HAL open science

Mélange pour les équations primitives stochastiques soumises à un bruit aléatoire borné

Pierre-Marie Boulvard

To cite this version:

Pierre-Marie Boulvard. Mélange pour les équations primitives stochastiques soumises à un bruit aléatoire borné. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Paris Cité, 2021. Français. NNT : 2021UNIP7051 . tel-03602074

HAL Id: tel-03602074

https://theses.hal.science/tel-03602074v1

Submitted on 8 Mar 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre
ED 386

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Pierre-Marie Boulvard

Mélange pour les équations primitives stochastiques soumises à un bruit aléatoire borné

---

dirigée par Sergueï Kuksin

Soutenue le 17 mai 2021 devant le jury composé de :

M. Sergueï Kuksin	IMJ-PRG	PU	directeur
Mme Mădălina Petcu	Université de Poitiers	MCU-HDR	rapporteur
M. Edriss.S. Titi	Université de Cambridge	Professor	rapporteur
M. Freddy Bouchet	ENS Lyon	DR	examinateur
M. Arnaud Debussche	ENS Rennes	PU	examinateur
Mme Isabelle Gallagher	ENS Paris	PU	examinatrice
M. David Gérard-Varet	Université Paris Diderot	PU	examinateur
M. Raphaël Lefevere	Université Paris Diderot	MCU-HDR	examinateur

Institut de mathématiques de Jussieu-
Paris Rive gauche. UMR 7586.
Boîte courrier 247
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

Université de Paris.
École doctorale de sciences
mathématiques de Paris centre.
Boîte courrier 290
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

Il n'est pas d'incident si négligeable où ne s'inscrit la volonté de Dieu comme toute l'immensité du ciel dans une goutte d'eau.

Georges Bernanos, *Dialogues des Carmélites*

Remerciements

Je voudrais tout d'abord, témoigner ma gratitude à M.Sergueï Kuksin pour avoir accepté de diriger ma thèse. Pendant ces trois ans et demi il a toujours été disponible et invariablement bienveillant. Je tiens également à remercier M. Vahagn Nersesyan dont les encouragements et la clairvoyance m'illuminèrent dans certaines passes difficiles. Merci à M. Peng Gao d'avoir été un si bon compère de travail.

Mes remerciements vont également à Mme Mădălina Petcu et M. Edriss.S Titi pour le temps qu'ils ont consacré à l'examen de cette thèse.

Merci à mes camarades de bureau en particulier Soledad, Tancrède et Alexandre, ainsi qu'à MM.Andrey Dymov et Huilin Zhang. Tous m'ont été d'une compagnie précieuse. Merci enfin au BDD.

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude des équations primitives de la météorologie et de l'océanologie, en trois dimensions, excitée par une force aléatoire bornée et suffisamment régulière exprimée sur la base de Haar. Pour commencer on analyse le comportement des solutions trajectoire par trajectoire. En utilisant certains résultats déterministes déjà connus, on établit que dans un espace fonctionnel approprié, il existe un ouvert stable et, pour toutes les solutions correspondant à toutes les réalisations de la force aléatoire, absorbant ; puis, on étudie les propriétés de l'opérateur résolvant quand les valeurs initiales sont dans cet ensemble. On applique ensuite ces résultats pour l'étude de nos solutions considérées désormais comme des processus aléatoires dans l'espace fonctionnel. Tout d'abord, on considèrera le cas où la force extérieure est non-dégénérée, c'est à dire quand le système est excité sur tous les modes de Fourier (en espace) et on prouvera grâce à certains résultats et méthodes nouveaux que les solutions définissent alors un système mélangeant dans l'espace fonctionnel. On en déduira que pour toute valeur initiale donnée au problème, sa solution vérifie la loi des grands nombres et le théorème central limite. Ensuite, on élargira les conditions sur la forme de la force aléatoire en supposant que seul un nombre suffisant mais faible de modes de Fourier sont excités. Dans ce cas on établira en utilisant des techniques récentes de contrôlabilité des équations aux dérivées partielles le caractère mélangeant des équations primitives soumises à un cette forme de bruit dégénérée.

Mots-clés

Equations primitives, mélange, équations aux dérivées partielles stochastiques.

Title

Abstract

The thesis is dedicated to a study of the three-dimensional primitive equations of meteorology and oceanology with a sufficiently smooth bounded random force, given by a random Haar series. We start by analyzing the behaviour of the solutions for the equations trajectory-wise. We derive from some known deterministic results that, when considered in a suitable functional space, the equations possess there an open set, invariant and absorbing for each realization of the random force, and examine the properties of the resolution operator with initial data in this set. Then we apply the obtained results to study the solutions for the equations, regarded as random processes in the function space. Firstly we assume that the random force is non-degenerate in the sense that all its Fourier modes (in space) are excited, and use some recent results and approaches to prove that the solutions define a mixing process in the function space. We derive from this that for any fixed initial data a solution satisfies the strong law of large numbers and the central limit theorem. Next, we relax the assumption on the random force and assume that only a suitable finite system of its Fourier modes is excited. Evoking in addition to the above, some recent technique on controllability for nonlinear PDEs, we establish in this case similar results.

Keywords

Primitive equations, mixing, stochastic partial differential equations.

Table des matières

Introduction **11**

0.1 Description physique du problème 11

0.2 Simplifications canoniques de l'équation 12

0.3 Conditions aux bords 14

0.4 Problème déterministe 14

0.4.1 Introduction et notations 14

0.4.2 Historique des résultats 16

0.5 Le problème stochastique 19

0.5.1 Introduction et notations 19

0.5.2 Historique des résultats stochastiques 20

0.6 Résultats principaux 22

1 Étude déterministe **25**

1.1 Résultats utiles 27

1.1.1 Ensemble absorbant pour le système 32

1.2 Analycité du résolvant 36

1.2.1 Propriétés de l'opérateur $\mathcal{L}$ 36

1.3 Processus à temps discret engendré 41

1.3.1 Ensemble stable par S et analycité de ce dernier 42

1.4 Régularisation par l'opérateur S 44

1.4.1 Dissipativité du système 46

1.4.2 Non-dégénérescence de l'opérateur S 48

2 Mélange pour les équations primitives stochastiques **53**

2.1 Définitions pour les processus stochastiques 53

2.2 Bruit rouge : définition et propriétés 54

2.3 Mélange dans l'équation : théorème 56

2.4 Théorème de mélange au hypothèses élargies 57

2.5 Vérification des hypothèses et conclusion 59

2.6 Extension aux temps continus 60

2.7 Preuve du théorème 8 62
2.7.1 Construction d'un pseudo-inverse 62
2.7.2 Choix d'un contrôle aléatoire 64
2.7.3 Rapprochement des mesures 70
2.8 Définition du problème complet et notations 75
2.9 Résultats principaux pour notre problème 78
2.10 Propriétés ergodiques 80

3 Contrôlabilité du système et cas d'un bruit dégénéré 83
3.1 Contrôlabilité pour les équations primitives 83
3.2 Mélange dans le cas d'un bruit dégénéré 85
3.3 Mélange pour les équations primitives complètes, soumise à un bruit dégénéré 88
3.4 Validation de l'hypothèse de non-dégénérescence 89

A Résultats techniques 95
A.1 Lemmes de Gronwall 95
A.2 Théorème d'inversion locale uniforme 96

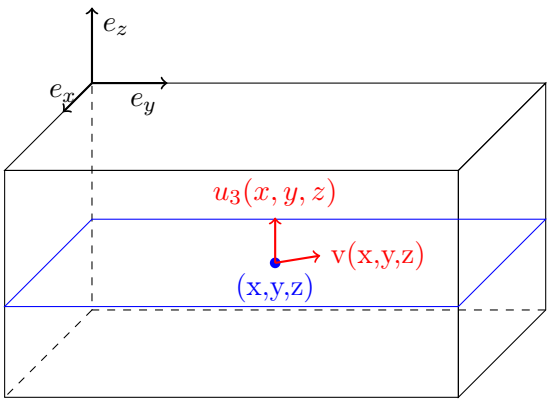
B Le mélange via les plans de transport 101
B.1 Plan de transports sur les forces aléatoires 101
B.2 Plan de transport et contraction 105

Introduction

0.1 Description physique du problème

Notre étude porte sur les équations primitives de la mécanique atmosphérique. Pour développer ce modèle, il convient de préciser sur quel domaine on analysera le comportement de l'atmosphère. En météorologie il semble naturel de considérer comme domaine d'étude la sphère à l'instar de [21] ou pour le cas des équations primitives, à l'instar de [31]. Cependant l'échelle de variation de l'équation est plus petite ce qui justifie (cf [39]) qu'on s'intéresse à un domaine bien plus réduit, par exemple le territoire de la France. Alors la courbure de la Terre peut être négligée ce qui nous permet d'assimiler notre domaine d'étude à un pavé. On considère donc une portion de l'atmosphère décrite par le domaine $\mathbb{O} := [0, L] \times [0, L] \times [-h, 0]$, muni du système de coordonnées $\mathbf{x} := (x, y, z)$. On décrit l'état de cet portion d'atmosphère à travers deux aspects cruciaux : hydrodynamique et thermodynamique.

Aspect hydrodynamique : On nomme $u := (u_1, u_2, u_3)$ le champ de vitesse tridimensionnel dans $\mathbb{O}$ et ρ la densité du fluide.



La dynamique d'un fluide parfait est décrite par l'équation d'Euler :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u\right) = \frac{\nabla p}{\rho} + F \tag{1}$$

où F sont les accélérations des forces extérieures auxquelles le fluide est soumis et p la pression. L'analyse de cette dernière composante sera plus détaillée dans la partie suivante. Etablissons maintenant le bilan des forces extérieures s'appliquant au fluide. On en compte trois : premièrement, une gravité effective, $-g\overrightarrow{e_z}$ qui en plus de la gravité réelle prend en compte l'accélération centrifuge à laquelle est soumise l'atmosphère celle ci étant considérée uniforme et dirigée verticalement sur toute l'atmosphère (cf [39]). Ensuite, l'accélération de Coriolis de la forme $f_{Cor}\overrightarrow{e_z} \wedge u$ et enfin une éventuelle force extérieure f.

De plus on corrige notre approximation liée à l'hypothèse d'un fluide parfait en ajoutant à notre équation un terme de viscosité Δu . Ainsi (1) devient dans notre cas :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u\right) = \frac{1}{\rho}\nabla p - ge_z + f_{Cor}\overrightarrow{e_z} \wedge u + \Delta u + f.$$

A cela s'ajoute l'équation de continuité pour le fluide :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} u = 0. \tag{2}$$

Aspect thermodynamique : De plus notre système est exposé à un flux de chaleur absorbé Q. On note T sa température S son entropie et c_p sa capacité thermique massique à pression constante. Par définition de la capacité calorifique à pression constante, et en vertu du premier principe de la thermodynamique (dans le cas d'une transformation réversible), on a

$$c_p dT = TdS = Qdt$$

Qdt étant la chaleur apportée au système. Aussi a t-on

$$c_p \frac{dT}{dt} = Q.$$

Cependant en considérant la transformation comme réversible, on a négligé la déperdition de chaleur, on introduit donc un terme correctif ΔT prenant en compte la chaleur dissipée On obtient alors :

$$c_p \frac{dT}{dt} - \Delta T = Q. \tag{3}$$

Enfin on écrit la relation d'état de notre gaz le supposant de masse molaire 1 :

$$p = \rho RT \tag{4}$$

0.2 Simplifications canoniques de l'équation

Hypothèse de l'équilibre quasi-statique : Pour continuer l'étude de notre système on rajoute une hypothèse dite de l'équilibre quasi-statique. En raison des dimensions du domaine d'étude (en particulier la finesse du domaine), on peut négliger toute accéléra-

tion verticale dans le fluide et donc considérer que celui-ci est à l'équilibre hydrostatique, autrement dit que le gradient vertical de pression compense la gravité ce qui se traduit par :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \tag{5}$$

La première conséquence de cette approximation est qu'on remplace l'équation du mouvement de u_3 par (5). De plus, en vertu de cette relation, la pression est monotone en altitude. De cette observation découle l'idée de remplacer le système de coordonnées (x, y, z) vers (x', y', p) où $x = x'$ et $y = y'$ en tout point. Dans ce cas les inconnues de notre équation ne sont plus (u, p) mais (u, Φ), où $\Phi := gz(x, y, p)$ est le géopotentiel. Le premier intérêt de cette construction est d'abord un changement d'échelle verticale. En effet (5) implique que cette échelle variable est linéairement dépendante de ρ ce qui permet d'éliminer ce dernier terme des équations du mouvement qui deviennent :

$$\left(\frac{\partial u_k}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u_k\right) = \nabla\Phi - g\overrightarrow{e_z} + f_{Cor}\overrightarrow{e_z} \wedge u_k + \Delta u_k + f, \quad k = 1, 2.$$

L'équation d'état (4) est quant à elle transformée en

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{RT}{p} = 0.$$

De plus cette transformation permet de réinterpréter l'équation de continuité (2) (cf [31]) : premièrement le changement de repère dans le calcul de $\rho \operatorname{div} u$ engendre le terme la divergence bi-dimensionnelle de u dans le nouveau repère plus des termes supplémentaires ; deuxièmement le développement de $\frac{d\rho}{dt}$ engendre le terme $\frac{\partial}{\partial z}\frac{dp}{dt}$ ainsi que des éléments correctifs, engendrés par la commutation des dérivées dans le terme convectif de $\frac{dp}{dt}$, qui compensent les termes supplémentaires issus de la transformation de $\rho \operatorname{div} u$. Aussi, l'équation de conservation de la masse devient en posant $w := \frac{dp}{dt}$ et $\hat{u} := (u_1, u_2, w)$:

$$\operatorname{div} \hat{u} = 0.$$

Reste encore que l'équation d'état a encore une dépendance en pression. On s'en défait alors en procédant à un nouveau changement de variable où comme coordonée verticale on ne considère pas p mais une fonction d'une puissance p (cf [39]). On obtient alors pour l'équation d'état,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} + RT = 0.$$

par ailleurs toujours en reprenant [39] on peut justifier que cette transformation engendre dans les équations de mouvement et de conservation de la masse des perturbations qui sont en pratique négligeables du fait des échelles météorologiques.

Le fruit de ce travail est de montrer que les équations primitives décrivant la mécanique

atmosphérique ont exactement la même forme mathématique que les équations primitives de la mécanique océanique (cf [39]). Ainsi donc on peut remplacer l'étude mathématique de la première par celle de la seconde. Ainsi donc, dans la suite, on étudiera le système

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - \Delta u_k + \sum_{j=1}^{3} \partial_j(u_j u_k) + \partial_k p + f_{Cor} e_z \wedge u_k = f_k, \qquad k = 1, 2, \tag{6}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T + (u \cdot \nabla) T = Q, \tag{8}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + T = 0, \tag{9}$$

où $u = (u_1, u_2, u_3)(x, y, z, t)$, $T = T(x, y, z, t)$ et $p = p(x, y, t)$.

0.3 Conditions aux bords

Pour compléter la description du problème il convient de préciser les conditions aux bords auxquelles on peut le soumettre. Commençons par exposer les conditions aux bords induites par la description physique du problème. Les conditions les plus naturelles sont les conditions de non-glissement sur les bords et sur le fond entraînant $\frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}} \times \overrightarrow{n} = 0$. En présence d'un courant aérien au sommet du domaine, cette même condition de non-glissement entraîne $\frac{\partial v}{\partial z} = k$. Enfin la non-interpénétrabilité des domaines entraîne $\frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}} \cdot \overrightarrow{n} = 0$. Par ailleurs l'absence de flux de chaleur sur les bords et au fond du domaine entraîne $\frac{\partial T}{\partial \overrightarrow{n}} = 0$ en ces endroits et au sommet on pose $\frac{\partial T}{\partial z} = k'(T - T^*)$.

Cependant comme notre problème est un modèle servant à présenter les propriétés mathématiques de l'équation, on prend des conditions plus simples : en l'occurence on estimera que les différents champs sont périodiques de périodes les différentes dimensions de notre domaine. Enonçons maintenant précisémment ces conditions et avec l'équation aux dérivées partielles qui nous occupera dans la suite.

0.4 Problème déterministe

0.4.1 Introduction et notations

Pour mener l'analyse mathématique de ce problème on peut se restreindre à l'équation hydrodynamique, le caractère bien posé et les propriétés générales du problème se déduisant de cette étude. Ainsi en vertu de l'hypothèse hydrostatique et en l'absence de température, on a que la pression est indépendante de la hauteur.

Par ailleurs dans cette équation on a retiré la force de Coriolis. Ce retrait qui facilite nos calculs est a priori sans conséquences sur notre analyse. Il convient cependant de noter que ce terme peut avoir une influence majeure sur le comportement des solutions de l'équation.

En effet dans le cas des équations primitives sans terme de traînée (viscosité nulle), il existe des conditions initiales pour lesquelles toute solution régulière du problème a une norme divergeant en un temps fini (cf [36]). Cependant les auteurs de [11] prouvent que le temps d'existence de ces solutions tend vers l'infini lorsque la norme de la force de Coriolis tend vers l'infini.

Ainsi donc, on considère désormais que l'évolution du champ u est ainsi régie par les équations primitives que l'on écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - \Delta u_k + \sum_{j=1}^{3} \partial_j(u_j u_k) + \partial_k p = f_k, \qquad k = 1, 2, \tag{10}$$

$$\operatorname{div} u = \sum_{j=1}^{3} \partial_j u_j = 0, \tag{11}$$

avec $u = (u_1, u_2, u_3)(x, y, z, t)$ et $p = p(x, y, t)$. Pour compléter notre problème, on ajoute les conditions aux bords suivantes :

$$\begin{aligned}
&\text{pour } j = 1 \text{ ou } 2,\\
&u_j(x + L, y, z, t) = u_j(x, y, z, t), \quad u_j(x, y + L, z, t) = u_j(x, y, z, t),\\
&u_j(x, y, z + h, t) = u_j(x, y, z, t), \quad u_j(x, y, -z, t) = u_j(x, y, z, t),
\end{aligned}$$

i.e u_j est périodique en x, y et z, et pair en z ; de plus,

$$\begin{aligned}
&u_3(x + L, y, z, t) = u_3(x, y, z, t), \quad u_3(x, y + L, z, t) = u_3(x, y, z, t),\\
&u_3(x, y, z + h, t) = u_3(x, y, z, t), \quad u_3(x, y, -z, t) = -u_3(x, y, z, t),
\end{aligned}$$

i.e u_3 est périodique en x, y et z, et impair en z.

On s'applique tout d'abord à simplifier (10) en suivant la démarche exposée dans [3] : remarquons que u_3 peut se déduire des deux autres composantes via (11) ce qui nous conduit à réécrire l'équation : en effet dans la mesure où u_3 est périodique impaire,

$$u_3(x, y, kh) = 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ainsi, peut-on écrire la chose suivante

$$u_3(\zeta, t) = -\int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2(u_1, u_2)(x, y, \alpha, t) d\alpha,$$

où $\operatorname{div}_2(u) := \partial_x u_1 + \partial_y u_2$. Alors, en posant $v = (u_1, u_2)$ on obtient l'équation pour v

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} - \Delta v_k + \sum_{j=1}^{2} v_j \partial_j v_k - (\int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2(v)) \partial_z v_k + \partial_k p = f_k \ k = 1, 2 \tag{12}$$

équation que l'on réécrit

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + (v \cdot \nabla_2) v - \left(\int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2 v(\cdot, \cdot, \xi, \cdot) d\xi \right) \frac{\partial v}{\partial z} + \nabla_2 p = f, \tag{13}$$

avec les conditions aux bords suivantes :

$$v(x+L, y, z, t) = v(x, y+L, z, t) = v(x, y, z+h, t) = v(x, y, z, t), \tag{14}$$

$$v(x, y, -z, t) = v(x, y, z, t), \tag{15}$$

et la condition aux bords

$$v(0) = v_0. \tag{16}$$

Le cas bidimensionnel associé est incarné par un champ uni-dimensionnel $v(x, z, t)$ vérifiant,

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + v \frac{\partial v}{\partial x} - \left(\int_{-h}^{z} \frac{\partial v}{\partial x}(\cdot, \xi, \cdot) d\xi \right) \frac{\partial v}{\partial z} + \partial_x p = f, \tag{17}$$

avec pour conditions aux bords

$$v(x+L, z, t) = v(x, z+h, t) = v(x, z, t), \tag{18}$$

$$v(x, -z, t) = v(x, z, t). \tag{19}$$

Ces équations s'obtiennent quand on considère (13), (14) et (15) s'appliquant à un champ de vitesse $\left(v, \int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2(v)\right)$ bidimensionnel (i.e tel que v_2=0) sur un espace bidimensionnel (i.e indépendant de la variable y).

0.4.2 Historique des résultats

Existence d'une solution globale au problème et comparaison à l'équation de Navier-Stokes

Exposons maintenant quelques grandes étapes dans l'étude du caractère bien posé des équations primitives : les fondations furent établies dans [31] et [32] pour une situation plus complexe et plus générale, le domaine étant une variété et la densité du fluide étant une variable. Dans cet article les auteurs, outre qu'ils définissent les espaces naturels pour leurs solutions, introduisent la présentation variationnelle de ce problème, qui est équivalente, et le résolvent mais de manière formelle seulement, les solutions étant alors des distributions en espace.

L'existence de solutions fortes à ce problème, c'est à dire de solutions avec une meilleure régularité, n'a d'abord été établie que localement de manière similaire aux résultats que l'on retrouve pour les équations de Navier-Stokes. Pour plus de clarté on rappelle que

celle-ci pour un champ tri-dimensionnel u sur $\mathbb{R}^3$, s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0.$$

Concernant nos équations primitives, on remarque que dans son terme bilinéaire,

$$(v \cdot \nabla_2)v + u_3 \frac{\partial v}{\partial z} = (v \cdot \nabla_2)v - \int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2(v) \frac{\partial v}{\partial z}, \tag{20}$$

le premier terme est identique à ce qu'on retrouve dans l'équation de Navier-Stokes. C'est le second terme de cette composante bilinéaire qui fait toute la spécificité de l'analyse des équations primitives ce qu'on va voir dans la suite de cette partie.

Tout d'abord, dans [14], les auteurs établissent des estimations pour la norme H^1 de solutions a priori de l'équation ce qui leur permet d'obtenir dans le cas bidimensionnel (17), (18), (19), l'existence de solutions locales pour le système ainsi que de solutions globales dans le cas où les données initiales sont suffisamment petites.

Cependant, le terme $\int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2(v) \frac{\partial v}{\partial z}$ est plus compliqué que le terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes classique et cela a un impact sur les estimations à partir de la troisième dimension. En évaluant ce terme de manière classique grâce à l'inégalité de Ladyzhenskaya, on obtient

$$\left|\left|\left(\int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2(v)\right) \frac{\partial v}{\partial z}\right|\right|_{L^2} \leq \left|\left|\int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2(v)\right|\right|_{L^4} \left|\left|\frac{\partial v}{\partial z}\right|\right|_{L^4} \leq C||\nabla \operatorname{div}_2 v||_{L^2}^{1/4} || \operatorname{div}_2 v||_{L^2}^{3/4}.$$

Le problème réside alors dans le fait que le si l'on veut établir une estimation a priori pour la norme H^1 , alors on a comme estimation pour le second terme non-linéaire,

$$\left|\langle \int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2(v) \frac{\partial v}{\partial z}, \Delta v \rangle\right| \leq C||\nabla \operatorname{div}_2 v||_{L^2}^{3/4} || \operatorname{div}_2 v||_{L^2}^{1/4} ||\nabla \frac{\partial v}{\partial z}||_{L^2}^{3/4} ||\frac{\partial v}{\partial z}||_{L^2}^{1/4} ||\Delta v||_{L^2}.$$

Il est alors clair que le terme elliptique de l'équation ne suffira pas pour absorber le terme de second ordre de cette équation et que donc on ne peut pas ainsi borner les solutions a priori pour le cas tridimensionnel. Pour y remédier, les auteurs de [13] établissent des estimations anisotropiques, en tirant avantage de la forme particulière du terme $\int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2(v) \frac{\partial v}{\partial z}$. En effet, on remarque que

$$\sup_{z \in [-h;0]} \left|\left|\int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2(v)\right|\right|_{L^4(\mathbb{T}_L^2)} \leq C||\nabla \operatorname{div}_2 v||_{L^2}^{1/2} || \operatorname{div}_2 v||_{L^2}^{1/2}.$$

Ce qui est ici surprennant c'est qu'on obtient une estimation pour une norme "plus forte" que celle de l'estimation précédente, moyennant des bornes plus faibles. Grâce à cela, on peut obtenir une estimation a priori suffisante pour établir l'existence locale de solutions (ou globale pour des données initiales suffisamment faibles) pour les équations primitives

tri-dimensionnelles. De plus en analysant cette dernière estimation on remarque que la constante C dépend linéairement de la hauteur h du domaine ; cette observation permet aux auteurs de [17] d'établir l'existence globale de solutions aux équations primitives dans le cas où h est suffisamment faible ("domaine fin").

L'étape suivante dans l'étude des équations primitives a été l'établissement de l'existence et de l'unicité de solutions à long terme pour les équations primitives tri-dimensionnelles. Ce résultat fut démontré indépendamment dans [22] et [3]. Dans [22] l'auteur, en travaillant sur la forme complète et non projetée (sur les espaces à divergence nulle) de l'équation met à profit la forme particulière de la pression ainsi que du second terme non-linéaire, en dérivant équations primitives selon z. Grâce à cette estimation ainsi qu'à une estimation sur la norme de la dérivée temporelle des solutions a priori, on borne alors la norme de la dérivée spatiale des solutions a priori, permettant ainsi d'obtenir l'existence à long terme des solutions fortes des équations primitives.

L'approche présentée dans [3] que nous suivrons dans la suite se fonde encore sur la forme particulière du terme non-linéaire de notre équation. Au lieu d'avoir le terme convectif tridimensionnel $(u \cdot \nabla)u$ où u en entier est soumis à l'équation de Navier-Stokes, on observe dans (20) que le terme de convection en z, $u_3 \frac{\partial v}{\partial z}$ est plus simple car u_3 ne vérifie pas l'équation de Navier-Stokes mais une simple égalité de conservation de volume portant sur u. Ainsi, du point de vue de la difficulté analytique, le terme de convection en z et donc la dérivé spatiale $\frac{\partial v}{\partial z}$ ont une importance moindre que le terme de convection bidimensionnelle $(v \cdot \nabla_2)v$. A ce titre là, on peut considérer que les équations primitives sont à mi-chemin entre les équations de Navier-Stokes bidimensionnelle et tridimensionnelle.

Plus concrètement, on sépare le champ de vitesse v en une moyenne verticale $\bar{v}$ et une composante complémentaire $\tilde{v}$.

Alors, la différence entre les équations vérifiées par $\bar{v}$ et $\tilde{v}$ et notre équation hydrodynamique (13), est essentiellement l'ajout d'un terme non linéaire com- -plémentaire $\overline{(\tilde{v} \cdot \nabla_2)\tilde{v} + (\mathrm{div}_2\, \tilde{v})\tilde{v}}$, induit par la dislocation de v dans le terme convectif. Les auteurs entreprennent alors d'évaluer $||\nabla \bar{v}||_{L^2}$. Pour la composante bilinéaire, en remarquant que $\bar{v}$ ne dépend plus que de x et y on obtient via l'inégalité de Ladyzhenskaya, des estimations plus favorables pour le premier terme de (20). Quant au second terme de (20) il disparaît.

Enfin on obtient avec des méthodes standard une majoration du terme engendré par $\overline{(\tilde{v} \cdot \nabla_2)\tilde{v} + (\mathrm{div}_2\, \tilde{v})\tilde{v}}$ via l'estimation de la norme L^6 de $\tilde{v}$. Or la seule difficulté dans cette estimation est de nouveau la majoration du terme engendré par $\overline{(\tilde{v} \cdot \nabla_2)\tilde{v} + (\mathrm{div}_2\, \tilde{v})\tilde{v}}$ et ici on peut "extraire" l'opérateur différentiel ∇_2 de la moyenne en z ce qui permet de conclure. Ce ne serait pas le cas pour l'équation de Navier-Stokes tridimensionnelle où le terme complémentaire, aurait la forme suivante $\overline{(\tilde{v} \cdot \nabla_2)\tilde{v} + u_3 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z}}$ où u tout entier vérifierait l'équation de Navier-Stokes.

Ainsi à la différence des équations de Navier-Stokes tridimensionnelle, ici les auteurs peuvent conclure à l'existence d'une unique solution aux équations primitives.

Ensemble absorbant pour le problème

L'analyse de [3] est affinée ensuite dans [19] : une réévaluation du terme source extérieur dans l'estimation a priori en norme L^6 de $\tilde{v}$ permet de la rendre uniforme. Grâce à cela l'auteur démontre l'existence d'un ensemble absorbant pour le système en norme H^1. Cette approche a ensuite été approfondie dans [34] : tout d'abord la preuve du caractère bien posé du système dans les espaces de Sobolev de degrés élevés est apportée. Ensuite l'existence d'un ensemble absorbant pour le système dans ces mêmes espaces est données. Dans ces deux articles le résultats sont établis pour le cas d'un problème avec conditions aux bords périodiques.

Dans le cas de conditions aux bords de Neumann le caractère bien posé de l'équation ainsi que l'existence d'un ensemble absorbant ont été démontrés pour la norme de Sobolev de H^2 dans [20]. Ces mêmes résultats sont prouvés pour le cas des conditions aux bords utilisées dans [3] et dans [18]

0.5 Le problème stochastique

0.5.1 Introduction et notations

Compte-tenu des incertitudes qui naissent à l'établissement des paramètres empiriques du problème associé aux équations primitives, dans la valeur de la condition initiale, par exemple, il est naturel de considérer les aspects probabilistes de ce problème et d'étudier (13) et (16) dans le cas d'une force stochastique f et éventuellement d'une valeur initiale v_0 aléatoire. Alors la solution du problème v est un processus stochastique.

Pour une équation stochastique $\mathfrak{D}(u) = f$, on distingue deux formes de solutions : *les solutions fortes* (probabilistiquement) d'une équation stochastique sont les u tels que $\mathfrak{D}(u) = f$ presque sûrement. Les *solutions faibles* (probabilistiquement) ou *solutions martingales*, sont les u tels que $\mathfrak{D}(u)$ ait la même loi que f. Tandis que la première notion découle assez naturellement de son homologue déterministe, la seconde correspond à une description statistique des solutions pour caractériser le comportement physique du système. Dans ce cas l'évolution du système est résumée par l'évolution de la distribution de ses états dans l'espace des phases.

Un processus stochastique vérifie la *propriété de Markov*, quand la dépendance du futur de ce processus vis à vis de son passé se résume à sa dépendance vis à vis de son état présent. On considère un processus de Markov dont l'état statistique serait décrit par une distribution μ. Alors μ est dite *stationnaire* si μ est inchangée en temps. Par ailleurs un processus stochastique est dit mélangeant si les lois de ses états convergent à l'infini en temps, vers une mesure stationnaire au sens de la convergence faible des mesures ; on précisera toutes ces notions à la section 2.1.

Précisons enfin la forme que prend classiquement le terme stochastique f. Le premier

cas est celui du processus par à-coups : ce processus est défini par morceaux c'est à dire comme étant une variable aléatoire sur des segments de longueur identique. Le second est le bruit blanc qui est la dérivée temporelle du processus de Wiener décrivant le mouvement Brownien c'est à dire la diffusion d'un nuage de particules dans un milieu.

La force aléatoire qui nous a plus précisémment intéressés dans ce travail fut un bruit borné et statistiquement périodique en temps, prenant la forme d'une série de Haar aléatoire non dégénérée qu'on nomme bruit rouge et dont la forme exacte es donnée dans la Section 2.1.

0.5.2 Historique des résultats stochastiques

L'exemple de l'équation de Navier-Stokes bidimensionnelle

Pour mieux comprendre les jalons de l'analyse stochastique des équations primitives, il convient de l'examiner à l'aune du travail similaire réalisé sur l'équation de Navier-Stokes bidimensionnelle.

Le cas se rapprochant le plus du système déterministe est celui de [27]. Dans ce cas là en effet, l'existence d'une solution au problème stochastique se déduit du caractère bien posé de l'équation déterministe, et on obtient naturellement que la solution définit une chaîne de Markov. De plus, les propriétés déterministes du système permettent d'établir l'existence d'une mesure stationnaire pour le processus stochastique engendré, et de prouver le caractère mélangeant du système.

Pour le cas du bruit blanc, il est classiquement établi (cf [26]) que l'équation de Navier-Stokes bidimensionnelle perturbée par un bruit blanc admet une unique solution et que le processus stochastique ainsi construit admet une mesure stationnaire. Le dernier résultat à obtenir concernant ce problème est l'unicité de la mesure stationnaire pour le système. Dans [10] les auteurs concluent à l'unicité de la mesure stationnaire et au caractère mélangeant du système dans le cas assez contraignant où le bruit est suffisament peu régulier. Se pose alors la question du caractère mélangeant pour le cas où le système est excité par un bruit dégénéré, cette à dire ici un bruit blanc dont seul un nombre fini de modes sont exprimés. Dans [38] les auteurs prouvent l'unicité de la mesure stationnaire du système dans le cas où le bruit bien que déjà dégénéré est animé sur un nombre très grand de modes (nombre dépendant du coefficient de viscosité de l'équation).

Ensuite dans [25] et parallèlement dans [2], le caractère exponentiellement mélangeant du système, et donc l'existence d'une unique mesure stationnaire pour ce dernier, a été établie pour le cas d'un bruit blanc dégénéré porté par un nombre fini de modes grand et dépendant toujours de le viscosité (le résultat est également vrai quand tous les modes sont excités).

Finalement dans [16] l'existence et l'unicité d'une mesure stationnaire pour l'équation de Navier-Stokes bidimensionnelle a été établie quand celle-ci est perturbée par un bruit

blanc, exprimé sur un nombre fini et petit de modes. Concernant l'existence et l'unicité de la mesure stationnaire pour les équations de Navier-Stokes bi-dimensionnelles soumises au bruit blanc, tout les résultats précédents ont été résumés dans [8].

Avant d'aborder le cas des équations primitives tri-dimensionnelles, mentionnons brièvement le résultat concernant les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles sur un domaine fin : dans ce cas là les auteurs de [6] prouvent l'existence d'une mesure stationnaire et le caractère mélangeant du système soumis à une force par à-coups. De plus, ils établissent que cette mesure converge vers la mesure stationnaire pour l'équation de Navier-Stokes bidimensionnelle.

Cas des équations primitives 3D

Abordons en premier lieu le cas des équations primitives tri-dimensionnelles perturbées par une force par à-coups. Comme dans le cas de l'équation de Navier-Stokes bidimmensionnelle, l'analyse du caractère bien posé de ce problème suit naturellement celle du problème déterministe associé. De plus ce dernier détermine essentiellement les propriétés stochastiques du système. En particulier, l'auteur de [5], prouve le caractère mélangeant du processus stochastique engendré par le système soumis à une perturbation aléatoire par à-coups, en appliquant un résultat général (théorème 3.2.5) issu de [26] dont les hypothèses portent essentiellement sur le comportement déterministe des équations primitives.

Pour le cas du bruit blanc on se réfère à [9]. De la même manière que pour l'équation de Navier-Stokes bidimensionnelle, dans cet article, les estimations a priori sur l'énergie des solutions permettent d'établir l'existence de solutions locales à l'équation stochastique puis la globalité de ces solutions. Similairement, les auteurs de [15] prouvent l'existence d'une solution globale pour les équations primitives avec une autre forme de bruit blanc.

Enfin la preuve de l'existence d'une mesure stationnaire pour les équations primitives tri-dimensionnelles a été apportée dans [12]. A l'instar de [26] la preuve de cette propriété se fait grâce à deux propriétés du système : la propriété de Feller d'une part et le caractère tendu des lois du processus stochastique défini par l'équation, d'autre part. L'écueil ici est que la propriété de Feller ne peut se prouver que dans H^1. Par conséquent le caractère tendu de la famille de lois est établi dans H^2, ce qui permet de construire via l'ansatz de Bogolyubov-Krylov une mesure dont on prouve grâce à la propriété de Feller dans H^1 qu'elle est stationnaire. Cependant les développements de [12] mettent en exergue une difficulté essentielle de les équations primitives tri-dimensionnelles perturbées par un bruit blanc, qui est l'absence d'estimation a priori sur les normes de Sobolev élevées des solutions ce qui constitue un obstacle majeur pour une éventuelle preuve de la propriété de mélange pour ce système dans ce cas.

0.6 Résultats principaux

Cette thèse est divisée en trois parties. En vertu de la structure du bruit étudié dans notre cas il paraît naturel de suivre la structure de l'étude des processus stochastiques stimulés par un processus par à-coups. Ainsi les deux premières parties seront consacrées respectivement à l'analyse des équations primitives déterministes et à l'établissement de la propriété de mélange. Plus précisémment, ayant rappelé le caractère bien posé du problème, déjà établi auparavant on établira une série de résultats déterministes pour le système qu'on peut résumer ici sous la forme suivante :

Théorème A. *Pour $j \geq 2$, dans l'espace de Sobolev H^j espace des phases de notre système, le processus à temps entiers S engendré le résolvant des équations primitives*

$$S : H^j \times L^\infty([0,T], H^{j-1}) \mapsto H^j, \quad S : (u,f) \to S(u,f),$$

est analytique et non dégénéré c'est à dire que sa différentielle en f a une image dense dans l'espace des phases. De plus ce processus est régularisant $S : H^j \times L^\infty([0,T], H^j) \mapsto H^{j+1}$. Enfin pour tout $C^* > 0$, le système défini sur $H^j \times B_{L^\infty([0,T],H^{j-1})}(C^*)$ admet un ensemble A absorbant et invariant. De plus le processus issu de cet ensemble est dissipatif i.e pour f nulle, le système est contractant sur H^j.

En se fondant sur ces résultats, dans la deuxième partie, on reprendra l'analyse de [24] et [28] pour établir un résultat de mélange pour le processus stochastique engendré sur les instants entiers :

Théorème B. *Lorsque f est un bruit non-dégénéré borné défini par morceaux sur les intervalles entiers, alors le processus stochastique à temps entiers engendré dans H^j pour $j \geq 2$ est exponentiellement mélangeant, autrement dit, il admet une mesure stationnaire, vers laquelle convergent exponentiellement vite, les distributions des itérations de S.*

Ce résultat admet une extension aux temps continus : on établira l'existence d'une mesure 1-périodique pour ce système vers laquelle convergent, exponentiellement vite les distributions du processus à temps continus. Le théorème B entraîne que notre système vérifie la loi des grands nombres et le théorème central limite. De ce fait, les moyennes temporelles de nos grandeurs physiques tendent à suivre des lois Gaussiennes dont on peut obtenir les paramètres. Grâce à cela, on peut établir certaines propriétés statistiques de nos grandeurs physique : plus particulièrement, la loi forte des grands nombres nous permet de calculer l'espérance des associée à la mesure stationnaire de notre système et donc d'analyser le comportement à long terme de notre système.

L'établissement des théorèmes A et B était déjà l'objet d'un article ([1]), accepté pour publication au journal "Stochastic PDE : Anal. Comp.". Ici cependant, la preuve de ces résultats sera présentée de manière plus développée. La troisième partie sera elle dédiée

à une analyse de la contrôlabilité de notre système, résultat qui nous permet d'étudier le cas où f est un bruit dégénéré, mais non très dégénéré, c'est à dire exprimé sur un nombre minimal (en l'occurence 10) de modes de Fourier pour la variable spatiale. Alors, le théorème A et les autres résultats analytiques présentés dans [1], d'une part, et les résultats de contrôlabilité issus de [33], d'autre part, permettent d'établir le résultat suivant :

Théorème C. *Le théorème B reste valable dans le cas où f est borné et dégénéré.*

Dès lors, de même que dans le cas du bruit non-dégénéré, ce résultat induit que notre système engendré par un bruit dégénéré, vérifie la loi des grands nombres et le théorème central limite.

Enfin l'annexe, en plus de regrouper une série de résultats techniques, présentera une preuve différente du théorème permettant d'établir la propriété de mélange de notre système.

Chapitre 1

Étude déterministe

Maintenant, précisons le contexte exact dans lequel nous allons étudier notre équation et établissons le caractère bien posé du problème déterministe associé.

Tout d'abord introduisons une version plus compacte de (13) : en posant

$$b(u,v) = (u \cdot \nabla_2)v - \left(\int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2 u(\cdot,\cdot,\xi,\cdot) d\xi \right) \frac{\partial v}{\partial z}, \tag{1.1}$$

on peut la réécrire ainsi

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + b(v,v) + \nabla_2 p = f, \tag{1.2}$$

où $v = (v_1, v_2)(x,y,z,t)$ et $p = p(x,y,t)$.

Notons en outre que si $v(x,y,z,t)$ satisfait (14) et (15) on peut considérer ce champ vectoriel comme un champ sur le tore,

$$v : \mathbb{O} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{O} = (\mathbb{R}/L\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{R}/h\mathbb{Z}),$$

paire en z. Notons $\mathbb{T}_L^2 = (\mathbb{R}/L\mathbb{Z})^2$ et $\mathbb{T}_h = \mathbb{R}/h\mathbb{Z}$ alors $\mathbb{O} = \mathbb{T}_L^2 \times \mathbb{T}_h$.

Ajoutons maintenant que le champ v vérifie une condition d'incompressibilité dérivée de (11). En effet en intégrant cette dernière en z et ajoutant les conditions aux bords, en posant

$$\bar{v} := \int_{-h}^{0} v(\cdot,\cdot,\xi,\cdot) d\xi,$$

on obtient

$$\operatorname{div}_2 \bar{v} = 0. \tag{1.3}$$

Ensuite on fixe la condition initiale suivante

$$v(\cdot,0) = v_0, \tag{1.4}$$

où, en plus de (14), (15) et (1.3), v_0 vérifie :

$$\int_{\mathbb{O}} v_0 d\zeta = 0. \tag{1.5}$$

Comme, en outre on exige que f satisfasse

$$\left(\int_{\mathbb{O}} f d\zeta\right)(t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \tag{1.6}$$

on obtient qu'une solution v de (1.2), sous les conditions (1.5) et (1.6) a la propriété suivante

$$\left(\int_{\mathbb{O}} v d\zeta\right)(t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{1.7}$$

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$ on baptise $H^j(\mathbb{O})$ l'espace de Sobolev de degré j sur $\mathbb{O}$ et

$$H^j := \{v \in \left(H^j(\mathbb{O})\right)^2 : \int_{\mathbb{O}} v d\zeta = 0, v \text{ est pair en } z\},$$

et dotons le du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_j = \langle (\nabla)^j u, (\nabla)^j v\rangle.$$

Ensuite pour tout $j \in \mathbb{N}/\{0\}$ on pose

$$V^j := \{w \in H^j : w \text{ satisfaisant (1.3)}\},$$

et V^0 la fermeture de V^1 dans L^2. De plus, on note :

$$H^r \oplus \mathbb{R}^2 \mathbb{1} := \{v(t) + c, v \in H^r, c \in \mathbb{R}^2\},$$

où $\mathbb{1}$ est la fonction uniformément égale à 1. Dans la suite, quand cela ne portera pas à confusion, on abrègera H^0 en H et V^0 en V.

Pour $j \in \mathbb{N}$, on note :

— $E_j([t_1, t_2]) := L^2([t_1, t_2], V^j)$
— $U_j([t_1, t_2]) := \{u \in E_{j+1}([t_1, t_2]), \frac{\partial u}{\partial t} \in E_{j-1}([t_1, t_2])\}$. On remarque que $U_j([t_1, t_2]) \hookrightarrow C([t_1, t_2], V^j)$, voir le théorème 3.1 du premier chapitre de [30].
— on adopte les notations suivantes $E_j(T) := E_j([0, T])$ et $U_j(T) := U_j([0, T])$, ainsi que $|||f|||_k := \sup_t ||f(t)||_{V^k}$.
— enfin, pour tout espace de Banach E, on pose $B_E(a, R)$ la boule ouverte de centre a et de rayon R selon la norme de E et $\bar{B}_E(a, R)$ la boule fermée ; on omettra a quand cela vaudra 0.

Ceci dit, on peut affirmer, en se référant à [34], l'existence et l'unicité de solutions fortes

à l'équation, solutions que l'on définit de la manière suivante :

Définition 1. *Soient $T > 0$, $m \geq 1$ et $v_0 \in V^m$, v est une solution forte de* (1.2), (1.4) *si $v \in U_m(T)$ et $\exists p \in L^2([0,T], H^m(\mathbb{T}^2_L))$ tel que (v,p) vérifient* (1.2) *et* (1.4).

Définition 2. *Soient $T > 0$, $m \geq 1$ et $v_0 \in V^m$, v est une solution forte de* (1.2), (1.4) *si $v \in U_m(T)$ et v vérifie* (1.4) *et*

$$\frac{dv}{dt} - \Delta v + (v \cdot \nabla_2)v - \Big(\int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2 v\Big)\frac{\partial v}{\partial z} = f \tag{1.8}$$

au sens faible (i.e dans $\tilde{V}'$).

Remarque. *Ces deux définitions sont équivalentes.*

Démonstration. Pour passer de la première à la seconde on teste (1.2) contre un élément de $\tilde{V}$ et on constate que le gradient de pression disparaît. Inversement si on a une solution au sens de la deuxième définition v on peut recalculer le terme engendré par la pression qui doit ne peut qu'être un gradient toujours en vertu de ce qu'il s'annule quand testé par $\tilde{V}$ □

De plus si $v(\zeta,t), t \geq 0$ est tel que $v(\zeta,t)|_{0\leq t\leq T}$ soit solution de (1.2), (1.4) pour tout $T > 0$ alors, v est une solution sur $\mathbb{R}^+$.

Pour établir le caractère bien posé du problème (1.2), (1.4), nous en référons à [34] qui nous permet d'obtenir directement des estimations pour les espaces de Sobolev élevés (cf aussi [5] pour une résultat semblable dans le cas d'une force constante en temps). Ainsi en reprennant les théorèmes 2.1 et 3.1 (dans [34]), on peut affirmer :

Théorème 1. *Soient $m \geq 1$, $v_0 \in V^m$ et $f \in L^\infty(\mathbb{R}^+, V^{m-1})$ alors l'équation* (1.2) *admet une unique solution dans $C(\mathbb{R}^+, V^m) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, V^{m+1})$. De plus pour tout $T > 0$, la norme de v dans $C(\mathbb{R}^+, V^m) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, V^{m+1})$ est majorée par une constante dépendant uniquement de T,$||v_0||_{V^m}$ et $|||f|||_{m-1}$.*

La première partie de ce travail est consacrée à l'établissement de résultats déterministes concernant notre système. Dans la deuxième partie on s'intéressera à l'aspect stochastique du problème en introduisant la notion de bruit rouge avant d'énoncer un théorème issu de [28] nous permettant d'établir que notre processus est exponentiellement mélangeant.

1.1 Résultats utiles

Maintenant, présentons quelques résultats utiles pour les calculs à venir.

Formule 1. On a pour tout $v \in V^1$ et $p \in H^1(\mathbb{T}_L^2)$

$$\int_{\mathbb{O}} v \cdot \nabla_2 p = \int_{\mathbb{O}} v(x,y,z) \cdot \nabla_2 p(x,y) dxdydz = \int_{\mathbb{T}_L^2} \bar{v}(x,y) \cdot \nabla_2 p(x,y) dxdy$$
$$= \int_{\mathbb{T}_L^2} \mathrm{div}_2(\bar{v})(x,y) p(x,y) dxdy = 0.$$

En outre,

Lemme 1. *Nous avons alors la décomposition orthogonale suivante :*

$$H = V \oplus \nabla_2 H^1(\mathbb{T}_L^2),$$

où $\nabla_2 H^1(\mathbb{T}_L^2) := \{\nabla_2 p, p \in H^1(\mathbb{T}_L^2)\}$.

Démonstration. Clairement $\nabla_2 H^1(\mathbb{T}_L^2)$ appartient à H. Considérons maintenant la base complexe de $H^1(\mathbb{T}_L^2)$ faite des vecteurs $e^{2i\pi/L(mx+ny)}$, pour m et n dans $\mathbb{Z}$. Alors $\nabla_2 H^1(\mathbb{T}_L^2)$ est engendrée par

$$\Upsilon_{m,n} := \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} e^{(2i\pi/L)(mx+ny)}, \quad \forall m,n \in \mathbb{Z}, \quad |m| + |n| \neq 0.$$

En vertu de la formule 1, les espaces V et $\nabla_2 H^1(\mathbb{T}_L^2)$ sont orthogonaux. Il nous reste donc à prouver que tout vecteur orthogonal à $\nabla_2 H^1(\mathbb{T}_L^2)$ appartient à V. L'espace H admet pour base othogonale complexe $\{\Lambda_{m,n}^{k\pm} : m,n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$, où

$$\Lambda_{m,n}^{k+} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} e^{(2i\pi/L)(mx+ny)} \cos(kz),$$
$$\Lambda_{m,n}^{k-} = \begin{pmatrix} -n \\ m \end{pmatrix} e^{(2i\pi/L)(mx+ny)} \cos(kz).$$

Si on écrit $v \in H$, tel que $v \perp \nabla_2 H^1(\mathbb{T}_L^2)$, dans cette base, comme

$$v = \sum_{m,n,k} \left(v_{m,n}^{k+} \Lambda_{m,n}^{k+} + v_{m,n}^{k-} \Lambda_{m,n}^{k-} \right),$$

on observe que

$$0 = \langle v, \Upsilon_{m,n} \rangle = hL(m^2+n^2) v_{m,n}^{0,+} \cdot \delta_{k,0}.$$

Dès lors

$$v = \sum_{m,n,k \neq 0} v_{m,n}^{k\pm} \Lambda_{m,n}^{k\pm} + \sum_{m,n} v_{m,n}^{0-} \Lambda_{m,n}^{0-}.$$

La fonction v satisfait (15) et (1.7) car elle appartient à H et vérifie (1.3) car les fonctions $\Lambda_{m,n}^{k-}$ et $\Lambda_{m,n}^{0\pm}$ vérifient cette propriété. Dès lors $v \in V$. □

On note que la base $\{\Lambda^{k\pm}_{m,n}\}$ est une base orthogonale de H^j, et on définit la la projection $\mathfrak{P}$ de la manière suivante :

$$\mathfrak{P} : \sum_{m,n,k} \left(v^{k+}_{m,n}\Lambda^{k+}_{m,n} + v^{k-}_{m,n}\Lambda^{k-}_{m,n} \right) \to \sum_{m,n,k\neq 0} v^{k\pm}_{m,n}\Lambda^{k\pm}_{m,n} + \sum_{m,n} v^{0-}_{m,n}\Lambda^{0-}_{m,n}. \tag{1.9}$$

En conséquence, l'ensemble des fonctions $\{\Lambda^{k\pm}_{m,n}, m,n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}/\{0\}\} \cup \{\Lambda^{0-}_{m,n}, m,n \in \mathbb{Z}\}$est une base orthogonale de V^j. Les fonctions $\Lambda^{k\pm}_{m,n}$ sont des vecteurs propres l'opérateur Δ. En effet

$$-\Delta\Lambda^{k\pm}_{m,n} = \left((2\pi/L)^2(m^2+n^2) + h^2k^2\right)\Lambda^{k\pm}_{m,n}.$$

Alors, on définit

$$(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{tels que} \quad -\Delta e_n = \lambda_n e_n, \tag{1.10}$$

la base orthonormale de V obtenue en normalisant $\{\Lambda^{k\pm}_{m,n}, m,n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}/\{0\}\} \cup \{\Lambda^{0-}_{m,n}, m,n \in \mathbb{Z}\}$ vis à vis de la norme L^2 et ordonnée de sorte à ce que les valeurs propres λ_n soient croissantes.

De l'orthogonalité de $\{\Lambda^{k\pm}_{m,n}, m,n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}/\{0\}\} \cup \{\Lambda^{0-}_{m,n}, m,n \in \mathbb{Z}\}$ et en utilisant la forme (1.9) de l'opérateur $\mathfrak{P}$, on obtient :

Lemme 2. *Pour tout $r \in \mathbb{N}$ l'opérateur $\mathfrak{P} : H^r \oplus \mathbb{R}^2\mathbb{1} \mapsto V^r$ est une projection orthogonale.*

On obtient également l'inégalité de Poincaré, les valeurs propres de $-\Delta$, associées à la base orthogonale $\Lambda^{k\pm}_{m,n}$, étant toutes positives.

Lemme 3. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $v \in V^1$,*

$$||v||_{L^2} \leq C||\nabla v||_{L^2}. \tag{1.11}$$

Ensuite en considèrant $b(u,v)$, la partie non-linéaire de l'équation (1.2) on a,

Lemme 4. *Pour tout $w \in V$, $v \in \left(H^2(\mathbb{O})\right)^2$*

$$\langle b(w,v), v\rangle = 0.$$

Démonstration. En effet $\langle (w\cdot\nabla_2)v, v\rangle = -\frac{1}{2}\langle \mathrm{div}_2(w)v, v\rangle$ et

$$\left\langle \left(\int_{-h}^{z} \mathrm{div}_2\, w(\cdot,\cdot,\xi,\cdot)d\xi \right) \partial_z v, v \right\rangle = -\frac{1}{2}\langle \mathrm{div}_2(w)v, v\rangle.$$

Pour la première formule on obtient la preuve par intégration par parties (selon les deux premières variables seulement) :

$$\int_{\mathbb{T}^2_L} ((w\cdot\nabla_2)v)v = -\int_{\mathbb{T}^2_L} ((w\cdot\nabla_2)v)v - \int_{\mathbb{T}^2_L} \mathrm{div}_2(w)v^2.$$

Pour la seconde on réalise une intégration par parties en z en s'appuyant sur $\int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2(w)|_{z=0} = 0$. D'où le résultat. $\square$

Ensuite, on a le résultat suivant

Lemme 5. *En considérant $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in (L^2(\mathbb{O}))^2$, on peut écrire $\nabla b(u, v)$ comme une somme de termes*

$$D^k u_j D^{2-k} v_{j'}, \quad \left(D^k \int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2 u_j(\cdot,\cdot,\xi) d\xi\right) D^{1-k} \frac{\partial v_{j'}}{\partial t}, \quad k = 0, 1, \quad j, j' = 1, 2,$$

où D^l peut-être tout monôme des dérivées spatiales (∂_x,∂_y,∂_z) de degré l. De même, $\Delta b(u, v)$ s'écrit à partir des termes suivants

$$D^k u_j D^{3-k} v_{j'}, \quad \left(D^k \int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2 u_j(\cdot,\cdot,\xi) d\xi\right) D^{2-k} \frac{\partial v_{j'}}{\partial z}, \quad k = 0, 1, 2, \quad j, j' = 1, 2.$$

Lemme 6. *On a les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned} ||b(u, v)||_{L^2} \leq & C \min(||u||_{V^3} ||v||_{V^1}, ||u||_{V^1} ||v||_{V^3}), \\ ||\nabla b(u, v)||_{L^2} \leq & C \min(||u||_{V^3} ||v||_{V^2}, ||u||_{V^2} ||v||_{V^3}). \end{aligned}$$

Démonstration. Pour la première estimation il suffit de constater que

$$\begin{aligned} ||(u \cdot \nabla_2) v||_{L^2} \leq ||u||_{L^\infty} ||\nabla_2 v||_{L^2} & \leq ||u||_{V^2} ||v||_{V^1} \\ \textbf{ou } ||u||_{L^6} ||\nabla_2 v||_{L^3} & \leq ||u||_{V^1} ||v||_{V^2}, \\ \left|\left|\int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2 u \frac{\partial v}{\partial z}\right|\right|_{L^2} \leq ||\operatorname{div}_2 u||_{L^\infty} \left|\left|\frac{\partial v}{\partial z}\right|\right|_{L^2} & \leq ||u||_{V^3} ||v||_{V^1} \\ \textbf{ou } ||\operatorname{div}_2 u||_{L^2} \left|\left|\frac{\partial v}{\partial z}\right|\right|_{L^\infty} & \leq ||u||_{V^1} ||v||_{V^3}. \end{aligned}$$

Pour la deuxième, en vertu du lemme 5, il suffit d'établir les estimations suivantes

$$\begin{aligned} ||D^k u D^{2-k} v||_{L^2} \leq C ||u||_{L^\infty} ||D^2 v||_{L^2} & \leq C ||u||_{V^2} ||v||_{V^2} & k = 0, \\ C ||Du||_{L^6} ||Dv||_{L^3} & \leq C ||u||_{V^2} ||v||_{V^2} & k = 1. \\ \left|\left|D^k \int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2 u D^{1-k} \frac{\partial v}{\partial z}\right|\right|_{L^2} \leq C ||\operatorname{div}_2 u||_{L^\infty} \left|\left|D \frac{\partial v}{\partial z}\right|\right|_{L^2} & \leq C ||u||_{V^3} ||v||_{V^2} & k = 0, \\ \textbf{ou } C ||\operatorname{div}_2 u||_{L^6} \left|\left|D \frac{\partial v}{\partial z}\right|\right|_{L^3} & \leq C ||u||_{V^2} ||v||_{V^3} & k = 0, \\ C ||D \operatorname{div}_2 u||_{L^6} \left|\left|\frac{\partial v}{\partial z}\right|\right|_{L^3} & \leq C ||u||_{V^3} ||v||_{V^2} & k = 1, \\ \textbf{ou } C ||D \operatorname{div}_2 u||_{L^2} \left|\left|\frac{\partial v}{\partial z}\right|\right|_{L^\infty} & \leq C ||u||_{V^2} ||v||_{V^3} & k = 1. \end{aligned}$$

□

Les lemmes 1 et 6 nous permettent de réécrire (1.2) dans un sens apparement plus faible mais en réalité équivalent. Soient $u, v \in C([0,T], V^2) \cap E_3$, alors grâce au lemme 6, $b(u,v) \in L^2\left([0,T], \left(L^2(\mathbb{O})\right)^2\right)$. De plus, u et v étant pairs en z, il en va de même $b(u,v)$. Ainsi $b(u,v) \in H \oplus \mathbb{R}\mathbb{1}$ donc en vertu du lemme 2, appliqué au cas $r = 0$, on peut définir,

$$B(u,v) := \mathfrak{P}b(u,v), \quad u, v \in C([0,T], V^2) \cap E_3.$$

Alors pour $m \geq 2$, $f \in E_{m-1}$ et $v_0 \in V^m$, (1.2), (1.4) est équivalente à :

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + B(v,v) = f. \tag{1.12}$$

complétée de (1.4). En effet considérons v solution de (1.2) et en appliquons $\mathfrak{P}$ à (1.2). Alors en vertu de la formule 1 on a $\mathfrak{P}(\nabla_2 p) = 0$ et grâce à (1.9), on montre que $v \in V^r$, $\mathfrak{P}\Delta v = \Delta v$. Ainsi obtient t-on (1.12). Ensuite, soit $v \in U_m(T)$ une solution de (1.12) ; on reconstruit alors la variable p grâce à la relation

$$\nabla_2 p = b(v,v) - B(v,v)$$

et (v,p) est alors une solution de (1.2). De plus on a grâce au lemme 2, le corollaire suivant au lemme 6

Corollaire 1. *On a les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned} ||B(u,v)||_{L^2} \leq ||b(u,v)||_{L^2} \leq & C \min(||u||_{V^3}||v||_{V^1}, ||u||_{V^1}||v||_{V^3}), \\ ||B(u,v)||_{V^1} \leq ||\nabla b(u,v)||_{L^2} \leq & C \min(||u||_{V^3}||v||_{V^2}, ||u||_{V^2}||v||_{V^3}). \end{aligned}$$

Par ailleurs

Lemme 7. *La composante bilinéaire B vérifie*

$$||B(u,v)||_{V^m} \leq C||u||_{V^{m+1}}||v||_{V^{m+1}}, \quad m \geq 2$$

Démonstration. Pour $m \geq 2$, l'espace H^m est une algèbre ; dès lors, primo,

$$||(u \cdot \nabla_2)v||_{H^m} \leq C||u||_{V^m}||Dv||_{H^m} \leq C||u||_{V^m}||v||_{V^{m+1}}$$

secundo

$$\left|\left|\int_{-h}^{z} \mathrm{div}_2\, u \frac{\partial v}{\partial z}\right|\right|_{H^m} \leq C||Du||_{H^m}||Dv||_{H^m} \leq C||u||_{V^{m+1}}||v||_{V^{m+1}}$$

□

Dès lors, une conséquence immédiate de (1.12) est le corollaire suivant au théorème 1 :

Corollaire 2. *Pour $m \geq 2$ et en gardant le même cadre que pour le théorème 1 on peut ajouter que la solution v est dans $U_m(T)$ pour tout $T > 0$.*

Démonstration. Dans les conditions du théorème 1, la solution v vérifie

$$v \in L^2_{loc}([0,T], V^{m+1}) \cap C([0,T], V^m),$$

dès lors, en vertu du corollaire 1 (pour $m = 2$) et du lemme 7 (pour $m \geq 3$), on a $B(v,v) \in L^2([0,T], V^{m-1})$. De même $\Delta v \in L^2([0,T], V^{m-1})$ et $f \in L^2([0,T], V^{m-1})$ donc en vertu de (1.12) on a $\frac{\partial v}{\partial t} \in L^2([0,T], V^{m-1})$ d'où notre résultat. □

1.1.1 Ensemble absorbant pour le système

L'existence d'un ensemble absorbant est prouvée dans [5], pour le cas des équation primitives soumises à une force f constante en temps. Pour le cas où f dépend du temps, cette propriété est affirmée, grâce aux estimations à priori sur les équations primitives et à d'autre résultats auxilliaires, dans [34]. Ce résultat étant crucial pour le déroulement de notre raisonnement, on l'explicite ici et on en apporte la preuve.

Théorème 2. *Pour un entier $m \geq 1$ supposons qu'il existe une constante C^* telle que*

$$||f(t)||_{V^{m-1}} \leq C^*, \quad \forall t \geq 0$$

alors il existe $R = R(C^*)$ tel que pour tout $M > 0$, existent $T = T(M, C^*)$ et $K = K(M, C^*) \geq 2R$ tels qu'une solution de (1.2) telle que $||v_0||_{V^m} \leq M$ vérifie :

$$\begin{cases} ||v(t)||_{V^m} \leq K, & t \geq 0, \\ ||v(t)||_{V^m} \leq R, & t \geq T \end{cases}$$

Démonstration. On cherche à établir ici, pour tout $m \geq 1$, la propriété suivante Π **: "il existe un $K > 0$ tel que pour tout $R > 0$ il existe T_0 tel que pour tout v solution de (1.2) partant de $v_0 \in B_{V^m}(R)$ et soumise à f, $v(t) \in B_{V^m}(K)$ pour tout $t \geq T_0$".**

Le point de départ de notre raisonnement est l'inégalité asymptotique que l'on peut établir pour la norme L^2 de v ; en reprennant l'inégalité (2.2) dans [34], on établit :

Estimation en norme L^2 de v :

$$||v(t+1)||^2_{L^2} + C \int_t^{t+1} ||\nabla v||^2_{L^2} \leq C' |||f|||_0 + ||v(0)||^2_{L^2} e^{-C''t}.$$

Si bien qu'en fixant $K := \frac{3}{2}C^*$, pour tout $R > 0$ il existe T_0 tel que

$$||v(t)||_{L^2}^2 \leq K, \quad t \geq T_0 \tag{1.13}$$

$$\int_t^{t+1} ||\nabla v||_{L^2}^2 \leq K, \quad t \geq T_0. \tag{1.14}$$

Considérant cela, on peut choisir R fixé quelconque et T_0 déterminé en conséquence ; il s'agira alors de prouver que l'existence d'un ensemble absorbant pour la norme L^2 entraîne la même propriété pour le rang m mais avec un ensemble absorbant d'une taille K différente. Cependant pour simplifier les notations dans la suite chacune des boules absorbantes aura pour rayon un K qui sera donc une valeur polyvalente.

Maintenant, en reprennant l'estimation (2.10) dans [34], on obtient le résultat suivant :

Estimation en norme L^6 de $\tilde{v}$:

$$\frac{d||\tilde{v}||_{L^6}^6}{dt} + C\int_{\mathbb{O}} \left|\nabla\tilde{v}|\tilde{v}|^2\right|^2 \leq C'(1 + ||v||_{L^2}^2 + ||\nabla_2 v||_{L^2}^2 + ||v||_{L^2}^2||\nabla_2 v||_{L^2}^2)||\tilde{v}||_{L^6}^6 + C'||f||_{L^6}^6.$$

Alors en appliquant le lemme 8 et de (1.13), on obtient qu'il existe $K > 0$ tel que

$$||\tilde{v}||_{L^6}^6 \leq K, \quad t \geq T_0 + 1 \tag{1.15}$$

$$\int_t^{t+1}\int_{\mathbb{O}} \left|\nabla\tilde{v}|\tilde{v}|^2\right|^2 \leq K, \quad t \geq T_0 + 2. \tag{1.16}$$

Ceci établi, on peut aborder les estimations en norme H^1 ; tout d'abord, on réutilise l'estimation (2.12) dans [34] pour affirmer :

Estimation en norme L^2 de $\nabla_2\bar{v}$:

$$\frac{d||\nabla_2\bar{v}||_{L^2}^2}{dt} + C||\Delta_2\bar{v}||_{L^2}^2 \leq C'||\bar{v}||_{L^2}^2||\nabla_2 v||_{L^2}^2||\nabla_2\bar{v}||_{L^2}^2 + C'||\nabla_2\tilde{v}||_{L^2}^2 + C'\Big(\int_{\mathbb{O}} |\tilde{v}|^4|\nabla_2\tilde{v}|^2\Big) + ||f||_{L^2}^2.$$

Ainsi, en vertu du lemme 8, et de (1.13) et (1.15), il existe $K > 0$ tel que

$$||\nabla\bar{v}||_{L^2}^2 \leq K, \quad t \geq T_0 + 3 \tag{1.17}$$

$$\int_t^{t+1} ||\Delta_2\bar{v}||^2 \leq K \quad t \geq T_0 + 4. \tag{1.18}$$

Ensuite on considère le cas de la dérivée verticale de v ; on a le résultat suivant (cf (2.13) de [34]) :

Estimation en norme L^2 de $u := \frac{\partial v}{\partial z}$:

$$\frac{d||u||_{L^2}^2}{dt} + C||\nabla u||_{L^2}^2 \leq C'(||\tilde{v}||_{L^6}^2 + ||\nabla_2 \bar{v}||_{L^2}^2)^2 ||u||_{L^2}^2 + C'\Big|\Big|\frac{\partial f}{\partial z}\Big|\Big|_{L^2} ||u||_{L^2}.$$

Aussi,en vertu du lemme 8, et de (1.15) et (1.17), il existe $K > 0$ tel que

$$||u||_{L^2}^2 \leq K, \quad t \geq T_0 + 5 \tag{1.19}$$

$$\int_t^{t+1} ||\nabla u||^2 \leq K \quad t \geq T_0 + 6. \tag{1.20}$$

Enfin on peut déduire de l'inégalité (2.14) de [34] le résultat suivant :

Estimation en norme H^1 de v :

$$\frac{d||\nabla v||_{L^2}^2}{dt} + C||\Delta v||_{L^2}^2 \leq C'(||v||_{L^6}^4 + ||\nabla \partial_z v||_{L^2}^2 ||\nabla v||_{L^2}^2)||\nabla v||_{L^2}^2 + C'||f||_{L^2}^2.$$

Dès lors, en vertu du lemme 8 et de (1.13), (1.15) et (1.19), il existe $K > 0$ tel que :

$$||\nabla v||_{L^2}^2 \leq K, \quad t \geq T_0 + 7 \tag{1.21}$$

$$\int_t^{t+1} ||\Delta v||^2 \leq K \quad t \geq T_0 + 8. \tag{1.22}$$

Ainsi établit on l'existence d'une boule absorbante dans le cas $m = 1$. Pour prouver le cas $m = 2$ on doit prouver deux estimations supplémentaires l'une portant sur u et l'autre sur Δv. Pour la première, on se réfère à (3.13) dans [34] pour affirmer :

Estimation en norme L^6 de u :

$$\frac{d||u||_{L^6}^6}{dt} + C||\nabla_2 u||_{L^2}^2 ||u||_{L^2}^4 \leq C'(||v||_{H^2} + 1)||u||_{L^6}^6 + C'\Big|\Big|\frac{\partial f}{\partial z}\Big|\Big|_{L^6}^6.$$

En vertu du lemme 8 et de (1.21) il existe $K > 0$ tel que

$$||u||_{L^6}^6 \leq K, \quad t \geq T_0 + 9 \tag{1.23}$$

$$\int_t^{t+1} ||\nabla u||_{L^2}^2 ||u||_{L^2}^4 \leq K, \quad t \geq T_0 + 10. \tag{1.24}$$

Ensuite, pour le terme Δv on a, en se référant à (3.6), l'estimation suivante :

Estimation en norme L^2 de Δv :

$$\frac{d||\Delta v||_{L^2}^2}{dt} + C||\nabla \Delta v||_{L^2}^2 \leq C'(||u||_{L^6}^4(||\nabla u||_{L^2}^2 + 1) + 1)||\Delta v||_{L^2}^2 + ||\Delta f||_{L^2}^2.$$

Aussi, en vertu du lemme 8 et de (1.23) et (1.19) il existe $K > 0$ tel que

$$||\Delta v||_{L^2}^2 \leq K, \quad t \geq T_0 + 11 \tag{1.25}$$

$$\int_t^{t+1} ||\nabla \Delta v||_{L^2}^2 \leq K, \quad t \geq T_0 + 12. \tag{1.26}$$

Exposons brièvement le raisonnement permettant de généraliser ce résultat pour $m > 2$: en reprenant les résultats de [34] , on prouve une dernière estimation :

Estimation en norme H^m de v : Pour $m \geq 3$, on a

$$\frac{d||\nabla^m v||_{L^2}^2}{dt} + ||\nabla^{m+1} v||_{L^2}^2 \leq C(||\nabla^{m-1} v||_{L^2}^4 ||\nabla^m v||_{L^2}^2 + ||\nabla^{m-1} f||_{L^2}^2)$$

Démonstration. En effet on déduit de (3.17) et (3.18) dans [34],

$$\begin{aligned}
\frac{d||\nabla^m v||_{L^2}^2}{dt} &+ ||\nabla^{m+1} v||_{L^2}^2 \\
&\leq C\Big(\sum_{k=1}^{m} ||\nabla^{m-k+2} v||_{L^2} ||\nabla^k v||_{L^2}^{1/2} ||\nabla^{k+1} v||_{L^2}^{1/2} ||\nabla^m v||_{L^2} \\
&+ \sum_{k=1}^{m-1} ||\nabla^{k+1} v||_{L^2} ||\nabla^{m-k+1} v||_{L^2}^{1/2} ||\nabla^{m-k+2} v||_{L^2}^{1/2} ||\nabla^{m+1} v||_{L^2} \\
&+ ||\nabla^2 v||_{L^2} ||\nabla^m v||_{L^2}^{1/2} ||\nabla^{m+1} v||_{L^2}^{3/2} + ||\nabla^{m-1} f||_{L^2} ||\nabla^{m+1} v||_{L^2} \Big).
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Dès lors, en vertu de l'inégalité Poincaré

$$\begin{aligned}
\frac{d||\nabla^m v||_{L^2}^2}{dt} + ||\nabla^{m+1} v||_{L^2}^2 \leq C(&||\nabla^{m-1} v||_{L^2} ||\nabla^m v||_{L^2}^{1/2} ||\nabla^{m+1} v||_{L^2}^{3/2} \\
&+ ||\nabla^{m-1} f||_{L^2} ||\nabla^{m+1} v||_{L^2}),
\end{aligned} \tag{1.28}$$

i.e

$$\frac{d||\nabla^m v||_{L^2}^2}{dt} + ||\nabla^{m+1} v||_{L^2}^2 \leq C(||\nabla^{m-1} v||_{L^2}^4 ||\nabla^m v||_{L^2}^2 + ||\nabla^{m-1} f||_{L^2}^2)$$

□

Il apparaît maintenant que la propriété Π est héréditaire en m : en effet, si elle est établie pour $m-1$ alors $\int_t^{t+1} ||\nabla^{m-1} v||(s)_{L^2}^4 ds$ est asymptotiquement borné donc en vertu du lemme 8, la propriété Π est vraie pour m. De là, la preuve de l'existence d'un ensemble absorbant. □

Sans perdre de généralité on peut considérer dans la suite que $T \geq 1$ et $R \geq 1$. Continuons ce travail, par l'étude de l'analycité de l'opérateur résolvant de (1.2), (1.4).

1.2 Analycité du résolvant

Considérons les ensembles et applications suivants :

— pour $T \leq \infty$,

$$\mathcal{E}_j(T) := \bar{B}_{L^\infty([0,T],V^j)}(C^*), \quad \text{pour } j \in \mathbb{N},$$

avec ce même C^* qu'on a introduit dans le théorème 2 ;

— pour $0 < T < \infty$ et $\epsilon > 0$ qu'on fixera dans la suite, on pose

$$\hat{E}_j(T,\epsilon) := \mathcal{E}_j(T) + B_{E_j(T)}(\epsilon) \subset E_j(T), \quad j \in \mathbb{N};$$

— $\mathcal{L}$ un opérateur associé à l'équation (1.12), (1.4) :

$$\mathcal{L} : v \mapsto (\mathcal{L}^1 v := v(0), \mathcal{L}^2 v := \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + B(v,v)),$$

— Sol un opérateur défini par

$$Sol : (u_0, f) \mapsto u, \tag{1.29}$$

où u est solution de (1.12), (1.4) c'est à dire l'inverse de $\mathcal{L}$;

— $d\mathcal{L}$ la linéarisation de $\mathcal{L}$:

$$d\mathcal{L}(v) : w \mapsto (d\mathcal{L}^1 w := w(0), d\mathcal{L}^2 w := \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + B(v,w) + B(w,v)).$$

En vertu du théorème 1, pour tout $m \geq 1$, $M > 0$, $0 \leq T'$ et $(v_0', f') \in B_{V^m}(M) \times \mathcal{E}_{m-1}(T')$, $Sol(v_0', f')(t) \in V^m$ est défini pour $t \in [0, T']$. Dans ce contexte, on a le résultat suivant

Théorème 3. *Pour tout $T > 0$, $M > 0$ et $m \geq 2$ un entier, il existe $\rho(M,T,m) > 0$ tel que pour tout $T' \in [\min(1, T/2), T]$, l'application*

$$Sol : B_{V^m}(M) \times \hat{E}_{m-1}(T', \rho) \mapsto U_m(T'), \tag{1.30}$$

est bien définie et analytique. De plus cette application est lipschitzienne, de constante de Lipschitz L dépendant uniquement de M, T et m.

Prouvons maintenant ce théorème.

1.2.1 Propriétés de l'opérateur $\mathcal{L}$

Etudions en premier lieu les espaces de définition de $\mathcal{L}$; pour cela on commence par établir un corollaire des lemmes 1 et 7 :

Corollaire 3. *On a*

$$||B(u,v)||_{E_1} \leq C||u||_{U_2}||v||_{U_2}$$

et pour $m \geq 2$,

$$||B(u,v)||_{E_m} \leq C \min(||u||_{U_{m+1}}||v||_{U_m}, ||v||_{U_{m+1}}||u||_{U_m})$$

Démonstration. Pour la première inégalité, on se fonde sur le corollaire 1 dont on intègre la seconde inégalité prise au carré :

$$\int_0^T ||B(u,v)||_{V^1}^2 \leq \int_0^T C||u||_{V^2}^2||v||_{V^3}^2 \leq C||u||_{C([0,T],V^2)}^2||v||_{E_3}^2 \leq C||u||_{U_2}^2||v||_{U_2}^2.$$

Pour la seconde on procède de même cette fois-ci en partant du lemme 7. □

Armés de ces trois résultats on établit le lemme suivant

Lemme 8. *L'opérateur*

$$\mathcal{L} : U_m \to V^m \times E_{m-1}, \quad m \geq 2$$

est analytique.

Démonstration. On analyse $\mathcal{L}$ composante par composante. En vertu du corollaire 3, on a

$$\int_0^T ||B(u,u)||_{V^{m-1}}^2 \leq ||u||_{U^m}^4.$$

Dès lors B est un opérateur homogène de rang 2 continu donc est analytique. Pour les autres termes, on remarque que

$$u \mapsto \frac{du}{dt} - \Delta u, \quad U_m \to E_{m-1},$$

est évidemment linéaire continu et enfin que,

$$u \mapsto u(0), \quad U_m \to V^m$$

est linéaire continu en vertu de ce que $U_m \subset C([0,T], V^m)$. Dès lors $\mathcal{L}$ est analytique. □

Maintenant établissons un résultat d'injectivité pour $\mathcal{L}$.

Lemme 9. *Soient* $m \geq 2$, $T > 0$ *et* $u_1, u_2 \in U_m(T)$ *tels que* $\mathcal{L}(u_1) = \mathcal{L}(u_2)$. *Alors* $u_1(t) = u_2(t)$ *pour tout* $t \in [0,T]$.

Démonstration. Si $\mathcal{L}(u_1) = \mathcal{L}(u_2)$, alors $\tilde{u} = u_1 - u_2$ est solution de

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} - \Delta\tilde{u} + B(u_1, \tilde{u}) + B(\tilde{u}, u_2) = 0, \quad \tilde{u}_0 = 0.$$

Aussi en appliquant à cette équation le produit scalaire par $\tilde{u}$, on obtient, en vertu du

lemme 4 et du corollaire 1,

$$\frac{d||\tilde{u}||_{L^2}^2}{dt} + ||\nabla \tilde{u}||_{L^2}^2 \leq C||\tilde{u}||_{V^1}||u_2||_{V^3}||\tilde{u}||_{L^2}.$$

Ainsi, en vertu de l'inégalité de Young, $\frac{d||\tilde{u}||_{L^2}^2}{dt} \leq C||u_2||_{V^3}^2||\tilde{u}||_{L^2}^2$. Ainsi

$$||\tilde{u}(t)||_{L^2}^2 \leq ||\tilde{u}_0||_{L^2}^2 e^K,$$

donc $\tilde{u}(t) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$. □

Ensuite traitons de la non-dégénérescence de $\mathcal{L}$

Lemme 10. *Pour tous $T > 0$, $u \in U_2(T)$ et $r = 0, 1, 2$, l'opérateur $d\mathcal{L}(u)$ est un isomorphisme entre $U_r(T)$ et $V^r \times E_{r-1}(T)$ la norme de l'inverse duquel dépend uniquement de $||u||_{U_2(T)}$.*

Démonstration. Pour établir l'existence d'une solution de l'équation linéarisée i.e l'existence d'un inverse de $d\mathcal{L}$ et la bornitude de cet inverse, attachons nous à établir certains estimations préliminaires pour cette équation. Dans la suite, pour les cas $r = 0, 1$ on se contentera d'établir les estimations a priori et on ne démontrera le résultat entier que pour $r = 2$.

Dans tous les cas, on considère $(v_0, f) \in V^r \times E_{r-1}$ et v la solution de

$$\frac{dv}{dt} - \Delta v + B(u, v) + B(v, u) = f, \tag{1.31}$$

$$v(0) = v_0. \tag{1.32}$$

Estimations a priori pour le cas $r = 0$: en appliquant à (1.31) le produit scalaire par v dans L^2 et en appliquant le lemme 4 et le corollaire 1 ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d||v||_{L^2}^2}{dt} + ||\nabla v||_{L^2}^2 \leq ||f||_{V^{-1}}||v||_{V^1} + ||B(v, u)||_{L^2}||v||_{L^2}.$$

Doréanavant on remplacera toutes les constantes par C et C' polyvalentes. Ainsi

$$\frac{d||v||_{L^2}^2}{dt} + C||\nabla v||_{L^2}^2 \leq C'(||f||_{V^{-1}}||v||_{V^1} + ||u||_{V^3}||v||_{V^1}||v||_{L^2}).$$

Dès lors, en réappliquant l'inégalité de Young au deux termes de droite, on obtient

$$\frac{d||v||_{L^2}^2}{dt} + C||\nabla v||_{L^2}^2 \leq C'(||f||_{V^{-1}}^2 + ||u||_{V^3}^2||v||_{L^2}^2).$$

Ainsi pour $0 \leq t \leq T$,

$$||v||_{L^2}^2(t) \leq (||v(0)||_{L^2} + C'||f||_{E_{-1}}^2)e^{C'\int_0^t ||u||_{V^3}^2},$$

et ainsi

$$||v||^2_{L^2}(t) \leq (||v(0)||_{L^2} + C'||f||^2_{E_{-1}})\chi(||u||_{U_2}), \text{ où } \chi(||u||_{U_2}) := e^{C'||u||^2_{U_2}}. \tag{1.33}$$

De plus

$$\begin{aligned}\int_0^t ||\nabla v||^2_{L^2} &\leq \frac{1}{C}\left(||v(0)||_{L^2} + C'\int_0^t ||f||^2_{V^{-1}}(s) + ||u||^2_{V^3}(s)||v||^2_{L^2}(s)ds\right)\\ &\leq \frac{1}{C}\left(||v(0)||_{L^2} + C'||f||^2_{E_{-1}} + \int_0^t ||u||^2_{V^3}(s)ds||v||^2_{\mathcal{E}'}\right),\end{aligned}$$

aussi, en vertu de (1.33), on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^t ||\nabla v||^2_{L^2} &\leq \left(||v(0)||_{L^2} + C'||f||^2_{E_{-1}}\right)\chi'(||u||_{U_2})\\ &\text{avec } \chi'(||u||_{U_2}) := \frac{1}{C}\left(1 + ||u||^2_{U_2}e^{C'||u||^2_{U_2}}\right).\end{aligned} \tag{1.34}$$

Estimations a priori pour le cas $r = 1$: en appliquant à (1.31) le produit scalaire par $-\Delta v$ les inégalités de Cauchy-Schwartz et de Young, au premier terme de droite ainsi que le corollaire 1 et de nouveau l'inégalité de Young pour le second lemme de droite, on obtient

$$\frac{d||\nabla v||^2_{L^2}}{dt} + C||\Delta v||^2_{L^2} \leq C'(||f||^2_{L^2} + ||u||^2_{V^3}||\nabla v||^2_{L^2})$$

si bien que de manière similaire au cas $r = 0$

$$||\nabla v||^2_{L^2}(t) \leq (C'||f||^2_{E_0} + ||v(0)||^2_{V^1})\chi(||u||_{U_2}), \tag{1.35}$$

et

$$\int_0^t ||\Delta v||^2_{L^2} \leq \left(||v(0)||^2_{V^1} + C'||f||^2_{E_0}\right)\chi'(||u||_{U_2}). \tag{1.36}$$

Preuve complète pour le cas $r = 2$: maintenant appliquons à (1.31) le produit scalaire par $-\Delta^2 v$; on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d||\Delta v||^2_{L^2}}{dt} + ||\nabla\Delta v||^2_{L^2} \leq |\langle\nabla f, \nabla\Delta v\rangle| + |\langle\nabla(B(u,v) + B(v,u)), \nabla\Delta v\rangle|$$

ainsi, en reprennant le corollaire 1 et les inégalités de Cauchy-Schwartz et de Young, on obtient,

$$\frac{d||\Delta v||^2_{L^2}}{dt} + C||\nabla\Delta v||^2_{L^2} \leq C'(||f||^2_{V^1} + ||u||^2_{V^3}||v||^2_{V^2}) \tag{1.37}$$

si bien que, en procédant comme dans le cas $r = 0$, on obtient

$$||\Delta v||^2_{L^2}(t) \leq (C'||f||^2_{E_1} + ||v(0)||^2_{V^2})\chi(||u||_{U_2}), \tag{1.38}$$

et

$$\int_0^t ||\nabla\Delta v||_{L^2}^2 \leq \left(||v(0)||_{V^2}^2 + C'||f||_{E_1}^2\right)\chi'(||u||_{U_2}). \tag{1.39}$$

Grâce à toutes ces estimations (via les approximations de Galerkhin) on établit l'existence d'une solution au problème (1.31), (1.32) et son appartenance à l'espace $C([0,T],V^2)\cap E_3(T)$. L'équation étant linéaire ces mêmes estimations permettent d'affirmer l'unicité de la solution. En vertu du corrollaire 3, on a

$$B(u,v) + B(v,u) \in E_1(T).$$

Par ailleurs $\Delta v \in L^2([0,T],V^1)$ donc, en vertu de (1.31), on a $\frac{\partial v}{\partial t} \in L^2([0,T],V^1)$. Dès lors $v \in U_2(T)$. Ainsi prouve t-on l'existence de cet inverse ; par ailleurs, on obtient que la norme de cet inverse est majorée par une grandeur dépendant uniquement de $||u||_{U_2}$. Ainsi notre affirmation est-elle démontrée.

□

Naturellement, une meilleure régularité pour la courbe $u(t)$ implique que l'application $d\mathcal{L}(u)$ opère sur des espaces plus réguliers :

Lemme 11. *Pour tous $T > 0$, $m \geq 3$ et $u \in U_{m-1}(T)$, $d\mathcal{L}(u)$ est un isomorphisme entre $U_m(T)$ et $V^m \times E_{m-1}(T)$ la norme de l'inverse duquel dépend uniquement de $||u||_{U_{m-1}}(T)$.*

Démonstration. On s'attache a augmenter la régularité de notre solution v définie dans le lemme 10.

On applique à (1.31) le produit scalaire par $(-\Delta)^m v$; on alors l'estimation suivante

$$\frac{1}{2}\frac{d||\nabla^m v||_{L^2}^2}{dt} + ||\nabla^{m+1}v||_{L^2}^2 \leq |\langle B(u,v) + B(v,u), \Delta^m v\rangle| + |\langle f, \Delta^m v\rangle|$$

ainsi en réutilisant des constantes polyvalentes C et C',

$$\frac{d||\nabla^m v||_{L^2}^2}{dt} + C||\nabla^{m+1}v||_{L^2}^2 \leq ||B(u,v) + B(v,u)||_{V^{m-1}}||\nabla^{m+1}v||_{L^2} + ||f||_{V^{m-1}}||\nabla^{m+1}v||_{L^2}$$

donc en vertu du lemme 7, on a

$$\frac{d||\nabla^m v||_{L^2}^2}{dt} + C||\nabla^{m+1}v||_{L^2}^2 \leq C'||u||_{V^m}||\nabla^{m+1}v||_{L^2}^2 + ||f||_{V^{m-1}}||\nabla^{m+1}v||_{L^2}$$

donc en appliquant l'inégalité de Young au dernier terme de droite

$$\frac{d||\nabla^m v||_{L^2}^2}{dt} + C||\nabla^{m+1}v||_{L^2}^2 \leq C'||u||_{V^m}||\nabla^{m+1}v||_{L^2}^2 + C'||f||_{V^{m-1}}^2$$

Aussi le lemme de Gronwall nous permet-il de conclure que pour $u \in U_{m-1}$ $v \in C([0,T], V^m) \cap L^2([0,T], V^{m+1})$ existe et que la norme de notre inversion de $||u||_{L^2([0,T],V^m)}$, donc de $||u||_{U_{m-1}}$ uniquement. Enfin le corrollaire 3 nous permet d'établir que $v \in U_m(T)$. □

On peut donc établir maintenant l'existence et l'analycité de Sol :

Preuve du théorème 3. Cette affirmation découle de la partie analytique réelle du théorème 18 pour $f = \mathcal{L}$ et $E = U_m(T')$, $F = V_m \times E_{m-1}(T')$, $Z = B_{V^m(M)} \times \mathcal{E}_{m-1}(T')$. En effet, en vertu du lemme 8 l'application $\mathcal{L}$ est analytique et en vertu du lemme 9 est injective. En vertu de la dernière assertion du théorème 1, pour tout $(u_0, f) \in Z$ une solution $\mathcal{L}^{-1}(u_0, f) =: v$ existe, et $||u||_{U_m} \leq R(T', C^*, m)$. Posons $U = B_{U_m}(R+1)$.

Alors **a)** dans le théorème 18 est vérifiée pour $r = 1$. L'estimation **b)** découle du corollaire 3 (qui est vérifié à la fois pour les fonctions analytiques réelles et complexes $u(t,x)$) et l'estimation **c)** est également vérifié en vertu de ce corollaire. Enfin **d)** correspond aux affirmations des lemmes 10, 11. Dès lors, l'application du théorème 18 implique l'existence et l'analycité de Sol. De plus sa constante de Lipschitz est bornée par

$$\sup_{||u_0||_{V^m} \leq M, f \in \hat{E}_{m-1}(T',\rho)} ||dSol(u_0, f)||_{V^m \times E_{m-1} \mapsto U_m} \leq L(M, T, m).$$

□

1.3 Processus à temps discret engendré

On considère pour que f dans (1.2) est définie en temps, par morceaux :

$$f := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[k,k+1[}(t)\eta_k(t-k),$$

de telle sorte que

$$f \in \mathcal{E}_m(\infty), \text{ pour un quelconque } m \geq 2$$

Alors en vertu du théorème 1 et du corollaire 2, il existe une unique solution de (1.2), (1.4), $v \in U_m(T)$ pour tout $T > 0$ avec pour terme de droite f et un certain $v_0 \in V^m$. On échantillonne les valeurs de ce processus aux instants entiers créant ainsi un processus $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$, où

$$v_k = v(k), \quad v_k \in V^m.$$

Ainsi donc on a la relation suivante :

$$v_{k+1} = Sol(v_k, \eta_k)(1), \quad \forall k \geq 0,$$

aussi définit-on l'opérateur suivant

$$S : V_m \times \mathcal{E}_{m-1}(1) \mapsto V_m, \quad S : (v, \eta) \to Sol(v, \eta)(1). \tag{1.40}$$

Etudions maintenant le processus à temps discret

$$v_{k+1} = S(v_k, \eta_k). \tag{1.41}$$

1.3.1 Ensemble stable par S et analycité de ce dernier

Fixons $m \geq 2$. En appliquant le théorème 2 nous posons $M = 2R \geq 2$ et déterminons $T(M) \geq 1$ et $K = K(M) \geq 2R$. Appliquons maintenant la dernière affirmation du théorème 3. On peut trouver un $\epsilon(M, 2T)$ tel que pour $||u_0||_{V^m} \leq 2R$, et pour tout $f' \in \hat{E}_{m-1}(2T, \epsilon(M, 2T))$, tel que

$$||f - f'||_{E_{m-1}(T')} \leq \epsilon(M, 2T), \quad f \in \mathcal{E}_{m-1}(2T),$$

on ait

$$||Sol(u_0, f')(t) - Sol(u_0, f)(t)||_{V^m} \leq \epsilon(M, 2T)L, \quad 1 \leq t \leq 2T.$$

Fixons $\epsilon(M, 2T)$ tel que $\epsilon L \leq 1$. Alors, en vertu du théorème 2, pour tout $f' \in \hat{E}_{m-1}(2T, \epsilon(M, 2T))$ nous avons

$$\begin{cases} ||Sol(u_0, f')(t)||_{V^m} \leq K + 1, & 1 \leq t \leq T, \\ ||Sol(u_0, f')(t)||_{V^m} \leq R + 1, & T \leq t \leq 2T. \end{cases} \tag{1.42}$$

Désormais nous fixons $\epsilon = \epsilon(R, M, 2T)$, $\hat{E}_{m-1}(2T) = \hat{E}_{m-1}(2T, \epsilon)$ et écrivons

$$\mathcal{O}_m := \{v : \exists 0 \leq t \leq 2T, v_0 \in B_{V^m}(2R), \eta \in \hat{E}_{m-1}(2T) \text{ tels que } v = Sol(v_0, \eta)(t)\}.$$

En vertu de (1.42),

$$B_{V^m}(2R) \subset \mathcal{O}_m \subset B_{V^m}(K + 1). \tag{1.43}$$

De plus, on a le résultat suivant :

Lemme 12. *L'ensemble $\mathcal{O}_m$ est ouvert dans V^m*

Démonstration. L'ensemble

$$W_m := \{v \in U_m(2T), v = Sol(v_0, \eta), v_0 \in B_{V^m}(2R), \eta \in \hat{E}_{m-1}(2T)\}$$

est un ouvert de $U_m(2T)$ en tant qu'image réciproque par $\mathcal{L}$ de $B_{V^m}(2R) \times \hat{E}_{m-1}(2T)$ ouvert de $V^m \times E_m(2T)$. On considère maintenant les applications :

$$\mathcal{I}_\tau : U_m(2T) \to V^m, \quad v \mapsto v(\tau). \tag{1.44}$$

En vertu du théorème 3.2 du premier chapitre dans [30], ces applications sont continues et surjectives. Dès lors en vertu du théorème de l'application ouverte appliqué aux espaces de Banach $U_m(2T)$, les ensembles $\mathcal{I}_\tau W_m \subset V^m$ sont ouverts pour tout $\tau \in [0, 2T]$ et $\mathcal{O}_m = \cup_{\tau\in[0,2T]}\mathcal{I}_\tau W_m$ est également ouvert.

Pour $\tau = 2T$, il suffit de considérer l'ensemble des éléments $U_m(2T+1)$. En suivant le raisonnement juste au dessus, on peut établir l'existence pour tout point de V^m d'une trajectoire $u \in U_m(2T+1)$ passant par ce point en $2T$. On choisit alors comme antécédant de $u(2T)$ dans $U_m(2T)$, $u\mathbb{1}_{[0,2T]}$ d'où la surjectivité de $\mathcal{I}_{2T}$. Quand à la continuité elle résulte de ce que $U_m(2T) \subset C([0, 2T], V^m)$.

Ainsi, en vertu du théorème de l'application ouverte appliqué entre les espaces $U_m(2T)$ et V^m, espaces de Banach et portant sur W_m ouvert de $U_m(2T)$, on a que $\mathcal{I}_\tau W_m$ est un ouvert de V^m pour tout $\tau \in [0, 2T]$. Dès lors

$$\mathcal{O}_m = \cup_{\tau\in[0,2T]}\mathcal{I}_\tau W_m$$

est un ouvert de V^m. □

De plus

Théorème 4. *L'ensemble $\mathcal{O}_m$ est stable par S pour une force extérieure dans $\mathcal{E}_{m-1}(1)$; autrement dit,*

$$S(\mathcal{O}_m \times \mathcal{E}_{m-1}(1)) \subset \mathcal{O}_m$$

de plus, l'application S est analytique de $\mathcal{O}_m \times \hat{E}_{m-1}(1)$ dans V^m.

Démonstration. L'analycité de S se déduit de celle de $Sol : B_{V^m}(2R) \times \hat{E}_{m-1}(1) \to U_m(1)$ (cf théorème 3).

Traitons maintenant de la stabilité de $\mathcal{O}_m$. On considère $\wr \in \mathcal{O}_m$ quelconque. Alors il existe $t_0 \geq 0$ $\wr_0 \in B_{V^m}(R)$ et $\eta_0 \in \hat{E}_{m-1}(t_0)$ tels que

$$\wr = Sol(\wr_0, \eta_0)(t_0).$$

Soit de plus $z_0 \in \mathcal{E}_{m-1}(t_0)$ l'estimation de η_0 i.e telle que

$$||z_0 - \eta_0||_{E_{m-1}(t_0)} < \epsilon.$$

Considérons maintenant $z_1 \in \mathcal{E}_{m-1}(1)$ quelconque et procèdons à une dichotomie selon la définition de $\wr$. Si $t_0 \geq T$ alors en vertu de (1.42), $||u(t)||_{V^m} \leq R + 1 \leq 2R = M$, donc $S(\wr, z_1) \in \mathcal{O}_m$ par définition de $\mathcal{O}_m$.

Si maintenant $0 \leq t_0 \leq T$, il convient d'écrire $S(\wr, z_1)$ sous la forme précise requise par

la définition de $\mathcal{O}_m$; pour cela définissons

$$z_2(t) = \begin{cases} z_0(t), & 0 \leq t \leq t_0, \\ z_1(t-t_0), & t_0 \leq t \leq t_0+1, \\ z_1(1) & t \geq t_0+1, \end{cases}$$

et

$$\eta_2(t) = \begin{cases} \eta_0(t), & 0 \leq t \leq t_0, \\ z_1(t-t_0), & t_0 \leq t \leq t_0+1, \\ z_1(1) & t \geq t_0+1. \end{cases}$$

Ainsi $\eta_2 \in \hat{E}_{m-1}(2T)$ est le contrôle exercé sur la trajectoire partant de $\wr_0$ passant par $\wr$ définie jusqu'à t_0+1 et prolongée jusqu'à $2T$ par $z_1(1)$

Clairement

$$||\eta_2 - z_2||_{E_{m-1}(2T)} = ||\eta_0 - z_0||_{E_{m-1}(t_0)} \leq \epsilon.$$

Dès lors, comme

$$S(\wr, z_1) = Sol(\wr_0, \eta_2)(t_0+1), \quad \wr_0 \in B_{V^m}(2R), \eta_2 \in \hat{E}_{m-1}(t_0+1),$$

on a $S(\wr, z_1) \in \mathcal{O}_m$ et la proposition est prouvée. □

Une conséquence de cela est que pour $m \geq 2$, l'étude des trajectoires à long terme du système (1.41) peut se restreindre à l'étude du comportement à long terme des trajectoires sur les ensembles invariants $\mathcal{O}_m$.

1.4 Régularisation par l'opérateur S

En vertu du théorème 3, pour $m \geq 2$, l'opérateur S est analytique de $V^m \times \hat{E}_{m-1}(1)$ à valeurs dans V^m ; par la proposition suivante on augmente la régularité de l'espace d'arrivée.

Proposition 1. *Pour tout $m \geq 2$, l'opérateur S est analytique de $B_{V^m}(2R) \times \hat{E}_m(1)$ dans V^{m+1}*

Pour prouver cette proposition, on établit le résultat suivant

Lemme 13. *Soient $j \geq 2$ fixé et $u \in U_j$, $h \in E_j$ et $v_0 \in V^{j+1}$ donnés. Alors v la solution de*

$$d\mathcal{L}(u)v = (v_0, h)$$

vérifie $v \in U_{j+1}$ et dépend analytiquement de $u \in U_j$, $v_0 \in V^{j+1}$ et $h \in E_j$.

Démonstration. En vertu des lemmes 10 et 11, $v \in U_{j+1}$ existe et est unique pour tous $u \in U_j$, $h \in E_j$ et $v_0 \in V^{j+1}$. Pour établir son analycité en fonction de ces paramètres, on applique le théorème des fonctions implicites. Dans notre cas, on pose

$$f(u,v) := d\mathcal{L}(u)v.$$

En vertu du lemme 8, f est analytique en tant qu'application

$$U_j \times U_{j+1} \mapsto V^{j+1} \times E_j.$$

De plus, pour tout (u,v), sa différentielle $d_v f(u,v) = d\mathcal{L}(u) : U_j \times U_{j+1} \mapsto V^{j+1} \times E_j$ est inversible en vertu des lemmes 10 et 11. Dès lors, en vertu du théorème des fonctions implicites, pour tous $\bar{u} \in U_j$ et $(\bar{v_0}, \bar{h}) \in V^{j+1} \times E_j$, il existe

$$\phi : U_j \times V^{j+1} \times E_j \supset A \to U_{j+1},$$

définie et analytique sur A un voisinnage de $(\bar{u}, \bar{v_0}, \bar{h})$, telle que

$$f(u, \phi(u, v_0, h)) = (h, v_0), \quad \forall (u, v_0, h) \in A.$$

Donc $v = \phi(u, v_0, h)$ est une fonction analytique sur l'ensemble de $U_j \times V^{j+1} \times E_j$.

□

Preuve de la proposition 1. Constatons que $S(0,0) = 0$; dès lors,

$$S(u_0, \eta) = \int_0^1 \frac{d}{d\gamma} S(\gamma u_0, \gamma\eta) d\gamma = \int_0^1 D_{u_0} S(\gamma u_0, \gamma\eta) u_0 d\gamma + \int_0^1 D_\eta S(\gamma u_0, \gamma\eta)\eta d\gamma,$$

et nous posons $u_\gamma := Sol(\gamma u_0, \gamma\eta)$. L'opérateur Sol est analytique entre

$$B_{V^m}(2R) \times \hat{E}_{m-1}(1) \to U_m(1);$$

dès lors u_γ dépend analytiquement de $(\gamma u_0, \gamma\eta)$ pour $(u_0, \eta) \in B_{V^m}(2R) \times \hat{E}_m(1)$ et $0 \leq \gamma \leq 1$ (en effet, $\hat{E}_m(1)$ est étoilé).

Maintenant, considérons $\int_0^1 D_\eta S(\gamma u_0, \gamma\eta)\eta d\gamma$ et remarquons que $D_\eta S(\gamma u_0, \gamma\eta)\eta$ désigne la valeur à $t = 1$ de la solution v_γ de

$$\frac{dv_\gamma}{dt} - \Delta v_\gamma + b(u_\gamma, v_\gamma) + b(v_\gamma, u_\gamma) = \eta, \quad v_\gamma(0) = 0.$$

Il satisfait, autrement dit, l'équation $d\mathcal{L}(u_\gamma)v_\gamma = (0, \eta)$.

Comme $\eta \in E_m(1)$ et $u_\gamma \in U_m(1)$ on a, par application du lemme 13 que $v_\gamma \in U_{m+1}(1)$ dépend analytiquement de u_γ et de η, et donc de $u_0 \in B_{V^m}(2R)$ et $\eta \in \hat{E}_m(1)$.

Aussi $D_\eta S(\gamma u_0, \gamma\eta)\eta$ est analytique à valeurs dans V^{m+1} et par intégration $\int_0^1 D_\eta S(\gamma u_0, \gamma\eta)\eta d\gamma$

est analytique de $B_{V^m}(2R) \times \hat{E}_m(1)$ dans V^{m+1}.

Pour étudier l'intégrale $\int_0^1 D_{u_0}S(\gamma u_0, \gamma\eta)u_0 d\gamma$ on note que $D_{u_0}S(\gamma u_0, \gamma\eta)u_0$ la valeur à $t = 1$ de la solution $\tilde{v}_\gamma$ de

$$\frac{d\tilde{v}_\gamma}{dt} - \Delta\tilde{v}_\gamma + B(u_\gamma, \tilde{v}_\gamma) + B(\tilde{v}_\gamma, u_\gamma) = 0, \quad \tilde{v}_\gamma(0) = u_0.$$

Autrement $\tilde{v}_\gamma$ vérifie $d\mathcal{L}(u_\gamma)\tilde{v}_\gamma = (0, u_0)$. Comme $u_0 \in V^m$ en appliquant le lemme 13 pour $j = m - 1$, on obtient que $\tilde{v}_\gamma \in U_m(1)$ est une fonction analytique de $u_0 \in V^m$ et $u_\gamma \in U_m(1)$. Maintenant si l'on considère $\hat{v}_\gamma = t\tilde{v}_\gamma$; $\hat{v}_\gamma$ est la solution de

$$\frac{d\hat{v}_\gamma}{dt} - \Delta\hat{v}_\gamma + B(u_\gamma, \hat{v}_\gamma) + B(\hat{v}_\gamma, u_\gamma) = \tilde{v}_\gamma, \quad \hat{v}_\gamma(0) = 0$$

autrement dit de

$$d\mathcal{L}(u_\gamma)\hat{v}_\gamma = (0, \tilde{v}_\gamma).$$

Dès lors $(0, \tilde{v}_\gamma) \in V^{m+1} \times E_m(1)$ en vertu du lemme 13 on a que $\hat{v}_\gamma \in U_{m+1}$ est une fonction analytique de $(u_\gamma, \tilde{v}_\gamma)$. Or comme $\hat{v}_\gamma(1) = \tilde{v}_\gamma(1)$, $\int_0^1 D_{u_0}S(\gamma u_0, \gamma\eta)u_0$ est analytique de $B_{V^m}(2R) \times \hat{E}_m(1)$ dans V^{m+1}. □

1.4.1 Dissipativité du système

Démontrons tout d'abord la chose suivante

Lemme 14. *Soit $m \geq 2$; il existe un $\mathcal{C}_m$ tel que pour tout $u_0 \in \mathcal{O}_m$*

$$||S(u_0, 0)||_{V^m} \leq \mathcal{C}_m ||u_0||_{L^2}. \tag{1.45}$$

Démonstration. Remarquons que

$$S(u_0, 0) = \int_0^1 D_u S(\gamma u_0, 0)u_0 d\gamma$$

car $S(0, 0) = 0$. Démontrons donc que $||D_u S(\gamma u_0, 0)u_0||_{V^m} \leq \mathcal{C}||u_0||_{L^2}$ pour $0 \leq \gamma \leq 1$. Donc comme $u_0 \in \mathcal{O}_m$, en vertu de (1.43) et en appliquant le théorème 1 on trouve une constante $A(K)$ telle que

$$||Sol(\gamma u_0, 0)||_{U_m} \leq A(K) \quad \forall u_0 \in \mathcal{O}_m.$$

De plus $D_u S(\gamma u_0, 0)u_0$ est la valeur à l'instant $t = 1$ de la solution $\tilde{v}$ de

$$d\mathcal{L}(Sol(\gamma u_0, 0))\tilde{v} = (u_0, 0).$$

Aussi, en vertu du lemme 10 pour le cas $r = 0$

$$||\tilde{v}(t)||_{U_0}^2 \leq C(K)||u_0||_{L^2}^2.$$

Puis en reprenant $\hat{v}(t) = t\tilde{v}(t)$ on établit que $\hat{v}(t)$ est solution de

$$d\mathcal{L}(Sol(\gamma u_0, 0))\hat{v} = (0, \tilde{v}), \tag{1.46}$$

donc en reprennant le lemme 10 pour $r = 1$, on a

$$||\hat{v}(t)||_{U_1} \leq C'(K)||u_0||_{L^2}.$$

En particulier pour un $t_1 < 1$ donné

$$||\tilde{v}(t_1)||_{V^1} \leq \mathcal{C}'(K)||u_0||_{L^2}.$$

Reprennons ce raisonnement entre t_1 et 1 pour le degré de régularité supérieur ; $\tilde{v}$ pour $t \in [t_1, 1]$ est solution d'une équation de la forme

$$d\mathcal{L}(Sol(\gamma u_0, 0))\tilde{v} = (0, \tilde{v}(t_1)).$$

Ainsi, en réappliquant les deux étapes précédentes, on a directement

$$||D_u S(\gamma u_0, 0)u_0||_{V^2} \leq \mathcal{C}(K)||u_0||_{L^2}.$$

Ainsi donc,

$$||S(u_0, 0)||_{V^2} \leq \mathcal{C}_2(K)||u_0||_{L^2},$$

et plus généralement

$$||Sol(u_0, 0)(t)||_{V^2} \leq C_2(K, t)||u_0||_{L^2},$$

pour tout $0 < t < 1$. Pour $m > 2$ quelconque on itère le procédé sur m intervalles de temps $([t_i, t_{i+1}])_{0 \leq i \leq m+1}$ avec $t_0 = 0$ et $t_{m+1} = 1$. □

On en déduit le résultat suivant

Proposition 2. *Pour $m \geq 2$, on considère la norme*

$$|| \cdot ||'_{V^m} := || \cdot ||_{L^2} + \delta || \cdot ||_{V^m},$$

équivalente à $|| \cdot ||_{V^m}$. Alors, il existe $\delta = \delta_m > 0$ et $0 < \gamma < 1$ tels que le système (1.41) *vérifie la propriété de dissipativité suivante :*

$$||S(u_0, 0)||'_{V^m} \leq \gamma ||u_0||_{L^2}, \quad \gamma < 1, \quad \forall u_0 \in \mathcal{O}_m.$$

Ainsi,

$$||S(u_0,0)||'_{V^m} \leq \gamma ||u_0||'_{V^m}, \quad \gamma < 1, \quad \forall u_0 \in \mathcal{O}_m.$$

Démonstration. Tout d'abord établissons un résultat très simple de contraction pour notre système : en appliquant à (10) le produit scalaire par v et grâce au lemme 4 et à la formule 1 on obtient l'estimation suivante

$$\frac{d||v||^2_{L^2}}{dt} + ||\nabla v||^2_{L^2} \leq 0, \qquad \text{pour } v = Sol(u_0,0).$$

En vertu de l'inégalité de Poincaré et par application du lemme de Gronwall on déduit qu'il existe $\kappa > 0$ tel que

$$||S(u_0,0)||_{L^2} \leq e^{-\kappa}||u_0||_{L^2}.$$

Dès lors, en vertu du lemme 14 on constate que

$$||S(u_0,0)||'_{V^m} \leq e^{-\kappa}||u_0||_{L^2} + \delta C_m ||u_0||_{L^2} \leq (e^{-\kappa} + \delta C_m)||u_0||_{L^2} \leq \gamma ||u_0||_{L^2}, \quad \gamma < 1$$

pour $\delta = \frac{\gamma - e^{-\kappa}}{C_m}$ où $\gamma \in]e^{-\kappa}; 1[$. □

1.4.2 Non-dégénérescence de l'opérateur S

L'objet de cette section est la preuve de la densité de l'image de $D_\eta S(u_0,\eta)$, en tant qu'application entre E_m et V^m, pour tout $m \geq 2$ et $(u_0,\eta) \in \mathcal{O}_m \times \hat{E}_{m-1}$. Cependant, afin de simplifier la preuve, on ne prouvera dans la suite que le résultat pour le cas $m = 2$. Pour cela, on étudie tout d'abord l'opérateur suivant

$$\mathfrak{S}^{t_2}_{t_1} : V^2 \to V^2, \quad v' \mapsto v'', \quad 0 \leq t_1 \leq t_2,$$

telle que v'' soit la valeur en t_2 de la solution v de l'équation $d\mathcal{L}^2(u)v = 0$, $u = Sol(u_0,\eta) \in U_2(1)$ avec pour condition initiale $v(t_1) = v'$. Maintenant, pour tous $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, cherchons à déterminer l'adjoint de $\mathfrak{S}^{t_2}_{t_1}$ dans $(V^2, ||\cdot||_{V^0})$. En premier lieu, établissons le résultat suivant

Lemme 15. *Pour tous $u, v, w \in U_2(1)$, on a la relation de dualité suivante*

$$\langle B(u,v) + B(v,u), w\rangle = \langle v, \mathbb{B}_u(w)\rangle,$$

où

$$\mathbb{B}_u(w) := \mathfrak{P}\left(-B(u,w) + (d_2u^*)w + \int_{-h}^{z} \nabla_2\left(w\frac{\partial u}{\partial z}\right)(x,y,\xi)d\xi\right),$$

et

$$((d_2u^*)w)_i := \sum_{l=1}^{2} w_l \partial_i u_l \text{ pour } i = 1,2.$$

Démonstration. Notons d'abord qu'en vertu du lemme 4, $\langle B(u, v+w), v+w\rangle = 0$ si bien que

$$\langle B(u,v), w\rangle = -\langle v, B(u,w)\rangle, \quad \forall u, v, w \in V^2.$$

Maintenant étudions$\langle B(v,u), w\rangle$. Pour le premier terme, on constate que

$$\langle (v\cdot\nabla_2)u, w\rangle = \int_{\mathbb{O}} \sum_{i=1}^{2} v_l \Big(\sum_{l=1}^{2} w_l \partial_i u_l\Big) = \langle v, (d_2 u^*) w\rangle.$$

Maintenant considérons le second terme de $\langle B(v,u), w\rangle$. On a

$$\langle \Big(\int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2 v d\xi\Big) \frac{\partial u}{\partial z}, w\rangle = \int_{\mathbb{T}_L^2} dxdy \left[\int_{-h}^{0} \Big(\int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2 v d\xi\Big) \frac{\partial u}{\partial z}\cdot w dz\right].$$

En écrivant $\frac{\partial u}{\partial z}\cdot w = \frac{\partial}{\partial z}\left(\int_{-h}^{z} \frac{\partial u}{\partial z}\cdot w d\xi\right)$ on a

$$\langle \Big(\int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2 v d\xi\Big) \frac{\partial u}{\partial z}, w\rangle = -\int_{\mathbb{T}_L^2} dxdy \left[\int_{-h}^{0} \operatorname{div}_2 v \left(\int_{-h}^{z} \frac{\partial u}{\partial z}\cdot w d\xi\right) dz\right],$$

car $\int_{-h}^{0} \operatorname{div}_2 v d\xi = 0$. Ainsi

$$\langle \Big(\int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2 v d\xi\Big) \frac{\partial u}{\partial z}, w\rangle = \int_{\mathbb{O}} v(\zeta)\nabla_2 \left(\int_{-h}^{z} \frac{\partial u}{\partial z}\cdot w d\xi\right)(\zeta) d\zeta.$$

□

Etudions maintenant l'équation engendrée par l'opérateur dual $\mathbb{B}_u$.

Lemme 16. *Si $u \in U_2(1)$, $0 \le t_1 \le t_2 \le 1$ alors pour $r = 0, 1, 2$ et $w'' \in V^r$, le problème*

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \Delta w - \mathbb{B}_{u(t)}(w) = 0, \quad t_1 \le t \le t_2, \quad w(t_2) = w'', \tag{1.47}$$

admet une unique solution $w \in U_r([t_1, t_2])$.

Démonstration. Pour que w satisfasse (1.47) il faut et il suffit que $\bar{w} : t \mapsto w(t_2 + t_1 - t)$ vérifie

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} - \Delta \bar{w} + \mathbb{B}_{\bar{u}}(\bar{w}) = 0$$

avec $\bar{w}(t_1) = w''$ (et $\bar{u}(t) = u(t_2 + t_1 - t)$). L'analyse de cette équation étant similaire à celle de (1.31), on en déduit immédiatement que w est uniquement déterminé par w'' et que $w \in U_r([t_1, t_2])$. □

On baptise alors

$$\bar{\mathfrak{S}}_{t_2}^{t_1} : V^2 \to V^2, \quad w'' \mapsto w', \quad 0 \le t_1 \le t_2 \le 1,$$

où $w' = w(t_1)$ et w est une solution de (1.47). Maintenant, on se remémore que $\mathfrak{S}_{t_1}^{t_2} v = v(t_2)$, où $v(t)$ défini pour $t_1 \leq t \leq t_2$ vérifie $d\mathcal{L}^2(u)v = 0$ et $v(t_1) = v_0$. Pour ce $v(t)$ et pour $w(t)$ solution de (1.47), utilisée pour définit l'opérateur $\bar{\mathfrak{S}}_{t_2}^{t_1}$, on a :

$$\langle v, \frac{\partial w}{\partial t} + \Delta w - \mathbb{B}_u(w) \rangle = 0.$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\langle \Delta v - B(u,v) - B(v,u), w \rangle + \langle v, \frac{\partial w}{\partial t} \rangle = 0,$$

ce qui implique :

$$\langle \frac{\partial v}{\partial t}, w \rangle + \langle v, \frac{\partial w}{\partial t} \rangle = 0.$$

De là,

$$\frac{d}{dt} \langle v, w \rangle = 0.$$

On en déduit donc que pour tous $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$,

$$\langle \mathfrak{S}_{t_1}^{t_2} v', w'' \rangle = \langle v', \bar{\mathfrak{S}}_{t_2}^{t_1} w'' \rangle, \quad \forall v', w'' \in V^2, \tag{1.48}$$

ainsi donc $\bar{\mathfrak{S}}_{t_2}^{t_1}$ est l'adjoint de $\mathfrak{S}_{t_1}^{t_2}$ dans $(V^2, || \cdot ||_{V^0})$.

Proposition 3. *Pour $m \geq 2$, l'image de $D_\eta S(u_0, \eta) : E_m \to V^m$ dans V^m est dense.*

Démonstration. On ne prouvera ce résultat que pour $m = 2$. Il nous suffit de démontrer que l'orthogonal de l'image $D_\eta S(u_0, \eta) : E_2(1) \to V^2$ dans V^2 est $\{0\}$. En effet, dans ce cas là comme cette image est un sous-espace vectoriel de V^2 espace de Hilbert, on aura

$$\overline{Im(D_\eta S(u_0, \eta))} = (Im(D_\eta S(u_0, \eta))^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = V^2.$$

On cherche donc à démontrer pour tout $w \in V^2$ que

$$\langle D_\eta S(u_0, \eta) h, w \rangle_2 = 0, \forall\ h \in E_2(1) \quad \Longrightarrow\ w = 0,$$

autrement dit que $\ker(\mathcal{S}^*) = \{0\}$, où $\mathcal{S}^* : V^2 \mapsto E_2(1)$ est l'adjoint de $D_\eta S(u_0, \eta)$.

Comme $D_\eta S(u_0, \eta) h$ est la valeur à $t = 1$ de la solution v de

$$d\mathcal{L}(Sol(u_0, \eta)) v = (0, h),$$

en application du principe de Duhamel, on a que

$$\langle D_\eta S(u_0, \eta) h, w \rangle_2 = \int_0^1 \langle \mathfrak{S}_t^1(h(t)), w \rangle_2 dt = \int_0^1 \langle \mathfrak{S}_t^1(h(t)), \Delta^2 w \rangle_{V^0} dt$$

$$= \int_0^1 \langle h(t), \bar{\mathfrak{S}}_1^t \Delta^2 w\rangle_{V^0} dt = \int_0^1 \langle h(t), \Delta^{-2}\bar{\mathfrak{S}}_1^t \Delta^2 w\rangle_2 dt, \quad \forall w \in V^4.$$

Aussi pour tout $w \in V^4$ peut-on définir $\mathcal{S}^*(w)$ comme :

$$\mathcal{S}^*(w)(t) := \Delta^{-2}\bar{\mathfrak{S}}_1^t \Delta^2 w, \quad \forall w \in V^4. \tag{1.49}$$

Attachons-nous maintenant à caractériser le noyau de $\mathcal{S}^*$ dans V^2. On considère $w \in \ker(\mathcal{S}^*) \subset V^2$ limite de $(w_n) \in (V^4)^{\mathbb{N}}$ dans V^2, tel que $||w_n||_{V^2} \leq 2||w||_{V^2}$ pour tout $n \geq 0$. Ensuite, pour tout n construisons la courbe $[0,1] \ni t \to \xi_t^n$ définie par la relation,

$$\bar{\mathfrak{S}}_1^t \Delta^2 w_n = \Delta \xi_t^n,$$

alors $\xi_\cdot^n = \Delta S^*(w_n)$. Comme $\Delta^2 w_n \in V^0$, en vertu du lemme 16 appliqué pour $r = 0$, on a que $\xi_t^n \in U_2(1)$. Démontrons maintenant que la famille $(\xi_t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $U_0(1)$. La trajectoire $\eta_t^n := \bar{\mathfrak{S}}_1^t \Delta^2 w_n$ vérifie

$$\frac{d\eta_t^n}{dt} + \Delta\eta_t^n - \mathbb{B}_u(\eta_t^n) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \eta_1^n = \Delta^2 w_n \in V^0.$$

Dès lors, $\xi_t^n = \Delta^{-1}\eta_t^n$ est telle que

$$\frac{\partial \xi_t^n}{\partial t} + \Delta\xi_t^n - \Delta^{-1}\big(\mathbb{B}_u(\Delta\xi_t^n)\big) = 0, \quad \xi_1^n = \Delta w_n.$$

Pour pouvoir résoudre cette équation on inverse le sens du temps c'est à dire qu'on applique la transformation $t \to 1-t$ et on rebaptise ξ_t^n la variable originale ainsi transformée. Dès lors, en appliquant à cette équation le produit scalaire par ξ_t^n , on obtient

$$\frac{\partial ||\xi_t^n||_{L^2}^2}{\partial t} + ||\nabla\xi_t^n||_{L^2}^2 \leq C\Big|\langle \Delta^{-1}\mathbb{B}_u(\Delta\xi_t^n), \xi_t^n\rangle\Big|.$$

Ainsi, en vertu du lemme 7,

$$\begin{aligned}
&|\langle \Delta^{-1}\mathbb{B}_u(\Delta\xi_t^n), \xi_t^n\rangle| = |\langle \mathbb{B}_u(\Delta\xi_t^n), \Delta^{-1}\xi_t^n\rangle| \\
&= |\langle B(u, \Delta^{-1}\xi_t^n) + B(\Delta^{-1}\xi_t^n, u), \Delta\xi_t^n\rangle| \leq C||B(u, \Delta^{-1}\xi_t^n) + B(\Delta^{-1}\xi_t^n, u)||_{V^2}||\xi_t^n||_{L^2} \\
&\qquad \leq C||u||_{V^3}||\nabla\xi_t^n||_{L^2}||\xi_t^n||_{L^2}.
\end{aligned}$$

Aussi

$$\frac{\partial ||\xi_t^n||_{L^2}^2}{\partial t} + ||\nabla\xi_t^n||_{L^2}^2 \leq C||u||_{V^3}||\nabla\xi_t^n||_{L^2}||\xi_t^n||_{L^2}.$$

Par conséquent, comme $||u||_{E_3} \leq ||u||_{U^2}$ on peut établir que

$$||\xi_t^n||_{U_0} \leq C(||u||_{U_2}, ||w_n||_{V^2}), \quad \forall n \geq 0.$$

On a alors que $(\xi_\cdot^n)_n$ est compacte dans le topologie faible de $U_0(1)$. Soit $(\tilde{\xi}_\cdot^n)_n$ une sous-suite de $(\xi_\cdot^n)_n$ convergeant faiblement vers un certain $(\xi_\cdot)$ dans $U_0(1)$. Comme $\xi_\cdot^n = \Delta\mathcal{S}^* w_n$ alors,

$$\xi_\cdot \rightharpoonup \xi_\cdot^n = \Delta\mathcal{S}^* w_n \to \Delta\mathcal{S}^* w = 0, \quad \text{in } E_0(1).$$

Ainsi $\xi_\cdot = 0$ i.e $\xi_\cdot^n \rightharpoonup 0$ in $U_0(1)$. De là on a $\tilde{\xi}_1^n \rightharpoonup 0$ dans V^0. Or $\xi_1^n = \Delta w_n \to \Delta w$ dans V^0. Dès lors $\Delta w = 0$ and $w = 0$, d'où

$$\ker(\mathcal{S}^*) = \{0\}.$$

□

Maintenant que l'aspect déterministe du problème est écarté, on peut présenter le problème stochastique qu'on lui associe. Désormais nous considérons les η_n dans (1.41) et le f associé comme des variables aléatoires dont on va maintenant préciser la forme.

Chapitre 2

Mélange pour les équations primitives stochastiques

2.1 Définitions pour les processus stochastiques

Introduisons tout d'abord quelques notations générales pour notre étude probabiliste du problème. Dans toute la suite pour $\mathfrak{E}$ un espace polonais (i.e métrique séparable, complet), on note, $\mathcal{B}(\mathfrak{E})$ la tribu des Boréliens de $\mathfrak{E}$ faisant donc de $(\mathfrak{E}, \mathcal{B}(\mathfrak{E}))$ un espace mesurable. On note alors $\mathbf{P}(\mathfrak{E})$ l'espace des mesures de probabilité boréliennes sur $\mathfrak{E}$, et $C_b(\mathfrak{E})$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathfrak{E}$. On pose alors pour $\mu \in \mathbf{P}(\mathfrak{E})$ et $g \in C_b(\mathfrak{E})$,

$$\langle g, \mu \rangle := \int_{\mathfrak{E}} g(v)\mu(dv). \tag{2.1}$$

Soit $\xi \in \mathfrak{E}$ une variable aléatoire, on note $\mathcal{D}\xi$ sa loi $\mathcal{D}\xi \in \mathbf{P}(\mathfrak{E})$. On définit alors la convergence faible des mesures. La suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbf{P}(\mathfrak{E}))^{\mathbb{N}}$ converge faiblement vers μ si

$$\langle g, \mu_n \rangle \to \langle g, \mu \rangle, \quad \forall g \in C_b(\mathfrak{E}).$$

Soit de plus $L(\mathfrak{E}) := \{g \in C_b(\mathfrak{E}), Lip(g) < \infty\}$ où $Lip(g)$ désigne le coefficient de Lipschitz de la fonction g, et $||g||_L := ||g||_{C_b(\mathfrak{E})} + Lip(g)$. Alors on définit sur $\mathbf{P}(\mathfrak{E})$ la distance Lipschitz-duale :

$$||\mu - \nu||_L^* := \sup_{g \in C_b(\mathfrak{E}), ||g||_L \leq 1} \langle g, \mu - \nu \rangle.$$

On définit également la distance en variation totale :

$$||\mu - \nu||_{var} := \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathfrak{E})} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

On conclut cette partie par le résultat suivant reprise du théorème 1.2.15 dans [26] :

Théorème 5. *Soit $\mathfrak{E}$ un espace polonais. Alors, $(\mathbf{P}(\mathfrak{E}), ||\cdot||_L^*)$ est un espace métrique complet. De plus une suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbf{P}(\mathfrak{E}))^{\mathbb{N}}$, converge faiblement vers μ, si et seulement si $||\mu_n - \mu||_L^* \to 0$.*

On considère maintenant une fonctionnelle $g_{\mathfrak{Q}}$ sur $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}$ symétrique et telle que

$$g_{\mathfrak{Q}}(\xi_1, \xi_2) \geq ||\xi_1 - \xi_2||_{\mathfrak{E}}, \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{E}.$$

Alors $g_{\mathfrak{Q}}$ engendre une fonctionnelle de Kantorovitch sur $\mathbf{P}(\mathfrak{E}) \times \mathbf{P}(\mathfrak{E})$ dont elle est la densité :

$$\mathfrak{Q} : (\mu_1, \mu_2) \to \inf_{(\xi_1,\xi_2), \mathcal{D}(\xi_1)=\mu_1, \mathcal{D}(\xi_2)=\mu_2} \mathbb{E}[g_{\mathfrak{Q}}(\xi_1, \xi_2)].$$

2.2 Bruit rouge : définition et propriétés

Considérons la famille des ondelettes de Haar de l'argument $t \in [0, 1]$:

$$h_0(t) := \mathbb{1}_{[0,1]}(t),$$

et pour $j \geq 0$ et $0 \leq k < 2^j$

$$h_{j,k} := \begin{cases} 0, & t \leq \frac{k}{2^j}, \\ 1, & \frac{k}{2^j} \leq t < \frac{k+1/2}{2^j}, \\ -1, & \frac{k+1/2}{2^j} \leq t < \frac{k+1}{2^j}, \\ 0, & t \geq \frac{k+1}{2^j}. \end{cases}$$

Classiquement $\{(2^{j/2} h_{(j,k)}), \quad j \geq 0, 0 \leq k < 2^j\}$ est une base orthonormée de $L^2([0, 1], \mathbb{R})$: pour la preuve, on peut se référer en particulier à [29]. Par conséquent on a :

Lemme 17. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la famille des fonctions*

$$(2^{j/2} h_{(j,k)} \lambda_i^{-m/2} e_i), \quad j \geq 0, \quad 0 \leq k < 2^j, \quad i \geq 1,$$

où les $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et les $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont définis dans (1.10), est une base orthonormée de $L^2([0, 1], V^m)$.

Définissons le processus aléatoire $\tilde{\eta}(t) \in V$ pour $0 \leq t \leq 1$ de la manière suivante :

$$\tilde{\eta}(t) := \sum_{i=0}^{\infty} b_i \tilde{\eta}^i(t) \lambda_i^{-m/2} e_i, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\tilde{\eta}^i(t) := \Big(\xi_0^i(t) h_0(t) + \sum_{j=0}^{\infty} c_j^i \sum_{k=0}^{2^j-1} \xi_{j,k}^i h_{j,k}(t)\Big).$$

Ici les variables aléatoires réelles ξ_0^i et $\xi_{j,k}^i$ sont indépendantes, identiquement distribuées (i.i.d) et telles que $|\xi_0^i| \leq 1$ et $|\xi_{j,k}^i| \leq 1$ pour tout évènement ω ; où de plus, les coefficients b_i et c_j^i tous non-nuls, vérifient :

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i^2 \big(1 + \big(\sum_{j=0}^{\infty} c_j^i\big)^2\big) < \infty.$$

Maintenant pour $m \in \mathbb{N}$ fixé, considérons une suite de copies indépendantes $\tilde{\eta}_k = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \tilde{\eta}_k^i(t) \lambda_i^{-m/2} e_i$ de $\tilde{\eta}$ et posons

$$f(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[k,k+1[}(t) \tilde{\eta}_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[k,k+1[}(t) \sum_{i=1}^{\infty} b_i \tilde{\eta}_k^i \lambda_i^{-m/2} e_i. \tag{2.2}$$

Etablissons que f qu'on a construit vérifie $f^\omega(t) \in V^m$ et étudions la régularité en temps et espace de ce processus.

Lemme 18. *La variable aléatoire $\tilde{\eta}$ est bornée pour tout ω dans $L^\infty([0,1], V^m)$:*

$$\exists C^* > 0, \quad ||\tilde{\eta}(t)||_{V^m}^2 < C^*, \quad \forall t \in [0,1], \quad \forall \omega.$$

Démonstration. Posons

$$\Sigma_j^i(t) := \sum_{k=0}^{2^j-1} \xi_{j,k}^i h_{j,k}(t).$$

Comme les supports des fonctions $h_{j,k}$ pour $0 \leq k \leq 2^j - 1$ sont disjoints, et en vertu de ce que $|h_{j,k}| \leq 1$ pour tout $t \in [0,1]$ et de ce que $|\xi_{j,k}^i| \leq 1$ pour tout ω, on a que

$$|\Sigma_j^i(t)| \leq 1 \quad \forall t, \quad \forall \omega.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} ||\tilde{\eta}(t)||_{V^m}^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} |b_i|^2 \Big(|\Sigma_0^i(t)| + \sum_{j=0}^{\infty} |c_j^i||\Sigma_j^i(t)|\Big)^2 \\ &\leq 2 \sum_{i=0}^{\infty} |b_i|^2 \Big(|\Sigma_0^i(t)|^2 + \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |c_j^i||\Sigma_j^i(t)|\Big)^2\Big) \leq 2 \sum_{i=0}^{\infty} |b_i|^2 \big(1 + \big(\sum_{j=0}^{\infty} c_j^i\big)^2\big) < \infty, \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0,1]$ et tout ω. □

Ainsi donc f est une variable aléatoire dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^m)$. On va s'intéresser dans toute la suite, aux propriétés du processus engendré, sur les temps entiers par (1.12) où f est la force aléatoire donnée par (2.2). A l'instar de la section 1.3, et en rappellant la définition de S(cf (1.40))

$$S : (v, \eta) \to Sol(v, \eta)(1),$$

on considère pour $u_0 \in V^m$ fixé et avec les $\tilde{\eta}_k$ définis plus haut, le processus :

$$u_{k+1} = S(u_k, \tilde{\eta}_k), \quad k \geq 0, \tag{2.3}$$

dont on note les trajectoires, $u_k(u_0)$. Remarquons, tout d'abord, que pour $k \in \mathbb{N}$, le processus (2.3) génère la chaîne de Markov $\mathcal{D}(u_k(u_0))$ dans V^m. On définit ensuite $\mathcal{P}_k$ pour $k \geq 0$, l'opérateur engendré par cette chaîne dans $C_b(V^m)$ par :

$$C_b(V^m) \mapsto C_b(V^m), \quad g \to (\mathcal{P}_k g)(u_0) := \mathbb{E}g(u_k(u_0)), \quad \forall u_0 \in V^m,$$

et $\mathcal{P}_k^*$ l'opérateur sur $\mathbf{P}(V^m)$:

$$\mathbf{P}(V^m) \mapsto \mathbf{P}(V^m), \quad \mu \to (\mathcal{P}_k^* \mu)\,\Gamma := \int_{V^m} \mathcal{D}(u_k(v)(\Gamma)\mu(dv), \quad \forall \Gamma \in \mathcal{B}(V^m).$$

On peut affirmer la relation de dualité suivante :

$$\langle \mathcal{P}_k g, \mu \rangle = \langle g, \mathcal{P}_k^* \mu \rangle.$$

Enfin introduisons les notions de stationnarité et de mélange : une mesure $\mu \in \mathbf{P}(V^m)$ est dite *stationnaire* pour le système (2.3) si $\mathcal{P}_k^* \mu = \mu$ pour tout $k \geq 0$; de plus, le système (2.3) est dit *mélangeant* si il existe $\mu \in \mathbf{P}(V^m)$ stationnaire telle que

$$\mathcal{P}_k^* \mu' \rightharpoonup \mu, \quad \forall \mu' \in \mathbf{P}(V^m).$$

Attelons nous maintenant à l'étude les propriétés du système stochastique (2.3) avec f défini par (2.2). Tout d'abord, on introduit dans la partie qui suit un résultat général de mélange pour les sytèmes stochastiques qu'on appliquera à (2.3) dans les parties suivantes.

2.3 Mélange dans l'équation : théorème

Pour démontrer que le processus stochastique est exponentiellement mélangeant on s'appuie sur le théorème 1.3 de l'article [28] que l'on va étudier dans le contexte suivant : soient H et E des espaces de Hilbert séparables et V est un espace de Banach injecté de manière compacte dans H. Soit $(\eta_k)_{k\geq 0}$ une séquence de variables aléatoires indépendantes identiquement distribués à valeurs dans E. Soit $\tilde{S} : H \times E \to H$ un opérateur continu. Fixons $u_0 \in H$ et considérons un système dynamique aléatoire dans H.

$$u_{k+1} = \tilde{S}(u_k, \eta_k), \quad k \geq 0. \tag{2.4}$$

On définit ainsi une chaîne de Markov. Nous notons par $(u_k(u_0), k \geq 0)$ une trajectoire de ce système, valant u_0 quand $k = 0$.

Dans [24, 28] [1], le théorème abstrait suivant est prouvé :

Théorème 6. *Avec les hypothèses suivantes*

— ***(A1) Régularité :*** $\tilde{S} : H \times E \to V$ *est deux fois continuement différentiable et ses dérivées jusqu'au second ordre sont bornées sur des ensembles bornés.*

— ***(H1) Décomposabilité et non dégénérescence du bruit :*** *il existe une base orthonormée* $(\sigma_j)_{j\geq 1}$ *de* E *telle que les variables aléatoires* η_k *puissent s'écrire de la manière suivante*

$$\eta_k := \sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{b}_j \xi_{j,k} \sigma_j, \quad \mathfrak{b}_j \neq 0, \quad \sum \mathfrak{b}_j^2 < \infty.$$

Ici les $\xi_{j,k}$ *sont des variables aléatoires i.i.d presque sûrement inférieures à* 1 *et avec des lois de la forme* $\rho(r)dr$*, où* ρ *est une fonction Lipschitzienne non nulle en zéro. La mesure* $l := \mathcal{D}(\eta_k)$ *a donc pour support*

$$\mathcal{K} := \{\eta_k = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_k^j \sigma_j, |\eta_k^j| \leq \mathfrak{b}_j\}. \tag{2.5}$$

— ***(H2) Dissipativité :*** *il existe* $\gamma < 1$ *et* $\beta \geq 0$*, tels que, pour tout* $u \in H$ *et* $\eta \in \mathcal{K}$*, on ait :*

$$a)||\tilde{S}(u,\eta)||_H \leq \gamma ||u||_H + \beta, \quad b)||\tilde{S}(u,0)||_H \leq \gamma ||u||_H,$$

— ***(H3) Non-dégénérescence :*** *pour tout* $u \in H$ *et* $\eta_0 \in \mathcal{K}$*, l'application* $D_\eta \tilde{S}(u,\eta_0) : E \to V$ *a une image dense dans* H*.*

Alors le système (2.4) *est exponentiellement mélangeant : il existe une unique mesure* μ *de support inclus dans* $B_H(R^*)$*, pour un* $R^* > 0$ *fixé telles que pour tout* $R > 0$ *et* $u_0 \in B_H(R)$*, on a*

$$||\mathcal{D}(u_k(u_0)) - \mu||_L^* \leq C\kappa^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{2.6}$$

pour $0 < \kappa(R) < 1$*,* $C = C(R) > 0$*, fixés.*

2.4 Théorème de mélange au hypothèses élargies

On souhaite appliquer à notre système (2.3) une variante du théorème 6 dans laquelle les hypothèses de départ seraient un peu relâchées.

En conservant aux notations H, V et E les définitions introduites à la section précédente, et $\mathcal{K}$ tel que dans (2.5), on considère désormais un système $\tilde{S}$ évoluant dans $\mathcal{O}$, un sous-ensemble de H, ouvert, borné et stable par $\tilde{S}$, i.e tel que

$$\tilde{S} : \mathcal{O} \times \mathcal{K} \mapsto \mathcal{O}.$$

1. Dans [24] un résultat plus général est prouvé avec des contraintes plus fortes sur le système

On considère alors $\mathcal{O}_\epsilon$ et $\mathcal{K}_\epsilon$ les ϵ-voisinnages de $\mathcal{O}$ et $\mathcal{K}$ respectivement dans H et E. On suppose que la définition $\tilde{S}$ s'étend en

$$\tilde{S} : \mathcal{O}_{2\epsilon} \times \mathcal{K}_{2\epsilon} \mapsto H.$$

Formulons alors pour $\tilde{S}$ l'hypothèses suivante en remplacement de **(A1)** :

— **(A1′)** : $\tilde{S} : \mathcal{O}_{2\epsilon} \times \mathcal{K}_{2\epsilon} \mapsto V$ est deux fois continuement différentiable sur $\mathcal{O}_{2\epsilon} \times \mathcal{K}_{2\epsilon}$ et ses dérivées jusqu'au deuxième ordre sont bornées.

Supposons que $\tilde{S}$ vérifie cette hypothèse ; alors on peut construire $\mathfrak{C}$ un sous-ensemble borné de V, donc pré-compact dans H, tel que $\tilde{S} : \mathcal{O}_{2\epsilon} \times \mathcal{K}_{2\epsilon} \mapsto \mathfrak{C}$. Alors pour $\mathcal{O}_1 := \tilde{S}(\mathcal{O} \times \mathcal{K})$, on a $\mathcal{O}_1 \in \mathfrak{C}$. De plus, $\tilde{S}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{K}) \subset \mathcal{O}_1$.

Par ailleurs, on pose $X := \overline{\mathcal{O}_1}^H$. L'ensemble X est compact dans H et $\tilde{S} : X \times \mathcal{K} \mapsto X$. Soit X_ϵ son ϵ-voisinnage dans H. Alors, comme $X \subset \mathcal{O}_\epsilon$, on a $X_\epsilon \subset \mathcal{O}_{2\epsilon}$. Dès lors, $\tilde{S}$ est également deux fois continuement différentiable sur $X_\epsilon \times \mathcal{K}_\epsilon$ et de dérivées jusqu'au deuxième ordre bornées.

Dans ce contexte, on formule pour $\tilde{S}$ les hypothèses suivantes :

— **(H1′)**=**(H1)**

— **(H2′)** : **(H2) b)** est vérifiée

— **(H3′)** : **(H3)** est vérifiée pour $(u, \eta_0) \in \mathcal{O} \times \mathcal{K}$.

Alors, on a le résultat suivant :

Théorème 7. *Issu du théorème 1.3 dans [28]. Supposons que notre système $\tilde{S}$ vérifie $(A1')$, et $(H1')$-$(H3')$. Alors pour tous $u, u' \in \mathcal{O}$, on a*

$$||\mathcal{D}(u_k(u)) - \mathcal{D}(u_k(u'))||_L^* \leq C||u - u'||_H \kappa^k, \tag{2.7}$$

pour un certain $0 < \kappa < 1$, $C > 0$, dépendants de $\mathcal{O}$ seulement.

On a de plus le résultat suivant :

Proposition 4. *La validité de* (2.7) *pour tous u et u' dans $\mathcal{O}$ entraîne l'inégalité de* (2.6) *pour une certaine mesure $\mu \in \mathbf{P}(X)$.*

Cette proposition étant classique, on n'en apportera pas la preuve pour laquelle on se réfère à [28] (corollaire 1.4 et preuve du théorème 1.5).

Concernant le théorème 6, celui-ci est prouvé dans [28] pour le cas où $\mathcal{O} = B_H(R)$ avec un R, choisi de sorte que $\mathcal{O}$ soit stable en vertu de $(H2)$, et $\mathfrak{C} = B_V(\mathfrak{K}(\mathcal{O}, \mathcal{K}))$ pour $\mathfrak{K}(\mathcal{O}, \mathcal{K}) > 0$. Pour prouver le théorème 7, on généralisera donc la preuve du théorème 1.3 dans [28]. Celle-ci est reportée à la fin de cette partie et on se contente pour l'instant d'en exposer brièvement le principe.

On procède de la manière suivante : en considérant deux points de départ u et u', on construit deux variables aléatoires de lois $\mathcal{D}(u_1(u))$ et $\mathcal{D}(u_1(u'))$ respectivement qui

vérifient deux propriétés ; premièrement qu'avec une probabilité très grande, il existe un rapport de contraction entre la distance entre les réalisations de ces variables aléatoires et la distance entre les points de départs ; deuxièmement que plus la distance entre les points de départ est faible, plus cette probabilité est grande. Dès lors la distance en espérance entre nos deux variables aléatoires construite est contractée avec un coefficent fixe par rapport à la distance entre les points de départ.

Cette démonstration s'articule ainsi : pour u et u' pour toute réalisation de la force aléatoire s'appliquant à u on construit un contrôle tel que la trajectoire issue de u', et soumise à ce contrôle, se soit rapproché de celle issue de u au bout d'une itération du système. Pour cela on utilise des résultats de théorie spectrale sur notre opérateur résolvant. Ensuite on prouve via ce résultat de contrôlabilité qu'il est possible de construire une force aléatoire qu'on applique au système partant de u', de même loi que la force aléatoire s'appliquant au système partant de u telle que les deux variables engendrées par ces deux systèmes vérifient les deux propriétés ci-dessus. Par le truchement d'une fonctionnelle de Kantorovitch on établi que la distance en espérance entre ces deux variables aléatoires est contractée par rapport à la distance entre u et u'. Alors ces deux variables aléatoires étant de lois $\mathcal{D}(u_1(u))$ et $\mathcal{D}(u_1(u'))$ respectivement, on a notre résultat de contraction.

Appliquons maintenant ce résultat à notre système.

2.5 Vérification des hypothèses et conclusion

On s'attache désormais à valider les hypothèses **(A1')**, **(H1')**, **(H2')** et **(H3')** pour le système (2.3). Dans notre cas, pour un $m \geq 2$ donné, $\tilde{S} = S$, $H = V^m$, $V = V^{m+1}$, $E = E_m(1)$, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_m$ et $\mathcal{K} \subset B_{L^\infty([0,1],V^m)}(C^*)$ où C^* est défini au lemme 18. En vertu du théorème 1, et du théorème 4, $\mathcal{O}_m$ est bien stable et absorbant pour S.

On constate qu'en vertu de la proposition 2, on peut vérifier l'hypothèse **(H2')** pour une norme équivalente à notre norme initiale. Dans cette norme équivalente, l'hypothèse **(A1')** est vérifiée en vertu du théorème 4, au vu de la structure du bruit la validité de l'hypothèse **(H1')** est immédiate quant à l'hypothèse **(H3')** la proposition 3 confirme qu'elle est vraie ici.

On en déduit le résultat suivant :

Théorème 8. *Soit $m \geq 2$ et supposons que le bruit f soit de la forme* (2.2)*. Alors il existe $C_m > 0$ et $\kappa_m < 1$ tels que pour tous $u, u' \in \mathcal{O}_m$,*

$$||\mathcal{D}(u_k(u)) - \mathcal{D}(u_k(u'))||_L^* \leq C_m ||u - u'||_H \kappa_m^k. \tag{2.8}$$

En vertu de la proposition 4 on a comme corollaire immédiat au théorème 8, le résultat suivant :

Corollaire 4. *Soit $m \geq 2$ et supposons que le bruit f soit de la forme* (2.2)*. Alors le processus aléatoire engendré par* (2.3) *admet une unique mesure stationnaire $\mu \in \mathbf{P}(V^m)$, de support inclus dans $\overline{\mathcal{O}}_m$. De plus, il existe $C_m > 0$ et $\kappa_m < 1$ tels que pour toute variable aléatoire u_0 dans $\mathcal{O}_m$ indépendante de f,*

$$||\mathcal{D}(u_k(u_0)) - \mu||^*_{L(V^m)} \leq C_m \kappa_m^k.$$

Comme la convergence en distance Lipschitz-duale est équivalente à la convergence faible, pour toute variable aléatoire u_0 vérifiant les hypothèses du corollaire 4, on a

$$\mathbb{E}[g(u_k(u_0))] \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_{V^m} g(u)d\mu(u), \quad \forall g \in C_b(V^m).$$

Maintenant, en vertu du théorème 2, l'ensemble O_m est absorbant pour notre système. Aussi a t-on en plus du corollaire 4, le résultat suivant :

Corollaire 5. *Soit toujours $m \geq 2$ et supposons que le bruit f soit de la forme* (2.2) *; alors, pour tout $R' > 0$, il existe $C_m(R') > 0$ tel que pour tout $k \geq 0$, pour toute variable aléatoire u_0 dans $B_{V^m}(R')$, indépendante de f,*

$$||\mathcal{D}(u_k(u_0)) - \mu||^*_{L(V^m)} \leq C_m(R')\kappa_m^k, \tag{2.9}$$

ce qui entraîne

$$\mathbb{E}[g(u_k(u_0))] \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_{V^m} g(u)d\mu(u), \quad \forall g \in C_b(V^m).$$

Preuve du corollaire 5. On définit $k_0(R)$ comme le plus petit entier tel que $k_0(R) \geq T_0 = T(R, C^*)$ avec T tel que défini dans le théorème 2. Quand $k \geq k_0(R)$, le sytème évolue dans $\mathcal{O}_m$, et donc on peut appliquer le corollaire 4 pour $k \geq k_0(R)$. On construit alors $C_m(R') := \max(C_m, 2)\kappa_m^{-k_0}$. Alors comme pour $k \leq k_0(R)$, on a $||\mathcal{D}(u_k(u_0)) - \mu||^*_{L(V^m)} \leq 2$, on obtient (2.9) pour tout $k \leq k_0(R)$. □

2.6 Extension aux temps continus

On entreprend maintenant de généraliser le résultat de mélange aux processus à temps continu. Pour cela on rappelle ici que *Sol* est défini (cf (1.29)) de la manière suivante :

$$Sol : (u_0, f) \mapsto u, \quad u \text{ solution de (1.12).} \tag{2.10}$$

Pour u_0 une variable aléatoire indépendante de f , l'opérateur *Sol* engendre le processus à temps continu $Sol(u_0, f)(s)$, pour $s \geq 0$. On rappelle que sa loi est notée $\mathcal{D}(Sol(u_0, f))(s)$.

De plus on note :

$$\mu_s := \mathcal{D}(Sol(u_0, f))(s), \quad s \geq 0, \tag{2.11}$$

pour u_0 tel que $\mathcal{D}(u_0) = \mu$. Maintenant considérons la mesure engendrée par le processus continu avec pour distribution de départ la mesure stationnaire μ :

Lemme 19. *Pour tout $s \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}$,*

$$\mu_{s+k} = \mu_s.$$

Démonstration. On remarque tout d'abord que :

$$\mathcal{D}(Sol(u_0, f))(s+k) = \mathcal{D}(Sol(u_k(u_0), f|_{[k;\infty[})(s) = \mathcal{D}(Sol(u_0, f)(s), \forall s \geq 0, \forall k \in \mathbb{N},$$

car $\mathcal{D}(u_k(u_0)) = \mathcal{D}(u_0) = \mu$. □

On s'attache maintenant à étudier l'évolution des mesures de notre processus à temps continus.

Lemme 20. *Soient $R' > 0$, ν de support inclus dans $B_{V^m}(R')$ et $\tilde{u}_0$ tel que $\mathcal{D}(\tilde{u}_0) = \nu$. Il existe $C'(R') > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $s \geq 0$,*

$$||\mathcal{D}(Sol(u_0, f))(s+k) - \mathcal{D}(Sol(\tilde{u}_0, f))(s+k)||^*_{L(V^m)} \leq C'(R')||\mathcal{P}^k_* \mu - \mathcal{P}^k_* \nu||^*_{L(V^m)}.$$

Démonstration. Soient $(\xi_1, \xi_2) \in B_{V^m}(R')$ et $(\eta_1, \eta_2) \in E_{m-1}$ Alors on a en vertu de la lipschitziannité de *Sol* établie dans le théorème 3, on a que

$$||Sol(\xi_1, \eta_1)(s) - Sol(\xi_2, \eta_2)(s)||_{V^m} \leq C'(R')||(\xi_1, \eta_1) - (\xi_2, \eta_2)||_{V^m \times E_{m-1}}$$

Soit maintenant (α_1, α_2) un couplage, pour les lois dans $\mathbf{P}(U_m)$ engendrées par *Sol* à partir de respectivement $\mathcal{P}^k_* \mu \times l$ et $\mathcal{P}^k_* \nu \times l$. L'inversibilité de *Sol* nous permet d'affirmer qu'il existe $((\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2))$ un couplage de $(\mathcal{P}^k_* \mu \times l) \times (\mathcal{P}^k_* \nu \times l)$ tel que

$$\alpha_1 = Sol(\xi_1, \eta_1), \quad \alpha_2 = Sol(\xi_2, \eta_2).$$

Alors on a

$$||\alpha_1 - \alpha_2||_{U_m} \leq C'||(\xi_1, \eta_1) - (\xi_2, \eta_2)||_{V^m \times E_{m-1}}.$$

Il en va de même en particulier pour les couplages maximaux respectifs d'où

$$\begin{aligned} ||\mathcal{D}(\alpha_1) - \mathcal{D}(\alpha_2)||^*_{L(U_m)} &\leq C'(R')||(\mathcal{P}^k_* \mu \times l) - (\mathcal{P}^k_* \nu \times l)||^*_{L(B^m_V(R') \times E_{m-1})} \\ &\leq C'(R')||\mathcal{P}^k_* \mu - \mathcal{P}^k_* \nu||^*_{L(B^m_V(R'))}. \end{aligned}$$

Ainsi a t-on en particulier

$$||\mathcal{D}(Sol(u_0,\eta))(s+k)-\mathcal{D}(Sol(\tilde{u}_0,\eta))(s+k)||_L^* = \left(||\mathcal{D}(\alpha_1)-\mathcal{D}(\alpha_2)||^*_{L(C([0,1],V^m))}\right)(s)$$
$$\leq ||\mathcal{D}(\alpha_1)-\mathcal{D}(\alpha_2)||^*_{L(U_m)} \leq C'(R')||\mathcal{P}^k_*\mu-\mathcal{P}^k_*\nu||^*_{L(B^m_V(R'))}.$$

□

Ainsi donc, on a le résultat suivant

Théorème 9. *Supposons encore que le bruit f soit de la forme* (2.2)*, avec $m \geq 2$; alors, pour tout $R' > 0$, il existe, $C_m(R') > 0$ et $\kappa_m < 1$ tels que pour tout $s \geq 0$ et pour toute variable aléatoire $\tilde{u}_0$ dans $B_{V^m}(R')$, indépendante de f, la loi du processus stochastique continu, solution de* (1.2) *et partant de $\tilde{u}_0$ vérifie :*

$$||\mathcal{D}\left(Sol(\tilde{u}_0,f)(s)\right)-\mu_s||^*_{L(V^m)} \leq C_m(R')\kappa_m^s, \quad \forall s \geq 0. \tag{2.12}$$

2.7 Preuve du théorème 8

La première étape de notre démonstration concerne la contrôlabilité approchée du système linéarisé engendré par (1.2).

2.7.1 Construction d'un pseudo-inverse

On adopte les notations suivantes pour la suite de notre travail : on note $E_M := Vect\left((e_j)_{1\leq j\leq M}\right)$, on note $E_M^\perp$ son complémentaire orthogonal. Pour tout $\eta \in E$, on note ζ_M et ξ_M ses projections sur E_M et $E_M^\perp$ respectivement ; on note de plus $\mathfrak{P}_M : \eta \to \zeta_M$. De plus pour $A \in \mathcal{B}(E)$, on note A_M et $A_M^\perp$ ses projections sur E_M et $E_M^\perp$ respectivement.

Maintenant, présentons le résultat suivant issue de la théorie spectrale.

Lemme 21. *Soit $G : H \mapsto H$ un opérateur continu, symétrique et positif. Alors $\mathbb{R}^{*+} \ni \gamma \to (G+\gamma Id)^{-1}$ est bien définie. De plus les normes des opérateurs $G(G+\gamma Id)^{-1}$ et $(G+\gamma Id)^{-1}$ sont bornées respectivement par 1 et $\frac{1}{\gamma}$. Enfin $\Delta_y(\gamma) := ||G(G+\gamma Id)^{-1}y-y||^2$ est décroissante et $\lim_{\gamma\to 0}\Delta_y(\gamma) = 0$ pour tout $y \in H$.*

Démonstration. Appliquons à G le corollaire 5 au théorème spectral (théorème 7) tel qu'écrit dans [7](tome 2, chapitre 8, paragraphe 3). Il existe une famille spectrale E_λ tel que $G = \int_{\mathbb{R}^{+*}} \lambda d(E_\lambda)$. Alors :

$$(G+\gamma Id)^{-1} = \int_{R^{+*}} \frac{1}{\lambda+\gamma} dE_\lambda$$

est bien défini sur H pour tout $\gamma \in \mathbb{R}^{*+}$. De plus,

$$||(G+\gamma Id)^{-1}y||_H^2 = \left|\left|\int_{R^{+*}} \frac{1}{\lambda+\gamma} dE_\lambda(y)\right|\right|_H^2 \leq \frac{1}{\gamma}||y||_H^2.$$

Par ailleurs

$$||G(G+\gamma Id)^{-1}y||_H^2 = \left|\left|\int_{R^{+*}} \frac{\lambda}{\lambda+\gamma} dE_\lambda(y)\right|\right|_H \leq ||y||_H^2.$$

Ensuite,

$$\Delta_y(\gamma) = \left|\left|\int_{R^{+*}} 1 - \frac{\lambda}{\lambda+\gamma} dE_\lambda(y)\right|\right|_H^2,$$

est clairement décroissant en γ. Enfin prouvons que $\lim_{\gamma\to 0}\Delta_y(\gamma) = 0$ pour tout $y \in H$. Comme $\Delta_y(\gamma) = ||\gamma(G+\gamma Id)^{-1}y||_H^2$ et que $||\gamma(G+\gamma Id)^{-1}||_{L(H\mapsto H)}$ est bornée par 1, il nous suffit de prouver la convergence pour un sous-ensemble dense de H. Prenons ici $y \in Im(G)$. Alors, il existe $x \in H$ tel que $y = Gx$ et

$$\begin{aligned}\Delta_y(\gamma) = ||\gamma(G+\gamma Id)^{-1}Gx||_H^2 &= \left|\left|\gamma(G+\gamma Id)^{-1}\left((G+\gamma)x - \gamma x\right)\right|\right|_H^2 \\ &\leq \gamma^2||x||_H^2 + \gamma^4||(G+\gamma Id)^{-1}x||_{H^2} \leq 2\gamma^2||x||_H^2,\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{\gamma\to 0}\Delta_y(\gamma) = 0, \quad \forall y \in H.$$

□

Proposition 5. *Soit $A : X \times \mathcal{K} \mapsto L(E \mapsto H)$ un opérateur continu. Supposons que pour tout $u \in X$ et $\eta \in \mathcal{K}$ l'opérateur $A(u,\eta)$ ait une image dense dans H. Alors pour tout $\rho > 0$ il existe $M_\rho \in \mathbb{N}^*$, $C_\rho > 0$ et une application continue $R_\rho : X \times \mathcal{K} \mapsto L(H,E)$ tel que pour tout $u \in X$ et $\eta \in \mathcal{K}$,*

$$Im(R_\rho(u,\eta)) \subseteq E_{M_\rho}, \qquad ||R_\rho(u,\eta)||_{L(H,E)} \leq C(\rho), \tag{2.13}$$

$$||A(u,\eta)R_\rho(u,\eta)v - v||_H \leq \rho||v||_V \quad \forall v \in V. \tag{2.14}$$

De plus R_ρ a la même régularité que A.

Démonstration. Pour tout $u \in X$ et $\eta \in \mathcal{K}$ on pose $G(u,\eta) := A(u,\eta)A^*(u,\eta)$ ou $A^*(u,\eta) \in L(H,E)$ est l'adjoint de $A(u,\eta)$. L'opérateur $G(u,\eta)$ est symétrique. Par ailleurs on a

$$G(u,\eta)v = 0 \implies \langle A(u,\eta)A^*(u,\eta)v, v\rangle_H = 0 \implies ||A^*(u,\eta)v||_E^2 = 0, \quad \forall v \in H,$$

aussi le noyau de $G(u,\eta)$ est inclus dans celui de $A^*(u,\eta)$ qui est réduit à 0 en vertu de la densité de l'image de $A(u,\eta)$ dans E. De plus on déduit de ce calcul que $G(u,\eta)$ est un opérateur positif. Aussi en appliquant le lemme 21 obtient t-on que $\mathbb{R}^{*+} \ni \gamma \to$

$(G(u,\eta)+\gamma Id)^{-1}$ est bien définie et régulière. Pour $M \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$R_\gamma(u,\eta) := A^*(u,\eta)\,(G(u,\eta)+\gamma Id)^{-1}\,, \quad R_{\gamma,M}(u,\eta) := \mathfrak{P}_M \circ R_\gamma(u,\eta).$$

Considérons maintenant $\rho > 0$ fixé quelconque. En vertu du lemme 21, on peut affirmer que la famille $(A(u,\eta)R_\gamma(u,\eta))$ converge points à points vers Id : pour tout $v \in H$, il existe $\gamma_\rho(v) > 0$ tel que

$$||A(u,\eta)R_\gamma(u,\eta)v - v||_H \leq \frac{\rho}{3}, \quad \text{pour } 0 < \gamma \leq \gamma_\rho(v).$$

Maintenant remarquons que la famille $(A(u,\eta)A^*(u,\eta)(G(u,\eta)+\gamma Id)^{-1})$ est équicontinue car linéaire et de norme bornée par 1 : il existe $\delta_\rho > 0$ tel que,

$$||(A(u,\eta)R_\gamma(u,\eta))v - (A(u,\eta)R_\gamma(u,\eta))v'||_H \leq \frac{\rho}{3}, \forall v \in H, \forall v' \in B_H(v,\delta_\rho).$$

De plus, comme $B_V(1)$ est compacte dans H, on peut la recouvrir par un nombre fini N de boules de la forme $B_H(v_j,\delta_\rho)$ centrées autour des $(v_j)_{1\leq j\leq N} \in H^N$. On pose maintenant $\gamma_\rho = \min_{1\leq j\leq N}\gamma_\rho(v_j)$. En regrouppant les deux précédentes estimations, on obtient que

$$||A(u,\eta)R_\gamma(u,\eta)v - v||_H \leq \frac{2\rho}{3}, \quad \text{pour } 0 < \gamma \leq \gamma_\rho, \quad \forall v \in B_V(1).$$

Par ailleurs, $A(u,\eta)R_{\gamma_\rho,M}(u,\eta)$ converge vers $A(u,\eta)R_{\gamma_\rho}(u,\eta)$ dans $L(H,H)$, donc il existe $M_\rho \geq 1$ tel que,

$$||A(u,\eta)R_{\gamma_\rho,M_\rho}(u,\eta)v - A(u,\eta)R_{\gamma_\rho}(u,\eta)v||_H \leq \frac{\rho}{3}, \quad \forall v \in B_V(1),$$

aussi en sommant les deux estimations précédentes, a t-on :

$$||A(u,\eta)R_{\gamma_\rho,M_\rho}(u,\eta)v - v||_H \leq \rho \quad \forall v \in B_V(1)$$

d'où par homogénéité, la validité de (2.14) pour $R_\rho := R_{\gamma_\rho,M_\rho}$. Ensuite pour ce choix de R_ρ la première condition dans (2.13) est clairement vérifiée. Quant à la seconde elle est également valable car $(G(u,\eta)+\gamma Id)^{-1}$ est bornée par $\frac{1}{\gamma}$ (cf lemme 21), γ étant choisi en fonction uniquement de ρ, et $A^*(u,\eta)$ est borné comme adjoint d'un opérateur borné. □

Ceci fait construisons notre variable aléatoire de contrôle pour notre système.

2.7.2 Choix d'un contrôle aléatoire

Lemme 22. *Admettons que les hypothèses* $(A1')$, $(H1)$,$(H2')$, *et* $(H3')$ *soient vérifiées. Alors il existe* $C > 0$, $\delta \in]0,1]$ *et* $\Phi : X \times H \times \mathcal{K} \mapsto E$ *continue telle que* $\Phi(u,u,\eta) = 0$ *et*

telle que l'application

$$\Psi(u,u',\eta) = \eta + \Phi(u,u',\eta)$$

satisfait

$$||l - \Psi_*(u,u';\cdot)l||_{var} \leq C||u-u'||_H \tag{2.15}$$

$$||\tilde{S}(u,\eta) - \tilde{S}(u',\Psi(u,u',\eta))||_H \leq \frac{1}{2}||u-u'||_H \tag{2.16}$$

pour tous $u,u' \in D_\delta := \{(u,u') \in X \times H, ||u-u'||_H \leq \delta\}$ *et pour tout* $\eta \in \mathcal{K}$.

Démonstration. **Première étape : construction de Φ.**

En vertu de l'hypothèse $(A1')$, pour tout $\eta' \in E$,

$$\tilde{S}(u',\eta+\eta') = \tilde{S}(u,\eta) + D_u\tilde{S}(u,\eta)(u'-u) + D_\eta\tilde{S}(u,\eta)\eta' + \bigcirc\left(||u'-u||_H^2 + ||\eta'||_E^2\right). \tag{2.17}$$

Pour obtenir (2.16), on s'inspire de la relation ci-dessus. On cherche à construire $M \geq 1$ et $\Phi : D_\delta \times \mathcal{K} \mapsto E_M$ mesurable telle que

$$||D_u\tilde{S}(u,\eta)(u'-u) + D_\eta\tilde{S}(u,\eta)\Phi(u,u';\eta)||_H \leq \frac{1}{4}||u-u'||_H$$
$$||\Phi(u,u';\eta)||_E \leq C||u-u'||_H$$

pour tous $((u,u'),\eta) \in D_\delta \times \mathcal{K}$. On considère l'opérateur $D_\eta\tilde{S}(u,\eta)$. En vertu des hypothèses $(A1')$ et $(H3')$, cet opérateur est continu, à image dense. On peut donc lui appliquer la proposition 5 : pour tout $\rho > 0$ existent $M_\rho \geq 1$ et $R_\rho(u,\eta) : H \mapsto E_{M_\rho}$ de norme majorée uniformément en $(u,\eta) \in X \times \mathcal{K}$ tels que pour tout $v \in V$,

$$||(D_\eta\tilde{S}(u,\eta))R_\rho(u,\eta)v - v||_H \leq \rho||v||_V. \tag{2.18}$$

Sans perdre de généralité, on peut supposer que $\delta \leq \epsilon$ où ϵ est défini dans $(A1')$ alors pour tous $(u,u') \in D_\delta$ (comme $u,u' \in X_\epsilon$), en vertu de l'hypothèse $(A1')$, $D_u\tilde{S}(u,\eta)(u'-u) \in V$ et il existe $\bar{\mathfrak{X}}$ tel que

$$||D_u\tilde{S}(u,\eta)(u'-u)||_V \leq \bar{\mathfrak{X}}||u'-u||_H \tag{2.19}$$

On pose alors

$$\Phi : D_\delta \times \mathcal{K} \mapsto E_{M_\rho}, \quad \Phi(u,u';\eta) = -R_\rho(u,\eta)D_u\tilde{S}(u,\eta)(u'-u).$$

Dès lors

$$||(D_\eta\tilde{S}(u,\eta))\Phi(u,u';\eta) + D_u\tilde{S}(u,\eta)(u'-u)||_H \leq \rho||D_u\tilde{S}(u,\eta)(u'-u)||_V,$$

donc en vertu de (2.19),

$$||(D_\eta \tilde{S}(u,\eta))\Phi(u,u';\eta) + D_u\tilde{S}(u,\eta)(u'-u)||_H \leq \rho\bar{\mathfrak{X}}||u'-u||_H. \tag{2.20}$$

Par ailleurs, en vertu de la proposition 5, que pour tout $\rho > 0$, Φ est continue. De plus comme le coefficient $\bar{\mathfrak{X}}$ dans (2.19) est uniforme en $(u,\eta) \in X \times \mathcal{K}$, et comme de même la norme de $R_\rho(u,\eta) : H \mapsto E_{M_\rho}$ est majorée uniformément en $(u,\eta) \in X \times \mathcal{K}$, on a :

$$||\Phi(u,u';\eta)||_E \leq C_\rho||u'-u||_H. \tag{2.21}$$

Enfin, $D_u\tilde{S}(u,\eta)$ et $R_\rho(u,\eta)$ étant tous deux continuement différentiables en η, on a :

$$||\Phi(u,u';\eta) - \Phi(u,u';\eta')||_E \leq C_\rho||u'-u||_H||\eta-\eta'||_E, \tag{2.22}$$

pour tous $(\eta,\eta') \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ et $(u,u') \in D_\delta$.

Deuxième étape : vérification de (2.16)**.**

En vertu de (2.17), (2.19) et (2.20), il existe $\mathfrak{X} > 0$ tel que

$$||\tilde{S}(u',\eta+\Phi(u,u';\eta))-\tilde{S}(u,\eta)||_H \leq \mathfrak{X}(||u-u'||_H^2+||\Phi(u,u',\eta)||_E^2)+\rho\bar{\mathfrak{X}}||u-u'||_H.$$

Alors, en vertu de (2.21), on a que

$$||\tilde{S}(u',\eta+\Phi(u,u';\eta))-\tilde{S}(u,\eta)||_H \leq ||u'-u||_H(\mathfrak{X}(1+C_\rho^2)||u'-u||_H + \rho\bar{\mathfrak{X}})$$

en choisissant ρ tel que $\mathfrak{X}\rho < \frac{1}{4}$ et en choisissant ensuite δ tel que $(1+C_\rho^2)\bar{\mathfrak{X}}\delta < \frac{1}{4}$, on aboutit à (2.16).

Troisième étape : vérification de (2.15)**.**

En vertu de l'hypothèse $(H1)$ la mesure l a pour support $\mathcal{K}$. On décompose alors l : $l = l_M \otimes l_M^\perp$ où l_M et $l_M^\perp$ sont respectivement de supports $\mathcal{K}_M$ et $\mathcal{K}_M^\perp$. On a de plus que l_M admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur E_M, α lipschitzienne. Alors en se servant de cette décomposition de la mesure on obtient pour tout $A \in \mathcal{B}_M(E)$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{K}} &\big(\mathbb{1}_A(\eta+\Phi(u,u';\eta)) - \mathbb{1}_A(\eta)\big)\, l(d\eta) \\ &= \int_{\mathcal{K}_M^\perp} l^\perp(d\xi_M)\int_{\mathcal{K}_M}\big(\mathbb{1}_A(\zeta_M+\xi_M+\Phi(u,u';\zeta_M+\xi_M))-\mathbb{1}_A(\zeta_M+\xi_M)\big)\,\alpha(\zeta_M)d\zeta_M.\end{aligned}$$

Aussi suffit-il de prouver qu'il existe $C > 0$

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{K}_M} &\big(\mathbb{1}_A(\zeta_M+\xi_M+\Phi(u,u';\zeta_M+\xi_M)) - \mathbb{1}_A(\zeta_M+\xi_M)\big)\,\alpha(\zeta_M)d\zeta_M \\ &\leq C||u-u'||_H, \quad \forall \xi_M \in \mathcal{K}_M^\perp, (u,u') \in D_\delta,\end{aligned}$$

pour obtenir (2.15). Pour faciliter les calculs ultérieurs, on note

$$\Phi_\xi^M : \mathcal{K}_M \ni \zeta \to \Phi(u, u'; \zeta + \xi) \in E_M.$$

En vertu de (2.21) et (2.22) les normes et constantes de Lipschitz sont majorées par $C_\rho ||u - u'||_H \leq C_\rho \delta \leq \frac{1}{2}$ (moyennant un choix de δ approprié ce qui reste cohérent avec notre choix de δ dans la deuxième étape). En vertu du théorème de Kirzbraun (cf [37]) Φ_ξ^M peut être étendu en une application $\tilde{\Phi}_\xi^M : E_M \mapsto E_M$ de même constante de Lipschitz. On pose maintenant $\tilde{\Psi}_\xi^M : E_M \mapsto E_M$ défini par $\tilde{\Psi}_\xi^M : \zeta \to \zeta + \tilde{\Phi}_\xi(\zeta)$. L'opérateur $\tilde{\Phi}_\xi(\zeta)$ étant contractant, $\tilde{\Psi}_\xi^M$ est inversible et

$$Lip\left(\left(\tilde{\Psi}_\xi^M\right)^{-1} - Id\right) \leq C_\rho ||u - u'||_H \tag{2.23}$$

en rappellant que $Lip(f)$ est le coefficient de Lipschitz de f. Dès lors on peut procéder au changement de variable engendré par $\tilde{\Psi}_\xi^M$(cf [37]) : on pose $\iota := \tilde{\Psi}_\xi^M(\zeta_M)$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_{E_M} &\mathbb{1}_A(\zeta_M + \xi_M + \Phi(u, u'; \zeta_M + \xi_M))\alpha(\zeta_M)d\zeta_M \\ &= \int_{E_M} \mathbb{1}_A(\iota + \xi_M)\alpha\left(\left(\tilde{\Psi}_\xi^M\right)^{-1}(\iota)\right)\left|D\tilde{\Psi}_\xi^M\left(\left(\tilde{\Psi}_\xi^M\right)^{-1}(\iota)\right)\right|_{det}^{-1} d\iota\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{K}_M} &\mathbb{1}_A(\zeta_M + \xi_M + \Phi(u, u'; \zeta_M + \xi_M))\alpha(\zeta_M)d\zeta_M \\ &= \int_{\tilde{\Psi}_\xi^M(\mathcal{K}_M)} \mathbb{1}_A(\iota + \xi_M)\alpha\left(\left(\tilde{\Psi}_\xi^M\right)^{-1}(\iota)\right)\left|D\tilde{\Psi}_\xi^M\left(\left(\tilde{\Psi}_\xi^M\right)^{-1}(\iota)\right)\right|_{det}^{-1} d\iota.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{K}_M} \left(\mathbb{1}_A(\zeta_M + \xi_M + \Phi(u, u'; \zeta_M + \xi_M)) - \mathbb{1}_A(\zeta_M + \xi_M)\right)\alpha(\zeta_M)d\zeta_M \\ &= \int_{\tilde{\Psi}_\xi^M(\mathcal{K}_M)} \mathbb{1}_A(\iota + \xi_M)\alpha\left(\left(\tilde{\Psi}_\xi^M\right)^{-1}(\iota)\right)\left|D\tilde{\Psi}_\xi^M\left(\left(\tilde{\Psi}_\xi^M\right)^{-1}(\iota)\right)\right|_{det}^{-1} d\iota \\ &\qquad - \int_{\mathcal{K}_M} \mathbb{1}_A(\zeta_M + \xi_M)\alpha(\zeta_M)d\zeta_M \\ &= \int_{\tilde{\Psi}_\xi^M(\mathcal{K}_M)/\mathcal{K}_M} \mathbb{1}_A(\iota + \xi_M)\alpha\left(\left(\tilde{\Psi}_\xi^M\right)^{-1}(\iota)\right)\left|D\tilde{\Psi}_\xi^M\left(\left(\tilde{\Psi}_\xi^M\right)^{-1}(\iota)\right)\right|_{det}^{-1} d\iota \\ &\qquad - \int_{\mathcal{K}_M/\tilde{\Psi}_w^M(\mathcal{K}_M)} \mathbb{1}_A(\zeta_M + \xi_M)\alpha(\zeta_M)d\zeta_M\end{aligned}$$

$$+\int_{\tilde{\Psi}_\xi^M(\mathcal{K}_M)\cap\mathcal{K}_M}\mathbb{1}_A(\upsilon+\xi_M)\left(\alpha\left(\left(\tilde{\Psi}_\xi^M\right)^{-1}(\upsilon)\right)\left|D\tilde{\Psi}_\xi^M\left(\left(\tilde{\Psi}_\xi^M\right)^{-1}(\upsilon)\right)\right|_{det}^{-1}-\alpha(\upsilon)\right)d\upsilon$$

En vertu de la propriété de lipschitziannité, (2.23), on peut borner $\left|D\tilde{\Psi}_\xi^M\left(\left(\tilde{\Psi}_\xi^M\right)^{-1}(\upsilon)\right)\right|_{det}^{-1}$ les autres termes dans les deux premières intégrales étant naturellement bornés, on a

$$\begin{aligned}&\int_{\tilde{\Psi}_\xi^M(\mathcal{K}_M)/\mathcal{K}_M}\mathbb{1}_A(\iota+\xi_M)\alpha\left(\left(\tilde{\Psi}_\xi^M\right)^{-1}(\iota)\right)\left|D\tilde{\Psi}_\xi^M\left(\left(\tilde{\Psi}_\xi^M\right)^{-1}(\iota)\right)\right|_{det}^{-1}d\iota\\&\qquad\qquad-\int_{\mathcal{K}_M/\tilde{\Psi}_w^M(\mathcal{K}_M)}\mathbb{1}_A(\zeta_M+\xi_M)\alpha(\zeta_M)d\zeta_M\\&\leq(1+C_\rho||u-u'||_H)Leb(\tilde{\Psi}_w^M(\mathcal{K}_M)/\mathcal{K}_M)+Leb(\mathcal{K}_M/\tilde{\Psi}_w^M(\mathcal{K}_M)),\end{aligned}$$

où Leb désigne la mesure de Lebesgue. Or pour tout $\upsilon\in\mathcal{K}_M$,

$$||\tilde{\Psi}_\xi^M(\upsilon)-\upsilon||_E=||\tilde{\Phi}_\xi(\upsilon)||_E\leq C_\rho||u-u'||_H$$

donc

$$Leb(\tilde{\Psi}_\xi^M(\mathcal{K}_M)/\mathcal{K}_M)\leq(C_\rho||u-u'||_H)^M,\quad Leb(\mathcal{K}_M/\tilde{\Psi}_\xi^M(\mathcal{K}_M))\leq(C_\rho||u-u'||_H)^M.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}&\int_{\tilde{\Psi}_\xi^M(\mathcal{K}_M)/\mathcal{K}_M}\mathbb{1}_A(\iota+\xi_M)\alpha\left(\left(\tilde{\Psi}_\xi^M\right)^{-1}(\iota)\right)\left|D\tilde{\Psi}_\xi^M\left(\left(\tilde{\Psi}_\xi^M\right)^{-1}(\iota)\right)\right|_{det}^{-1}d\iota\\&\qquad\qquad-\int_{\mathcal{K}_M/\tilde{\Psi}_w^M(\mathcal{K}_M)}\mathbb{1}_A(\zeta_M+\xi_M)\alpha(\zeta_M)d\zeta_M\\&\leq(1+2C_\rho||u-u'||_H)C_\rho^M||u'-u||_H^M.\end{aligned}$$

Pour le dernier terme on remarque que

$$\begin{aligned}&\int_{\tilde{\Psi}_\xi^M(\mathcal{K}_M)\cap\mathcal{K}_M}\mathbb{1}_A(\upsilon+\xi_M)\left(\alpha\left(\left(\tilde{\Psi}_\xi^M\right)^{-1}(\upsilon)\right)\left|D\tilde{\Psi}_\xi^M\left(\left(\tilde{\Psi}_\xi^M\right)^{-1}(\upsilon)\right)\right|_{det}^{-1}-\alpha(\upsilon)\right)d\upsilon\\&=\int_{\tilde{\Psi}_\xi^M(\mathcal{K}_M)\cap\mathcal{K}_M}\mathbb{1}_A(\upsilon+\xi_M)\Big(\left(\alpha\left(\left(\tilde{\Psi}_\xi^M\right)^{-1}(\upsilon)\right)-\alpha(\upsilon)\right)\left|D\tilde{\Psi}_\xi^M\left(\left(\tilde{\Psi}_\xi^M\right)^{-1}(\upsilon)\right)\right|_{det}^{-1}\\&\qquad\qquad+\left(\left|D\tilde{\Psi}_\xi^M\left(\left(\tilde{\Psi}_\xi^M\right)^{-1}(\upsilon)\right)\right|_{det}^{-1}-1\right)\alpha(\upsilon)\Big)d\upsilon.\end{aligned}$$

En vertu de (2.23) on peut établir que

$$\left|\left|D\tilde{\Psi}_\xi^M\left(\left(\tilde{\Psi}_\xi^M\right)^{-1}(\upsilon)\right)\right|_{det}-1\right|\leq C_\rho||u'-u||_H,\quad\forall\upsilon\in E_M.$$

Dès lors, quitte à considérer δ suffisamment petit, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left|\left|D\tilde{\Psi}_{\xi}^{M}\left(\left(\tilde{\Psi}_{\xi}^{M}\right)^{-1}(\upsilon)\right)\right|_{det}-1\right|\right)^{n}=\left|D\tilde{\Psi}_{\xi}^{M}\left(\left(\tilde{\Psi}_{\xi}^{M}\right)^{-1}(\upsilon)\right)\right|_{det}^{-1}$$

d'où

$$\begin{aligned}\left|D\tilde{\Psi}_{\xi}^{M}\left(\left(\tilde{\Psi}_{\xi}^{M}\right)^{-1}(\upsilon)\right)\right|_{det}^{-1} &\leq 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{\rho}||u'-u||_{H}\right)^{n}\\ &\leq 1+C_{\rho}||u'-u||_{H}\sum_{n=0}^{\infty}\left(C_{\rho}||u'-u||_{H}\right)^{n}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\left|D\tilde{\Psi}_{\xi}^{M}\left(\left(\tilde{\Psi}_{\xi}^{M}\right)^{-1}(\upsilon)\right)\right|_{det}^{-1}\leq 1+C'_{\rho}||u'-u||_{H}.$$

De plus, du fait de la lipschitziannité de α et de la bornitude de Φ_w, on a

$$\left|\alpha\left(\left(\tilde{\Psi}_{\xi}^{M}\right)^{-1}(\upsilon)\right)-\alpha(\upsilon)\right|\leq C_{\rho}||u'-u||_{H}.$$

En sommant ces estimations, on obtient (2.15). □

Maintenant établissons un résultat de contraction sur les trajectoires de D_δ.

Lemme 23. *Pour δ défini comme dans le lemme 22, il existe une constante $C_1(\delta)$, un espace probabilisé $(\Omega_0,\mathcal{F}_0,\mathbb{P}_0)$ et une application mesurable*

$$D_\delta\times\Omega_0\mapsto\mathcal{K}\times\mathcal{K},\quad (u,u',\omega_0)\to(\eta_1^{\omega_0}(u,u'),\eta_1'^{\omega_0}(u,u')),$$

tel que $\mathcal{D}(\eta_1(u,u'))=\mathcal{D}(\eta_1'(u,u'))=l$ et $u_1:=\tilde{S}(u,\eta_1)$, $u_1'=\tilde{S}(u',\eta_1')$ satisfont

$$\mathbb{P}(||u_1-u_1'||_H\leq\frac{d}{2})>1-C_1(\delta)d\quad d=||u-u'||_H\leq\delta.$$

Démonstration. On considère η de loi l. On note $\eta'=\Psi(u,u';\eta)$ et $l'=\mathcal{D}(\eta')$. En vertu du lemme 22

$$||\tilde{S}(u,\eta)-\tilde{S}(u',\eta')||_H\leq\frac{d}{2}\quad p.s \tag{2.24}$$

$$||l-l'||_{var}\leq C_1(\delta)d. \tag{2.25}$$

Cependant a priori, $l'\neq l$. Cependant on peut construire un $\tilde{\eta}$ de loi l dont les réalisations sont essentiellement égales à celles de η' avec une probabilité supérieure à $1-C_1(\delta)$. En effet le lemme de Dobrushin (cf [26]) stipule que l'on peut trouver un couple $(\tilde{\eta},\tilde{\eta}')$ pour

les lois l et l' définis sur l'espace probabilisé $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$ tels que

$$\mathbb{P}(\tilde{\eta} \neq \tilde{\eta}') \leq C_1(\delta)d. \tag{2.26}$$

et tels que $(\omega_1 u, u') \to (\tilde{\eta}, \tilde{\eta}')$ soit mesurable. On va maintenant construire un recollement entre (η, η') et $(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}')$ deux couplages (l, l') . En vertu du lemme de recollement (cf [37]), on peut construire trois variables aléatoires ζ_1, ζ_2 et ζ_3 et un espace probabilisé $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}_0)$ tels que

$$\mathcal{D}(\zeta_1, \zeta_2) = \mathcal{D}(\eta, \eta'), \quad \mathcal{D}(\zeta_2, \zeta_3) = \mathcal{D}(\tilde{\eta}', \tilde{\eta}).$$

De plus, le triplet $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ est une fonction mesurable de (ω_0, u, u') (cf l'annexe 3 de [24]). On a donc $\mathcal{D}(\zeta_1) = \mathcal{D}(\zeta_3) = l$ et en vertu de (2.24) on a

$$||\tilde{S}(u, \eta_1) - \tilde{S}(u', \zeta_2)||_H \leq \frac{d}{2}, \quad \mathbb{P}_0 - p.s.$$

De plus, en vertu de (2.26),

$$\mathbb{P}_0(\zeta_2 \neq \zeta_3) = \mathbb{P}_1(\tilde{\eta}' \neq \tilde{\eta}) \leq C_1 d,$$

ce qui implique

$$\mathbb{P}_0(||\tilde{S}(u, \zeta_1) - \tilde{S}(u', \zeta_3)||_H \leq \frac{d}{2}) \geq 1 - C_1 d,$$

d'où notre conclusion en prenant $\eta_1 = \zeta_1$ et $\eta_1' = \zeta_3$. □

Maintenant établissons notre résultat de rapprochement sur les mesures, conclusion de notre preuve.

2.7.3 Rapprochement des mesures

On va désormais considérer le processus d'itération suivant pour notre système. On rappelle que $u, u' \in \mathcal{O}$, $d = ||u - u'||_H$ et on pose

$$(u_1, u_1')(\omega_0) = \begin{cases} (\tilde{S}(u, \eta), \tilde{S}(u', \eta)), \text{ pour } d < d_0 \\ (\tilde{S}(u, \eta_1), \tilde{S}(u', \eta_1')), \text{ pour } d \geq d_0, \end{cases}$$

où $\eta_1(\omega_0)$ et $\eta_1'(\omega_0)$ sont définies au lemme 23 et η est une variable aléatoire dans Ω_0 de loi l indépendante de η_1 et η_1'.

Avant d'établir que ce processus engendre un contraction sur l'espace des mesures, on affirme la propriété suivante, conséquence directe de **(H2′)** :

Lemme 24. *On suppose que le système $\tilde{S} : X \times \mathcal{K} \mapsto X$ vérifie $(A1')$, $(H1)$,$(H2')$, et*

$(H3')$. *Alors pour tout* $a > \gamma$ *et pour tout* $r > 0$ *il existe* $0 < p_r \leq 1$ *tel que :*

$$\mathbb{P}(||\tilde{S}(u,\eta)||_H < a||u||_H) > p_r, \text{ pour } ||u||_H \geq r \tag{2.27}$$

Démonstration. On s'appuie sur le fait que les ρ_j densités des lois des variables η_j soient toutes non nulles en 0. La continuité de ces densités ainsi que la régularité de $\tilde{S}$ nous permet d'affirmer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe p_ϵ tel que

$$\mathbb{P}(||\tilde{S}(u,\eta)||_H < \gamma||u||_H + \epsilon) > p_\epsilon. \tag{2.28}$$

Pour $a > \gamma$ et $r > 0$ on peut trouver ϵ tel que $\gamma||u||_H + \epsilon \leq a||u||_H$ pour $||u||_H \geq r$. En construisant ainsi $\epsilon(r)$, on trouve $p_\epsilon = p_r$ en on obtient notre résultat. □

Ce résultat supplémentaire nous permettra d'établir la contraction des trajectoires par dissipation c'est à dire quand les points de départ de ces dernières sont trop éloignés pour pouvoir appliquer nos résultats de contrôlabilité. Maintenant établissons notre résultat principal de contraction pour notre système :

Lemme 25. *En reprennant l'énoncé du théorème* 2*, on introduit la notation* $K := \sup_{u\in\mathcal{O}}(||u||_H)$*. Il existe* $d_0 > 0$ *et une fonction non décroissante*

$$g :]\frac{d_0}{2}, K] \mapsto]2d_0, 3d_0] \tag{2.29}$$

telle que pour tout $\xi_1, \xi_2 \in X$*,*

$$g_{\mathfrak{Q}}(\xi_1,\xi_2) = \begin{cases} ||\xi_1 - \xi_2||_H, \text{ pour } ||\xi_1 - \xi_2||_H \leq d_0, \\ g(\max(||\xi_1||_H, ||\xi_2||_H)), \text{ pour } ||\xi_1 - \xi_2||_H > d_0, \end{cases}$$

soit la densité d'une fonctionelle de Kantorovitch. Celle-ci vérifie

$$\mathbb{E}[g_{\mathfrak{Q}}(u_1, u_1')] \leq \kappa g_{\mathfrak{Q}}(u, u'), \text{ pour tout } u, u' \in \mathcal{O}. \tag{2.30}$$

pour $0 < \kappa < 1$*.*

Démonstration. On suppose ici que $d_0 \leq \delta$ avec δ tel que défini dans le lemme 22. Il est clair que $g_{\mathfrak{Q}}$ engendre une fonctionelle de Kantorovitchde même que le fait qu'elle vérifie

$$g_{\mathfrak{Q}}(\xi_1,\xi_2) \leq 3||\xi_1 - \xi_2||_H.$$

Cette coercivité, dans l'espace des mesures, de la fonctionnelle de Kantorovitch nous garantit la propriété de contraction du processus dans l'espace des mesures si tant est qu'on prouve que ce processus est contractant vis à vis de notre fonctionnelle de Kantorovitch i.e (2.30).

Posons désormais,

$$\mathfrak{U} := \max(||u||_H, ||u'||_H), \quad \text{et } \mathfrak{U}'(\omega_0) := \max(||S(u,\eta)||_H, ||S(u',\eta')||_H),$$

et rappellons que $d = ||u - u'||_H$. Intuitivement on peut considérer deux cas. Dans le premier cas, le processus est contractant sur la première en vertu de sa dissipativité.

Premier cas $d > d_0$:

Ainsi, on a $\mathfrak{U} \geq \frac{d_0}{2}$. On considère un $a := \frac{1+\gamma}{2}$ avec γ tel que défini dans **(H2′)**. Alors en vertu de cette dernière et du lemme 24,

$$\mathbb{P}(\mathfrak{U}' \leq a\mathfrak{U}) > p_{d_0} > 0, \quad \mathfrak{U}' \leq \gamma\mathfrak{U} + \beta, p.s.$$

Pour obtenir (2.30), on cherche g vérifiant (2.29) telle que

$$p_{d_0} g(a\mathfrak{U}) + (1 - p_{d_0}) g(\gamma\mathfrak{U} + \beta) \leq \kappa_1 g(d), \text{ pour } \mathfrak{U} \geq \frac{d_0}{2}, \tag{2.31}$$

pour $0 < \kappa_1 < 1$. Dans le cas où $\mathfrak{U} \leq \frac{\beta}{1-\gamma}$, on a $\gamma\mathfrak{U} + \beta \leq \mathfrak{U}$ donc si on admet que g vérifie

$$g \text{ est strictement croissante sur } [\frac{d_0}{2} \frac{\beta}{1-\gamma}], \text{ et } g(a\frac{\beta}{1-\gamma}) < g(\frac{\beta}{1-\gamma}), \tag{2.32}$$

alors (2.31) est vérifiée pour un κ_1 approprié.

Pour $\mathfrak{U} \leq \frac{\beta}{1-\gamma}$ i.e $d_0 \leq \frac{2\beta}{1-\gamma}$, il convient de construire g sur le segment $J :=]\frac{d_0}{2}, \frac{\beta}{1-\gamma}]$. Pour ce faire, on introduit les intervalles $I_n :=]a^n \frac{\beta}{1-\gamma}, a^{n-1} \frac{\beta}{1-\gamma}]$ pour $n \geq 1$. Alors il existe N_0 tel que $\cup_{j=1}^{N_0} I_j \supset J$. Ayant ainsi segmenté J on construit g par morceaux de sorte que, en particulier on ait une relation de contraction à coefficient constant pour g appliquée à notre processus :

$$g(x) = a_n, \quad x \in I_n, \quad 1 \leq j \leq N_0,$$

où

$$\frac{5}{2} d_0 = a_1 > a_2 > \cdots > a_{N_0} > 0 \tag{2.33}$$

est une suite nombre que l'on va maintenant déterminer. Pour vérifier (2.31) sur I_1, il suffit que

$$a_1 > p_{d_0} a_2 + (1 - p_{d_0}) a_1,$$

inégalité qui est vérifiée car $a_1 > a_2$. Maintenant pour vérifier (2.31) sur I_n pour $n \geq 2$ il suffit d'avoir

$$a_{n-1} > p_{d_0} a_n + (1 - p_{d_0}) a_1.$$

On considère alors $0 < p' < p_{d_0}$ et on définit les a_j ainsi

$$a_n = a_1 - \frac{a_1 - a_2}{p_{d_0}^n}.$$

Pour a_2 suffisamment proche de a_1 tel que $a_2 < a_1$, (2.33) est vérifiée. Ayant ainsi construit g sur J, on la prolonge en une fonction affine sur $[\frac{\beta}{1-\gamma}, K]$ telle que $f(K) = 3d_0$. Alors g vérifie (2.29). De plus (2.31) est valide donc (2.30) est vérifiée, d'où notre résultat pour $d > d_0$.

Cas $d \leq d_0$ La seconde zone est celle pour laquelle on peut employer la contrôlabilité du système pour prouver la contraction. Ainsi notons $D := ||u_1 - u_1'||_H$. Comme $d_0 \leq \delta$, en vertu du lemme 23,

$$\mathbb{P}(D \leq \frac{d}{2}) \geq 1 - C_1 d \text{ si } d \leq d_0.$$

Ainsi, en vertu de (2.29), a t-on

$$\mathbb{E}[g_{\mathfrak{Q}}(u_1, u_1')] \leq C_1 d(3d_0) + \frac{d}{2} \leq \frac{d}{2} + 3C_1 d d_0.$$

En prennant $d_0 \leq \frac{1}{10C_1}$ on obtient (2.30), pour $\kappa = \frac{3}{4}$. Ainsi en considérant $d_0 := \inf(\frac{1}{12C_1}, \frac{2\beta}{1-\gamma})$ et $\kappa := \sup(\kappa_1, \frac{3}{4})$, on obtient notre résultat. □

On peut maintenant étendre cette dernière propriété pour notre processus après k itérations et prouver :

Preuve du theorème 7. Démontrons que le processus définit une contraction dans l'ensemble des mesures. Soient $(u, u') \in X$ et $k \geq 1$ alors pour tout couplage $(\tilde{u}_k, \tilde{u}_k')$ des lois $(\mathcal{D}(u_k(u))), \mathcal{D}(u_k(u'))$, on a

$$||\mathcal{D}(u_k(u)) - \mathcal{D}(u_k(u'))||_L^* \leq \frac{K}{d_0} \inf_{\xi_1, \xi_2} \mathbb{E} g_{\mathfrak{Q}}(\xi_1, \xi_2) \leq \frac{K}{d_0} \mathbb{E} g_{\mathfrak{Q}}(\tilde{u}_k(u), \tilde{u}_k(u'))$$

où les (ξ_1, ξ_2) sont les couplages sur $(\mathcal{D}(u_k(u))), \mathcal{D}(u_k(u'))$. Démontrons que pour tout $k \geq 1$, il existe un couplage $(\tilde{u}_k, \tilde{u}_k')$ vérifiant défini sur un espace probabilisé $(\Omega^k, \mathcal{F}^k, \mathbb{P}^k)$

$$\mathbb{E}[g_{\mathfrak{Q}}(\tilde{u}_k, \tilde{u}_k')] \leq \kappa^k g_{\mathfrak{Q}}(u, u'), \tag{2.34}$$

avec $0 < \kappa < 1$. La chose est déjà prouvée pour $k = 1$. Supposons pour $k \geq 2$ que la propriété soit prouvée pour $k-1$. Alors soit $(\tilde{u}_{k-1}, \tilde{u}_{k-1}')$ le couplage sur la base stochastique $(\Omega^{k-1}, \mathcal{F}^{k-1}, \mathbb{P}^{k-1})$ associé à $(\mathcal{D}(u_{k-1}(u))), \mathcal{D}(u_{k-1}(u'))$. Alors on applique à toutes les valeurs possibles du couple $(\tilde{u}_{k-1}, \tilde{u}_{k-1}')$, le lemme 23 : on définit l'univers $\Omega_k = \Omega_{k-1} \times \Omega_0 = \{(\omega_{k-1}, \omega_0)\}$ et on pose $(\tilde{u}_k, \tilde{u}_k') = (u_1, u_1')(\omega_{k-1}, \omega_0)$ où $u = \tilde{u}_{k-1}(\omega_{k-1})$ et $u' = \tilde{u}_{k-1}'(\omega_{k-1})$. En vertu de (2.30), on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g_{\mathfrak{Q}}(u_k, u_k')] &= \mathbb{E}^{k-1}\left[\mathbb{E}^0 g_{\mathfrak{Q}}(u_1, u_1')(u_{k-1}(\omega_{k-1}), u_{k-1}'(\omega_{k-1}))\right] \\ &\leq \kappa \mathbb{E}^{k-1} g_{\mathfrak{Q}}(u_{k-1}, u_{k-1}') \leq \kappa^k g_{\mathfrak{Q}}(u, u').\end{aligned}$$

□

Interlude : extension des résultats aux équations primitives complètes et interprétation physique

2.8 Définition du problème complet et notations

Considérons dorénavant les équations primitives non-simplifiées :

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - \Delta u_k + \sum_{j=1}^{3} \partial_j (u_j u_k) + \partial_k p + f_{Cor} e_z \wedge u_k = f_k, \qquad k = 1, 2, \tag{2.35}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T + (u \cdot \nabla) T = Q, \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + T = 0. \tag{2.38}$$

On commence par préciser les conditions aux bords pour le système complet :

$$\begin{aligned}
&\text{pour } j = 1 \text{ ou } 2, \\
&u_j(x+L, y, z, t) = u_j(x, y, z, t), \quad u_j(x, y+L, z, t) = u_j(x, y, z, t), \\
&u_j(x, y, z+h, t) = u_j(x, y, z, t), \quad u_j(x, y, -z, t) = u_j(x, y, z, t),
\end{aligned}$$

i.e u_j est périodique en x, y et z, et pair en z ; de plus,

$$\begin{aligned}
&u_3(x+L, y, z, t) = u_3(x, y, z, t), \quad u_3(x, y+L, z, t) = u_3(x, y, z, t), \\
&u_3(x, y, z+h, t) = u_3(x, y, z, t), \quad u_3(x, y, -z, t) = -u_3(x, y, z, t),
\end{aligned}$$

i.e u_3 est périodique en x, y et z, et impair en z et enfin

$$\begin{aligned}
&T(x+L, y, z, t) = T(x, y, z, t), \quad T(x, y+L, z, t) = T(x, y, z, t), \\
&T(x, y, z+h, t) = T(x, y, z, t), \quad T(x, y, -z, t) = -T(x, y, z, t),
\end{aligned}$$

i.e T est périodique en x, y et z, et impair en z. On remarque que contrairement à l'équation simplifiée (cf section 0.4.1), la pression a une dépendance en z du fait de sa dépendance en T. On reprend la notation $v := (u_1, u_2)$. En vertu de ces conditions aux bords, on peut de nouveau écrire $u_3 = \int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2 v$. De même on remplace $\frac{\partial p}{\partial z}$ par T. Dès lors (2.35) se réécrit de la manière suivante :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v - \Big(\int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2 v \frac{\partial v}{\partial z}\Big) - \Delta v + \nabla_2 p(x,y) - \nabla_2 \int_{-h}^{z} T = f, \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (v \cdot \nabla)T - \Big(\int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2 v \frac{\partial T}{\partial z}\Big) - \Delta T = Q. \tag{2.40}$$

Ici, pour simplifier la notation, le terme p qui désignait dans (2.35) la pression totale, désignera dans la suite la pression hydrodynamique. De plus dorénavant on note

$$w := (v, T). \tag{2.41}$$

On pose ensuite

$$\mathfrak{B}(w) := \left((v \cdot \nabla)v - \Big(\int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2 v\Big)\frac{\partial v}{\partial z}, (v \cdot \nabla)T - \Big(\int_{-h}^{z} \operatorname{div}_2 v\Big)\frac{\partial T}{\partial z}\right), \tag{2.42}$$

$\mathfrak{B}(w_1, w_2)$ le terme bilinéaire qui lui est canoniquement associé, et

$$W(w) = (\nabla_2 \int_{-h}^{z} T + f_{Cor}\overrightarrow{e_z} \wedge v, 0). \tag{2.43}$$

Alors on écrit (2.39) sous la forme

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathfrak{B}(w) + W(w) - \Delta w + \nabla_2 p = (f, Q). \tag{2.44}$$

Les conditions aux bords deviennent alors

$$v(x+L,y,z,t) = v(x,y+L,z,t) = v(x,y,z+h,t) = v(x,y,z,t), \tag{2.45}$$

$$v(x,y,-z,t) = v(x,y,z,t), \tag{2.46}$$

$$T(x+L,y,z,t) = T(x,y+L,z,t) = T(x,y,z+h,t) = T(x,y,z,t), \tag{2.47}$$

$$T(x,y,-z,t) = -T(x,y,z,t). \tag{2.48}$$

Alors on peut considérer $w(x,y,z,t)$ comme un champ sur le tore,

$$w : \mathbb{O} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{O} = \mathbb{T}_L^2 \times \mathbb{T}_h,$$

tel que v et T soient respectivement pair et impair en z.

On ajoute maintenant les conditions initiales et certains résultats permettant de ca-

ractériser l'espace d'existence des solutions. D'abord on a toujours la propriété (1.3) qu'on rappelle ici :

$$\operatorname{div}_2 \bar{v} = 0. \tag{2.49}$$

Les conditions initiales sont similaires à celles du problème simplifié

$$w(\cdot, 0) = (v_0, T_0) =: w_0 \tag{2.50}$$

où, en plus de (2.45), (2.46), (2.47), (2.48) et (1.3), w_0 vérifie :

$$\int_{\mathbb{O}} w_0 d\zeta = 0. \tag{2.51}$$

On impose toujours pour (f, Q) :

$$\int_{\mathbb{O}} (f, Q)(\zeta, t) d\zeta = 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.52}$$

Alors une solution w de (2.44), sous les conditions (2.51) et (2.52) vérifie

$$\int_{\mathbb{O}} w(\zeta, t) d\zeta = 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.53}$$

On peut dès lors adapter la nomenclature de l'équation simplifiée à notre problème Pour tout $j \in \mathbb{Z}$ on baptise $H^j(\mathbb{O})$ l'espace de Sobolev de degré j sur $\mathbb{O}$ et

$$\bar{H}^j := \{(v, T) \in \left(H^j(\mathbb{O})\right)^3 : \int_{\mathbb{O}} (v, T) d\zeta = 0, v \text{ est pair en } z, T \text{ est impair en } z, \}.$$

Dotons cet espace du produit scalaire

$$\langle w_1, w_2 \rangle_j = \langle (\nabla)^j w_1, (\nabla)^j w_2 \rangle.$$

On pose toujours, pour tout $j \in \mathbb{N}/\{0\}$

$$\bar{V}^j := \{(v, T) \in \bar{H}^j : v \text{ satisfaisant } (2.49)\},$$

et $\bar{V}^0$ la fermeture de $\bar{V}^1$ dans L^2. On abrège $\bar{H}^0$ en $\bar{H}$ et $\bar{V}^0$ en $\bar{V}$. De plus on note $(\bar{e}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la base orthonormée de $\bar{V}$ construite de manière homologue à $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans V.

Pour $j \in \mathbb{N}$, on note :

— $\bar{E}_j([t_1, t_2]) := L^2([t_1, t_2], \bar{V}^j)$,

— $\bar{U}_j([t_1, t_2]) := \{w \in \bar{E}_{j+1}([t_1, t_2]), \frac{\partial w}{\partial t} \in \bar{E}_{j-1}([t_1, t_2])\}$. Alors on a toujours $\bar{U}_j([t_1, t_2]) \hookrightarrow C([t_1, t_2], \bar{V}^j)$,

— on adopte les notations suivantes $\bar{E}_j(T) := \bar{E}_j([0, T])$ et $\bar{U}_j(T) := \bar{U}_j([0, T])$, ainsi que $|||(f, Q)|||_k := \sup_t ||(f(t), Q(t))||_{\bar{V}^k}$.

On a alors naturellement la décomposition orthogonale suivante :

$$\bar{V}^m = V^m \oplus V^m_\dagger,$$

où pour $w = (v, T) \in \bar{V}^m$, V^m est l'espace des champs v et $V^m_\dagger$ l'espace des champs T.

2.9 Résultats principaux pour notre problème

Dans cette section, on présente les deux principaux résultats déterministes concernant notre problème qui font écho à ceux que nous avons énoncés dans le cas de l'équation simplifiée. Définissons d'abord la notion de solution pour les équations primitives complètes :

Définition 3. *Soit $\tau > 0$, $m \geq 1$ et $w_0 \in \bar{V}^m$, w est une solution forte de* (2.44), (2.50) *si $w \in \bar{U}_m(\tau)$ et $\exists p \in L^2([0,\tau], H^m(\mathbb{T}^2_L))$ tel que (w, p) vérifient* (2.44) *et* (2.50).

Alors en se référant à [34] on peut affirmer le caractère bien posé du problème :

Théorème 10. *Soient $m \geq 1$, $w_0 \in \bar{V}^m$ et $(f, Q) \in \left(L^\infty(\mathbb{R}^+, \bar{V}^{m-1})\right)^2$ alors l'équation* (2.44) *admet une unique solution w dans $C(\mathbb{R}^+, \bar{V}^m) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \bar{V}^{m+1})$. De plus pour tout $\tau > 0$, la norme de w dans $C(\mathbb{R}^+, \bar{V}^m) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \bar{V}^{m+1})$ est majorée par une constante dépendant uniquement de τ,$||w_0||_{\bar{V}^m}$ et $|||(f, Q)|||_m$.*

On pose

$$\overline{Sol} : (w_0, (f, Q)) \mapsto w \quad \text{solution de } (2.44), (2.50). \tag{2.54}$$

De l'article [34] on déduit également, en reprennnant le raisonnement menant au théorème 2, l'existence d'un ensemble absorbant pour notre système :

Théorème 11. *Soit $m \geq 1$ un entier et supposons qu'il existe une constante C^* telle que*

$$||(f, Q)(t)||_{\bar{V}^{m-1}} \leq C^*, \quad \forall t \geq 0$$

alors il existe $R = R(C^*)$ tel que pour tout $M > 0$, existent $\tau = \tau(M, C^*)$ et $K = K(M, C^*) \geq 2R$ tels qu'une solution w de (2.44) *telle que $||w_0||_{\hat{V}^m} \leq M$ vérifie :*

$$\begin{cases} ||w(t)||_{\bar{V}^m} \leq K, & t \geq 0, \\ ||w(t)||_{\bar{V}^m} \leq R, & t \geq \tau \end{cases}$$

Maintenant introduisons les notions nécessaires à l'étude de l'aspect stochastique de notre système. En reprennant la définition des $\tilde{\eta}^i$:

$$\tilde{\eta}^i(t) := \Big(\xi^i_0(t) h_0(t) + \sum_{j=0}^{\infty} c^i_j \sum_{k=0}^{2^j-1} \xi^i_{j,k} h_{j,k}(t)\Big),$$

où les variables aléatoires réelles ξ_0^i et $\xi_{j,k}^i$ sont indépendantes, identiquement distribuées (i.i.d) et vérifient $|\xi_0^i| \leq 1$ et $|\xi_{j,k}^i| \leq 1$ pour tout évènement ω ; où de plus, les coefficients vérifient :

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i^2 \big(1 + \big(\sum_{j=0}^{\infty} c_j^i\big)^2\big) < \infty.$$

Alors on pose

$$\bar{\eta}(t) := \sum_{i=0}^{\infty} b_i \tilde{\eta}^i(t) \lambda_i^{-m/2} \bar{e}_i, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

et $\bar{\eta}_k = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \eta_k^i(t) \lambda_i^{-m/2} \bar{e}_i$ une suite de copies de $\bar{\eta}$ indépendantes. Notre bruit rouge s'écrit alors

$$(f, Q)(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[k,k+1[}(t) \bar{\eta}_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[k,k+1[}(t) \sum_{i=1}^{\infty} b_i \tilde{\eta}_k^i \lambda_i^{-m/2} \bar{e}_i, \tag{2.55}$$

où $(\bar{e}_i)$ est la base de $\bar{V}$ définie plus haut. On rappelle finalement que $\langle g, \mu \rangle := \int_{\mathfrak{E}} g(v) \mu(dv)$, (cf (2.1)).

On peut alors affirmer deux propriétés de mélange pour le processus stochastique engendré par (2.44) soumis au bruit rouge. Tout d'abord, pour le système discret

$$w_{k+1} = \overline{S}(w_k, \bar{\eta}_k) := \overline{Sol}(w_k, \bar{\eta}_k)(1), \tag{2.56}$$

on a le résultat de mélange suivant :

Théorème 12. *Supposons que le bruit (f, Q) soit de la forme (2.55), avec $m \geq 2$; alors, le processus engendré par (2.56) admet une unique mesure stationnaire $\mu \in \mathbf{P}(\bar{V}^m)$. De plus pour tout $R' > 0$, il existe, $C_m(R') > 0$ et $\kappa_m < 1$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour toute variable aléatoire w_0 dans $B_{\bar{V}^m}(R')$, indépendante de (f, Q), la loi du processus stochastique (w_k) décrit par (2.56) vérifie :*

$$||\mathcal{D}\left(w_k(w_0)\right) - \mu||^*_{L(V^m)} \leq C_m(R') \kappa_m^k. \tag{2.57}$$

Ce résultat entraîne

$$\langle g, \mathcal{D}\left(w_k(w_0)\right) - \mu \rangle \xrightarrow[k \to \infty]{} 0, \quad \forall g \in C_b(V^m).$$

De plus, en définissant μ_s de manière analogue à (2.11), en fonction de μ tel qu'établi dans le théorème 12, on a un résultat semblable au théorème 12 pour le système continu :

Théorème 13. *Supposons que le bruit (f, Q) soit de la forme (2.55), avec $m \geq 2$; alors, pour tout $R' > 0$, il existe, $C_m(R') > 0$ et $\kappa_m < 1$ tels que pour tous $s \geq 0$ et pour toute variable aléatoire w_0 dans $B_{\bar{V}^m}(R')$, indépendante de (f, Q), la loi du processus stochastique*

continu, solution de (2.44) *et partant de* w_0*, vérifie :*

$$||\mathcal{D}\left(\overline{Sol}(w_0,(f,Q))(s)\right)-\mu_s||^*_{L(V^m)} \leq C_m(R')\kappa_m^s. \tag{2.58}$$

Ce résultat entraîne

$$\langle g, \mathcal{D}\left(\overline{Sol}(w_0,(f,Q))(s)\right)-\mu_s\rangle \xrightarrow[s\to\infty]{} 0, \quad \forall g \in C_b(V^m), \forall s \geq 0.$$

Observons maintenant que si le théorème 12 nous donne la convergence faible, selon la topologie induite par les fonctions continues bornées sur l'espace des phases $\bar{V}^m$, de la famille des lois des solutions de (2.44), on peut élargir ce résultat au fonctions continues et seulement localement bornées sur $\bar{V}^m$ c'est à dire l'ensemble des fonctions continues sur $\bar{V}^m$ bornées sur tout borné de $\bar{V}^m$. Dans la suite on note cet ensemble $C_{loc}(\bar{V}^m)$.

En effet, comme notre système évolue dans $\mathcal{O}_m$, un sous ensemble borné de l'espace des phases V^m, toute fonction continue localement bornée g de $\bar{V}^m$, peut-être, sans perte de généralité assimilée à une fonction continue bornée de $\bar{V}^m$ via sa troncature :

$$\bar{g} : w \to \begin{cases} g(w), & ||w||_{\bar{V}^m} \leq K \\ g\left(\frac{K}{||w||_{\bar{V}^m}}w\right), & ||w||_{\bar{V}^m} \geq K \end{cases}$$

où, on le rappelle (cf Théorème 2), K est tel que $\mathcal{O}_m \subset B_{\bar{V}^m}(K)$. Cette assimilation nous permet d'écrire le corollaire suivant au théorème 12 :

Corollaire 6. *Supposons que le bruit* (f,Q) *soit de la forme* (2.55)*, avec* $m \geq 2$ *; alors, pour toute variable aléatoire* w_0 *à valeurs dans* $\bar{V}^m$*, indépendante de* (f,Q)*, la loi du processus stochastique continu solution de* (2.44)*, partant de* w_0 *vérifie :*

$$\langle g, \mathcal{D}\left(w_k(w_0)\right)-\mu\rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \quad \forall g \in C_{loc}(\bar{V}^m).$$

Exposons maintenant deux propriétés essentielles du système, qui découlent de ce théorème de mélange.

2.10 Propriétés ergodiques

Une conséquence majeure du caractère mélangeant de notre système est que celui ci vérifie la loi des grands nombres et le théorème central limite. En effet en s'appuyant sur le raisonnement des paragraphes 8 et 9 dans [23] on obtient :

Proposition 6. *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème* 13*, la loi du processus*

stochastique discret (2.56) *partant de* w_0 *suit la loi des grands nombres i.e :*

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} g\left(w_k(w_0)\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} \langle g, \mu\rangle, \quad p.s, \quad \forall g \in C_{loc}(\bar{V}^m).$$

La loi des grands nombres nous permet de déterminer l'espérance liée à la mesure stationnaire du système qu'on approche par la moyenne temporelle des itérés d'une quelconque trajectoire de ce processus. Ainsi donc en moyennant dans le temps les mesures observées pour une grandeur physique d'intérêt, on peut en déduire une caractéristique statistique, en l'occurence l'espérance. Le résultat suivant affine cette propriété puisqu'il nous permet de quantifier l'écart entre cette moyenne prise sur une trajectoire et la mesure stationnaire. En effet, le théorème central limite stipule :

Proposition 7. *Toujours sous les mêmes hypothèses que dans le théorème* 13*, la loi du processus stochastique discret* (2.56) *partant de* w_0 *vérifie le théorème central limite : pour tout* $\phi \in C_b(\bar{V}^m)$ *lipschitzienne telle que* $\langle \phi, \mu\rangle = 0$*, il existe* $\sigma > 0$ *tel que,*

$$\left\langle g, \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{0}^{N-1}\left(\phi\left(w_k(w_0)\right)\right)\right\rangle \xrightarrow[N\to\infty]{} \langle g, \mathcal{N}(0,\sigma)\rangle, \quad t\to\infty, \quad \forall g \in C_{loc}(\bar{V}^m),$$

où $\mathcal{N}(a,b)$ *est la loi normale centrée en* a *de variance* b*.*

Chapitre 3

Contrôlabilité du système et cas d'un bruit dégénéré

L'objet de cette partie est de montrer la propriété de mélange pour notre système avec des hypothèses relâchées sur le bruit. En effet notre choix de l'espace E associé à l'hypothèse de non-dégénérescence imposent que le bruit s'exprime sur tous les modes de Fourier ce qui est très restrictif et peu réaliste physiquement. Pour cette extension, on s'appuiera sur une version plus générale du théorème 6, présentée dans [24]. Grâce à cela on prouvera que si l'on remplace E par un sous-espace correspondant seulement à un nombre fini et très restreint de modes de Fourier sur la variable spatiale les équations primitives restent mélangeantes.

Pour ce faire et ainsi établir le théorème C, on s'appuiera sur un résultat général de mélange issu de [24], pour valider les hypothèses duquel, deux ingrédients sont nécessaires : des résultats analytiques sur le système (2.3), établis dans la première partie de ce travail, et des résultats de contrôlabilité du système linéarisé $D_\eta S$ issus d'une analyse menée dans [33] et qu'on détaillera ici. A l'instar de [33], et pour une plus grande cohérence de l'étude de la contrôlabilité de notre problème, on adjoint à ces derniers, les résultats de contrôlabilité de notre processus associé aux équations primitives (2.3).

3.1 Contrôlabilité pour les équations primitives

Dans cette section on expose brièvement les résultats de contrôlabilité du système (2.56), engendré par (2.44) qui, bien que n'étant pas nécessaire pour prouver notre résultat de mélange, fait partie intégrante de l'étude de la contrôlabilité de notre équation. Commençons par définir la notion de contrôlabilité approchée pour les équations primitives : en reprenant la définition de l'espace $\bar{V}^m$ de la section 2.8

Définition 4. *Soit $\bar{\mathcal{H}}$ un sous-espace de $\bar{V}^5$. L'équation* (2.44)*, est dit approximativement contrôlable dans $\bar{V}^m$ par $\bar{\mathcal{H}}$, si pour tous w_0, w_1 dans $\bar{V}^m$ et tous $\epsilon > 0$, et $T > 0$, il existe*

$(f, Q) \in L^\infty([0,T], \bar{\mathcal{H}})$ *tel que*

$$||\overline{Sol}(w_0, (f,Q))(T) - w_1||_{\bar{V}^m} \leq \epsilon,$$

où on rappelle que $\overline{Sol}$ *est définie par* (2.54).

L'idée est donc de contrôler le système de manière approchée par un ensemble restreint de bruits (en l'occurence concentrés sur les bas modes de Fourier). La propriété alors essentielle pour notre système est la saturation, qu'on va définir maintenant. Soit $\bar{\mathcal{H}}$ un sous-espace fixé de $\bar{V}^5$ de dimension finie ; on considère la suite des espaces $\bar{\mathcal{H}}_k$:

$$\begin{aligned}
&\bar{\mathcal{H}}_0 = \bar{\mathcal{H}} \\
&\bar{\mathcal{H}}^{k+1} = \{\eta' : \eta' := \eta + \sum_{j=1}^{n} \left(\mathfrak{B}(\xi_j) + W(0,\zeta_j)\right), \eta, \xi_j \in \mathcal{H}^k, \zeta_j \in \mathcal{H}^k_\dagger\} \\
&\oplus \{\eta', \eta' := \eta + \sum_{j=1}^{n} \left(\mathfrak{B}((W(0,\zeta_j)), \xi_j) + \mathfrak{B}((W(0,\xi_j)), \zeta_j)\right), \eta, \zeta_j, \xi_j \in \mathcal{H}^k_\dagger\},
\end{aligned}$$

avec $\mathfrak{B}$ et W définis par (2.42) et (2.43) respectivement. On définit alors la notion de saturation :

Définition 5. *On dit que* $\bar{\mathcal{H}}$ *est saturant dans* $\bar{V}^m$ *si*

$$\overline{\cup_{k=0}^{\infty} \bar{\mathcal{H}}^k}^{\bar{V}^m} = \bar{V}^m.$$

Alors on a le résultat suivant prouvé dans [33] :

Proposition 8. *Soit* $\bar{\mathcal{H}}$ *un espace saturant dans* $\bar{V}^1$. *Alors* (2.44) *est approximativement contrôlable dans* $\bar{V}^1$ *par* $\bar{\mathcal{H}}$.

On se contentera d'expliquer ici les principales étapes de la démonstration.

On commence par le résultat crucial pour le contrôle des trajectoires :

Proposition 9. *On considère* $w_0 = (v_0, T_0) \in \bar{V}^4$, $\eta \in \bar{V}^5$, $\xi \in V^5$ *et* $\zeta \in V^5_\dagger$, *Alors*

$$\overline{Sol}(w_0 + \delta^{-1/2}\xi, \delta^{-1}\eta)(\delta) - (\delta)^{-1/2}\xi \xrightarrow[\delta \to 0]{} w_0 + \eta - \mathfrak{B}(\xi) \tag{3.1}$$

$$\overline{Sol}(w_0 + \delta^{-1}\zeta, 0)(\delta) - \delta^{-1}\zeta \xrightarrow[\delta \to 0]{} w_0 - \Delta\zeta - W(0,\zeta) - \mathfrak{B}(v_0 + W(0,\zeta), \zeta), \tag{3.2}$$

où on le rappelle $\mathfrak{B}$ *et* W *sont respectivement définis par* (2.42) *et* (2.43).

Le principe de ce résultat, est que le système soumis à une force infiniment grande et avec une condition initiale infiniment grande peut-être pour un temps infinitésimal une trajectoire associé à une trajectoire linéaire. Cette propriété permet d'estimer à court terme et de manière simple une trajectoire relativement complexe qui est celle de notre système.

On raisonne alors pour la contrôlabilité du système en terme de point approximativement atteignables par le système dans l'espace des phases $\bar{V}^1$. Pour un contrôle dans $\bar{\mathcal{H}}$ l'espace atteignable partant de w_0 est $w_0 + \bar{\mathcal{H}}$. Utilisant cela, en vertu de la proposition 9, partant de l'espace $w_0 + \bar{\mathcal{H}}^k$ (et plus particulièrement des grandes valeurs initiales) on atteint $w_0 + \bar{\mathcal{H}}^{k+1} + A$ où A sont des termes supplémentaires dans $\bar{\mathcal{H}}^k$ donc on peut guider le système vers $w_0 + \bar{\mathcal{H}}^{k+1}$ moyennant une étape supplémentaire. Ainsi prouve t-on que si $\bar{\mathcal{H}}$ est saturant dans $\bar{V}^1$, alors le système est approximativement contrôlable dans $\bar{V}^1$. L'expansion de l'espace atteignable se fait dans l'équation hydrodynamique via le terme bilinéaire ; cette expansion de l'espace des champs cinématique atteignable permet ensuite d'étendre l'espace des températures.

Comme ensemble saturant, on choisit un nombre fini des premiers vecteurs de la base trigonométrique de $\bar{V}^0$. Il serait physiquement plus vraisemblable de borner le contrôle à l'apport de chaleur et donc de choisir la famille de contrôle dans $V^5_\dagger$ cependant dans ce cas on n'obtient la contrôlabilité du système que dans $\bar{V}^0$.

3.2 Mélange dans le cas d'un bruit dégénéré

Dans la suite de cette partie on s'attachera à établir le caractère mélangeant du système (3.3). Pour ce faire, on introduira un nouveau théorème de mélange, issu de [24], et un résultat de contrôlabilité pour la linéarisée des équations primitives. Pour plus de simplicité, on commencera par exposer ce résultat pour le cas des équations primitives simplifiées (1.12) avant d'en donner la formulation pour l'équation complète. Cela permettra dans un troisième temps de détailler la preuve de la contrôlabilité de la linéarisée des équations primitives simplifiées, preuve qu'on n'apportera pas pour le système complet, mais pour laquelle on se réfèrera à [33].

On s'intéresse donc, tout d'abord, à la propriété de mélange du système (2.3), engendré par (1.12) et qu'on réécrit ici :

$$u_{k+1} = S(u_k, \tilde{\eta}_k), k \geq 0, \tag{3.3}$$

où, à l'instar de (2.3), $u_0 \in H$ et où les $(\eta_k)_k$ ne sont exprimés que sur quelques modes de Fourier seulement. Ce résultat étant intimement lié à la contrôlabilité du problème linéarisé issu des équations primitives, la forme exacte du bruit dégénéré pour lequel notre système est mélangeant se définit en fonction du problème linéarisé. Introduisons donc la notion d'ensemble saturant pour le problème linéarisé : soit $\mathcal{G} \subset V^5$ un espace fixé, on considère la suite des espaces $\mathcal{G}^k$ telle que

$$\mathcal{G}^0 = \mathcal{G}$$

$$\mathcal{G}^{k+1} = \{\eta' : \eta' := \eta + \sum_{j=1}^{n} B(\zeta_j, \xi_j), \eta, \zeta_j \in \mathcal{G}, \xi_j \in \mathcal{G}^k\}$$

On a alors une définition de la saturation pour le problème linéarisé similaire à celle pour les équations primitives :

Définition 6. *On dit que $\mathcal{G}$ est saturant dans V^m si*

$$\overline{\cup_{k=0}^{\infty} \mathcal{G}_k}^{V^m} = V^m.$$

On considère dans la suite un bruit exprimé sur l'ensemble saturant $\mathcal{G}$ et vérifiant la propriété suivante qu'on baptise observabilité :

Définition 7. *Soit $0 < T < 1$. On dit d'une fonction $\zeta \in L^2([0,T], \mathcal{G})$ qu'elle est observable par rapport à la base $(e_i)_i$ si pour toutes $\alpha_i : [0,T] \to \mathbb{R}$ lipschitziennes et $\beta : [0,T] \to \mathbb{R}$ telles que*

$$\sum_i ||\alpha_i||^2_{C([0,T])} < \infty,$$

l'égalité

$$\sum_i \alpha_i(t)\langle \zeta(t), e_i\rangle - \beta(t) = 0 \quad \text{dans } L^1([0,T]),$$

implique que les α_i et β s'annulent sur $[0,T]$. On dit qu'une mesure $l \in \mathbb{P}(L^2([0,T], \mathcal{G}))$ est observable si l-presque toute trajectoire est observable.

Exposons maintenant le résultat principal de cette section :

Théorème 14. *Soit $\mathcal{G}$ un espace saturant dans V^0 et soit une famille de $\eta_k \in L^\infty([0,1], \mathcal{G})$ telle que*

— *il existe une base orthonormée $(\sigma_j)_{j\geq 1}$ de $L^2([0,1], \mathcal{G})$, avec $\sigma_j \in L^\infty([0,1], \mathcal{G})$ et*

$$\sup_{j\geq 1} ||\sigma_j||_{L^\infty([0,1],\mathcal{G})} < \infty,$$

telle que les variables aléatoires η_k puissent s'écrire de la manière suivante

$$\eta_k := \sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{b}_j \xi_{j,k} \sigma_j, \quad \mathfrak{b}_j \neq 0, \quad \sum \mathfrak{b}_j^2 < \infty.$$

Ici les $\xi_{j,k}$ sont des variables aléatoires i.i.d avec des lois de densité $\rho(r)dr$, où ρ est une fonction Lipschitzienne non nulle en zéro et de support compris dans $[-1,1]$,

— *il existe $0 < T < 1$ tel que sur $[0,T]$, $l = \mathcal{D}(\eta_k)$ soit observable.*

Alors le système (3.3) est mélangeant.

Pour démontrer la propriété de mélange on utilise le théorème suivant qu'on reprend dans [33] (cf aussi [24]). Comme la formulation de ce théorème est semblable à celle du

théorème 6, on en reprend les notations : en particulier, les définitions des ensembles $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_{2\epsilon}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_{2\epsilon}$ et X ainsi que celle du système générique

$$u_{k+1} = \tilde{S}(u_k, \eta_k), \quad k \geq 0, \tag{3.4}$$

sont telles que définies à la section 2.4.

Théorème 15. *On émet pour le système* (3.4) *les hypothèses suivantes :*

— ***Régularité :*** $\tilde{S} : \mathcal{O}_{2\epsilon} \times \mathcal{K}_{2\epsilon} \to V$ *est deux fois continuement différentiable et ses dérivées jusqu'au second ordre sont bornées. De plus* $\eta \to \tilde{S}(u_0, \eta)$ *est analytique pour tout* $u_0 \in \mathcal{O}_{2\epsilon}$*, et toutes ses dérivées* $D_\eta^j \tilde{S}$ *sont continues et bornées.*

— ***Décomposabilité du bruit :*** *il existe une base orthonormée* $(\sigma_j)_{j\geq 1}$ *de* $L^2([0,1], \mathcal{G})$*, avec* $\sigma_j \in L^\infty([0,1], \mathcal{G})$ *et*

$$\sup_{j\geq 1} ||\sigma_j||_{L^\infty([0,1],\mathcal{G})} < \infty,$$

telle que les variables aléatoires η_k *puissent s'écrire de la manière suivante*

$$\eta_k := \sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{b}_j \xi_{j,k} \sigma_j, \quad \mathfrak{b}_j \neq 0, \quad \sum \mathfrak{b}_j^2 < \infty.$$

Ici les $\xi_{j,k}$ *sont des variables aléatoires i.i.d avec des lois de densité* $\rho(r)dr$*, où* ρ *est une fonction Lipschitzienne non nulle en zéro et de support compris dans* $[-1, 1]$.

— ***Dissipativité :*** *il existe* $0 < \bar{\gamma} < 1$ *et* $\hat{u} \in X$ *et* $\eta \in \mathcal{K}$ *tels qu'on ait*

$$||\tilde{S}(u, \eta) - \hat{u}||_H \leq \bar{\gamma} ||u - \hat{u}||_H, \quad \forall u \in X.$$

— ***Non-dégénérescence :*** *Si on baptise, pour tout* $u \in X$*,* $\mathcal{K}^u$ *l'ensemble des* η_0 *tels que* $D_\eta \tilde{S}(u, \eta_0) : L^2([0,1], \mathcal{G}) \to H$ *ait une image dense dans* H*, alors on a* $l(\mathcal{K}^u) = 1$.

Sous ces hypothèses, le système (3.4) *est exponentiellement mélangeant : il existe une unique mesure* μ *de support inclus dans* $B_H(R^*)$*, pour un* $R^* > 0$ *fixé telles que pour tout* $R > 0$ *et* $u_0 \in B_H(R)$*, on a*

$$||\mathcal{D}(u_k(u_0)) - \mu||_L^* \leq C\kappa^k, \tag{3.5}$$

pour $0 < \kappa(R) < 1$*,* $C = C(R) > 0$*, fixés.*

S'appuyant sur ce résultat on prouve alors le théorème 14 :

Preuve du théorème 14. Pour prouver que le système (3.3) est mélangeant, vérifions les hypothèses du théorème 15 pour $H = V^2$ et $V = V^3$. L'hypothèse d'analycité est validée en vertu du théorème 4 et celle de dissipativité en vertu de la proposition 2. L'hypothèse de décomposabilité du bruit est naturellement vérifiée. La démonstration de la validité

de l'hypothèse de non-dégénérescence dans V^2 du système est apportée à la section 3.4. Elle reprend la preuve de la propriété analogue pour le problème complet, présentée dans [33]. □

3.3 Mélange pour les équations primitives complètes, soumise à un bruit dégénéré

Ayant prouvé que le système issu de l'équation simplifiée (1.12) est mélangeant quand il est soumis à un bruit dégénéré, on affirme maintenant que ces résultats restent valables pour le système correspondant aux équations primitives complètes (2.44), (2.49). On rappelle la forme que prend ce dernier : en reprenant la notation issue de (2.54) :

$$\overline{Sol} : (w_0, (f, Q)) \mapsto w \quad \text{solution de } (2.44), (2.50), \tag{3.6}$$

on considère (cf (2.56))

$$w_{k+1} = \overline{S}(w_k, \overline{\eta}_k) := \overline{Sol}(w_k, \overline{\eta}_k)(1). \tag{3.7}$$

Dans ce contexte on prolonge les définitions d'ensemble saturant pour le linéarisé du problème complet :

Soit $\overline{\mathcal{G}} \subset V^5_\dagger$ un espace fixé, on considère la suite des espaces $\overline{\mathcal{G}}^k$ telle que

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathcal{G}}^0 = \overline{\mathcal{G}} \\
&\overline{\mathcal{G}}^{k+1} = \{\eta' : \eta' := \eta + \sum_{j=1}^{n} W(0, \eta_j) + \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{B}\left((\zeta_j, \zeta_{j,\dagger}) + W(0, \zeta_{j,\dagger}), \xi_j\right), \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \eta_j \in \mathcal{G}^k_\dagger(\zeta_j, \zeta_{j,\dagger}) \in \overline{\mathcal{G}}, \xi_j \in \overline{\mathcal{G}}^k\}.
\end{aligned}$$

On a alors une définition de la saturation pour le problème linéarisé similaire à celle pour les équations primitives :

Définition 8. *On dit que $\overline{\mathcal{G}}$ est saturant dans $\bar{V}^m$ si*

$$\overline{\cup_{k=0}^{\infty} \mathcal{G}_k}^{\bar{V}^m} = \bar{V}^m.$$

Alors, le processus associé aux équations primitives complètes soumises à un bruit dégénéré est mélangeant :

Théorème 16. *Soit $\overline{\mathcal{G}}$ un espace saturant dans $\bar{V}^0$ et soit une famille de $\eta_k \in L^\infty([0,1], \overline{\mathcal{G}})$ telle que*

— *il existe une base orthonormée* $(\sigma_j)_{j\geq 1}$ *de* $L^2([0,1],\overline{\mathcal{G}})$*, avec* $\sigma_j \in L^\infty([0,1],\overline{\mathcal{G}})$ *et*

$$\sup_{j\geq 1} ||\sigma_j||_{L^\infty([0,1],\overline{\mathcal{G}})} < \infty,$$

telle que les variables aléatoires η_k *puissent s'écrire de la manière suivante*

$$\eta_k := \sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{b}_j \xi_{j,k} \sigma_j, \quad \mathfrak{b}_j \neq 0, \quad \sum \mathfrak{b}_j^2 < \infty.$$

Ici les $\xi_{j,k}$ *sont des variables aléatoires i.i.d avec des lois de densité* $\rho(r)dr$*, où* ρ *est une fonction Lipschitzienne non nulle en zéro et de support compris dans* $[-1,1]$*,*

— *il existe* $0 < T < 1$ *tel que sur* $[0,T]$*,* $l = \mathcal{D}(\eta_k)$ *soit observable.*

Alors le système (3.7) *est mélangeant.*

Donnons maintenant un exemple de bruit dégénéré observable et exprimé sur un ensemble saturant.

On considère donc un bruit rouge s'exprimant sur les vecteurs $(0,\phi_i)$ pour $1 \leq i \leq 10$ où les ϕ_i sont définis par :

$$\begin{aligned} \phi_1 &:= \cos x \sin z, & \phi_6 &:= \cos 2x \sin z, \\ \phi_2 &:= \sin x \sin z, & \phi_7 &:= \sin 2x \sin z, \\ \phi_3 &:= \cos y \sin z, & \phi_8 &:= \cos 2y \sin z, \\ \phi_4 &:= \sin y \sin z, & \phi_9 &:= \sin 2y \sin z, \\ \phi_5 &:= \sin z, & \phi_{10} &:= \sin 2z. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ce dernier est observable (cf [24]), et supporté par un ensemble saturant (cf [33]) on peut donc établir un résultat de mélange pour le système (3.7) engendré par les équations primitives complètes :

Théorème 17. *Le processus résultant engendré par un bruit rouge supporté par les vecteurs* (3.8) *via* (3.7) *est mélangeant.*

Concluons maintenant cette partie par la preuve de l'argument de contrôlabilité pour notre système simplifié.

3.4 Validation de l'hypothèse de non-dégénérescence dans V^2 pour le système simplifié

Ici, on reprend la démonstration présentée dans [33]. Commençons par établir le résultat de contrôlabilité suivant :

Proposition 10. *Soient $\mathcal{G}$ un espace saturant dans V^0, $T > 0$ et $l \in \mathbf{P}(L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathcal{G}))$ observable sur $[0, T]$. Alors pour l-presque tout η, $D_\eta S(u_0, \eta)\mathcal{G}$ est dense dans V^2 pour tout $u_0 \in V^2$.*

On cherche donc à obtenir la densité des $D_\eta S(u_0, \eta)h$ dans V^2 pour h à valeurs dans $\mathcal{G}$. Pour mener ce faire, appliquons le principe de Duhamel pour un système commençant à l'instant T :

$$D_\eta S(u_0, \eta)h = \int_T^1 \mathfrak{S}_t^1 \left(h(t) + D_\eta^T S(u_0, \eta)h|_{\tau \leq T}\right) dt \tag{3.9}$$

où $\mathfrak{S}_{t_1}^{t_2} w$ est (cf la section 1.4.2) la valeur à t_2 de la solution de

$$d\mathcal{L}^2(u)v = 0,$$

avec pour condition initiale $v(t_1) = w$, et où $D_\eta^T S(u_0, \eta)$ est de manière similaire à $D_\eta S(u_0, \eta)h$, la valeur à l'instant T de la solution v de

$$d\mathcal{L}(Sol(u_0, \eta))v = (0, h).$$

La démonstration se fait en deux mouvements : tout d'abord la preuve de la densité de $D_\eta^T S(u_0, \eta)h|_{\tau \leq T}$ dans V^0 via un résultat de contrôlabilité pour le système linéarisé, puis l'utilisation des propriétés régularisantes de notre système pour établir cette densité dans V^2 via un lemme de continuité. Enfin pour obtenir notre résultat sur $D_\eta S(u_0, \eta)$ on utilise un dernier lemme technique et (3.9). Commençons par un résultat essentiel de contrôlabilité du système linéarisé.

Lemme 26. *Soient $T > 0$ et $l \in \mathbf{P}(L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathcal{G}))$ observable sur $[0, T]$. Alors pour l presque tout η, si $w_1 \in V^0$ dans l'orthogonal pour V^0 de l'image par $D_\eta^T S(u_0, \eta)$ de $L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathcal{G}_k)$, w_1 est aussi dans l'orthogonal pour V^0 de l'image par $D_\eta^T S(u_0, \eta)$ de $L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathcal{G}_{k+1})$.*

Démonstration. Appliquons de nouveau le principe de Duhamel, cette fois ci à $D_\eta^T S(u_0, \eta)$:

$$\langle D_\eta^T S(u_0, \eta)h, w_1\rangle = \int_0^T \langle h(t), \bar{\mathfrak{S}}_1^t w_1\rangle dt.$$

Dès lors, si

$$\langle D_\eta^T S(u_0, \eta)h, w_1\rangle = 0, \quad \forall h \in L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathcal{G}_k),$$

on a,

$$\int_0^T \langle \mathfrak{h}, P_k \bar{\mathfrak{S}}_T^t w_1\rangle_{V^0} dt = 0, \quad \forall \mathfrak{h} \in V^0$$

où P_k est le projecteur sur l'espace $\mathcal{G}_k$. Ainsi, en prenant $h := P_k \bar{\mathfrak{S}}_1^t w_1$ on obtient

$$\int_0^T ||P_k \bar{\mathfrak{S}}_T^t w_1||_{V^0}^2 dt = 0,$$

i.e

$$||P_k\bar{\mathfrak{S}}_1^t w_1||_{V^0}^2 = 0, \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

Aussi a t-on

$$\langle h(t), P_k\bar{\mathfrak{S}}_T^t w_1\rangle = 0, \quad \forall h \in L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathcal{G}_k), \quad \forall 0 \leq t \leq T,$$

d'où en particulier pour les constantes

$$\langle \mathfrak{h}, P_k\bar{\mathfrak{S}}_T^t w_1\rangle = 0, \quad \forall \mathfrak{h} \in \mathcal{G}_k, \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

En dérivant cette relation en temps, on obtient

$$\langle \Delta\mathfrak{h} + B(Sol(u_0,\eta)(t), \mathfrak{h}) + B(\mathfrak{h}, Sol(u_0,\eta)(t), w(t)\rangle = 0, \quad \forall \mathfrak{h} \in \mathcal{G}_k, \quad \forall 0 \leq t \leq T,$$

où $w(t) = \bar{\mathfrak{S}}_T^t w_1$. On introduit maintenant $y(t) = Sol(u_0,\eta)(t) - \int_0^t \eta(s)ds$; on a alors

$$\langle \Delta\mathfrak{h} + B(y(t), \mathfrak{h}) + B(\mathfrak{h}, y(t)), w(t)\rangle + \sum_i \langle B(e_i, \mathfrak{h}) + B(\mathfrak{h}, e_i), w(t)\rangle \int_0^t \eta_i(s)ds = 0,$$
$$\forall \mathfrak{h} \in \mathcal{G}_k \quad \forall 0 \leq t \leq T,$$

où les η_i sont les coordonnées de η sur la base $(e_i)_i$. Ici on constate de nouveau que c'est le terme bilinéaire, appliqué à η et $\mathfrak{h}$ qui permet d'agrandir l'espace auquel $w(t)$ est orthogonal. En effet, en dérivant de nouveau cette relation par rapport au temps et en posant

$$\begin{aligned}
\alpha_i(t) &= \langle B(e_i, \mathfrak{h}) + B(\mathfrak{h}, e_i), w(t)\rangle \\
\beta(t) &= \frac{d}{dt}\big(\langle \Delta\mathfrak{h} + B(y(t), \mathfrak{h}) + B(\mathfrak{h}, y(t)), w(t)\rangle\big) \\
&+ \sum_i \langle B(e_i, \mathfrak{h}) + B(\mathfrak{h}, e_i), \frac{dw(t)}{dt}\rangle \int_0^t \eta_i(s)ds
\end{aligned}$$

on obtient

$$\beta(t) + \sum_i \alpha_i(t)\eta_i(t) = 0, \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

β est continue et les α_i sont dérivables donc en vertu de l'observabilité de la loi de η,

$$\langle B(e_i, \mathfrak{h}) + B(\mathfrak{h}, e_i), w(t)\rangle = 0, \quad \forall \mathfrak{h} \in \mathcal{G}_k \quad \forall 0 \leq t \leq T,$$

i.e w est dans l'orthogonal de $\mathcal{G}_{k+1}$ □

La conséquence directe de ce lemme et de la saturation de $\mathcal{G}$ est le corollaire 7.

Corollaire 7. *Soient $\mathcal{G}$ un espace saturant dans V^0, $T > 0$ et $l \in \mathbf{P}(L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathcal{G}))$ observable sur $[0, T]$. Pour l presque tout η, $D_\eta^T S(u_0,\eta)\mathcal{G}$ est dense dans V^0.*

On écrit maintenant une propriété de régularisation qui permettra d'établir notre résultat de densité dans V^2.

Lemme 27. *Pour tout* $0 < T < 1$ *et* $u \in U_2$*, l'opérateur* $\mathfrak{h} \to \int_T^1 \mathfrak{S}_t^1 \mathfrak{h} dt$ *est continu de* V^0 *dans* V^2*.*

Démonstration. Sans perdre de généralité on peut se contenter de prouver ce résultat en remplaçant $\mathfrak{S}_t^1$ par $\mathfrak{S}_0^{1-t}$. Si $\mathfrak{h} \in V^0$ alors,

$$\tilde{v} := d\mathcal{L}^{-1}(u)(0, \mathfrak{h}) \in U_1 \subset E_1,$$

en vertu du lemme 13. Par ailleurs si on considère $\hat{v}(s) := \left(\frac{s}{1-t}\right) \tilde{v}(s)$, on a que

$$\hat{v} = d\mathcal{L}^{-1}(u)(0, \tilde{v})$$

et $\hat{v}(1) = \mathfrak{S}_0^{1-t}\mathfrak{h}$. On applique alors de nouveau le lemme 13, $\hat{v} \in U_2$ donc $\mathfrak{S}_0^{1-t}\mathfrak{h}$ est dans V^2. L'analycité de $d\mathcal{L}$ confère à $\mathfrak{S}_0^{1-t}$ la sienne et donc sa continuité de V_0 vers V_2. Par intégration sur $[T, 1]$, on a notre résultat. □

Maintenant, on s'intéresse à l'opérateur

$$V^2 \mapsto V^2, \quad \mathfrak{h} \to \int_T^1 \mathfrak{S}_t^1 \mathfrak{h} dt,$$

qui est donc la valeur calculée à l'instant $1 - T$ de $d\mathcal{L}^{-1}(u)(\mathfrak{h}, 0)$. On affirme [1] la contrôlabilité par la condition initiale des solutions du système $d\mathcal{L}(u)v = (\mathfrak{h}, 0)$: i.e

Lemme 28. *L'image de* V^2 *par*

$$V^2 \mapsto V^2, \quad \mathfrak{h} \to \int_T^1 \mathfrak{S}_t^1 \mathfrak{h} dt$$

est dense dans V^2

On peut maintenant appliquer la formule de Duhamel :

Preuve de la proposition 10. On a

$$\overline{D_\eta S(u_0, \eta) L^\infty(\mathcal{G})}^{V^2} = \overline{\left\{ \int_T^1 \mathfrak{S}_t^1 \left(h(t) + D_\eta^T S(u_0, \eta) h|_{\tau \leq T} \right) dt, \quad h \in L^\infty(\mathcal{G}) \right\}}^{V^2}$$

1. Ce résultat étant similaire à celui qu'on trouve dans la section 7.2 de [24], on ne le prouve pas ici.

or en vertu du lemme 27,

$$\overline{\left\{\int_T^1 \mathfrak{S}_t^1 \left(h(t) + D_\eta^T S(u_0,\eta)h|_{\tau\leq T}\right) dt, \quad h \in L^\infty(\mathcal{G})\right\}}^{V^2}$$
$$= \left\{\int_T^1 \mathfrak{S}_t^1 \overline{\left(h(t) + D_\eta^T S(u_0,\eta)h|_{\tau\leq T}\right)}^{V^0} dt, \quad h \in L^\infty(\mathcal{G})\right\}.$$

De plus le corollaire 7 implique (quitte à considérer $h|_{t\geq T}$ constant) que

$$\left\{\int_T^1 \mathfrak{S}_t^1 \overline{\left(h(t) + D_\eta^T S(u_0,\eta)h|_{\tau\leq T}\right)}^{V^0} dt, \quad h \in L^\infty(\mathcal{G})\right\} \supset \int_T^1 \mathfrak{S}_t^1 V^2 dt.$$

Dès lors, comme en vertu du lemme 28, $\int_T^1 \mathfrak{S}_t^1 V^2 dt$ est dense dans V^2, on a

$$\overline{D_\eta S(u_0,\eta) L^\infty(\mathcal{G})}^{V^2} = V^2.$$

□

Annexe A

Résultats techniques

A.1 Lemmes de Gronwall

Pour les résultats suivants on s'en remet à [5].

Lemme 29. *Soient g, h et y des fonctions positives localement intégrables sur $[t_0, \infty[$ telles que*

$$\frac{dy}{dt} \leq gy + h$$

et

$$\int_t^{t+1} g(s)ds \leq a_1, \quad \int_t^{t+1} h(s)ds \leq a_2, \quad \int_t^{t+1} y(s)ds \leq a_3,$$

pour tout $t \geq t_0$ avec les $a_i > 0$ constants.Alors

$$y(t+1) \leq (a_3 + a_2)e^{a_1}, \quad \forall t \geq t_0.$$

On y ajoute un corollaire immédiat utile pour nous dans la suite

Corollaire 8. *Si, dans les circonstances précédemment énoncées, il existe f positive localement intégrable sur $[t_0, \infty[$ telle que y vérifie*

$$\frac{dy}{dt} + f \leq gy + h,$$

alors

$$y(t+1) \leq (a_3 + a_2)e^{a_1}, \quad \forall t \geq t_0,$$

et

$$\int_t^{t+1} f(s)ds \leq (a_1 + 1)(a_3 + a_2)e^{a_1} + a_2, \quad \forall t \geq t_0 + 1.$$

A.2 Théorème d'inversion locale uniforme

On commence cette section par un résultat auxiliaire concernant l'inversion des fonctions de la forme $Id + \Psi$ où Ψ est contractante.

Lemme 30. *Soit E un espace de Banach complexe et U un sous-ensemble borné de E. Soient $0 < k < 1$ et $\Psi := Id + \Phi : B_E(x_0, \rho) \mapsto E$ analytique, telle que Φ soit k-lipschitzienne. Alors Ψ admet un unique inverse $\Psi^{-1} : B_E(\Psi(x_0), (1-k)\rho) \mapsto B_E(x_0, \rho)$ et de plus Ψ^{-1} est analytique et $1/(1-k)$-lipschitzienne.*

Démonstration. Tout d'abord établissons que $B_E(\Psi(x_0), (1-k)\rho)$ est bien dans l'image de Ψ. Pour tout x et x' dans $B_E(x_0, \rho)$, on a

$$||\Psi(x) - \Psi(x')||_E \geq ||x - x'||_E - ||\Phi(x) - \Phi(x')||_E \geq (1-k)||x - x'||_E \tag{A.1}$$

d'où le résultat. Construisons maintenant l'inverse de Ψ sur $B_E(\Psi(x_0), (1-k)\rho)$ en employant la méthode parente de la méthode des approximations successives de Picard. En effet, du fait de la forme particulière de Ψ, résoudre $\Psi x = y$ pour tout y c'est trouver un point fixe à $x \to y - \Phi(x)$ pour chaque y. Ainsi, soit $y \in B_E(\Psi(x_0), (1-k)\rho)$ quelconque. On considère la suite $(\theta_n) \in (E \mapsto E)^{\mathbb{N}}$ définie ainsi

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= Id - \Phi \circ \theta_n = Id + \theta_n - \Psi \circ \theta_n \\ \theta_0 &= x_0. \end{aligned}$$

On pose

$$|||f||| := \sup_{y \in B_E(\Psi(x_0), (1-k)\rho)} ||f(y)||_E.$$

Tout d'abord, démontrons pas récurrence que les θ_n sont bien définies sur $B_E(\Psi(x_0), (1-k)\rho)$ et vérifient

$$|||\theta_{n+1} - \theta_n||| = \sup_{B_E(\Psi(x_0), (1-k)\rho)} ||\theta_{n+1}(y) - \theta_n(y)||_E \leq k^n(1-k)\rho. \tag{A.2}$$

Tout d'abord $\theta_1 := y \to x_0 + y - \Psi(x_0)$ est clairement défini sur $B_E(\Psi(x_0), (1-k)\rho)$ et

$$||\theta_1 y - \theta_0 y||_E = ||y - \Psi(x_0)||_E \leq (1-k)\rho \quad \forall y \in B_E(\Psi(x_0), (1-k)\rho).$$

Supposons maintenant que pour tout $N \geq 1$ et tout $n \leq N$ la propriété soit vraie. Alors

$$|||\theta_N - x_0||| \leq \sum_{n=1}^{N} |||\theta_n - \theta_{n-1}||| \leq \rho(1-k) \sum_{n=1}^{N} k^{n-1} = \rho. \tag{A.3}$$

Dès lors comme Φ est défini sur $B_E(x_0, \rho)$, $\Psi \circ \theta_N$ est bien défini sur $B_E(\Psi(x_0), (1-k)\rho)$

et il en va de même pour θ_{N+1}. Par ailleurs,

$$|||\theta_{N+1} - \theta_N||| \leq |||\Psi \circ \theta_N - \Psi \circ \theta_{N-1} - (\theta_N - \theta_{N-1})||| \leq k|||\theta_N - \theta_{N-1}||| \leq k^N(1-k)\rho,$$

d'où l'hérédité de la propriété. Par récurrence, on obtient notre résultat.

Démontrons maintenant que la suite (θ_n) converge dans $(B_E(\Psi(x_0),(1-k)\rho) \mapsto E, |||\cdot|||_E)$. En vertu de (A.2) la série des $(\theta_{n+1}-\theta_n)$ est convergente on a que (θ_n) est une suite de Cauchy donc converge vers θ dans $(B_E(\Psi(x_0),(1-k)\rho) \mapsto E, |||\cdot|||_E)$. Alors par définition $\Psi \circ \theta = Id$ sur $(B_E(\Psi(x_0),(1-k)\rho) \mapsto E, |||\cdot|||_E)$ ainsi a t-on construit un inverse local de Ψ. Celui-ci est unique en vertu de (A.1). Aussi $\Psi^{-1} : B_E(\Psi(x_0),(1-k)\rho) \mapsto B_E(x_0,\rho)$ est-il bien défini. De plus

$$||y - y'||_E = ||\Psi \circ \Psi^{-1}(y) - \Psi \circ \Psi^{-1}(y')||_E \geq (1-k)||\Psi^{-1}(y) - \Psi^{-1}(y')||_E,$$

d'où la lipschitzianité de Ψ^{-1} et donc le fait que Ψ soit un homéomorphisme entre $B_E(\Psi(x_0),(1-k)\rho)$ et $B_E(x_0,\rho)$.

Maintenant on constate que Φ étant analytique les θ_n le sont également en vertu de leur construction. Ainsi en vertu du théorème A.2 dans [35] a t-on que Ψ^{-1} est analytique. □

Armés de ce résultat on peut maintenant prouver une variante du théorème d'inversion locale où la taille des domaines sur lesquels les inverses locaux sont construits est uniforme. On reprend ici les considérations de [35] (on peut également se référer à [4]).

Théorème 18 (Théorème d'inversion locale uniforme)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach complexes et U un voisinnage ouvert de E. Soit $r > 0$ et*

$$f : U \mapsto F,$$

une injection analytique. Soit $Z \subset F$ tel que $Z \subset f(U)$ et

a) *: $G_r := f^{-1}(Z) + B_E(r) \subset U$.*

Supposons de plus que :

— ***b)*** *: $||df(x)||_{E\mapsto F} \leq K_1, \quad \forall x \in G_r$,*

— ***c)*** *: $||d^2f(x)||_{E\times E\mapsto F} \leq K_2, \quad \forall x \in G_r$ and*

— ***d)*** *: $\forall x \in f^{-1}(Z)$, $||(df(x))^{-1}||_{F\mapsto E} \leq K_3$.*

Alors $\exists \rho = \rho(K_1,K_2,K_3,r)$ et $\exists L = L(K_1,K_2,K_3,r)$ tels que sur l'ensemble $Z_\rho = Z + B_F(\rho)$ l'application inverse $f^{-1} : Z_\rho \mapsto U$ soit bien définie et analytique. De plus $||df^{-1}(z)||_{F\mapsto E} \leq L$, $\forall z \in Z_\rho$.

L'affirmation reste vraie pour E et F deux espaces de Hilbert réels, avec l'application f analytique réelle et G_r un r-voisinnage de $f^{-1}(Z)$ dans la complexification de l'espace de Hilbert E.

Démonstration. Pour $x_0 \in f^{-1}(Z)$ quelconque, posons

$$\Psi_{x_0} := (df(x_0))^{-1} \circ f, \quad \text{et } \Phi_{x_0} := \Psi_{x_0} - Id, \quad \text{sur } E.$$

Alors pour tout $x' \in B_E(x_0, r)$, on a

$$d\Phi_{x_0}(x') : E \mapsto E, \quad h \to (df(x_0))^{-1} df(x')h - h,$$

et

$$d^2\Phi_{x_0}(x') : E \times E \mapsto E, \quad h \to (df(x_0))^{-1} d^2 f(x')(h,k) - k.$$

Ainsi donc

$$||d^2\Phi_{x_0}(x')||_{E\times E \mapsto E} \leq ||(df(x_0))^{-1}||_{F\mapsto E} ||d^2 f(x')||_{E\times E\mapsto F} + 1 \leq K_2 K_3 + 1,$$
$$\forall x_0 \in f^{-1}(Z), x' \in B_E(x_0, r).$$

Dès lors, comme $d\Phi_{x_0}(x_0) = 0$, en vertu de l'inégalité des accroissements finis, on a

$$||d\Phi_{x_0}(x')||_{E\mapsto E} = ||d\Phi_{x_0}(x') - d\Phi_{x_0}(x_0)||_{E\mapsto E} \leq R||d^2\Phi_{x_0}(x')||_{E\times E\mapsto F}$$
$$\leq K_2 K_3 R, \quad \forall x' \in B_E(x_0, R), \quad \forall R \leq r, \quad \forall x_0 \in f^{-1}(Z).$$

On peut donc choisir $k < 1$ et déterminer $\rho \leq r$ tels que

$$||d\Phi_{x_0}(x')||_{E\mapsto E} \leq k, \quad \forall x' \in B_E(x_0, \rho), \quad \forall x_0 \in U.$$

i.e tous les Φ_{x_0} sont k-lipschitziens, donc contractants, sur tous les $B_E(x_0, \rho)$ pour tout $x_0 \in f^{-1}(Z)$. Dès lors, en appliquant le lemme 30 à Φ_{x_0}, on construit son inverse analytique $\Psi_{x_0}^{-1} : B_E(\Psi_{x_0}(x_0), (1-k)\rho) \mapsto B_E(x_0, \rho)$.

Ainsi, $Id + \Phi_{x_0} : B_E(x_0, \rho) \mapsto B_F(w, \rho')$, pour $\rho' = K\rho$ est un difféomorphisme analytique entre ces deux ensembles pour tout $x_0 \in f^{-1}(Z)$. Dès lors, $f = df(x_0) \circ \Phi_u$, définit un difféomorphisme analytique entre $B_E(x_0, \rho)$ et $B_F(f(x_0), (1-k)\rho)$pour tout $x_0 \in f^{-1}(Z)$.

Prouvons maintenant que f^{-1} peut être construit globalement de manière univoque sur Z_ρ quand ses composants sur les $B_F(z, \rho)$ pour tout $z \in Z$ sont tous bien définis. Pour ce faire il nous suffit de remarquer que f étant injective, si deux boules $B_F(z, \rho)$ ont une intersection non vide, alors les f^{-1} locaux correspondants doivent coïncider sur cette intersection, car f est injective. Ainsi f is définie univoquement sur la réunion Z_ρ de tous les $B_F(z, \rho)$ avec $z \in Z$.

Cas analytique réel :

Considérons le cas où E et F sont des espaces de Banach réels et f est analytique réelle. Posons $\tilde{f}$ le prolongement analytique de f sur un voisinnage complexe de U. Alors pour tout $x_0 \in f^{-1}(Z)$, $\tilde{f}$ admet un inverse analytique $\tilde{f}^{-1}$ de $\tilde{B}_F(f(x_0), (1-k)\rho)$ dans $\tilde{B}_E(x_0, \rho)$

les voisinnages complexes de $B_F(f(x_0),(1-k)\rho)$ et $B_E(x_0,\rho)$ respectivement. De plus en reprennant le raisonnement ci-dessus, on peut établir que f est un homéomorphisme entre $B_E(x_0,\rho)$ et $B_F(f(x_0),(1-k)\rho)$. Par identification f^{-1} a pour prolongement analytique $\tilde{f}^{-1}$ donc est analytique réelle.

$\square$

Annexe B

Le mélange via les plans de transport

Ici on réinterprète en partie la preuve du théorème de mélange 7 au travers des plans de transport [1]. Dans toute la suite, on reprend le raisonnement des sections 2.7.2 et 2.7.3 en supposant prouvée la première moitié du lemme 22 jusqu'à (2.16) précisémment.

En partant de deux états initiaux déterministes donnés, on étudie la distance, après une itération du processus, entre les mesures résultant. Dans ce cas là ces deux distributions se décrivent à partir de mesures portant sur les forces aléatoires, et de ce fait la preuve de leur rapprochement passe par l'étude des plans de transports sur les forces aléatoires.

B.1 Plan de transports sur les forces aléatoires

On considère ici $u, u' \in \mathcal{K}$ fixés. Pour simplifier la compréhension des constructions des plans de transport sur les contrôles, on baptise ici les variables muettes correspondant aux évènements sur lesquels s'appliquent nos différentes mesures.

$$\begin{cases} x_1 \text{ est un évènement portant sur la force appliquée au processus itéré en} \\ \qquad u \text{ de loi } l, \\ x_2 \text{ est un évènement portant sur la force contrôlée qui serait appliquée} \\ \qquad \text{au processus itéré en } u' \text{ de loi } l', \\ x_3 \text{ est un évènement portant sur la force contrôlée, appliquée} \\ \qquad \text{au processus itéré en } u' \text{ et réarrangée de sorte à être de loi } l. \end{cases}$$

On cherche alors pour u et u' fixés et pour tout évènement x_1 à trouver un évènement x_3 correspondant à la force aléatoire appliquée au système partant de u' de loi l pour lequel on aurait un rapprochement de $\tilde{S}(u, x_1)$ avec $\tilde{S}(u', x_3)$. Ce faisant on aura construit un plan de transport entre l et l.

1. On utilise ici les notions de transport de mesures telles qu'expliquées dans [37]

Tout d'abord, le lemme 22 engendre naturellement un plan de transport déterministe entre la loi l portant sur les évènements x_1 et l' portant sur x_2. Si cette construction fait, autant que possible, coïncider les trajectoires, l' ne correspond pas à la loi de nos forces aléatoires.

Pour y remédier on essaie de trouver une correpondance entre l et l' qui maximise les coïncidences entre les deux et donc construire un plan de transport amélioré entre les deux.

Le lemme qui suit sert à construire un tel plan de transport dans le cas général d'une mesure quelconque et de sa transformée par une application de la forme $Id + \mathbf{\Phi}$ où $\mathbf{\Phi}$ est contractante.

Lemme 31. *Soit*

$$\mathbf{\Psi} : \mathcal{K} \mapsto E, \quad \mathbf{\Psi} := Id + \mathbf{\Phi},$$

où $\mathbf{\Phi}$: est une application contractante. On note k le maximum du coefficient de Lipschitz et de la norme de $\mathbf{\Phi}$.

Soient $l \in \mathbf{P}(E)$ de support $\mathcal{K}$, de densité par rapport à la mesure de Lebesgue ρ, fonction lipschitzienne de coefficient $\bar{k}$. Soit de plus $l' \in \mathbf{P}(E)$ telle que $l' = \mathbf{\Psi}^* l$. Alors il existe pour tout $\epsilon > 0$, $\Pi_{b,M_\epsilon} \in \mathbf{P}(E \times E)$, de marginales l et l' telle que

$$\Pi_{b,M_\epsilon}(d\zeta, d\zeta) \geq 1 - \epsilon - k\left(\frac{1}{2} + \frac{\bar{k}|\mathcal{K}|}{2(1-k)}\right), \quad \forall \zeta \in E.$$

Démonstration. On construit le plan transport de la manière suivante. Pour chaque partie mesurable de E, on cherche à associer les mesures l et l' dans leur plus grande partie commune. On note de plus ρ_M la densité de l_M. On procède alors au changement de variable associé à $\mathbf{\Psi}_M$ ce qui nous permet d'écrire ρ'_M la densité de l'_M de la manière suivante :

$$\rho'_M(\zeta) = \rho_M(\mathbf{\Psi}_M^{-1}(\zeta)) \left|D\mathbf{\Psi}_M(\mathbf{\Psi}_M^{-1}(\zeta))\right|,$$

où $\left|D\mathbf{\Psi}_M(\mathbf{\Psi}_M^{-1}(\zeta))\right|$ est le Jacobien de $\mathbf{\Psi}_M$. On pose alors $\lambda_M(\zeta) = min(\rho_M(\zeta), \rho'_M(\zeta))$. Alors la densité sur $E \times E$,

$$\pi_M(\zeta, \zeta') := \lambda_M(\zeta)\mathbb{1}_{\zeta=\zeta'} + (\rho(\zeta) - \lambda_M(\zeta))(\rho(\zeta') - \lambda_M(\zeta')),$$

définit un plan de transport $\Pi_{b,M}$ entre l_M et l'_M.

$$\Pi_{b,M}(d\zeta, d\zeta) \geq \int_E \lambda_M(\zeta)d\zeta = \int_E \frac{\rho_M(\zeta) + \rho'_M(\zeta)}{2} d\zeta - \int_E \left|\frac{\rho_M(\zeta) - \rho'_M(\zeta)}{2}\right| d\zeta. \quad \text{(B.1)}$$

On se penche d'abord sur la seconde intégrale :

$$\int_E \left|\frac{\rho_M(\zeta) - \rho'_M(\zeta)}{2}\right| d\zeta = \int_E \left|\frac{\rho_M(\zeta) - \rho_M(\mathbf{\Psi}_M^{-1}(\zeta)) \left|D\mathbf{\Psi}(\mathbf{\Psi}_M^{-1}(\zeta))\right|}{2}\right| d\zeta.$$

Par ailleurs

$$1-k \leq \left|D\mathbf{\Psi_M}(\mathbf{\Psi}_M^{-1}(\zeta))\right| \leq 1+k,$$

ainsi

$$-\rho_M(\mathbf{\Psi}_M^{-1}(\zeta))(1+k) \leq -\rho_M(\mathbf{\Psi}_M^{-1}(w))\left|D\mathbf{\Psi}_M(\mathbf{\Psi}_M^{-1}(\zeta))\right| \leq -\rho_M(\mathbf{\Psi}_M^{-1}(\zeta))(1-k).$$

d'où

$$\left|\frac{\rho_M(\zeta)-\rho_M(\mathbf{\Psi}_M^{-1}(w))\left|D\mathbf{\Psi}_M(\mathbf{\Psi}_M^{-1}(\zeta))\right|}{2}\right| \leq \frac{\left|\rho_M(\zeta)-\rho_M(\mathbf{\Psi}_M^{-1}(\zeta))\right|+k|\rho_M(\mathbf{\Psi}_M^{-1}(\zeta))|}{2}$$

Comme $\mathbf{\Psi}_M^{-1} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-\mathbf{\Phi})_M^n$ on a

$$\left|\rho_M(\zeta)-\rho_M(\mathbf{\Psi}_M^{-1}(\zeta))\right| \leq \bar{k}\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-\mathbf{\Phi})_M^n(\zeta)\right| \leq \frac{\bar{k}k}{1-k}.$$

Dès lors

$$\begin{aligned}
&\int_E \left|\frac{\rho_M(\zeta)-\rho_M(\mathbf{\Psi}_M^{-1}(w))\left|D\mathbf{\Psi}_M(\mathbf{\Psi}_M^{-1}(\zeta))\right|}{2}\right| d\zeta \\
&\qquad \leq \int_E \frac{k|\rho_M(\mathbf{\Psi}_M^{-1}(w))|}{2} + \int_E \frac{\left|\rho_M(\zeta)-\rho_M(\mathbf{\Psi}_M^{-1}(\zeta))\right|}{2} d\zeta \\
&\qquad = \int_E \frac{k|\rho_M(\mathbf{\Psi}_M^{-1}(\zeta))|}{2} + \int_K \frac{\left|\rho_M(\zeta)-\rho_M(\mathbf{\Psi}_M^{-1}(\zeta))\right|}{2} d\zeta \\
&\leq \int_E \frac{k|\rho_M(\mathbf{\Psi}_M^{-1}(\zeta))|}{2} + \int_E \frac{\bar{k}k}{2(1-k)} d\zeta = \frac{k}{2} + \int_{\mathcal{K}} \frac{\bar{k}k}{2(1-k)} d\zeta = \frac{k}{2} + \frac{\bar{k}k|\mathcal{K}|}{2(1-k)}.
\end{aligned}$$

Rajoutons, maintenant que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $M_\epsilon > 0$ tel que pour tout $M \geq M_\epsilon$ on ait :

$$\int_E \frac{\rho_M(\zeta)+\rho'_M(\zeta)}{2} d\zeta \geq 1-\epsilon.$$

En injectant ces deux estimations dans (B.1) on obtient notre résultat.

□

On a donc maintenant un plan de transport Π_a entre les mesures l et l' correspondant à $\mathbf{\Psi}$, déterministe donc, et notre plan de tranport Π_b entre les mesures l et l' où l'on recherche une grande coïncidence pour ces dernières. En vertu du lemme de recollement, on peut construire un plan de transport $\Pi \in (\mathfrak{E}_1 \times \mathfrak{E}_1 \times \mathfrak{E}_1)$ entre Π_a et Π_b. Cette mesure aura donc pour marginales Π_a, Π_b et Π_c dont on explicite la forme dans la suite. Dans la suite, on note pour toute loi $\tilde{\Pi}$ et pour toute partie mesurable α de $\mathfrak{E}_1$, $\tilde{\Pi}_\alpha(\cdot)$ la loi sachant α engendrée par $\tilde{\Pi}$. La relation déterministe corresondant à une des marginales de ce plan de transport nous permet maintenant de déterminer la forme que prend ce plan de

transport.

Lemme 32. *Soit* $\Pi \in \mathbf{P}(\mathfrak{E}_1^3)$ *tel que*

$$\int_{x_3} \Pi(dx_1, dx_2, dx_3) = \Pi_a(dx_1, dx_2),$$
$$\int_{x_1} \Pi(dx_1, dx_2, dx_3) = \Pi_b(dx_2, dx_3),$$
$$\int_{x_2} \Pi(dx_1, dx_2, dx_3) = \Pi_c(dx_1, dx_3).$$

On a alors

$$\Pi(dx_1, dx_2, dx_3) = \Pi_b(dx_2, dx_3)\mathbb{1}_{\mathbf{\Psi}^{-1}(dx_2)}(dx_1).$$

En particulier

$$\Pi_c(dx_1, dx_3) = \int_{x_2} \Pi(dx_1, dx_2, dx_3) = \Pi_b(\mathbf{\Psi}(dx_1), dx_3).$$

Démonstration. En effet, du fait du caractère déterministe de Π_a on a que $\Pi_a(dx_1, dx_2) = 0$ quand $x_1 \neq \mathbf{\Psi}^{-1}(x_2)$. Dès lors nécessairement,

$$\Pi(dx_1, dx_2, dx_3) = \Pi_{dx_1, dx_2}(dx_3)\mathbb{1}_{\mathbf{\Psi}^{-1}(x_2)}(dx_1)l'(dx_2).$$

En intégrant cette relation selon x_1 on obtient

$$\Pi_b(dx_2, dx_3) = \int_{x_1} \Pi(dx_1, dx_2, dx_3) = \Pi_{\mathbf{\Psi}^{-1}(x_2), x_2}(dx_3)l'(dx_2).$$

Dès lors,

$$\Pi(dx_1, dx_2, dx_3) = \Pi_b(dx_2, dx_3)\mathbb{1}_{\mathbf{\Psi}^{-1}(x_2)}(dx_1).$$

□

Ainsi donc ce recollement nous obtient un réarrangement de la loi l, Π_c c'est à dire une correspondance entre les différents évènements de son support pour lequel la loi réarrangée coïncide au maximum avec l'.

Cette construction est à comparer à la preuve employée plus haut qui consiste via (2.15) à mesurer la distance entre l et l' avant d'en déduire l'existence, via le lemme 23, d'un couplage (x_2, x_3) correspondant aux lois l et l' et tel que x_2, x_3 engendre dans l'espace des phases une contraction des variables aléatoires.

Maintenant que l'on a établi notre plan de transport pour les contrôles on peut se pencher sur l'évolution du processus dans l'espace des phases.

B.2 Plan de transport et contraction dans l'espace des phases

Maintenant que l'on a établi une méthode pour bâtir des plans de transports dans l'espace des forces extérieures, adaptés aux contrôles, on prouve la contraction du processus dans l'espace des phases. On ré-exprime ici le lemme 25 du point de vue des plans de transport. On étudie maintenant les lois des mesures de Dirac δ_{u_0}, $\delta_{u'_0}$ soumises au processus. On souhaite démontrer que le processus est contractant sur les mesures issues de δ_{u_0} et $\delta_{u'_0}$. Cette contraction n'est a priori pas valable pour la distance de Wasserstein, mais pour une fonctionnelle de coût spécifique qu'on s'attache maintenant à construire.

Pour ce faire on distingue deux phénomènes qui contribuent à rendre le processus contractant : primo la dissipativité quand la distance entre les mesures de départ est grande δ_{u_0} et $\delta_{u'_0}$, et secundo la contrôlabilité quand ces dernières sont rapprochées. Fixons désormais pour cette distance un seuil arbitraire $d_0 > 0$ qui distingue ces deux phénomènes.

Cas $||u - u'||_H \geq d_0$: dissipativité du système. Ici la contraction des mesures tient au fait que les normes des solutions décroît et donc que schématiquement, celles-ci se rapprochent de 0 et donc les unes des autres. On a alors le résultat suivant :

Lemme 33 (Mélange dû à la dissipativité)**.** *Il existe $0 < \kappa < 1$ tel que pour tout $d_0 > 0$ on puisse définir une fonctionnelle $c_{d_0^+}$ telle que le coût $C_{d_0^+}$ qu'elle associe au plan de transport $\mathcal{P}^*\delta_{u_0} \bigotimes \mathcal{P}^*\delta_{u'_0}$, vérifie*

$$C_{d_0^+}\left(\mathcal{P}^*\delta_{u_0} \bigotimes \mathcal{P}^*\delta_{u'_0}\right) \leq \kappa C_{d_0^+}(\delta_{u_0}, \delta_{u'_0}).$$

où $C_{d_0^+}(\delta_{u_0}, \delta u'_0)$ est dans toute la suite le coût associé à l'unique plan de transport entre δ_{u_0} et $\delta_{u'_0}$.

Démonstration. On définit la fonctionnelle de coût suivante

$$c_{d_0^+}(u, u') := g(\mathfrak{U}), \quad ||u - u'||_H \geq d_0$$

où, on le rappelle $\mathfrak{U} := \sup(||u||_H, ||u'||_H)$. On étend cette notation à $\mathfrak{U}_j := \sup(||u_j||_H, ||u'_j||_H)$ Dans le cas de la dissipativité, en utilisant l'hypothèse **(H2′)**, on établit que $\mathfrak{U}_1 \leq \frac{\beta}{1-\gamma}$. De ce fait on a pour toute fonctionnelle strictement croissante g :

$$\int_{\mathcal{O}\times\mathcal{O}} g(\mathfrak{U}_1)\mathcal{P}^*\delta_{u_0}(du_1)\mathcal{P}^*\delta_{u'_0}(du'_1) \leq p_{d_0} g(a\mathfrak{U}) + (1 - p_{d_0}) g\left(\frac{\beta}{1-\gamma}\right).$$

On constate qu'ici la principale difficulté à controurner c'est que plutôt d'avoir une relation linéaire entre les distances on a en fait une relation affine avec $(1 - p_{d_0})g\left(\frac{\beta}{1-\gamma}\right)$ comme terme constant. Il s'agit donc de construire g strictement croissante, définie par morceaux

sur les intervalles

$$I_n := \left]a^n \frac{\beta}{1-\gamma}, a^{n-1}\frac{\beta}{1-\gamma}\right], \quad 1 \leq n \leq N \quad \cup_{1\leq n\leq N} I_n \supset \left[d_0, \frac{\beta}{1-\gamma}\right]$$

par $g|_{I_n} = a_n$ telle que :

$$\kappa a_{n-1} \geq p_{d_0} a_n + (1-p_{d_0})a_1 \quad \forall n \geq 2. \tag{B.2}$$

En effet dans ce cas on a pour $\mathfrak{U} \in I_n$

$$p_{d_0} g(a\mathfrak{U}) + (1-p_{d_0}) g\left(\frac{\beta}{1-\gamma}\right) = p_{d_0} a_{n+1} + (1-p_{d_0})a_1 \leq \kappa a_n = \kappa g((U)).$$

Par ailleurs, on fixe

$$a_1 = \frac{5}{2} d_0. \tag{B.3}$$

Construisons g vérifiant (B.2). Pour $n = 2$, on choisit $\kappa > 1 - p_{d_0}$ et $a_2 := a_1 \frac{\kappa - (1-p_{d_0})}{p_{d_0}}$. Ensuite

$$a_n := \frac{\kappa a_{n-1} - (1-p_{d_0})a_1}{p_{d_0}}, \quad n \geq 3,$$

On affirme qu'il existe κ telle que cette suite soit toujours à valeurs positives décroissantes pour $1 \leq n \leq N$. Pour compléter la construction de $c_{d_0^+}$ sur $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$ il convient de prolonger g sur $\left[\frac{\beta}{1-\gamma}, K\right]$ où K est on le rappelle (cf théorème 2) le rayon maximal de $\mathcal{O}$. On prolonge g en une fonction affine telle que $g(K) = 3d_0$ La fonctionnelle g ainsi construite convient alors. □

Cas $||u - u'||_H \leq d_0$: contrôlabilité du système. Ici la contraction des mesures vient de la contrôlabilité du système. Cette dernière implique que plus les états de départ sont proches, plus la probabilité de contrôle et donc de contraction des trajectoires est grande. Ce résultat engendra la contraction en espérance si le coût de transport de notre fonctionnelle pour les cas hors-contrôle n'est pas trop grand ce qui est la raison du choix de (B.3). On a en effet

Lemme 34 (Mélange dû à la contrôlabilité)**.** *Il existe $0 < \kappa < 1$ et $d_0 > 0$ tels que pour tous $(u_0, u_0') \in D_{d_0} := \{(u, u'), u \in X, u' \in H, ||u - u'||_H \leq d_0\}$ il existe un plan de transport $\Pi_-^{u_0,u_0'}$ entre $\mathcal{P}^*\delta_{u_0}$ et $\mathcal{P}^*\delta_{u_0'}$ tel que le coût associé à ce plan par $c_{d_0^-} := ||u-u'||_H$, qu'on baptise $C_{d_0^-}(\Pi_-^{u_0,u_0'})$, vérifie*

$$C_{d_0^-}(\Pi_-^{u_0,u_0'}) \leq \kappa C_{d_0^-}(\delta_{u_0}, \delta_{u_0'}).$$

Démonstration. S dépendant déterministiquement, à valeur initiale connue, de f, le plan de transport Π_c entre l et l engendre naturellement un plan de transport $\Pi_-^{u_0,u_0'}$ entre $\mathcal{P}^*\delta_{u_0}$

et $\mathcal{P}^*\delta_{u_0}$. On a alors

$$C_{d_0^-}(\Pi_-^{u_0,u_0'}) \leq \int_{H\times H} ||y-y'||_{d_0}\Pi_-^{u_0,u_0'}(dy,dy')$$

Ainsi donc en appliquant les lemmes 31 et 32 au contrôle construit dans le lemme 22,

$$C_{d_0^-}(\Pi_-^{u_0,u_0'}) \leq \frac{||u_0-u_0'||_H}{2} + d_0\left(\epsilon + C||u_0-u_0'||_H\left(\frac{1}{2}+\frac{\bar{k}|\mathcal{K}|}{2(1-C||u_0-u_0'||_H)}\right)\right)$$

On choisit maintenant $\epsilon \leq ||u_0-u_0'||_H$ et M_ϵ définis au lemme 22 en conséquence. Comme $||u_0-u_0'||_H \leq d_0$, pour tout $0<\kappa<1$, on peut trouver $d_0>0$ tel que

$$C_{d_0^-}(\Pi_-^{u_0,u_0'}) \leq \kappa||u_0-u_0'||_H,$$

d'où

$$C_{d_0^-}(\Pi_-^{u_0,u_0'}) \leq \kappa C_{d_0^-}(\delta_{u_0},\delta_{u_0'}).$$

□

On a donc établi dans toute cette section que pour tous $u_0, u_0' \in \mathcal{O}$ et pour la fonctionnelle de coût

$$c_{d_0}(u,u') := \begin{cases} c_{d_0^-}(u,u') = ||u-u'||_H, & \text{pour } ||u-u'||_H \leq d_0, \\ c_{d_0^+}(u,u') = g(\sup(||u||_H,||u'||_H)), & \text{pour } ||u-u'||_H \geq d_0, \end{cases}$$

il existe un plan de transport entre $\mathcal{P}^*\delta_{u_0}$ et $\mathcal{P}^*\delta_{u_0'}$, $\Pi_1^{u_0,u_0'}$ tel que le coût associé vérifie

$$C_{d_0}(\Pi_1^{u_0,u_0'}) \leq \kappa C_{d_0}(u_0,u_0').$$

Prouvons maintenant que notre contraction est exponentielle :

Lemme 35. *Il existe un plan de transport $\Pi_k^{u_0,u_0'}$ entre $(\mathcal{P}^*)^k\,\delta_{u_0}$ et $(\mathcal{P}^*)^k\,\delta_{u_0'}$, tel que le coût associé vérifie*

$$C_{d_0}(\Pi_k^{u_0,u_0'}) \leq \kappa^k C_{d_0}(u_0-u_0'). \tag{B.4}$$

Démonstration. On construit par récurrence un plan de transport $\Pi_k^{u_0,u_0'}$ entre $(\mathcal{P}^*)^k\,\delta_{u_0}$ et $(\mathcal{P}^*)^k\,\delta_{u_0'}$, tel que le coût associé vérifie (B.4). Supposons construit un tel plan $\Pi_{k-1}^{u_0,u_0'}$ entre $(\mathcal{P}^*)^{k-1}\,\delta_{u_0}$ et $(\mathcal{P}^*)^{k-1}\,\delta_{u_0'}$. Alors pour toutes les valeurs possibles de (u_{k-1},u_{k-1}'), on construit le plan de transport $\Pi_1^{u_{k-1},u_{k-1}'}$ entre $\mathcal{P}^*\delta_{u_{k-1}}$ et $\mathcal{P}^*\delta_{u_{k-1}'}$ puis on pose

$$\Pi_k^{u,u'} := \int_{\mathcal{O}\times\mathcal{O}} \Pi_1^{u_{k-1},u_{k-1}'}\Pi_{k-1}^{u_0,u_0'}(du_{k-1},du_{k-1}').$$

Le coût associé à ce plan vérifie :

$$C_{d_0}(\Pi_k^{u,u'}) = \int_{\mathcal{O}\times\mathcal{O}} \int_{\mathcal{O}\times\mathcal{O}} c_{d_0}(u_1, u_1')\Pi_1^{u_{k-1},u'_{k-1}}(du_1, du_1')\Pi_{k-1}^{u_0,u_0'}(du_{k-1}, du'_{k-1}),$$

Ainsi a-t-on en vertu de notre construction de la fonctionnelle de coût c_{d_0} :

$$C_{d_0}(\Pi_k^{u,u'}) \leq \int_{\mathcal{O}\times\mathcal{O}} \kappa c_{d_0}(u_{k-1}, u'_{k-1})\Pi_{k-1}^{u_0,u_0'}(du_{k-1}, du'_{k-1}).$$

Aussi d'après l'hypothèse de récurrence a-t-on notre résultat. □

Pour obtenir un résultat de mélange de la forme du théorème 7, il suffit de prouver une relation d'encadrement entre notre fonctionnelle de coût et la distance canonique de H.

Lemme 36. *Pour tout $u, u' \in \mathcal{O}$, on a*

$$\frac{d_0}{K}||u - u'||_H \leq c_{d_0}(u, u') \leq 3||u - u'||_H$$

Démonstration. Cet encadrement est évident pour le cas de $c_{d_0^-}$. Concentrons nous sur le cas de $c_{d_0^+}$: on considère donc que $||u - u'||_H \geq d_0$; alors

$$c_{d_0^+}(u_0, u_0') \leq 3d_0 \leq 3||u - u'||_H.$$

De plus, en vertu de la bornitude de $\mathfrak{U}$, et de ce que $||u - u'||_H \geq d_0$, on a

$$\frac{d_0}{K}||u - u'||_H \leq c_{d_0^+}(u, u').$$

□

Ainsi donc obtient t-on par ce chemin la proposition 7.

Bibliographie

[1] P-M. Boulvard. *Mixing for the primitive equations under bounded non-degenerate noise.* arXiv preprint. arXiv:2010.03939.

[2] J. Bricmont, A. Kupiainen et R. Lefevere. "Exponential mixing of the 2D stochastic Navier-Stokes dynamics". In : *Comm. Math. Phys.* 230.1 (2002), p. 87-132.

[3] C. Cao et E. S. Titi. "Global well-posedness of the three-dimensional viscous primitive equations of large scale ocean and atmosphere dynamics". In : *Ann. of Math. (2)* 166.1 (2007), p. 245-267.

[4] H. Cartan. *Calcul différentiel.* Hermann, 1967.

[5] I. Chueshov. "A squeezing property and its applications to a description of long-time behaviour in the three-dimensional viscous primitive equations". In : *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 144.4 (2014), p. 711-729.

[6] I. Chueshov et S. Kuksin. "Random kick-forced 3D Navier-Stokes equations in a thin domain". In : *Arch. Ration. Mech. Anal.* 188.1 (2008), p. 117-153.

[7] R. Dautray et J-L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques.* Masson, 1985.

[8] A. Debussche. "Ergodicity results for the stochastic Navier-Stokes equations: an introduction". In : *Topics in mathematical fluid mechanics.* Lectures notes in Mathematics 2073. Springer Heidelberg, 2013, p. 23-108.

[9] A. Debussche, N. Glatt-Holtz, R. Temam et M. Ziane. "Global existence and regularity for the 3D stochastic primitive equations of the ocean and atmosphere with multiplicative white noise". In : *Nonlinearity* 25.7 (2012), p. 2093-2118.

[10] F. Flandoli et B. Maslowski. "Ergodicity of the 2-D Navier-Stokes equation under random perturbations". In : *Comm. Math. Phys.* 172.1 (1995), p. 119-141.

[11] T. E. Ghoul, I. Slim, L. Quyuan et E.S. Titi. *On the effect of rotation on the life-span of an analytic solution of the inviscid primitive equation.* arXiv preprint. arXiv:2010.0174.

[12] N. Glatt-Holtz, I. Kukavica, V. Vicol et M. Ziane. "Existence and regularity of invariant measures for the three dimensional stochastic primitive equations". In : *J. Math. Phys.* 55.5 (2014), p. 051504, 34.

[13] F. Guillén-González, N. Masmoudi et M. A. Rodríguez-Bellido. "Anisotropic estimates and strong solutions of the primitive equations". In : *Differential Integral Equations* 14.11 (2001), p. 1381-1408.

[14] F. Guillén-González et M. A. Rodríguez-Bellido. "On the strong solutions of the primitive equations in 2D domains". In : *Nonlinear Anal.* 50.5, Ser. A: Theory Methods (2002), p. 621-646.

[15] B. Guo et D. Huang. "3D stochastic primitive equations of the large-scale ocean: global well-posedness and attractors". In : *Comm. Math. Phys.* 286.2 (2009), p. 697-723.

[16] Martin Hairer et Jonathan C. Mattingly. "Ergodicity of the 2D Navier-Stokes equations with degenerate stochastic forcing". In : *Ann. of Math. (2)* 164.3 (2006), p. 993-1032.

[17] C. Hu, R. Temam et M. Ziane. "The primitive equations on the large scale ocean under the small depth hypothesis". In : *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 9.1 (2003), p. 97-131.

[18] N. Ju. "On H^2 solutions and z-weak solutions of the 3D primitive equations". In : *Indiana Univ. Math. J.* 66.3 (2017), p. 973-996.

[19] N. Ju. "The global attractor for the solutions to the 3D viscous primitive equations". In : *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 17.1 (2007), p. 159-179.

[20] N. Ju et R. Temam. "Finite dimensions of the global attractor for 3D primitive equations with viscosity". In : *J. Nonlinear Sci.* 25.1 (2015), p. 131-155.

[21] Yu. Yu. Klevtsova. "On the integral properties of the stationary measures for a stochastic system of the Lorenz model for a baroclinic atmosphere". In : *Mat. Sb.* 204.9 (2013).

[22] Georgij M. Kobelkov. "Existence of a solution 'in the large' for the 3D large-scale ocean dynamics equations". In : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 343.4 (2006), p. 283-286. ISSN : 1631-073X. DOI : `10.1016/j.crma.2006.04.020`. URL : `https://doi.org/10.1016/j.crma.2006.04.020`.

[23] S. Kuksin. *Lectures on the mathematics of 2D statistical dynamics.*

[24] S. Kuksin, V. Nersesyan et A. Shirikyan. "Exponential mixing for a class of dissipative PDEs with bounded degenerate noise". In : *Geom. Funct. Anal.* 30.1 (2020), p. 126-187.

[25] S. Kuksin et A. Shirikyan. "Coupling approach to white-forced nonlinear PDEs". In : *J. Math. Pures Appl. (9)* 81.6 (2002), p. 567-602.

[26] S. Kuksin et A. Shirikyan. *Mathematics of 2D Turbulence.* Cambridge University Press, 2012.

[27] S. Kuksin et A. Shirikyan. "Stochastic dissipative PDEs and Gibbs measures". In : *Comm. Math. Phys.* 213.2 (2000), p. 291-330.

[28] S. Kuksin et H. Zhang. "Exponential mixing for dissipative PDEs with bounded non-degenerate noise". In : *Stochastic Process. Appl.* 130.8 (2020), p. 4721-4745.

[29] J. W. Lamperti. *Probability.* John Wiley et sons, New-York, 1996.

[30] J-L. Lions et E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications ,volume 1.* Dunod, 1968.

[31] J-L. Lions, R. Temam et S. H. Wang. "New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications". In : *Nonlinearity* 5.2 (1992), p. 237-288.

[32] J-L. Lions, R. Temam et S. H. Wang. "On the equations of the large-scale ocean". In : *Nonlinearity* 5.5 (1992), p. 1007-1053.

[33] V. Nersesyan, G. Peng et P-M. Boulvard. *Controllability and ergodicity of 3D primitive equations driven by a finite-dimensional force.* arXiv preprint. arXiv:2010.05976.

[34] M. Petcu. "On the three-dimensional primitive equations". In : *Adv. Differential Equations* 11.11 (2006), p. 1201-1226.

[35] J. Pöschel et E. Trubowitz. *Inverse spectral theory.* Academic press, 1987.

[36] I. Slim, L. Quyuan et E.S. Titi. *Finite time blow-up and ill-posedness in Sobolev spaces of the inviscid primitive equation with rotation.* arXiv preprint. arXiv:2009.0401.

[37] C. Villani. *Optimal transport: old and new.* Springer, 2009.

[38] E. Weinan, J. C. Mattingly et Ya. Sinai. "Gibbsian dynamics and ergodicity for the stochastically forced Navier-Stokes equation". In : *Comm. Math. Phys.* 224.1 (2001), p. 83-106.

[39] V. Zeitlin. *Geophysical fluid dynamics: understanding (almost) everything with rotating shallow water models.* Oxford University Press, 2018.