. \quad (\mathcal{P}_2 \text{ basis risk})$$

This time, the insurer does not benefit from a coverage on  $Y$ , but on  $W$ . The basis risk results from the difference  $Y - W$ .

The correlation between the risks  $W$  and  $Y$  plays a key role in the determination of the final risk sharing rule. In fact, assume the insurer has to choose between two indices  $W_1$  and  $W_2$  verifying  $(Y, W_1) \leq_{CORR} (Y, W_2)$ . As a reminder, the correlation order requires the random couples  $(Y, W_1)$  and  $(Y, W_2)$  to have the same marginal. Then we have the following result concerning the preferences of the insurer.

**Proposition 3.7.1.** *Let  $W_1$  and  $W_2$  such that  $(Y, W_1) \leq_{CORR} (Y, W_2)$ . Then*

$$Y - I(W_2) \leq_{cx} Y - I(W_1), \quad \forall I \in \mathcal{I}.$$

*Proof.* Let  $I \in \mathcal{I}$ . By definition of the set  $\mathcal{I}$ ,  $(Y, I(W_1)) \leq_{CORR} (Y, I(W_2))$ . The announced result is obtained using the Proposition 6.2.12 of [Denuit et al. \(2006\)](#).  $\square$

Therefore, the insurer wants the index  $W$  to be as positively correlated with  $Y$  as possible. The next proposition deals with the ideal case, where  $(Y, W)$  is comonotone, i.e. when there exists a non-decreasing function  $f$  such that  $W = f(Y)$ .

**Proposition 3.7.2.** *Let  $f$  be a non-decreasing and 1-Lipschitz function such that  $W = f(Y)$ . If  $I_1(W) \leq_{cx} I_2(W)$ , then*

$$Y - I_2(W) \leq_{cx} Y - I_1(W). \tag{3.11}$$

*Proof.* Thanks to the assumptions on the function  $f$ , we have  $-I_2(W) \in H(Y)$  and the hypothesis yields  $-I_1(W) \leq_{cx} -I_2(W)$ . Theorem 3.3.2 leads to Equation (3.11).  $\square$

Note that the function  $x \mapsto f(x) + c$ ,  $c$  being a constant, is still 1-Lipschitz. Consequently, we can, without loss of generality, take  $f$  such that  $W \leq_{cx} Y$ . In this case, the underlying index  $W$  proposed by the reinsurer is less variable than the index-based risk of the insurer  $Y$  but, in average these two indices are the same, providing thus a reasonable situation of basis risk.

Next, we come back to Problem ( $\mathcal{P}_2$  basis risk). In the particular case where  $f$  is 1-Lipschitz and non-decreasing, we obtain that the stop-loss is the optimal form of the transaction since both the insurer and the reinsurer want the coverage on  $W$  to be as convex as possible. The discussion linking the expectation to the price still holds here. Consequently, we follow the same reasoning as in Section 3.4 to eventually derive the next proposition.

**Proposition 3.7.3.** *Let  $f$  be a non-decreasing and 1-Lipschitz function such that  $W = f(Y)$ . Then the solution of Problem ( $\mathcal{P}_2$  basis risk) is full reinsurance.*

*Proof.* We go back to the definition of the functions  $A$  and  $B$  introduced in Equation (3.7). By Lemma 3.4.2,  $-B(W) \leq_{cx} -A(W)$ . Next note that  $-A(W) \in H(Y)$  and we obtain that  $Y - A(W) \leq_{cx} Y - B(W)$  by Theorem 3.3.2. On the other hand, for  $d \geq 0$ , we still have that

$$\text{TVaR}_\beta(X + (W - d)_+ - \mathbb{E}[(W - d)_+]) \geq \text{TVaR}_\beta(X + W - \mathbb{E}[W]).$$

Then we eventually obtain

$$\begin{aligned} & \text{TVaR}_\alpha(S + Y - (W - d)_+) + \text{TVaR}_\beta(X + (W - d)_+) \\ &= \text{TVaR}_\alpha(S + Y - (W - d)_+) + \mathbb{E}[(W - d)_+] + \text{TVaR}_\beta(X + (W - d)_+) - \mathbb{E}[(W - d)_+] \\ &\geq \text{TVaR}_\alpha(S + Y - W) + \mathbb{E}[W] + \text{TVaR}_\beta(X + (W - d)_+) - \mathbb{E}[(W - d)_+] \\ &\geq \text{TVaR}_\alpha(S + Y - W) + \mathbb{E}[W] + \text{TVaR}_\beta(X + W) - \mathbb{E}[W] \\ &= \text{TVaR}_\alpha(S + Y - W) + \text{TVaR}_\beta(X + W). \end{aligned}$$

□

When  $f$  is non-decreasing and 1-Lipschitz,  $-W \in H(Y)$  and by hypothesis,  $W \in H(X)$ : for the reinsurer, adding a position related to  $W$  participates in reducing her overall exposure whereas adding a position on  $-W$  reduces the insurer's exposure. The best  $W$  playing this dual role is  $W = Y$  corresponding to the case where there is no basis risk. Note that the fact  $W \in H(X)$  and  $-W \in H(X)$  does not necessarily means that  $Y \in H(X)$ . The final situation of the insurer in the index-based transaction with basis risk is hence

$$\mathcal{E}_{\text{Index Basis Risk}} := \text{TVaR}_\alpha(S + Y - W) + \text{TVaR}_\beta(X + W) - \text{TVaR}_\beta(X).$$

The last result is concerned with comparing the best index-based transaction with basis risk with the indemnity-based transaction with asymmetry of information.

### 3.7.2 Index-based transaction with basis risk VS indemnity-based transaction with asymmetry of information

First, we compare the index-based transaction with and without basis risk. Note that dealing with the perfect index-based transaction means  $Y \in H(X)$ .

**Proposition 3.7.4.** *Let  $Y \in H(X)$ . If  $W = f(Y)$  where  $f$  is a non-decreasing and 1-Lipschitz function such that  $W \leq_{cx} Y$ , then*

$$\mathcal{E}_{\text{Index Basis Risk}} \geq \mathcal{E}_{\text{Index}}$$

*Proof.* The facts  $Y \in H(X)$  and  $W \leq_{cx} Y$  yield  $X + Y \leq_{cx} X + W$  by Theorem 3.3.2, i.e.  $\text{TVaR}_\beta(X + Y) \leq \text{TVaR}_\beta(X + W)$ . On the other hand,  $Y - W = Y - f(Y) \geq 0$ , and we directly obtain  $\text{TVaR}_\alpha(S) \leq \text{TVaR}_\beta(S + Y - W)$ . □

In other words, the basis risk worsens, as expected, the final situation of the index-based transaction.

We eventually close the paper by providing a result looking like Proposition 3.6.2, by comparing the transaction with asymmetry of information with the index-based transaction with basis risk, using the fact the function  $\psi$  defined in Equation (3.10) is non-decreasing.

**Proposition 3.7.5.** *Define the function  $\psi$  as in Equation (3.10) and  $w^*$  as in Proposition 3.6.2. If  $\alpha \geq \beta$ , then the following assertions hold:*

*i) There exists a  $\tilde{w} \geq w^*$  such that*

$$\psi(w) \geq \mathcal{E}_{\text{Index Basis Risk}}, \quad \forall w \geq \tilde{w}.$$

*ii) For  $w \in [w^*, \tilde{w}]$ ,*

$$\mathcal{E}_{\text{Index}} \leq \psi(w) \leq \mathcal{E}_{\text{Index Basis Risk}}$$

*Proof.* As before,

$$\begin{aligned} \max_{w \in \mathbb{R}^+} \psi(w) &= \text{TVaR}_\alpha(S + Y) \\ &\geq \inf_{I \in \mathcal{I}} \{ \text{TVaR}_\alpha(S + Y - I(W)) + \text{TVaR}_\beta(X + I(W)) \} - \text{TVaR}_\beta(X) \\ &= \mathcal{E}_{\text{Index Basis Risk}} \\ &\geq \mathcal{E}_{\text{Index}}. \end{aligned}$$

Let  $\tilde{w} = \inf\{w \in \mathbb{R}^+ \mid \psi(w) \geq \mathcal{E}_{\text{Index Basis Risk}}\}$ . Since  $\psi$  is non-decreasing,  $\psi(w) \geq \mathcal{E}_{\text{Index Basis Risk}}$  for all  $w \geq \tilde{w}$ . The fact that  $\tilde{w} \geq w^*$  and *ii)* are direct by definition of  $w^*$ .  $\square$

Proposition 3.7.5 illustrates the trade-off between the basis risk inherent to an index-based transaction and the asymmetry of information contained in an indemnity-based transaction: for a given quality of index, the size of the asymmetry of information drives the insurer's final choice. If the level of asymmetry of information is not too high, the insurer has interest in choosing the indemnity-based transaction. On the other hand, if the level of asymmetry of information is too high, then the indemnity-based transaction is too expensive and the insurer should purchase an index-based coverage, even with basis risk. In a synthesized way, we have demonstrated that

$$\mathcal{E}_{\text{Indemnity}} = \psi(0) \leq \psi(w_1) \leq \mathcal{E}_{\text{Index}} \leq \psi(w_2) \leq \mathcal{E}_{\text{Index Basis Risk}} \leq \psi(w_3), \quad (3.12)$$

where  $w_1 \leq w^*$ ,  $w_2 \in [w^*, \tilde{w}]$  and  $w_3 \geq \tilde{w}$ .

### 3.8 Conclusion

This work paves the way of further research on the correlation structure linking the reinsurer's initial exposure to the insurer's parametric risk. Despite the restrictive assumptions on this structure, we have provided an additional characterization of the set of counter-monotonic risk reducers. In addition, this simplified setting has allowed us to deal with an index-based transaction and an indemnity-based transaction, to eventually take into account the main drawbacks of each type of transactions. We have first addressed the case of asymmetry of information, highlighting its role in the indemnity-based transaction. Then we have added a form of basis risk in the index-based transaction.

The key contribution of the paper is summarized in Equation 3.12: we have explicitly demonstrated that, for a given quality of the index-based transaction, the intensity of the asymmetry of information between the insurer and the reinsurer drives the choice on the type of the transaction.

As a result, we have demonstrated the impact of the asymmetry of information and basis risk on the final choice of the protection buyer, confirming thus the trade-off between these two phenomena that has been observed in the insurance market for years. This result may explain why index-based transactions are the one preferred on emerging markets (such as agricultural insurance in emerging countries, or in the first years of the CAT bond market) characterized by a huge level of asymmetry of information, whereas when the market reaches a sufficient level of development, the asymmetry of information is reduced and the market slices towards indemnity-based transactions, as we can see in the CAT bond market for instance.

## Appendix: convex order and related results

This Appendix recalls the main results on convex order used all along the paper. Because the literature on convex orders is very rich, we only recall some key results used in the sequel. For the sake of brevity, we omit the proof and the interested reader is referred to the handbooks by Müller and Stoyan (2002), Denuit et al. (2006) and Shaked and Shanthikumar (2007) for a detailed and exhaustive presentation of stochastic orders.

Given two random variables  $A$  and  $B$ ,  $A$  is said to precede  $B$  in the increasing convex order, also referred to as stop-loss order and written as  $A \leq_{icx} B$  if and only if  $\mathbb{E}[\phi(A)] \leq \mathbb{E}[\phi(B)]$  for all non-decreasing convex functions  $\phi$  such that the expectations exist. It is said that  $A$  precedes  $B$  in the convex order, denoted as  $A \leq_{cx} B$ , if and only if  $A \leq_{icx} B$  and  $\mathbb{E}[A] = \mathbb{E}[B]$ . The convex order benefits from a straight characterization involving the stop-loss premium and the tail value-at-risk, given by the following statement.

**Characterization 3.8.1.** (*Denuit et al. (2006)*)

For two random variables  $A$  and  $B$ ,

$$\begin{aligned} A \leq_{cx} B &\iff \mathbb{E}[(A-t)_+] \leq \mathbb{E}[(B-t)_+] \text{ holds for all } t \in \mathbb{R}, \\ &\iff TVaR_p(A) \leq TVaR_p(B) \text{ holds for all } 0 \leq p < 1, \end{aligned}$$

where  $TVaR_p(A) = \frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR_s(A) ds$ ,  $VaR_s(A) = \inf\{x \in \mathbb{R}^+ \mid \mathbb{P}(A \leq x) \geq s\}$ .

We recall that TVaR is coherent in the sense of Artzner et al. (1999) and that  $TVaR_p(A) \geq \mathbb{E}[A]$  for all  $p \in [0, 1]$ . The following lemma is a powerful tool when it comes to dealing with convex order; see Ohlin (1969) for the proof, and Cai and Wei (2012) for a use in optimal reinsurance context with positively dependent risks. Lemma 4.2.2 is of utmost importance in the geometrical approach developed in the paper; note that it requires the functions  $f_1$  and  $f_2$  to be non-decreasing.

**Lemma 3.8.2.** (*Ohlin (1969)*)

Let  $A$  be a nonnegative random variable,  $f_1$  and  $f_2$  be two non-decreasing functions such that  $\mathbb{E}[f_1(A)] = \mathbb{E}[f_2(A)]$ . If there exists an  $x_0$  such that  $f_1(x) \geq f_2(x)$ , for all  $x \leq x_0$  and  $f_1(x) \leq f_2(x)$ , for all  $x \geq x_0$ , then  $f_1(A) \leq_{cx} f_2(A)$  and we say that  $f_1$  up-crosses  $f_2$ .

Next we recall a stochastic order relation for random couples, referred to as the correlation order, that translates the fact the components of one of these couples are more positively dependent than those of the other random couple. This stochastic order has been introduced by Dhaene and Goovaerts (1996, 1997) to compare, in the stop-loss order, the sum of the components of random couples. We denote by  $\mathcal{R}(F_1, F_2)$  the space consisting of all the random couples  $(A_1, A_2)$  with marginals  $F_1, F_2$  respectively.



**Definition 3.8.1.** (*Denuit et al. (2006)*)

Consider two random couples  $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$  and  $\mathbf{B} = (B_1, B_2)$  in  $\mathcal{R}(F_1, F_2)$ . If

$$F_{\mathbf{A}}(x_1, x_2) \leq F_{\mathbf{B}}(x_1, x_2), \text{ for all } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,$$

then  $\mathbf{A}$  is said to be smaller than  $\mathbf{B}$  in the correlation order (denoted by  $\mathbf{A} \leq_{CORR} \mathbf{B}$ ).

Actually, the correlation order is structurally related to supermodular functions (see [Dana and Scarsini \(2007\)](#) for a short but insightful presentation). In a nutshell, if  $\psi$  is twice differentiable,  $\psi$  is supermodular if and only if  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \geq 0$ . Note in particular that for a convex function  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\psi : (x_1, x_2) \mapsto \phi(x_1 + x_2)$  is supermodular. Consequently, we recall the link between the correlation and convex orders.

**Proposition 3.8.1.** (*adapted from Proposition by Denuit et al. (2006)*)

For random couples  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{R}(F_1, F_2)$ ,

$$\mathbf{A} \leq_{CORR} \mathbf{B} \Rightarrow A_1 + A_2 \leq_{cx} B_1 + B_2.$$

Finally, two random variables  $A$  and  $B$  are said to be comonotonic if the inequality  $(B(\omega) - B(\omega'))(A(\omega) - A(\omega')) \geq 0$  holds for every  $\omega$  and  $\omega'$  in  $\Omega$ . Two random variables  $A$  and  $B$  are said to be counter-monotonic if  $A$  and  $-B$  are comonotonic. In addition to this quite general definition, we recall that Proposition 4.5 v) of [Denneberg \(1994\)](#) ensures that  $(A, B)$  is comonotonic if and only if there exist a random variable  $C$  and two increasing functions  $u$  and  $v$  such that  $A = u(C)$  and  $B = v(C)$ . In particular, by taking  $u = \text{Id}$ ,  $(A, B)$  is comonotonic if and only if  $B = v(A)$ ,  $v$  being an increasing function. This functional characterization of comonotonicity is at the basis of the approach developed in Section 3.3. For more information on comonotonicity we refer the reader to [Dhaene and Goovaerts \(1996\)](#), [Dhaene et al. \(2002\)](#) and [Kaas et al. \(2000\)](#).

The next lemma summarizes some fundamental relationships between comonotonicity (counter-monotonicity) and convex order.

**Lemma 3.8.3.** (*see Cheung et al. (2014)*)

Let  $A_i, B_i$  for  $i = 1, 2$  be nonnegative random variables.

i) If  $A_i \leq_{cx} B_i$  for  $i = 1, 2$  and if  $(B_1, B_2)$  is comonotonic, then

$$A_1 + A_2 \leq_{cx} B_1 + B_2.$$

ii) If  $(A_1, A_2)$  and  $(B_1, B_2)$  have the same marginal distributions and  $(A_1, A_2)$  is counter-monotonic, then

$$A_1 + A_2 \leq_{cx} B_1 + B_2.$$

## Bibliography

- Beatrice Acciaio and Gregor Svindland. Optimal risk sharing with different reference probabilities. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44(3):426–433, 2009.
- Hansjörg Albrecher, Jan Beirlant, and Jozef L Teugels. *Reinsurance: Actuarial and Statistical Aspects*. Wiley, 2017.
- Kenneth J Arrow. Uncertainty and the welfare economics of medical care. *American Economic Review*, 53(5):941–973, 1963.
- Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, and David Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 9(3):203–228, 1999.
- Alexandru V Asimit, Tim J Boonen, Yichun Chi, and Wing Fung Chong. Risk sharing with multiple indemnity environments. *Available at SSRN 3616746*, 2020.
- Vali Asimit and Tim J Boonen. Insurance with multiple insurers: a game-theoretic approach. *European Journal of Operational Research*, 267(2):778–790, 2018.
- Pauline Barrieu and Nicole El Karoui. Reinsuring climatic risk using optimally designed weather bonds. *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 27(2):87–113, 2002.
- Pauline Barrieu and Nicole El Karoui. Inf-convolution of risk measures and optimal risk transfer. *Finance and stochastics*, 9(2):269–298, 2005.
- Pauline Barrieu, Harry Bensusan, Nicole El Karoui, Caroline Hillairet, Stéphane Loisel, Claudia Ravanelli, and Yahia Salhi. Understanding, modelling and managing longevity risk: key issues and main challenges. *Scandinavian actuarial journal*, 2012(3):203–231, 2012.
- Fabio Bellini and Elena Di Bernardino. Risk management with expectiles. *The European Journal of Finance*, 23(6):487–506, 2017.
- Fabio Bellini, Bernhard Klar, Alfred Müller, and Emanuela Rosazza Gianin. Generalized quantiles as risk measures. *Insurance: Mathematics and Economics*, 54:41–48, 2014.
- Alfonso J Bello, Julio Mulero, Miguel A Sordo, and Alfonso Suárez-Llorens. On partial stochastic comparisons based on Tail Values at Risk. *Mathematics*, 8(7):1181, 2020.
- Tim J Boonen. Optimal reinsurance with heterogeneous reference probabilities. *Risks*, 4(3):26, 2016.
- Tim J Boonen and Mario Ghossoub. On the existence of a representative reinsurer under heterogeneous beliefs. *Insurance: Mathematics and Economics*, 88:209–225, 2019.

- Karl Borch. Reciprocal reinsurance treaties seen as a two-person co-operative game. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1960(1-2):29–58, 1960a.
- Karl Borch. The safety loading of reinsurance premiums. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1960(3-4):163–184, 1960b.
- Karl Borch. Equilibrium in a reinsurance market. *Econometrica*, 30(3):424–444, 1962.
- Eric Briys, Michel Crouhy, and Harris Schlesinger. Optimal hedging in a futures market with background noise and basis risk. *European Economic Review*, 37(5):949–960, 1993.
- Jun Cai and Wei Wei. Optimal reinsurance with positively dependent risks. *Insurance: Mathematics and Economics*, 50(1):57–63, 2012.
- Ka Chun Cheung. Optimal reinsurance revisited—a geometric approach. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 40(1):221–239, 2010.
- Ka Chun Cheung and Steven Vanduffel. Bounds for sums of random variables when the marginals and the variance of the sum are given. *Scandinavian Actuarial Journal*, *Forthcoming*, 2009.
- Ka Chun Cheung, Jan Dhaene, Ambrose Lo, and Qihe Tang. Reducing risk by merging counter-monotonic risks. *Insurance: Mathematics and Economics*, 54:58–65, 2014.
- Ka Chun Cheung, Wing Fung Chong, and Ambrose Lo. Budget-constrained optimal reinsurance design under coherent risk measures. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2019(9):729–751, 2019.
- Yichun Chi and Ken Seng Tan. Optimal incentive compatible insurance with background risk. *Available at SSRN 2589438*, 2015.
- Sarah Conrardt, Robert Finger, and Martina Spörri. Flexible weather index-based insurance design. *Climate Risk Management*, 10:106–117, 2015.
- David M Cutler and Richard J Zeckhauser. Reinsurance for catastrophes and cataclysms. In Kenneth Froot, editor, *The financing of Catastrophe Risk*, pages 233–274. University of Chicago Press, 1999.
- Tobias Dalhaus and Robert Finger. Can gridded precipitation data and phenological observations reduce basis risk of weather index-based insurance? *Weather, Climate, and Society*, 8(4):409–419, 2016.
- Tobias Dalhaus, Oliver Musshoff, and Robert Finger. Phenology information contributes to reduce temporal basis risk in agricultural weather index insurance. *Scientific reports*, 8(1):1–10, 2018.
- Rose-Anne Dana and Marco Scarsini. Optimal risk sharing with background risk. *Journal of Economic Theory*, 133(1):152–176, 2007.

- Jan De Leeuw, Anton Vrieling, Apurba Shee, Clement Atzberger, Kiros M Hadgu, Chandrashekhar M Biradar, Humphrey Keah, and Calum Turvey. The potential and uptake of remote sensing in insurance: A review. *Remote Sensing*, 6(11):10888–10912, 2014.
- Dieter Denneberg. *Non-Additive Measure and Integral*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1994.
- Michel Denuit, Jan Dhaene, Marc Goovaerts, and Rob Kaas. *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*. Wiley, 2006.
- Michel M Denuit and Mhamed Mesfioui. Preserving the Rothschild–Stiglitz type increase in risk with background risk: A characterization. *Insurance: Mathematics and Economics*, 72:1–5, 2017.
- Jan Dhaene and Marc J Goovaerts. Dependency of risks and stop-loss order. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 26(2):201–212, 1996.
- Jan Dhaene and Marc J Goovaerts. On the dependency of risks in the individual life model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 19(3):243–253, 1997.
- Jan Dhaene, Michel Denuit, Marc J Goovaerts, Rob Kaas, and David Vyncke. The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, 31(1):3–33, 2002.
- Georges Dionne, Neil Doherty, and Nathalie Fombaron. Adverse selection in insurance markets. In *Handbook of Insurance*, pages 185–243. Springer, 2000.
- Israel Finkelshtain, Offer Kella, and Marco Scarsini. On risk aversion with two risks. *Journal of Mathematical Economics*, 31(2):239–250, 1999.
- Silke Finken and Christian Laux. Catastrophe bonds and reinsurance: the competitive effect of information-insensitive triggers. *Journal of Risk and Insurance*, 76(3):579–605, 2009.
- Guenter Franke, Harris Schlesinger, and Richard C Stapleton. Risk taking with additive and multiplicative background risks. *Journal of Economic Theory*, 146(4):1547–1568, 2011.
- Günter Franke, Harris Schlesinger, and Richard C Stapleton. Multiplicative background risk. *Management Science*, 52(1):146–153, 2006.
- James R Garven, James I Hilliard, and Martin F Grace. Adverse selection in reinsurance markets. *The Geneva Risk and Insurance Review*, 39(2):222–253, 2014.
- Hans U Gerber, Elias SW Shiu, and Hailiang Yang. A constraint-free approach to optimal reinsurance. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2019(1):62–79, 2019.

- Mario Ghossoub. Optimal insurance with heterogeneous beliefs and disagreement about zero-probability events. *Risks*, 4(3):29, 2016.
- Mario Ghossoub. Arrow's theorem of the deductible with heterogeneous beliefs. *North American Actuarial Journal*, 21(1):15–35, 2017.
- Michael H Glantz. *Currents of Change: Impacts of El Niño and La Niña on Climate and Society*. Cambridge University Press, 2001.
- Marc J Goovaerts, Robert Kaas, AE Van Heerwaarden, and Thierry Bauwelinckx. *Effective Actuarial Methods*. Amsterdam North-Holland, 1990.
- Junnan He, Qihe Tang, and Huan Zhang. Risk reducers in convex order. *Insurance: Mathematics and Economics*, 70:80–88, 2016.
- Hung-Hsi Huang, Yung-Ming Shiu, and Ching-Ping Wang. Optimal insurance contract with stochastic background wealth. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2013(2):119–139, 2013.
- Yuxia Huang and Chuancun Yin. A unifying approach to constrained and unconstrained optimal reinsurance. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 360:1–17, 2019.
- Gur Huberman, David Mayers, and Clifford W Smith Jr. Optimal insurance policy indemnity schedules. *The Bell Journal of Economics*, pages 415–426, 1983.
- Eslyn L Jean-Baptiste and Anthony M Santomero. The design of private reinsurance contracts. *Journal of Financial Intermediation*, 9(3):274–297, 2000.
- Nathaniel D Jensen, Christopher B Barrett, and Andrew G Mude. Index insurance quality and basis risk: Evidence from northern Kenya. *American Journal of Agricultural Economics*, 98(5):1450–1469, 2016.
- Nathaniel D Jensen, Andrew G Mude, and Christopher B Barrett. How basis risk and spatiotemporal adverse selection influence demand for index insurance: Evidence from northern Kenya. *Food Policy*, 74:172–198, 2018.
- Elyes Jouini, Walter Schachermayer, and Nizar Touzi. Optimal risk sharing for law invariant monetary utility functions. *Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*, 18(2):269–292, 2008.
- Rob Kaas, Jan Dhaene, and Marc J Goovaerts. Upper and lower bounds for sums of random variables. *Insurance: Mathematics and Economics*, 27(2):151–168, 2000.
- Richard E Kihlstrom, David Romer, and Steve Williams. Risk aversion with random initial wealth. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 911–920, 1981.

- ZhiYi Lu, LePing Liu, JianYu Zhang, and LiLi Meng. Optimal insurance under multiple sources of risk with positive dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, 51(2):462–471, 2012.
- Zhiyi Lu, Shengwang Meng, Leping Liu, and Ziqi Han. Optimal insurance design under background risk with dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, 80:15–28, 2018.
- Alfred Müller and Dietrich Stoyan. *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*, volume 389. Wiley, 2002.
- Hee Seok Nam, Qihe Tang, and Fan Yang. Characterization of upper comonotonicity via tail convex order. *Insurance: Mathematics and Economics*, 48(3):368–373, 2011.
- Jan Ohlin. On a class of measures of dispersion with application to optimal reinsurance. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 5(2):249–266, 1969.
- Artur Raviv. The design of an optimal insurance policy. *The American Economic Review*, 69(1):84–96, 1979.
- David Ross and Jillian Williams. Basis risk from the cedant’s perspective. In Pauline Barrieu and Luca Albertini, editors, *The Handbook of Insurance-Linked Securities*, chapter 5, pages 49–64. Wiley, 2009.
- Moshe Shaked and J George Shanthikumar. *Stochastic Orders*. Springer, 2007.
- Ajay Subramanian and Jinjing Wang. Reinsurance versus securitization of catastrophe risk. *Insurance: Mathematics and Economics*, 82:55–72, 2018.
- AE Van Heerwaarden, Robert Kaas, and Marc J Goovaerts. Optimal reinsurance in relation to ordering of risks. *Insurance: Mathematics and Economics*, 8(1):11–17, 1989.
- Willemijn Vroege, Tobias Dalhaus, and Robert Finger. Index insurances for grasslands—a review for Europe and North-America. *Agricultural Systems*, 168:101–111, 2019.
- JM Wallace and S Vogel. Reports to the nation on our changing planet: El Niño and climate prediction. *NOAA Brochure*, 3, 1994.
- Ruodu Wang and Yunran Wei. Characterizing optimal allocations in quantile-based risk sharing. *Insurance: Mathematics and Economics*, 93:288–300, 2020.
- Zhiqiang Yan and Liang Hong. Testing for asymmetric information in reinsurance markets. *The Geneva Papers on Risk and Insurance-Issues and Practice*, 40(1):29–46, 2015.



## Chapitre 4

# De la réassurance optimale au partenariat optimal : une approche basée sur le taux de rétention

*Ce chapitre reprend l'article "From optimal reinsurance to optimal partnership contract : a retention rate approach", co-écrit avec Pauline Barrieu, Anne Eyraud-Loisel et Stéphane Loisel, soumis à l'ASTIN Bulletin.*

### Abstract

In this paper, we define a new relationship framework between an insurer and her reinsurer and we study the so-called optimal partnership contracts. These contracts are a generalization of traditional reinsurance. In our framework, in addition to the classical risk transfer mechanism, the reinsurer may help the insurer to underwrite more business, for example thanks to an innovative underwriting tool or thanks to some access to the reinsurer's network. We introduce the retention rate as the random proportion of the loss ultimately incurred by the insurer after risk transfer. In traditional reinsurance, the retention rate is bounded by 1. Thanks to the potential additional underwriting, the insurer's retention rate is potentially greater than 1. We first solve a unilateral partnership contracting problem when the retention rate is bounded and we enlarge it to the unbounded case. Then, we focus on a Pareto-optimal bilateral contracting problem. In this bilateral framework, we assume the claim risk profile of the insurer stands for a natural hedge against the reinsurer's initial exposure. We first prove that stop-loss is the optimal form of traditional reinsurance. Then, we provide the general form of the optimal contracting rules for both a bounded and an unbounded retention rate. We eventually show that optimal partnership outperforms traditional reinsurance.



*Keywords:* Risk management; Retention rate; Optimal risk sharing; Convex order.

## 4.1 Introduction

In this paper, we generalize traditional reinsurance contracts to so-called partnership contracts. The partnership is due to the fact the reinsurer may help the insurer to underwrite more business, for example thanks to an innovative underwriting tool or thanks to some access to the reinsurer's network. We examine the optimal partnership contracts in both unilateral and bilateral frameworks. In both cases, optimal partnership contracts outperform traditional reinsurance.

The approach is based on the retention rate, defined as the random proportion of the loss ultimately incurred by the insurer after a risk transfer. In traditional reinsurance, the retention rate is always smaller than 1. In our partnership contracting framework, the retention rate of the insurer can be greater than 1 thanks to the additional underwriting capacity.

We first deal with a unilateral optimal contracting problem. In the unilateral traditional reinsurance framework, [Van Heerwaarden et al. \(1989\)](#) have shown that the stop-loss is the form of reinsurance that minimizes the retention of the insurer in the convex order; see for instance the books by [Denuit et al. \(2006\)](#) and [Shaked and Shanthikumar \(2007\)](#) for a deep presentation of this stochastic order.

Our unilateral optimal contracting problem corresponds to the one of [Van Heerwaarden et al. \(1989\)](#) when the set of admissible reinsurance coverages is extended to the one of the admissible partnership contracts. Modifying the set of admissible reinsurance contracts has been studied mainly by [Gollier \(1987\)](#) and [Ghossoub \(2019\)](#), but in a radically different point of view.

To solve this unilateral problem, we use the retention rate and well known crossing-type result (see for instance [Ohlin \(1969\)](#)). In particular, we are interested in the case where the retention is bounded by a  $\beta < +\infty$  so that the underwriting tool only provides a limited quantity of additional business. The asymptotic case  $\beta \rightarrow +\infty$  is also examined, but the solution of the optimal partnership contract makes this case questionable from a practitioner's point of view. The main reason is that it leads to a partnership contract where there is no risk premium any more. From a technical point of view, this asymptotic case remains relevant since it allows to provide the explicit solution of the bilateral problem.

In fact, we then shift our attention to a bilateral problem involving the reinsurer's preferences and the notion of Pareto-optimality in our optimal contracting framework. Pareto-optimality in risk transfer design has been introduced by [Borch \(1962\)](#) and developed by e.g. [Gerber \(1978\)](#), [Raviv \(1979\)](#), [Barrieu and Scandolo \(2008\)](#) and recently updated by [Cai et al. \(2017\)](#) and [Asimit et al. \(2020\)](#).

The preferences of the insurer and the reinsurer are measured with the tail value-at-risk (TVaR). In this bilateral framework, we also take into account the claim risk profiles of the reinsurer and the insurer. We consider the reinsurer has an initial background risk and that the insurer's risk is a natural hedge against this initial exposure. This is how the reinsurer benefits from the partnership.

The question of risk taking behavior in presence of several sources of risk has already been raised, referred to either as random initial wealth in [Kihlstrom et al. \(1981\)](#), or as background risk or as non-insurable risk; see for instance [Tsetlin and Winkler \(2005\)](#) or [Franke et al. \(2006\)](#). However, the literature usually focuses on the insurer's initial exposure; see [Dana and Scarsini \(2007\)](#), and [Lu et al. \(2012, 2018\)](#) among others. In our paper, the link between the insurer's risk and the reinsurer's initial exposure is specified thanks to the recent work by [Cheung et al. \(2014\)](#) and [Barrieu et al. \(2020\)](#), leading to the notion of counter-monotonic risk reducer, which is a strong representation of the diversification effect.

In this bilateral setting, we first come back to the traditional reinsurance problem and we prove that the stop-loss is the optimal form of reinsurance. Next, we consider our optimal partnership contracting problem, by first allowing the insurer to increase her retention rate to a bounded level  $\beta > 1$ . We show that the solution is the one given in the unilateral problem and that it is more efficient than traditional stop-loss. Finally, we deal with the asymptotic case where the retention rate is unbounded. As for the unilateral case, the solution makes the reinsurer's safety loading vanish, which is not acceptable in practice.

More precisely, the paper is organized as follows. Section 4.2 recalls the seminal result of [Van Heerwaarden et al. \(1989\)](#) and introduces the retention rate. In Section 4.3, we focus on the unilateral optimal partnership problem. We first solve the partnership problem when the retention rate is bounded. Next we consider the asymptotic case where the retention can be infinite. The unilateral problems are at the basis of the solutions in the bilateral cases. Section 4.4 introduces the bilateral framework, describing the link between the insurer's risk and the reinsurer's initial exposure to eventually deal with the existence of Pareto-optimal solutions. Section 4.5 is concerned with the Pareto-optimal reinsurance problem. We prove that stop-loss is the optimal reinsurance contract but there is no simple form for the general solution. The paper is closed by Section 4.6 where we deal with the Pareto-optimal partnership problem. In the bounded case, we determine the form of the optimal partnership contract without providing explicit solutions due to intractable calculations. In the unbounded case, however, we manage to exhibit the explicit solutions of the problem.

## 4.2 Preliminaries on unilateral optimal reinsurance in convex order

This Section presents the general point of view adopted in this paper. For the paper to be self contained, we first recall the seminal result by [Van Heerwaarden et al. \(1989\)](#) and a geometric condition leading to convex order due to [Ohlin \(1969\)](#). Then we introduce the retention rate, which is at the basis of the approach developed in the remaining of the paper.

Before we proceed further, we assume that all random variables discussed in this paper are integrable and defined on a common probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . We rapidly recall that given two random variables  $A$  and  $B$ ,  $A$  is said to precede  $B$  the convex order, denoted by  $A \leq_{cx} B$ , if and only if  $\mathbb{E}[(A - t)_+] \leq \mathbb{E}[(B - t)_+]$  holds for all  $t \in \mathbb{R}$ . Equivalently,  $A \leq_{cx} B$  if and only if  $\text{TVaR}_p(A) \leq \text{TVaR}_p(B)$  for all  $0 \leq p < 1$  where  $\text{TVaR}_p(X) = \frac{1}{1-p} \int_p^1 \text{VaR}_s(X) ds$ ,  $\text{VaR}_s(X) = \inf\{x \in \mathbb{R}^+ \mid \mathbb{P}(X \leq x) \geq s\}$ . The interested reader is referred to [Denuit et al. \(2006\)](#) and [Shaked and Shanthikumar \(2007\)](#) for a deepest presentation of convex and related orders. Because we invoke properties related to TVaR later in the paper, we point out that TVaR is translative, positively homogeneous, subadditive, comonotonic additive and monotone, i.e. coherent in the sense of [Artzner et al. \(1999\)](#) and that  $\text{TVaR}_p(A) \geq \mathbb{E}[A]$  for all  $p \in [0, 1]$ .

### 4.2.1 Optimal retention in the convex sense

Our starting point is the unilateral optimal reinsurance problem consisting in finding the form of reinsurance that minimizes the retention of an insurer in the convex sense. This problem corresponds to the one examined and solved by [Van Heerwaarden et al. \(1989\)](#). Although the solution is well known, it is worth recalling it as it stands for a landmark in the remaining of the paper.

To this extent, let  $Y$  be the risk the direct insurer faces and we set  $\mathbb{E}[Y] = \mu > 0$ . We denote by  $\mathcal{I}$  the set of admissible reinsurance contracts, defined as

$$\mathcal{I} = \{I \mid I \text{ is non-negative, non-decreasing and } 1 - \text{Lipschitz}\}.$$

This set has been introduced by [Huberman et al. \(1983\)](#) and has become classical in the literature of optimal reinsurance design, mainly because it allows for reducing *ex-post* moral hazard; see [Lu et al. \(2018\)](#) and references therein. We point out the recent work of [Gerber et al. \(2019\)](#) which demonstrate that the Lipschitz condition is theoretically related to optimal risk sharing. A function  $I \in \mathcal{I}$  is referred to as a ceded loss function. A technical by-product is that every ceded loss function in  $\mathcal{I}$  is absolutely continuous with  $I(0) = 0$ .

We assume the price  $\pi$  of a coverage  $I \in \mathcal{I}$  is given by the widely used expected value principle, namely  $\pi[I(Y)] = (1 + \theta)\mathbb{E}[I(Y)]$ , where  $\theta \geq 0$  stands for the safety loading; see among many other [Kaluszka](#)

(2001), Cai and Tan (2007), Guerra and Centeno (2008), Chi and Tan (2011), Tan et al. (2011) or Cai and Weng (2016). Premium principles have been a widely studied topic; see among others Deprez and Gerber (1985) or Young (2004) for a deep analysis. In particular Tan et al. (2009) give a large overview of the role played by premiums in the design of optimal reinsurance. When the premium is determined by the expected value principle, the set of feasible contracts reduces to

$$\mathcal{I}_\nu = \{I \in \mathcal{I} \mid \mathbb{E}[I(Y)] = \nu\}.$$

In our unilateral framework, the insurer considers the retained risk after reinsurance. Consequently, the seminal unilateral problem corresponds to

$$\inf_{I \in \mathcal{I}_\nu} \{\text{TVaR}_\alpha(Y - g(Y))\}, \quad (\mathcal{P}_1)$$

where  $\alpha \in [0, 1]$ . We draw the attention to the fact that Problem  $(\mathcal{P}_1)$  is given for a fixed expectation  $\nu$ , i.e. we solve the problem for a given price. In addition, minimizing the TVaR of the retention is equivalent to minimizing the retention in the convex sense. Van Heerwaarden et al. (1989) demonstrate that stop-loss is the solution of Problem  $(\mathcal{P}_1)$ .

**Theorem 4.2.1.** (*Van Heerwaarden et al. (1989)*)

Let  $\nu \geq 0$  and  $d$  such that  $\mathbb{E}[(Y - d)_+] = \nu$ . Then  $Y - (Y - d)_+ \leq_{cx} Y - I(Y)$  holds for  $\forall I \in \mathcal{I}_\nu$ .

The mathematical tool hidden behind Theorem 4.2.1 is a powerful lemma due to Ohlin (1969) that transforms convex order into a crossing-type condition, namely

**Lemma 4.2.2.** (*Ohlin (1969)*) Let  $Y$  be a nonnegative random variable,  $I_1$  and  $I_2$  be two increasing functions such that  $\mathbb{E}[I_1(X)] = \mathbb{E}[I_2(X)]$ . If there exists an  $y_0$  such that  $I_1(y) \geq I_2(y)$ , for all  $y \leq y_0$  and  $I_1(y) \leq I_2(y)$ , for all  $y \geq y_0$ , then  $I_1(Y) \leq_{cx} I_2(Y)$  and we say that  $I_1$  up-crosses  $I_2$ .

Ohlin's lemma allows for adopting a very handy geometric approach, reducing convex ordering to a crossing condition. In the remaining of the paper, the functions  $I_1$  and  $I_2$  are seen as reinsurance contracts: if a contract is up-crossed by another contract, the latter is greater in the convex sense. This point is at the basis of the reasoning adopted all along this paper.

We are now ready to interpret Theorem 4.2.1. The insurer who wants to reduce her retention in the convex sense has to purchase the coverage containing as variability as possible. For a given  $\nu$  (i.e. for a given price), the corresponding stop-loss is up-crossed by all the elements of the set  $\mathcal{I}_\nu$ : it is then a supremum in the convex sense in this set.

When we fix the expectation at  $\nu$ , we denote the "corresponding contract  $I$ " as the one in  $\mathcal{I}_\nu$ . In addition, we say in short that a contract  $I_2$  is better than  $I_1$  if the retention obtained with  $I_2$  is smaller

in the convex order than the retention obtained with  $I_1$ .

Convex order appears then as a powerful tool when it comes to dealing with optimal reinsurance. More precisely, Van Heerwaarden et al. (1989) prove that many criteria for choosing optimal reinsurance treaties have the common property that a treaty is considered preferable to another if it is lower in stop-loss order. Such criteria include maximizing utility of wealth, minimizing ruin probability and minimizing the variance of the retained risk among many others. In particular, it is well known that many risk measures are consistent with convex order in that if  $\rho$  is such a measure, then  $Y_1 \leq_{cx} Y_2 \Rightarrow \rho(Y_1) \leq \rho(Y_2)$ . Theorem 4.2.1 explains the supremacy of the stop-loss in the early literature on the choice of a reinsurance contract; see e.g. Borch (1962), Arrow (1963) or Gerber (1978).

As we can see through the definition of the set  $\mathcal{I}$ , reinsurance payout can not be negative. In other words, the reinsurer takes the responsibility for a portion of the claims against a premium  $\pi$  paid by the insurer. It results from the set of admissible reinsurance contracts that the retention rate of the insurer is bounded by 1.

#### 4.2.2 The retention rate

Usually, reinsurance arrangements focus on two quantities, namely the ceded loss function and the resulting retention. In this paper, we shift our attention to the retention rate, defined as follows.

**Definition 4.2.1.** *For a given loss  $Y$  and a given reinsurance coverage  $I \in \mathcal{I}$ , the retention rate  $S_I$  is defined as*

$$S_I = \frac{Y - I(Y)}{Y}.$$

The random quantity  $S_I$  represents the random proportion of the loss ultimately incurred by the insurer. The retention after reinsurance  $I$  is then  $S_I Y$ . For instance, when the reinsurance contract is a quota share of level  $q$ , then  $S_{QS} = 1 - q = p$ , which is constant and consequently independent from the loss  $Y$ . On the other hand, when the contract is a stop-loss with retention  $d$ , then

$$S_{SL} = \mathbb{1}_{\{Y \leq d\}} + \frac{d}{Y} \mathbb{1}_{\{Y > d\}}. \quad (4.1)$$

We note that the function  $v : x \mapsto \mathbb{1}_{\{x \leq d\}} + \frac{d}{x} \mathbb{1}_{\{x > d\}}$  is decreasing for  $x \geq 0$ . Furthermore, the function  $x \mapsto v(x)x = x \mathbb{1}_{\{x \leq d\}} + d \mathbb{1}_{\{x > d\}}$  is non-decreasing and up-crosses  $x \mapsto px$ . From Lemma 4.2.2,  $S_{SL} Y \leq_{cx} pY$ : the stop-loss is better than the corresponding quota-share. This is not new, since Theorem 3.3.2 of Van Heerwaarden et al. (1989) can be adapted to the retention rate point of view.

**Theorem 4.2.3.** (directly adapted from *Van Heerwaarden et al. (1989)*) Let  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}_\nu$ . If an  $y_0 \geq 0$  exists such that  $S_{I_1}(y) \leq S_{I_2}(y)$  for  $0 \leq y \leq y_0$  and  $S_{I_1}(y) \geq S_{I_2}(y)$  for  $y > y_0$ , then  $S_{I_2}Y = Y - I_2(Y) \leq_{cx} S_{I_1}Y = Y - I_1(Y)$ .

**Remark 4.2.1.** The genesis of the approach based on the retention rate comes from random contractions, defined as the product of two independent random variables (see e.g. *Lefèvre et al. (2020)*). If one is interested in comparing two products  $A_1B_1$  with  $A_2B_2$ , then it can be shown by means of correlation order that the smaller product in the convex order is the one where  $(A_1, B_1)$  is counter-monotonic. In particular, the retention rate of the stop-loss is a decreasing function of the loss, yielding the counter-monotonicity of  $(S_{SL}, Y)$ .

Theorem 4.2.3 transposes the geometric approach based on the ceded loss functions of Lemma 4.2.2 into a geometric comparison between the retention rates. Therefore, the retention rate approach is at the basis of the development of our optimal contracting framework. In the next Section we present the unilateral contracting problems.

## 4.3 On unilateral optimal partnership contract

### 4.3.1 Optimal unilateral contracting with bounded retention rate

Later on, we shall consider the case where the retention rate is unbounded. However, as a first step, we allow the retention rate to be greater than 1 but we bound it by a  $\beta < +\infty$ . Coming back to our illustration, it corresponds to the case where the increase in underwriting potential is bounded, which is a reasonable assumption. We later consider the case where the retention rate is unbounded. We introduce the set  $\mathcal{G}$  defined as

$$\mathcal{G} = \{g : x \mapsto g(x) \mid x - g(x) \leq y - g(y) \text{ holds for } x \leq y \in \mathbb{R}\}. \quad (4.2)$$

Note that  $\mathcal{I} \subset \mathcal{G}$  and elements of  $\mathcal{G}$  can not have a slope greater than 1. More importantly, the set  $\mathcal{G}$  is built so that the only constraint on the reinsurance coverage  $g$  is that it yields a non-decreasing retention. This point allows us to keep using the powerful Lemma 4.2.2. The interest of the contract based on the partnership is relevant if we compare it with the traditional reinsurance having the same price. In our context, the price is given by the expected value premium principle. Therefore, we define

$$\mathcal{G}_\nu = \{g \in \mathcal{G} \mid \mathbb{E}[g(Y)] = \nu\}.$$

We eventually obtain the set of admissible partnership contracts with a bounded retention rate. Let  $1 \leq \beta < +\infty$  and define

$$\mathcal{G}_\nu^\beta = \{g \in \mathcal{G}_\nu \mid S_g(x) \leq \beta, \forall x \in \mathbb{R}^+\}.$$

The problem for the insurer is now to solve

$$\inf_{g \in \mathcal{G}_\nu^\beta} \{\text{TVaR}_\alpha(Y - g(Y))\}. \quad (\mathcal{P}_1 \text{ in } \mathcal{G}_\nu^\beta)$$

Again, we draw the attention to the fact that Problem  $(\mathcal{P}_1 \text{ in } \mathcal{G}_\nu^\beta)$  is given for a fixed expectation  $\nu$ , i.e. we still work at fixed price. Moreover, note that  $\mathcal{I}_\nu \subset \mathcal{G}_\nu^\beta$  hence the stop-loss with expectation  $\nu$  is an element of  $\mathcal{G}_\nu^\beta$ .

Proposition 4.3.1 solves Problem  $(\mathcal{P}_1 \text{ in } \mathcal{G}_\nu^\beta)$ .

**Proposition 4.3.1.** *Let  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $0 \leq \nu \leq \mu$  and  $\beta \geq 1$ . The solution of Problem  $(\mathcal{P}_1 \text{ in } \mathcal{G}_\nu^\beta)$  is given by*

$$g_\nu^\beta(x) = (1 - \beta)x\mathbb{1}_{\{x \leq \tilde{d}\}} + (x - \beta\tilde{d})\mathbb{1}_{\{x > \tilde{d}\}}, \quad (4.3)$$

with retention rate

$$S_\nu^\beta(x) = \beta\mathbb{1}_{\{x \leq \tilde{d}\}} + \frac{\beta\tilde{d}}{x}\mathbb{1}_{\{x > \tilde{d}\}}, \quad (4.4)$$

where  $\tilde{d}$  is such that  $\mathbb{E}[(Y - \tilde{d})_+] = \mu - \frac{\nu}{\beta}$ .

*Proof.* First, let us check that  $g_\nu^\beta$  given by Equation (4.3) is an element of  $\mathcal{G}$ .

- Case 1:  $x \leq y \leq \tilde{d}$ :  $y - g_\nu^\beta(y) - (x - g_\nu^\beta(x)) = y - y + \beta y - (x - (x - \beta x)) = \beta(y - x) \geq 0$ .
- Case 2:  $x \leq \tilde{d} \leq y$ :  $y - g_\nu^\beta(y) - (x - g_\nu^\beta(x)) = y - y + \beta\tilde{d} - (x - (x - \beta x)) = \beta(\tilde{d} - x) \geq 0$ .
- Case 3:  $\tilde{d} \leq x \leq y$ :  $y - g_\nu^\beta(y) - (x - g_\nu^\beta(x)) = y - y + \beta\tilde{d} - (x - (x - \beta\tilde{d})) = 0$ .

For  $g$  to be an element of the set  $\mathcal{G}_\nu$ , we must have  $\mathbb{E}[g(Y)] = \nu$ . Let  $I_{SL}(Y) = (Y - d)_+$  be such that  $\mathbb{E}[I_{SL}(Y)] = \nu$ . Then we have  $\mathbb{E}[S_g Y] = \mathbb{E}[Y - I_{SL}(Y)]$ , yielding

$$\beta = \frac{\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[(Y - d)_+]}{\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[(Y - \tilde{d})_+]} = \frac{d - \mathbb{E}[(d - Y)_+]}{\tilde{d} - \mathbb{E}[(\tilde{d} - Y)_+]} = \frac{\nu}{\mu - \mathbb{E}[(Y - \tilde{d})_+]}, \quad (4.5)$$

yielding  $\mathbb{E}[(Y - \tilde{d})_+] = \mu - \frac{\nu}{\beta}$ .

We must now verify that  $S_\nu^\beta Y \leq_{cx} S_g Y$  holds for all  $g \in \mathcal{G}_\nu^\beta$ . We refer to Figures 41 for an illustration of the following situation. Let  $g \in \mathcal{G}_\nu^\beta$  and denote by  $S_g$  its retention rate. First, assume  $S_g(y) < S_\nu^\beta(y)$  for  $y \leq \beta\tilde{d}$ . For  $g$  to be in  $\mathcal{G}_\nu^\beta$ , there exists an  $y_0 \geq \beta\tilde{d}$  such that  $S_\nu^\beta(y) \geq S_g(y)$  for  $y \leq y_0$  and  $S_\nu^\beta(y) \leq S_g(y)$  for  $y \geq y_0$ . This can be rewritten as  $g_\nu^\beta(y) \leq g(y)$  for  $y \leq y_0$  and  $g_\nu^\beta(y) \geq g(y)$  for  $y \geq y_0$ . In particular  $g_\nu^\beta(y) = y - \beta\tilde{d}$  for  $y \geq y_0$ , i.e.  $g_\nu^\beta$  already has a slope of 1. To this extent, once  $g$  is under  $g_\nu^\beta$ ,  $g$  can not cross  $g_\nu^\beta$ . It results from this that the  $y_0$  is unique. We then obtain that  $S_g$  and  $S_\nu^\beta$  cross once. Theorem 4.2.3 yields the announced result in this case.

Second, assume there exists a retention rate  $\bar{S}_g$  such that there exists an  $y_0 > \tilde{d}$  with  $\bar{S}_g(y) \geq S_\nu^\beta(y)$  for  $y \leq y_0$  and  $\bar{S}_g(y) \leq S_\nu^\beta(y) = \beta\tilde{d}/y$  for  $y \geq y_0$ . This case is represented in Figure 42. With the particular form of  $\bar{S}_g$ , and by denoting as  $\bar{g}$  the ceded loss function corresponding to  $\bar{S}_g$ , then

$$\bar{g}(y) \leq g_\nu^\beta(y) \text{ for } y \leq y_0, \text{ and } \bar{g}(y) \geq g_\nu^\beta(y) = y - \beta\tilde{d} \text{ for } y \geq y_0.$$

Again, this is only possible if the slope of  $\bar{g}$  is greater than 1 for  $y \geq y_0$ . This is not possible in  $\mathcal{G}_\nu^\beta \subset \mathcal{G}$ . As a result, we have shown that  $S_\nu^\beta Y \leq_{cx} S_g Y$  holds for all  $g \in \mathcal{G}_\nu^\beta$ .  $\square$

The retention rate  $S_\nu^\beta$  corresponds to the one of a stop-loss with retention  $\tilde{d}$  multiplied by the factor  $\beta > 1$ . To this extent, the insurer multiplies by  $\beta$  her quantity of claims smaller than  $\beta\tilde{d}$  and keep transferring her claims greater than  $\beta\tilde{d}$  to her reinsurer. We point out that her retained claims are smaller than the ones she retains when she purchases the corresponding traditional stop-loss. In fact, define the function  $u : x \mapsto \frac{x - \mathbb{E}[(x-Y)_+]}{x}$  for  $x \geq 0$ , which can be rewritten as  $u(x) = 1 - \frac{1}{x} \int_0^x F_Y(t) dt$ , which is decreasing. Consequently, since  $\tilde{d} \leq d$ ,  $u(d) \leq u(\tilde{d})$ . From (4.5), the value of  $\beta$  verifies  $\beta \leq d/\tilde{d}$ .

The major conclusion of Proposition 4.3.1 is that

$$S_\nu^\beta Y \leq_{cx} S_{SL} Y.$$

The optimal partnership contract yields a smaller retention in the convex sense than the one obtained with the corresponding stop-loss. For the same price, the partnership contract is more efficient than the stop-loss.

### 4.3.2 Optimal unilateral contracting with unbounded retention rate

For a fixed  $\beta := \beta_1$ , taking  $\beta_2 > \beta_1$  yields  $S_\nu^{\beta_2} Y \leq_{cx} S_\nu^{\beta_1} Y$  by the same geometric reasoning. In fact, we can see that increasing the value of the maximal retention rate reduces the horizontal portion of the retention rate  $S_\nu^\beta$ , for a given  $\nu$ . When the retention is unbounded, the optimal contracting problem reduces to

$$\inf_{g \in \mathcal{G}_\nu} \{\text{TVaR}_\alpha(Y - g(Y))\}. \quad (\mathcal{P}_1 \text{ in } \mathcal{G}_\nu)$$

From the geometrical approach developed in the proof of Proposition 4.3.1, the best retention rate is thus the one with no horizontal portion, leading to the solution of Problem  $(\mathcal{P}_1 \text{ in } \mathcal{G}_\nu)$ , given in the following proposition.

**Proposition 4.3.2.** *Let  $\mu = \mathbb{E}[Y] \geq \nu > 0$  and  $g^*(y) = y - (\mu - \nu)$ . Then  $S_{g^*} Y \leq_{cx} S_g Y$  holds for all  $g \in \mathcal{G}_\nu$ .*



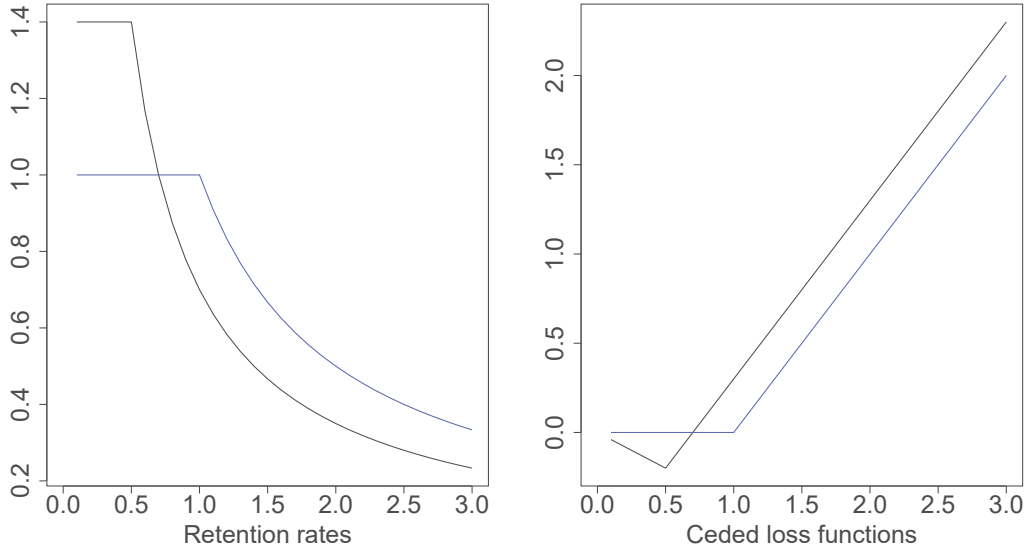


Figure 41 – Left hand side:  $S_\nu^\beta$  defined by Equation (4.4) (dashed black line) and  $S_{SL}$  (solid blue line); Right hand side:  $x - g_\nu^\beta(x)$  (dashed black line) and  $x - I_{SL}(x)$  (solid blue line).

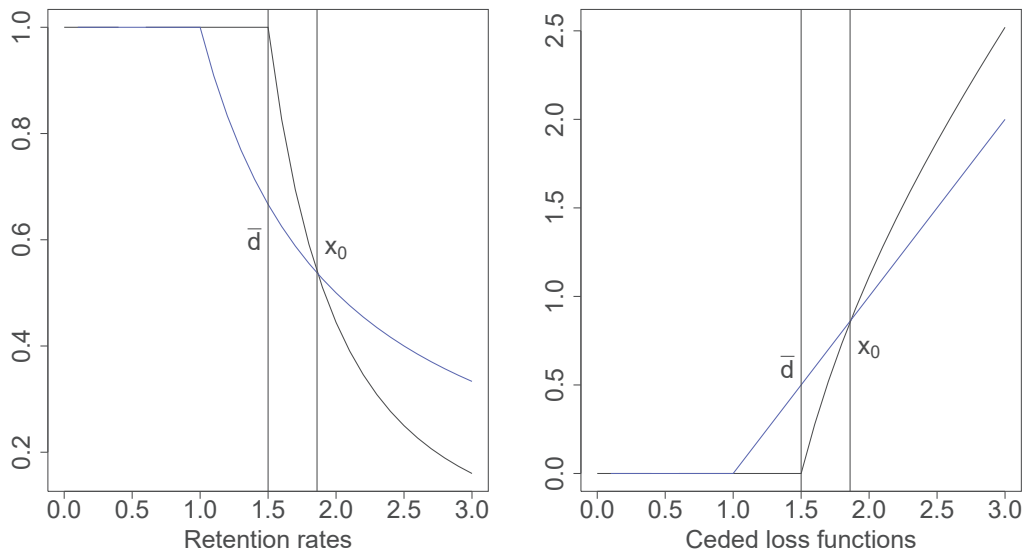


Figure 42 – Left hand side: the retention rate of the stop-loss (solid blue line) and a possible  $\bar{s}$  (dashed black line). Right hand side:  $I_{SL}$  (solid blue line) and  $\bar{g}$  (dashed black line).

*Proof.* The idea of the proof lies in the shape of the dashed black curve in Figure 41 since it consists in reducing the length of its horizontal portion. In  $\mathcal{G}_\nu$ , the retention rate with the smallest horizontal portion is  $S^* = \frac{\mu - \nu}{Y}$ , yielding  $g^*(y) = y - (\mu - \nu)$ .

Note that the slope of  $g^*$  is exactly 1. Again, once a  $g \in \mathcal{G}_\nu$  is under  $g^*$ , this  $g$  can not cross  $g^*$ . In other words, any element of the set  $\mathcal{G}_\nu$  up-crosses  $g^*$ . Theorem 4.2.3 yields the announced result.  $\square$

Let us stop to provide the interpretation of the form of  $g^*$ . First of all, the form of the optimal contract means that the insurer always fully transfers her loss ( $+y$ ) whereas the term  $\mu - \nu$  plays the role of a compensator to meet the price constraint (or equivalently, to meet the constraint on the expected value).

Next, the final retention of the insurer is given by

$$S_{g^*}Y + (1 + \theta)\nu = Y - (Y - \mu + \nu) + (1 + \theta)\nu = \mu + \theta\nu,$$

and it turns out that it is not random any more but only depends on  $\nu$ . Since the insurer wants her retention to be as small as possible,  $\nu = 0$  is the best solution. Consequently, the final retention is merely  $\mu$ . Note that  $\mu \leq \text{TVaR}_\alpha(Y)$  holds for all  $\alpha \in (0, 1)$  and  $g^*(y) = y - \mu$  leads hopefully to a better retention than the case where the insurer does not purchase any reinsurance at all. More precisely, when  $\nu = 0$ ,  $\mathbb{E}[g^*(Y)] = 0$  too. In other words, the best transaction is, in term of the price, free.

However, the monetary flow is not zero: the insurer transfers her full loss but has to “pay” the amount of the expected value of her loss. This situation corresponds to the case where the insurer transfers her full loss to a representative reinsurer whose safety loading is  $\theta = 0$ . The realism of the case of an unbounded retention rate is therefore questionable. The risk premium of the reinsurer is 0, which is not satisfactory from a practitioner’s point of view. Nevertheless, this asymptotic case remains an interesting problem. In addition, we prove later in the paper that the solution of the bilateral unbounded partnership problem can be used to solve a traditional reinsurance problem for which there is no explicit solution.

To close the unilateral point of view, we have eventually shown that

$$S_{g^*}Y \leq_{cx} S_\nu^\beta Y \leq_{cx} S_{SL}Y,$$

where  $\mathbb{E}[S_{g^*}Y] = \mathbb{E}[S_\nu^\beta Y] = \mathbb{E}[S_{SL}Y] = \mu - \nu$ . The optimal partnership is then more efficient than traditional reinsurance.

Note that the convex comparison holds since the premium asked by the reinsurance is only based on the expectation of the coverage; this is the major limit of the result. The fact expected premium principle has been widely used in the literature of optimal insurance is mainly because it allows for tractable calculation and clear comparison. In other words, the fact the price of a coverage is only determined by its expectation makes the comparison between coverages having the same price easier.

For the moment, the reinsurer’s preferences barely appear in the formulation of the problem whereas we claim that our paper is motivated by the potential partnership between the insurer and her reinsurer. The next step of our partnership framework is to take into account the preferences of the reinsurer in the overall transaction.

## 4.4 A bilateral risk sharing framework

The previous Section focuses on the insurer’s side. We prove that the fact the insurer benefits from the reinsurer’s underwriting support allows her to have a retention rate greater than one and to eventually reduce her retention in the convex sense. Most importantly, we have shown that the resulting retention is smaller than the one obtained with the corresponding stop-loss. As a partnership should take into account the preferences of both the insurer and the reinsurer, it is now time to examine the reinsurer’s side. We assume the reinsurer uses  $\text{TVaR}_\beta$ ,  $\beta \in (0, 1)$  to measure her exposure. The fact we choose the TVaR to measure the preferences of both the insurer and the reinsurer relies on the fact that it allows for conserving the clear geometric approach based on Ohlin’s lemma. Also, TVaR is a widely used risk measure, and we point out that our setting is very akin to the one of [Cai et al. \(2017\)](#) and [Asimit et al. \(2020\)](#). To this extent, it seems important to highlight that from a bilateral point of view, the added value of the paper is, as far as we are aware of the literature, twofold. First we take into account the initial exposure of the reinsurer by assuming she is exposed to a risk  $X$  before she sells any coverage to the insurer. Second, the fact we focus of an optimal contracting problem leads to solve the bilateral problem by considering  $\mathcal{G}$  as the admissible set instead of the traditional  $\mathcal{I}$ .

### 4.4.1 The link between $X$ and $Y$

The motivation of the partnership from the reinsurer’s side has been brought to attention by a real world situation. In practice, the reinsurer already has initial exposure before she enters into a contracting relationship with the insurer. Moreover, there exist some situations where the initial background of the reinsurer and the risk of the insurer are negatively correlated such as mortality and longevity risks ([Barrieu et al. \(2012\)](#)) or the alternation of El Niño and La Niña cycles. For instance, hurricanes season is intense in the US under La Niña phenomenon whereas the intensity decreases during El Niño phenomenon (see e.g. [Glantz \(2001\)](#)). As a result, when a reinsurer exposed to La Niña or to mortality risk bears the risk of an insurer exposed to El Niño or to longevity risk, she benefits from a natural hedge against her initial background risk. To this extent, this is how the reinsurer takes advantage of the partnership too.

Formally, the fact the insurer’s risk stands for a natural hedge for the reinsurer’s initial exposure makes  $Y$  be a counter-monotonic risk reducer for the reinsurer’s initial exposure  $X$  in the sense that

$Y \in H(X)$ , with

$$H(X) = \{Y \mid (Y, X + Y) \text{ is counter-monotonic}\}.$$

This set  $H$  has been introduced by [Cheung et al. \(2014\)](#) and they show that  $Y \in H(X) \iff Y = -h(X)$ ,  $h$  being a non-decreasing and 1-Lipschitz function. The set  $H(X)$  has recently received a particular attention in [Barrieu et al. \(2020\)](#), where a new characterization of the set is derived, namely

$$H(X) = \{Y \mid X + Y \leq_{cx} X + Z, \forall Z \leq_{cx} Y\}.$$

From then on, the set  $H(X)$  encompasses all the positions  $Y$  such that the merged position  $X + Y$  is preferred to any other position  $X + Z$  although  $Z$  is less variable than  $Y$ . Consequently, this particular characterization leads to two main results, that we recall from [Barrieu et al. \(2020\)](#).

**Proposition 4.4.1.** ([Barrieu et al. \(2020\)](#)) *Let  $Y \in H(X)$ . Then the following assertions hold:*

- i)  $I(Y) \in H(X)$  for all  $I \in \mathcal{I}$ .*
- ii) If  $I_1(Y) \leq_{cx} I_2(Y)$ , then  $X + I_2(Y) \leq_{cx} X + I_1(Y)$ .*

The fact  $(X, Y)$  is counter-monotonic is a strong assumption on the link between the reinsurer's initial exposure and the insurer's risk. Coming to back to the illustrative examples, mortality risk is rather a variability risk and longevity risk is rather a trend risk. For instance the impact of a pandemic on mortality risk highly differs from the impact on longevity risk. In the same spirit, risks related to El Niño and La Niña are negatively correlated but not in a perfect way: the intensity of hurricanes is in average lower during El Niño phenomenon than during La Niña cycle. Nevertheless, we believe that taking  $Y \in H(X)$  stands for a reasonable first approximation and it is first step for further research concerning the role of the correlation between the reinsurer's initial background risk and the insurer's risk in optimal bilateral risk transfer problem. The fact  $Y \in H(X)$  allows for technical simplifications. On the one hand, the reinsurer is keen on accepting the variability of the insurer (Proposition 4.4.1 *ii*). On the other hand the merged position  $X + I(Y)$  can be rewritten as  $X + I(-h(X))$ : it only depends on  $X$ . Based on these comments, we assume from here and subsequently  $Y \in H(X)$ .

#### 4.4.2 Pareto optimality in risk transfer mechanisms

Now, we provide the form of the bilateral problem involving the insurer exposed to a risk  $Y$  and the reinsurer initially exposed to  $X$ . As already mentioned, our general setting is very closed to the one of [Cai et al. \(2017\)](#) and [Asimit et al. \(2020\)](#); we hence use the same notations.

In the remaining of the paper, we are interested in the derivation of the optimal reinsurance, and of the optimal partnership contracting when the retention rate is bounded and when it is not. As a result, we adopt a general point of view in the section, by denoting as  $\mathcal{A}$  the general set of admissible contracts: the set of traditional reinsurance contracts  $\mathcal{A} = \mathcal{I}$  (Section 4.5), the set of admissible partnership

contracts when the retention rate is bounded  $\mathcal{A} = \mathcal{G}^\beta$  (Section 4.6.1) or unbounded  $\mathcal{A} = \mathcal{G}$  (Section 4.6.2). Also, we denote by  $f$  a general risk transfer coverage in  $\mathcal{A}$ .

Following on from Sections 4.2 and 4.3, we still assume the price for reinsurance is given by the expected value principle, with a safety loading  $\theta \geq 0$ . From then on, we define

$$R_f = Y - f(Y) + (1 + \theta)E[f(Y)] \quad \text{and} \quad C_f = X + f(Y) - (1 + \theta)E[f(Y)],$$

where  $R_f$  represents the risk exposure of the insurer (R for retention) and  $C_f$  the one of the reinsurer (C for ceded).

In what follows, we call the 6-tuple  $(Y, X, \text{TVaR}_\alpha, \text{TVaR}_\beta, \theta, \mathcal{A})$  a reinsurance setting: the insurer's risk is  $Y$ , the reinsurer's one is  $X$ , the insurer measures her retention with  $\text{TVaR}_\alpha$  whereas the reinsurer uses  $\text{TVaR}_\beta$ , the safety loading is  $\theta$  and the set of admissible risk transfers is  $\mathcal{A}$ .

In this paper, we use the concept of Pareto-optimality to study Pareto-optimal reinsurance contracts under a general reinsurance setting  $(Y, X, \text{TVaR}_\alpha, \text{TVaR}_\beta, \theta, \mathcal{A})$ . Generally speaking, a Pareto-optimal reinsurance policy is one in which neither of the two parties can be better off without making the other worse off. The formal definition is hence the following.

**Definition 4.4.1.** *Let  $(Y, X, \text{TVaR}_\alpha, \text{TVaR}_\beta, \theta, \mathcal{A})$  be a reinsurance setting. A risk transfer contract  $f^* \in \mathcal{A}$  is called Pareto-optimal under  $(Y, X, \text{TVaR}_\alpha, \text{TVaR}_\beta, \theta, \mathcal{A})$ , if there is no  $f \in \mathcal{A}$  such that  $\text{TVaR}_\alpha(R_f) \leq \text{TVaR}_\alpha(R_{f^*})$  and  $\text{TVaR}_\beta(C_f) \leq \text{TVaR}_\beta(C_{f^*})$ , and at least one of the two inequalities is strict.*

Based on the work of Gerber (1978), Barrieu and Scandolo (2008), Cai et al. (2017) and Asimit et al. (2020), we consider the following weighted aggregate risk minimization problem for the buyer ( $R_f$ ) and the seller ( $C_f$ ): for any  $\lambda \in (0, 1)$ ,

$$\inf_{f \in \mathcal{A}} \{ \lambda \text{TVaR}_\alpha(R_f) + (1 - \lambda) \text{TVaR}_\beta(C_f) \}. \quad (\mathcal{P}_2 \text{ in } \mathcal{A})$$

The parameters  $\lambda$  and  $1 - \lambda$  can be seen as the bargaining powers of the insurer and the reinsurer, respectively. Solving Problem  $(\mathcal{P}_2 \text{ in } \mathcal{A})$  consists in providing the solution of the minimization for each  $\lambda$ . As a first step, we focus on the existence of the Pareto-optimal reinsurance policies in a general reinsurance setting  $(Y, X, \text{TVaR}_\alpha, \text{TVaR}_\beta, \theta, \mathcal{A})$ .

To this extent, let  $\mathcal{S} = \cup_{\lambda \in (0,1)} \mathcal{S}_\lambda$  where  $\mathcal{S}_\lambda := \text{argmin}_{f \in \mathcal{A}} \{ \lambda \text{TVaR}_\alpha(R_f) + (1 - \lambda) \text{TVaR}_\beta(C_f) \}$  is the set of all minimizer(s) for Problem  $(\mathcal{P}_2 \text{ in } \mathcal{A})$ , for each  $\lambda \in (0, 1)$ . The following theorem is a direct adaptation of Theorem 3.1 in Asimit et al. (2020).

**Theorem 4.4.1.** *(adapted from Asimit et al. (2020))  $f \in \mathcal{A}$  is Pareto-optimal if and only if  $f \in \mathcal{S}$ .*

*Proof.* Assume  $f \in \mathcal{S}$  such that  $f$  is not Pareto-optimal in  $\mathcal{A}$ . Then there exists  $\hat{f} \in \mathcal{A}$  such that  $\text{TVaR}_\alpha(R_{\hat{f}}) \leq \text{TVaR}_\alpha(R_f)$  and  $\text{TVaR}_\beta(C_{\hat{f}}) \leq \text{TVaR}_\beta(C_f)$ , and at least one of the two inequalities is strict. Then  $\lambda \text{TVaR}_\alpha(R_{\hat{f}}) + (1 - \lambda) \text{TVaR}_\beta(C_{\hat{f}}) < \lambda \text{TVaR}_\alpha(R_f) + (1 - \lambda) \text{TVaR}_\beta(C_f)$ . Thus  $f \notin \mathcal{S}$ , a contradiction.

According to [Asimit et al. \(2020\)](#), it is sufficient to show that the set

$$\mathcal{C} := \{(\text{TVaR}_\alpha(R_f), \text{TVaR}_\beta(C_f)) : f \in \mathcal{A}\}$$

is convex. The remaining arguments are provided by a standard application of the Hahn-Banach separation theorem; see e.g. Theorem 11.3 of [Rockafellar \(1970\)](#). Let  $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$  and  $u \in [0, 1]$  and define  $\tilde{f} = uf_1 + (1 - u)f_2$ . We have  $u \text{TVaR}_\alpha(R_{f_1}) + (1 - u) \text{TVaR}_\alpha(R_{f_2}) = \text{TVaR}_\alpha(R_{\tilde{f}})$  and  $u \text{TVaR}_\beta(C_{f_1}) + (1 - u) \text{TVaR}_\beta(C_{f_2}) = \text{TVaR}_\beta(C_{\tilde{f}})$ . The question is now to show that  $\tilde{f} \in \mathcal{A}$ . We directly obtain  $\tilde{f} \in \mathcal{S}$  and  $\tilde{f} \in \mathcal{G}$  when  $f_1$  and  $f_2$  are elements of  $\mathcal{S}$  and  $\mathcal{G}$  respectively. When  $\mathcal{A} = \mathcal{G}^\beta$ , then

$$S_{\tilde{f}}(y) = \frac{y - (uf_1(y) + (1 - u)f_2(y))}{y} = uS_{f_1}(y) + (1 - u)S_{f_2}(y) \leq \beta.$$

Consequently,  $\tilde{f} \in \mathcal{A}$  and  $\mathcal{C}$  is a convex set. □

Solving the Problem ( $\mathcal{P}_2$  in  $\mathcal{A}$ ) yields Pareto-optimal risk transfer solutions. As for the unilateral case, we are first concerned with solving Problem ( $\mathcal{P}_2$  in  $\mathcal{S}$ ), i.e. we solve the bilateral reinsurance problem. This traditional reinsurance problem stands for a landmark when it comes to evaluating the efficiency of our optimal partnership contracts.

## 4.5 On bilateral optimal reinsurance

In this Section, we solve Problem ( $\mathcal{P}_2$  in  $\mathcal{S}$ ) for the reinsurance setting  $(Y, X, \text{TVaR}_\alpha, \text{TVaR}_\beta, \theta, \mathcal{S})$ , i.e. when the premium is given by the expected value principle and the set of admissible reinsurance contracts is  $\mathcal{S}$ . In this case, Problem ( $\mathcal{P}_2$  in  $\mathcal{S}$ ) reduces to

$$\inf_{I \in \mathcal{S}} \{\lambda \text{TVaR}_\alpha(Y - I(Y)) + (1 - \lambda) \text{TVaR}_\beta(X + I(Y)) + (2\lambda - 1)(1 + \theta) \mathbb{E}[I(Y)]\}. \quad (\mathcal{P}_2 \text{ in } \mathcal{S})$$

### 4.5.1 A Pareto-optimal subset

According to Theorem 4.2.1, for a given expectation, or equivalently in our setting for a given price, the insurer prefers the stop-loss. In addition, note that for a given  $\nu \geq 0$ ,  $I_{SL}(y) = (y - d)_+$  with  $d$  such that  $\mathbb{E}[(Y - d)_+] = \nu$  is the supremum convex in  $\mathcal{S}_\nu$ .

As a result, the stop-loss minimizes the situation of the reinsurer in virtue of Proposition 4.4.1 *ii*) and it is at the same time the most efficient form of reinsurance from the insurer's point of view. We hence obtain the solution of Problem ( $\mathcal{P}_2$  in  $\mathcal{I}$ ) when the price is fixed. To this extent, let

$$\mathcal{E}_{SL,\nu} := \lambda \text{TVaR}_\alpha(Y \wedge d) + (1 - \lambda) \text{TVaR}_\beta(X + (Y - d)_+) + (2\lambda - 1)(1 + \theta)\nu,$$

where  $d$  is such that  $\mathbb{E}[(Y - d)_+] = \nu$  and

$$\mathcal{E}_{I,\nu} := \lambda \text{TVaR}_\alpha(Y - I(Y)) + (1 - \lambda) \text{TVaR}_\beta(X + I(Y)) + (2\lambda - 1)(1 + \theta)\nu.$$

**Theorem 4.5.1.** *Let  $Y \in H(X)$  and  $0 \leq \nu \leq \mu$ . Let  $d$  be such that  $\mathbb{E}[(Y - d)_+] = \nu$ . Then,*

$$\mathcal{E}_{SL,\nu} \leq \mathcal{E}_{I,\nu}, \quad \forall I \in \mathcal{I}_\nu.$$

*Proof.* The proof is immediate combining Theorem 3.3.2 of [Van Heerwaarden et al. \(1989\)](#) for the insurer's side and Proposition 4.4.1 *ii*) for the reinsurer's side.  $\square$

Coming back to the reasons that motivated us to assume that  $Y \in H(X)$ , Theorem 4.5.1 can be interpreted as follows. For a given price, the insurer wants to reduce her retention in the convex sense and we know this is done by purchasing a stop-loss. This stop-loss is accepted by the reinsurer since the insurer's risk is a natural hedge against her initial exposure. As a result, the reinsurer wants the coverage to contain as variability as possible: the stop-loss is hence the best solution.

Theorem 4.5.1 stands for an important milestone in the derivation of the solution of Problem ( $\mathcal{P}_2$  in  $\mathcal{I}$ ) since it reduces the dimension from infinite to one, namely the retention of the stop-loss  $d$ . The reduced problem is then

$$\min_{d \in \mathbb{R}^+} \{ \lambda \text{TVaR}_\alpha(Y \wedge d) + (1 - \lambda) \text{TVaR}_\beta(X + (Y - d)_+) + (2\lambda - 1)(1 + \theta) \mathbb{E}[(Y - d)_+] \}. \quad (\text{reduced } \mathcal{P}_2 \text{ in } \mathcal{I})$$

The major contribution of this section is

$$\text{Solving Problem } (\mathcal{P}_2 \text{ in } \mathcal{I}) \iff \text{Solving Problem (reduced } \mathcal{P}_2 \text{ in } \mathcal{I}).$$

## 4.5.2 General solution of the bilateral reinsurance problem

The last task we face is to obtain the value of the retention that solves Problem (reduced  $\mathcal{P}_2$  in  $\mathcal{I}$ ). To do so, we first give the closed form of  $\text{TVaR}_\beta(X + (Y - d)_+)$ . We recall that  $Y \in H(X) \iff Y = -h(X)$ ,  $h$  being a non-decreasing and 1-Lipschitz function.

**Proposition 4.5.1.** *Let  $Y \in H(X)$  and  $d \geq 0$ . In addition, define  $\beta^* = F_X(h^{-1}(-d))$ . Then*

$$\text{TVaR}_\beta(X + (Y - d)_+) = \begin{cases} \text{TVaR}_\beta(X) - \frac{1}{1 - \beta} \left( \int_\beta^{\beta^*} h(F_X^{-1}(s)) ds + d(\beta^* - \beta) \right), & \beta \leq \beta^*, \\ \text{TVaR}_\beta(X), & \beta \geq \beta^*. \end{cases} \quad (4.6)$$

The proof, based on direct calculations, is omitted for reason of brevity. The insurer's side is given by

$$\text{TVaR}_\alpha(Y \wedge d) = d\mathbb{1}_{\{\alpha \geq F_Y(d)\}} + \left( \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^{F_Y(d)} F_Y^{-1}(s) ds + d \frac{1 - F_Y(d)}{1-\alpha} \right) \mathbb{1}_{\{\alpha < F_Y(d)\}}.$$

To make the reading easier, let

$$\phi(\nu, \lambda, \theta) = \lambda \text{TVaR}_\alpha(Y \wedge d_\nu) + (1-\lambda) \text{TVaR}_\beta(X + (Y - d_\nu)_+) + (2\lambda - 1)(1 + \theta)\nu,$$

where  $d_\nu$  is such that  $\mathbb{E}[(Y - d_\nu)_+] = \nu$ . As we can see, there is no simple formula for  $\phi$ , but we note that  $\nu \mapsto \text{TVaR}_\beta(X + (Y - d_\nu)_+)$  is non-decreasing whereas  $\nu \mapsto \text{TVaR}_\alpha(Y \wedge d_\nu)$  is non-increasing.

As a result, when  $\lambda < 1/2$ ,  $(2\lambda - 1)(1 + \theta)\nu$  is negative and there exists a value of  $\theta$  such that the sum of the three components of the function  $\phi(\cdot, \lambda, \theta)$  is decreasing in  $\nu$ . On the other hand, when  $\lambda > 1/2$ , the term  $(2\lambda - 1)(1 + \theta)\nu$  is an increasing function of  $\nu$ . Again, there exists a value of  $\theta$  such that the sum of the three components of the function  $\phi(\cdot, \lambda, \theta)$  is non-decreasing for some values of  $\nu$ . In this particular case, the price constraint is not necessarily binding. Figure 43 illustrates these two situations.

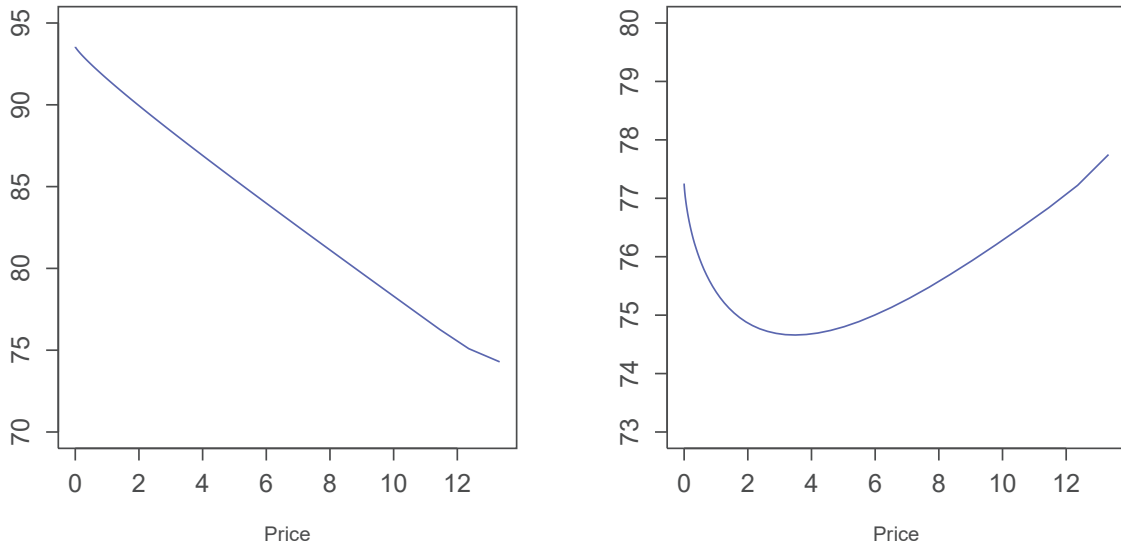


Figure 43 – Left hand side:  $\phi(\nu, \lambda = 0.2, \theta = 1)$ . Right hand side:  $\phi(d, \lambda = 0.8, \theta = 1)$ .

The fact there is no simple form for the function  $\phi$  prevents us from providing an explicit solution of Problem ( $\mathcal{P}_2$  in  $\mathcal{S}$ ). Once the optimal bilateral reinsurance is fully solved, we next go back to our partnership between the insurer and the reinsurer. By doing so, we prove that the optimal forms  $g^\beta$  and  $g^*$  obtained in the unilateral partnership cases remain the optimal forms in the bilateral cases. In the asymptotic case ( $\beta \rightarrow +\infty$ ), the form of the solution facilitates the derivation of explicit solution of the bilateral problem.



## 4.6 On bilateral optimal partnership contract

In this last Section, we solve Problems  $(\mathcal{P}_2$  in  $\mathcal{G}^\beta$ ) and  $(\mathcal{P}_2$  in  $\mathcal{G}$ ). These two problems correspond to the optimal partnership problems when the retention rate is bounded and unbounded, respectively. In this partnership, the insurer is able to underwrites more business through her relationship with the reinsurer. The reinsurer sees the partnership as a way to use the insurer's risk as a natural hedge against her initial exposure.

### 4.6.1 Optimal bilateral contracting with bounded retention rate

We first focus on the case where the insurer can only add a limited quantity of risk to her portfolio, i.e. the retention rate is bounded by  $\beta > 1$ . The unilateral problem gives us  $g_\nu^\beta$  as the form of the partnership contract preferred by the insurer. Proposition 4.6.1 shows that this particular form is the one preferred by the reinsurer too. As a reminder,

$$g_\nu^\beta(x) = (1 - \beta)x\mathbb{1}_{\{x \leq \tilde{d}\}} + (x - \beta\tilde{d})\mathbb{1}_{\{x > \tilde{d}\}},$$

where  $\tilde{d}$  is such that  $\mathbb{E}[(Y - \tilde{d})_+] = \mu - \frac{\nu}{\beta}$ .

**Proposition 4.6.1.** *Let  $0 \leq \nu \leq \mu$  and  $Y \in H(X)$ . Then*

$$X + g_\nu^\beta(Y) \leq_{cx} X + g(Y),$$

holds for all  $g \in \mathcal{G}_\nu^\beta$ .

*Proof.* First, assume that there exists a function  $u$  such that  $u(x) \leq g_\nu^\beta(Y)(x)$  for  $x \leq \tilde{d}$ . This  $u$  is not in  $\mathcal{G}_\nu^\beta$ . As a result, for all  $g \in \mathcal{G}_\nu^\beta$ , there always exists an  $y_0$  (depending on  $g$ ) such that

$$g_\nu^\beta(y) \leq g(y) \text{ for } y \leq y_0, \text{ and } g_\nu^\beta(y) \geq g(y) \text{ for } y \geq y_0.$$

Let  $x_0$  be such that  $-h(x_0) = y_0$ . Note that  $x \leq x_0 \Rightarrow y \geq y_0$  and of course  $x \geq x_0 \Rightarrow y \leq y_0$ , where  $y = -h(x)$ . We then obtain

$$x + g_\nu^\beta(-h(x)) \geq x + g(-h(x)) \text{ for } x \leq x_0, \text{ and } x + g_\nu^\beta(-h(x)) \leq x + g(-h(x)) \text{ for } x \geq x_0.$$

The last step is to show that for all  $g \in \mathcal{G}_\nu^\beta$  (including hence  $g_\nu^\beta$ ),  $x \mapsto x + g(-h(x))$  is increasing. To this extent, let  $x \leq y$ . Then  $-h(x) \geq -h(y)$  and

$$g(-h(x)) - g(-h(y)) \leq h(y) - h(x) \leq y - x,$$

yielding  $y - g(-h(y)) \geq x - g(-h(x))$ . Lemma 4.2.2 yields the announced result.  $\square$

For a given price, both the insurer and the reinsurer agree on the form of the optimal partnership,  $g_\nu^\beta$ . On the one hand, the insurer transfers her tail risk to the reinsurer. The threshold is  $\beta\tilde{d}$  and is smaller than the one of the corresponding stop-loss. In addition, the insurer increases the size of her portfolios for small risks, reducing the overall variance of the retained risk. On the other hand, the reinsurer fully benefits from the insurer's risk. When the risk of the reinsurer is large, the one of the insurer is small since  $Y = -h(X)$ . Not only the reinsurer is not in charge of this small risk but she also receives money from the insurer. The variance of the overall reinsurer's risk is then smoothed.

We have then reduced the dimension of the problem, from

$$\inf_{g \in \mathcal{G}^\beta} \{ \lambda \text{TVaR}_\alpha(Y - g(Y)) + (1 - \lambda) \text{TVaR}_\beta(X + g(Y)) + (2\lambda - 1)(1 + \theta) \mathbb{E}[g(Y)] \},$$

to

$$\inf_{\nu \in [0, \mu]} \{ \lambda \text{TVaR}_\alpha(Y - g_\nu^\beta(Y)) + (1 - \lambda) \text{TVaR}_\beta(X + g_\nu^\beta(Y)) + (2\lambda - 1)(1 + \theta)\nu \}.$$

As for the bilateral reinsurance, there is no simple solution. However, we know from Proposition 4.3.1 that  $Y - g_\nu^\beta(Y) \leq_{cx} Y - (Y - d)_+$ . From Proposition 4.6.1,  $X + g_\nu^\beta(Y) \leq_{cx} X + (Y - d)_+$ . We conclude that the partnership with bounded retention rate is more efficient than the traditional stop-loss.

To close the paper, we eventually focus on the theoretical asymptotic case where the retention is unbounded. In this case, we are able to provide the explicit solutions for Problem  $(\mathcal{P}_2$  in  $\mathcal{G}$ ).

#### 4.6.2 Optimal bilateral contracting with unbounded retention rate

We close the paper by dealing with the asymptotic case where  $\beta \rightarrow +\infty$ . When the partnership allows the insurer to have an infinite retention rate, we have obtained the solution of the unilateral problem in subsection 4.3.2. Since the stop-loss is the best unilateral and bilateral reinsurance coverage, combining to the fact  $g_\nu^\beta$  is also the solution of both the unilateral and bilateral optimal partnership problems when the retention rate is bounded, we naturally wonder if the function  $g^*$  is also the one preferred by the reinsurer among the set  $\mathcal{G}$ .

**Proposition 4.6.2.** *Let  $Y \in H(X)$  with  $\mathbb{E}[Y] = \mu$  and define  $g^*(y) = y - (\mu - \nu)$ ,  $y \geq 0$ . Then*

$$X + g^*(Y) \leq_{cx} X + g_\nu(Y), \quad \forall g_\nu \in \mathcal{G}_\nu.$$

*Proof.* We have shown in the proof of Proposition 4.3.2 that  $g^*$  is up-crossed by any elements of the set  $\mathcal{G}_\nu$ . For each  $g_\nu \in \mathcal{G}_\nu$ , this means there exists an  $y_0$  such that  $g^*(y) \leq g_\nu(y)$  for  $y \leq y_0$  and  $g^*(y) \geq g_\nu(y)$  for  $y \geq y_0$ .

Since  $Y \in H(X)$ , there exists a non-decreasing and 1-Lipschitz function  $h$  such that  $Y = -h(X)$  almost surely. Let  $0 \leq x \leq x_0$  where  $x_0$  is such that  $-h(x_0) = y_0$ . Then  $y_0 = -h(x_0) \leq -h(x) = y$ . Since for

$y \geq y_0$   $g^*(y) \geq g_\nu(y)$ , then  $x + g_\nu(-h(x)) \leq x + g^*(-h(x))$  for  $x \leq x_0$  and the reverse holds true for  $x \geq x_0$ . The crucial point to use Lemma 4.2.2 is to ensure the function  $x \mapsto x + g_\nu(-h(x))$  is increasing for all  $g_\nu \in \mathcal{G}_\nu$  (including  $g^*$ ). By definition of  $\mathcal{G}_\nu$ , we have for  $x \leq y$ ,  $g_\nu(-h(x)) - g_\nu(-h(y)) \leq h(y) - h(x) \leq y - x$  since  $h$  is 1-Lipschitz, yielding  $x + g_\nu(-h(x)) \leq y + g_\nu(-h(y))$ . Consequently,  $X + g^*(Y) \leq_{cx} X + g_\nu(Y)$ .  $\square$

The main consequence of Proposition 4.6.2 is that the interests of the insurer and the reinsurer are common when they conclude the coverage  $g^*$ . The interpretation is as follows. Since  $Y \in H(X)$ , the insurer's risk is a natural hedge against the reinsurer's initial background risk. To this extent, the reinsurer wants the partnership contract to contain as insurer's risk as possible: this achieved by the term  $+y$  in the function  $g^*$ . To meet the price constraint  $\nu$ , the insurer compensates by the term  $\mu - \nu$  is the function  $g^*$ . Since  $g^*$  is the form of partnership contract preferred by both the insurer and the reinsurer, Problem ( $\mathcal{P}_2$  in  $\mathcal{G}$ ) reduced from

$$\inf_{g \in \mathcal{G}} \{ \lambda \text{TVaR}_\alpha(Y - g(Y)) + (1 - \lambda) \text{TVaR}_\beta(X + g(Y)) + (2\lambda - 1)(1 + \theta) \mathbb{E}[g(Y)] \},$$

to

$$\inf_{\nu \in [0, \mu]} \{ \lambda \text{TVaR}(Y - g^*(Y)) + (1 - \lambda) \text{TVaR}_\beta(X + g^*(Y)) + (1 + \theta)(2\lambda - 1) \mathbb{E}[g^*(Y)] \},$$

yielding

$$\inf_{\nu \in [0, \mu]} \{ (2\lambda - 1)\nu \}.$$

In a sense, the insurer pays a fixed leg to the reinsurer, and the reinsurer pays the variable leg to the insurer. From the insurer's point of view, she has no variance any more: her final situation is not random any more. On the other hand, the reinsurer fully benefits from the natural hedge against her initial background risk by bearing all the insurer's risk. From the reduced form of Problem ( $\mathcal{P}_2$  in  $\mathcal{G}$ ), we directly obtain the following proposition.

**Proposition 4.6.3.** *The solutions of Problem ( $\mathcal{P}_2$  in  $\mathcal{G}$ ):*

- i) *If  $\lambda < 1/2$ , then  $\nu = \mu$ ,*
- ii) *If  $\lambda > 1/2$ , then  $\nu = 0$ ,*
- iii) *If  $\lambda = 1/2$ , then  $\nu \in [0, \nu]$ .*

In addition to Proposition 4.6.3, two conclusions can be drawn from the reduced form of Problem ( $\mathcal{P}_2$  in  $\mathcal{G}$ ). First of all, if one wants the coverage to be non-negative, we directly obtain full reinsurance as a solution when  $\lambda \leq 1/2$ , since it corresponds to the case where  $\nu = \mu$  and  $g^*(x) = x \geq 0$  and  $g^* \in \mathcal{S}$ .

Second, the case  $\nu = 0$  does not mean that there is no transaction. It corresponds to the case where the insurer receives the values of its loss but pays to the reinsurer the expected value of her loss. In a

sense, the reinsurer and the insurer concludes a type of swap, where the insurer pays the fixed leg and the reinsurer pays the variable one. Since the price corresponds to the expected value of the transferred loss, the price in this case is  $\mu$ . The safety loading of the reinsurer is 0 which is not true in practice. For instance, the reinsurer necessarily has to cover some administrative costs related to the partnership.

As a last comment, Proposition 4.3.2 states that  $Y - g^*(Y) \leq_{cx} Y - (Y - d)_+$  whereas Proposition 4.6.2 shows that  $X + g^*(Y) \leq_{cx} X + (Y - d)_+$ , where  $\mathbb{E}[g^*(Y)] = \mathbb{E}[(Y - d)_+] = \nu$ . For a fixed price,  $g^*$  is more efficient than the traditional stop-loss. In other words, optimal partnership outperforms traditional reinsurance.

**In conclusion.** In a nutshell, the fact the stop-loss leads to the minimal retention in the convex sense only holds in the set  $\mathcal{S}$ . When the set of admissible contracts is enlarged to  $\mathcal{G}$  then we exhibit a class of functions that outperforms the stop-loss in the convex sense.

We have considered a partnership framework where the insurer benefits from the reinsurer's tools and network to increase her underwriting capacity. From the reinsurer's point of view, the partnership allows her to use the insurer's risk as a natural hedge against her initial background risk. We have given the forms of both unilateral and bilateral optimal partnership contracts. Most importantly, we have shown that optimal partnership outperforms traditional reinsurance.

Contrary to an approach based on inf-convolution (see for instance [Barrieu and El Karoui \(2005\)](#)), the new set makes the transaction in the bilateral problem be based only on the insurer's risk. Note that the solution does not depend on the values of  $\alpha$  and  $\beta$ , but it is highly based on the fact the insurer's risk is a counter-monotonic risk reducer for the reinsurer's initial exposure.

All along the paper, we have assumed that the additional business provided by the reinsurer's underwriting support was the same as the initial risk borne by the insurer. In practice, it is more likely that this additional business slightly differs from the insurer's primary risk or that some mutualization effect occurs. To close, the insurer may face uncertainty around the value of  $\beta$ , like for any other new business. It would be interesting to regard  $\beta$  as a random variable in a future work.

## Bibliography

- Kenneth J Arrow. Uncertainty and the welfare economics of medical care. *American Economic Review*, 53(5):941–973, 1963.
- Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, and David Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 9(3):203–228, 1999.

- Alexandru V Asimit, Ka Chun Cheung, Wing Fung Chong, and Junlei Hu. Pareto-optimal insurance contracts with premium budget and minimum charge constraints. *Insurance: Mathematics and Economics*, 95:17–27, 2020.
- Pauline Barrieu and Nicole El Karoui. Inf-convolution of risk measures and optimal risk transfer. *Finance and stochastics*, 9(2):269–298, 2005.
- Pauline Barrieu and Giacomo Scandolo. General Pareto optimal allocations and applications to multi-period risks. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 38(1):105–136, 2008.
- Pauline Barrieu, Harry Bensusan, Nicole El Karoui, Caroline Hillairet, Stéphane Loisel, Claudia Ravanelli, and Yahia Salhi. Understanding, modelling and managing longevity risk: key issues and main challenges. *Scandinavian actuarial journal*, 2012(3):203–231, 2012.
- Pauline Barrieu, Anne Eyraud-Loisel, Stéphane Loisel, and Pierre Montesinos. Optimality of indemnity-based and index-based transactions: a trade-off between asymmetry of information and basis risk. Working paper, 2020.
- Karl Borch. Equilibrium in a reinsurance market. *Econometrica*, 30(3):424–444, 1962.
- Jun Cai and Ken Seng Tan. Optimal retention for a stop-loss reinsurance under the VaR and CTE risk measures. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 37(1):93–112, 2007.
- Jun Cai and Chengguo Weng. Optimal reinsurance with expectile. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2016(7):624–645, 2016.
- Jun Cai, Haiyan Liu, and Ruodu Wang. Pareto-optimal reinsurance arrangements under general model settings. *Insurance: Mathematics and Economics*, 77:24–37, 2017.
- Ka Chun Cheung, Jan Dhaene, Ambrose Lo, and Qihe Tang. Reducing risk by merging counter-monotonic risks. *Insurance: Mathematics and Economics*, 54:58–65, 2014.
- Yichun Chi and Ken Seng Tan. Optimal reinsurance under VaR and CVaR risk measures: a simplified approach. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 41(2):487–509, 2011.
- Rose-Anne Dana and Marco Scarsini. Optimal risk sharing with background risk. *Journal of Economic Theory*, 133(1):152–176, 2007.
- Michel Denuit, Jan Dhaene, Marc Goovaerts, and Rob Kaas. *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*. Wiley, 2006.
- Olivier Deprez and Hans U Gerber. On convex principles of premium calculation. *Insurance: Mathematics and Economics*, 4(3):179–189, 1985.

- Günter Franke, Harris Schlesinger, and Richard C Stapleton. Multiplicative background risk. *Management Science*, 52(1):146–153, 2006.
- Hans U Gerber. Pareto-optimal risk exchanges and related decision problems. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 10(1):25–33, 1978.
- Hans U Gerber, Elias SW Shiu, and Hailiang Yang. A constraint-free approach to optimal reinsurance. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2019(1):62–79, 2019.
- Mario Ghossoub. Budget-constrained optimal insurance with belief heterogeneity. *Insurance: Mathematics and Economics*, 89:79–91, 2019.
- Michael H Glantz. *Currents of Change: Impacts of El Niño and La Niña on Climate and Society*. Cambridge University Press, 2001.
- Christian Gollier. The design of optimal insurance contracts without the nonnegativity constraint on claims. *The Journal of Risk and Insurance*, 54(2):314–324, 1987.
- Manuel Guerra and M de L Centeno. Optimal reinsurance policy: The adjustment coefficient and the expected utility criteria. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42(2):529–539, 2008.
- Gur Huberman, David Mayers, and Clifford W Smith Jr. Optimal insurance policy indemnity schedules. *The Bell Journal of Economics*, pages 415–426, 1983.
- Marek Kaluszka. Optimal reinsurance under mean-variance premium principles. *Insurance: Mathematics and Economics*, 28(1):61–67, 2001.
- Richard E Kihlstrom, David Romer, and Steve Williams. Risk aversion with random initial wealth. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 911–920, 1981.
- Claude Lefèvre, Stéphane Loisel, and Pierre Montesinos. Basis risk management in an index-based insurance framework under randomly scaled uncertainty. Working paper, 2020.
- ZhiYi Lu, LePing Liu, JianYu Zhang, and LiLi Meng. Optimal insurance under multiple sources of risk with positive dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, 51(2):462–471, 2012.
- Zhiyi Lu, Shengwang Meng, Leping Liu, and Ziqi Han. Optimal insurance design under background risk with dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, 80:15–28, 2018.
- Jan Ohlin. On a class of measures of dispersion with application to optimal reinsurance. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 5(2):249–266, 1969.
- Artur Raviv. The design of an optimal insurance policy. *The American Economic Review*, 69(1):84–96, 1979.

- R.T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1970.
- Moshe Shaked and J George Shanthikumar. *Stochastic Orders*. Springer, 2007.
- Ken Seng Tan, Chengguo Weng, and Yi Zhang. VaR and CTE criteria for optimal quota-share and stop-loss reinsurance. *North American Actuarial Journal*, 13(4):459–482, 2009.
- Ken Seng Tan, Chengguo Weng, and Yi Zhang. Optimality of general reinsurance contracts under CTE risk measure. *Insurance: Mathematics and Economics*, 49(2):175–187, 2011.
- Iliia Tsetlin and Robert L Winkler. Risky choices and correlated background risk. *Management Science*, 51(9):1336–1345, 2005.
- AE Van Heerwaarden, Robert Kaas, and Marc J Goovaerts. Optimal reinsurance in relation to ordering of risks. *Insurance: Mathematics and Economics*, 8(1):11–17, 1989.
- Virginia R Young. Premium Principles. In J.L. Teugels and B. Sundt, editors, *Encyclopedia of Actuarial Science*. Wiley, 2004.

# Conclusion et Perspectives de recherche

La thèse a détaillé plusieurs contributions à la mesure et à la gestion du risque de base. Les Chapitres 1 et 2 développent une méthodologie de quantification de ce risque, fondée sur la génération de scénarios extrêmes construits à partir des ordres convexes de degrés supérieurs.

Le Chapitre 3 fournit une réponse concrète à la question pratique du choix du type de transaction, entre indemnitaire ou indicielle. Pour cela, le chapitre examine le cadre bilatéral d'un transfert indiciel, puis indemnitaire, en prenant en compte l'exposition initiale du réassureur. L'apport du chapitre est d'intégrer tant le risque de base dans la transaction indicielle que l'asymétrie d'information dans la transaction indemnitaire. Alors, nous parvenons à montrer que l'intensité de l'asymétrie d'information est, pour un indice et un niveau de risque de base donnés, déterminante dans le choix du type de la transaction.

Le Chapitre 4 se base sur les résultats théoriques du Chapitre 3 et propose de généraliser la réassurance aux partenariats optimaux aussi bien dans le cadre unilatéral que bilatéral. L'approche adoptée est fondée sur le taux de rétention. Comme pour le Chapitre 3, ce chapitre considère l'exposition initiale du réassureur dans la formulation du problème bilatéral. Le partenariat optimal est plus efficient que la réassurance correspondante, que ce soit dans le cadre unilatéral ou bilatéral.

Plus généralement, retenir l'exposition initiale du réassureur dans la formulation des problèmes des Chapitres 3 et 4 se fait au prix d'une hypothèse restrictive sur la corrélation entre cette exposition et le risque transféré par l'assureur. En effet, nous supposons que le risque de l'assureur est un *risk reducer* anti-monotone pour l'exposition initiale du réassureur. Il découle de cette hypothèse des résultats liés à l'ordre convexe qui permettent de résoudre l'intégralité des problèmes formulés dans ces chapitres.

Dans le cadre du Chapitre 3, une perspective pertinente serait de relâcher l'hypothèse d'anti-monotonie et d'avoir recours à des formes de dépendance plus générales entre les risques de l'assureur et du réassureur. L'objet serait alors d'examiner le rôle de la structure de dépendance dans la forme de réassurance optimale dans un cadre bilatéral.



Dans le Chapitre 4, nous introduisons les pouvoirs de négociation de l'assureur et du réassureur dans la formulation du problème de Pareto-optimalité. Dans le même esprit que la perspective proposée pour le Chapitre 3, il pourrait être intéressant de lier les pouvoirs de négociation au niveau de la dépendance entre l'exposition initiale du réassureur et le risque transféré par l'assureur. De cette façon, un réassureur pour lequel le risque de l'assureur constitue une couverture naturelle aurait moins d'influence dans l'échange qu'un réassureur pour lequel cette configuration n'est pas vérifiée.

Dans le chapitre 4, l'assureur peut augmenter son taux de rétention. Dans la formulation du problème, nous avons considéré le niveau d'augmentation de la taille du portefeuille comme une donnée exogène, mais déterministe. Puisque le partenariat implique également un réassureur, une première extension pourrait consister à rendre ce niveau aléatoire. En effet, l'assureur ne sait pas à l'avance la mesure dans laquelle il va pouvoir augmenter la taille de son portefeuille. Dans cette optique, le niveau d'augmentation du portefeuille pourrait également être lié à la dépendance entre le risque de l'assureur et l'exposition initiale du réassureur. Alors, la mesure dans laquelle l'assureur est autorisé à modifier la taille de son portefeuille serait reflétée par l'appétence du réassureur au risque de l'assureur.

Enfin, l'ordre convexe est utilisé tout au long de la thèse et sa caractérisation par la prime stop-loss s'avère être un outil efficace pour comparer deux variables. A cet égard, la dernière perspective s'éloigne quelque peu des travaux présentés dans cette thèse puisqu'elle consiste à examiner une méthode statistique d'estimation de la prime stop-loss. Cette méthode utilise une technique d'estimation non-paramétrique de la densité basée sur les polynômes orthogonaux. En effet, dans le cadre d'une variable à support dans  $\mathbb{R}_+$ , sa densité peut être représentée par les polynômes de Laguerre et la densité de la loi Gamma. Alors, la méthode d'estimation non-paramétrique concerne les coefficients de la représentation polynomiale. Ils peuvent par exemple être obtenus par la méthode REACT (Risk Estimation and Adaptation after Coordinate Transformation).